

К. БИНС, П. ЛАУРЕНСОН

АНАЛИЗ И РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Перевод с английского
И. И. Талалова



«ЭНЕРГИЯ»

МОСКВА 1970

6П2.1

Б 62

УДК 621.3.013+537.212

Бинс К. и Лауренсон П.

Анализ и расчет электрических и магнитных полей.
Пер. с англ., М., «Энергия», 1970.

376 стр. с илл.

В книге изложены в обобщенном и систематизированном виде аналитические и численные методы определения статических и квазистатических электрических и магнитных полей. Рассмотрены методы непосредственного определения полей: метод зеркальных отображений, способы решения уравнений Лапласа и Пуассона; большое место отведено перспективному методу конформных преобразований. Подробно описаны численные методы расчета полей (методы сеток): релаксационный и итерационный, а также дано понятие о статистическом методе (метод Монте-Карло). Приводятся сравнение различных методов и их критическая оценка, ограничена область применения каждого из методов.

Книга может быть использована в качестве учебного пособия студентами старших курсов электротехнических вузов и будет очень полезна инженерам, занимающимся расчетом электрических и магнитных полей в электрических машинах, аппаратах и других устройствах, а также научным работникам, специализирующимся в этой области.

3-3-8
138-70

6П2.1

K. J. Binns, P. J. Lawrenson

Analysis and computation of electric and magnetic field problems.
Pergamon Press, Oxford, 1963.

Бинс К., Лауренсон П.

Анализ и расчет электрических и магнитных полей

Редактор А. В. Иванов-Смоленский

Технический редактор Г. С. Юдаева

Корректор Н. В. Лобанова

Сдано в набор 2/II 1970 г.

Формат 84×108¹/₃₂

Усл. печ. л. 19,74

Тираж 10 000 экз.

Подписано и печати 19/V 1970 г.

Бумага типографская № 1

Уч.-изд. л. 20,41

Зак. 1069

Издательство «Энергия». Москва, Ж-114, Шлюзовая наб., 10.

Московская типография № 10 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Шлюзовая наб., 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В оригинальной отечественной и переводной литературе имеется достаточно много книг по теории и расчету электрических, магнитных и электромагнитных полей, однако они либо носят учебный характер и не рассматривают многих практически важных задач, либо слишком трудны для инженеров, занимающихся расчетами конкретных полей.

Предлагаемая вниманию читателей книга отличается от известных нам книг по теории электромагнитного поля тем, что она как раз отвечает уровню математической подготовки и практическим потребностям большой группы инженерно-научных работников, студентов старших курсов, аспирантов и преподавателей, получивших образование в технических вузах. Она является весьма ценным в методическом отношении учебным пособием, в котором ее авторам удается исподволь подвести читателя к пониманию современных методов аналитического исследования электрических и магнитных полей применительно к электрическим машинам и аппаратам. Особое внимание уделено применению метода конформных преобразований, и, нужно отдать должное авторам, начиная с первой страницы книги, они систематически готовят читателя к пониманию этого трудного для усвоения метода, делая его доступным для использования в практической работе.

Не ограничиваясь изложением самого метода, авторы применяют его к расчету полей в области паза и зазора электрической машины, собрав в книге решения важных задач, которые до сих пор имелись лишь в журнальных статьях или книгах, сделавшихся библиографической редкостью (например, решение задачи о поле в области паза с током имеется в книге К. А. Круга издания 1931 г.).

Книга имеет сравнительно небольшой объем (по сравнению с другими пособиями по теории электромаг-

нитного поля). Это удалось авторам не за счет чрезмерного лаконизма изложения, которым теперь страдают многие книги и который препятствует усвоению материала, а за счет умелого отбора задач и ограничения типов исследуемых полей двухмерными магнитоэлектростатическими и электростатическими полями. С этой же целью из книги исключены многие традиционные задачи, практическое значение которых в электромеханике невелико.

К числу положительных качеств книги относится то, что в ней указаны и достоинства, и недостатки описываемых аналитических и численных методов, обрисована возможная область их применения и даны необходимые ссылки на литературу, в которой имеется развитие этих методов и применение их к решению других задач.

Читатель, внимательно изучивший книгу и знакомый с некоторыми необходимыми началами специальных разделов математики (которые читаются студентам старших курсов), легко усвоит материал книги и сможет самостоятельно применить предложенные методы к решению других полевых задач, которые встретятся в его инженерной или исследовательской работе.

Председатель научно-методического совета
по электромеханике при МВ и ССО СССР

профессор, доктор техн. наук Д. Э. Брускин

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

Эта книга возникла в результате попытки подробно осветить в одном пособии как аналитические, так и численные методы определения двухмерных статических, а также квазистатических электрических и магнитных полей. При работе над нею преследовались две главные цели: сравнить и противопоставить различные методы и по возможности установить границы областей применения каждого из них, принимая во внимание современную тенденцию к использованию вычислительных машин. Можно надеяться, что благодаря этому читатель сможет достаточно обоснованно выбрать и применить метод, наиболее подходящий для решения любой конкретной задачи.

Книга предназначена в основном инженерам и физикам, поскольку многим из них, занимаются ли они исследованием, усовершенствованием и проектированием или хотят расширить представление о своем предмете, приходится постоянно сталкиваться с проблемами, которые могут быть решены только в результате анализа электрических и магнитных полей. В связи с этим на всех этапах изложения мы стремились выделить физический смысл математических операций и там, где была возможность, выбирали примеры, представляющие практический интерес. В большинстве из них получены выражения для важнейших физических величин и приведены точно рассчитанные картины поля, для того чтобы читатель составил общее качественное представление о задаче. Следует отметить, что хотя книга касается электромагнитных проблем, рассматриваемые поля находятся в прямой аналогии с рядом других важных типов полей, например тепловым потоком в проводящей среде и течением невязкой жидкости; поэтому описанные методы могут быть с одинаковым успехом применены и при анализе таких полей. Соответствие между аналогичными величинами показано во введении.

Предварительная математическая подготовка читателя не должна включать ознакомления с какими-либо специальными вопросами, кроме решения обыкновенных дифференциальных уравнений, применения простых рядов Фурье и элементарной теории функций комплексного переменного. Более сложные разделы, такие, как решение дифференциальных уравнений с частными производными, использование двойных рядов Фурье и эллиптических функций, полностью разобраны в тексте. Таким образом, подготовка студентов-электриков в конце обучения достаточна для того, чтобы разобраться в содержании книги и использовать его, не обращаясь к каким-либо другим источникам.

Основное содержание книги разделено на четыре части, расположенные в такой последовательности, что в случае, если излагаемый в первой части материал знаком читателю, изучение может быть начато с любой из трех других частей. Часть 1 состоит из краткой вводной главы и главы, посвященной основам теории электрического и магнитного полей. Ее назначение состоит в том, чтобы обобщить и изложить в сжатом виде теоретические предпосылки, необходимые для более полного представления методов анализа, рассматриваемых в этой книге далее, а также уяснить себе вывод на основе анализа поля таких понятий, как сила, индуктивность и емкость, представляющих физический интерес. При отсутствии этого материала, очевидно, потребовалось бы или прерывать изложение различных методов, или принуждать читателя обращаться к другим источникам.

Часть 2 касается метода зеркальных отображений и методов непосредственного решения уравнений поля; по содержанию она напоминает хорошо известную книгу Хэга [Л. 22], которая давно не переиздавалась. Кроме того, в ней рассмотрен более широкий круг источников поля и приведено решение уравнения Лапласа в декартовых координатах. В главе, где описан метод зеркальных отображений, содержится строгий вывод основных решений, исходя из рассмотрения поверхностных зарядов; они представлены в виде функций комплексного переменного, которые записываются в компактном виде и удобны для расчетов.

Часть 3, наиболее объемная, посвящена методам преобразований и, по-видимому, представляет собой наиболее детальное, обобщенное изложение вопроса. От-

дельные из наиболее важных, но обычно опускаемых разделов включают: линейные источники и диполи, которым ранее уделялось мало внимания при анализе электрических и магнитных полей, преобразование областей, *внешних* по отношению к конечным многоугольным границам, а также действенный метод, с помощью которого, применяя численное интегрирование функций комплексного переменного, можно рассматривать границы гораздо более сложной, чем обычно, конфигурации.

Часть 4 касается чрезвычайно перспективных методов конечных разностей; они могут быть использованы для решения любой задачи, описанной в этой книге. Рассмотрены все типы конфигураций границ и граничных условий, которые вводятся на основе математических выводов, а не по недостаточно обоснованным соображениям аналогии, как это обычно принято.

Глава 11 посвящена релаксационному и итерационному методам, а в гл. 12 кратко описан статистический метод Монте-Карло. Релаксационный метод хорошо известен, однако попытка такого подробного изложения его применительно к расчету электрических и магнитных полей сделана впервые. Развитие итерационных и статистических методов, тесно связанное с прогрессом вычислительных машин, в последние 10 лет шло очень быстрыми темпами и, за исключением специальных статей, об этих методах до сих пор написано очень мало.

В конце каждой главы приведен список относящейся к ее содержанию литературы, который разделен на две части: в первой приведены источники, непосредственно касающиеся рассмотренных частных вопросов, а во второй — источники, содержащие дополнительный, связанный с текстом материал. Кроме того, приведена обширная библиография в конце книги. Ссылки на литературу, приведенную в конце глав, имеют номер главы в отличие от ссылок на библиографию в конце книги. Приложения включают некоторые упрощенные разложения в ряд для обработки двойных рядов Фурье, разложения в ряд некоторых эллиптических функций и, наконец, подробную таблицу уравнений преобразования. В книге использована рационализированная система единиц МКС.

Авторы

Глава первая

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Типы рассматриваемых полей. Все статические электрические и магнитные поля описываются уравнением Пуассона или его частной формой — уравнением Лапласа. Уравнение Пуассона справедливо внутри областей с распределенными токами или зарядами, а уравнение Лапласа относится ко всем другим областям поля. В гл. 2 охарактеризованы свойства полей, определяемых этими уравнениями, а вся остальная часть книги посвящена различным методам их решения.

Хотя уравнения Пуассона и Лапласа описывают упомянутые выше статические поля, они также определяют с высокой степенью точности поля, изменяющиеся во времени, если скорость их изменения достаточно мала. Критерий такой возможности сводится к требованию, чтобы частота не была очень высока и можно было пренебречь токами смещения, запаздыванием в распространении электромагнитных волн, а также влиянием вихревых токов, которые могут возникнуть за ограничивающими исследуемое поле поверхностями. Этому критерию удовлетворяют очень многие поля вплоть до наивысших частот, встречающихся в установках сильного тока. Такие изменяющиеся во времени поля поддаются расчету изложенными в книге методами и составляют большинство рассмотренных полей.

Все физические поля являются, конечно, трехмерными, однако во многих случаях, представляющих практический интерес, точные аналитические решения для трехмерных полей не могут быть получены, а нахождение численных решений нередко связано с чрезмерно

большим объемом вычислений. Однако приближенные решения с вполне достаточной точностью могут быть найдены путем сведения задачи к двухмерной, т. е. без учета изменения поля в одном направлении. В результате такого подхода для очень многих задач удается найти аналитическое решение, а в других случаях значительно сокращается трудоемкость численных расчетов. Два примера двухмерного анализа относятся к определению магнитных полей во вращающихся электрических машинах. Во-первых, распределение главного поля в воздушном зазоре может быть найдено с незначительной погрешностью при рассмотрении поля в поперечном сечении, перпендикулярном оси вращения (без учета изменения поля по длине машины). Во-вторых, поле в торцевой зоне машины можно определить, хотя и значительно менее точно, чем в предыдущем случае, исходя из анализа поля в аксиальной плоскости (пренебрегая изменением поля в тангенциальном направлении).

Методы решения. В общем случае решить уравнение Пуассона труднее, чем уравнение Лапласа. Однако поле в пуассоновых областях часто менее важно, поэтому во многих случаях допустима замена действительной пуассоновой области эквивалентной нитью тока; все поле при этом приводится к лапласовому. Так, например, влияние распределенного тока во внешней по отношению к нему области нередко удается представить путем введения одной или нескольких нитей тока с бесконечно малым поперечным сечением. Частный случай такой замены встречается при расчете линий электропередачи, когда поле вне провода можно принять за поле тока, сосредоточенного в центральной нити сечения. Решениям уравнения Лапласа посвящена большая часть книги, однако гл. 5 и 11 касаются решения более общего уравнения.

Все методы решения подразделяются на две категории: аналитические и численные. В первой категории решением является алгебраическое уравнение, в которое подставляют значения параметров, определяющих поле. Во второй категории решение имеет вид совокупности численных значений описывающей поле функции для одной частной совокупности значений параметров. Все аналитические методы широко использовались на протяжении по крайней мере 60 лет, однако численные методы завоевали признание только в течение последних

примерно 30 лет. Современное развитие численных методов в значительной мере обусловлено прогрессом быстроедействующих цифровых вычислительных машин, которые открыли возможность получить решение ряда задач стандартными методами с высокой степенью точности. Без использования вычислительных машин такие расчеты были бы чрезвычайно трудоемкими или невозможными.

В тех случаях, когда для определения частного поля можно применить как аналитические, так и численные методы, выбор наиболее подходящего метода иногда затруднен. Достоинство аналитических методов заключается в возможности получить общее решение, которое позволяет составить полное представление о влиянии различных параметров. В противоположность этому при использовании численных методов необходимо выполнить расчет для каждой совокупности значений параметров и их недостаток состоит в том, что общая картина часто может быть получена только ценой большого количества расчетов. Однако в некоторых задачах, где можно применить аналитические методы, решение с их помощью может быть настолько сложным, а расчеты настолько трудоемкими, что численные методы окажутся более простыми и быстрыми.

Поля-аналоги. Во многих областях техники и физики встречаются явления, представляющие собой прямые аналоги процессов в электрическом и магнитном поле. К ним относятся перенос тепла в проводящей среде и течение невязкой жидкости. Так, например, закономерность распределения температуры между двумя границами, к которым приложена постоянная разность температур, или распределения функции потока жидкости, протекающей между этими границами, по форме идентична зависимости, описывающей распределение напряжения между этими же границами, если к ним приложена постоянная разность электрических потенциалов. Таким образом, решение частной задачи одной физической природы непосредственно применимо к задачам другой физической природы и методы, рассмотренные в этой книге применительно к электрическим и магнитным полям, с одинаковым успехом могут быть использованы для других упомянутых выше полей. В табл. 1-1 показана аналогия, существующая между величинами в различных скалярных потенциальных полях. Кроме

Аналогия между величинами в скалярных потенциальных полях

Параметр	Вид поля					
	электростатическое	электрического тока	магнитостатическое	тепловое	поле потока жидкости	гравитационное
Потенциал	Потенциал V	Потенциал V	Потенциал Ω	Температура	Потенциал скорости	Потенциал Ньютона
Градиент	Напряженность электрического поля E	Напряженность электрического поля E	Напряженность магнитного поля H	Градиент температуры	Скорость	Гравитационная сила
Постоянная, характеризующая свойства среды	Диэлектрическая проницаемость ϵ	Электрическая проводимость σ	Магнитная проницаемость μ	Теплопроводность	Плотность	Величина, обратная гравитационной постоянной
Плотность потока	Электрическое смещение D	Плотность тока J	Магнитная индукция B	Плотность теплового потока	Удельный расход	—
Интенсивность источника	Плотность заряда ρ_e	Плотность тока J	Плотность магнитной массы ρ_m	Плотность источника тепла	Плотность потока при истечении	Плотность
Проводимость поля	Емкость C	Электрическая проводимость G	Магнитная проводимость Λ	Тепловая проводимость	—	—

полей, приведенных в табл. 1-1, в книге описаны магнитные поля в областях, где протекают токи, причем интересно отметить, что этот тип поля аналогичен, например, турбулентному потоку жидкости.

Глава вторая

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Эта глава содержит краткий обзор основ теории электрического и магнитного полей. Материал изложен в объеме, который необходим для создания теоретической основы, требуемой для ясного представления описанных в книге методов анализа. Вначале отправной точкой для развития теории являются точечные источники поля, а затем внимание сосредоточено главным образом на линейных источниках: заряде, полюсе и токе, которые создают рассмотренные в этой книге двухмерные поля.

2-1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

2-1-1. Векторы электростатического поля

При изучении электрических полей первостепенную важность имеет понятие об электрическом заряде. Заряд, величина которого равна q , создает электрический поток, равный q единиц, поэтому результирующий электрический поток, выходящий из любой замкнутой поверхности, охватывающей заряд q , равен q единиц.

Электрическое смещение (плотность электрического потока) в данной точке представляет собой вектор \mathbf{D} , совпадающий по направлению с потоком. Если взять сферическую поверхность с радиусом r и центром в месте расположения точечного заряда, то по условиям симметрии поток расходуется в радиальном направлении от центра и величина электрического смещения в любой точке поверхности равна $q/4\pi r^2$, т. е.

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (2-1)$$

По опытным данным сила взаимодействия между двумя электрическими зарядами изменяется в зависимости от среды, в которой они находятся. В частности, сила, действующая на единичный заряд, расположенный

в точке, удаленной на расстояние r от заряда q , пропорциональна величине q/r^2 , т. е. модулю вектора \mathbf{D} в этой точке, обусловленного зарядом q . Таким образом, если для определения силы, действующей на единичный заряд, ввести вектор \mathbf{E} , называемый напряженностью электрического поля, то \mathbf{E} для данной среды будет пропорционально \mathbf{D} и соотношение между этими величинами может быть представлено в виде:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad (2-2)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость пустоты, а ϵ — значение диэлектрической проницаемости окружающей среды в долях ϵ_0 .

В результате объединения уравнений (2-1) и (2-2) получим зависимость

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad (2-3)$$

которая в связи с характером изменения E в функции r называется обратноквадратичным законом.

Рассмотрим теперь заряд, распределенный в объеме. Для некоторой точки значение выходящего потока, отнесенного к единице объема, при уменьшении объема до нуля называется дивергенцией вектора \mathbf{D} и представляет собой скаляр. Таким образом, дивергенция вектора \mathbf{D} в точке внутри объема равна плотности заряда ρ_c , т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_c. \quad (2-4)$$

Поле линейного заряда. Если заряд распределен равномерно вдоль бесконечной прямой линии, то направление выходящего из него потока в любой точке перпендикулярно этой линии, а значение потока на единицу длины линии равно линейной плотности заряда q . На расстоянии r от заряда значение электрического смещения равно:

$$D = \frac{q}{2\pi r}, \quad (2-5)$$

откуда

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (2-6)$$

Следовательно, напряженность поля изменяется обратно пропорционально расстоянию от линейного заряда.

Для этого двумерного поля, как и для всех подобных полей, величину потока можно представить числом силовых линий. Направление этих линий в любой точке

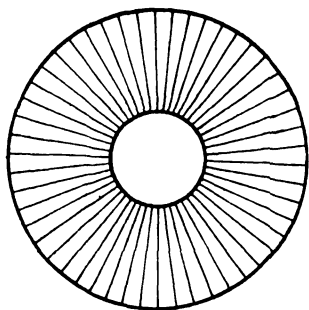


Рис. 2-1.

совпадает с вектором электрического смещения, а концентрация линий служит непосредственной мерой его значения в данной точке. Простой случай распределения силовых линий можно проследить на примере поля двух заряженных проводящих концентрических цилиндров (рис. 2-1). По условиям симметрии нетрудно догадаться, что поток между двумя цилиндрами проходит в

радиальном направлении и, поскольку потоки, пересекающие каждую из поверхностей, одинаковы, значения электрического смещения на поверхностях цилиндров обратно пропорциональны длинам окружностей цилиндров, а следовательно, и их радиусам.

2-1-2. Электрический потенциал

Скалярная величина, называемая электрическим потенциалом, V в некоторой точке представляет собой работу, совершаемую при переносе единичного заряда из бесконечности в эту точку. Далее, работа dV , расходуемая при перемещении единичного заряда на бесконечно малое расстояние dl вдоль силовой линии, определяется выражением

$$dV = -E dl, \quad (2-7)$$

поскольку E — действующая на единичный заряд сила, которая совпадает по направлению с dl

Отрицательный знак говорит о том, что при перемещении в положительном направлении силы E потенциал уменьшается. Уравнение (2-7) может быть переписано в виде:

$$E = -\frac{dV}{dl}. \quad (2-8)$$

Отсюда следует, что напряженность электрического поля равна градиенту потенциала в направлении напряженности поля. Это соотношение может быть также выражено векторным уравнением:

$$E = - \text{grad } V, \quad (2-9)$$

где символ «grad» является оператором, который превращает потенциал в его градиент.

Работа, совершаемая при перемещении заряда между двумя точками в электростатическом поле, не зависит от выбранного пути.

Определим работу, расходуемую при переносе единичного заряда между точками P и Q по контуру C , направление которого в любой точке составляет угол θ с направлением напряженности поля (рис. 2-2). Составляющая напряженности поля по направлению пути равна $E \cos \theta$, и если обозначить через ds элементарный отрезок пути, то расходуемая работа W (при перемещении по выбранному пути) будет равна:

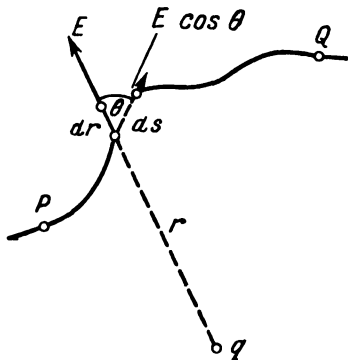


Рис. 2-2.

$$W = - \int_C E \cos \theta ds. \quad (2-10)$$

Однако

$$dl = \cos \theta ds \quad (2-11)$$

и, подставив ds из (2-11) в (2-10), получим:

$$W = - \int_C E dl, \quad (2-12)$$

т. е. работа зависит от напряженности поля и расстояния, пройденного в направлении, совпадающем с ее направлением, но не от конкретного выбранного пути. Значение потенциала в некоторой точке зависит только от ее положения в пространстве, т. е. является функцией

точки, и работа, совершаемая при перемещении по любому замкнутому пути с возвращением в исходную точку, равна нулю. Поле, обладающее таким свойством, называется консервативным или потенциальным. Следовательно, (2-12) можно представить следующим образом:

$$V_P - V_Q = - \int_C E dl. \quad (2-13)$$

Это выражение используется в дальнейшем.

Для поля линейного заряда, поскольку сила E направлена по радиусу от центра, разность потенциалов между точками P и Q равна:

$$V_P - V_Q = - \int \frac{q dr}{2\pi\epsilon_0\epsilon r}, \quad (2-14)$$

а разность потенциалов между точками с радиусами r_1 и r_2

$$\frac{-q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \left| \ln r \right|_{r_1}^{r_2} = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Ввиду того что потенциал является функцией точки, можно провести линию, соединяющую точки с одинаковыми значениями потенциала. Такая линия называется эквипотенциалью, и перемещение заряда вдоль этой линии происходит без затраты работы. Поскольку работа не расходуется при переносе заряда в направлении, перпендикулярном напряженности поля, эквипотенциали перпендикулярны силовым линиям.

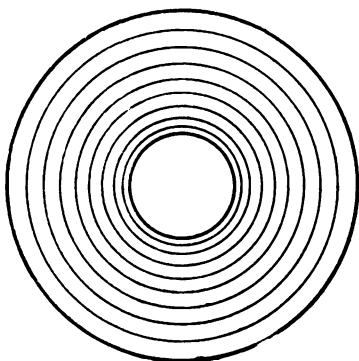


Рис. 2-3.

В качестве примера рассмотрим поле между двумя заряженными круговыми концентричными границами.

В качестве примера рассмотрим поле между двумя заряженными круговыми концентричными границами.

В связи с тем, что границы являются проводящими (и, следовательно, эквипотенциальными), а также ввиду круговой симметрии поля эквипотенциальными будут

окружности (рис. 2-3). Силовые линии и эквипотенциали показаны вместе на рис. 2-4. Они образуют сетку ортогональных линий, которая называется *картиной поля*. Такие картины очень полезны для создания общего представления о полях; они дают не только качественные, но и приближенные количественные сведения о распределении потока. Картины поля широко используются в книге для создания у читателей ясного представления о различных рассматриваемых задачах.

2-1-3. Потенциальная функция и функция потока

Для упрощения анализа вводят потенциальную функцию ψ , которая определяется из условия, чтобы ее изменение между двумя любыми точками было пропорционально изменению потенциала между этими точками. Значение функции ψ в любой точке относительно некоторого начала отсчета (потенциала) служит непосредственной мерой значения потенциала в данной точке и, кроме того, линия, соединяющая точки с одинаковыми значениями потенциальной функции, является эквипотенциалью.

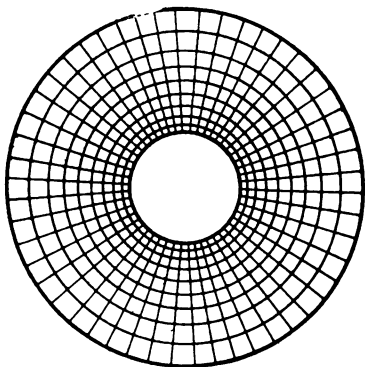


Рис. 2-4.

Рассмотрим поле двух заряженных проводящих цилиндров (рис. 2-4). Если принять значения потенциала $\psi=0$ на одном цилиндре и $\psi=1$ на другом, то между цилиндрами будет существовать единичная разность потенциалов. В области между цилиндрами можно провести эквипотенциали, соответствующие условию $\psi = \text{const}$, для значений ψ от 0 до 1. Так, например, значению $\psi=0,1$ отвечает линия, соединяющая точки, значения потенциала которых отличаются от потенциала внутреннего цилиндра на $1/10$ разности потенциалов между цилиндрами.

Аналогично вводится функция потока ϕ , определяемая таким образом, чтобы условию $\phi = \text{const}$ соответ-

ствовала силовая линия, а между двумя линиями $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + n$ был заключен поток n единиц.

Из сформулированных определений следует, что разности функции потока и потенциальной функции соответствуют разностям потоков и потенциалов (нулевые значения обеих функций выбираются произвольно). Линии, соединяющие точки с одинаковыми значениями потенциальной функции и функции потока, проводят таким образом, чтобы ψ и φ изменялись через равные интервалы. Они образуют картину поля, в которой области, ограниченные пересекающимися кривыми, являются криволинейными квадратами. В случае равномерного поля эти квадраты превращаются в настоящие.

Поскольку потенциальная функция и функция потока ортогональны, одна функция может быть получена из другой с помощью зависимости

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi=\text{const}} = -1 / \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{const}}. \quad (2-15)$$

Однако соотношения, непосредственно связывающие функции ψ и φ , выводятся наиболее просто не из приведенного уравнения или эквивалентных ему в других координатных системах, а на основе теории функции комплексного переменного (см. § 2-8).

Для того чтобы привести пример функции потока и потенциальной функции, вновь обратимся к полю линейного заряда. Ранее было показано [см. уравнение (2-12)], что в общем случае разность потенциалов между концами контура C равна $\int_C E dl$, следовательно,

$$\psi = K_1 \int_C E dl + K_2,$$

где постоянные K_1 и K_2 выбираются произвольно.

Для линейного заряда $E = q/2\pi\epsilon_0\epsilon r$, откуда

$$\psi = K_1 \int_C \frac{q dr}{2\pi\epsilon_0\epsilon r} + K_2 = \frac{K_1 q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln r + K_2.$$

Выбрав для простоты $K_1 = 1$ и $K_2 = 0$, получим:

$$\psi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln r. \quad (2-16)$$

Функцию потока нетрудно найти, заметив, что распределение выходящего из заряда потока равномерно

во всех радиальных направлениях. Поток сектора пропорционален его углу, поэтому функция потока изменяется в зависимости от θ линейно и имеет вид:

$$\varphi = K_3\theta + K_4.$$

Результирующий поток, выходящий из заряда, равен q ; следовательно, изменению θ на величину 2π соответствует изменение функции φ на величину q . Таким образом, $K_3 = q/2\pi$ и при выборе $K_4 = 0$ можно представить функцию потока следующим образом:

$$\varphi = \frac{q\theta}{2\pi}. \quad (2-17)$$

Функция потока и потенциальная функция для поля двух заряженных концентричных круговых проводников имеют такой же вид, как и для поля линейного заряда; в том и другом случаях эквипотенциалами являются окружности, а силовыми линиями — радиусы.

2-1-4. Емкость

Емкость между двумя проводящими поверхностями определяется как отношение результирующего потока, общего для обеих поверхностей, к разности потенциалов между ними. Поэтому ее удобно выразить через функцию потока и потенциальную функцию. Если ψ_1 и ψ_2 — значения потенциальной функции двух проводников, а φ' и φ'' — значения функции потока для линий, ограничивающих взаимный поток, то емкость C определяется выражением

$$C = \frac{\varphi' - \varphi''}{\psi_1 - \psi_2}. \quad (2-18)$$

Это соотношение справедливо даже в том случае, когда число цилиндров более 2. Если имеются только два проводника (один из них может находиться в бесконечности), то поток между ними равен заряду q на каждом из них и емкость равна:

$$C = \frac{q}{\psi_1 - \psi_2}.$$

В случае двух заряженных концентричных цилиндров, как было показано выше, изменение потенциальной функции характеризуется зависимостью

$$\psi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln r;$$

отсюда, если границы имеют радиусы r_1 и r_2 , разность значений потенциальной функции между ними

$$\psi_1 - \psi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln r_1 - \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln r_2.$$

Следовательно, емкость между цилиндрами равна:

$$C = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln r_1/r_2}. \quad (2-19)$$

2-1-5. Уравнения Лапласа и Пуассона

На основе изложенной теории нетрудно вывести уравнение Пуассона и его частный случай — уравнение Лапласа. Эти уравнения описывают распределение потока и потенциала для всех полей, рассмотренных в этой книге, и ее остальные главы посвящены решению именно этих уравнений. Вначале уравнения выведены в виде, не зависящем от конкретной координатной системы, с использованием понятий о дивергенции и градиенте, а затем они представлены в декартовых координатах, исходя из рассмотрения потока, выходящего из элементарного параллелепипеда.

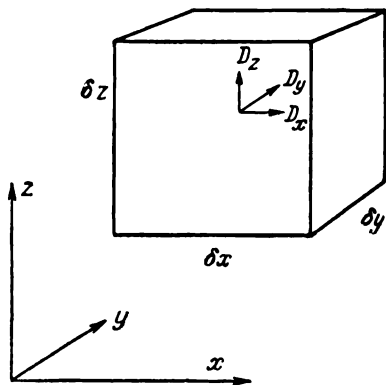


Рис. 2-5.

В области с равномерно распределенной плотностью заряда ρ_c дивергенция потока в любой точке равна ρ_c . Ее можно определить с помощью \mathbf{E} , объединив уравнения (2-2) и (2-4):

$$\operatorname{div}(\epsilon_0\epsilon\mathbf{E}) = \rho_c.$$

Согласно уравнению (2-9) эту зависимость можно выразить через потенциал:

$$\operatorname{div}(-\epsilon_0\epsilon \operatorname{grad} V) = \rho_c,$$

или

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = -\rho_c/\epsilon_0\epsilon. \quad (2-20)$$

Для области, не содержащей заряда,

$$\rho_c = 0$$

и

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = 0. \quad (2-21)$$

Уравнение (2-20) представляет собой уравнение Пуассона, а уравнение (2-21) является уравнением Лапласа. Далее эти уравнения выражены в декартовых координатах, исходя из рассмотрения бесконечно малого параллелепипеда, стороны которого δx , δy и δz параллельны осям x , y и z (рис. 2-5). Допустим, что вектор \mathbf{D} с составляющими D_x , D_y и D_z определяет электрическое смещение в центре параллелепипеда, и рассмотрим две стороны элементарного объема, перпендикулярные оси x . Поток, входящий в параллелепипед через левую сторону, равен:

$$\left(D_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial D_x}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z,$$

а поток, выходящий через его правую сторону,

$$\left(D_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial D_x}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z.$$

Таким образом, результирующий поток, выходящий из параллелепипеда в направлении оси x , равен:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z.$$

Аналогичные выражения могут быть получены для потоков в направлениях осей y и z , поэтому результирующий поток, выходящий из элемента объема, равен:

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z.$$

Однако он равен полному заряду, заключенному внутри объема, $\rho_c \delta x \delta y \delta z$, поэтому

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_c. \quad (2-22)$$

Далее, если E_x , E_y и E_z являются составляющими напряженности поля, то

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 \epsilon E_x; \\ D_y &= \epsilon_0 \epsilon E_y; \\ D_z &= \epsilon_0 \epsilon E_z. \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

В результате подстановки соотношений (2-23) в уравнение (2-22) получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (2-24)$$

но поскольку напряженность поля равна градиенту потенциала согласно (2-9):

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}; \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

после введения зависимостей (2-25) в (2-24) найдем:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_c}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (2-26)$$

Это соотношение представляет собой уравнение Пуассона в декартовых координатах, которое при $\rho_c = 0$ превращается в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2-27)$$

В двумерных задачах изменение потенциала в одном направлении равно нулю, в связи с чем $\partial^2 V / \partial z^2 = 0$ и уравнение Пуассона для двумерного поля принимает вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_c}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (2-28)$$

В цилиндрических координатах это уравнение запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -\frac{\rho_c}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (2-29)$$

Все приведенные уравнения выражены через потенциал V , однако они, очевидно, справедливы и для потенциальной функции ψ . Отсюда в декартовых координатах

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{K_1 \rho_c}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (2-30)$$

Учитывая свойство ортогональности функции потока и потенциальной функции, можно показать (см. § 2-8),

что функция потока также удовлетворяет уравнению Пуассона. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - \frac{K_2 \rho_0}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (2-31)$$

Все полученные уравнения поля выведены на основе принципа сохранения потока и, таким образом, отражают этот физический принцип.

2-1-6. Принцип наложения

Результирующий поток, входящий или выходящий из поверхности, внутри которой произвольно расположено n зарядов, является алгебраической суммой потоков, обусловленных каждым из зарядов в отдельности. Кроме того, поскольку работа является скалярной величиной, ее расход при переносе единичного заряда в поле нескольких зарядов равен алгебраической сумме отдельных расходов работы при перемещении против сил поля каждого из зарядов. Таким образом, функции потока и потенциальные функции полей зарядов, взятых в отдельности, при нахождении результирующих значений этих функций в некоторой точке могут складываться, как скаляры; иначе говоря, к ним может быть применен принцип наложения.

2-1-7. Электрическое поле токов

Если приложить электрическое поле к проводящей среде, то в ней возникнет движение электрических зарядов, т. е. появится электрический ток. Такой ток аналогичен электрическому потоку в диэлектрической среде, причем плотность электрического тока соответствует электрическому смещению.

Так, например, в случае поля линейного заряда q , расположенного в однородной проводящей среде, величина напряженности поля определяется уравнением (2-6):

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Это поле создает электрический ток с плотностью \mathbf{J} , величина которой зависит от *электрической проводимости* среды σ и определяется зависимостью

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2-32)$$

Вектор \mathbf{J} совпадает по направлению с \mathbf{E} . Из уравнений (2-6) и (2-32) следует:

$$J = \frac{\sigma q}{2\pi\epsilon_0 \epsilon r}. \quad (2-33)$$

Часто ток удобно определять через разность потенциалов между границами; тогда проводимость среды между этими границами будет равна отношению тока к разности потенциалов. В произвольной точке значение вытекающего тока на единицу объема определяется как $\text{div } \mathbf{J}$ и равно нулю, если объем не становится заряженным. Поэтому в установившемся режиме

$$\text{div } \mathbf{J} = 0. \quad (2-34)$$

Принимая во внимание соотношение между полем электрического тока и электростатическим полем, нетрудно заметить, что поле тока также может быть определено с помощью функции потока и потенциальной функции, которые удовлетворяют уравнению Лапласа¹, однако поскольку дивергенция \mathbf{J} всегда равна нулю, уравнение Пуассона теряет силу.

2-2. МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

В качестве источников магнитных полей могут быть приняты полюсы или токи, однако вне зависимости от этого они определяются с помощью одних и тех же векторов поля.

2-2-1. Поле полюсов

При намагничивании ферромагнитной среды в ней возникают магнитные диполи, которые вызывают появление дополнительных полей, накладывающихся на поля, создающие намагничивание. При расчетах обычно полагают, что магнитная среда обладает бесконечно большой магнитной проницаемостью, и принимают, что на границе магнитный поток непрерывен, а напряженность поля изменяется скачком.

Для того чтобы подойти к определению векторов магнитного поля, рассмотрим поле уединенного магнит-

¹ Аналогия между этим типом поля и другими полями используется в электролитической ванне [Л. 2-1] для нахождения распределения поля в задачах, где непосредственное измерение затруднительно или невозможно.

ного полюса. Точечный полюс с магнитной массой m создает m единиц потока, поэтому величина *магнитной индукции* (плотности потока) B на расстоянии r от него равна:

$$B = \frac{m}{4\pi r^2}. \quad (2-35)$$

Напряженность магнитного поля H определяется из условия, чтобы на полюс с единичной магнитной массой, внесенной в поле, действовала сила, равная H единиц, в направлении вектора магнитной индукции. Отношение B к H зависит от способности среды намагничиваться и называется магнитной проницаемостью среды. μ_0 представляет собой *магнитную проницаемость пустоты*, а μ является магнитной проницаемостью среды, выраженной в долях μ_0 . Таким образом,

$$B = \mu\mu_0 H. \quad (2-36)$$

Из соотношений (2-35) и (2-36) видно, что векторы B и H аналогичны векторам электрического поля D и E . Поэтому между полем магнитных полюсов и электростатическим полем существует прямая аналогия. Следовательно, *скалярный магнитный потенциал* Ω в произвольной точке, определяемый как работа, совершаемая при переносе полюса с единичной магнитной массой из бесконечности в данную точку, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Omega) = -\rho_m/\mu\mu_0,$$

где ρ_m — *плотность магнитной массы*.

Отсюда следует, что

$$\operatorname{div} B = \rho_m$$

и

$$H = -\operatorname{grad} \Omega. \quad (2-37)$$

Приведенный анализ предполагал существование свободных полюсов, однако в действительности магнитные полюсы существуют только попарно, как диполи, и результирующий поток, пересекающий любую поверхность, равен нулю. Следовательно,

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (2-38)$$

и

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Omega) = 0. \quad (2-39)$$

Таким образом, магнитный потенциал Ω удовлетворяет уравнению Лапласа.

2-2-2. Магнитное поле линейных токов

Вектор напряженности поля, создаваемого линейным током, в любой точке направлен по касательной к окружности, центр которой находится в точке, где расположен ток. Поэтому работа, совершаемая при перемещении магнитного полюса 1 раз вокруг тока по любому замкнутому пути, постоянна¹. Работа определяется как произведение силы и пройденного расстояния, которое для пути по окружности с радиусом r и центром в точке, где расположен ток, равно $2\pi r$. Поэтому величина напряженности поля, равная силе, действующей на полюс с единичной магнитной массой, равна

$$H = \frac{i}{2\pi r}, \quad (2-40)$$

Магнитная индукция определяется выражением

$$B = \frac{\mu\mu_0 i}{2\pi r}, \quad (2-41)$$

и поскольку она действует также в тангенциальном направлении, линии магнитной индукции линейного тока являются окружностями с центром в точке, где расположен проводник.

Функция потока. Из уравнения (2-41) нетрудно заметить, что поток, проходящий между двумя точками, определяемыми радиусами r_1 и r_2 , равен:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu\mu_0 i}{2\pi r} dr = \frac{\mu\mu_0 i}{2\pi} \left| \ln r \right|_{r_1}^{r_2}.$$

Функция потока пропорциональна этой величине и обычно записывается в форме, не зависящей от $\mu\mu_0 i$:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \ln r. \quad (2-42)$$

Сравнение уравнений (2-16) и (2-42) показывает, что функция потока в случае линейного тока изменяет-

¹ Единичная магнитная масса определяется из условия, чтобы работа, совершаемая при перемещении ее по замкнутому пути, охватывающему ток i , была равна i , дж.

ся в зависимости от радиуса точно так же, как потенциальная функция в случае линейного полюса или заряда.

Магнитный потенциал линейного тока. Направление градиента потенциала совпадает с вектором \mathbf{B} , поэтому эквипотенциалами являются радиусы. Следовательно, благодаря симметрии поля при перемещении вокруг тока потенциал точки возрастает прямо пропорционально изменению ее углового положения θ относительно тока. Приращение потенциала, соответствующее одному полному обороту, равно i , в связи с чем изменение потенциала при перемещении на угол θ равно $\theta i/2\pi$. Поскольку изменение потенциала при повороте происходит непрерывно, его величина в некоторой точке является многозначной функцией.

Потенциальная функция. Можно определить однозначную потенциальную функцию при изменении θ в пределах $0 \leq \theta \leq 2\pi$ для определенного направления вращения (против часовой стрелки). Тогда

$$\psi = \frac{\theta}{2\pi} i. \quad (2-43)$$

При введенных ограничениях потенциальную функцию поля нескольких линейных токов можно найти путем наложения (см. § 10-2). Следует отметить, что потенциальная функция, хотя она и является до некоторой степени искусственной, все-таки удовлетворяет уравнению Лапласа в соответствии с принципом сохранения потока (см. § 2-1-5). Сравнение уравнений (2-17) и (2-43) показывает, что характер изменения потенциальной функции линейного тока соответствует характеру изменения функции потока линейного полюса или заряда.

2-2-3. Магнитное поле распределенных токов

Понятие о роторе. Работа, совершаемая при перемещении полюса с единичной магнитной массой 1 раз по пути, охватывающему ток i , равна i единиц, поэтому

$$\oint H_1 dl = i. \quad (2-44)$$

Значение линейного интеграла \mathbf{H} , отнесенное к единице охватываемой контуром обхода площади, при бесконечном уменьшении длины контура является

проекцией *ротора* \mathbf{H} на направление тока. Следовательно, (2-44) можно переписать в виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2-45)$$

где \mathbf{J} — плотность тока в точке, к которой стягивается контур.

Для линейного тока значение $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ равно нулю повсюду, за исключением точки, в которой расположен ток, где оно возрастет до бесконечности (поскольку плотность тока здесь бесконечно велика). Важно иметь в виду, что для поля магнитных полюсов значение $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ всегда равно нулю, так как оно отлично от нуля только в тех областях, где протекает ток. Для электрического поля ротор напряженности поля также равен нулю. Как и магнитное поле полюсов, оно, конечно, является консервативным.

Однако определение работы, совершаемой при перемещении полюса 1 раз по замкнутому контуру в области, где протекает ток, указывает на важное различие с полями, ротор которых равен нулю. Величина работы зависит от охватываемого тока, но поскольку между двумя точками возможно бесконечно большое число путей, она может иметь сколько угодно значений. Следовательно, для поля внутри областей, обтекаемых током, понятие о скалярном потенциале теряет смысл. В таких полях линии, перпендикулярные магнитным линиям, называются *линиями нулевой работы* (так как перемещение полюса вдоль этих линий происходит без расхода работы), а точка в пределах области, где эти линии сходятся, называется *нейтральной*.

Векторный потенциал. Для того чтобы облегчить определение поля внутри областей, обтекаемых токами, вводят *векторный магнитный потенциал* \mathbf{A} , который определяется из условия, чтобы его интеграл по любому замкнутому пути был равен полному потоку, охватываемому этим путем. Если площадь охватываемой путем поверхности, стремится к нулю, то предельное значение интеграла, отнесенное к единице площади, $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ равно магнитной индукции \mathbf{B} . Следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (2-46)$$

Вектор \mathbf{A} лежит в плоскости, перпендикулярной направлению вектора \mathbf{B} . Уравнение (2-46) определяет

только производную \mathbf{A} , а для полного определения векторного потенциала необходимо также знать его дивергенцию. Для стационарного поля замкнутых токов¹

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (2-47)$$

Для любого рассматриваемого двухмерного поля вектор \mathbf{A} расположен в плоскости, перпендикулярной направлению потока, и следовательно, параллелен направлению тока. Отсюда, поскольку изменение \mathbf{A} между двумя магнитными линиями равно потоку между этими линиями на единицу длины в направлении тока, \mathbf{A} обладает свойствами функции потока, а линии, соединяющие точки с одинаковыми значениями \mathbf{A} , являются магнитными линиями.

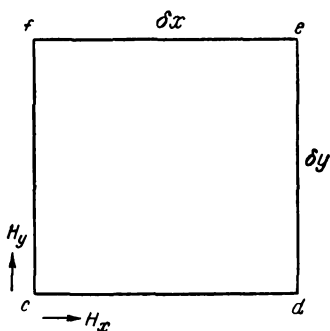


Рис. 2-6.

Уравнение поля. Теперь с помощью \mathbf{A} выведем уравнения, описывающие магнитное поле распределенных токов, вначале в векторной форме. Из уравнений (2-36) и (2-45)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{J}; \quad (2-48)$$

отсюда в соответствии с определением \mathbf{A} по (2-46)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mu\mu_0 \mathbf{J}.$$

Далее, в любом пособии по векторному анализу показано, что

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{A})$$

и согласно (2-47)

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{A}) = -\mu\mu_0 \mathbf{J}. \quad (2-49)$$

Это означает, что составляющие векторного потенциала удовлетворяют уравнению Пуассона или при $\mathbf{J}=0$ уравнению Лапласа.

¹ См. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, ГИТТЛ, 1957, стр. 218. (Прим. ред.).

В декартовых координатах (2-49) для двухмерного случая можно получить из рассмотрения поля внутри бесконечно малого прямоугольника со сторонами δx и δy (рис. 2-6). Если H_x — составляющая напряженности поля по оси x в углу c , то составляющие напряженности в других углах будут:

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \delta x \text{ в углу } d;$$

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H_x}{\partial y} \delta y \text{ в углу } e;$$

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} \delta y \text{ в углу } f.$$

Аналогичные выражения можно получить для составляющих напряженности поля по оси y , исходя из значения составляющей H_y в углу c . Среднее значение составляющей напряженности поля в пределах одной стороны находится как среднее из ее значений на концах этой стороны. Так, например, среднее значение H_x в пределах стороны de равно:

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y} \delta y.$$

Далее, работа, совершаемая при перемещении полюса с единичной магнитной массой по замкнутому контуру $cdefc$, определяется как алгебраическая сумма произведений составляющей поля по направлению каждой стороны и ее длины. Эта работа равна полному току, охватываемому контуром [см. (2-45)], в связи с чем

$$\begin{aligned} & \left(H_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x} \delta x \right) \delta x + \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial y} \delta y \right) \delta y - \\ & - \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x} \delta x \right) \delta x - \\ & - \left(H_y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial y} \delta y \right) \delta y = J_z \delta x \delta y, \end{aligned}$$

где J_z — плотность тока в направлении оси z .

Это уравнение приводится к виду:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z. \quad (2-50)$$

Выражение в левой части уравнения (2-50) представляет собой линейный интеграл $H dl$ по замкнутому контуру, отнесенный к единице охватываемой им площади, т. е. является ротором \mathbf{H} в декартовых координатах. Аналогичным образом согласно (2-46) могут быть определены составляющие магнитной индукции:

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

и

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Однако поскольку поле не изменяется в направлении оси z , члены $\partial A_x / \partial z$ и $\partial A_y / \partial z$ равны нулю и, таким образом,

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (2-51)$$

и

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}. \quad (2-52)$$

Учитывая, что $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, после подстановки (2-51) и (2-52) в (2-50) получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = \mu_0 J_z$$

и окончательно

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu_0 J_z. \quad (2-53)$$

Это уравнение описывает двухмерное магнитное поле тока, протекающего в направлении оси z , с помощью векторного потенциала. Положив в нем $J_z = 0$, получим уравнение Лапласа, определяющее поле в области, где ток не протекает. Поскольку A обладает свойствами функции потока, (2-53) можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\mu_0 J_z. \quad (2-54)$$

Следует отметить, что хотя A введено для упрощения анализа полей распределенных токов, его нередко используют и для полей линейных токов.

Поле круглого проводника с током. Для того чтобы продемонстрировать применение вектор-

ного потенциала на простом примере, рассмотрим поле бесконечно длинного прямолинейного проводника с круглым сечением, через который протекает ток с равномерно распределенной плотностью J . Поле имеет круговую симметрию, поэтому векторы поля не изменяются при перемещении по окружности с постоянным радиусом r и центром на оси проводника. Следовательно, его можно определить, не прибегая к \mathbf{A} , что и сделано вначале.

При перемещении полюса с единичной магнитной массой по окружности, концентричной с проводником, совершаемая работа равна охватываемому току. Поэтому, если окружность расположена внутри проводника, то напряженность поля H_1 в точках, лежащих на ней, определяется из выражения

$$2\pi r H_1 = \pi r^2 J. \quad (2-55)$$

Таким образом,

$$H_1 = \frac{Jr}{2}. \quad (2-56)$$

Если же окружность проходит вне проводника, то здесь напряженность поля H_2 находится из соотношения

$$2\pi r H_2 = \pi a^2 J,$$

где a — радиус проводника;

$$H_2 = \frac{Ja^2}{2r}. \quad (2-57)$$

Нетрудно заметить, что напряженность поля внутри проводника изменяется пропорционально радиусу, а вне проводника она обратно пропорциональна радиусу, как и в случае линейного тока, расположенного в центре проводника. Для нахождения функции векторного потенциала, описывающей это поле, рассмотрим прямоугольный контур в аксиальной плоскости, две стороны которого параллельны направлению тока и удалены соответственно на расстояния r и $r + \delta r$ от оси проводника, а расстояние между двумя другими сторонами равно единице длины. По определению линейный интеграл \mathbf{A} при однократном обходе этого контура равен сцепленному с ним потоку. Векторный потенциал при неизменном радиусе остается постоянным, в связи с чем его приращение при изменении радиуса от r до

$r + \delta r$ равно $B \delta r$. Внутри проводника, где $A = A_1$, магнитная индукция согласно (2-56) равна $\frac{1}{2} \mu \mu_0 J r$ и

$$dA_1 = \frac{1}{2} \mu \mu_0 J r \cdot dr. \quad (2-58)$$

Отсюда после интегрирования получим:

$$A_1 = \frac{1}{4} \mu \mu_0 J r^2 + C_1.$$

Поскольку (2-46) определяет только изменения векторного потенциала, начало отсчета A_1 может быть выбрано произвольно и для удобства постоянную C_1 можно принять равной нулю. Тогда

$$A_1 = \frac{1}{4} \mu \mu_0 J r^2. \quad (2-59)$$

Вне проводника, где $A = A_2$, магнитная индукция согласно (2-57) равна $\mu_0 J a^2 / 2r$, поэтому

$$dA_2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{J a^2}{r} dr$$

и в результате интегрирования получим:

$$A_2 = \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \ln r + C_2. \quad (2-60)$$

Далее, поскольку на границе проводника векторный потенциал непрерывен, при $r = a$ должно быть $A_1 = A_2$. Отсюда

$$\frac{1}{4} \mu \mu_0 J a^2 = \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \ln a + C_2 \quad (2-61)$$

и

$$C_2 = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 (\mu - 2 \ln a).$$

Подстановка C_2 в (2-60) дает:

$$A_2 = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \left[\mu + 2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right]. \quad (2-62)$$

В этом простом примере границей является магнитная линия и выражение для напряженности поля нетрудно получить. Однако в общем случае вначале необходимо с помощью векторного потенциала найти решение, удовлетворяющее уравнению Пуассона и граничным условиям (см. § 5-1).

2-2-4. Индуктивность

Понятие о индуктивности наиболее полезно при анализе влияния магнитных полей токов, величины которых изменяются во времени, на процессы в электрических цепях. Хотя для создания полного представления о ней потребовалось бы ввести индуцируемую э. д. с., а это выходит за рамки книги¹, ниже приведено математическое определение и показано, как его использовать.

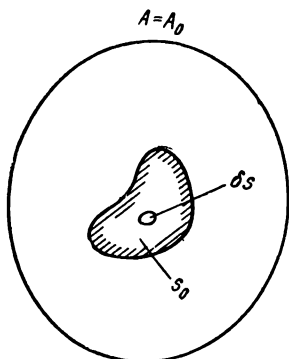


Рис. 2-7.

Рассмотрим проводник с произвольным сечением, как показано на рис. 2-7, находящийся в магнитном поле, которое описывает векторная потенциальная функция A . Поле может создаваться током в самом проводнике и ему соответствует так называемая *полная* индуктивность или токами в других проводниках и ему отвечает *взаимная* индуктивность. Обозначим через δS произвольный элемент площади проводника и через A значение векторного потенциала поля в месте расположения этого элемента.

Тогда индуктивность L , обусловленная всем сцепленным с проводником потоком, но ограниченным силовой линией $A=A_0$, определится выражением

$$L = \frac{1}{IS_0} \int (A_0 - A) dS, \quad (2-63)$$

где I — ток, создающий поле, а S_0 — полная площадь поперечного сечения проводника, по которой производится интегрирование.

Для прямоугольного проводника интегрирование удобно выполнять в декартовых координатах при выборе направлений осей параллельно сторонам проводника. Тогда

$$L = \frac{1}{IS_0} \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} (A_0 - A) dx dy, \quad (2-64)$$

¹ Более полно вопрос изложен в [Л. 7 и 12].

где x_1 и x_2 — предельные точки сечения проводника в направлении оси x , а y_1 и y_2 — предельные точки по оси y .

При аналитическом определении индуктивности достаточно найти функцию A поля, подставить ее в (2-63) и произвести интегрирование. Если же поле определено в виде семейства магнитных линий, то сечение проводника делится на конечное число элементарных площадок, ограниченных этими линиями, затем находится среднее значение A для каждой из них и суммируются величины $(A_0 - A) \delta S$ для всех площадок.

[В § 5-6-3 уравнение (2-64) использовано для аналитического определения индуктивности прямоугольного проводника в пазу.]

2-3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Если поле имеет области с различающимися электрическими или магнитными свойствами, то для описания полей в разных областях часто используются различные функции. Установление соотношения между

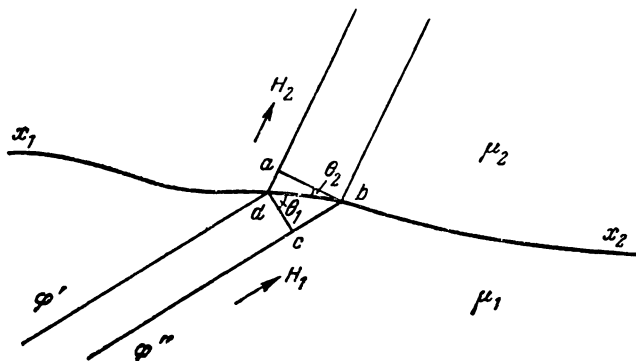


Рис. 2-8.

этим функциями на границах не представляет труда. Здесь это сделано для поверхности раздела между двумя областями в магнитном поле. Полностью аналогичные уравнения существуют и для электрических полей.

Рассмотрим элемент длины bd линии раздела между двумя областями с относительными значениями магнит-

ной проницаемости μ_1 и μ_2 . Поток, проходящий из одной области в другую, и две параллельные магнитные линии, проведенные через точки b и d , на границе изменяют свои направления (рис. 2-8). Линии ab и cd перпендикулярны соответственно линиям ϕ' и ϕ'' . Далее, если только плотность тока на границе сама не равна бесконечности (этот случай рассмотрен ниже), то работа, совершаемая при перемещении полюса с единичной магнитной массой по замкнутому типовому бесконечно малому контуру $abcd$, равна нулю. Но ab и cd эквипотенциали, поэтому работа при переходе из точки b в точку c и из точки d в точку a равна нулю. Таким образом, если H_1 и H_2 — значения напряженности поля по ту и другую сторону линии раздела, то

$$-H_1(bc) + H_2(da) = 0, \quad (2-65)$$

где отрицательный знак соответствует перемещению в направлении навстречу H_1 .

Если обозначить через θ_1 и θ_2 углы, образуемые отрезками dc и ab с отрезком db , то получим

$$da = db \sin \theta_2$$

и

$$bc = db \sin \theta_1.$$

В результате подстановки этих соотношений в (2-65) получим:

$$H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2. \quad (2-66)$$

Следовательно, в отсутствие поверхностного тока тангенциальные составляющие \mathbf{H} по ту и другую стороны линии раздела одинаковы. Далее, из условия непрерывности потока, если обозначить через B_1 и B_2 значения индукции по ту и другую сторону границы, получим:

$$B_1(dc) = B_2(ad),$$

откуда

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2. \quad (2-67)$$

Таким образом, нормальные составляющие магнитной индукции по ту и другую стороны линии раздела одинаковы.

Объединив (2-66) и (2-67), найдем:

$$\frac{H_1}{B_1} \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{H_2}{B_2} \operatorname{tg} \theta_2$$

и

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (2-68)$$

Если магнитная проницаемость по одну сторону границы бесконечно велика, то по другую сторону ее θ равно нулю, т. е. поток входит в поверхность с бесконечно большой магнитной проницаемостью (эквипотенциальную) под прямым углом.

Если вдоль граничной поверхности распределен ток с бесконечно большой плотностью (например, в случае поверхностного тока), то нормальные составляющие индукции по ту и другую сторону границы остаются одинаковыми, но тангенциальные составляющие напряженности поля различаются на величину, равную значению поверхностной плотности тока S , т. е.

$$-H_1 \sin \theta_1 + H_2 \sin \theta_2 = S. \quad (2-69)$$

В любой частной задаче соотношения, связывающие значения векторов поля по ту и другую стороны границы согласно (2-67) и (2-66) или (2-69), выражают через соответствующие производные функций ψ и φ (или A), описывающих поля. При использовании потенциальных функций ψ_1 и ψ_2 уравнения (2-66) и (2-67) принимают вид:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \frac{\partial \psi_2}{\partial s}, \quad (2-70)$$

где s — расстояние, измеряемое по касательной к поверхности;

$$\mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n}, \quad (2-71)$$

где n — расстояние, измеряемое по нормали к поверхности.

Если же взять функцию потока φ , то получим:

$$\frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (2-72)$$

и

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}. \quad (2-73)$$

Эти уравнения записывают в системе координат, выбранной при решении частной задачи.

Если по ту или другую сторону поверхности раздела находится область с распределенным током, то приведенные выше граничные условия удобно выразить с помощью векторного потенциала. Тогда, поскольку нормальные составляющие магнитной индукции по обе стороны границы одинаковы, согласно (2-51) должны быть равны производные векторной потенциальной функции по направлению касательной. Кроме того, как было отмечено при рассмотрении примера для случая цилиндрического проводника, векторная потенциальная функция при переходе границы должна оставаться непрерывной.

2-4. СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Применение теории функций комплексного переменного к анализу полей позволяет найти простое решение многих задач, которые трудно или вообще невозможно решить другими методами. Вещественная и мнимая части любой непрерывной *регулярной*¹ функции комплексного переменного называются *сопряженными функциями*. Обе они, как известно, являются решениями уравнения Лапласа. Далее, функция потока и потенциальная функция любого поля представляют собой сопряженные функции, и их можно объединить в одну функцию комплексного переменного, упростив анализ.

2-4-1. Уравнение Лапласа

Возьмем комплексную переменную z , определяемую выражением

$$z = x + jy. \quad (2-74)$$

Допустим, что комплексная переменная

$$t = u + jv \quad (2-75)$$

является непрерывной регулярной функцией z , т. е.

$$t = F(z). \quad (2-76)$$

¹ Непрерывная однозначная функция $t = u + jv = F(z)$; $z = x + jy$ регулярна, если существуют частные производные du/dx , dv/dx , du/dy , dv/dy , которые непрерывны и удовлетворяют условиям Коши — Римана (см. § 2-4-2). Такая функция комплексного переменного называется также *аналитической функцией*.

Найдем частную производную функции t по x :

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial F(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

но

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1,$$

поэтому

$$\frac{\partial t}{\partial x} = F'(z). \quad (2-77)$$

Продифференцировав полученное выражение еще раз по x , получим:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} F'(z) = \frac{\partial F'(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = F''(z). \quad (2-78)$$

Далее найдем частную производную функции t по y :

$$\frac{\partial t}{\partial y} = F'(z) \frac{\partial z}{\partial y},$$

но

$$\frac{\partial z}{\partial y} = j,$$

следовательно

$$\frac{\partial t}{\partial y} = jF'(z). \quad (2-79)$$

Продифференцировав найденную зависимость снова по y , найдем:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} jF'(z) = jF''(z) \frac{\partial z}{\partial y}$$

и

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = -F''(z). \quad (2-80)$$

Наконец, объединение уравнений (2-78) и (2-80)* дает:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0. \quad (2-81)$$

* При этом подразумевается, что функции $F'(z)$ и $F''(z)$ однозначны, т. е. $F(z)$ — регулярная функция.

Таким образом, всякая регулярная функция комплексного переменного удовлетворяет условию (2-81), в котором нетрудно узнать уравнение Лапласа.

Уравнение (2-81) можно представить в виде двух уравнений — для вещественной и мнимой частей функции t , учитывая, что дифференцирование уравнения (2-75) дает:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + j \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

и

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + j \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2-82)$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (2-83)$$

Из этих уравнений следует, что уравнению Лапласа удовлетворяет не только любая регулярная функция комплексного переменного, но и ее вещественная и мнимая части.

2-4-2. Условия Коши—Римана

Обратимся снова к уравнению (2-75). В результате дифференцирования по x найдем:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}$$

и, объединив полученное выражение с (2-77), получим:

$$F'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2-84)$$

Аналогичным образом согласно (2-75) и (2-79)

$$jF'(z) = \frac{\partial u}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2-85)$$

Далее, исключим из (2-84) и (2-85) $F'(z)^*$

$$j \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2-86)$$

* См. предыдущую сноску.

и, поскольку вещественные и мнимые части в этом уравнении должны быть равны, найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2-87)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2-88)$$

Это условия Коши—Римана, которым удовлетворяют вещественная и мнимая части всякой регулярной функции комплексного переменного.

2-4-3. Функция потока и потенциальная функция как сопряженные функции

Постоянное значение t определяет в плоскости z две кривые $u(x, y) = \text{const}$ и $v(x, y) = \text{const}$ и, поскольку t может принимать сколько угодно значений, эти уравнения описывают два семейства кривых. Допустим, что $u = u_0$ и $v = v_0$ определяют по одной кривой из каждого семейства и рассмотрим их пересечение в точке $z = z_0$. Если обратиться вначале к кривой $u = u_0$, то угол ее наклона определится производной dy/dx . Учитывая, что при изменениях x и y величина u остается постоянной, можно написать:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y = 0,$$

или при переходе к пределам

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{z_0} = \left(\frac{-\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} \right)_{z_0}. \quad (2-89)$$

Аналогичным образом угол наклона кривой $v = v_0$ определяется выражением

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{z_0} = \left(\frac{-\partial v / \partial x}{\partial v / \partial y} \right)_{z_0}. \quad (2-90)$$

Произведение тангенсов углов наклона кривых из уравнений (2-89) и (2-90)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \middle/ \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{z_0} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \middle/ \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{z_0}$$

согласно условиям Коши—Римана, определяемым уравнениями (2-87) и (2-88), равно -1 . Следовательно, две кривые пересекаются под прямым углом, в связи с чем

семейства кривых, соответствующие постоянным значениям сопряженных функций, взаимно ортогональны.

Ввиду того что сопряженные функции являются решениями уравнения Лапласа и ортогональными функциями, их можно использовать для представления функций потока и потенциальных функций. Рассмотрим функцию потока и потенциальную функцию, описывающие поле в плоскости (x, y) , и положим

$$\varphi = f_1(x, y) = f_1(z)$$

и

$$\psi = f_2(x, y) = f_2(z).$$

Далее, поскольку эти функции могут быть представлены как сопряженные, их можно объединить в одну функцию комплексного переменного $w(z)$, где

$$w(z) = f_1(z) + jf_2(z).$$

Функция w называется *комплексной потенциальной функцией*; она играет большую роль при решении задачи поля методами теории функций комплексного переменного. Эту функцию можно выразить через φ и ψ следующим образом:

$$w = \varphi + j\psi. \quad (2-91)$$

Следует иметь в виду, что все введенные выше величины являются простыми числами, не имеющими размерности. Однако при решении многих частных задач удобно ввести масштабный коэффициент с таким расчетом, чтобы значения φ или ψ давали непосредственно величину потока или разности потенциалов. Отметим, что в случае необходимости можно произвести взаимную перестановку φ и ψ в уравнении (2-91).

Как указывалось ранее (см. § 2-3), любую из функций φ или ψ можно определить через другую функцию. Очевидно, эти функции, как сопряженные, связаны условиями Коши—Римана, согласно которым соотношения имеют вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2-92)$$

и

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2-93)$$

Выражения (2-92) и (2-93) получены из определения поля в декартовых координатах, однако аналогичные зависимости можно получить и в других координатных системах. Так, например, в круговых цилиндрических координатах эти соотношения могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (2-94)$$

и

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \quad (2-95)$$

2-4-4. Простые примеры применения сопряженных функций

В качестве примера применения сопряженных функций и комплексной потенциальной функции рассмотрим два поля, которые были выше определены с помощью чисто вещественных функций.

Заряженные концентрические цилиндры. Как следует из (2-16), для поля между заряженными концентрическими цилиндрами потенциальная функция определяется выражением

$$\psi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln r, \quad (2-96)$$

а функция потока

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \theta. \quad (2-97)$$

Для того чтобы функции φ и ψ могли быть объединены в одну комплексную потенциальную функцию w , необходимо согласовать их масштабные коэффициенты путем умножения одной из них на постоянную. В данном случае удобно умножить потенциальную функцию на величину $\epsilon_0\epsilon$, в результате чего получим:

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \ln r. \quad (2-98)$$

Теперь комплексная потенциальная функция может быть представлена после взаимной перестановки φ и ψ в уравнении (2-91) в виде:

$$w = \psi + j\varphi = \frac{q}{2\pi} (\ln r + j\theta), \quad (2-99)$$

или, если ввести комплексную переменную $t = re^{j\theta}$,

$$\omega = \frac{q}{2\pi} \ln t. \quad (2-100)$$

Полученное выражение определяет поле двух заряженных concentрических цилиндров (или линейного заряда) с центром в начале координат плоскости t . При подстановке в него координат какой-либо точки в плоскости t получим значения функции потока и потенциальной функции в этой точке в масштабе, зависящем от вида уравнения (2-100). Это уравнение дает значения потока непосредственно в системе единиц МКС, однако для того чтобы получить ответ в относительных единицах, удобно представить его следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln t. \quad (2-101)$$

Для построения картины поля это уравнение можно переписать в виде:

$$t = e^{2\pi(\psi + j\varphi)} \quad (2-102)$$

и подставлять в него значения ψ и φ .

Поле линейного тока. Для того чтобы показать, каким образом можно получить функцию потока или потенциальную функцию, если известна другая функция, рассмотрим поле линейного тока с использованием функций комплексного переменного. Согласно уравнению (2-42) функция потока определяется выражением

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \ln r. \quad (2-103)$$

Продифференцировав его по r , получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r}.$$

Далее, ψ и φ связаны уравнениями (2-94) и (2-95), и подстановка значения $\partial\varphi/\partial r$ в первое из них даст:

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Таким образом, выполнив интегрирование и отбросив произвольную постоянную, придем к выражению

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \theta, \quad (2-104)$$

которое аналогично уравнению (2-43). Функции ϕ и ψ можно, конечно, объединить в одну функцию:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln t, \quad (2-105)$$

соответствующую (2-101). Следовательно, комплексные потенциальные функции полей линейных заряда и тока аналогичны по виду, как и описываемые ими поля, но входящие в них функции потока и потенциальные функции меняются местами.

2-5. ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНЫХ МАСС И ЗАРЯДОВ

При решении ряда задач, в частности, при расчете сил, действующих на граничные поверхности (см. § 2-6), и введении зеркальных отображений (см. гл. 3), целесообразно рассматривать влияние границы как результат действия распределенных вдоль нее зарядов, магнитных масс или токов. Здесь такие «эквивалентные» поверхностные распределения величин рассматриваются применительно только к магнитным полям и распределению магнитных масс, однако закономерности для электрических полей и распределения зарядов, конечно, аналогичны. Вместо магнитных масс могут быть использованы также поверхностные токи, однако оба представления эквивалентны, а поверхностные магнитные массы проще для анализа.

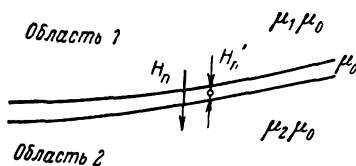


Рис. 2-9.

Обращаясь к рис. 2-9, рассмотрим область 1 с магнитной проницаемостью $\mu_1 \mu_0$, отделенную от области 2 с магнитной проницаемостью $\mu_2 \mu_0$ граничной линией произвольной конфигурации. Необходимо найти распределение магнитной массы вдоль границы, которое оказывало бы такое же влияние на поле в области 1, как и присутствие границы. Удобно представить границу в ви-

де бесконечно тонкой области с магнитной проницаемостью μ_0 , где распределена эквивалентная магнитная масса. В произвольной точке на границе обозначим через H_n нормальную составляющую напряженности приложенного поля, т. е. поля, создаваемого всеми источниками, которые могут находиться в той или другой области или в обеих областях одновременно в отсутствие намагниченной среды. Влияние намагниченной среды может быть учтено путем введения нормальной составляющей напряженности поля H'_n на границе, направление которой в области 1 будем считать совпадающим с направлением H_n .

Таким образом, результирующая нормальная составляющая напряженности поля в рассматриваемой точке на границе равна $H_n + H'_n$ в области 1 и $H_n - H'_n$ в области 2. Из условия непрерывности нормальной составляющей индукции на границе следует:

$$\mu_1 (H_n + H'_n) = \mu_2 (H_n - H'_n),$$

или

$$H'_n = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} H_n. \quad (2-106)$$

Нетрудно найти эквивалентную поверхностную плотность магнитной массы ρ_s , которая создавала бы в области с магнитной проницаемостью μ_0 составляющую напряженности поля H'_n , т. е. отражала бы влияние границы. Поскольку потоки, выходящие в двух направлениях по нормали к границе, одинаковы,

$$\rho_s = 2\mu_0 H'_n, \quad (2-107)$$

исключив из (2-106) и (2-107) H'_n , найдем зависимость, связывающую ρ_s с напряженностью приложенного поля:

$$\rho_s = 2\mu_0 \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \right) H_n. \quad (2-108)$$

При определении механических сил, которому посвящен следующий параграф, удобно выразить плотность магнитной массы через напряженность результирующего поля H_{n1} в области 1. Она равна $H_n + H'_n$ и согласно (2-107) и (2-108)

$$\rho_s = \frac{\mu_0}{\mu_2} (\mu_2 - \mu_1) H_{n1}. \quad (2-109)$$

2-6. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИЛЫ

Усилие, действующее на линейный источник, расположенный в поле, находится просто, однако определение сил, действующих на границы, часто затруднительно. Существует много методов, позволяющих рассчитать результирующую силу, приложенную к границе; два наиболее полезных из них описаны ниже. Они отличаются простотой и позволяют найти решение для большинства полей, представляющих практический интерес. Для более подробного ознакомления с определением механических сил авторы рекомендуют обратиться к недавно опубликованной работе [Л. 2-2], а также в [Л. 2, 33, 34, 41 и 48]. Нахождение распределения сил кратко освещено в [Л. 33, 34 и 2-2], однако вопросы применения метода для решения практических задач не рассматривались нигде, за исключением [Л. 2-3]. В § 2-6-4 изложен простой метод расчета для случая эквипотенциальных границ.

2-6-1. Линейные источники

В любой физической задаче источники поля имеют конечную площадь поперечного сечения, однако в большинстве расчетов их можно с достаточной точностью рассматривать как линейные источники. Сила, действующая на единицу длины линейного источника, находящегося в поле (той же физической природы, что и поле источника), определяется произведением напряженности поля (или магнитной индукции в случае линейного тока) в месте расположения источника и интенсивности источника. Для линейного заряда q на единицу длины, находящегося в электрическом поле с напряженностью E , сила равна Eq , для линейного полюса в магнитном поле она равна Ht , а для линейного тока в магнитном поле она имеет значение Bi .

2-6-2. Распределенные источники

Силу, действующую на источник поля, распределенный по площади, можно найти в предположении, что он состоит из линейных элементов, путем суммирования сил, действующих на эти элементы (см. § 5-2-3). Напряженность поля в точке расположения элемента определяется с учетом влияния всех источников, за исключением рассматриваемого. Если принять во внимание поле, создаваемое другими элементами источника, то найденная сила будет учитывать действие внутренних сил в ис-

точнике, которые в результате суммирования при определении результирующей внешней силы обращаются в нуль.

2-6-3. Результирующая сила, действующая на границу

Простые выражения для результирующей силы, действующей на границу, можно получить в случае магнитного поля; аналогичные зависимости существуют и для электрического поля.

Эквивалентное распределение магнитной массы. В основе первого метода расчета лежит определение силы, действующей на магнитную массу, распределенную вдоль граничной поверхности таким образом, что создаваемое ею внешнее поле соответствует влиянию действительной границы. Поскольку реальное распределение магнитной массы в стали не учитывается, метод не дает возможности найти распределение сил, однако благодаря правильному представлению внешнего поля он дает точное значение результирующей силы. Требуемое поверхностное распределение магнитной массы определяется из уравнения (2-109) через H_{n1} .

Таким образом, нормальная составляющая силы на единицу длины F_n , действующая на распределенную по поверхности магнитную массу, равна:

$$F_n = H_n \rho_s, \quad (2-110)$$

где H_n — нормальная составляющая напряженности приложенного поля.

Тангенциальная составляющая силы на единицу длины F_t равна:

$$F_t = H_{t1} \rho_s, \quad (2-111)$$

где H_{t1} — тангенциальная составляющая напряженности поля.

Исходя из (2-106) и учитывая, что $H_{n1} = H_n + H'_n$, получим:

$$H_n = H_{n1} \left(\frac{\mu_2 + \mu_1}{2\mu_2} \right).$$

В результате подстановки значения ρ_s , определяемого из уравнения (2-109), в (2-110) и (2-111) найдем:

$$F_n = \frac{1}{2} \mu_0 (1 - \mu_1^2 / \mu_2^2) H_{n1}^2 \quad (2-112)$$

и

$$F_t = \mu_0 (1 - \mu_1 / \mu_2) H_{n1} H_{t1}. \quad (2-113)$$

Результирующая сила, действующая на сталь, находится путем интегрирования этих функций по всей границе.

Виртуальная работа. Второй метод расчета исходит из принципа виртуальной работы и дает простое решение в случае эквипотенциальных границ. Энергия dW , запасенная в объеме прямоугольной призмы со сторонами dx , dy и dz в любой точке поля, может быть представлена в виде:

$$dW = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dx dy dz. \quad (2-114)$$

Однако для двумерного поля, где H направлено по оси x , разность потенциалов $d\psi$ в направлении поперек призмы равна Hdx , а поток $d\phi$, проходящий через элемент, равен $\mu_0 Hdy$. Поэтому выражение для запасенной энергии на единицу длины в направлении оси z может быть записано следующим образом:

$$dW = \frac{1}{2} d\psi d\phi. \quad (2-115)$$

Таким образом, запас энергии для всего поля определяется как половина произведения изменений функции потока и потенциальной функции в пределах области поля. Далее, если сдвинуть границу поля без затраты энергии извне, то изменение запасенной энергии будет равно работе, совершаемой при перемещении границы. При этих условиях можно определить силу, действующую на границу. Так, например, если разность потенциалов между границами остается неизменной и перемещение производится в направлении оси x , то сила будет равна:

$$F = \frac{1}{2} \psi \frac{d\phi}{dx}. \quad (2-116)$$

Зная зависимость изменения полного потока от перемещения, с помощью этого уравнения нетрудно найти результирующую силу (см. § 8-2-8).

2-6-4. Распределение силы вдоль границы

Нахождение распределения силы в общем случае чрезвычайно затруднительно, однако если границы имеют бесконечно большую магнитную проницаемость, то можно использовать простой метод. В этом случае на-

пряженность поля в стали равна нулю и вся энергия сосредоточена в поле в воздухе.

Рассмотрим границу, отделяющую среду с бесконечно большой магнитной проницаемостью от воздуха. Если сдвинуть элемент dl этой поверхности в направлении потока (перпендикулярно поверхности) на расстояние dp , то изменение запаса энергии на единицу длины в направлении оси z в объеме, через который проходит элемент, определится согласно (2-114) следующим образом:

$$dW = \frac{1}{2} \mu_0 H_p^2 dl dp.$$

Однако сила F_p , действующая на элемент dl в направлении p , равна dW/dp ; следовательно,

$$F_p = \frac{1}{2} \mu_0 H_p^2 dl,$$

в связи с чем составляющая силы, действующей на участок границы, определяется выражением

$$\frac{1}{2} \mu_0 \int H_p^2 dl, \quad (2-117)$$

где интегрирование производится в пределах рассматриваемого участка границы. Сила, действующая на каждый участок, находится в результате интегрирования квадрата напряженности поля (которая направлена по нормали к поверхности) в пределах участка, а ее направление, конечно, совпадает с направлением вектора напряженности поля.

ЛИТЕРАТУРА

2-1. Liebmann G., Electrical analogues, Brit. J. Appl. Phys., № 4, 193, 1953.

2-2. Carpenter C. J., Surface-integral methods of calculating forces in magnetised iron parts, Proc. Instn Electr. Engrs, 107 C, 19, 1960.

2-3. Hammond P., Forces in electric and magnetic fields, Bull. Electr. Eng. Educ., № 25, 17, 1960.

МЕТОДЫ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ

Глава третья

ЗЕРКАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ**3-1. ВВЕДЕНИЕ**

Метод зеркальных отображений позволяет найти решения некоторых важных задач в тех случаях, когда границами поля являются плоские или цилиндрические поверхности. С его помощью очень легко получить готовые результаты и избежать непосредственного решения уравнений Лапласа или Пуассона. Идея метода зеркальных отображений изложена в [Л. 26], а развитию его посвящены труды [Л. 33, 34, 3-1 и 3-2].

Сущность метода заключается в замене влияния границы на приложенное поле простой системой токов или зарядов, расположенной позади граничной поверхности; результирующее поле находят путем суммирования приложенного и отображенного полей. Для поля в областях по разные стороны границы требуются различные системы отображений, однако если известна одна из них, то нетрудно найти и другую, поскольку решения для двух областей поля связаны граничными условиями.

При изложении теории расположение отображений и их величины определены для случаев одной плоской и одной цилиндрической граничных поверхностей на более простом примере электрического поля линейного заряда. Используемый метод был впервые предложен в [Л. 3-3]. Он заключается в том, что вначале находится поверхностное распределение зарядов (или поляризация), характеризующее влияние границы, которое затем заменяется простой эквивалентной системой (или отображениями).

Как показано в § 2-2-2, между электрическим полем линейного заряда и магнитным полем линейного тока су-

ществует аналогия, поэтому если известны отображения для электрического поля, то от них нетрудно перейти к отображениям для магнитного поля. Общего метода нахождения отображений для любой задачи в случае нескольких граничных поверхностей не разработано, однако в некоторых примерах метод последовательных приближений (см. [Л. 33 и 34]) дает правильные результаты.

Несмотря на отсутствие стандартного метода решения, все полученные результаты (найденные описанным или другими способами) можно проверить, исходя из граничных условий. Если получены системы отображений для каждой области поля, то в их справедливости можно убедиться прямым путем. Если же система найдена только для одной области, то для ее проверки можно использовать поверхностное распределение заряда. Более простая проверка возможна в тех случаях, когда границами поля в рассматриваемой плоскости являются эквипотенциали или силовые (магнитные) линии. Нетрудно установить, что граничным условиям при этом удовлетворяет система отображений, расположенная симметрично относительно всех границ.

При изложении метода удобно рассматривать в отдельности отображения в плоских и цилиндрических границах. В том и другом случаях исследованы поля линейных зарядов (или токов). Помимо этого, приведен анализ влияния одной цилиндрической граничной поверхности на приложенное равномерное поле (отображения диполей). Применению метода отображений к исследованию полей распределенных токов посвящен § 3-4.

3-2. ПЛОСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Вначале определим отображения линейного заряда, расположенного вблизи бесконечной плоской граничной поверхности, а затем применим полученные результаты для нахождения решений при различных комбинациях плоских границ. К ним относятся две параллельные плоские поверхности и более вплоть до четырех пересекающихся плоских граничных поверхностей. Во всех случаях углы пересечения поверхностей должны составлять целую часть π . Для одной прямолинейной границы в рассматриваемой плоскости решение получено при конечном значении диэлектрической проницаемости, однако при большем числе границ анализ ограничен случаями,

когда границы являются эквипотенциалами или линиями потока¹. В приведенных примерах все отображения симметричны относительно каждой из границ. Их расположение соответствует оптическим отображениям предмета, занимающего то же положение, что и заряд, в зеркальных поверхностях, совпадающих с границами.

3-2-1. Одна плоская граничная поверхность

Рассмотрим способ нахождения отображенных зарядов, которые позволяют определить поле линейного заряда q , расположенного вблизи бесконечной плоской граничной поверхности (рис. 3-1). Заряд находится в области 1 с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0\epsilon_1$, а диэлектрическая проницаемость области 2 равна $\epsilon_0\epsilon_2$. Допустим, что обе области лежат в плоскости xu , граница совпадает с осью x , а заряд расположен в точке $y=a$.

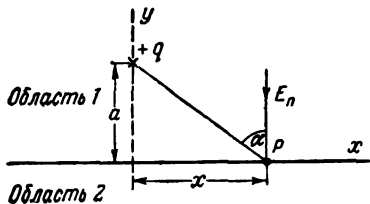


Рис. 3-1.

В произвольной точке P границы нормальная составляющая напряженности приложенного поля

$$E_n = \frac{q \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}}, \quad (3-1)$$

где угол α определяется согласно рис. 3-1.

Выразив $\cos \alpha$ через a и x , найдем:

$$E_n = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + a^2)}. \quad (3-2)$$

Можно предположить, что эта составляющая напряженности приложенного поля вызывает появление заряда вдоль границы. Как было показано в § 2-5, нормальная составляющая напряженности поля E'_n , обусловленного этим эквивалентным поверхностным распределением заряда, связана с нормальной составляю-

¹ В [Л. 33 и 34] приведено решение для полей, создаваемых точечными зарядами, в случае параллельных границ с различными проводимостями. Эти результаты с помощью принципа наложения можно распространить и на линейные заряды.

щей напряженности приложенного поля простым соотношением

$$E'_n = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_n. \quad (3-3)$$

Таким образом, влияние границы на поле в области 1 может быть полностью учтено путем введения распределенной вдоль границы составляющей E'_n , которая определяется при подстановке (3-2) в (3-3) выражением

$$E'_n = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) \frac{a}{x^2 + a^2}. \quad (3-4)$$

Однако такое же поле было бы создано в результате внесения или заряда $-q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$ в точку, находящуюся на расстоянии a от границы в области 2, или заряда $+q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$ в точку, расположенную на расстоянии a от границы в области 1. Следовательно, любой из этих зарядов можно использовать для учета влияния границы. Тем не менее, только один из них может быть выбран для определения поля в каждой из областей. Действительно, если взять поле в области 1, то второй заряд вызовет изменение результирующего потока, входящего или выходящего из любой поверхности, охватывающей заряд q , в области 1, т. е. уравнение (2-4) для дивергенции электрического смещения потеряет справедливость. Поэтому его нельзя использовать при определении поля в области 1. Другой заряд лежит за пределами области 1 и, следовательно, не оказывает влияния на дивергенцию электрического смещения в данной области. Этот заряд, называемый отображенным, совместно с действительным зарядом q определяет поле в области 1. Следует подчеркнуть, что этот отображенный заряд не имеет отношения к полю в области 2.

Для того чтобы найти отображенный заряд при определении поля в области 2, проще всего вновь обратиться к E'_n . В области 2 эта составляющая напряженности противодействует приложенному полю, в связи с чем эквивалентные линейные заряды, определяющие требуемое распределение нормальной составляющей напряженности поля в области 2, должны иметь обратные знаки по отношению к зарядам, которые были рассмотрены выше. Так же как и прежде, из них должен быть выбран отображенный заряд, расположенный за пре-

делами рассматриваемой области поля, т. е. искомый заряд имеет величину $-q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ и находится в точке $y = +a^*$.

Отображения линейных токов. Таким же способом можно показать, что отображения линейного тока i , протекающего в среде с магнитной проницаемостью μ_1 вблизи бесконечной плоской границы, отделяющей среду с магнитной проницаемостью μ_2 , аналогичны отображениям, которые были определены выше.

Для поля в области 1 искомое отображение имеет величину $i(\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$ и находится в точке $y = -a$ в области 2, тогда как для поля в области 2 отображение имеет величину $-i(\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$ и находится в точке $y = +a$ в области 1. Картина поля для случая $\mu_2/\mu_1 = 5$ изображена на рис. 3-2. Она отражает «преломление» линий потока на границе.

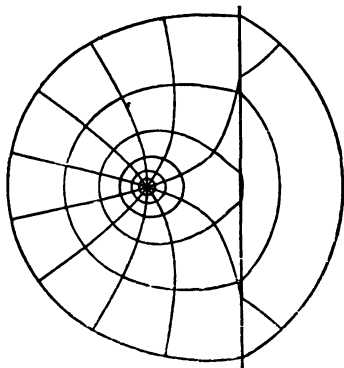


Рис. 3-2

Общие замечания.

Следует выделить некоторые общие положения, которые вытекают из изложенной теории. Во-первых, поля определяются в результате суммирования приложенного и отображенных полей. Во-вторых, отображения для двух областей равны по величине, но в случае зарядов имеют одинаковые знаки, а в случае токов — противоположные. Наконец, для области, в которой находится действительный заряд или ток, отображение занимает то же положение, что и оптическое отображение приложенного источника в границе, в то время как для области, где нет источника, отображение занимает то же положение, что и источник.

* Для подтверждения правильности полученных результатов необходимо показать, что тангенциальная составляющая напряженности поля при переходе границы непрерывна. В этом нетрудно убедиться, поскольку тангенциальные составляющие напряженности, обусловленные обоими отображениями, одинаковы и равны:

$$\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \frac{x}{x^2 + a^2},$$

а приложенное поле, очевидно, непрерывно.

Представление решений в виде функций комплексного переменного. Полученные выше решения используются в книге далее в виде функций комплексного переменного, которые в общем случае наиболее удобны для расчетов и выведены ниже. Поле линейного заряда или тока может быть определено следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{2\pi_1} \ln(t - t_0), \quad (3-5)$$

где значению $t = t_0$ соответствует положение источника в плоскости t . Следовательно, поле источника и его отображений нетрудно представить в виде суммы членов, аналогичных приведенному выражению. Если взять, например, случай заряда, расположенного на расстоянии a от бесконечной плоскости, то при совмещении вещественной оси с прямолинейной границей поле заряда, находящегося в точке $t = ja$, и его отображения будет описано выражением

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\ln(t - ja) - \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \ln|(t + ja)| \right]. \quad (3-6)$$

В случае проводящей плоскости ($\epsilon_2 = \infty$) зависимость (3-6) упрощается:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{t - ja}{t + ja} \right).$$

Аналогичным образом можно показать, что поле линейного тока, расположенного вблизи плоскости с бесконечно большой магнитной проницаемостью, определяется следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln(t - ja)(t + ja) = \frac{1}{2\pi} \ln(t^2 + a^2), \quad (3-7)$$

а в случае линейного тока, протекающего вблизи магнитно непроницаемой плоскости,

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{t - ja}{t + ja} \right). \quad (3-8)$$

3-2-2. Параллельные плоские граничные поверхности

Поле в области между двумя параллельными плоскими границами, обусловленное расположенным в этой области зарядом или током, было определено в [Л. 3-4],

а также в [Л. 22]. Для обоих случаев возможны два решения в зависимости от того, являются ли границы поля в рассматриваемой плоскости эквипотенциальными или силовыми линиями.

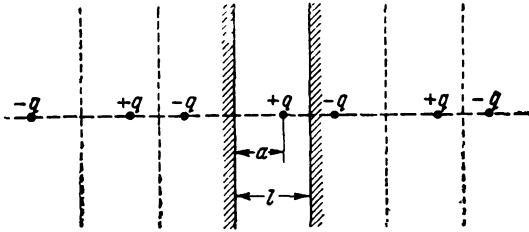


Рис. 3-3.

Отображения для электрического поля, создаваемого линейным зарядом, находящимся между проводящими (эквипотенциальными) границами, показаны на рис. 3-3, а картина поля изображена на рис. 3-4. Отображения образуют бесконечный ряд удаленных на одинаковые расстояния одна от другой пар равных по величине и противоположных по знаку зарядов, которые расположены симметрично относительно обеих границ. Благодаря последнему обстоятельству поток пересекает ту и другую границы под прямым углом и они, таким образом, являются эквипотенциальными. Это подтверждает правильность решения.

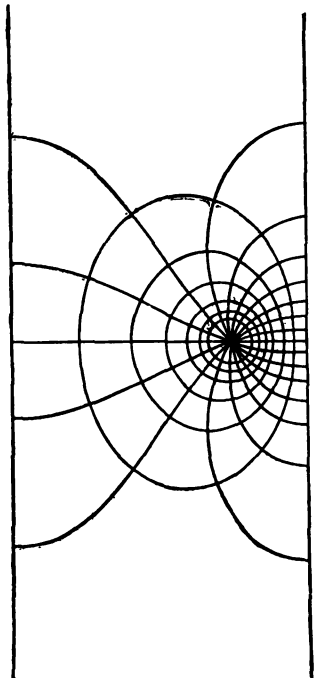


Рис. 3-4.

Суммируя комплексные потенциальные функции в отдельности для положительных и отрицательных зарядов, можно показать

(см. [Л. 3-5]), что решение для поля между границами имеет вид:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sin \pi \left(\frac{t+a}{2l} \right)}{\sin \pi \left(\frac{t-a}{2l} \right)}. \quad (3-9)$$

Поле расположено в плоскости t , а расстояния a , l и положение начала координат определены на рис. 3-3. Это решение, очевидно, справедливо и для магнитного поля линейного тока, протекающего между параллельными магнитно непроницаемыми границами.

Для границ с бесконечно большой магнитной проницаемостью отображения линейного тока расположены так же, как и в рассмотренном выше случае, но все они имеют одинаковые знаки. Картина поля показана на рис. 3-5. Такая система отображений превращает границы в магнитные эквипотенциали. Поскольку все отображения имеют такой же знак, как и линейный ток, поле определяется выражением

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\sin \pi \left(\frac{t+a}{2l} \right) \right] \times \left[\sin \pi \left(\frac{t-a}{2l} \right) \right]. \quad (3-10)$$

Полученные результаты были использованы при решении многих задач, например, в [Л. 3-4] для расчета

емкости провода между проводящими границами, в [Л. 3-5] для нахождения характеристик триода и в [Л. 22] для определения силы, действующей на проводник в воздушном зазоре электрической машины.

3-2-3. Пересекающиеся плоские граничные поверхности

Были получены решения (впервые это сделано в [Л. 3-1]) и для некоторых задач в случае пересекающихся граничных поверхностей. Однако возможности здесь очень ограничены: для полей, поддающихся анализу, наибольшее число граничных поверхностей равно четырем, а углы должны быть целыми частями π . Эти ограничения не распространяются на методы конформных преобразований (см. § 10-2). Анализ будет ограничен магнитными полями, поскольку аналогия с электрическим полем теперь очевидна, а границы, представляющие собой линии потока, встречаются только в этом случае.

Две пересекающиеся граничные поверхности. Рассмотрим две плоские граничные поверхности с магнитной проницаемостью, равной нулю, пересекающиеся под углом π/n , где n —целое число, и выделяющие область, в которой протекает линейный ток i . Отображения, требующиеся для определения поля внутри области, показаны на рис. 3-6, *а*, *б* и *в* для значений n , равных 2, 3 и 4. При $n=1$ граница превращается в бесконечную прямую, которая была рассмотрена выше. Для всех значений n отображения лежат на окружности с центром в точке пересечения границ, проходящей через точку, где расположен ток i . Токи всей системы (отображения и действительный ток) имеют поочередно изменяющиеся знаки и расположены симметрично относительно границ. Следовательно, такая система будет иметь линии потока, совпадающие с границами, что подтверждает правильность решения.

Можно показать, что в общем случае число отображений равно $2n-1$, а углы, определяющие их положения, образуют ряд

$$\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right), \left(\frac{2\pi}{n}+\theta\right), \left(\frac{4\pi}{n}-\theta\right), \\ \left(\frac{4\pi}{n}+\theta\right), \dots, \left(\frac{2\pi}{n}(n-1)+\theta\right), (2\pi-\theta),$$

где θ —угловое положение тока i , как показано на рис. 3-6.

Если границы имеют бесконечно большую магнитную проницаемость, то отображения занимают те же поло-

жения, что и прежде, но все имеют такой же знак, как и действительный ток.

Можно привести ряд примеров применения полученных результатов для решения частных задач. Недавно они были использованы для определения усилий, действующих на лобовые части обмоток турбогенераторов [Л. 3-6].

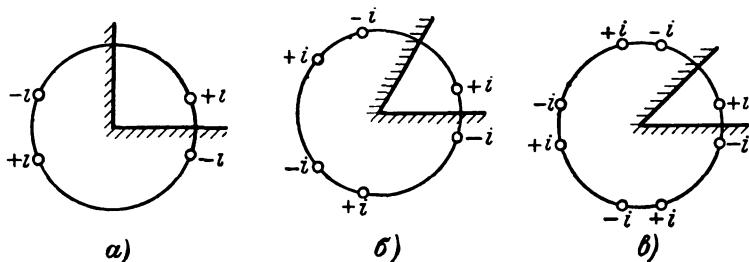


Рис. 3-6.

Три пересекающиеся граничные поверхности. Существуют только четыре комбинации из трех пересекающихся поверхностей, которые дают внутренние углы, составляющие целые части π . Такими комбинациями являются:

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \text{ и } \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \text{ и } \frac{\pi}{4};$$

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \text{ и } \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \text{ и } 0.$$

Последнюю комбинацию можно также рассматривать как частный случай четырех пересекающихся границ или двух параллельных границ с линией симметрии. Если взять за основу случай четырех поверхностей, то решение можно получить как частный случай (при m или $n = \pm 1$) уравнений (3-11) и (3-12). В [Л. 22] уделяется большое внимание решению этой задачи (конфигурация границ рассматривается как глубокий паз). Другие случаи не представляют большого практического интереса и здесь не описаны.

Четыре пересекающиеся граничные поверхности. В связи с ограничением в отношении значений углов пересечения поверхностей возможна только одна комбинация четырех граничных поверхно-

стей, а именно случай, когда все внутренние углы равны $\pi/2$. Расположение отображений линейного тока для поля, границы которого являются линиями потока, показано на рис. 3-7. Для распределения отображений характерны двойная периодичность и симметрия относительно каждой из границ, в связи с чем они, как и следовало ожидать, представляют собой линии потока.

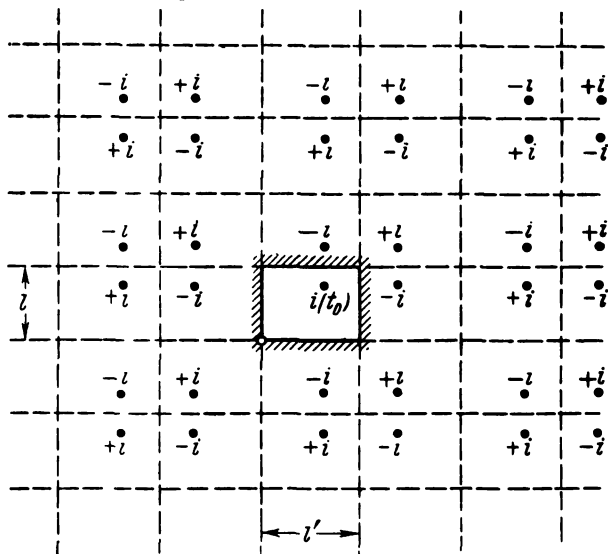


Рис. 3-7.

Полагая, что поле находится в плоскости t , а положение начала координат и размеры соответствуют рис. 3-7, можно определить поле следующим образом:

$$w = \frac{1}{2\pi} \ln \prod_{\substack{m=-\infty \\ n=-\infty}}^{\infty} \frac{(t + \widehat{t}_0 + a)(t - \widehat{t}_0 + a)}{(t + t_0 + a)(t - t_0 + a)}, \quad (3-11)$$

где m и n — целые числа, а

$$a = 2ml' + 2jnl;$$

\widehat{t}_0 — комплекс, сопряженный с t_0 .

Уравнение (3-11) было использовано, например, для нахождения емкости провода, расположенного в прямоугольном канале [Л. 3-4].

Отображения линейного тока в границе с бесконечно большой магнитной проницаемостью занимают те же положения, что и в случае, когда границы являются линиями потока, но все имеют такие же знаки, как и сам ток. Поэтому решение имеет вид:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \prod_{\substack{m=-\infty \\ n=-\infty}}^{\infty} (t + \hat{t}_0 + a)(t - \hat{t}_0 + a)(t + t_0 + a)(t - t_0 + a). \quad (3-12)$$

В § 5-6 приведен анализ такой системы отображений для поля распределенных токов.

3-3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Если в случае одной плоской граничной поверхности достаточно ввести только два отображения, то для одной цилиндрической границы существуют четыре системы отображений: две — для заряда, расположенного во внутренней области границы, и две — для заряда, расположенного во внешней области ее. Для последнего случая приведен подробный вывод решения на основе представления об эквивалентном поверхностном заряде. Результаты анализа поля заряда, расположенного во внутренней области границы, даны для обеих областей. Кроме того, исследовано поле кругового цилиндра в равномерном приложенном поле. Это поле создают заряды, расположенные в бесконечности, однако влияние границ по-прежнему может быть учтено с помощью отображений, которые в данном случае образуют диполь.

3-3-1. Заряд или ток, расположенный вблизи цилиндрической граничной поверхности

Линейный заряд. Рассмотрим вначале поле линейного заряда в среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0\epsilon_1$, расположенного вблизи кругового цилиндра с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0\epsilon_2$ (рис. 3-8). Нормальная составляющая напряженности приложенного поля E_n в произвольной точке P на круговой границе определяется выражением

$$E_n = \frac{q \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 b}, \quad (3-13)$$

где угол α и расстояние b определяются согласно рис. 3-8. Нормальная составляющая напряженности поля, обусловленного эквивалентным распределенным по поверхности зарядом, согласно (3-3) равна:

$$E'_n = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \frac{\cos \alpha}{b}. \quad (3-14)$$

Однако из рассмотрения треугольников PAB и PBC , где B является точкой, обратной точке A относительно окружности, можно показать, что

$$a \cos \alpha + b \cos \beta = \frac{b \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \quad (3-15)$$

и

$$a \sin \alpha = r \sin(\alpha - \beta). \quad (3-16)$$

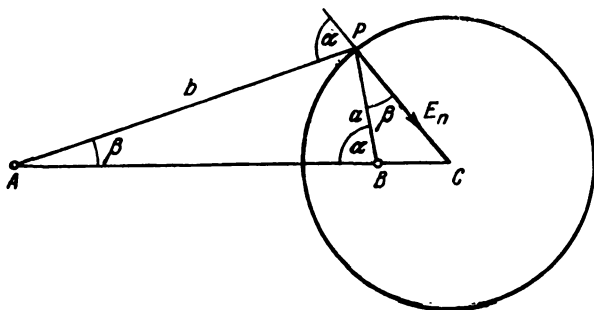


Рис. 3-8.

В результате объединения соотношений (3-15) и (3-16) получим:

$$\frac{\cos \alpha}{b} = \frac{\cos \beta}{a} - \frac{1}{r}. \quad (3-17)$$

Следовательно, (3-14) может быть представлено в виде:

$$E'_n = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \frac{\cos \beta}{a} - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \frac{1}{r}. \quad (3-18)$$

Полученное выражение определяет нормальную составляющую напряженности поля, создаваемого распределенным зарядом на круговой границе. Однако такую

же нормальную составляющую напряженности поля создали бы заряды $-q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$, расположенные в обратной точке B , и $+q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$, находящиеся в центре окружности. Следовательно, поскольку эти заряды находятся во внутренней области границы, они представляют собой искомые отображенные заряды, которые вместе с действительным зарядом определяют поле во внешней области круговой границы.

Для внутренней области границы отображения, создающие нормальную составляющую напряженности поля E'_n , должны находиться во внешней области границы, а ее значение должно быть равно:

$$E'_n = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \frac{\cos \alpha}{b}. \quad (3-19)$$

Отсюда следует, что отображенный заряд должен иметь величину $-q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ и находиться в той же точке, что и заряд q . Полученное решение было использовано, например, в [Л. 3-4] для определения поля цилиндрического катода, окруженного пространственно распределенным зарядом.

Аналогичным образом можно определить величину и расположение отображений заряда, находящегося во внутренней области круговой границы. Поле во внутренней области окружности определяется отображенным зарядом $-q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$, расположенным во внешней обратной точке, а поле во внешней области — отображенными зарядами $-q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$, расположенными в той же точке, что и заряд q , и $q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$, находящимися в центре окружности. На рис. 3-9 изображено поле линейного заряда, расположенного во внешней области круговой границы для случая $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5$.

Линейный ток. Отображения линейного тока, протекающего вблизи цилиндрической границы, без условно аналогичны описанным выше отображенным зарядам. Если ток i протекает во внешней области границы, то поле в этой области определяется отображенными токами $i(\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, расположенными в обратной точке, и $-i(\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, находящимися в центре окружности, а поле во внутренней области определяется током $-i(\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, расположенным в той же точке, что и ток i . Если же ток протекает во внутренней области границы, то поле во внешней обла-

сти определяется отображенными токами $-i(\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 + \mu_1)$, находящимися в той же точке, что и ток i , и $i(\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 + \mu_1)$, расположенными в центре окружности, а поле во внутренней области — отображенным током $i(\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 + \mu_1)$, находящимся в обратной точке.

В заключение интересно отметить, что полученные выше методом отображений решения для токов и за-

рядов, расположенных вблизи цилиндрических границ, переходят в решения для плоских границ, когда радиус цилиндра становится бесконечно велик. В § 4-2-2 поле линейного тока во внешней области цилиндра с конечной магнитной проницаемостью определено путем непосредственного решения уравнения Лапласа. Кроме того, в § 7-2-2 приведено решение методом конформных преобразований

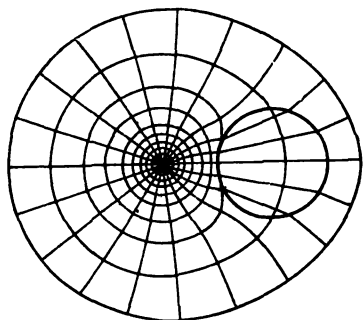


Рис. 3-9.

для случая бесконечно большой магнитной проницаемости. В обоих случаях показано соответствие полученных результатов решениям, найденным методом зеркальных отображений.

3-3-2. Диполи, круговой цилиндр в равномерном поле

Диполи. Влияние кругового цилиндра на приложенное равномерное поле может быть учтено с помощью диполя, т. е. комбинации бесконечно больших положительного и отрицательного зарядов (или токов), расположенных на бесконечно малом расстоянии один от другого таким образом, что произведение заряда и расстояния является конечной величиной. Прежде чем приступить к исследованию влияния диполя на равномерное поле, определим его поле на основании результатов анализа поля линейных зарядов и найдем отображения диполя в плоских и цилиндрических границах. Для упрощения расчетов все функции поля представлены в виде функций комплексного переменного.

Комплексная потенциальная функция заряда q , расположенного в точке $t=a$ комплексной плоскости t , определяется выражением

$$w = \frac{q}{2\pi} \ln(t - a). \quad (3-20)$$

Поэтому для поля, создаваемого равными по величине положительным и отрицательным линейными зарядами, находящимися соответственно в точках $t=a+jb$ и $t=-a-jb$, получим:

$$w = \frac{q}{2\pi} \ln[t - (a + jb)] - \frac{q}{2\pi} \ln[t + (a + jb)]. \quad (3-21)$$

Эту зависимость можно представить в виде:

$$w = \frac{q}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{a + jb}{t}\right) - \frac{q}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a + jb}{t}\right),$$

или при разложении в ряд

$$w = -\frac{q}{\pi} \left[\frac{1}{t} (a + jb) + \frac{1}{3t^3} (a + jb)^3 + \frac{1}{5t^5} (a + jb)^5 + \dots \right]. \quad (3-22)$$

Рассмотрим далее создание диполя из двух отдельных зарядов. Расстояние $2|a + jb|$ между зарядами стремится к нулю, а величина зарядов q — к бесконечности таким образом, что величина $(q/\pi)|a + jb|$, называемая *моментом d* диполя, остается конечной. При этих условиях в уравнении (3-22) исчезают все члены, за исключением первого, и выражение для поля диполя, расположенного в начале координат, принимает вид:

$$w = -\frac{q}{\pi t} (a + jb).$$

Обозначив

$$d = -\frac{q}{\pi} |a + jb|,$$

получим:

$$w = \frac{d}{t} e^{j\alpha}, \quad (3-23)$$

где $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ является углом наклона оси диполя к вещественной оси.

Поле диполя при $\alpha=0$ изображено на рис. 3-10. Силовые линии и эквипотенциалы образуют семейства ортогональных окружностей, для которых ось диполя является общей касательной.

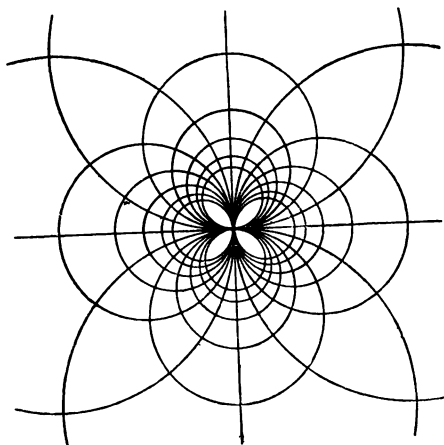


Рис. 3-10.

Уравнение для диполя, расположенного не в начале координат, а в точке $t=t_1$, с осью, параллельной оси x , запишется следующим образом:

$$\omega = \frac{d}{t - t_1}. \quad (3-24)$$

Это выражение используется в § 10-2-2 для определения поля в области со сложной конфигурацией границ методом конформных преобразований. Соотношение между ω и t является комплексным обращением, которое описано в § 7-1-1.

Диполь, расположенный в бесконечности. Точно таким же путем можно определить поле диполя, находящегося в бесконечности. Снова возьмем два разноименных заряда, поле которых описывается уравнением (3-21). Это уравнение можно представить в виде

$$\omega = \frac{q}{2\pi} \ln \left(1 - \frac{t}{a + jb} \right) - \frac{q}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{t}{a + jb} \right) + \frac{q}{2\pi} \ln(-1),$$

или после разложения в ряд двух первых членов в правой части

$$\omega = -\frac{q}{\pi} \left[\frac{t}{a+jb} + \frac{t^3}{3(a+jb)^3} + \dots \right]. \quad (3-25)$$

Далее, диполь, расположенный в бесконечности, образуется путем перемещения обоих зарядов в противоположные стороны до бесконечности (где они сойдутся в точке $t = \infty$) при одновременном увеличении их величины $q \rightarrow \infty$ таким образом, чтобы момент диполя d , определяемый зависимостью

$$-\frac{q}{\pi(a+jb)} = de^{j\alpha},$$

оставался конечным. При бесконечном возрастании $|a+jb|$ и q (3-25) принимает вид:

$$\omega = dte^{j\alpha}. \quad (3-26)$$

Полученное выражение определяет поле диполя, расположенного в бесконечности. Оно описывает равномерное поле с напряженностью, равной d , направленное под углом α к вещественной оси; следовательно, именно такое поле и будет создавать диполь, расположенный в бесконечности. Уравнение (3-26) можно вывести непосредственно из (3-23) путем обращения (см. § 7-1).

Отражения диполя. Согласно изложенной выше теории диполей отражения диполя в плоской или цилиндрической границе можно найти путем комбинирования отдельных отражений двух зарядов, составляющих диполь. Особенно просто это сделать для плоской границы. Отражение каждого заряда расположено в точке его оптического отражения в границе, а величина отражения составляет $-(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ часть величины самого заряда, где $\epsilon_0\epsilon_1$ и $\epsilon_0\epsilon_2$ — диэлектрические проницаемости соответственно для области, где расположен диполь, и для области позади границы. Следовательно, отражение диполя находится в положении его оптического отражения, а момент отражения составляет $-(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ часть момента диполя. Так, например, поле в области, где в точке t_1 расположен диполь, при совпадении границы с вещественной осью определяется выражением

$$\omega = \frac{de^{j\alpha}}{(t-t_1)} - \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \frac{de^{-j\alpha}}{(t-\hat{t}_1)}. \quad (3-27)$$

Здесь \hat{t}_1 — комплекс, сопряженный с t_1 .

Отображение для поля в области с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0\epsilon_2$ нетрудно найти, однако здесь оно не определено.

Отображение диполя, расположенного вблизи цилиндрической границы, можно получить аналогичным образом, хотя вывод более сложен. Рассмотрим диполь, расположенный во внешней области границы, и исследуем поле в этой области. Вначале найдем отображения двух одинаковых зарядов конечной величины с противоположными знаками, находящихся в точках A и B во внешней области границы, как показано на рис. 3-11. Положительный заряд $+q$, расположенный в точке A , имеет отображения $-q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ в обратной относительно окружности точке C и $q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ в центре O окружности. Отображениями отрицательного заряда, находящегося в точке B , являются заряды $q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ в соответствующей обратной точке D и $-q(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ в центре окружности. Таким образом, два заряда в центре окружности взаимно уничтожаются и остаются два равных по величине и противоположных по знаку отображенных заряда в обратных точках. На рис. 3-11 показано расположение этих зарядов. При сближении зарядов, находящихся в точках A и B , и сохранении конечным произведения $q(AB)$ они образуют диполь, отображение которого составляют два отображенных заряда, расположенных в точках C и D . Момент диполя, создающего приложенное поле, равен:

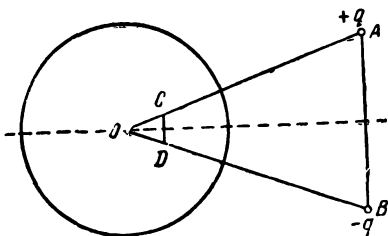


Рис. 3-11.

$d = q(AB)$,

а момент отображенного диполя определяется выражением

$$d_i = -d \lim_{A \rightarrow B} \left(\frac{CD}{AB} \right) \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right). \quad (3-28)$$

Однако, поскольку треугольники OCD и OAB подобны,

$$\frac{CD}{AB} = \frac{OC}{OA},$$

и при совмещении двух зарядов

$$\begin{aligned} OA = OB &= a, \\ OC = OD &= \frac{r^2}{a}, \end{aligned} \quad (3-29)$$

где r — радиус окружности.

Поэтому в результате подстановки значения CD/AB в (3-28) получим выражение для момента отображенного диполя в виде:

$$d_i = -d \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right). \quad (3-30)$$

Отображение расположено в точке, обратной точке, где находится диполь, относительно окружности. Из рассмотрения подобных треугольников при $AB \rightarrow 0$ нетрудно заметить, что угол наклона оси отображенного диполя равен и противоположен углу наклона действительного диполя (по отношению к соединяющей их линии).

Отображение диполя, находящегося во внутренней области цилиндрической границы, можно найти таким же путем.

Цилиндрическая граничная поверхность в равномерном приложенном поле. Влияние цилиндрической границы на равномерное приложенное поле нетрудно учесть путем введения расположенного в бесконечности диполя, который создает равномерное поле, и нахождения его отображений в границе. Поскольку центр круговой границы является точкой, обратной точке, расположенной в бесконечности, результирующее поле, очевидно, представляет собой сумму полей действительного диполя и отображенного диполя, находящегося в центре окружности. Однако интересно получить это решение из рассмотрения эквивалентного распределенного по поверхности заряда.

В равномерном электрическом поле с напряженностью E ее нормальная составляющая в произвольной точке P круговой границы равна $E \cos \theta$, где θ — угол,

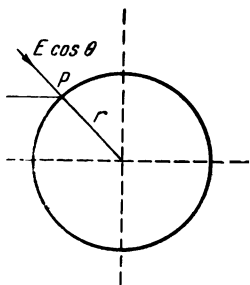


Рис. 3-12.

составленный направлением напряженности поля, которое принято совпадающим с вещественной осью, и радиусом, проведенным в точку P (рис. 3-12). Поэтому нормальная составляющая напряженности поля E'_n , обусловленная распределенным на границе зарядом, равна:

$$E'_n = \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) E \cos \theta.$$

Рассмотрим далее нормальную по отношению к круговой границе составляющую напряженности поля, создаваемого диполем, который расположен в центре окружности, имеет момент d и направление оси, параллельное полю. Обусловленное им поле определяется выражением

$$w = \frac{r d}{t},$$

а напряженность поля (см. § 6-3-6) равна:

$$\frac{d}{r^2} e^{j(\pi - 2\theta)}.$$

Отсюда следует, что напряженность создаваемого диполем поля равна по величине d/r^2 и направлена под углом 2θ к вещественной оси или под углом θ к радиусу, проведенному в точку P . Таким образом, нормальная составляющая напряженности поля, создаваемого диполем, на границе равна $(d/r^2) \cos \theta$. Положив

$$\frac{d}{r^2} = \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) E,$$

можно прийти к заключению, что диполь с моментом d , расположенный в центре окружности, является отображением, требующимся для учета влияния границы. Тогда поле во внешней области круговой границы с радиусом r , находящейся в равномерном приложенном поле E , будет определяться следующим образом:

$$w = \left[t - \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \frac{r^2}{t} \right]. \quad (3-31)$$

Отображение, требующееся для поля во внутренней области границы, должно, конечно, находиться во внешней области. В действительности оно расположено в бес-

конечности. Поскольку нормальная составляющая напряженности поля E'_n противодействует приложенному полю, во внутренней области результирующая нормальная составляющая напряженности поля на границе будет равна:

$$\left[1 - \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) \right] E \cos \theta.$$

Результирующее поле во всей внутренней области границы, очевидно, равномерное и имеет напряженность

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) \right] E &= \\ &= \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E. \end{aligned}$$

На рис. 3-13 изображена картина поля для случая $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 5$.

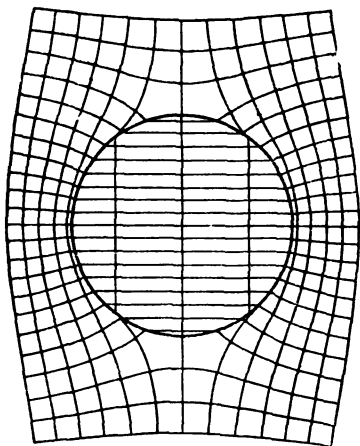


Рис. 3-13.

3-4. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Метод отображений, как было показано выше, может быть использован для анализа полей, создаваемых линейными токами или зарядами (включая источники, находящиеся в бесконечности, которые создают равномерные приложенные поля), с учетом влияния различных плоских или цилиндрических границ. В ряде работ рассматривалась также комбинация плоской и цилиндрической границ, например в [Л. 3-7 и 37].

Приведенный анализ касается только полей линейных источников, однако следует иметь в виду, что метод отображений может быть применен и к источникам с конечными площадями поперечного сечения. Это объясняется тем, что любой такой источник можно рассматривать как совокупность линейных источников, каждый из которых создает свое собственное отображение обычным образом. Так, например, поле в воздухе, создаваемое прямоугольным проводником с равномерно распределенной плотностью тока J , расположенным вблизи бесконечной плоскости с относительной магнитной про-

ницаемостью μ , определяется путем введения отображенной прямоугольной области с равномерно распределенной плотностью тока $J(\mu-1)/(\mu+1)$ (рис. 3-14).

Более подробно отображения прямоугольных проводников описаны в гл. 5. Однако возможности применения метода отображений для решения таких задач ограничены областями с прямоугольными границами, поскольку отображение в круговой границе имеет сложную конфигурацию и неравномерное распределение плотности тока, а это чрезвычайно затрудняет анализ.

В заключение этого параграфа и главы метод отображений использован для постановки общих вопросов, при решении которых он очень полезен. Первым из них является определение силы, действующей на границу, второй относится к оценке погрешности, обусловленной часто принимаемым допущением, что магнитная проницаемость границ бесконечно велика, тогда как в действительности она имеет конечное значение, а третий касается приближенного метода анализа поля в областях, граничащих со средами, в которых переменное поле индуцирует вихревые токи.

Результирующая сила, действующая на границу. При определении результирующей силы, действующей на границу, очень удобно использовать метод отображений, поскольку эта сила равна результирующей силе, действующей на отображения под влиянием приложенного поля, или силе, действующей на источники поля под влиянием поля отображений.

В качестве примера определим силу взаимодействия между линейным током, расположенным в воздухе, и бесконечной плоской граничной поверхностью с относительной магнитной проницаемостью μ . Напряженность поля H_x в точке, где находится ток, обусловленная отображением, равна:

$$H_x = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \frac{1}{2a}. \quad (3-32)$$

Составляющей напряженности поля в направлении оси y не возникает. Следовательно, действующая на ток

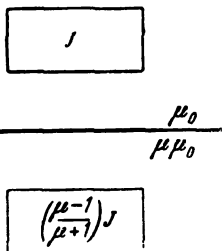


Рис. 3-14.

сила, обусловленная этим полем (так же как и сила, действующая на границу под влиянием тока), направлена по оси y и определяется выражением

$$F_y = \frac{\mu_0}{2\pi} i^2 \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right) \frac{l}{2a}. \quad (3-33)$$

Если граница отделяет магнитную среду, то эта сила является притягивающей, если же эффективная магнитная проницаемость границы меньше единицы, — то отталкивающей.

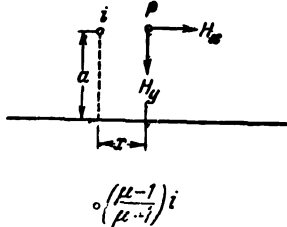


Рис. 3-15.

Влияние конечной магнитной проницаемости. Обычно принимаемое при определении магнитных полей упрощающее допущение, что магнитная проницаемость границы бесконечно велика, очевидно, вносит некоторую ошибку. Величина этой

ошибки изменяется в зависимости от положения рассматриваемой точки по-разному в каждой задаче, однако для того чтобы произвести ее оценку на простом примере, снова обратимся к случаю линейного тока, протекающего в воздухе вблизи бесконечной плоской граничной поверхности с относительной магнитной проницаемостью μ . Поле в воздухе складывается из полей тока i и его отображения $i(\mu - 1)/(\mu + 1)$ (рис. 3-15). Составляющая напряженности поля, параллельная плоскости, определяется выражением

$$H_x = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{a - y}{[(a - y)^2 + x^2]} + \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right) \frac{a + y}{[(a + y)^2 + x^2]}, \quad (3-34)$$

а составляющая напряженности, направленная по нормали к плоскости,

$$H_y = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{x}{[(a - y)^2 + x^2]} + \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right) \frac{x}{[(a + y)^2 + x^2]}. \quad (3-35)$$

Таким образом, ошибку, вносимую предположением о бесконечно большой магнитной проницаемости, можно найти, если положить $\mu = \infty$ и вычесть полученные соотношения из приведенных уравнений. Ошибка при

определении составляющей напряженности поля по оси x равна:

$$\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{2}{\mu + 1} \cdot \frac{a + y}{[(a + y)^2 + x^2]}, \quad (3-36)$$

а при определении составляющей напряженности поля по оси y

$$\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{2}{\mu + 1} \cdot \frac{x}{[(a + y)^2 + x^2]}. \quad (3-37)$$

В любой точке на границе (определяемой значением $y=0$) величина ошибки, отнесенная к напряженности приложенного поля, для обеих составляющих равна $2/(\mu+1)$ (она становится меньше 5% при $\mu > 39$ и меньше 0,5% при $\mu > 399$) и практически пренебрежимо мала. Кроме того, ошибка уменьшается по мере удаления от границы, поэтому значение $2/(\mu+1)$ является верхним пределом ошибки в любой точке поля. Установлено, что в большинстве задач, которые поддаются решению при конечном значении магнитной проницаемости, допущение $\mu = \infty$ практически вносит небольшую погрешность, и оно принимается во многих задачах, рассмотренных в этой книге.

Влияние вихревых токов. Все рассмотренные в этой книге задачи касаются главным образом установившихся режимов, однако для некоторых переходных процессов в областях, граничащих со средами, где приложенное поле индуцирует вихревые токи, может быть использован приближенный метод, основанный на результатах анализа установившегося режима. Влияние вихревых токов проявляется в уменьшении потока, пересекающего границу, и если принять допущение, что поток вообще не проникает через границу (т. е. что она является линией потока), то решение можно найти, положив магнитную проницаемость границы равной нулю. Поле линейного тока вблизи бесконечного полупространства, заполненного магнитно непроницаемой средой, определяется уравнением (3-8). Это уравнение используется далее в методе конформных преобразований (см. § 10-2-1 и 10-2-2) при определении полей в областях со сложными проводящими границами, вблизи которых протекают переменные токи.

ЛИТЕРАТУРА

3-1 Lodge O J., On some problems connected with the flow of electricity in a plane, *Phil. Mag.*, 5th series, 1, 373—389; 2, 37—47, 1876.

3-2. Searle G. F. C., On the magnetic field due to a current in a wire placed parallel to the axis of a cylinder of iron, *The Electrician*, 453, 510, 1898.

3-3. Hammond P., Electric and magnetic images, *Proc. Instn Electr. Engrs*, 107 C, 306, 1960.

3-4. Kunz J. and Bayley P. L., Some applications of the method of images, *Phys. Rev.*, 17, 147—156, 1921.

3-5. Walker G. B., Electric field of a single grid radio valve, *Proc. Instn Electr. Engrs*, pt. III, 98, 57—63, 1951.

3-6 Mayer D., Mechanické sily působící na čela vinutí statoru sířidavých strojů, *Electrotechnický Ůbzor*, 44, № 8, 395—406, 1955.

3-7 Jayawant B. V., Flux distribution in a permeable sheet with a hole near an edge, *Proc. Instn Electr. Engrs*, 107 C, 238, 1960.

Глава четвертая

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

4-1. ВВЕДЕНИЕ

Метод отображений благодаря своей простоте представляет большую ценность, однако во многих случаях при определении полей в областях с несколькими границами, а также при заданном распределении потенциала или его градиента более удобно решать уравнения поля непосредственно. Эта глава посвящена нахождению решений уравнения Лапласа, а следующая глава касается решения уравнения Пуассона. Решения, которые могут быть получены с помощью метода отображений, можно найти и рассмотренным здесь методом. Это позволяет продемонстрировать соответствие решений, полученных двумя методами.

Метод непосредственного решения уравнений поля, как правило, сводится к нахождению потенциальной функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа, а также заданным граничным и другим условиям, определяющим поле в конкретной исследуемой области. Эта потенциальная функция в общем случае представляет собой сумму нескольких составляющих (каждая из которых в отдельности является решением): одна из них, обычно имеющая вид ряда, отражает влияние границ,

а другие характеризуют влияние источников поля, которыми могут быть токи и заряды. Поле, конечно, может быть определено также с помощью функций потока, хотя это делается редко. Единственная разница заключается в представлении граничных условий. Следует, однако, отметить, что потенциальную функцию нельзя определить для *любой* конкретной задачи. Это связано не с трудностью нахождения решений уравнения, а со сложностью выбора решений, которые удовлетворяют частным граничным и другим условиям, определяющим поле. Существует бесконечное множество решений уравнения Лапласа, например px , $x^2 - y^2$, $e^{nx} \sin ny$ и любая линейная комбинация из них, однако часто невозможно найти такую комбинацию, которая удовлетворяла бы условиям поля на границах конкретной конфигурации.

Тем не менее, если известна система координат, в которой постоянное значение одной координаты (или в некоторых случаях двух) описывает конфигурацию границы, то решение всегда можно найти стандартным способом. Для инженера и физика наиболее интересны две координатные системы: декартовы координаты для анализа полей с прямоугольным очертанием границ и цилиндрическая система для определения полей в областях, границами которых в плоскости являются концентричные окружности и радиусы. Для этих двух координатных систем здесь изложен метод решения и показано, что он сводится просто к определению постоянных в общем выражении для потенциальной функции. Описание иных систем координат, например параболических и эллиптических или биполярных, можно найти в других источниках (см., например, [Л. 1, 4, 7, 38, 40, 48 и 49] и в особенности [Л. 39]).

Когда непосредственное решение возможно, составляющую потенциальной функции, удовлетворяющую граничным условиям, всегда можно представить в виде произведения двух членов, каждый из которых является функцией только одной координаты. В результате дифференциальное уравнение в частных производных можно превратить в два обыкновенных дифференциальных уравнения, связанных с помощью «разделяющей» постоянной, и, таким образом, найти его решение. Общее решение определяется в виде соответствующей линейной комбинации связанных частных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Практически нет необхо-

димости искать общее решение для каждой задачи: можно взять за основу известное общее решение для заданной конфигурации границ и видоизменить его в соответствии с граничными условиями и условиями, определяющими поле, для данной задачи.

В параграфах, касающихся прямоугольных координат, анализ ограничен полями, определяемыми заданным распределением магнитной индукции или потенциала на границе, поскольку метод отображений обеспечивает более простой подход к анализу полей, обусловленных линейными источниками. В параграфах, посвященных цилиндрическим границам, основное внимание обращено на поля, создаваемые токами и полюсами, однако кратко рассмотрены также поля, обусловленные или приводящие к заданному распределению потенциала или его градиента. Поля зарядов, конечно, имеют прямую аналогию с полями полюсов. Вначале исследованы цилиндрические границы. Это позволяет сразу же показать соответствие решений, полученных методом непосредственного решения уравнений поля и методом отображений.

4-2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ГРАНИЦЫ

4-2-1. Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах

Рассмотрим вначале уравнение Лапласа в цилиндрических координатах, составленное для потенциальной функции ψ , определяемой уравнением (2-29):

$$r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad (4-1)$$

и предположим, что его решением является потенциальная функция

$$\psi(r, \theta) = R(r) S(\theta), \quad (4-2)$$

где R является функцией только r , а S — функцией только θ . Определив частные производные $\partial \psi / \partial r$, $\partial^2 \psi / \partial r^2$ и $\partial^2 \psi / \partial \theta^2$ и подставив их в (4-1), получим:

$$\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{S} \cdot \frac{d^2 S}{d\theta^2}. \quad (4-3)$$

Правая часть этого уравнения не зависит от r , а левая — не зависит от θ , поэтому обе части равны постоянной, называемой *разделяющей*. Таким образом, принятое предположение о виде потенциальной функции оправдано. Для любого поля в пренебрежении влиянием токов потенциал в точке (r, θ') равен потенциалу в точке $(r, \theta' + 2n\pi)$, где n — целое число, поэтому отыскиваемое решение должно быть периодической функцией переменной θ . Для удовлетворения этого условия выберем постоянную равной целому положительному числу m^2 , чтобы избежать появления радикалов в дальнейшем. Тогда

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - m^2 R = 0 \quad (4-4)$$

и

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} = -m^2 S. \quad (4-5)$$

Хорошо известными решениями уравнений (4-4) и (4-5) являются

$$R = cr^m + dr^{-m} \quad (4-6)$$

и

$$S = g \cos m\theta + h \sin m\theta, \quad (4-7)$$

где c , d , g и h — постоянные.

Следовательно, подстановка значений R и S в (4-2) дает частное решение исходного уравнения в виде:

$$\psi(r, \theta) = (cr^m + dr^{-m})(g \cos m\theta + h \sin m\theta). \quad (4-8)$$

И лученная функция называется круговой гармонической m -го порядка.

Никаких ограничений на значения входящих в выведенную зависимость постоянных не накладывалось, в связи с чем существует бесконечное множество частных решений вида (4-8), которые могут удовлетворять условию (4-1). Поскольку линейная комбинация этих частных решений тоже удовлетворяет уравнению (4-1) (см. [Л. 13 и 45]), более общее решение может быть представлено в удобном для анализа виде:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m r^m + d_m r^{-m})(g_m \cos m\theta + h_m \sin m\theta), \quad (4-9)$$

где m принимает все целые значения чисел от 1 до ∞ . Для любого определенного значения r в пределах $0 \leq r \leq \infty$ правая часть этого уравнения представляет собой ряд Фурье по θ (который может быть использован для представления любой однозначной периодической функции, какой является ψ) и, следовательно, может описать поле, обусловленное любыми встречающимися в практике граничными условиями. Значения постоянных в отсутствие токов и полюсов зависят только от граничных условий.

Правая часть уравнения (4-9) не может учесть влияние линейных токов и полюсов. Для того чтобы отразить влияние этих источников, необходимо ввести в потенциальную функцию дополнительные члены, которые соответствуют частным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений (4-4) и (4-5) при $m=0$. В случае линейного тока i , расположенного в произвольной точке, потенциальная функция (частное решение) будет иметь вид $(i/2\pi)\alpha$. Угол α с вершиной в точке, где находится ток, определяет угловое положение рассматриваемой точки. Для линейного полюса с магнитной массой p потенциальной функцией является $(p/2\pi) \ln R$, где R — расстояние между полюсом и рассматриваемой точкой поля. Таким образом, полное решение, учитывающее влияние q токов и s полюсов, может быть представлено следующим образом:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m r^m + d_m r^{-m}) (g_m \cos m\theta + h_m \sin m\theta) + \sum_q \frac{i_q}{2\pi} \alpha_q + \sum_s \frac{p_s}{2\pi} \ln R_s. \quad (4-10)$$

Обработка уравнений упростится, если выразить углы α_q и расстояния R_s через r и θ в виде рядов, аналогичных входящим в первую составляющую функции.

Для того чтобы разложить углы α_q в ряды, обратимся к рис. 4-1,а, где показаны ток i , протекающий в точке А, расположенной на расстоянии b от начала координат, и угол α с вершиной в точке, где находится ток, определяющий угловое положение произвольной точки

$P(r, \theta)$. Из геометрических соотношений рисунка

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta - b} = \operatorname{Im} \left| \ln (re^{i\theta} - b) \right|.$$

Эту функцию можно разложить по степеням $(b/r)e^{-i\theta}$ при $r > b$ или по степеням $(r/b)e^{i\theta}$ при $b > r$, чтобы по-

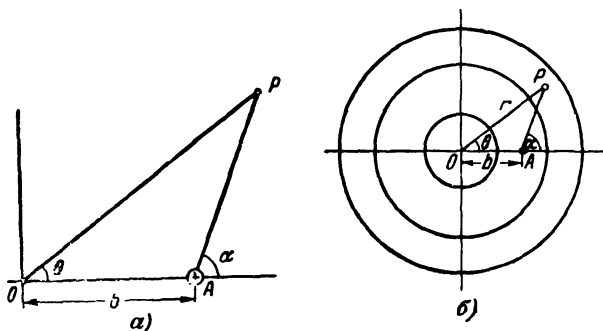


Рис. 4-1.

лучить сходящиеся в указанных областях ряды для α . Таким образом, при $r > b$

$$\alpha = \theta + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{r} \right)^m \sin m\theta, \quad (4-11)$$

а при $r < b$

$$\alpha = \pi - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{b} \right)^m \sin m\theta. \quad (4-12)$$

Далее, при $r = b$ из геометрических соотношений нетрудно показать, что

$$\alpha = \frac{\theta + \pi}{2}. \quad (4-13)$$

Следует отметить, что при использовании уравнений (4-11) и (4-12) для областей, не содержащих токов, входящие в них ряды используются неправильно, поскольку фактически они включены в общие ряды Фурье, описывающие влияние границ. Таким образом, единст-

венным членом, который необходимо добавить к общему решению, будет $(i/2\pi)\theta$ для области, внешней по отношению к той, где протекает ток, и нуль для области, внутренней относительно содержащей ток. Это можно пояснить с помощью рис. 4-1,б, где показаны три кольцевые области с различными значениями магнитной проницаемости. В средней области находится ток i , протекающий в точке A . Для внутренней области в любой точке $r < b$, в связи с чем для разложения α справедливо уравнение (4-12), тогда как в любой точке внешней области $r > b$ и справедливо уравнение (4-11). Следовательно, при объединении входящих в эти уравнения рядов с общими рядами для учета влияния тока в этих областях остается добавить к общему решению соответственно лишь члены 0 и $(i/2\pi)\theta$. В средней области изменению α на 2π соответствует изменение θ , равное 2π или 0 в зависимости от того, будет ли r больше или меньше, чем b . Поэтому уравнения (4-11) и (4-12) должны применяться в отдельности там, где это нужно.

С физической точки зрения член $(i/2\pi)\theta$ учитывает соленоидальный характер поля и его присутствие необходимо для любой области, где можно провести замкнутые контуры, охватывающие ток, но не для областей, в которых такие контуры не могут быть проведены. Ряды учитывают остающееся влияние тока, а именно намагничивание границы, и естественно входят в общий ряд уравнения (4-10).

Аналогичным образом (с использованием закона косинуса) можно показать [Л. 44], что разложение по r и θ функции $\ln R$ в случае линейного полюса (или заряда), расположенного в точке A (рис. 4-1,а), приводит к следующим выражениям:

при $r > b$

$$\ln R = \ln r - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{r}\right)^m \cos m\theta; \quad (4-14)$$

при $r < b$

$$\ln R = \ln r - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{b}\right)^m \cos m\theta, \quad (4-15)$$

а при $r = b$ (θ не кратно π)

$$\ln R = \ln b - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos m\theta. \quad (4-16)$$

Применение всех трех приведенных уравнений необходимо только в потенциальной функции для области, где расположен полюс. Во всех других областях влияние полюса может быть отнесено к намагничиванию границы и, таким образом, включено в общий ряд.

Прежде чем перейти к рассмотрению некоторых примеров, отметим, что при использовании метода разделения переменных проще всего ввести отдельные потенциальные функции для каждой из областей поля, которые должны быть связаны условиями на границах между областями. Граничные условия, выраженные через магнитную индукцию и напряженность поля, связывают градиенты потенциальных функций (см. § 2-3), в связи с чем в общем случае конечное решение дает значения потенциала, изменяющиеся скачком при переходе границы. Если требуется получить решение, которое дает непрерывные значения потенциала в любой точке, то к потенциальным функциям могут быть добавлены соответствующие постоянные, определяемые из дополнительных уравнений, выражающих условие равенства потенциальных функций на границе. Однако, если интерес представляют значения напряженности поля, а не абсолютные значения потенциала, это не дает никаких преимуществ и, как в приведенных ниже примерах, не делается.

4-2-2. Стальной цилиндр в поле линейного тока

Для того чтобы показать на простом примере, как определяются постоянные из общего решения, и установить связь между описываемым методом и методом отображений, рассмотрим поле тока, расположенного во внешней области стального цилиндра (рис. 4-2). Нахождение решения включает определение двух потенциальных функций: для области, заполненной воздухом, ψ_A и для области, заполненной сталью, ψ_I , которые связаны граничными условиями на поверхности цилиндра.

Постоянные, входящие в выражение для ψ_A , выби-

рают таким образом, чтобы были удовлетворены граничные условия в бесконечности и на поверхности цилиндра, а при определении постоянных, содержащихся в функции ψ_I , следует исходить из граничных условий на поверхности цилиндра и его оси, где выбрано начало координат.

Прежде всего, необходимо отметить, что все поле симметрично относительно линии $\theta=0$, проходящей че-

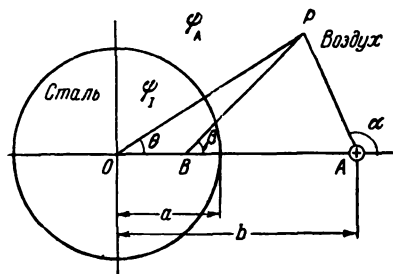


Рис. 4-2.

рез точку, где находится ток, и центр окружности. Поэтому, если выбрать за начало отсчета потенциальных функций ψ_A и ψ_I линию $\theta=0$, то в связи с нечетным характером создаваемого током поля потенциальные функции всего поля будут нечетными и не будут содержать членов с функциями косинуса. Следова-

тельно, общее решение, описывающее влияние границ в двух областях [см. уравнение (4-9)], может быть упрощено и представлено в виде:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} (c_n r^m + d_m r^{-m}) \sin m\theta. \quad (4-17)$$

В области, заполненной воздухом, r может возрасти до бесконечности, но значение потенциала при этом должно остаться конечным (эквипотенциали проходят из бесконечности в точку, где расположен ток); поэтому все значения c_{Am} должны быть равны нулю. Кроме того, ток расположен в области, заполненной воздухом, в связи с чем в потенциальную функцию следует включить член $(i/2\pi)\alpha$. Тогда получим:

$$\psi_A = \frac{i}{2\pi} \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} d_{Am} r^{-m} \sin m\theta. \quad (4-18)$$

В области, заполненной сталью, r может быть равно нулю, но значение потенциала в начале координат должно быть конечным; отсюда d_{Im} будет равно нулю.

В этой области нет токов или полюсов и дополнительные члены не появятся. Следовательно,

$$\psi_I = \sum_{m=1}^{\infty} c_{Im} r^m \sin m\theta. \quad (4-19)$$

Остается определить постоянные d_{Am} и c_{Im} из условия непрерывности функций ψ_A и ψ_I на поверхности цилиндра. Граничные условия здесь согласно (2-70) и (2-71) имеют вид для тангенциальной составляющей напряженности поля:

$$-\left(\frac{\partial\psi_A}{r\partial\theta}\right)_{r=a} = -\left(\frac{\partial\psi_I}{r\partial\theta}\right)_{r=a}, \quad (4-20)$$

а для радиальной составляющей магнитной индукции:

$$-\left(\frac{\partial\psi_A}{\partial r}\right)_{r=a} = -\mu \left(\frac{\partial\psi_I}{\partial r}\right)_{r=a}, \quad (4-21)$$

где μ — относительная магнитная проницаемость стали.

Подставив в выражение для ψ_A значение α из (4-12), продифференцировав ψ_A и ψ_I и введя полученные выражения в (4-20) и (4-21), найдем:

$$d_{Am} - a^{2m}c_{Im} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{a^{2m}}{mb^m} \quad (4-22)$$

и

$$d_{Am} + \mu a^{2m}c_{Im} = -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{a^{2m}}{mb^m}. \quad (4-23)$$

Определив из последних двух выражений c_{Im} и d_{Am} , получим следующие полные решения:

$$\psi_A = \frac{i}{2\pi} \left[\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{2m}}{b^m r^m} \sin m\theta \right] \quad (4-24)$$

и

$$\psi_I = -\frac{i}{(\mu + 1)\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{r^m}{b^m} \sin m\theta. \quad (4-25)$$

Радиальная и тангенциальная составляющие напряженности поля соответственно равны $-(\partial\psi/\partial r)$ и

— $(\partial\psi/r\partial\theta)$. При их определении α необходимо выразить через θ , как было показано в § 4-1.

Соответствие решения, найденного методом отображений, решению, полученному выше, можно показать, определив сумму потенциальных функций источника и отображенных токов, а затем представив ее в виде рядов с использованием уравнений (4-11) и (4-12). Если ток протекает в точке A , то поле во внешней области цилиндра определяют отображенные токи $i(\mu-1)/(\mu+1)$, находящийся в точке B , обратной точке A , и $-i(\mu-1)/(\mu+1)$, расположенный в точке O . Обусловленная ими потенциальная функция имеет вид:

$$\psi_A = \frac{i}{2\pi} \left[\alpha + \frac{\mu-1}{\mu+1} \beta - \frac{\mu-1}{\mu+1} \theta \right]. \quad (4-26)$$

В результате подстановки значения β из (4-11) ($r_A > OB$) с учетом соотношения $OB = a^2/b$ выражение (4-26) превратится в (4-24). Соответствие решений для области, заполненной сталью, можно продемонстрировать аналогичным образом.

Решения ряда задач для одной цилиндрической границы и одного тока, выраженные через аналогичные гармонические функции, приведены в [Л. 22 и 41], однако практически такие простые задачи решаются быстрее с помощью метода отображений. Ниже рассмотрены некоторые задачи, для которых метод разделения переменных дает более простое, а иногда и единственное практически возможное решение.

4-2-3. Экранирующее действие стального цилиндра

Рассмотрим действие стального цилиндра, который используется, например, для экранирования гальванометра от магнитного поля земли. Цилиндр с относительной магнитной проницаемостью μ , имеющий размеры, показанные на рис. 4-3, помещен в равномерное магнитное поле с напряженностью H . Полное решение для поля во всех областях включает три потенциальные функции: ψ_A для внешнего воздушного пространства, ψ_I для стали и ψ_B для внутренней области, заполненной воздухом, которая и должна быть исследована. Поскольку в поле нет токов и полюсов, а по условиям симметрии $\psi(r, \theta') = \psi(r, -\theta')$, решение не будет содержать функ-

ций синуса и общее выражение для каждой из этих потенциальных функций будет иметь вид:

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m r^m + d_m r^{-m}) \cos m\theta. \quad (4-27)$$

Если обратиться вначале к внешнему воздушному пространству, то заметим, что граничные условия в бесконечности относятся не к значению потенциала, как в предыдущем примере, а к его градиенту. В бесконечности поле равномерно и радиальная составляющая напряженности равна:

$$H \cos \theta = - \frac{\partial \psi_A}{\partial r}, \quad (4-28)$$

т. е.

$$H \cos \theta = - \sum_{m=1}^{\infty} (m c_{Am} r^{m-1} - m d_{Am} r^{-(m+1)}) \cos m\theta. \quad (4-29)$$

Из соотношения (4-29) следует, что значение m может быть равно только единице и, кроме того, $c_{A1} = -H$. Таким образом, для внешнего воздушного пространства (4-27) принимает вид:

$$\psi_A = - \left(Hr - \frac{d_{A1}}{r} \right) \cos \theta. \quad (4-30)$$

Условия равенства радиальных составляющих магнитной индукции и тангенциальных составляющих напряженности поля при переходе поверхности раздела сталь—воздух могут быть представлены следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \psi_A}{\partial r} \right)_{r=a} = \mu \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial r} \right)_{r=a}; \quad (4-31)$$

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \psi_A}{\partial \theta} \right)_{r=a} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial \theta} \right)_{r=a}; \quad (4-32)$$

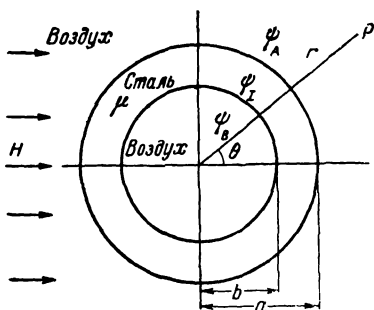


Рис. 4-3.

$$\mu \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial r} \right)_{r=b} = \left(\frac{\partial \psi_B}{\partial r} \right)_{r=b}; \quad (4-33)$$

$$\frac{1}{b} \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial \theta} \right)_{r=b} = \frac{1}{b} \left(\frac{\partial \psi_B}{\partial \theta} \right)_{r=b}. \quad (4-34)$$

Далее, поскольку

$$\left(\frac{\partial \psi_A}{\partial r} \right)_{r=a} = - \left(H + \frac{d_{A1}}{a^2} \right) \cos \theta, \quad (4-35)$$

согласно (4-30), (4-32) и (4-33) единственное значение, которое может принять m в выражениях для ψ_I и ψ_B , также равно единице. Следовательно,

$$\psi_I = - \left(c_{I1} r - \frac{d_{I1}}{r} \right) \cos \theta \quad (4-36)$$

и

$$\psi_B = - \left(c_{B1} r - \frac{d_{B1}}{r} \right) \cos \theta. \quad (4-37)$$

Оставшееся граничное условие требует, чтобы ψ_B имело конечное значение даже при $r=0$, откуда $d_{B1}=0$ и

$$\psi_B = - c_{B1} r \cos \theta. \quad (4-38)$$

Таким образом, поле во внутреннем воздушном пространстве совпадает по направлению с линией $\theta=0$ и имеет напряженность $-\frac{1}{\cos \theta} \partial \psi_B / \partial r = c_{B1}$ (постоянная), т. е. является равномерным. Дифференцирование ψ_A , ψ_I и ψ_B и подстановка полученных зависимостей в выражения для граничных условий на линиях раздела (4-31)—(4-34) дает:

$$\left. \begin{aligned} H + \frac{d_{A1}}{a^2} &= \mu \left(c_{I1} + \frac{d_{I1}}{a^2} \right); \\ H - \frac{d_{A1}}{a^2} &= c_{I1} - \frac{d_{I1}}{a^2}; \\ \mu \left(c_{I1} + \frac{d_{I1}}{b^2} \right) &= c_{B1}; \\ c_{I1} - \frac{d_{I1}}{b^2} &= c_{B1}. \end{aligned} \right\} \quad (4-39)$$

Из уравнений (4-39) определяют постоянные. Постоянная c_{B1} согласно (4-38) равна напряженности поля внутри цилиндра:

$$c_{B1} = \frac{4\mu a^2 H}{a^2 (\mu + 1)^2 - (\mu - 1)^2 b^2} \quad (4-40)$$

и практически, поскольку $\mu \gg 1$,

$$c_{B1} = \frac{4}{\mu} \cdot \frac{H}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (4-41)$$

Отсюда следует, что при заданном соотношении размеров напряженность поля внутри цилиндра изменяется обратно пропорционально магнитной проницаемости. Например, для му-металла при значениях напряженности поля до 1 э, когда величина магнитной проницаемости равна 10 000 или более, она уменьшается до 0,04% значения ее во внешней области. Картина всего поля изображена на рис. 4-4.

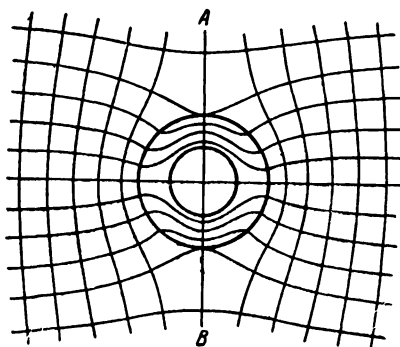


Рис. 4-4.

Анализ этой задачи, исходя из поверхностного намагничивания, дан в [Л. 4-1].

Представление цилиндра в виде диполя. На основании полученного решения можно прийти к интересному выводу, что влияние цилиндра конечной толщины на равномерное поле можно учесть с помощью диполя тока. В § 3-3 было показано, что диполь может быть использован также для учета влияния *массивного*

цилиндра на равномерное поле. Подставив в (3-23) $t = re^{j\theta}$, заметим, что в цилиндрических координатах потенциальная функция поля диполя, расположенного в начале координат и имеющего ось, совпадающую с линией $\theta=0$, и момент, равный d , может быть представлена в виде:

$$\psi = \operatorname{Re} \left(\frac{d}{r} e^{-i\theta} \right) = \frac{d}{r} \cos \theta. \quad (4-42)$$

Однако потенциальная функция ψ_A для внешней области цилиндра определяется правой частью (4-30), где первый член представляет собой потенциальную функцию приложенного равномерного поля, а второй согласно изложенному выше является потенциальной функцией диполя. Таким образом, влияние полого цилиндра на равномерное поле можно учесть с помощью диполя, расположенного на оси цилиндра и имеющего момент $d = d_{A1}$, равный

$$d_{A1} = \frac{(\mu - 1) [1 - (b/a)^2] a^2 H}{(\mu + 1) [1 - (\mu - 1)^2 b^2 / (\mu + 1)^2 a^2]}. \quad (4-43)$$

4-2-4. Сила взаимодействия между проводниками ротора и статора в машине с цилиндрическим ротором

В машине с цилиндрическим ротором магнитная цепь состоит в основном из толстостенной внешней стальной оболочки (статора), отделенной воздушным пространством (зазором) от коаксиального по отношению к ней массивного стального цилиндра (ротора) (рис. 4-5). Для того чтобы найти тангенциальную силу взаимодействия между типичными проводниками ротора и статора, начнем с определения поля, создаваемого током статора, в месте, где расположен проводник ротора.

Обозначим потенциальные функции в четырех областях поля через ψ_0 для внешнего воздушного пространства, ψ_S для статора, ψ_G для воздушного зазора и ψ_R для

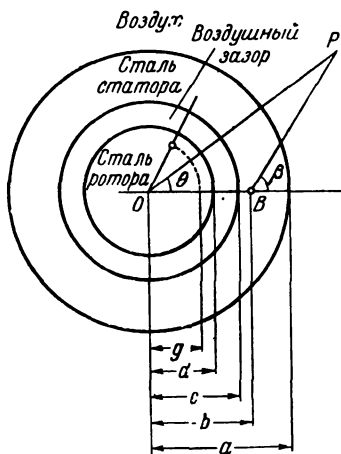


Рис. 4-5.

ротора. В области статора протекает ток, линия $\theta=0$ является осью симметрии поля во всех областях и потенциальные функции должны быть нечетными относительно этой линии, а r может принимать значения, равные бесконечности во внешнем воздушном пространстве и нулю в области ротора. Тогда потенциальные функции поля (обусловленные только током статора) могут быть представлены следующим образом: для внешнего воздушного пространства

$$\psi_O = \frac{i_S}{2\pi} \theta + \sum_{m=1}^{\infty} D_{Om} r^{-m} \sin m\theta; \quad (4-44)$$

для статора

$$\psi_S = \frac{i_S}{2\pi} \beta + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{Sm} r^m + D_{Sm} r^{-m}) \sin m\theta, \quad (4-45)$$

где β — угол с вершиной в точке, где находится проводник статора;

для воздушного зазора

$$\psi_G = \sum_{m=1}^{\infty} (C_{Gm} r^m + D_{Gm} r^{-m}) \sin m\theta \quad (4-46)$$

и для ротора

$$\psi_R = \sum_{m=1}^{\infty} C_{Rm} r^m \sin m\theta. \quad (4-47)$$

Постоянные обозначены заглавными буквами, чтобы не было путаницы с геометрическими размерами.

В исследуемом поле имеются три линии раздела, поэтому после подстановки четырех приведенных выше зависимостей в соотношения, определяющие граничные условия на линиях раздела, получим шесть уравнений, из которых можно найти постоянные, входящие в потенциальные функции. Используя обозначения рис. 4-5 и обозначив значение относительной магнитной проницаемости для стальных деталей через μ , определим постоянные:

$$D_{Om} = \frac{i_S \mu}{\pi(\mu+1)} \{b^{2m} [(\mu+1)^2 c^{2m} - (\mu-1)^2 d^{2m}] - c^{2m} [(\mu^2-1)(c^{2m} - d^{2m})]\} \frac{1}{Q}; \quad (4-48)$$

$$C_{Sm} = \frac{i_S}{2\pi} \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \frac{1}{a^{2m}} \{ b^{2m} [(\mu+1)^2 c^{2m} - (\mu-1)^2 d^{2m}] - c^{2m} [(\mu^2-1)(c^{2m} - d^{2m})] \} \frac{1}{Q}; \quad (4-49)$$

$$D_{Sm} = \frac{i_S}{2\pi} c^{2m} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^{2m} \right] (\mu^2 - 1) (c^{2m} - d^{2m}) \right\} \frac{1}{Q}; \quad (4-50)$$

$$C_{Gm} = - \frac{i_S}{\pi} \mu (\mu+1) c^{2m} \times \\ \times \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^{2m} \right] \frac{1}{Q}; \quad (4-51)$$

$$D_{Gm} = \frac{i_S}{\pi} \mu (\mu-1) c^{2m} d^{2m} \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^{2m} \right] \frac{1}{Q}; \quad (4-52)$$

$$C_{Rm} = - \frac{2i_S}{\pi} \mu c^{2m} \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^{2m} \right] \frac{1}{Q}, \quad (4-53)$$

где

$$Q = \left\{ [(\mu+1)^2 c^{2m} - (\mu-1)^2 d^{2m}] - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \left(\frac{c}{a} \right)^{2m} (\mu^2 - 1) (c^{2m} - d^{2m}) \right\} mb^m. \quad (4-54)$$

Радиальная составляющая обусловленной током статора магнитной индукции в точке, где находится проводник ротора, равна:

$$B_r = - \mu \mu_0 \left(\frac{\partial \psi_R}{\partial r} \right)_{r=g}, \quad (4-55)$$

и если в роторе протекает ток i_R , возникает тангенциальная сила F_t , которая стремится повернуть ротор:

$$F_t = i_R B_r = - i_R \mu \mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} m C_{Rm} g^{m-1} \sin m\theta = \\ = - \frac{2\mu_0 i_S i_R}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{g^{m-1}}{b^m} \mu^2 \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^{2m} \right] \sin m\theta}{\left[(\mu+1)^2 - (\mu-1)^2 \left(\frac{d}{c} \right)^{2m} - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^{2m} \right] \sin m\theta} \dots \rightarrow \\ \leftarrow \dots \frac{1}{-(\mu-1)^2 \frac{1}{a^{2m}} (c^{2m} - d^{2m})} \right]. \quad (4-56)$$

Направление силы F_t зависит от направления токов i_S и i_R .

Если положить $a=1,4$; $b=1,12$; $c=1,02$; $d=1,0$ и $g=0,9$, то в результате расчетов с помощью полученного выражения (4-56) при значениях μ , равных ∞ и 100, получим кривые, изображенные на рис. 4-6. Влияние магнитной проницаемости

сказывается весьма существенно ввиду того, что в модели проводники заложены глубоко в сталь. В реальной машине проводники находятся в пазах и принятое при анализе допущение оказывается неудовлетворительным. Однако, если представить реальную машину моделью, в которой токи распределены на поверхности сердечников ротора и статора, то сила, вызывающая

вращение, будет определена с достаточной точностью. Как и во многих подобных решениях, ряды сходятся медленно; для снижения погрешности до значения, не превышающего 1%, необходимо взять 25 членов, и расчет одной кривой, аналогичной представленным на рис. 4-6, вручную отнимает несколько часов.

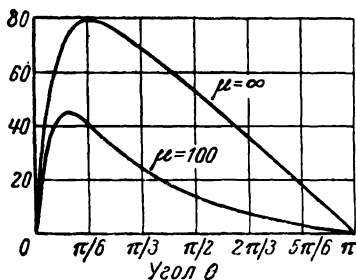


Рис. 4-6. Зависимость параметра [сила/($2\mu_0 i_S i_R / \pi g$)] от угла θ .

4-2-5. Заданное распределение потенциала или его градиента по периметру круговой границы

Рассмотренные выше примеры анализа полей в областях с круговыми границами ограничены случаями, когда источниками поля являются токи. Однако изложенный здесь метод может быть использован также для определения полей (электрических и магнитных), обусловленных заданным распределением потенциала или его градиента на границах круговых областей. Ниже дается краткое описание таких задач и проводится общее решение, известное как интеграл Пуассона, для поля внутри круга, создаваемого заданным распределением потенциала на окружности.

Применение рядов Фурье. Общим решением для поля, не содержащего линейных источников, в обла-

сти, ограниченной окружностью с центром в начале координат, является потенциальная функция, определяемая уравнением (4-9), с добавлением постоянной, т. е.

$$\psi(r, \theta) = k + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m r^m + d_m r^{-m}) (g_m \cos m\theta + h_m \sin m\theta). \quad (4-57)$$

Если обратиться вначале к случаю одной *внутренней* области окружности ($r=r'$), то, поскольку при $r=0$ значение ψ остается конечным, $d_m=0$ и решение примет вид:

$$\psi(r, \theta) = k + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (G_m \cos m\theta + H_m \sin m\theta), \quad (4-58)$$

где $G_m = c_m g_m$ и $H_m = c_m h_m$. Когда на границе задано распределение потенциала $\psi'(r', \theta')$, полное решение для создаваемого им поля находится путем такого выбора значений постоянных k , $r'^m G_m$ и $r'^m H_m$, чтобы правая часть (4-58) была равна $\psi'(r', \theta')$. Иначе говоря, с помощью постоянных должны быть построены ряды Фурье, определяющие функцию $\psi'(r', \theta')$ в пределах $0-2\pi$; следовательно,

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi'(r', \theta') d\theta'; \quad (4-59)$$

$$r'^m G_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi'(r', \theta') \cos m\theta' d\theta' \quad (4-60)$$

и

$$r'^m H_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi'(r', \theta') \sin m\theta' d\theta'. \quad (4-61)$$

Для одной *внешней* области окружности ($r=r'$) решение аналогично приведенному выше, за исключением того, что в (4-58) необходимо заменить r^m на $(1/r^m)$, а в уравнениях (4-59)—(4-61) r'^m на $(1/r'^m)$. Если на границе задано распределение градиента потенциала, то входящие в (4-58) постоянные находятся таким же путем в результате построения рядов Фурье для $\partial\psi'/\partial r$ или $\partial\psi'/r'\partial\theta$ на границе.

Здесь не приведено примеров решения подобных задач, но некоторые случаи описаны в работах [Л. 4-2 и 4-3], посвященных анализу распределения потока в области статора машины, обусловленного приложенным синусоидальным полем.

Интеграл Пуассона. Общее решение задачи Дирихле (заданное распределение потенциала на границе) для внутренней области окружности, известное как интеграл Пуассона, играет очень важную роль, особенно в методах преобразования (см. § 8-4 и 10-6-1). Здесь кратко изложен его вывод из полученных выше уравнений при обычном выборе радиуса ограничивающей окружности равным единице. Подстановка коэффициентов Фурье (при $r' = 1$) в выражение для потенциальной функции (4-58) дает:

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi'(\theta') [1 + 2\sum r^m \cos m(\theta - \theta')] d\theta'. \quad (4-62)$$

Выражение в квадратных скобках уравнения (4-62) может быть упрощено с использованием следующих тождеств:

$$\begin{aligned} 1 + 2\sum r^m \cos m(\theta - \theta') &= \operatorname{Re} [1 + 2\sum r^m e^{jm(\theta - \theta')}] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1 + re^{j(\theta - \theta')}}{1 - re^{j(\theta - \theta')}} \right] = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \theta')}. \end{aligned} \quad (4-63)$$

Таким образом, (4-62) приводится к выражению

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \theta')} \psi'(\theta') d\theta', \quad (4-64)$$

которое представляет собой интеграл Пуассона, дающий непосредственное решение для поля во внутренней области единичной окружности при любом заданном распределении потенциала $\psi'(\theta')$ на ней (см. выводы § 10-6).

4-3. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ

4-3-1. Решение уравнения Лапласа в декартовых координатах

В декартовых координатах уравнение Лапласа записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (4-65)$$

Его решение может быть найдено таким же методом, как и для цилиндрической системы координат. Если предположить, что оно имеет вид:

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y), \quad (4-66)$$

где X является функцией только переменной x , а Y — функцией только переменной y , то дифференциальное уравнение в частных производных будет сведено к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + m^2X = 0 \quad (4-67)$$

и

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - m^2Y = 0, \quad (4-68)$$

где m — постоянная.

В результате решения уравнений (4-67) и (4-68) найдем частное решение:

$$\psi(x, y) = (c \sin mx + d \cos mx)(g \operatorname{sh} my + h \operatorname{ch} my), \quad (4-69)$$

а общее выражение для потенциальной функции (см. § 4-2-1) будет иметь вид:

$$\psi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \sin mx + d_m \cos mx)(g_m \operatorname{sh} my + h_m \operatorname{ch} my). \quad (4-70)$$

При любом значении y в пределах $0 \leq y \leq \infty$ эта функция представляет собой ряд Фурье, периодически изменяющийся в зависимости от x , и поэтому может быть использована для описания поля, обусловленного влиянием границ. В случае $m=0$ обыкновенные дифференциальные уравнения (4-67) и (4-68) приводят к появлению дополнительных членов

$$k_1 + k_2x + k_3y, \quad (4-71)$$

которые также являются решениями уравнения поля. Постоянная k_1 определяет начальное значение потенциала, а k_2 и k_3 — равномерные поля соответственно в направлениях осей x и y . Таким образом, более общим решением будет:

$$\psi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \sin mx + d_m \cos mx)(g_m \operatorname{sh} my + h_m \operatorname{ch} my) + k_1 + k_2x + k_3y. \quad (4-72)$$

Это решение не учитывает влияния линейных источников, расположенных в поле. Для того чтобы его отразить, необходимо включить потенциальные функции этих источников. Ранее они были определены в более удобных цилиндрических координатах, а в декартовой системе координат имеют следующий вид: для тока i , расположенного в точке (x_0, y_0) ,

$$\psi = \frac{i}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right), \quad (4-73)$$

а для полюса с магнитной массой p , находящегося в точке (x_0, y_0) ,

$$\psi = \frac{p}{2\pi} \ln \sqrt{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}. \quad (4-74)$$

Однако общее решение здесь не приводится, поскольку по виду уравнений (4-73) и (4-74) очевидно, что для решения задач в случае прямоугольных границ и линейных источников более удобен метод зеркальных отображений.

Для целых положительных значений m уравнение (4-70) дает решение, которое является периодической функцией x , т. е. решение, полученное для области $a \leq x \leq a + \lambda$, справедливо для последовательности аналогичных полей в области $a + n\lambda \leq x \leq a + (n+1)\lambda$, где n — целое число, принимающее значения от $-\infty$ до $+\infty$. При выборе постоянной m^2 с противоположным знаком получим решение, периодически изменяющееся в функции y .

Ниже исследованы две (аналогичные) конфигурации границ, для которых уравнение Лапласа в декартовых координатах может быть решено с помощью функции (4-72), и рассмотрены пути расширения области применения решений.

4-3-2. Полубесконечная полоса и 'прямоугольник

Решения, основанные на применении уравнения (4-72), можно получить для внутренних областей прямоугольника и полубесконечной полосы, поскольку ее можно рассматривать как прямоугольник, одна сторона которого находится в бесконечности. Однако их нельзя найти для внешних областей по причинам, изложенным в конце этого параграфа.

Начальное значение потенциала k_1 исследуемого поля для простоты может быть принято равным нулю. Кроме того, можно пренебречь равномерными полями, направленными по осям координат, и положить $k_2 = k_3 = 0$.

Полубесконечная полоса. Вначале найдем постоянные для определения поля во внутренней области полубесконечной полосы $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq \infty$ (рис. 4-7), стороны которой $x=0$, $x=a$ и $y=\infty$ имеют потенциал,

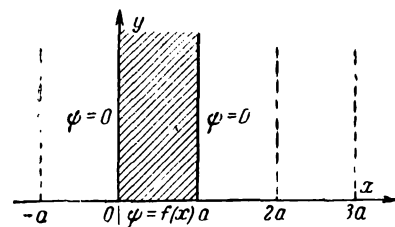


Рис. 4-7.

равный нулю, а к стороне $y=0$ приложено заданное распределение потенциала $f(x)$. Реально существует только одна такая полоса, однако математический анализ ничем не отличается от анализа в том случае, когда имеется последовательность примыкающих одна к другой

полос, как показано на рисунке пунктиром.

Граничные условия для потенциала внутри рассматриваемой полосы определяются следующим образом:

$$\psi(0, y) = 0; \quad (4-75)$$

$$\psi(a, y) = 0; \quad (4-76)$$

$$\psi(x, \infty) = 0 \quad (4-77)$$

и

$$\psi(x, 0) = f(x). \quad (4-78)$$

Первое из них будет удовлетворено, если

$$d_m = 0, \quad (4-79)$$

а второе при

$$m = \frac{\alpha\pi}{a}, \quad (4-80)$$

где α — целое число. Согласно третьему условию [уравнение (4-77)]

$$g_m \operatorname{sh} \infty + h_m \operatorname{ch} \infty = 0,$$

поэтому

$$g_m = -h_m. \quad (4-81)$$

Если подставить найденные значения m , d_m и g_m в (4-70) и представить $\operatorname{sh} my$ и $\operatorname{ch} my$ в экспоненциальном виде, то получим:

$$\psi(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} C_{\alpha} e^{-\frac{\alpha\pi}{a} y} \sin \frac{\alpha\pi}{a} x, \quad (4-82)$$

где $C_{\alpha} = c_{\alpha} h_{\alpha}$.

В соответствии с четвертым условием [уравнение (4-78)]

$$f(x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} C_{\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{a} x, \quad (4-83)$$

т. е. постоянные C_{α} должны быть коэффициентами разложения функции $f(x)$ в ряде Фурье по синусам. Далее, хорошо известно (см., например, [Л. 13 и 45]), что коэффициенты C_m разложения функции $f(x)$ в пределах $0—a$ в ряд Фурье по синусам определяются выражением

$$C_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin mx \, dx. \quad (4-84)$$

Так, например, если потенциал во всех точках стороны $y=0$ равен единице, то m будет нечетным только тогда, когда

$$C_{(2k-1)} = \frac{4}{\pi(2k-1)}, \quad (4-85)$$

и значение потенциала в любой точке полосы будет равно:

$$\psi(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{-\frac{(2k-1)}{a} \pi y} \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{a} x \right]. \quad (4-86)$$

Исходя из семейства зависимостей ψ от x для ряда значений y , путем интерполяции можно получить эквипотенциали. Аналогичным образом линии потока могут быть определены из семейства кривых функции потока φ , которая находится из потенциальной функции с помощью соотношений Коши—Римана, как было показано выше (см. § 2-4-3 и 2-4-4). Линии потока и эквипотенциали изображены на рис. 4-8.

Полученное решение проще всего исследовать на задачах из области электростатики, однако оно относится

также к некоторым системам токов. Во-первых, аналогичное поле было бы создано (в положительной полуплоскости) бесконечным рядом токов с чередующимися знаками, расположенных на оси x в точках $\dots, -a, 0, a, 2a, \dots$, если каждый из них равен $4a$. Ток n создает разность потенциалов $n/4$ между двумя линиями, пересекающимися под прямым углом в точке, где он находится. Во-вторых, такое же поле создадут противоположные по знаку токи $2a$, расположенные в точках 0 и a , если границы $x=0$ и $x=a$ обладают бесконечно большой магнитной проницаемостью. Наконец,

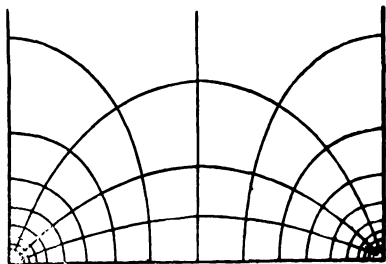


Рис. 4-8

еще одно эквивалентное поле можно получить из описанных выше, если предположить, что ось x является границей области с бесконечно большой магнитной проницаемостью в отрицательной полуплоскости, а токи имеют вдвое меньшую величину.

Прямоугольник. Определение поля во внутренней области прямоугольника также представляет большой интерес. Полученное решение нашло применение, например, для исследования поля в плоском сечении электронного умножителя, где каждая пара диагонально противоположных сторон имеет различные потенциалы [Л. 51]. При анализе использовалось наложение отдельных решений для различных распределений потенциала на каждой из сторон прямоугольника (потенциалы остальных сторон во всех случаях принимались равными нулю). Ниже рассмотрены типовые основные решения для внутренней области прямоугольника.

На рис. 4-9 показана область $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$, поле в которой необходимо определить для двух разных комбинаций граничных условий. Различие между ними заключается в том, что в первом случае сторона $y=b$ имеет потенциал, равный нулю, тогда как во втором она магнитно непроницаема. Условия на остальных сторонах $x=0$, $x=a$ и $y=0$ в обоих случаях соответствуют уравнениям (4-75), (4-76) и (4-78) для полосы. Следовательно, они приводят к тем же значениям постоянных

d_m , m и C_α , которые были определены в (4-79), (4-80) и (4-83). Согласно оставшемуся условию на стороне $y = b$ в первом случае ($\psi = 0$)

$$g_m \operatorname{sh} mb + h_m \operatorname{ch} mb = 0,$$

или

$$\frac{g_m}{h_m} = -\operatorname{cth} mb, \quad (4-87)$$

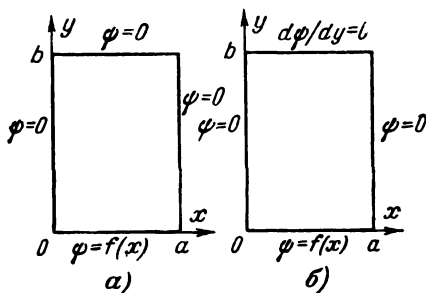


Рис. 4-9.

а во втором случае ($\partial\psi/\partial y = 0$)

$$mg_m \operatorname{ch} mb + mh_m \operatorname{sh} mb = 0,$$

или

$$\frac{g_m}{h_m} = -\operatorname{th} mb. \quad (4-88)$$

Таким образом, решения имеют вид:

для случая, когда сторона $y = b$ имеет потенциал, равный нулю,

$$\psi(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} C_\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{a} x\right) \frac{\operatorname{sh} [\alpha\pi(b-y)/a]}{\operatorname{sh} [\alpha\pi b/a]}; \quad (4-89)$$

для случая, когда сторона $y = b$ магнитно непроницаема,

$$\psi(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} C_\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{a} x\right) \frac{\operatorname{ch} [\alpha\pi(b-y)/a]}{\operatorname{ch} [\alpha\pi b/a]}. \quad (4-90)$$

В выражениях (4-89) и (4-90) постоянные C_α являются коэффициентами разложения $f(x)$ в ряд Фурье по синусам [см. уравнение (4-84)].

Взаимосвязанные области. Полученные здесь результаты можно распространить на взаимосвязанные прямоугольные области при условии, что они имеют одинаковую ширину, а следовательно, и m (см. § 5-5). В этом случае используются уравнения, выражающие непрерывность нормальной составляющей индукции и тангенциальной составляющей напряженности поля на границе, как было показано при анализе круговых границ.

Причина невозможности нахождения решения для внешней (бесконечной) области прямоугольника связана с применением межобластных уравнений непрерывности. Для того чтобы исследовать все внешнее пространство, его необходимо разделить на несколько областей (образуемых продолжением сторон прямоугольника до бесконечности). Отдельные потенциальные функции для каждой области должны быть связаны с функциями соседних областей уравнениями непрерывности. Однако потенциальные функции для областей, бесконечных в направлениях как оси x , так и оси y , представляют собой интегральные выражения и их обработка очень трудна. Поэтому, а также в связи с большим числом уравнений непрерывности найденное формальное решение не может быть реализовано.

Последний пример показывает, каким образом решение, полученное для полей с основными простыми прямоугольными границами, может быть использовано при решении реальной задачи для области, конфигурация границ которой описывается сложным уравнением.

4-3-3. Конфигурация полюса индукторного генератора, создающая синусоидальное распределение поля.

Индукторный генератор является единственной машиной, которая даже теоретически может служить источником питания с синусоидальной кривой э. д. с. Конфигурация полюса, необходимая для удовлетворения этого требования, была определена [Л. 4-4 и 4-5] с помощью менее последовательных методов, чем описанный здесь. Очертание границ исследуемой области изображено схематически на рис. 4-10, где поверхность статора представлена прямой линией, а поверхность ротора подштрихована. Поскольку полюсное деление t мало по сравнению с воздушным зазором, его спрямление вносит

незначительную погрешность. Если предположить, что сталь обладает бесконечно большой магнитной проницаемостью, то конфигурацию поверхности ротора, дающую синусоидальное распределение поля на поверхности статора, можно определить следующим образом. Вначале находится распределение потенциала в типовой полу-

бесконечной области

(между пунктирными линиями и осью x), создающее требуемое распределение магнитной индукции по оси x . Далее, поскольку поверхность ротора является эквипотенциальной ($\mu = \infty$), искомая конфигурация ее может быть выбрана в соответствии с любой эквипотенциальной поля, которая определяется, исходя из решения для полубесконечной области¹.

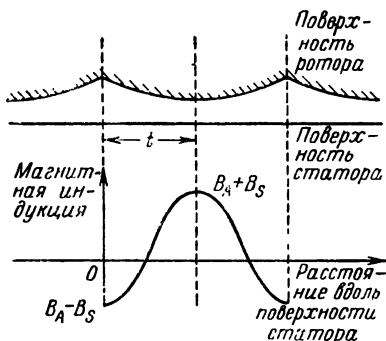


Рис. 4-10.

Поле, естественно, является периодической функцией x и может быть исследовано, исходя из рассмотрения типовой вертикальной полосы, ограниченной линиями $x=0$, $x=t$ и $y=0$. Далее, линии $x=0$ и $x=t$, очевидно, совпадают с линиями потока, и требуется, чтобы на линии $y=0$ магнитная индукция изменялась гармонически с периодом $2t$, т. е. решение должно удовлетворять граничным условиям:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \quad (4-91)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x=t} = 0. \quad (4-92)$$

и

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y=0} = B_A - B_S \cos\left(\frac{\pi}{t} x\right), \quad (4-93)$$

¹ Способ представления реальной границы сложной конфигурации эквипотенциальной поля очень важен для распространения простых решений и имеет широкую область применения (см., например, [Л. 8-9]).

где B_A является средним значением индукции, а B_S — амплитудой периодически изменяющейся составляющей индукции на поверхности статора.

Если, помимо этого, предположить, что поверхность статора, как и ротор, имеет бесконечно большую магнитную проницаемость, то получим $(\partial\psi/\partial x)_{y=0}=0$. Это условие выполняется, и решение принимает наиболее простой вид, когда значение потенциала на поверхности якоря равно нулю. Тогда оставшееся граничное условие будет иметь вид:

$$\psi(x, 0) = 0. \quad (4-94)$$

Общее решение для исследуемой области согласно (4-72) может быть представлено следующим образом:

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \sin mx + d_m \cos mx) (g_m \operatorname{sh} my + h_m \operatorname{ch} my) + k_1 + k_2 x + k_3 y. \quad (4-95)$$

Исходя из полученного выражения и граничных условий, можно определить постоянные. Первое условие согласно (4-91) дает:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} c_m &= 0 \\ k_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4-96)$$

а второе в соответствии с (4-92) дает:

$$m = \frac{\alpha\pi}{t}, \quad (4-97)$$

где α — целое число.

Далее, из (4-94)

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} h_m &= 0 \\ k_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-98)$$

В результате подстановки всех этих постоянных в (4-95) и дифференцирования по y получим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \sum_{\alpha} \frac{\alpha\pi}{t} d_m g_m \cos \frac{\alpha\pi x}{t} \operatorname{ch} \frac{\alpha\pi y}{t} + k_3. \quad (4-99)$$

Таким образом, в соответствии с (4-93) найдем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1 \text{ (только);} \\ k_3 &= B_A \\ d_m g_m &= -\frac{t}{\pi} B_s. \end{aligned} \right\} \quad (4-100)$$

и

Окончательное выражение для потенциала имеет вид:

$$\psi = B_A y - \frac{t}{\pi} B_s \operatorname{sh} \frac{\pi}{t} y \cos \frac{\pi}{t} x. \quad (4-101)$$

При $\psi=0$ оно превращается в уравнение $y=0$ для поверхности якоря, а при любых других значениях ψ приводит к уравнению для возможной конфигурации ротора.

Очертание поверхности ротора, наиболее подходящее для конкретного случая, зависит от величины намагничивающей силы (н. с.), создающей разность магнитных потенциалов между ротором и статором, отношения сред-

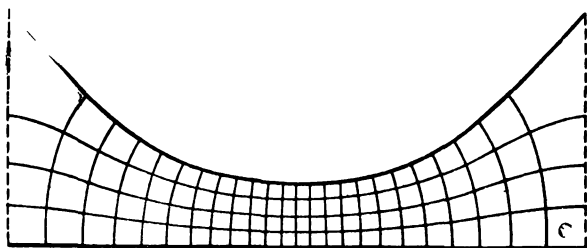


Рис. 4-11.

него значения индукции к амплитуде ее изменений, а также от возможностей практической реализации и удобства изготовления. После того как установлены требуемые значения ψ и B_A/B_s , производится расчет по уравнению (4-101) координат x и y точек, лежащих на поверхности ротора. Анализ уравнения показывает, что значения x следует искать для ряда значений y , лежащих между конечными точками y_0 и y_1 , которые должны находиться графическим путем. При выполнении расчетов требуется большая точность, поскольку приходится определять разности между величинами одного поряд-

ка. На рис. 4-11 изображена картина поля для некоторых практически реализуемых конфигураций.

Очевидно, можно найти очертание поверхности ротора для кривой поля любой формы, поскольку если она определяется функцией $f(x)$, ее можно представить в виде ряда Фурье по косинусам $\sum B_m \cos m\theta$. Тогда требуемые эквипотенциали будут определяться зависимостью

$$\psi = B_A y - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m} \operatorname{sh} m y \cos m x. \quad (4-102)$$

4-4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интегральные решения. В предыдущих параграфах общие решения были получены, исходя из рассмотрения полей как периодически изменяющихся или естественным путем в цилиндрических координатах, или искусственно при использовании декартовых координат. В связи с этим однозначную потенциальную функцию для области поля можно представить в общем виде, справедливом при любых практически реализуемых граничных условиях, если взять только целые значения разделяющей постоянной m и использовать ряды Фурье. Другой вид выражения для потенциальной функции, который необходим, когда поле в используемой системе координат нельзя считать периодически изменяющимся (например, в декартовых координатах для бесконечного в обоих направлениях поля), представляет собой интеграл по всем значениям m , т. е. для использованных выше координатных систем

$$\psi(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(m) RS dm \quad (4-103)$$

и

$$\psi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(m) XY dm, \quad (4-104)$$

где R , S , X и Y являются соответственно функциями только r , θ , x и y .

Обработка этих интегралов, которые могут рассматриваться как предельные случаи рядов Фурье [Л. 11,

45], гораздо труднее, чем рядов, поэтому их применение ограничено.

Вообще говоря, соответствующий выбор системы координат или использование метода отображений исключает необходимость их применения, в связи с чем более детально они здесь не рассматриваются. Однако одно интересное приложение описано в [Л. 44], где исследовано поле линейного заряда во внутренней и внешней областях диэлектрического клина.

В § 10-6-1 получен другой вид решения для поля в области с бесконечной прямолинейной границей, на которой задано распределение потенциала, исходя из комплексной потенциальной функции Шварца. Укажем также на связь этой функции с интегралом Пуассона для единичной окружности.

Область применения метода разделения переменных. Для использованных систем координат области применения метода разделения переменных и метода отображений одинаковы. Однако типы задач, для решения которых наиболее подходит каждый из них, различны. Так, например, для задач, касающихся линейных источников при ограниченном числе границ (за исключением других случаев, рассмотренных в гл. 3), дающих конечное число отображений (см. также § 5-4), метод отображений более прост, однако в других задачах определения поля линейных источников при большом числе границ следует отдать предпочтение методу разделения переменных; он очень важен также для всех задач, в которых задано распределение потенциала или его градиента. Эта глава была посвящена анализу линейных токов, однако поля слоев тока нетрудно определить путем интегрирования (в пределах слоя) решения для линейного тока (см. § 5-2-2 и [Л. 22] или другой подход в [Л. 18]).

Решения в виде рядов, полученные непосредственным путем, могут оказаться неудобными для расчетов вследствие медленной сходимости рядов, однако это не является серьезным затруднением, особенно в тех случаях, когда используются вычислительные машины. Небольшой недостаток связан с тем, что решение находится в виде функции потока или потенциальной функции, а не в виде функции комплексного переменного (в отличие от методов преобразований и отображений), но, за исключением расчета картины поля, обе функции требу-

ются редко и в случае необходимости для их определения могут быть использованы условия Коши—Римана.

В гл. 5 решения уравнения Пуассона выражены через векторную потенциальную функцию, которая могла бы быть использована и для представления решений, полученных в этой главе. Однако никаких преимуществ это не дает, а в задачах, где требуется определить значения скалярного потенциала, введение A связано с рядом неудобств.

ЛИТЕРАТУРА

4-1. Hammond P., The magnetic screening effects of iron tubes, Proc. Instn Electr. Engrs, 103 C, 112—120, March 1956.

4-2. Rudenberg R., Über die Verteilung der magnetischen Induktion in Dynamoankern und die Berechnung von Hysterese und Wirbelstrom — verlusten, Elektrotechn. Z., 27, 6, 109—114, 1906.

4-3. Rudenberg R., Energie der Wirbelströme in elektrischen Bremsen und Dynamomaschinen, Samml. Elektrotechn. Vortr., 10, 269—370, 1907.

4-4. Walker J. H., The theory of the inductor alternator, Proc. Instn Electr. Engrs, 89, II, 227, June 1942.

4-5. Hancock N. N., The production of a sinusoidal flux wave with particular reference to the inductor alternator, Proc. Instn Electr. Engrs, 104 C (new series), 167, March 1957.

Глава пятая

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА. МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ТОКОВ

5-1. ВВЕДЕНИЕ

Эта глава касается определения магнитных полей, создаваемых токами, распределенными с равномерной¹ плотностью J по поперечному сечению проводников различной конфигурации. В пределах областей с распределенным током поле описывается с помощью векторного потенциала (поскольку понятие о скалярном магнитном потенциале в таких областях теряет смысл, см. § 2-2-3). Значение составляющей (в направлении оси z) вектор-

¹ Предположение о равномерном распределении плотности тока не является серьезным практическим ограничением, поскольку в большинстве случаев крупные проводники подразделяются или расщепляются с целью сделать распределение как можно более равномерным.

ного потенциала A в любой точке внутри области, где протекает ток, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu_0 J, \quad (5-1)$$

а в любой точке вне этой области, где $J=0$, — уравнению Лапласа. Следовательно, для всех таких полей необходимо найти решение уравнения Пуассона (и Лапласа) с использованием векторной потенциальной функции. Вид решения зависит от конфигурации и магнитной проницаемости как проводника, так и границы (если она есть).

Наиболее полезной конфигурацией границ, которая может быть исследована аналитически, является прямоугольник, две противоположные стороны которого, как было показано выше, должны быть или линиями потока, или эквипотенциалами, а две остальные стороны могут иметь конечную магнитную проницаемость. Частный случай концентричных круговых границ и тока, расположенного в их центре, не рассматривается, однако решение нетрудно найти, так как линии потока совпадают с границами (см. § 2-2-3).

Что же касается типа проводников, которые поддаются анализу, то важнейшими показателями снова являются магнитная проницаемость и конфигурация. Все рассмотренные проводники, за исключением проводников с бесконечно большой магнитной проницаемостью, описанных в § 5-3, имеют магнитную проницаемость μ_0 . Полученные решения, безусловно, ничем не отличаются от решения для случая проводников с магнитной проницаемостью μ_0 , находящихся в среде с такой же магнитной проницаемостью, но значения магнитной индукции и векторного потенциала в μ раз меньше. Общий случай проводников из магнитного материала с проницаемостью, отличающейся от магнитной проницаемости окружающей среды, не поддается анализу по причинам, кратко освещенным в § 5-3-1. Одним из исключений является круглый проводник, а для эксцентричных круглых проводников используются методы преобразований, описанные в [Л. 6-2]. Различные конфигурации сечения проводника могут быть исследованы при отсутствии границ, оказывающих влияние на поле. Если же такие границы существуют, то единственными конфигурациями, поддающимися анализу, являются прямоугольные или

те, которые можно получить из них. Во всех случаях, когда проводники выполнены из немагнитного материала, для исследования более сложных конфигураций сечения или комбинации проводников может быть использован принцип наложения. Так, например, прямоугольный проводник с круглым отверстием (для охлаждения) можно исследовать путем наложения решений, найденных для тока, распределенного в прямоугольной области, и тока в круглой области, имеющей размеры отверстия и плотность тока, равную по величине, но противоположную по знаку плотности тока в прямоугольнике.

Если границы и проводники относятся к перечисленным выше случаям, возможны два общих метода решения. Первый из них применяется для решения задач, в которых границы дают конечное число отображений (включая нуль), и заключается в основном в интегрировании векторной потенциальной функции линейного тока в пределах областей, занятых токами (включая отображения), как показано в § 5-2 и 5-4. Вторым методом используется в тех случаях, когда число отображений бесконечно велико. Он основан на применении обычных или двойных рядов Фурье и описан в § 5-5 и 5-6. Для частного типа задач, относящихся к проводникам с бесконечно большой магнитной проницаемостью (см. § 5-3), приходится искать особый метод решения для каждой конфигурации проводника.

В задачах, которые не могут быть отнесены к перечисленным типам, аналитические методы оказываются бессильными и должны использоваться численные методы. Описанию этих важных методов посвящена гл. 11.

Наконец, прежде чем перейти к подробному изложению различных аналитических решений, полезно отметить две общие особенности, касающиеся природы полей распределенных токов. Все такие поля имеют нейтральную точку, вокруг которой замыкается поток (см. § 2-2-3). В этой точке сходятся «линии нулевой работы». В случае симметричного проводника, расположенного в воздухе, нейтральная точка находится в центре проводника (см. рис. 5-2 и 5-6). Если же проводник расположен вблизи границы, отделяющей магнитную среду (или тока того же знака), то нейтральная точка смещается по направлению к границе (см. рис. 5-8 и 5-10), тогда как в случае магнитно непроницаемой границы

(или тока противоположного знака) она сдвигается в сторону от границы. Вторая особенность состоит в том, что пересечение линией потока границы области, обтекаемой током, не сопровождается ее преломлением, если только магнитная проницаемость проводящего материала не отличается от магнитной проницаемости окружающей среды, однако, как показано в [Л. 5-8], кривизна ее изменяется.

5-2. НЕМАГНИТНЫЕ ПРОВОДНИКИ В ВОЗДУХЕ

5-2-1. Описание метода. Векторный потенциал линейного тока

Поле распределенного тока в отсутствие магнитной среды можно определить путем наложения полей бесконечно большого числа элементарных линейных токов, в совокупности составляющих распределенный ток. Следовательно, распределение A может быть найдено путем интегрирования векторной потенциальной функции линейного тока по сечению проводника.

Выше не было приведено точного выражения для векторной потенциальной функции линейного тока, однако его нетрудно получить из уравнения (2-60), относящегося к случаю круглого проводника. Для проводника с радиусом a , выполненного из материала с магнитной проницаемостью μ_0 и обтекаемого током с равномерно распределенной плотностью J , выражение для A имеет вид:

$$A = \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \ln r + C.$$

Поскольку начало отсчета A может быть выбрано произвольно, а ток i проводника равен $\pi J a^2$, эту зависимость можно представить следующим образом:

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi} i \ln r. \quad (5-2)$$

Принимая во внимание, что поле во внешней области круглого проводника соответствует полю линейного тока, расположенного в его средней точке, уравнение (5-2) определяет также векторную потенциальную функцию линейного тока i . Эту зависимость можно было бы вывести также, исходя из функции потока линейного тока,

поскольку функция потока и векторная потенциальная функция эквивалентны. Поле проводника произвольной конфигурации можно определить при условии, что уравнение (5-2) может быть проинтегрировано по сечению проводника. Для синтезирования более сложных конфигураций проводника из простых можно применить принцип наложения. В некоторых случаях более удобно отказаться от нахождения векторного потенциала описанным путем и определять составляющие напряженности поля непосредственно путем интегрирования (по сечению проводника) выражений для H_x и H_y в случае линейного тока.

5-2-2. Поле шины прямоугольного сечения

Рассмотрим шину прямоугольного сечения с размерами сторон $2a$ и $2b$, как показано на рис. 5-1. Если ток шины равен I , то плотность тока составляет $I/4ab$, а ток, протекающий по волокну с поперечным сечением $dx'dy'$, где x' и y' — координаты произвольного волокна шины, равен $(I/4ab)dx'dy'$. Поле, создаваемое всеми элементами

шины, определяется путем подстановки значения i в уравнение (5-2) и интегрирования по сечению прямоугольника. При этом поле в произвольной точке (x, y) на расстоянии r от типового волокна с координатами (x', y') описывается соотношением

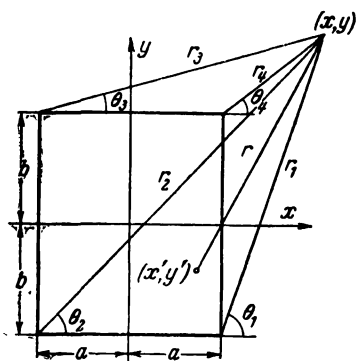


Рис. 5-1.

$$A = \frac{I\mu_0}{8\pi ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \ln r dx' dy'.$$

Выразив r через координаты точки, получим:

$$A = \frac{I\mu_0}{16\pi ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \ln [(x' - x)^2 + (y' - y)^2] dx' dy'.$$

Этот интеграл может быть определен через элементарные функции. Результат, который приведен в [Л. 5-1], имеет вид:

$$\begin{aligned}
 A = \frac{I\mu_0}{16\pi ab} \{ & (a-x)(b-y) \ln [(a-x)^2 + (b-y)^2] + \\
 & + (a+x)(b-y) \ln [a+x)^2 + (b-y)^2] + \\
 & + (a-x)(b+y) \ln [(a-x)^2 + (b+y)^2] + \\
 & + (a+x)(b+y) \ln [(a+x)^2 + (b+y)^2] + \\
 & + (a-x)^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{b-y}{a-x} + \operatorname{arctg} \frac{b+y}{a-x} \right] + \\
 & + (a+x)^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{b-y}{a+x} + \operatorname{arctg} \frac{b+y}{a+x} \right] + \\
 & + (b-y)^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{a-x}{b-y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{b-y} \right] + \\
 & + (b+y)^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{a-x}{b+y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{b+y} \right] \}. \quad (5-3)
 \end{aligned}$$

Полученное выражение для векторного потенциала является, конечно, функцией потока поля, поэтому кривые, соответствующие постоянным значениям A , представляют собой линии потока. Семейство линий потока для проводника с соотношением размеров $b=2a$ изображено на рис. 5-2.

Составляющие напряженности поля H_x и H_y определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H_x &= \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{и} \quad H_y = \\
 &= -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A}{\partial x}.
 \end{aligned}$$

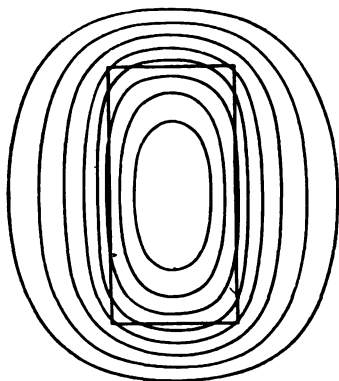


Рис. 5-2.

Полученные зависимости довольно сложны, однако их можно упростить, если ввести расстояния r_1 , r_2 , r_3 и r_4 от рассматриваемой точки поля до вершин углов прямоугольника и углы θ_1 , θ_2 , θ_3 и θ_4 , которые образуются при

пересечении линий, проведенных в вершины углов, с линиями, параллельными оси x . В результате найдем:

$$H_x = \frac{I}{8\pi ab} \left[(y+b)(\theta_1 - \theta_2) - (y-b)(\theta_4 - \theta_3) + \right. \\ \left. + (x+a) \ln \frac{r_2}{r_3} - (x-a) \ln \frac{r_1}{r_4} \right]; \quad (5-4)$$

$$H_y = -\frac{I}{8\pi ab} \left[(x+a)(\theta_3 - \theta_2) - (x-a)(\theta_1 - \theta_4) + \right. \\ \left. + (y+b) \ln \frac{r_2}{r_1} - (y-b) \ln \frac{r_3}{r_4} \right]. \quad (5-5)$$

Если длина одной стороны прямоугольника стремится к нулю, то поле приближается к полю слоя тока. Следует отметить, что величина тока, отнесенная к единице площади, становится при этом бесконечно большой, а линейная плотность тока остается конечной. Слой то-

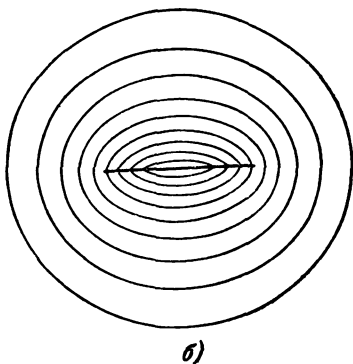
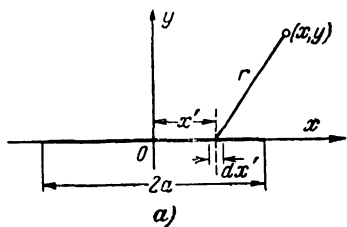


Рис. 5-3.

ка полезны для представления тонких распределенных обмоток, а также для аппроксимации тонких прямоугольных проводников.

Для определения поля одного такого проводника рассмотрим слой с шириной $2a$ (рис. 5-3,а), полный ток которого равен I . В элементарной полоске с шириной dx' протекает ток i , равный $(I/2a)dx'$. Подставив это значение в (5-2), получим следующее выражение для векторного потенциала слоя:

$$A = \frac{I\mu_0}{4\pi a} \int_{-a}^a \ln r dx' = \frac{I\mu_0}{8\pi a} \int_{-a}^a \ln [(x' - x)^2 + y^2] dx' = \\ = \frac{I\mu_0}{8\pi a} \left\{ (a+x) \ln [(a+x)^2 + y^2] + (a-x) \ln [(a-x)^2 + y^2] + \right.$$

$$+ 2y \left[\operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} \right] - 4a \}. \quad (5-6)$$

Линии потока, определяемые уравнением (5-6), показаны на рис. 5-3,б. Составляющие напряженности поля можно найти из выражений

$$H_x = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{и} \quad H_y = - \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A}{\partial x}.$$

5-2-3. Сила взаимодействия между параллельными шинами прямоугольного сечения

Определение силы взаимодействия между соседними проводниками, обтекаемыми большими токами, представляет значительный практический интерес (см., например, [Л. 5-2 и 5-3]. Найдем силу взаимодействия

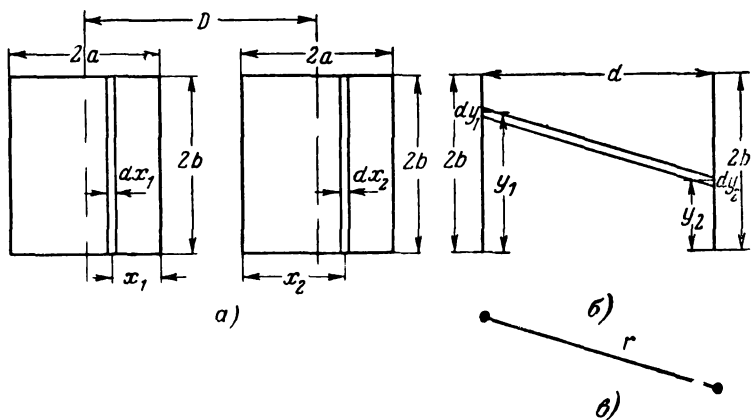


Рис. 5-4.

между двумя параллельными шинами прямоугольного сечения [Л. 5-4], предположив, как и в § 5-2-2, что действительные токи представляют собой совокупность множества волокон тока. Сила взаимодействия между шинами определяется путем интегрирования по их сечению силы взаимодействия между типовыми волокнами, взятыми по одному в каждой шине. Интегрирование должно производиться по обоим поперечным сечениям и проще всего выполняется в три стадии: вначале находится сила взаимодействия между двумя волокнами, взятыми по одному в каждой шине; далее, полученное

выражение используется для определения силы взаимодействия между типовыми параллельными слоями тока, взятыми по одному в каждой шине, и, наконец, находится результирующая сила путем интегрирования зависимости для силы взаимодействия между слоями по площади обоих прямоугольников.

Допустим, что шины имеют высоту $2b$ и ширину $2a$, расстояние между их осями равно D , как показано на рис. 5-4,а, и в них протекают токи i_1 и i_2 . На рис. 5-4,в изображены два волокна тока, которые находятся на расстоянии r одно от другого, а на рис. 5-4,б показаны два слоя тока, имеющие высоту $2b$ и сдвинутые на расстояние d . Вначале необходимо найти силу взаимодействия между линейными токами, принимая во внимание, что сила, действующая на линейный ток i_1 , находящийся в поле с индукцией B , равна Bi_1 на единицу длины. Магнитная индукция на расстоянии r от линейного тока i_2 равна $\mu_0 i_2 / 2\pi r$; следовательно, сила взаимодействия F_f между отрезками волокон единичной длины (рис. 5-4,в), в которых протекают токи i_1 и i_2 , будет:

$$F_f = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}. \quad (5-7)$$

Далее определим силу взаимодействия между двумя элементарными слоями, взятыми по одному для каждого из проводников (рис. 5-4,б). Слои можно подразделить на волокна тока, имеющие ширину dy_1 и dy_2 . Тогда, если полные токи слоев составляют k_1 и k_2 , токи элементарных волокон будут соответственно равны $k_1 dy_1 / 2b$ и $k_2 dy_2 / 2b$. Таким образом, согласно уравнению (5-7) сила взаимодействия между типовыми волокнами может быть представлена в виде:

$$F_f = \frac{\mu_0 k_1 k_2}{8\pi b^2} \cdot \frac{dy_1 dy_2}{[d^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}}. \quad (5-8)$$

Эта сила имеет составляющие, параллельные обеим осям, однако исходя из условий симметрии, нетрудно заметить, что результирующая сила, действующая на слой, направлена *по нормали* к ним. Поэтому результирующую силу взаимодействия между слоями F_s можно определить путем интегрирования в пределах двух слоев нормальной составляющей F_f следующим образом:

$$F_s = \frac{\mu_0 k_1 k_2 l}{8\pi b^2} \int_{-b}^b \int_{-b}^b \frac{dy_1 dy_2}{[d^2 + (y_1 - y_2)^2]} =$$

$$= \frac{\mu_0 k_1 k_2}{2\pi b} \left[\operatorname{arctg} \frac{2b}{d} - \frac{d}{4b} \ln \left(1 + \frac{4b^2}{d^2} \right) \right]. \quad (5-9)$$

Теперь полученное уравнение можно использовать для нахождения силы взаимодействия между шинами. Для этого необходимо выразить k_1 и k_2 через действительные токи I_1 и I_2 , определить d через D , a , x_1 и x_2 и проинтегрировать найденное выражение в пределах ширины прямоугольных сечений. Поскольку

$$k_1 = \frac{I_1 dx_1}{2a};$$

$$k_2 = \frac{I_2 dx_2}{2a}$$

и

$$d = D - 2a + x_1 + x_2,$$

сила взаимодействия между шинами будет равна:

$$\begin{aligned} F_b &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{8\pi a^2 b} \int_0^{2a} \int_0^{2a} \left\{ \operatorname{arctg} \left[\frac{2b}{D - 2a + x_1 + x_2} \right] - \right. \\ &- \left. \left[\frac{D - 2a + x_1 + x_2}{4b} \right] \ln \left[1 + \frac{4b^2}{(D - 2a + x_1 + x_2)^2} \right] \right\} dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{32\pi a^2 b^2} \left\{ 2b \left[(D + 2a)^2 - \frac{4b^2}{3} \right] \operatorname{arctg} \frac{2b}{D + 2a} + \right. \\ &+ 2b \left[(D - 2a)^2 - \frac{4b^2}{3} \right] \operatorname{arctg} \frac{2b}{D - 2a} - \\ &- 4b \left(D^2 - \frac{4b^2}{3} \right) \operatorname{arctg} \frac{2b}{D} - D \left(4b^2 - \frac{D^2}{3} \right) \ln \frac{(D^2 + 4b^2)}{D^2} + \\ &+ \frac{1}{2} (D + 2a) \left[\left(4b^2 - \frac{(D + 2a)^2}{3} \right) \ln \left(\frac{(D + 2a)^2 + 4b^2}{D^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} (D - 2a) \left[\left(4b^2 - \frac{(D - 2a)^2}{3} \right) \ln \left(\frac{(D - 2a)^2 + 4b^2}{D^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{3} (D + 2a)^3 \ln \left(\frac{D + 2a}{D} \right) + \frac{1}{3} (D - 2a)^3 \ln \left(\frac{D - 2a}{D} \right) \left. \right\}. \quad (5-10) \end{aligned}$$

Изменение этой силы в зависимости от расстояния D для ряда значений отношения a/b показаны на рис. 5-5. Отношение F_b/F_f , где F_f — сила взаимодействия между линейными токами I_1 и I_2 , расположенными на расстоя-

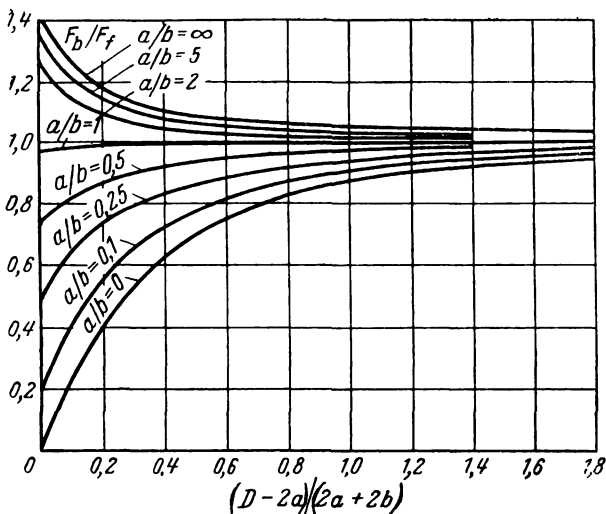


Рис. 5-5.

нии D один от другого, построено в функции отношения $(D-2a)/2(a+b)$, т. е. отношения расстояния между обращенными одна к другой сторонами шин к полупериметру шины.

5-3. ПОЛЕ ВНУТРИ ПРОВОДНИКОВ С БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ВОЗДУХЕ

5-3-1. Общие положения

Во введении к этой главе было отмечено, что, за исключением случая проводника с круглым сечением, непосредственные решения для проводников, выполненных из материала с конечной магнитной проницаемостью (отличающейся от магнитной проницаемости окружающей среды), не могут быть получены. Причина этого кроется в том, что при решении таких задач пространство вне проводника должно делиться на несколько меньших областей, и связывающие их граничные условия приводят к уравнениям, не поддающимся обработке (см. § 4-3-2 «Взаимосвязанные области»). Такого затруднения не возникает, когда проводники имеют бесконечно большую магнитную проницаемость, поскольку граница проводника при этом совпадает с линией потока. Следо-

вательно, граничные условия могут быть выражены простыми соотношениями и решения для полей во внутренней и внешней областях проводника могут быть найдены независимо. Поле во внешней области можно определить только с помощью методов преобразований (см., например, [Л. 5-21]). Это поле имеет такой же характер, как электростатическое поле заряженного проводника, рассмотренное для частного случая прямоугольного сечения в § 9-3. Данный параграф посвящен определению поля во внутренней области проводника. Здесь показан способ нахождения векторной потенциальной функции A , которая удовлетворяет уравнению Пуассона и имеет постоянное значение на границе проводника.

Функцию этого вида можно найти лишь для ограниченного числа конфигураций сечения проводника, и, конечно, для распространения решения на другие случаи нельзя использовать принцип наложения. Кроме того, общего подхода к решению не существует и метод, используемый в каждом частном случае, зависит от конкретной конфигурации поперечного сечения проводника. Полная библиография решений, представленных в основном для аналоговых полей, приведена в [Л. 5-22]*. Большинство этих решений относится к конфигурациям границ, не представляющим серьезного интереса для инженера-электротехника, хотя в [Л. 5-5] даны решения для проводников с сечениями в форме равностороннего треугольника, эллипса и прямоугольника. Два первых решения представлены в конечной форме, а последнее — в виде бесконечного ряда. Важный практический случай прямоугольника рассмотрен ниже, а решения для двух других случаев обобщены в [Л. 22].

Однако, прежде чем приступить к детальному изучению метода, важно оценить точность решений, полученных для проводников в предположении, что их магнит-

* Существует много важных полей, анализ которых совершенно аналогичен анализу для случая магнитного поля проводника с бесконечно большой магнитной проницаемостью, обтекаемого током. К ним относятся наиболее известная задача Сен-Венана, касающаяся кручения в линейной изотропной призме, распределение температуры в призме при равномерном выделении тепла внутри нее и постоянном значении температуры на всей границе, движение вязкой жидкости с равномерным завихрением, циркулирующей в фиксированной призме, и боковое смещение равномерно нагруженной однородной мембраны, закрепленной на горизонтальном контуре с равномерным натяжением по краю.

ная проницаемость бесконечно велика. Прежде всего действительная магнитная проницаемость проводника оказывает влияние на граничные условия поля и ставит под сомнение справедливость принятого при анализе

допущения, что граница проводника совпадает с линией потока. Тем не менее, если μ достаточно велико, граница почти в точности совпадает с линией потока и решение вполне удовлетворительно. Далее, при выполнении любого расчета на основании полученных результатов (например, при определении индуктивности проводника) важно иметь ясное представление о том, что влияние действительного значения μ существенно и должно быть точно известно. В теоретическом случае при $\mu = \infty$ для сохранения конечного значения величины $\mu\mu_0 J$ необходимо предположить, что плотность тока J равна нулю.

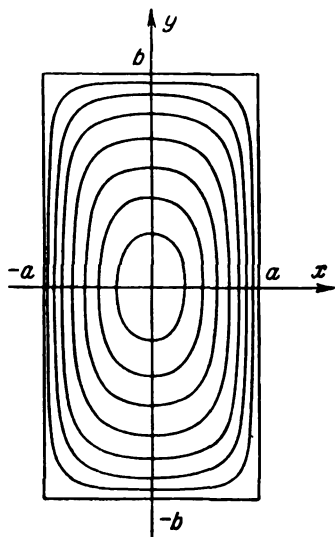


Рис. 5-6.

5-3-2. Поле внутри проводника прямоугольного сечения с очень большой магнитной проницаемостью

Предположим, что прямоугольник имеет стороны $2a$ и $2b$, а его середина находится в начале координатной плоскости xy . Проводник и картина поля внутри него, построенная для случая $b=2a$, изображены на рис. 5-6. Для определения поля необходимо найти векторную потенциальную функцию A , которая удовлетворяет уравнению Пуассона (5-1) и имеет постоянное (но неизвестное) значение на границе прямоугольника, т. е. удовлетворяет граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = -a \text{ и } a; \\ B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = -b \text{ и } b. \end{aligned} \right\} \quad (5-11)$$

Для нахождения функции A , являющейся решением уравнения Пуассона, применяется тот же метод, что и при решении обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений: она формируется в виде суммы решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. В данном случае для уравнения Пуассона (5-1) однородное уравнение представляет собой уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0,$$

которое согласно уравнению (4-72) имеет общее решение

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \sin mx + d_m \cos mx) (g_m \operatorname{sh} my + h_m \operatorname{ch} my) + k_1 + k_2 x + k_3 y.$$

Однако, поскольку искомое выражение для A внутри прямоугольника должна быть четной функцией x и y , достаточно взять

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} d_m \cos mx \operatorname{ch} my. \quad (5-12)$$

Частное решение (5-1) также должно быть четной функцией x и y . Наиболее простым выражением является

$$A = -\frac{1}{2} \mu \mu_0 J x^2. \quad (5-13)$$

Полное решение (5-1) определяется как сумма уравнений (5-13) и (5-12) (с последующим определением значений d_m) в виде:

$$A = -\frac{1}{2} \mu \mu_0 J \left(x^2 + \sum_{m=1}^{\infty} d_m \cos mx \operatorname{ch} my \right), \quad (5-14)$$

где постоянные m и d_m должны быть найдены из граничных условий согласно уравнениям (5-11). Продифференцировав (5-14) по y , из первого граничного условия получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m \operatorname{sh} my \cos ma = 0,$$

откуда

$$m = \frac{n\pi}{2a},$$

где n — целое нечетное число.

Подстановка значения m в (5.14) и использование второго граничного условия дает:

$$2x - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n\pi}{2a} d_m \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} \sin \frac{n\pi x}{2a} = 0. \quad (5.15)$$

Для того чтобы найти из этого уравнения значения постоянных d_m , необходимо представить $2x$ в виде, удобном для непосредственного сопоставления с бесконечным рядом, т. е. в виде ряда Фурье по $\sin \frac{n\pi x}{2a}$ на отрезке $0 < x < a$. n -й коэффициент ряда C_n равен:

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a 2x \sin \frac{n\pi x}{2a} dx = \frac{(-1)^k 16a}{(2k+1)^2 \pi^2}$$

и согласно (5.15)

$$C_n = \frac{n\pi}{2a} d_m \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a},$$

или

$$d_m = \frac{(-1)^k \cdot 32a^2}{(2k+1)^3 \pi^3 \operatorname{ch} (2k+1) \pi b / 2a},$$

где k — любое целое число (включая нуль), а $n = 2k + 1$.

Наконец, подставив значения d_m и m в (5.14), получим выражение для векторной потенциальной функции, описывающей поле внутри проводника:

$$A = -\frac{1}{2} \mu \mu_0 J \left[x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 32 a^2 \operatorname{ch} \frac{(2k+1) \pi y}{2a} \cos \frac{(2k+1) \pi x}{2a}}{(2k+1)^3 \pi^3 \operatorname{ch} \frac{(2k+1) \pi b}{2a}} \right]. \quad (5.16)$$

Присутствие члена $(2k+1)^3$ в знаменателе обеспечивает быструю сходимость ряда (три или четыре члена дают точность, значительно превышающую 1%) и удобство расчетов. Выражения для B_x и B_y нетрудно получить путем определения соответствующих производных A . В знаменателе они содержат член $(2k+1)^2$ и, таким образом, тоже быстро сходятся. B_x имеет максимальное значение посередине сторон $y = \pm b$, а B_y — посередине сторон $x = \pm a$.

5-4. ПРОСТЫЕ ГРАНИЦЫ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОТОБРАЖЕНИЙ

На первый взгляд может показаться, что наиболее простое решение задач, касающихся токов, расположенных вблизи границ, можно получить методом отображений, поскольку распределенный ток создает отображения подобно линейному (см. § 3-4). Однако практическое применение этого метода ограничивают два обстоятельства. Во-первых, его нельзя использовать в случае цилиндрических границ, так как отображенные токи распределены с неравномерной плотностью по области, конфигурация границ которой отличается от конфигурации границ области, где протекает действительный ток, в связи с чем возникают непреодолимые математические трудности. Во-вторых, этот метод неудобен для плоских границ, дающих бесконечный ряд отображений, вследствие сложности получающихся математических выражений. Это очевидно из рассмотрения бесконечного ряда членов, каждый из которых имеет вид правой части (5-3). Для этого типа задач находят применение два других метода, описанных в § 5-5 и 5-6.

Таким образом, применение метода отображений практически ограничено задачами с плоскими границами, дающими *конечное* число отображений. Никаких трудностей при решении задач подобного типа не встречается; оно сводится к простому суммированию после внесения соответствующих измененных исходных данных в решение для заданного расположения проводника в воздухе. Примеров анализа таких случаев здесь не приводится; краткое описание одной из задач, касающейся определения поля прямоугольной катушки, расположенной у основания явно выраженного полюса, можно найти в [Л. 22].

5-5. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЦ С ПОМОЩЬЮ ПРОСТОГО РЯДА ФУРЬЕ. МЕТОД РОГОВСКОГО

Одним из методов, которые могут быть использованы для решения задач с бесконечным рядом отображений, является метод Роговского. Решение находится в виде простого ряда Фурье и распространяется на поля распределенных в прямоугольной области токов, окруженных прямоугольной границей. Метод был разработан для трансформаторов [Л. 5-6], так как поле в поперечном сечении их обмоток и сердечника относится к упомянутому типу. Анализ поля трансформатора этим методом здесь не приводится. Вместо этого определено поле рассеяния в пазу вращающейся машины. Вначале на простом примере изложена сущность метода. Этому посвящен § 5-5-1.

5-5-1. Прямоугольные проводники в бесконечном равномерном воздушном зазоре

Рассмотрим рис. 5-7,а, на котором изображен участок бесконечного воздушного зазора длиной g , ограниченно-го двумя параллельными плоскими поверхностями с магнитной проницаемостью μ_0 . На нижней поверхности расположен ряд одинаковых прямоугольных проводников, обтекаемых токами I с чередующимися знаками. Допустим, что высота проводника равна b , ширина $2(l-a)$, все они расположены на одинаковых расстояниях один от другого, а расстояние между их осями равно $2l$.

При анализе поле делится на несколько областей, выбираемых таким образом, чтобы для каждой из них могло быть найдено простое выражение, описывающее распределение плотности тока (включая $J=0$) в любой точке. Для каждой области используются отдельные векторные потенциальные функции, которые должны удовлетворять, во-первых, уравнению Лапласа или Пуассона (в зависимости от того, будет ли $J=0$ или нет) и, во-вторых, граничным условиям между областями.

Поле удобно разделить линиями, параллельными границам воздушного зазора, на четыре области: *I* — нижний магнитный массив; *II* — область, ограниченная линиями $y=0$ и $y=b$, где протекают токи; *III* — область выше токов, но ниже верхней границы и *IV* — верхний магнитный массив.

В областях *I*, *III* и *IV* *J* повсюду равно нулю, поэтому распределение соответствующих векторных потенциалов A_I , A_{III} и A_{IV} должно описываться уравнением Лапласа. Векторный потенциал A_{II} в области *II* должен

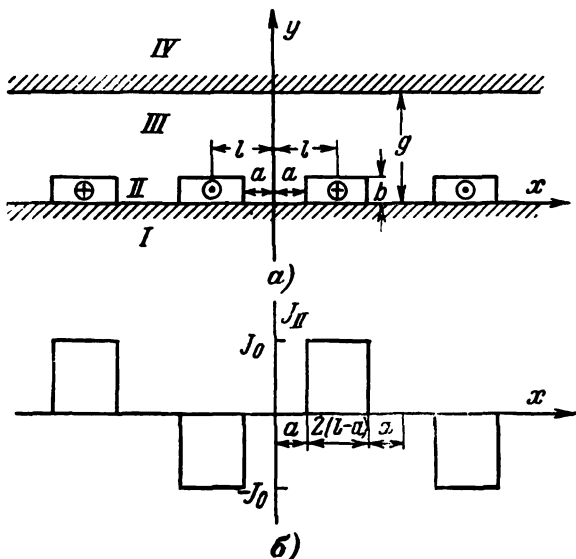


Рис. 5-7.

удовлетворять уравнению Пуассона, в котором J является выражением, определяющим распределение плотности тока по всей области. Поскольку J_{II} не зависит от y и периодически изменяется в функции x по закону, показанному на рис. 5-7,б, его можно представить в виде ряда Фурье:

$$J_{II} = \frac{4J_0}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nka \sin nkx, \quad (5-17)$$

где J_0 (амплитуда кривой распределения J) представляет собой плотность тока внутри проводников, а $k = \pi/2l$.

Следующим этапом является определение общего выражения для векторных потенциалов, которое должно исходить из двух условий. Во-первых, поскольку A

(в общем случае) должно удовлетворять уравнению Пуассона, где J определяется уравнением (5-17), в выражении для него члены, зависящие от x , могут быть только синусоидальными функциями. Во-вторых, вторые производные любых членов по y должны быть равны нулю, чтобы удовлетворять уравнению Лапласа или Пуассона при определении плотности тока согласно выражению (5-17), не содержащему постоянного члена. С учетом этих требований зависимость для векторного потенциала может быть представлена в виде:

$$A = K + K'y + \mu\mu_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_n \sin n k x, \quad (5-18)$$

где K и K' — постоянные, а Y_n является функцией только y .

Вид функции Y_n зависит от того, будет ли A , определяемое из (5-18), удовлетворять уравнению Лапласа или Пуассона. Ее можно найти путем дифференцирования выражения для A и подстановки вторых производных в эти уравнения. В случае уравнения Лапласа функцию Y_n можно получить, приравняв коэффициенты при $\sin n k x$ нулю:

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - n^2 k^2 Y_n = 0, \quad (5-19)$$

откуда

$$Y_n = F_n e^{nky} + G_n e^{-nky},$$

где F_n и G_n — постоянные.

Таким образом, общее выражение для A_I , A_{III} и A_{IV} можно представить следующим образом¹:

$$A = K + K'y + \mu\mu_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (F_n e^{nky} + G_n e^{-nky}) \sin n k x. \quad (5-20)$$

В случае уравнения Пуассона при использовании выражения для J (5-17), снова приравняв коэффициенты при $\sin n k x$, получим:

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - n^2 k^2 Y_n = - \frac{4\mu_0 J_0}{\pi n} \cos nka. \quad (5-21)$$

¹ Это уравнение представляет собой только частный случай общего решения уравнения Лапласа (4-72), из которого его можно вывести.

Решение этого уравнения складывается из решения соответствующего однородного уравнения (5-19) и частного решения уравнения (5-21) и может быть представлено в виде:

$$Y_n = F_n e^{nk y} + G_n e^{-nk y} + \frac{4\mu_0 J_0}{\pi n^3 k^2} \cos nka.$$

Подставив полученное выражение в (5-18), найдем:

$$A_{II} = K + K'y + \mu_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(F_n e^{nk y} + G_n e^{-nk y} + \frac{4\mu_0 J_0}{\pi n^3 k^2} \cos nka \right) \sin nkx. \quad (5-22)$$

Остается найти значения постоянных K , K' , F и G в уравнениях вида (5-20) и (5-22), которые удовлетворяют граничным условиям. Постоянные F и G определяются через C , D , E и M (для G — со штрихом) соответственно для функций A_I , A_{II} , A_{III} и A_{IV} . Можно было бы использовать все граничные условия одновременно и, решив систему совместных уравнений, найти постоянные, однако трудоемкость расчетов уменьшится, если сначала взять некоторые из них, сделав выбор таким образом, чтобы упростить функции A_I , A_{II} , A_{III} и A_{IV} .

В области I при $y = -\infty$ имеем $B_x = 0$; отсюда $(\partial A_I / \partial y)_{y=-\infty} = 0$ и, следовательно, G_n и K' должны быть равны нулю. Поскольку начало отсчета A выбирается произвольно, можно положить $K = 0$. Тогда согласно (5-20) получим

$$A_I = \mu\mu_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n e^{nk y} \sin nkx. \quad (5-23)$$

На поверхности раздела $y = 0$ значения A_I и A_{II} одинаковы, поэтому в выражении для A_{II} значения K и K' должны быть равны нулю. Отсюда с учетом (5-22)

$$A_{II} = \mu_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(D_n e^{nk y} + D'_n e^{-nk y} + \frac{4\mu_0 J_0}{\pi n^3 k^2} \cos nka \right) \sin nkx. \quad (5-24)$$

Аналогичным образом на поверхности раздела $y=b$ имеем $A_{II}=A_{III}$; следовательно, в соответствии с (5-20)

$$A_{III} = \mu_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (E_n e^{nky} + E'_n e^{-nky}) \sin nkx. \quad (5-25)$$

В области IV , если $y=\infty$, $B_x=0$, в связи с чем $F_n=0$. Кроме того, на границе $y=g$ имеем $A_{IV}=A_{III}$, поэтому в выражении для A_{IV} значения K и K' равны нулю. Таким образом, согласно (5-20)

$$A_{IV} = \mu\mu_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} M'_n e^{-nky} \sin nkx. \quad (5-26)$$

Остальные граничные условия, связывающие приведенные выше упрощенные выражения для векторных потенциальных функций и выражающие равенство нормальных составляющих индукции и тангенциальных составляющих напряженности поля имеют вид:

на поверхности $y=0$

$$\left(\frac{\partial A_I}{\partial x}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial A_{II}}{\partial x}\right)_{y=0} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A_I}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial A_{II}}{\partial y}\right)_{y=0};$$

на поверхности $y=b$

$$\left(\frac{\partial A_{II}}{\partial x}\right)_{y=b} = \left(\frac{\partial A_{III}}{\partial x}\right)_{y=b} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial A_{II}}{\partial y}\right)_{y=b} = \left(\frac{\partial A_{III}}{\partial y}\right)_{y=b};$$

наконец, на поверхности $y=g$

$$\left(\frac{\partial A_{III}}{\partial x}\right)_{y=g} = \left(\frac{\partial A_{IV}}{\partial x}\right)_{y=g} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial A_{III}}{\partial y}\right)_{y=g} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A_{IV}}{\partial y}\right)_{y=g}.$$

Подстановка в эти уравнения производных функций A , определяемых уравнениями (5-23) — (5-26), приводит к шести совместным уравнениям:

$$\begin{aligned} -C_n + D_n - D'_n &= 0; & -\mu C_n + D_n + D'_n &= -J; \\ \alpha^2 D_n - D'_n - \alpha^2 E_n + E'_n &= 0; \\ \alpha^2 D_n + D'_n - \alpha^2 E_n - E'_n &= -\alpha J; \\ \beta E_n - E'_n + M'_n &= 0; & \beta E_n + E'_n - \mu M'_n &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = e^{nkb}; \quad \beta = e^{2nkg}$$

и

$$J = \frac{4J_0}{\pi n^2 k^2} \cos nka.$$

В результате решения этих шести уравнений найдем постоянные:

$$C_n = 4(1 - e^{nkb}) \left[\frac{e^{2nkg} (\mu + 1) + e^{nkb} (\mu - 1)}{e^{2nkg} (\mu + 1)^2 - (\mu - 1)^2} \right] \frac{J_0}{\pi n^3 k^2} \cos nka; \quad (5-27)$$

$$D_n = 2e^{-nkb} \left[\frac{(\mu - 1) e^{nkb} [(\mu + 1) e^{nkb} - 2] - e^{2nkg} (\mu + 1)^2}{e^{2nkg} (\mu + 1)^2 - (\mu - 1)^2} \right] \times \\ \times \frac{J_0}{\pi n^3 k^2} \cos nka; \quad (5-28)$$

$$D'_n = 2e^{-nkb} \left[\frac{(\mu - 1)^2 e^{2nkb} - (\mu + 1) e^{2nkg} [(\mu - 1) + 2e^{nkb}]}{e^{2nkg} (\mu + 1)^2 - (\mu - 1)^2} \right] \times \\ \times \frac{J_0}{\pi n^3 k^2} \cos nka; \quad (5-29)$$

$$E_n = 2(\mu - 1)(1 - e^{-nkb}) \left[\frac{e^{nkb} (\mu + 1) + (\mu - 1)}{e^{2nkg} (\mu + 1)^2 - (\mu - 1)^2} \right] \times \\ \times \frac{J_0}{\pi n^3 k^2} \cos nka; \quad (5-30)$$

$$E'_n = 2(\mu + 1) e^{2nkg} (1 - e^{-nkb}) \left[\frac{e^{nkb} (\mu + 1) + (\mu - 1)}{e^{2nkg} (\mu + 1)^2 - (\mu - 1)^2} \right] \times \\ \times \frac{J_0}{\pi n^3 k^2} \cos nka; \quad (5-31)$$

$$M'_n = 4e^{2nkg} (1 - e^{-nkb}) \left[\frac{e^{nkb} (\mu + 1) + (\mu - 1)}{e^{2nkg} (\mu + 1)^2 - (\mu - 1)^2} \right] \times \\ \times \frac{J_0}{\pi n^3 k^2} \cos nka, \quad (5-32)$$

где $k = \pi/2l$, а n — целое нечетное число. Член n^{-3} , входящий во все шесть выражений, обеспечивает быструю сходимость рядов. При вычислении каждого значения A для достижения точности порядка 1% достаточно взять только два или три члена. На рис. 5-8 изображена картина поля для случая $\mu = \infty$. Это решение само по себе не имеет большого практического значения; оно вы-

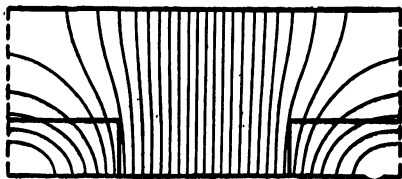


Рис. 5-8.

брано в качестве простейшего примера для иллюстрации метода анализа Роговского. Однако, если внести лишь небольшое изменение в (5-17) для J_{II} , с тем чтобы получить более общий периодический ряд для тока, можно бы найти решения в том виде, который был использован несколькими авторами для анализа полей в электрических машинах. Теперь обратимся к применению метода Роговского для определения полей в областях с границами конечных размеров.

5-5-2. Границы конечных размеров. *Прямоугольный проводник в пазу*

Описанный выше метод исходит из того, что распределение плотности тока является периодической функцией одной координаты в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и может быть представлено в виде ряда Фурье. Однако в любой реальной задаче (при использовании декартовых координат) распределение плотности тока не удовлетворяет этому требованию и для упрощения практического применения метода необходимо предположить, что одна пара параллельных границ имеет бесконечно большую магнитную проницаемость (или совершенно магнитно непроницаема). Далее, из рассмотрения отображений в границах нетрудно заметить, что эти границы можно заменить бесконечным периодическим рядом отображений действительных токов.

Теперь перейдем к определению поля прямоугольного проводника, лежащего на дне паза с параллельными стенками. Размеры проводника и паза показаны на рис. 5-9,а. Это поле представляет особый интерес при определении индуктивности рассеяния проводников во вращающихся машинах.

Если предположить, что стороны паза при $x = \pm \frac{w}{2}$ имеют бесконечно большую магнитную проницаемость, то их влияние на поле внутри паза будет таким же, как и бесконечного ряда отстоящих на равных расстояниях один от другого прямоугольных проводников, имеющих такие же размеры и обтекаемых таким же током I , как и проводник в пазу (рис. 5-9,б). Следовательно, реальную задачу можно заменить эквивалентной, аналогичной рассмотренной в предыдущем параграфе, и изложенные там методы могут быть использованы для ее решения.

Целесообразно принять, что дно паза также обладает бесконечно большой магнитной проницаемостью. Это позволит разделить поле только на три области. Первая область *I* находится между линиями $y=0$ и $y=c$, вторая *II* расположена между линиями $y=c$ и $y=c+b$, а третья *III* — между линиями $y=c+b$ и $y=c+b+d$. В первой и третьей областях справедливо уравнение Лапласа, а во второй — уравнение Пуассона.

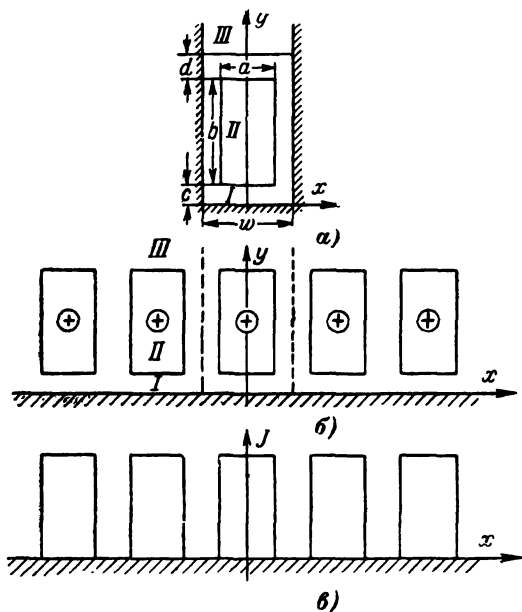


Рис. 5-9.

Характер распределения плотности тока в области *II* показан на рис. 5-9,б. При выбранном положении начала координат описывающий это распределение ряд Фурье содержит только косинусы (в противоположность синусам в предыдущем примере) и может быть представлен в виде:

$$J_{II} = J_0 \left[\frac{a}{w} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\frac{nka}{2} \right) \cos n k x \right], \quad (5-33)$$

где J_0 — плотность тока в проводниках, а $k=2\pi/w$.

Следует отметить, что поскольку выражения для всех векторных потенциальных функций должны иметь такой же вид, как и для J_{II} [см. вывод уравнения (5-18)], они определяются уравнениями (5-20) и (5-22) после замены синусов косинусами.

Поле в области I лапласово, в связи с чем соответствующее выражение для A_I находится из (5-20). Поскольку поверхность $y=0$ имеет бесконечно большую магнитную проницаемость, на ней $\partial A_I / \partial y = 0$ и выражение для A_I не должно содержать члена $K'y$; кроме того, для простоты положим $K=0$. Тогда можно будет определить A_I следующим образом:

$$A_I = \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{nky} + C'_n e^{-nky}) \cos nkx. \quad (5-34)$$

В области II поле пуассоново. Ввиду присутствия постоянного члена в выражении для J_{II} производная $\partial^2 A_{II} / \partial y^2$ должна быть постоянной (она может содержать только члены, являющиеся периодическими функциями x) и в выражение для A_{II} дополнительно к членам, вошедшим в (5-22), следует включить член, содержащий y^2 . Таким образом (принимая во внимание переход к косинусам), получим:

$$A_{II} = D_0 + D'_0 y + D''_0 y^2 + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (D_n e^{nky} + D'_n e^{-nky}) \cos nkx + \frac{2\mu_0 J_0}{\pi n^2 k^2} \sin \left(\frac{nka}{2} \right). \quad (5-35)$$

Поле в области III лапласово, и общее выражение для A_{III} соответствует (5-20). Однако, поскольку y может стать бесконечно большим, оно не должно содержать членов, включающих e^{nky} ; следовательно,

$$A_{III} = E_0 + E'_0 y + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} E'_n e^{-nky} \cos nkx. \quad (5-36)$$

Присутствие члена $D''_0 y^2$ в (5-35) не позволяет сразу положить постоянные D_0 , D'_0 , E_0 и E'_0 равными нулю, как это было сделано в предыдущем примере.

Наконец, входящие в выражения для A_I , A_{II} и A_{III} постоянные находятся из остальных граничных условий, которые могут быть представлены следующим образом.

а) Из условия $\partial A_I / \partial y = 0$ при $y=0$, приравняв коэффициенты, можно получить не только $C'_0 = 0$ (как было принято выше), но и

$$C_n = C'_n. \quad (5-37)$$

б) На границе между областями I и II, т. е. при $y=c$,

$$A_I = A_{II}; \quad (5-38)$$

$$\frac{\partial A_I}{\partial x} = \frac{\partial A_{II}}{\partial x} \quad (5-39)$$

и

$$\frac{\partial A_I}{\partial y} = \frac{\partial A_{II}}{\partial y}. \quad (5-40)$$

Подстановка выражений для A и их производных из (5-34) и (5-35) и приравнивание коэффициентов дает: для непериодических членов уравнения (5-38)

$$0 = D_0 + D'_0 c + D''_0 c^2; \quad (5-41)$$

для периодических членов уравнения (5-39)

$$C_n e^{nkc} + C'_n e^{-nkc} = D_n e^{nkc} + D'_n e^{-nkc} + \frac{2\mu_0 J_0}{\pi n^3 k^2} \sin\left(\frac{nka}{2}\right), \quad (5-42)$$

а для периодических и непериодических членов уравнения (5-40) соответственно

$$C_n e^{nkc} - C'_n e^{-nkc} = D_n e^{nkc} - D'_n e^{-nkc} \quad (5-43)$$

и

$$0 = D'_0 + 2D''_0 c. \quad (5-44)$$

в) На границе $y=c+b$ граничные условия для A_{II} , A_{III} и их производных в точности соответствуют уравнениям (5-38) — (5-40) и приводят к соотношениям между постоянными, точно соответствующим уравнениям (5-41) — (5-44).

г) В области III при больших значениях y магнитная индукция распределена равномерно и равна $\mu_0 I / w$, т. е.

$$\left(\frac{\partial A_{III}}{\partial y}\right)_{y \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 I}{w}, \quad (5-45)$$

откуда согласно (5-36)

$$E'_0 = \frac{\mu_0 I}{w}. \quad (5-46)$$

Таким образом, получено десять уравнений: по одному из пп. «а» и «г» и по четыре из пп. «б» и «в», совместное решение которых дает значения десяти остальных постоянных C , D , E и позволяет полностью определить A_I , A_{II} и A_{III} . Картина линий потока, полученная из этих выражений, изображена на рис. 5-10. Если принять значение потока между сплошными линиями рав-

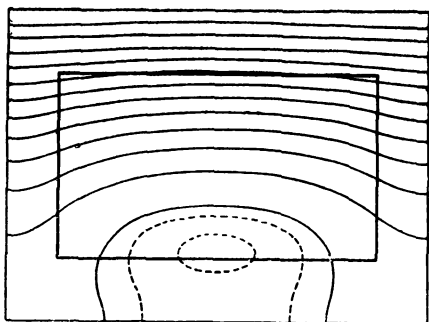


Рис. 5-10.

ным единице, то величина потока между нейтральной точкой и первой пунктирной линией равна 0,08, между первой и второй пунктирными линиями — 0,24, а между второй пунктирной и первой сплошной линиями — 0,2.

Паз конечной глубины. Индуктивность рассеяния. Поле паза конечной глубины можно определить путем внесения простых изменений в результаты приведенного выше анализа. Для этого принимают допущение, обычное для большинства расчетов полей пазового рассеяния, что открытие паза при $y=c+b+d$ перекрывает прямая линия потока. Далее, описанные в п. «г» граничные условия заменяет условие при $y=c+b+d$, т. е.

$$\frac{\partial A_{III}}{\partial x} = 0$$

и

$$A_{III} = 0$$

(для простоты). Кроме того, поскольку область III является конечной, в выражение для A_{III} могут войти члены, содержащие как e^{nky} , так и e^{-nky} , а $C_0 \neq 0$ в связи с выбранным началом отсчета A на линии $y=c+b+d$.

Эта задача, а также ряд подобных ей, включая случай двух проводников в пазу, была исследована в [Л. 5-7]. Цель этой работы заключалась в нахождении погрешности, вносимой в расчет индуктивности пазового рассеяния допущением, что все линии потока — прямые. Была получена зависимость, показывающая, что эта погрешность для всех встречающихся практически размеров проводника не превышает 4%. Однако отсюда вовсе не следует, что упомянутое упрощающее допущение справедливо в общем случае для задач, касающихся распределенных токов; его нельзя принять, если поперечное сечение проводников имеет сложную форму или мало по сравнению с размерами границ, например в трансформаторе.

5-5-3. Область применения метода

Метод Роговского может быть использован для определения полей токов, распределенных в прямоугольных или подразделяющихся на прямоугольные областях и окруженных разомкнутой (трехсторонней) или замкнутой прямоугольной границей. Ограничения, накладываемые в отношении конфигурации как областей токов, так и границ, связаны с необходимостью составления выражений для плотностей тока во всех областях в виде периодических функций одной координаты. Одна или две (противолежащие) стороны границы могут иметь бесконечно большую магнитную проницаемость, но для упрощения две другие противолежащие стороны должны:

а) иметь бесконечно большую магнитную проницаемость (как на рис. 5-9,а);

б) совпадать с силовыми линиями (например, область на рис. 5-7,а, ограниченная линиями $x=0$ и $x=2l$) или

в) одна иметь бесконечно большую магнитную проницаемость, а другая совпадать с силовой линией (например, область на рис. 5-7,а, ограниченная линиями $x=0$ и $x=l$).

Описанный метод может применяться (с указанными ограничениями) для большого числа проводников и про-

водников сложной конфигурации. Однако большое число областей и отдельных выражений для векторных потенциалов, которое потребуется, делает такой подход неоправданным. Вместо этого в таких случаях следует найти в общем виде решение для одного проводника и использовать его с помощью принципа наложения для синтеза решения при заданном распределении тока.

Практическое применение метода Роговского к решению задач, где границы имеют конечные (не равные нулю) значения магнитной проницаемости, невозможно в связи с большим числом областей, на которые должно быть разделено поле. Так, например, поле, включающее прямоугольную область $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq g$ (см. рис. 5-7,а) и окружающее ее бесконечное пространство, заполненное средой с одинаковой магнитной проницаемостью во всех точках (простейшее обобщение), требуется разделить на 12 областей (линиями $y=0$, $y=b$, $y=g$ и $x=0$, $x=l$) и определить 12 потенциальных функций.

Четыре из этих функций будут непериодическими, и сложность получаемых из граничных условий уравнений сделает задачу неразрешимой.

Решение может быть получено, если представить граничные условия на сторонах прямоугольника в виде рядов Фурье (см. § 4-3). Эта возможность была использована в [Л. 5-8] для приближенного исследования распределения поля внутри и вокруг обмотки возбуждения явно выраженного полюса с выступом

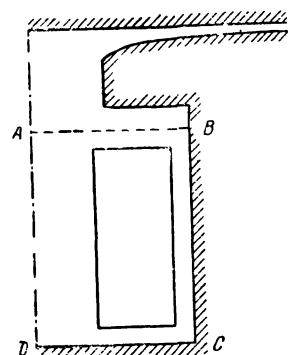


Рис. 5-11.

(рис. 5-11). Вначале с помощью графических методов, описанных в [Л. 5-8 и 5-9], было определено приближенно поле в воздушном зазоре и межполюсном пространстве. Исходя из этого, были найдены нормальная составляющая индукции и тангенциальная составляющая напряженности поля на линии AB . Далее, наконец, они были использованы в качестве одной совокупности граничных условий для прямоугольника $ABCD$, поле во внутренней области которого, создаваемое обмоткой, было определено по методу Роговского.

5-6. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЦ С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ. МЕТОД РОТА

5-6-1. Описание метода

Метод анализа, который описан ниже, был предложен и разработан Ротом в целой серии статей [Л. 5-10—5-16]. Он относится к тому же типу задач, что и метод Роговского, но гораздо более прост и дает решение в виде одной функции — двойного ряда Фурье, которая определяет поле во всей области, включая проводники и воздушное пространство.

Для того чтобы составить общее представление о методе, рассмотрим прямоугольную границу с бесконечно большой магнитной проницаемостью, внутри которой находится совокупность p прямоугольных проводников, как показано сплошными линиями на рис. 5-12. Совместим начало координат с левым нижним углом границы и примем обозначения размеров в соответствии с рисунком. Порядок решения противоположен применявшемуся в гл. 4 или выше в этой главе; здесь вначале находится функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи, а затем определяются входящие в нее постоянные, которые должны удовлетворять уравнениям поля.

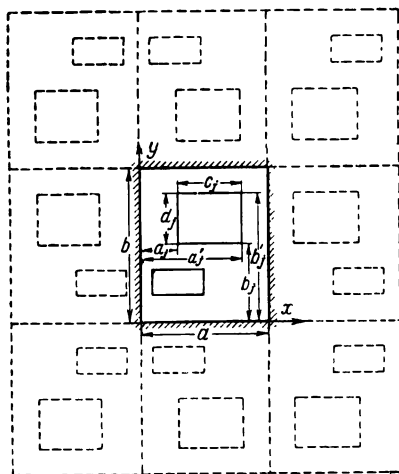


Рис. 5-12.

Требуемый вид векторной потенциальной функции можно установить, исходя из метода отображений (см. § 3-2-3). Согласно этому методу границы (рис. 5-12) можно заменить двумя бесконечными рядами отображений, показанных пунктиром, в связи с чем искомая функция, описывающая результирующее поле внутри прямоугольника, должна быть периодической по обеим координатам. Таким образом, в общем виде она опреде-

ляется как произведение двух простых рядов Фурье, одного по x , а другого по y :

$$\begin{aligned}
 A = & \sum_m \sum_n B_1 \cos mx \cos ny + \\
 & + \sum_m \sum_n B_2 \cos mx \sin ny + \sum_m \sum_n B_3 \sin mx \cos ny + \\
 & + \sum_m \sum_n B_4 \sin mx \sin ny,
 \end{aligned} \tag{5-47}$$

где B , m и n — постоянные, зависящие от характера поля и граничных условий.

Поскольку границы имеют бесконечно большую магнитную проницаемость, тангенциальная составляющая индукции на них равна нулю и граничные условия могут быть представлены следующим образом:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{x=0} = 0; \tag{5-48}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)_{y=0} = 0; \tag{5-49}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \tag{5-50}$$

и

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)_{y=b} = 0. \tag{5-51}$$

Подстановка производных A , определяемого уравнением (5-47), в (5-48) и (5-49) дает $B_2 = B_3 = B_4 = 0$ (синусов не может быть). Отсюда требуемое выражение для векторного потенциала будет иметь вид:

$$A = \sum_m \sum_n B_{m,n} \cos mx \cos ny. \tag{5-52}$$

Входящие в полученное соотношение постоянные m и n зависят от двух остальных граничных условий, определяемых уравнениями (5-50) и (5-51). Продифференцировав выражение для A и подставив полученные производные в эти уравнения, получим соответственно:

$$B_{m,n} m \sin ma \cos ny = 0 \tag{5-53}$$

для всех значений y и

$$B_{m,n} n \cos mx \sin nb = 0 \tag{5-54}$$

для всех значений x . Для того чтобы (5-53) было удовлетворено, значение ma должно быть в четное число раз больше $\pi/2$, т. е.

$$m_h = 2(h-1) \frac{\pi}{2a}, \quad (5-55)$$

где h — целое число, принимающее значения от 1 до ∞ .

Аналогичным образом (5-54) выполняется, если nb в четное число раз больше $\pi/2$, откуда

$$n_k = 2(k-1) \frac{\pi}{2b}, \quad (5-56)$$

где k — целое число, принимающее значения от 1 до ∞ .

Следовательно, в результате подстановки значений m_h и n_k в (5-52) получим окончательное выражение для векторной потенциальной функции:

$$A = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{h,k} \cos(h-1) \frac{\pi x}{a} \cos(k-1) \frac{\pi y}{b}. \quad (5-57)$$

Для того чтобы эта функция была искомым решением, определяющим поле, она должна, кроме того, удовлетворять уравнению Пуассона в пределах поперечного сечения проводников и уравнению Лапласа во всех точках области, заполненной воздухом. В соответствии с этим требованием, подставив вторые производные A , определяемого уравнением (5-52), в уравнение поля (5-1), получим условие

$$\sum_h \sum_k (m_h^2 + n_k^2) B_{h,k} \cos m_h x \cos n_k y = \mu_0 J, \quad (5-58)$$

где плотность J равна J_j (постоянна) в пределах j -го проводника и нулю во всех областях, заполненных воздухом. Уравнение (5-58) удовлетворится, если выбрать в качестве $B_{h,k}$ общий коэффициент двойного ряда Фурье по косинусам, сумма членов которого равна $\mu_0 J_j$ в пределах площади каждого из проводников и 0 во всех остальных точках. Для нахождения значений $B_{h,k}$ может быть использован метод, совершенно аналогичный примененному при определении коэффициентов простого ряда Фурье и заключающийся в умножении обеих частей уравнения (5-58) на $\cos m_h x \cos n_k y$ и интегрировании по площади, занятой полем (один период двойного беско-

нечного ряда) (рис. 5-12). Поскольку все другие интегрируемые члены пропадут, для левой части уравнения получим:

$$\int_0^a \int_0^b (m_h^2 + n_k^2) B_{h,k} \cos^2 m_h x \cos^2 n_k y \, dx \, dy = \\ = \frac{ab}{4} (m_h^2 + n_k^2) B_{h,k}, \quad (5-59)$$

а для правой части

$$\int_0^a \int_0^b \mu_0 J \cos m_h x \cos n_k y \, dx \, dy.$$

Поскольку J не равно нулю только в пределах сечений p проводников, этот интеграл равен:

$$\mu_0 \sum_{j=1}^p J_j \int_{a_j}^{a'_j} \int_{b_j}^{b'_j} \cos m_h x \cos n_k y \, dx \, dy = \\ = \mu_0 \sum_{j=1}^p J_j \left[\frac{(\sin m_h a'_j - \sin m_h a_j)}{m_h} \frac{(\sin n_k b'_j - \sin n_k b_j)}{n_k} \right]. \quad (5-60)$$

Отсюда, приравнявая правые части уравнений (5-59) и (5-60), получим:

$$B_{h,k} = \frac{4\mu_0}{ab} \cdot \frac{1}{(m_h^2 + n_k^2)} \sum_{j=1}^p J_j \times \\ \times \left[\frac{(\sin m_h a'_j - \sin m_h a_j)}{m_h} \frac{(\sin n_k b'_j - \sin n_k b_j)}{n_k} \right]. \quad (5-61)$$

Это уравнение позволяет найти значение $B_{h,k}$ при условии, что h или k не равно единице, но когда h или k или оба равны единице (т. е. если m_h или n_k или оба равны нулю), уравнение (5-61) принимает особый вид и для определения $B_{1,k}$, $B_{h,1}$ и $B_{1,1}$ необходимо возвратиться к уравнению (5-58). Рассмотрим по порядку эти три случая.

1. При $h=1$ и $k>1$ (т. е. при $m_h=0$ и $n_k>0$) левая часть (5-58) принимает вид (после интегрирования) $B_{1,k} n^2 k ab/2$. В правой части получается неопределенность

$$\frac{\sin m_1 a'_j - \sin m_1 a_j}{m_1},$$

поскольку $m_1=0$, однако продифференцировав числитель и знаменатель по m_1 и снова положив $m_1=0$, получим предельное значение

$$a'_j - a_j = c_j$$

(рис. 5-12). Следовательно,

$$B_{1,k} = \frac{2\mu_0}{ab} \sum_{j=1}^p J_j c_j \left(\frac{\sin n_k b'_j - \sin n_k b_j}{n_k} \right). \quad (5-62)$$

2. При $h > 1$ и $k = 1$ нетрудно показать аналогичным путем, что

$$B_{h,1} = \frac{2\mu_0}{ab} \sum_{j=1}^p J_j d_j \left(\frac{\sin m_h a'_j - \sin m_h a_j}{m_h} \right). \quad (5-63)$$

3. Аналогичным образом при $h=1$ и $k=1$ легко установить, что $B_{1,1}$ является постоянной, которой можно пренебречь, так как начало отсчета A выбирается произвольно.

Итак, наконец, получено решение для поля во внутренней и внешней областях проводников, выраженное с помощью одной векторной потенциальной функции A , определяемой уравнением (5-57), в котором значения $B_{h,k}$ находятся в общем случае по (5-61), а при h или k , равном единице, — из (5-62) и (5-63). Это общее решение непосредственно используется в следующем параграфе для определения поля в обмотке трансформатора. Его, конечно, можно применить при любом числе и расположении проводников во внутренней области границы, и для решения других задач практически достаточно лишь изменить значения m или n (см. § 5-6-3).

5-6-2. Силы, действующие на обмотку трансформатора, и ее индуктивность

Обмотки трансформаторов подвергаются действию очень больших сил, и для того чтобы иметь уверенность в том, что они не вызовут разрушений, важно уметь определять их величины. Кроме того, не менее важное значение имеет расчет индуктивностей обмоток. Анализ сил и индуктивностей был выполнен Ротом в работах, на

которые была сделана ссылка выше. В [Л. 5-12] описана задача, аналогичная рассмотренной ниже, а [Л. 5-15] посвящена случаю трансформатора с цилиндрическими обмотками. Позднее некоторые результаты работ Рота были обобщены на английском языке в [Л. 5-17] (см. также [Л. 5-18 и 5-19]).

Рассмотрим расположение обмоток в «окне» обычного трансформатора стержневого типа, поперечное сечение которого показано на рис. 5-13. Это частный случай общей задачи, представленной на рис. 5-12. Расположение обмоток симметрично относительно вертикальной линии, проходящей посередине окна, поэтому при анали-

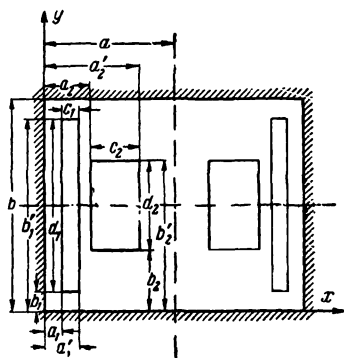


Рис 5-13.

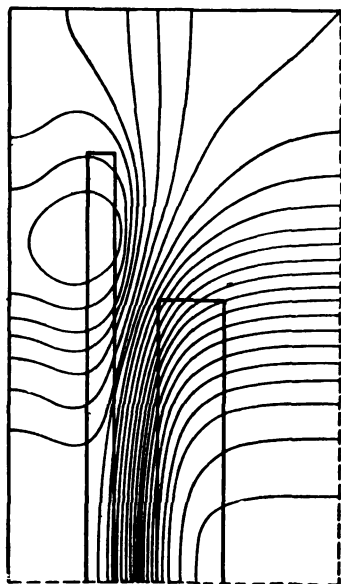


Рис. 5-14.

зе достаточно исследовать одну половину площади окна. Линия симметрии является эквипотенциалью поля, в связи с чем, выбрав показанное на рисунке направление координатных осей, получим полное соответствие левой половине рисунка области поля на рис. 5-12. Следовательно, решение, определяемое уравнениями (5-57) и (5-61) — (5-63), при числе проводников p , равном двум, является решением для поля в данной задаче. Оно было использовано при расчете картины поля, изображенной на рис. 5-14.

Действующая на проводник сила F находится, исходя из составляющих магнитной индукции внутри него.

Их нетрудно определить через производные векторного потенциала и использовать при выводе выражений для сил, действующих на волокно с поперечным сечением $dx dy$, а затем следует проинтегрировать полученные зависимости по сечению проводника. Таким образом, отнесенные к единице длины в направлении оси z составляющие силы F , действующей на j -й проводник, по осям x и y соответственно равны:

$$F_{xj} = \int_{a_j}^{a'_j} \int_{b_j}^{b'_j} J_j B_y dx dy = - J_j \int_{a_j}^{a'_j} \int_{b_j}^{b'_j} \frac{\partial A}{\partial x} dx dy$$

и

$$F_{yj} = \int_{a_j}^{a'_j} \int_{b_j}^{b'_j} J_j B_x dx dy = J_j \int_{a_j}^{a'_j} \int_{b_j}^{b'_j} \frac{\partial A}{\partial y} dx dy.$$

Подстановка значений $\partial A/\partial x$ и $\partial A/\partial y$, определенных согласно уравнению (5-57), дает соответственно:

$$F_{xj} = - J_j \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{h,k} \left[\frac{(\cos m_h a'_j - \cos m_h a_j) (\sin n_k b'_j - \sin n_k b_j)}{n_k} \right] \quad (5-64)$$

и

$$F_{yj} = J_j \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{h,k} \times \left[\frac{(\cos n_k b'_j - \cos n_k b_j) (\sin m_h a'_j - \sin m_h a_j)}{m_h} \right], \quad (5-65)$$

где $B_{h,k}$ определяется в общем случае уравнением (5-61), а в частных случаях при h или k , равном единице, — уравнениями (5-62) и (5-63). В данном случае в связи с симметрией относительно оси x для обоих проводников $F_{yj} = 0$.

5-6-3. Проводник в пазу. Определение индуктивности

Для того чтобы показать значительное упрощение анализа по методу Рота по сравнению с методом Роговского, снова обратимся к задаче проводника, лежащего

в пазу с параллельными стенками, окруженном стальным массивом с бесконечно большой магнитной проницаемостью; все размеры приведены на рис. 5-15 (c_1 — ширина проводника).

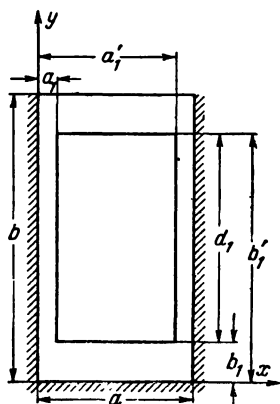


Рис. 5-15.

Рассмотрим случай, когда принимается допущение, что открытие паза при $y=b$ перекрывает прямая линия потока.

Граничные условия на стенках и дне паза, которые сводятся к равенству нулю тангенциальной составляющей магнитной индукции на линиях $x=0$, $y=0$ и $x=a$, соответствуют условиям, выраженным при детальном анализе уравнениями (5-48) — (5-50). Поэтому векторный потенциал поля в пазу определяется уравнением (5-52), а значение m_h — уравнением (5-55). Остальные граничные условия отличаются от рассмотренных выше. На

линии $y=b$ поле ограничено линией потока, т. е. линией постоянного векторного потенциала, для которой значение A удобно принять равным нулю.

Таким образом,

$$(A)_{y=b} = 0 \quad (5-66)$$

и при подстановке значения A из (5-52) получим условие

$$\cos mx \cos nb = 0,$$

которое должно выполняться для всех значений x , поэтому nb должно быть в нечетное число раз больше $\pi/2$, откуда

$$n_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2b}. \quad (5-67)$$

В результате подстановки значений m_h из уравнения (5-55) и n_k из (5-67) в (5-52) получим векторную потенциальную функцию:

$$A = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{h,k} \cos \left[(h-1) \frac{\pi x}{a} \right] \cos \left[(2k-1) \frac{\pi y}{2b} \right]. \quad (5-68)$$

Полученная функция, помимо того, должна удовлетворять уравнениям поля. Это достигается, точно так же

как и в § 5-6-1, путем выбора в качестве постоянных $B_{h,k}$ коэффициентов двойного ряда Фурье, значения которых определяются из (5-61) при $p=1$. Согласно уравнению (5-67) при $k=1$ имеем $n_k \neq 0$, в связи с чем достаточно рассмотреть частные значения $B_{h,k}$, определяемые уравнением (5-62).

Этот пример особенно подходит для того, чтобы продемонстрировать способ аналитического определения индуктивности проводника с использованием (2-64):

$$L = \frac{1}{SI} \iint_{\mathfrak{S}} (A_0 - A) dx dy.$$

Физической величиной, представляющей наибольший интерес, является индуктивность пазового рассеяния, т. е. индуктивность, обусловленная потоком, пересекающим паз от зубца к зубцу и замыкающимся внутри самого проводника. Обычно принимают, что этот поток ограничен прямой линией потока, перекрывающей открытие паза, а соответствующее ей значение векторной потенциальной функции A_0 равно нулю [см. уравнение (5-66)]. Далее, вид описывающей поле функции A определяется уравнением (5-68), где $B_{h,k}$ рассчитывается для результирующего тока I , протекающего в проводнике. Таким образом, использование приведенных на рисунке обозначений размеров паза и проводника и введение значения A приводят к следующему выражению для индуктивности:

$$\begin{aligned} L &= \frac{-1}{c_j d_j I} \int_{a_j}^{a'_j} \int_{b_j}^{b'_j} \sum_h \sum_k B_{h,k} \cos(h-1) \frac{\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \cos(2k-1) \frac{\pi y}{2b} dx dy = \\ &= \frac{-2ab}{\pi^2 c_j d_j I} \sum_h \sum_k \frac{B_{h,k}}{(h-1)(2k-1)} \left\{ \left[\sin(h-1) \frac{\pi a'_j}{a} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin(h-1) \frac{\pi a_j}{a} \right] \left[\sin(2k-1) \frac{\pi b'_j}{2b} - \sin(2k-1) \frac{\pi b_j}{2b} \right] \right\}. \quad (5-69) \end{aligned}$$

5-6-4. Область применения метода

Метод Рота применим к тому же типу задач, что и метод Роговского, т. е. к определению полей во внутренней области прямоугольных границ, создаваемых

произвольной совокупностью прямоугольных проводников, расположенных параллельно сторонам границы. Однако, как показал последний пример, он несравнимо проще. Действительно, даже при небольшом опыте можно составить решение для любой задачи, исходя из общего случая. Недостаток метода состоит в том, что многие получающиеся двойные ряды сходятся довольно медленно; часто приходится учитывать не менее десяти членов каждой части ряда (т. е. принимать $h=k=10$). Их вычисление при ручных расчетах весьма трудоемко, однако при использовании вычислительных машин не вызывает затруднений. Кроме того, в [Л. 5-20] показано, что некоторые ряды можно представить в конечном виде и существенно облегчить расчеты. Сводка методов суммирования этих рядов приведена в приложении I в конце книги и [Л. 5-17].

Границы, имеющие конечное значение магнитной проницаемости, здесь не рассматриваются. Хотя подход Рота к решению таких задач представляет значительный теоретический интерес, его практическая ценность не оправдывает требуемого подробного обоснования. Необходимые сведения можно найти в [Л. 5-13]. Граничные условия между областями, заполненными средой с конечной магнитной проницаемостью и воздухом, удовлетворяются путем введения слоев тока вдоль поверхности раздела с соответствующим распределением плотности.

Для нахождения граничных условий можно применить также графические методы (как показано в § 5-5-3). Использование этого метода для исследования поля в пазу под явно выраженным полюсом описано в [Л. 5-14].

ЛИТЕРАТУРА

5-1. Strutt M., Das magnetische Feld eines rechteckigen, von Gleichstrom durchflossenen Leiters, Arch. Elektrotechn., 17, 533—535; 18, 282, 1927.

5-2. Schurig O. R. and Sayre M. F., Mechanical stresses in busbar supports during short-circuits, J. Amer. Instn Electr. Engrs, 44, 365—372, 1925.

5-3. Higgins T. J., Formulas for calculating short-circuit forces between conductors of structural shape, Trans. Amer. Instn Electr. Engrs, 62, III, 10, 659—663, Oct. 1943.

5-4. Dwight H. B., Repulsion between strap conductors, Electr. World, 70, 522—524, 1917.

5-5. Strutt M., Das magnetische Feld im Innern ferromagnetischer Leiter von rechteckigem, dreieckigem und elliptischem Querschnitt, Arch. Elektrotechn., **18**, 190—194, 1927.

5-6. Rogowski W., Über das Streufeld und der Streuinduktionskoeffizienten eines Transformators mit Schiebenwicklung und geteilten Endspulen, Mitt. Forsch. Arb. VDI, **71**, July 1909.

5-7. Robertson B. L. and Terry J. A., Analytical determination of magnetic fields, Trans. Amer. Instn Electr. Engrs, **48**, 4, 1242—1262, Oct. 1929.

5-8. Stevenson A. R. and Park R. H., Graphical determination of magnetic fields, Gen. Electr. Rev., **31**, 99—109 and 153—164, Feb. and March 1928.

5-9. Stevenson A. R., Fundamental theory of flux-plotting, Gen. Electr. Rev., **24**, 797—804, 1926.

5-10. Roth E., Introduction à l'étude analytique de l'échauffement des machines électriques, Bull. Soc. Franç. Électr., **7**, 840—966, Aug. 1927.

5-11. Roth E., Étude analytique du champ propre d'une encoche, Rev. Gén. Électr., **22**, 417—424, Sept. 1927.

5-12. Roth E., Étude analytique du champ de fuites des transformateurs et des efforts mécaniques exercés sur les enroulements, Rev. Gén. Électr., **23**, 773—787, May 1928.

5-13. Roth E., Étude analytique des champs thermique et magnétique lorsque la conductibilité thermique ou la perméabilité n'est pas la même dans toute l'étendue du domaine considéré, Rev. Gén. Électr., **24**, 137—148 et 179—187, July et Aug. 1928.

5-14. Roth E., Étude analytique du champ résultant d'une encoche de machine électrique, Rev. Gén. Électr., **32**, 761—768, Dec. 1932.

5-15. Roth E., Inductance due aux fuites magnétiques dans les transformateurs à bobines cylindriques et efforts exercés sur les enroulements, Rev. Gén. Électr., **40**, 259—268, 291—303 et 323—336, Aug. et Sept. 1936.

5-16. Roth E., Champ magnétique et inductance d'un système des barres rectangulaires parallèles, Rev. Gén. Électr., **44**, 275, Sept. 1938.

5-17. Billig E., The calculation of the magnetic fields of rectangular conductors in a closed slot and its application to the reactance of transformer windings, Proc. Instn Electr. Engrs, **98**, pt 4, 55, Oct. 1951.

5-18. Rabins L., Transformer reactance calculations with a digital computer, Trans. Amer. Instn Electr. Engrs, **25**, 1, July 1956.

5-19. Vein P. R., A method based on Maxwell's equations for calculating the short-circuit forces on the concentric windings of an idealized transformer, Electr. Res. Assoc., Report Q/T151, 1960.

5-20. Roth E. et Kouskoff G., Sur une méthode de sommation de certaines séries de Fourier, Rev. Gén. Électr., **23**, 1061—1073, June 1928.

5-21. Вницкий А. М., Гельбух Л. А., Расчет внешней индуктивности токовых прямоугольных стальных шин, «Электричество», 1950, № 8.

5-22. Higgins T. J., A comprehensive review of Sain-Venant's torsion problem, Amer. J. Phys., **10**, 248, Oct. 1942.

Дополнительная литература

5-23. Higgins T. J., Inductance of hollow rectangular conductors, J. Franklin Inst., 230, 3, 375—380, Sept. 1940.

5-24. Higgins T. J., New formulas for calculating short-circuit stresses in bus supports for rectangular tubular conductors, J. Math. Phys., 14, 3, 151—154, March 1943.

5-25. Higgins T. J., Formula for the geometrical mean distances of rectangular areas and of line segments, J. Math. Phys., 14, 4, 188—195, April 1943.

5-26. Higgins T. J. and Messinger H. P., Equations for the inductance of three-phase coaxial busses comprised of square tubular conductors, J. Appl. Phys., 18, 1009—1021, Nov. 1947.

Часть третья

МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Глава шестая

ВВЕДЕНИЕ К КОНФОРМНОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ

Конформное преобразование является безусловно наиболее действенным методом аналитического определения лапласовых полей, позволяющим учесть влияние границ гораздо более сложной конфигурации, чем другие аналитические методы. Он может быть использован, например, для определения полей между эксцентричными кабелями или волноводами с сечением в форме многоугольника, в воздушном зазоре вращающейся электрической машины с учетом пазов. Кроме того, в общем случае решения имеют очень простой вид и дают возможность сравнительно легко получить выражения для магнитной индукции и проводимости для магнитных полей (или градиента потенциала и емкости для электростатических полей), а также позволяют во многих случаях рассчитать картину поля. Главное ограничение при использовании метода преобразований состоит в том, что в большинстве задач границы поля должны быть приняты или имеющими бесконечно большую магнитную проницаемость (или бесконечно большую электрическую проводимость), или совпадающими с линиями потока, или представлять собой комбинацию этих двух типов границ.

В связи с большой важностью метода преобразований он изложен довольно подробно. В данной главе и двух следующих за нею изложены основы метода и рассмотрены простейшие примеры его применения, а две последние главы этой части книги посвящены более сложным приложениям и к их чтению не следует приступать без предварительного ознакомления с подготовительными главами.

6-1. КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ

6-1-1. Конформное преобразование

Познакомимся со свойствами регулярной¹ функции вида:

$$z = f(t) = x(u, v) + jy(u, v), \quad (6-1)$$

¹ См. сноску на стр. 38

определяющей комплексную переменную $z = x + jy$ как некоторую функцию другой комплексной переменной $t = u + jv$. Частное значение t' может быть представлено точкой на комплексной плоскости переменной t (рис. 6-1,а). С помощью уравнения (6-1) некоторое

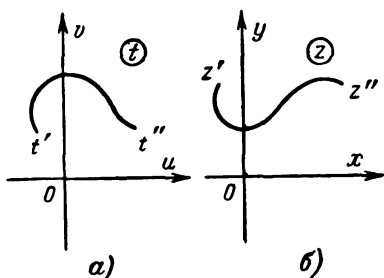


Рис. 6-1.

частное значение (или значения) z' связывается со значением t' и его можно представить точкой на комплексной плоскости z (рис. 6-1,б). Далее, существует аналогичное соответствие между последовательными парами точек в плоскостях t и z , в связи с чем некоторой кривой $t't''$ отвечает кривая $z'z''$, которую можно назвать *преобразованием* или *отображением* кривой $t't''$, осуществляемым с помощью уравнения (6-1).

В качестве примера рассмотрим кривые в плоскости z , получаемые путем отображения прямых линий в плоскости t с помощью уравнения

$$z = \sin t. \quad (6-2)$$

Для того чтобы определить эти кривые, необходимо составить уравнения, связывающие x и y , в которых будет отсутствовать u или v . Разложив выражение $\sin(u + jv)$, получим:

$$z = \sin u \cos jv + \cos u \sin jv = \sin u \operatorname{ch} v + j \cos u \operatorname{sh} v;$$

отсюда, приравняв вещественные и мнимые части, найдем:

$$x = \sin u \operatorname{ch} v \quad (6-3)$$

и

$$y = \cos u \operatorname{sh} v. \quad (6-4)$$

Возведение в квадрат и сложение уравнений (6-3) и (6-4) позволяет исключить u :

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 v} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 v} = 1, \quad (6-5)$$

а при вычитании исключить v :

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1. \quad (6-6)$$

Прямая линия, параллельная оси u на рис. 6-2,а, описывается уравнением $v = \operatorname{const}$. При постоянном значении v уравнение (6-5) определяет эллипс в плоскости z , поэтому каждая прямая, параллельная оси u , с помощью уравнения $z = \sin t$ преобразуется в эллипс на плоскости z (см. рис. 6-2,б). Всякая прямая, параллельная оси v , описывается уравнением $u = \operatorname{const}$, и согласно уравнению (6-6) не-

трудно заметить, что ее отображением на плоскости z является гиперболою.

В этом простом примере удалось получить знакомые уравнения для преобразованных кривых. Однако обычно это невозможно и для построения кривых часто приходится подставлять в уравнение преобразования ряд частных значений t . Прделав такую операцию в данном примере для вещественной оси от 0 до ∞ (т. е. при $v=0$) согласно (6-3) и (6-4), нетрудно заметить, что:

а) $y=0$ для всех значений u ;

б) когда u принимает значения $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ и 2π , им соответствуют значения x , равные $0, 1, 0, -1$ и 0 .

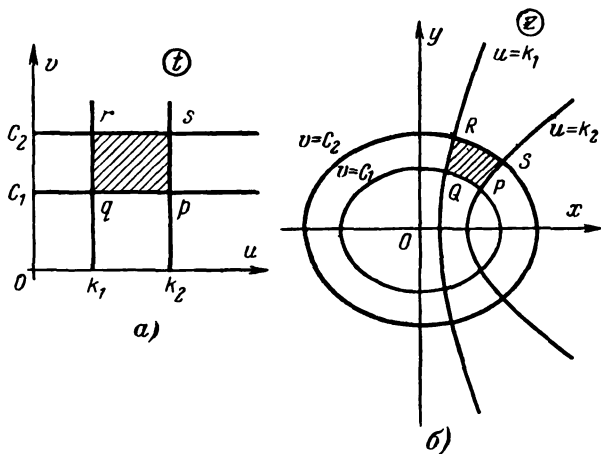


Рис. 6-2.

Отсюда следует, как видно из (6-3), что x является периодической функцией, в связи с чем бесконечно большое число значений u в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ может привести к одному и тому же значению x . Такое соответствие точки в одной плоскости большему числу точек в другой плоскости наблюдается часто, и для сложных преобразований требуется внимательность при объяснении результатов.

Кроме соответствия между кривыми в двух плоскостях, которое было показано, очевидно, существует и соответствие между отдельными областями в этих плоскостях. Так, например, области, ограниченной линиями $v=0$ и $v=c$, соответствует в плоскости z внутренняя область эллипса, для которого $v=c$ (эллипс, для которого $v=0$, вырождается, как было показано выше, в отрезок прямой между точками $x=1$ и $x=-1$), а прямоугольнику $pqrs$, ограниченному линиями $v=c_1, v=c_2, u=k_1$ и $u=k_2$, соответствует в плоскости z область $PQRS^*$.

* Любой полосе, имеющей ширину 2π , в верхней половине плоскости t соответствует вся плоскость z .

Преобразование описанного типа называется *конформным*. Это название связано с особенностью преобразования, которая заключается в том, что если две кривые пересекаются под определенным углом в одной плоскости, то преобразованные кривые в другой плоскости будут пересекаться под тем же углом, причем сохранится и направление обхода угла¹. Так, на рис. 6-2 $\widehat{pqr} = P\widehat{Q}R$. В частности, если две прямые пересекаются под прямым углом (как в рассмотренном примере), то преобразованные кривые также пересекаются под прямым углом. Это свойство ортогональности, конечно, характерно для всех сопряженных функций (вещественной и мнимой частей регулярной функции комплексного переменного) (см. § 2-4).

6-1-2. Решение уравнения Лапласа

Как было показано в § 2-4, сопряженные функции являются решениями уравнения Лапласа, поэтому всякое конформное преобразование устанавливает простое соотношение между двумя лапласовыми полями. Использование методов преобразования при определении полей сводится к нахождению соответствующего уравнения, связывающего данное поле с другим полем, для которого решение известно или может быть без труда найдено.

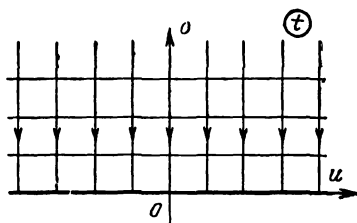


Рис. 6-3.

Использование методов преобразования при определении полей сводится к нахождению соответствующего уравнения, связывающего данное поле с другим полем, для которого решение известно или может быть без труда найдено.

Рассмотрим вначале комплексную плоскость t (рис. 6-3), где представлено равномерное поле, параллельное одной из осей, т. е. линии $u = \text{const}$

являются линиями потока, а линии $v = \text{const}$ — эквипотенциалами. Допустим, что значение магнитной индукции в любой точке равно k . Тогда, если принять потенциал оси u равным нулю, значение потенциальной функции ψ (хотя и не обязательно абсолютное значение потенциала) в произвольной точке (u, v) равно:

$$\psi = kv,$$

а значение функции потока, если выбрать $\varphi = 0$ на линии $u = 0$,

$$\varphi = ku.$$

Объединив эти два уравнения, получим следующее выражение для комплексного потенциала w в произвольной точке плоскости t :

$$w = \varphi + j\psi = k(u + jv),$$

или

$$w = kt. \quad (6-7)$$

¹ Общее доказательство этого свойства несложно и приводится в любом элементарном руководстве по функциям комплексного переменного.

Равномерное поле (представленное здесь в плоскости t) является наиболее простым из всех лапласовых полей и выбирается за основу, с которой связывают все другие решения. Удобно рассматривать комплексный потенциал $w = \varphi + j\psi$ в соответствующей комплексной плоскости w ; тогда (6-7) определяет простой вид преобразования, заключающийся просто в изменении масштаба пропорционально k . Таким образом, процесс определения любого поля методом преобразований в конечном счете сводится к выводу уравнения

$$w = f(z), \quad (6-8)$$

которое связывает точки исследуемого поля в плоскости z с точками в плоскости w . Следует иметь в виду, что в общем случае при нахождении уравнения (6-8) приходится вводить промежуточные плоскости и переменные.

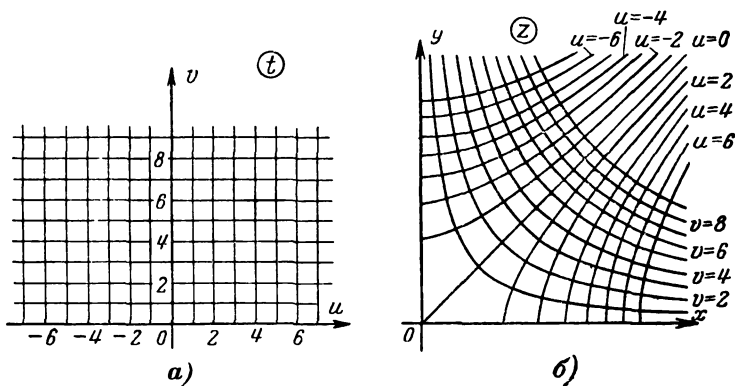


Рис. 6-4.

В качестве простого примера рассмотрим влияние преобразования

$$z = t^{1/2} \quad (6-9)$$

на равномерное поле, линии потока и эквипотенциали которого параллельны осям в плоскости t . Нетрудно заметить, что положительная часть вещественной оси плоскости t преобразуется в положительную часть вещественной оси плоскости z , а отрицательная часть вещественной оси плоскости t в связи с появлением квадратного корня из отрицательного числа становится частью мнимой оси от 0 до $j\infty$ в плоскости z . Следовательно, уравнение (6-9) преобразует верхнюю половину плоскости t в первый квадрант плоскости z . Конфигурацию параллельных линий после преобразования можно найти путем исключения из (6-9) u или v . Если возвести это уравнение в квадрат и приравнять вещественные и мнимые части, то получим:

$$x^2 - y^2 = u \quad (6-10)$$

и

$$2xy = v. \quad (6-11)$$

Отсюда нетрудно заметить, что линии, параллельные оси v , преобразуются в прямоугольные гиперболы, так же как и линии, параллельные оси u (рис. 6-4). Физическая картина влияния этого преобразования сводится к тому, что прямые линии потока, пересекающие эквипотенциальную границу, совпадающую с вещественной осью плоскости t , приобретают в плоскости z конфигурацию гипербол и пересекают эквипотенциальные границы, совпадающие с положительными вещественной и мнимой осями. Граничные условия в двух плоскостях одинаковы в связи с конформным свойством преобразования. Аналогичным образом границей в плоскости z является предельная кривая ($\psi=0$) в семействе гиперболических эквипотенциалей.

Выражения для функции потока и потенциальной функции в плоскости z находятся путем исключения t из (6-7) и (6-9) в виде:

$$kz^2 = w \quad (6-12)$$

или для функции потока

$$\varphi = k(x^2 - y^2) \quad (6-13)$$

и для потенциальной функции

$$\psi = 2kxy. \quad (6-14)$$

Для заданного значения φ или ψ уравнения (6-12)—(6-14) определяют в плоскости z конфигурацию соответствующей линии потока или эквипотенциали (включая границу). Точно так же подстановка координат любой точки (x, y) в (6-12) дает значение комплексного потенциала w , отнесенное к соответствующему начальному значению, в точке (x, y) .

6-1-3. Логарифмическая функция

Логарифмическое преобразование имеет очень важное значение и применяется в подавляющем большинстве решений, получаемых методами преобразований. Далее рассмотрены его отображающие свойства и три основных поля, для описания которых оно может быть использовано.

Поле линейного тока. Обратимся снова к полю линейного тока. Оно было рассмотрено в § 2-2, где показано, что для линейного тока i , расположенного в начале координат на плоскости z , комплексная потенциальная функция поля определяется выражением $(i/2\pi)\ln z$, т. е.

$$\varphi + j\psi = \frac{i}{2\pi} \ln z. \quad (6-15)$$

То же самое уравнение можно вывести из рассмотрения преобразования

$$t = \ln z. \quad (6-16)$$

В результате обращения этого уравнения найдем:

$$e^t = z,$$

или

$$e^u \cos v = x$$

и

$$e^u \sin v = y.$$

Таким образом,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e^u \quad (6-17)$$

и

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) = v. \quad (6-18)$$

Как показывает уравнение (6-17), линия, параллельная оси v на плоскости t , отображается в окружность с центром в начале координат на плоскости z , а из (6-18) следует, что линия, параллельная оси u на плоскости t , преобразуется на плоскости z в прямую, проходящую через начало координат и образующую угол v рад с осью x (рис. 6-5).

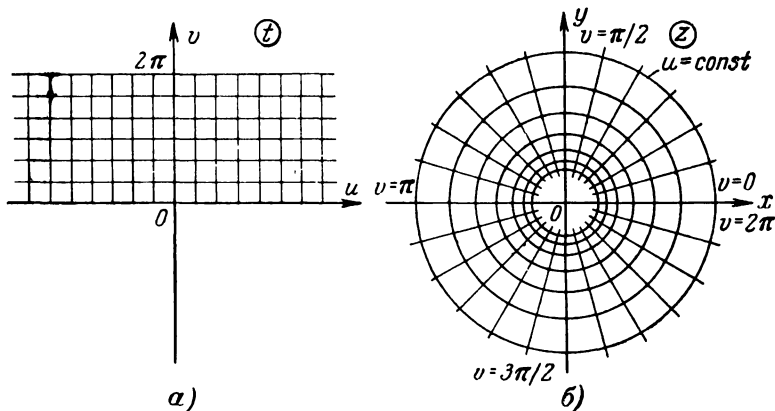


Рис. 6-5.

Далее, если равномерное поле, описываемое зависимостью

$$\omega = kt, \quad (6-19)$$

находится в плоскости t , то линии, для которых значения u и v постоянны, представляют собой соответственно линии потока и эквипотенциали. Однако линии в плоскости z , которым они отвечают, совпадают с линиями потока и эквипотенциалами поля линейного тока. Следовательно, объединение (6-19) и (6-16) позволяет определить поле линейного тока зависимость

$$\omega = k \ln z, \quad (6-20)$$

где значение k зависит от величины тока.

Для нахождения k наиболее удобно использовать выражение для потенциальной функции. Приравняв мнимые части (6-20), получим:

$$\psi = k \arg z. \quad (6-21)$$

Далее, при однократном обходе по контуру, охватывающему ток, происходит изменение потенциала, равное i . Введение этого условия в (6-21) дает:

$$i = k2\pi.$$

Таким образом, в результате подстановки значения k в (6-20) получим комплексную потенциальную функцию поля, создаваемого током, т. е. уравнение (6-15).

Поле линейного заряда. При взаимной перестановке функции потока и потенциальной функции полученное решение (6-20) относится также к полю линейного заряда. Однако значение постоянной k в этом случае зависит от величины заряда q на единицу длины линии. Уравнение, соответствующее выражению (6-21), имеет вид:

$$\varphi = k \arg z, \quad (6-22)$$

и принимая во внимание, что охватывающий линию контур пересекает все линии потока, выходящие из заряда, получим:

$$k = q/2\pi.$$

Поле двух полубесконечных эквипотенциальных плоскостей. Поле на рис. 6-5,б соответствует полю, создаваемому двумя полубесконечными эквипотенциальными плоскостями. Линии пересечения которых с плоскостью рисунка простираются от 0 до $+\infty$, а другая от 0 до $-\infty$, если разность потенциалов между ними составляет $i/2$. В общем случае, когда разность потенциалов между двумя половинами вещественной оси, разделенными началом координат, равна ψ_1 , поле в положительной половине плоскости описывает комплексная потенциальная функция

$$\varphi + j\psi = \frac{\psi_1}{\pi} \ln z. \quad (6-23)$$

Это уравнение часто используют при анализе полей, границы которых образованы двумя (различными) эквипотенциальными участками.

6-2. ТИПЫ ЗАДАЧ, ПОДДАЮЩИХСЯ РЕШЕНИЮ

Для того чтобы поле могло быть определено методами преобразований, должны быть выполнены две операции: необходимо найти уравнение преобразования, связывающее исследуемое поле с более простым, и получить решение для этого простого поля. Возможность выполнения последней операции зависит от того, могут ли быть найдены и использованы преобразованные граничные условия. В общем случае задача нахождения и использования этих условий может оказаться очень сложной или даже вообще не поддающейся решению, однако существует много важных типов задач, для которых сделать это сравнительно просто. Все задачи удобно классифицировать на две категории: задачи, в которых значения φ (или ψ) на границах или известны, или хотя и неизвестны, но постоянны (благодаря чему граничные условия для каждой области поля могут быть заданы независимо), и задачи, где между областями удовлетворяются граничные условия для градиента (отличающиеся от тех,

которые относятся к упомянутой выше категории, когда равна нулю нормальная или тангенциальная составляющая).

Первая из категорий гораздо более важна и к ней относятся почти все известные решения, полученные методами преобразований. Она включает все задачи, в которых границы поля являются эквипотенциалами или линиями потока или представляют собой их комбинацию (ψ или ϕ постоянно), а также задачи, в которых задано распределение потенциала вдоль границы (задача Дирихле, см. § 10-6-1). Численное решение задачи Дирихле всегда возможно, если может быть выполнено преобразование заданной границы в окружность с единичным радиусом или вещественную ось, однако нахождение аналитических решений для всех случаев, за исключением самых простых, чрезвычайно затруднительно. Одно из таких аналитических решений описано в [Л. 6-1] и касается определения поля явно выраженного полюса с учетом изменения потенциала по его высоте. Общее решение в случае границы, состоящей из ряда различных эквипотенциальных участков, приведено в § 10-6.

Вторая категория задач, охватывающая поля, границы которых имеют конечную магнитную или диэлектрическую проницаемость, мало исследована. Преобразование решений для полей с граничными условиями для градиента, связывающими решения по ту и другую стороны границы, очевидно справедливо, поскольку преобразованное поле остается лапласовым и граничные условия остаются в силе: сохраняются углы, под которыми линии потока пересекают поверхность раздела, в связи с чем удовлетворяется уравнение (2-68), но и потенциал изменяется непрерывно, т. е. удовлетворяется уравнение (2-66). В общем случае задачи, относящиеся к этой категории, очень сложны, и ни одна из них в этой книге не рассмотрена. Тем не менее для любой такой задачи, если существует уравнение, преобразующее *все* области поля совместно, найти решение сравнительно нетрудно. Примером подобной задачи является преобразование круговой границы в эллиптическую при сохранении соответствия внутренних и внешних областей двух границ. Применение этого преобразования для решения задачи диэлектрического цилиндра, находящегося в равномерном приложенном поле, описано в [Л. 44].

В заключение следует указать на возможность преобразования решений и для некоторых пуассоновых полей (см., например, [Л. 49]). Однако этот метод представляет лишь ограниченный интерес для инженеров-электриков и здесь не описан. Единственное известное автором решение электротехнической задачи приведено в [Л. 6-2] для эксцентричных круглых проводников, а полный обзор аналогичных задач, которые были решены (см. сноску на стр. 119), читатель может найти в [Л. 5-22].

6-3. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В основе практического применения метода конформных преобразований лежит ряд важных общих положений, и хотя некоторые из них очевидны из того, что было сказано выше, в этом параграфе они рассмотрены детально.

6-3.1. Выбор начала координат

Положение начала координат в любой плоскости может быть выбрано совершенно произвольно. Так, например, положение угла

на рис. 6-4,б или положение линейного тока на рис. 6-5,б можно сместить в любую точку $z = x_1 + jy_1$, заменив z на $[z - (x_1 + jy_1)]$ соответственно в уравнении (6-9) или (6-16). Аналогичным образом при замене t на $[t - (u_1 + jv_1)]$ полюс в плоскости z будет соответствовать точке $t = u_1 + jv_1$ (рис. 6-5,а).

6-3-2. Многократные преобразования

Применение методов преобразований связано с нахождением уравнений, преобразующих простую границу в более сложную, которая ограничивает исследуемое поле. В общем случае невозможно определить прямым путем одно уравнение, осуществляющее такое

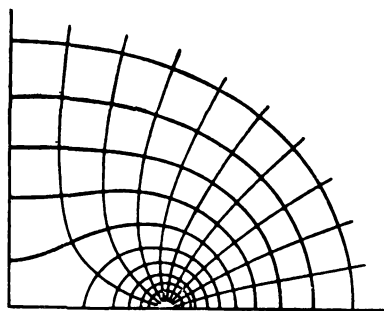


Рис. 6-6.

преобразование, и обычно плоскости w и z должны быть связаны с помощью промежуточных переменных и конфигураций границ. Так, например, картину поля, изображенную на рис. 6-6, можно получить путем объединения преобразований вида (6-9) и (6-15). Картина поля на рис. 6-5,б отображается с плоскости w на плоскость p с использованием уравнения

$$w = \frac{i}{2\pi} \ln p, \quad (6-24)$$

а верхняя половина плоскости p в свою очередь отображается на плоскость z (рис. 6-6) с помощью соотношения

$$z = k(p - a)^{1/2}, \quad (6-25)$$

где a — вещественная постоянная, определяющая точку на вещественной оси плоскости p , соответствующую полюсу в плоскости z . Исключение из уравнений (6-24) и (6-25) p позволяет представить решение для плоскости z в виде:

$$\varphi + j\psi = \frac{i}{2\pi} \ln \left(\frac{z^2}{k^2} + a \right). \quad (6-26)$$

Это выражение описывает поле линейного тока, расположенного на поверхности угла, имеющей бесконечно большую магнитную проницаемость, или половину поля линейного тока, направленного параллельно бесконечной плоской поверхности с бесконечно большой магнитной проницаемостью.

6-3-3. Картины поля

Решение для поля в плоскости z часто определяется следующим образом:

$$w = f(z). \quad (6-27)$$

Если это уравнение может быть представлено в виде:

$$z = g(w) = g(\varphi + j\psi), \quad (6-28)$$

как уравнение (6-26), то картину поля можно рассчитать непосредственно. Подстановка значения ψ , равного ψ_1 , приводит к уравнению для точек (x, y) , лежащих на соответствующей эквипотенциали ψ_1 , и ее можно рассчитать, задавшись далее рядом значений φ .

Аналогичным образом линию потока можно получить, выбрав определенное значение φ и подставив ряд значений ψ . Для нахождения картины поля в виде сетки криволинейных *квадратов* приращения φ и ψ должны быть одинаковыми. Квадраты могут быть выбраны удобного размера при использовании уравнения (6-27) для определения требуемого приращения потока или потенциала.

6-3-4. Соотношение масштабов между плоскостями

Уравнение

$$z = kf(t)$$

непосредственно связывает *число* в плоскости t с другим *числом* в плоскости z , следовательно, оно определяет расстояние между двумя точками (числами) в плоскости t через расстояние между соответственными точками в плоскости z . Например, уравнение (6-9) устанавливает соотношение между отрезком длиной 4 единицы, измеряемым от начала координат плоскости t , и отрезком длиной 2 единицы, измеряемым от начала координат плоскости z . При построении картины поля могут быть выбраны любые удобные единица и масштаб, поскольку конфигурация поля не зависит от его масштаба. Однако, если требуется получить численные значения величин, таких, как магнитная индукция, выбранная единица должна быть одинаковой для обеих плоскостей. Очевидно, например, что значение индукции в точке при заданных конфигурации границ и интенсивности источника возбуждения поля обратно пропорционально размеру поля. При этом масштабный коэффициент k определяется из условия установления непосредственного соответствия между точками в плоскостях z и t (см. § 6-1-3). В некоторых случаях для учета различия в угловом положении двух границ k может быть комплексной величиной.

6-3-5. Сохранение потока и потенциала

Согласно § 6-1-2 очевидно, что комплексный потенциал некоторой точки идентичен потенциалу соответственной отображенной точки. В связи с этим поток, пересекающий линию, соединяющую две точки, или разность потенциалов между точками при преобразовании линии и точек остаются неизменными. Отсюда, например, определение результирующего потока (для нахождения емкости или магнитной проводимости) сводится просто к вычислению разности значений функции потока для двух точек.

6-3-6. Напряженность поля

Поскольку плотность потока и напряженность поля связаны постоянным множителем, необходимо определить только одну из этих величин. Общее решение для поля в плоскости z имеет вид:

$$\omega = \varphi + j\psi = f(z).$$

Составляющая напряженности поля в направлении оси x равна:

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

а составляющая напряженности поля в направлении оси y

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

Рассмотрим величину $E_x - jE_y$, которую можно выразить следующим образом:

$$E_x - jE_y = -\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\phi}{\partial y},$$

и в результате подстановки значения $\partial\phi/\partial y$ из уравнения Коши—Римана (2-87) найдем:

$$E_x - jE_y = -\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\phi}{\partial x} = j\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = j\frac{\partial w}{\partial x} = j\frac{dw}{dz}. \quad (6-29)$$

Далее, величина $E_x - jE_y$ имеет тот же модуль, что и величина $E_x + jE_y$, равная напряженности поля E , но обратный по знаку аргумент. Поэтому согласно уравнению (6-29) значение напряженности поля определяется простым выражением

$$|E| = \left| \frac{dw}{dz} \right|, \quad (6-30)$$

а аргумент напряженности поля равен:

$$\arg E = -\arg \left(j \frac{dw}{dz} \right). \quad (6-31)$$

Полученные результаты очень важны, а уравнение (6-30) используется особенно часто.

6-4. НАХОЖДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Как было показано выше, если известно требуемое уравнение преобразования, то простое поле может быть связано с более сложным и таким путем найдено решение для сложного поля. Поэтому при использовании данного метода для решения конкретной задачи важно уметь найти уравнение преобразования, связывающее заданную конфигурацию границ с некоторой более простой, для которой решение известно или легко находится. В общем случае это может быть чрезвычайно трудно или даже невозможно, однако существует ряд стандартных методов, позволяющих получить уравнения, связывающие многие важные типы границ. Они детально рассмотрены в следующих четырех главах.

Существует также ряд специальных уравнений преобразования, имеющих ограниченное применение. Они здесь не затрагиваются, и

читатель, желающий познакомиться с теми из них, которые могут быть использованы, может обратиться к специальной литературе, например к [Л. 27 и 28].

ЛИТЕРАТУРА

6-1. Nakamura T., Application of conformal representation to flux distribution in the iron cores of electrical machines, *Electro-techn. J., Japan*, 3, p. 6—10, Jan. 1939.

6-2. Higgins T. J., The vector potential and inductance of a circuit comprising line conductors of different permeabilities, *J. Appl. Phys.*, 13, p. 390—398, June 1942.

Глава седьмая

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ГРАНИЦЫ

Существует много хорошо известных уравнений для преобразования криволинейных границ, однако большинство из них представляет ограниченный интерес. В этой главе внимание сосредоточено на двух важных преобразованиях, относящихся к отдельным типам кривых, а также на более общем преобразовании, которое применимо к более широкой области кривых. Первым из преобразований для отдельных кривых является *дробно-линейное* преобразование, которое используется при анализе эксцентричных или пересекающихся круговых границ, а второе представляет собой простое преобразование *Жуковского*, применяемое для эллиптических (включая круговые) границ. Более общее преобразование относится ко всем кривым, которые могут быть описаны уравнениями в *параметрической* форме, и в сочетании с методами аппроксимации кривых позволяет найти приближенные преобразования для широкой области кривых.

7-1. ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Описанный в гл. 4 метод непосредственного решения уравнений поля (использующий цилиндрические координаты) может быть применен для определения лапласовых полей, если их границами являются концентричные окружности. Однако в практике часто возникает необходимость в исследовании полей, границами которых являются эксцентричные окружности (включая пересекающиеся) или окружности и радиусы. С такими границами приходится встречаться, например, при определении силы одностороннего магнитного притяжения, действующей на ротор машины, расположенный эксцентрично по отношению к статору, емкости между двумя кабелями или волноводами с круглыми сечениями, а также магнитного сопротивления листа, обладающего бесконечно большой магнитной проницаемостью, с круговым отверстием вблизи его края (прямолинейного). Все такие задачи могут быть решены с помощью *дробно-линейного преобразования*. Это преобразование полезно также при переходе от одной круговой границы к бесконечной прямолинейной границе, а в следующей главе оно использовано для вывода общих уравне-

ний, преобразующих круговую границу в многоугольную¹. Однако прежде чем использовать преобразование для решения частных задач, желательно описать его отображающие свойства.

7-1-1. Отображающие свойства

Дробно-линейное преобразование имеет вид:

$$z = \frac{at + b}{ct + d}, \quad (7-1)$$

где a , b , c и d — постоянные, которые могут быть вещественными или комплексными числами.

Это — общее преобразование, для которого одно и только одно значение одной переменной соответствует одному и только одному значению другой переменной. Его можно рассматривать как последовательность трех простых преобразований:

$$t_1 = ct + d; \quad (7-2)$$

$$t_2 = \frac{1}{t_1} \quad (7-3)$$

и

$$z = \frac{a}{c} + (bc - ad) \frac{t_2}{c}. \quad (7-4)$$

Первое и третье из них включают изменение масштаба, сдвиг и поворот картины поля в зависимости от значений постоянных, но не изменяют ее конфигурации. Величина $bc - ad$ называется *определителем* преобразования (7-1). Согласно (7-4) она не должна быть равна нулю. Только уравнение (7-3), называемое уравнением *обращения* (поскольку одна переменная является обратной по отношению к другой), изменяет конфигурацию картины поля. Следовательно, полное дробно-линейное преобразование вызывает такое же изменение заданной картины поля, как и преобразование обращения. Дробно-линейное преобразование и преобразование обращения наиболее полезны в применении к окружностям и прямым, поэтому ниже будет рассмотрено влияние преобразования обращения на эти кривые.

Преобразование прямых, диполь. Рассмотрим преобразование обращения

$$t = \frac{1}{z}. \quad (7-5)$$

¹ Представляет большой интерес применение дробно-линейного преобразования для представления бесконечной области в круговой электролитической ванне. См. A. R. Boothroyd, E. C. Cherry, R. M a k a r, An electrolytic — tank for measurement of steady — state response, transient response and allied properties of networks, Proc. IEE, v. 96, pt II, May 1949, p. 176.

Умножение числителя и знаменателя правой части этого уравнения на сопряженный комплекс \widehat{z} и приравнивание вещественных и мнимых частей дадут:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

и

$$v = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

откуда нетрудно получить:

$$\left(x - \frac{1}{2u}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2u}\right)^2 \quad (7-6)$$

и

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2v}\right)^2 = \left(\frac{1}{2v}\right)^2. \quad (7-7)$$

При постоянных значениях u и v эти выражения описывают окружности в плоскости z , т. е. прямые, параллельные осям координат плоскости t , отображаются в окружности в плоскости z . Окружности, определяемые уравнением (7-6), имеют радиусы $(1/2u)$ и центры в точках $(1/2u, 0)$, а окружности, описываемые уравнением (7-7), имеют радиусы $(1/2v)$ и центры в точках $(0, -1/2v)$, т. е. окружности каждого семейства касаются координатных осей в начале координат (рис. 7-1).

Важно отметить, что полученная картина поля соответствует линиям потока и эквипотенциалам диполя (см. § 3-3-2). Таким образом, преобразование обращения, очевидно, связывает равномерное поле (в плоскости ω) с полем диполя, причем необходимо указать на соответствие уравнения (7-5) при $z = \omega/d$ и уравнения (3-24).

Аналогичным образом любая прямая в плоскости t преобразуется с помощью (7-5) в окружность в плоскости z . Следовательно, всякая конфигурация, состоящая из отрезков прямых, в плоскости t преобразуется в аналогичную криволинейную конфигурацию в плоскости z . Это иллюстрирует рис. 7-2 для случая треугольника.

Преобразование окружностей. Уравнение окружности с центром в точке $(a, 0)$ и радиусом r в плоскости t записывается в виде:

$$r = |t - a|, \quad (7-8)$$

однако поскольку

$$t - a = \frac{1}{x + jy} - a,$$

выражение для радиуса может быть переписано следующим образом:

$$r = |t - a| = \left| \frac{(1 - ax) - jay}{x + jy} \right|.$$

Следовательно,

$$r^2 = \frac{(1 - ax)^2 + a^2 y^2}{x^2 + y^2},$$

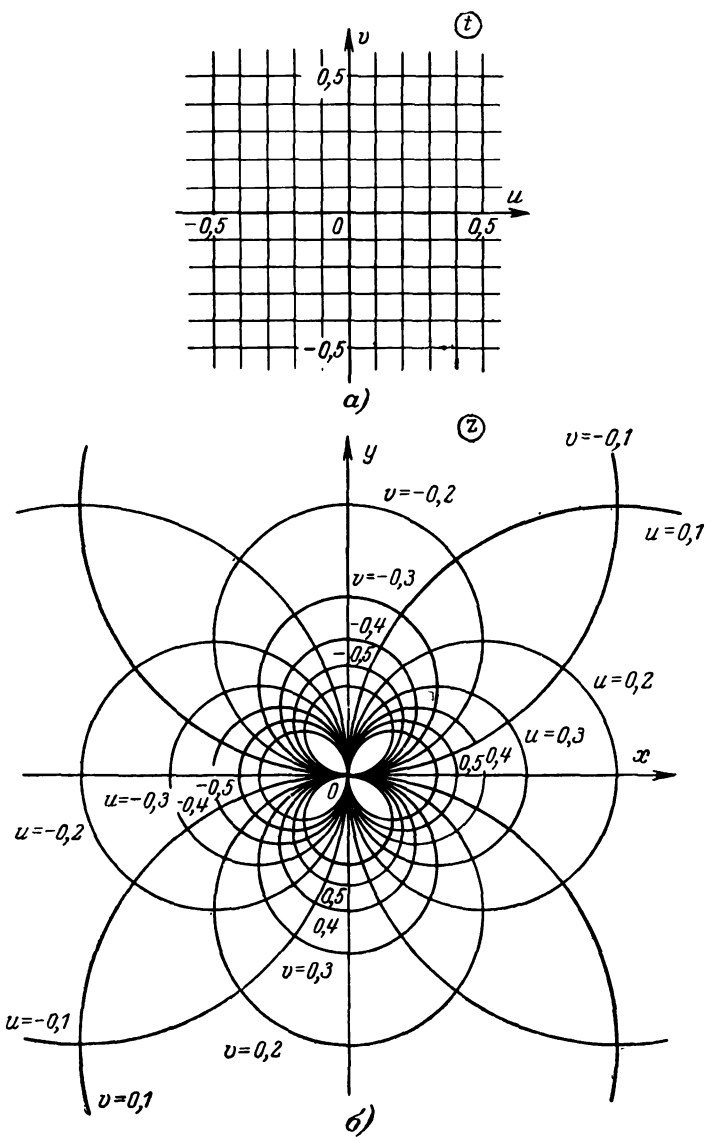


Рис. 7-1.

или после перегруппировки

$$\left(x - \frac{a}{a^2 - r^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{a^2 - r^2}\right)^2. \quad (7-9)$$

Это — уравнение окружности с радиусом $r/(a^2 - r^2)$ и центром в точке $[a/(a^2 - r^2), 0]$ плоскости z , отображенной с помощью (7-15) из окружности с радиусом r и центром в точке a плоскости t . При $a > r$ получим:

$$\frac{a}{a^2 - r^2} > \frac{r}{a^2 - r^2} > 0, \quad (7-10)$$

т. е. отображенная окружность лежит целиком в положительной вещественной половине плоскости z . При $a = r$, т. е. окружности,

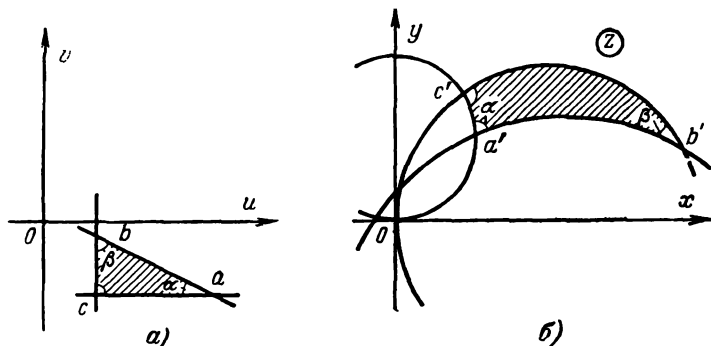


Рис. 7-2.

проходящей в плоскости t через начало координат, отображением будет прямая

$$2ax = 1 \quad (7-11)$$

и для $a < r$

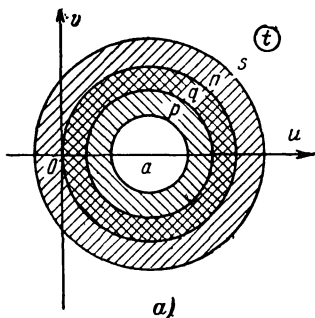
$$\frac{a}{a^2 - r^2} < \frac{r}{a^2 - r^2} < 0, \quad (7-12)$$

т. е. отображенная окружность проходит через положительную вещественную половину плоскости, хотя ее центр лежит на отрицательной части вещественной оси. Эти три случая показаны на рис. 7-3, где изображены семейство концентричных окружностей и соответствующие отображенные кривые.

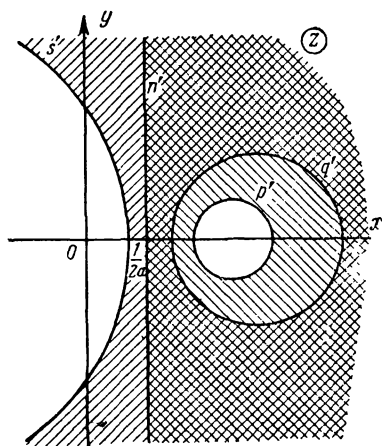
Обратным путем при соответствующем расположении начала координат в плоскости z можно преобразовать две любые эксцентричные окружности (прямая представляет собой окружность с бесконечно большим радиусом) в две концентричные окружности в плоскости t . Существуют три различных расположения окружностей в плоскости z : а) окружность, лежащая внутри другой окружности; б) окружность, расположенная вблизи прямой; в) окружность, лежащая вместе с центром за пределами другой окружности. Поле,

конфигурация границ которого относится к какому-либо из этих случаев, может быть определено, если вначале найти решение для соответствующих концентрических границ при требуемых граничных условиях.

Геометрическое и комплексное обращения. Геометрическое и комплексное обращения неравнозначны: в случае геометрического обращения точка



а)



б)

Рис. 7-3.

с аргументом θ обращается в точку с тем же аргументом, тогда как при комплексном обращении обратная точка имеет аргумент $-\theta$. Это станет очевидным, если представить z в уравнении (7-5) в экспоненциальном виде:

$$t = \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r} e^{-j\theta}. \quad (7-13)$$

7-1-2. Двойное отношение

Обратимся снова к общему преобразованию (7-1) и обозначим через z_1, z_2, z_3, z_4 и t_1, t_2, t_3, t_4 две совокупности соответственных точек. Тогда после подстановки в (7-1)

$$\begin{aligned} z_1 - z_4 &= \frac{at_1 + b}{ct_1 + d} - \frac{at_4 + b}{ct_4 + d} = \\ &= \frac{ad - bc}{(ct_1 + d)(ct_4 + d)} (t_1 - t_4). \end{aligned} \quad (7-14)$$

Если вывести аналогичные выражения для разностей $z_3 - z_2, z_1 - z_2$ и $z_3 - z_4$ и объединить их с полученным выше уравнением (7-14) таким образом, чтобы при этом были исключены все члены, содержащие постоянные a, b, c и d , то получим:

$$\frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} = \frac{(t_1 - t_4)(t_3 - t_2)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_4)}. \quad (7-15)$$

Правая часть уравнения (7-15) называется *двойным* отношением четырех точек: t_1, t_2, t_3 и t_4 . Для преобразования (7-1) оно постоянно, и зависимость

$$\frac{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)} = \frac{(t_1 - t)(t_3 - t_2)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t)} \quad (7-16)$$

определяет однозначное дробно-линейное преобразование, связывающее кривые, проходящие через определенные соответственные совокупности точек t_1, t_2, t_3 и z_1, z_2, z_3 .

В качестве примера применения уравнения (7-16) в следующем параграфе рассмотрено преобразование, отображающее вещественную ось одной плоскости в окружность с единичным радиусом в другой плоскости. Точки $t_1=0, t_2=1$ и $t_3=\infty$ определяют вещественную ось в плоскости t . Окружность с единичным радиусом в плоскости z может быть определена соответственными точками $z_1=1, z_2=j$ и $z_3=-1$. Подстановка всех этих значений в (7-16) приводит к уравнению, отображающему вещественную ось плоскости t в окружность с единичным радиусом в плоскости z таким образом, что дуга окружности в верхней половине плоскости соответствует положительной части вещественной оси. Это уравнение имеет вид:

$$t = j \frac{1 - z}{1 + z}. \quad (7-17)$$

Соответствие областей в разных плоскостях проще всего установить, представив z в экспоненциальном виде: $z = re^{j\theta}$. При этом уравнение (7-17) примет вид:

$$t = j \frac{1 - re^{j\theta}}{1 + re^{j\theta}} = \frac{2r \sin \theta}{1 + 2r \cos \theta + r^2} + j \frac{1 - r^2}{1 + 2r \cos \theta + r^2}. \quad (7-18)$$

Поскольку величина $1 + 2r \cos \theta + r^2$ не может быть отрицательной, внутренняя область единичной окружности ($r < 1$) соответствует верхней, а ее внешняя область ($r > 1$) — нижней половине плоскости t .

7-1-3. Поле двух токов, расположенных внутри цилиндра с бесконечно большой магнитной проницаемостью

Уравнение (7-17) может быть использовано, например, при анализе магнитного поля двух противоположно направленных токов, которые протекают внутри цилиндра с бесконечно большой магнитной проницаемостью. Радиус цилиндра для удобства принят равным единице. Вначале рассмотрим поле одного тока i , расположенного в начале координат на поверхности среды с бесконечно большой магнитной проницаемостью, заполняющей нижнюю половину плоскости t (рис. 7-4,а). Оно описывается выражением

$$w = \varphi + j\psi = \frac{i}{\pi} \ln t. \quad (7-19)$$

Магнитные эквипотенциали начинаются в точке $t=0$ и заканчиваются в бесконечности, поэтому в точке $t=\infty$ как бы существует «обратный» ток $-i$. При преобразовании поля в верхнем полупространстве с помощью (7-17) во внутреннюю область цилиндра, представленного в плоскости z окружностью с единичным радиусом и центром в точке $z=0$, точкам $z=1$ и $z=-1$ соответствуют точки $t=0$ и $t=\infty$. Таким образом, поле внутри цилиндра является полем

двух противоположно направленных токов, которые расположены на концах диаметра (рис. 7-4,б). Исключение t из (7-17) и (7-19) приводит к следующему выражению для комплексного потенциала поля.

$$\omega = \varphi + j\psi = \frac{i}{\pi} \ln j \frac{1-z}{1+z}. \quad (7-20)$$

Для построения картины поля в плоскости z необходимо выразить z через $\varphi + j\psi$ путем обращения уравнения (7-20):

$$z = \frac{1 + je^{\omega\pi/i}}{1 - je^{\omega\pi/i}}. \quad (7-21)$$

Способ подстановки значений ω был описан выше (см. § 6-3-3).

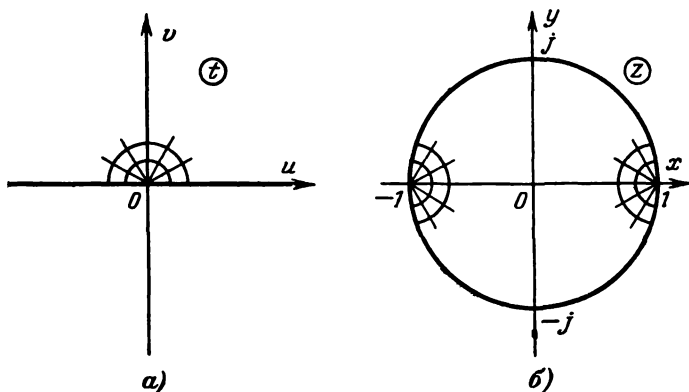


Рис. 7-4.

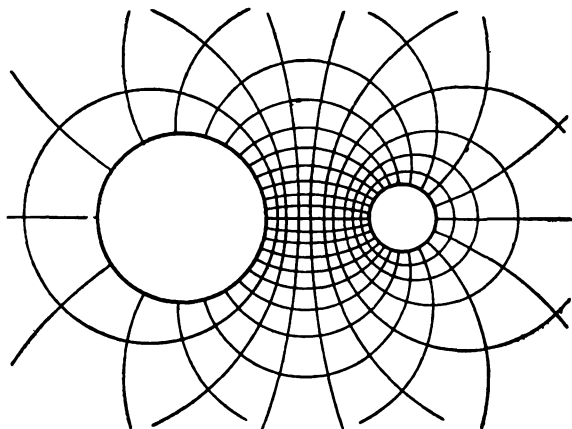


Рис. 7-5.

Поле в плоскости w при расположении токов в точках $z=-1$ и $z=z_n$ (на поверхности цилиндра) определяется выражением

$$\omega = \frac{i}{\pi} \ln j \left[\frac{1-z}{1+z} - \frac{1-z_n}{1+z_n} \right]. \quad (7-22)$$

7-1-4. Емкость двух цилиндрических проводников и градиент напряжения между ними

Для иллюстрации применения частного случая дробно-линейного преобразования — обращения исследуем поле между двумя заряженными цилиндрическими проводниками, расположение которых показано на рис. 7-5. Определение этого поля представляет интерес при нахождении пробивного напряжения воздушных промежутков, а также при выборе необходимой изоляции и определении емкости параллельных кабелей. В первом случае пространство между цилиндрами заполнено воздухом, а во втором — воздухом или другим изоляционным материалом. Необходимо отметить, что при решении любой задачи следует предположить, что пространство между цилиндрами заполнено одним однородным диэлектриком.

Расположим эксцентричные границы (рис. 7-5) в плоскости z (рис. 7-6,а) и допустим, что центр обращения находится на расстоянии d слева от меньшей окружности с радиусом R_2 . Следует выбирать d таким образом, чтобы эти окружности отображались в концентричные окружности в плоскости t (рис. 7-6,б). Согласно уравнению (7-9) малая окружность с центром $(d, 0)$ в плоскости z отображается в окружность в плоскости t с координатами центра $[d/(d^2-R_2^2), 0]$ и радиусом $r_2=R_2/(d^2-R_2^2)$. Аналогично большая окружность с радиусом R_1 и центром $(d-D, 0)$ обращается в окружность с центром в точке $\{(d-D)/[(d-D)^2-R_1^2], 0\}$ и радиусом $r_1=R_1/[(d-D)^2-R_1^2]$, где D — расстояние между центрами окружностей в плоскости z . Для того чтобы окружности в плоскости t имели один и тот же центр $(c, 0)$, необходимо выполнить условие

$$\frac{d}{d^2 - R_2^2} = \frac{d - D}{(d - D)^2 - R_1^2}.$$

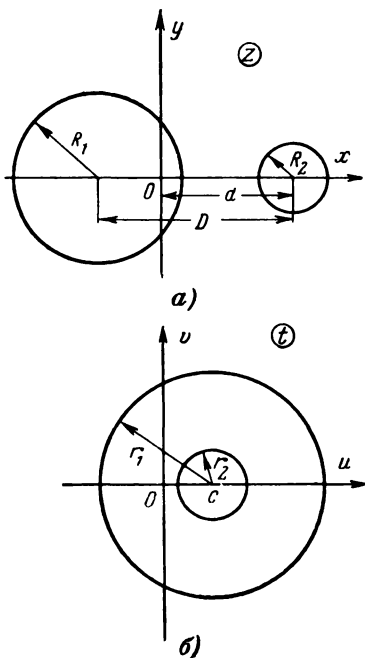


Рис. 7-6.

Из этого уравнения можно найти d и установить требуемое положение центра обращения в плоскости z^* :

$$d = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} \pm \sqrt{\left(\frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}\right)^2 - R_2^2}. \quad (7-23)$$

Поверхности цилиндров в плоскости z являются эквипотенциалами с различными значениями потенциалов, поэтому в плоскости t концентричные цилиндрические границы также должны быть эквипотенциалами и иметь ту же разность потенциалов одна относительно другой. Поле между двумя концентричными цилиндрическими проводниками с центром в точке $(c, 0)$, разделенными средой с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ и несущими заряд q на единицу длины, определяется, как показано в § 2-1-3, выражением

$$w = \psi + j\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln(t - c). \quad (7-24)$$

Из рассмотрения двух точек на поверхностях этих цилиндров, в качестве которых проще всего выбрать точки $t_1 = c + r_1$ и $t_2 = c + r_2$ с одинаковым направлением напряженности поля, можно представить разность потенциалов между ними в виде:

$$\psi_1 - \psi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2}. \quad (7-25)$$

Следовательно, величина емкости между цилиндрами C на единицу длины, т. е. отношение результирующего потока на единицу длины (равного q) к разности потенциалов, будет равна:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln r_1/r_2}. \quad (7-26)$$

Далее, поскольку значения функции потока и потенциальной функции для соответственных точек и границ в плоскостях t и z одинаковы, (7-26) определяет также емкость эксцентричных цилиндров.

Величина градиента потенциала E в любой точке плоскости z , как было показано выше (см. § 6-3-6), равна:

$$|E| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{dw}{dt} \right| \left| \frac{dt}{dz} \right|. \quad (7-27)$$

В результате дифференцирования уравнения (7-24)

$$\frac{dw}{dt} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{1}{t - c}$$

и подстановки значения q из (7-25) получим:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\ln r_1/r_2} \cdot \frac{1}{t - c}.$$

* Выбирается значение d , при котором r положительны.

Далее, из уравнения (7-5)

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{z^2}$$

и (7-27) может быть представлено в виде:

$$|E| = \left| \frac{\psi_1 - \psi_2}{\ln r_1/r_2} \cdot \frac{1}{t-c} \cdot \frac{1}{z^2} \right| = \left| \frac{\psi_1 - \psi_2}{\ln r_1/r_2} \cdot \frac{1}{(1-cz)z} \right| \quad (7-28)$$

При определении пробивного напряжения между цилиндрами важно установить максимальное значение градиента потенциала. Оно возникает на наиболее короткой линии между цилиндрами в точке на границе с большей кривизной. Такой точкой является $z = d - R_2$, которой соответствует точка $t = c + r_2$. Подстановка этих значений в (7-28) позволит найти максимальное значение градиента потенциала:

$$|E|_{\text{макс}} = \left| \frac{\psi_1 - \psi_2}{\ln r_1/r_2} \cdot \frac{1}{r_2 (d - R_2)^2} \right| \quad (7-29)$$

Картина поля в плоскости z (см. рис. 7-5) получается путем преобразования из картины в плоскости t , которая имеет вид концентрических окружностей и радиусов с центром в точке $(c, 0)$. Ее можно рассчитать с помощью уравнения (7-24) путем подстановки t из уравнения (7-5) и $q/\epsilon_0 \epsilon$ из (7-25). Тогда

$$t - c = e^W$$

и

$$z = \frac{1}{e^W + c} \quad (7-30)$$

где

$$W = \frac{\omega 2\pi \epsilon_0 \epsilon}{q} = \frac{\omega \ln \frac{r_1}{r_2}}{\psi_1 - \psi_2} \quad (7-31)$$

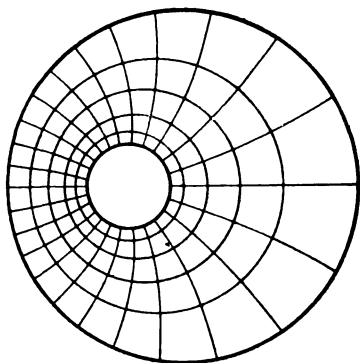


Рис. 7-7.

Значения $\omega = \psi + j\phi$ следует выбирать по картине поля в плоскости t при заданном $\psi_1 - \psi_2$, ориентируясь на эквипотенциалы и линии потока. Согласно выводам § 7-1-1, посвященного преобразованию окружностей, те же уравнения могут быть использованы и для построения картины поля для случая двух цилиндрических границ, одна из которых находится внутри другой (рис. 7-7), а также после определения соответствующих значений d , r_1 и r_2 для случая цилиндра, расположенного вблизи плоской поверхности

Для картин поля на рис. 7-5 и 7-7 значения потенциала на границах и размеры таковы, что результирующий поток в том и другом случаях одинаков.

7-2. ПРОСТОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЖУКОВСКОГО

7-2-1. Преобразование

Уравнение

$$Kt = z + \frac{a^2}{z}, \quad (7-32)$$

где K и a — постоянные; которое может быть представлено в виде:

$$z = \frac{K}{2} \left[t \pm \sqrt{t^2 - \left(\frac{2a}{K}\right)^2} \right], \quad (7-33)$$

преобразует окружность в плоскости z в эллипс в плоскости t таким образом, что внешние и внутренние области той и другой кривых

соответствуют одна другой. Второе его отображающее свойство, представляющее гораздо больший интерес для инженеров-электриков, состоит в том, что оно может быть использовано для преобразования вещественной оси плоскости t в вещественную ось плоскости z при $|t| \geq 2a/K$ и в полуокружность с радиусом a и центром в точке $z=0$ при $|t| \leq 2a/K$.

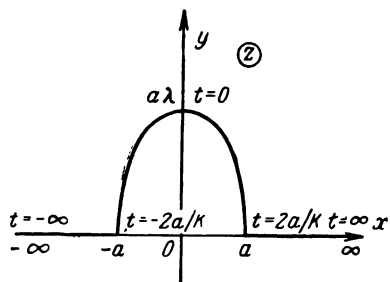


Рис. 7-8.

В более общем случае при преобразовании с помощью уравнения

$$z = \frac{K}{2} \left[t \pm \lambda \sqrt{t^2 - \left(\frac{2a}{K}\right)^2} \right], \quad (7-34)$$

где λ — вещественная постоянная, кривая в плоскости z при $|t| \leq 2a/K$ является эллипсом (рис. 7-8). Это можно установить следующим образом. Если t — вещественное число и $|t| \geq 2a/K$, то подкоренное выражение положительно; поэтому при выборе знака корня в соответствии со знаком t значение z будет чисто вещественным и будет иметь знак t . Если же t — вещественное число и $|t| < 2a/K$, то подкоренное выражение отрицательно и в результате разделения вещественной и мнимой частей (7-34) получим:

$$x = \frac{K}{2} u$$

и

$$y = \frac{K\lambda}{2} \sqrt{\left(\frac{2a}{K}\right)^2 - u^2},$$

откуда можно исключить u и найти: |

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a\lambda)^2} = 1. \quad (7-35)$$

Это уравнение эллипса, описывающее конфигурацию кривой в плоскости z , соответствующей вещественной оси в плоскости t между точками $\pm 2a/K$. Эллипс пересекает ось y при $y = \pm a\lambda$. В случае $\lambda=1$ кривая вырождается в окружность с радиусом a . Следует отметить, что для преобразования верхней половины плоскости t в область над вещественной осью и кривой в плоскости z мнимую часть квадратного корня следует принимать всегда положительной, тогда как вещественная часть должна иметь тот же знак, что и вещественная часть t . Это преобразование рассматривается также в § 10-3 как частный случай при преобразовании криволинейных границ с прямыми углами.

7-2-2. Обтекание кругового отверстия

В качестве примера применения уравнения (7-32), являющегося частным случаем уравнения (7-34) при $\lambda=1$, рассмотрим очень простой пример распределения поля вокруг кругового отверстия в бесконечном листе (рис. 7-9). Поле симметрично, поэтому одна половина его может быть представлена в верхней половине плоскости z областью с границей (линия потока при скорости течения, равной нулю), изображенной на рис. 7-10,а. Если обозначить радиус отверстия через a , то эта граница будет связана с вещественной осью плоскости t (рис. 7-10,б) уравнением (7-32), которое при выборе для простоты $K=1$ примет вид:

$$t = z + \frac{a^2}{z}. \quad (7-36)$$

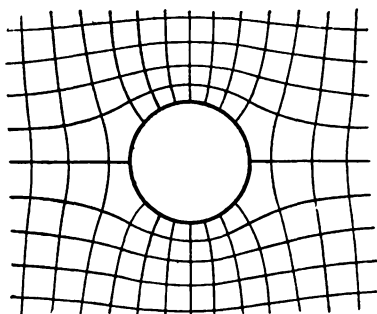


Рис. 7-9.

Далее, поле в плоскости z имеет такой характер, что вся граница является линией потока; следовательно, вещественная ось плоскости t должна быть также линией потока. Этому условию удовле-

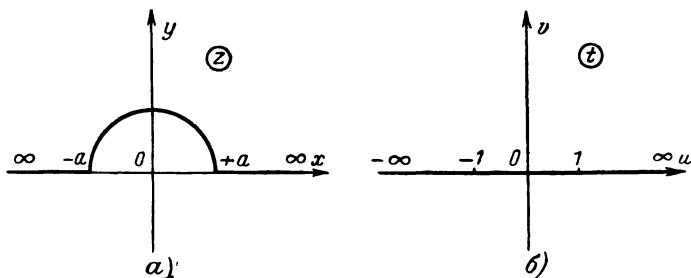


Рис. 7-10.

творяет равномерное поле (в плоскости t), параллельное вещественной оси, которое описывается выражением

$$w = \psi + j\varphi = kt, \quad (7-37)$$

где k определяет плотность течения.

Таким образом, исключив из уравнений (7-36) и (7-37) t , можно определить поле в плоскости z следующим образом:

$$w = k \left(z + \frac{a^2}{z} \right). \quad (7-38)$$

Обращение этого выражения дает зависимость, с помощью которой путем подстановки значений φ и ψ можно рассчитать картину поля (существует только один вариант).

Важно отметить, что поле, описываемое уравнением (7-38), образовано в результате наложения двух более простых полей: рав-

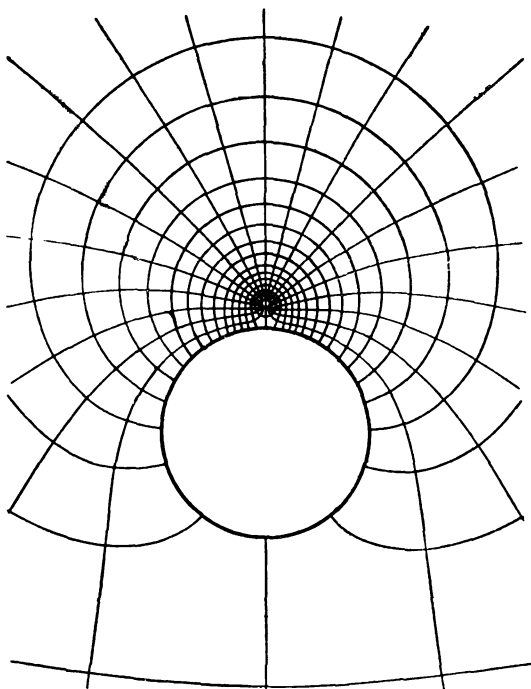


Рис. 7-11.

номерного поля (kz) и поля диполя (ka^2/z). Таким образом, как показано в § 3-3-2 и 4-2-3, влияние кругового отверстия или цилиндра на приложенное равномерное поле описывается диполем, расположенным в центре отверстия.

7-2-3. Магнитный цилиндр в поле линейного тока

Теперь используем (7-32) для анализа поля линейного тока, расположенного вблизи магнитного цилиндра с единичным радиусом (рис. 7-11). Эта задача рассматривалась выше с помощью метода зеркальных отображений (см. § 3-3-1) и метода непосредственного решения уравнения Лапласа (§ 4-2-2). Такое поле представляет интерес в связи с тем, что круговую границу в дальнейшем можно преобразовать для определения полей линейного тока, расположенного вблизи тел с поперечным сечением в виде многоугольника (см. § 8-4).

Границы одной половины поля в плоскости z представлены на рис. 7-12,а и, очевидно, могут быть получены в результате отображения вещественной оси плоскости t с помощью (7-32) при $a=1$. Под влиянием тока i , расположенного в точке c (рис. 7-12,а),

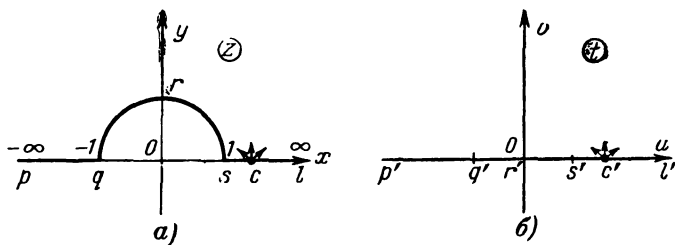


Рис. 7-12.

между двумя граничными линиями $pqrsc$ и cl существует разность магнитных потенциалов $i/2$. Поэтому, для того чтобы можно было перейти от поля в плоскости t к полю в плоскости z , точка c' , соответствующая точке c , должна разделить вещественную ось на две эквипотенциальные части с потенциалами, различающимися на $i/2$. Следовательно, поле в плоскости t должно быть полем линейного тока i , расположенного в точке c' , а оно описывается выражением

$$w = \varphi + j\psi = \frac{i}{2\pi} \ln(t - c'). \quad (7-39)$$

Эта зависимость преобразуется с помощью (7-32) при $a=1$ и $K=1$ в решение для плоскости z :

$$w = \frac{i}{2\pi} \ln \left(\frac{z^2 + 1}{z} - c' \right). \quad (7-40)$$

Выражение в скобках правой части (7-40) можно представить в виде:

$$w = \frac{i}{2\pi} \left\{ \ln \left[z - \frac{1}{2} (c' + \sqrt{c'^2 - 2}) \right] + \right. \\ \left. + \ln \left[z - \frac{1}{2} (c' - \sqrt{c'^2 - 2}) \right] - \ln z \right\}. \quad (7-41)$$

Это уравнение описывает поле трех равных по величине токов: токи, расположенные в точках $z = \frac{1}{2}(c' \pm \sqrt{c'^2 - 2^2})$, протекают в одном направлении, а ток, находящийся в точке $z = 0$, направлен в противоположную сторону. Далее, из (7-33) следует:

$$c = \frac{1}{2}(c' + \sqrt{c'^2 - 2^2}),$$

откуда

$$\frac{1}{4}(c' + \sqrt{c'^2 - 2^2})(c' - \sqrt{c'^2 - 2^2}) = 1.$$

Таким образом, в плоскости z одинаково направленные токи расположены в точке, где находится действительный ток, и в обратной точке внутри цилиндра, а ток, имеющий противоположное направление, расположен в начале координат. Поэтому решение, очевидно, равносильно полученному выше в § 3-3-1 методом зеркальных отображений для случая цилиндра с бесконечно большой магнитной проницаемостью.

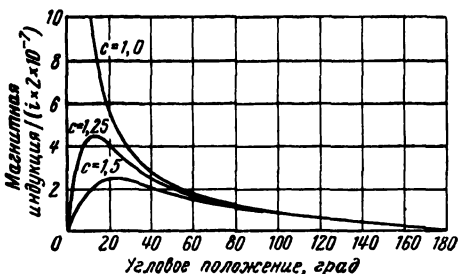


Рис. 7-13.

Картина поля на рис. 7-11 найдена обычным способом после обращения уравнения (7-40). Магнитная индукция B_z в любой точке плоскости z вне цилиндра может быть получена из уравнения

$$B_z = \mu_0 \left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \mu_0 \left| \frac{d\omega}{dt} \right| \left| \frac{dt}{dz} \right| = \mu_0 \left| \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{(t-c')} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \right|. \quad (7-42)$$

При расчетах B_z следует выразить полностью через z или t . Если использовать t , то необходимо будет также найти точки в плоскости z , соответствующие значениям t , для которых рассчитано B_z . Расчеты существенно упрощаются, когда t принимает только вещественные значения. На рис. 7-13 приведены кривые распределения магнитной индукции по поверхности цилиндра.

7-3. КРИВЫЕ, ВЫРАЖЕННЫЕ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ; ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ВИДЕ РЯДОВ

Нетрудно получить уравнение для преобразования любой кривой, которая может быть описана уравнением в параметрической форме, в прямую. Этому посвящен § 7-3-1, а затем после рассмотре-

ния простого примера полученный результат использован для вывода общих уравнений преобразования в виде рядов как для разомкнутых, так и для замкнутых криволинейных границ. С помощью этих рядов и метода аппроксимации кривых можно найти решения задач для широкой области конфигураций границ.

7-3-1. Сущность метода

Рассмотрим кривую в плоскости z , описываемую уравнениями в параметрической форме

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(u) \\ y &= f_2(u), \end{aligned} \right\} \quad (7-43)$$

и где u — параметр.

Далее, перейдем к уравнению

$$z = f_1(t) + j f_2(t), \quad (7-44)$$

где $t = u + jv$.

При $v=0$, очевидно, t становится равным u и (7-44) превращается в уравнение (7-43) кривой в плоскости z , выраженное в параметрической форме. Таким образом, вещественная ось плоскости t с помощью (7-44) отображается в кривую на плоскости z . Если обе функции f_1 и f_2 изменяются периодически, то кривая является замкнутой и в целом соответствует отрезку вещественной оси плоскости t , заключенному между точками 0 и 2π . Кроме того, внешняя область кривой в плоскости z отвечает вертикальной полосе шириной 2π в верхней половине плоскости t . На рис. 7-14 показаны соответственные области и границы в двух плоскостях. Если кривая в плоскости z разомкнута, то периодической может быть только одна из функций: f_1 или f_2 ; при этом вся вещественная ось плоскости t соответствует кривой в целом и вся верхняя половина плоскости t отображается во внешнюю область границ в плоскости z .

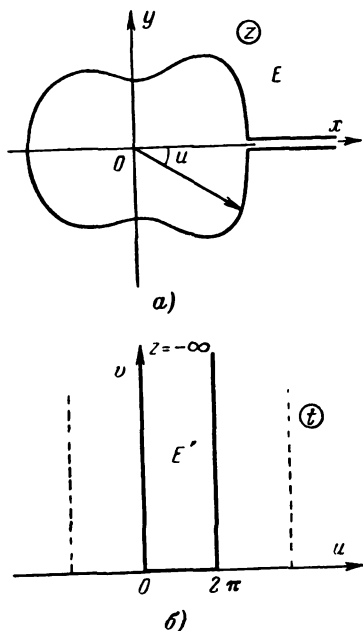


Рис. 7-14.

7-3-2. Поле во внешней области заряженной проводящей границы эллиптической формы

В качестве простого примера применения изложенного выше метода проанализируем поле во внешней области заряженной про-

водящей границы, имеющей форму эллипса. описываемого уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Координаты любой точки на этой границе могут быть выражены с помощью параметра u в виде:

$$x = a \cos u$$

и

$$y = b \sin u.$$

Следовательно, согласно (7-44) уравнение, отображающее границу в отрезок вещественной оси плоскости t между точками 0 и 2π , может быть представлено следующим образом:

$$z = a \cos t + jb \sin t. \quad (7-45)$$

Граница в плоскости z представляет собой эквипотенциаль, поэтому вещественная ось плоскости t также должна быть эквипотенциалью. Таким образом, искомое поле в плоскости t является равномерным и может быть описано наиболее просто уравнением

$$w = t.$$

Решение для плоскости z находится путем подстановки значения t в (7-45):

$$z = a \cos w + jb \sin w. \quad (7-46)$$

Полученное выражение можно упростить, положив $a = k \operatorname{ch} \alpha$ и $b = k \operatorname{sh} \alpha$, где $k^2 = a^2 - b^2$. При этом

$$z = k \cos(w + j\alpha). \quad (7-47)$$

Сдвинув начало координат в плоскости w на отрезок $(\pi/2 - j\alpha)$, найдем:

$$z = k \sin w. \quad (7-48)$$

Это уравнение преобразования было рассмотрено выше в § 6-1-1, но теперь оно обобщено в результате введения масштабного коэффициента k . Эквипотенциальными линиями поля являются эллипсы, описываемые уравнением

$$\frac{x^2}{k^2 \operatorname{ch}^2 \psi} + \frac{y^2}{k^2 \operatorname{sh}^2 \psi} = 1, \quad (7-49)$$

а линии потока представляют собой гиперболы, определяемые уравнением

$$\frac{x^2}{k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{y^2}{k^2 \cos^2 \varphi} = 1. \quad (7-50)$$

Оба семейства кривых изображены на рис. 7-15. При взаимной перестановке ψ и φ получим решение для поля, эллиптическая граница которого является линией потока.

7-3-3. Общие уравнения преобразования в виде рядов

Как было отмечено в § 7-3-1, для любой кривой, которая может быть описана уравнениями в параметрической форме, нетрудно вывести уравнение преобразования. Уравнения в параметрической форме хорошо известны для сравнительно небольшого числа кривых, однако наибольший интерес заключается в возможности приближенного представления кривых с помощью степенных рядов для разомкнутых границ или в виде рядов Фурье для замкнутых границ. При этом следует иметь в виду, что присутствие угла в кривой связано с разрывом непрерывности производной описывающей ее функции, в связи с чем для представления таких кривых нельзя использовать степенные ряды или ряды Фурье с конечным числом членов. Одним из исключений из этого правила является использование рядов Фурье для определения замкнутых кривых с точками перегиба, где две ветви кривой пересекаются и имеют общую касательную.

Коэффициенты рядов могут быть найдены с помощью обычных методов аппроксимации кривых. Эти методы здесь не рассматриваются, но они описаны в большинстве руководств по численному анализу, например в [Л. 15 и 30].

Замкнутые границы. Общее уравнение, отображающее замкнутую границу на плоскости z в отрезок вещественной оси плоскости t между точками 0 и 2π , может быть представлено в виде:

$$z = a_0 e^{-jt} + b_0 + b_1 e^{jt} + b_2 e^{j2t} + \dots \quad (7-51)$$

Нетрудно заметить, что оно соответствует уравнениям в параметрической форме

$$\left. \begin{aligned} x &= b_0 + (a_0 + b_1) \cos u + b_2 \cos 2u + \dots \\ y &= (b_1 - a_0) \sin u + b_2 \sin 2u + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7-52)$$

которые являются просто рядами Фурье по x и y , выраженными через угол u с вершиной в начале координат (см. § 7-3-1 и рис. 7-14). Для некоторых простых форм уравнения (7-51) замкнутая граница приобретает конфигурацию хорошо известных геометрических кривых. В этом легко убедиться, если положить $u=0$. Тогда уравнение преобразования превратится в следующие уравнения в параметрической форме.

а) Если $b_n=0$ для всех значений n , то получим уравнение

$$z = a_0 e^{-jt} = a_0 (\cos t - j \sin t), \quad (7-53)$$

которое приводится к параметрическому уравнению окружности с радиусом a_0 и центром в начале координат плоскости z . Уравнение (7-53) также отображает внутреннюю область окружности в полосу шириной 2π в нижней половине плоскости t .

б) Если $a_0 = (a+b)/2$; $b_1 = (a-b)/2$, а все другие значения b равны нулю, то имеем:

$$z = \frac{a+b}{2} e^{-jt} + \frac{a-b}{2} e^{jt} = a \cos t - jb \sin t. \quad (7-54)$$

Это выражение приводится к уравнению эллипса с полуосями a и b и центром в точке $z=0$. Преобразование Жуковского [уравнение (7-32)] можно получить путем исключения e^{jt} из (7-53) и (7-54).

в) Если присутствуют все начальные члены по b_2 включительно, то получаются различные кривые: гипоциклоида с тремя перегибами и т. д., детально рассмотренные в [Л. 7-1]. Более сложные формы уравнения (7-51) не исследованы.

Разомкнутые границы. Общий вид преобразования для разомкнутых границ в плоскости z , не содержащих углов, имеет вид:

$$z = jt + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots \quad (7-55)$$

Нетрудно заметить, что оно преобразует кривую, описываемую уравнением

$$x = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots, \quad (7-56)$$

которое равносильно уравнениям в параметрической форме

$$\left. \begin{aligned} x &= b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots \\ y &= u. \end{aligned} \right\} \quad (7-57)$$

Так же как и для (7-51), некоторые простые формы уравнения (7-55) общеизвестны. Например, если все постоянные в (7-56), за исключением b_0 и b_2 , равны нулю, то точки (x, y) лежат на параболе, для которой уравнение преобразования имеет вид:

$$z = jt + b_0 + b_2 t^2. \quad (7-58)$$

7-3-4. Определение полей

Когда границами полей являются эквипотенциали или линии потока, решения для них получить чрезвычайно просто. Поскольку исходное поле в плоскости t равномерно, для нахождения этих решений следует положить в (7-44) $w=t$. Тогда

$$z = f_1(w) + jf_2(w) \quad (7-59)$$

[см. уравнение (7-46)].

Поля линейных источников могут быть определены путем преобразования соответствующих решений, полученных методом зеркальных отображений; при разомкнутых криволинейных границах решение, найденное методом зеркальных отображений, соответствует случаю бесконечной плоскости, а при замкнутых границах — случаю трех пересекающихся плоских границ, две из которых параллельны (см. § 3-2-3). Этот метод может быть использован, например, вместо описанного в § 7-3-3 для анализа поля тока вблизи кругового цилиндра с бесконечно большой магнитной проницаемостью.

Общие указания по преобразованию источников поля можно найти в гл. 10.

ЛИТЕРАТУРА

7-1. Wrinch D., Some problems of two-dimensional hydrodynamics, *Phil. Mag.*, **48**, p. 1089—1104, 1924.

Дополнительная литература

7-2. Adams E. P., Electrical distributions on circular cylinders. *Proc. Amer. Phil. Soc.*, **75**, 11—70, 1935.

7-3. Adams E. P., Split cylindrical condenser, *Proc. Amer. Phil. Soc.*, **76**, 251—302, 1936.

7-4. Fry T. C., Two problems in potential theory, *Amer. Math. Mon.*, **39**, 199, 1932.

7-5. Hodgkinson J., A note on a two-dimensional problem in electrostatics, *Quart. J. Math., Oxford series*, **9**, 5, 1938.

7-6. Richmond W. H., Notes on the use of the Schwarz-Christoffel transformation in electrostatics (and hydrodynamics), *Proc. Lond. Math. Soc.*, **22**, 483—494, 1923.

7-7. Snow C., Electric field of a charged wire and a slotted cylindrical conductor, *Bureau of Standards, Sci. Papers*, **542**, 631, 1926.

7-8. Wrinch D., On the electric capacity of certain solids of revolution, *Phil. Mag.*, **50**, p. 60—70, 1925.

Глава восьмая

МНОГОУГОЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ

8-1. ВВЕДЕНИЕ

В практике встречается очень много полей, границы которых или действительно состоят из прямоугольных отрезков, или могут быть аппроксимированы таким образом. К ним относятся, например, поле плоского конденсатора или поле в воздушном зазоре электрической машины с зубчатым якорем. Всякий многоугольник имеет границу, состоящую из прямолинейных отрезков, и для удобства все границы упомянутого типа могут быть названы многоугольными. Далее, следует отметить, что такие границы часто замыкаются не в конечной области плоскости, где они расположены (рис. 8-1), а в бесконечности. Независимо от того, происходит ли это в конечной точке или в бесконечности, точка пересечения двух соседних сторон многоугольника называется вершиной, а угол между ними — углом при вершине.

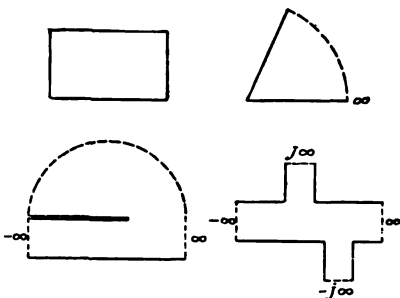


Рис. 8-1.

В данной главе описаны стандартные методы, применяемые для вывода уравнений, отображающих многоугольную границу в бесконечную прямую линию или окружность. Эти методы сводятся к нахождению, исходя из заданных конфигураций границ, которые должны быть связаны между собой, дифференциального уравнения, приводящего в результате интегрирования к уравнению преобразования. Это дифференциальное уравнение можно составить для любой конфигурации, однако его интегрирование может быть или очень простым, или оказаться невозможным в связи с математическими трудностями. Различные типы встречающихся интегралов, а также их зависимость от конфигурации границы описаны в конце этой главы. Однако, поскольку внимание здесь сосредоточено на роли преобразования, а не на нахождении интеграла, рассмотренные в этой главе примеры включают применение только простых функций. Примеры различных типов границ классифицируются естественным путем в соответствии с числом углов при вершинах, определяющих границу (см. § 8-2-1).

8-2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕРХНЕЙ ПОЛОВИНЫ ПЛОСКОСТИ ВО ВНУТРЕННЮЮ ОБЛАСТЬ МНОГУГОЛЬНИКА

8-2-1. Преобразование

Уравнение преобразования, связывающее вещественную ось одной плоскости с границей многоугольника в другой плоскости таким образом, что верхняя половина первой плоскости отображается во внутреннюю область многоугольника, было впервые описано Шварцем [Л. 8-1] и независимо Кристоффелем [Л. 8-2].

Рассмотрим две плоскости, изображенные на рис. 8-2, где подлежащие преобразованию области расположены по незаштрихованную сторону границ, а соответственные точки обозначены одними и теми же буквами. Преобразование вещественной оси плоскости t в многоугольную границу на плоскости z определяется в результате интегрирования выражения

$$\frac{dz}{dt} = S (t - a)^{(\alpha/\pi)-1} (t - b)^{(\beta/\pi)-1} (t - c)^{(\gamma/\pi)-1} (t - d)^{(\delta/\pi)-1} \dots \quad (8-1)$$

Это дифференциальное уравнение Шварца — Кристоффеля, в котором S — коэффициент масштаба и поворота; $a, b, c, d \dots$ — координаты точек на вещественной оси плоскости t , соответствующих вершинам многоугольника в плоскости z , а $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ — внутренние углы многоугольника соответственно при вершинах $A, B, C, D \dots$. Число множителей в (8-1) равно числу вершин, требуемых для определения многоугольной границы.

Показать, что дифференциальное уравнение Шварца — Кристоффеля действительно вводит последовательность вершин в границу на плоскости z , как было сказано выше, наиболее просто, представив уравнение (8-1) через углы $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \dots$, где каждый угол со штрихом определяется как π минус соответствующий угол без штриха и представляет собой *изменение направления границы* на

плоскости z в соответствующей вершине (рис. 8-2,б). При этом (8-1) приобретает более простой вид¹:

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{-(\alpha'/\pi)}(t-b)^{-(\beta'/\pi)}(t-c)^{-(\gamma'/\pi)}(t-d)^{-(\delta'/\pi)} \dots$$

и, так же как и уравнение (8-1), определяет длину и наклон элемента dz через длину и наклон соответствующего элемента dt . Далее, поскольку направление всех элементов dt , образующих вещественную ось плоскости t , одинаково, аргумент этого уравнения определяет непосредственно для непрерывно изменяющихся вещественных значений t от $-\infty$ до $+\infty$ наклон элементов dz , описывающих границу многоугольника. Нетрудно показать, что

$$\arg\left(\frac{dz}{dt}\right) = \arg S - \frac{\alpha'}{\pi} \arg(t-a) - \frac{\beta'}{\pi} \arg(t-b) - \frac{\gamma'}{\pi} \arg(t-c) - \frac{\delta'}{\pi} \arg(t-d) - \dots,$$

и правую часть выражения для вещественных значений t легко определить. Для всех значений $t < a$ значение $\arg(dz/dt)$ остается постоянным, т. к. все члены в скобках вещественны и отрицательны, в связи с чем соответствующие точки границы в плоскости z описывают прямую линию. Однако как только точка t пройдет через a , значение $t-a$ станет положительным, причем $\arg(t-a)$ изменится на $-\pi$, а аргумент dz — на α' . Для значений t , лежащих в пределах между a и b , значение $\arg(dz/dt)$ и наклон элементов в плоскости z остается постоянным, но отличающимся от значения на предыдущем участке. Поэтому соответствующая часть границы в плоскости z является следующей прямой, расположенной под углом α' рад к первому участку. Так же как и раньше, при переходе точки t через b изменяет знак только член $(t-b)$; следовательно, наклон границы в плоскости z при переходе через точку, соответствующую $t=b$, изменяется на β' рад и после этого остается неизменным до тех пор, пока не будет до-

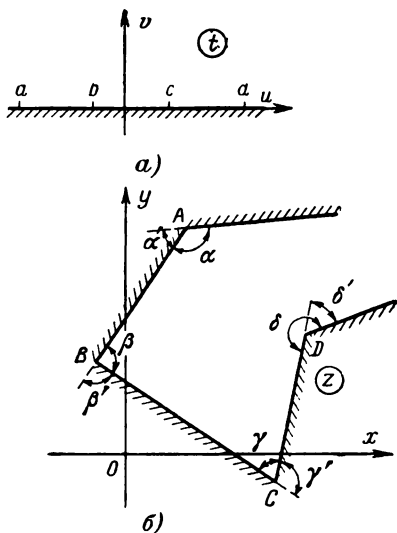


Рис. 8-2.

¹ Уравнение в этом виде обычно практически не используется в связи с необходимостью определения соответствующих знаков, которые должны быть приписаны углам. Для уравнения (8-1) этого не требуется.

стигнута следующая вершина. Аналогичным образом при дальнейшем возрастании t и переходе через точки $c, d \dots$ направление границы в плоскости z изменяется соответственно на углы $\gamma', \delta' \dots$, пока не будет описан весь многоугольник.

Следует отметить, что при этом все углы многоугольника полностью определяются значениями углов при вершинах, соответствующих конечным точкам в плоскости t . Если точка $t = \pm \infty$ соответствует вершине, то угол при ней устанавливается значениями остальных углов, поскольку сумма углов многоугольника равна $\pi(n-2)$, где n — число вершин. Таким образом, число сомножителей в уравнении (8-1) равно $(n-1)$, когда точка $t = \infty$ соответствует вершине, или n , когда точка $t = \infty$ соответствует конечной точке на одной из сторон многоугольника.

Обдуманый выбор соответственных точек часто может значительно упростить решение на основе (8-1). Различные варианты для границ простой конфигурации рассмотрены в § 8-2-3, однако некоторые общие указания приведены здесь. Для бесконечных многоугольников простейший вид решения обычно получается при выборе пределов вещественной оси соответствующими пределами двух соседних сторон многоугольника, уходящих в бесконечность. Для конечных и симметричных многоугольников точка $t = \infty$ обычно выбирается там, где линия симметрии пересекает границу. В случаях, когда эта линия проходит через вершину и середину одной из сторон, точка $t = \infty$ выбирается в вершине.

До сих пор анализ уравнения (8-1) ограничивался его аргументом. Однако очевидно, что модуль этого уравнения определяет длину элемента dz через длину соответственного элемента dt ; поэтому при преобразовании вещественной оси плоскости t в многоугольник с заданными размерами постоянные $a, b, c \dots$ необходимо выбирать из условия получения требуемого положения вершин в плоскости z . Способы, с помощью которых это можно сделать, показаны в примерах, а общая задача соответствия масштабов между плоскостями рассмотрена в § 8-2-5.

8-2-2. Многоугольники с двумя вершинами

Квадрант, ограниченный вещественной и мнимой осями. В качестве первого примера применения дифференциального уравнения Шварца — Кристоффеля рассмотрим преобразование вещественной оси плоскости t (рис. 8-3,а) в многоугольник, образуемый двумя полубесконечными прямыми, пересекающимися под прямым углом в точке $z=0$ (рис. 8-3,б), при котором область в верхней половине плоскости t превращается в область в первом квадранте плоскости z . Допустим, что точки $t = -\infty, z = j\infty$ и $t = \infty, z = \infty$ соответствуют одна другой, а точка $t = a$ соответствует вершине ($z=0$), внутренний угол α при которой равен $\pi/2$. Поэтому уравнение Шварца — Кристоффеля (8-1) принимает вид:

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{-1/2}. \quad (8-2)$$

В результате интегрирования найдем:

$$z = S'(t-a)^{1/2} + k. \quad (8-3)$$

Далее, вершина в плоскости z может соответствовать любому вещественному значению t , поскольку изменение t равносильно простому сдвигу начала координат в этой плоскости (см. § 6-3-1). Поэтому, выбрав простейший случай $a=0$, можно представить уравнение (8-3) следующим образом:

$$z = S't^{1/2} + k.$$

Значения постоянных S' и k зависят от выбора точек в двух плоскостях, между которыми устанавливается соответствие. По условиям задачи должны соответствовать одна другой точки $z=0$ и $t=a$, в связи с чем, подставив их координаты в (8-3), найдем: $k=0$. Тем не менее, можно пойти обратным путем и допустить, что

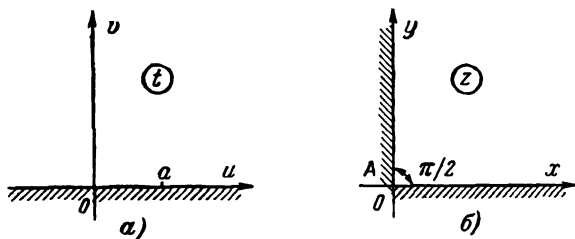


Рис. 8-3.

начало координат в одной из плоскостей может занять любое требуемое положение; тогда k можно всегда полагать равным нулю. Масштабный коэффициент S' может принять любое удобное значение, но если определить еще одну пару соответственных точек в двух плоскостях, то соотношение масштабов будет задано. Так, например, при выборе соответственных точек $z=2$ и $t=4$ получим $S'=1$ и уравнение преобразования примет окончательный вид:

$$z = t^{1/2}.$$

Это выражение было использовано ранее (см. § 6-1-2) для описания поля течения вблизи идеально проводящего угла.

Многоугольник с двумя параллельными сторонами. Вторым простым примером является преобразование ве-

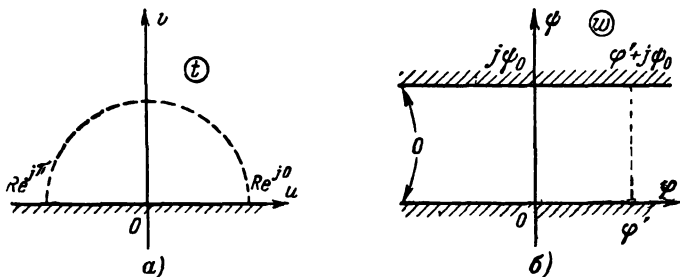


Рис. 8-4.

щественной оси плоскости t (рис. 8-4,а) в многоугольник, образуемый двумя бесконечными параллельными прямыми (рис. 8-4,б). По причинам, которые будут далее очевидны, расположим многоугольник в плоскости w и выберем расстояние между его сторонами равным $j\psi_0$. Допустим далее, что точки $t=-\infty$, $w=\infty+j\psi_0$ и $t=\infty$, $w=\infty$ соответствуют друг другу. Кроме того, предположим, что точка $t=0$ соответствует вершине многоугольника в точке $w=-\infty$, внутренний угол при которой равен 0. Тогда уравнение Шварца — Кристоффеля примет вид:

$$\frac{dw}{dt} = S(t-0)^{-1}. \quad (8-4)$$

Выполнив интегрирование, получим:

$$w = S \ln t + k. \quad (8-5)$$

Поскольку точки $w=-\infty$ и $t=0$ являются соответственными, $k=0$ и

$$w = S \ln t. \quad (8-6)$$

В этом выражении нетрудно узнать важное уравнение, описывающее с помощью комплексного потенциала w поле линейного тока или поле между двумя полубесконечными эквипотенциальными прямыми, пересекающимися в начале координат плоскости t (см. § 6-1-3). Отметим, что точки $t=-\infty$, $w=-\infty$ и $t=\infty$, $w=-\infty+j\psi_0$ не могут соответствовать одна другой. В этом случае вершина в точке $w=\infty$ должна соответствовать конечному значению t , а это противоречит уравнению (8-6).

Постоянную S можно определить, как и в предыдущем примере, путем подстановки соответственных значений t и w в уравнение преобразования (8-6). Для нахождения соответственных точек в двух плоскостях полезно напомнить, что вертикальная линия потока в плоскости w преобразуется на плоскости t в полуокружность¹. Так, например, если взять линию потока с радиусом R , то нетрудно заметить, что конечные точки ее Re^{j0} и $Re^{j\pi}$ соответствуют точкам $w=\varphi'$ и $w=\varphi'+j\psi_0$, где φ' — значение функции потока для радиуса R . Подстановка координат этих точек в (8-6) дает:

$$\varphi' = S \ln Re^{j0} = S \ln R$$

и

$$\varphi' + j\psi_0 = S \ln Re^{j\pi} = S \ln R + jS\pi.$$

Вычтя из второго уравнения первое, получим:

$j\psi_0 = jS\pi$, или $S = \frac{\psi_0}{\pi}$, а уравнение преобразования примет вид:

$$w = \frac{\psi_0}{\pi} \ln t.$$

¹ Конфигурация линий потока является, конечно, следствием, а не причиной соответствия точек в двух плоскостях.

Для определения постоянной S может быть также использован другой метод, равносильный описанному выше, но более изящный. Положив $t = Re^{j\theta}$ и продифференцировав это выражение, найдем:

$$dt = jRe^{j\theta}d\theta.$$

Далее, перепишем (8-4) в виде

$$d\omega = \frac{jSRe^{j\theta}d\theta}{Re^{j\theta}} = jSd\theta$$

и, выполнив интегрирование, получим:

$$|\omega|_{\omega_1}^{\omega_2} = jS|\theta|_{\theta_1}^{\theta_2}, \quad (8-7)$$

где $\omega_1, Re^{j\theta_1}$ и $\omega_2, Re^{j\theta_2}$ — две пары соответственных точек.

В частном случае, если $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$, то $\omega_2 - \omega_1 = j\psi_0$ и согласно (8-7) $S = \psi_0/\pi$.

Такой способ определения S является частным случаем общего метода, который может быть использован для установления связи между постоянными в плоскости t и размерами многоугольника, когда он имеет параллельные границы, пересекающиеся в бесконечности. Этот метод используется во многих приведенных ниже примерах и рассмотрен в § 8-2-5.

8-2-3. Конденсатор с параллельными обкладками. Электрод Роговского

В качестве примера преобразования многоугольника с тремя вершинами рассмотрим влияние отклонения поля на емкость конденсатора с параллельными обкладками (рис. 8-5,а). Обкладки конденсатора расположены на расстоянии $2d$ одна от другой и для простоты приняты бесконечно тонкими. Предполагается, что они заряжены и их потенциалы равны соответственно $+\psi_1$ и $-\psi_1$. Поле симметрично и границы одной половины его могут быть представлены согласно рис. 8-5,б, где вещественная ось совпадает с линией симметрии.

Для преобразования вещественной оси плоскости t (рис. 8-5,в) в границу на плоскости z используется уравнение Шварца — Кристоффеля. Верхняя поверхность обкладки представлена участком вещественной оси между точками $-\infty$ и a , а нижняя поверхность обкладки — участком между точками a и b . Соответственными точками в двух плоскостях при этом являются:

$$t \rightarrow -\infty; \quad z \rightarrow -\infty + jd;$$

$$t = a; \quad z = 0 + jd;$$

$$t = b; \quad z = -\infty + j0;$$

$$t \rightarrow +\infty; \quad z \rightarrow +\infty + j0,$$

и поскольку внутренние углы многоугольника равны 0 в точке $z = -\infty$ и 2π в точке $z = 0 + jd$, из (8-1) следует:

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)(t-b)^{-1}. \quad (8-8)$$

Постоянные S , a и b должны быть выбраны таким образом, чтобы уравнение преобразования, полученное в результате интегрирования соотношения (8-8), приводило к требуемой конфигурации и размерам границы в плоскости z . Однако конфигурация границы в плоскости z зависит лишь от одного размера d , поэтому любые две из этих постоянных могут принять удобные значения, а третья определяется из условия получения требуемого значения d . Положив $a = -1$ и $b = 0$, можно упростить (8-8) и оно примет вид:

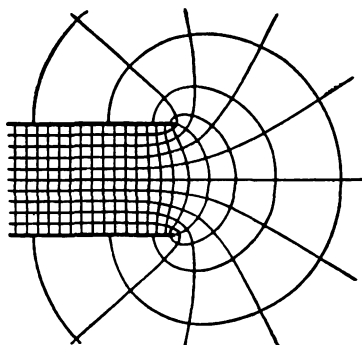
$$\frac{dz}{dt} = \frac{S(t+1)}{t}. \quad (8-9)$$

В результате интегрирования найдем:

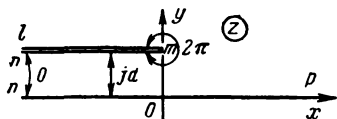
$$z = S(t + \ln t) + k. \quad (8-10)$$

Для определения постоянных S и k вначале преобразуем (8-9) в полярные координаты:

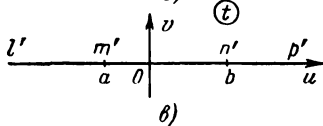
$$\begin{aligned} dz &= S \frac{(re^{j\theta} + 1)}{re^{j\theta}} jre^{j\theta} d\theta = \\ &= jS(re^{j\theta} + 1) d\theta. \end{aligned}$$



a)



b)



в)

Рис. 8-5.

Далее, перемещение по малой окружности с радиусом r и центром в точке $t=0$ соответствует в плоскости z перемещению от вещественной оси до линии $z = jd$, поэтому если r стремится к нулю, то из последнего уравнения получим:

$$\int_{-\infty}^{-\infty + jd} dz = jS \int_0^\pi d\theta, \quad (8-11)$$

или

$$S = \frac{d}{\pi}.$$

Поскольку точки $t=-1$ и $z=jd$ были выбраны соответственными, в результате введения их координат в (8-10) получим:

$$jd = S(-1 + j\pi) + k.$$

Подстановка в это уравнение $S = d/\pi$ дает:

$$k = \frac{d}{\pi},$$

и уравнение преобразования примет вид:

$$z = \frac{d}{\pi} (1 + t + \ln t). \quad (8-12)$$

Между границами в плоскости z существует разность потенциалов ψ_1 , равная половине разности потенциалов между обкладками конденсатора. Следовательно, требуемое поле в плоскости t определяется согласно уравнению (6-23) выражением

$$\omega = \frac{\psi_1}{\pi} \ln t, \quad (8-13)$$

а решение для поля в плоскости z находится в результате исключения t из уравнений (8-12) и (8-13) в виде:

$$z = \frac{d}{\pi} \left(1 + e^{\omega\pi/\psi_1} + \frac{\omega\pi}{\psi_1} \right). \quad (8-14)$$

Оно дает соответственные точки $z=-\infty$, $\omega=-\infty$ и $z=jd$, $\omega = j\psi_1$.

Поскольку постоянные a и b были выбраны равными -1 и 0 (a не 0 и 1 , например), разрыв потенциала в плоскости t происходит в точке $t=0$ и поле в этой плоскости определяется в наиболее простом виде уравнением (8-13). Кроме того, значение постоянной k может быть принято равным нулю, и тогда уравнение преобразования запишется следующим образом:

$$z = \frac{d}{\pi} (t + \ln t). \quad (8-15)$$

Начало координат в плоскости z при этом смещается на расстояние d/π вправо относительно своего первоначального положения.

Емкость. Емкость конденсатора с параллельными обкладками часто находится в предположении, что электрическое смещение в любой точке между обкладками имеет значение, которое существовало бы, если бы обкладки были бесконечными. Однако полученное таким образом значение является заниженным, поскольку плотность заряда на внутренних поверхностях возрастает по направлению к краям обкладок, а также ввиду того, что не учитывается заряд на внешних поверхностях обкладок. В любой точке на поверхности обкладок плотность заряда ρ равна электрическому смещению (см. § 2-1-1 и 2-5), т. е.

$$\rho = \epsilon\epsilon_0 \left| \frac{\partial\psi}{\partial y} \right| = \epsilon\epsilon_0 \left| \frac{d\omega}{dz} \right|, \quad (8-16)$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды окружающей обкладки.

Из (8-14), выполнив дифференцирование, получим:

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{\psi_1}{d} \cdot \frac{1}{|e^{w\pi/\psi_1} + 1|}$$

и в результате подстановки этого выражения в (8-16) определим плотность заряда в любой точке следующим образом:

$$\rho = \frac{\rho_0}{|e^{w\pi/\psi_1} + 1|}, \quad (8-17)$$

где $\rho_0 = \varepsilon\varepsilon_0\psi_1/d$ — плотность заряда, найденная в предположении, что обкладки являются бесконечными. Как видно из (8-17), плотность заряда возрастает по направлению к краю обкладки и здесь становится бесконечно большой ($z=jd$; $t=-1$; $w=j\psi_1$).

Добавочный заряд на внутренней поверхности обкладок, обусловленный ответвлением поля, представляет собой разность между действительно существующим зарядом и зарядом, найденные исходя из допущения, что поле во всех точках является равномерным. Он равен:

$$\int_{-\infty+jd}^{jd} (\rho - \rho_0) dz,$$

или, если выразить z через w ,

$$\int_{-\infty}^{j\psi_1} \rho_0 \left(\frac{1}{1 + e^{w\pi/\psi_1}} - 1 \right) \frac{d}{\psi_1} (e^{w\pi/\psi_1} + 1) dw,$$

упростить это выражение и выполнить интегрирование,

$$\frac{\rho_0 d}{\pi}.$$

Таким образом, добавочный заряд эквивалентен удлинению участка равномерного поля на величину d/π .

Заряд на внешней поверхности обкладок равен:

$$\int_{jd}^{-\infty} \rho dz = \frac{\rho_0 d}{\psi_1} \int_{j\psi_1}^{-\infty} dw = \infty.$$

Однако для конденсатора конечной ширины можно с достаточной точностью определить добавочный заряд, исходя из предположения, что распределение заряда вблизи обоих краев идентично его распределению вблизи края бесконечной обкладки. Это допущение оправдано, поскольку уменьшение плотности заряда по мере удаления от края происходит очень быстро (на расстоянии $1,5d$ от края плотность заряда меньше $\rho_0/10$) и результирующее значение заряда на внешней поверхности равно:

$$2 \int_{jd}^{-l+jd} \rho dz,$$

где $2l$ — ширина обкладки.

Электрод Роговского. Решение для поля, границы которого показаны на рис. 8-5,б, нашло очень интересное и полезное применение; оно было использовано Роговским [Л. 8-3] для нахождения конфигурации электродов, предназначенных для измерения прочности на пробой газов и жидкостей. При выполнении таких измерений важно, чтобы пробой всегда происходил в области равномерного поля. Это можно обеспечить, если выбрать конфигурацию электрода соответствующей эквипотенциали, вдоль которой градиент нигде не превышает значения ψ_1/d . Другие примеры использования эквипотенциалей для определения конфигурации границ можно найти в § 4-3-3 и 10-3.

8-2-4. Выбор соответственных точек

Для заданного многоугольника выбор постоянных в плоскости t может быть произведен по-разному, и все варианты, отличающиеся большей или меньшей сложностью, приводят к решению. Для того чтобы выяснить основные положения, лежащие в основе выбора постоянных, различные варианты рассмотрены для следующей простой задачи.

Ток, протекающий между двумя бесконечными параллельными магнитно проницаемыми плоскостями. Эта задача в общем виде была решена ранее методом отображений (см. § 3-2-2), и теперь достаточно рассмотреть частный случай, когда ток расположен посередине между поверхностями. Поскольку поле симметрично относительно линии, проходящей через точку, где находится ток, перпендикулярно параллельным поверхностям, можно ограничиться анализом поля только по одну сторону от нее. Аналогичным образом, поскольку это поле также симметрично, достаточно определить его половину. Граница поля изображена на рис. 8-6, где ток расположен в точке $z=0$, конечная сторона многоугольника совпадает с линией симметрии, перпендикулярной поверхностям, а полубесконечные прямые, расположенные на расстоянии $2d$ одна от другой, соответствуют магнитно проницаемым поверхностям. Существуют три вершины, расположенные в точках $l(z=j\infty)$, $m(z=-d)$ и $n(z=d)$, углы при которых соответственно равны 0 , $\pi/2$ и $\pi/2$.

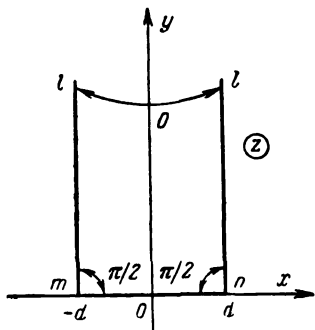


Рис. 8-6.

Возможны три приемлемых варианта выбора постоянных на вещественной оси плоскости t , и поскольку многоугольник определяется одним размером $2d$, для двух постоянных из каждой совокупности (или для большего числа, если существует симметрия) могут быть выбраны удобные значения. Пары соответственных точек можно выбрать следующим образом.

Вариант 1. Соответственными точками являются:

$$\begin{aligned} z &= -d + j\infty; & t &= -\infty; \\ z &= d + j\infty; & t &= \infty; \\ z &= -d; & t &= -1; \\ z &= d; & t &= 1. \end{aligned}$$

Уравнение (8-1) дает:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S}{\sqrt{t^2 - 1}},$$

откуда, выполнив интегрирование, получим уравнение преобразования:

$$z = S \operatorname{arch} t + k. \quad (8-18)$$

Вариант 2. Соответственными точками являются:

$$\begin{aligned} z &= -d; & t &= \pm \infty; \\ z &= \pm d + j\infty; & t &= 0; \\ z &= d; & t &= 1. \end{aligned}$$

Из уравнения (8-1) следует:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S}{t \sqrt{t^2 - 1}}$$

и уравнение преобразования будет иметь вид:

$$z = 2S \operatorname{arctg} \sqrt{t^2 - 1} + k. \quad (8-19)$$

Вариант 3. Соответственными точками являются:

$$\begin{aligned} z &= 0; & t &= \pm \infty; \\ z &= \pm d + j\infty; & t &= 0; \\ z &= -d; & t &= -1; \\ z &= d; & t &= +1. \end{aligned}$$

Уравнение (8-1) дает:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S}{t \sqrt{t^2 - 1}},$$

откуда следует уравнение преобразования

$$z = S \ln \frac{\sqrt{t^2 - 1} - 1}{t} + k. \quad (8-20)$$

Рассмотрим теперь поле в плоскости z и конфигурации полей в плоскости t , соответствующие каждому из приведенных выше уравнений преобразования. В плоскости z ток I создает разность потенциалов $I/2$ между двумя половинами границы, пересекающимися в точке $z=0$, поэтому в каждой из плоскостей t должна существовать та же самая разность потенциалов $I/2$ между участками вещественной оси, соответствующими двум половинам границы в плоскости z . Для первого и третьего из описанных выше вариан-

тов это требует разрыва потенциала в точках $t=0$ и $t=\pm\infty$, и поле определяется выражением

$$\omega = \frac{I}{2\pi} \ln t \quad (8-21)$$

(с обратными знаками для двух вариантов). Во втором варианте требуется разрыв потенциала в точке $t=0$ и точке $t=t_c$, которая соответствует точке $z=0$. Такое поле создается токами разной величины, но противоположных направлений, расположенными в точках 0 и t_c , и решение будет иметь вид (см. § 6-1-3):

$$\omega = \frac{I}{2\pi} [\ln t - \ln(t - t_c)] = \frac{I}{2\pi} \ln \left(\frac{t}{t - t_c} \right). \quad (8-22)$$

Сравнение трех рассмотренных вариантов показывает, во-первых, что из трех уравнений преобразования уравнения (8-18) и (8-19) проще, чем (8-20), и, во-вторых, что из двух уравнений, описывающих поле, уравнение (8-21) проще. Поэтому наилучшим путем решения данной задачи является первый вариант выбора постоянных.

Подстановка двух пар соответственных точек $z=-d$, $t=-1$ и $z=d$, $t=1$ в (8-18) дает $k=d$ и $S=j2d/\pi$. Далее, исключив из уравнений (8-18) и (8-22) t , найдем решение для плоскости z :

$$\omega = \frac{I}{2\pi} \ln \left[\operatorname{ch} \frac{(z-d)\pi}{j \cdot 2d} \right]. \quad (8-23)$$

Если обратиться к решению задачи методом зеркальных отображений, то нетрудно заметить, что (8-23) описывает также поле, создаваемое бесконечной последовательностью равноудаленных один от другого линейных токов.

В приведенном примере разные варианты выбора постоянных мало различаются по трудности, однако в более сложных задачах предусмотрительный выбор может иметь важное значение. Как было показано выше, следует учитывать два обстоятельства: трудность интегрирования и применения уравнения преобразования, а также определение и сложность уравнения для поля в плоскости t . Практически последний фактор обычно более важен (см. § 8-2-8) и должен играть решающую роль.

8-2-5. Соотношение масштабов между плоскостями

Общие положения. Применение уравнения Шварца — Кристоффеля автоматически приводит к многоугольнику с требуемыми углами. Размеры многоугольника находятся путем соответствующего выбора постоянных в уравнении преобразования. При анализе масштабных соотношений положение начала координат не играет роли и уравнение может быть представлено в виде:

$$z = Sf(t, a, b, c \dots), \quad (8-24)$$

где f — функция не только переменной t , но и вещественных постоянных $a, b, c \dots$.

Как было показано в § 8-2-4, если в уравнении (8-24) присутствуют только две постоянные a и b , кроме масштабного коэффи-

циента S , то обе они могут быть выбраны произвольно, причем это положение сохраняет силу и в общем случае, т. е. при любом числе постоянных $a, b, c \dots$ для двух из них могут быть выбраны удобные значения. Такая закономерность объясняется тем, что заданные значения двух постоянных определяют расстояние между соответственными точками в плоскости z , а его можно привести к требуемому значению путем правильного выбора S . Остальные постоянные, входящие в уравнение преобразования, при этом определяются другими размерами многоугольника. Следует отметить, что число подлежащих определению постоянных равно числу *отношений* размеров, от которых зависит конфигурация многоугольника. Многоугольники в приведенных выше примерах определяются только одним *размером*, в связи с чем ни одна из постоянных, за исключением S , не требует определения. Многоугольник, рассматриваемый в следующем параграфе, определяется двумя размерами или одним отношением, поэтому, кроме S , необходимо найти еще одну постоянную. Две «свободные» постоянные выбирают таким образом, чтобы упростить вид уравнения преобразования (8-24) или определение поля в плоскости t ; наиболее часто используются значения 0 и ± 1 .

Определение постоянных. Для нахождения постоянных, определяющих в уравнениях (8-1) и (8-24) конфигурацию многоугольника, могут быть использованы два метода. Первый метод сводится просто к подстановке в (8-24) пар соответственных значений z и t ; каждая подстановка приводит к одному уравнению, связывающему значения постоянных с размерами многоугольника. Во многих случаях уравнение позволяет непосредственно определить значение постоянной [см. уравнение (8-18)], но иногда может потребоваться применение графического метода [см. уравнение (8-43)].

Второй метод, или *метод вычетов*¹, может быть использован, когда многоугольник имеет параллельные стороны, пересекающиеся в бесконечности, и с его помощью можно получить одно соотношение для каждой такой вершины. Разновидности данного метода уже были использованы в примерах анализа поля линейного тока и конденсатора с параллельными обкладками. В этих вершинах бесконечно малому изменению t при переходе через точку, соответствующую вершине, отвечает конечное изменение z (в таких точках на плоскости t функция dz/dt имеет полюсы) и взаимосвязанные изменения можно приравнять, проинтегрировав (8-1) в соответствующих пределах.

Рассмотрим вершину с углом, равным нулю, в точке, соответствующей $t=n$, которая дает в уравнении (8-1) член $(t-n)^{-1}$, и обозначим

$$(t - n) = Re^{j\theta}.$$

¹ Этот вопрос подробно рассмотрен в любой книге, касающейся теории функций комплексного переменного, однако определения вычета, полюса и нуля функции целесообразно привести. Полюсом функции $f(z)$ является точка, где значение ее становится равным бесконечности; если $f(z)$ содержит член вида $(z-a)^{-n}$, то в точке $z=a$ находится полюс n -го порядка. Вычет $f(z)$ в полюсе a представляет собой коэффициент при члене $(z-a)^{-1}$ разложения $f(z)$ в ряд Лорана при $z=a$. Нулем функции $f(z)$ является точка, где ее значение становится равным нулю; если $f(z)$ содержит член вида $(z-b)^n$, то в точке $z=b$ находится нуль n -го порядка.

Продифференцировав это выражение, получим:

$$dt = jRe^{j\theta} d\theta.$$

В результате подстановки значений t и dt в (8-1) оно примет вид:

$$dz = Sf(Re^{j\theta}, n, a, b, c, \dots) d\theta, \quad (8-25)$$

Если R бесконечно мало, то при изменении θ от 0 до π переменная t проходит через значение n и это изменение соответствует изменению z на величину, равную расстоянию D между параллельными прямыми. Далее, когда $R \rightarrow 0$, $t \rightarrow n$ и (8-25) принимает простой вид, поскольку угол θ входит только в члены dt и $t-n$, а все множители, за исключением $t-n$, при изменении θ от 0 до π остаются постоянными. Уравнение можно записать следующим образом:

$$dz = \frac{S}{Re^{j\theta}} (n-a)^{(\alpha/\pi)-1} (n-b)^{(\beta/\pi)-1} \dots jRe^{j\theta} d\theta$$

и после упрощения и выполнения интегрирования в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$ найти:

$$D = j\pi S (n-a)^{(\alpha/\pi)-1} (n-b)^{(\beta/\pi)-1} \dots, \quad (8-26)$$

где множитель, соответствующий $t-n$, отсутствует.

Если точки $t = \pm \infty$ соответствуют точке пересечения в бесконечности двух параллельных сторон многоугольника, угол между которыми равен нулю, то (8-25) снова может быть использовано, на этот раз для того, чтобы непосредственно связать расстояние между параллельными прямыми и масштабный коэффициент. При этом член $t-n$ в уравнение (8-24) не войдет и подстановка $t = Re^{j\theta}$ при $R \rightarrow \infty$ всегда приводит (8-25) к простому виду:

$$dz = jSd\theta,$$

откуда, выполнив интегрирование, можно найти:

$$S = \frac{D}{j\pi}, \quad (8-27)$$

где D — расстояние между параллельными сторонами.

При $R \rightarrow \infty$ уравнение (8-25) перестает зависеть от постоянных a, b, c, \dots , поскольку окружность с бесконечно большим радиусом, где бы ни был расположен ее центр, соответствует одному и тому же пути в плоскости z . Как уравнение (8-26), так и (8-27), связывающее постоянные в уравнении преобразования с размерами многоугольника, являются очень важными и часто используются.

Описанный метод представления уравнения (8-25) в полярных координатах и определения интеграла при $R \rightarrow 0$ или ∞ эквивалентен нахождению интеграла методом вычетов. Анализ до сих пор был ограничен представлением расстояния между параллельными прямыми, пересекающимися в вершине под углом, равным нулю. Хотя этот случай несомненно является наиболее важным, следует отметить, что параллельные прямые могут пересекаться также под

углом $-\pi$ (см. § 8-2-7) и в уравнение (8-1) войдет множитель $(t-n)^{-2}$. При этом в точке n появится полюс второго порядка и описанный метод интегрирования потеряет справедливость.

Расстояние между параллельными прямыми всегда определяется выражением

$$D = j\pi \times (\text{вычет в полюсе}), \quad (8-28)$$

и для полюса второго порядка вычет должен быть равен коэффициенту при члене $(t-n)^{-1}$ разложения функции $Sf(t, a, b, c \dots)$ из уравнения (8-1) в ряд, или

$$\lim_{t \rightarrow n} \frac{d}{dt} [(t-n)^2 Sf(t, a, b, c \dots)]. \quad (8-29)$$

8-2-6. Поле тока, протекающего в пазу

Очень многие практические задачи были исследованы, исходя из конфигурации границы, изображенной на рис. 8-7,б. Так, например, в [Л. 23] разработан метод расчета поля в углу лейденской банки, в [Л. 8-4] исследовано поле прямоугольного явно выраженного полюса, а в [Л. 8-5] проанализировано распределение поля в углу

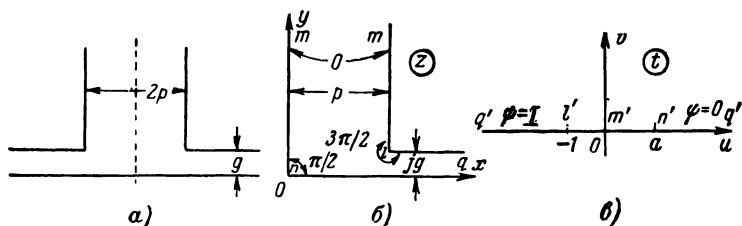


Рис. 8-7.

сердечника трансформатора. В этом параграфе та же самая конфигурация границы использована для определения магнитной индукции и постоянных магнитной проводимости для поля тока, протекающего в пазу электрической машины. Те же решения относятся, хотя и с худшим приближением, к полю явно выраженного полюса [Л. 8-4]. Определение методом конформных преобразований поля явно выраженного полюса с прямоугольным наконечником хотя и возможно, но сложно [Л. 8-6].

Поскольку в большинстве электрических машин воздушный зазор невелик по сравнению с шириной открытия паза, при анализе можно ограничиться рассмотрением одного паза шириной $2p$, отделенного воздушным зазором g от плоской поверхности (рис. 8-7,а). Кроме того, при определении поля в воздушном зазоре паз можно принять бесконечно глубоким (см § 9-4), а ток сосредоточенным на его «дне». Для тока $2I$ потенциалы соседних зубцов равны I и $-I$ по отношению к потенциалу плоской поверхности и линии симметрии, проходящей посередине паза, который равен нулю. Таким образом, половину паза по рис. 8-7,а можно представить на плоско-

сти z в соответствии с рис. 8-7,б, где потенциал участка границы tnq отличается на I от потенциала участка mlq .

Многоугольник имеет четыре вершины, расположенные в точках l, m, n и q , и если выбрать пределы вещественной оси плоскости t (рис. 8-7,в) соответствующими точками q , его определяют углы $3\pi/2, 0$ и $\pi/2$ соответственно в вершинах l, m и n . Из трех конечных точек l', m' и n' в плоскости t , соответствующих этим трем вершинам, для двух могут быть выбраны удобные значения постоянных, а для третьей ее следует определить, чтобы получить требуемое отношение g/p . Выберем следующие пары соответственных точек:

$$\text{в вершине } l \quad z = p + jg \text{ и } t = -1;$$

$$\text{в вершине } m \quad z = j\infty \text{ и } t = 0;$$

$$\text{в вершине } n \quad z = 0 \text{ и } t = a.$$

Тогда уравнение Шварца — Кристоффеля, определяющее преобразование между плоскостями, будет иметь вид:

$$\frac{dz}{dt} = S(t+1)^{1/2} t^{-1} (t-a)^{-1/2}. \quad (8-30)$$

Используя подстановку

$$u^2 = \frac{t-a}{t+1},$$

его нетрудно проинтегрировать и получить:

$$z = 2S \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \right] + k.$$

Если выбрать начало координат в плоскости z соответствующим точкам $t=a$, то постоянная k в этом уравнении станет равной нулю и уравнение преобразования примет вид:

$$z = 2S \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \right]. \quad (8-31)$$

Постоянные S и a лучше всего определить методом вычетов. В вершине q параллельные стороны расположены на расстоянии jg одна от другой, а в плоскости t этой вершине соответствует точка $t=\infty$. Поэтому из уравнения (8-27) находим:

$$S = \frac{g}{\pi}. \quad (8-32)$$

В вершине m расстояние между параллельными прямыми равно p , а в плоскости t вершине m соответствует точка $t=0$. В связи с этим (8-26) дает:

$$p = \frac{j\pi S}{\sqrt{-a}}$$

и, подставив сюда значение S из (8-32), получим:

$$a = \left(\frac{g}{p} \right)^2. \quad (8-33)$$

Подстановка найденных значений постоянных S и a в (8-31) приводит к уравнению преобразования в окончательном виде:

$$z = \frac{2g}{\pi} \left[\frac{p}{g} \operatorname{arctg} \frac{pu}{g} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \right], \quad (8-34)$$

где

$$u^2 = \frac{t - (g/p)^2}{t + 1}. \quad (8-35)$$

Для получения требуемого поля в плоскости z отрицательная вещественная полуось плоскости t должна иметь потенциал I , а потенциал положительной вещественной полуоси должен быть равен нулю. При этом поле в плоскости t описывается выражением

$$w = \frac{I}{\pi} \ln t, \quad (8-36)$$

а исключение из уравнений (8-34)—(8-36) t и u позволяет определить поле в плоскости z . Изображенная на рис. 8-8 картина поля найдена из этого решения при выборе отношения $p/g=5$.

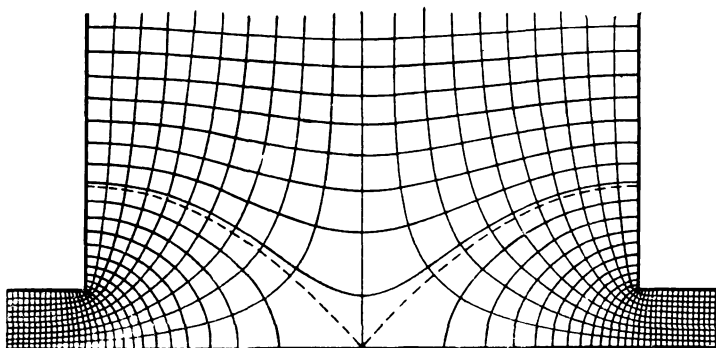


Рис. 8-8.

Магнитная индукция. Значение магнитной индукции в любой точке поля определяется выражением $\mu_0 |dw/dz|$. Из уравнения (8-36) следует:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{I}{\pi} \cdot \frac{1}{t},$$

и в результате объединения этой зависимости с уравнениями (8-30) и (8-32) найдем:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{I}{g} \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}. \quad (8-37)$$

Выразить производную dw/dz непосредственно через z невозможно. Поэтому для получения зависимости изменения магнитной индукции в функции z производится подстановка значений t в (8-37) для нахождения магнитной индукции в (8-34) и (8-35) для определения соответствующих значений z . Задаваясь рядом значений t в пределах от a до ∞ , получим кривую распределения индукции вдоль плоской поверхности, показанную на рис. 8-9. Эта кривая имеет важное значение для определения формы кривой поля, создающего поверхностные потери в полюсных наконечниках.

Поток рассеяния. Можно предположить, что главный поток и поток рассеяния разделяет фиктивная линия потока (показанная на рис. 8-8 пунктиром), которая выходит из зубца и лишь касается плоской поверхности в точке $z=0$ на рис. 8-7,б. В практических расчетах при определении величин этих потоков, так же как и во многих других задачах, удобно использовать постоянные магнитной проводимости. Они применяются для определения величины потока в области неравномерного поля через эквивалентное изменение длины участка равномерного поля. Так, например, на рис. 8-7,б результирующий главный поток, выходящий из зубца, можно найти в предположении, что распределение поля между точками q и l везде равномерно, представив величину потока, ответвляющегося от стороны зубца (см. рис. 8-8), в виде некоторого добавочного участка равномерного поля.

Значение ответвляющегося потока определяется как разность между интегралом магнитной индукции вдоль плоской поверхности между точками l и q и потоком, который проходил бы между точками q и l , если бы распределение индукции было везде равномерным. Значения обоих потоков бесконечно велики, однако их разность конечна и ее можно вычислить, считая, что поле ограничено не точкой q , а линией в некоторой удобной точке, достаточно удаленной от края, чтобы распределение индукции стало равномерным.

В некоторых задачах можно пойти другим путем и выразить разность значений магнитной индукции в таком виде, чтобы интегрирование привело к конечному аналитическому результату [Л. 8-7]. В данном случае это невозможно, однако приближенный аналитический результат найден в предположении, что в любой точке под зубцом поле равномерно и ограничено прямой, проходящей от угла зубца перпендикулярно плоской поверхности, путем определения ответвляющегося потока как потока, пересекающего плоскую поверхность между точками $x=0$ и $x=p$.

Результат анализа в виде, полученном в [Л. 8-7], определяет ответвляющийся поток в виде постоянной λ , умноженной на длину

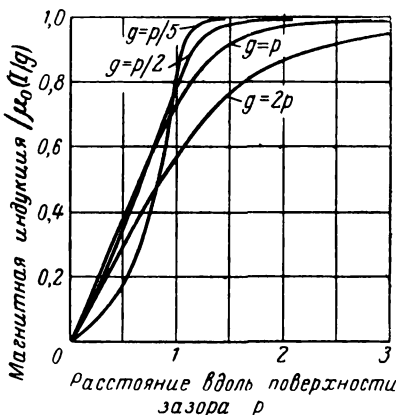


Рис. 8-9.

воздушного зазора, причем

$$\lambda = 0,72 \lg \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{p^2}{g^2} \right) \right] + \frac{1}{90} \left(\frac{p}{g} \operatorname{arctg} \frac{g}{p} \right),$$

где $\operatorname{arctg} g/p$ выражен в градусах.

8-2-7. Отрицательные углы при вершинах

Если две соседние стороны многоугольника расходятся, то они пересекаются в бесконечности в вершине с отрицательным углом. Такие углы приводят к появлению в уравнении (8-1) членов с показателем степени, меньшим единицы, которые усложняют интегрирование. В связи с этим их следует по возможности избегать, выбирая точку $t = \infty$ соответствующей вершине с отрицательным углом.

Противолежащие параллельные пластины. Многоугольная граница в плоскости z , изображенная на рис. 8-10,а, состоит из двух плоских полубесконечных параллельных пластин и образует два отрицательных угла, один из которых безусловно должен войти в уравнение преобразования. Помимо того, что этот случай является хорошим примером для анализа отрицательных углов и определения вычета в полюсе второго порядка [см. уравнение (8-29)], частные формы этой границы могут быть использованы для нахождения решений, которые часто преобразуются при анализе более сложных задач.

Многоугольник имеет четыре вершины: l , m , n и h . Внутренние углы при вершинах l и n равны 2π . Значения углов при вершинах m и h составляют $-\pi$. Их можно найти из рассмотрения перемещения двух пересекающихся в вершине сторон, когда угол между ними уменьшается, проходя через нуль, до тех пор, пока линии снова не станут параллельными.

Для преобразования вещественной оси плоскости t (рис. 8-10,б) в многоугольник допустим, что точка $t = \infty$ соответствует вершине n' , а остальными парами соответственных точек являются:

- в вершине l $z = q$ и $t = a$;
- в вершине h $z = \infty$ и $t = 0$;
- в вершине n $z = jp$ и $t = -1$.

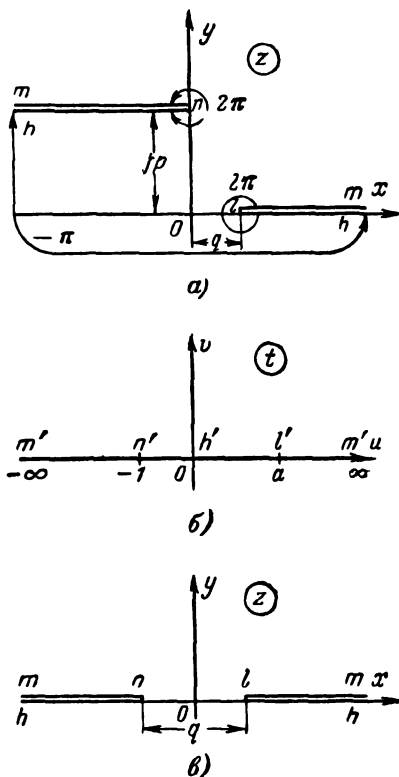


Рис. 8-10.

Для преобразования вещественной оси плоскости t (рис. 8-10,б) в многоугольник допустим, что точка $t = \infty$ соответствует вершине n' , а остальными парами соответственных точек являются:

Тогда уравнение Шварца—Кристоффеля принимает вид:

$$\frac{dz}{dt} = S(t+1)t^{-2}(t-a). \quad (8-38)$$

Его нетрудно проинтегрировать и найти:

$$z = S \left[t + (1-a) \ln t + \frac{a}{t} \right] + k. \quad (8-39)$$

Присутствие члена t^{-2} в уравнении (8-38) означает, что в точке $t=0$ функция dz/dt имеет полюс второго порядка. Поэтому для определения расстояния между параллельными прямыми должно использоваться выражение (8-28) с постоянными, входящими в (8-38). Вычет функции dz/dt в точке $t=0$ представляет собой коэффициент при члене $1/t$ разложения в ряд правой части (8-38). Он, как нетрудно заметить, равен $S(1-a)$. Тот же результат может быть найден с помощью (8-29). Следовательно, уравнение (8-28) дает:

$$jp = j\pi S(1-a). \quad (8-40)$$

Подстановка пар соответственных точек в (8-39) приводит к двум дополнительным уравнениям, которые совместно с (8-40) используются для определения постоянных S , a и k . Подстановка для вершины l дает:

$$q = S[(1+a) + (1-a) \ln a] + k, \quad (8-41)$$

а для вершины n

$$jp = S[-(1+a) + (1-a)j\pi] + k. \quad (8-42)$$

Исключение из уравнений (8-40)—(8-42) S и k приводит к соотношению

$$\pi \left(\frac{q}{p} \right) = 2 \cdot \frac{1+a}{1-a} + \ln a, \quad (8-43)$$

которое, однако, должно быть решено графически для нахождения a при заданном значении (q/p) . Когда a найдено, для определения постоянных S и k используются уравнения (8-41) и (8-42).

Обе пластины лежат на вещественной оси. Когда $p=0$, обе пластины лежат на одной прямой и могут быть расположены вдоль вещественной оси плоскости z симметрично относительно начала координат, как показано на рис. 8-10, в. По условиям симметрии $a=1$ и уравнение (8-39) принимает вид:

$$z = S \left(t + \frac{1}{t} \right) + k.$$

Значения постоянных S и k находятся непосредственно путем подстановки координат пар соответственных точек $z=-q/2$, $t=-1$ и $z=q/2$, $t=1$;

$$S=q/4 \text{ и } k=0.$$

Отсюда уравнение преобразования может быть представлено следующим образом:

$$z = \frac{q}{4} \left(t + \frac{1}{t} \right). \quad (8-44)$$

Решение для поля, обусловленного разностью потенциалов ψ_1 , поддерживаемой между пластинами, часто используется (см., например, § 8-2-9) и находится путем объединения (8-44) с выражением для поля в плоскости t :

$$\omega = \frac{\psi_1}{\pi} \ln t.$$

Оно принимает наиболее удобный вид, когда $q=2$, и в этом случае определяется следующим образом:

$$\omega = \frac{\psi_1}{\pi} \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}) = \frac{\psi_1}{\pi} \operatorname{arch} z. \quad (8-45)$$

Другим способом получения уравнения (8-45) является использование уравнения (8-18) и преобразование непосредственно на плоскость ω .

8-2-8. Силы взаимодействия между якорем и магнитом контактора

Несколько методов определения сил, действующих на намагниченные границы, было описано в § 2-6; два из них рассмотрены здесь на примере типовой задачи. Обратимся к рис. 8-11,а, где изображены якорь и магнит контактора или статор и ротор машины.

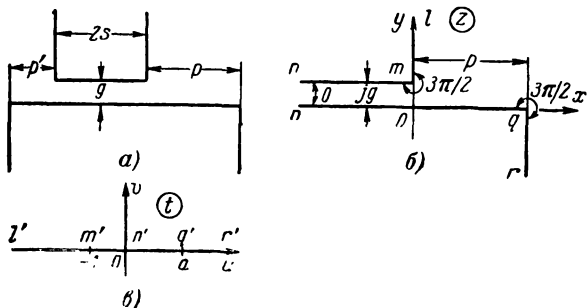


Рис. 8-11.

Существующая между этими элементами разность магнитных потенциалов обуславливает две составляющие силы, действующие на каждый из них: во-первых, существует сила притяжения и, во-вторых, сила, которая стремится сместить эти элементы, чтобы они заняли симметричное один относительно другого положение. Точный анализ изображенной конфигурации границ требует применения математических методов, которые изложены только в § 8-2-9, однако достаточно хорошие результаты можно получить, ограничившись рассмотрением только части границы, показанной на рис. 8-11,б.

Это возможно благодаря тому, что поле на протяжении большей части узкого воздушного зазора на обоих рисунках равномерно и не зависит от краев элементов. Таким образом, границу (рис. 8-11,а) можно составить из двух границ (каждая с соответствующей длиной параллельного зазора) вида, изображенного на рис. 8-11,б.

Прежде чем приступить к нахождению сил, необходимо определить поле. Допустим, что граница (рис. 8-11,б) расположена в плоскости z и преобразуется в вещественную ось плоскости t (рис. 8-11,в). Далее, выберем пары соответственных точек в двух плоскостях следующим образом:

$$\begin{aligned} z &= j\infty; & t &= -\infty; \\ z &= jg; & t &= -1; \\ z &= -\infty; & t &= 0; \\ z &= p; & t &= a; \\ z &= p - j\infty; & t &= \infty. \end{aligned}$$

Тогда, поскольку углы при вершинах в точках ig , ∞ и p соответственно равны $3\pi/2$, 0 и $3\pi/2$, уравнение Шварца — Кристоффеля, связывающее плоскости, будет иметь вид:

$$\frac{dz}{dt} = S \sqrt{\frac{(t+1)(t-a)}{t}}. \quad (8-46)$$

Умножив числитель и знаменатель правой части этого уравнения на $\sqrt{t-a}$, можно проинтегрировать его и найти;

$$z = S \left[\frac{R(a+1)}{(R^2-1)} + (1-a) \operatorname{arth} R + j\sqrt{a} \ln \frac{(R\sqrt{a}-j)}{(R\sqrt{a}+j)} \right] + k, \quad (8-47)$$

где

$$R = \sqrt{\frac{t+1}{t-a}}. \quad (8-48)$$

Применив уравнение (8-26) для точки $t=0$, получим:

$$S = -\frac{jg}{\pi\sqrt{a}} \quad (8-49)$$

и с помощью уравнения (8-47), введя значение S и подставив координаты пар соответственных точек $z=jg$, $t=-1$ и $z=p$, $t=a$, найдем:

$$k = 0$$

и

$$a = 1 + \frac{2p^2}{g^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{2p^2}{g^2}\right)^2 - 1}. \quad (8-50)$$

Наконец, если разность магнитных потенциалов между двумя элементами в плоскости z равна ψ , то решение в плоскости t , как нетрудно заметить, будет иметь вид:

$$w = \frac{\psi}{\pi} \ln t. \quad (8-51)$$

Исключение t из этого уравнения и уравнений (8-47) и (8-48) приводит к решению для поля в плоскости z .

Определим теперь с учетом описанного в § 2-6-4 метода силу «смещения» F , действующую на элементы. Поскольку границы имеют бесконечно большую магнитную проницаемость, эта сила действует только на вертикальные поверхности и может быть найдена с помощью уравнения (2-117). Из него следует, что в данном случае сила F определяется как интеграл квадрата напряженности магнитного поля, взятый в пределах вертикальных поверхностей, т. е. согласно рис. 8-11,б

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{jg}^{j\infty} H^2 dz.$$

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{jg}^{j\infty} \left(\left| \frac{dw}{dz} \right| \right)^2 dz = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{jg}^{j\infty} \left(\left| \frac{dw}{dt} \right| \right)^2 \left(\left| \frac{dt}{dz} \right| \right)^2 dz,$$

или в наиболее удобном виде при изменении переменной интегрирования:

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{-1}^{-\infty} \left(\left| \frac{dw}{dt} \right| \right)^2 \left| \frac{dt}{dz} \right| dt. \quad (8-52)$$

Продифференцировав (8-51), найдем:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\psi}{\pi} \cdot \frac{1}{t},$$

а dt/dz определяется уравнениями (8-46) и (8-49), поэтому подстановка значений производных в (8-52) дает:

$$F = \frac{\mu_0 \psi^2 \sqrt{a}}{2\pi g} \int_{-1}^{-\infty} \frac{dt}{t \sqrt{(t-a)(t+1)}}.$$

Выполнив интегрирование полученного уравнения, придем к выражению

$$\begin{aligned} F &= \frac{\mu_0 \psi^2}{2\pi g} \left[\arcsin \frac{t(1-a) - 2a}{t(1+a)} \right]_{-1}^{-\infty} = \\ &= \frac{\mu_0 \psi^2}{2\pi g} \left[\arcsin \frac{1-a}{1+a} - \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (8-53)$$

Эта сила приложена к одной стороне верхнего элемента (рис. 8-11,а), а результирующая сила, действующая на него, равна:

$$\frac{\mu_0 \psi^2}{2\pi g} \left[\arcsin \frac{1-a}{1+a} - \arcsin \frac{1-a'}{1+a'} \right], \quad (8-54)$$

где a' определяется из уравнения (8-50) после замены p на p' (вылет по другую сторону системы).

Возможен и другой, отличающийся от описанного выше способ определения силы смещения, заключающийся в нахождении скорости изменения относительно p (и p') результирующего потока, входящего в первый элемент (см. § 2-6-3). Этот путь приводит к настолько сложным уравнениям, что их аналитическое решение становится невозможным [нельзя получить уравнение $\omega=f(z)$], однако могут быть использованы численные методы. При расчете действительную границу удобно разделить по средней линии верхнего элемента на две части, каждая из которых имеет вид границы (рис. 8-11,б). Результирующий поток Φ , входящий в одну половину верхнего элемента, принимается равным потоку, пересекающему границу в плоскости z между точкой $-s+jg$, где $2s$ — ширина верхнего элемента, и некоторой точкой jY , причем Y должно быть достаточно велико для того, чтобы поток, проходящий между точками jY и $j\infty$, был пренебрежимо мал. Производится расчет результирующего потока для ряда значений p и строится соответствующая зависимость. Далее, согласно уравнению (2-116) разность углов наклона кривой для значений p и p' , умноженная на $\psi/2$, определяет результирующую силу смещения, действующую на верхний элемент, т. е.

$$F = \frac{\psi}{2} \left(\frac{d\Phi}{dp} - \frac{d\Phi'}{dp'} \right).$$

Силы притяжения также могут быть найдены любым из этих способов. Здесь, как и прежде, действительную границу удобно разделить на две части по средней линии верхнего элемента. При использовании первого метода сила, действующая, например, на верхний элемент, определяется выражением

$$\frac{\mu_0}{2} \left[\int_{-s+jg}^{jg} H^2 dz + \int_{-s+jg}^{jg} H'^2 dz \right],$$

где H — напряженность магнитного поля на поверхности $z=jg$ для выступа p , а H' — напряженность магнитного поля на той же поверхности для выступа p' . Во втором методе сила находится в виде:

$$\frac{\psi}{2} \left(\frac{d\Phi}{dg} + \frac{d\Phi'}{dg} \right),$$

где Φ и Φ' — значения потоков, пересекающих границу в плоскости z между точками $-s+jg$ и jg соответственно для выступов p и p' .

В общем случае из этих двух методов предпочтительным является метод интегрирования по поверхности. Он более прост и точен, когда должны быть использованы численные методы, поскольку метод, основанный на определении скорости изменения результирующего потока, требует нахождения углов наклона кривой.

8-2-9. Простая электростатическая линза

Многие важные задачи исходят из многоугольника (с пятью вершинами), изображенного на рис. 8-12,а. В [Л. 8-8] исследовано электрическое поле между обмотками высшего и низшего напряжения трансформатора, в [Л. 8-9 и 8-10] проанализировано поле между противоположными пазами разной ширины, а в [Л. 8-11] рассмотрено поле электростатической линзы. В некоторых из этих задач поле обусловлено разностью потенциалов, поддерживаемой между левой и правой частями многоугольника, в связи с чем линия симметрии является линией потока. Нетрудно показать, что для опре-

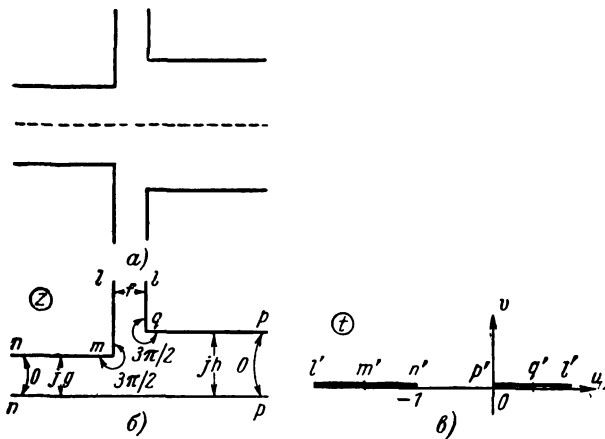


Рис. 8-12.

деления такого поля требуется выполнить преобразование поля между двумя полубесконечными пластинами (см. § 8-2-7) и что возможен единственный вариант выбора постоянных в плоскости t .

Для простой электростатической линзы с цилиндрической симметрией граница (рис. 8-12,а) представляет собой радиальное поперечное сечение по катоду и аноду. Анод обычно представляет собой тонкую пластину, расположенную перпендикулярно оси. Допущение о ее бесконечно большой длине оказывает незначительное влияние на поле между электродами и существенно упрощает преобразование, так как все постоянные могут быть найдены методом вычетов. Поле симметрично, и для упрощения преобразования удобно ограничиться рассмотрением половины его, изображенной в плоскости z на рис. 8-12,б. Анод с потенциалом ψ_A представлен участком lmn , катод с потенциалом, равным 0, — участком pql , а участок pr соответствует линии потока, проходящей вдоль оси линзы.

Для преобразования поля на плоскости z в известное поле на плоскости t вершина l должна быть выбрана соответствующей точке $t = \infty$. Тогда на вещественной оси плоскости t (рис. 8-12,в) будут два эквипотенциальных участка: $l'm'n'$, соответствующий lmn , и $p'q'l'$, соответствующий pql , и поле в этой плоскости будет анало-

гично рассмотренному в § 8-2-7. Если остальными парами соответственных точек являются

$$\begin{aligned} m, \quad t &= -a; \\ n, \quad t &= -1; \\ p, \quad t &= 0; \\ q, \quad t &= b, \end{aligned}$$

то уравнение Шварца—Кристоффеля принимает вид:

$$\frac{dz}{dt} = S \frac{\sqrt{(t+a)(t-b)}}{t(t+1)}. \quad (8-55)$$

Все постоянные (S , a и b) нетрудно определить методом вычетов. Применение (8-27) для точки $t = \infty$ дает:

$$S = -\frac{if}{\pi}, \quad (8-56)$$

а в результате применения (8-26) для точек 0 и -1 получим соответственно:

$$\frac{h}{f} = \sqrt{ab}; \quad (8-57)$$

$$\frac{g}{f} = -\sqrt{(b+1)(a-1)}. \quad (8-58)$$

Выполнив интегрирование уравнения (8-55), не учитывая положения начала координат в плоскости z , получим уравнение преобразования в виде:

$$\begin{aligned} z = & -\frac{if}{\pi} \left\{ \operatorname{arch} \left(\frac{2t+a-b}{a+b} \right) + \frac{h}{f} \operatorname{arccos} \left[\frac{(a-b)t-2ab}{(a+b)t} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{g}{f} \operatorname{arccos} \left[\frac{2(a-1)(b+1) + (b-a+2)(t+1)}{(a+b)(t+1)} \right] \right\}. \quad (8-59) \end{aligned}$$

Решение для поля в плоскости t находится из (8-45) путем уменьшения вдвое масштаба в этой плоскости (с таким расчетом, чтобы расстояние между пластинами было равно единице) и смещения начала координат на единицу. В результате получим:

$$w = \frac{\psi_A}{\pi} \operatorname{arch}(2t+1). \quad (8-60)$$

Это выражение совместно с (8-59) описывает поле в плоскости z . Напряженность поля в плоскости z , равная $|dw/dz|$, находится из уравнений (8-55)—(8-58) с учетом зависимости для dw/dt , определенной путем дифференцирования уравнения (8-60). Исходя из ее значения на оси линзы, можно определить силы, действующие на электроны, эмитируемые катодом.

8-3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕРХНЕЙ ПОЛОВИНЫ ПЛОСКОСТИ ВО ВНЕШНЮЮ ОБЛАСТЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

8-3-1. Преобразование

Из § 8-2 следует, что уравнение Шварца — Кристоффеля (8-1) может быть использовано для определения полей в областях, «внешних» по отношению к некоторым физическим границам. Однако поскольку границы этих областей должны быть приняты продолжающимися до бесконечности, в действительности с математической точки зрения они соответствуют внутренним областям многоугольников, замыкающихся в бесконечности. Если же возникает необходимость анализа полей во *внешних* областях конечных многоугольных границ, то требуется применить другое уравнение преобразования, которое далее будет выведено. Это уравнение преобразует вещественную ось одной плоскости в многоугольник на другой плоскости таким образом, что верхняя половина первой плоскости превращается во внешнюю область многоугольной границы на второй плоскости.

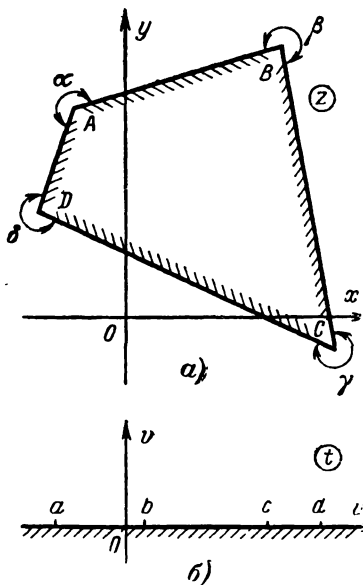


Рис. 8-13.

Рассмотрим многоугольник в плоскости z (рис. 8-13,а), который должен быть отображением вещественной оси плоскости t (рис. 8-13,б). Изменение направления границы в вершинах многоугольника осуществляются функцией, имеющей вид

правой части уравнения (8-1), поэтому можно предположить, что требуемое уравнение преобразования определяется следующей зависимостью:

$$\frac{dz}{dt} = Sf(t) [(t-a)^{(\alpha/\pi)-1} (t-b)^{(\beta/\pi)-1} \dots], \quad (8-61)$$

где функция $f(t)$ должна быть выбрана таким образом, чтобы удовлетворялись дополнительные условия преобразования, а $\alpha, \beta, \gamma \dots$ являются внешними углами многоугольника.

Для нахождения вида функции $f(t)$ рассмотрим прежде всего границы в двух плоскостях. Поскольку в уравнении (8-61) член в квадратных скобках полностью определяет изменения направления границы в плоскости z , функция $f(t)$ не должна оказывать влияния на аргумент и, следовательно, должна быть вещественной, не равной нулю и конечной для всех вещественных значений t . Далее, некоторая точка в плоскости t , не лежащая на вещественной оси, должна соответствовать точке $z = \infty$. Можно выбрать любую точку,

которая не определяется чисто вещественным числом, однако $f(t)$ будет иметь наиболее простой вид, если принять $t=j$, и, кроме того, поскольку в этой точке должен быть полюс (см. сноску на стр. 194), $f(t)$ должна быть функцией величины $(t-j)^{-1}$. Тем не менее, функция $f(t)$ должна быть вещественной для всех вещественных значений t , а для этого в нее необходимо ввести в качестве множителя член $(t+j)^{-1}$ *. Тогда

$$f(t) = g \left(\frac{1}{t^2 + 1} \right).$$

Кроме того, точка $t=\infty$ соответствует конечному значению z , в связи с чем функция $f(t)$ должна иметь нуль в этой точке и, поскольку $\Sigma(\alpha/\pi - 1) = 2$ (из выражения для суммы внешних углов многоугольника), он должен иметь порядок не ниже третьего. Таким образом, функция $f(t)$ будет иметь вид:

$$f(t) = h \left[\frac{1}{(t^2 + 1)^n} \right],$$

где n может принимать любые целые значения от 2 до ∞ . В самом общем случае ее можно представить следующим образом:

$$f(t) = \frac{L}{(t^2 + 1)^2} + \frac{M}{(t^2 + 1)^3} + \frac{N}{(t^2 + 1)^4} + \dots, \quad (8-62)$$

где $L, M, N \dots$ — вещественные постоянные.

Значения этих постоянных находятся из условия соответствия бесконечно малой окружности с центром в точке $t=j$ окружности с бесконечно большим радиусом в плоскости z , описываемой только 1 раз. Далее, малая окружность с центром в точке $t=j$ определяется выражением

$$t - j = Re^{j\theta},$$

в результате подстановки которого в (8-62), принимая во внимание, что при $R \rightarrow 0$ имеем $t+j \rightarrow 2j$, приходим к соотношению

$$f(t) = -\frac{L}{4R^2 e^{j2\theta}} - \frac{M'}{4R^3 e^{j3\theta}} - \frac{N'}{4R^4 e^{j4\theta}} - \dots$$

Отсюда, поскольку $dt = jRe^{j\theta} d\theta$, уравнение (8-61) принимает вид:

$$\frac{dz}{d\theta} = -\frac{jK}{4Re^{j\theta}} \left[L + \frac{M'}{Re^{j\theta}} + \frac{N'}{R^2 e^{j2\theta}} + \dots \right],$$

где K представляет собой значение члена в квадратных скобках уравнения (8-61) при $t \rightarrow j$.

В последнем уравнении, если $R \rightarrow 0$, каждый член в скобках дает в плоскости z окружность с бесконечно большим радиусом, соответствующую окружности в плоскости t , однако при изменении θ от 0 до 2π для всех членов, кроме первого, эта окружность описы-

* Полюс в точке $t=-j$ не оказывает влияния на поведение функции в верхней половине плоскости.

вается неоднократно. Поэтому M' , N' ... должны быть равны нулю, в связи с чем окончательно получим:

$$f(t) = \frac{L}{(t^2 + 1)^2},$$

и искомое уравнение преобразования может быть представлено следующим образом:

$$\frac{dz}{dt} = S(t^2 + 1)^{-2} (t - a)^{(\alpha/\pi) - 1} (t - b)^{(\beta/\pi) - 1} \dots \quad (8-63)$$

Это уравнение отличается от уравнения Шварца — Кристоффеля (8-1) только присутствием дополнительного множителя $(t^2 + 1)^{-2}$. Тем не менее, этот член значительно усложняет интегрирование по сравнению с уравнением (8-1) для тех же значений углов при вершинах. В связи с этим, а также ввиду того, что (8-63) не может быть использовано для нахождения решения, непосредственно исходя из плоскости w (см. приведенный ниже пример), оно никогда не применяется для внешних областей бесконечных границ и вводится только для конечных границ. Это уравнение используется, например, для определения распределения поля в окрестности заряженной шины (случай шины прямоугольного сечения рассмотрен в следующей главе).

При анализе описанных выше границ находят применение специальные функции, так же как и во всех преобразованиях, осуществляемых с помощью (8-63), за исключением случаев тонкой пластины и различных комбинаций пересекающихся тонких пластин. Они кратко описаны в [Л. 8-12], а случай одной заряженной пластины подробно рассмотрен ниже.

8-3-2. Поле заряженной проводящей пластины

В качестве примера применения уравнения (8-63) исследуем поле проводящей пластины, несущей заряд q . Допустим, что пластина расположена по вещественной оси плоскости z между точками c и $-c$ (рис. 8-14,а) и что начало координат плоскости t (рис. 8-14,б) соответствует точке $z=c$, а пределы вещественной оси — точке $z=-c$. Внешний угол многоугольника в точке $z=c$ равен 2π , поэтому преобразование вещественной оси плоскости t в границу на плоскости z определяется уравнением (8-63) и имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = S \frac{t}{(t^2 + 1)^2}.$$

Выполнив интегрирование, получим:

$$z = -S \frac{1}{(t^2 + 1)} + k.$$

Входящие в это выражение постоянные S и k находятся путем подстановки соответственных значений z и t . Отсюда $k = -c$, а $S = -2c$ и уравнение преобразования может быть представлено следующим образом:

$$z = c \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \quad (8-64)$$

Требуемое поле в плоскости t отличается от тех, которые были рассмотрены в этой книге выше, однако его нетрудно определить. Прежде всего верхняя и нижняя поверхности пластины соответствуют вещественной оси в плоскости t , в связи с чем результирующий заряд q должен быть распределен вдоль нее и, поскольку пластина проводящая, вещественная ось должна быть эквипотенциалью. Далее, весь поток, выходящий из пластины, уходит в бесконечность, поэтому, принимая во внимание, что точке $t=j$ соответствует в пло-

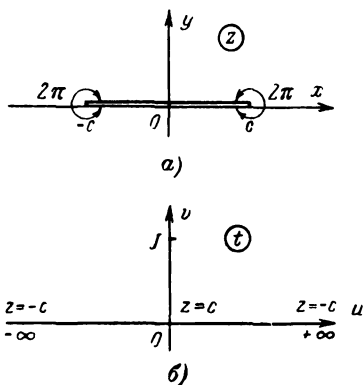
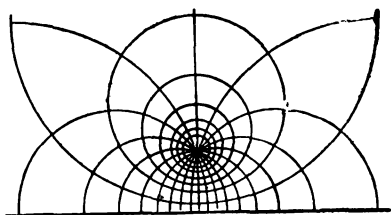


Рис. 8-14.

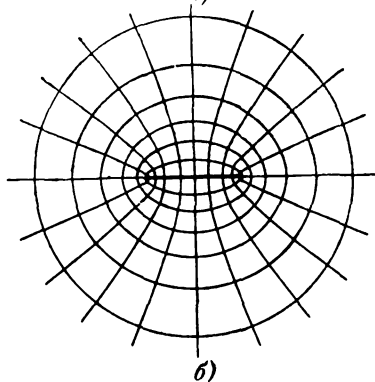


Рис. 8-15.

скости z бесконечность, в ней должен находиться заряд $-q$. Таким образом, картина поля в плоскости t соответствует рис. 8-15,а и нетрудно заметить, что оно представляет собой половину поля двух разноименных зарядов, расположенных в точках $t=j$ и $t=-j$. Следовательно, описывающая его комплексная потенциальная функция имеет вид (см. § 3-2-1):

$$\omega = \varphi + j\psi = -j \frac{q}{2\pi} \ln \frac{t-j}{t+j}.$$

Положив $W = 2\pi\omega/q$, можно переписать это выражение следующим образом:

$$t = j \frac{1 + e^{jW}}{1 - e^{jW}} = -\operatorname{ctg} \frac{W}{2},$$

или после сдвига начала отсчета W на π

$$t = \operatorname{tg} \left(\frac{W}{2} \right). \quad (8-65)$$

Таким образом, подставив значение t в уравнение (8-64), можно получить зависимость, описывающую поле в плоскости z :

$$z = c \cos W,$$

или, если выразить W через ω и сдвинуть начало координат в плоскости ω ,

$$z = c \sin \left(\frac{2\pi\omega}{q} \right). \quad (8-66)$$

Это соотношение аналогично уравнению (7-48), определяющему поле во внешней области эквипотенциальной эллиптической границы. Пластина, очевидно, представляет собой предельный эллипс семейства, описываемого [см. уравнение (7-49)] выражением

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{2\pi\psi}{q} \right)} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{2\pi\psi}{q} \right)} = 1,$$

и картина создаваемого ею поля изображена на рис. 8-15,б. Уравнение (8-66) отличается от (7-48) только тем, что оно включает величину заряда пластины (или эллиптической границы).

Поле в плоскости t , которое было здесь определено, всегда используется в тех случаях, когда поле во внешней области конечной заряженной проводящей границы находится путем преобразования, исходя из вещественной оси. Оно снова применяется в § 9-3, посвященном исследованию поля заряженной шины. Поле в плоскости t , требующееся для определения полей линейных токов и зарядов, расположенных во внешней области конечных границ, рассмотрено в § 10-2-2.

8-4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КРУГОВЫХ ГРАНИЦ В МНОГОУГОЛЬНЫЕ

В некоторых задачах желательно получить границу многоугольника путем преобразования не бесконечной прямой линии, а окружности. Существуют четыре уравнения преобразования, связывающие круговые границы с многоугольными (внутренняя или внешняя область одной границы может быть отображена во внутреннюю или внешнюю область другой границы), и их можно вывести путем объединения дробно-линейного преобразования (см. § 7-1) с уравнениями (8-1) (Шварца — Кристоффеля) или (8-63).

8-4-1. Уравнения преобразования

Рассмотрим вначале вывод уравнения, отображающего окружность с единичным радиусом в многоугольную границу при сохранении соответствия *внутренних* областей двух границ. Допустим, что многоугольник расположен в плоскости z (рис. 8-16,а), а окружность — в плоскости t (рис. 8-16,в). Вначале окружность преобразуется в вещественную ось третьей комплексной плоскости p (рис. 8-16,б), а затем вещественная ось плоскости p отображается в многоугольную границу. Уравнение, преобразующее внутреннюю

область окружности в верхнюю половину плоскости p , имеет вид [см. уравнение (7-17)]:

$$p = j \frac{1-t}{1+t}. \quad (8-67)$$

Продифференцировав это выражение, получим:

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{j \cdot 2}{(1+t)^2}. \quad (8-68)$$

Далее, уравнение, отображающее верхнюю половину плоскости p во внутреннюю область многоугольника, может быть представлено следующим образом [см. уравнение (8-1)]:

$$\frac{dz}{dp} = S (p-a)^{(\alpha/\pi)-1} (p-b)^{(\beta/\pi)-1} \dots,$$

или в более компактной форме

$$\frac{dz}{dp} = S \Pi (p-a)^{(\alpha/\pi)-1}, \quad (8-69)$$

где символ Π обозначает произведение членов вида $(p-a)^{(\alpha/\pi)-1}$.

Уравнение, преобразующее окружность в многоугольник, находится из выражения

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$$

с использованием полученных выше зависимостей для dz/dp и dp/dt . Подставив их значения, определяемые соответственно уравнениями (8-69) и (8-68), и учитывая соотношение (8-67) для p , найдем:

$$\frac{dz}{dt} = - S \Pi \left(j \frac{1-t}{1+t} - a \right)^{(\alpha/\pi)-1} \frac{2j}{(1+t)^2}. \quad (8-70)$$

Положив $S' = -2jS$ и принимая во внимание зависимость

$$(1+t)^{-2[(\alpha/\pi)-1]} = (1+t)^2,$$

можно переписать (8-70) следующим образом:

$$\frac{dz}{dt} = S' \Pi [j(1-t) - a(1+t)]^{(\alpha/\pi)-1},$$

или

$$\frac{dz}{dt} = S' \Pi \left[\left(\frac{j-a}{j+a} - t \right) (a+j) \right]^{(\alpha/\pi)-1}.$$

Однако, поскольку член $a+j$ постоянен, а отношение $(j-a)/(j+a)$ определяет точку t_a в плоскости t , соответствующую точке $p=a$ [это нетрудно показать, выразив t в уравнении (8-67)

через $p]$, в окончательном виде уравнение преобразования будет иметь вид:

$$\frac{dz}{dt} = S\Pi (t_a - t)^{(\alpha/\pi)-1},$$

или

$$\frac{dz}{dt} = S (t_a - t)^{(\alpha/\pi)-1} (t_b - t)^{(\beta/\pi)-1} (t_c - t)^{(\gamma/\pi)-1} \dots, \quad (8-71)$$

где постоянная S заменяет произведение постоянных множителей в предыдущем уравнении. Это уравнение по форме аналогично уравнению Шварца — Кристоффеля, за исключением изменения порядка вычитания в каждом члене. Следует, однако, заметить, что точки

t_a, t_b, t_c, \dots , соответствующие вершинам многоугольника, определяются в общем случае комплексными числами с единичным модулем.

Уравнение, отображающее внешнюю область окружности во внешнюю область многоугольника, можно вывести таким же путем с использованием уравнений (8-63) и (8-67), принимая во внимание, что уравнение (8-67) преобразует внешнюю область окружности в нижнюю половину плоскости p . Это уравнение имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = St^{-2} (t - t_a)^{(\alpha/\pi)-1} \times \\ \times (t - t_b)^{(\beta/\pi)-1} (t - t_c)^{(\gamma/\pi)-1} \dots, \quad (8-72)$$

где углы $\alpha, \beta, \gamma \dots$ являются внешними углами многоугольника, а точки $t_a, t_b \dots$ по-прежнему определяются комплексными числами с единичным модулем.

Остальные два уравнения, связывающие единичную окружность с многоугольником (уравнение, преобразующее внутреннюю область многоугольника во внешнюю область окружности, и уравнение, отображающее внешнюю область многоугольника во внутреннюю область окружности), применяются очень редко и здесь не приводятся. При необходимости их нетрудно вывести по методу, аналогичному описанному выше.

Использование преобразований, исходя из единичной окружности, не дает возможности решить задачу, не поддающуюся реше-

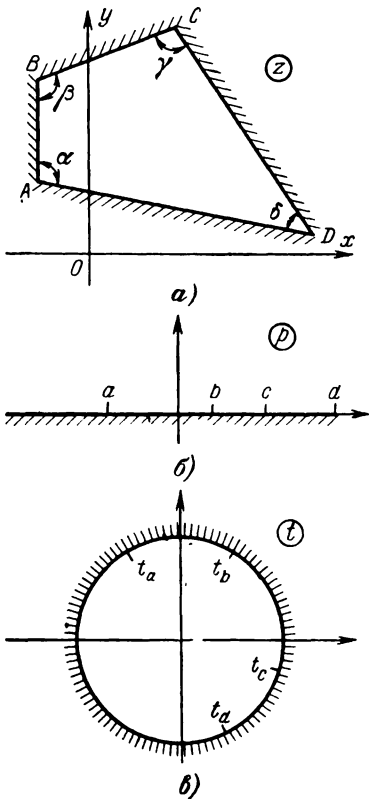


Рис. 8-16.

нию путем преобразования, исходя из вещественной оси. Для обоих методов характерны аналогичные трудности, связанные с интегрированием дифференциальных уравнений. Для заданного многоугольника в том и другом случаях приходится оперировать с функциями одного и того же вида. Для внутренней области многоугольника обычно предпочтительно преобразование вещественной оси в связи с более простым характером поля. Однако для внешних областей многоугольника часто целесообразно использовать преобразование, исходя из окружности, так как в этом случае легче представить требуемые решения для полей. Эта рекомендация пояснена в следующем примере и обоснована далее в § 10-2. Кроме того, она рассмотрена в [Л. 8-13] на примере анализа поля двух конечных пересекающихся заряженных пластин.

Общее решение для поля во внутренней области единичной окружности при произвольном распределении потенциала вдоль нее определяется интегралом Пуассона, описанным в § 10-6-1. С помощью этого интеграла можно определить поле во внутренней области многоугольника, обусловленное произвольным распределением потенциала на границе, если он может быть преобразован в единичную окружность.

8-4-2. Поле линейного тока, расположенного вблизи магнитно проницаемой пластины с конечным поперечным сечением

Определим поле линейного тока, протекающего вблизи магнитно проницаемой пластины с конечным поперечным сечением (рис. 8-17), используя преобразование внешней области пластины во внешнюю

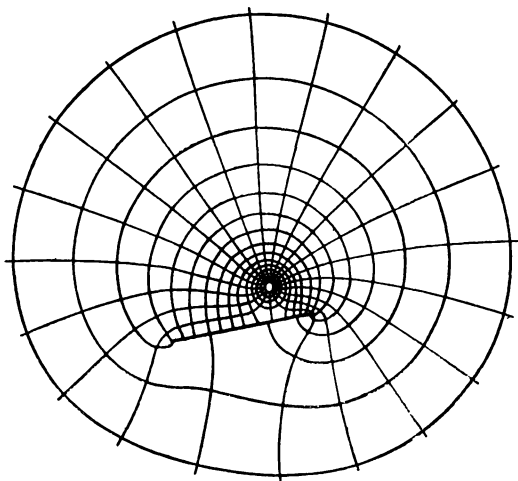


Рис. 8-17.

область единичной окружности. Картина поля во внешней области окружности показана на рис. 7-11. Допустим, что граница пластины расположена в плоскости z и концы ее находятся в точках $z=l+jm$

и $z = -l - jm$ (рис. 8-18,а), а единичная окружность расположена в плоскости t (рис. 8-18,б). Оба внешних угла многоугольника (на концах пластины) равны 2π , а координаты точек t_a и t_b , лежащих на окружности и соответствующих вершинам многоугольника, по условиям симметрии равны по величине, но имеют противоположные знаки. Таким образом, согласно уравнению (8-72)

$$\frac{dz}{dt} = St^{-2} (t - t_a) (t - t_b).$$

Отсюда, выполнив интегрирование, получим уравнение, связывающее плоскости:

$$z = S \left(t + \frac{t_a^2}{t} \right) + k.$$

Подстановка в это выражение соответственных значений z и l для вершин многоугольника дает $k=0$ и

$$S = \frac{l + jm}{2t_a},$$

где t_a может принимать любое удобное значение.

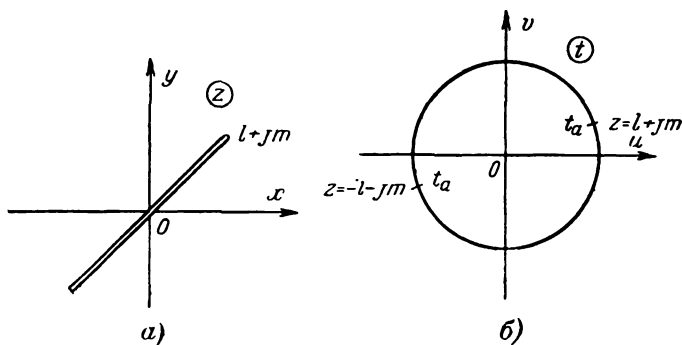


Рис. 8-18.

Следовательно, преобразование окружности в пластину определяется следующим образом:

$$z = \frac{l + jm}{2t_a} \left(t + \frac{t_a^2}{t} \right). \quad (8-73)$$

Сравните это уравнение с (7-36).

При определении поля, создаваемого линейным током в плоскости z , необходимо исходить из того, что требуемое поле в плоскости t также обусловлено линейным током, расположенным в точке, соответствующей согласно уравнению (8-73) точке, где находится ток в плоскости z . Решение принимает наиболее простой вид, когда

ток расположен в некоторой точке c вещественной оси плоскости z , определяемой из условия, чтобы с учетом выбора $l+jm$ поле в плоскости z имело желаемое распределение. Кроме того, ток в плоскости t также расположим на вещественной оси в некоторой точке c' . В соответствии с уравнением (7-40) поле в плоскости t определяется выражением

$$\varphi + j\psi = \frac{i}{2\pi} \ln \left(\frac{t^2 + 1}{t} - \frac{c'^2 + 1}{c'} \right), \quad (8-74)$$

и исключение из уравнений (8-74) и (8-73) t приводит к решению в плоскости z . То же решение можно получить с использованием (8-63), осуществляющего преобразование вещественной оси плоскости t в границу пластины. Однако, несмотря на простоту уравнения преобразования (см. § 8-3-2), нетрудно заметить, что требуемое поле в плоскости t не является очевидным и может быть определено только на основании детального анализа. Данный вопрос рассмотрен в § 10-2-2.

Определение этого поля важно для оценки влияния пластины на индуктивность проводника с током. Индуктивность можно рассчитать путем сравнения разности значений функции потока в двух точках, одна из которых лежит на поверхности проводника, а другая находится на большом расстоянии от проводника и пластины, для двух случаев: при наличии и отсутствии пластины.

8-5. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Было рассмотрено большое число различных простых примеров преобразования многоугольных границ, и теперь целесообразно кратко исследовать в общем виде зависимость между заданным типом границы и интегралом, появляющимся при выводе уравнения преобразования. Трудность выполнения интегрирования в значительной мере зависит от значений углов при вершинах и, вообще говоря, возрастает с увеличением числа углов. Встречаются три типа интегралов, которые рассмотрены ниже в предположении, что число вершин границы там, где это возможно, сведено к минимуму с учетом условий симметрии.

Интегралы, поддающиеся определению через элементарные функции. Этот первый тип интегралов приводит к решению, которое можно выразить полностью с помощью простых функций, и все приведенные в этой главе примеры типичны для данного случая. Общее выражение для интегралов этого типа может быть представлено следующим образом:

$$\int \frac{P(t)}{Q(t)} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} dt = \int \frac{P'(t)}{Q(t)} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}, \quad (8-75)$$

где P , P' и Q являются рациональными алгебраическими функциями t . Границу с любым количеством углов, равных $-\pi$, 0 и 2π , и не более чем с двумя углами, в нечетное число раз кратными $\pi/2$, можно представить в этом простейшем виде. Входящие в уравнение преобразования постоянные для такой границы обычно нетрудно найти, хотя, как было показано выше (см. § 8-2-7), в некоторых случаях может потребоваться применение графических методов.

Интегралы, поддающиеся определению через специальные функции. В практике часто встречаются многоугольники с тремя или четырьмя углами, в нечетное число раз кратными $\pi/2$ (и с любым числом углов, равных $-\pi$, 0 или 2π). Они приводят к интегралам, называемым *эллиптическими*. Такие интегралы можно определить с помощью эллиптических функций; они подробно рассмотрены в гл. 9.

Кроме того, ряд многоугольников с углами при вершинах, не кратными $\pi/2$, приводит к интегралам, которые могут быть представлены в форме Эйлера, или в частных случаях к эллиптическим интегралам. Они описаны в § 10-4.

Интегралы, требующие численного определения. Если конфигурация границы такова, что появляющиеся интегралы не могут быть отнесены к упомянутым выше типам, то аналитические методы становятся бессильными и применяются численные методы решения (см. § 10-5).

ЛИТЕРАТУРА

8-1. Schwarz H. A., *Über einige Abbildungsaufgaben*, J. reine Angew. Math., 70, 105, 1869.

8-2. Christoffel E. B., *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie*, Ann. Mat. Pura Appl., 1, 95, 1867.

8-3. Rogowski W., *Die elektrische Festigkeit am Ronde des Plattenkondensators, ein Beitrag zur Theorie der Funkenstrecken und Durchführungen*, Arch. Elektrotech., 12, 1, March 1923.

8-4. Carter F. W., *Air-gap and interpolar induction*, J. Instn Electr. Engrs, 29, 925, July 1900.

8-5. Stein G. M., *Influence of the core form upon the iron losses of transformers*, Trans. Amer. Instn Electr. Engrs, 67, I, 95, 1948.

8-6. Terry I. A. and Keller E. G., *Field pole leakage flux in salient pole dynamo electric machines*, J. Instn Electr. Engrs, 83, 845, Dec. 1938.

8-7. Carter F. W., *Air-gap induction*, Electr. World, N. Y., 38, 884, Nov. 1901.

8-8. Dreyfus L., *Die Anwendung des Mehrphasenfrequenzumformers zur Kompensierung von Drehstromasynchronmotoren*, Arch. Electrotech., 13, 507, Sept. 1924.

8-9. Carter F. W., *The magnetic field of the dynamo-electric machine*, J. Instn Electr. Engrs, 64, 115, Nov. 1926.

8-10. Kucera J., *Magnetische Zahnstreuungen bei elektrischen Maschine*, Electrotech. u. Maschinenb., 58, 329, 1940.

8-11. Herzog R., *Berechnung des Streufeldes eines Kondensators, dessen Feld durch eine Blende begrenzt ist*, Arch. Elektrotechn., 29, 790, Nov. 1935.

8-12. Bickley W. G., *Two-dimensional problems concerning a single closed boundary*, Phil. Trans., 228 A, 235, 1929.

8-13. Morton W. B., *Electrification of two intersecting planes*, Phil. Mag., 1, 337, Feb. 1926 and *Irrotational flow past two intersecting planes*, Phil. Mag., 2, 900, Nov. 1926.

Дополнительная литература

8-14. Dahlman B. A., *A double ground plane strip line for microwaves*, Inst. Radio Engrs, MTT-3, 52—57, Oct 1955.

8-15. Douglas J. H. F., Reluctance of some irregular magnetic fields, Trans. Amer. Instn Electr. Engrs, 34, 1, 1067, 1915.

8-16. Kreyszig E., Schlitzblendenkondensatoren. Ein Beitrag zur Praxis der Berechnung von Potentialfeldern, Z. angew. Phys., 7, 13—17, 1955.

Глава девятая

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

9-1. ВВЕДЕНИЕ

Решение многих практически важных задач методом конформных преобразований требует применения эллиптических функций. Это функции общего вида, частными случаями которых являются тригонометрические и гиперболические функции, и их можно использовать для определения интегралов, относящихся к эллиптическим. В этой главе эллиптические функции описаны только в объеме, необходимом для их применения в методах конформных преобразований. Однако для того чтобы читатель, не знакомый с этими функциями, мог их сознательно использовать, приводится обоснованное объяснение основных принципов.

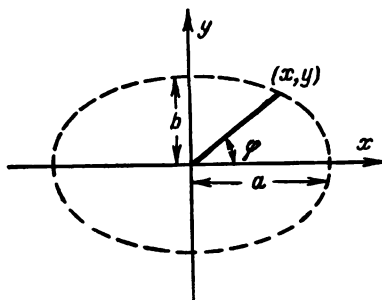


Рис. 9-1.

Эллиптические функции получили свое название в связи с тем, что их первое применение было связано с определением длины дуги эллипса. Рассмотрим этот вывод для эллипса на рис. 9-1, описываемого уравнениями в параметрической форме

$$x = a \sin \varphi$$

и

$$y = a \cos \varphi.$$

Длина L любой дуги определяется выражением $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, где пределы интегрирования соответствуют

концам дуги. Таким образом, для дуги эллипса, определяемой углами φ_1 и φ_2 , имеем:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi]^{1/2} d\varphi.$$

Полученное соотношение можно представить в виде:

$$L = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi, \quad (9-1)$$

где

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

представляет собой эксцентриситет эллипса и имеет значение, меньшее единицы. Этот интеграл не поддается определению через элементарные функции, исключая ряды, и известен как эллиптический интеграл второго рода. Поскольку $k < 1$ и $\sin \varphi \leq 1$, подынтегральное выражение можно разложить по формуле бинома; отсюда

$$(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} = 1 - \frac{k^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{k^4}{8} \sin^4 \varphi - \dots$$

Этот ряд равномерно сходится, в связи с чем его можно проинтегрировать почленно с помощью рекуррентной формулы для $\int \sin^n x dx$.

Аналогичным образом могут быть определены другие типы эллиптических интегралов и связанные с ними эллиптические функции. Таблицы значений эллиптических функций, полученные с помощью таких рядов, не трудно найти и использовать при расчетах.

Однако, если расчет производится на вычислительной машине, то обычно предпочтительно использовать непосредственно ряды, а не вводить в память машины таблицы функций. Описание существующих таблиц и различных рядов, требуемых при расчетах, приведено в приложениях.

9-2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ФУНКЦИИ

Существует три основных *эллиптических интеграла*, с помощью которых могут быть выражены все остальные интегралы; они определены Лежандром в [Л. 31]

как интегралы первого, второго и третьего рода. *Эллиптические функции* выводятся, как показано ниже, из интеграла первого рода.

9-2-1. Эллиптический интеграл первого рода

Простейшим и наиболее полезным из трех основных интегралов является интеграл первого рода, определяемый выражением

$$z = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}}, \quad (9-2)$$

где $|\sin \theta| < 1$.

θ называется *модульным углом*, а φ — *амплитудой*. Положив в уравнении (9-2) $t = \sin \varphi$ и $k = \sin \theta$, получим:

$$z = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (9-3)$$

Эта форма записи эллиптического интеграла первого рода предложена Якоби; величина k носит название *модуля*. При некоторых значениях k (или $\sin \theta$) z становится элементарной функцией t : если $k=0$, то $z = \arcsin t$; если же $k=1$, то $z = \operatorname{arth} t$.

Когда верхний предел выражен в общем виде, интеграл называется *неполным* и обозначается символом $F(t, k)$ или $F(\varphi, \theta)$. Если же верхний предел равен $t=1$ ($\varphi = \pi/2$), то интеграл носит название *полного* и обозначается символом $K(k)$ или $K(\theta)$.

С модулем k связан *дополнительный модуль* k' , определяемый выражением

$$k' = \sqrt{1 - k^2}. \quad (9-4)$$

Полный интеграл с модулем k' обозначается символом K' . С помощью уравнения (9-3), выразив k' через k , нетрудно показать, что

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{j \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (9-5)$$

откуда

$$K + jK' = \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (9-6)$$

Это соотношение может оказываться полезным при определении постоянных преобразования и используется далее в § 9-2-4.

9-2-2. Главные эллиптические функции Якоби

Как показал Якоби, из эллиптического интеграла первого рода нетрудно вывести некоторые эллиптические функции, очень полезные при анализе. Обратимся снова к уравнению (9-3), в котором z является функцией t и k , откуда следует, что t представляет собой функцию z и k . Поэтому в соответствии с обозначениями Якоби

$$t = \operatorname{sn}(z, k). \quad (9-7)$$

Это выражение определяет новую функцию sn^* , являющуюся одной из главных эллиптических функций Якоби. Если значение модуля очевидно, то применяется сокращенная запись

$$t = \operatorname{sn} z.$$

Существуют две другие главные функции: $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z^{**}$, определяемые соотношениями

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1 \quad (9-8)$$

и

$$\operatorname{dn}^2 z = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z. \quad (9-9)$$

$\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ представляют собой три главные эллиптические функции Якоби.

9-2-3. Эллиптический интеграл второго рода

Лежандр определил эллиптический интеграл второго рода $E(\varphi, \theta)$ следующим образом:

$$E(\varphi, \theta) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} d\varphi. \quad (9-10)$$

Положив

$$t = \sin \varphi$$

и

$$k = \sin \theta,$$

* sn обозначает сокращенно синус амплитуды и читается «эс эн».

** cn и dn читаются «си эн» и «ди эн».

получим выражение для этого интеграла в форме Якоби:

$$E(t, k) = \int_0^t \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt. \quad (9-11)$$

Если верхний предел интеграла равен $\varphi = \pi/2$ (или $t = 1$), то он называется полным и обозначается символом $E(\theta)$ [или $E(k)$].

Эллиптический интеграл второго рода можно выразить с помощью эллиптических функций Якоби, введя подстановку

$$\sin \varphi = \operatorname{sn} \alpha. \quad (9-12)$$

Можно показать [Л. 50], что

$$\frac{d}{d\alpha} (\operatorname{sn} \alpha) = \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha;$$

поэтому, продифференцировав уравнение (9-12), получим:

$$\cos \varphi d\varphi = \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha d\alpha.$$

Таким образом,

$$d\varphi = \frac{\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\cos \varphi} d\alpha \quad (9-13)$$

и в результате подстановки (9-13) в (9-10) найдем:

$$E(\varphi, \theta) = \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\cos \varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} d\alpha. \quad (9-14)$$

Используя определения $\operatorname{dn} \alpha$ и $\operatorname{cn} \alpha$, а также уравнение (9-12), нетрудно получить:

$$\operatorname{dn} \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}$$

и

$$\operatorname{cn} \alpha = \cos \varphi.$$

Тогда окончательно, подставив полученные зависимости в (9-14), придем к выражению

$$E(\varphi, \theta) = \int_0^{\varphi} \operatorname{dn}^2 \alpha d\alpha, \quad (9-15)$$

которое определяет эллиптический интеграл второго рода через эллиптические функции Якоби.

9-2-4. Две конечные заряженные пластины

Применение эллиптических функций при анализе физических задач вначале иллюстрируется примером определения поля двух заряженных проводящих пластин одинаковой длины, расположенных на одной прямой (рис. 9-2). Это поле часто преобразуют в более сложные поля (см., например [Л. 9-1]).

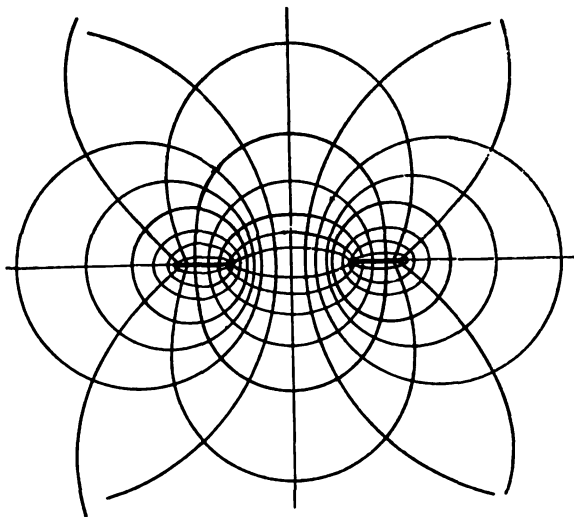


Рис. 9-2.

На рис. 9-3,*а* изображены две проводящие пластины, лежащие на вещественной оси плоскости t , а на рис. 9-3,*б* показана в плоскости w прямоугольная граница, две противоположные стороны которой соответствуют проводящим пластинам, а две другие стороны представляют собой линии потока. Равномерное поле

$$w = \psi + j\varphi$$

внутри прямоугольника должно быть преобразовано в поле в верхней половине плоскости t . Допустим, что в плоскости t пластины расположены между точками $t = +1$ и $+1/k$, а также $t = -1$ и $-1/k$, в связи с чем со-

отношение размеров границ в этой плоскости установлено выбором значения k . Такой выбор постоянных в плоскости t приводит, как показано ниже, к определенным интегралам, которые могут быть выражены непосредственно через полные эллиптические интегралы, а k представляет собой их модуль. Далее, предположим, что разность потенциалов между границами равна единице, а

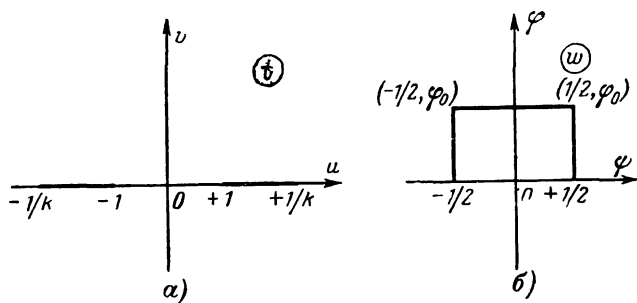


Рис. 9-3.

соответственными точками в плоскостях w и t являются:

$$t = +1; \quad \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \psi = \frac{1}{2};$$

$$t = +1/k; \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{и} \quad \psi = \frac{1}{2};$$

$$t = -1; \quad \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \psi = -\frac{1}{2};$$

$$t = -1/k; \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{и} \quad \psi = -\frac{1}{2}.$$

Уравнение Шварца — Кристоффеля, связывающее плоскости, имеет вид:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{S}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2t^2}}, \quad (9-16)$$

или

$$w = \int_0^t \frac{S dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2t^2}}. \quad (9-17)$$

Это эллиптический интеграл первого рода, который может быть выражен с помощью функций Якоби следующим образом:

$$t = \operatorname{sn}\left(\frac{w}{S}\right). \quad (9-18)$$

Такая форма удобна для записи и позволяет без труда установить соотношение между постоянными в плоскостях w и t . Представим уравнение (9-16) с помощью функций Якоби:

$$\operatorname{sn}(K + jK') = \frac{1}{k}. \quad (9-19)$$

Если $t = 1/k$, то уравнения (9-18) и (9-19) равносильны, откуда

$$\frac{w}{S} = K + jK'. \quad (9-20)$$

Далее, при $t = 1/k$ имеем $w = \frac{1}{2} + j\varphi_0$, поэтому

$$K + jK' = \frac{1}{2S} + \frac{j\varphi_0}{S}. \quad (9-21)$$

Таким образом, приравняв вещественные части этого уравнения, получим:

$$S = \frac{1}{2K}, \quad (9-22)$$

и уравнение преобразования, определяющее поле, может быть представлено в виде:

$$t = \operatorname{sn}(2Kw, k). \quad (9-23)$$

Это решение может быть использовано, например, для нахождения емкости между пластинами.

Приравнивание мнимых частей уравнения (9-21) дает:

$$\frac{\varphi_0}{S} = K',$$

и в результате подстановки значения S из (9-22) найдем:

$$\varphi_0 = \frac{K'}{2K}. \quad (9-24)$$

Поскольку разность потенциалов между пластинами равна единице, поток φ_0 , проходящий между ними, равен емкости между пластинами. Изменение емкости в зависимости от значения отношения расстояния между пластинами к их длине показано на рис. 9-4.

Картину линий потока и эквипотенциалей можно найти путем определения вещественной и мнимой частей функции $\operatorname{sn}(2K\omega)$ и подстановки значений φ и ψ . Для облегчения расчетов можно представить $\operatorname{sn}(2K\omega)$ в виде $\operatorname{sn}(\alpha + j\beta)$ и использовать разложение (см. [Л. 50])

$$\operatorname{sn}(\alpha + j\beta) = \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \beta}{1 - \sin^2 \beta \operatorname{dn}^2 \alpha} + j \frac{\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn} \beta \operatorname{cn} \beta}{1 - \sin^2 \beta \operatorname{dn}^2 \alpha}. \quad (9-25)$$

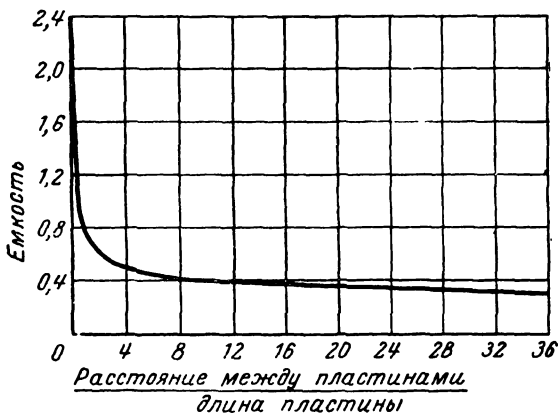


Рис. 9-4.

Описанное преобразование и подобные ему, касающиеся границ, образуемых конечными пластинами, были использованы при определении полного сопротивления волноводов и линий связи [Л. 9-2—9-5].

9-2-5. Эллиптические интегралы третьего рода

В практике встречаются интегралы, зависящие от трех переменных (в противоположность интегралам первого и второго рода, которые зависят от двух переменных: t и k). Один из таких интегралов был определен Лежандром как эллиптический интеграл третьего рода и получил обозначение

$$\Pi(t, k_1, k),$$

где

$$\Pi(t, k_1, k) = \int_0^t \frac{dt}{(1 - k_1^2 t^2) \sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}. \quad (9-26)$$

Положив $t = \operatorname{sn} u$ и $k_1 = k \operatorname{sn} \alpha$, определим тот же интеграл с помощью функций Якоби:

$$\Pi(u, \alpha) = \int_0^u \frac{du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 u} \quad (9-27)$$

с модулем k .

Однако Якоби определил эллиптический интеграл третьего рода по-другому в виде:

$$\Pi_J(u, \alpha) = k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 u}. \quad (9-28)$$

Эта форма более удобна для расчетов, однако в форме Лежандра интегралы более легко различаются. Две формы связаны зависимостью

$$\Pi = u + \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha} \Pi_J. \quad (9-29)$$

В общем случае определение интегралов третьего рода встречает большие трудности и единственным реальным методом расчета оказывается применение различных вспомогательных функций. К ним относятся *дзета-функция Якоби* $Z(u)$, где

$$Z(u) = E(u) - u \frac{E}{K}, \quad (9-30)$$

и *главная тэта-функция Якоби* $\theta(u)$, определяемая выражением

$$\theta(u) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{\pi n u}{K}. \quad (9-31)$$

Здесь величина q , называемая *номом Якоби*, равна:

$$q = e^{-\pi K'/K}. \quad (9-32)$$

Эллиптический интеграл третьего рода в форме Якоби может быть выражен с помощью дзета-функции или комбинации дзета-функции и тэта-функции (см. § 9-4). Эти соотношения, которые здесь приведены без вывода

(см. [Л. 50]) для последующего использования, имеют вид:

$$\Pi_j(u, \alpha) = \frac{1}{2} \int_0^u [Z(u - \alpha) - Z(u + \alpha) + 2Z(\alpha)] du \quad (9-33)$$

и

$$\int_0^u Z(u) du = \ln \theta(u). \quad (9-34)$$

Их объединение дает:

$$\Pi_j(u, \alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{\theta(u - \alpha)}{\theta(u + \alpha)} + uZ(\alpha). \quad (9-35)$$

9-3. ПОЛЕ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ ЗАРЯЖЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРОВОДНИКА

Интересным примером использования эллиптических функций, на котором могут быть продемонстрированы различные методы их обработки для получения численного решения, является анализ поля во внешней области заряженного прямоугольного проводника¹. Получены уравнения преобразования, определяющие границу проводника путем преобразования как от бесконечной прямой, так и от единичной окружности. Здесь исследовано только одно поле, а именно поле заряженного прямоугольного проводника (ср. с § 5-3), однако в гл. 10 описаны другие поля, с более сложными решениями для основного поля.

9-3-1. Преобразование от бесконечной прямой линии

Анализ этой задачи путем преобразования от бесконечной прямой можно разделить на несколько этапов. Вначале устанавливается связь прямоугольной границы с бесконечной прямой на основе уравнения Шварца—Кристоффеля. Затем с помощью полученной зависимости находятся выражения для постоянных. Далее, ее представляют в различных формах, с тем чтобы показать разные способы нахождения соответственных точек в двух плоскостях. И, наконец, отыскивается решение для поля в верхней половине плоскости.

¹ Этот сложный анализ впервые был выполнен в [Л. 9-6].

Преобразование. Преобразуем прямоугольную границу на плоскости z (рис. 9-5,б) в вещественную ось плоскости t (рис. 9-5,а) таким образом, чтобы верхняя половина плоскости t соответствовала внешней области прямоугольника. Предположим, что в плоскости t углам прямоугольника соответствуют точки $t=a, b, c$ и d , а точка E , лежащая на вещественной оси плоскости z , со-

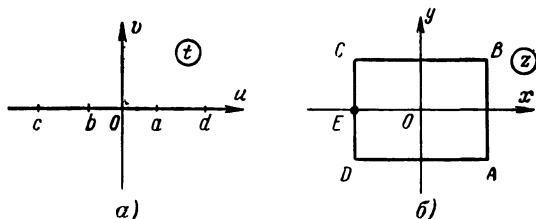


Рис. 9-5.

ответствует точке встречи в бесконечности пределов вещественной оси плоскости t . Согласно уравнению (8-63)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S \sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}}{(t^2+1)^2}. \quad (9-36)$$

Однако в связи с симметрией на плоскости t

$$a = -b$$

и

$$c = -d.$$

Следовательно, в результате исключения из (9-36) b и d получим уравнение преобразования:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S \sqrt{(t^2-a^2)(t^2-c^2)}}{(t^2+1)^2}. \quad (9-37)$$

Далее, существуют два параметра (длины сторон прямоугольника), определяющие конфигурацию границы в плоскости z , поэтому, как обычно, из трех входящих в (9-37) параметров один может быть выбран произвольно и его удобно выразить через другие параметры. Если принять $c = -1/a$, уравнение преобразования примет вид:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S \sqrt{(t^2-a^2)(t^2-1/a^2)}}{(t^2+1)^2}. \quad (9-38)$$

Такое представление, как будет ясно из дальнейшего, является наиболее желательным. Изменение a в пределах от 0 до 1 дает все возможные пропорции прямоугольника: если $a=0$, $c=-\infty$, то AB и CD равны нулю, если же $a=1$, $c=-1$, то AD и BC равны нулю.

Возможны различные способы определения z из уравнения (9-38); три из них рассмотрены здесь. Первый заключается в представлении интеграла с помощью функций Якоби; второй сводится к разложению подынтегрального выражения в ряд, а третий основан на представлении интеграла через три эллиптических интеграла Лежандра.

Представление с помощью функций Якоби. Положив в уравнении (9-38)

$$t = -\operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad (9-39)$$

и

$$a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (9-40)$$

представим dz/dt в виде:

$$\frac{S \left(\operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{1/2} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} - c \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{1/2}}{\sec^4 \frac{u}{2}}. \quad (9-41)$$

Если продифференцировать (9-39) и сделать перегруппировку членов в уравнении (9-41), а затем объединить полученные выражения, то нетрудно получить:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{S}{2} \operatorname{cosec} \alpha [2(\cos 2u - \cos 2\alpha)]^{1/2}. \quad (9-42)$$

Далее, обозначив

$$k = \sin \alpha \quad (9-43)$$

и

$$k \operatorname{sn} \beta = -\sin u, \quad (9-44)$$

где $\operatorname{sn} \beta$ имеет модуль k , можно представить правую часть уравнения (9-42) в форме Якоби. Используя определение $\operatorname{dn} \beta$ согласно (9-9) и учитывая соотношение (9-44), найдем:

$$\cos u = \operatorname{dn} \beta. \quad (9-45)$$

Подстановка уравнений (9-43)—(9-45) в (9-42) и разложение выражения $(\cos 2u - \cos 2\alpha)$ приводят к соотношению

$$\frac{dz}{du} = -\frac{S}{2k} \sqrt{2} [\operatorname{dn}^2 \beta - k^2 \operatorname{sn}^2 \beta - (1 - 2k^2)]^{1/2}, \quad (9-46)$$

откуда, используя определение $\operatorname{dn} \beta$, получим:

$$\frac{dz}{du} = -\frac{S}{2k} \sqrt{2} (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \beta - 1 + 2k^2)^{1/2}$$

и, учитывая определение $\operatorname{cn} \beta$ из уравнения (9-8),

$$\frac{dz}{du} = -\frac{S}{2k} 2k \operatorname{cn} \beta = -S \operatorname{cn} \beta. \quad (9-47)$$

Следующим шагом является дифференцирование уравнения (9-44), в результате чего находим:

$$\frac{d\beta}{du} = -\frac{\cos u}{k \operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \beta}$$

и, подставив в полученную зависимость уравнение (9-45), получим:

$$\frac{d\beta}{du} = -\frac{1}{k \operatorname{cn} \beta}. \quad (9-48)$$

Таким образом, согласно уравнениям (9-47) и (9-48)

$$dz = S \operatorname{cn} \beta \cdot k \operatorname{cn} \beta d\beta = Sk (1 - \operatorname{sn}^2 \beta) d\beta,$$

или, принимая во внимание уравнение (9-9),

$$dz = \frac{S}{k} (k^2 + \operatorname{dn}^2 \beta - 1) d\beta,$$

или, используя определение k' ,

$$dz = \frac{S}{k} (\operatorname{dn}^2 \beta - k'^2) d\beta.$$

Полученное выражение нетрудно проинтегрировать, учитывая соотношение

$$\int_0^{\beta} \operatorname{dn}^2 \beta d\beta = E(\beta),$$

где $E(\beta)$ — эллиптический интеграл второго рода.

Следовательно,

$$z = \frac{S}{k} [E(\beta) - k'^2 \beta] + c_1,$$

или согласно уравнению (9-30)

$$z = \frac{S}{k} \left[Z(\beta) + \beta \frac{E}{K} - k'^2 \beta \right] + c_1,$$

где $Z(\beta)$ — дзета-функция Якоби.

Наконец, в результате перегруппировки членов в правой части приходим к выражению

$$z = \frac{S}{k} \left[Z(\beta) + \left(\frac{E}{K} - k'^2 \right) \beta \right] + c_1, \quad (9-49)$$

которое представляет собой уравнение преобразования в форме функций Якоби. Его можно использовать для установления соотношений между постоянными в двух плоскостях.

Обозначим размеры сторон многоугольника через $2x_1$ и $2y_1$; тогда соответственными точками в двух плоскостях будут:

$$\text{и} \quad \left. \begin{array}{l} t=0; \quad z=x_1; \\ t=a; \quad z=x_1 - jy_1 \\ t=\pm\infty; \quad z=-x_1. \end{array} \right\} \quad (9-50)$$

Подстановка координат этих точек в уравнения (9-39), (9-40), (9-43) и (9-44) дает:

$$\text{и} \quad \left. \begin{array}{l} t=0; \quad u=0 \quad \text{и} \quad \beta=0; \\ t=a; \quad u=-a \quad \text{и} \quad \beta=K \\ t=\pm\infty; \quad u=\pm\pi \quad \text{и} \quad \beta=2jK'. \end{array} \right\} \quad (9-51)$$

Таким образом, из уравнений (9-50) и (9-51) можно найти соответственные значения β и z , ввести их в уравнение (9-49) и определить постоянные. Подстановка в уравнение (9-49) каждой пары соответственных значений β и z приводит к следующим соотношениям:

$$c_1 = x_1,$$

поскольку $Z(0) = 0$;

$$\frac{S}{k} (E - k'^2 K) = -jy_1,$$

поскольку $Z(K) = 0$, и

$$\frac{S}{k} \left[-\frac{j\pi}{K} + 2jK' \left(\frac{E}{K} - k'^2 \right) \right] = -2x_1,$$

поскольку $Z(2jK') = -j\pi/K$.

Упростив эти выражения, получим:

$$c_1 = x_1; \quad (9-52)$$

$$S = -\frac{jy_1 k}{E - k'^2 K} \quad (9-53)$$

и

$$x_1 = \frac{jS}{kK} \left(\frac{\pi}{2} - K'E + k'^2 KK' \right). \quad (9-54)$$

Однако нетрудно показать (см. [Л. 31 и 53]), что

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}. \quad (9-55)$$

С использованием этого соотношения уравнение (9-54) может быть представлено в виде:

$$x_1 = \frac{jS}{k} (E' - K' + k'^2 K') = \frac{jS}{k} (E' - k^2 K'),$$

откуда

$$S = -\frac{jx_1 k}{E' - k^2 K'}. \quad (9-56)$$

Наконец, исключив из уравнений (9-53) и (9-56) S , получим:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{E - k'^2 K}{E' - k^2 K'}. \quad (9-57)$$

С помощью этого соотношения можно найти значение отношения сторон прямоугольника при любом значении модуля k . Представляющий интерес диапазон соответствует изменению этого соотношения от 0 до 1. Случай $y_1/x_1 = n$ равносильен $y_1/x_1 = 1/n$ при взаимной перестановке сторон прямоугольника, и подстановка

в (9-57) $k=k'$ дает решение для обратного отношения сторон. Предельный случай $k=k'$ соответствует отношению $y_1/x_1=1$, и из уравнения (9-57) в этом случае следует: $k=1/\sqrt{2}$. На рис. 9-6 изображена зависимость отношения сторон в функции модуля k .

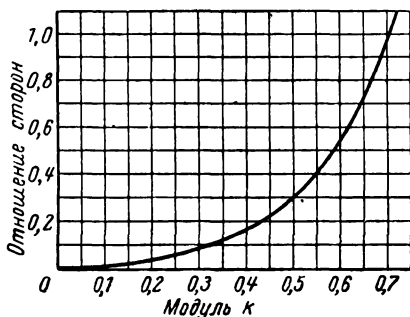


Рис. 9-6.

В окончательном виде уравнение (9-49) может быть представлено следующим образом:

$$z = \frac{-jx_1}{E' - k^2 K'} \left[Z(\beta) + \left(\frac{E}{K} - k'^2 \right) \beta \right] + x_1. \quad (9-58)$$

Если ввести обозначения

$$C_2 = E - k'^2 K \quad (9-59)$$

и

$$C_3 = E' - k^2 K', \quad (9-60)$$

то (9-57) примет вид:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{C_2}{C_3}, \quad (9-61)$$

а (9-58) станет

$$\begin{aligned} z &= -\frac{jx_1}{C_3} \left[Z(\beta) + \frac{C_2 \beta}{K} \right] + x_1 = \\ &= -\frac{jx_1}{C_3} \left[Z(\beta) + \frac{C_2 \beta}{K} + jC_3 \right] = \\ &= \frac{y_1}{C_2} \left[C_3 - j \left(Z(\beta) + \frac{C_2}{K} \beta \right) \right]. \end{aligned} \quad (9-62)$$

Резюмируя, можно наметить следующий путь преобразования конкретной прямоугольной границы. Из рис. 9-6 находится значение k для заданного отношения

сторон (при выборе меньшего из двух) и согласно уравнениям (9-59) и (9-60) рассчитываются C_2 и C_3 . Далее, с помощью уравнений (9-43) и (9-40) определяются α и a . Затем согласно уравнению (9-39) находится значение u при заданном значении t и используется в уравнении (9-44) для определения β . Наконец, по найденному значению β с помощью уравнения (9-62) рассчитывается z .

Определение интеграла с помощью рядов. Описанный выше способ нахождения z очень трудоемок, и теперь будет продемонстрирован гораздо более простой подход. Значение α здесь определяется так же, как и в предыдущем случае, а S рассчитывается по уравнению (9-56), однако для нахождения соответственных точек (в плоскостях t и z) в общем случае правая часть уравнения (9-42) разлагается в ряд, коэффициенты которого могут быть выражены с помощью полиномов Лежандра.

Уравнение (9-42) может быть представлено в виде:

$$\frac{dz}{du} = -\frac{S}{2} \operatorname{cosec} \alpha e^{ju} (1 - 2e^{-j2u} \cos 2\alpha + e^{-j4u})^{1/2}, \quad (9-63)$$

а входящий в это выражение радикал можно разложить в ряд:

$$(1 - 2e^{-j2u} + e^{-j4u})^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-j2nu}. \quad (9-64)$$

К аналогичному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} P_n h^n$ приводит разложение зависимости $(1 - 2\mu h + h^2)^{1/2}$, и, как показал Лежандр (см. [Л. 32]), коэффициенты P_n нетрудно найти (см. также [Л. 45]). Эти коэффициенты известны под названием *коэффициентов Лежандра* и для их определения составлены таблицы. Положив в уравнении (9-64) $\cos 2\alpha = \mu$, можно рассчитать коэффициенты a_n , предварительно выразив их через P_n . Однако в [Л. 9-6] показано, что эти коэффициенты находятся более просто с помощью рекуррентной формулы

$$(n+1)a_{n+1} - 2(n-1)\mu a_n + (n-2)a_{n-1} = 0. \quad (9-65)$$

Следовательно, учитывая, что $a_0=1$, а $a_1=-\mu$, можно использовать для определения dz/du уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= -\frac{S}{2} \operatorname{cosec} \alpha \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-j(2n-1)u} \right] = \\ &= -\frac{S}{2} \operatorname{cosec} \alpha \left[e^{ju} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-j(2n-1)u} \right]. \end{aligned} \quad (9-66)$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$z = j \frac{1}{2} S \operatorname{cosec} \alpha \left[e^{ju} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(2n-1)} e^{-j(2n-1)u} \right] + C_4, \quad (9-67)$$

и, поскольку S и α известны, можно найти z при заданном значении u . Таким образом, для любого конкретного значения t можно рассчитать по (9-39) u , а затем с помощью (9-67) найти z .

Представление подынтегрального выражения в форме Лежандра. Полезно выразить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - 1/a^2)}}{(t^2 + 1)^2} dt \quad (9-68)$$

через основные эллиптические интегралы. Хотя в общем случае этот способ сложен, для данной задачи можно показать, что исходный интеграл не содержит эллиптического интеграла третьего рода и может быть определен достаточно просто.

Прежде всего переведем радикал в знаменатель; тогда подынтегральная функция примет вид:

$$\frac{(t^2 - a^2)(t^2 - 1/a^2)}{(t^2 + 1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - 1/a^2)}},$$

а ее рациональную часть можно представить в виде простейших дробей

$$1 + \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \right) \left[\frac{1}{(t^2 + 1)^2} - \frac{1}{(t^2 + 1)} \right].$$

Следовательно, интеграл можно разбить на три составляющие: I_1 , I_2 и I_3 , где

$$I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - 1/a^2)}}; \quad (9-69)$$

$$I_2 = - \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \right) \int \frac{dt}{(t^2 + 1) \sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - 1/a^2)}} \quad (9-70)$$

и

$$I_3 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2 \sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - 1/a^2)}}. \quad (9-71)$$

Если в выражениях для I_1 , I_2 и I_3 ввести подстановку $t = ax$, то нетрудно заметить, что

$$I_1 = \int \frac{a dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-a^4x^2)}} = aF(x, a^2) \quad (9-72)$$

является эллиптическим интегралом первого рода, а I_2 превращается в эллиптический интеграл третьего рода:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) \int \frac{1}{(1+a^2x^2)} \cdot \frac{a dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-a^4x^2)}} = \\ &= -\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) \Pi(x, a, a^2). \end{aligned} \quad (9-73)$$

I_3 принимает вид:

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) \int \frac{a dx}{(1+a^2x^2)^2 \sqrt{(1-x^2)(1-a^4x^2)}} \quad (9-74)$$

и его можно представить следующим образом:

$$D(AI_4 - I_5 + P)/C \quad (9-75)$$

(см. [Л. 17]), где

$$\left. \begin{aligned} D &= a^2 + \frac{1}{a^2} + 2; \\ A &= 2a^2 + \frac{2}{a^2} + 4; \\ C &= 2a^2 + \frac{2}{a^2} + 4; \\ P &= \frac{x \sqrt{(1-x^2)(1-a^4x^2)}}{(1+a^2x^2)}; \end{aligned} \right\} \quad (9-76)$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-a^4x^2)}} \times \\ &\times \frac{dx}{(1+a^2x^2)} = \Pi(x, a, a^2); \end{aligned} \quad (9-77)$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-a^4x^2)}} - \\ &- \frac{1}{a^2} \int \frac{\sqrt{1-a^4x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) F(x, a^2) - \\ &- \frac{1}{a^2} E(x, a^2). \end{aligned} \quad (9-78)$$

Таким образом, объединив выражения для I_1 , I_2 и I_3 , получим:

$$\int \frac{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - 1/a^2)}}{(t^2 + 1)^2} dt = aF(x, a^2) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) F(x, a^2) + \frac{1}{2a^2} F(x, a^2) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{x \sqrt{(1-x^2)(1-a^4x^2)}}{(1+a^2x^2)} = \left(a - \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times F(x, a^2) + \frac{1}{2a^2} E(x, a^2) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{x \sqrt{(1-x^2)(1-a^4x^2)}}{(1+a^2x^2)}, \quad (9-79)$$

где $x = t/a$.

Определение $F(x, a^2)$ и $E(x, a^2)$ при комплексном x очень трудоемко, и описанный метод не является лучшим способом нахождения соотношения между t и z .

Определение поля. Граница проводника отображается в вещественную ось плоскости t описанным выше

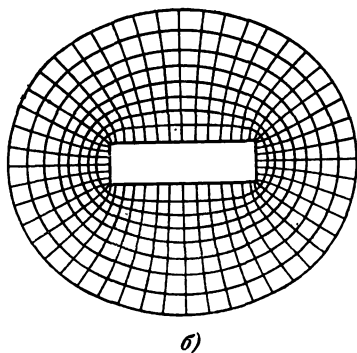
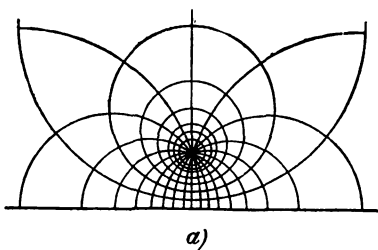


Рис. 9-7.

способом, а требуемое поле в плоскости t можно определить, исходя из двух следующих соображений. Во-первых, поскольку граница проводника является эквипотенциалью, вещественная ось плоскости t также должна иметь одинаковый потенциал. Во-вторых, ввиду того, что весь поток, выходящий из границы в плоскости z , замыкается в бесконечности (рис. 9-7,б), весь поток, выходящий из вещественной оси плоскости t , должен сходиться в точку $t=j$, соответствующую точке $z=\infty$. Следовательно, искомое поле в плоскости t имеет вид,

изображенный на рис. 9-7,а, и отвечает полю двух равных по величине, но обратных по знаку зарядов, расположенных в точках $t = \pm j$ (см. § 3-2-1). Это поле определяется выражением

$$\omega = \frac{q}{2\pi} \ln \left(\frac{t-j}{t+j} \right), \quad (9-80)$$

где q — заряд на единицу длины проводника.

Представляет интерес значение напряженности поля на поверхности проводника, определяемое соотношением $|dw/dt| \times |dt/dz|$. Подстановка значения dw/dt , полученного путем дифференцирования уравнения (9-80), и dt/dz из уравнения (9-38) дает:

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{q(t^2 + 1)}{\pi S \sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - 1/a^2)}}. \quad (9-81)$$

В точках, соответствующих точкам $t=0$ и ∞ (средние точки горизонтальных сторон),

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{q}{\pi S},$$

а в углах проводника dw/dz безусловно равно бесконечности.

В гл. 10 рассмотрены другие поля в плоскости t , которые дают в плоскости z поле тока вблизи магнитно проницаемого прямоугольника и поле прямоугольного проводника, помещенного в равномерное электрическое поле. Однако на данном этапе интересно проанализировать определение поля во внешней области прямоугольной границы, исходя из другого преобразования — от единичной окружности.

9-3-2. Преобразование от круговой границы

Преобразование. Допустим, что круговая граница с единичным радиусом расположена в плоскости t , а прямоугольная граница — в плоскости z , причем обе границы симметричны относительно вещественной и мнимой осей (рис. 9-8). Далее, обозначим углы прямоугольника a, b, c и d , а соответственные точки в плоскости t — теми же буквами со штрихами: a', b', c' и d' . Эти точки расположены симметрично относительно осей,

в связи с чем если в точке a' имеем $t = \alpha + j\beta$, то в точке b' $t = -\alpha + j\beta$, в точке c' $t = -\alpha - j\beta$ и в точке d' $t = \alpha - j\beta$.

Согласно уравнению (8-72) преобразование между плоскостями z и t определяется выражением

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S}{t^2} [t^2 - (\alpha + j\beta)^2]^{1/2} [t^2 - (\alpha - j\beta)^2]^{1/2}. \quad (9-82)$$

Поскольку окружность в плоскости t имеет единичный радиус $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, отсюда следует, что $\alpha + j\beta = (\alpha - j\beta)^{-1}$. Таким образом, исключение из (9-82) $(\alpha - j\beta)$ дает:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S}{t^2} [t^2 - (\alpha + j\beta)^2]^{1/2} \left[t^2 - \frac{1}{(\alpha + j\beta)^2} \right]^{1/2}, \quad (9-83)$$

или, если ввести обозначение $\gamma = \alpha + j\beta$,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S}{t^2} \sqrt{(t^2 - \gamma^2) \left(t^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right)}. \quad (9-84)$$

Для того чтобы произвести интегрирование, правую часть этого уравнения следует представить в форме Якоби. Переход упростится, если вначале перевести ее в тригонометрическую форму с помощью подстановок

$$t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (9-85)$$

и

$$\gamma = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (9-86)$$

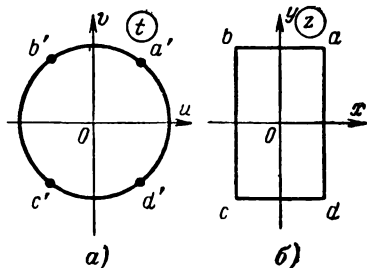


Рис. 9-8.

Таким образом, продифференцировав (9-85) и подставив выражения (9-85) и (9-86) в (9-84), получим:

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{S}{\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \operatorname{sec}^2 \frac{\theta}{2} \times$$

$$\times \sqrt{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \right)} = \quad (9-87)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{S}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \times \\
&\times \sqrt{\left[\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \right]} \times \dots \rightarrow \\
\leftarrow \dots &\times \left[\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right] = \frac{S}{1 - \cos \theta} \times \\
&\times \sqrt{\left[\frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \varphi) - (1 - \cos \varphi)(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \varphi)} \right]} \times \dots \rightarrow \\
\leftarrow \dots &\times \left[\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \varphi) - (1 + \cos \theta)(1 + \cos \varphi)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \varphi)} \right] = \\
&= \frac{S}{1 - \cos^2 \theta} \sqrt{\frac{4(\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi)}{(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)}} = \\
&= \frac{S}{\sin^2 \theta} \sqrt{\frac{4(\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi)}{1 - \cos^2 \varphi}} = \\
&= \frac{S}{\sin^2 \theta \sin \varphi} \sqrt{2(\cos 2\theta - \cos 2\varphi)}. \quad (9-88)
\end{aligned}$$

Для перехода к форме Якоби положим:

$$k = \sin \varphi \quad (9-89)$$

и

$$\sin \theta = k \operatorname{sn} u. \quad (9-90)$$

Далее, согласно определению

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$$

и с учетом уравнения (9-90)

$$\operatorname{dn} u = \cos \theta. \quad (9-91)$$

Кроме того, дифференцирование уравнения (9-90) дает:

$$\cos \theta d\theta = -k \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u du,$$

откуда

$$d\theta = -\frac{k \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u du}{\cos \theta},$$

или с использованием (9-91)

$$d\theta = -k \operatorname{cn} u du. \quad (9-92)$$

В результате подстановки уравнений (9-89) — (9-91) в (9-88) найдем:

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{2kS \operatorname{cn} u}{k^3 \operatorname{sn}^2 u} \quad (9-93)$$

и, принимая во внимание выражение для $d\theta$,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= \frac{2S \operatorname{cn} u}{k^2 \operatorname{sn}^2 u} (-k \operatorname{cn} u) = \\ &= \frac{2S}{k} \left(\frac{\operatorname{sn}^2 u - 1}{\operatorname{sn}^2 u} \right) = \frac{2S}{k} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} \right). \end{aligned} \quad (9-94)$$

Однако можно показать (см. [Л. 17 и 53]), что

$$\int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} = -\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} + u - E(u) + \text{const};$$

поэтому (9-94) можно проинтегрировать и получить:

$$z = \frac{2S}{k} \left[\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} + E(u) \right] + c_1. \quad (9-95)$$

Выведенное соотношение является уравнением преобразования, а постоянные S и c_1 находятся путем подстановки координат известных соответственных точек. Для расчетов проще всего выразить $E(u)$ через дзета-функцию. Тогда

$$z = \frac{2S}{k} \left[\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} + Z(u) + u \frac{E}{K} \right] + c_1. \quad (9-96)$$

Определение поля. При использовании этого преобразования для определения поля заряженного прямоугольного проводника в плоскости z требуемое поле в плоскости t представляет собой поле заряженного круглого проводника с единичным радиусом и центром в начале координат. Это поле было исследовано выше (см. § 2-4-4) и определяется выражением

$$w = \psi + j\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln t. \quad (9-97)$$

Отметим, что на границе проводника $|t|=1$, в связи с чем его потенциал принят равным нулю.

Сопоставляя уравнение (9-97) с выражением для поля в плоскости t при использовании преобразования от бесконечной прямой линии, нетрудно заметить, что оно проще. Определение соответственных точек с помощью уравнения преобразования для обоих методов одинаково трудоемко.

9-4. ПОЛЕ В ПАЗУ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Пример, связанный с применением эллиптических интегралов третьего рода, встречается при анализе влияния пазов или канавок на поле в воздушном зазоре электрической машины. Поскольку в большинстве машин длина воздушного зазора невелика по сравнению с размерами паза, достаточно исследовать поле отдельного паза. Преобразование, требуемое для решения этой задачи, аналогично преобразованию, применяемому для

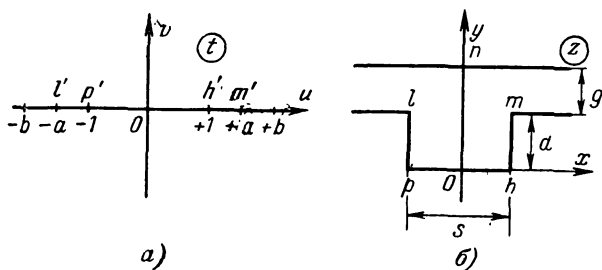


Рис. 9-9.

определения поля в воздушном зазоре машины с учетом влияния последовательности бесконечно глубоких пазов, и оба поля были кратко рассмотрены в [Л. 9-7]. Поскольку задача с последовательностью пазов подробно описана в [Л. 20], здесь приведен анализ поля мелкого паза.

Анализ можно разделить на несколько этапов следующим образом. Вначале с помощью дифференциального уравнения Шварца — Кристоффеля устанавливается связь между границей в плоскости z , образуемой периметром паза конечной глубины, противоположащей плоской поверхности (рис. 9-9,б), и вещественной осью плоскости t (рис. 9-9,а). Далее, полученный интеграл при-

водится к форме Якоби, причем выясняется, что он относится к интегралам третьего рода. Затем методом вычетов находится масштабный коэффициент и определяются через размеры паза остальные постоянные в плоскости t . Наконец, находится решение для поля в плоскости t , которое соответствует существующей в плоскости z разности магнитных потенциалов между плоской и зубчатой границами (эта разность потенциалов отражает результирующее влияние токов, протекающих в других пазах машины).

Преобразование. Совместив начало координат плоскости z с серединой дна паза, установим соответствие между началами координат в двух плоскостях при условии, что оба поля симметричны относительно мнимых осей. Далее обозначим в плоскости z через l , m , p и h точки, соответствующие точкам $t = -a$, $t = +a$, $t = -1$ и $t = +1$. Точки $t = -b$ и $t = +b$ соответствуют в плоскости z точкам, бесконечно удаленным вдоль воздушного зазора по ту и другую стороны паза, а точки $t = \pm \infty$ отображаются на плоскости z в точку n . Обозначим длину воздушного зазора через g , ширину паза через s , а его глубину через d .

Применив уравнение Шварца — Кристоффеля для установления связи между двумя плоскостями, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{S \sqrt{(t^2 - a^2)}}{\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - b^2)}} = \\ &= -\frac{aS}{b^2} \sqrt{\frac{1 - t^2/a^2}{1 - t^2}} \cdot \frac{1}{(1 - t^2/b^2)}. \end{aligned} \quad (9-98)$$

После введения обозначений $k = 1/a$ и $k_1 = 1/b$ это выражение приводится к стандартной эллиптической форме:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S'}{(1 - k_1^2 t^2)} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}. \quad (9-99)$$

Его можно представить в форме Якоби, положив

$$t = \operatorname{sn} u \quad (9-100)$$

с модулем k , откуда

$$dt = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \, du. \quad (9-101)$$

Подставив уравнения (9-100) и (9-101) в (9-99) и заменив $dn u$ на $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$, найдем:

$$\begin{aligned} z &= S' \int_0^u \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}{1 - k_1^2 \operatorname{sn}^2 u} du = \\ &= S' \int_0^u \left[1 + \frac{(k_1^2 - k^2) \operatorname{sn}^2 u}{1 - k_1^2 \operatorname{sn}^2 u} \right] du = \\ &= S' \left[u + (k_1^2 - k^2) \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u}{1 - k_1^2 \operatorname{sn}^2 u} du \right]. \end{aligned} \quad (9-102)$$

Далее, $b > a$, в связи с чем $k > k_1$ и можно положить $\operatorname{sn} \alpha = k_1/k$, откуда

$$k_1^2 - k^2 = -k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha.$$

Подстановка значения k_1 из этого уравнения в (9-102) дает:

$$\begin{aligned} z &= S' \left[u - k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 u} \right] = \\ &= S' \left[u - \frac{\operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha} k^2 \operatorname{cn} \alpha \operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 u} \right], \end{aligned}$$

а использование уравнения (9-28) приводит к выражению

$$z = S' \left[u - \frac{\operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha} \Pi_J(u, \alpha) \right] \quad (9-103)$$

с модулем k , где Π_J — эллиптический интеграл третьего рода в форме Якоби.

Значение масштабного коэффициента S' находится, как обычно, с помощью метода вычетов. Отсюда, рассматривая вершины многоугольника на плоскости z , расположенные в точках, соответствующих точкам $t = \pm 1/k_1$, и применив уравнение (8-26), где $D = jg$, получим:

$$S' = -\frac{2k_1 g}{\pi} \sqrt{\frac{1 - 1/k_1^2}{1 - k^2/k_1^2}} = -\frac{2g}{\pi} \sqrt{\frac{k_1^2 - 1}{1 - k^2/k_1^2}}.$$

Подстановка значения k_1 и использование определений $\operatorname{sn} \alpha$ и $\operatorname{dn} \alpha$ даст:

$$S' = -\frac{2g}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha}. \quad (9-104)$$

Введение найденного значения S' в (9-103) приводит к выражению

$$z = -\frac{2g}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} u + \frac{2g}{\pi} \Pi_J(u, \alpha) \quad (9-105)$$

с модулем k .

Теперь остается выразить α и k через размеры паза и воздушный зазор. Поскольку $t = \operatorname{sn} u$, при $t = 1/k$ согласно уравнению (9-6) $u = K + jK'$. Таким образом, изменению t от 0 до $1/k$ соответствует изменение u от 0 до $K + jK'$ и z от 0 до $s/2 + jd$. В результате введения соответственных значений u и z в (9-105) получим:

$$\begin{aligned} \frac{s}{2} + jd = & -\frac{2g}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} (K + jK') + \\ & + \frac{2g}{\pi} \Pi_J(K + jK', \alpha). \end{aligned} \quad (9-106)$$

Однако подстановка $u = K + jK'$ в (9-35) дает:

$$\Pi_J(K + jK', \alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{\theta(K + jK' - \alpha)}{\theta(K + jK' + \alpha)} + (K + jK') Z(\alpha), \quad (9-107)$$

и нахождение α сводится к определению входящих в это уравнение тэта-функций.

При решении используются три соотношения¹, вывод которых здесь не приводится:

$$\begin{aligned} Z(K + jK' - \alpha) = & Z(K - \alpha) + \frac{\operatorname{cn}(K - \alpha)}{\operatorname{sn}(K - \alpha)} \times \\ & \times \operatorname{dn}(K - \alpha) - \frac{j\pi}{2K}; \end{aligned} \quad (9-108)$$

$$\int_0^u Z(u) du = \ln \theta(u); \quad (9-109)$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} du = \ln \operatorname{sn} u. \quad (9-110)$$

¹ Вывод этих и других стандартных соотношений в общем случае сложен, и лучше предоставить это специалистам. Развернутую таблицу соотношений можно найти в [Л. 52 и 55].

Далее, если проинтегрировать уравнение (9-108), подставить $u = K + jK' - \alpha$ в уравнение (9-109) и $u = K - \alpha$ в (9-110), то из полученных выражений можно найти:

$$\ln \theta(K + jK' - \alpha) = \ln \theta(K - \alpha) + \ln \operatorname{sn}(K - \alpha) - \frac{j\pi(K - \alpha)}{2K} + \text{const.} \quad (9-111)$$

Аналогичное соотношение для $\theta(K + jK' + \alpha)$ имеет вид:

$$\ln \theta(K + jK' + \alpha) = \ln \theta(K + \alpha) + \ln \operatorname{sn}(K + \alpha) - \frac{j\pi(K + \alpha)}{2K} + \text{const.} \quad (9-112)$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим:

$$\ln \frac{\theta(K + jK' - \alpha)}{\theta(K + jK' + \alpha)} = \ln \frac{\theta(K - \alpha)}{\theta(K + \alpha)} + \ln \frac{\operatorname{sn}(K - \alpha)}{\operatorname{sn}(K + \alpha)} + \frac{j\pi\alpha}{K}. \quad (9-113)$$

Однако можно показать (см. [Л. 52]), что первый и второй члены в правой части этого уравнения равны нулю, поэтому подстановка (9-113) в (9-107) дает:

$$\Pi_j(K + jK', \alpha) = \frac{j\pi\alpha}{2K} + (K + jK') Z(\alpha).$$

Объединив это выражение с (9-106), найдем:

$$\frac{s}{2} + jd = -\frac{2g}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} (K + jK') + \frac{2g}{\pi} \left[\frac{j\pi\alpha}{2K} + (K + jK') Z(\alpha) \right]$$

и, разделив вещественные и мнимые части, получим:

$$\frac{s}{2} = -\frac{2g}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} K + \frac{2g}{\pi} K Z(\alpha)$$

и

$$d = -\frac{2g}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} K' + \frac{2g}{\pi} \frac{\pi\alpha}{2K} + \frac{2g}{\pi} K' Z(\alpha).$$

Таким образом,

$$\frac{s}{g} = \frac{4}{\pi} K \left[Z(\alpha) - \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} \right] \quad (9-114)$$

и

$$\frac{d}{g} = \frac{2}{\pi} K' \left[Z(\alpha) - \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} \right] + \frac{\alpha}{K}. \quad (9-115)$$

Уравнения (9-114) и (9-115) устанавливают связь между отношениями размеров s/g и d/g и параметрами α и k . Если значения параметров выбраны, то с помощью таблиц можно найти значения эллиптических функций и, подставив их в уравнения (9-114) и (9-115), определить s/g и d/g . Однако, практически требуется найти α и k при заданных отношениях размеров паза. Для того чтобы это сделать, необходимо определить размеры паза для ряда значений параметров, а затем построить графики для нахождения значений параметров, исходя из требуемых размеров паза.

Определение поля. Для создания разности потенциалов между плоской и зубчатой поверхностями в плоскости z на плоскости t участок вещественной оси между точками $t=1/k_1$ и $t=-1/k_1$ должен иметь один потенциал, а ее остальная часть — другой. Это поле аналогично полю двух одинаковых по величине, но противоположно направленных токов, один из которых расположен в точке $t=1/k_1$, а другой в точке $t=-1/k_1$. Если разность потенциалов между границами равна ψ_d , то решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\psi_d}{\pi} \ln \left(t - \frac{1}{k_1} \right) - \frac{\psi_d}{\pi} \ln \left(t + \frac{1}{k_1} \right) = \\ &= \frac{\psi_d}{\pi} \ln \left(\frac{k_1 t - 1}{k_1 t + 1} \right). \end{aligned} \quad (9-116)$$

В соответствии с этим выражением на участке вещественной оси между точками $t=-1/k_1$ и $t=+1/k_1$ имеем $\psi = \psi_d$, а для остальной части вещественной оси $\psi = 0$.

С использованием приведенного выше решения можно получить ответ на интересный вопрос, допустимо ли анализировать поле в воздушном зазоре машины, исходя из допущения о бесконечно большой глубине пазов. Мерой влияния ограниченной глубины пазов служит величина потока, входящего в дно паза, которая определяется изменением ω между точками, соответствующими точкам $t=-1$ и $t=+1$, и равна:

$$\frac{2\psi_d}{\pi} \ln \left| \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \right|.$$

Можно показать, что эта величина пренебрежимо мала (менее 1%), когда отношение глубины паза к его ширине больше единицы. Большой интерес представляет также распределение магнитной индукции вдоль плоской

поверхности, требуемое для определения поверхностных потерь в полюсных наконечниках. Индукцию находят обычным путем, исходя из определения $|dw/dz|$ в виде произведения $|dw/dt| |dt/dz|$. Таким образом, продифференцировав уравнение (9-116), получим:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2\psi_d}{\pi k_1 (t^2 - 1/k_1^2)}$$

и в результате объединения этого выражения с уравнениями (9-99) и (9-104) найдем:

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{\psi_d k_1 \operatorname{cn} \alpha}{g \operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha} \sqrt{\frac{1-t^2}{1-k^2 t^2}} \right|, \quad (9-117)$$

где $\operatorname{sn} \alpha = k_1/k$.

Подстановка $t = \pm \infty$ приводит к значению индукции посредине плоской поверхности, равному:

$$\mu_0 \frac{\psi_d}{g} \cdot \frac{\operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha}.$$

Это минимальное значение индукции, в связи с чем амплитуду ее изменения вдоль плоской поверхности можно определить следующим образом:

$$\mu_0 \frac{\psi_d}{g} \left(1 - \frac{\operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha} \right). \quad (9-118)$$

9-5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Любой интеграл вида

$$\int \frac{R_1(t) dt}{R_2(t) \sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}}$$

или

$$\int \frac{R_1(t) dt}{R_2(t) \sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}},$$

где $R_1(t)$ и $R_2(t)$ — рациональные функции t , является эллиптическим. Его можно выразить через три основных эллиптических интеграла, хотя требуемая математическая обработка и последующие численные расчеты могут быть чрезвычайно сложными и трудоемкими. Первый из приведенных выше типов интегралов встречается при преобразовании границы, имеющей три прямых угла, а второй — границы с четырьмя прямыми углами. Интеграл, содержащий более четырех множителей под

корнем в знаменателе (появляющихся, когда граница имеет более четырех прямых углов), называется гиперэллиптическим и не может быть выражен через основные эллиптические интегралы (см. [Л. 17 и 55]).

При попытке оценить трудности, связанные с анализом конкретной задачи, в общем случае нельзя воспользоваться каким-либо простым способом. Однако можно в общих чертах охарактеризовать три описанных выше метода обработки эллиптических интегралов: представление с помощью эллиптических функций Якоби, приведение к трем интегралам Лежандра и разложение подынтегрального выражения в ряд. Первый из них наиболее подходит для аналитического решения; ценность второго ограничена как при анализе, так и при расчетах, а третий мало пригоден для анализа, но в некоторых случаях полезен для численных расчетов. Пример преобразования прямоугольной границы, описанный в § 9-3, подходит для демонстрации всех трех методов, однако такие примеры встречаются редко.

Рекомендации, касающиеся численной реализации аналитического решения, гораздо более определены. Если расчеты производятся вручную, то единственным в общем случае приемлемым методом является использование таблиц; при этом главная трудность, с которой приходится сталкиваться, заключается в том, что значения функций в некотором диапазоне приводятся через большие интервалы, в связи с чем интерполяция крайне затруднительна. Метод, отличающийся от описанного выше, основан на применении вычислительных машин для определения требуемого значения функции из разложения в ряд (см. приложение II). Этому способу следует отдать предпочтение по сравнению с введением таблиц в память машины.

В гл. 10 описан действенный численный метод, который может быть использован для всех типов задач (включая, конечно, задачи с эллиптическими и гиперэллиптическими интегралами). Этот метод может быть с успехом использован в тех случаях, когда аналитическое решение невозможно или связано с большими трудностями.

Существует другая форма *представления* эллиптических функций в отличие от формы Якоби, предложенная Вейерштрассом (см. [Л. 50]). Она была использована рядом авторов [Л. 6, 19 и 25].

ЛИТЕРАТУРА

9-1. Carter F. W., The magnetic field of the dynamo-electric machine, J. Instn Electr. Engrs, № 359, 1115—1139, 1926.

9-2. Symposium on microwave strip circuits, Inst. Radio Engrs Trans., MTT-3, 1955.

9-3. Cohn S. B., Shielded coupled strip transmission line, Inst. Radio Engrs Trans., MTT-3, 29—38, 1955.

9-4. Park D., Planar transmission lines, Inst. Radio Engrs Trans., MTT-3, pt I, 8—12, April 1955 and pt II, 7—11, 1955.

9-5. Hayt W. H., Jr., Potential solution of a homogeneous strip line of finite width, Inst. Radio Engrs Trans., MTT-3, 16—18, 1955.

9-6. Bickley W. G., Two-dimensional potential problems for the space outside a rectangle, Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2, 37, pt 2, 82, 1932.

9-7. Coe R. T. and Taylor H. W., Some problems in electrical machine design involving elliptic functions, Phil. Mag., 6, 100, 1928.

Дополнительная литература

9-8. Bergmann S., Math. Z., 19, 8, 1923.

9-9. Greenhill A. G., Solution by means of elliptic functions of some problems in the conduction of electricity and heat in plane figures, Quart. J. Pupe Appl. Math., 17, 289, 1881.

9-10. Herbert C. M., Phys. Rev. II, 17, 157, 1921.

9-11. Ikeda Y., Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., ser. 2, 2, № 2, 1—28, 1938.

9-12. Langton N. H. and Dary N., Two-dimensional field above and below an infinite corrugated sheet, Brit. J. Appl. Phys., 3, 156, 1952.

9-13. Morton N. B., Two-dimensional fields specified by elliptic functions, Phil. Mag., 2, 827, 1926.

9-14. Palmer H. B., Capacitance of a parallel-plate capacitor, Electr. Engrs, Lond., 56, 363, 1937.

9-15. Petersohn H., Electrostatic problems, Z. Physik, 38, 727, 1926.

9-16. Rose M. E., Magnetic field corrections in the cyclotron, Phys. Rev., 53, 715, 1938.

9-17. Terry A. and Keller E. G., Field pole leakage flux in salient-pole dynamo-electric machines, J. Instn. Electr. Engrs, 83, 845, 1938.

Глава десятая

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

10-1. ВВЕДЕНИЕ

Каждая из предыдущих глав ч. 3 книги была посвящена детальному рассмотрению простых примеров для ознакомления читателя с основными приемами методов преобразований. В противоположность этому данная глава касается более сложных вопросов и примеры приво-

дятся без больших подробностей. Здесь рассмотрены возможности развития и обобщения основных методов, которые можно разделить на две категории: относящиеся к конфигурации границ и относящиеся к типу источников поля.

Описанные выше конфигурации границ были или полностью криволинейными, или полностью многоугольными с величинами углов, в целое число раз кратными $\pi/2$. Здесь описан подход к анализу границ, которые являются частично криволинейными, а частично многоугольными, а также многоугольных границ с величинами углов, не кратными $\pi/2$. Область рассматриваемых конфигураций границ можно существенно расширить с использованием численного интегрирования функций комплексного переменного. Описано применение этого метода для определения итерационным путем постоянных, входящих в уравнение Шварца — Кристоффеля, а также для последующего расчета поля.

При анализе различных полей особое внимание обращено на поля линейных токов, расположенных вблизи границ, поля во внешней области замкнутых границ и общее решение задачи Дирихле (это задача, в которой задано распределение потенциала во всех точках замкнутой границы). При решении задачи Дирихле используется комплексная потенциальная функция Шварца или интеграл Пуассона.

10-2. ИСТОЧНИКИ ПОЛЯ

Общий анализ полей линейных источников (т. е. токов, зарядов и полюсов) или их комбинаций (например, диполей) в присутствии границ до сих пор никем не производился, и здесь этот тип полей исследован на примере магнитного поля линейных токов. Внимание, уделяемое таким полям, объясняется двумя факторами. Во-первых, результаты анализа находят непосредственное применение при определении полей токов, расположенных вблизи границ сложной конфигурации. Этот метод решения, по-видимому, широко не применяется, хотя в последнее время на него обращалось внимание [Л. 10—1]. Во-вторых, решения для таких полей используются при анализе некоторых полей во внешних областях замкнутых границ.

Вначале рассмотрим линейный ток i , удаленный от всех границ; создаваемое им поле определяется выражением

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \ln(t - \alpha). \quad (10-1)$$

Применяя принцип наложения, можно определить поле совокупности m токов, равных i_n , в виде:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^m i_n \ln(t - \alpha_n). \quad (10-2)$$

При анализе уравнений (10-1) и (10-2) возникает вопрос о существовании токов в бесконечности, который лучше всего пояснить на примере гидродинамического аналога описанного выше поля. Уравнение ламинарного течения жидкости между совокупностью источников и стоков представляет собой сумму логарифмических членов, аналогичную уравнению (10-2), причем нетрудно показать, что алгебраическая сумма расходов источников, расположенных в конечных точках, равна по величине расходу стока, находящегося в бесконечности. Соответствующая зависимость справедлива и для токов, которые должны иметь обратный путь в бесконечности. Этот обратный путь не оказывает влияния на поле и описывающее его уравнение, поскольку он находится в бесконечности, однако при преобразовании он может оказаться в конечной точке и тогда должен быть учтен. Эта особенность описана в § 8-3-2 при определении поля заряженной пластины; заряд, находящийся на плоскости z в бесконечности, при преобразовании попадает в точку $t = +j$ на плоскости t .

В общем случае решения легко найти для полей токов (или зарядов), расположенных вблизи границ, которые являются непроницаемыми, обладают бесконечно большой проницаемостью или представляют собой комбинацию двух упомянутых типов. При этом удобно воспользоваться преобразованием от бесконечной прямой и единственным ограничением является необходимость отыскания соответствующего уравнения преобразования. Далее рассмотрены решения для полей в областях описанными выше типами границ, а в последнем параграфе главы сделан вывод о необходимости проведения различия между бесконечными и конечными границами.

10-2-1. Бесконечные границы

Определение полей для каждого из упомянутых выше типов бесконечной прямолинейной границы производится по очереди.

Линейный ток, расположенный вблизи плоскости с бесконечно большой магнитной проницаемостью. Как было показано в § 3-2-1, поле единичного линейного тока, расположенного на рас-

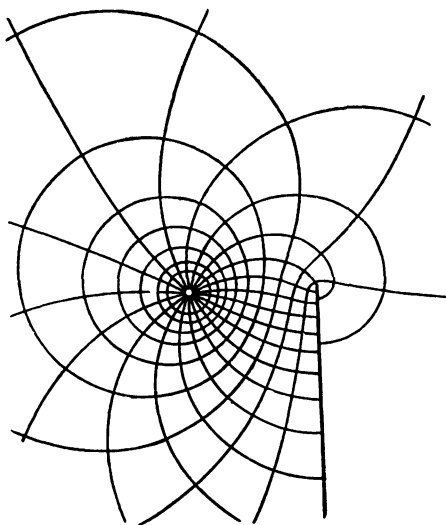


Рис. 10-1.

стоянии a от бесконечной плоскости с бесконечно большой магнитной проницаемостью, может быть определено следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln(t^2 + a^2). \quad (10-3)$$

Линейный ток, расположенный вблизи магнитно непроницаемой плоскости. Если плоскость является непроницаемой для потока, то уравнение поля принимает вид (см. § 3-2-1):

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{t - ja}{t + ja}. \quad (10-4)$$

Так, например, поле тока, расположенного вблизи магнитно непроницаемой пластины, находится путем

объединения (10-4) и (8-64), а картина этого поля изображена на рис. 10-1.

Линейный ток, расположенный вблизи границы, часть которой магнитно проницаема, а часть непроницаема. Поле тока, расположенного вблизи границы, состоящей из двух частей, одна из которых магнитно проницаема, а другая непроницаема (рис. 10-2), может быть определено на основе анализа поля четырех токов — двух положительных и

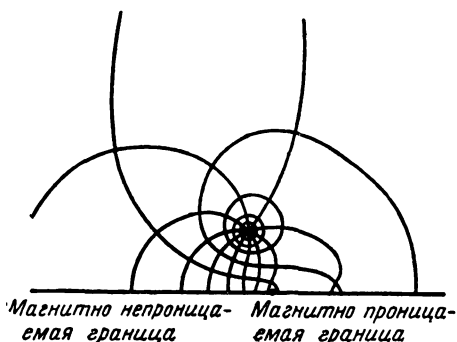


Рис. 10-2.

двух отрицательных. На рис. 10-3 показано расположение этих токов в плоскости p , а создаваемое ими поле определяется выражением

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(p-a)^2 + b^2}{(p+a)^2 + b^2}. \quad (10-5)$$

Нетрудно заметить, что поле имеет две линии симметрии, одна из которых является линией потока, а другая — эквипотенциалью, и любой квадрант плоскости p можно преобразовать в верхнюю половину плоскости t с помощью соотношения

$$p = 2\sqrt{t}. \quad (10-6)$$

Таким образом, поле в плоскости t может быть описано зависимостью

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(2\sqrt{t} - a)^2 + b^2}{(2\sqrt{t} + a)^2 + b^2}. \quad (10-7)$$

Поле тока, расположенного вблизи магнитно проницаемого угла. В качестве примера применения выведенных уравнений поля определим поле линейного тока, расположенного вблизи угла, образуемого поверхностями с бесконечно большой магнитной проницаемостью (рис. 10-4). Допустим, что плоскости t и z определены согласно рис. 10-5; ток находится в точке $a+j$ плоскости t и в точке $c-jb$ плоскости z . Далее, предположим, что вершина угла расположена в начале координат плоскости z , соответствующем началу координат в плоскости t . Исходя из уравнения (10-3), при сдвиге начала координат на отрезок $+a$ нетрудно заметить, что требуемое поле в плоскости t определяется выражением

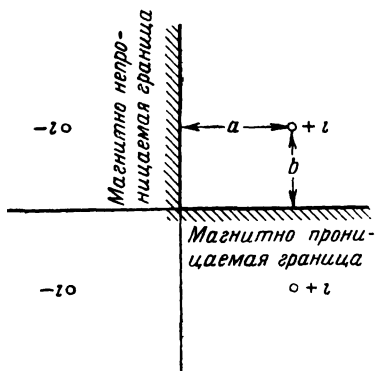


Рис. 10-3.

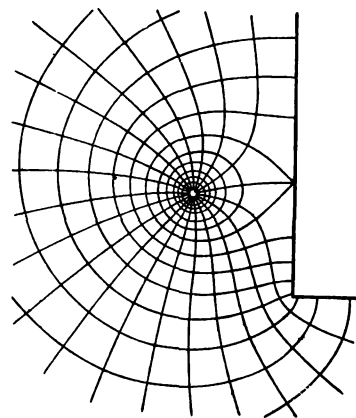


Рис. 10-4.

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln [(t-a)^2 + 1]. \quad (10-8)$$

Уравнение Шварца — Кристоффеля, связывающее две плоскости, имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = S \sqrt{t}, \quad (10-9)$$

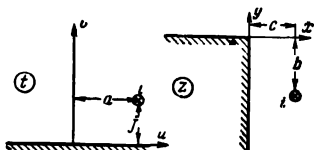


Рис. 10-5.

откуда, выполнив интегрирование, получим:

$$z = \frac{2}{3} S t^{3/2}. \quad (10-10)$$

Постоянная интегрирования равна нулю, поскольку начала координат в двух плоскостях соответствуют одно другому, а постоянные S и a определяются через c и b путем подстановки в (10-10) координат соответственных точек. Далее, исключение из (10-8) и (10-10) t приведет к искомому решению для поля.

10-2-2. Конечные границы

Из трех типов границ, упомянутых во введении к § 10-2, границы частично непроницаемые, а частично обладающие бесконечно большой проницаемостью в случае конечных границ не представляют большого интереса. Поэтому они здесь не рассматриваются, хотя при необходимости решения для поля нетрудно получить [Л. 10-1]. Между тем, часто требуется определить влияние замкнутых границ на приложенное равномерное поле, и ниже приводится анализ таких случаев с помощью диполей. Как отмечалось выше, при преобразовании бесконечной полуплоскости во внешнюю область конечного многоугольника точка, находящаяся в бесконечности на одной плоскости, становится конечной точкой в другой плоскости, поэтому источник поля, расположенный в бесконечности, при преобразовании перемещается в конечную точку.

Линейный ток, расположенный вблизи магнитно проницаемой границы. Для определения поля линейного тока, находящего во внешней области замкнутой многоугольной границы с бесконечно большой магнитной проницаемостью в плоскости z , требуемым полем в плоскости t является поле, создаваемое преобразованным линейным током, обратным током, расположенным в точке $t = +j$, а также отображениями обоих токов в границе, которая представляет собой эквипотенциаль. Если преобразованный ток в плоскости t находится в точке $t = t_i$, то его отображение с тем же знаком расположено в точке $t = \hat{t}_i$, где \hat{t}_i — комплекс, сопряженный с t_i . Кроме того, обратный ток, находящийся в точке $t = +j$, имеет отображение того же знака в точке $t = -j$. Следовательно, уравнение поля будет иметь вид:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(t - t_i)(t - \hat{t}_i)}{(t + j)(t - j)} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(t - t_i)(t - \hat{t}_i)}{t^2 + 1}. \quad (10-11)$$

Линейный ток, расположенный вблизи магнитно непроницаемой границы. Если многоугольник непроницаем для потока, то границы в обеих плоскостях представляют собой линии потока и два отображенных в бесконечной прямолинейной границе тока изменяют свой знак по сравнению с предыдущим случаем. При этом уравнение, описывающее поле в плоскости t , может быть представлено следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(t - t_i)(t + j)}{(t - \hat{t}_i)(t - j)}. \quad (10-12)$$

Заряженные границы. Поле заряженной пластины было определено выше (см. § 8-3-2). Выражение для поля в плоскости t , используемое при определении поля конечных заряженных границ, имеет вид (при единичном заряде пластины):

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{t - j}{t + j}. \quad (10-13)$$

Равномерное приложенное поле; использование диполя. Для нахождения поля в случае многоугольной границы, помещенной в равномерное приложенное поле, с использованием преобразования от бесконечной прямолинейной границы необходимо ввести диполи (см. § 3-3-2), поскольку равномерное приложенное поле в плоскости z создается диполем, находящимся в бесконечности. Этот диполь при преобразовании попадает в точку $t = +j$ на плоскости t , где он имеет также отображение в точке $t = -j$. Следовательно, если граница является эквипотенциалью, то поле в плоскости t определяется выражением

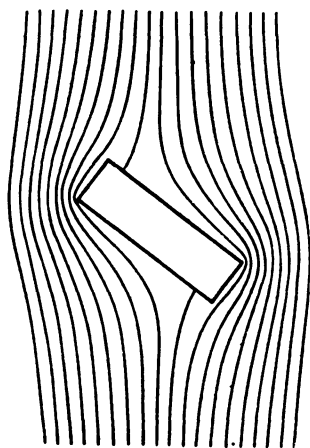


Рис 10-6.

Следовательно, если граница является эквипотенциалью, то поле в плоскости t определяется выражением

$$\omega = \frac{1}{t + j} + \frac{1}{t - j} = \frac{2t}{t^2 + 1}. \quad (10-14)$$

На рис. 10-6 показана картина линий электрического потока для случая прямоугольного проводника, расположенного в приложенном равномерном электрическом поле. Если границей является линия потока, то поле может быть определено следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{t+j} - \frac{1}{t-j} = \frac{-j2}{t^2+1}. \quad (10-15)$$

10-2-3. Распределенные источники

Источник, распределенный по площади или вдоль линии, можно представить конечным числом линейных источников и, таким образом, получить хорошую аппроксимацию для некоторых практических задач. Однако в связи с трудностью размещения точек, удаленных от границ (см. § 10-5), этот метод наиболее полезен в тех случаях, когда токи распределены вдоль границы. Так, например, границы, не являющиеся эквипотенциалами, могут быть представлены в виде ряда небольших эквипотенциальных участков, разности потенциалов между которыми создаются линейными токами, помещенными в точку раздела. Этот метод может найти применение для определения поля явно выраженного полюса с обмоткой, распределенной по его высоте.

10-3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ГРАНИЦЫ

Несколько простых уравнений преобразования, которые могут быть использованы для получения криволинейных границ, было приведено в гл. 7. Здесь рассмо-

трено более сложное преобразование, хотя с самого начала следует подчеркнуть, что общего метода нахождения аналитических решений для криволинейных границ не существует. Два основных метода, получивших распространение, исходят из модификаций уравнения Шварца — Кристофф-

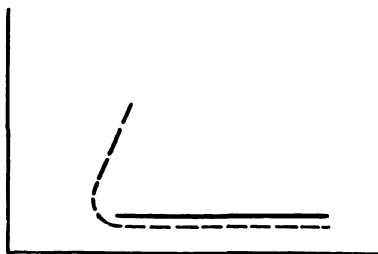


Рис. 10-7.

феля: один из них используется для скругления вершин многоугольника, а другой — для искривления некоторых или всех его сторон.

Однако прежде чем перейти к обсуждению этих методов, полезно вспомнить прием, описанный при рассмотрении поля электрода Роговского (см. § 8-2-3). Для представления действительной границы сложной конфигурации используется эквипотенциаль (или линия потока) поля с простой конфигурацией границ. Этим способом в [Л. 10-2] исследовано поле вблизи края полюсного наконечника явно выраженного полюса. Была введена простая граница, изображенная на рис. 10-7, и получено очертание полюсного наконечника с помощью эквипотенциали, показанной пунктиром. Аналогичным образом в той же работе исследовано поле полузакрытого паза. Стандартного метода решения таких задач нет; выбор упрощенной границы, а затем требуемой линии поля осуществляется на основании интуитивных соображений путем ряда повторных попыток.

Вообще говоря, криволинейные границы представляют ограниченный интерес при анализе электрических и магнитных полей; исключением является исследование пробоя изоляции при высоких напряжениях.

10-3-1. Скругленные углы

Путем изменения некоторых сомножителей в уравнении Шварца — Кристоффеля можно получить уравнение преобразования, которое приводит не к острым, а к скругленным углам при вершинах. Конфигурацию кривой (или кривых) нельзя выбрать в точном соответствии с некоторой заданной кривой (или кривыми), однако методом повторных попыток обычно удается получить хорошее приближение к ней. Метод сводится к скруглению одного или нескольких углов путем замены членов $(t-a)^{(\alpha/\pi)-1}$ (приводящих к острым углам) членами вида:

$$[(t-a')^{(\alpha/\pi)-1} + \lambda(t-a'')^{(\alpha/\pi)-1}].$$

Точки a' и a'' в плоскости t соответствуют крайним точкам кривой, а λ представляет собой коэффициент, определяющий ее конфигурацию; при $t < a'$ или $t > a''$ значение dz/dt постоянно, но при $a' < t < a''$ изменение t сопровождается непрерывным изменением dz/dt . Резуль-

тирующее изменение направления на скругленном участке такое же, как и для эквивалентного нормального коэффициента вершины. Исследование нового члена показывает, что при $\alpha \geq \pi$ он не вносит полюсов, нулей или внезапных скачков функции dz/dt и, таким образом, не создает каких-либо добавочных вершин или разрывов в границе. В случаях, когда $\alpha < \pi$, во избежание появления полюсов следует прибегать к преобразованию отрицательной мнимой полуплоскости, для которой соответствующий угол при вершине равен $2\pi - \alpha$.

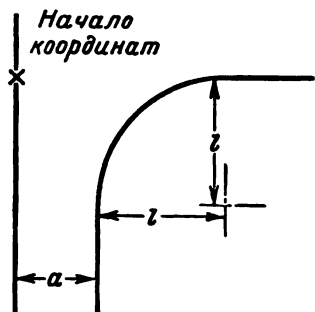


Рис. 10-8.

В качестве примера применения описанного метода рассмотрим поле между бесконечной заряженной плоскостью и проводящим массивом со скругленным углом, которое было взято за основу в [Л. 10-3] при анализе рабочего процесса записывающих магнитных головок.

Допустим, что эта конфигурация границ расположена в плоскости z и имеет размеры, приведенные на рис. 10-8, согласно которому угол скруглен между точками $z = a + l$ и $z = a - jl$. В эту границу должна быть преобразована вещественная ось плоскости t , а точное очертание скругленного угла определяется значением постоянной λ . В данном случае она выбирается из условия получения наименьшей максимальной напряженности поля на криволинейной границе. При таком очертании угла пробой между двумя поверхностями возникает при наиболее высоком напряжении.

Предположим, что соответственными точками в двух плоскостях являются:

$$\begin{aligned} z = 0; & & t = -1; \\ z = -j\infty; & & t = 0; \\ z = a - jl; & & t = b; \\ z = a + l; & & t = c. \end{aligned}$$

Если бы угол был острым, а не скругленным, то уравнение Шварца — Кристоффеля имело бы вид:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S}{t} (t - a)^{1/2}. \quad (10-16)$$

Для скругления угла необходимо изменить член $(t-\alpha)^{1/2}$, что приводит к уравнению

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S}{t} (\sqrt{t-b} + \lambda \sqrt{t-c}), \quad (10-17)$$

в результате интегрирования которого найдем:

$$z = 2S \left\{ \sqrt{t-b} - \sqrt{b} \operatorname{arctg} \left(\frac{t-b}{b} \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \lambda \left[\sqrt{t-c} - \sqrt{c} \operatorname{arctg} \left(\frac{t-c}{c} \right)^{1/2} \right] \right\} + c_2. \quad (10-18)$$

Подстановка в это выражение координат соответственных точек в двух плоскостях и применение метода вычетов дают все необходимые соотношения между постоянными, за исключением одного, которое должно быть определено, исходя из градиента поля.

Для создания единичной разности потенциалов между двумя участками границы в плоскости z требуется поле в плоскости t , описываемое соотношением

$$\omega = \frac{1}{\pi} \ln t. \quad (10-19)$$

Распределение электрического смещения в плоскости z определяется зависимостью $\left| \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \right|$, а λ выбирают так

образом, чтобы получить наименьшее значение максимального электрического смещения на криволинейной границе. Максимум находится в результате дифференцирования функции $d\omega/dz$ по λ и приравнявая производной нулю.

Преобразование конфигураций границ со скругленными углами было использовано в [Л. 10-4] для исследования пробоя диэлектриков.

10-3-2. Криволинейные многоугольники

Бесконечную прямую можно преобразовать в многоугольник с криволинейными сторонами, включив в уравнение Шварца — Кристоффеля «коэффициент криволинейности» $S(t)$, что приводит к уравнению вида:

$$\frac{dz}{dt} = SC(t) \Pi(t - t_n)^{(\alpha/\pi)-1}. \quad (10-20)$$

Углы при вершинах не зависят от коэффициента $C(t)$, выбираемого методом повторных попыток до получения удовлетворительного приближения к требуемой конфигурации криволинейных участков. Выражение для коэффициента криволинейности должно быть выбрано при условии, чтобы он не вносил в уравнение сингулярностей или нулей, поскольку они приводят к дополнительным вершинам или разрывам. Привести какой-либо стандартный способ нахождения требуемого коэффициента криволинейности не представляется возможным, однако несколько вариантов этого коэффициента описано в [Л. 10-5 и 10-6].

Простая граница такого типа рассмотрена в § 7-2-1, где описана полукруглая выпуклость на прямой. Там было показано, что уравнение

$$z = t + \sqrt{t^2 - 1} \quad (10-21)$$

преобразует вещественную ось плоскости t в границу требуемой конфигурации, участок которой, соответствующий $|t| \leq 1$, является частью окружности, а участок, соответствующий $|t| \geq 1$, прямолинейный. Коэффициент криволинейности в данном случае особенный, поскольку он вносит криволинейность только в одну сторону многоугольника. Выражение для него можно получить, продифференцировав уравнение (10-21) и представив найденную зависимость в виде:

$$\frac{dz}{dt} = (t + \sqrt{t^2 - 1})(t + 1)^{-1/2}(t - 1)^{-1/2}. \quad (10-22)$$

Первый член этого уравнения является коэффициентом криволинейности $C(t)$, а два остальных члена дают определяющие углы при вершинах, равные $\pi/2$ в точках $t = +1$ и $t = -1$. Более общее выражение для коэффициента криволинейности

$$C(t) = t + \lambda \sqrt{t^2 - 1} \quad (10-23)$$

приводит к полуэллиптической выпуклости [ср. с уравнением (7-34)].

В заключение следует отметить, что поиски требуемого коэффициента, дающего удовлетворительное при-

ближение к некоторому частному криволинейному многоугольнику, часто отнимают много времени и не всегда кончаются успехом.

10-4. УГЛЫ, НЕ КРАТНЫЕ $\pi/2$

Анализ многоугольных границ, изложенный в предшествующих главах, ограничен случаями, когда все углы кратны $\pi/2$ (включая нулевую кратность). Несмотря на то, что они охватывают подавляющее большинство встречающихся в практике конфигураций границ, существует ряд интересных и полезных случаев, когда границы имеют другие углы при вершинах. Они не были рассмотрены прежде, ввиду того что, за исключением тривиального случая многоугольников, имеющих только одну вершину, уравнение преобразования не может быть выражено с помощью элементарных функций.

Все многоугольники, определяемые двумя вершинами, приводят к интегралам Эйлера (см. [Л. 14]), а некоторые из них могут быть преобразованы в эллиптические. Если многоугольник определяется числом вершин, большим 2, то аналитические методы оказываются бессильными, однако в таких случаях можно использовать численное интегрирование (см. § 10-5).

10-4-1. Задачи с двумя вершинами

Рассмотрим произвольный многоугольник, определяемый двумя углами при вершинах α и β и длиной соединяющей их стороны l . По причинам, которые будут очевидны позднее, совместим эту сторону с вещественной осью плоскости z . Далее, многоугольник, который может быть замкнут в бесконечности или конечной точке, можно получить путем преобразования вещественной оси плоскости t с использованием уравнения Шварца — Кристоффеля

$$\frac{dz}{dt} = S t^{(\alpha/\pi)-1} (t-1)^{(\beta/\pi)-1}, \quad (10-24)$$

где точки $t=0$ и $t=1$ соответствуют вершинам в плоскости z . В интегральном виде оно записывается следующим образом:

$$z = S \int_0^1 t^{(\alpha/\pi)-1} (t-1)^{(\beta/\pi)-1} dt. \quad (10-25)$$

Постоянная интегрирования равна нулю, если начала координат в двух плоскостях выбраны соответствующими одно другому. Это интеграл Эйлера первого рода, и если он определен, то при изменении t в вещественных пределах его можно выразить с помощью гамма-функции, которая имеет вид:

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(u-1)} dt. \quad (10-26)$$

Определение гамма-функции читатель может найти в [Л. 14, 29 и 45]. При нахождении масштабного коэффициента S следует иметь в виду, что определенный интеграл вычисляется наиболее просто в пределах от 0 до 1; этим и объясняется сделанный выбор точек в плоскости t , соответствующих вершинам. Следовательно,

$$l = S \int_0^1 t^{(\alpha/\pi)-1} (t-1)^{(\beta/\pi)-1} dt. \quad (10-27)$$

В результате решения этого стандартного определенного интеграла (которое представляет собой бэта-функцию), (см. [Л. 14, 29 и 45]) получим:

$$S = \frac{l}{(-1)^{(\beta/\pi)-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{\pi}\right)}, \quad (10-28)$$

в связи с чем масштабный коэффициент преобразования нетрудно выразить через конечный размер многоугольника. Однако для определения поля в плоскости z в удалении от границы необходимо использовать метод численного интегрирования комплексной переменной.

Можно показать, что для частных значений углов при вершинах интеграл Эйлера, определяемый уравнением (10-25), превращается в эллиптический. Все известные случаи имеют место, когда оба угла кратны $\pi/3$, $\pi/4$ или $\pi/6$, и многие из них описаны в [Л. 10-7]. Если все углы находятся в конечной области, то граница, конечно, представляет собой треугольник и четыре случая,

которые приводят к эллиптическим интегралам, характеризуются следующими углами:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \text{ и } \frac{\pi}{4};$$

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \text{ и } \frac{\pi}{3};$$

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \text{ и } \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \text{ и } \frac{2\pi}{3}.$$

Анализ задач с двумя вершинами нашел важное применение при исследовании пробоя жидкостей в электрическом поле между двумя острыми углами, а также между острым углом и плоскостью (см. [Л. 9, 42 и 10-8]).

10-5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Как уже отмечалось выше, аналитические методы часто становятся несостоятельными для многоугольных границ, имеющих много вершин, особенно в тех случаях, когда углы при них не являются кратными $\pi/2$. Для таких границ может быть использован численный метод, позволяющий значительно расширить область задач, поддающихся решению. Этот метод не получил освещения в литературе, за исключением [Л. 10-9 и 10-10], где один из авторов описал его применение для решения двух задач, одна из которых рассмотрена в § 10-5-2.

Численный метод находит два приложения: для численного интегрирования комплексной переменной и для итерационного решения неявных уравнений. При решении задач то и другое приложения используются одновременно.

10-5-1. Численное интегрирование

Численное интегрирование функций комплексного переменного используется преимущественно для определения полей с многоугольными границами как при определении постоянных, входящих в уравнение Шварца — Кристоффеля, так и при последующем расчете поля. Однако оно применяется и в других случаях, например при решении задачи Дирихле для внутренней области единичной окружности, как показано в § 10-6. Вообще

говоря, численное интегрирование связано с выполнением большого количества расчетов и требует применения вычислительных машин.

Для того чтобы составить представление о численном интегрировании функции комплексного переменного, рассмотрим вначале уравнение

$$z = \int f(t) dt. \quad (10-29)$$

При изменении t в узких пределах можно аппроксимировать функцию $f(t)$ степенным рядом с конечным числом членов, т. е. положить

$$f(t) = \sum_{n=0}^m a_n t^n. \quad (10-30)$$

При этом допущении интегрирование $f(t)$ может быть выполнено почленно (в узких пределах) и приведет к ряду для z вида:

$$z = \sum_{n=0}^m \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} + \text{const.} \quad (10-31)$$

Изменение z , соответствующее малому изменению t , например от t_a до t_b , можно найти, подставив пределы t_a и t_b в последнее уравнение.

Практически для аппроксимации $f(t)$ достаточно взять только три или четыре члена. При использовании четырех членов $f(t)$ представляет собой кубическое разложение по t и значение интеграла легко найти с помощью кубической формулы Симпсона (см., например, [Л. 15 и 46]) в комплексной форме. Малое изменение t делится на три интервала, равные h , и вычисляется $f(t)$ при $t=t_a$, $t=t_a+h$, $t=t_a+2h$ и $t=t_b$. Далее нетрудно показать, что изменение z , соответствующее изменению t от t_a до t_b , определяется выражением

$$z = \frac{3}{8} h [f(t_a) + 3f(t_a+h) + 3f(t_a+2h) + f(t_b)]. \quad (10-32)$$

Если взять три члена степенного ряда, то может быть использована квадратичная формула Симпсона, которая исходит из деления изменения t на два равных интер-

вала, и тогда изменение z определится следующим образом:

$$z = \frac{h}{3} [f(t_a) + 4f(t_a + h) + f(t_b)]. \quad (10-33)$$

Для нахождения результирующего изменения z весь диапазон изменений t делится на ряд малых участков и для каждого из них применяется одна из приведенных выше формул (при соответствующем выборе числа интервалов, т. е. h). Привести общие рекомендации по выбору величины интервала, который должен быть использован, невозможно, за исключением того, что ряд должен дать хорошее приближение к точному значению $f(t)$. Квадратичная формула требует меньше вычислений для каждого участка от t_a до t_b , в связи с чем упрощается программирование для вычислительной машины. Однако первая формула дает более точный результат при одинаковом числе участков.

Рассмотрим далее уравнение Шварца — Кристоффеля

$$\frac{dz}{dt} = S f(t), \quad (10-34)$$

которое можно проинтегрировать и получить:

$$z = S \int_{t_0}^t f(t) dt, \quad (10-35)$$

где t_0 — точка на плоскости t , соответствующая точке $z=0$.

Таким образом, уравнение (10-35) представляет собой уравнение преобразования в интегральной форме и его можно использовать для определения положения точки z , соответствующей точке t , путем численного интегрирования в пределах от t_0 до t . Прежде чем приступить к решению этой задачи с помощью уравнения (10-35), необходимо (как обычно) определить значения входящих в него постоянных через размеры конфигурации границ в плоскости z . При этом, если есть возможность, используются метод вычетов и условия симметрии. Остальные постоянные находятся путем численного интегрирования с помощью одного из нескольких методов. К ним относятся вариационный метод [Л. 24] и описанный здесь итерационный метод.

Итерации представляют собой повторяющееся применение сходящегося процесса. В данном приложении, задавшись ориентировочными значениями постоянных в плоскости t , рассчитанными с учетом известных простых соотношений для полей, находят соответствующие размеры в плоскости z . Далее производят сравнение их с требуемыми размерами и корректируют значения постоянных в плоскости t , с тем чтобы получить лучшее приближение к заданной конфигурации. Затем весь процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута удовлетворительная аппроксимация. Можно применить два метода определения постоянных, которые сейчас будут рассмотрены.

Согласно первому методу каждая постоянная связывается с определенным размером в плоскости z простой зависимостью, а потом постоянные по очереди изменяют таким образом, чтобы улучшить приближение к заданному размеру.

Если δz_a — требуемое изменение размера в плоскости z , связанного с постоянной t_a в плоскости t , то необходимое изменение постоянной δt_a может быть найдено из выражения

$$\delta t_a = n_{at_a} \delta z_a, \quad (10-36)$$

где n_a — постоянная, значение которой подбирается эмпирически.

Итерационный цикл заключается в следующем. Исходя из первоначального ориентировочного выбора значений всех постоянных в плоскости t , производят сравнение одного из размеров в плоскости z с требуемым значением. Далее, для того чтобы найти необходимое изменение соответствующей постоянной в плоскости t , дающее более близкое приближение, используется уравнение (10-36). После внесения этого изменения выполняется сравнение для следующего размера в плоскости z и находится требуемое изменение связанной с ним постоянной в плоскости t . Этот прием применяется для всех определяющих размеров по очереди, а затем весь цикл повторяется до тех пор, пока требуемые изменения не станут пренебрежимо малыми.

Значения n в общем случае различны для каждой из постоянных t_a в плоскости t , и оптимальное значение находится приближенно путем подбора на основании анализа требуемых изменений постоянных в плоскости t .

Следует различать два случая: если изменения имеют разные знаки, то постоянная n слишком велика; если же требуемые изменения имеют один и тот же знак, то постоянная слишком мала. Этот метод нахождения оптимального значения n хотя и кажется на первый взгляд грубым, дает на практике хорошие результаты.

Второй метод определения постоянных отличается от описанного выше тем, что *все* размеры рассматриваются как линейные функции всех постоянных. Если требуемое изменение постоянной t_m равно δt_m , а изменение размера z_n равно δz_n , то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial z_1}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots &= \delta z_1; \\ \frac{\partial z_2}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial z_2}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots &= \delta z_2; \\ \frac{\partial z_n}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial z_n}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots &= \delta z_n. \end{aligned} \right\} \quad (10-37)$$

Быстрота изменения одного размера при изменении постоянной $\partial z_n / \partial t_m$ находится путем подстановки в уравнение (10-35) двух значений постоянной, очень мало различающихся, и определения результирующего изменения размера. После того как эти производные найдены, требуемые изменения постоянных в плоскости t определяются в результате решения системы совместных линейных уравнений.

Второй метод, очевидно, требует большего числа подстановок при определении постоянных в зависимости $z-t$, чем первый, однако при его использовании отпадает необходимость в предварительном выборе постоянных. По опыту авторов первый метод в общем случае является более быстрым.

Общее руководство по определению постоянных в плоскости t привести невозможно. Однако ни в том, ни в другом методе не возникает серьезных затруднений, если постоянные выбраны в правильном численном порядке.

10-5-2. Центрирующая сила, обусловленная смещением вентиляционных каналов во вращающихся машинах

В качестве примера применения численного интегрирования рассмотрим определение магнитного поля

в электрической машине между вентиляционными каналами статора и ротора одинаковой ширины. Поскольку расстояние между соседними каналами достаточно велико, а влияние торцов машины в этой области несущественно, можно ограничиться рассмотрением двух отдельных каналов. При смещении каналов одного относительно другого потоки, входящие в две стороны канала, будут неодинаковыми и возникнет осевая магнитная сила, имеющая практическое значение.

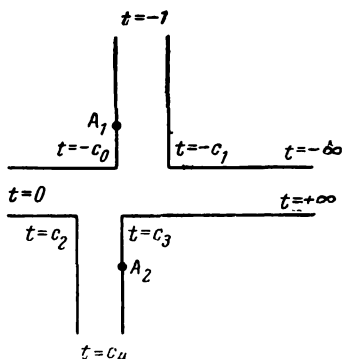


Рис. 10-9.

Смещенные каналы представлены в плоскости z на рис. 10-9, и эта конфигурация границ должна соответствовать вещественной оси в плоскости t . Длина воздушного зазора принята равной единице, а каналы имеют одинаковую ширину s . Очевидно, что граница

в плоскости z обладает скошенной симметрией, т. е. в точках A_1 и A_2 (рис. 10-9), расположенных на одинаковых расстояниях от соответствующих углов, поле одинаково, и это свойство позднее используется. Точки $t = -c_0, -c_1, c_2$ и c_3 соответствуют углам каналов; точки $t = -1$ и c_4 соответствуют точкам пересечения стенок каналов, а точка $t = 0$ — точке, бесконечно удаленной вдоль воздушного зазора.

При единичной разности потенциалов между двумя поверхностями, имеющими каналы, требуемое выражение для поля в плоскости t имеет вид:

$$\omega = \frac{1}{\pi} \ln t, \quad (10-38)$$

а уравнение, связывающее две плоскости, может быть представлено следующим образом:

$$\frac{dz}{dt} = K \frac{\sqrt{(t+c_0)(t+c_1)(t-c_2)(t-c_3)}}{t(t+1)(t-c_4)}. \quad (10-39)$$

Поскольку граница имеет скошенную симметрию, поток, входящий в левую стенку верхнего канала, равен потоку, входящему в правую стенку нижнего канала, и

из рассмотрения потоков, пересекающих соответствующие участки вещественной оси плоскости t , нетрудно заметить, что

$$-\frac{1}{\pi} \ln c_0 = \frac{1}{\pi} \ln \frac{c_3}{c_4}, \quad (10-40)$$

откуда

$$c_0 = \frac{c_4}{c_3}. \quad (10-41)$$

Аналогичным образом из рассмотрения потоков, входящих в две другие стенки каналов, получим:

$$c_1 = \frac{c_4}{c_2}. \quad (10-42)$$

С помощью метода вычетов можно показать, что ширина канала определяется выражением

$$s(c_4 + 1) = \sqrt{(c_1 - 1)(1 - c_0)(1 + c_2)(1 + c_3)} \quad (10-43)$$

и

$$K = \frac{1}{\pi}. \quad (10-44)$$

Таким образом, только четыре соотношения (10-41)—(10-44) для определения шести неизвестных постоянных можно получить аналитическим путем. Для того чтобы найти постоянные, необходимо составить еще два соотношения. Однако практически, поскольку главной задачей анализа является определение *изменения* поля при смещении каналов, а не самого поля для конкретного смещения каналов, достаточно найти только одно соотношение (действительное смещение каналов остается произвольным). Тогда, применив итерационный метод для пяти соотношений и задавшись рядом значений (ориентировочных) одной из постоянных, можно получить многоугольники с требуемыми размерами для различных смещений каналов. Дополнительное соотношение находится из условия параллельности стенок каналов. Для того чтобы отразить это условие, допустим, что точки $t = -1 - \delta$ и $t = -1 + \delta$ расположены по ту и другую стороны от точки $t = -1$, а δ очень мало, но не равно нулю. Тогда соответствующие им точки в пло-

скости z будут «равноудалены» от бесконечности в этой плоскости, в связи с чем получим

$$\int_{-l+\delta}^{-c_0} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) dt = \int_{-l+\delta}^{-c_1} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) dt. \quad (10-45)$$

Значение δ выбирается малым¹, но не настолько, чтобы градиент dz/dt стал чрезмерно велик (это создает трудности при интегрировании).

До начала итераций выбирается значение c_4 , поскольку эта постоянная наиболее тесно связана с положением

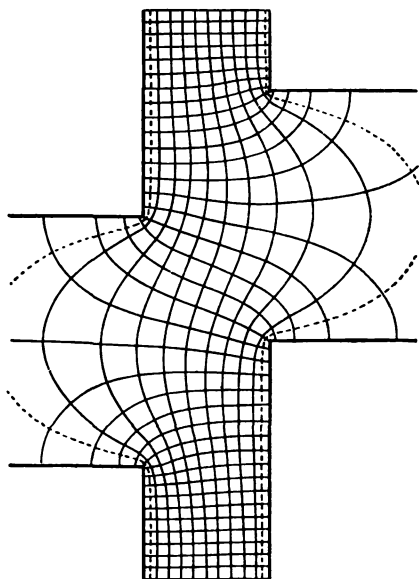


Рис. 10-10.

канала, а также определяются, исходя из распределения поля, наиболее вероятного из физических соображений, ориентировочные значения других постоянных. При расчете постоянных в плоскости t используется (10-38). Далее значения постоянных вводятся в уравнения (10-43) и (10-45) и производится сравнение получаемых и требуемых значений размеров; требуемое значение ширины канала равно s , а смещение поверхностей в верхней части канала равно нулю. Удобно применить первый из итерационных методов, описанных

в предыдущем параграфе; процесс автоматически прекращается, когда погрешности определения всех размеров достигнут установленных пределов.

Этот процесс повторяется для ряда значений c_4 от $c_4=1$, что соответствует симметричному случаю, до $c_4 \rightarrow \infty^*$, когда каналы удалены на большое расстояние.

¹ Установлено, что приемлемые значения находятся в пределах 0,001—0,005.

* Значение 10^5 достаточно велико.

Действительное значение смещения каналов определяется путем интегрирования уравнения преобразования в пределах от $t = -c_0$ до $t = c_2$.

С использованием численного интегрирования можно найти любые желательные точки пересечения линий потока и эквипотенциалей и построить картину поля. Точки пересечения выбранных линий вначале находят (аналитически) в плоскости t , а затем определяют соответственные точки кратчайшим путем последовательного интегрирования между точками в плоскости z . На рис. 10-10 изображена картина поля, полученная точно описанным способом при небольшом расходе времени на вычисления.

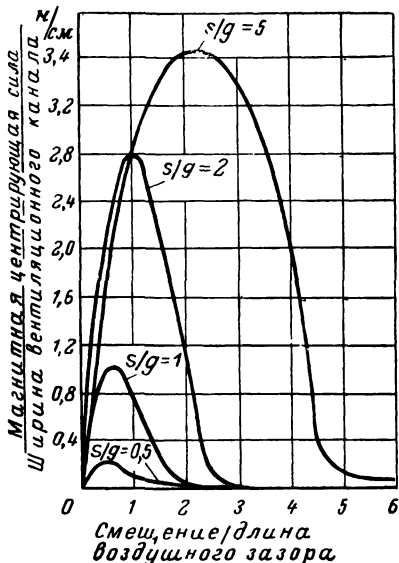


Рис. 10-11.

Осевая центрирующая сила (сила, действующая в направлении воздушного зазора) находится в результате численного интегрирования квадрата напряженности магнитного поля в пределах той и другой стенок каждого канала и определения разности двух результатов. На рис. 10-11 показано изменение силы, отнесенной к ширине канала, в зависимости от смещения¹.

10-5-3. Решение неявных уравнений

Уравнение преобразования для многих задач выражено в неявной форме; например, если уравнение имеет вид:

$$z = f(t),$$

¹ Результирующая осевая центрирующая сила равна:

$$F = \pi f B^2 n_v s D, \text{ н,}$$

где f — удельная осевая центрирующая сила на рис. 10-11; B — магнитная индукция в воздушном зазоре, тл; n_v и s — число и ширина вентиляционных каналов, см; D — диаметр средней окружности воздушного зазора, см. (Прим. перев.)

то t не может быть найдено при заданном z прямой подстановкой. Для таких уравнений требуемое значение t можно получить с помощью двух косвенных методов.

Первый метод основан на перекрестном построении, однако в тех случаях, когда t и z являются вещественными числами, необходима только одна кривая; если же они представляют собой, как в данном случае, комплексные числа, то требуются четыре кривые.

Второй метод — итерационный. Вначале задаются приближенным значением t и находят соответствующее значение z , а затем, исходя из разности δz между найденным и требуемым значениями, определяют более правильное значение t в предположении линейной зависимости между соответственными изменениями z и t , т. е. $\delta t = k \delta z$.

Входящую в это уравнение «постоянную» можно с успехом принять равной значению dz/dt в рассматриваемой точке плоскости t .

10-6. ГРАНИЦЫ, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЯМИ

В предыдущих главах книги рассматривались главным образом границы, представляющие собой эквипотенциали или линии потока, хотя в ряде задач были определены поля, границы которых являются комбинацией этих двух типов. В этом параграфе описаны три основные группы проблем, различающиеся условиями поля на границе (замкнутой): в первой группе задается распределение потенциала во всех точках границы, во второй — распределение нормальной составляющей градиента поля, а третья представляет собой сочетание двух предыдущих групп. Первая группа задач рассмотрена в § 10-6-1, а вторая и третья группы в § 10-6-2.

10-6-1. Краевые задачи первого рода

Задача, в которой заданы значения потенциала во всех точках границы, называется краевой задачей *первого рода* (задачей *Дирихле*). В любой такой задаче можно найти решение для внутренней области единичной окружности или бесконечной полуплоскости, а затем с помощью методов преобразования использовать его для широкого круга других конфигураций границ.

Поле во внутренней области единичной окружности. Поле во внутренней области

единичной окружности определяется с помощью *комплексной потенциальной функции Шварца*. Если функция $\psi'(\theta')$ описывает заданное распределение потенциала на окружности (угол θ' имеет вершину в центре окружности), а p является комплексной переменной положения, то решение для поля во внутренней области окружности имеет вид:

$$\psi + j\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{j\theta'} + p}{e^{j\theta'} - p} \psi'(\theta') d\theta'. \quad (10-46)$$

Вещественную часть этого выражения также можно представить в стандартной форме, положив $p = re^{j\theta}$. Тогда получим:

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \theta') + r^2} \psi'(\theta') d\theta'. \quad (10-47)$$

Это интеграл Пуассона, который может быть использован для нахождения распределения потенциала в случае одной круговой границы (см. § 4-2-5).

При использовании любого из приведенных уравнений требуется только представить распределение потенциала вдоль круговой границы в функции θ' и найти полученный определенный интеграл для каждой точки p , в которой поле должно быть определено. Этот интеграл часто не имеет аналитического решения, но можно применить численные методы (см. § 10-5-1). Если комплексную потенциальную функцию требуется найти во многих точках, численные методы связаны с большим количеством расчетов, хотя область их применения не ограничена.

Полезной задачей, поддающейся аналитическому решению, является случай, когда граница состоит из эквипотенциальных участков. Если число таких участков равно m , каждый участок имеет потенциал ψ_n , а границы n -го участка определяются углами θ'_n и θ'_{n-1} , то комплексная потенциальная функция согласно уравнению (10-46) имеет вид:

$$\psi + j\varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^m \psi_n \int_{\theta'_{n-1}}^{\theta'_n} \frac{e^{j\theta'} + p}{e^{j\theta'} - p} d\theta'. \quad (10-48)$$

Выполнив интегрирование, придем к выражению

$$\psi + j\varphi = \frac{-1}{2\pi} \sum_{n=1}^m (\theta'_n - \theta'_{n-1}) \psi_n - \frac{j}{\pi} \sum_{n=1}^m \psi_n \ln \frac{e^{j\theta'_n} - p}{e^{j\theta'_{n-1}} - p}, \quad (10-49)$$

которое нетрудно использовать для получения готового решения любой задачи этого типа. Так, например, решение для единичной окружности с двумя эквипотенциальными участками, потенциалы которых равны $+\psi_A$ и $-\psi_A$, находится в результате подстановки $\theta'_0=0$, $\theta'_1=\pi$ и $\theta'_2=2\pi$ в виде:

$$\psi + j\varphi = -\frac{2j}{\pi} \psi_A \ln \frac{p+1}{p-1} + 2\psi_A. \quad (10-50)$$

Поле в верхней полуплоскости. Приведенное выше решение, полученное Шварцем, можно преобразовать для определения поля в верхней полуплоскости, создаваемого распределенным вдоль вещественной оси потенциалом. Если применить дробно-линейное преобразование

$$t = j \left(\frac{1-p}{1+p} \right), \quad (10-51)$$

то выражение для комплексной потенциальной функции примет вид:

$$\psi + j\varphi = \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+u't}{(1+u'^2)(t-u')} \psi(u') du', \quad (10-52)$$

где $\psi(u')$ — функция, описывающая распределение потенциала вдоль вещественной оси плоскости t . Выделение вещественной части уравнения (10-52) приводит к выражению, эквивалентному интегралу Пуассона для бесконечной полуплоскости, а именно:

$$\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{(u-u')^2 + v^2} \psi(u') du'. \quad (10-53)$$

Точно так же, если вещественная ось состоит из m эквипотенциальных участков, а n -й участок имеет потенциал ψ_n и расположен между точками u'_n и u'_{n+1} , то

потенциальная функция определяется следующим образом:

$$\psi + j\varphi = \frac{j}{\pi} \sum_{n=1}^{m-1} (\psi_n - \psi_{n+1}) \ln \frac{\sqrt{1 + u'_{n+1}^2}}{t - u'_{n+1}} + \psi_m. \quad (10-54)$$

К этому выражению можно также прийти из рассмотрения поля совокупности линейных источников, расположенных в точках разрыва потенциала на вещественной оси. Для двух участков с потенциалами $+\psi_A$ и $-\psi_A$, разделенных началом координат, уравнение (10-54) принимает знакомый вид:

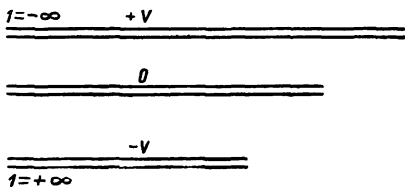


Рис. 10-12.

$$\psi + j\varphi = -\frac{2j}{\pi} \psi_A \ln t. \quad (10-55)$$

Уравнение (10-54) было использовано (см. [Л. 49]) для определения электрического поля обмоток трансформатора, представленных в виде трех листов (рис. 10-12). Эту границу нетрудно получить путем преобразования из вещественной оси плоскости t . Если соответствующие электрические потенциалы обмоток равны $+V$, 0 и $-V$, то поле в плоскости t определяется согласно уравнению (10-54) следующим образом:

$$\omega = \psi + j\varphi = \frac{j}{\pi} V \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{t+1} + \ln \frac{\sqrt{1+q^2}}{t-q} \right) - V. \quad (10-56)$$

10-6-2. Краевые задачи второго и третьего рода

Задача, в которой граничные условия определяют нормальные составляющие градиента, называется краевой задачей *второго рода* (задача *Неймана*). Если же в качестве граничных условий задано распределение потенциала на некоторых участках границы и его градиента на остальных участках, то такая задача называется краевой задачей *третьего рода*, или *смешанной* краевой задачей. В общем случае методы преобразований не подходят для решения обоих упомянутых типов задач и они в случае простых конфигураций границ луч-

ше всего поддаются решению методами, описанными в гл. 4. Однако в частном случае, когда граница состоит частично из линий потока (т. е. линий, для которых нормальная составляющая градиента постоянна), а частично из эквипотенциалей, решения часто могут быть получены и многие из них приведены в книге. Так, например, в § 10-2 определены поля токов в бесконечной полуплоскости для граничных условий на вещественной оси, соответствующих краевым задачам второго и третьего рода, а в § 9-2-4 найдено решение для поля двух одинаковых конечных эквипотенциальных пластин (граничные условия на вещественной оси соответствуют краевой задаче третьего рода). Аналогичные решения были получены для единичной окружности (см. [Л.49 и 10-7]), однако они не имеют большого практического значения.

ЛИТЕРАТУРА

- 10-1. Lawrenson P. J., A note on the analysis of the fields of line currents and charges, Proc. Instn Electr. Engrs, **109 C**, 86, 1962.
- 10-2 Carter F. W., The magnetic field of the dynamo-electric machine, J. Instn Electr. Engrs, № 359, 1115—1139, 1926.
- 10-3. Drinker S., Short wave-length response of magnetic reproducing heads with rounded gap edges, Phillips Res. Rep., **16**, 307, 1961.
- 10-4. Cockroft J. D., The effect of curved boundaries on the distribution of electrical stress round conductors, J. Instn Electr. Engrs, **66**, 385, 1928.
- 10-5. Page W. M., Some two-dimensional problems in electrostatics and hydrodynamics, Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2, **II**, 313, 1912.
- 10-6. Leathem J. G., Some applications of conformal transformation to problems in hydrodynamics, Phil. Trans., pt. A, **215**, 439, 1915.
- 10-7. Ikeda Y., Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., ser. 2, **2**, № 2, 1—28, 1938.
- 10-8. Dreyfus L., Über die Anwendung der konformen Abbildung zur Berechnung der Durchschlags- und Überschlagsspannung zwischen kantigen Konstruktionsteilen unter Öl, Arch. Elektrotech., **13**, 123, 1924.
- 10-9. Binns K. J., The magnetic field and centring force of displaced ventilating ducts in machine cores, Proc. Instn Electr. Engrs, **108 C**, 64, 1961.
- 10-10. Binns K. J., Pole-entry flux pulsations, Proc. Instn Electr. Engrs, **109 C**, 103, 1962.
- 10-11. Hodgkinson J., A note on a two-dimensional problem in electrostatics, Quart. J. Math., **9**, 5, 1938.

Дополнительная литература

- 10-12. Love A. E. H., Some electrostatic distributions in two dimensions, Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2, **22**, 337, 1923.

10-13. Richmond H. W., On the electrostatic field of a plane or circular grating formed of thick rounded bars, Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2, **22**, 389, 1924.

Construction and applications of conformal maps, Appl. Math. Ser., U. S. Bur. Stand., № 18, 42.

10-14. Langton N. H., Davy N., Two-dimensional field in a semi-infinite slot terminated by a semicircular cylinder, Brit. J. Appl. Phys., **4**, 134, 1953.

10-15. Langton N. H., Davy N., Two-dimensional field above and below an infinite corrugated sheet, Brit. J. Appl. Phys., **3**, 156, 1952.

Часть четвертая

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Глава одиннадцатая

МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

11-1. ВВЕДЕНИЕ

Методы конечных разностей, которые ведут начало от Гаусса [Л. 11-1], но получили широкое распространение примерно лишь с 1940 г., могут быть использованы для получения численных решений с любой требуемой степенью точности всех задач, рассмотренных в этой книге¹. Кроме того, хотя некоторые теоретические обоснования этих методов очень сложны, их практическое применение чрезвычайно просто и фактически сводится к простым арифметическим операциям. Главный недостаток методов конечных разностей заключается в том, что (как и для всех численных методов) решение должно повторяться для каждой совокупности параметров, задаваемых в задаче. Сопоставление и области применения аналитических и численных методов приведены в § 11-7, а также в гл. 1.

Решения, полученные методом конечных разностей, представляют собой совокупность значений описывающей поле функции в дискретных точках, равномерно распределенных по всей области поля. Эти значения находятся путем замены одного описывающего поле дифференциального уравнения с частными производными системой простых уравнений в конечных разностях, которые имеют вид линейных уравнений, связывающих значение потенциала в каждой точке со значениями потенциала в других точках, окружающих ее. Таким образом, определение поля сводится к решению системы

¹ Эти методы могут быть использованы также для определения трехмерных и неустановившихся полей.

совместных уравнений. В связи с тем, что при решении задачи приходится оперировать с большим числом таких уравнений, применение методов исключения переменных, определителей и обращения матриц становится нецелесообразным. Вместо этого должны использоваться специальные методы. Два наиболее полезных метода, *релаксационный* и *итерационный*, тесно связанные, описаны в этой главе. Еще один, *статистический*, метод рассмотрен в гл. 12. Релаксационный¹ метод предназначен для расчетов вручную и является чрезвычайно универсальным, хотя его эффективность зависит от опыта и искусства расчетчика. В противоположность этому другой метод, итерационный, основан на полностью повторяющемся цикле операций и идеально подходит для выполнения расчетов с использованием быстродействующих вычислительных машин, прогресс которых в последние годы значительно содействовал развитию этого метода.

Основные уравнения в конечных разностях выведены в § 11-2, а подробному описанию обоих методов — релаксационного и итерационного — посвящены соответственно § 11-3 и 11-4. В остальных параграфах этой главы составлены уравнения в конечных разностях для более сложных граничных условий на поверхностях раздела сред, а также рассмотрена точность решений. Уравнения в конечных разностях повсюду получены применительно к уравнению Пуассона для векторного потенциала; при переходе к уравнению Лапласа плотность тока принимается равной нулю. Естественно, уравнения в конечных разностях имеют одинаковый вид независимо от того, составлены ли они для векторного потенциала A , скалярного потенциала ψ или функции потока ϕ .

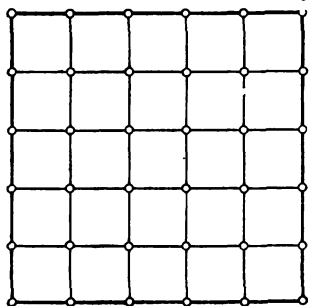
11-2. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

11-2-1. *Равномерное распределение точек поля*

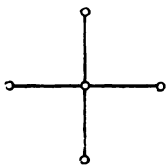
При замене уравнения поля системой уравнений в конечных разностях, связывающих значения потенциальной функции в дискретных точках, можно выбрать произвольное пространственное распределение точек. Однако очевидно, что при выборе полностью равномер-

¹ Это название введено Саусвеллом, который при описании метода использовал аналогию с релаксацией напряжений в деформированных сложных рамах.

ного распределения точек для каждой из них справедливо уравнение в конечных разностях одного и того же вида и формулировка задачи значительно упрощается. Требуемое распределение обеспечивается расположением точек в «узлах» любой равномерной *сетки*. Одна такая сетка состоит из квадратов и изображена на рис. 11-1,а для простой, квадратной, области поля. Нетрудно заметить, что положение любого узла,

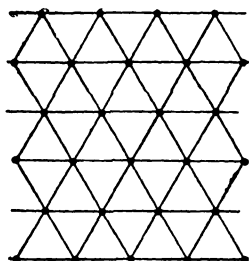


а)

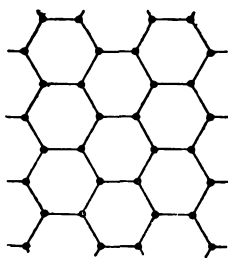


б)

Рис. 11-1.



а)



б)

Рис. 11-2.

лежащего *во внутренней* области границы, по отношению к соседним узлам характеризуется приведенной на рис. 11-1,б схемой. Это типовое расположение узлов носит название *симметричной звезды*.

Существуют только две другие равномерные сетки: равносторонняя треугольная сетка, изображенная на рис. 11-2,а и описанная в [Л. 3 и 47], и правильная шестиугольная сетка, показанная на рис. 11-2,б. Первая из них изредка применяется для решения некоторых задач, в которых граница совпадает с линиями сетки, а вторая никогда не использовалась. Ни та, ни другая сетка далее не рассматривается и внимание сосредото-

но на квадратной сетке, которая применяется почти во всех задачах.

Находят применение также *неравномерная* сетка, представляющая определенный интерес, и полярная сетка [Л. 11-2]. Она имеет очевидные преимущества для некоторых задач с круговыми границами, но здесь не описана.

11-2-2. Основные уравнения для квадратной сетки

Симметричная звезда (рис. 11-3,б) относится ко всем узлам сетки, за исключением узлов, которые находятся в непосредственной близости к границе, в тех случаях, когда граница и линии сетки не совпадают. Для узла, находящегося в непосредственной близости к такой границе, типовое расположение соседних узлов характеризуется *асимметричной звездой*, изображенной на

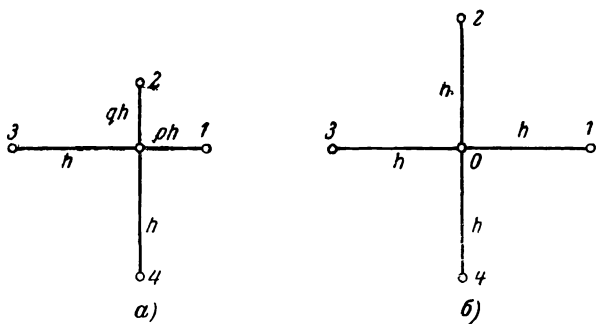


Рис. 11-3.

рис. 11-3,а. Уравнение в конечных разностях для потенциала в «центральном» узле 0 отличается от уравнения для центрального узла симметричной звезды, показанной на рис. 11-3,б, однако поскольку симметричная звезда является частным случаем асимметричной, детально будет рассмотрена только асимметричная звезда.

Предположим, что сторона квадрата сетки h , называемая *размером ячейки сетки*, мала по сравнению с размерами границ, и примем одинаковую нумерацию узлов для обеих звезд, как показано на рисунке. В случае асимметричной звезды допустим, что узлы 1 и 2 расположены на расстояниях rh и qh от узла 0 , где p и q —

числа, меньшие единицы. Практически это означает, что узлы 1 и 2 будут лежать на границе.

Уравнение в конечных разностях получается в результате разложения потенциала узла 0 в ряд Тейлора и нахождения выражений для $(\partial^2 A / \partial x^2)_0$ и $(\partial^2 A / \partial y^2)_0$, которые вводятся в уравнение Пуассона.

Значение потенциала A в любой точке x , лежащей на линии, проведенной через узел 0 параллельно оси x , может быть выражено через значение потенциала узла 0, равное A_0 , с помощью ряда Тейлора:

$$A = A_0 + \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \\ + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right)_0 (x - x_0)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right)_0 (x - x_0)^4 + \dots \quad (11-1)$$

Подстановка в это уравнение значений $x = x_0 + ph$ и $x = x_0 - h$ дает значения потенциала соответственно в узлах 1 и 3:

$$A_1 = A_0 + ph \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2!} p^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0 + \\ + \frac{1}{3!} p^3 h^3 \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right)_0 + \frac{1}{4!} p^4 h^4 \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right)_0 + \dots \quad (11-2)$$

и

$$A_3 = A_0 - h \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2!} h^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0 - \\ - \frac{1}{3!} h^3 \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right)_0 + \frac{1}{4!} h^4 \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right)_0 - \dots \quad (11-3)$$

Суммировав (11-2) и (11-3) после умножения последнего на p , получим:

$$A_1 + pA_3 = (1 + p) A_0 + \frac{1}{2!} ph^2 (1 + p) \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0 - \\ - \frac{1}{3!} ph^3 (1 - p^2) \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right)_0 + \frac{1}{4!} ph^4 (1 + p^3) \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right)_0 - \dots \quad (11-4)$$

и, пренебрегая членами, содержащими h в третьей и более высоких степенях, что допустимо, если h мало, приходим к простому выражению для $(\partial^2 A / \partial x^2)_0$:

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{2A_1}{p(1+p)} + \frac{2A_3}{(1+p)} - \frac{2A_0}{p}. \quad (11-5)$$

Точно таким же способом можно получить выражение для $(\partial^2 A / \partial y^2)_0$:

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{2A_2}{q(1+q)} + \frac{2A_4}{(1+q)} - \frac{2A_0}{q}. \quad (11-6)$$

Далее, подстановка найденных значений $(\partial^2 A / \partial x^2)_0$ и $(\partial^2 A / \partial y^2)_0$ в уравнение Пуассона, где для более компактной записи член $\mu_0 J$ заменен W , дает:

$$2 \left[\frac{A_1}{p(1+p)} + \frac{A_2}{q(1+q)} + \frac{A_3}{(1+p)} + \right. \\ \left. + \frac{A_4}{(1+q)} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) A_0 \right] + h^2 W = 0. \quad (11-7)$$

Это уравнение (при небольшом значении h) является хорошей аппроксимацией уравнения Пуассона и может его заменить. Однако необходимо подчеркнуть, что в то время как дифференциальное уравнение относится к любой точке поля, каждое уравнение в конечных разностях справедливо только для одной точки (хотя вид уравнений одинаков для всех точек).

Уравнение (11-7) имеет несколько частных модификаций, наиболее важная из которых относится к симметричной звезде (рис. 11-3,б). Уравнение, относящееся к узлу O этой звезды, может быть использовано для подавляющего большинства узлов в любой задаче; его нетрудно получить, положив в уравнении (11-7) $p=q=1$:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 + h^2 W = 0. \quad (11-8)$$

Для узлов, расположенных в областях, где поле описывается уравнением Лапласа, требуемые уравнения для асимметричной и симметричной звезд можно найти соответственно из уравнений (11-7) и (11-8), положив $W=0$. Кроме того, в случае таких полей эти уравнения могут быть составлены для скалярного потенциала ψ или для функции потока ϕ , поэтому, например, уравнение Лапласа для скалярного потенциала узла, не прилегающего к границе, имеет вид:

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 = 0. \quad (11-9)$$

Полученные выше уравнения в конечных разностях являются, конечно, только аппроксимациями уравнений поля, поскольку в уравнении (11-4) мы пренебрегли

членами высших порядков (соответствующая погрешность называется сеточной). Важно тщательно исследовать эту погрешность, как это сделано в § 11-6, однако на данном этапе достаточно сказать, что практически в любой задаче нетрудно задаться таким значением h , что ошибка будет пренебрежимо малой.

11-2-3. Формулировка задачи определения поля в виде системы совместных уравнений

Рассмотрим теперь подход к формулировке задачи по определению поля в виде системы совместных уравнений и для конкретности обратимся к простой (но типичной) области поля, описываемого уравнением Пуассона, внутри квадратной границы, изображенной на рис. 11-4.

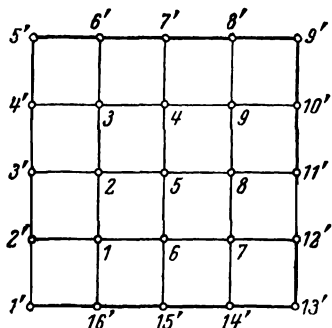


Рис. 11-4

Обозначим узлы на границе номерами со штрихом от $1'$ до $16'$, а внутренние узлы номерами от 1 до 9 . Значения W и потенциала на границе $A'_1—A'_{16}$ заданы, и на первом этапе решения требуется определить значения потенциала $A_1—A_9$ для внутренних узлов. Это нетрудно

сделать, применив уравнение (11-8) для каждого из внутренних узлов. Для внутреннего узла 1 имеем:

$$A_6 + A_2 + A'_2 + A'_{16} - 4A_1 + h^2W = 0;$$

для узла 2

$$A_5 + A_3 + A'_3 + A_1 - 4A_2 + h^2W = 0.$$

Аналогичные уравнения могут быть составлены и для остальных узлов $3—9$. Следовательно, девять значений потенциала связаны между собой и с граничными условиями девятью линейными уравнениями и их можно найти в результате совместного решения этих уравнений.

Точно так же любую задачу по определению поля можно свести к решению системы совместных линейных уравнений в конечных разностях. Для задач с криволинейными границами или с границами, по каким-либо

другим причинам не совпадающими с узлами сетки, единственное отличие в формулировке по сравнению с простым случаем, рассмотренным выше, заключается в том, что уравнения для узлов, примыкающих к границе, должны быть выведены из общего уравнения в конечных разностях (11-7) (при $W=0$ для областей лапласова поля).

Прежде чем приступить к рассмотрению способов решения совместных уравнений, для последующего анализа необходимо представить их в матричном виде (см. [Л. 36]). Короче говоря, если $[M]$ — матрица коэффициентов при неизвестных потенциалах A_n , $[u]$ — столбцовая матрица неизвестных потенциалов, а $[v]$ — столбцовая матрица сумм известных потенциалов A'_n и постоянных членов h^2W (когда они присутствуют), то указанные уравнения могут быть представлены в виде:

$$[M][u]=[v]. \quad (11-10)$$

Заметим, что вид матрицы $[M]$ зависит только от пространственного распределения узлов поля, но не зависит от того, является ли поле лапласовым или пуассоновым. Подробности изложены ниже.

В отношении решения этих уравнений следует отметить две важные особенности. Во-первых, в любой практической задаче число уравнений очень велико (цифра 1000 является вполне обычной) и, во-вторых, число членов в каждом из уравнений очень мало. Первая из этих особенностей приводит к тому, что обычные методы нахождения точных решений становятся совершенно неприемлемыми просто в связи с чрезмерной длительностью вычислений. Так, например, для решения 100 уравнений методом исключения переменных (который гораздо быстрее метода определителей) потребуется по крайней мере 10 000 ч при выполнении расчетов вручную и 1—2 ч при расчете на быстродействующей вычислительной машине. Однако, к счастью, благодаря малому числу членов в уравнениях можно применить два значительно более быстрых численных метода. Это тесно связанные релаксационный и итерационный методы, основанные на процессе последовательных приближений. В качестве характеристики быстроты этих методов можно указать, что 100 уравнений в конечных разностях могут быть решены с точностью 0,1% примерно за 8 ч вручную (релаксационным методом) и

примерно за 1 мин при использовании вычислительной машины (итерационным методом). Дополнительное преимущество этих методов состоит в том, что продолжительность расчетов тесно связана с получаемой точностью, поэтому можно прервать расчет, когда будет достигнута требуемая точность.

Два следующих параграфа посвящены подробному описанию релаксационного и итерационного методов, однако предварительно следует отметить, что оба процесса последовательных приближений будут сводиться к решениям независимо от того, насколько грубо начальное приближение¹ [Л. 11-3].

11-3. РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД

11-3-1. Введение

Релаксационный метод решения совместных уравнений в конечных разностях был впервые применен Гауссом, однако его чрезвычайная универсальность и действенность не были оценены инженерами и физиками до 30—40-х годов 19-го столетия, когда он был повторно открыт и усовершенствован Саусвеллом и его сотрудниками². В основном он сводится к непрерывному изменению значений потенциала, продолжающемуся до тех пор, пока все совместные уравнения не будут удовлетворены с достаточной степенью точности. Этот метод предназначен для расчетов вручную и эффективность применения его зависит от опыта расчетчика. В последнем отношении он существенно отличается от других методов, рассмотренных, поскольку невозможно сформулировать общие правила выполнения операций и при решении какой-либо конкретной задачи два расчетчика никогда не будут точно следовать по одному и тому же пути. В связи с этим определения основных операций решения, приведенные ниже, на первый взгляд могут показаться недостаточно полными. Однако ввиду крайней простоты метода уже небольшая практика быстро дает опыт, необходимый для выбора правильного пути решения любой задачи.

¹ Условие сходимости сводится к тому, что матрица $[M]$ должна быть симметричной и положительно определенной.

² Подробный указатель литературы, касающейся практических приложений метода главным образом для решения механических задач, приведен в [Л. 3], а также в [Л. 21].

В § 11-3-2 изложено понятие об остатке и рассмотрено применение простого основного способа узловой релаксации. Далее описаны способы ускорения сходимости решения и в заключение приведены некоторые общие указания относительно особенностей практического применения релаксационного метода.

11-3-2. Основы метода

Понятие об остатке. В основе релаксационного метода лежит понятие об остатке¹, определение которого сейчас будет приведено. Если потенциалы A_0, A_1, \dots, A_4 выбраны таким образом, что уравнение в конечных разностях (11-8) справедливо, то его правая часть равна нулю. Однако, если значения потенциалов не удовлетворяют этому уравнению, то его правая часть равна не нулю, а некоторой величине R_0 , определяемой соотношением

$$R_0 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 + h^2W. \quad (11-11)$$

Величина R_0 называется остатком уравнения в конечных разностях для узла 0 , и релаксационный метод заключается в последовательном уменьшении до нуля (снятии) остатков всех уравнений. Если остатки всех уравнений в конечных разностях равны нулю, то значения потенциала соответствуют точному решению, однако практически для получения хорошего приближения к точному решению достаточно ограничиться уменьшением их до малых значений.

Следует отметить, что строгой зависимости между величинами остатков и точностью определения потенциалов не существует. Однако практикой установлено, что решения в общем случае удовлетворительны, если: а) значения отдельных остатков уменьшены примерно до $0,1\%$ среднего значения потенциалов; б) алгебраическая сумма всех остатков имеет тот же порядок, что и отдельные остатки; в) распределение остатков с учетом их величины и знаков равномерно по всей области поля.

Более подробное рассмотрение точности решения приведено в § 11-6, а основы операции снятия остатков описаны ниже.

¹ В этом отношении развитие метода многим обязано Харди Кроссу [Л. 21].

Узловая релаксация. Основная операция, применяемая при снятии остатков, называется узловой релаксацией; она чрезвычайно проста и осуществляется следующим образом. Для рассматриваемого узла (вначале предполагаем, что данный узел является центром симметричной звезды) с помощью уравнения (11-11)

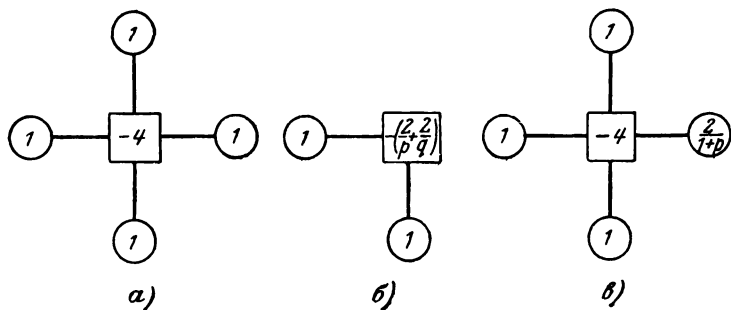


Рис. 11-5.

находится значение остатка, а затем этот остаток полностью снимается путем изменения значения A_0 на величину $R_0/4$. Такое изменение A_0 вызывает одинаковое изменение остатков в каждом из четырех соседних узлов звезды, которое, как показывает последовательное применение к ним уравнения (11-11), составляет $R_0/4$ (т. е. равно изменению значения A_0 в исходном центральном узле). Таким образом, остаток, равный $4R$, в центральном узле звезды может быть полностью снят в результате увеличения на величину R потенциала этого узла и остатков в узлах, расположенных в конечных точках лучей звезды. Эта операция называется перенесением остатка и может быть представлена легко запоминаемым релаксационным «шаблоном», показанным на рис. 11-5,а. Следует, конечно, иметь в виду, что операция перенесения остатков не касается узлов, лежащих на границе.

Точно таким же способом можно составить релаксационные шаблоны для асимметричных звезд согласно уравнению (11-7). Так, например, изменение потенциала узла 0 (см. рис. 11-3,а) на единицу приводит к шаблону на рис. 11-5,б (предполагаем, что узлы 1 и 2 лежат на границе), а в результате изменения на единицу потенциала узла 3 получаем шаблон (рис. 11-5,в). Члены, за-

висящие от p и q , приводят к дробным изменениям потенциала и рассмотрены в § 11-3-4.

При использовании узловой релаксации для решения уравнений на каждом этапе наиболее целесообразно рассматривать уравнение (узел) с наибольшим остатком. Практически остатки (на любом этапе) полностью не снимаются; достаточно ограничить изменения значений потенциала целыми числами и, таким образом, избежать появления десятичных дробей, которые не требуются для решения и увеличивают вероятность ошибок (см. § 11-3-4).

Простой пример. Рассмотрим теперь применение описанного выше релаксационного процесса

для решения задачи, представленной на рис. 11-6. Для упрощения предположено, что поле описывается уравнением Лапласа и границы области проходят через узлы сетки. Значения потенциала в узлах на границе приведены на рисунке, а начальные значения потенциала внутренних узлов, обозначенных буквами от a до i , приняты равными нулю. При расчете значения потенциала записываются в левом верхнем углу, а значения остатка — в правом верхнем углу каждого узла. Обычно на любом этапе расчета после каждого изменения потенциала или остатка записывают полученные значения и зачеркивают предыдущие.

Первым этапом является определение остатков в каждом узле с помощью уравнения (11-11) (при $W=0$) и исходного распределения потенциалов. Так, например, в узле a значение остатка равно $0+0+10+0-4 \times 0=10$. Величины остатков, так же как и исходные значения потенциала, записывают в соответствии с приведенными выше указаниями. На рис. 11-6 начальные значения представлены двумя нижними цифрами в каждом узле.

Далее, с использованием шаблона узловой релаксации снимают (временно) наибольший остаток, появляющийся на каждом этапе расчета. Вначале наибольший

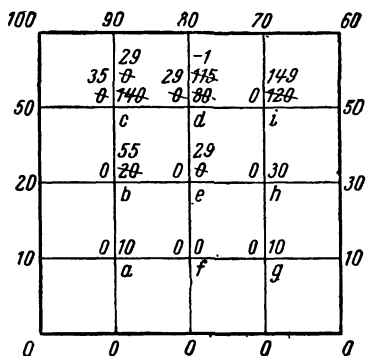


Рис. 11-6.

остаток, равный 140, существует в узле c ; его можно полностью снять, увеличив A_c на $140/4=35$. Новое значение A_c , равное $0+35$, записывают, как показано на

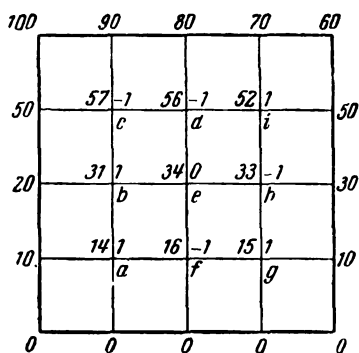


Рис. 11-7.

Теперь наибольший остаток существует в узле d и следует обратиться к его рассмотрению. Для того чтобы снять этот остаток, необходимо увеличить A_d на $115/4 \approx 29$ и (во избежание появления десятичных дробей) удобно остановиться на изменении, равном 29, сохранив остаток -1 . Остатки в узлах c , i и e также изменятся на 29.

Точно таким же способом, снимая (приближенно) наибольший остаток, появляющийся на каждом этапе, и перенося четвертую часть его в соседние узлы (не затрагивая узлов, лежащих на границе), необходимо продолжать решение до тех пор, пока остатки не будут удовлетворять трем сформулированным выше условиям. Очень приближенное решение (с точностью 2—6%) приведено на рис. 11-7*. Этот пример служит иллюстрацией чрезвычайной простоты релаксационного метода. С использованием основного приема, следуя по пути, аналогичному описанному выше, и применяя, там, где это необходимо, асимметричные релаксационные шаблоны, можно найти решение любой задачи. Однако во многих

* Для получения более высокой точности и выполнения условий «а» и «б» потребуется ввести десятичные дроби или осуществить эквивалентные мероприятия (см. стр. 300 «Десятичные дроби»).

задачах приходится констатировать медлительность процесса решения, и далее будут рассмотрены способы ускорения сходимости метода.

11-3-3. Способы ускорения решения

Введение. Быстроту сходимости решения можно значительно повысить с помощью двух основных способов. Первый заключается в вариации степени релаксации, принимаемой для узла (релаксация с недобором или перебором), а второй сводится к одновременной релаксации нескольких узлов (линейная или блочная релаксация). Однако, прежде чем перейти к их подробному рассмотрению, следует отметить, что при решении любой задачи можно существенно сократить время вычислений, задавшись начальным распределением потенциалов в узлах. При этом не требуется большой точности и даже грубое приближение может дать значительную экономию времени.

Релаксация с перебором и недобором. Если потенциал узла изменяется на величину, достаточную для того, чтобы вызвать изменение знака остатка, то такая операция называется релаксацией с перебором; если же потенциал изменяется на величину, недостаточную для полного снятия остатка, то такая операция называется релаксацией с недобором. Эти операции могут значительно ускорить сходимость и при небольшом опыте необходимость их применения легко установить.

Для иллюстрации использования релаксации с перебором рассмотрим два первых подробно разобранных этапа решения описанной выше задачи. В результате первой релаксации остаток в узле c был полностью снят, однако последующая релаксация в узле d вызвала восстановление остатка в узле c на величину, равную 29. Точно так же, нетрудно заметить, что первая релаксация в узле b приводит к возрастанию остатка в узле c . Оба явления восстановления остатка с тем же знаком в узле, где он был полностью снят, вызванные релаксацией в соседних узлах, можно было бы предусмотреть и при первой операции снять остаток в узле c перебором. Тогда остаток принял бы отрицательное значение, однако при правильном выборе степени перебора он был бы полностью снят по окончании операций в узлах d и b .

Сформулировать правила применения релаксации

с перебором и недобором затруднительно, можно лишь указать общие условия, при которых следует использовать ту или иную операцию. Если окажется, что остаток в данном узле окружен остатками с тем же знаком в других узлах, то можно ожидать восстановления остатка и применение релаксации с перебором улучшит схо-

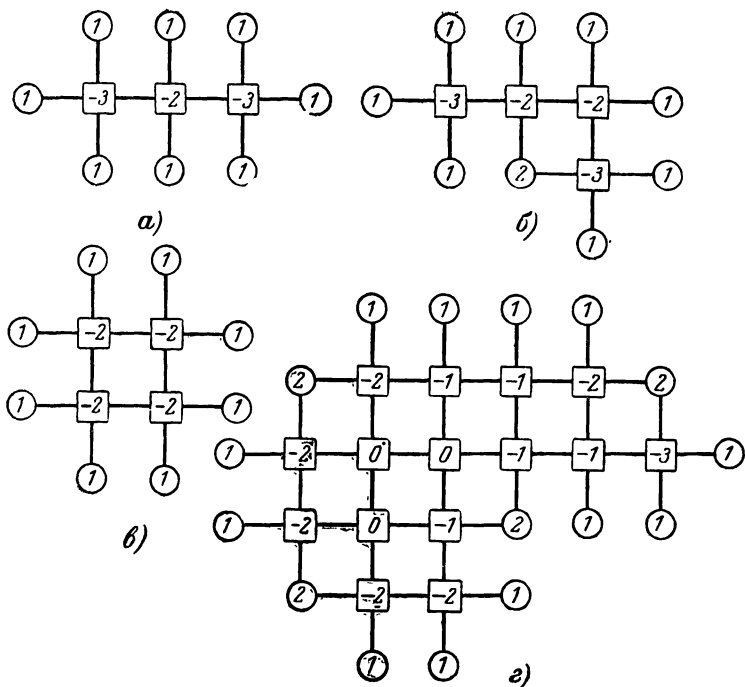


Рис. 11-8.

димось. Аналогичным образом в областях, где некоторый остаток окружен остатками противоположного знака и релаксация соседних остатков вызовет изменение знака рассматриваемого остатка, полезно использовать релаксацию с недобором. Степень релаксации для каждого узла можно определить лишь приближенно с учетом влияния последующей релаксации в других узлах, особенно находящихся в ближайшем соседстве с рассматриваемым узлом.

Линейная и блочная релаксации. Для того чтобы продемонстрировать преимущества одновре-

менной релаксации в нескольких узлах, обратимся снова к описанной выше задаче и, в частности, рассмотрим первую операцию для каждого из узлов c , d и i . Изменения остатков во всех узлах примерно одинаковы, и, кроме того, изменения в одном из узлов сопровождаются изменениями в одном или обоих остальных узлах. Поэтому было бы желательно получить результат трех отдельных операций в один прием. Это нетрудно осуществить с помощью линейной релаксации, шаблон которой находится путем наложения трех шаблонов узловой релаксации (см. рис. 11-5). Результирующий шаблон изображен на рис. 11-8,а. Из него видно, что изменение потенциала узлов на $+1$ приводит к изменениям остатков, равным -3 в узлах c и i , -2 в узле d и $+1$ во всех соседних узлах. Изменений в соседних узлах, лежащих на границе, не происходит.

Аналогичным образом в результате наложения шаблонов узловой релаксации для каждого из узлов можно составить шаблоны линейной релаксации при любом числе узлов на линии или блочной релаксации при произвольном числе узлов в блоке (для единичного изменения потенциала в каждом узле). Несколько примеров приведено на рис. 11-8,б, в и г, где квадраты относятся к узлам, принадлежащим к линии или блоку.

Анализ шаблонов позволяет сделать следующие общие выводы.

а) Изменение остатка в узле, входящем в линию или блок, равно $n-4$, где n — число других узлов в этой линии или блоке, с которыми рассматриваемый узел непосредственно связан линиями сетки.

б) Изменение остатка в узле, не входящем в линию или блок, равно числу узлов этой линии или блока, с которыми рассматриваемый узел непосредственно связан линиями сетки.

в) Результирующее изменение остатка во всех узлах, принадлежащих к линии или блоку, равно суммарному изменению остатка в узлах, непосредственно связанных с этой линией или блоком.

Применение блочной (или линейной) релаксации, очевидно, целесообразно, когда группы узлов имеют остатки с одинаковым знаком. В этом отношении блочная релаксация и релаксация с перебором до некоторой степени могут конкурировать, однако поскольку в случае блочной релаксации за одну операцию рассматривается

большое число узлов, она обычно является гораздо более действенным приемом.

Вполне понятный прием блочной релаксации, заключающийся в быстром перенесении остатков для большого числа узлов, наглядно продемонстрирован на простом примере рассмотренной выше линии из трех узлов. Однако существует менее очевидный, но более действенный прием, упомянутый в п. «в». Поскольку результирующее изменение остатка в блоке равно соответствующему изменению остатка в узлах, соседних с ним, его легко использовать для снятия результирующего остатка в узлах блока. Это, конечно, приводит к более или менее равномерному распределению положительных и отрицательных остатков между узлами блока, однако правильное применение узловой релаксации в пределах блока в общем случае позволяет быстро полностью снять остатки.

В качестве примера применения приема снятия результирующего остатка в блоке рассмотрим снова шаблон, изображенный на рис. 11-8, а, и предположим, что все узлы блока имеют остаток, равный четырем. Блок содержит 15 узлов, поэтому результирующий остаток для него равен $15 \times 4 = 60$. Суммарное изменение остатка в блоке при единичном изменении потенциала каждого узла определяется суммой чисел в квадратах и составляет -20 . Следовательно, при изменении потенциала каждого узла на величину $60/20 = 3$ сумма остатков в блоке становится равной нулю (и остаток, равный 60, переносится в узлы, соседние с блоком). Исходя из полученного распределения остатков, можно сделать вывод о целесообразности дальнейшей блочной релаксации (при другой комбинации узлов), возможно, для перенесения остатков в узлах вблизи границы или переходе к узловой релаксации, если положительные и отрицательные остатки распределены достаточно равномерно

11-3-4. *Практические рекомендации*

Релаксационный процесс рассчитан главным образом на выполнение расчетов вручную и в этом отношении обладает двумя характерными особенностями.

а) Метод вызывает интерес у расчетчика, постоянно требуя изобретательности и сноровки.

б) Сущность метода такова, что исправление ошибок происходит автоматически (в ходе выполнения обычных

операций); поэтому он не требует систематической проверки. Более подробно вопрос о проверке освещен ниже.

Исходя из предшествующего анализа, можно прийти к выводу о невозможности составления твердых правил, которые могли бы быть использованы при решении любой конкретной задачи, и в действительности именно этой универсальностью в основном объясняется действенность метода в руках опытного расчетчика. Точно так же отсутствие твердых правил препятствует успешному программированию метода для расчета на вычислительной машине. Однако можно дать ряд полезных практических рекомендаций, которые изложены ниже под пятью не требующими пояснений подзаголовками.

Размер ячейки сетки. Одно из основных требований касается правильного определения размера ячейки сетки; при этом для уменьшения неудобств, связанных с появлением асимметричных звезд, выбор должен быть сделан таким образом, чтобы сетка на возможно большем участке совпадала с границей. На первых этапах расчета не следует использовать мелкую сетку, поскольку это связано с непроизводительной затратой труда и приводит к медленной сходимости. Напротив, первый расчет должен быть выполнен с помощью крупной сетки, а когда для нее будет получена удовлетворительная сходимость, следует перейти к более мелкой сетке. Размер ячейки новой сетки удобно принять равным половине размера ячейки предыдущей сетки; тогда новые узлы будут расположены посередине между старыми. Значения потенциала новых узлов находятся с удовлетворительным приближением в результате линейной интерполяции (поскольку она дает точность, эквивалентную точности уравнений в конечных разностях). Последовательное уменьшение размера ячейки сетки должно производиться до тех пор, пока не будет получена достаточно мелкая сетка (см. § 11-6).

Применение мелких сеток, конечно, должно быть ограничено небольшими областями, для которых точность расчета особенно важна.

Составление расчетного формуляра. После выбора наиболее рационального размера ячейки сетки необходимо вычертить границу (и сетку) в таком масштабе, чтобы было достаточно места для выполнения расчетов на сетке. Целесообразно выполнять чертеж на плотной бумаге, а расчеты производить на накладывае-

мых на него листах кальки; это позволяет сохранить чертеж при стирании записей резинкой.

Десятичные дроби. Десятичные дроби вообще не рекомендуется использовать при расчетах, поскольку они неудобны и увеличивают опасность появления ошибок. Вместо этого при необходимости (например, если десятичные дроби присутствуют в исходных данных, при уменьшении остатков до значений порядка единицы или переходе к более мелкой сетке) все числа следует умножить на 10 в соответствующей степени и выполнять расчеты в целых цифрах. Единственное исключение из этого правила может быть допущено на последних этапах расчета для узлов, связанных с асимметричными звездами. Изменения остатка в асимметричных звездах, вообще говоря, связаны с появлением десятичных дробей. Но даже для таких звезд на первых этапах расчета вполне достаточно учитывать лишь целые числа, округляя числа, содержащие десятичные дроби. Это оправдано, благодаря тому что погрешности в определении остатков (возникающие в результате округления) легко могут быть исправлены на любом этапе расчета путем пересчета остатков, исходя из текущих значений потенциала. Более подробно проверка описана ниже.

Расчет. Как было показано выше, задача расчета заключается в том, чтобы сделать остатки и их алгебраическую сумму малыми величинами и распределить их равномерно между узлами сетки. Следует по возможности шире применять блочную (или линейную) релаксацию и переходить к узловой релаксации лишь тогда, когда дальнейшее составление блоков становится нецелесообразным. Внимание в первую очередь должно быть обращено на области, где остатки особенно велики, а также на области, где они окружены остатками противоположного знака, поскольку в таких случаях как положительные, так и отрицательные остатки могут быть сняты одновременно.

Проверка. Выше уже отмечалось, что возникающие в ходе расчетов ошибки в основном исправляются автоматически, однако их следует свести к минимуму внимательными вычислениями, поскольку они замедляют сходимость. Для того чтобы получить уверенность в отсутствии расхождения между значениями потенциала и остатка в узлах (приводящего к ошибке в определении потенциала, если остатки равны нулю), в ходе расчета

важно время от времени, особенно при переходе к более мелкой сетке, производить пересчет остатков, исходя из текущих значений потенциала.

11-3-5. Использование значений потенциала в узлах сетки; емкость трехжильного прямоугольного кабеля

В качестве примера типовой задачи, которую нетрудно решить релаксационным методом, и для того, чтобы показать способ определения емкости, исходя из значений потенциала, рассмотрим электрическое потенциальное поле прямоугольного кабеля с заземленной оболочкой и тремя прямоугольными жилами, изображенного на рис. 11-9. Размеры для упрощения задачи выбраны таким образом, что границы проводников и оболочки совпадают с линиями квадратной сетки. Требуется определить емкость между левым проводником и всеми другими проводящими частями. Это нетрудно сделать, исходя из разностей значений потенциала в соседних узлах (см. ниже), и, как показывает опыт, для обеспечения удовлетворительной точности (2—3%) требуется конечная сетка не крупнее показанной на рисунке. Расчет, конечно, должен быть начат с более крупной сетки.

Результирующая емкость левого проводника находится в результате определения полного потока, входящего в проводник (или выходящего из него), при единичной разности потенциалов между проводником и соседними проводящими частями. При использовании релаксационного метода потенциал проводника удобно принять равным 1 000, а потенциал двух других проводников и оболочки положить равным нулю. Тогда умень-

Результирующая емкость левого проводника находится в результате определения полного потока, входящего в проводник (или выходящего из него), при единичной разности потенциалов между проводником и соседними проводящими частями. При использовании релаксационного метода потенциал проводника удобно принять равным 1 000, а потенциал двух других проводников и оболочки положить равным нулю. Тогда умень-

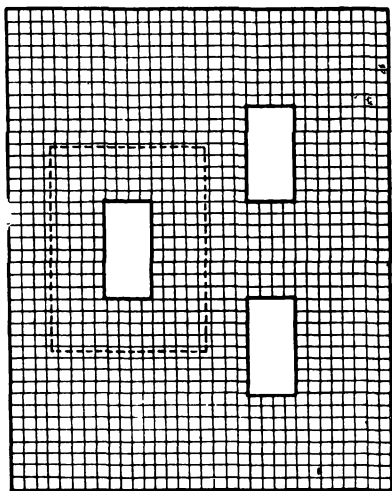


Рис. 11-9.

шение остатков до 1 или 2 обеспечит удовлетворительную точность.

Полный поток находится путем интегрирования нормальной составляющей электрического смещения, определяемой исходя из градиента потенциала, по соответствующему контуру, охватывающему проводник. Контур по возможности должен быть выбран таким образом, чтобы он не проходил в областях, где скорость изменения градиента потенциала велика. Этому условию удов-

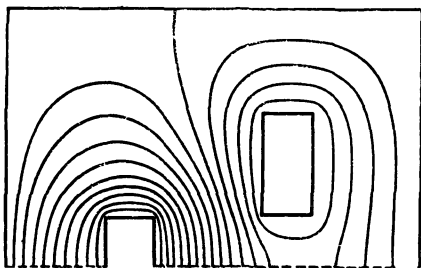


Рис. 11-10.

летворяет контур, показанный на рис. 11-9 пунктиром. Далее, обозначив через ψ_i потенциал узла, находящегося в непосредственной близости к контуру внутри него, а через ψ_0 потенциал соседнего узла вне контура, определим нормальную составляющую градиента на контуре в виде $(\psi_i - \psi_0)/h$ (см. § 11-6). Таким образом, если $\epsilon\epsilon_0$ — диэлектрическая проницаемость изоляционного материала, а N — число ячеек сетки, пересекаемых контуром, то полный поток составляет:

$$\epsilon\epsilon_0 \sum_{n=1}^N (\psi_{in} - \psi_{on})$$

(при условии, что величина градиента в пределах размера ячейки сетки h постоянна), а емкость равна:

$$0,001 \epsilon\epsilon_0 \sum_{n=1}^N (\psi_{in} - \psi_{on}). \quad (11-12)$$

Емкость проводника или любой другой соседней проводящей части находится с помощью уравнения (11-12) для соответствующего контура, охватывающего только рассматриваемый проводник.

Картины поля могут быть получены из решения, найденного релаксационным методом, с использованием линейной интерполяции для определения значений потенциала в точках, не совпадающих с узлами сетки. Это было сделано для рассмотренной выше задачи в предположении, что потенциал левого проводника равен 1000, а потенциал двух правых проводников 500; поле в этом случае симметрично; одна половина его изображена на рис. 11-10*.

11-4. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

11-4-1. Введение

При решении уравнений в конечных разностях итерационным методом, так же как и при использовании релаксационного метода, производится непрерывное изменение значений потенциала до тех пор, пока все уравнения не будут удовлетворены с достаточной степенью точности. Положения относительно устойчивости и точности решения для обоих методов аналогичны, однако все итерационные методы характеризуются двумя особенностями, которые отличают их от релаксационного метода. Во-первых, они разработаны для использования в полностью автоматическом цикле операций, где каждое из уравнений (и, следовательно, каждый узел сетки) рассматривается в ходе расчетов по очереди. Во-вторых, уточненные значения потенциала находятся непосредственно из уравнений в конечных разностях и понятие об остатке в этом отношении не используется. Первая из отмеченных выше особенностей проявляется, конечно, в том, что основной итерационный метод имеет более медленную сходимость, чем релаксационный метод в руках опытного расчетчика. Однако она в то же время позволяет легко запрограммировать итерационные методы для расчетов на вычислительной машине и, таким образом, исключает необходимость выполнения вручную расчетов, которые при использовании релаксационного метода могут быть очень трудоемкими.

Возможность применения вычислительных машин является большим преимуществом данного метода, и, действительно, повышение интереса к итерационным методам тесно связано с развитием вычислительных машин. В течение последних 10 лет было предпринято интенсив-

* Этот рисунок получен из решения, найденного J. Webb'ом.

ное исследование этой проблемы со стороны математиков, что привело к непрерывному созданию и совершенствованию действенных методов. Однако наилучшим из них с точки зрения общего применения для решения практических задач в настоящее время является так называемый *экстраполяционный метод Либмана*, сочетающий быструю сходимость и простоту.

Далее рассмотрены основные предпосылки итерационных методов: построение цикла и исследование сходимости. Вначале описаны два простейших метода Ричардсона и Либмана, а затем подробно изложен экстраполяционный метод Либмана. В заключительном параграфе кратко освещены другие методы и сделаны общие выводы.

11-4-2. Основные положения и методы

Обозначение узлов. При использовании любого итерационного метода каждый узел сетки рассматривается по очереди в установленном, повторяющемся цикле. Для более удобного определения узлов при расчетах и анализе каждый из них обозначается своим номером или двумя номерами. В обычной прямоугольной сетке из $(p+1)(q+1)$ узлов, охватываемых границей (рис. 11-11), каждый узел (и связанные с ним величины) может быть определен двумя номерами (h, k) , где $1 \leq h \leq (p+1)$ и $1 \leq k \leq (q+1)$, или одним номером $(h-1)(q+1) + k$, где 1 определяет узел в левом нижнем углу, а столбцы узлов проходят в каждом цикле слева направо (возрастание h) и снизу вверх (возрастание k).

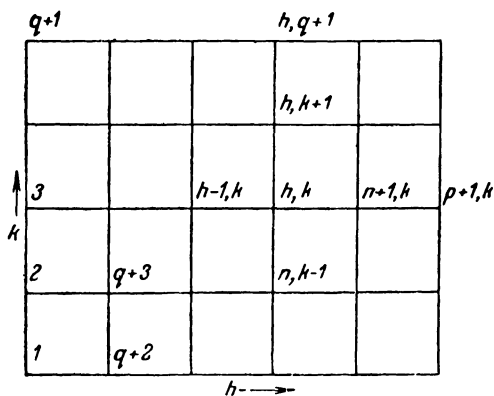


Рис. 11-11.

Исследование сходимости. Хотя понятие об остатке не играет роли при изменении значений потенциала (как показано ниже), оно лежит в основе наиболее обоснованной проверки сходимости решения и в этом отношении сохраняются все по-

ложения, действительные для релаксационного метода (см. § 11-3-2). Однако, когда соответствующая информация введена в память вычислительной машины, очень трудно представить распределение остатков и этот практический показатель сходимости решения в общем случае не принимается во внимание. Обычно устанавливают верхний предел максимального значения конечных остатков и продолжают итерации до тех пор, пока все остатки не станут меньше этого значения. В связи с простотой расчетов максимальный остаток можно принять гораздо меньшим (например, 0,0001%), чем для релаксационного метода, поэтому одно условие обычно удовлетворяется (хотя при желании нетрудно определить также результирующую алгебраическую сумму всех остатков). Другие положения, касающиеся точности решения, изложены в § 11-6.

Теперь перейдем к рассмотрению уравнений, используемых в различных итерационных методах для изменения значений потенциала. Два метода, которые будут описаны в этом параграфе, приведены главным образом с целью последовательно и просто обосновать экстраполяционный метод Либмана (описанный в § 11-4-3), исходя из простейшего итерационного метода.

Метод Ричардсона. В простейшем (и предложенном первым) итерационном методе, разработанном Ричардсоном [Л. 11-4], каждое новое значение потенциала в центральном узле звезды определяется из условия, чтобы оно точно удовлетворяло основному уравнению в конечных разностях для предшествующих значений потенциала в других узлах. Таким образом, если обозначить через A^n значение потенциала после n -го итерационного цикла, то уравнение Пуассона в конечных разностях для симметричной звезды (11-8) в форме Ричардсона запишется следующим образом:

$$A_0^{n+1} = \frac{1}{4} (A_1^n + A_2^n + A_3^n + A_4^n + h^2 W), \quad (11-13)$$

или в более общем виде с использованием обозначения двумя номерами (описанного выше)

$$A_{h,k}^{n+1} = \frac{1}{4} (A_{h+1,k}^n + A_{h,k+1}^n + A_{h-1,k}^n + A_{h,k-1}^n + h^2 W) \quad (11-14)$$

(рис. 11-11). Уравнения, аналогичные (11-14), справедливы, конечно, и для асимметричных звезд.

Как и следовало ожидать, метод Ричардсона характеризуется плохой сходимостью (сравнительные цифры приведены в табл. 11-1, стр. 315) и его недостаток состоит в том, что в памяти машины должны храниться две полные совокупности значений потенциала [для n -й и $(n+1)$ -й итераций]. В связи с указанными недостатками этот метод практически не применяется.

Метод Либмана. Простая модификация метода Ричардсона приводит к методу непрерывной подстановки, предложенному Либманом [Л. 11-5], в котором на каждом этапе расчета используются только что найденные значения потенциала. При прохождении узлов сетки столбец за столбцом слева направо, начиная с нижнего узла каждого столбца ($k=1$), уравнение Пуассона в конечных разностях для симметричной звезды может быть представлено в следующем общем виде:

$$A_{h,k}^{n+1} = \frac{1}{4} (A_{h+1,k}^n + A_{h,k+1}^n + A_{h-1,k}^{n+1} + A_{h,k-1}^{n+1} + h^2 W). \quad (11-15)$$

Этот метод рационален, поскольку он требует сохранения в памяти вычислительной машины только одной полной совокупности значений потенциала (а не двух, как в методе Ричардсона). Кроме того, его сходимость вдвое выше, чем метода Ричардсона (это нетрудно представить себе интуитивно, поскольку каждый расчет исходит из двух старых и двух новых значений потенциала; более детально данный вопрос изложен в [Л. 11-6]), хотя по сравнению с более усовершенствованными методами он все-таки медлителен и далее не рассматривается. Ниже описан *экстраполяционный* метод Либмана, который хотя и использует тоже одну полную совокупность значений потенциала, имеет гораздо более высокую сходимость.

11-4-3. Экстраполяционный метод Либмана

Описание метода. Экстраполяционный метод Либмана, предложенный Франкелом [Л. 11-6] и Янгом [Л. 11-7] независимо, является наиболее универсальным и полезным из всех быстро сходящихся итерационных методов, в связи с чем он описан здесь более или менее подробно. Этот метод эквивалентен последовательной узловой релаксации с перебором (отсюда название

экстраполяционный). Он представляет собой развитие метода Либмана, основанное на введении коэффициента α . Новое значение потенциала определяется как сумма старого значения и увеличенной в α раз разности между значением, определяемым уравнением (11-15), и старым значением, т. е.

$$A_{h,k}^{n+1} = A_{h,k}^n + \frac{\alpha}{4} (A_{h+1,k}^n + A_{h,k+1}^n + A_{h-1,k}^{n+1} + A_{h,k-1}^{n+1} + h^2 W - 4 A_{h,k}^n). \quad (11-16)$$

α является коэффициентом сходимости или коэффициентом релаксации, определяющим степень перебора. Можно показать, что его значение должно находиться в пределах 1—2. Если $\alpha=1$, то уравнение (11-16) превращается в уравнение (11-15) для обычного метода Либмана, а при $\alpha \geq 2$ процесс решения становится неустойчивым. Если α лежит в указанных пределах, то сходимость лучше, чем при $\alpha=1$, и при некотором оптимальном значении α_b , различном для каждой из задач, скорость сходимости существенно возрастает. Так, например, задача Дирихле (заданное распределение потенциала на границе) для квадрата, на сторону которого приходится 20 узлов, может быть решена при снижении максимальной погрешности в 10^{10} раз за 70 итераций (по сравнению с примерно 840 итерациями для обычного метода Либмана). На быстродействующей вычислительной машине этот расчет потребует около 2 мин. Полное сравнение методов приведено в табл. 11-1 (стр. 315).

Сходимость решения. Теоретически показано (см. [Л. 11-7 или 11-13]), что для получения устойчивого сходящегося процесса решения число итераций N , требуемое для уменьшения наибольшей ошибки в любом узле до ϵ -й части некоторого первоначального значения, определяется выражением вида:

$$N \equiv -F \ln \epsilon, \quad (11-17)$$

где F — функция, зависящая от конфигурации границ и граничных условий, числа узлов и коэффициента сходимости¹.

¹ В действительности $F = -(\ln \lambda)^{-1} \equiv Q^{-1}$, где $\lambda = 1 - Q$ определяется так же, как и в уравнении (11-18).

Типичные кривые для N в функции ϵ для одной и той же задачи, но при различных значениях α изображены на рис. 11-12. Аналогичные кривые характерны для уменьшения наибольшего остатка, и, действительно, практикой установлено, что они приближенно справедливы для среднего абсолютного значения остатка.

Для одной из трех кривых, обозначенной A , максимальная ошибка уменьшается наиболее заметно (в указанных пределах изменения N); поэтому значение α , отвечающее этой кривой, является наиболее подходящим (из трех) для расчетов. Если проанализировать

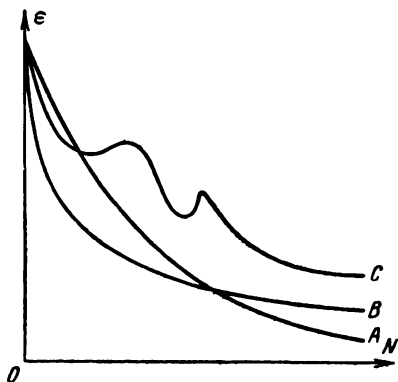


Рис. 11-12.

аналогичные кривые для ряда значений α в пределах 1 — 2, то обнаружится, что для одного определенного значения α *результатирующее* уменьшение ошибки после *большого* числа итераций более значительно, чем для всех других, и это значение определяется как *оптимальный коэффициент сходимости* для данной задачи.

Следует, однако, отметить, что быстрота сходимости, получаемая для

любого значения α , изменяется в широких пределах на различных этапах расчета и, кроме того, что на первых этапах сходимость, которую дает применение оптимального коэффициента, не обязательно наилучшая. Эти явления обусловлены изменением распределения остатков, происходящим в ходе расчетов, и соответствием его конкретной использованной степени перебора. Например, если остатки в пределах больших областей поля имеют одинаковый знак, то наиболее быструю мгновенную сходимость обеспечивает высокое значение α (дающее высокую степень перебора); однако при равномерном распределении положительных и отрицательных остатков по всему полю наилучшим является низкое значение α (возможно, 1).

Предыдущий анализ имел в виду устойчивый процесс сходимости, однако следует иметь в виду возможность

неустойчивого процесса решения. Как упоминалось выше, при $\alpha \geq 2$ процесс расходится, однако и меньшие, чем 2, но высокие значения α могут вызвать колебания значений остатков и это служит показателем того, что значение α слишком велико для того, чтобы получить хорошую результирующую сходимость (см. кривую C на рис. 11-12).

Необходимо отметить, что уравнение вида (11-17) относится также и к другим итерационным методам, которые были предложены до настоящего времени. Эти методы описаны в § 11-4-5, где приведено сравнение скоростей сходимости нескольких методов и даны значения F для задачи Дирихле в квадрате.

Определение оптимального коэффициента сходимости. Несмотря на то, что любое значение α в пределах 1—2 приводит к улучшению сходимости, для полного использования преимуществ экстраполяционного метода Либмана важно принять значение, близкое к оптимальному. Однако нахождение оптимального коэффициента сходимости встречает серьезные трудности. За исключением некоторых простых конфигураций границ, для задачи Дирихле найти α_b аналитическим путем невозможно, а затруднения, связанные с его эмпирическим определением, очевидны из предшествующего анализа. Можно также указать на невозможность предопределения в общем случае числа итераций, требуемого для заданного уточнения решения при произвольном значении α , хотя практикой установлено, что оно изменяется довольно существенно. Ниже рассмотрено теоретическое определение α_b , возможное в простых случаях, после чего полученные выражения использованы в качестве основы для некоторых приближенных методов нахождения α_b в задачах с более сложными конфигурациями границ и граничными условиями.

Франкел и Янг показали, что оптимальное значение коэффициента сходимости α_b для задачи Дирихле определяется выражением

$$\alpha_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda}}, \quad (11-18)$$

где λ — преобладающее собственное значение (см. [Л. 36]) матрицы, характеризующей решение уравнения (11-10) по методу Либмана [соответствующему уравнению (11-16)] [Л. 11-6, 11-7 и 11-13]. Теоретическое опре-

деление λ в общем случае очень сложно, однако для квадратной области при числе узлов на сторону $p+1$ его значение равно:

$$\lambda = \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right), \quad (11-19)$$

а для прямоугольника с числом узлов $(p+1)(q+1)$ можно показать, что

$$\alpha_b = 2 \left(1 - \pi \sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}} \right), \quad (11-20)$$

где p и q достаточно велики (как показывает опыт, не менее 15).

Для всех других конфигураций границ λ можно определить только эмпирическим путем, который заключается (см. [Л. 11-7]) в выполнении итераций при $\alpha=1$ до тех пор, пока не будет найдена предельная величина отношения абсолютных значений максимальных остатков R , появляющихся в следующих один за другим циклах. Можно показать, что

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{R^n}, \quad (11-21)$$

и практически выбор $n=100$ приводит к точному значению λ , которое затем используется в уравнении (11-18) (см. [Л. 11-8]). На выполнение 100 итераций может, конечно, потребоваться много времени, и в общем случае этот метод может найти применение только для больших и повторяющихся задач.

Однако для быстрого приближенного определения α_b может быть использован простой способ, предложенный Янгом (см. [Л. 11-8]). Он заключается в применении уравнения (11-20) для прямоугольника, имеющего такую же площадь, как и исследуемая область, и особенно полезен для небольших исследований (см. § 11-4-4). Кроме того, согласно [Л. 11-7 и 11-8], если α становится больше α_b , то число итераций, требуемых для получения заданной точности, возрастает в меньшей степени, чем в том случае, когда α становится меньше α_b . Поэтому при использовании описанного способа (или любого другого) целесообразно взять завышенное, а не заниженное значение α , в связи с чем может оказаться предпочтительным исходить при его определении из квадрата (а не из прямоугольника), имеющего ту же площадь, что и рассматриваемая область.

За исключением задачи Дирихле, определение оптимального значения α оказалось невозможным, поэтому для задач, в которых граничные условия задаются для градиента, должны использоваться полностью эмпирические методы. Первоначальную оценку α лучше всего производить с помощью методов, описанных выше для задачи Дирихле, поскольку для заданной области подавляющее большинство совместных уравнений одинаково и для обоих случаев можно ожидать аналогичных значений α_b . Это приближенное значение может служить ориентиром при выборе ряда значений α , быстроту сходимости для каждого из которых можно исследовать опытным путем.

В заключение важно отметить, что при анализе скорости сходимости, получаемой при различных значениях α (для любого типа задач), выбор α_b не должен исходить из результатов, найденных при небольшом числе итераций (см. рис. 11-12) и приведенное выше определение (α_b). В общем случае необходимо исследовать сходимость при каждом значении α по крайней мере для 100 итераций. Это, конечно, может составить большую часть полного числа итераций, требуемых для нахождения решения с заданной точностью, и применение описанного метода не следует рекомендовать, за исключением тех случаев, когда найденное таким путем значение α_b будет использовано для очень продолжительного расчета. Для расчета, который, по всей вероятности, будет достаточно коротким (см. «Практические рекомендации» ниже), лучше всего исходить из приближенного значения, определяемого для прямоугольника с одинаковой площадью.

Практические рекомендации. Так же как и для релаксационного метода, можно привести несколько общих указаний относительно применения метода. Ряд рекомендаций, основанных на анализе и опыте, изложен ниже.

а) Число итераций, требуемых для получения заданного снижения ошибки, возрастает примерно пропорционально квадратному корню из числа узлов.

б) Наилучшая сходимость характерна для «простых» конфигуральных границ, таких, как квадрат, и ухудшается для более сложных областей, особенно имеющих узкие зоны (см., например, воздушный зазор на рис. 11-21).

в) При заданных конфигурации границ и числе узлов сходимость для краевых задач второго и третьего рода хуже, чем для краевых задач первого рода.

г) При использовании сильно завышенного значения α зависимость изменения остатка в функции числа итераций становится колебательной.

д) Если задание начального распределения потенциалов имеет существенное значение для более продолжительных расчетов, то для коротких расчетов, по-видимому, лучше произвести дополнительные итерации и не тратить время на выполнение ориентировочного расчета и подготовку данных для вычислительной машины.

Наконец, следует упомянуть об использовании для получения быстрой сходимости изменяющегося в ходе итерационного процесса коэффициента сходимости. Хотя определение оптимального значения α на каждом этапе расчета очень сложно даже методом повторных попыток, предложен ряд вполне удовлетворительных расчетных схем, в которых используются переменные, хотя и не обязательно оптимальные значения α . В одной из них, описанной в [Л. 11-9], α принимает значения 1 и 2, причем 1 используется в тех случаях, когда соседние остатки имеют противоположные знаки, а 2, когда они имеют одинаковые знаки. Второй метод, где одно «наилучшее» значение находится автоматически, предложен в [Л. 11-10].

11-4-4. Поле тока, протекающего в I-образном проводнике

Для иллюстрации применения экстраполяционного метода Либмана определим поле тока, протекающего в обладающем бесконечно большой магнитной проницаемостью проводнике и распределенного равномерно по его поперечному сечению, имеющему I-образную форму (напоминающую сечение железнодорожного рельса). Конфигурация границы проводника и картина линий потока изображены на рис. 11-13. Эта картина может быть использована для определения индуктивности проводника, обусловленной потоком, замыкающимся внутри сечения (см. § 2-2-4).

Поле симметрично относительно горизонтальной и вертикальной линий, проведенных посередине проводника, в связи с чем достаточно рассмотреть четвертую

часть его сечения (рис. 11-14) и, таким образом, свести к минимуму число итераций при расчете. Число узлов, приходящееся на каждую сторону границы, указано на рисунке. Вдоль границы $GBCDE$ значение векторного

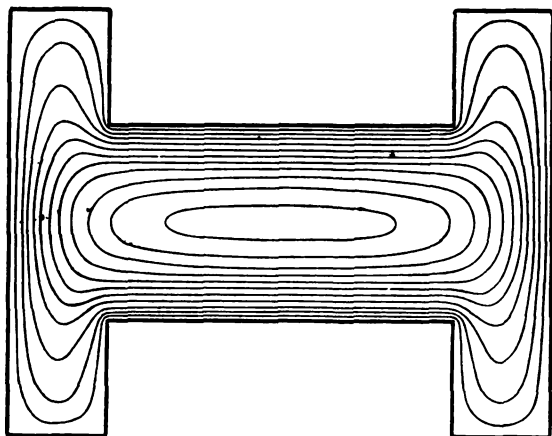


Рис. 11-13.

потенциала постоянно (см. § 5-3), а вдоль линии симметрии EFG нормальная составляющая градиента векторного потенциала равна нулю. Первое граничное условие выполняется, если положить $A = \text{const}$ для всех соответствующих узлов, а второе удовлетворяется при использовании простого уравнения в конечных разностях (11-48), выведенного в § 11-5-4. В узлах, расположенных во внутренней области границ, A удовлетворяет уравнению Пуассона, которое выражено в конечно-разностной итерационной форме зависимостью (11-16). Начальные значения A во всех узлах при расчете были приняты равными нулю.

Значение α можно найти по методу «прямоугольника равновеликой площади», заметив, что на стороны

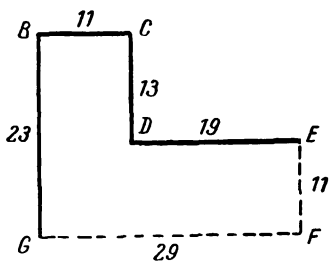


Рис. 11-14.

эквивалентного прямоугольника приходится 15 и 29 узлов ($p=14$; $q=28$). Для этого случая согласно уравнению (11-20) оптимальное значение a равно 1,723. Оказалось, что найденное значение a дает удовлетворительную сходимость; уже после 70 итераций остаток в каждом узле становится меньше 0,0068 (при среднем значении A , равном 60), что свидетельствует о достаточной точности решения.

11-4-5. Другие методы с быстрой сходимостью

Хотя экстраполяционный метод Либмана вследствие своей простоты, универсальности и сравнительно хорошей сходимости является наиболее полезным и общим из всех предложенных до сих пор итерационных методов, существует ряд других методов с быстрой сходимостью, которые в последнее время привлекли внимание многих математиков. Однако, несмотря на то, что некоторые из этих методов позволяют получить заданную точность решения за меньшее число *итераций*, общее *время*, затрачиваемое на нахождение решения, в связи с возросшим числом арифметических операций может оказаться таким же, как и для экстраполяционного метода Либмана. Кроме того, затрудняется определение коэффициентов сходимости и значительно усложняется программирование цикла операций. Поэтому применять эти методы не рекомендуется, за исключением случаев простых конфигураций границ или очень большого числа узлов.

Эти дополнительные методы можно разделить на две группы. В первой группе рассматриваются одновременно линии или блоки узлов с использованием экстраполяции или без нее. Такие методы линейной и блочной итерации описаны в [Л. 11-11], а их применение с чередующимся изменением (альтернативой) направления обхода сетки (ускоряющим сходимость) в [Л. 11-12]. Общий анализ всех методов приведен в [Л. 11-13 и 11-14].

Вторая группа методов с быстрой сходимостью, основанная на использовании полиномов Чебышева (см. [Л. 16 и 30]), была впервые предложена в [Л. 11-15], а скорость сходимости, которую они позволяют получить, указана в табл. 11-1. Метод нельзя использовать в сочетании с экстраполяцией, и можно отметить,

Метод	Длительность итерационного цикла	Теоретическое число итераций $\{K = -\ln \epsilon, \text{ см. (11-17)}\}$	Число итераций $\left(\begin{matrix} p=19; \\ \epsilon=10^{-10} \end{matrix}\right)$	Теоретическое число итераций с ускорением по Чебышеву
Ричардсона	$k4p^2$	$K2p^2/\pi^2$	1680	Kp/π
Линейный Ричардсона . .	$k4p^2$	Kp^2/π^2	840	$Kp/\sqrt{2}\pi$
Либмана	$k4p^2$	Kp^2/π^2	840	$Kp/\sqrt{2}\pi$
Линейный Либмана . . .	$k4p^2$	$Kp^2/2\pi^2$	420	$Kp/2\pi$
Экстраполяционный Либмана (α_b)	$k7p^2$	$Kp, 2\pi$	70	—
Экстраполяционный линейный Либмана (α_b)	$k7p^2$	$Kp/2\sqrt{2}\pi$	50	—
Линейный Либмана с альтернативой по направлению	$k7p^2$	$Kp/4\sqrt{2}\pi$	25	—
Экстраполяционный Либмана с альтернативой по направлению	$k9p^2$	$\frac{K\sqrt{p}}{4(2)^{1/4}\pi}$	7	—

что узловый метод Либмана с ускорением по Чебышеву, помимо большей сложности, не дает лучшей сходимости, чем экстраполяционный узловый метод Либмана.

Следует также упомянуть еще об одном методе, который в будущем может оказаться наиболее действенным из всех. Это метод «граничной контракции», предложенный в [Л. 11-16 и 11-17], согласно которому значения потенциала узла выражаются только через значения потенциала на границе.

В заключение в табл. 11-1 приведено сравнение скоростей сходимости нескольких итерационных методов для задачи Дирихле в случае квадрата с $(p+1)^2$ узлами.

11-5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ГРАДИЕНТА

11-5-1. Введение

Предшествующий анализ был ограничен задачами, в которых на границах задавалась потенциальная функция, однако в этом параграфе рассмотрены более общие типы граничных условий. Их анализ требует углубления в детали, поэтому он был отложен до этого этапа, с тем чтобы предоставить читателю возможность как можно

скорее составить себе общее представление о рассматриваемых методах. Уравнения в конечных разностях, которые будут выведены ниже, конечно, одинаково пригодны для релаксационного и итерационного методов, так же как и приведенные выше уравнения.

Подлежащие рассмотрению граничные условия относятся к прямолинейным и криволинейным границам, совпадающим и не совпадающим с узлами сетки, и к поверхностям раздела между областями, которые в общем случае имеют различные электрические или магнитные постоянные и разные значения плотности тока. Очевидно, существует очень много различных комбинаций перечисленных выше факторов и нет ни возможности, ни необходимости детально рассматривать уравнения в конечных разностях для каждого случая. Однако наиболее важные уравнения получены в общем виде и приведены некоторые полезные частные модификации. Уравнения для других случаев читатель легко выведет сам по мере необходимости.

Границы делятся на две группы в зависимости от того, совпадают ли они с узлами сетки или нет. Границы, совпадающие с узлами, параллельные линиям сетки и диагональные по отношению к ним, рассмотрены в § 11-5-2; границы, не совпадающие с узлами, параллельные линиям сетки (но не совпадающие с ними), а также общий случай криволинейных границ описаны в § 11-5-3. Параграф 11-5-4 посвящен граничным условиям для линий симметрии поля. В заключение анализа приведены два примера.

11-5-2. Границы, совпадающие с узлами сетки

Для каждой из двух разновидностей границ, совпадающих с узлами сетки, а именно параллельных и диагональных по отношению к сетке, требуются два разных уравнения в конечных разностях: одно — для узлов, расположенных в углах границы, а другое — для остальных узлов, лежащих на границе. Для той или другой разновидностей границ вначале рассмотрены узлы, не примыкающие к углам, а анализ параллельных границ предшествует анализу диагональных границ.

Наиболее общие условия на границе или поверхности раздела, которые могут встретиться в практике, относятся к двум областям, имеющим различные магнитные

проницаемости, при протекании в одной из них тока, и эти условия приняты для каждой из описанных выше разновидностей границ. Для особенно полезного случая параллельных границ представлен также ряд важных частных модификаций уравнений.

Границы, параллельные линиям сетки; общий случай. Рассмотрим границу и узлы, изображенные на рис. 11-15. Допустим, что в области a , лежащей слева от границы, протекает ток, распределенный равномерно с плотностью J , а область b , лежащая справа от границы, обесточена. Кроме того, предположим, что индекс a определяет величины A , μ и W в области a , а индекс b относится к тем же величинам в области b .

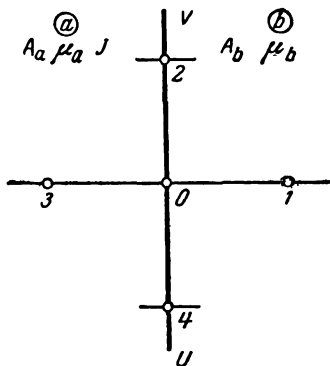


Рис. 11-15.

Для всех узлов в области a , включая лежащие на границе, удовлетворяется уравнение Пуассона, поэтому согласно уравнению (11-8) для узла 0 имеем:

$$A_{a1} + A_{a2} + A_{a3} + A_{a4} - 4A_{a0} + h^2 W_a = 0, \quad (11-22)$$

а для всех узлов в области b справедливо уравнение Лапласа, в связи с чем из (11-8) при $W=0$ для узла 0 следует:

$$A_{b1} + A_{b2} + A_{b3} + A_{b4} - 4A_{b0} = 0. \quad (11-23)$$

Однако потенциалы A_{a1} и A_{b3} не имеют физического смысла, поскольку узлы 1 и 3 лежат соответственно в областях a и b . Такие потенциалы называются *фиктивными* и часто применяются при анализе влияния границ. Хотя они и не используются практически, тем не менее их можно рассматривать как математические величины, необходимые для вывода уравнения, относящегося к узлу, лежащему на границе. Это объясняется тем, что в граничные условия между двумя областями, выраженные в конечных разностях, также войдут фиктивные

величины A_{a1} и A_{b3} и их, таким образом, можно исключить с помощью уравнений (11-22) и (11-23).

Граничные условия дают два следующих уравнения: из условия непрерывности векторного потенциала между двумя областями

$$A_a = A_b; \quad (11-24)$$

из условия непрерывности тангенциальной составляющей напряженности поля при переходе границы

$$\frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\partial A_a}{\partial n} \right) = \frac{1}{\mu_b} \left(\frac{\partial A_b}{\partial n} \right), \quad (11-25)$$

где $\partial A/\partial n$ — нормальная по отношению к границе составляющая градиента векторного потенциала.

Если ввести значения потенциала узла m , лежащего на границе, то уравнение (11-24) даст:

$$A_{am} = A_{bm} = A_m, \quad (11-26)$$

а в результате подстановки значений $\partial A_a/\partial n$ и $\partial A_b/\partial n$ в уравнение (11-25) получим:

$$\frac{1}{\mu_a} (A_{a1} - A_{a3}) = \frac{1}{\mu_b} (A_{b1} - A_{b3}). \quad (11-27)$$

Фиктивные потенциалы A_{a1} и A_{b3} исключаются из уравнения (11-27) непосредственной подстановкой их значений, определяемых соответственно из уравнений (11-22) и (11-23). Далее, используя (11-26) и введя обозначение $R = \mu_b/\mu_a$, найдем уравнение в конечных разностях для типового узла 0 , лежащего на границе, в окончательном виде:

$$A_{b1} \frac{2}{1+R} + A_2 + A_{a3} \frac{2R}{1+R} + A_4 - 4A_0 + \frac{R}{1+R} h^2 W_a = 0. \quad (11-28)$$

Граница между областями полей Пуассона и Лапласа; одинаковые магнитные проницаемости. Часто применяется уравнение для узлов, лежащих на границе между областями, имеющими одинаковые магнитные проницаемости, когда в одной из них протекает ток, а в другой тока нет. Его нетрудно получить, положив в уравнении (11-28) $\mu_a = \mu_b$, т. е. $R = 1$, откуда

$$A_{b1} + A_2 + A_{a3} + A_4 - 4A_0 + \frac{1}{2} h^2 W_a = 0. \quad (11-29)$$

Граница между двумя областями полей Лапласа; различные магнитные проницаемости. Уравнение для узла, лежащего на границе между двумя областями, свободными от токов, с различными магнитными проницаемостями можно получить, положив в уравнении (11-28) $W_a=0$. В этом случае может потребоваться также уравнение для скалярного потенциала. Тогда, поскольку граничное условие (11-27) заменяется условием

$$\mu_a(\psi_{a1} - \psi_{a3}) = \mu_b(\psi_{b1} - \psi_{b3}) \quad (11-30)$$

(для нормальной составляющей магнитной индукции), требуемое значение R обратно приведенному выше и уравнение в конечных разностях примет вид:

$$\psi_{b1} \frac{2}{1+R} + \psi_2 + \psi_{a3} \frac{2R}{1+R} + \psi_4 - 4\psi_0 = 0, \quad (11-31)$$

где $R = \mu_a/\mu_b$ для магнитных полей и $R = \epsilon_a/\epsilon_b$ для электрических полей.

Если $R=1$, то уравнение (11-31) превращается в простое уравнение Лапласа в конечных разностях для симметричной звезды.

Граница между двумя областями полей Лапласа; магнитная проницаемость одной из них бесконечно велика. Если магнитная проницаемость области a бесконечно велика, то поток пересекает границу под прямым углом. Это условие для нормальной составляющей градиента выражается уравнением

$$2A_{b1} + A_2 + A_4 - 4A_0 = 0, \quad (11-32)$$

которое нетрудно получить, положив в уравнении (11-28) $R=0$.

Угловой узел для границ, параллельных сетке; общий случай. Приведенные выше уравнения относятся ко всем узлам, за исключением узлов, лежащих в углах границы; для таких углов требуется другое уравнение. Рассмотрим прямой угол, образуемый поверхностью раздела между областями a и b , имеющими те же магнитные проницаемости и токи, что и прежде (рис. 11-16). В связи с представлением поля дискретными точками действительная конфигурация границ не поддается точному учету и для вывода уравнения, отно-

сящегося к угловому узлу, необходимо ввести две дополнительные границы. Они расположены симметрично по отношению к углу и представлены пунктирными линиями, образующими углы α и β . Для узла θ , лежащего на границе NOP , действительно одно и то же уравнение при любом значении α в пределах $\frac{\pi}{2} - 3\frac{\pi}{2}$ и ана-

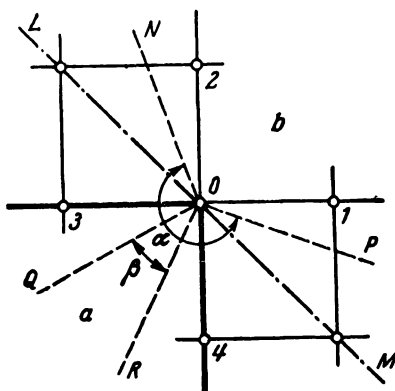


Рис. 11-16.

логичным образом одно (но другое) уравнение справедливо для того же узла, лежащего на границе QOR , при любом значении β в пределах $0 - \pi/2$. Исходя из этих двух уравнений, находим уравнение для узла θ , лежащего на действительной границе, которое дает среднее из двух значений A_0 .

Уравнение для границы QOR нетрудно получить на основании анализа случая, когда $\beta=0$ (при этом граница исчезает); оно имеет вид:

$$A_{b1} + A_{b2} + A_{b3} + A_{b4} - 4A_0 = 0. \quad (11-33)$$

В то же время уравнение для границы NOP в частном случае, когда $\alpha=\pi$, соответствует уравнению для границы LM . Уравнение в конечных разностях для узлов, лежащих на такой диагональной границе, выведено ниже [см. уравнение (11-41)] и с его использованием уравнение для узла θ , расположенного на границе, образующей угол α , может быть представлено следующим образом:

$$A_{b1} + A_{b2} + R(A_{a3} + A_{a4}) - 2(1 + R)A_0 + \frac{1}{2}R h^2 W_\alpha = 0. \quad (11-34)$$

Следовательно, объединив уравнения (11-33) и (11-34) и принимая во внимание равенство A_{a3} и A_{b3} , а также A_{a4} и A_{b4} , получим уравнение для узла θ , расположенно-

го в вершине прямого угла поверхности раздела, в виде:

$$A_{b_1} + A_{b_2} + \frac{1}{2}(1 + R)(A_3 + A_4) - (3 + R)A_0 + \frac{1}{4}R h^2 W_a = 0. \quad (11-35)$$

Соответствующие уравнения для случая, когда ток протекает в области b , находятся таким же путем.

Важный частный случай, вытекающий из уравнения (11-35), относится к узлу, расположенному в вершине угла области с бесконечно большой магнитной проницаемостью, занимающей три квадранта (т. е. образующей угол $3\pi/2$), когда обе области обесточены. Результирующее уравнение для случая, когда область b имеет бесконечно большую магнитную проницаемость, можно получить, положив в приведенном выше уравнении $R = \infty$. Тогда

$$A_3 + A_4 - 2A_0 = 0. \quad (11-36)$$

Границы, диагональные по отношению к сетке; общий случай. При выводе уравнений для узлов, лежащих на границе, диагональной по отношению к сетке (см. рис. 11-17), возможны два подхода, которые приводят к уравнениям, связывающим различные группы узлов. Можно или непосредственно использовать с небольшими изменениями уравнения, полученные выше, или составить новую (и более точную) систему уравнений.

Для того чтобы применить выведенные выше уравнения к диагональной границе, необходимо повернуть звезду в лежащем на границе узле на 45° и увеличить размер ячейки сетки в $\sqrt{2}$ раз. Таким образом, с использованием обозначений на рис. 11-17 общее уравнение, полученное из уравнения (11-28), будет иметь вид:

$$A_{b_p} \frac{2}{1+R} + A_q + A_{ar} \frac{2R}{1+R} + A_s - 4A_0 + \frac{2R}{1+R} h^2 W_a = 0. \quad (11-37)$$

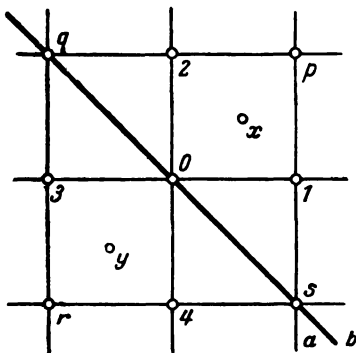


Рис. 11-17.

В связи с укрупнением сетки это уравнение менее точно, чем уравнения для узлов, не лежащих на границе.

Более точное уравнение для узла 0 можно получить, исходя из значений потенциала в узлах $1-4$, по методу, аналогичному использованному при выводе уравнения (11-28); при этом необходимо рассмотреть узлы x и y , где x является средней точкой отрезка, соединяющего узлы 1 и 2 , а y — средней точкой отрезка, соединяющего узлы 3 и 4 . Потенциал A_0 в узле 0 удовлетворяет уравнениям Пуассона и Лапласа в конечно-разностном виде (включающим фиктивные потенциалы), т. е.

$$A_{a1} + A_{a2} + A_{a3} + A_{a4} - 4A_0 + h^2 W_a = 0 \quad (11-38)$$

и

$$A_{b1} + A_{b2} + A_{b3} + A_{b4} - 4A_0 = 0. \quad (11-39)$$

Кроме того, из условия равенства тангенциальных составляющих напряженности поля в узле 0 следует:

$$\frac{1}{\mu_a} (A_{ax} - A_{ay}) = \frac{1}{\mu_b} (A_{bx} - A_{by}). \quad (11-40)$$

Далее, A_{a1} , A_{a2} , A_{ax} , A_{b3} , A_{b4} и A_{by} являются фиктивными потенциалами, но, применив линейную интерполяцию, нетрудно установить соотношения связи:

$$2A_{ax} = A_{a1} + A_{a2}$$

и

$$2A_{by} = A_{b3} + A_{b4}.$$

Таким образом, принимая во внимание, что реально существующие величины связаны зависимостями

$$2A_{ay} = A_{a3} + A_{a4}$$

и

$$2A_{bx} = A_{b1} + A_{b2},$$

можно исключить из приведенных выше уравнений все фиктивные величины и в соответствии с выражениями (11-38) — (11-40) получить следующее уравнение для узла 0 :

$$2(A_{b1} + A_{b2}) + 2R(A_{a3} + A_{a4}) - 4(1 + R)A_0 + Rh^2 W_a = 0. \quad (11-41)$$

Из уравнения (11-41) при необходимости можно вывести частные модификации.

Угловой узел в случае диагональных границ; общий случай. Уравнение для узла, лежащего в вершине прямого угла, образованного пересечением двух поверхностей раздела, диагональных по отношению к сетке, можно получить из предпосылок, аналогичных использованным выше. Если область a , где протекает ток, представляет собой квадрант, в котором находится узел 3 , то уравнение будет иметь вид:

$$A_{b_1} + \frac{1}{2}(1+R)A_{a_3} + \frac{1}{4}(3+R)(A_{b_2} + A_{b_4}) - \\ - (3+R)A_0 + \frac{1}{4}Rh^2W_a = 0. \quad (11-42)$$

11-5-3. Границы, не совпадающие с узлами сетки

Теперь перейдем к рассмотрению общей группы границ, не совпадающих с узлами сетки (включая как прямолинейные, так и криволинейные границы). Однако прежде чем приступить к общему анализу, остановимся на частном случае прямолинейной границы, параллельной линиям сетки (но не совпадающей с ними).

Прямолинейная граница, параллельная сетке. При анализе этой группы границ вводятся дополнительные узлы в точках пересечения границы с сеткой (рис. 11-18). Нетрудно показать (см. § 11-2-2), что уравнение Пуассона в конечных разностях для любого из таких дополнительных узлов имеет вид:

$$A_1 \frac{2}{p(p+q)} + A_2 + A_3 \frac{2}{q(p+q)} + \\ + A_4 - 2A_0 \left(1 + \frac{1}{pq}\right) + h^2W_a = 0, \quad (11-43)$$

где обозначения p и q соответствуют рис. 11-18.

Используя это уравнение для определения фиктивных потенциалов A_{a_1} и A_{b_3} и подставив найденные выражения в уравнение (11-27), отражающее граничные условия, получим уравнение в конечных разностях для узлов, лежащих на границе, в виде:

$$A_1 \frac{2}{p(q+pR)} + A_2 + A_3 \frac{2R}{q(q+pR)} + \\ + A_4 - 2A_0 \left(1 + \frac{1}{pq}\right) + h^2 \frac{W_a pR}{(q+pR)} = 0. \quad (11-44)$$

Оно выведено в обычном предположении, что ток протекает только в области a . При использовании этого уравнения узлы на границе рассматриваются непосредственно как часть общей сетки. Это, конечно, приводит к необходимости применения уравнений в конечных раз-

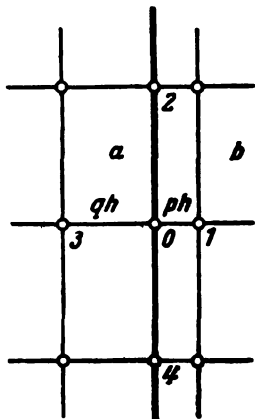


Рис. 11-18.

ностях для асимметричных звезд, которые относятся к узлам, расположенным на границе и в непосредственной близости к ней.

Криволинейные границы; общий случай. Ряд уравнений составлен для использования в случае криволинейных границ, вдоль которых задана нормальная составляющая градиента (см. ниже), однако, насколько известно авторам, не было предложено общего уравнения, связывающего поля по ту и другую стороны границы [соответствующего уравнению (11-28)]. Если бы такие уравнения существовали, то их применение было бы связано со многими трудностями: они были бы очень громоздкими [см. уравнения (11-46) и (11-47), соответствующие граничным условиям для градиента], расчеты были бы связаны с многочисленными измерениями длин отрезков для асимметричных звезд и необходимыми геометрическими построениями; кроме того, для получения достаточно точных результатов потребовалась бы очень мелкая сетка. Поэтому наиболее правильным выходом из положения является не применение дополнительных уравнений в конечных разностях, а аппроксимация конфигурации границы большим числом прямолинейных участков, параллельных или диагональных по отношению к линиям сетки. Точность такого представления можно оценить, исходя из рассмотрения отклонений принятой конфигурации границ от действительной.

В связи с изложенными выше замечаниями, а также ввиду того, что наиболее общий тип граничных условий в практике встречается редко, можно отказаться от попытки вывести общие уравнения и сосредоточить внимание на частном случае граничных условий для нормальной составляющей градиента, которые встречаются наиболее часто.

В связи с изложенными выше замечаниями, а также ввиду того, что наиболее общий тип граничных условий в практике встречается редко, можно отказаться от попытки вывести общие уравнения и сосредоточить внимание на частном случае граничных условий для нормальной составляющей градиента, которые встречаются наиболее часто.

Криволинейные границы; граничные условия для нормальной составляющей градиента. Рассмотрим криволинейную границу, изображенную на рис. 11-19, вдоль которой задано распределение нормальной составляющей градиента $\partial A/\partial n$. Простейший подход заключается во введении дополнительных узлов, таких, как F , по другую сторону границы и нахождении фиктивных значений потенциала в этих узлах (например, A_F) с использованием обычных уравнений для реальных узлов. Потенциал A_F можно найти с помощью одного из нескольких несложных геометрических построений. Простое и дающее хорошие результаты построение, предложенное в [Л. 11—18], заключается в следующем.

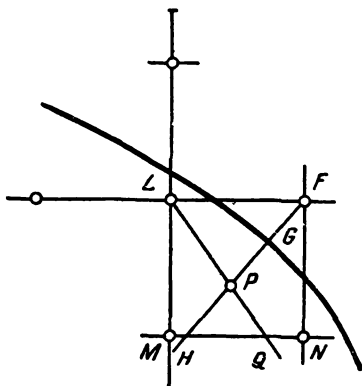


Рис. 11-19.

Проводим прямую FH , перпендикулярную границе и пересекающую ее в точке G . Далее, находим на ней точку P из условия $PG=FG$ и проводим через точки L и P прямую до пересечения с отрезком MN в точке Q . Таким образом, потенциалы точек F и P связаны соотношением

$$A_F = A_P + \left(\frac{\partial A}{\partial n} \right)_G \cdot FP.$$

A_P находится линейной интерполяцией, исходя из значений A_L и A_Q , а A_Q определяется путем линейной интерполяции по A_M и A_N ; отсюда

$$A_F = \frac{1}{LQ} \left[PQ \cdot A_L + \frac{LP}{MN} (QN \cdot A_M + MQ \cdot A_N) \right] + \left(\frac{\partial A}{\partial n} \right)_G FP. \quad (11-45)$$

То же выражение (и построение) относится, конечно, ко всем участкам границы. Уравнение (11-45) используется главным образом для важного случая, когда тангенциальная составляющая поля равна нулю; при этом $\partial A/\partial n = 0$ и $A_F = A_P$.

Более строгий анализ с учетом значений векторного потенциала на границе выполнен в [Л. 11—19]. Для ве-

личин, представленных на рис. 11-20, получены уравне-
ния

$$\begin{aligned} & [(1+q) \operatorname{tg} \theta - 1] A_0 + \frac{q}{1+q} (1 - q \operatorname{tg} \theta) A_4 + \\ & + \frac{1}{2} q(q+1)(q+2) A_3 - q^2(q+2) A_5 + \frac{1}{2} q^2(1+q) A_7 - \\ & - \left[\frac{(1+q^2)}{q} - \frac{(1+2q)}{q(1+q)} (1 - q \operatorname{tg} \theta) \right] A_C + \\ & + \frac{qh}{\cos \theta} \left(\frac{\partial A}{\partial n} \right)_C + \frac{1}{2} qh^2 W = 0; \end{aligned} \quad (11-46)$$

и

$$\begin{aligned} & [(1+p) \operatorname{ctg} \theta - 1] A_0 + \frac{p}{1+p} (1 - p \operatorname{ctg} \theta) A_3 + \\ & + \frac{1}{2} p(p+1)(p+2) A_4 - p^2(p+2) A_5 + \\ & + \frac{1}{2} p^2(1+p) A_6 - \left[\frac{(1+p^2)}{p} - \frac{(1+2p)}{p(1+p)} (1 - p \operatorname{ctg} \theta) \right] A_D + \\ & + \frac{ph}{\sin \theta} \left(\frac{\partial A}{\partial n} \right)_D + \frac{1}{2} ph^2 W = 0. \end{aligned} \quad (11-47)$$

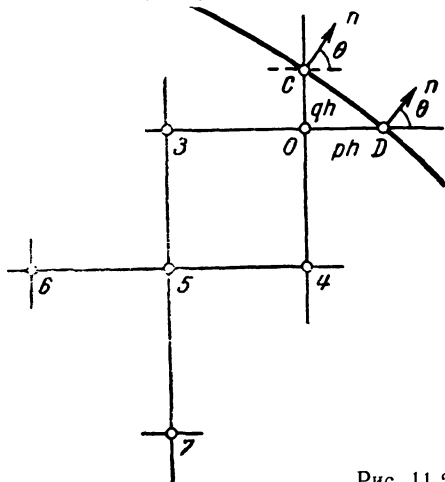


Рис. 11-20.

Эти уравнения дают более точные значения A , чем приведенные выше простые зависимости. В [Л. 11-19] исследована их точность и описано использование при определении индуктивности проводников, лежащих в полузакрывах и клиновидных пазах.

11-5-4. Линии симметрии

Если поле имеет линии симметрии, то при анализе удобно рассматривать только часть области поля, принимая линии симметрии за границы; при этом значительно уменьшается требуемое количество узлов. Для узлов, лежащих на линиях симметрии, необходимы особые уравнения в конечных разностях, но их нетрудно получить. Уравнение для линий, параллельных сетке (как совпадающих с ней, так и не совпадающих), и уравнение для линий, диагональных относительно сетки, приведены ниже. Решения относятся к случаю, когда в области протекает ток (т. е. присутствует член h^2W), и из условий симметрии, конечно, следует, что плотности тока и магнитные проницаемости по ту и другую стороны границы одинаковы.

Рассмотрим вначале случай линии, совпадающей с сеткой, для всех узлов которой справедливо уравнение Пуассона в конечных разностях (11-8). Предположим, что линия UV на рис. 11-15 является линией симметрии поля. По условиям симметрии $A_{b_1} = A_{a_3}$ и уравнение для узла 0 при рассмотрении поля в области b имеет вид:

$$2A_{b_1} + A_{b_2} + A_{b_4} - 4A_0 + h^2W = 0. \quad (11-48)$$

Уравнение в конечных разностях для линии симметрии, диагональной по отношению к сетке, может быть выведено аналогичным путем. На рис. 11-17 показано положение узлов относительно линии, и, исходя из симметрии поля, очевидно, что $A_{b_1} = A_{a_4}$ и $A_{b_2} = A_{a_3}$. Отсюда, подставив эти значения в основное уравнение Пуассона (11-8), получим искомое уравнение (относящееся к области b) для узла 0 , лежащего на линии симметрии:

$$2(A_{b_1} + A_{b_2}) - 4A_0 + h^2W = 0. \quad (11-49)$$

Для дополнительных узлов, вводимых на линии симметрии, параллельной сетке, но не совпадающей с ней (рис. 11-18), уравнение в конечных разностях можно найти, положив в уравнении (11-43) $p = q = \frac{1}{2}$ (поскольку линия симметрии делит ячейки сетки пополам) и $A_1 = A_3$. Отсюда оно может быть представлено следующим образом:

$$8A_1 + A_2 + A_4 - 10A_0 + h^2W = 0. \quad (11-50)$$

Приведенные выше уравнения применяются наиболее часто, однако иногда требуются и другие. Их можно вывести из соответствующего уравнения в обычном виде с учетом равенства значений потенциала в узлах, лежащих по ту и другую сторону линии симметрии.

11-5-5. Два примера

В заключение анализа граничных условий приведем два примера, позволяющие продемонстрировать применение некоторых из приведенных выше уравнений для узлов, лежащих на границе.

Проводники в пазу. Первый пример касается анализа поля двух обтекаемых током проводников, лежащих в пазу электрической машины, и представляет

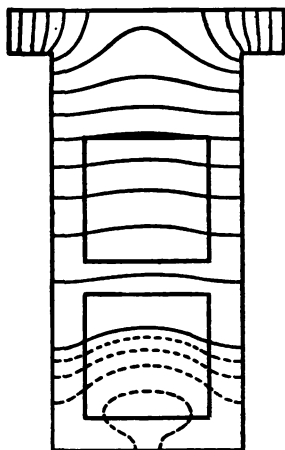


Рис. 11-21.

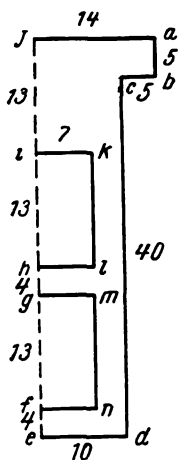


Рис. 11-22.

интерес при определении индуктивного сопротивления рассеяния. Предположено, что стальные поверхности имеют бесконечно большую магнитную проницаемость, и учтено влияние реального воздушного зазора. Картина поля для случая, когда токи проводников одинаковы, изображена на рис. 11-21 (величина потока между сплошными линиями в 7,5 раза больше, чем между пунктирными). Соответствующие граничные условия поясняет рис. 11-22. На нем указаны также числа узлов, входя-

щиеся на каждый размер, для достаточно мелкой сетки.

а) Линия ab является линией потока, поэтому для лежащих на ней узлов значение A постоянно и принято равным нулю.

б) Для стальных поверхностей, поскольку значение μ бесконечно велико, справедливо уравнение (11-32), исключая угловые узлы c, d, e и j . Для углов e и j используется уравнение (11-32), в котором должна быть

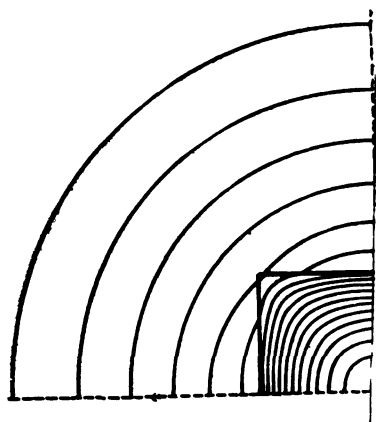


Рис. 11-23.

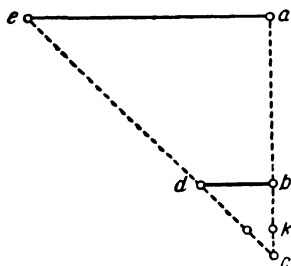


Рис. 11-24.

учтена симметрия относительно линии ej , т. е. принято, что $A_3 = A_1$. Для узла c справедливо уравнение (11-35) при $W=0$ и $R=\infty$, а для узла d — уравнение (11-36).

в) Для узлов, лежащих на линии симметрии ej , применяется уравнение (11-48), за исключением узлов f, g, h и i , которым соответствует уравнение (11-28) с учетом симметрии ($A_3 = A_1$).

г) Для всех узлов, лежащих на поверхностях проводников, используется уравнение (11-28), исключая узлы k, l, m и n , для которых справедливо уравнение (11-35).

Проводник с конечной магнитной проницаемостью. Второй пример посвящен анализу магнитного поля обтекаемого током проводника, имеющего магнитную проницаемость $5\mu_0$, который удален от всех магнитно проницаемых границ. Картина четвертой части поля, изображенная на рис. 11-23, была рассчитана для области, показанной на рис. 11-24. Уравнения для узлов, лежащих на границе, составлены следующим образом.

а) Значения потенциала вдоль линии ea определялись с достаточной точностью в предположении, что весь ток сосредоточен в узле c (см. § 5-2-1).

б) На линии симметрии ec для узлов, лежащих между узлами c и d , использовалось уравнение (11-49), а для узлов, расположенных между узлами d и e , — то же уравнение, но при $W=0$. Для узла d справедливо уравнение (11-35) с учетом симметрии, т. е. при $A_3=A_2$ и $A_4=A_1$.

в) Единственным новым уравнением, о котором следует упомянуть, является уравнение для узла c . Нетрудно показать, что оно имеет вид:

$$A_k - A_c + \frac{1}{4} h^2 W = 0, \quad (11-51)$$

где k — узел, примыкающий к узлу c .

Другой способ использования граничных условий, отличающийся от описаного в п. «а», исходит из равенства нулю тангенциальной составляющей градиента на окружности (большого радиуса) с центром в узле c . Однако этот путь гораздо более сложен.

11-6. ПОГРЕШНОСТИ

11-6-1. Введение

Решения, найденные методами конечных разностей, могут содержать погрешности двух видов. Первая из них обусловлена заменой дифференциального уравнения уравнениями в конечных разностях и является функцией размера ячейки сетки. Вторая возникает ввиду того, что уравнения в конечных разностях в общем случае решаются приближенно. Значения той и другой ошибок на любом этапе расчета не поддаются точному определению, однако существуют способы оценки и повышения точности решения, которые описаны ниже.

11-6-2. Сеточная погрешность

Общие положения. Как было показано в § 11-2, в связи с пренебрежением членами высших порядков (ошибка аппроксимации) в ряде Тейлора для потенциала [см. уравнение (11-4)] в решении уравнения поля появляется погрешность, называемая сеточной. Интересно отметить, что эта погрешность в точности соответствует ошибке, обусловленной предположением о линейном изменении потенциала между узлами, и действительно, знакомые уравнения в конечных разностях

нетрудно вывести, исходя из этого допущения [положив, например, $2h(\partial A/\partial x)_0 = A_1 - A_3$].

Для анализа величины погрешности вновь обратимся к уравнению (11-4). Нетрудно заметить, что для асимметричной звезды погрешность определения $\partial^2 A/\partial x^2$ равна:

$$\frac{h}{3!} \left[p(1-p^2) \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \right)_0 \right] - \frac{h^2}{4!} \left[p(1+p^3) \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^4} \right)_0 \right] + \dots, \quad (11-52)$$

а погрешность определения $\partial^2 A/\partial y^2$ находится аналогичным образом. Следовательно, в выражение для погрешности, обусловленной представлением уравнения поля в конечно-разностном виде, входят члены, зависящие от h . В случае симметричной звезды p и q равны 1, а погрешность определения $\partial^2 A/\partial x^2$ согласно уравнению (11-52) становится равной:

$$-\frac{2h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4} \right)_0 - \dots \quad (11-53)$$

Таким образом, наибольший член в выражении для погрешности, обусловленной представлением уравнения поля в конечно-разностном виде, зависит от h^2 . Отсюда (поскольку h мало) погрешности, вносимые асимметричными звездами, больше, чем для симметричных звезд. В связи с этим для получения заданной точности при использовании асимметричных звезд особое внимание должно быть обращено, например, на узлы, расположенные вблизи криволинейных границ. Еще большее внимание требуется, если асимметричные звезды находятся в областях, где происходит резкое изменение напряженности поля, например вблизи острых узлов, образуемых границей, поскольку здесь допущение о том, что значения высших производных потенциала пренебрежимо малы, менее оправдано.

Хотя точное определение величины максимальной ошибки в любом узле, обусловленной конечно-разностной аппроксимацией, невозможно, нетрудно получить простое выражение, позволяющее найти верхний предел погрешности, который она заведомо не будет превышать. Если обозначить через ρ радиус окружности, охватывающей всю область поля, а через M_4 наибольшее абсолютное значение частных производных четвертого

порядка точного решения, то верхний предел сеточной ошибки будет:

$$\frac{M_4 h^2 \rho^2}{24}. \quad (11-54)$$

Поскольку для такого расчета нужно знать точное решение, его можно выполнить только при приближенном определении M_4 (см. [Л. 36]), а это редко оправдано. Данный вопрос рассмотрен здесь в связи с тем, что характер зависимости погрешности от h подсказывает метод повышения точности решения путем экстраполяции до нулевой погрешности (см. ниже).

Ниже описаны способы повышения точности решений, содержащих сеточную погрешность. Кстати, следует отметить, что наличие такой погрешности можно

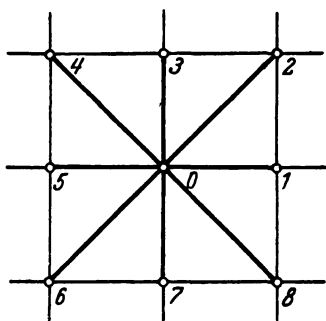


Рис. 11-25.

установить на основании общего анализа данного решения (см. § 11-6-3). Два первых способа, которые будут здесь рассмотрены: применение более мелких сеток и использование более точных уравнений в конечных разностях, полезны как для отыскания, так и для уменьшения погрешности. Если необходимый размер ячейки сетки не найден эмпирическим путем, то один

из этих способов всегда должен быть использован, для того чтобы установить, является ли конечная сетка достаточно мелкой. Существуют два других способа: экстраполяция до нулевой погрешности и использование разностных поправок, предназначенные для уточнения результатов, полученных из данного решения. Кроме того, имеются более строгие выражения для определения градиента потенциала, которые используются, когда требуется высокая точность или когда происходит резкое изменение напряженности поля.

Мелкая сетка. Убедиться в том, что сеточная погрешность пренебрежимо мала, проще всего с помощью мелкой сетки. Кроме того, единственная удобная возможность получения уверенности, что конечная сетка достаточно мелка, заключается в нахождении решений с помощью сеток, размеры ячеек которых последова-

тельно уменьшаются (наиболее удобно в 2 раза на каждом этапе) до тех пор, пока не окажется, что потенциалы узлов, общих для конечной и предшествующей сеток, различаются на незначительную величину.

Более точные уравнения в конечных разностях. Второй способ повышения точности основан на использовании уравнений в конечных разностях, для которых сеточная ошибка естественно меньше, чем для уравнений, рассмотренных до сих пор. Можно предложить ряд таких уравнений (см., например, [Л. 10 и 36]), однако в общем случае наиболее полезным из них является уравнение, связывающее девять узлов, изображенных на рис. 11-25. Нетрудно показать, что оно имеет вид:

$$4A_1 + A_2 + 4A_3 + A_4 + 4A_5 + A_6 + 4A_7 + A_8 - 20A_0 - 6h^2W = 0. \quad (11-55)$$

Первый член в выражении для ошибки аппроксимации содержит h в степени не ниже 6-ой, а верхний предел для сеточной ошибки определяется выражением

$$\frac{M_8 h^6 \rho^2}{12 \cdot 096}, \quad (11-56)$$

где ρ — радиус окружности, охватывающей поле, а M_8 — наибольшее абсолютное значение производных 8-го порядка точного решения.

Уравнения такого типа могут быть использованы как для проверки (путем определения остатков) точности решения, полученного из менее точных уравнений в конечных разностях, так и для нахождения более точных решений. В связи с возрастанием трудоемкости расчетов в случае применения релаксационного метода они должны применяться только на последних этапах решения. Тем не менее, при использовании итерационного метода, поскольку арифметические операции осуществляются гораздо быстрее, чем логические операции, устанавливающие порядок расчета, более точные уравнения могут с успехом применяться с самого начала. Для итерационного метода установлено, что скорость сходимости при использовании уравнений для девяти и пяти узлов почти одинакова, в связи с чем часто представляется возможность провести расчеты и

сравнить затраты времени для получения заданной точности в случае применения уравнения для девяти узлов или уравнения для пяти узлов с более мелкой сеткой.

Экстраполяция до нулевой погрешности. Если предположить, что сеточная ошибка пропорциональна квадрату размера ячейки сетки (см. «Общие положения»), то можно использовать метод экстраполяции, предложенный Ричардсоном [Л. 11-20], для нахождения решения при размере ячейки сетки, равном нулю. При этом, если A является решением при размере ячейки сетки, равном нулю, а A_h и $A_{h/2}$ — решения для размеров ячейки соответственно h и $h/2$, то имеем:

$$A = A_h - kh^2 = A_{h/2} - \frac{kh^2}{4},$$

где k — коэффициент пропорциональности для члена, представляющего собой погрешность.

Отсюда, исключив из двух уравнений k , получим приближенное решение при размере ячейки сетки, равном нулю, в виде:

$$A = \frac{4}{3} A_{(h/2)} - \frac{1}{3} A_h. \quad (11-57)$$

Это уравнение часто дает хорошие результаты, однако поскольку его вывод основан на допущении, которое справедливо лишь приближенно, следует соблюдать осторожность (см. [Л. 11-8 и 36]).

Разностная поправка. Для симметричной звезды с пятью узлами можно представить уравнение Пуассона в конечно-разностном виде с учетом обычно пренебрегаемых членов следующим образом:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 + h^2 W - \frac{1}{12} (\delta_{0x}^4 + \delta_{0y}^4) + \\ + \frac{1}{90} (\delta_{0x}^6 + \delta_{0y}^6) - \dots = 0, \quad (11-58)$$

где для узла O величина δ_{0x}^n является разностью n -го порядка¹ значений A в направлении оси x , а δ_{0y}^n — раз-

¹ Если $A_1 - A_N$ — значения потенциала в ряде узлов $1 - N$, лежащих на прямой, то величины, называемые разностями,

ностью n -го порядка в направлении оси y . Это выражение, конечно, точнее уравнения в обычном виде и позволяет очень легко учесть ряд членов, которыми почти всегда пренебрегают, хотя в связи с возрастанием трудоемкости расчетов, как правило, принимают во внимание только разности 4-го порядка. Получив решение для конечной сетки обычным путем, находят разности в каждом узле (за исключением узлов, лежащих вблизи границы, где их нельзя рассчитать) и используют их в уравнении (11-58) для определения уточненных значений потенциала. Более подробно этот метод описан в [Л. 11-21 и 11-22], а также в [Л. 10], где предлагается применять разности 2-го, а не 4-го порядка, и [Л. 43], где подробно разобран пример расчета.

Определение градиента. Выше было отмечено, что определение градиента, исходя из предположения о линейном изменении потенциала, может привести к большой погрешности. Кроме того, неточности могут появиться ввиду того, что значения градиента определяются (обычно) как малые разности больших чисел, которые могут быть найдены с ошибкой. Поэтому для того чтобы свести к минимуму обе эти погрешности, иногда приходится использовать гораздо более громоздкие формулы для определения градиента. Такие выражения получают, аппроксимируя значения потенциала в узлах, лежащих на прямой, вдоль которой отыскивается распределение градиента, многочисленными рядами [Л. 11-23]. Так, например, исходя из значений потенциала A_0, A_1, A_2 и A_3 в равноудаленных узлах,

определяются в соответствии с таблицей:

$$\begin{array}{r}
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3 \\
 A_4 \\
 A_5 \\
 A_6
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \delta_{1/2}^1 \\
 \delta_{3/2}^1 \\
 \delta_{5/2}^1 \\
 \delta_{7/2}^1 \\
 \delta_{9/2}^1 \\
 \delta_{11/2}^1
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \delta_2^2 \\
 \delta_3^2 \\
 \delta_4^2 \\
 \delta_5^2 \\
 \delta_5^2 \\
 \delta_5^2
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \delta_{3/2}^3 \\
 \delta_3^3 \\
 \delta_{5/2}^3 \\
 \delta_{7/2}^3 \\
 \delta_{9/2}^3 \\
 \delta_{11/2}^3
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \delta_3^4 \\
 \delta_4^4 \\
 \delta_5^4 \\
 \delta_5^4 \\
 \delta_5^4 \\
 \delta_5^4
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \delta_{5/2}^5 \\
 \delta_7/2^5 \\
 \delta_{9/2}^5 \\
 \delta_{11/2}^5
 \end{array}$$

где каждое значение δ определяется как разность между двумя величинами, расположенными слева, например: $\delta_3^2 = \delta_{3/2}^1 - \delta_{5/2}^1$.

лежащих на прямой, параллельной оси x , можно не учитывать:

$$\left. \begin{aligned} h \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_0 &= \frac{1}{3!} (-11A_0 + 18A_1 - 9A_2 + 2A_3); \\ h \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_1 &= \frac{1}{3!} (-2A_0 - 3A_1 + 6A_2 - A_3); \\ h \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_2 &= \frac{1}{3!} (A_0 - 6A_1 + 3A_2 + 2A_3), \\ \text{и} \\ h \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_3 &= \frac{1}{3!} (-2A_0 + 9A_1 - 18A_2 + 11A_3), \end{aligned} \right\} (11-59)$$

где $(\partial A / \partial x)_n$ — значение составляющей градиента по оси x в узле n .

Уравнения (11-59), выраженные через значения потенциала в четырех узлах, дают в общем случае достаточно точные значения градиента. Однако в [Л. 11-23] приведены дополнительно аналогичные, но более точные уравнения для групп из 3, 5, 6, 7, 9 и 11 узлов, а также выражения для определения погрешности в каждом случае. Кроме того, в [Л. 43] представлены таблицы для определения значений градиента, когда известны значения функции в трех узлах, расположенных на *разных* расстояниях один от другого. Они применяются главным образом при определении значений градиента на криволинейных границах или в близлежащих узлах.

11-6-3. Расчетные погрешности

Метода точного определения погрешностей, возникающих на любом этапе решения уравнений в конечных разностях, не существует, однако можно получить выражение для верхнего предела погрешности, исходя из максимального значения остатка, существующего на любом этапе. Если максимальное значение остатка равно m , а радиус окружности, охватывающей область поля, равен ρ , то можно показать (см., например, [Л. 36]), что погрешность в случае уравнения в конечных разностях для пяти узлов (11-8) не превышает величины

$$\frac{m\rho^2}{4h^2}, \quad (11-60)$$

а в случае уравнения в конечных разностях для девяти узлов — величины

$$\frac{m\rho^2}{24h^2} \cdot \quad (11-61)$$

Отсюда можно найти предполагаемую величину отдельных остатков (и их суммы). Как было отмечено выше, во всех случаях должно быть обеспечено также равномерное распределение остатков.

Другие очень полезные свидетельства существования расчетной (а в некоторых случаях и сеточной) погрешности могут быть получены путем сопоставления характеристик решения на любом этапе с теми, которыми должно обладать точное решение. Для точного решения должны быть удовлетворены следующие легко поддающиеся проверке условия:

а) Линии потока и эквипотенциали должны удовлетворять условиям поля на границах и линиях симметрии. Например, линии потока должны быть нормальными к границам с бесконечно большой магнитной проницаемостью или электрической проводимостью и к линиям симметрии, а на поверхностях раздела между средами с различными магнитными или диэлектрическими проницаемостями линии потока должны преломляться согласно уравнению (2-68).

б) Всякая симметрия поля должна быть очевидной.

в) Общая величина потока должна соответствовать найденной приближенно, исходя из размеров границ и значений потенциалов или токов.

г) Некоторые характерные особенности распределения напряженности поля должны быть очевидными, например, ее значения должны быть высокими вблизи внешних углов и низкими вблизи внутренних углов магнитно проницаемых или проводящих границ.

д) Образование и расположение нейтральной точки (или точек) в полях распределенных токов должно быть правильным. Для таких полей этот критерий особенно хорош для выявления погрешности (даже если все другие условия удовлетворены).

е) Изменение потенциала от узла к узлу должно быть непрерывным; сингулярностей, обуславливающих пересечение линий потока или эквипотенциалей, возникать не должно. Установлено, что такие сингулярности, в частности, возникают вблизи внутренних углов границ.

На первых этапах расчета решение в общем случае не удовлетворяет всем перечисленным выше условиям (которые соответствуют задаче), однако по мере уменьшения остатков и повышения точности оно приобретает нужные свойства. Если этого не происходит даже при уменьшении остатков до пренебрежимо малых значений, то можно прийти к выводу, что сетка выбрана слишком крупной.

11-7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы конечных разностей могут быть использованы для решения *любой* задачи по определению статического двухмерного поля (и даже трехмерных и неустановившихся полей). Это подтверждается приведенными примерами, и следует отметить, что, несмотря на сравнительную простоту рассмотренных задач, они не поддаются решению с помощью аналитических методов. Решения, найденные методом конечных разностей, являются приближенными, однако можно получить любую желаемую степень точности при условии, если расчет продолжается достаточное время. Тем не менее, для многих практических задач требуемую точность удается получить очень быстро. Необходимо считаться с тем, что все численные методы требуют отдельного решения для каждой совокупности параметров задачи (хотя в некоторых случаях можно значительно сократить время расчетов, приняв конечное решение одной задачи в качестве исходных данных для другой аналогичной задачи). Если задача может быть решена как аналитическими, так и численными методами, то выбор часто определяется продолжительностью расчетов. Конечно, аналитические методы обычно являются предпочтительными, однако в некоторых приложениях они могут потребовать настолько длительной обработки, а иногда и расчетов, что численные методы станут более экономичными. Это особенно вероятно в том случае, если для итерационного метода подготовлена общая программа расчета на вычислительной машине и требуется лишь ввести данные, определяющие конфигурацию границ и граничные условия.

Выбор между релаксационным и итерационным методами в основном зависит от того, будут ли расчеты проводиться вручную или на вычислительной машине, а также от задаваемой точности решения, числа подле-

жащих расчету частных случаев и граничных условий задачи. Для решений, требующих высокой точности, или при большом объеме расчетов преимущества итерационного метода несомненны, однако для некоторых задач с очень сложными конфигурацией границ и граничными условиями ценность этого метода ограничена двумя обстоятельствами. Во-первых, число узлов сетки и вспомогательных величин, необходимых для правильной формулировки задачи, может быть ограничено объемом памяти вычислительной машины¹ и, во-вторых, может потребоваться слишком много времени для составления программы. В том и другом случаях в настоящее время, особенно для задач, в которых на криволинейных границах задаются условия для градиента, предпочтительны методы расчета вручную. Однако задачи Дирихле для всех конфигураций границ и задачи, в которых на прямолинейных границах задана нормальная составляющая градиента, нетрудно решить итерационными методами с использованием разработанных для них общих программ.

В качестве примера экономии времени и труда, которую могут дать автоматические методы в благоприятном случае, приведем следующие данные, относящиеся к определению поля, создаваемого током, протекающим в проводнике с I-образным сечением (см. рис. 11-13). С использованием сетки из 400 узлов при установлении начальных значений потенциала равными нулю уменьшение максимального остатка до 0,001 релаксационным методом (вручную) потребует, вероятно, 25—50 ч, тогда как расчет итерационным методом (на современной быстродействующей вычислительной машине) отнимет около 5 мин на вычисления и 3—4 ч на составление и подготовку программы.

В приведенном примере почти все затраты времени и труда связаны с составлением необходимой программы расчета. Однако, если бы была разработана общая программа, то потребовалось бы время лишь на подготовку исходных данных для ввода в машину и полный расход времени уменьшился бы примерно до 1 ч. Таким образом, преимущества общих программ, очевидно, являются существенными и следует ожидать, что с увеличени-

¹ Для наиболее эффективной работы машины при выполнении расчетов важно пользоваться только оперативной памятью.

ем быстродействия и объема памяти машин, а также с усовершенствованием итерационных методов такие программы будут применяться почти всегда.

ЛИТЕРАТУРА

11-1. Gauss C. F., Brief an Gerling, Werke, 9, 278—281, Dec. 26, 1823. (Translated by G. E. Forsythe), Math. Tab., Wash., 5, 255—258, 1951.

11-2. Говорков В. А., Расчет электрических и магнитных полей в полярных координатах по методу потенциальной сетки, «Электричество», 1951, № 7.

11-3. Temple G., Generalised theory of relaxation method applied to linear systems, Proc. Roy. Soc., 169 A, 476—500, 1939.

11-4. Richardson L. F., The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam, Phil. Trans., 210A, 307—357, 1911

How to solve differential equations approximately by arithmetic, Math. Gaz., 12, 415—421, 1925.

11-5. Liebmann H., Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen, S. B. Bayer. Akad. Wiss., Math. Phys. Klasse, 385—416, 1918.

11-6. Frankel S. P., Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations, Math. Tab., Wash. IV, 30, 65—75, April 1950.

11-7. Young D. M., Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic type. Trans. Amer. Math. Soc., 76, 92—111, 1954.

11-8. Young D. M., Ordvac solutions of the Dirichlet problem, J. Assoc. Comp. Mach., July 1955.

11-9. Woodger M. and Alway G. G., Solution of a two-dimensional heat conduction problem with mixed boundary conditions, Deuce News № 45, sheet № 23, Dec. 1959.

11-10. Kahan W., The rate of convergence of the extrapolated Gauss—Siedel iteration, Conference on Matrix Computations, Wayne State University, Sept. 4, 1957.

11-11. Arms R. J., Gates L. D. and Zondek B., A method of block iteration, J. Soc. Industr. Appl. Math., 4, 220—229, 1956.

11-12. Peaceman D. W. and Ratchford H. H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, J. Soc. Industr. Appl. Math., 3, 28—41, 1955.

11-13. Keller H. B., On some iterative methods for solving elliptic differential equations. Quart. Appl. Math., XVI, 3, Oct. 1958.

11-14. Heller J., Simultaneous, successive and alternating direction iteration schemes, NYO-8675, AEC Computing and Applied Math. Center, Institute of Math. Science, New York University, 1958.

11-15. Shortley G., Use of Chebyscheff-polynomial operators in the numerical solution of boundary-value problems. J. Appl. Phys., 24, 4, 392—396, April 1953.

11-16. Milnes H. W. and Potts R. B., Boundary contraction solution of Laplace's differential equation. J. Assoc. Comp. Mach., 6, 2, 226, April 1959

11-17. Milnes H. W. and Potts R. B., Numerical solution of partial differential equations by boundary contraction, *Quart. Appl. Math.*, XVIII, 1, 1, April 1960.

11-18. Fox L., Potential problems with mixed boundary conditions, *Quart. Appl. Math.*, II, 251—257, Oct. 1944.

11-19. McKibbin H., Plotting magnetic fields produced by conductors housed in slots in iron, Ph. D. thesis, Queens University, Belfast, Nov. 1955.

11-20. Richardson L. F. and Gaunt J. A., The deferred approach to the limit, *Phil. Trans.*, 226 A, 1926—1927.

11-21. Fox L., Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations, *Proc. Roy. Soc.*, 190 A, 31—59, 1947.

11-22. Fox L., The numerical solution of elliptic differential equations when the boundary conditions involve a derivative, *Phil. Trans.*, 242 A, 345—378, 1950.

11-23. Bickley W. G., Formulae for numerical differentiation, *Math. Gaz.*, 25, 19—27, 1941.

Дополнительная литература

11-24. Mamak R. S. and Laithwaite E. R., Numerical evaluation of inductance and A. C. resistance, *Proc. Instn Electr. Engrs*, 108 C, 252—258, March 1961.

Глава двенадцатая

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

12-1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 11 было показано, что уравнение Пуассона можно заменить системой совместных уравнений в конечных разностях, и описаны релаксационный и итерационный методы их решения. Данная глава посвящена статистическому методу приближенного решения этих уравнений. Способ применения метода чрезвычайно прост (как для полей Лапласа, так и для полей Пуассона), однако поскольку расчет отнимает очень много времени, он производится с помощью вычислительных машин. Вид решения отличается от вида решения, полученного итерационным методом, тем, что при каждом расчете находится потенциал только в одной точке.

В общем случае метод Монте-Карло¹ уступает методам, описанным в гл. 11, вследствие медленной сходи-

¹ Методы Монте-Карло находят наиболее полезное применение в других отраслях математической физики, особенно в таких задачах, которые не поддаются решению другими методами.

мости [Л. 12-1]. Кроме того, вопросы его применения в задачах с общими граничными условиями для градиента полностью не изучены, хотя краткое описание их можно найти в [Л. 12-2]. Метод представляет особую ценность для задач, где требуется найти значения потенциала только в одной или нескольких точках.

Метод описан кратко, без математического обоснования и включен в книгу главным образом для полноты.

12-2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Расчет. Так же как и для методов, описанных в предыдущей главе, область поля, охватываемая границами, заменяется сеткой, обычно квадратной, а вместо уравнения Пуассона вводятся уравнения в конечных разностях, связывающие значения потенциала в соседних узлах сетки. Далее, если представить уравнение в конечных разностях (11-8) в виде:

$$A_0 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 A_n + \frac{1}{4} \mu \mu_0 h^2 J, \quad (12-1)$$

то входящие в него коэффициенты можно рассматривать как вероятности перехода частицы из одного узла в соседний. В уравнении (12-1) значение потенциала в узле 0 в равной мере зависит от значений потенциала в соседних узлах $1, 2, 3$ и 4 , в связи с чем вероятность перехода из узла 0 в каждый из других узлов одинакова. Следовательно, вероятность перехода в любой из соседних узлов равна $1/4$, что соответствует случайному перемещению из узла 0 .

Рассмотрим теперь некоторую воображаемую частицу, отправляющуюся из любого узла сетки и совершающую ряд случайных перемещений или «блуждание» от узла к узлу. Далее, предположим, что блуждание должно закончиться, когда частица попадет в узел m , лежащий на границе, сделав S шагов. Тогда можно показать, что наиболее вероятное значение потенциала T в узле, из которого было начато блуждание, равно:

$$T = A_m - \sum_S \frac{1}{4} \mu \mu_0 h^2 J, \quad (12-2)$$

где A_m — значение потенциала в узле m , а μ_0 и J — значения магнитной проницаемости и плотности тока в каждом проходимом узле, включая исходный узел, но без учета узла на границе. Таким образом, значение потенциала узла определяется средним значением T для многих блужданий, начинающихся в этом узле, т. е.

$$A = \sum_{n=1}^N \frac{T_n}{N}, \quad (12-3)$$

где N — полное число блужданий.

Доказательство приведенного соотношения можно найти, например, в [Л. 5].

Граничные условия. Задачи, в которых границы представляют собой эквипотенциали или линии потока, решаются просто. Если частица попадает на эквипотенциальную границу, то блуждание заканчивается.

Если же она попадает на границу, являющуюся линией потока, то блуждание продолжается обычным образом, но когда в соответствии с программой частица должна пересечь границу, она перемещается в противоположном направлении. Например, если частица, находящаяся в узле b на границе, представляющей собой

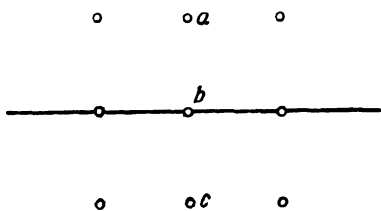


Рис. 12-1.

линию потока (рис. 12-1), по программе должна переместиться в узел a , то в действительности она попадает в узел c . После этого блуждание продолжается обычным образом.

Применение метода Монте-Карло в задачах с другими граничными условиями для градиента кратко исследовано в [Л. 12-2].

Применение случайных чисел. Последовательность команд, используемых для программирования движения фиктивной частицы, находится из последовательности случайных чисел. Методы нахождения этих чисел здесь не рассмотрены, однако следует заметить, что для их быстрого определения на вычислительной машине разработаны стандартные подпрограммы. Описание существующих методов можно найти в [Л. 8 и 35].

Для программирования случайного блуждания числа могут быть использованы разные способы. Простейший из них заключается в делении всего диапазона определяемых чисел на четыре равные части и выборе направления перемещений в соответствии с той частью, где находится данное число.

12-3. ПРИМЕР

Рассмотрим определение потенциала в точке P лапласова поля, имеющего плоскую и зубчатую границы, противоположные одна другой, как показано на рис. 12-2. Допустим, что потенциал плоской границы равен единице, а потенциал зубчатой — нулю. Кроме того, предположим, что линии aa' и bb' являются линиями потока. Расчет производится в описанной выше последовательности; следует лишь принять во внимание, что поскольку $J=0$, из уравнений (12-1) и (12-3) следует:

$$A_P = \sum_1^N \frac{A_m}{N}. \quad (12-4)$$

На рис. 12-3 показана кривая сходимости решения для частной последовательности случайных чисел. Приближенное решение, полученное после 2 000 блужданий,

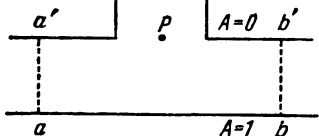


Рис. 12-2.

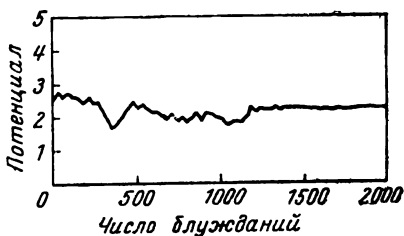


Рис. 12-3.

отличается от точного решения уравнения в конечных разностях на 0,01. Полное время расчета на быстродействующей вычислительной машине составило 11 мин. Для сравнения можно отметить, что решение итерационным методом для всех узлов длилось 3 мин.

12-4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Очевидно, полезно иметь возможность оценить длительность расчетов, требуемую для получения заданной точности решения. Она зависит, конечно, как от предполагаемой продолжительности случайного блуждания, так и от требуемого количества блужданий. Можно приближенно определить общее время расчетов с учетом обоих факторов, а также установить предполагаемую точность решения. Ожидаемая продолжительность случайного блуждания рассмотрена в [Л. 12-1], где приведена таблица для ее определения при различных числах узлов и разных конфигурациях границ. Следует отметить, что все блуждания заведомо имеют конечную длительность, а методы оценки точности решения описаны в [Л. 12-3].

ЛИТЕРАТУРА

12-1. Ehrlich L. W., Monte Carlo solutions of boundary-value problems, J. Ass. Comp. Mach., 6, № 2, 204, 1959.

12-2. Кас М., Application of statistical methods to differential and integral equations, Lecture Notes, Mass. Inst. Tech., 1949.

12-3. Kahn H. and Marshall A. W., Methods of reducing sample size in Monte Carlo computations, Res. Soc. Amer., 1, 263, 1953.

Дополнительная литература

12-4. Curtiss J. H., Sampling methods applied to differential and difference equations, Proc. Sem. Sci. Comp., November 1949.

12-5. McCracken D. D., The Monte Carlo method, Scient. Amer., 5, 90, 1955.

12-6. Wasow W., Random walks and the eigenvalues of elliptic difference equations, J. Res. Nat. Bur. Stds, 46, 65, 1951.

12-7. Yo well E. C., A Monte Carlo method of solving Laplace's equation, Proc. Sem. Sci. Comp., December 1949.

СУММЫ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Как показано в [Л. 5-20], некоторые ряды Фурье, появляющиеся при определении полей распределенных токов по методу Рота, описанному в § 5-6, могут быть представлены в виде конечных функций. Использование этих функций может значительно сократить расчеты, в связи с чем наиболее важные из них представлены здесь. Каждая функция относится к одной из двух групп в зависимости от того, является ли угол $m_h a$ нечетным или четным кратным $\pi/2$. Соотношения приведены для величин m_h , a , a_j и x , однако следует заметить, что существуют аналогичные выражения для величин n_h , b , b_j и y .

$m_h a$ нечетное кратное $\pi/2$:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin m_h a_j \cos m_h x}{m_h (m_h^2 + n_k^2)} = \frac{a}{2} \left[\frac{\operatorname{ch} n_k a - \operatorname{ch} n_k (a - a_j) \operatorname{ch} n_k x}{n_k^2 \operatorname{ch} n_k a} \right], \quad x < a_j;$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin m_h a_j \cos m_h x}{m_h (m_h^2 + n_k^2)} = \frac{a}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} n_k a_j \cdot \operatorname{sh} n_k (a - x)}{n_k^2 \operatorname{ch} n_k a} \right], \quad x > a_j;$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin m_h a_j \cos m_h x}{m_h^3} = \frac{a}{2} \left[a a_j - \frac{a_j^2 + x^2}{2} \right], \quad x < a_j;$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin m_h a_j \cos m_h x}{m_h^3} = \frac{a a_j}{2} (a_j^2 - x), \quad x > a_j.$$

$m_h a$ четное кратное $\frac{\pi}{2}$:

$$\sum_{h=2}^{\infty} \frac{\sin m_h a_j \cos m_h x}{m_h (m_h^2 + n_k^2)} = \frac{a}{2n_k^2} \left[\frac{a - a_j}{a} - \frac{\operatorname{ch} n_k x \operatorname{sh} n_k (a - a_j)}{\operatorname{sh} n_k a} \right], \quad x < a_j.$$

$$\sum_{h=2}^{\infty} \frac{\sin m_h a_j \cos m_h x}{m_h (m_h^2 + n_k^2)} = \frac{a}{2n_k^2} \left[\frac{\operatorname{sh} n_k a_j \operatorname{ch} n_k (a - x)}{\operatorname{sh} n_k a} - \frac{a_j}{a} \right], \quad x > a_j;$$

$$\sum_{h=2}^{\infty} \frac{\sin m_h a_j \cos m_h x}{m_h^3} = \frac{a - a_j}{12} [2a a_j - a_j^2 - 3x^2], \quad x < a_j,$$

$$\sum_{h=2}^{\infty} \frac{\sin m_h a_j \cos m_h x}{m_h^3} = \frac{a_j}{12} [2a^2 - 6ax + 3x^2 + a_j^2], \quad x > a_j.$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ

Полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 + \frac{1225}{16384} k^8 + \dots \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m k^m}{m!} \right]^2,$$

где $\left(\frac{1}{2}\right)_m$ обозначает m сомножителей вида $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2}+2\right) \dots$.

Полный эллиптический интеграл второго рода

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 - \frac{5}{256} k^6 - \frac{175}{16384} k^8 - \dots \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1-2m} \left(-\frac{1}{2} \right)_m^2 k^{2m},$$

где $\left(-\frac{1}{2}\right)_m$ обозначает $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-m+1\right)}{m!}$.

Ном Якоби

$$q = \frac{k^2}{16} \left[1 + 2 \left(\frac{k}{4}\right)^2 + 15 \left(\frac{k}{4}\right)^4 + 150 \left(\frac{k}{4}\right)^6 + \dots + 1707 \left(\frac{k}{4}\right)^8 + \dots \right]^4, \quad (k^2 < 1).$$

Неполный эллиптический интеграл первого рода

$$F(\varphi, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)_m (-k^2)^m t_{2m}(\varphi), \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; k^2 < 1 \right),$$

где $t_0(\varphi) = \varphi$; $t_2(\varphi) = \frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$;

$$t_4(\varphi) = \frac{1}{8} [3\varphi - \sin \varphi \cos \varphi (3 + 2 \sin^2 \varphi)];$$

$$t_{2m}(\varphi) = \frac{2m-1}{2m} t_{2(m-1)}(\varphi) - \frac{1}{2m} \sin^{2m-1} \varphi \cos \varphi.$$

Неполный эллиптический интеграл второго рода

$$E(\varphi, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{1}{m} (-k^2)^m t_{2m}(\varphi) \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; k^2 < 1 \right),$$

где $t_{2m}(\varphi)$ определено выше.

Дзета-функция Якоби

$$Z(u, k) = \left(1 - \frac{E}{K} \right) u - 2k^2 \frac{u^3}{3!} + 8k^2(k^2 + 1) \frac{u^5}{5!} - \dots \\ - 16k^2(2k^4 + 13k^2 + 2) \frac{u^7}{7!} + 128k^2(k^6 + 30k^4 + 30k^2 + 1) \frac{u^9}{9!} - \dots \\ \dots (|u| < K').$$

Эллиптические функции Якоби:

$$\operatorname{sn} u = u - (1 + k^2) \frac{u^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{u^5}{5!} - \\ - (1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6) \frac{u^7}{7!} + \dots; \quad |u| < K';$$

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{kK} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m + \frac{1}{2}}}{1 - q^{2m+1}} \sin \left[(2m + 1) \frac{\pi u}{2K} \right], \\ |\operatorname{Im}(u/K)| < \operatorname{Im}(jK'/K);$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1 + 4k^2) \frac{u^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4) \frac{u^6}{6!} + \\ + (1 + 408k^2 + 912k^4 + 64k^6) \frac{u^8}{8!} - \dots, \quad |u| < K';$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{kK} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m + \frac{1}{2}}}{1 + q^{2m+1}} \cos \left[(2m + 1) \frac{\pi u}{2K} \right], \\ |\operatorname{Im}(u/K)| < \operatorname{Im}(jK'/K);$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - k^2 \frac{u^2}{2!} + (4 + k^2) k^2 \frac{u^4}{4!} - (16 + 44k^2 + k^4) k^2 \frac{u^6}{6!} + \\ + (64 + 912k^2 + 408k^4 + k^6) k^2 \frac{u^8}{8!} - \dots, \quad |u| < K';$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m+1}}{1 + q^{2(m+1)}} \cos \left[(m + 1) \frac{\pi u}{K} \right], \\ |\operatorname{Im}(u/K)| < \operatorname{Im}(jK'/K).$$

ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ниже приведены сводка уравнений преобразования и соответствующие конфигурации границ, представляющие особый интерес при определении электрических и магнитных полей. Преобразования связывают плоскости z и t , для которых

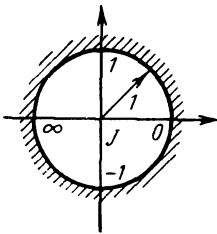
$$z = x + jy \text{ и } t = u + jv.$$

В случае преобразований на верхнюю полуплоскость (которая везде принята в плоскости t) показана только плоскость z , однако *внутри* отображаемой области отмечены соответственные точки в плоскости t .

Преобразование к единичной окружности может быть получено путем объединения преобразований к бесконечной прямой с дробно-линейным преобразованием.

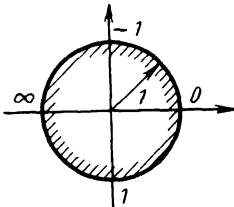
1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ВЕРХНЮЮ ПОЛОВИНУ ПЛОСКОСТИ

1-1. *Окружности*

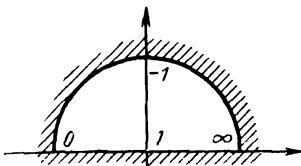


$$z = \frac{j - t}{j + t}$$

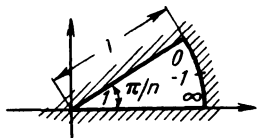
(Внешняя область окружности на нижнюю полуплоскость)



$$z = \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}$$



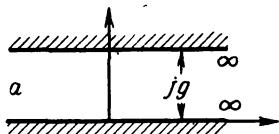
$$z = \frac{j + t}{j - t}$$



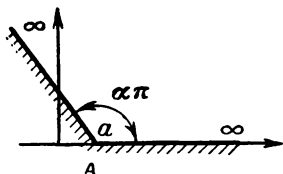
$$z = \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

1-2. Прямолинейные участки

1-2-1. Одна определяющая вершина

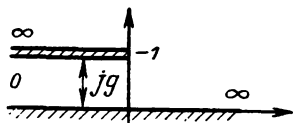


$$z = \frac{g}{\pi} \ln(t - a)$$

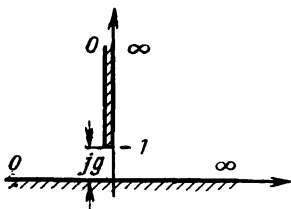


$$z + A = (t - a)^\alpha; \alpha \neq 0$$

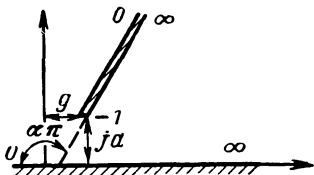
1-2-2. Две определяющие вершины



$$z = \frac{g}{\pi} (1 + t + \ln t)$$

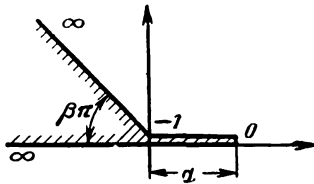


$$z = \frac{g}{2} \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right)$$

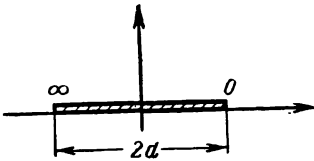


$$z = S \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{t^{-\alpha}}{\alpha} \right); \alpha \neq \pi; \neq 0$$

S и положение начала координат определяются из условия соответствия $z = g + jd$ и $t = -1$.

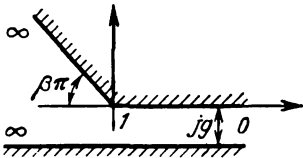


$$z = d [(2 - \beta)(t + 1)^{1-\beta} - (1 - \beta)(t + 1)^{2-\beta}].$$



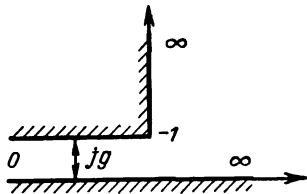
$$z = d \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

($t = j$ соответствует $z = \infty$).

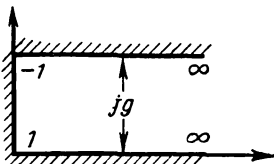


$$z = -\frac{g}{\pi} \int \frac{(1-t)^\beta}{t} dt.$$

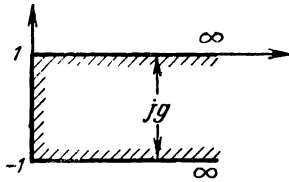
Интеграл определяется через элементарные функции, если $\beta = p/q$, где $0 < p < q$, а p и q — целые числа.



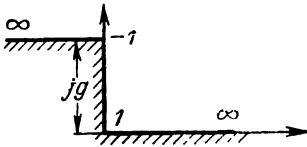
$$z = \frac{g}{\pi} \left\{ 2(t+1)^{\frac{1}{2}} - 2 \ln \left[(t+1)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] + \ln t \right\}.$$



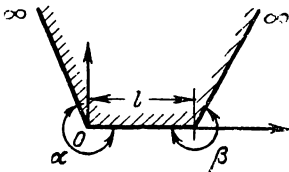
$$z = \frac{g}{\pi} \operatorname{arch} t.$$



$$z = \frac{g}{\pi} [t \sqrt{t^2 - 1} - \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})].$$



$$z = \frac{g}{\pi} (\operatorname{arch} t - \sqrt{t^2 - 1}).$$

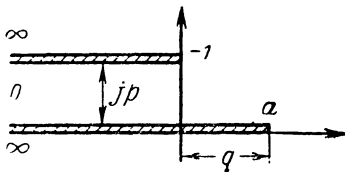


$$z = S \int t^{\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1\right)} (t-1)^{\left(\frac{\beta}{\pi} - 1\right)} dt;$$

$$S = \frac{l}{(-1)^{\left(\frac{\beta}{\pi} - 1\right)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha + \beta}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{\pi}\right)}.$$

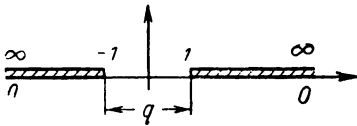
Интеграл превращается в эллиптический, когда углы кратны $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{6}$. Если все вершины находятся в конечной области, граница является треугольной.

1-2-3. Три определяющие вершины

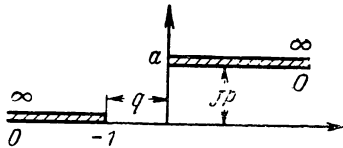


$$z = S \left[\frac{1}{2} t^2 + (1-a)t - a \ln t \right] + k;$$

S и k находятся графически.

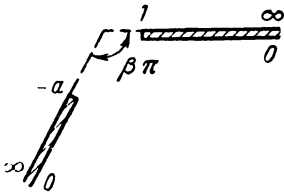


$$z = \frac{1}{4} q (t + t^{-1}).$$

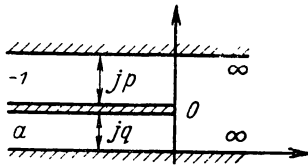


$$z = S \left[t + (1-a) \ln t + \frac{a}{t} \right] + k;$$

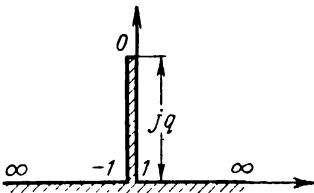
S и k находятся графически (см. стр. 201).



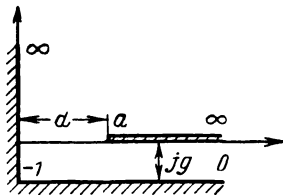
$$z = \frac{t^{2-\beta}}{2-\beta} + \frac{(a-1)}{(1-\beta)} t^{1-\beta} + \frac{a}{\beta} t^{-\beta}.$$



$$z = \frac{p}{\pi} \left[\ln(t+1) + \frac{q}{p} \ln \left(t - \frac{q}{p} \right) \right] - \frac{q}{\pi} \ln \frac{q}{p}.$$



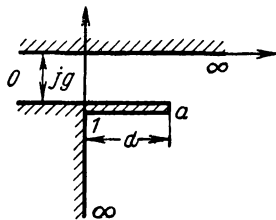
$$z = q \sqrt{t^2 - 1}.$$



$$z = \frac{g}{\pi} \left[\frac{2}{a} \sqrt{t+1} + \ln \frac{\sqrt{t+1}+1}{\sqrt{t+1}-1} \right];$$

a находится графически с использованием зависимости

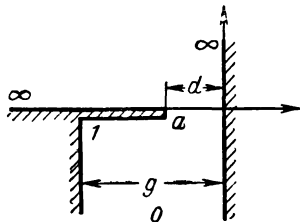
$$\frac{d}{g} \pi = \frac{2}{a} \sqrt{a+1} + \ln \frac{\sqrt{a+1}+1}{\sqrt{a+1}-1}.$$



$$z = \frac{g}{\pi} \left[\frac{2j}{a} \sqrt{t-1} - \ln \frac{\sqrt{t-1}-j}{\sqrt{t-1}+j} \right];$$

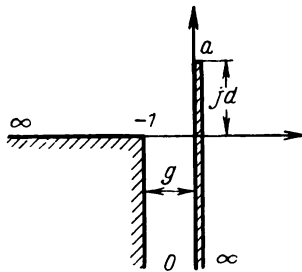
a находится из условия соответствия

$$t = a \text{ и } z = d - jg.$$



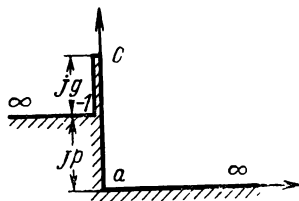
$$z = \frac{g}{\pi} \left[\frac{2}{a} \sqrt{t-1} + j \ln \frac{\sqrt{t-1}-j}{\sqrt{t+1}+j} \right];$$

a находится из условия соответствия $t = a$ и $z = -d$.



$$z = \frac{jg}{\pi} \left[\ln \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} - \frac{2}{a} \sqrt{t+1} \right];$$

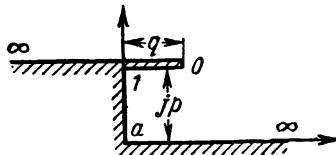
a находится из условия соответствия $t = a$ и $z = jd$.



$$z = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{2}{(a-1)} \left\{ \sqrt{(t+1)(t-a)} + \right. \\ \left. + \frac{(a-1)}{2} [\ln (2 \sqrt{(t+1)(t-a)} + 2t + 1 - a)] \right\} - \frac{p}{\pi} \ln (1+a);$$

a находится из условия соответствия

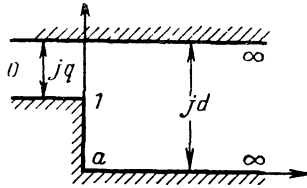
$$t = 0 \text{ и } z = j(p+g).$$



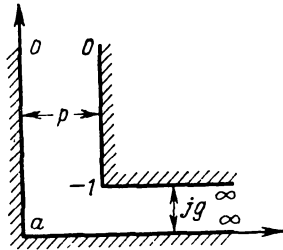
$$z = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{2}{(a-1)} \left\{ \sqrt{(t-1)(t-a)} + \right. \\ \left. + \frac{(a-1)}{2} [\ln (2 \sqrt{(t-1)(t-a)} + 2t - 1 - a)] \right\} - \frac{p}{\pi} \ln (a-1);$$

a находится из условия соответствия

$$t = 0 \text{ и } z = q + jp.$$

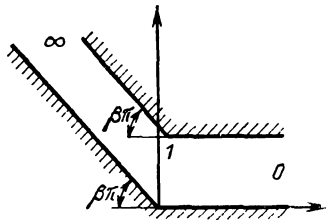


$$z = \frac{d}{\pi} \left[\operatorname{arch} \frac{2t - (a+1)}{a-1} - \operatorname{arch} \frac{(a+1)t - 2a}{(a-1)t} \right]; \quad a = \left(\frac{d}{g} \right)^2.$$



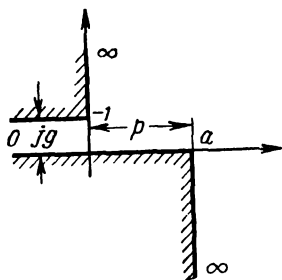
$$z = \frac{2g}{\pi} \left[\frac{p}{g} \operatorname{arctg} \frac{pu}{g} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \right];$$

$$u^2 = \frac{t - (g/p)^2}{t + 1}.$$



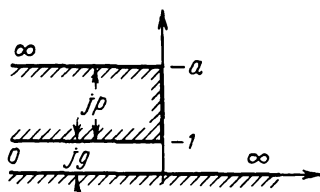
$$z = S \int \frac{1}{t} \left(\frac{1-t}{a+t} \right)^\beta dt.$$

Интеграл может быть выражен через элементарные функции если $\beta = p/q$, где $0 < p < q$, а p и q — целые числа (см. [Л.27]).



$$z = -\frac{jg}{\pi\sqrt{a}} \left[\frac{(a+1)R}{R^2-1} + (1-a) \operatorname{arth} R + j\sqrt{a} \ln \frac{(R\sqrt{a}-j)}{(R\sqrt{a}+j)} \right];$$

$$R = \sqrt{\frac{t+1}{t-a}}; \quad a = 1 + 2p^2/g^2 \pm \sqrt{(1 + 2p^2/g^2)^2 - 1}.$$

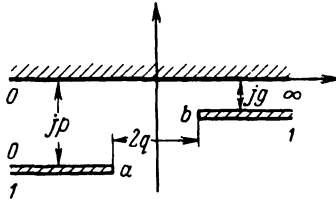


$$z = \frac{g}{\pi} \left[\frac{(a+1)}{\sqrt{a}} \operatorname{arth} R + \frac{(a-1)}{\sqrt{a}} \cdot \frac{R}{(1-R^2)} + \ln \frac{(R\sqrt{a}-1)}{(R\sqrt{a}+1)} \right];$$

$$R = \sqrt{\frac{t+1}{t+a}}; \quad a = -1 + 2k^2 \pm 2k\sqrt{k^2-1};$$

$$k = 1 + p/g.$$

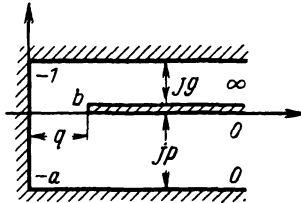
1-2-4. Четыре определяющие вершины



$$z = \frac{g}{\pi} \left[ab \ln t + (1 - ab) \ln (t - 1) + \right. \\ \left. + (1 + a + b + ab) \frac{1}{(t - 1)} \right] + k; \\ ab = p/g.$$

Если $p = g$, то $ab = 1$, $k = -jg$, а a находится графически с использованием зависимости

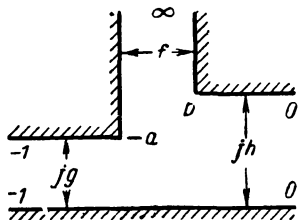
$$\ln a + \frac{(a + 1)^2}{a(a - 1)} = -\frac{q}{g} \pi.$$



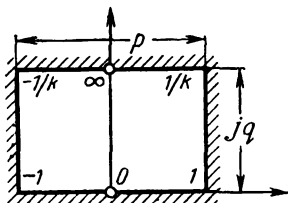
$$z = \frac{1}{\pi} \left\{ g \ln [2 \sqrt{(t + a)(t + 1)} + 2t + a + 1] + \right. \\ \left. + p \ln \left[\frac{2 \sqrt{a} \sqrt{(t + a)(t + 1)}}{t} + \frac{2a}{t} + a + 1 \right] \right\} - \\ - \frac{1}{\pi} (p + g) \ln (1 - a);$$

$gb = \sqrt{a} p$, а a находится из условия соответствия

$$t = b \text{ и } z = q.$$

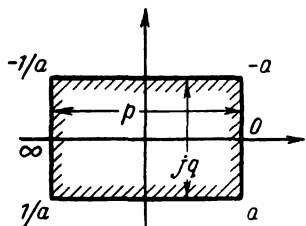


$$z = -\frac{jf}{\pi} \left\{ \operatorname{arch} \left(\frac{2t + a - b}{a + b} \right) + \frac{h}{f} \arccos \left[\frac{(a - b)t - 2ab}{(a + b)t} \right] + \right. \\ \left. + \frac{g}{f} \arccos \left[\frac{2(a - 1)(b + 1) + (b - a + 2)(t + 1)}{(a + b)(t + 1)} \right] \right\}; \\ \frac{h}{f} = \sqrt{ab}; \quad \frac{g}{f} = \sqrt{(b + 1)(a - 1)}.$$



$$t = \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{p} z, k \right);$$

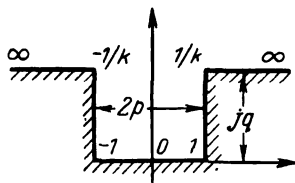
$$K'/K = 2q/p.$$



$$z = \frac{p}{E - k'^2 K} \left\{ E' - k^2 K - j \left[Z(\beta) + \frac{\beta}{K} (E - k'^2 K) \right] \right\};$$

$$k \operatorname{sn} \beta = -\sin [2 \operatorname{arctg} (-t)];$$

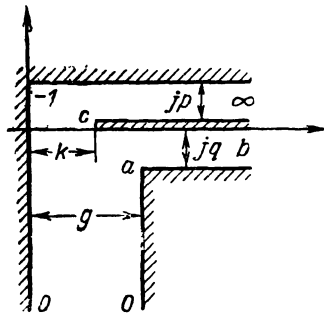
$$\frac{p}{g} = \frac{E - k'^2 K}{E' - k^2 K'}.$$



$$z = \frac{p}{E} E(t, k);$$

$$\frac{q}{p} = \frac{K' - E'}{E}.$$

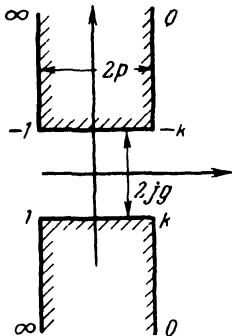
1-2-5. Пять определяющих вершин



$$z = \frac{1}{\pi} \left[p \operatorname{arch} \frac{2t + 1 - a}{1 + a} + q \arccos \frac{(1 - a)t - 2a}{(1 + a)t} + \right. \\ \left. + q \operatorname{arch} \frac{2(1 + b)(b - a) + (1 + 2b - a)(t - b)}{(1 + a)(t - b)} \right]; \\ \frac{c \sqrt{a}}{b} = \frac{g}{p}; \\ \frac{c - b}{b} \sqrt{\frac{b - a}{1 + b}} = \frac{q}{p},$$

а третье соотношение между постоянными находится из условия соответствия

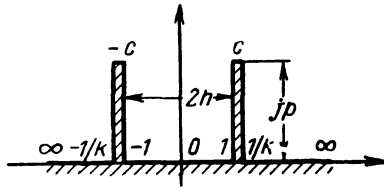
$$t = c \text{ и } z = k.$$



$$z = \frac{ip}{2E - k'^2 K} \left[u \left(k'^2 - \frac{2E}{K} \right) - \right. \\ \left. - 2Z(u) - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \right] - g; \\ t = \frac{1}{\operatorname{sn} u};$$

$$\frac{p}{g} = \frac{K'k'^2 - 2K' + 2E'}{2(Kk'^2 - 2E)}.$$

1-2-6. Шесть определяющих вершин

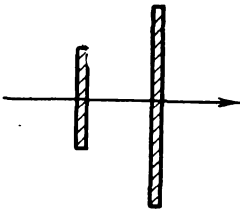


$$z = \frac{2hK'}{\pi} \left[Z(w) + \frac{\pi w}{2KK'} \right];$$

$t = \operatorname{sn} w$ с модулем k ;

$$\frac{p}{h} = \frac{2K'}{\pi} \left[jZ(K + jv) + \frac{\pi v}{2KK'} \right];$$

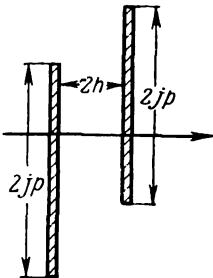
$$c = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{E'}{K'}} = \operatorname{sn}(K + jv).$$



$$z = S \left[Z(w) + \frac{\pi w}{2KK'} + \frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{c + \operatorname{sn} w} \right] + \operatorname{const};$$

$$t = \operatorname{sn} w.$$

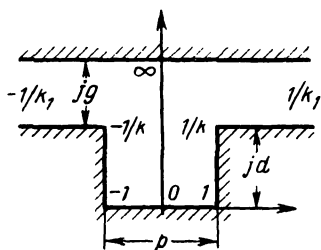
Определение постоянных дано в [Л. 10—12].



$$z = \frac{2hK'}{\pi} \left[Z(w) + \frac{\pi w}{2KK'} + jBk \operatorname{sn} w \right];$$

$t = \operatorname{sn} w$ с модулем k .

Определение постоянных дано в [Л. 10—12].

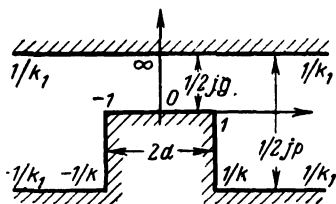


$$z = -\frac{2g}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} u + \Pi(u, \alpha, k) \right];$$

$$t = \operatorname{sn} \alpha \text{ с модулем } k; \quad k_1 = k \operatorname{sn} \alpha;$$

$$\frac{p}{g} = \frac{4K}{\pi} \left[Z(\alpha) - \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} \right];$$

$$\frac{d}{g} = \frac{2K'}{\pi} \left[Z(\alpha) - \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} \right] + \frac{\alpha}{K}.$$

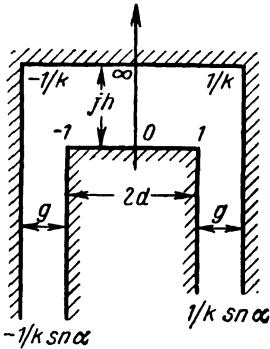


$$z = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha} \left[u - \frac{\operatorname{dn} \alpha}{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha} \Pi(u, \alpha) \right];$$

$$t = \operatorname{sn} u \text{ с модулем } k; \quad k_1 = k \operatorname{sn} \alpha;$$

$$\frac{g}{p} = \frac{2K'}{\pi} \left[\frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha} - Z(\alpha) \right] + 1 - \frac{\alpha}{K};$$

$$\frac{d}{p} = \frac{K}{\pi} \left[\frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha} - Z(\alpha) \right].$$

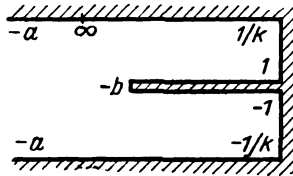


$$z = u - \frac{dn \alpha}{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha} \Pi(u, \alpha, k);$$

$$t = \operatorname{sn} u; \quad \alpha = K - \frac{1}{2} |jK';$$

$$d = K \left(\frac{1+k}{2k} - \frac{\pi}{4kK} \right);$$

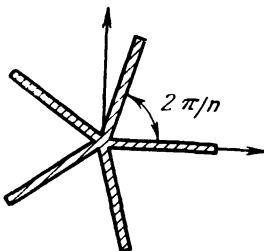
$$g = \frac{\pi}{2k}; \quad h = \frac{K'(1+k)}{2k}.$$



$$z = kC(1 - bk \sin \delta) \frac{\operatorname{sn} \delta}{\operatorname{cn} \delta \operatorname{dn} \delta} \Pi(\lambda, \delta, k) + \frac{kbC(\lambda)}{a} - \frac{jC(a-b)k^2 \operatorname{sn}^2 \delta}{\operatorname{cn} \delta \operatorname{dn} \delta} \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{(a^2-1)}{1-k^2} \frac{1-k^2 t^2}{a^2-t^2}}.$$

Определение постоянных дано Е. Р. Adams'ом в работе „Electrical distributions on cylinders“, Proc. Amer. Phil. Soc., 125, 11, 1936 1-2-7. n определяющих вершин

n равноудаленных, идентичных, конечных пересекающихся пластин, концы которых лежат на единичной окружности



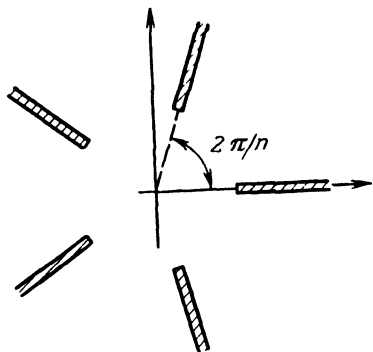
$$z = [\cos(n \operatorname{arctg} t)]^{2/n}.$$

Точками, соответствующими концам пластин, являются

$$t = \operatorname{tg} \frac{(2k-1)\pi}{2n}; \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

n равноудаленных—полу бесконечных пластин, начала которых лежат на единичной окружности

Продолжение приложения III
пластин, начала которых лежат



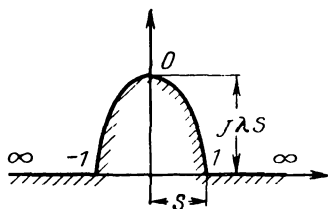
$$z = [\cos(n \operatorname{arctg} t)]^{-2/n}.$$

Точками, соответствующими началам пластин, являются

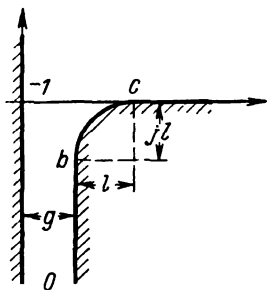
$$t = \operatorname{tg} \frac{(2k-1)\pi}{2n};$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

1-3. Прямолинейные участки и кривые
Полуэллипс и прямая линия

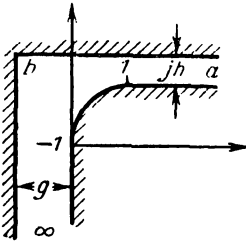


$$z = S(t + \lambda \sqrt{t^2 - 1}).$$



$$z = \frac{-2g}{\pi(\sqrt{b} + \lambda\sqrt{c})} \left\{ \sqrt{t-b} - \sqrt{b} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t-b}{b}} + \right. \\ \left. + \lambda \left[\sqrt{t-c} - \sqrt{c} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t-c}{c}} \right] \right\};$$

b , c и λ находятся из условия соответствия $t = -1$ и $z = 0$ с учетом требуемой конфигурации скругленного угла.



$$z = -j \sqrt{\frac{a+1}{b-a}} \ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{b-a}{a+1}\right)\left(\frac{2}{b-1}\right)}}{1 - \sqrt{\left(\frac{b-a}{a+1}\right)\left(\frac{2}{b-1}\right)}} +$$

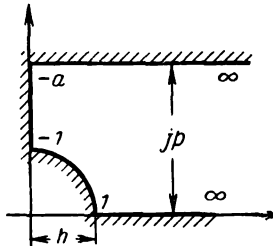
$$+ 2j \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{b-1}} - \frac{b+1}{b-1} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{b+1}}}{1 - \sqrt{\frac{2}{b+1}}} +$$

$$+ 2 \sqrt{\left(\frac{b+1}{b-1}\right)\left(\frac{a-1}{b-a}\right)} \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{b-a}{a-1}\right)\left(\frac{2}{b+1}\right)};$$

$$h = \pi \left[\sqrt{\frac{a+1}{b-a}} + \sqrt{\left(\frac{b+1}{b-1}\right)\left(\frac{a-1}{b-a}\right)} \right];$$

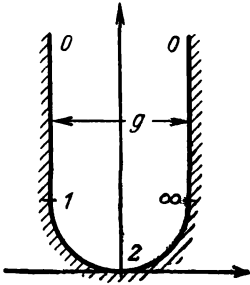
$$g = \pi \left(1 + \sqrt{\frac{b+1}{b-1}} \right).$$

Подбор постоянных дает скругленный угол с почти равномерной кривизной.



$$z = \frac{2p}{\pi(1+\lambda)} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t-1}{t+a}} + \lambda \operatorname{arth} \sqrt{\frac{t+1}{t+a}} \right);$$

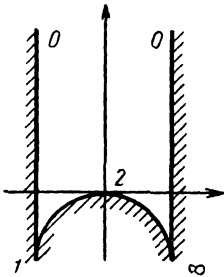
λ и a находятся из условий соответствия $t = -1$, $z = jp$ и $t = 1$, $z = b$. Кривая хорошо аппроксимирует окружность.



$$z = ig \frac{(K' - E')}{E} + \frac{1}{2} g (1 - i);$$

$$k = \sqrt{t}.$$

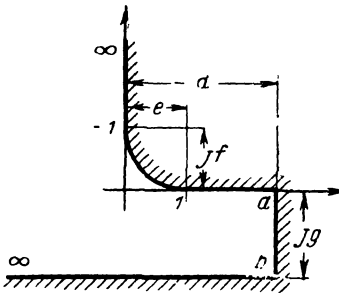
Кривая является полуокружностью.



$$z = ig \frac{K'}{K} - \frac{1}{2} g (1 + i);$$

$$k = \sqrt{t}.$$

Кривая является полуокружностью.



$$z = S \int \frac{\lambda'(t+1)^n + \sqrt{t-1}}{V(t-a)(t-b)} dt;$$

$$g = 2s \left[\lambda \sqrt{b+1} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \sqrt{b-1} E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \right];$$

$$d = 2s \left\{ \lambda (b+1) \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) \right] + \sqrt{b-1} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k'_1\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k'_1\right) \right] \right\};$$

$$e = 2s\lambda \sqrt{b+1} [F(\varphi, k_1) - E(\varphi, k_1)];$$

$$f = 2s \sqrt{b-1} \left[\sqrt{\frac{2(b+1)}{(b-1)(a+1)}} - E(\varphi, k') \right];$$

$$k = \sqrt{\frac{b-a}{b+1}}; \quad k' = \sqrt{\frac{b-a}{b-1}};$$

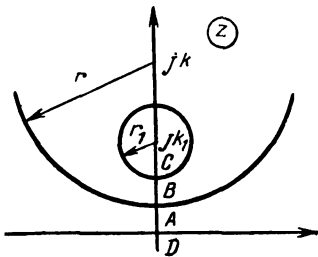
$$k_1 = \sqrt{1-k^2}; \quad k'_1 = \sqrt{1-k'^2};$$

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{2}{a+1}}.$$

Кривая аппроксимирует дугу окружности.

2. ДРУГИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Преобразование эксцентричных окружностей (расположенных одна внутри другой) и прямой в концентричные [окружности



$$z = \frac{ip_1(R_2 + t)}{R_2 - t};$$

$$p_1 = \sqrt{k_1^2 - r_1^2}; \quad k_1 > r_1 > 0.$$

Соответственными являются:

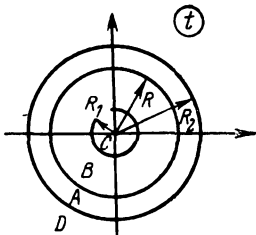
линия $y=0$ и окружность $|t|=R_2$;
окружности $|z - jk| = r_1$ и

$$|t| = R_1 = \frac{R_2 r_1}{|k_1| + \sqrt{k_1^2 - r_1^2}};$$

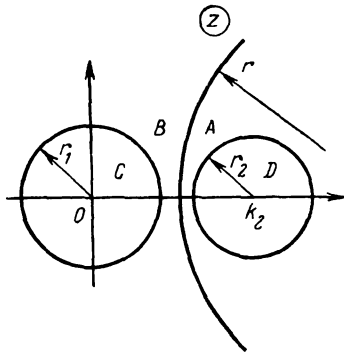
окружности $|z - jk| = r$ и $|t| = R$,

где $k = p_1 \frac{R_2^2 + R^2}{R_2^2 - R^2}$; $r = \frac{2p_1 R_2 R}{|R_2^2 - R^2|}$;

области A, B, C и D в двух [плоскостях.



Преобразование эксцентричных окружностей (расположенных одна вне другой) в концентричные окружности
 Плоскость t показана выше



$$z = \frac{a(r_1 t - bR_1)}{r_1 t - aR_1};$$

$$ab = r_1^2; (k_2 - a)(k_2 - b) = r_2^2 \text{ и } \frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{b}{(k_2 - b)}; k_2 > 0.$$

Соответственными являются:

окружности $|z| = r_1$ и $|t| = R_1$;

окружности $|z - k_2| = r_2$ и $|t| = R_2$;

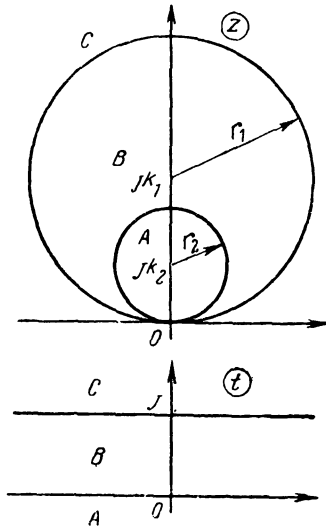
окружности $|z - k| = r$ и $|t| = R$,

где

$$k = \frac{r_1^2 (R_1^2 - R^2)}{bR_1^2 - aR^2}; \quad r = \frac{r_1 R_1 R |b - a|}{|aR^2 - bR_1^2|};$$

области A , B , C и D в двух плоскостях.

Преобразование окружностей, имеющих внутреннюю точку касания с прямой



$$z = \frac{2r_1 r_2}{(r_2 - r_1)t - jr_2}$$

Соответственными являются:

окружность $|z - jk_1| = r_1$ и прямая $v = 0$;

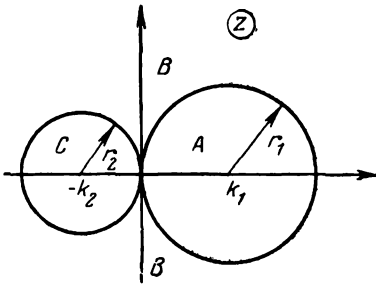
окружность $|z - jk_2| = r_2$ и прямая $v = j$;

прямые $x = 0$ и $u = 0$;

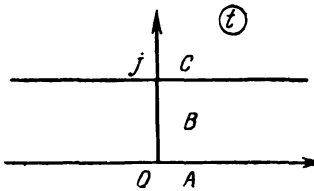
прямые $y = 0$ и $v = jr_2/(r_2 - r_1)$;

области A, B и C в двух плоскостях.

Преобразование окружностей, имеющих внешнюю точку касания с прямой



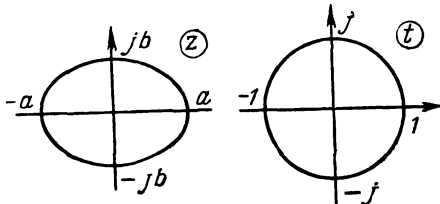
$$z = \frac{2r_1 r_2}{j(r_1 + r_2)t + r_2}$$



Соответственными являются:

- окружность $|z - k_1| = r_1$ и прямая $v = 0$;
- окружность $|z + k_2| = r_2$ и прямая $v = j$;
- прямые $x = 0$ и $v = r_2 / (r_1 + r_2)$;
- прямые $y = 0$ и $u = 0$;
- области A, B и C в двух плоскостях.

Преобразование внутренней области эллипса во внутреннюю область единичной окружности



$$t = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left[\frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsin} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) \right]$$

с модулем k ;

$$\left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 = e^{-\pi K'/K}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Анго А., Математика для электро- и радиоинженеров, изд-во «Наука», 1965.
2. Abraham M. and Becker R., The classical theory of electricity and magnetism, Blackie, London, 1937.
3. De G. Allen D. N., Relaxation methods, McGraw-Hill, London, 1954.
4. Bateman H., Partial differential equations of mathematical physics, Dover, New York, 1944.
5. Беккенбах Э. Ф. (ред.), Современная математика для инженеров, Изд-во иностр. лит., 1958.
6. Bowman F., Introduction to elliptic functions with applications, English Universities Press, Suffolk, 1953.
7. Брунов Б. Я., Гольденберг Л. М., Кляцкин И. Г., Цейтлин Л. А., Теория электромагнитного поля, Госэнергоиздат, 1962.
8. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А., Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация в цифровых вычислительных машинах, Физматгиз, 1957.
9. Бухгольц Г., Расчет электрических и магнитных полей, Изд-во иностр. лит., М., 1961.
10. Buckingham R. A., Numerical methods, Pitman, London, 1957.
11. Byerly W. E., An elementary treatise on Fourier series and spherical, cylindrical and ellipsoidal harmonics. Ginn, Boston, 1893.
12. Carter G. W., The electromagnetic field in its engineering aspect, Longmans, London, 1954.
13. Churchill R. V., Fourier series and boundary value problems, McGraw-Hill, New York, 1941.
14. Copson E. T., An introduction to the theory of functions of a complex variable, Clarendon, Oxford, 1935.
15. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, изд-во «Наука», 1966.
16. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З., Численные методы анализа, изд-во «Наука», 1967.
17. Edwards J., A treatise on the integral calculus, Macmillan, London, 1921.
18. Ferraro V. C. A., Electromagnetic theory, Athlone Press, London, 1956.
19. Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.
20. Gibbs W. J., Conformal transformations in electrical engineering, Chapman and Hall, London, 1958.
21. Grinter L. E., Numerical methods of analysis in engineering, Macmillan, New York, 1949.

22. Хэг Б. Электромагнитные расчеты, ОНТИ, 1934.
23. Jeans J., The mathematical theory of electricity and magnetism, University Press, Cambridge, 1951.
24. Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962.
25. Karman T. V. and Burgers J. M., General aerodynamic theory, v. II, Springer, Berlin, 1935.
26. Kelvin, Lord, Reprint of papers on electrostatics and magnetism, Macmillan, London, 1872.
27. Kober H., Dictionary of conformal representation, Dover, New York, 1952.
28. Коппенфельс В., Штальман Ф., Практика конформных отображений, Изд-во иностр. лит., М., 1963.
29. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд-во «Наука», 1965.
30. Lapczos C., Applied analysis, Pitman, London, 1957.
31. Legendre A. M., Mémoires sur les transcendentes elliptiques, 1793.
32. Legendre A. M., Exercices de calcul integral, 1811.
33. Maxwell J. C., A treatise on electricity and magnetism, v. I, II, Clarendon Press, Oxford, 1892.
34. Максвелл Дж. К., Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, Гостехиздат, 1954.
35. Meyer H. A., Symposium on Monte Carlo methods, Chapman and Hall, London, 1956.
36. Милл В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, Изд-во иностр. лит., 1955.
37. Milne-Thompson L. M., Theoretical hydrodynamics, Macmillan, London, 1938.
38. Миролубов Н. Н., Костенко М. В., Левинштейн М. Л., Тиходеев Н. Н., Методы расчета электростатических полей, изд-во «Высшая школа», 1963.
39. Moon P., Spencer D. E., Field theory for engineers, Van Nostrand, New York, 1961.
40. Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы математической физики, Изд-во иностр. лит., т. I, 1958; т. II, 1960.
41. Moullin E. B., Principles of electromagnetism, The University Press, Oxford, 1955.
42. Ollendorf F., Technische Elektrodynamik, Bd I, Berechnung magnetischer Felder, Springer, Vienna, 1952.
43. Shaw F. S., An introduction to relaxation methods, Dover, New York, 1953.
44. Смайт В., Электростатика и электродинамика, Изд-во иностр. лит., 1954.
45. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. I—IV, Гостехиздат, 1951—1954.
46. Sokolnikoff I. S. and E. S., Higher mathematics for engineers and physicists, McGraw-Hill, New York, 1941.
47. Southwell R. V., Relaxation methods in theoretical physics, The University Press, Oxford, 1946.
48. Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
49. Weber E., Electromagnetic fields, v. I, Mapping of fields, Wiley, New York, 1960.

50. Уиттекер Е. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, Физматгиз, т. I, 1962; т. II, 1963.

51. Zworykin V. K., Morton G. A., Ramberg E. G., Hillier J. and Vance A. W., Electron optics and the electron microscope, Wiley, New York, 1945.

Справочники

52. Byrd P., Friedman M. D., Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Springer, Berlin, 1954.

53. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1963.

54. Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы, изд-во «Наука», 1964.

55. Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, Изд-во АН СССР, 1941.

56. Milne-Thomson L. M., Jacobian elliptic function tables, Dover, New York, 1950.

57. Панов Д. Ю., Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, Гостехиздат, 1951.

58. Pearson K., Tables of complete and incomplete elliptic integrals, London, 1934.

59. Peirce B. O., A short table of integrals, Ginn, Boston, 1929.

60. Самойлова-Яхонтова Н. С., Таблицы эллиптических интегралов, ОНТИ, 1953.

61. Spenceley G. W. and Spenceley R. M., Smithsonian elliptic function tables, Smithsonian, Washington, 1947.

62. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции, изд-во «Наука», 1964.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	3
Из предисловия авторов	5

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ

Глава первая. Общие сведения	8
Глава вторая. Основы теории поля	12
2-1. Электрические поля	12
2-2. Магнитные поля	24
2-3. Граничные условия	35
2-4. Сопряженные функции	38
2-5. Эквивалентное пространственное распределение магнитных масс и зарядов	45
2-6. Механические силы	47
Литература	50

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МЕТОДЫ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ

Глава третья. Зеркальные отображения	51
3-1. Введение	51
3-2. Плоские граничные поверхности	52
3-3. Цилиндрические граничные поверхности	62
3-4. Общие замечания	72
Литература	76
Глава четвертая. Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных	76
4-1. Введение	76
4-2. Цилиндрические границы	78
4-3. Прямоугольные границы	95
4-4. Заключение	106
Литература	108
Глава пятая. Решение уравнения Пуассона. Магнитные поля распределенных токов	108
5-1. Введение	108
5-2. Немагнитные проводники в воздухе	111
5-3. Поле внутри проводников с бесконечно большой магнитной проницаемостью, расположенных в воздухе	118

5-4. Простые границы. Применение метода отображений	123
5-5. Учет влияния границ с помощью простого ряда Фурье. Метод Роговского	124
5-6. Учет влияния границ с помощью двойных рядов Фурье. Метод Рота	137
Литература	146

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Глава шестая. Введение к конформному преобразованию	149
6-1. Конформное преобразование и сопряженные функции	149
6-2. Типы задач, поддающихся решению	156
6-3. Общие положения	157
6-4. Нахождение уравнений преобразования	160
Литература	161
Глава седьмая. Криволинейные границы	161
7-1. Дробно-линейное преобразование	161
7-2. Простое преобразование Жуковского	172
7-3. Кривые, выраженные в параметрической форме; общие уравнения преобразования в виде рядов	176
Литература	181
Глава восьмая. Многоугольные границы	181
8-1. Введение	181
8-2. Преобразование верхней половины плоскости во внутреннюю область многоугольника	182
8-3. Преобразование верхней половины плоскости во внешнюю область многоугольника	208
8-4. Преобразование круговых границ в многоугольные	212
8-5. Классификация интегралов	217
Литература	218
Глава девятая. Применение эллиптических функций	219
9-1. Введение	219
9-2. Эллиптические интегралы и функции	220
9-3. Поле во внешней области заряженного прямоугольного проводника	229
9-4. Поле в пазу конечной глубины	244
9-5. Заключение	250
Литература	252
Глава десятая. Общие положения	252
10-1. Введение	252
10-2. Источники поля	253
10-3. Криволинейные границы	260
10-4. Углы, не кратные $\pi/2$	265
10-5. Численные методы	267
10-6. Границы, не являющиеся эквипотенциалами	276
Литература	280

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Глава одиннадцатая. Методы конечных разностей	282
11-1. Введение	282
11-2. Уравнения в конечных разностях	283
11-3. Релаксационный метод	290
11-4. Итерационный метод	303
11-5. Граничные условия для градиента	315
11-6. Погрешности	330
11-7. Заключение	338
Литература	340
Глава двенадцатая. Метод Монте-Карло	341
12-1. Введение	341
12-2. Описание метода	342
12-3. Пример	344
12-4. Заключение	345
Литература	345
Приложение I. Суммы некоторых рядов Фурье	346
Приложение II. Разложение эллиптических функций в ряды	347
Приложение III. Таблица преобразований	349
Литература	371