Р. Бишоп,
Р. Криттенден

Геометрия многообразий

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

GEOMETRY OF MANIFOLDS

By

RICHARD L. BISHOP

Department of Mathematics
University of Illinois
Urbana, Illinois

RICHARD J. CRITTENDEN

Department of Mathematics
Northwestern University
Evanston, Illinois

1964

ACADEMIC PRESS

NEW YORK and LONDON

Р. Л. Бишоп
Р. Дж. Криттенден

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ

Перевод с английского
А. С. Дынина

Издательство «Мир»
Москва 1967

УДК 517.838

Книга написана представителями известной школы геометров Массачусетского технологического института (США) и представляет собой введение в современную дифференциальную геометрию. Авторы начинают с изложения основных понятий, переходя затем к изучению глобальной структуры римановых многообразий. Эта книга выделяется не только современным подходом и четким изложением, но также и своеобразным расположением материала, содержащего много удачно подобранных задач — от тривиальных до самых трудных.

Предназначенная для начинающих геометров, книга рассчитана и на интересующихся алгеброй, анализом, дифференциальными уравнениями, топологией, вариационным исчислением, группами Ли, механикой, а также их взаимосвязями.

Она будет полезна широкому кругу студентов старших курсов физико-математических специальностей. Ее с удовольствием прочитают и специалисты.

Редакция литературы по математическим вопросам

2-2-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга задумана как учебник, содержащий материал, который мы считаем интересным и важным для студентов старших курсов. Она предназначена для самостоятельного изучения, но будет полезной и как пособие для тех, кто слушает специальные курсы. В основе книги лежат лекции профессора В. Амброза, читанные им в Массачусетском технологическом институте в 1958—1959 гг. Материал этих лекций был предварительно просмотрен профессорами В. Амброзом и И. М. Зингером, которые широко использовали работы Эресмана, Чжэнь Шэнь-шэня и Э. Картана. Наш вклад главным образом свелся лишь к отработке деталей, дополнительным замечаниям и подбору задач.

По нашему убеждению, предмет этой книги, помимо того, что он является интересной областью для специализации, обладает еще одним привлекательным свойством. Именно в нем синтезируются различные ветви математики, и потому его можно рекомендовать студентам старших курсов, работающим на разных кафедрах, которые хотят выйти за рамки своей узкой специальности и познакомиться с взаимодействием и применением других областей. Мы надеемся, что многое из того, что рассматривается в книге, будет интересным не только геометрам, но и тем, кто занимается анализом, топологией, алгеброй и даже теорией вероятностей или астрономией. Для понимания книги необходимо знакомство с теорией функций действительного переменного, линейной алгеброй и теоретико-множественной топологией.

Представление о содержании книги можно составить из оглавления и вводных абзацев книг. Мы не включили в книгу теорию интегрирования, в частности теоремы де Рама и теорему Гаусса — Бонне, поскольку не хотели затрагивать теорию топологических инвариантов.

Однако основы этих вопросов рассмотрены достаточно тщательно, а теория Морса доведена до того места, где топология начинает брать верх над анализом.

Теоремы, леммы, предложения и задачи нумеруются последовательно в каждой главе. Смысл этих номеров в текущих ссылках должен быть очевидным. Так, в тексте главы 6 «теорема 7» означает седьмую теорему главы 6, тогда как «задача 5.4» относится к четвертой задаче главы 5.

Задачи имеют различный характер — от тривиальных до очень трудных и от существенных для книги до имеющих к ней лишь косвенное отношение. Теория групп голономии и комплексных многообразий изложена исключительно в виде задач. Некоторые задачи почти наверное потребуют обращения к указанной литературе, а именно задачи 1.11, 2.7, 2.13, 2.14 и 8.15.

В кратком добавлении дается наиболее подходящая для наших целей формулировка теоремы о существовании и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работах [33] и [80] читатель найдет обширную библиографию так же, как и прекрасное изложение большой части материала настоящей книги. Числа в скобках указывают, конечно, ссылки на библиографию.

Апрель, 1964

Р. Л. Б.
Р. Дж. К.

ГЛАВА 1

Многообразия

В настоящей главе излагаются элементы теории многообразий и формулируются основные теоремы. В ней рассматриваются производные Ли, определенные с помощью локальных однопараметрических групп преобразований, различные интерпретации скобки векторных полей, а также дается очерк теории Фробениуса об интегрируемости распределений p-плоскостей [4, 22, 33, 63, 80, 94, 95].

1.1. Вводный материал и обозначения

Пусть φ — отображение из M в N, а ψ — отображение из P в T, тогда $\psi \circ \varphi$ будет обозначать их композицию: за φ следует ψ. Здесь M, N, P, T — произвольные множества, причем подразумевается, что областью определения отображения $\psi \circ \varphi$ служит $\varphi^{-1}(P) \cap M$ (в частности, $\psi \circ \varphi$ может иметь пустую область определения). Аналогичное соглашение, а именно что область определения есть наибольшее допустимое множество, будет применяться при образовании сумм, произведений и других комбинаций отображений. Если $U \subset M$, то через $\varphi|_U$ мы будем обозначать сужение отображения φ на U.

Евклидово d-мерное пространство, которое будет обозначаться через R^d, снабжается обычными координатными функциями $\{u_i\}$, так что если $t = (t_1, \ldots, t_d) \in R^d$, то $u_i(t) = t_i$. В случае $d=1$ пишут $R^1 = R$ и $u_1 = u$. Если U — открытое подмножество в R^d, то говорят, что отображение $\varphi: U \to R^d$ принадлежит *классу* C^∞ (т. е. $\varphi \in C^\infty$), если вещественные функции $u_i \circ \varphi$, $i = 1, \ldots, d$, имеют все k-е непрерывные частные производные при любом неотрицательном k.

Как показывает следующий пример, C^∞-отображения не обязательно аналитичны: $f(x)=\exp(-1/x^2)$, если $x\neq 0$, $f(0)=0$. В действительности существуют нетривиальные вещественные C^∞-функции на R^d, которые обращаются в нуль вне компактного множества (см. [72],

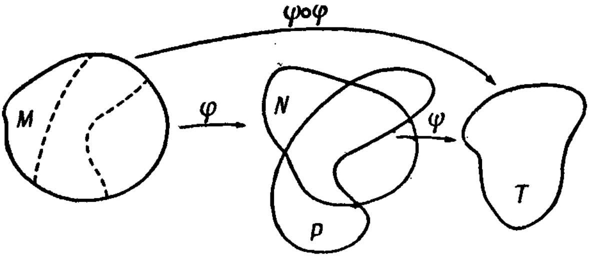


Рис. 1.

стр. 33, где приводится конструкция урысоновских C^∞-функций).

Задача 1. Положим

$$f(x)=\begin{cases}\exp(-1/x), & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Пусть $\{r_n\}$ — множество всех рациональных чисел, расположенных в некотором порядке, и

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}f(x-r_n).$$

Показать, что $g\in C^\infty$, но нигде не аналитично.

1.2. Определение многообразия

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство; *d-мерная координатная система* в X — это гомеоморфизм открытого подмножества X на открытое подмножество R^d. X называется *d-мерным топологическим многообразием*, если X покрывается областями определения d-мерных координатных систем. Область определения координатной системы φ называется *координат-*

ной окрестностью; если x принадлежит этой координатной окрестности, то говорят, что φ — *координатная система в* x.

Если φ — координатная система, то функции $(u_1 \circ \varphi, \ldots, u_d \circ \varphi)$ часто обозначают через $(x_1, \ldots, x_d)$. Систему $(x_1, \ldots, x_d)$, так же как и φ, мы будем называть координатной системой.

Пусть φ, ψ — некоторые d-мерные координатные системы на X. Тогда φ и ψ называются *C^∞-связанными*,

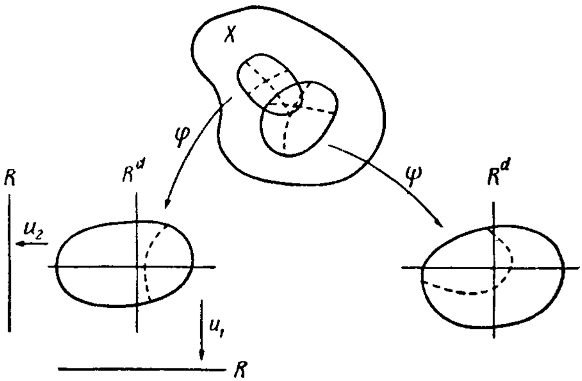


Рис. 2.

если и $\varphi \circ \psi^{-1}$, и $\psi \circ \varphi^{-1}$ принадлежат классу C^∞. (См. рис. 2.)

Рассмотрим следующие свойства множества координатных систем $\mathscr{C}$ на топологическом многообразии X:

(1) X покрыто областями определения координатных систем из $\mathscr{C}$.

(2) Каждая пара координатных систем из $\mathscr{C}$ является C^∞-связанной.

(3) Множество $\mathscr{C}$ максимально по отношению к свойствам (1) и (2).

C^∞-многообразие (или просто *многообразие*) — это пара $(X, \mathscr{C})$, где X — топологическое многообразие, а $\mathscr{C}$ — некоторое множество координатных систем, удовлетворяющее условиям (1), (2) и (3). Множество $\mathscr{C}$ называется *C^∞-структурой* на X. (В дальнейшем мы будем обычно опускать символ $\mathscr{C}$ и обозначать многооб-

разие просто через X.) *Базис* C^∞-структуры $\mathscr{C}$ — это подмножество $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$, удовлетворяющее условиям (1) и (2).

Если на *множестве* X задана совокупность координатных систем $\mathscr{C}_0$, удовлетворяющая условиям (1) и (2), то требованием, чтобы они являлись гомеоморфизмами, определяется топология на X, так что X становится топологическим многообразием. При этом на X существует единственная C^∞-структура $\mathscr{C}$ с базисом $\mathscr{C}_0$: она получается присоединением всех C^∞-связанных координатных систем. (Мы пренебрегли требованием, чтобы X было хаусдорфовым пространством.)

Если M, N — многообразия, то отображение $\psi : M \to N$ принадлежит *классу* C^∞ ($\psi \in C^\infty$), если для каждой пары (φ, θ) координатных систем φ на M и θ на N функция $\theta \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ принадлежит классу C^∞.

Для того чтобы отображение $\psi : M \to N$ принадлежало классу C^∞, достаточно, чтобы для каждого $m \in M$ существовали координатные системы φ в m и θ в $\psi(m)$, такие, что $\theta \circ \psi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$.

Пусть M паракомпактно; тогда, поскольку разложения единицы, подчиненные данному покрытию, можно строить из рациональных комбинаций функций Урысона, существуют C^∞-разложения единицы. Ввиду того что C^∞-разложения единицы необходимы для многих аналитических построений на многообразии, а также ввиду того что римановы многообразия, наша конечная цель, метризуемы и, следовательно, паракомпактны, мы будем предполагать в дальнейшем, что многообразия паракомпактны. Тогда, как доказывается в теоретико-множественной топологии, многообразия сепарабельны и потому удовлетворяют второй аксиоме счетности, если они связны.

Примеры. (1) *Евклидово пространство*. Базис $\mathscr{C}_0$, состоящий из тождественного отображения, определяет обычную C^∞-структуру на R^d.

(2) *Открытые подмногообразия*. Пусть M — многообразие с C^∞-структурой $\mathscr{C}$, пусть U — открытое подмножество в M и пусть $\mathscr{C}_0 = \{\varphi \in \mathscr{C} \mid$ (область определе-

ния $\varphi) \subset U\}$. Тогда U является многообразием с $\mathscr{C}_0$ в качестве C^∞-структуры. U называется *открытым подмногообразием* многообразия M.

(3) *Общая линейная группа* $Gl(d, R)$. Она состоит из невырожденных $d \times d$-матриц с вещественными элементами и является открытым подмножеством в R^{d^2}, поскольку

$$Gl(d, R) = R^{d^2} - \det^{-1}(0).$$

(4) *Обычная сфера*. Пусть $S^d = \{x \in R^{d+1} \mid \sum u_i^2(x) = 1\}$; определим $\varphi : S^d - \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to R^d$, $\psi : S^d - \{(0, \ldots, 0, -1)\} \to R^d$ как стереографические проекции из $(0, \ldots, 0, 1)$, $(0, \ldots, 0, -1)$ соответственно. Тогда

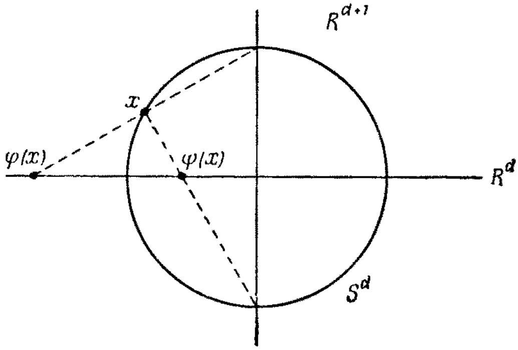


Рис. 3.

$\mathscr{C}_0 = \{\varphi, \psi\}$ является базисом C^∞-структуры на S^d. [*Стереографическая проекция*: $\varphi(x)$ есть точка, в которой прямая линия, проходящая через $(0, \ldots, 0, 1)$ и x, пересекает $u_{d+1}^{-1}(0) = R^d$.]

(5) *Вещественное проективное пространство*. Пусть P^d — вещественное проективное d-пространство, т. е. совокупность прямых, проходящих через начало в R^{d+1}. Естественное накрывающее отображение $\varphi : S^d \to P^d$, переводящее точку x в содержащую ее прямую, индуцирует C^∞-структуру на P^d; это единственная C^∞-струк-

Если $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, то *частную производную функции f по r_i в t* мы обозначаем следующим образом:

$$\left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_t (f) = \left.\frac{\partial f}{\partial r_i}\right|_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i + h, t_{i+1}, \ldots, t_n) - f(t)}{h}.$$

Если $p \in \mathbb{R}^d$, то $B_p(r)$ обозначает *открытый шар* радиуса r с центром в p. Открытый шар радиуса r с центром в начале координат обозначается просто через $B(r)$. Символ $C(r)$ означает *открытый куб* со сторонами длины $2r$ и с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^d$. Таким образом,

$$C(r) = \{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d : |a_i| < r \text{ для всех } i\}.$$

Через $\mathbb{C}$ будет обозначаться *поле комплексных чисел*, а через $\mathbb{C}^n$ — *комплексное n-мерное пространство*

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_i \in \mathbb{C} \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Если не оговорено противное, то под *окрестностью* будет пониматься *открытая* окрестность. *Замыкание* подмножества A топологического пространства обозначается через $\bar{A}$. Если функция φ задана на топологическом пространстве X, то ее *носитель* — это подмножество

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}$$

пространства X.

Мы будем пользоваться *символом Кронекера*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ — набор из d целых неотрицательных чисел, то мы положим

$$[\alpha] = \sum \alpha_i, \qquad \alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_d!$$

и

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial r_1^{\alpha_1} \ldots \partial r_d^{\alpha_d}}.$$

Если $\alpha = (0, \ldots, 0)$, то полагаем

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha}(f) = f.$$

Дифференцируемые многообразия

1.2. Определения. Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — открытое подмножество, и пусть $f\colon U \to \mathbb{R}$. Мы говорим, что f — *дифференцируемая функция класса C^k на U* (или просто что *f принадлежит C^k*), где k — целое неотрицательное число, если на U существуют непрерывные частные производные $\partial^\alpha f/\partial r^\alpha$ для всех $[\alpha] \leqslant k$. В частности, f

принадлежит классу C^0, если она непрерывна. Если $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, то f называется *дифференцируемым отображением класса* C^k, если каждая из компонент $f_i = r_i \circ f$ принадлежит C^k. Мы будем говорить, что f *принадлежит классу* C^∞, если f принадлежит C^k для любого $k \geqslant 0$.

1.3. Определения. *Локально евклидово пространство* M *размерности* d — это хаусдорфово топологическое пространство M, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной открытому подмножеству евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Если φ — гомеоморфное отображение связного открытого множества $U \subset M$ на открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, то φ называют *координатным отображением*, функции $x_i = r_i \circ f$ — *координатными функциями*[1]), а пару (U, φ) (иногда обозначаемую через $(U, x_1, \ldots, x_d)$) — *системой координат*. Система координат (U, φ) называется *кубической*, если $\varphi(U)$ — открытый куб с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^d$. Если $m \in U$ и $\varphi(m) = 0$, то говорят, что *началом* данной системы координат является точка m.

1.4. Определения. *Дифференцируемая структура* $\mathcal{F}$ *класса* C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ на локально евклидовом пространстве M — это набор систем координат $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\colon\ \alpha \in A\}$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

(a) $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;

(b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ принадлежит классу C^k для всех $\alpha,\ \beta \in A$;

(c) семейство $\mathcal{F}$ максимально, т. е. если (U, φ) — система координат, такая, что $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ и $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ принадлежат классу C^k для всех $\alpha \in A$, то $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ — произвольный набор систем координат, удовлетворяющих условиям (a) и (b), то существует единственная дифференцируемая структура $\mathcal{F}$, содержащая $\mathcal{F}_0$. А именно, положим

$$\mathcal{F} = \{(U, \varphi)\colon \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ и } \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \text{ принадлежат классу } C^k \text{ для всех } \varphi_\alpha \in \mathcal{F}_0\}.$$

Тогда $\mathcal{F}$ содержит $\mathcal{F}_0$; ясно, что она удовлетворяет условию (a), и нетрудно проверить, что она удовлетворяет условию (b). Набор $\mathcal{F}$ оказывается максимальным по построению, и, значит, он является дифференцируемой структурой, содержащей $\mathcal{F}_0$. Очевидно, что это единственная такая структура.

Упомянем еще два важных типа дифференцируемых структур на локально евклидовых пространствах, которые мы не будем рас-

[1]) Обычно не различают r_i и x_i. — *Прим. перев.*

сматривать в этой книге. Это структура класса C^{ω} и комплексно-аналитическая структура. Для *дифференцируемой структуры класса* C^{ω} дополнительно требуется, чтобы композиции функций в п. (b) локально задавались сходящимися степенными рядами. Для *комплексно-аналитической структуры* на локально евклидовом пространстве размерности $2d$ требуется, чтобы координатные системы задавались наборами функций со значениями в пространстве $\mathbb{C}^d$, а на пересечении координатных областей преобразования координат были голоморфны.

Дифференцируемым многообразием класса C^k *размерности* d называется пара $(M, \mathscr{F})$, состоящая из локально евклидова пространства M размерности d, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, и дифференцируемой структуры класса C^k (аналогично определяются также многообразия класса C^{ω} или комплексно-аналитические многообразия). Обычно мы будем опускать $\mathscr{F}$ и обозначать дифференцируемое многообразие $(M, \mathscr{F})$ одной буквой M, понимая, что когда мы говорим о «дифференцируемом многообразии M», то подразумеваем локально евклидово пространство M с некоторой заданной дифференцируемой структурой $\mathscr{F}$. В дальнейшем наше внимание будет направлено на случай класса C^{∞}, и под термином «дифференцируемое» мы всегда будем понимать «дифференцируемое класса C^{∞}». Дифференцируемость класса C^{∞} принято также называть *гладкостью*, и мы будем рассматривать эти термины как синонимы. Часто мы будем называть гладкие многообразия просто многообразиями, неявно предполагая дифференцируемость класса C^{∞}. Можно рассматривать многообразие как тройку, состоящую из основного точечного множества, локально евклидовой топологии на этом множестве, для которой выполняется вторая аксиома счетности, и дифференцируемой структуры. Под *структурой многообразия на множестве* X мы будем подразумевать выбор как локально евклидовой топологии, для которой выполняется вторая аксиома счетности, так и дифференцируемой структуры.

Несмотря на то что мы ограничиваемся случаем C^{∞}, многие из наших теорем имеют аналоги для случая C^k, где $k < \infty$, которые не намного сложнее, чем те, которые мы докажем. При рассмотрении случая C^k, $k < \infty$, требуется просто следить за степенью дифференцируемости, потому что, дифференцируя функцию класса C^k, мы получаем функцию лишь класса C^{k-1}, если $1 \leqslant k < \infty$.

Если не оговорено противное, буквы M и N всегда будут обозначать дифференцируемые многообразия, а символ M^d обозначает, что M — многообразие размерности d.

1.5. Примеры

(а) Стандартная дифференцируемая структура на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ получается, если в качестве $\mathscr{F}$ взять максимальный набор (в смысле п. 1.4(b)), содержащий ($\mathbb{R}^d$, i), где i: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — тождественное отображение.

(b) Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство. Оно обладает естественной структурой многообразия. Действительно, если $\{e_i\}$ — базис пространства V, то элементы сопряженного базиса $\{r_i\}$ — это координатные функции глобальной системы координат на V. Такая глобальная система координат единственным образом определяет дифференцируемую структуру $\mathcal{F}$ на V, эта дифференцируемая структура не зависит от выбора базиса, так как замена базиса определяет преобразования координат класса C^∞. В данном случае замена координат задается постоянной невырожденной матрицей.

(c) Комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ размерности n является вещественным векторным пространством размерности $2n$ и потому (см. пример (b)) обладает естественной структурой вещественного многообразия размерности $2n$. Если $\{e_i\}$ — стандартный комплексный базис, где e_i есть n-ка, в которой на всех местах, кроме места i, стоят нули, и на i-м месте находится единица, то

$$\{e_1, \ldots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \ldots, \sqrt{-1}e_n\}$$

будет вещественным базисом пространства $\mathbb{C}^n$, а его дуальный базис — стандартной глобальной системой координат на $\mathbb{C}^n$.

(d) *d-мерной сферой* называется множество всех точек из $\mathbb{R}^{d+1}$, таких, что

$$S^d = \left\{a \in \mathbb{R}^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} a_i^2 = 1\right\}.$$

Пусть $n = (0, \ldots, 0, 1)$ и $s = (0, \ldots, 0, -1)$. Мы получим на S^d стандартную дифференциальную структуру, если в качестве $\mathcal{F}$ возьмем максимальное семейство, содержащее $(S^d - n, p_n)$ и $(S^d - s, p_s)$, где p_n и p_s — стереографические проекции из n и s соответственно.

(e) Открытое подмножество U дифференцируемого многообразия $(M, \mathcal{F}_M)$ само является дифференцируемым многообразием с дифференцируемой структурой

$$\mathcal{F}_U = \{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha | U_\alpha \cap U) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_M\}.$$

Если не оговорено противное, открытые подмножества дифференцируемых многообразий всегда будут снабжаться такими естественными дифференцируемыми структурами.

(f) *Полная линейная группа* $GL(n; \mathbb{R})$ — это множество всех невырожденных вещественных матриц размера $n \times n$. Если мы естественным образом отождествим точки пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ с вещественными матрицами размера $n \times n$, то определитель станет непрерывной функцией на пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$. Тогда $GL(n; \mathbb{R})$

получит структуру многообразия как открытое подмножество в $\mathbb{R}^{n^2}$, на котором определитель не обращается в 0.

(g) *Произведение многообразий.* Пусть $(M_1, \mathcal{F}_1)$ и $(M_2, \mathcal{F}_2)$ — дифференцируемые многообразия размерностей d_1 и d_2 соответственно. Тогда $M_1 \times M_2$ станет дифференцируемым многообразием размерности $d_1 + d_2$, если в качестве дифференцируемой структуры $\mathcal{F}$ взять максимальный набор, содержащий

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \\ \to \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_1, (V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{F}_2\}.$$

1.6. Определения. Пусть $U \subset M$ — открытое подмножество. Будем говорить, что f: $U \to \mathbb{R}$ — *функция класса C^∞ на U* (обозначение: $f \in C^\infty(U)$), если композиция $f \circ \varphi^{-1}$ принадлежит классу C^∞ для каждого координатного отображения φ на M. Говорят, что непрерывное отображение ψ: $M \to N$ является *дифференцируемым класса C^∞* (обозначение: $\psi \in C^\infty(M, N)$ или просто $\psi \in C^\infty$), если композиция $g \circ \psi$ является функцией класса C^∞ на множестве ψ^{-1} (область определения функции g) для всех функций g класса C^∞, определенных на открытых множествах многообразия N. Это равносильно следующему: непрерывное отображение ψ принадлежит классу C^∞ тогда и только тогда, когда $\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1}$ принадлежит классу C^∞ для любых координатных отображений τ на M и φ на N. Функции и отображения класса C^∞ будем называть *гладкими.*

Очевидно, что композиция двух дифференцируемых отображений является снова дифференцируемым отображением. Заметим, что отображение ψ: $M \to N$ принадлежит классу C^∞ тогда и только тогда, когда для любой точки $m \in M$ существует ее открытая окрестность U, такая, что $\psi | U$ принадлежит классу C^∞.

Вторая аксиома счетности

Из того что многообразия удовлетворяют второй аксиоме счетности, вытекает много следствий, в частности нормальность, метризуемость и паракомпактность многообразий. Паракомпактность гарантирует существование разбиения единицы, исключительно полезного инструмента для построения глобальных функций и структур из локальных и, обратно, для представления глобальных структур в виде локально конечных сумм локальных структур. Сформулировав несколько необходимых определеиий, мы приведем простое доказательство паракомпактности многообразий, а затем докажем существование разбиения единицы. Очевидно, что многообразия — это регулярные топологические пространства. Из этого факта и из паракомпактности следует нормальность многообразий — доказательство мы оставим читателю в качестве упражнения. Доказательство того, что многообразия метризуемы, см. [13].

1.7. Определения. Набор $\{U_\alpha\}$ подмножеств многообразия M называется *покрытием* множества $W \subset M$, если $W \subset \bigcup U_\alpha$. Покрытие называется *открытым*, если каждое из подмножеств U_α открыто. Часть набора $\{U_\alpha\}$, которая тоже покрывает множество W, называется *подпокрытием*. *Измельчение* $\{V_\beta\}$ *покрытия* $\{U_\alpha\}$ — это такое покрытие, что для любого β существует α, такое, что $V_\beta \in U_\alpha$. Набор $\{A_\alpha\}$ подмножеств множества M называется *локально конечным*, если для любого элемента $m \in M$ существует его окрестность W_m, такая, что $W_m \cap A_\alpha \neq \varnothing$ лишь для конечного числа α. Топологическое пространство называется *паракомпактным*, если каждое его открытое покрытие имеет локально конечное измельчение.

1.8. Определение. *Разбиением единицы на многообразии M* называется набор $\{\varphi_i : i \in I\}$ функций класса C^∞ на M (здесь I — произвольное множество индексов, не обязательно счетное), таких, что

(a) набор носителей этих функций $\{\operatorname{supp} \varphi_i : i \in I\}$ локально конечен;

(b) $\sum\limits_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ для всех $p \in M$ и $\varphi_i(p) \geqslant 0$ для всех $p \in M$ и $i \in I$.

Говорят, что разбиение единицы $\{\varphi_i : i \in I\}$ *подчинено* покрытию $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$, если для каждого i существует α, такой, что $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_\alpha$. Разбиение единицы подчинено покрытию $\{U_i : i \in I\}$ *с тем же множеством индексов*, если $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$ для каждого $i \in I$.

1.9. Лемма. *Пусть X — хаусдорфово локально компактное (каждая точка имеет по крайней мере одну компактную окрестность) топологическое пространство, для которого выполнена вторая аксиома счетности (например, многообразие). Тогда оно паракомпактно. В частности, любое его открытое покрытие имеет счетное локально конечное измельчение, состоящее из открытых множеств с компактными замыканиями.*

Доказательство. Сначала покажем, что существует последовательность $\{G_i: i = 1, 2, \ldots\}$ открытых множеств, такая, что

$$(1) \qquad \bar{G}_i \text{ — компакт}, \quad \bar{G}_i \subset G_{i+1}, \quad X = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Пусть $\{U_i: i = 1, 2, \ldots\}$ — счетная база топологии пространства X, состоящая из открытых множеств с компактными замыканиями. Такую базу всегда можно построить, начиная с любой счетной базы и выбирая в ней подпоследовательность, состоящую из множеств с компактными замыканиями. Поскольку X является хаусдорфовым и локально компактным, эта подпоследовательность сама является базой. Положим $G_1 = U_1$. Предположим, что

$$C_k = U_1 \cup \ldots \cup U_{j_k}.$$

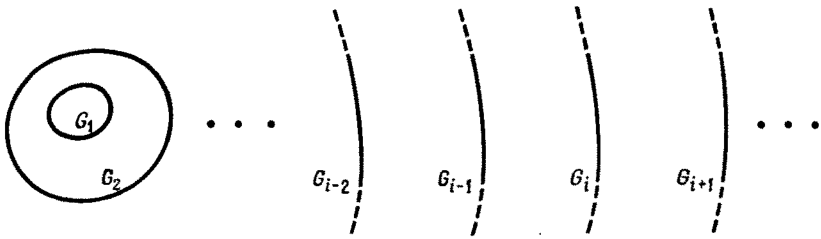
Пусть j_{k+1} — наименьшее положительное целое число, большее j_k, для которого

$$\overline{G}_k \subset \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i.$$

Положим

$$G_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i.$$

Итак, мы определили по индукции последовательность компактных множеств $\{G_k\}$, удовлетворяющих (1).



Пусть $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Множество $\overline{G}_i - G_{i-1}$ является компактом и содержится в открытом множестве $G_{i+1} - \overline{G}_{i-2}$. Для каждого $i \geqslant 3$ выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\{U_\alpha \cap \cap (G_{i+1} - \overline{G}_{i-2}): \alpha \in A\}$ множества $\overline{G}_i - G_{i-1}$ и выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\{U_\alpha \cap G_3: \alpha \in A\}$ компакта $\overline{G}_2$. Как легко видеть, этот набор открытых множеств счетен, является локально конечным измельчением открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ и состоит из открытых множеств с компактными замыканиями.

1.10. Лемма. *На $\mathbb{R}^d$ существует неотрицательная функция φ класса C^∞, которая равна 1 на замкнутом кубе $\overline{C(1)}$ и нулю на дополнении к открытому кубу $C(2)$.*

Доказательство. Нам надо представить функцию φ в виде произведения

(1) $$\varphi = (h \circ r_1) \ldots (h \circ r_d),$$

где h — неотрицательная функция класса C^∞ на вещественной прямой, принимающая значение 1 на отрезке $[-1, 1]$ и значение нуль вне интервала $(-2, 2)$. Построение такой функции мы начнем с функции

(2) $$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

которая иеотрицательна, принадлежит классу C^∞ и положительна при $t > 0$. Тогда функция

(3) $$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

тоже неотрицательна, принадлежит классу C^∞ и принимает значение 1 при $t \geqslant 1$ и 0 при $t \leqslant 0$. Мы получим нужную нам функцию h, если положим

(4) $$h(t) = g(t+2)\, g(2-t).$$

1.11. Теорема. (Существование разбиения единицы.) *Пусть M — гладкое многообразие и $\{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует счетное разбиение единицы $\{\varphi_i\colon i = 1, 2, 3, \ldots\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, с компактными носителями* $\operatorname{supp} \varphi_i$ *для всех i. Если не требовать компактности носителей, то тогда существует разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ (т. е.* $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$*), в котором не более чем счетное количество φ_α отлично от* 0.

Доказательство. Пусть последовательность $\{G_i\}$ покрывает M, как в 1.9(1), и возьмем в качестве G_0 пустое множество. Для элемента $p \in M$ положим i_p равным наибольшему целому числу, при котором $p \in M - \overline{G}_{i_p}$. Выберем α_p таким, что $p \in U_{\alpha_p}$, и построим систему координат (V, τ) с началом в точке p, такую, что $V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} - \overline{G}_{i_p})$ и, кроме того, $\tau(V)$ содержит замкнутый куб $\overline{C(2)}$. Положим

(1) $$\psi_p = \begin{cases} \varphi \circ \tau & \text{на } V, \\ 0 & \text{на } M - V, \end{cases}$$

где φ — функция, построенная в 1.10 (1). Поэтому ψ_p — функция класса C^∞ на M, принимающая значение 1 на некоторой открытой окрестности W_p элемента p и имеющая компактный носитель, лежащий в $V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} - \overline{G}_{i_p})$. Для каждого $i \geqslant 1$ выберем конечное множество точек p из M так, чтобы соответствующие окрестности W_p покрывали $\overline{G}_i - G_{i-1}$. Упорядочим соответствующие функции ψ_p, составив из них последовательность ψ_j,

$j = 1, 2, 3, \ldots$. Носители функций ψ_j образуют локально конечное семейство подмножеств в M. Таким образом, функция

$$(2) \qquad \psi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_j$$

является корректно определенной функцией класса C^∞ на M, и, кроме того, $\psi(p) > 0$ для каждого $p \in M$. Положим теперь для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$(3) \qquad \varphi_i = \psi_i/\psi.$$

Функции $\{\varphi_i\colon\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ образуют разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, с компактными носителями $\operatorname{supp}\varphi_i$ для каждого i. Теперь возьмем в качестве φ_α функцию, тождественно равную нулю, если ни один из носителей $\operatorname{supp}\varphi_i$ не лежит в U_α, и сумму тех φ_i, чьи носители лежат в U_α, в противном случае; тогда $\{\varphi_\alpha\}$ образует разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ с не более чем счетным числом ненулевых функций φ_α. Для того чтобы проверить, лежит ли носитель функции φ_α в U_α, заметим, что если $\mathscr{A}$ — локально конечное семейство замкнутых множеств, то $\overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$. Отметим, что носители функций φ_α не обязательно компактны.

Следствие. *Если множество G открыто в M, а множество A замкнуто в M и, кроме того, $A \subset G$, то существует функция φ: $M \to \mathbb{R}$ класса C^∞, такая, что*

(a) $0 \leqslant \varphi(p) \leqslant 1$ *для всех* $p \in M$;

(b) $\varphi(p) = 1$, *если* $p \in A$;

(c) $\operatorname{supp}\varphi \subset G$.

Доказательство. На многообразии M существует разбиение единицы $\{\varphi, \psi\}$, подчиненное покрытию $\{G, M - A\}$, с носителями $\operatorname{supp}\varphi \subset G$ и $\operatorname{supp}\psi \subset M - A$. Эта функция φ удовлетворяет требованиям следствия.

Касательные векторы и дифференциалы

1.12. Вектор v с компонентами $v_1, \ldots, v_d$ в точке p евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ можно рассматривать как оператор на дифференцируемых функциях. Точнее, если функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки p, то вектор v ставит в соответствие этой функции вещественное число $v(f)$, являющееся значением ее производной в точке p по направлению вектора v, т. е.

$$(1) \qquad v(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial r_1}\bigg|_p + \cdots + v_d \frac{\partial f}{\partial r_d}\bigg|_p .$$

Этот оператор взятия производной по направлению вектора v на дифференцируемых функциях обладает двумя важными свойствами:

$$(2)\qquad \begin{aligned} v(f+\lambda g) &= v(f)+\lambda v(g),\\ v(f\circ g) &= f(p)\,v(g)+g(p)\,v(f) \end{aligned}$$

для любых функций f и g, дифференцируемых в окрестности точки p и для любого вещественного числа λ. Первое свойство означает, что оператор v линейно действует на функциях, а второе — что он является *дифференцированием*. Это обосновывает наше определение касательного вектора на многообразии. Касательный вектор будет производной по направлению, т. е. линейным дифференцированием на функциях. Операция взятия производной зависит только от локальных свойств функции, свойств в сколь угодно малых окрестностях точки, в которой берется производная. Чтобы лучше объяснить эту зависимость производной от локальных свойств функций, мы введем понятие ростков функций.

1.13. Определения. Пусть $m\in M$. Говорят, что функции f и g, определенные на открытых множествах, содержащих m, имеют одинаковый *росток* в m, если они совпадают в некоторой окрестности точки m. Тогда в пространстве функций из класса C^∞, определенных на окрестностях точки m, можно ввести следующее отношение эквивалентности: две функции эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый росток. Классы эквивалентности называются *ростками*, и мы будем обозначать множество ростков в точке m символом $\tilde{F}_m$. Если f — функция класса C^∞ на некоторой окрестности точки m, то $\mathbf{f}$ будет обозначать ее росток. Операции сложения, скалярного умножения и умножения на функциях индуцируют на $\tilde{F}_m$ структуру алгебры над $\mathbb{R}$. Росток $\mathbf{f}$ имеет корректно определенное значение $\mathbf{f}(m)$ в точке m, а именно значение в m любого представителя этого ростка. Пусть $F_m\subset\tilde{F}_m$ — множество ростков, принимающих в m нулевое значение. Тогда F_m — это идеал алгебры $\tilde{F}_m$, и мы обозначим символом F_m^k его k-ю степень. Последняя является идеалом в $\tilde{F}_m$, состоящим из всех конечных линейных комбинаций произведений по k элементов из F_m. Получается убывающая последовательность идеалов $\tilde{F}_m\supset F_m\supset F_m^2\supset F_m^3\supset\ldots$.

1.14. Определение. *Касательным вектором v в точке $m\in M$* называется линейное дифференцирование алгебры $\tilde{F}_m$. То есть для любых ростков $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}\in\tilde{F}_m$ и вещественного λ выполнены следующие два условия:

(a) $v(\mathbf{f}+\lambda\mathbf{g})=v(\mathbf{f})+\lambda v(\mathbf{g})$,

(b) $v(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})=\mathbf{f}(m)\,v(\mathbf{g})+\mathbf{g}(m)\,v(\mathbf{f})$.

1.4. Векторные поля

Векторное поле X — это функция, определенная на подмножестве E многообразия M и относящая каждой точке $m \in E$ некоторый элемент $X(m) \in M_m$.

Пусть X — векторное поле и $f \in F(M, m)$, тогда Xf — функция, определенная на пересечении областей определения X и f равенством $Xf(n) = X(n)(f)$.

Векторное поле X принадлежит *классу* C^∞, если область его определения открыта и для каждого m из его области определения и произвольного $f \in F(M, m)$ выполнено соотношение $Xf \in F(M, m)$.

Часто векторное C^∞-поле X рассматривается как отображение C^∞-функций, заданное в виде $f \to Xf$, поскольку этим X полностью определено, если брать всевозможные f.

Пусть $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система, тогда D_{x_i} — векторные C^∞-поля. Если X — векторное поле, заданное на области определения этой координатной системы, то можно написать $X = \sum f_i D_{x_i}$, где f_i — некоторые вещественные функции.

Задача 13. Доказать, что $X \in C^\infty$ тогда и только тогда, когда $f_i \in C^\infty$.

Если f является C^∞-отображением M в R^e, так что $f = (f_1, \ldots, f_e)$ с вещественными f_i, и X — векторное поле на M, то через Xf мы будем обозначать $(Xf_1, \ldots, Xf_e)$. Аналогично для касательной t определяется $tf \in R^e$. Очевидно, что если $X \in C^\infty$, то $Xf \in C^\infty$.

Пусть X, Y — векторные C^∞-поля. На пересечении их областей определения зададим векторное C^∞-поле $[X, Y]$, так называемую *скобку полей X и Y*, положив $[X, Y] = XY - YX$. Умножением векторных полей здесь служит композиция их действия на функции.

Задача 14. Пусть X и Y — векторные C^∞-поля. Доказать, что

(а) $[X, Y]$ — действительно векторное поле.

(б) XY не является векторным полем, если только один из сомножителей не равняется 0.

(в) Если f и g — вещественные C^∞-функции, то
$$[fX,\ gY]=fg[X,\ Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X.$$

Координатное выражение для скобки. Пусть X, Y — векторные C^∞-поля, $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система, $X=\sum f_i D_{x_i}$, $Y=\sum g_i D_{x_i}$ на общей части областей определения. Тогда
$$[X,\ Y]=\sum_{i,\ j}(f_i D_{x_i} g_j - g_i D_{x_i} f_j) D_{x_j}.$$

Операция скобки билинейна по отношению к вещественным коэффициентам. Кроме того, она кососимметрична, т. е. $[X,\ X]=0$, что равносильно равенству $[X,\ Y]=-[Y,\ X]$.

Тождество Якоби. Если X, Y, Z — векторные C^∞-поля, то
$$[[X,\ Y],\ Z]+[[Y,\ Z],\ X]+[[Z,\ X],\ Y]=0.$$

Иначе говоря, отображение $Y\to[X,\ Y]$, *производная Ли поля Y по X*, является дифференцированием алгебры векторных C^∞-полей, операцией умножения в которой является скобка: $[X,\ [Y,\ Z]]=[[X,\ Y],\ Z]+[Y,\ [X,\ Z]]$.

Векторные поля и отображения. Пусть $\varphi: M\to N$, $\varphi\in C^\infty$, X, Y — векторные поля на M и N соответственно; тогда X, Y являются *φ-связанными*, если для каждого m из области определения поля X выполнено равенство $d\varphi(X(m))=Y(\varphi(m))$.

Если $d\varphi$ в каждой точке взаимно однозначно, то отображение φ называется *регулярным*.

Задача 15. Если φ — регулярное отображение и Y — такое векторное C^∞-поле на N, что для каждой точки m из прообраза области определения φ имеем $Y(\varphi(m))\in d\varphi(M_m)$, то на M существует единственное векторное C^∞-поле, φ-связанное с Y [95, стр. 127].

Отметим, что в общем случае, если даны C^∞-отображение $\varphi: M\to N$ и векторное поле X на M, то $d\varphi X$ не всегда определено. А именно, если m, $n\in M$ таковы, что

$\varphi(m)=\varphi(n)$, но $d\varphi(X(m))\neq d\varphi(X(n))$, то $d\varphi X$ нельзя определить однозначно в $\varphi(m)$.

Задача 16. Привести пример, когда $d\varphi X$ не определено, причем $M=R$, $N=S^1$ и φ регулярно.

Задача 17. *Скобки и отображения.* Пусть $\varphi: M\to N$, $\varphi\in C^\infty$, X_1, X_2 — векторные C^∞-поля на M, Y_1, Y_2 — векторные C^∞-поля на N, причем X_i φ-связанно с Y_i $(i=1,2)$. Тогда $[X_1, X_2]$ φ-связанно с $[Y_1, Y_2]$ [95, стр. 128].

Интегральные кривые. Пусть X — векторное C^∞-поле; тогда γ называется *интегральной кривой поля X, начинающейся в m*, если $\gamma(0)=m$ и для каждого t из области определения γ имеет место равенство $\gamma_*(t)=X(\gamma(t))$. Существование интегральных кривых и их фактическая единственность непосредственно следуют из соответствующих теорем для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений: достаточно в каждой точке взять координатную систему и рассматривать все

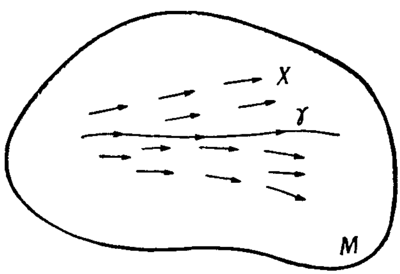


Рис. 9.

на открытом подмножестве R^d. Под *фактической единственностью* подразумевается следующее: если γ и τ — интегральные кривые, начинающиеся в m, то их сужения на общий интервал определения совпадают.

Задача 18. Пусть $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система в m, γ — интегральная кривая поля X, начинающаяся в m, $f_i=x_i\circ\gamma$, так что каждое f_i — это вещественная C^∞-функция, определенная на некотором интервале вещественной оси, содержащем 0. Показать, что уравнение $\gamma_*(t)=X(\gamma(t))$ эквивалентно системе уравнений для функций f_i и их производных, так что нахождение интегральных кривых действительно эквивалентно решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Локальная однопараметрическая группа. Пусть X — векторное C^∞-поле. Сопоставим X *локальную однопараметрическую группу преобразований* T, которая каждому $m\in M$ и произвольному вещественному числу t, достаточно близкому к 0, относит точку $T(m, t)=\gamma(t)$, где γ — интегральная кривая поля X, начинающаяся в m. В силу теорем о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных, для каждого m найдется положительное число c и окрестность U точки m, такие, что T определено и принадлежит C^∞ на $U\times(-c, c)$. Поскольку второй аргумент функции $T(m,t)$ является параметром вдоль соответствующей кривой, то его значения удовлетворяют следующему требованию аддитивности: если $n\in U$, t, s, $s+t\in(-c, c)$, то $T(T(n, t), s)=T(n, s+t)$.

Обратно, если задано некоторое C^∞-отображение T произведения $U\times(-c, c)$ в M, удовлетворяющее условию аддитивности, то можно построить векторное поле с локальной однопараметрической группой T: в точке $m\in U$ это векторное поле принимает значение $X(m)=(T\circ j_m)_*(0)$, где $j_m(t)=(m, t)$.

Задача 19. Пусть $X=u_1D_1+u_2D_2$. Найти явные уравнения для $T: R^2\times R\to R^2$. Сделайте то же самое для $Y=-u_2D_1+u_1D_2$.

Производные Ли. Отображение многообразия действует на функции, дифференциалы, векторные поля и другие геометрические объекты, определенные на многообразии: на функции — композицией с самым отображением, на дифференциалы — композицией со своим дифференциалом, а на векторные поля — самим дифференциалом. Следует отметить, что функции и дифференциалы *сносятся* с области значений на область определения отображения, тогда как векторные поля *выносятся* с области определения на область значений. Далее, если рассмотреть значения одного из этих геометрических объектов вдоль γ, интегральной кривой

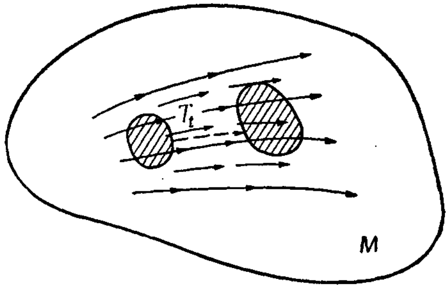


Рис. 10.

поля X, начинающейся в точке m, то, применяя преобразования $T_t = T \circ {}'j_t$, где ${}'j_t(n) = (n, t)$, получим некоторую кривую значений в точке m: это либо вещественная функция аргумента t, либо кривая в M_m^*, либо кривая в M_m. Поскольку в каждом случае такая кривая принадлежит некоторому векторному пространству, то ее можно дифференцировать. Производная в 0 называется *производной Ли* соответствующего *объекта по X в точке m.*

В случае функции f как раз дифференцируются значения f вдоль γ по параметру t, поэтому получается тангенциальная производная вдоль кривой, т. е. $X(m)f$.

В случае дифференциала функции df кривая в M_m^* задается отображением $t \to df(\gamma(t)) \circ (dT_t)_m$, где $(dT_t)_m$ обозначает сужение dT_t на M_m. Нетрудно показать, что производная Ли в этом случае есть $(d(Xf))_m$ [94, стр. 75].

В случае векторного поля Y мы должны его значение в $\gamma(t)$ снести в точку m, что делается с помощью dT_{-t}, так что соответствующая кривая в M_m — это отображение $t \to dT_{-t}(Y(\gamma(t)))$. Поскольку мы вернемся к этому случаю в главе о расслоениях, сформулируем наш результат в виде теоремы; он согласуется с терминологией, уже введенной при рассмотрении тождества Якоби.

Теорема 3. Производной Ли поля Y по X служит $[X, Y]$.

Доказательство. Мы должны показать, что для $f \in F(M, m)$

$$\frac{d}{dt}(0)\,\{dT_{-t}(Y(\gamma(t)))f\} = X(m)Yf - Y(m)Xf.$$

Замечая, что для вычисления $dT_{-t}(Y(\gamma(t)))f = Y(\gamma(t))(f \circ T_{-t})$ приходится рассматривать производ-

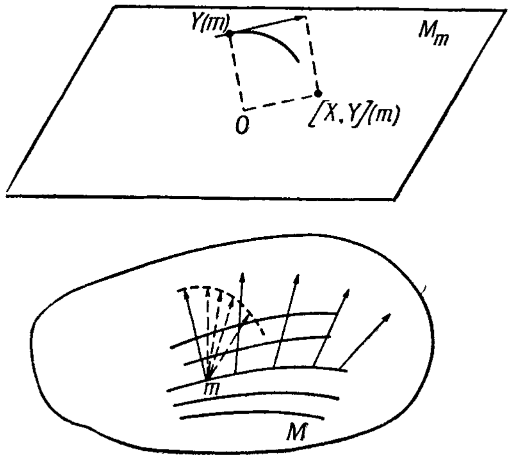


Рис. 11.

ные по Y, введем однопараметрическую группу S, ассоциированную с Y. Тогда, если определить $G: V \to R$, где V — окрестность точки (0, 0) в R^2, равенством

$$G(t, r) = f(T(S(\gamma(t), r), -t)),$$

то из определения S сразу получается, что

$$Y(\tilde{\gamma}(t))(f \circ T_{-t}) = D_2 G(t, 0)$$

и, следовательно, что

$$\frac{d}{dt}(0)\,dT_{-t}(Y(\gamma(t)))f = D_1 D_2 G(0, 0).$$

Если теперь $H(t, r, s) = f(T(S(\gamma(t), r), s))$, то из цепного правила вытекает, что $D_1 D_2 G(0,0) = D_1 D_2 H(0,0,0)$ —

$-D_2D_3H(0, 0, 0)$. Так как $H(t, r, 0) = f(T(S(\gamma(t), r), 0)) = f(S(\gamma(t), r))$, то $D_2H(t, 0, 0) = Yf(\gamma(t))$ и, таким образом, $D_1D_2H(0, 0, 0) = X(m)Yf$. Так как $H(0, r, s) = f(T(S(m, r), s))$, то $D_3H(0, r, 0) = Xf(S(m, r))$ и потому $D_2D_3H(0, 0, 0) = Y(m)Xf$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Геометрическая интерпретация скобки.* Пусть X, Y — векторные C^∞-поля, определенные в $m \in M$. Мы определим кривую, для которой $[X, Y](m)$ — предел ее касательных. Пусть g_1 — интегральная кривая X, начинающаяся в m. Остальные построения проходят при достаточно малых положительных c. Пусть g_2 — интегральная кривая поля Y, начинающаяся в $g_1(c)$; g_3 — интегральная кривая поля $-X$, начинающаяся в $g_2(c)$; g_4 — интегральная кривая поля $-Y$, начинающаяся в $g_3(c)$. Определим кривую g равенством $g(c^2) = g_4(c)$. Тогда имеем $[X, Y](m) = \lim_{t\to 0+} g_*(t)$, т. е. $[X, Y](m)f = \lim_{t\to 0+} g_*(t)f$ для каждого $f \in F(M, m)$.

Доказательство. Определим отображения h_1, h_2, h_3 некоторой окрестности точки $(0, 0) \in R^2$ в M, полагая $h_1(t, c) = g_2(t)$, $h_2(t, c) = g_3(t)$, $h_3(t, c) = g_4(t)$. Эти отображения принадлежат C^∞, поскольку они могут быть

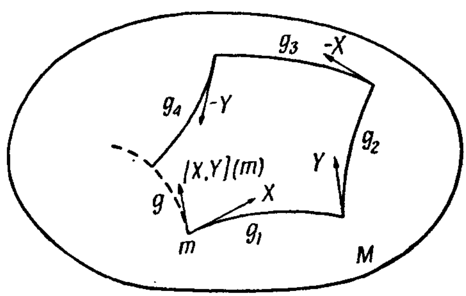


Рис. 12.

представлены как композиции однопараметрических групп полей X и Y; они явно выражают зависимость g_2, g_3, g_4 от c. Положим также $h(t) = h_3(t, t)$, так что $g(t^2) = h(t)$.

Сначала покажем, что $h_*(0)=0$, а тогда, согласно нижеследующей задаче 20, останется проверить, что

$$2[X, Y]f(m) = (f\circ h)''(0).$$

Следующие результаты вытекают непосредственно из определений:

(а) $D_2(f\circ h_1)(0, t) = Xf(h_1(0, t))$,
(б) $D_1(f\circ h_1) = Yf\circ h_1$,
(в) $D_1(f\circ h_2) = -Xf\circ h_2$,
(г) $D_1(f\circ h_3) = -Yf\circ h_3$,
(д) $h_3(0, t) = h_2(t, t)$,
(е) $h_2(0, t) = h_1(t, t)$.

Далее,

$$\begin{aligned}
(f\circ h)'(0) &= D_1(f\circ h_3)(0, 0) + D_2(f\circ h_3)(0, 0) \quad [\text{цепное правило}]\\
&= -Yf(m) + D_1(f\circ h_2)(0, 0) + D_2(f\circ h_2)(0, 0) \quad [(\text{г}), (\text{д})]\\
&= -Yf(m) - Xf(m) + D_1(f\circ h_1)(0, 0) + \\
&\quad + D_2(f\circ h_1)(0, 0) \quad [(\text{в}), (\text{е})]\\
&= 0 \quad [(\text{а}), (\text{б})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f\circ h)''(0) &= D_1^2(f\circ h_3)(O) + 2D_2D_1(f\circ h_3)(O) + D_2^2(f\circ h_3)(O) \quad [(O) = (0, 0)]\\
&= Y^2f(m) - 2D_1(Yf\circ h_2)(O) - 2D_2(Yf\circ h_2)(O) + \\
&\quad + D_1^2(f\circ h_2)(O) + 2D_2D_1(f\circ h_2)(O) + \\
&\quad + D_2^2(f\circ h_2)(O) = \\
&= Y^2f(m) + 2XYf(m) - 2D_1(Yf\circ h_1)(O) - \\
&\quad - 2D_2(Yf\circ h_1)(O) + \\
&\quad + X^2f(m) - 2D_1(Xf\circ h_1)(O) - \\
&\quad - 2D_2(Xf\circ h_1)(O) + \\
&\quad + D_1^2(f\circ h_1)(O) + 2D_2D_1(f\circ h_1)(O) + \\
&\quad + D_2^2(f\circ h_1)(O) = \\
&= Y^2f(m) + 2XYf(m) - 2Y^2f(m) - 2XYf(m) + \\
&\quad + X^2f(m) - 2YXf(m) - 2X^2f(m) + \\
&\quad + Y^2f(m) + 2XYf(m) + X^2f(m) = \\
&= 2XYf(m) - 2YXf(m). \text{ Ч. Т. Д.}
\end{aligned}$$

Задача 20. Пусть h есть C^∞-кривая и $h_*(0)=0$; для малых положительных t определим g равенством $g(t^2)=h(t)$; пусть $m=h(0)$. Показать, что

(1) отображение $f \to (f \circ h)''(0)$ пространства $F(M, m)$ служит касательной в m;

(2) эта касательная совпадает с $2 \lim\limits_{t \to 0+} g_*(t)$, причем предел здесь понимается в прежнем смысле.

Назовем ее касательной второго порядка к h в точке, где аннулируется касательная первого порядка; требуется обобщить (1) так, чтобы определить касательную n-го порядка к h в точке, где аннулируются касательные первого, второго, ..., $(n-1)$-го порядка, и доказать утверждение, аналогичное (2).

Задача 21. Пусть X—векторное C^∞-поле и $X(m)=0$. Показать, что интегральная кривая поля X, начинающаяся в m, является постоянной: $\gamma(t)=m$ для каждого t. Поэтому если γ есть C^∞-кривая и $\gamma_*(0)=0$, то γ_* можно продолжить до некоторого векторного C^∞-поля, лишь если γ — постоянная кривая.

Задача 22. Для поля X из задачи 19 и $f=u_2$ показать прямым вычислением, что производной Ли дифференциала df по X служит $d(Xf)=df$.

Задача 23. С помощью теоремы 3, а также теоремы 4 показать, что $[X, Y]=0$ для полей X и Y из задачи 19.

Это следствие того, что при $[X, Y]=0$ в окрестности точки m ломаная кривая теоремы 4 действительно замкнута при достаточно малых t, т. е. $g(t)=m$ для всех t вблизи 0.

Теорема 5. Пусть X_i, $i=1, \ldots, e$,—линейно независимые векторные C^∞-поля, определенные в некоторой окрестности точки m d-мерного многообразия M, причем $[X_i, X_j]=0$ в этой окрестности при любых i, j. Тогда существует такая координатная система $(x_1, \ldots, x_d)$, что X_i совпадает с D_{x_i} в координатной окрестности $(i \leqslant e)$ и $x_i(m)=0$, $i=1, \ldots, d$.

Доказательство. Возьмем такую координатную систему $(y_1, \ldots, y_d)$, чтобы $y_i(m)=0$ при всех i и

$X_1(m), \ldots, X_e(m), \quad D_{y_{e+1}}(m), \ldots, D_{y_d}(m)$ образовали базис пространства M_m. Определим $\psi: U \to M$, где U — окрестность точки $0 \in R^d$, следующим образом:

$$y_i(\psi(0, 0, \ldots, 0, a_{e+1}, \ldots, a_d)) = \begin{cases} a_i, & i > e, \\ 0, & i \leqslant e. \end{cases}$$

Тогда $t \to \psi(0, 0, \ldots, 0, t, a_{i+1}, \ldots, a_d)$ — интегральная кривая поля X_i, начинающаяся в $\psi(0, 0, \ldots, 0, a_{i+1}, \ldots$ $\ldots, a_d)$, $i \leqslant e$.

Отображение ψ можно также представить как композицию однопараметрических групп полей $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_e$ и обратного к y-координатному отображению; отсюда или же прямо из теории дифференциальных уравнений получаем, что $\psi \in C^\infty$.

Из определения ясно, что $d\psi(D_i(0)) = X_i(m)$, $i \leqslant e$, и $d\psi(D_i(0)) = D_{y_i}(m)$, $i > e$. По теореме об обратной функции, ψ^{-1} определено и принадлежит C^∞ в некоторой окрестности m и таким образом определяет координатную систему $(x_1, \ldots, x_d)$, при которой $x_i(m) = 0$ для всех i.

Поскольку интегральные кривые поля D_1 всегда соответствуют интегральным кривым поля X_1 относительно ψ, то ясно, что в координатной окрестности $D_{x_1} = X_1$. Мы завершим доказательство, показав индукцией по i, что $X_i x_j = \delta_{ij}$. Так как интегральные кривые поля D_i, начинающиеся в точках $(0, \ldots, 0, a_i, \ldots, a_d)$, соответствуют интегральным кривым поля X_i при отображении ψ, то $X_i x_j = \delta_{ij}$ в точках $\psi(0, \ldots, 0, a_i, \ldots, a_d)$. Но $X_k X_i = X_i X_k$, так что при $k < i$ имеем, по предположению индукции, $X_k(X_i x_j) = X_i(X_k x_j) = 0$. Таким образом, $X_i x_j$ являются константами вдоль интегральных кривых поля X_k, $k < i$. Но каждая точка координатной окрестности достижима посредством цепей таких интегральных кривых, начинающихся в точках $\psi(0, \ldots, 0, a_i, \ldots, a_d)$, так что $X_i x_j = \delta_{ij}$ везде. Ч. Т. Д.

З а д а ч а 24. Найти упомянутое в доказательстве представление ψ в виде композиции однопараметрических групп полей $X_1, X_2, \ldots, X_e$ и обратного к y-координатному отображению.

1.5. Подмногообразия

Пусть M есть C^∞-многообразие. Многообразие N называется *подмногообразием* в M, если существует взаимно однозначное C^∞-отображение $i: N \to M$, такое, что di взаимно однозначно в каждой точке. Мы называем i *вложением* и говорим, что N *вложено* в M посредством i.

Часто начинают с подмножества в M, на котором задают C^∞-структуру так, чтобы оно стало подмногообразием относительно отображения включения. Например, таким путем открытое подмножество в M превращается в подмногообразие в M; d-сфера как подмногообразие в R^{d+1} и подпространство R^d, вложенное как $R^d \times \{0\}$ в R^{d+e}, — примеры, где размерность подмногообразия меньше размерности объемлющего многообразия.

Задача 25. Показать вычислением, что дифференциал отображения, обратного к стереографической проекции $R^d \to R^{d+1}$, везде взаимно однозначен, и вывести отсюда, что S^d — подмногообразие в R^{d+1}.

Обмотка тора. Этот пример показывает, что отображение $i: N \to M$ хотя и непрерывно, но не обязательно является гомеоморфизмом, т. е. топология $i(N)$ как топология подмножества в M не обязана совпадать с топологией многообразия в N. Пусть M — двумерный тор и $N = R$, вложенное в M в виде плотной однопараметрической подгруппы M [т. е. для $x \in R$, $i(x) = (\exp icx, \exp idx) \in S^1 \times S^1$, где c/d — иррациональное число]. Тогда N — подмногообразие в M, но $i(N)$ даже не замкнуто в M и потому не локально компактно.

Изменяя C^∞-структуру на открытом подмногообразии, можно получить примеры (топологических) подпространств, не являющихся подмногообразиями, так как отображение включения не обязательно принадлежит C^∞, а если и принадлежит ему, то может быть нерегулярным в каких-нибудь точках.

Задача 26. Пусть $\psi: N \to M$ принадлежит C^∞, причем $\dim M < \dim N$, и пусть S — множество нулевой меры, определенное в задаче 11. Доказать, что если

$m \notin S$, то $P = \psi^{-1}(m)$ с топологией, индуцированной из N, обладает единственной C^∞-структурой, с которой оно является подмногообразием в N относительно отображения включения [73].

Задача 27. Для $\psi = u_2^3 + u_1^3 - 3u_1u_2 : R^2 \to R$ определить S и выяснить, почему при $m \in S$ множество $\psi^{-1}(m)$ не является подмногообразием в R^2.

В случае когда ψ — вещественная функция на R^3, подмногообразия, определяемые по способу задачи 26, являются классическими поверхностями в 3-пространстве.

Задача 28. Пусть $f : P \to M$ принадлежит C^∞, $i : N \to M$ — подмногообразие, причем $f(P) \subset i(N)$. Пусть $g = i^{-1} \circ f : P \to N$. Тогда

(а) если g непрерывно, то $g \in C^\infty$;

(б) найти пример, когда g не является непрерывным.

Сужение функций. Если i — отображение N в M, где N — подмногообразие в M, и $f \in F(M, m)$, $m \in i(N)$, то $f \circ i \in F(N, i^{-1}(m))$ называется *сужением* f *на* N. Обратно, если $g \in F(N, n)$, то существует окрестность U точки $n \in N$ и $f \in F(M, i(n))$, такие, что $f \circ i|_U = g|_U$. Однако в целом это не имеет места. Например, в случае обмотки тора тождественная функция $u : R \to R$ не является сужением никакой непрерывной вещественной функции на торе M.

Сужение векторных полей. Пусть i — отображение N в M, где N — подмногообразие в M, X — векторное C^∞-поле на M и $X(i(n)) \in di(N_n)$ для всех $n \in N$; тогда, в силу задачн 15, на N существует такое векторное C^∞-поле Y, что $di(Y(n)) = X(i(n))$. Y называется *сужением* X *на* N. Отметим, что, в силу задачи 17, скобка сужений полей является сужением их скобки.

Векторные поля на N допускают локальное продолжение, т. е. так же как и функции локально представимы в виде сужений. В частности, если γ есть C^∞-кривая в M с необращающейся в нуль касательной γ_*, то локально γ_* можно продолжить до векторного поля в M (см. задачу 21).

1.6. Распределения и интегрируемость

Функция θ, определенная на многообразии M и сопоставляющая каждому $m \in M$ некоторое p-мерное линейное подпространство $\theta(m)$ в M_m, называется *p-мерным распределением* на многообразии $M(p \leqslant \dim M)$. Говорят, что p-мерное распределение θ на M принадлежит *классу C^∞* в точке $m \in M$, если существуют векторные C^∞-поля $X_1, \ldots, X_p$, определенные в окрестности U точки m, такие, что при любом $n \in U$ векторы $X_1(n), \ldots$ $\ldots, X_p(n)$ порождают $\theta(n)$. *Интегральное многообразие* N распределения θ — это такое подмногообразие в M, что $di(N_n) = \theta(i(n))$ для любого $n \in N$. Говорят, что векторное поле X *принадлежит* распределению θ, и пишут $X \in \theta$, если $X(m) \in \theta(m)$ при любом m из области определения поля X. Распределение θ *инволютивно*, если для всех векторных C^∞-полей X, Y, принадлежащих θ, имеем $[X, Y] \in \theta$. Распределение θ *интегрируемо*, если для каждого $m \in M$ существует интегральное многообразие распределения θ, содержащее m. Иногда вместо $\theta(m)$ пишут θ_m.

Инволютивность интегрируемого C^∞-распределения легко установить с помощью задачи 17 или теоремы 4, помогающей также понять, почему справедливо обратное утверждение. Обход однопараметрического семейства четырехугольников со сторонами, касательными к некоторому распределению, может привести к кривой, касательная к которой не принадлежит ему, что невозможно в случае инволютивного распределения. Таким образом, если распределение инволютивно, то интегральные многообразия можно строить, двигаясь вдоль различных интегральных кривых векторных полей, принадлежащих данному распределению.

Всякое одномерное C^∞-распределение и инволютивно, и интегрируемо, в силу существования интегральных кривых.

Задача 29. Пусть P, Q, R — это C^∞-функции на открытом подмножестве U в R^3, нигде не обращающиеся в θ одновременно. Пусть $\theta(m)$ — линейное подпространство в R^3_m, ортогональное к $(P(m), Q(m), R(m))$. Показать, что θ инволютивно в том и только в том случае, если

$$P(D_3Q - D_2R) + Q(D_1R - D_3P) + R(D_2P - D_1Q) = 0.$$

Интегральным многообразием является решение уравнения

$$Pdu_1 + Qdu_2 + Rdu_3 = 0.$$

Следующую теорему, вышеупомянутое обратное утверждение, легче всего доказать, рассмотрев сначала ее локальный вариант. В полном объеме она получается последующей склейкой. Двойственное утверждение в терминах дифференциальных форм составляет классическую теорему Фробениуса.

Теорема 6. Инволютивное C^∞-распределение интегрируемо. Кроме того, через каждую точку $m \in M$ проходит единственное максимальное связное интегральное многообразие распределения, причем всякое связное интегральное многообразие, содержащее m, является открытым подмногообразием максимального многообразия [95, стр. 140].

Локальная теорема дает больше информации о том, как расположены по отношению друг к другу интегральные многообразия.

Теорема 7. Если θ — инволютивное C^∞-распределение на M, $m \in M$, то в окрестности m существует координатная система $(x_1, \ldots, x_d)$, такая, что $x_i(m) = 0$, и для каждого m' из координатной окрестности соответствующий *слой* $\{p \in M | x_i(p) = x_i(m')$ для любого $i > e\}$ $(e = \dim \theta)$ является интегральным многообразием распределения θ, если снабдить его естественной C^∞-структурой, индуцированной координатным отображением.

Набросок доказательства. Достаточно построить координатную систему, такую, что для каждого X, принадлежащего распределению θ, $Xx_i = 0$ при $i > e$.

Пусть $Y_1, \ldots, Y_e$ — векторные C^∞-поля, порождающие θ в окрестности m. Возьмем такие координаты y_i, что $Y_e = D_{y_1}$. (Это возможно по теореме 5, примененной к одному векторному полю.) Пусть $Y_i' = Y_i - (Y_i y_1) Y_e$,

$i < e$, $Y'_e = Y_e$. Тогда, поскольку $Y'_i y_1 = 0$ при $i < e$, $[Y'_i, Y'_j] y_1 = 0$ для всех i, j, так что $[Y'_i, Y'_j]$ можно представить как линейную комбинацию (коэффициенты которой — вещественные C^∞-функции) полей $Y'_1, \ldots$ $\ldots, Y'_{e-1}$. В частности, Y'_i, $i < e$, порождают инволютивное $(e-1)$-мерное распределение. Повторяя этот процесс еще $e-2$ раз, получим векторные поля $X_1, \ldots$ $\ldots, X_e$, порождающие θ, причем скобки первых i полей, $i \leqslant e$, являются линейными комбинациями первых $i-1$ полей $(X_e = Y_e$, $X_{e-1} = Y'_{e-1}$ и т. д.$)$.

С помощью этих X_i повторяем последовательно доказательство теоремы 5, кроме последнего пункта, где нужно доказать более слабое утверждение ($X_i x_j = 0$ только для $j > e$), конечно, при более слабых условиях ($X_h X_i = X_i X_h$ + линейная комбинация полей X_h, $h < i$).

Задача 30. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_h$ — дополнительные C^∞-распределения на M, т. е. при каждом $m \in M$ пространство M_m является прямой суммой подпространств $\theta_i(m)$. Доказать, что если все θ_i интегрируемы, то они одновременно интегрируемы в следующем смысле: в каждой точке $m \in M$ существует координатная система $(x_1, \ldots, x_d)$, такая, что $D_{x_1}, \ldots, D_{x_{d_1}}$ порождают $\theta_1, \ldots, D_{x_{d_{h-1}}}, \ldots, D_{x_d}$ порождают θ_h, где $d_i - d_{i-1} = \dim \theta_i$ $(d_0 = 0$, $d_h = d)$.

Задача 31. Доказать следующее дополнение к задаче 28.

(в) Если N — интегральное многообразие некоторого распределения на M, то g непрерывно.

ГЛАВА 2

Группы Ли

В настоящей главе приводятся основные определения и теоремы теории групп Ли и алгебр Ли, большей частью без доказательств. В частности, рассматривается соответствие между подалгебрами и подгруппами, а также гомоморфизмы, экспоненциальное отображение и присоединенное представление [35, 47, 60, 80, 88, 95].

2.1. Группы Ли

Группа Ли G — это множество, которое одновременно является и многообразием и группой с групповыми операциями класса C^∞, т. е. отображения

$$G\times G\to G, \quad \text{заданное выражением} \quad (g, h)\to gh,$$
$$G\to G, \quad \text{заданное выражением} \quad g\to g^{-1},$$

принадлежат C^∞.

Примеры. $Gl(d, R)$ является группой Ли относительно стандартных операций над невырожденными матрицами. Групповые операции задаются рациональными функциями координатных переменных, так что они не только принадлежат C^∞, но даже аналитичны. Так как $Gl(d, R)$ можно рассматривать как группу неособенных линейных преобразований пространства R^d и каждое вещественное d-мерное пространство V изоморфно R^d, то группу $Gl(V)$ неособенных линейных преобразований V можно рассматривать как группу Ли, изоморфную $Gl(d, R)$. Пространство R^d является группой Ли относительно сложения.

Окружность $T^1=S^1$ является группой Ли относительно обычного умножения. Тогда T^e и $R^d\times T^e$ — группы Ли относительно покомпонентного умножения. Группа

$R^d \times T^e$ — самая общая абелева группа Ли (см. задачу 13).

Вообще произведение групп Ли есть группа Ли относительно покомпонентного умножения; накрывающее пространство связной группы Ли тоже допускает структуру группы Ли, при которой накрывающее отображение принадлежит C^∞ и является гомоморфизмом. В частности, каждая связная группа Ли локально изоморфна односвязной группе Ли.

Подгруппа Ли в группе Ли — это такая подгруппа, которая также является группой Ли и подмногообразием.

2.2. Алгебры Ли

Алгеброй Ли называется векторное пространство L, на котором задано билинейное отображение $L \times L \to L$, называемое *скобкой* и обозначаемое $[\ ,\ ]$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $[x, x]=0$ для любого $x \in L$;

(2) тождество Якоби: для любых $x, y, z \in L$

$$[x, [y, z]]+[z, [x, y]]+[y, [z, x]]=0.$$

Из (1) следует, что $[x, y]= -[y, x]$, а это соотношение в свою очередь дает (1), если только L не есть линейное пространство над полем характеристики 2.

Примеры. (1) Если M есть C^∞-многообразие, то глобальные векторные C^∞-поля образуют бесконечномерную алгебру Ли.

(2) Множество $\mathfrak{gl}(d, R)$ всех линейных преобразований пространства R^d является алгеброй Ли относительно скобочной операции: $[A, B]=AB - BA$. Аналогичное обозначение $\mathfrak{gl}(V)$ используется для алгебры Ли линейных преобразований векторного пространства V.

(3) На всяком векторном пространстве V можно определить скобочную операцию, полагая все скобки равными нулю. Так получается *абелева алгебра Ли* на V.

(4) Если K и L — алгебры Ли, то $K \oplus L$ является алгеброй Ли со скобкой

$$[(x, y), (x', y')]=([x, x'], [y, y']).$$

Подалгебра алгебры Ли L — это подпространство, замкнутое относительно скобочной операции в L. *Идеалом* алгебры Ли L называется такая подалгебра K, что для любых $x \in L$ и $y \in K$ имеем $[x, y] \in K$. *Гомоморфизм* одной алгебры Ли в другую — это линейное преобразование, сохраняющее скобки. *Изоморфизм* алгебр Ли — это взаимно однозначный гомоморфизм «на».

Ядро гомоморфизма является идеалом. Образ гомоморфизма является подалгеброй.

Пусть G — группа Ли. *Левоинвариантным векторным полем на G* называется векторное поле, инвариантное относительно дифференциалов левых сдвигов; иначе говоря, если $L_g: G \to G$ определено формулой $L_g(h) = gh$, то X — левоинвариантное векторное поле при условии, что $dL_g X(h) = X(gh)$ для любых $g, h \in G$.

Левоинвариантное векторное поле глобально определено и принадлежит C^∞. Сумма двух левоинвариантных векторных полей, произведение левоинвариантного векторного поля на вещественное число и скобка двух левоинвариантных векторных полей являются левоинвариантными векторными полями. Левоинвариантное векторное поле однозначно определено своим значением в единичном элементе группы (см. [95], стр. 151).

Алгебра Ли группы G, обозначаемая через $\mathfrak{g}$, — это алгебра Ли всех левоинвариантных векторных полей.

В соответствии с вышесказанным векторное пространство алгебры Ли группы G можно отождествить с касательным пространством в единичном элементе: $X \in \mathfrak{g} \to X(e) \in G_e$.

Алгебру Ли группы $R^d \times T^e$ можно отождествить с абелевой алгеброй Ли на R^{d+e}.

Локально изоморфные группы Ли имеют изоморфные алгебры Ли. Например, алгеброй Ли как группы R^2, так и группы T^2 служит R^2, и аналогично алгебра Ли произвольной группы Ли совпадает с алгеброй Ли накрывающей группы Ли. Кроме того, алгебра Ли произведения групп Ли является прямой суммой их алгебр Ли.

Общая линейная группа. Если рассматривать $Gl(d, R)$ как группу неособенных линейных преобразований R^d, то изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы $Gl(d, R)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(d, R)$ устанавливается следующим образом.

Пусть $<,>$ — обычное скалярное произведение на R^d. Для произвольной пары $v, w \in R^d$ определим вещественную C^∞-функцию $f_{v,w}$ на $Gl(d, R)$, полагая

$$f_{v,w}(T) = <Tv, w>, \qquad T \in Gl(d, R).$$

Тогда отображение $J: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(d, R)$, определенное равенством $<J(X)v, w> = X(e)f_{v,w}$ при любых v, w, является изоморфизмом.

Этот же изоморфизм может быть установлен другим способом. Каждый элемент $v \in R^d$ можно рассматривать как C^∞-отображение $Gl(d, R) \to R^d$, полагая $v(T) = T(v)$. Поэтому для каждого $X \in \mathfrak{g}$ получаем линейное преобразование $J(X)$ пространства R^d, если определить $J(X)v = X(e)v$. Тогда J — изоморфизм алгебр Ли $J: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(d, R)$. С этого момента мы будем отождествлять $J(X)$ с X и вместо $X(e)v$ будем писать Xv.

С другой стороны, если рассматривать $Gl(d, R)$ как группу матриц, а $\mathfrak{gl}(d, R)$ — как пространство всех $d \times d$-матриц, то $\mathfrak{g}$ следующим образом можно отождествить с $\mathfrak{gl}(d, R)$: если $\{x_{ij}\}$ — координатные функции на $Gl(d, R)$, т. е. $x_{ij}(g)$ есть ij-й элемент матрицы g, то $X \in \mathfrak{g}$ соответствует $X_{ij} = X(e)(x_{ij})$.

Задача 1. Показать, что

(а) $x_{ij} \circ L_g = \sum\limits_p x_{ip}(g) x_{pj}$.

(б) $dL_g(D_{x_{hi}}(I))x_{jk} = x_{jh}(g)\delta_{ik}$.

(в) Если E_{ij} — матрица с 1 на ij-м и 0 на остальных местах, то левоинвариантным векторным полем X^{ij}, соответствующим E_{ij}, служит

$$X^{ij} = \sum_k x_{ki} D_{x_{kj}}.$$

(г) Используя эту формулу для X^{ij}, проверить непосредственно, что скобки сохраняются при отождествлении $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{gl}(d, R)$ [95].

2.3. Соответствие групп Ли и алгебр Ли

Теорема 1. Пусть G — группа Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между связными подгруппами Ли группы G и подалгебрами алгебры Ли группы G.

Набросок доказательства. Это соответствие устанавливается следующим образом. Если H — подгруппа Ли, то левоинвариантные векторные поля на H можно продолжить единственным образом до левоинвариантных векторных полей на G. Совокупность продолжений образует подалгебру алгебры Ли группы G, изоморфную алгебре Ли подгруппы H.

Существование подгруппы, соответствующей подалгебре, устанавливается рассмотрением максимальных интегральных многообразий инволютивного распределения, полученного из этой подалгебры. То из них, которое содержит единичный элемент группы G, как легко видеть, является абстрактной подгруппой в G. То, что это подгруппа Ли, сразу же следует из задач 28 и 31 гл. 1 (см. [95], стр. 159—160).

Во всякой алгебре Ли одномерное подпространство, порожденное ненулевым элементом, является подалгеброй. Таким образом, имеем

Следствие. Для каждого элемента X алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G существует одномерная подгруппа с алгеброй Ли, порожденной X; иначе говоря, существует кривая $\gamma : R \to G$, такая, что

(1) $\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$,

(2) $X(\gamma(s))=\gamma_*(s)$.

$\gamma(R)$ называется *однопараметрической подгруппой, соответствующей* X. Это интегральная кривая поля X, проходящая через e.

Ортогональная группа. Группа $O(d)$ всех ортогональных преобразований пространства R^d является подгруппой Ли группы $Gl(d, R)$. При изоморфизме J из § 2.2 алгебра Ли группы $O(d)$ отождествляется с подалгеброй

$\mathfrak{o}(d)$ алгебры $\mathfrak{gl}(d, R)$, состоящей из всех кососимметрических преобразований.

То, что $O(d)$ — группа Ли, вытекает из теоремы 1, примененной к связной компоненте единичного элемента группы $O(d)$, т. е. к группе вращений R_d или $SO(d)$ как подгруппы связной компоненты единичного элемента группы $Gl(d, R)$.

Лемма 1. Пусть отображение $J: G \to G$ задано равенством $J(g) = g^{-1}$. Тогда если $t \in G_g$, то

$$dJ(t) = -dR_{g^{-1}} \circ dL_{g^{-1}}(t).$$

(R_g — это умножение справа на g.)

Доказательство. Пусть отображение $D: G \to G \times G$ задано равенством $D(g) = (g, g)$, а отображение $\beta: G \times G \to G$ — равенством $\beta(g, h) = gh$. Тогда $\beta \circ (1 \times J) \circ D = \text{const}$, так что $d\beta \circ d(1 \times J) \circ dD = 0$. Пусть $t \in G_g$, тогда

$$\begin{aligned} 0 &= d\beta \circ d(1 \times J) \circ dD(t) = \\ &= d\beta \circ (d1(t) + dJ(t)) = \\ &= d\beta(t + dJ(t)) = \\ &= dR_{g^{-1}}(t) + dL_g(dJ(t)) \quad \text{(теорема 1.2).} \end{aligned}$$

Следствие. Если $X \in \mathfrak{g}$, то dJX правоинвариантно.

Существует параллельное определение алгебры Ли группы Ли в терминах правоинвариантных векторных полей, причем dJ связывает его с нашим определением.

2.4. Гомоморфизмы

Гомоморфизм одной группы Ли в другую — это отображение, которое служит одновременно и гомоморфизмом подлежащих групп и C^∞-отображением подлежащих многообразий. Мы предполагаем в остальной части этого параграфа, что наши группы связны.

Если $j: G \to H$ — гомоморфизм и t — касательная в единичном элементе G, то легко проверить, что левоинвариантные поля, отвечающие t и $dj(t)$ соответственно, j-связанны. Так j порождает гомоморфизм алгебры Ли $dj: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

Обратное утверждение неверно, если только не заменить понятие гомоморфизма понятием «локальный гомоморфизм». В этом случае указанное соответствие взаимно однозначно [95, стр. 165]. Однако если G односвязно, то локальный гомоморфизм можно продолжить до гомоморфизма, и мы получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть G и H — группы Ли, причем G односвязна. Тогда $j \leftrightarrow dj$ является взаимно однозначным соответствием между гомоморфизмами G в H и гомоморфизмами $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{h}$.

Ядром гомоморфизма является замкнутая нормальная подгруппа, а ядром соответствующего гомоморфизма алгебр Ли — идеал, причем легко видеть, что этот идеал принадлежит подгруппе. Далее, если H — замкнутая нормальная подгруппа в G, то множество левых классов смежности G/H можно снабдить естественной структурой многообразия так, что проекция $G \to G/H$ является гомоморфизмом групп Ли.

Более общим результатом является

Теорема 3. Если H — подгруппа Ли группы G, то для нормальности H необходимо и достаточно, чтобы ее алгебра Ли $\mathfrak{h}$ была идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Если, кроме того, H замкнута, то алгебра Ли группы G/H естественно изоморфна факторалгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ [95].

Если G односвязна и $\mathfrak{h}$ — идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, то, по *теореме Адо*, существует группа Ли, имеющая алгебру Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ [19]. Тогда, по теореме 2, существует гомоморфизм группы G, соответствующий проекции $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, откуда вытекает, что нормальная подгруппа H, принадлежащая $\mathfrak{h}$, замкнута. Таким образом, если подгруппа Ли односвязной группы нормальна, то она замкнута.

Известно, что замкнутая подгруппа группы Ли сама является группой Ли (*критерий Картана*, [95, стр. 198]).

2.5. Экспоненциальное отображение

Пусть G — группа Ли, $X \in \mathfrak{g}$. Пусть γ_X — интегральная кривая поля X, начинающаяся в единичном элементе. Тогда *экспоненциальным отображением* $\mathfrak{g} \to G$ называется отображение, переводящее X в точку $\gamma_X(1)$;

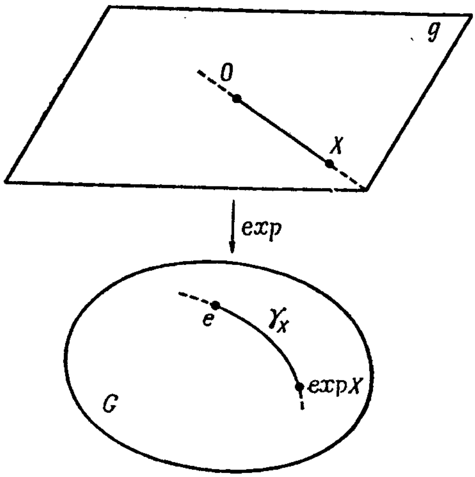


Рис. 13.

мы будем писать $\exp X = \gamma_X(1)$. Очевидно, отображение $t \to \exp tX$ совпадает с γ_X.

Коммутативность с гомоморфизмами. Если $j: G \to H$ — гомоморфизм, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{dj} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ G & \xrightarrow{j} & H \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство следует сразу же из того факта, что $\gamma_{dj(X)} = j \circ \gamma_X$ при любом $X \in \mathfrak{g}$.

Отсюда и из следующей теоремы получаем, что экспоненциальное отображение устанавливает соответствие между подалгебрами в $\mathfrak{g}$ и подгруппами в G.

Теорема 4. Отображение exp всюду принадлежит C^∞, а в окрестности 0 в $\mathfrak{g}$ является диффеоморфизмом.

Доказательство. Временно предположив, что $\exp \in C^\infty$, покажем вначале, что это диффеоморфизм в окрестности нуля. По теореме об обратной функции, достаточно показать, что $d\exp$ является отображением «на» в нуле. Если $s \in G_e$, то имеется левоинвариантное векторное поле X, такое, что $X(e)=s$. По определению, exp переводит луч, порожденный X (т. е. кривую в $\mathfrak{g}$, заданную отображением $r \to rX$), в интегральную кривую поля X, проходящую через e. Поэтому $d\exp$ переводит касательную к этому лучу в нуле в касательную к интегральной кривой поля X в e, то есть в s.

Дифференцируемость отображения exp основывается на теории дифференциальных уравнений, в силу которой решения системы дифференциальных уравнений зависят C^∞-образом от параметра, входящего C^∞-образом в эту систему (см. приложение). В нашем случае имеется система дифференциальных уравнений, определенных левоинвариантным векторным полем X, а X линейно зависит от системы линейных координат в $\mathfrak{g}$. Ч. Т. Д.

Пусть $X_1, \ldots, X_d$ — базис в $\mathfrak{g}$; отождествим $\mathfrak{g}$ и R^d как многообразие с помощью соответствия $\sum c_i X_i \leftrightarrow \leftrightarrow (c_1, \ldots, c_d)$. В достаточно малой окрестности U нуля в $\mathfrak{g}$ отображение exp является диффеоморфизмом, и потому его можно принять за координатное отображение. Эти координаты и координатная окрестность носят название *канонических*.

Матричный экспоненциал. Для групп матриц имеется другое экспоненциальное отображение, которое совпадает с уже определенным, если отождествить алгебру Ли данной группы матриц с соответствующей подалгеброй алгебры Ли группы всех матриц того же порядка, а именно если A есть $d \times d$-матрица, то

$$e^A = \sum_0^\infty \frac{1}{k!} A^k \qquad (A^0 = I).$$

Можно показать, что этот ряд сходится по норме пространства $d\times d$-матриц, отождествленного с R^{d^2} причем эта сходимость даже равномерна на ограниченных множествах.

Далее, очевидно, что если $AB=BA$, то $e^{A+B}=e^Ae^B$; в частности, $e^{(s+t)A}=e^{sA}e^{tA}$, где s, t — вещественные числа, и $e^Ae^{-A}=e^0=I$. Таким образом, $e^A\in Gl(d, R)$ для всякого A, и кривая $s\to e^{sA}$ оказывается однопараметрической подгруппой. Легко видеть, что касательная в I этой однопараметрической подгруппы естественно отождествляется с $A=(d/du)(0)(e^{uA})$. Тем самым показано, что оба экспоненциальных отображения фактически совпадают. Следующая коммутативная диаграмма для $Gl(d, R)$ с отождествлением, обозначенным через «$\approx$», поясняет рассмотренные отношения:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[rr, "\overset{J}{\approx}"] \arrow[dr, "\exp"'] & & \mathfrak{gl}(d,R) \arrow[dl, "e"] \\
& Gl(d,R) &
\end{tikzcd}$$

Задача 2. Проверив, что $B=\begin{pmatrix}-1/4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ не имеет квадратного корня, доказать, что exp не отображает алгебру Ли группы Ли $Sl(2, R)$ (состоящей из вещественных 2×2-матриц с определителем 1) на $Sl(2, R)$.

Ортогональная группа. Каноническая координатная окрестность единичного элемента в $O(d)$ получается взятием экспоненциалов от кососимметрических матриц, лежащих в достаточно малой окрестности нуля. За координаты кососимметрической матрицы можно принять ее элементы, расположенные выше главной диагонали. Поэтому размерность $O(d)$ есть $\frac{1}{2}d(d-1)$.

Например, $O(2)$ — одномерная группа, окрестность единичного элемента которой составляют матрицы

$$\exp\begin{pmatrix}0 & \theta\\ -\theta & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix};$$

это соответствие является диффеоморфизмом при $|\theta|<\pi$.

Задача 3. Пусть $A\in\mathfrak{gl}(d, R)$, $x\in R^d$. Определим C^∞-кривую σ в R^d, положив $\sigma(s)=(\exp sA)x$. Доказать, что $\sigma_*(s)=A(\exp sA)x$; здесь касательные к R^d отождествляются с элементами R^d при помощи отображения $\sum a_i D_i(y)\to(a_1, \ldots, a_d)$.

Задача 4. Пусть $<,>$ — обычное скалярное произведение в R^d, и σ_1, σ_2 — это C^∞-кривые в R^d. Пусть C^∞-функция σ определяется так: $\sigma(s)=<\sigma_1(s), \sigma_2(s)>$. С помощью теоремы 1.2 или другим способом проверить, что

$$\sigma'(s)=<\sigma_{1_*}(s), \sigma_2(s)>+<\sigma_1(s), \sigma_{2_*}(s)>.$$

Задача 5. Пусть $A\in\mathfrak{gl}(d, R)$ — кососимметрическая матрица, $x\in R^d$; показать, что функция $<(\exp sA)x, (\exp sA)x>$ не зависит от s и, следовательно, равна $<x, x>$, своему значению при $s=0$. Таким образом, $\exp sA$ — ортогональная матрица при любом s. Докажите это непосредственно, используя только вышеуказанное отображение e.

Задача 6. Определить комплексную группу Ли. Примеры: $Gl(d, C)$, C^d и комплексный тор $T^d(C)=C^d/D$, где D — группа, порожденная $2d$ вещественно линейно независимыми сдвигами в C^d.

Задача 7. Показать, что связная компактная комплексная группа Ли является абелевой (применить обобщение теоремы о максимуме модуля) [93].

Задача 8. Пусть $U(d)=\{g\in Gl(d, C)\,|\,g\bar{g}^t=I\}$ — так называемая *унитарная группа*. Показать, что $U(d)$ — компактная, но не комплексная группа Ли.

2.6. Представления

Представлением группы Ли G называется гомоморфизм G в матричную группу. *Представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли матриц.

Если вместо группы матриц используют группу $Gl(V)$ [или алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V)$] линейных преобразований векторного пространства V, то говорят о *представлении на* V. В обоих случаях не исключаются матрицы с комплексными коэффициентами или векторные пространства над полем комплексных чисел. *Точное представление* — это представление, которое является изоморфизмом «в»; если группа имеет точное представление, то она изоморфна подгруппе группы матриц.

Задача 9. (а) Показать, что отображение $j: C \to Gl(2, R)$ (где C — множество комплексных чисел), определенное равенством $j(x+iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, является точным представлением группы Ли C^* ненулевых комплексных чисел с умножением как групповой операцией. Что является подалгеброй алгебры $\mathfrak{gl}(2, R)$, соответствующей $j(C^*)$? Каковы однопараметрические подгруппы в C^*?

(б) Показать, что сужение exp на алгебру Ли группы $j(C^*)$ соответствует обычной комплексной экспоненциальной функции $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ и что группа C с аддитивной групповой операцией является односвязной накрывающей группы C^* относительно накрывающего отображения $e^{\cdot}$.

(в) Построить отображение $\varphi: C^* \to S^1 \times S^1$, такое, что $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 1)$, и являющееся гомоморфизмом группы Ли C^*, накрывающим $S^1 \times S^1$.

(г) Принимая $1, i$ за базис в C, рассматриваемом как векторное пространство над R, показать, что j соответствует «умножению на», т. е. если $\psi(a+ib) = (a, b) \in R^2$, то матрица $j(z)$ действует на $x \in R^2$ как $j(z)x = \psi(z\psi^{-1}(x))$.

Задача 10. Пусть Q^* — совокупность ненулевых кватернионов. *Регулярным левым представлением* Q^* *на* Q называется представление φ группы Q^* на вещественном векторном пространстве Q, заданное равенством $\varphi(q)q' = qq'$, где $\varphi(q)$ — «левое умножение на q».

(а) Показать, что относительно базиса 1, i, j, k (с обычной таблицей умножения) φ имеет следующую матричную форму: при $q=w+xi+yj+zk$

$$\varphi(q)=\begin{bmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{bmatrix}$$

(б) Показать, что $\varphi(q)$ ортогонально в том и только том случае, если

$$|q|=w^2+x^2+y^2+z^2=1.$$

(в) Вычислить $\det\varphi(q)$, показав, что $\varphi(q)\varphi(q)^t$ кратно I, и определив коэффициент при w^4 в $\det\varphi(q)$.

Автоморфизмы. *Автоморфизмом* группы Ли G называется изоморфизм G на себя. Множество всех автоморфизмов группы G образует некоторую группу A. Каждое $j\in A$ порождает автоморфизм dj алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{dj} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{j} & G \end{array}$$

коммутативна. Так как dj — невырожденное линейное преобразование алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то отображение $j\to dj$ переводит A в группу линейных преобразований пространства $\mathfrak{g}$ и, очевидно, является гомоморфизмом, поскольку $d(j\circ k)=dj\circ dk$. Короче говоря, мы получаем представление A на линейном пространстве $\mathfrak{g}$. В случае когда G связно, это представление точно, что вытекает из замечаний § 2.4. Однако мы докажем это непосредственно. Предположим, что j принадлежит ядру; это означает, что $djX=X$ при любом $X\in\mathfrak{g}$. Но поскольку $j(\exp X)=\exp(djX)$, то j обязано оставлять неподвижным образ exp, а так как этот образ содержит окрестность единичного элемента, порождающую G, то j — тождественный автоморфизм.

В действительности A является группой Ли [95, стр. 180].

Присоединенное представление. Множество внутренних автоморфизмов группы G является подгруппой в A: каждый $x \in G$ порождает внутренний автоморфизм $j_x: y \to xyx^{-1}$. Далее, отображение $x \to j_x$ является групповым гомоморфизмом. Отображение $\mathrm{Ad}: G \to Gl(\mathfrak{g})$, определенное формулой $\mathrm{Ad}(x) = dj_x$, называется *присоединенным представлением группы* G.

Предложение. Ad является представлением G на линейном пространстве $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Ad, очевидно, является групповым гомоморфизмом, так что достаточно проверить его принадлежность к C^∞ и фактически показать это в канонической координатной окрестности.

Прежде всего отметим, что при фиксированном y из G отображение $x \to j_x(y)$ принадлежит C^∞. Действительно, оно является композицией отображений, составленных из групповых операций, которые, очевидно, принадлежат C^∞:

$$x \to (x, x) \to (x, xy^{-1}) \to (x, yx^{-1}) \to xyx^{-1}.$$

Далее, если y принадлежит канонической координатной окрестности, то $y = \exp X$ и, в силу коммутативности вышеуказанной диаграммы, $j_x(y) = \exp(\mathrm{Ad}(x)X)$.

Если выбрать базис $X_1, \ldots, X_d$ в $\mathfrak{g}$, то $\mathrm{Ad}(x)$ задается в терминах матрицы $(a_{ij}(x)): \mathrm{Ad}(x) X_j = \sum a_{ij}(x) X_i$. Далее, при $y = \exp(tX_j)$ получаем $j_x(y) = \exp\left(\sum t a_{ij}(x) X_i\right)$, так что каноническими координатами $j_x(y)$ являются $ta_{ij}(x)$, $i = 1, \ldots, d$, определенные при достаточно малых t. Так как $j_x(y) \in C^\infty$ по x, то это означает, что $a_{ij}(x) \in C^\infty$ при всех i, j, т. е. $\mathrm{Ad}(x) \in C^\infty$.

Центр. *Центр* группы G — это множество всех элементов G, коммутирующих с любым другим элементом из G. Ясно, что ядром группового гомоморфизма $x \to j_x$ служит как раз центр группы G, а так как представление $j_x \to dj_x$ точно, если G связна, то центр оказывается ядром присоединенного представления. Как таковое оно является замкнутой подгруппой, и поскольку эта подгруппа, очевидно, нормальна, то присоединенное представление индуцирует точное представление фактор-группы $G/$(центр G), если только G связна.

Из теоремы 3.1 будет следовать, что дифференциал присоединенного представления является *присоединенным представлением* алгебры $\mathfrak{g}$, заданным формулой $\operatorname{ad}(X)Y=[X, Y]$, так что $d(\operatorname{Ad})(X)$ — сужение производной Ли по X на $\mathfrak{g}$.

Задача 11. Взяв *полярное разложение* группы Q^*, показать, что Q^* является прямым произведением множества R^* положительных вещественных чисел и S^3, $Q^*=R^*\times S^3$. Так как R^* — центр Q^*, то ядро присоединенного представления содержит R^*, и можно считать, что пространством этого представления служит касательное пространство к S^3 в единичном элементе 1. Отождествить это пространство с подпространством в Q, порожденным i, j, k, и показать, что тогда присоединенное представление задается на S^3 так: $\psi(q)P=qPq^{-1}$, $P=xi+yj+zk$. (При $q\in S^3$ имеем $q^{-1}=\bar{q}$.) Отождествить оставшуюся часть центра Q^* и образ присоединенного представления на сфере S^3, являющейся подгруппой группы $Gl(3, R)$.

Задача 12. Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — левоинвариантные векторные поля на Q^*, равные D_i, $i=1, 2, 3, 4$, в точке $1=(1, 0, 0, 0)$. (Здесь мы отождествили Q с R^4.) Показать, что

$$X_1=u_1D_1+u_2D_2+u_3D_3+u_4D_4,$$

и найти соответствующие формулы для X_2, X_3, X_4.

Задача 13. Показать, что абелева группа Ли G имеет абелеву алгебру Ли (см. задачу 3.3), а отсюда с помощью теоремы 2 доказать, что $G\approx R^d/D$, где D — дискретная подгруппа. Поэтому

$$G\approx R^e\times T^f,\ e+f=d \qquad [47, стр. 83—86].$$

Задача 14. Показать, что непрерывный гомоморфизм группы Ли принадлежит C^∞ и потому структура группы Ли есть топологический групповой инвариант [95, стр. 188].

Задача 15. Доказать, что интегральная кривая левоинвариантного поля является также интегральной кривой правоинвариантного поля.

Задача 16. Показать, что существует окрестность единичного элемента группы Ли, не содержащая никаких подгрупп, кроме тривиальной. Используя это утверждение, задачу 14 и теорему Петера — Вейля [47, стр. 99], показать, что каждая компактная группа Ли обладает точным C^∞-представлением.

Замечание о факторпространствах. В § 2.4 мы рассмотрели факторгруппы групп Ли по замкнутым нормальным подгруппам. Пусть теперь H — замкнутая подгруппа G. Тогда подгруппа H имеет индуцированную топологию, и множество левых классов смежности G/H обладает естественной структурой многообразия, такой, что проекция $\pi : G \to G/H$ принадлежит C^∞, элементы G действуют как диффеоморфизмы на G/H и $f : G/H \to R$ принадлежит C^∞ тогда и только тогда, когда $f \circ \pi \in C^\infty$.

ГЛАВА 3

Расслоения

В первом параграфе этой главы рассматриваются группы преобразований и важный частный случай скобочной операции. Далее с точки зрения групп преобразований излагается теория главных и ассоциированных расслоений, определяются также и координатные расслоения [4, 47, 51, 72].

3.1. Группы преобразований

Пусть G — группа Ли и M есть C^∞-многообразие.

Группа G *действует (дифференцируемо) слева на* M, если существует C^∞-отображение $\varphi: G\times M\to M$ (символически $\varphi(g, m)=gm$), удовлетворяющее следующим условиям:

(а) при любом $g\in G$ отображение $g: M\to M$, заданное равенством $g(m)=gm$, является диффеоморфизмом;

(б) $(gh)m=g(hm)$ для всех $g, h\in G$ и $m\in M$.

Говорят, что группа G действует *эффективно*, если из $gm=m$ при всех m вытекает, что g — единичный элемент e в G.

Группа G действует *справа* на M, если вместо (б) имеет место соотношение

(б)′ $(gh)m=h(gm)$ для всех $g, h\in G$, $m\in M$. В этом случае мы будем также писать $\varphi: M\times G\to M$.

Каждая группа Ли действует на себе слева посредством левого сдвига и внутреннего автоморфизма, а также справа — посредством правого сдвига.

Если G действует на M, то каждому $m\in M$ соответствует C^∞-отображение, также обозначаемое через m, группы G в M, определенное формулой $m(g)=gm$.

Группа G действует *транзитивно* слева, если для любых $m, n\in M$ существует $g\in G$, такое, что $g(m)=n$.

Зафиксируем точку $m \in M$; ее группа *изотропии* $H = \{g \in G \mid g(m) = m\}$ является замкнутой подгруппой в G, и отображение пространства левых классов смежности G/H в M, определенное формулой $gH \to gm$, принадлежит C^∞. Это взаимно однозначное отображение «на», если G действует транзитивно. В случае когда G/H компактно, например если G — компактно, это отображение является гомеоморфизмом.

Пример. $Gl(d, R)$ действует дифференцируемо слева на R^d и на $R^d - \{0\}$. Ее действие на $R^d - \{0\}$ транзитивно; группа изотропии точки $(1, 0, \ldots, 0)$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где

$$B \in Gl(d-1, R), \; A \in R^{d-1},$$

0 — столбец из $d-1$ нулей. Эту подгруппу H можно отождествить с *полупрямым произведением* $Gl(d-1, R)$ и R^{d-1}, в котором умножение задается формулой $(B, A)(B', A') = (BB', AB' + A')$. [В общем случае, если элементы группы G действуют как гомоморфизмы справа на группе H, *полупрямое произведение групп G и H* задается умножением $(g, h)(g', h') = (gg', (hg')h')$.]

Обратно, если H — замкнутая подгруппа группы G, то G действует транзитивно на G/H посредством $g(kH) = (gk)H$. Пространство с транзитивной группой преобразований называется *однородным*.

Пусть G действует на M, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G; тогда существует гомоморфизм λ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\bar{\mathfrak{g}}$, алгебру Ли некоторых векторных полей на M: если $X \in \mathfrak{g}$, то $(\lambda X)(m) = dm(X(e))$. Введем обозначение: $\bar{X} = \lambda X$.

Задача 1. Доказать, что однопараметрическая группа преобразований поля $\bar{X}$ есть e^{tX}.

Если G действует эффективно, то λ взаимно однозначно.

Говорят, что G действует *свободно*, если лишь единичный элемент группы G обладает неподвижными точками на M, т. е. из равенства $gm = m$ при некоторых

$m \in M$ вытекает, что $g=e$. Если G действует свободно, то алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ состоит из необращающихся в 0 векторных полей на M. Кроме того, если N — *орбита точки* m, т. е. $N=\{gm \mid g \in G\}$, то для каждого $t \in N_m$ найдется единственное $\bar{X} \in \mathfrak{g}$, такое, что $\bar{X}(m)=t$, так как $m: G \to M$ определяет диффеоморфизм φ многообразия G на N, и можно взять $X \in \mathfrak{g}$, для которого $X(e)=d\varphi^{-1}t$.

Задача 2. Доказать, что если $\bar{X}(m)=0$, то $e^{tX}(m)=m$ при любом t.

Дифференциалы преобразований, составляющих некоторую группу преобразований G, следующим образом действуют на $\bar{\mathfrak{g}}$:

(а) если G действует слева, то $dg(\bar{X})=\overline{\mathrm{Ad}\, gX}$;

(б) если G действует справа, то $dg(\bar{X})=\overline{\mathrm{Ad}\, g^{-1}X}$.

Доказательство (а). Прежде всего вычислим композицию отображений $g: M \to M$ и $g^{-1}m: G \to M$. Имеем $g \circ g^{-1}m(h)=g(hg^{-1}m)=ghg^{-1}m=m(j_g(h))$. Отсюда $(dg\bar{X})(m)=dg(\bar{X}(g^{-1}m))=dg \circ d(g^{-1}m)X(e)= =dm \circ dj_g(X(e))=dm(\mathrm{Ad}\, gX)(e))=\overline{\mathrm{Ad}\, gX}(m)$. Ч. Т. Д.

Пусть W — линейное пространство C^∞-векторных полей на M, и $\mathscr{L}$ — некоторое конечномерное подпространство W, инвариантное относительно G, так что для каждого $g \in G$ имеем $dg(\mathscr{L}) \subset \mathscr{L}$. Тем самым получается представление [1]) j группы G в группу неособенных линейных преобразований пространства $\mathscr{L}$, т. е. в $Gl(\mathscr{L})$. Рассматривая алгебру $\mathfrak{gl}(\mathscr{L})$ всех линейных преобразований $\mathscr{L}$ как алгебру Ли группы $Gl(\mathscr{L})$, выпишем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{dj} & \mathfrak{gl}(\mathscr{L}) \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{j} & Gl(\mathscr{L}) \end{array}$$

[1]) Здесь мы предполагаем, что G действует слева. В случае действия справа нужно очевидным образом изменить определения, хотя формулировка следующей теоремы остается такой же.

Следующий результат имеет многочисленные применения.

Теорема 1. При любых $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathscr{L}$, $dj(X)Y = -[\overline{X}, Y]$; в частности, $[\overline{X}, Y] \in \mathscr{L}$.

Докажем вначале одно следствие о дифференциале присоединенного представления.

Следствие. Если X, Y — элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, то $\operatorname{ad}(X)Y = [X, Y]$.

Доказательство. Пусть G действует слева на себе следующим образом: для $g \in G$ отображение $g: G \to G$ определено формулой $g(h) = hg^{-1}$, так что преобразование g совпадает с $R_{g^{-1}}$, правым умножением на g^{-1}. Так как $\operatorname{Ad} g = dL_g \circ dR_{g^{-1}}$ и любое $X \in \mathfrak{g}$ инвариантно относительно левых сдвигов dL_g, то условия теоремы выполняются при $\mathscr{L} = \mathfrak{g}$ и $j = \operatorname{Ad}$. Выразим поле $\overline{X}$ на G через $X \in \mathfrak{g}$. Для $m \in G = M$ отображение $m: G \to M$ задается, как указано выше, формулой $m(g) = g(m) = mg^{-1}$, так что $m = L_m \circ J$, где J — операция обращения. Используя лемму 2.1, находим, что $\overline{X}(m) = dL_m \circ dJ(X(e)) = dL_m(-X(e)) = -X(m)$. Поэтому $\overline{X} = -X$. Далее, $dj = d(\operatorname{Ad}) = \operatorname{ad}$, и теорема дает теперь нужный результат.

Задача 3. Вывести из этого следствия, что если G — абелева группа, то $\mathfrak{g}$ — абелева алгебра.

Доказательство теоремы. Предположим, что группа действует слева. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, тогда $\gamma: t \to \exp tX$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M, и на M из дифференцирования функций вдоль ее орбит возникает векторное поле Z. Для вещественной функции f на M и $m \in M$ имеем

$$Zf(m = \frac{d}{du}(0)(f \circ m \circ \gamma) = dm(\gamma_*(0))f,$$

откуда $Z(m) = dm(X(e)) = \overline{X}(m)$.

С другой стороны, поскольку вышеуказанная диаграмма коммутативна, то

$$\exp(t\,dj(X)) = \exp(dj(tX)) = j\exp(tX).$$

Таким образом, $dj(X)Y$ является производной в 0 кривой $t \to (j\exp(tX))Y = d(\exp(tX))Y$ в $\mathscr{S}$. Но при $m \in M$ имеем $(d\exp tX(Y))(m) = d(\exp(tX))(Y(\exp(-tX)m))$, т. е. фактически дифференцируется кривая в M_m, которая задается значениями Y вдоль кривой $t \to \exp(t(-X))m$, снесенными в точку m под действием однопараметрической группы $t \to \exp(t(-X))$. Значит, мы берем производную Ли по полю $-\bar{X}$ (см. § 1.4), откуда, в силу теоремы 1.3, и следует требуемое заключение.

3.2. Главные расслоения

Мы называем (C^∞-)*главным расслоением* совокупность (P, G, M), где P, M суть C^∞-многообразия, G — группа Ли, причем

(1) G действует свободно (и дифференцируемо) справа на P, $P \times G \to P$. Отображение $g : P \to P$, $g \in G$, будет обозначаться также через R_g;

(2) M — факторпространство пространства P по отношению эквивалентности, заданному действием группы G, проекция $\pi : P \to M$ принадлежит C^∞; в частности, при $m \in M$ группа G просто транзитивна на $\pi^{-1}(m)$;

(3) P локально тривиально, т. е. для любой точки $m \in M$ найдутся такие ее окрестность U и C^∞-отображение $F_U : \pi^{-1}(U) \to G$, что F_U коммутирует с R_g для любого $g \in G$, а отображение $\pi^{-1}(U) \to U \times G$, заданное выражением $p \to (\pi(p), F_U(p))$, является диффеоморфизмом.

Пространство P называется *пространством расслоения*, M — *базой*, G — *структурной группой*, $\pi^{-1}(m)$ — *слоем над* $m \in M$. Отображение $p : G \to \pi^{-1}(\pi(p)) \subset P$ вида $p(g) = R_g p$ устанавливает специальный диффеоморфизм G на слой. Отметим, что в терминах F_U правое действие G на P задается правым сдвигом, т. е. если $p \to (\pi(p), F_U(p))$, то $pg \to (\pi(p), F_U(p)g)$. Это следствие того, что $F_U(pg) = F_U(p)g$.

Приведем теперь примеры расслоений.

Тривиальное расслоение (прямое произведение). Пусть G — группа Ли, M — многообразие; тогда $P=M\times G$, снабженное правым действием G на себе во втором сомножителе, $(m, g)h=(m, gh)$, является пространством расслоения некоторого главного расслоения, которое

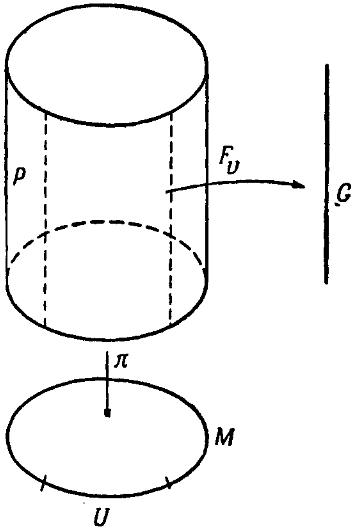


Рис. 14.

называется *тривиальным*. Главное расслоение *изоморфно* тривиальному расслоению в том и только в том случае, когда существует C^∞-сечение проекции π, т. е. такое C^∞-отображение $K: M\to P$, что $\pi\circ K$ служит тождественным преобразованием на M (см. [72], стр. 46).

Расслоение базисов. Пусть M есть C^∞-многообразие, $B(M)$ — множество $(d+1)$-наборов $(m, e_1, \ldots, e_d)$, где $m\in M$, $e_1, \ldots, e_d$ — базис в M_m, и $\pi: B(M)\to M$ задается формулой $\pi(m, e_1, \ldots, e_d)=m$. Тогда $Gl(d, R)$ следующим образом действует справа на $B(M)$: пусть $g\in Gl(d, R)$ рассматривается как матрица $g=(g_{ij})$; пусть $(m, e_1, \ldots, e_d)\in B(M)$, тогда $R_g(m, e_1, \ldots, e_d)=$ $=(m, \sum g_{i1}e_i, \ldots, \sum g_{id}e_i)$. Если $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система, определенная в окрестности U точки

$m \in M$ и $m' \in U$, то $F_U(m', f_1, \ldots, f_d) = (dx_j(f_i)) = (g_{ij}) \in Gl(d, R)$. Таким образом, функции $y_i = x_i \circ \pi$ и $y_{ij} = x_{ij} \circ F_U$ дают координатную систему на $\pi^{-1}(U)$, где x_{ij} — стандартные координаты на $Gl(d, R)$ (см. § 2.2).

Вводя C^∞-структуру, заданную на $B(M)$ локальным представлением (π, F_U) в виде прямого произведения, находим, что $B(M)$ является пространством некоторого главного расслоения, называемого *расслоением базисов* многообразия M.

Иногда удобно рассматривать $B(M)$ как множество неособенных линейных преобразований пространства R^d в касательные пространства многообразия M, т. е. отождествлять $p = (m, e_1, \ldots, e_d)$ с отображением $p: (r_1, \ldots, r_d) \to \sum r_i e_i$. В этом случае естественно рассматривать $Gl(d, R)$ как группу неособенных линейных преобразований R^d, поскольку

$$pg(r_1, \ldots, r_d) = \sum_{i,\, j} r_i g_{ji} e_j =$$
$$= \sum_j \Big(\sum_i r_i g_{ji}\Big) e_j = p(g(r_1, \ldots, r_d)),$$

т. е. pg (как отображение) совпадает с композицией p (как отображения) и g.

Задача 4. Если $b = (m, e_1, \ldots, e_d) \in B(M)$ принадлежит координатной окрестности $\pi^{-1}(U)$, то $d\pi(D_{y_i}(b)) = \sum_j y_{ji}^{-1}(b) e_j$, где $(y_{ij}^{-1}(b))$ — матрица, обратная к матрице $(y_{ij}(b))$.

Однородные пространства. Если G — группа Ли, H — замкнутая подгруппа, то определено главное расслоение с базой G/H (пространством левых классов смежности), пространством расслоения G и структурной группой H, для которых $\pi: G \to G/H$ — каноническое отображение и правое действие есть $(g, h) \to gh$ (см. [72], стр. 37).

Примеры. (1) Пусть элементы группы $R - \{0\} = R^*$ действуют на пространстве $R^{d+1} - \{0\}$ посредством умножения. Тогда это действие дифференцируемо, свободно и просто транзитивно на орбитах. Пространство орбит есть P^d, d-мерное проективное пространство, так что

$$(R^{d+1} - \{0\},\ R^*,\ P^d) \text{ — главное расслоение.}$$

(2) Если вместо R^* воспользоваться группой положительных чисел R^+, то получится, что

$$(R^{d+1} - \{0\},\ R^+,\ S^d) \text{ — главное расслоение.}$$

(3) Если взять C^* и $C^{d+1} - \{0\}$, где C — совокупность комплексных чисел, то базой оказывается комплексное проективное пространство CP^d:

$$(C^{d+1} - \{0\},\ C^*,\ CP^d) \text{ — главное расслоение.}$$

Задача 5. Пусть (P, G, M) — главное расслоение, причем P связно. Тогда, если G_0 — компонента связности единичного элемента в G, то существует единственное главное расслоение $(P, G_0, \tilde{M})$ с тем же действием G_0 на P, где $\tilde{M}$ — связное накрытие M (см. вышеприведенные примеры 1 и 2).

Рассмотрим другой подход к главным расслоениям.

Главные координатные расслоения. Пусть (P, G, M) — главное расслоение, и $\{U_i\}$ — такое открытое покрытие M, что $\pi^{-1}(U_i)$ можно представить как прямое произведение с помощью функции $F_i : \pi^{-1}(U_i) \to G$. Для i, j, таких, что $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, следующим образом определим отображение $G_{ji} : U_i \cap U_j \to G$: если $m \in U_i \cap U_j$, то, взяв $p \in \pi^{-1}(m)$, положим $G_{ji}(m) = F_j(p)(F_i(p))^{-1}$. Преобразование G_{ji} показывает, насколько сечение над U_i, соответствующее относительно F_i сечению $U_i \times \{e\}$ прямого произведения, отличается от сечения над U_j, определенного подобным образом с помощью F_j. Покажем, что определение $G_{ji}(m)$ не зависит от выбора p. Если p' тоже принадлежит $\pi^{-1}(m)$, то $p' = pg$ при некотором $g \in G$, поскольку $\pi^{-1}(m)$ является орбитой точки p, откуда

$$\begin{aligned} F_j(p')F_i(p')^{-1} &= F_j(pg)F_i(pg)^{-1} = \\ &= F_j(p)g(F_i(p)g)^{-1} = F_j(p)F_i(p)^{-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Эти функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$G_{ki}(m) = G_{kj}(m)G_{ji}(m) \quad \text{для } m \in U_i \cap U_j \cap U_k. \qquad (*)$$

Функции G_{ji} называются *функциями перехода*, соответствующими покрытию $\{U_i\}$, и в действительности вместе с этим покрытием определяют главное координатное расслоение в смысле Стинрода. Поэтому расслоение в нашем смысле определяет целый класс эквивалентных координатных расслоений. Другими словами, главные координатные расслоения эквивалентны в том и только в том случае, если согласованы их правые действия. Отсюда, в силу [72, стр. 12], всякое семейство функций G_{ji}, определенное для покрытия $\{U_i\}$ и удовлетворяющее условию (*), однозначно определяет главное расслоение, функции перехода которого относительно покрытия $\{U_i\}$ совпадают с G_{ji}.

Задача 6. Пусть $\varphi: N \to M$ есть C^∞-отображение, (P, G, M)—главное расслоение; положим $\tilde{P} = \{(n, p) \in N \times P \mid \varphi(n) = \pi(p)\}$.

(а) Показать, что $\tilde{P}$ — подмногообразие многообразия $N \times P$ относительно отображения включения.

(б) Показать, что $(\tilde{P}, G, N)$ становится главным расслоением, если определить правое действие как $(n, p)g = (n, pg)$.

$(\tilde{P}, G, N)$ называется *расслоением, индуцированным отображением* φ *и расслоением* (P, G, M).

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{P} \arrow[dl, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"] & \\
N \arrow[dr, "\varphi"'] & & P \arrow[dl, "\pi"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

(в) Показать, что за функции перехода для (P, G, N) можно взять $G_{ij} \circ \varphi$, так что мы могли бы определить соответствующие координатное расслоение непосредственно.

Векторные поля алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Пусть (P, G, M) — главное расслоение. Поскольку G действует свободно и эффективно, то существует изоморфизм λ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, состоящую из не обращающихся в 0 векторных полей на P. В силу замечания (б) в § 3.1, имеем $dR_g(\lambda(X))=\lambda(\mathrm{Ad}(g^{-1})X)$, где $g\in G$, $X\in\mathfrak{g}$.

Задача 7. Пусть $u_1, \ldots, u_{2d+2}$ — вещественные координаты на $C^{d+1}-\{0\}$ ($\{z_j=u_{2j-1}+iu_{2j}\}$ — базис, двойственный к стандартному комплексному базису пространства C^{d+1}). Вычислить $\lambda(aX_1+bX_2)$, где X_1 и X_2 — следующие левоинвариантные векторные поля на $C^*: X_1=u_1D_1+u_2D_2$, $X_2=-u_2D_1+u_1D_2$, λ — изоморфизм, ассоциированный с $(C^{d+1}-\{0\}, C^*, CP^d)$.

3.3. Ассоциированные расслоения

Пусть (P, G, M) — главное расслоение, и F — многообразие, на котором G действует слева. Определим *расслоение, ассоциированное с* (P, G, M) *со слоем* F (оно также зависит от действия G на P). Пусть $B'=P\times F$; рассмотрим правое действие G на B': $(p, f)g=(pg, g^{-1}f)$, где $p\in P$, $f\in F$, $g\in G$. Пусть $B=B'/G$ — совокупность орбит точек в B' относительно G, это и есть пространство ассоциированного расслоения. Получается следующая структура. Проекция $\pi': B\to M$ действует по формуле $\pi'((p, f)G)=\pi(p)$. Возьмем окрестность U точки $m\in M$, такую же, как в п. (3) § 3.2, и рассмотрим отображение $F_U: \pi^{-1}(U)\to G$. Тогда возникает отображение $F'_U: \pi'^{-1}(U)\to F$ вида

$$F'_U((p, f)G)=F_U(p)f,$$

так что $\pi'^{-1}(U)$ гомеоморфно произведению $U\times F$. Определим B как многообразие, потребовав, чтобы эти гомеоморфизмы были диффеоморфизмами. Отметим, что при этом $\pi'\in C^\infty$ так же, как и естественная проекция $B'\to B$.

Ассоциированное координатное расслоение. Если для ассоциированного расслоения (B, F, G, M) определить функции перехода G'_{ji} так же, как в случае главного расслоения, то для покрытия $\{U_i\}$, допускающего функции F'_i, имеем

$$G'_{ji}(m) = F_j(p)(F_i(p))^{-1} = G_{ji}(m),$$

где $m \in U_i \cap U_j$, $(p, f)G \in \pi'^{-1}(m)$. Следовательно, (B, F, G, M) есть класс эквивалентных координатных расслоений, ассоциированных с главным координатным расслоением в смысле Стинрода, определенным функциями перехода G_{ji} [72, часть I, § 9].

Примеры. (1) Пусть (P, G, M) — главное расслоение, и пусть G действует на себе левым сдвигом. Тогда (P, G, M) — расслоение, ассоциированное с самим собой, со слоем G.

(2) *Касательное расслоение.* Рассмотрим расслоение базисов $B(M)$. (Отметим, что расслоение часто обозначается только своим пространством расслоения.) По определению, $Gl(d, R)$ — группа неособенных линейных преобразований пространства R^d и поэтому действует на R^d слева. Пространство ассоциированного расслоения со слоем R^d обозначается через $T(M)$, а соответствующее расслоение называется *касательным расслоением* к M. Пространство $T(M)$ можно следующим образом отождествить с пространством всех пар (m, t), где $m \in M$, $t \in M_m$ [это m в (m, t) фактически не нужно, так же как и в $(d+1)$-наборах, образующих $B(M)$, но оно включается для удобства]:

$$((m, e_1, \ldots, e_d), (r_1, \ldots, r_d))Gl(d, R) \to (m, \sum r_i e_i),$$

или, если рассматривать $B(M)$ как множество отображений $p: R^d \to M_m$, то при $m = \pi(p)$ то же отождествление дает $(p, x)Gl(d, R) \to (m, px)$, где $x \in R^d$. Из последней формулировки легко видеть, что это отождествление корректно, так как если $(p', x')Gl(d, R) = (p, x)Gl(d, R)$, то в $Gl(d, R)$ существует такое g, что $p' = pg$, $x' = g^{-1}x$, а отсюда $p'x' = (pg)(g^{-1}x) = px$, поскольку, как отображение, pg является композицией p и g.

Следовательно, слой расслоения $T(M)$ над $m \in M$ можно рассматривать как линейное пространство касательных в точке m, т. е. как M_m, а $T(M)$ — как объединение всех касательных пространств, снабженное структурой многообразия. Далее, при таком отождествлении легко указать координаты в $T(M)$, а именно пусть U — координатная окрестность в M, с координатами $x_1, \ldots, x_d$. Координаты $y_1, \ldots, y_{2d}$ на $\pi'^{-1}(U)$ определяются следующим образом: если $(m, t) \in \pi'^{-1}(U)$, то

$$\left.\begin{aligned} y_i(m, t) &= x_i(m) \\ y_{d+i}(m, t) &= dx_i(t) \end{aligned}\right\} \quad i = 1, \ldots, d.$$

Теперь C^∞-векторные поля можно рассматривать как сечения проекции π'. В частности, тривиальное векторное поле (тождественно равное нулю) дает вложение M как подмногообразия в $T(M)$.

Задача 8. Доказать, что если γ есть C^∞-кривая в M, то γ_* есть C^∞-кривая в $T(M)$.

(3) *Тензорные расслоения.* Если в примере (2) заменить R^d векторным пространством, построенным из R^d средствами полилинейной алгебры, т. е. тензорным произведением пространства R^d и его сопряженного с различными кратностями или же инвариантным подпространством такого произведения, то мы получим так называемое *тензорное расслоение.* Его C^∞-сечение над открытым множеством называется *тензорным C^∞-полем* и снабжается типовыми числами, указывающими кратность R^d и его сопряженного. Группой тензорного расслоения служит группа $Gl(d, R)$; она действует независимо на сомножителях тензорного произведения, причем на R^d так же, как в случае касательного расслоения, а на сопряженном с R^d посредством транспозиции обратных: если v принадлежит сопряженному пространству, $x \in R^d$, $g \in Gl(d, R)$, то $gv(x) = v(g^{-1}x)$.

Часто в расслоении $B(M)$ структурная группа приводится к подгруппе (см. § 3.4), тогда в тензорных произведениях R^d и их сопряженных могут появиться новые инвариантные подпространства, что приводит к разнообразным тензорным расслоениям. Например, это так, когда M обладает почти комплексной структурой (см. задачу 11).

(4) *Векторные расслоения*. Это расслоения, в которых слой — векторное пространство, а структурная группа является подгруппой общей линейной группы этого пространства; таковы, в частности, тензорные расслоения. Векторные расслоения часто определяются без явного указания структурной группы, только заданием пространства расслоения в виде объединения векторных пространств одинаковой размерности, сопоставленных точкам базы, на котором определена C^∞-структура посредством гладких линейно независимых порождающих сечений над координатными окрестностями некоторого покрытия. Например, мы фактически проделали это для $T(M)$, когда расписывали координаты; в этом случае упомянутыми сечениями были координатные векторные поля D_{x_i}.

Другой пример — *расслоение факторпространств* некоторого вложения, которое в случае римановых многообразий обычно рассматривается как *нормальное расслоение* (для равномерной реализации этих факторпространств применяется риманова метрика, определенная в гл. 7). Это векторное расслоение можно получить следующим образом. Пусть $i: N \to M$ — вложение подмногообразия N в M. Слоем над $n \in N$ будет факторпространство $M_{i(n)}/di(N_n)$, а пространством расслоения — объединение этих слоев, так что пространство расслоения можно рассматривать как совокупность пар $(n, t + di(N_n))$, где $t \in M_{i(n)}$. Чтобы получить координаты, возьмем сначала координатную систему многообразия M в точке $i(n)$, скажем $x_1, \ldots, x_d$, причем можно предположить, что $x_j \circ i = y_j$, $j = 1, \ldots, d'$, образуют координатную систему в точке n и что $X_j(n) = D_{x_j}(i(n)) + di(N_n)$ линейно независимы при $j = d'+1, \ldots, d$. Тогда на некоторой окрестности U точки n векторные поля $X_j(n')$, $j = d'+1, \ldots, d$, остаются линейно независимыми, так что существует сопряженный базис $V_j(n')$[1]. Далее, для $(n', X) \in \pi'^{-1}(U)$, где π' — проекция пространства расслоения в N, определим следующим образом коорди-

[1]) Базисы $X_j(n')$ и $V_j(n')$ сопряжены друг другу, если $\langle X_i(n'), V_j(n')\rangle = \delta_{ij}$. — *Прим. перев.*

наты $z_1, \ldots, z_d$:

$$z_j(n', X) = \begin{cases} y_j(n'), & \text{если} \quad j = 1, \ldots, d', \\ V_j(n')(X), & \text{если} \quad j = d'+1, \ldots, d. \end{cases}$$

За группу этого расслоения можно принять $Gl(d-d', R)$.

(5) *Расслоения Грассмана.* Множество e-мерных подпространств пространства R^d можно снабдить такой структурой многообразия, чтобы $Gl(d, R)$ действовало очевидным образом как дифференцируемая группа преобразований слева. Расслоения, ассоциированные с $B(M)$ относительно этого действия, называются (неориентированными) *расслоениями Грассмана* многообразия M; пространство расслоения можно рассматривать как объединение e-плоскостей касательных пространств многообразия M; e-мерное C^∞-распределение является C^∞-сечением этого расслоения.

Действие главного расслоения на ассоциированном слое. Пусть (P, G, M) — главное расслоение, B — ассоциированное расслоение со слоем F. Тогда при фиксированном $p \in P$ факторпроекция $P \times F \to B$ определяет некоторое C^∞-отображение $p: F \to B$, а именно $p(f) = (p, f)G$. Оно удовлетворяет соотношению $p(gf) = (pg)f$ при любом $g \in G$. Мы уже видели это в случаях $B(M)$ и $T(M)$ (см. [72], часть I, § 8.9).

Замечание. Ассоциированное расслоение *тривиально*, если его главное расслоение тривиально. Это не эквивалентно существованию сечения ассоциированного расслоения, но обеспечивает существование семейства сечений с попарно непересекающимися областями значений, заполняющими пространство ассоциированного расслоения.

Задача 9. Проверить это, а также показать, что для векторного расслоения со слоем R^e тривиальность эквивалентна существованию e сечений, линейно независимых в каждой точке.

Хорошо известно [72], что касательное расслоение к дифференцируемому многообразию допускает не обращающееся в 0 сечение в том и только в том случае, если эйлерова характеристика многообразия равна нулю; например, если многообразие компактно и нечетномерно. Поэтому все нечетномерные сферы обладают такими сечениями; в то же время глубоким результатом Милнора и Кервера [13] является тот факт, что только S^1, S^3, S^7 имеют тривиальные касательные расслоения (т. е. *параллелизуемы*).

3.4. Приведение структурной группы

Пусть (P, G, M) — главное расслоение. Предположим, что G сепарабельно. Пусть H — подгруппа G, тогда структурная группа G *приводима к подгруппе* H в смысле Стинрода в том и только в том случае, если в классе эквивалентности, определенном посредством (P, G, M), существует координатное расслоение, функции перехода которого принимают значения в H, т. е. тогда и только тогда, когда существует покрытие $\{U_i\}$, функции перехода G_{ji} которого подчинены условию $G_{ji}(U_i \cap U_j) \subset H$.

В терминах правого действия $P \times G \to P$ это определение можно сформулировать еще и так ([51], стр. 36):

Пусть (P, G, M), (P', G', M') — главные расслоения; *послойное отображение* $f: (P, G, M) \to (P', G', M')$ — это совокупность таких C^∞-отображений (f_P, f_G, f_M), где $f_G: G \to G'$ — гомоморфизм, а $f_M: M \to M'$ и $f_P: P \to P'$ удовлетворяют соотношениям:

$$f_M \circ \pi = \pi' \circ f_P,$$

$$f_P \circ R_g = R_{f_G(g)} \circ f_P \quad \text{при любом} \quad g \in G.$$

Теперь второе определение можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2. Если (P, G, M) — главное расслоение, H — подгруппа G, то группа G приводима к H в том и только в том случае, если существует главное расслоение (P', H, M) и послойное отображение $f: (P', H, M) \to (P, G, M)$, при котором f_M — тождественное преобразование M, f_P взаимно однозначно, а f_G — отображение включения $H \subset G$.

(Доказательство опускается.)

Стинрод доказывает [72], что если (P, G, M) — главное расслоение, H — максимальная компактная подгруппа в G, то G можно привести к расслоению со структурной группой H. В частности, каждое главное расслоение со структурной группой $Gl(d, R)$ [например, $B(M)$] приводимо к расслоению, структурной группой которого является ортогональная группа $O(d)$. Мы вернемся к этому результату, когда будем рассматривать римановы метрики на многообразии.

Приведение главного расслоения очевидным образом индуцирует приведение ассоциированных расслоений, так как определение дано только в терминах функций перехода.

Задача 10. *Комплексные многообразия.* Пусть M — комплексное многообразие, $\mathcal{F}$ — семейство всех комплексных дифференцируемых функций, определенных в окрестности некоторой точки $m \in M$, $\mathcal{F}_a$ — семейство всех голоморфных функций из $\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}_a$ — семейство всех функций, комплексно сопряженных с функциями из $\mathcal{F}_a$ (сопряженные голоморфные функции), $\mathcal{F}_r$ — пространство всех вещественных функций из $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}_m$ — пространство комплексных линейных дифференцирований на $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}_m$ — комплексное линейное расширение пространства M_m, $\mathcal{H}_m$ — аннулятор $\overline{\mathcal{F}}_a$ в $\mathcal{T}_m$. Для $t \in \mathcal{T}_m$, $f \in \mathcal{F}$ определим $\bar{t}f = \overline{t\bar{f}}$. Показать, что

(а) $\mathcal{T}_m = \mathcal{M}_m + i\mathcal{M}_m$ (прямая сумма).

(б) $\bar{t} \in \mathcal{T}_m$ при любом $t \in \mathcal{T}_m$.

(в) $\mathcal{M}_m$ совпадает с множеством всех $t \in \mathcal{T}_m$, таких, что $t\mathcal{F}_r \subset R$.

(г) $\overline{\mathcal{H}}_m$ — аннулятор $\mathcal{F}_a$.

(д) $t = \bar{t}$ тогда и только тогда, когда $t \in \mathcal{M}_m$.

(е) $\mathcal{H}_m \cap \overline{\mathcal{H}}_m = 0$.

(ж) $\mathcal{T}_m = \mathcal{H}_m + \overline{\mathcal{H}}_m$.

(з) Если $t \in \mathcal{M}_m$, то разложение t из (ж) имеет вид $t = h + \bar{h}$, где $h \in \mathcal{H}_m$, т. е. $\mathcal{M}_m = \{h + \bar{h} \mid h \in \mathcal{H}_m\}$. Это определяет взаимно однозначное вещественное линейное отображение $P:\mathcal{M}_m \to \mathcal{H}_m$, $t \to h$.

Пусть $j:\mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_m$ — операция умножения на i. Определим $J=P^{-1}jP$.

(и) $J^2=-1$.

(к) Выразить J в терминах вещественных координатных векторных полей, определяемых вещественной и мнимой частями комплексной координатной системы.

(л) J определено на $T(M)$ и является послойным отображением.

Почти комплексной структурой на многообразии M называется послойное отображение $J: T(M) \to T(M)$, такое, что

(1) $J(M_m)=M_m$ при любом $m \in M$.

(2) $J^2=-1$ на каждом M_m.

Это отображение J называется *комплексной структурой* комплексного многообразия M. Почти комплексная структура называется *комплексной* только в том случае, если она получена таким путем.

Задача 11. (а) Если M имеет почти комплексную структуру, то размерность M четна.

(б) M имеет почти комплексную структуру в том и только в том случае, если группу расслоения базисов можно привести к группе $Gl(d/2, C)$, представленной в $Gl(d, R)$ матрицами вида $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, которые соответствуют матрицам $(A+iB) \in Gl(d/2, C)$.

Всякое 2-мерное ориентируемое дифференцируемое многообразие допускает комплексную структуру, так что всякое 2-мерное многообразие, допускающее почти комплексную структуру, обладает комплексной структурой. Последнее не верно для многообразий более высоких размерностей [91].

Если M обладает почти комплексной структурой, то M_m+iM_m распадается в прямую сумму $\mathcal{H}_m+\overline{\mathcal{H}}_m$, где $\mathcal{H}_m$ — множество всех $x+iJx$ с $x \in M_m$. Говорят, что векторное C^∞-поле X принадлежит $\mathcal{H}$, если $X(m) \in \mathcal{H}_m$ при любом m; в этом случае пишут $X \in \mathcal{H}$. Вообще говоря, не верно, что $[X, Y] \in \mathscr{H}$ при $X \in \mathscr{H}$, $Y \in \mathscr{H}$. Однако если J — комплексная структура, то $\mathscr{H}_m$ согласуется с прежним определением и $[\mathscr{H}, \mathscr{H}] \subset \mathscr{H}$. В действительности последнее условие является также достаточным условием того, чтобы J было комплексной структурой [53].

Задача 12. Максимальными компактными подгруппами в R^* и C^* служат $\{1, -1\} = S^0$ и $\{e^{i\theta}\} = S^1$ соответственно. Показать, что приведение главных расслоений примеров (1) и (3) в § 3.2 к этим подгруппам порождает главные расслоения (S^d, S^0, P^d) и (S^{2d+1}, S^1, CP^d).

Перенести это построение на кватернионный случай, где получается кватернионное проективное пространство QP^d: (S^{4d+3}, S^3, QP^d).

В случае $d = 1$ проекции этих расслоений становятся отображениями Хопфа $S^3 \to S^2 = CP^1$, $S^7 \to S^4 = QP^1$.

ГЛАВА 4

Дифференциальные формы

В этой главе с помощью алгебр Грассмана определяются дифференциальные формы, строится инвариантная формула внешнего дифференцирования, а также рассматриваются теорема Фробениуса, формы с векторными значениями и формы на комплексных многообразиях [22, 51, 79, 80, 83, 94, 95]. Другие вопросы, в частности применение дифференциальных форм к изучению топологических инвариантов, читатель найдет в [14, 16, 63].

4.1. Введение

В предыдущей главе мы говорили о тензорах; дифференциальные формы, предмет настоящей главы, являются частным случаем тензоров. Однако мы начнем с более явного описания дифференциальных форм в терминах грассмановых алгебр и лишь потом снова коснемся тензорного подхода (§ 4.5).

Пусть f есть C^∞-функция на M; тогда каждому $m \in M$ соответствует дифференциал f в точке m (§ 1.3), который является линейным функционалом на M_m, причем это соответствие гладко в следующем смысле. Пусть X — векторное C^∞-поле на M, тогда $df(X)(m) = df_m X(m) = Xf(m)$ определяет C^∞-функцию Xf на M. Такое гладкое соответствие линейных функций называется дифференциальной 1-формой, хотя не каждая дифференциальная форма оказывается дифференциалом некоторой C^∞-функции. Но прежде чем развивать этот предмет дальше, мы должны построить некий аппарат, а именно грассмановы алгебры.

4.2. Классическое понятие дифференциальной формы

В терминах координатной системы дифференциальная форма в точке m представляет собой выражение вида $\sum a_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$, где суммирование распространяется на все упорядоченные подсистемы $(i_1, \dots, i_p)$ системы $\{1, \dots, d\}$ и $a_{i_1 \dots i_p}$ — вещественные числа.

Поэтому строгое определение будет включать некоторое перемножение дифференциалов с последующим линейным комбинированием таких произведений. Следовательно, M_m^* вкладывается в некоторую алгебраическую систему, обладающую и операцией умножения и векторными операциями. Кроме того, наше определение должно удовлетворять такому условию: если $(y_1, \dots$ $\dots, y_d)$ — другая координатная система в точке m, то выражение $\sum b_{i_1 \dots i_p} dy_{i_1} \dots dy_{i_p}$, полученное из первого по обычным правилам замены переменных в кратных интегралах, должно быть в точности разложением того же алгебраического объекта в терминах нового базиса. Алгебраической системой, удовлетворяющей этим требованиям, оказывается алгебра Грассмана, к рассмотрению которой мы теперь переходим.

4.3. Алгебры Грассмана

Пусть F — поле, V — конечномерное векторное пространство над F размерности d. *Грассманова алгебра над* V — это такое множество G, что

(I) G — ассоциативная алгебра с единицей e над F;

(II) G содержит V;

(III) всякий элемент $v \in V$ удовлетворяет условию $v^2 = 0$;

(IV) G имеет размерность 2^d;

(V) G порождается единицей e и пространством V, т. е. всякий элемент G является суммой произведений скалярных кратных единицы e и элементов V.

Отметим, что $e \notin V$, поскольку $e^2 = e \neq 0$, тогда как, в силу (III), $v^2 = 0$ для всех $v \in V$. Далее, если $u, v \in V$, то

$uv = -vu$. Это доказывается, как всегда, с помощью поляризации:

$$0 = (u+v)^2 = u^2 + uv + vu + v^2 = uv + vu.$$

Свойство (IV) — краткий, хотя и не явный способ выражения того, что среди элементов G нет других соотношений, кроме тех, которые вытекают из (III).

Каждому базису $e_1, \ldots, e_d$ пространства V соответствует некоторый базис пространства G. Элементы этого базиса в G находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами $\{1, \ldots, d\}$:

(а) пустому подмножеству $\varnothing$ соответствует элемент $e_\varnothing = e$;

(б) подмножеству $s = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $i_1 < \ldots < i_p$, соответствует элемент $e_s = e_{i_1} \ldots e_{i_p}$.

Отметим, что всего имеется 2^d подмножеств, так что для проверки того, что элементы e_s образуют базис, достаточно доказать, что справедлива

Лемма 1. Элементы e_s порождают пространство G.

Доказательство. В силу свойства (V), для всякого $g \in G$ имеем

$$g = a_0 e_\varnothing + \sum (\text{произведения элементов } V) =$$
$$= a_0 e_\varnothing + \sum (\text{коэффициенты из } F) \cdot (\text{произведения элементов } e_i).$$

Воспользовавшись антикоммутативностью элементов из V, мы можем в любом произведении расположить сомножители e_i по возрастанию их индексов, а тогда все слагаемые, кроме e_s, окажутся равными нулю, в силу (III).

Элемент $g \in G$ называется *однородным степени* p, если его можно записать как сумму произведений по p элементов из V, или, что эквивалентно, $g = \sum_{s \in P} a_s e_s$, где $a_s \in F$, а P — совокупность всех подмножеств $\{1, \ldots, d\}$, имеющих ровно p элементов.

Совокупность таких $g \in G$ образует линейное подпространство G^p алгебры G размерности $\binom{d}{p}$. Очевидно, что $G^pG^q \subset G^{p+q}$. Кроме того, в силу антикоммутативности, если $g \in G^p$, $h \in G^q$, то $gh = (-1)^{pq}hg$.

Однородный элемент $g \in G$ степени p называется *разложимым*, если $g = v_1 \ldots v_p$ при некоторых $v_1, \ldots, v_p \in V$. В противном случае элемент g называется *неразложимым*.

Задача 1. Если $\dim V \leqslant 3$, то каждый однородный элемент разложим. Если $\dim V > 3$ и v_1, v_2, v_3, v_4 линейно независимы, то элемент $v_1v_2 + v_3v_4$ неразложим.

В общем случае разложимые элементы образуют (нелинейное) алгебраическое подмногообразие в G^p.

Задача 2. Доказать, что для $g \in G^2$ найдутся линейно независимые $v_1, \ldots, v_{2k} \in V$, такие, что $g = v_1v_2 + v_3v_4 + \ldots + v_{2k-1}v_{2k}$; показать, что если характеристика поля F отлична от простого числа $\leqslant (1/2)d$, то k — наибольшее целое число, для которого $g^k \neq 0$, и тогда элемент g^k разложим.

В этом случае говорят, что g имеет *ранг* $2k$.

Задача 3. Если $\dim V = 4$ и характеристика поля F отлична от 2, то g разложим в том и только в том случае, если $g^2 = 0$ и g — однородный элемент. Вообще, если $\dim V = 4$ и $g \in G^{d-1}$, то элемент g разложим.

Задача 4. Пусть $x \neq 0$, $x \in V$, $g \in G$. Доказать, что $xg = 0$ тогда и только тогда, когда $g = xh$ при некотором $h \in G$.

Замечания. (1) Если $v_1, \ldots, v_p \in V$, то $v_1 \ldots v_p \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v_1, \ldots, v_p$ линейно независимы.

Доказательство. Если $v_1, \ldots, v_p$ линейно независимы, то их можно дополнить до базиса в V, так что $v_1 \cdots v_p = e_s \neq 0$, $s = \{1, \ldots, p\}$.

Если $v_1, \ldots, v_p$ линейно зависимы, скажем $v_1 = \sum_{i=2}^{p} a_i v_i$, то, в силу дистрибутивности и антикоммутивности,

$$v_1 \ldots v_p = \sum_{i=2}^{p} \pm a_i v_2 \ldots v_i^2 \ldots v_p = 0.$$

(2) Любые две грассмановы алгебры над V по существу совпадают; точнее, если G и H — такие алгебры, то существует изоморфизм G на H, оставляющий неподвижным каждый элемент V. Действительно, нужно только выбрать базис в V и отобразить элементы e_s из G в соответствующие элементы из H.

(3) Если T — линейное преобразование векторного пространства V в векторное пространство W и $G(V)$, $G(W)$ — соответствующие алгебры Грассмана над V и W, то существует единственное продолжение преобразования T до гоморфизма T_h алгебры $G(V)$ в $G(W)$, причем $T_h(G(V)^p) \subset G(W)^p$.

Доказательство. Единственность немедленно следует из того, что $T(e)$ должно равняться e и что $G(V)$ порождается e и элементами V. По линейности T_h можно продолжить на все $G(V)$, если определить

$$T_h(v_1 \ldots v_p) = T(v_1) \ldots T(v_p) \quad \text{для} \quad v_1, \ldots, v_p \in V,$$

и такое T_h, очевидно, является гомоморфизмом.

Задача 5. Если $T: V \to W$, $S: W \to X$ — линейные преобразования векторных пространств, то $(ST)_h = S_h T_h$.

Задача 6. Если $T: V \to V$ — линейное преобразование, то оно допускает единственное продолжение до дифференцирования в $G(V)$, т. е. до такого отображения T_d, что $T_d(gh) = T_d(g)h + gT_d(h)$, где $g, h \in G(V)$.

Задача 7. Если $T, S: V \to V$, то $[S_d, T_d]$ является дифференцированием и $[S, T]_d = [S_d, T_d]$, т. е. $(ST)_d - (TS)_d = S_d T_d - T_d S_d$. Привести пример, показывающий, что $S_d T_d$ не всегда является дифференцированием.

Если V является d-мерным векторным пространством и G — его алгебра Грассмана, то G^d — одномерное пространство. Линейное преобразование G^d в себя — это просто скалярное умножение на некоторый элемент из F. Если S — такое преобразование, то соответствующий скаляр обозначается через $k(S)$.

Пусть теперь T — линейное преобразование V в себя. Ввиду замечания (3) и задачи 6 существуют продолжения T_h и T_d преобразования T на G, которые являются соответственно гомоморфизмом и дифференцированием. В частности, T_h и T_d — линейные преобразования G^d. Введем определитель и след преобразования T следующим образом:

$$\det T = k(T_h),$$
$$\operatorname{tr} T = k(T_d).$$

Легко проверяется, что отображение $T \to \det T$ пространства $\mathfrak{gl}(V)$ в F определяет гомоморфизм группы $Gl(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$, причем $T \in Gl(V)$ тогда и только тогда, когда $\det T \neq 0$. Легко также проверить, что этот определитель совпадает с обычным.

Задача 8. Показать, что

(а) $\operatorname{tr}(S+T) = \operatorname{tr}(S) + \operatorname{tr}(T)$,

(б) $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$ (применить задачу 7, чтобы обойтись без координат).

Задача 9. Пусть f — линейный функционал на пространстве $\mathfrak{gl}(V)$, удовлетворяющий следующим условиям: (а) $f(ST) = f(TS)$ для любых $T, S \in \mathfrak{gl}(V)$; (б) если I — тождественное преобразование в V, то $f(I) = d = \dim V$. Доказать, что $f = \operatorname{tr}$ и что подпространство $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ имеет коразмерность 1 в $\mathfrak{gl}(V)$, причем дополнительное подпространство состоит из скалярных кратных I.

4.4. Существование алгебр Грассмана

Альтернирующие функции. Та конкретная алгебра Грассмана над V, которую мы хотим рассматривать, является пространством полилинейных альтернирующих функций на сопряженном W к V. Таким образом,

G^0 есть поле F, над которым определено V;

G^1 есть пространство линейных функций на W со значениями в F.

В нашем случае G^1 канонически изоморфно V: как обычно, $v \in V$ соответствует единственному $f \in G^1$, удовлетворяющему равенству $f(w) = w(v)$ при любом $w \in W$. Этот изоморфизм осуществляет вложение V в G.

Пространство G^p является пространством p-линейных альтернирующих функций на $W \times \ldots \times W$ (всего p сомножителей) со значениями в F. Иначе говоря, если $f \in G^p$, то

(I) $f(w_1, \ldots, aw_i + bw_i', \ldots, w_p) =$

$$= af(w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_p) + bf(w_1, \ldots, w_i', \ldots, w_p),$$

т. е. f линейно по каждому переменному при фиксированных остальных;

(II) $f(w_1, \ldots, w_p) = 0$

всякий раз, когда два из w_i равны.

Если характеристика поля скаляров не равна 2, то, как всегда, с помощью поляризации можно показать, что (I) и (II) в совокупности эквивалентны (I) и

(II)$'$ $f(w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_j, \ldots, w_p) =$

$$= -f(w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_i, \ldots, w_p).$$

Далее, поскольку перестановки порождают симметрическую группу S_p, то (II)$'$ эквивалентно соотношению

(II)$''$ $$f(w_{\pi 1}, \ldots, w_{\pi p}) = \operatorname{sgn}(\pi) f(w_1, \ldots, w_p)$$

для любого $\pi \in S_p$. Даже при характеристике 2 из соотношений (I) и (II) следует (II)$'$.

Иногда удобно рассматривать $W \times \ldots \times W$ (p сомножителей) как семейство функций на $\{1, \ldots, p\}$ со значениями в W и в этом случае (II)$''$ можно переписать в виде

$$f(z \circ \pi) = \operatorname{sgn}(\pi) f(z) \quad \text{для} \quad z \in W \times \ldots \times W.$$

Умножение. Пусть S_{p+q} — группа подстановок в множестве $\{1, \ldots, p+q\}$, S_p — подгруппа, оставляющая неподвижным каждый элемент из $\{p+1, \ldots, p+q\}$, S'_q — подгруппа, оставляющая неподвижным каждый элемент из $\{1, \ldots, p\}$. *Сечением подгруппы* $S_pS'_q$ *в* S_{p+q} называется всякое подмножество $K \subset S_{p+q}$, которое имеет ровно по одному элементу из каждого левого класса смежности подгруппы $S_pS'_q$. Например, часто встречающимся сечением служит совокупность *тасующих подстановок*, а именно множество

$$K = \{\pi \in S_{p+q} \mid \pi 1 < \pi 2 < \ldots < \pi p \text{ и } \pi(p+1) < \pi(p+2) < \ldots < \pi(p+q)\}.$$

Такое название объясняется следующим: если колода из $p+q$ карт разделена на две части по p и q карт и затем перетасована обычным способом, то результирующее преобразование карточной колоды является p, q-тасующей подстановкой.

Рис. 15.

Пусть $f \in G^p$, $g \in G^q$, K — некоторое сечение подгруппы $S_pS'_q$ в S_{p+q}, A_p — операция прибавления p; определим произведение fg, принимающее на $z \in W^{p+q}$ значение

$$fg(z) = \sum_{\pi \in K} \operatorname{sgn}(\pi) f(z \circ \pi) g(z \circ \pi \circ A_p).$$

Чтобы пояснить эту формулу, заметим, что при $z(i) = w_i$

$$f(z \circ \pi) = f(w_{\pi 1}, \ldots, w_{\pi p}),$$
$$g(z \circ \pi \circ A_p) = g(w_{\pi(p+1)}, \ldots, w_{\pi(p+q)}).$$

Используя (II)″, легко проверить, что это умножение не зависит от выбора K.

Предложение 1. $fg \in G^{p+q}$.

Доказательство. В самом деле, $(p+q)$-линейность функции fg очевидна.

Предположим, что $\sigma \in S_{p+q}$, а K — указанное выше сечение. Тогда

$$fg(z \circ \sigma) = \sum_{\pi \in K} \operatorname{sgn}(\pi) f(z \circ \sigma \circ \pi) g(z \circ \sigma \circ \pi \circ A_p) =$$
$$= \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\rho \in \sigma K} \operatorname{sgn}(\rho) f(z \circ \rho) g(z \circ \rho \circ A_p).$$

Теперь достаточно проверить, что σK также является сечением. Пусть π, $\pi' \in K$, тогда $(\sigma\pi)^{-1}(\sigma\pi') = \pi^{-1}\pi'$ принадлежит $S_p S_q'$, если только $\pi = \pi'$. Таким образом, все элементы σK находятся в различных классах смежности, и поскольку число элементов σK совпадает с числом элементов K, то σK должно быть сечением.

Мы показали, что fg удовлетворяет лишь (II)$'$. Предложение 1 верно и при характеристике 2, но мы не приводим доказательство.

Предложение 2. Это умножение ассоциативно.

Набросок доказательства. Пусть $f \in G^p$, $g \in G^q$, $h \in G^r$. Будем рассматривать S_{p+q} как подгруппу S_{p+q+r}, S_r'' — как группу подстановок в $\{p+q+1, \ldots, p+q+r\}$ и аналогичные соглашения примем относительно S_p и S_{q+r}'. Можно показать, что если K — сечение подгруппы $S_p S_q'$ в S_{p+q}, K' — сечение подгруппы $S_{p+q} S_r''$ в S_{p+q+r}, L — сечение подгруппы $S_q' S_r''$ в S_{q+r}' и L' — сечение подгруппы $S_p S_{q+r}'$ в S_{p+q+r}, то $K'K$ и $L'L$ — сечения подгруппы $S_p S_q' S_r''$ в S_{p+q+r}. Поэтому остается, выписав произведения с обеими расстановками скобок, проверить, что сумма

$$fgh(z) = \sum_{\pi \in K'K} \operatorname{sgn}(\pi) f(z \circ \pi) g(z \circ \pi \circ A_p) h(z \circ \pi \circ A_{p+q})$$

не зависит от сечения подгруппы $S_p S_q' S_r''$ в S_{p+q+r}, по которому мы суммируем. Это снова тривиально в силу (II)$'$.

Предложение 3. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V$, тогда

$$v_1 \ldots v_p(w_1, \ldots, w_p) = \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn}(\pi)\, v_1(w_{\pi 1}) \ldots v_p(w_{\pi p}).$$

Доказательство сводится к обобщению рассуждений, использованных при доказательстве предложения 2.

Следствие. Если $v \in V$, то $v^2 = 0$.

Наконец, сложение, умножение на скаляр и единица в пространстве полулинейных функций определяются очевидным образом.

Итак, мы показали, что $G = \sum G^i$ удовлетворяет аксиомам (I)—(III) теории алгебр Грассмана. Проверим аксиомы (IV) и (V).

Лемма 2. Пусть $e_1, \ldots, e_d$ — базис в V. Тогда $e_D \neq 0$, где $D = \{1, \ldots, d\}$.

Доказательство. Пусть $w_1, \ldots, w_d$ — базис, сопряженный к $e_1, \ldots, e_d$. Тогда, в силу предложения 3, $e_D(w_1, \ldots, w_d) = 1 \neq 0$.

Предложение 4. Элементы e_s линейно независимы, а потому $\dim G \geqslant 2^d$.

Доказательство. Так как $\sum G^i$ — прямая сумма, то нужно только показать, что элементы e_s, $s = \{i_1, \ldots, i_p\}$, являются линейно независимыми. Пусть P — множество всех таких s. Если теперь $\sum_{s \in P} a_s e_s = 0$ и $s_0 \in P$, то

$$0 = \sum_{s \in P} a_s e_s e_{D-s_0} = \pm a_{s_0} e_D,$$

так как $e_i^2 = 0$ и e_i антикоммутируют. Поэтому, в силу леммы 2, $a_{s_0} = 0$. Ч. Т. Д.

Предложение 5. Элементы e_s порождают G, и потому $\dim G = 2^d$.

Доказательство. Пусть $w_1, \ldots, w_d$ — базис в W. При $s=\{i_1, \ldots, i_p\}$, $i_1<i_2< \ldots <i_p$, полагаем $w_s=(w_{i_1}, \ldots, w_{i_p})$. Пусть $e_1, \ldots, e_d$ — сопряженный базис в V. Тогда, в силу предложения 3, $e_s(w_s)=1$, $e_s(w_t)=0$, если $s\neq t$. Теперь для $f\in G^p$ имеем

$$f\left(\sum a_{1i}w_i, \ldots, \sum a_{pi}w_i\right)=$$
$$=\sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{1i_1}\ldots a_{pi_p} f\left(w_{i_1}, \ldots, w_{i_p}\right)=$$
$$=\sum_{s\in P}\sum_{\{i_1, \ldots, i_p\}=s} \operatorname{sgn}(\pi(i_1, \ldots, i_p))\, a_{1i_1}\ldots a_{pi_p} f(w_s),$$

где $\pi(i_1, \ldots, i_p)$ — подстановка, располагающая индексы $i_1, \ldots, i_p$ в возрастающем порядке.

Применение этой формулы к $f=e_s$ дает

$$e_s\left(\sum a_{1i}w_i, \ldots, \sum a_{pi}w_i\right)=$$
$$=\sum_{\{i_1, \ldots, i_p\}=s} \operatorname{sgn}(\pi(i_1, \ldots, i_p))\, a_{1i_1}\ldots a_{pi_p}.$$

Отсюда $f=\sum_{s\in P} f(w_s)\, e_s$.

Задача 10. Показать, что тасующие подстановки образуют сечение, и выписать с их помощью всевозможные произведения при $p, q\leqslant 2$.

Задача 11. Пусть в множестве всех полилинейных альтернирующих функций на W определено новое произведение: если $f\in G^p$, $g\in G^q$, $p, q\geqslant 1$, то $f*g=a_{pq}fg$, где a_{pq} — ненулевой элемент F, а fg — прежнее произведение. Для того чтобы $G=\sum G^l$ являлось алгеброй Грассмана над V относительно умножения $*$, должно выполняться равенство $a_{pq}=a_{qp}$ и некоторое условие, эквивалентное ассоциативному закону. Вывести это условие и с его помощью выразить a_{pq} через $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1d-1}$. Обратно, показать, что a_{1j} можно выбрать произвольно и что при $a_{1j}=j+1$ формулой для $f*g$ служит

$$f*g(z)=\sum_{\pi\in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi)\, f(z\circ\pi)\, g(z\circ\pi\circ A_p).$$

Эту формулу можно использовать для определения умножения вместо той, которая была приведена, но ее нельзя применить, когда характеристика поля F является простым числом $\leqslant d$. Наша формула содержит наименьшие возможные члены.

Задача 12. Пусть $e=\{e_1, \ldots, e_d\}$ — базис в V, $\mathscr{L}=\mathfrak{gl}(V)$, $J:\mathscr{L}\to V^d$ — изоморфизм $\mathscr{L}$ на d-кратное декартово произведение V, заданный равенством $J(T)=(Te_1, \ldots, Te_d)$, $f\in G^d(W)$ — единственный элемент из $G^d(W)$, для которого $f(e_1, \ldots, e_d)=1$ (f — альтернирующая d-линейная функция на V^d). Доказать, что $\det = f\circ J:\mathscr{L}\to F$.

Задача 13. Пусть $f\in G^d(F^{d*})$ — единственная альтернирующая d-линейная функция на $(F^d)^d$, множестве $d\times d$-матриц, для которой $f(I)=1$. Показать, что f — обычный определитель матриц.

Задача 14. Описать естественный изоморфизм $G(V^*)$ и $G(V)^*$. С помощью этого показать, что скалярное произведение на V естественно продолжается до скалярного произведения на $G(V)$, поскольку скалярное произведение приводит к изоморфизму V и V^*, который однозначно распространяется до изоморфизма алгебр $G(V)$ и $G(V^*)$. Вывести также выражения в терминах базиса для скалярного произведения на $G(V)$.

4.5. Дифференциальные формы

С этого момента нас будет интересовать случай, когда $V=M_m^*$, m — точка многообразия M, $W=M_m$, $G_m=G(M_m^*)$. Таким образом, если $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система в m, то $dx_1, \ldots, dx_d$ образуют базис M_m^*, так что каждый элемент $f\in G_m^p$ однозначно представим в виде $f=\sum\limits_{s\in P} a_s\, dx_s$.

Дифференциальная p-форма на M — это функция θ, определенная на некотором подмножестве $E\subset M$, значением которой в каждой точке $m\in E$ служит элемент пространства $G_m{}^d$. Функция θ является *p-формой* класса

C^∞, если для любой системы векторных C^∞-полей $V_1, \ldots$ $\ldots, V_p$ на M функция $\theta(V_1, \ldots, V_p)$, заданная на пересечении областей определения θ и $V_1, \ldots, V_p$ равенством

$$\theta(V_1, \ldots, V_p)(m) = \theta_m(V_1(m), \ldots, V_p(m)),$$

принадлежит C^∞. Здесь θ_m — значение функции θ в точке m. По возможности знак «m» будет опускаться.

0-форма — это просто вещественная функция на M. Отметим, что θ принадлежит C^∞ тогда и только тогда, когда для любой координатной системы $(x_1, \ldots, x_d)$ в (единственном) представлении $\theta = \sum\limits_{s \in P} a_s dx_s$ все a_s принадлежат C^∞.

Другой подход. Установим связь нашего определения с тем, о котором говорилось в § 3.3. Сначала образуем следующие тензорные расслоения над M:

$$G^p = \bigcup_{m \in M} G_m{}^p.$$

Проекцией этого расслоения служит естественное отображение $\pi : G_m{}^p \to m$. Дифференцируемая структура задается набором координатных окрестностей вида $\bar{V} = \bigcup\limits_{m \in V} G_m{}^p$, где V — координатная окрестность в M с координатами $x_1, \ldots, x_d$, а координатная система в $\bar{V}$ состоит из $x_1 \circ \pi, \ldots, x_d \circ \pi$ и еще $\binom{d}{p}$ функций w_s, $s \in P$, сопряженных с базисом $\{dx_s\}$ пространства $G_m{}^p$ в каждой точке V.

Иначе говоря, если R^{d*} — сопряженное к евклидову d-пространству R^d, то каждый элемент из $Gl(d, R)$ действует на R^{d*} как свой транспонированный обратный и, значит, после продолжения до соответствующего гомоморфизма действует также на $G(R^{d*})^p$. Таким образом, G^p — расслоение, ассоциированное с расслоением базисов $B(M)$ относительно этого действия [см. § 3.3, п. (3)].

Теперь *дифференциальной р-формой* на $E \subset M$ является сечение G^p над E, т. е. отображение $\theta : E \to G^p$, для которого $\pi \circ \theta$ — тождественное отображение; $\theta \in C^\infty$, если θ является C^∞-отображением.

Ориентация. Пусть E — векторное расслоение над M; обозначим через E_0 множество всех ненулевых векторов в E. Множество E_0 открыто в E.

Если M связно, то $G^d{}_0$ либо связно, либо распадается в точности на две компоненты связности. Это сразу следует из того, что всякий путь в M можно поднять в $G^d{}_0$, а каждый слой в $G^d{}_0$ имеет в точности две компоненты связности (d — размерность M).

Многообразие M *ориентируемо*, если $G^d{}_0$ состоит из двух компонент. В этом случае каждая компонента $G^d{}_0$ называется ориентацией многообразия M; M *неориентируемо*, если $G^d{}_0$ связно.

Лемма 3. Паракомпактное многообразие M ориентируемо в том и только в том случае, если M допускает непрерывную, нигде не обращающуюся в нуль d-форму, заданную на всем M.

Доказательство. Предположим, что θ — непрерывная определенная всюду d-форма со значениями в $G^d{}_0$. Пусть γ — произвольная кривая в $G^d{}_0$, которая начинается и кончается в одном и том же слое $G_m{}^d{}_0$ ненулевых элементов из $G_m{}^d$. Так как $G_n{}^d$ — одномерное пространство при любом $n \in M$, то $\gamma(t) = \alpha(t)\theta(\pi \circ \gamma(t))$, где α — непрерывная вещественная функция. Но $\alpha(t)$ нигде не обращается в нуль и потому имеет постоянный знак. Поэтому начальная и конечная точки кривой $\gamma(t)$ принадлежат одной и той же компоненте $G_m{}^d{}_0$. Значит, $G^d{}_0$ не связно и M ориентируемо.

Обратно, предположим, что M ориентируемо. Пусть $\{U_i\}$ — локально конечное покрытие M связными координатными окрестностями, $\{f_i\}$ — ассоциированное C^∞-разложение единицы. Выберем ориентацию M. Тогда для произвольной связной координатной окрестности U с ассоциированными координатами $x_1, \ldots, x_d$ форма $\varphi = dx_D$ является непрерывным сечением U над $G^d{}_0$, так что либо φ, либо $-\varphi$ принадлежит выбранной ориентации. Так получаются φ_i, определенные на U_i, со значениями в выбранной ориентации, но тогда $\theta = \sum f_i \varphi_i$ определяет нужную ненулевую d-форму класса C^∞. Ч. Т. Д.

Если M ориентируемо, то такая форма θ называется *элементом объема* многообразия M.

Если M не связно, то говорят, что M ориентируемо, если каждая компонента M ориентируема, и *ориентацией* M служит набор ориентаций всех компонент.

Есть и другие условия, эквивалентные ориентируемости, которые иногда выступают как определения. Вот они:

(1) M так покрывается координатными окрестностями, что любые две системы координат связаны системой уравнений, имеющих положительный определитель Якоби.

(2) (Когда M связно.) Пространство расслоения базисов $B(M)$ не связно. Тогда пространство $B(M)$ имеет в точности две компоненты, каждая из которых представляет ориентацию M.

Задача 15. Доказать, что следующие многообразия ориентируемы:

(а) касательное расслоение любого многообразия;

(б) параллелизуемые многообразия, в частности группы Ли;

(в) комплексные и почти комплексные многообразия.

4.6. Внешняя производная

Внешней производной d называется отображение, относящее каждой p-форме θ класса C^∞ некоторую $(p+1)$-форму $d\theta$ класса C^∞, такую, что

(I) если $p=0$, то $d\theta$ совпадает с дифференциалом C^∞-функции θ (см. § 4.1),

(II) область определения $d\theta$ совпадает с областью определения θ,

(III) отображение d линейно над R,

(IV) если θ является p-формой, φ является q-формой, то $d(\theta\varphi) = (d\theta)\varphi + (-1)^p\theta(d\varphi)$,

(V) $d(d\theta) = 0$ для всех θ.

Теорема 1. Существует самое большее одно отображение, удовлетворяющее условиям (I)—(V).

Доказательство. Если на пересечении областей определения θ и x_i записать θ в виде $\sum\limits_{s \in P} a_s\, dx_s$, то

$$\begin{aligned} d\theta &= \sum_{s \in P} d(a_s\, dx_s) && [\text{в силу (III)}] \\ &= \sum_{s \in P} (da_s\, dx_s + a_s d(dx_s)) && [\text{в силу (IV)}]. \end{aligned} \qquad (1)$$

Далее, в силу (IV) и (V),

$$d(dx_s) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1}\, dx_{i_1} \ldots d(dx_{i_j}) \ldots dx_{i_p} = 0.$$

Поэтому $d\theta = \sum\limits_{s \in P} \sum\limits_{j=1}^{p} D_{x_j} a_s\, dx_j\, dx_s$ — единственно возможное представление для $d\theta$.

В этом рассуждении есть один пробел, а именно, когда в левой части (1) мы применяли d к сужению θ на пересечение областей определения θ и $\{x_i\}$, то неявно подразумевалось, что результат совпадает с сужением $d\theta$ на это пересечение. Аналогичное замечание относится к правой части (1). Поэтому мы должны еще показать, что если θ и φ совпадают на открытом множестве U, то $d\theta$ и $d\varphi$ также совпадают на U. Для этого возьмем функцию f с областью определения U, равную 1 в каждой точке U. Тогда $f\theta$ и $f\varphi$ равны и определены в одной и той же области U. В силу (I), $df=0$, откуда, в силу (IV),

$$d\theta|_U = f d\theta = d(f\theta) = d(f\varphi) = f d\varphi = d\varphi|_U,$$

что и требовалось. Это завершает доказательство теоремы.

Итак, мы нашли координатное выражение внешней производной d. Для доказательства существования d следовало бы доказать согласованность этих выражений в перекрывающихся координатных окрестностях. Однако это совсем нетрудно, поскольку можно проверить (I)—(V) для координатной окрестности, после чего единственность и согласованность относительно сужения на меньшую область дадут согласованность на пересечениях координатных окрестностей. Теперь мы выведем инвариантную формулу для d, которая будет широко применяться в дальнейшем.

Инвариантная формула для d. Пусть θ есть p-форма класса C^∞. Построим с ее помощью R-$(p+1)$-линейную функцию $\bar\theta$ на совокупности $(p+1)$-наборов векторных C^∞-полей со значениями в пространстве C^∞-функций на M:

$$\begin{aligned}\bar\theta(V_1, \ldots, V_{p+1}) &= \\ &= \sum_i (-1)^{i-1} V_i\theta(V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_{p+1}) + \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\theta([V_i, V_j], V_1, \ldots \\ &\qquad \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_{j-1}, V_{j+1}, \ldots, V_{p+1}).\end{aligned}$$

Пусть $t_1, \ldots, t_{p+1} \in M_m$, где m — точка из области определения θ: возьмем векторные поля $V_1, \ldots, V_{p+1}$, такие, что $V_i(m) = t_i$. Положим $d\theta(t_1, \ldots, t_{p+1}) = \bar\theta(V_1, \ldots, V_{p+1})(m)$.

Мы должны показать, что это определение не зависит от выбора $V_1, \ldots, V_{p+1}$. Нам потребуется ряд лемм.

Лемма 4. Если V_i и W_i совпадают в окрестности точки m, $i=1, \ldots, p+1$, то $\bar\theta(V_1, \ldots, V_{p+1})(m) = \bar\theta(W_1, \ldots, W_{p+1})(m)$.

Доказательство. Это ясно из определения $\bar\theta$.

Лемма 5. (а) $\bar\theta(fV_1, V_2, \ldots, V_{p+1}) = f\bar\theta(V_1, \ldots, V_{p+1})$.

(б) $\bar\theta$ — альтернирующая функция, т. е.

$$\bar\theta(V_1, \ldots, V_i, \ldots, V_j, \ldots, V_{p+1}) = -\bar\theta(V_1, \ldots, V_j, \ldots, V_i, \ldots, V_{p+1}).$$

(в) $\bar\theta(V_1, \ldots, fV_i, \ldots, V_{p+1}) = f\bar\theta(V_1, \ldots, V_{p+1})$.

Доказательство. (а) вытекает из задачи 1.14 и определения $\bar\theta$; (б) немедленно получается из определения $\bar\theta$; (в) вытекает из (а) и (б).

Лемма 6. Определение $d\theta$ корректно, т. е. $\bar{\theta}(V_1, \ldots \ldots, V_{p+1})(m)$ не зависит от выбора полей V_i при условии, что $t_i = V_i(m)$.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_d$ — координаты в m. Тогда $V_i = \sum_j a_{ij} D_{x_j}$ в окрестности m. Если $W_i(m) = V_i(m)$, то $W_i = \sum_j b_{ij} D_{x_j}$ и $a_{ij}(m) = b_{ij}(m)$ при всех i, j. По лемме 4 можно ограничиться рассмотрением $\bar{\theta}$ лишь в этой координатной системе. В силу (в) леммы 5,

$$\bar{\theta}(V_1, \ldots, V_{p+1})(m) = \\ = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j_i=1}^{d} a_{ij_i}(m) \bar{\theta}(D_{x_{j_1}}, \ldots, D_{x_{j_{p+1}}})(m) = \\ = \bar{\theta}(W_1, \ldots, W_{p+1})(m).$$
Ч. Т. Д.

Теорема 2. Отображение $\theta \to d\theta$, определенное с помощью вышеуказанного $\bar{\theta}$, является внешней производной, т. е. удовлетворяет условиям (I) — (V).

Доказательство. Свойства (II) и (III) следуют из определения. Свойство (I) мы проверим непосредственно; а именно пусть $\theta = f \in C^\infty$, покажем, что $d\theta = df$. Пусть $t \in M_m$, V — векторное поле, для которого $V(m) = t$. Далее, $\bar{\theta}(V) = (-1)^{1-1} Vf$, поскольку остальные члены пропадают. Поэтому в точке m

$$d\theta(t) = \bar{\theta}(V)(m) = V(m)f = tf = df(t),$$

что и требовалось доказать.

Для проверки остальных свойств мы покажем, что d совпадает с операцией, локально определенной при доказательстве теоремы 1. Пусть $\tilde{d}$ обозначает эту операцию, т. е. в координатной системе $x_1, \ldots, x_d$ имеем для $\theta = \sum_{s \in P} a_s\, dx_s$

$$\tilde{d}\theta = \sum_{s \in P} \sum_j D_{x_j} a_s\, dx_j\, dx_s.$$

Отметим, что соответствия $\theta \to d\theta$ и $\theta \to \tilde{d}\theta$ оба R-линейны. Далее, если θ и φ совпадают на некоторой окрестности, то $d\theta$ и $d\varphi$ также совпадают на этой окрестности. Поэтому достаточно проверить, что рассматриваемые операции одинаковы при $\theta = f dx_s$, причем, в силу линейности форм, достаточно показать, что $d\theta$ и $\tilde{d}\theta$ совпадают на $(V_1, \ldots, V_{p+1})$, где $V_i = D_{x_{j_i}}$:

$$\tilde{d}\theta(V_1, \ldots, V_{p+1}) = \sum_k D_{x_k} f\, dx_k\, dx_s (V_1, \ldots, V_{p+1}) =$$

$$= \sum_k D_{x_k} f \sum_{\pi \in K} \operatorname{sgn}(\pi)\, dx_k (V_{\pi 1})\, dx_s (V_{\pi 2}, \ldots, V_{\pi(p+1)}),$$

где K — сечение подгруппы $S_1 S_p$ в S_{p+1}. С помощью тасующих подстановок $\pi 2 < \ldots < \pi(p+1)$ последнее выражение превращается в

$$\sum_k D_{x_k} f \sum_{m=1}^{p+1} (-1)^{m-1} \delta_{k j_m} \times$$

$$\times\, dx_s (V_1, \ldots, V_{m-1}, V_{m+1}, \ldots, V_{p+1}) =$$

$$= \sum_m (-1)^{m-1} D_{x_{j_m}} f\, dx_s (V_1, \ldots, V_{m-1}, V_{m+1}, \ldots, V_{p+1}).$$

С другой стороны, так как $[V_i, V_j] = 0$, то

$$d\theta(V_1, \ldots, V_{p+1}) =$$

$$= \sum_{m=1}^{p+1} (-1)^{m-1} V_m (f\, dx_s (V_1, \ldots, V_{m-1}, V_{m+1}, \ldots, V_{p+1})),$$

что, поскольку $dx_s (V_1, \ldots, V_{m-1}, V_{m+1}, \ldots, V_{p+1}) = \text{const}$, совпадает с

$$\sum_m (-1)^{m-1} D_{x_{j_m}} f\, dx_s (V_1, \ldots, V_{m-1}, V_{m+1}, \ldots, V_{p+1}).$$

Ч. Т. Д.

Задача 16. Выписать полностью инвариантное выражение для $d\theta$, когда θ является 1-формой и 2-формой. В последнем случае, используя кососимметричность, представить ее в виде суммы по циклическим подстановкам чисел 1, 2, 3.

Задача 17. Пусть U, V, W — постоянные векторные поля (все скобки — нули) на R^3 и X — векторное C^∞-поле. Установить соответствие между исчислением дифференциальных форм и обычным векторным анализом, чтобы получить следующие формулы.

Из инвариантной формулы для d:

$$\operatorname{grad} f \cdot U = Uf, \quad \operatorname{curl} X \cdot U \times V = U(X \cdot V) - V(X \cdot U),$$
$$(\operatorname{div} X)\, U \cdot V \times W = U(X \cdot V \times W) + V(X \cdot W \times U) + \\ + W(X \cdot U \times V).$$

(С помощью этих формул можно определять grad, curl, div.)

Из аксиомы (IV) для d:

$$\operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g,$$
$$\operatorname{curl}(fX) = (\operatorname{grad} f) \times X + f \operatorname{curl} X,$$
$$\operatorname{div}(fX) = (\operatorname{grad} f) \cdot X + f \operatorname{div} X,$$
$$\operatorname{div}(X \times Y) = (\operatorname{curl} X) \cdot Y - X \cdot \operatorname{curl} Y.$$

Из аксиомы (V) для d:

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{curl} X = 0.$$

4.7. Действие отображений

Пусть M, N — многообразия, а $\varphi : M \to N$ есть C^∞-отображение, тогда, как мы знаем, отображение φ посредством композиции преобразует функции на N в функции на M, а касательные к M — в касательные к N. Теперь мы определим отображение φ^* форм на N в формы на M, $\varphi^* : \theta \to \theta \circ d\varphi$, так что если θ есть p-форма на N, то

$$\varphi^*(\theta)(t_1, \ldots, t_p) = \theta(d\varphi t_1, \ldots, d\varphi t_p).$$

Заметим, что на пространстве 1-форм в некоторой точке отображением φ^* является обычное линейное сопряженное с отображением $d\varphi$.

Теорема 3. Отображение φ^* является гомоморфизмом грассмановой алгебры, коммутирующим с внешней производной.

Доказательство. То, что φ^* — гомоморфизм алгебры Грассмана, получается автоматически из определения умножения.

Для доказательства того, что φ^* коммутирует с d, отметим вначале, что и φ^* и d являются R-линейными отображениями, а также что это локальная проблема. Локально формы порождаются функциями и дифференциалами функций. Пользуясь тем, что φ^* — гомоморфизм, а d — антидифференцирование, ограничимся рассмотрением отдельных множителей слагаемых, т. е. функций и их дифференциалов. Но для произвольной функции f на N имеем

$$\varphi^* df = df \circ d\varphi = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^* f)$$

и

$$d(\varphi^* df) = d(d(f \circ \varphi)) = 0 = \varphi^*(0) = \varphi^*(d(df)).$$ Ч. Т. Д.

Пример. Пусть $\theta = u_2 du_1 + u_3 du_2 + u_1 du_3$ и отображение $\varphi: R^2 \to R^3$ задано формулой $\varphi = (\sin u_1 \cos u_2, \sin u_1 \sin u_2, \cos u_1)$; тогда

$$\begin{aligned}
\varphi^*\theta &= \sin u_1 \sin u_2 d(\sin u_1 \cos u_2) + \cos u_1 d(\sin u_1 \sin u_2) + \\
&+ \sin u_1 \cos u_2 d\cos u_1 = \\
&= (\sin u_1 \cos u_1 \sin u_2 \cos u_2 + \cos^2 u_1 \sin u_2 - \\
&- \sin^2 u_1 \cos u_2)\, du_1 + \\
&+ (-\sin^2 u_1 \sin^2 u_2 + \sin u_1 \cos u_1 \cos u_2)\, du_2.
\end{aligned}$$

Задача 18. Обозначим через $\mathscr{K}(M)$ совокупность всех C^∞-форм, определенных на открытых подмножествах M, через $\mathscr{K}^p(M)$ — совокупность p-форм класса C^∞; символ (M) мы будем иногда опускать.

Векторное поле X определяет линейную функцию $i(X): \mathscr{K} \to \mathscr{K}$, удовлетворяющую следующим условиям:

(а) $i(X): \mathscr{K}^p \to \mathscr{K}^{p-1}$, $p \geqslant 1$, $i(X)(\mathscr{K}^0) = 0$;

(б) $i(X)$ является антидифференцированием, т. е. если $\theta \in \mathscr{K}^p$, $\varphi \in \mathscr{K}^q$, то $i(X)(\theta\varphi) = (i(X)\theta)\varphi + (-1)^p \theta (i(X)\varphi)$;

(в) если $\theta \in \mathscr{K}^1$, то $i(X)\theta = \theta(X)$.

Показать, что существует единственная функция, удовлетворяющая условиям (а)—(в), и проверить формулу $i(X)\theta(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \theta(X, X_1, \ldots, X_{p-1})$, где $\theta \in \mathscr{K}^p$ и $X_1, \ldots, X_{p-1}$ — векторные поля.

Задача 19. Показать, что действие производной Ли L_X по полю X является дифференцированием на $\mathscr{K}$. Показать, что $i(X)d+di(X)$ является дифференцированием. Вывести отсюда формулу

$$L_X = i(X)d + di(X),$$

проверив ее для функций и их дифференциалов.

Задача 20. Пусть G — группа Ли, $X_1, \ldots, X_d$ — базис левоинвариантных векторных полей на G, $c_{ij}{}^k$ — константы (так называемые *структурные константы*), входящие в разложение $[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}{}^k X_k$. Определим 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_d$, сопряженные с $X_i : \omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ (константы). Доказать, что

(а) форма ω_i левоинвариантна, т. е. $L_g{}^*\omega_i = \omega_i$ для каждого $g \in G$;

(б) $d\omega_i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk}{}^i \omega_j \omega_k = \sum_{j<k} c_{jk}{}^i \omega_k \omega_j$. (Это так называемое уравнение Маурера — Картана.)

4.8. Теорема Фробениуса

Отображение, относящее каждому $m \in M$ некоторое k-мерное подпространство E_m в пространстве $G_m{}^1$, мы называем *k-мерным кораспределением* E на многообразии M. E является *C^∞-кораспределением*, если для любого $m \in M$ найдется окрестность, на которой определено k 1-форм класса C^∞, порождающих E в каждой точке этой окрестности. Подмногообразие N в M называется *интегральным подмногообразием кораспределения* E, если для каждого $n \in N$ множество линейных функций E_n служит аннулятором подпространства $dI(N_n)$, где $I : N \to M$ — отображение вложения. Кораспределение E *вполне интегрируемо*, если через каждую точку $m \in M$ проходит некоторое интегральное подмногообразие E. *Распределением, ассоциированным с* E, называется $(d-k)$-распределение D, у которого D_m является аннулятором E_m.

Лемма 7. Пусть W_m — идеал, порожденный E_m в G_m. Тогда $\omega \in W_m^p$ в том и только в том случае, если $\omega(t_1, \ldots, t_p)=0$ при любых $t_1, \ldots, t_p \in D_m$.

Доказательство. Если $\theta_1, \ldots, \theta_k$ — базис E_m, то для $\omega \in W_m^p$ имеем $\omega = \sum_i \varphi_i \theta_i$, $\varphi_i \in G_m^{p-1}$. Отсюда

$$\omega(t_1, \ldots, t_p) = \sum_i \varphi_i \theta_i (t_1, \ldots, t_p) =$$

$$= \sum_{i, j} (-1)^{p-j} \varphi_i (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_p) \theta_i (t_j) = 0,$$

поскольку t_j как элементы пространства D_m аннулируют E_m.

Обратно, пусть $\omega(t_1, \ldots, t_p)=0$ при любых $t_1, \ldots, t_p \in D_m$. Пусть $\theta_{k+1}, \ldots, \theta_d$ — дополнение системы $\theta_1, \ldots, \theta_k$ до базиса в G_m^1 и $e_1, \ldots, e_d$ — базис, сопряженный с $\theta_1, \ldots, \theta_d$. Тогда $e_{k+1}, \ldots, e_d$ порождают D_m, и если $\omega = \sum_{s \in P} a_s \theta_s$, то при $k < j_1 < \ldots < j_p$

$$0 = \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \sum_{s \in P} a_s \theta_s (e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = a_{j_1 \ldots j_p}.$$

Поэтому каждый член ω должен содержать θ_i для $i \leqslant k$, т. е. $\omega \in W_m^p$.

Теорема Фробениуса [79]. Пусть дано k-мерное C^∞-кораспределение E на M. Пусть W — функция, относящая каждому $m \in M$ идеал W_m, порожденный E_m в G_m. Тогда E вполне интегрируемо в том и только в том случае, если W инвариантно относительно действия внешней производной, т. е. $d(W) \subset W$.

Мы покажем, что эта теорема эквивалентна теореме 1.6, которая утверждает, что C^∞-распределение вполне интегрируемо в том и только в том случае, если оно инволютивно. Заметим сначала, что условие $d(W) \subset W$ эквивалентно утверждению, что для каждого $m \in M$ существует локальный базис 1-форм $\theta_1, \ldots, \theta_k$ в E, такой, что $d\theta_i \in W$.

Полная интегрируемость k-кораспределения E эквивалентна полной интегрируемости ассоциированного $(d-k)$-распределения D, которая эквивалентна инволютивности D, которая эквивалентна условию, что из $\theta_i(V_j)=0$ при $i=1, \ldots, k$; $j=1, 2$, следует $\theta_i([V_1, V_2])=0$, $i=1, \ldots, k$, которое эквивалентно условию, что из $\theta_i(V_j)=0$, $i=1, \ldots, k$; $j=1, 2$, следует $d\theta_i(V_1, V_2)=0$, $i=1, \ldots, k$ (теорема 2), которое эквивалентно $d\theta_i \in W$, $i=1, \ldots, k$ (лемма 7). Ч. Т. Д.

Задача 21. Вывести условие интегрируемости, данное в задаче 1.29, для 1-кораспределения, порожденного 1-формой $P du_1+Q du_2+R du_3$. (*Указание*: воспользоваться задачей 4.)

Задача 22. Пусть ω есть p-форма и $p \leqslant d-k$. Доказать, что ω тогда и только тогда принадлежит идеалу, порожденному линейно независимыми 1-формами $\theta_1, \ldots, \theta_k$, когда $\omega\theta_1 \ldots \theta_k=0$.

С другой стороны, если $p>d-k$, то ω всегда принадлежит идеалу, порожденному $\theta_1, \ldots, \theta_k$, так что W оказывается пространством всех форм, аннулируемых умножением на $\theta_1, \ldots, \theta_k$.

4.9. Векторнозначные формы и операции

Пусть V — векторное пространство над R, M — многообразие; *V-значной p-формой на M* называется отображение ω, которое переводит каждый набор $t_1, \ldots, t_p \in M_m$ в некоторый элемент $\omega(t_1, \ldots, t_p) \in V$, такой, что если f — произвольный элемент пространства, сопряженного с V, то $f \circ \omega$ является *(вещественной)* p-формой на M.

Примеры. (1) Если $V=R^d$, то V-значная p-форма — это просто d-набор p-форм $(\omega_1, \ldots, \omega_d) = (u_1 \circ \omega, \ldots, u_d \circ \omega)$.

(2) Если $V=\mathfrak{gl}(R^d)$, алгебра Ли $d \times d$-матриц, то V-значная p-форма — это матрица p-форм (ω_{ij}).

Если φ есть $\mathfrak{g}$-значная p-форма, ω есть $\mathfrak{g}$-значная q-форма, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то определена $\mathfrak{g}$-значная

$(p+q)$-форма $[\varphi, \omega]$:

$$[\varphi, \omega](t) = \sum_{\pi \in K} \operatorname{sgn}(\pi) [\varphi(t \circ \pi), \omega(t \circ \pi \circ A_p)],$$

где K — сечение подгруппы $S_p S'_q$ в S_{p+q}.

Заметим, что $[\varphi, \omega] = (-1)^{pq-1} [\omega, \varphi]$, так как при перестановке членов скобки появляется дополнительный множитель -1, помимо множителя $(-1)^{pq}$, возникающего из-за обращения порядка форм.

Если φ есть p-форма со значениями в пространстве линейных преобразований векторного пространства V и ω есть V-значная q-форма, то определена V-значная $(p+q)$-форма $\varphi\omega$:

$$\varphi\omega(t) = \sum_{\pi \in K} \operatorname{sgn}(\pi) \varphi(t \circ \pi) \omega(t \circ \pi \circ A_p),$$

где K — то же сечение.

Задача 23. Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Определим $\mathfrak{g}$-значную 1-форму ω на G вида $\omega(X) = X$ для каждого $X \in \mathfrak{g}$, т. е. если $x = X(g)$, то $\omega(x) = X$.

(а) Доказать, что форма ω левоинвариантна.

(б) Доказать, что $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]$.

(в) Если $X_1, \ldots, X_d$ — базис в $\mathfrak{g}$, то разложение $\omega(x) = \sum_i \omega_i(x) X_i$ определяет вещественные 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_d$. Доказать, что $\omega_1, \ldots, \omega_d$ совпадают с формами из задачи 20, так что формула (б) — это бескоординатная запись уравнений Маурера — Картана.

Задача 24. (а) Пусть φ, ω суть $\mathfrak{gl}(d, R)$-значные формы; определить произведение $\varphi\omega$ с помощью матричного умножения, а не скобочной операции, как указано выше.

(б) Показать, что $[\varphi, \varphi](X, Y) = 2[\varphi(X), \varphi(Y)] = 2\varphi\varphi(X, Y)$, когда φ является 1-формой.

4.10. Формы на комплексных многообразиях [15, 16, 33,93].

Пусть M — комплексное многообразие, тогда дифференциальные формы определяются в терминах алгебры Грассмана над комплексным полем, и операция J (задача 3.10) на вещественных касательных пространствах индуцирует биградуировку пространства форм. В силу задачи 3.10 имеются различные касательные пространства $\mathcal{M}_m$, $\mathcal{T}_m$ и $\mathcal{H}_m$. Так как $\mathcal{T}_m = \mathcal{M}_m + i\mathcal{M}_m$, то J можно продолжить до комплексного линейного эндоморфизма пространства $\mathcal{T}_m$, по-прежнему удовлетворяющего условию $J^2 = -I$. Отображение, сопряженное с J, продолжается до дифференцирования J^* комплексной алгебры Грассмана $G(\mathcal{T}_m^*)$.

Элемент $\omega \in G^{p+q}(\mathcal{T}_m^*)$ называется элементом *типа* (p, q), если $J^*\omega = (p-q)i\omega$.

Если m — переменная точка в M, то получаются *комплексные дифференциальные формы типа* (p, q). Их множество обозначается через $\mathcal{K}^{p,q}(M)$. Элементы из $\mathcal{K}^{p,0}$ называются *голоморфными* p-формами.

Задача 25. Для комплексной C^∞-функции f на M определить df и показать, что это комплексная дифференциальная 1-форма.

Задача 26. Пусть $(z_1, \ldots, z_d)$ — комплексная координатная система в точке m; показать, что dz_i, $d\bar{z}_i$ вместе с 1 порождают $G(\mathcal{T}_m^*)$. Выразить форму типа (p, q) в терминах этих образующих и показать, что

$$G^r(\mathcal{T}_m^*) = \sum_{p+q=r} G^{p,q}(\mathcal{T}_m^*).$$

Найти $\dim G^{p,q}(\mathcal{T}_m^*)$.

Задача 27. Показать, что $\omega \in \mathcal{K}^{p,0}$ тогда и только тогда, когда $\omega(X_1, \ldots, X_p) = 0$, если только $X_1 \in \overline{\mathcal{H}}$.

Задача 28. Показать, что $d = d' + d''$, где $d' : \mathcal{K}^{p,q} \to \mathcal{K}^{p+1,q}$ и $d'' : \mathcal{K}^{p,q} \to \mathcal{K}^{p,q+1}$. Проверить также, что $(d')^2 = 0 = (d'')^2$ и $d'd'' = -d''d'$, Задача 29. Показать, что на многообразии с почти комплексной структурой можно определить алгебры $\mathcal{K}^{p,q}$.

Задача 30. Для всякой почти комплексной структуры

$$d|_{\mathcal{K}^{0,1}} = d^{2,0} + d^{1,1} + d^{0,2},$$

где $d^{p,q} : \mathcal{K}^{0,1} \to \mathcal{K}^{p,q}$. Показать, что условие того, чтобы почти комплексная структура была комплексной (см. задачу 3.11), эквивалентно равенству $d^{2,0} = 0$ и, следовательно, утверждению задачи 28.

ГЛАВА 5

Связности

В этой главе на главном расслоении определяются связность, горизонтальный подъем кривой и параллельный перенос, вводятся форма кривизны и структурное уравнение, а также рассматриваются вопросы, связанные с существованием связностей, связностями на ассоциированных расслоениях и структурными уравнениями для горизонтальных форм; наконец, в серии задач развивается теория групп голономии [22, 32, 33, 51].

5.1. Определения и элементарные свойства

Понятие связности весьма удобно для описания некоторой дифференциальной геометрической структуры на многообразии; в частном случае, рассматриваемом в следующей главе, оно эквивалентно более привычному понятию параллельного переноса. Связности ассоциируются с главными расслоениями над многообразием, и большей частью мы будем рассматривать только связности на расслоении базисов. Однако многие фундаментальные свойства связностей имеют место на общем главном расслоении; их мы и выведем в настоящей главе.

Пусть P — пространство главного расслоения над M со структурной группой G и проекцией $\pi : P \to M$.

Пусть V есть $\dim(G)$-мерное распределение *вертикальных векторов* на P, т. е.

$$V_p = \{t \in P_p \mid d\pi t = 0\}, \qquad p \in P.$$

Напомним, что существует гомоморфизм $\lambda : \mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$, определенный правым действием G на P (§ 3.1): если $X \in \mathfrak{g}$, $p \in P$, то $(\lambda X)(p) = dp(X(e))$, где p рассматривается как вложение $p(g)=pg$ группы G в P. Элементы пространства $\bar{\mathfrak{g}}$ вертикальны, поскольку если $\bar{X}=\lambda X$, то

$$d\pi(\bar{X}(p))=d\pi\, dp(X(e))=0,$$

так как $\pi\circ p$ — постоянное отображение $G\to\pi(p)$. Далее, для всякого $t\in V_p$ найдется поле $\bar{X}\in\bar{\mathfrak{g}}$, такое, что $\bar{X}(p)=t$, так как p отображает G на $\pi^{-1}(\pi(p))$. Следовательно, элементы $\bar{\mathfrak{g}}$ порождают все вертикальное пространство в каждой точке; это показывает, что V — действительно распределение размерности, равной $\dim(\mathfrak{g})=$ $=\dim(G)$, а также что $V\in C^\infty$. В самом деле, если U — выделенная окрестность точки $\pi(p)$, F_U — ассоциированное отображение в G, то отображение $p: G\to\pi^{-1}(m)$ представляется в виде $p=(\pi\times F_U)^{-1}(m, L_{F_U(p)})$, откуда и получаются требуемые свойства (см. замечание в начале § 3.2).

Связность на главном расслоении (P, G, M) — это такое d-мерное распределение H на P, что

(I) $H\in C^\infty$,

(II) $H_p+V_p=P_p$ для всякого $p\in P$, т. е. H_p — линейное дополнение к V_p,

(III) $dR_g H_p=H_{pg}$ для любых $p\in P$, $g\in G$.

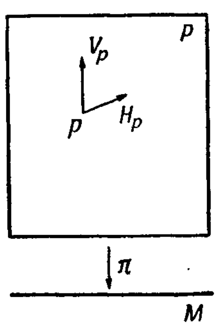


Рис. 16.

Всякое $t\in P_p$ допускает разложение $t=Vt+Ht$, где $Vt\in V_p$, $Ht\in H_p$. Если X — векторное поле, то $(VX)(p)=$ $=V(X(p))$, $(HX)(p)=H(X(p))$. Элементы пространства H_p называются *горизонтальными*.

Задача 1. Доказать, что $X \in C^\infty$ тогда и только тогда, когда VX и $HX \in C^\infty$.

Поскольку $d\pi|_{H_p}$ — взаимно однозначное отображение, то $d\pi: H_p \approx M_{\pi(p)}$ из соображений размерности. Поэтому каждому векторному полю X на M соответствует единственное векторное поле $\bar{X}$ на P, называемое *(горизонтальным) подъемом поля* X, для которого при любом $p \in P$ имеем $\bar{X}(p) \in H_p$ и $d\pi\bar{X}(p) = X(\pi(p))$. Из задачи 1 вытекает, что если $X \in C^\infty$, то $\bar{X} \in C^\infty$. Далее,

(а) $dR_g\bar{X} = \bar{X}$, $g \in G$,

(б) $\bar{X} + \bar{Y} = \overline{(X+Y)}$,

(в) $H[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]}$.

Все эти свойства очевидны.

Дадим теперь двойственную формулировку понятия связности.

1-*форма связности* H — это 1-форма φ на P со значениями в алгебре Ли, определенная следующим образом: если $p \in P$, $t \in P_p$, то $\varphi(t)$ равно такому $X \in \mathfrak{g}$, что $\bar{X}(p) = V(t)$.

Дифференциальная p-форма ω на P называется *вертикальной (горизонтальной)*, если она обращается в нуль, когда по крайней мере один из ее аргументов горизонтален (вертикален). Пусть значения ω принадлежат $\mathfrak{g}$; тогда эта форма называется *эквивариантной*, если $\omega \circ dR_g = \operatorname{Ad} g^{-1} \circ \omega$ для каждого $g \in G$.

Отметим, что определение вертикальной формы зависит от наличия связности, т. е. от понятия горизонтальных касательных, тогда как понятие горизонтальной формы от связности не зависит.

Лемма 1. 1-форма φ связности H обладает следующими свойствами:

(I) φ вертикальна,

(II) если $X \in \mathfrak{g}$, $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{g}}$, то $\varphi(\bar{X}(p)) = X$ при всех $p \in P$,

(III) φ эквивариантна,

(IV) $\varphi \in C^\infty$.

Доказательство. Свойства (I) и (II) тривиальны; (III) сразу же следует из условия 3.1 (б). Пусть X — векторное C^∞-поле на P; имеем

$$VX = \sum_i f_i \bar{X}_i,$$

где $\bar{X}_i \in \bar{\mathfrak{g}}$, а f_i — некоторые функции на P. Тогда $f_i \in C^\infty$ [95, предложение 1, стр. 119], откуда $\varphi(X) = \sum_i f_i X_i \in C^\infty$ и свойство (IV) доказано.

Свойства (II)—(IV) в следующем смысле характеризуют 1-формы связности:

Теорема 1. Если φ есть 1-форма на P со значениями в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условиям (II)—(IV), то существует единственная связность H на P, 1-формой которой является φ. Поэтому такие 1-формы находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на P.

Доказательство. Пусть $H_p = \{t \in P_p \mid \varphi(t) = 0\}$. Для $t \in P_p$ положим $Vt = \overline{\varphi(t)}(p)$, так что $t - Vt \in H_p$, что доказывает условие (II) определения связности. Далее, для всякого $g \in G$ имеем $\varphi(dR_g t) = \mathrm{Ad}\, g^{-1}\varphi(t) = 0$, если $t \in H_p$, откуда $dR_g t \in H_{pg}$. Поэтому $dR_g H_p \subset H_{pg}$, что доказывает условие (III). Далее, если X есть C^∞-векторное поле на P, то $VX = \overline{\varphi(X)} \in C^\infty$, так что $HX \in C^\infty$. Отсюда тривиально следует, что $H \in C^\infty$; этим окончательно установлено, что H — связность.

В силу теоремы 1, мы будем иногда называть форму φ связностью.

Задача 2. Пусть φ и ψ — формы связности на P и f есть C^∞-функция на M. Показать, что

(а) $(f \circ \pi)\varphi + (1 - f \circ \pi)\psi$ есть форма связности на P.

(б) Пусть $t \in P_p$; $t = t_1 + t_2$, $t = {}'t_1 + {}'t_2$ — разложения t на горизонтальные и вертикальные компоненты относительно связностей φ и ψ; найти соответствующее разложение относительно связности $(f \circ \pi)\varphi + (1 - f \circ \pi)\psi$. [*Указание*: $\varphi({}'t_1) = -\psi(t_1)$.] В частности, если $f = \mathrm{const}$, то это показывает, что связности на P образуют аффинное пространство.

5.2. Параллельный перенос

Если γ — ломаная C^∞-кривая в M, то *(горизонтальным) подъемом кривой* γ называется такая C^∞-кривая $\tilde{\gamma}$ в P, что (I) $\tilde{\gamma}$ горизонтальна, т. е. $\tilde{\gamma}_*$ горизонтальна, и (II) $\pi\circ\tilde{\gamma}=\gamma$. Термин *«ломаная»* мы употребляем в следующем смысле: γ непрерывна и кусочно принадлежит C^∞.

Теорема 2. Пусть γ — ломаная C^∞-кривая в M, $\gamma:[0,\ 1]\to M$. Пусть $p\in\pi^{-1}(\gamma(0))$. Тогда существует единственный подъем $\tilde{\gamma}$ кривой γ, такой, что $\tilde{\gamma}(0)=p$.

Доказательство. Можно предположить, что $\gamma\in C^\infty$, поскольку подъемы кусков кривой сцепляются по существу лишь одним способом.

Распространим γ до C^∞-отображения интервала $(-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)=I$ в M. Тогда, в силу задачи 3.6, множество $N=\{(r,\ q)\in I\times P\,|\,\gamma(r)=\pi(q)\}$ является пространством некоторого главного расслоения $(N,\ G,\ \pi',\ I)$. Отображение $\theta:N\to P$ вида $\theta(r,q)=q$ порождает связность на N, 1-формой которой служит $\tilde{\varphi}=\theta^*\varphi$ (см. задачу 3 ниже).

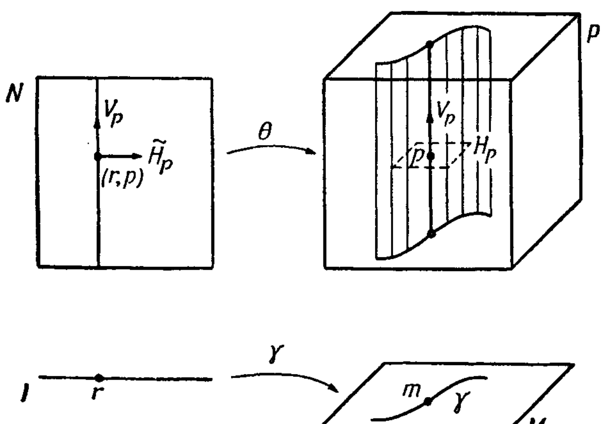


Рис. 17.

Пусть X — единственный горизонтальный подъем поля D на I в N, и пусть $\tilde{\mu}$ — интегральная кривая поля X, начинающаяся в $(0, p)$. Эта кривая определена на всем I, поскольку в противном случае ее можно было бы продолжить на окрестность верхнего предела интервала определения.

Определим $\tilde{\gamma}=\theta\circ\tilde{u}$. Очевидно, что $\tilde{\gamma}$ — подъем кривой γ, а так как $\varphi(\tilde{\gamma}_*)=\varphi(d\theta\circ\tilde{u}_*)=\tilde{\varphi}(X)=0$, то $\tilde{\gamma}$ — горизонтальная кривая.

Единственность $\tilde{\gamma}$ следует из того факта, что всякий подъем γ можно пропустить через N, разложив в композицию θ и подъема u, а последний, очевидно, единствен. Ч. Т. Д.

Следствие 1. Пусть H — связность на (P, G, M), γ — кривая в M, такая же, как в формулировке теоремы; тогда можно определить диффеоморфизм T_γ слоя $\pi^{-1}(\gamma(0))$ на слой $\pi^{-1}(\gamma(1))$, называемый *параллельным переносом из* $\gamma(0)$ *в* $\gamma(1)$ *вдоль* γ. Диффеоморфизм T_γ не зависит от параметризации γ и удовлетворяет равенству $T_\gamma\circ R_g=R_g\circ T_\gamma$ для всех $g\in G$. Далее, если γ и σ — две такие кривые с $\sigma(0)=\gamma(1)$, то $T_{\gamma\sigma}=T_\sigma\circ T_\gamma$.

Доказательство. Пусть $p\in\pi^{-1}(\gamma(0))$, $\tilde{\gamma}$ — подъем кривой γ, $\tilde{\gamma}(0)=p$; положим $T_\gamma(p)=\tilde{\gamma}(1)$. Воспользуемся тривиальным свойством правой инвариантности для доказательства того, что $T_\gamma\in C^\infty$ и T_γ — диффеоморфизм: если p_0 — произвольный фиксированный элемент слоя $\pi^{-1}(\gamma(0))$, $p_1=T_\gamma(p_0)$, то $T_\gamma(p_0g)=T_\gamma(p_0)g$, откуда

$$T_\gamma=p_1\circ p_0^{-1}:\pi^{-1}(\gamma(0))\to G\to\pi^{-1}(\gamma(1)).$$

Остальные свойства очевидны.

Заметим, что понятия параллельного переноса и связности эквивалентны, а именно, если в P задан параллельный перенос, удовлетворяющий условию правой инвариантности и некоторым условиям гладкости — точнее, касающиеся кривые порождают одинаковые инфинитезимальные преобразования, — то связность можно восстановить дифференцированием: пусть γ — соответствующая кривая в M, $p\in\pi^{-1}(\gamma(0))$ и пусть $d\pi t=\gamma_*(0)$, где $t\in P_p$. Тогда можно определить

$Ht = T_\gamma(p)_*(0)$, рассматривая $T_\gamma(p)$ как кривую $u \to T_{\gamma_u}(p)$, где γ_u — отрезок кривой γ от $\gamma(0)$ до $\gamma(t)$.

Следующий результат дает интересную интерпретацию формы связности.

Следствие 2. Пусть γ, $\tilde{\gamma}$ — такие же, как в теореме 2, τ — произвольный подъем кривой γ (не обязательно горизонтальный). Определим $\alpha : I \to G$, выбирая в качестве $\alpha(r)$ единственное решение уравнения $\tilde{\gamma}(r) = \tau(r)\alpha(r)$

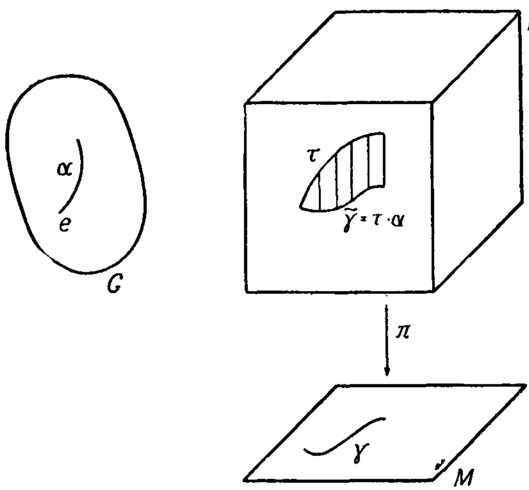


Рис. 18.

в группе G. Тогда $dR_{(\alpha(r)^{-1})}\alpha_*(r) = -\varphi(\tau_*(r))$. С помощью левого сдвига пространства мы отождествляем G_e и $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть отображение $I_r : G \to P$ определено равенством $I_r(g) = \tau(r)g$. Очевидно, что $I_r \circ L_g = \tau(r)g : G \to P$. По теореме 1.2, где отображением $P \times G \to P$ служит правое действие, имеем

$$\tilde{\gamma}_*(r) = dI_r\alpha_*(r) + dR_{\alpha(r)}\tau_*(r). \tag{1}$$

Далее

$$dI_r\alpha_*(r)=dI_r\,dL_{\alpha(r)}\,dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r))=$$
$$=d(\tau(r)\alpha(r))\bigl(dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r))\bigr)=$$
$$=\lambda\bigl(dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r))\bigr)(\tau(r)\alpha(r))$$ (§ 3.1 и определение λX).

Поэтому $\varphi(dI_r\alpha_*(r))=dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r))$, если вспомнить способ отождествления G_e и $\mathfrak{g}$.

С другой стороны, $\varphi(dR_{\alpha(r)}\tau_*(r))=\operatorname{Ad}\alpha(r)^{-1}\varphi(\tau_*(r))$, в силу эквивариантности φ. Поскольку подъем $\tilde{\gamma}$ горизонтален, применение φ к равенству (1) дает

$$dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r))=-\operatorname{Ad}\alpha(r)^{-1}\varphi(\tau_*(r))=$$
$$=-dL_{\alpha(r)^{-1}}\circ dR_{\alpha(r)}(\varphi(\tau_*(r))),$$

откуда

$$dR_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r))=-\varphi(\tau_*(r)).\qquad \text{Ч. Т. Д.}$$

Задача 3. Пусть $(f_B, f_G, f_M):(B, G, M)\to(B', G', M')$ — послойное отображение, причем $df_G:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ — изоморфизм «на». Показать, что любая связность на B' естественно индуцирует некоторую связность на B. В частности, это так, если (B, G', M) — расслоение над M, индуцированное некоторым $f: M\to M'$.

5.3. Форма кривизны и структурное уравнение

Всякая форма ω на P определяет форму

$$D\omega=d\omega\circ H,$$

где H — связность. Точнее, если ω есть p-форма, то $D\omega(t_1, \ldots, t_{p+1})=d\omega(Ht_1, \ldots, Ht_{p+1})$ для $t_1, \ldots, t_{p+1}\in P_e$. Отметим, что форма $D\omega$ всегда горизонтальна.

Формой кривизны Φ связности H с 1-формой φ называется горизонтальная $\mathfrak{g}$-значная 2-форма $D\varphi$. Легко проверить, что форма Φ эквивариантна.

Нам понадобится следующая лемма для вывода структурного уравнения Картана.

Лемма 2. Если $X \in \mathfrak{g}$ и V — горизонтальное векторное поле на P, то поле $[\bar{X}, V]$ горизонтально.

Доказательство. Теорему 3.1 нельзя применить непосредственно, поскольку горизонтальные векторные поля не образуют конечномерного векторного пространства. Однако существует обходный путь. Пусть V_i — правоинвариантное горизонтальное векторное поле, т. е. фактически горизонтальный подъем некоторого векторного поля на M. Тогда, полагая $\mathscr{L} = \{V_i\}$ в теореме 3.1, получим $[\bar{X}, V_i] = 0$. Далее, локально можно записать $V = \sum_i f_i V_i$, где V_i — горизонтальные и правоинвариантные поля, а f_i являются C^∞-функциями на P. Но тогда, в силу задачи 1.14, $[\bar{X}, V] = \sum_i (\bar{X} f_i) V_i$, и потому поле $[\bar{X}, V]$ горизонтально.

Задача 4. Применив оператор $L_{\bar{X}} = i(\bar{X})d + di(\bar{X})$ к форме связности φ, показать, что $\varphi([\bar{X}, V]) = 0$ для горизонтального векторного поля V, получив тем самым другое доказательство леммы. [*Указание*: однопараметрическая группа преобразований, ассоциированная с $\bar{X}$, — это группа e^{tX}, действующая справа. Поэтому поле $L_{\bar{X}}(\varphi)$ вертикально.]

Теорема 3. (*Структурное уравнение.*) Пусть φ есть 1-форма связности на P, Φ — ее форма кривизны; тогда

$$d\varphi = -\frac{1}{2}[\varphi, \varphi] + \Phi.$$

Отметим, что если G — группа матриц и $\mathfrak{g}$ отождествляется с пространством линейных преобразований, то $-\frac{1}{2}[\varphi, \varphi] = -\varphi^2$.

Доказательство. Покажем, что выписанные выше 2-формы, примененные к векторным полям X и Y на P, дают одинаковый результат. Поскольку эти формы линейны, то можно ограничиться случаями, когда каждое из X, Y принадлежит $\bar{\mathfrak{g}}$ или горизонтально.

(I) $X, Y \in \bar{\mathfrak{g}}$, тогда существуют $X', Y' \in \mathfrak{g}$, такие, что $\bar{X}' = X$, $\bar{Y}' = Y$ и, значит, $\varphi(X) = X'$, $\varphi(Y) = Y'$. Далее, по теореме 4.2

$$\begin{aligned} d\varphi(X, Y) &= X\varphi(Y) - Y\varphi(X) - \varphi([X, Y]) = \\ &= X(Y') - Y(X') - [X', Y'] = \\ &= -\frac{1}{2}[\varphi, \varphi](X, Y) = \\ &= -\frac{1}{2}[\varphi, \varphi](X, Y) + \Phi(X, Y), \end{aligned}$$

что и требовалось, поскольку Φ горизонтально. Заметим, что $X(Y') = 0$, поскольку Y' выступает как постоянная $\mathfrak{g}$-значная функция на P; аналогично $Y(X') = 0$.

(II) $X \in \bar{\mathfrak{g}}$, поле Y горизонтально. Пусть $X' \in \mathfrak{g}$ такое же, как в (I):

$$d\varphi(X, Y) = X\varphi(Y) - Y\varphi(X) - \varphi([X, Y]) = 0,$$

так как $\varphi(Y) = 0$, $\varphi(X)$ постоянно, а $[X, Y]$, в силу леммы, горизонтально. С другой стороны, Φ горизонтально, так что $\Phi(X, Y) = 0$, поскольку X вертикально, и $[\varphi, \varphi](X, Y) = 0$, ибо Y горизонтально.

(III) Оба поля X, Y горизонтальны. Имеем $\varphi(X) = 0$, $\varphi(Y) = 0$ и

$$\Phi(X, Y) = d\varphi(HX, HY) = d\varphi(X, Y),$$

что совпадает со структурным уравнением для данного случая. Ч. Т. Д.

Замечание. Сужение структурного уравнения на вертикальные векторы по существу дает уравнения Маурера — Картана. Другая интерпретация: в форме $d\varphi$ имеются только горизонтальная и вертикальная компоненты, но нет *смешанной компоненты*.

Теорема 4. (*Тождество Бьянки.*) Если Φ — форма кривизны связности на главном расслоении P, то

$$D\Phi = 0.$$

Доказательство. Из структурного уравнения имеем

$$D\Phi = D\,d\varphi - \frac{1}{2} D[\varphi, \varphi].$$

Далее, $Dd\varphi(X_1, X_2, X_3) = dd\varphi(HX_1, HX_2, HX_3) = 0$, так как $d^2 = 0$. Но и $D[\varphi, \varphi] = 0$, поскольку $[\varphi, \varphi]$ — вертикальная 2-форма, и потому аннулируется, когда один из ее аргументов равен горизонтальному вектору. Поэтому $D\Phi = 0$.

Теорема 5. Пусть H — связность на P, Φ — ее форма кривизны. Тогда $\Phi = 0$ в том и только в том случае, если H — инволютивное распределение, что, в силу теоремы 1.6, означает существование локальных горизонтальных сечений в P. В частности, если M односвязно, то, в силу обычных соображений монодромии, расслоение P должно быть тривиальным.

Связность, для которой $\Phi = 0$, называется *плоской*.

Доказательство. Если X, Y — горизонтальные векторные поля на P, то

$$\Phi(X, Y) = d\varphi(X, Y) = X\varphi(Y) - Y\varphi(X) - \varphi([X, Y]) = \\ = -\varphi([X, Y]);$$

поэтому инволютивность H, равносильная горизонтальности $[X, Y]$, равносильна условию $\Phi(X, Y) = -\varphi([X, Y]) = 0$, т. е. равенству $\Phi = 0$, как и утверждалось.

Задача 5. Пусть H — замкнутая подгруппа группы Ли G, порождающая главное расслоение $(G, H, G/H)$. Рассмотрим связность φ на этом расслоении. Показать, что $\varphi \circ dR_h = dR_h \circ \varphi$. Предположим теперь, что φ инвариантно относительно dL_g при любом $g \in G$. Показать, что

(а) φ определяет проекцию $\bar{\varphi}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ соответствующих алгебр Ли;

(б) если $\mathfrak{m} = \ker \bar{\varphi}$, то $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$;

(в) обратно, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ (прямая сумма) и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$, то проекция $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$ порождает инвариантную связность в вышеуказанном смысле. Следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между инвариантными связностями на $(G, H, G/H)$ и *редуктивными* дополнениями $\mathfrak{m}$ к $\mathfrak{h}$. Подгруппа H, допускающая такое инвариантное дополнение $\mathfrak{m}$, называется *редуктивной в* G (этот термин связан с тем, что сужение присоединенного представления группы G на подгруппу H приводится к сумме присоединенного представления H и представления H на пространстве $\mathfrak{m}$ посредством Ad_G, по крайней мере когда H связно);

(г) показать, что форму кривизны связности φ можно рассматривать заданной на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$; вывести соответствующую формулу.

5.4. Существование связностей. Связности на ассоциированных расслоениях

Существование связностей. Имеется много C^∞-связностей. В гл. 7 будет показано, что на $B(M)$ имеются римановы связности. Здесь же мы установим, что всякое главное расслоение (P, G, M), где M паракомпактно, обладает связностью.

Пусть $\{U_i\}$ — покрытие M, причем $\pi^{-1}(U_i)$ тривиально, f_i есть C^∞-разложение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$, φ_i — плоская связность на $\pi^{-1}(U_i)$, и пусть $\varphi = \sum (f_i \circ \pi)\varphi_i$. Тогда φ — (не обязательно плоская) форма связности на P.

Задача 6. Проверить, что φ — форма связности.

Замечание. Если (P, G, π, M) — комплексное аналитическое главное расслоение над комплексным многообразием M, то, обладая, конечно, C^∞-связностями, оно, вообще говоря, не допускает комплексной аналитической связности. Необходимое условие в одном частном случае приведено в работе [3].

Все же вещественные аналитические многообразия допускают аналитические связности, однако доказательство этого факта значительно труднее (см. замечание, следующее за теоремой 7.2).

Ассоциированные расслоения. Пусть (P, G, M) — главное расслоение со связностью H, и пусть (B, G, F, M) — ассоциированное расслоение со слоем F (см. § 3.3). Тогда H в некотором смысле индуцирует «связность» на B, точнее, такое распределение H' на B, которое в каждой точке дополнительно к вертикальному касательному пространству. Далее, существует параллельный перенос слоев расслоения B, порождаемый, как и прежде, горизонтальными подъемами кривых.

Параллельный перенос. Пусть γ — ломаная C^∞-кривая в M, $b \in \pi'^{-1}(\gamma(0))$. Определим подъем $\bar{\gamma}$ кривой γ в B, горизонтальный в следующем смысле. Пусть $f \in F$ и $p \in P$ таковы, что $\pi(p) = \gamma(0)$ и $pf = b$; здесь p — отображение, определенное в § 3.3. По теореме 2, существует горизонтальный подъем $\tilde{\gamma}$ кривой γ в P, такой, что $\tilde{\gamma}(0) = p$. Определим теперь $\bar{\gamma}$, положив $\bar{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t) f$. Тогда *параллельный перенос* $\bar{T}_\gamma$ вдоль γ из $\pi'^{-1}(\gamma(0))$ в $\pi'^{-1}(\gamma(1))$ определяется так же, как в P. Отсюда $\bar{T}_\gamma = T_\gamma(p) \circ p^{-1}$, так что параллельный перенос является диффеоморфизмом.

Распределение H'. Пусть $b \in B$, $p \in P$ таковы, что $\pi'(b) = \pi(p)$. Мы можем рассматривать P_p как подпространство пространства $(P \times F)_{(p, f)}$, где $f \in F$ таково, что $pf = b$. Пусть $\lambda : P \times F \to B$ — естественное отображение (§ 3.3), и пусть $H'_b = d\lambda(H_p)$. Это определение не зависит от p, в силу правой инвариантности H; в то же время ясно, что определенный выше подъем горизонтален относительно H' — нужно только вспомнить определение отображения

$$p : F - \pi'^{-1}(\pi(p)).$$

Задача 7. Пусть φ, ψ — формы связностей H, K; H', K' — соответствующие распределения на B. Показать, что если $s, t \in B_b$, $H's = s$, $K't = t$ и $d\pi'(s) = d\pi'(t)$, то $rs + (1 - r)t$ является распределением на B, отвечающим связности $r\varphi + (1 - r)\psi$.

Задача 8. Определить все связности на $T(R)$, касательном расслоении многообразия R.

Задача 9. Показать, что на ассоциированных расслоениях существуют горизонтальные распределения, не являющиеся связностями. [*Указание*: взять $T(R)\approx R^2$ и определить распределение с наклоном e^y.]

5.5. Структурные уравнения для горизонтальных форм

Докажем вначале основную лемму.

Пусть G — группа Ли диффеоморфизмов многообразия M, $G\times M\to M$, и φ — некоторое представление группы G невырожденными линейными преобразованиями векторного пространства V. Тогда существует ассоциированное представление $\tilde{\varphi}$ алгебры $\mathfrak{g}$ линейными преобразованиями пространства V, которое можно определить следующим образом: если $v\in V$, $X\in\mathfrak{g}$, то $\tilde{\varphi}(X)v=X(e)v$. Это определение имеет смысл, поскольку v можно рассматривать как векторнозначную функцию на G, а именно $v(g)=\varphi(g)v$, и потому v преобразуется в вектор под действием дифференцирования $X(e)$ (см. § 1.4, 2.2 и 2.6).

Лемма 3. Пусть $X\in\mathfrak{g}$, ω есть V-значная p-форма и $Y_1, \ldots, Y_p$ — инвариантные векторные поля на M.

(I) Если ω удовлетворяет условию $\omega\circ dg=\varphi(g)\omega$ при всех $g\in G$, то

$$(\tilde{\varphi}X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p)=(\lambda X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p),$$

где λX — векторное поле на M, определенное в § 3.1.

(II) Если ω удовлетворяет условию $\omega\circ dg=\varphi(g^{-1})\omega$ при всех $g\in G$, то

$$-(\tilde{\varphi}X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p)=(\lambda X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p).$$

Доказательство. Докажем (II). Доказательство (I) аналогично. Если $f\in M$, то $\omega(Y_1, \ldots, Y_p)\circ f$ есть V-значная функция на G и в действительности

$$\omega(Y_1, \ldots, Y_p)\circ f(g)=\omega(Y_1(gf), \ldots, Y_p(gf))=$$
$$=\omega(dgY_1(f), \ldots, dgY_p(f))=\varphi(g^{-1})\omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f))=$$
$$=\omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f))\psi(g),$$

где $\psi(g)=g^{-1}$, поскольку Y_i инвариантно, а ω эквивариантно относительно представления φ. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
(\lambda X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p)(f) &= (\lambda X)(f)(\omega(Y_1, \ldots, Y_p)) = \\
&= dfX(e)(\omega(Y_1, \ldots, Y_p)) \qquad (3.1)\\
&= X(e)(\omega(Y_1, \ldots, Y_p)\circ f) = \\
&= X(e)(\omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f))\circ\psi) = \\
&= d\psi X(e)(\omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f))) = \\
&= -X(e)(\omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f))) \\
&\qquad\qquad (\text{лемма } 2.1)\\
&= -\tilde{\varphi}(X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p)(f),
\end{aligned}
$$

последний шаг следует из определения $\tilde{\varphi}$. Это и дает требуемый результат.

Применим эту лемму к главному расслоению (P, G, M), где G действует на P справа.

Теорема 6 Пусть φ есть 1-форма связности на P, и ω есть $\mathfrak{g}$-значная горизонтальная эквивариантная p-форма на P. Тогда ω удовлетворяет структурному уравнению

$$d\omega = -[\varphi, \omega]+D\omega.$$

Доказательство. Докажем это, применив обе части равенства к $p+1$ векторным полям $Y_1, \ldots, Y_{p+1}$, принадлежащим некоторому семейству, локально порождающему касательное пространство к P. В это семейство войдут прежде всего векторные поля $\{\lambda X\}$, $X\in\mathfrak{g}$, порождающие вертикальное касательное пространство. Остальные векторные поля можно подбирать различными способами. Рассмотрим несколько случаев.

(I) *Ни одно Y_i не вертикально.* Тогда можно предположить, что все Y_i горизонтальны и, значит, $[\varphi, \omega](Y_1, \ldots, Y_{p+1})=0$, так как φ вертикально. При этом $HY_i=Y_i$, откуда $D\omega(Y_1, \ldots, Y_{p+1})=d\omega(Y_1, \ldots, Y_{p+1})$, и теорема в данном случае доказана.

(II) *Одно Y_i вертикально.* Предположим, что $Y_{p+1}=$ $=\lambda X$. Можно выбрать $Y_1, \ldots, Y_p$ так, чтобы они были правоинвариантными, и так, чтобы $[Y_i, \lambda X]=0$. Чтобы осуществить это в окрестности точки $f \in P$, выделим координатную систему в точке f, порожденную локальной структурой произведения на P. Теперь достаточно взять поля частных производных по переменным, соответствующим M, поскольку эти поля, очевидно, правоинвариантны и надлежащим образом коммутируют с λX, ибо λX зависит только от остальных координат.

Далее, $H(\lambda X)=0$ влечет $D\omega(Y_1, \ldots, Y_{p+1})=0$. Кроме того, из теоремы 4.2 следует, что

$$d\omega(Y_1, \ldots, Y_{p+1})=$$
$$=\sum_i (-1)^{i-1} Y_i \omega(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_{p+1})+$$
$$+\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots$$
$$\ldots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \ldots, Y_{p+1})=$$
$$=(-1)^p Y_{p+1}\omega(Y_1, \ldots, Y_p), \quad \text{ибо } \omega \text{ горизонтально},$$
$$=(-1)^p (\lambda X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p)=(-1)^{p+1} \operatorname{ad} X\omega(Y_1, \ldots, Y_p),$$

в силу леммы при $\varphi=\mathrm{Ad}$ и § 2.6, так как ω эквивариантно,

$$=(-1)^{p+1}[X, \omega(Y_1, \ldots, Y_p)]=$$
$$=(-1)^{p+1}[\varphi(\lambda X), \omega(Y_1, \ldots, Y_p)]=$$
$$=-[\varphi, \omega](Y_1, \ldots, Y_p, Y_{p+1}),$$

в силу § 4.9, а также горизонтальности ω. Это то, что требовалось доказать.

(III) *Два или более Y_i вертикальны.* Из того, что ω горизонтально, ясно, что все обращается в нуль. Ч. Т. Д.

Следствие. Если Φ — форма кривизны, ассоциированная с φ, то

$$d\Phi=-[\varphi, \Phi].$$

Доказательство. Φ горизонтальна и эквивариантна, поэтому результат вытекает из теоремы 6 и тождества Бьянки.

Лемма 3 не раз пригодится нам в дальнейшем.

5.6. Голономия [2, 5, 38, 51, 62, 70]

Материал этого параграфа излагается в виде серии задач.

Пусть (P, G, π, M) — главное расслоение со связностью φ. Пусть $p \in P$, определим $K_p \subset G$, полагая $K_p = \{g \in G \mid pg$ — параллельный перенос элемента $p\}$.

Задача 10. K_p — подгруппа в G, так называемая *подгруппа голономии* связности φ в точке p.

Задача 11. Если $p' \in P$ — параллельный перенос элемента p, то $K_p = K_{p'}$.

Задача 12. Если $p' = pg$, $g \in G$, то $K_{p'} = K_{pg} = g^{-1}K_p g$. (Следовательно, *группа голономии* связности φ определена с точностью до изоморфизма.)

Задача 13. Пусть $K_{p0} = \{g \in K_p \mid pg$ — параллельный перенос элемента p вдоль гомотопически тривиальной кривой$\}$. Показать, что K_{p0} — линейно связная нормальная подгруппа группы K_p и, следовательно, линейно связная подгруппа группы G; K_{p0} называется *ограничённой группой голономии* связности φ в точке p. При этих условиях, в силу теоремы Ямабе [96], группа K_{p0} — подгруппа Ли в G.

Задача 14. Имеется естественный гомоморфизм фундаментальной группы многообразия M с базисной точкой $\pi(p)$ на факторгруппу K_p/K_{p0}.

Задача 15. Если M односвязно, то $K_{p0} = K_p$. Например, если $M = R$, то $K_p = \{1\}$, так как всякая связность интегрируема.

Известно, что K_{p0} является компонентой связности группы K_p [51], откуда K_p — группа Ли. Пусть $P'_p = \{p' \in P \mid p'$ — параллельный перенос элемента $p\}$.

Задача 16. Пусть $(P'_p, K_p, M, \pi|_{P'_p})$ — главное расслоение, и включение $i_p : P'_p \to P$ приводит группу G

к подгруппе K_p. Кроме того, $i_p^*(\varphi)$ — форма связности на P'_p.

Задача 17. Если G можно привести к подгруппе K с помощью такого послойного отображения $i: P' \to P$, что $i^*(\varphi)$ является связностью на (P', K, M), то $K_p \subset K$ при любом $p \in P'$.

Задача 18. Если Φ — форма кривизны связности φ, то для каждого $p \in P$ множество $\Phi(P_p, P_p)$ содержится в алгебре Ли $\mathfrak{k}_p$ группы K_p. (Амброз и Зингер [2] доказали больше, а именно, что если $V = \{\Phi(P_p, P_p) \mid p$ — параллельный перенос фиксированного $p_0 \in P\}$, то алгебра Ли, порожденная множеством V, есть $\mathfrak{k}_{p_0}$. Позднее было показано [56], что V линейно порождает $\mathfrak{k}_{p_0}$.

Задача 19. Всякая дискретная подгруппа группы положительных вещественных чисел реализуется как группа голономии некоторой связности на расслоении базисов $B(S^1)$ окружности, и никакая другая подгруппа не может быть группой голономии.

Задача 20. Если φ — связность на (S^{2d+1}, S^1, CP^d), то группа голономии в каждой точке есть S^1.

Задача 21. Если φ — связность на (S^{4d+3}, S^3, QP^d), то группой голономии служит либо S^3, либо S^1.

В этих задачах требуется предварительно показать, что любые две гомотопные ломаные C^∞-петли можно соединить гомотопией ломаных C^∞-петель и что всякий гомотопический класс петель содержит ломаную C^∞-петлю.

ГЛАВА 6

Аффинные связности

На расслоении базисов по связности определяется дополнительная структура, включающая форму кручения, базисные векторные поля, преобразования кручения и кривизны, а также геодезические. Выводится дополнительное структурное уравнение, рассматриваются формы разности, в частности в их связи с кручением и конфигурацией геодезических. Определяются экспоненциальное отображение, полнота, нормальные координаты. Глава завершается рассмотрением ковариантного дифференцирования и классических определений вышеуказанных понятий [22, 32, 33, 51, 80].

6.1. Определения

Пусть M — многообразие, $B(M)$ — его расслоение базисов. Связность на $B(M)$ называется *аффинной связностью.* Поскольку всякую связность на подрасслоении расслоения $B(M)$ можно продолжить до аффинной связности с помощью правого действия группы $GL(d, R)$, то такая связность также называется аффинной связностью.

Параллельный перенос в расслоении $B(M)$, заданный аффинной связностью, порождает *параллельный перенос в касательном расслоении*, или *параллельный перенос касательных вдоль кривых.* Так как касательное расслоение $T(M)$ ассоциировано с $B(M)$, то это свойство можно было бы вывести из § 5.4, однако в данном случае имеется достаточно простое явное определение.

Если γ — кривая в M и $t \in M_m$, $m = \gamma(0)$, то параллельный перенос касательной t вдоль γ в точку $n = \gamma(u)$ происходит следующим образом: пусть $\bar{\gamma}$ — единственный горизонтальный подъем кривой γ, проходящий через $b \in B(M)$, где $\pi(b) = m$. Тогда если $\bar{\gamma}(s) = (\gamma(s),$

$e_1(s), \ldots, e_d(s))$ и $t = \sum_i a_i e_i(0)$, то $\sum a_i e_i(u)$ является, по определению, параллельным переносом t. Легко проверить, в силу инвариантности связности относительно

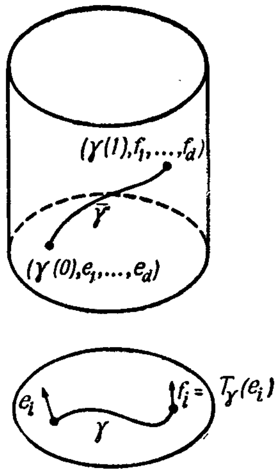


Рис. 19.

правого действия, что это преобразование не зависит от выбора b над m.

6.1.1. Формы смещения

На $B(M)$ всегда определены некоторые горизонтальные 1-формы, не зависящие ни от какой связности на этом расслоении. Определим *1-формы смещения* ω_i следующим образом. Пусть $t \in B(M)_b$, где $b = (m, e_1, \ldots, e_d)$. Тогда

$$d\pi t = \sum \omega_i(t) e_i.$$

Иначе, эти ω_i можно рассматривать как одну R^d-значную 1-форму ω вида

$$\omega(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_d(t)).$$

Лемма 1. Форма смещения удовлетворяет следующим условиям:

(I) $\omega \in C^\infty$,

(II) ω горизонтальна,

(III) ω *эквивариантна*, т. е. для каждого $g \in Gl(d, R)$

$$R_g^*(\omega) = \omega \circ dR_g = g^{-1} \circ \omega,$$

причем в правой части g считается действующим слева в R^d.

Доказательство (II) очевидно. Для доказательства (III) возьмем

$$t \in B(M)_b, \quad b = (m, e_1, \ldots, e_d), \quad d\pi t = \sum a_i e_i.$$

Имеем

$$dR_g t \in B(M)_{bg}, \quad bg = \left(m, \sum_i g_{i1} e_i, \ldots, \sum_i g_{id} e_i\right)$$

Далее,

$$d\pi t = \sum_{i, j, k} (g_{ij}^{-1} a_j)(g_{ki} e_k),$$

так что

$$\omega_i(dR_g t) = \sum g_{ij}^{-1} a_j.$$

Отсюда $\omega(dR_g t) = g^{-1}\omega(t)$, как и утверждалось.

Доказательство свойства (I) прямое. Пусть y_i, y_{jk} — координаты произведения на координатной окрестности в $B(M)$ (§ 3.2). Нам нужно показать, что $\omega(D_{y_{kj}})$ и $\omega(D_{y_i})$ принадлежат C^∞. В силу (II), $\omega(D_{y_{jk}}) = 0$, поэтому надо рассмотреть лишь $\omega(D_{y_i})$. Но

$$d\pi D_{y_i}(b) = \sum_j y_{ji}^{-1}(b) e_j \quad \text{(задача 3.4)},$$

где $b = (m, e_1, \ldots, e_d)$. Следовательно,

$$\omega(D_{y_i}) = (y_{1i}^{-1}, \ldots, y_{di}^{-1}) \in C^\infty. \quad \text{Ч. Т. Д.}$$

6.1.2. Фундаментальные и базисные векторные поля

Векторное поле $\overline{X}$ на $B(M)$ называется *фундаментальным*, если $\overline{X} \in \lambda(\mathfrak{gl}(d, R))$, т. е. если существует $X \in \mathfrak{gl}(d, R)$, такое, что $\overline{X} = \lambda X$ (§ 3.1). В частности, фундаментальное векторное поле, соответствующее $X_{ij} \in \mathfrak{gl}(d, R)$, где X_{ij} — матрица с 1 на (i, j)-м месте и 0 на остальных местах, обозначается через E_{ij}.

В следующей лемме рассматриваются свойства фундаментального векторного поля.

Лемма 2. Если $\overline{X}$ — фундаментальное векторное поле на $B(M)$, то

(I) $\overline{X} \in C^{\infty}$,

(II) $\overline{X}$ вертикально,

(III) если $\overline{X} = \lambda X$, то

$$dR_g \overline{X} = \lambda(\mathrm{Ad}\, g^{-1} X) \qquad [3.1\,(6)]$$

для $g \in Gl(d, R)$.

Пусть H — некоторая связность на $B(M)$, $x \in R^d$, $b \in B(M)$. Тогда существует единственный горизонтальный касательный вектор $E(x)(b)$ в точке b, такой, что $\omega(E(x)(b)) = x$, так как $d\pi$ является изоморфизмом на H_b. Векторное поле на $B(M)$, значение которого в точке b есть $E(x)(b)$, называется *базисным векторным полем* и обозначается через $E(x)$.

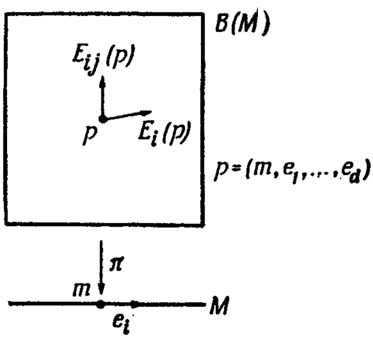


Рис. 20.

В частности, если $\delta_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{di}) \in R^d$, то имеются базисные векторные поля $E_i = E(\delta_i)$, порождающие базис горизонтального касательного пространства в каждой точке пространства $B(M)$. Эти $E(x)$ не являются горизонтальными подъемами каких-нибудь векторных полей на пространстве M, поскольку они не правоинвариантны ввиду утверждения (III) следующей леммы:

Лемма 3. Пусть $E(x)$ — базисное векторное поле на $B(M)$. Тогда

(I) $E(x) \in C^\infty$,

(II) $E(x)$ горизонтально (по определению),

(III) $dR_g E(x) = E(g^{-1}x)$

для $g \in Gl(d, R)$; здесь g считается действующим слева на R^d, как в лемме 1.

Доказательство. Утверждения (I) и (III) следуют из леммы 1 и определения $\omega(E(x)) = x$.

Заметим, что векторные поля E_i, E_{jk} определяют *параллелизацию* расслоения $B(M)$, т. е. для каждого $b \in B(M)$ векторы $E_i(b)$, $E_{jk}(b)$ образуют базис в $B(M)_b$. Далее, эти поля двойственны к 1-формам ω_i, φ_{jk}, где φ_{jk} есть 1-форма, являющаяся (j, k)-элементом матричной 1-формы связности $\varphi(t)$. Заметим, что E_{jk} и ω_i не зависят от связности, но присущи самому расслоению базисов. Напротив, E_i и φ_{jk} действительно зависят от связности, и фактически сама связность определяется заданием либо $\{E_i\}$, либо $\{\varphi_{jk}\}$. Для φ_{jk} это видно из теоремы 5.1. Далее, если E_i — это d линейно независимых не обращающихся в 0 векторных полей на $B(M)$, удовлетворяющих равенствам $\omega(E_i) = \delta_i$, то распределение H, заданное условием:

«H_b натянуто на $\{E_i(b)\}$»,

очевидно, является связностью на $B(M)$ с базисными векторными полями E_i.

6.1.3. Другое определение формы смещения

Иногда каждое $b \in B(M)$, $b = (m, e_1, \dots, e_d)$, удобно рассматривать как изоморфизм пространства R^d на M_m, полагая

$$b(x) = \sum x_i e_i.$$

Это соответствует тому, что $T(M)$, касательное расслоение к M, ассоциировано с $B(M)$ относительно левого действия группы $Gl(d, R)$ на R^d, так что $b(gx) = bg(x)$ для $g \in G$ (см. § 3.3).

Лемма 4. Пусть $b \in B(M)$, $t \in B(M)_b$, тогда

$$\omega(t) = b^{-1}(d\pi t),$$

и эту формулу можно использовать для определения ω.
Далее, если $x \in R^d$, то

$$E(x)(b) = \left(d\pi|_{H_b}\right)^{-1}(bx).$$

Доказательства этих утверждений очевидны, а преимущество использования их в качестве определений заключается в том, что они дают более непосредственное описание этих понятий, а также действий над ними. Например, свойство (III) леммы 1 можно доказать следующим образом. Отображение $bg: R^d \xrightarrow{g} R^d \xrightarrow{b} M_m$ обладает обратным

$$(bg)^{-1} = g^{-1}b^{-1}: M_m \xrightarrow{b^{-1}} R^d \xrightarrow{g^{-1}} R^d,$$

и поэтому

$$\omega(dR_g t) = (bg)^{-1}(d\pi t) = g^{-1}\left(b^{-1}(d\pi t)\right) = g^{-1}\omega(t).$$

6.1.4. Кручение

Формой кручения Ω аффинной связности H на $B(M)$ называется R^d-значная 2-форма

$$\Omega = D\omega = d\omega \circ H.$$

(Ср. с формой кривизны.) Легко проверить, что Ω — горизонтальная C^∞-форма, являющаяся эквивариантной, т. е.

$$\Omega \circ dR_g = g^{-1} \circ \Omega.$$

Свяжем теперь формы кривизны и кручения с базисными векторными полями данной связности.

Лемма 5. Пусть $x, y \in R^d$. Тогда

$$[E(x), E(y)] = -\lambda\Phi(E(x), E(y)) - E(\Omega(E(x), E(y))),$$

т. е. кривизна и кручение оказываются вертикальной и горизонтальной составляющими скобки двух базисных векторных полей.

Доказательство. Покажем, что ω и φ, примененные к обеим частям равенства, дают одну и ту же функцию; этого достаточно, поскольку ω и φ — параллелизующие формы, т. е. двойственны к множеству параллелизующих векторных полей. Вычисление правой части нетрудно, поскольку λX вертикально, а $E(z)$ горизонтально:

$$\begin{aligned} \varphi\ (\text{правая часть}) &= -\varphi(\lambda\Phi(E(x),\ E(y))) = \\ &= -\Phi(E(x),\ E(y)), \\ \omega\ (\text{правая часть}) &= -\omega(E(\Omega(E(x),\ E(y)))) = \\ &= -\Omega(E(x),\ E(y)). \end{aligned}$$

Чтобы применить φ и ω к левой части, воспользуемся инвариантными формулами для внешних производных $d\varphi$, $d\omega$ (см. § 4.6):

$$\begin{aligned} -\varphi\ (\text{левая часть}) &= -\varphi([E(x),\ E(y)]) = \\ &= E(x)\varphi(E(y)) - E(y)\varphi(E(x)) - \varphi([E(x),\ E(y)]) = \\ &= d\varphi(E(x),\ E(y)) = d\varphi(HE(x),\ HE(y)) = \\ &= D\varphi(E(x),\ E(y)) = \Phi(E(x),\ E(y)). \end{aligned}$$

Аналогично

$$-\omega\ (\text{левая часть}) = d\omega(E(x),\ E(y)) = \Omega(E(x),\ E(y)).$$

Мы воспользовались тем, что $\varphi(E(y)) = \varphi(E(x)) = 0 = \mathrm{const}$ и $\omega(E(x)) = x = \mathrm{const}$, $\omega(E(y)) = y = \mathrm{const}$, откуда их производные по направлениям $E(y)$ и $E(x)$ равны 0. Ч. Т. Д.

Теорема 1. Пусть φ — форма связности на $B(M)$. Тогда формы кривизны и кручения связности φ равны нулю в том и только в том случае, если M удовлетворяет следующему условию:

в каждой точке $m \in M$ существует такая координатная система $(x_1, \ldots, x_d)$ с областью определения U, что образ сечения $\chi: U \to B(M)$, определенного выражением

$$\chi(n) = (n,\ D_{x_1}(n),\ \ldots,\ D_{x_d}(n)),$$

горизонтален.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$H(d\chi D_{x_i}(n)) = E_i(\chi(n)).$$

Поэтому если образ $\chi(U)$ горизонтален, то на нем, а, следовательно, по эквивариантности и везде выполняется равенство $[E_i, E_j]=0$, и поэтому, в силу леммы, кривизна и кручение равны нулю.

Обратно, если эти формы обращаются в нуль, то, по теореме 5.5, существует горизонтальное многообразие N, и $E_1, \ldots, E_d$ — векторные поля с тривиальными скобками. Снося их на M, найдем с помощью теоремы 1.5, что на M имеется координатная система $(x_1, \ldots, x_d)$, для которой

$$D_{x_i} = d\pi E_i|_N.$$

Это и есть требуемая координатная система.

Задача 1. Равенство кручения нулю инвариантно относительно комбинаций связностей. Используя доказательство существования связности из гл. 5, показать, что всякое паракомпактное многообразие обладает аффинной связностью с нулевым кручением.

6.1.5. Преобразования кривизны и кручения

Формы кривизны и кручения порождают тензоры на M, которые можно рассматривать в общем контексте тензорного исчисления на M, однако мы предпочитаем прямой подход в терминах линейных преобразований на касательных пространствах.

Точке $m \in M$ и паре $s, t \in M_m$ поставим в соответствие линейное преобразование $R_{st}: M_m \to M_m$, называемое *преобразованием кривизны*: пусть $b \in B(M)$, $\pi(b)=m$; $\bar{t}, \bar{s} \in B(M)_b$, $d\pi(\bar{t})=t$, $d\pi(\bar{s})=s$. В обозначениях п. 6.1.3 определим

$$R_{st}(u) = -b\Phi(\bar{s}, \bar{t})b^{-1}(u)$$

для любого $u \in M_m$.

В силу горизонтальности и эквивариантности Φ, легко проверить, что наше определение не зависит от допущенного произвола в выборе b, $\bar{s}$ и $\bar{t}$.

Преобразование R_{st} можно также определить в терминах матриц. Пусть $b=(m, e_1, \ldots, e_d)$, а $\bar{s}$, $\bar{t}$ — такие же, как и выше. Тогда R_{st} — линейное преобразование M_m, матрица которого относительно базиса $e_1, \ldots, e_d$ есть $-\Phi(\bar{s}, \bar{t})$. Например, $R_{st}e_j = -\sum_i \Phi_{ij}(\bar{s}, \bar{t})\, e_i$.

Пусть X, Y, Z — векторные поля на M; обозначим через $R_{XY}Z$ векторное поле, удовлетворяющее равенству

$$R_{XY}Z(m) = R_{X(m)Y(m)}Z(m).$$

Каждой точке $m \in M$ и паре s, $t \in M_m$ сопоставим касательную $T_{st} \in M_m$, называемую *переносом кручения*. Пусть $b \in B(M)$, $\bar{s}$, $\bar{t} \in B(M)_b$ — такие же, как в определении преобразования кривизны. Положим

$$T_{st} = -b\Omega(\bar{s}, \bar{t}).$$

Доказательство корректности определения T_{st} аналогично соответствующему доказательству для R_{st}. Так же, как и выше, по векторным полям X и Y строится векторное поле T_{XY}.

6.1.6. Геодезические

Пусть γ есть C^∞-кривая в M. *Векторное поле вдоль* γ — это сечение над γ в $T(M)$, касательном расслоении многообразия M. Например, γ_* — векторное поле вдоль γ. Говорят, что векторное поле X вдоль γ является *параллельным векторным полем вдоль* γ, если при любых u, v вектор $X(u)$ оказывается параллельным переносом вектора $X(v)$ вдоль γ из $\gamma(u)$ в $\gamma(v)$. В терминах связности на ассоциированном расслоении $T(M)$ (см. § 5.4) это означает, что X определяет горизонтальную кривую в $T(M)$.

Назовем C^∞-кривую γ *геодезической*, если ее касательное векторное поле γ_* параллельно вдоль γ.

Заметим, что геодезическая является параметризованной кривой, а не просто точечным множеством. При этом единственной репараметризацией геодезической, снова определяющей геодезическую, является линейная замена параметра.

Теорема 2. Пусть γ есть C^∞-кривая в M, $\bar{\gamma}$ — ее горизонтальный подъем через $b \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ в $B(M)$; тогда γ является геодезической в том и только в том случае, если существует $c \in R^d$, такое, что $\bar{\gamma}$ — интегральная кривая поля $\bar{E}(c)$, и в том и только в том случае, если $\omega(\bar{\gamma}_*)$ постоянно, т. е. когда в выражении

$$\bar{\gamma}_*(u) = \sum f_i E_i(\bar{\gamma}(u))$$

коэффициенты f_i постоянны.

Доказательство очевидно. С помощью теоремы о существовании и единственности интегральных кривых векторных полей получаем

Следствие. Для произвольных $m \in M$, $t \in M_m$ существует единственная геодезическая γ, для которой $\gamma(0) = m$ и $\gamma_*(0) = t$.

6.1.7. Геометрическая интерпретация преобразований R_{st} и T_{st}

В этом пункте мы свяжем R_{st} и T_{st} с параллельным переносом вокруг инфинитезимального параллелограмма со сторонами s и t.

Рассмотрим семейство «параллелограммов» таких же, как в теореме 1.4, но только интегральные кривые векторных полей заменим на геодезические. Параллельный перенос касательных s и t вдоль ломаных геодезических, начинающихся в точке m, порождает векторные поля S и T. Сторонами нашего «параллелограмма» поочередно служат геодезические длины u с касательными векторными полями S, T, $-S$ и $-T$. Если конечную точку «параллелограмма» обозначить через $\sigma(u)$, то σ оказывается C^∞-кривой, начинающейся в точке m. Так как «параллелограммы», вообще говоря, не замкнуты, то σ не обязательно является постоянной кривой. Пусть $A(u)$ — линейное преобразование пространства M_m, заданное параллельным переносом сначала вокруг «параллелограмма», а затем обратно вдоль кривой σ.

Теорема 3. Касательные первого порядка кривых σ и A равны нулю. Касательная второго порядка (см.

задачу 1.20) кривой σ есть $2T_{st}$, а $A''(0)=2R_{st}$; здесь A рассматривается как кривая в векторном пространстве $\mathfrak{gl}(M_m)$.

Другими словами, смещения, заданные обходом «параллелограмма» и параллельным переносом вокруг такого «параллелограмма» в первом порядке обращаются в нуль, тогда как второй порядок этих смещений определяет соответственно кручение и кривизну.

Доказательство. Горизонтальные подъемы в $B(M)$ наших «параллелограммов», начинающиеся в точке b, являются интегральными кривыми пары базисных векторных полей X и Y, так же как в теореме 1.4. Поэтому, в силу той же теоремы, кривая γ, состоящая из концов этих подъемов, расположенная над σ, имеет касательную второго порядка $2[X, Y](b)$, тогда как ее касательная первого порядка равна 0. Так как, по лемме 5, горизонтальная компонента вектора $2[X, Y](b)$ является подъемом вектора $2T_{st}$, то первое утверждение доказано.

Аналогично, вертикальная составляющая вектора $2[X, Y](b)$ измеряет второй порядок отклонения γ от параллельного переноса, откуда вторая производная $A''(0)$ равна соответствующему преобразованию пространства M_m, т. е. $2R_{st}$, согласно лемме 5.

Развертка кривых многообразия M в M_m. С помощью так называемой развертки кривым в M сопоставляются кривые в плоском аффинном пространстве M_m. Для этого требуется, чтобы касательные векторы к каждой кривой находились в одинаковом отношении к параллельным переносам выбранного базиса M_m.

Пусть γ — ломаная C^∞-кривая, начинающаяся в m, $b=(m, e_1, \dots, e_d)$ — базис в m. Пусть σ — горизонтальный подъем γ через b в $B(M)$. Тогда $\gamma_*=\sigma f$, где $f=\sigma^{-1}\gamma_*$ — кривая в R^d. Теперь $g(t)=\int_0^t f$ определяет кривую в R^d, которая называется *разверткой кривой* γ *в* M_m. Кривая bg не зависит от выбора базиса в m.

Эту процедуру можно обратить: для всякой ломаной C^∞-кривой τ в M_m, начинающейся в 0, имеется соответствующая кривая γ в M, начинающаяся в точке m, разверткой которой служит τ. Для доказательства построим сначала горизонтальный подъем σ кривой γ; известно,

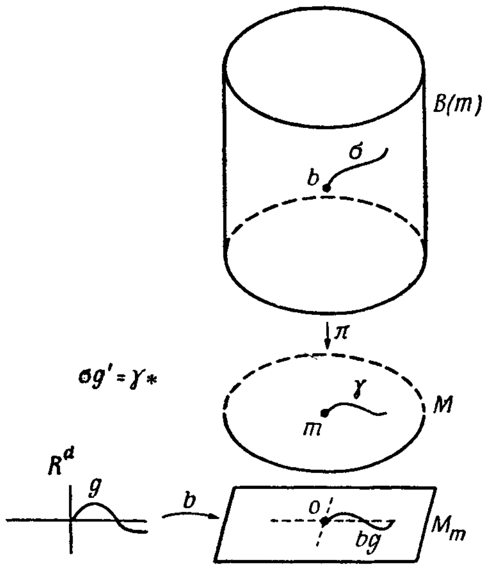


Рис. 21.

что $\sigma_*(t) = E(b^{-1}\tau'(t))(\sigma(t))$, поэтому существование γ вытекает из следующей леммы.

Лемма 6. Пусть E — линейное отображение из R^d в линейное пространство C^∞-векторных полей на многообразии N. Тогда для любой ломаной C^∞-кривой f в R^d и $n \in N$ найдется единственная ломаная C^∞-кривая σ в N, такая, что

$$\sigma(0) = n \text{ и } \sigma_*(t) = E(f(t))(\sigma(t)).$$

Доказательство. Определим векторное поле X на $U \times N$, где U — окрестность нуля в R, положив $X(t, n') = D_1(t) + E(f(t))(n')$. Тогда интегральная кривая поля X, начинающаяся в $(0, n)$, является графиком требуемой кривой σ.

Отметим, что геодезические развертываются в прямые линии.

Задача 2. Пусть s, $t \in M_m$ и τ — замкнутая ломаная C^∞-кривая в плоскости s, t, такая, что $\tau(0)=0$. Для всякого $v \in R$ определим кривую $v\tau$ в M_m, полагая $(v\tau)(u)=v(\tau(u))$. Пусть $\tau(u)=p(u)s+q(u)t$, $0 \leqslant u \leqslant 1$,

$$A = \int_0^1 p(u) q'(u)\, du$$

— площадь, ограниченная кривой τ относительно s, t. Пусть h — такое отображение $[0, 1] \times R$ в M, что $h(\cdot, v)$ развертывается в $v\tau$. Пусть $\gamma(v)=h(1, v)$ и $S(v)$ — линейное преобразование M_m, определенное параллельным переносом вокруг замкнутой кривой, состоящей из $h(\cdot, v)$ и куска кривой γ^{-1}. Доказать следующее обобщение теоремы 3:

$\gamma_*(0)=0$, а касательная второго порядка есть $2AT_{st}$; $S'(0)=0$ и $S''(0)=2AR_{st}$.

6.2. Структурные уравнения аффинной связности

Пусть H — аффинная связность на $B(M)$. Пусть φ, ω, Φ, Ω — ее 1-форма связности, форма смещения, форма кривизны и форма кручения соответственно.

Теорема 4. Имеют место равенства

$$d\omega = -\varphi\omega + \Omega,$$

$$d\varphi = -\frac{1}{2}[\varphi, \varphi] + \Phi.$$

Эти равенства называются первым и вторым структурными уравнениями связности. (См. § 4.9, где определены формы $\varphi\omega$, $[\varphi, \varphi]$.)

Доказательство. Второе структурное уравнение — это просто структурное уравнение для связности на главном расслоении (см. теорему 5.3). Для вывода первого структурного уравнения докажем следующий более общий результат.

Теорема 5. Пусть θ есть R^d-значная эквивариантная горизонтальная p-форма на $B(M)$, тогда

$$d\theta = -\varphi\theta + D\theta.$$

Доказательство. Оно почти совпадает с доказательством теоремы 5.6. Мы вычисляем обе части равенства на векторных полях $Y_1, \ldots, Y_{p+1}$, взятых из совокупности векторных полей, локально порождающих касательное пространство к $B(M)$. Рассмотрим те же случаи, что и прежде.

(I) *Никакое Y_i не вертикально.* Можно предположить, что все Y_i горизонтальны. Но тогда член $\varphi\theta$ обращается в 0 и остается вспомнить определение $D\theta$.

(II) *Одно Y_i вертикально.* Предположим, что $Y_{p+1} = \lambda X$, $X \in \mathfrak{gl}(d, R)$. Как и раньше, выберем правоинвариантные горизонтальные Y_i так, что $[Y_i, \lambda X] = 0$, $i = 1, \ldots, p$. Тогда, по теореме 4.2,

$$d\theta(Y_1, \ldots, Y_{p+1}) = (-1)^p (\lambda X)\theta(Y_1, \ldots, Y_p).$$

Применяя теперь лемму 5.3 и представляя φ как матричную операцию на R^d, получим

$$(-1)^p \lambda X\theta(Y_1, \ldots, Y_p) = (-1)^{p+1} X\theta(Y_1, \ldots, Y_p).$$

С другой стороны, $D\theta(Y_1, \ldots, Y_p, \lambda X) = 0$, так как $D\theta$ горизонтально, поэтому правая часть дает

$$-\varphi\theta(Y_1, \ldots, Y_p, \lambda X) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \varphi(Y_i)\theta(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_{p+1}) =$$
$$= -(-1)^p \varphi(\lambda X)\theta(Y_1, \ldots, Y_p) = (-1)^{p+1} X\theta(Y_1, \ldots, Y_p).$$

Таким образом, обе части равенства приводят к одинаковым результатам.

(III) *Два из Y_i вертикальны.* В этом случае все обращается в нуль, и равенство выполняется автоматически. Ч. Т. Д.

Теорема 6. Пусть θ — эквивариантная горизонтальная p-форма со значениями либо в $\mathfrak{gl}(d, R)$, либо в R^d. Пусть $\square$ обозначает операцию скобки или матричного умножения в $\mathfrak{gl}(d, R)$ или R^d соответственно. Тогда

$$D^2\theta = \Phi\square\theta.$$

Доказательство. θ удовлетворяет структурному уравнению

$$d\theta = -\varphi\square\theta + D\theta,$$

по теореме 5.6 или теореме 5. Действие D на обе части уравнения приводит к равенству

$$d^2\theta \circ H = -d(\varphi\square\theta) \circ H + D^2\theta.$$

Но $d^2=0$ и

$$d(\varphi\square\theta) \circ H = d\varphi \circ H\square\theta - \varphi \circ H\square D\theta = \Phi\square\theta,$$

что и требовалось доказать.

Комбинируя полученный результат с тождеством Бьянки (теорема 5.4), получим *аффинные тождества Бьянки*: $D\Phi=0$ и $D\Omega=\Phi\omega$.

6.2.1. Двойственная формулировка структурных уравнений

Первое структурное уравнение имеет двойственное, выраженное в терминах скобки фундаментального и базисного полей.

Теорема 7. Пусть $X\in\mathfrak{gl}(d, R)$, $x\in R^d$. Тогда

$$[\lambda X, E(x)] = E(Xx),$$

где Xx — действие матрицы X на вектор x.

Доказательство. Можно доказать, что $[\lambda X, E(x)]$ горизонтально либо с помощью второго структурного уравнения, либо заметив, что это в точности утверждение леммы 5.2. Таким образом, надо лишь проверить, что

$$\omega([\lambda X, E(x)]) = Xx.$$

Но из первого структурного уравнения имеем

$$\begin{aligned}\omega([\lambda X, E(x)]) = {} & +\lambda X\omega(E(x)) - \\ & - E(x)\omega(\lambda X) - d\omega(\lambda X, E(x)) = \\ & = \varphi\omega(\lambda X, E(x)) = \\ & = \varphi(\lambda X)\omega(E(x)) = Xx. \quad \text{Ч. Т. Д.}\end{aligned}$$

Для векторных полей E_i, E_{jk} теорема 7 дает формулу

$$[E_{jk}, E_i] = \delta_{ik}E_j.$$

Заметим, что эта формула непосредственно вытекает также из теоремы 3.1 и поэтому в свою очередь может быть использована для доказательства первого структурного уравнения.

Задача 3. Дать другое доказательство теоремы 7, применив формулу $L_{\lambda X} = i(\lambda X)d + di(\lambda X)$ к форме смещения ω и вычислив получающуюся форму на векторном поле $E(x)$. (Ср. с задачей 5.4.)

6.2.2. Формы разности

Пусть φ, ψ — две 1-формы связности на $B(M)$. Определим *форму разности* τ, положив $\tau = \psi - \varphi$.

Лемма 7. Форма разности τ обладает следующими свойствами:

(I) $\tau \in C^\infty$,

(II) τ горизонтальна,

(III) τ эквивариантна.

Обратно, если φ — форма связности и τ есть $\mathfrak{gl}(d, R)$-значная 1-форма, удовлетворяющая (I)—(III), то $\varphi + \tau$ также является 1-формой некоторой связности.

Эти результаты очевидны.

Форма разности τ порождает линейное преобразование $T_s: M_m \to M_m$ при любом $s \in M_m$, а именно, если $\pi(b) = m$, то

$$T_s t = b\tau(\bar{s})b^{-1}t,$$

где $\bar{s} \in B(M)_b$ таково, что $d\pi\bar{s} = s$.

Обратно, если дана функция T, относящая паре $m \in M$, $s \in M_m$ линейное преобразование $T_s: M_m \to M_m$, линейное по s и «дифференцируемое» по m и s [как функция на $T(M)$ со значениями в ассоциированном с $B(M)$ расслоении линейных преобразований касательных пространств к M со слоем $\mathfrak{gl}(d, R)$ и действием присоединенного представления группы $Gl(d, R)$], то можно определить $\mathfrak{gl}(d, R)$-значную 1-форму, удовлетворяющую (I)—(III), положив

$$\tau(\bar{s}) = b^{-1} T_{d\pi\bar{s}} b$$

для произвольного $\bar{s} \in B(M)_b$. Кроме того, $T_s t = b\tau(\bar{s}) b^{-1} t$, так что существует взаимно однозначное соответствие между формами разности и некоторыми функциями, которые мы назовем *полями линейных преобразований.*

Теорема 8. Пусть φ — связность на $B(M)$. Тогда существует форма разности τ, для которой $\psi = \varphi + \tau$ оказывается 1-формой связности с нулевой 2-формой кручения (см. задачу 1).

Далее, если τ' также обладает этим свойством, то $\tau\omega = \tau'\omega$ (в обозначениях § 4.9).

Доказательство. Рассмотрим форму τ, предполагая, что она существует. Выписав первые структурные уравнения для φ и ψ, получим

$$d\omega = -\varphi\omega + \Omega, \quad d\omega = -\psi\omega,$$

так как ψ имеет нулевое кручение. Поэтому $(\varphi - \psi)\omega = \Omega$ и, значит, τ должно удовлетворять уравнению

$$-\tau\omega = \Omega.$$

Последняя часть теоремы уже доказана. Чтобы показать, что такое τ существует, положим при $b \in B(M)$, $\bar{s} \in B(M)_b$, $x \in R^d$

$$-\tau(s)(x) = \frac{1}{2}\Omega(s, E(x)(b)).$$

Нетрудно проверить, что τ принадлежит C^∞ и является эквивариантной горизонтальной 1-формой. Далее, для $b \in B(M)$ и $s, t \in B(M)_b$

$$-\tau\omega(s, t) = -\tau(s)\omega(t) + \tau(t)\omega(s) =$$
$$= \frac{1}{2}\Omega(s, E(\omega(t))(b)) - \frac{1}{2}\Omega(t, E(\omega(s))(b)) =$$
$$= \frac{1}{2}\Omega(s, t) - \frac{1}{2}\Omega(t, s) = \Omega(s, t), \qquad \text{Ч. Т. Д.}$$

Отметим, что поле линейных преобразований T, ассоциированное с τ, есть $T_s(t) = \frac{1}{2} T_{st}$, где T_{st} — перенос кручения, соответствующий $s, t \in M_m$ (п. 6.1.5).

Прежде чем идти дальше, приведем удобную формулировку параллельного переноса.

Лемма 8. Пусть ρ — произвольная C^∞-кривая в M, $t \in M_{\rho(0)}$, $b \in B(M)$, $\pi(b) = \rho(0)$. Пусть φ — форма связности на $B(M)$ и β есть φ-горизонтальный подъем кривой ρ через b. Тогда φ-параллельным переносом t вдоль ρ в $\rho(u)$ служит $\beta(u) b^{-1} t$.

Доказательство очевидно, ввиду того что каждое $c \in B(M)$ порождает изоморфизм R^d на $M_{\pi(c)}$.

Лемма 9 является полезной характеристикой геодезических.

Лемма 9. Пусть γ — кривая в M, $\bar{\gamma}$ — (не обязательно горизонтальный) подъем γ в $B(M)$. Тогда γ является геодезической в том и только в том случае, если

$$(\bar{\gamma}_* + \varphi(\bar{\gamma}_*))\,\omega(\bar{\gamma}_*) = 0.$$

Доказательство. Пусть P — главное расслоение, индуцированное расслоением $B(M)$ посредством кривой γ над ее областью определения U. Таким образом,

$$P = \{(u, b) \mid u \in U, \ \pi b = \gamma(u)\}.$$

Тогда отображение $\alpha : P \to B(M)$, $\alpha(u, b) = b$ принадлежит C^∞, поэтому формы смещения и связности можно снести на P: $\omega' = \alpha^*\omega$, $\varphi' = \alpha^*\varphi$; $\Omega' = \alpha^*\Omega = 0$, так как горизонтальное пространство в P одномерно.

Отображение $\sigma: U \to P$ вида $\sigma(u) = (u, \bar{\gamma}(u))$ является C^∞-кривой в P; σ_* продолжается до правоинвариантного векторного C^∞-поля X на P. Если же вместо $\bar{\gamma}$ взять горизонтальный подъем β кривой γ, то получится векторное C^∞-поле Y на P, причем $\varphi'(Y) = 0$. Кроме того, X и Y оба проектируются в $D = d/du$ на U, откуда $[X, Y]$ вертикально и $\omega'(X) = \omega'(Y)$.

По теореме 2, γ является геодезической тогда и только тогда, когда $\omega(\beta_*)$ постоянно, т. е. $\beta_*\omega(\beta_*) = 0$, и это равенство после применения α переходит в

$$Y\omega'(Y) = 0.$$

Далее, из первого структурного уравнения имеем

$$d\omega'(X, Y) = X\omega'(Y) - Y\omega'(X) = -\varphi'(X)\omega'(Y),$$

откуда, так как $\omega'(X) = \omega'(Y)$,

$$X\omega'(X) + \varphi'(X)\omega'(X) = Y\omega'(Y).$$

Следовательно, γ — геодезическая тогда и только тогда, когда обращается в нуль левая часть этого равенства, что вдоль σ приводит к

$$\frac{d}{du}\omega'(\sigma_*) + \varphi'(\sigma_*)\omega'(\sigma_*) = 0.$$

Подставляя значения ω', φ', получим

$$\frac{d}{du}\omega(\bar{\gamma}_*) + \varphi(\bar{\gamma}_*)\omega(\bar{\gamma}_*) = 0.$$

Итак, теорема доказана в одну сторону. Для доказательства обратного утверждения надо лишь обратить импликацию

$$X\omega'(X) + \varphi'(X)\omega'(X) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{du}\omega'(\sigma_*) + \varphi'(\sigma_*)\omega'(\sigma_*) = 0,$$

что возможно, в силу правоинвариантности X.

Следующая теорема не относится к римановой геометрии, но имеет интересные следствия в теории связностей.

Теорема 9. Пусть φ и ψ — две формы связности на $B(M)$, τ — форма их разности. Геодезические связностей φ и ψ совпадают в том и только в том случае, когда для всех $b \in B(M)$, $s \in B(M)_b$

$$\tau(s)\,\omega(s) = 0.$$

Доказательство. Если две связности имеют одни и те же геодезические, то для данного $s \in B(M)_b$ найдется геодезическая γ, горизонтальный подъем которой $\bar{\gamma}$ удовлетворяет равенству $\bar{\gamma}_*(0) = s$. (Если s вертикально, то γ постоянно.)

Тогда, по лемме 9,

$$\bar{\gamma}_*(0)\,\omega(\bar{\gamma}_*) = -\varphi(s)\,\omega(s) = -\psi(s)\,\omega(s),$$

что и требовалось.

Обратно, если $\tau(s)\,\omega(s) = 0$ для всех s и $\bar{\gamma}$ — подъем φ-геодезической γ, то

$$\bar{\gamma}_*\omega(\bar{\gamma}_*) = -\varphi(\bar{\gamma}_*)\,\omega(\bar{\gamma}_*) = -\psi(\bar{\gamma}_*)\,\omega(\bar{\gamma}_*),$$

так как $\tau(\bar{\gamma}_*)\,\omega(\bar{\gamma}_*) = 0$, откуда γ является ψ-геодезической.

Нижеследующее утверждение является обобщением теоремы 8, а сравнение доказательств показывает, что обе встречающиеся здесь связности имеют одни и те же геодезические.

Следствие. Пусть φ — некоторая связность и θ — эквивариантная горизонтальная R^d-значная 2-форма на $B(M)$. Тогда существует единственная связность ψ, имеющая θ своей формой кручения и те же геодезические, что и φ. В частности, если геодезические и формы кручения двух связностей совпадают, то совпадают и сами связности.

Доказательство. Доказательство единственности заключается в выводе формулы для $\tau = \varphi - \psi$, а доказательство существования — в тривиальной проверке горизонтальности и эквивариантности получающейся формы τ.

Предположим, следовательно, что φ и ψ имеют одинаковые геодезические и что первыми структурными уравнениями служат

$$d\omega = -\varphi\omega + \Omega,$$
$$d\omega = -\psi\omega + \theta.$$

Вычитая, получаем

$$\tau\omega = (\varphi - \psi)\omega = \Omega - \theta = \eta,$$

т. е. при $s, t \in B(M)_b$

$$\tau(s)\omega(t) - \tau(t)\omega(s) = \eta(s, t).$$

Посредством поляризации условие совпадения геодезических переходит в равенство $\tau(s)\omega(t) + \tau(t)\omega(s) = 0$. Сложение двух последних равенств дает формулу для τ, поскольку $\omega(t)$ произвольно:

$$\tau(s)\omega(t) = \frac{1}{2}\eta(s, t).$$

Задача 4. Показать, что если геодезические двух связностей совпадают, то они совпадают с геодезическими любой их комбинации в смысле задачи 5.2.

Задача 5. *Связности на параллелизуемых многообразиях.* Пусть ρ есть R^d-значная 1-форма на M, дающая параллелизацию M. Определим три связности, ассоциированные с ρ.

Прямая связность — это связность, при которой векторные поля $\rho^{-1}(x)$ с фиксированным $x \in R^d$ параллельны вдоль каждой кривой. *Связность без кручения* — это связность с геодезическими прямой связности, но с нулевым кручением. *Противоположная связность* — это связность с формой $\varphi + 2\tau$, где φ — форма прямой связности, а $\varphi + \tau$ — форма связности без кручения.

Проверить следующие свойства этих связностей:

(a) Параллелизация ρ естественно приводит к некоторому сечению в $B(M)$ над M. Это сечение горизонтально относительно прямой связности, и с его помощью структурные уравнения сносятся в одно уравнение $d\rho = P$ на M, где P — снесенная форма кручения.

(б) Две параллелизации связаны C^∞-отображением многообразия в пространство $Gl(d, R)$, причем соответствующие прямые связности совпадают в том и только в том случае, если это отображение постоянно (M связно).

(в) Геодезические всех трех связностей совпадают и состоят из интегральных кривых векторных полей $\rho^{-1}(x)$.

(г) Если ρ постоянно на векторных полях X, Y, Z, то кручение и кривизна этих связностей задаются таблицей:

прямая связность	$T_{XY}=[X, Y]$, $R_{XY}=0$,
связность без кручения	$T_{XY}=0$, $R_{XY}Z=\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$,
противоположная связность	$T_{XY}=-[X, Y]$, $R_{XY}=0$.

(д) Для противоположной связности $R_{XY}=0$ в том и только в том случае, если ρ постоянно на $[X, Y]$.

Если ρ постоянно на всех таких $[X, Y]$, то хорошо известно, что M можно снабдить структурой локальной группы Ли, при которой эти постоянные векторные поля станут левоинвариантными. В общем случае проблема локальной эквивалентности прямых связностей изучается в более широком контексте G-структур. Ясное изложение этого материала имеется в книге С. Штернберга (Shlomo Sternberg, Lectures on differential geometry, New Jersey, 1964).

Задача 6. *Связности на группах Ли.* Группа Ли параллелизуема с помощью лево-, а также правоинвариантных векторных полей. Назовем соответствующие прямые связности *левой* и *правой связностью.* Показать, что они противоположны друг другу, так что обе связности без кручения совпадают. Первое структурное уравнение левой связности сносится, как в задаче 5(а), в уравнение Маурера — Картана (задачи 4.20, 4.23). Выразить P в терминах структурных констант c^k_{ij}.

Все три связности совпадают тогда и только тогда, когда группа абелева, поэтому произведения евклидова пространства и тора имеют плоскую аффинную связность без кручения.

6.3. Экспоненциальные отображения

Экспоненциальное отображение в точке $m \in M$ — это некоторое отображение окрестности U нуля пространства M_m в многообразие M

$$\exp_m : U \to M.$$

Для тех $t \in M_m$, для которых $\exp_m(t)$ определено, оно задается следующим образом. Пусть геодезическая γ в M (однозначно) определена условиями $\gamma(0) = m$, $\gamma_*(0) = t$. Тогда

$$\exp_m(t) = \gamma(1).$$

Заметим, что $\exp_m(ut) = \gamma(u)$ при вещественном u, если только $\gamma(u)$ существует. Область определения

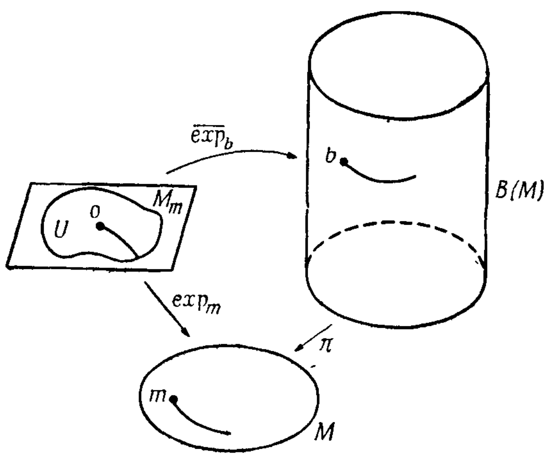


Рис. 22.

$\exp_m$ — это открытое подмножество в M_m, звездное относительно $0 \in M_m$ в том смысле, что вместе со всякой своей точкой t оно содержит и весь отрезок прямой от 0 до t.

Кроме этого экспоненциального отображения рассмотрим также некоторый подъем в $B(M)$. Для $b \in B(M)$ с $\pi(b) = m$ определим $\overline{\exp}_b(t) = \bar{\gamma}(1)$, где $\bar{\gamma}$ — единственный горизонтальный подъем кривой γ через b.

Так как γ — геодезическая, то $\overline{\gamma}$ — интегральная кривая поля $E(x)$, где $bx=\gamma_*(0)=t$ (теорема 2).

Мы покажем, что $\overline{\exp}_b \in C^\infty$, так что $\exp_m = \pi \circ \overline{\exp}_b \in C^\infty$. Отсюда немедленно следует, что $\exp_m$ осуществляет диффеоморфизм своей области определения на окрестность точки m, так как образом $d\exp_m$ служит все M_m: действительно, если $e_1, \ldots, e_d$ — базис в M_m, а $u_1, \ldots, u_d$ — сопряженный базис, то $d\exp_m D_{u_i}(0) = e_i$, причем размерности M_m и M одинаковы.

Теорема 10. $\overline{\exp}_b \in C^\infty$.

Доказательство. Проведем его в несколько более общем виде. Рассмотрим *аффинное расслоение* $A(M)$ над M, т. е. расслоение, пространство которого состоит из пар (b, t), $b \in B(M)$, $t \in M_{\pi(b)}$, а проекцией служит $(b, t) \to \pi(b)$. Это многообразие с очевидной дифференцируемой структурой. Определим отображение

$$F : B(M) \times A(M) \to T(B(M))$$

равенством

$$F(b, c, t) = E(c^{-1}t)(b).$$

Каждое $(c, t) \in A(M)$ дает векторное поле $E(c^{-1}t)$ на $B(M)$. Очевидно, F есть C^∞-отображение. В силу теорем из приложения о дифференциальных уравнениях, существует C^∞-отображение G окрестности $\{0\} \times B(M) \times A(M)$ в $B(M)$, заданное формулой $G(u, b, c, t) = \gamma(u)$, где γ — интегральная кривая поля $E(c^{-1}t)$ с $\gamma(0) = b$. Тогда

$$\overline{\exp}_b t = G(1, b, b, t).$$

Следствие. Отображение $\operatorname{Exp} : T(M) \to M$ вида

$$\operatorname{Exp}(m, t) = \exp_m t$$

определено на некоторой окрестности тривиального сечения расслоения $T(M)$ и принадлежит C^∞.

Доказательство. Пусть $m \in M$, выберем C^∞-сечение χ над окрестностью m в $B(M)$. Тогда на этой окрестности отображение

$$J:(m,\ t)\to(1,\ \chi(m),\ \chi(m),\ t)$$

в $\{u\}\times B(M)\times A(M)$ принадлежит C^∞ и

$$\mathrm{Exp}=\pi\circ G\circ J.$$

Задача 7. (а) Если P — главное расслоение над многообразием M, M наделено аффинной связностью, $m\in M$, то отображение $\exp_m$ можно пропустить через P.

(б) Всякое расслоение над R^d тривиально.

6.3.1. Полнота

Аффинная связность называется *полной*, если все геодезические можно неограниченно продолжать, т. е. если каждое экспоненциальное отображение определено на всем касательном пространстве. Это эквивалентно тому, что локальная группа преобразований многообразия $B(M)$, порожденная базисным векторным полем $E(x)$, продолжается до глобальной однопараметрической группы преобразований многообразия $B(M)$. Мы увидим в гл. 8, что полнота в смысле римановой связности эквивалентна полноте в смысле римановой метрики.

6.3.2. Нормальные координаты

Координатное отображение $\varphi: U\to R^d$, $U\subset M$, называется *нормальным координатным отображением* в точке $m=\varphi^{-1}(0)$, если прообразы лучей, проходящих через $0\in R^d$, являются геодезическими (луч — это прямая линия вида $u\to ux$, $x\in R^d$).

Выбрав базис $b\in B(M)$ с $\pi(b)=m$, отождествим R^d с M_m. Комбинируя это отождествление и $\exp_m$, с помощью теоремы 10 убеждаемся, что отображение $\exp_m\circ b$ служит обратным для нормальной координатной системы в точке m.

В *нормальной координатной окрестности* N, области определения нормального координатного отображения φ, всякую точку $n\in N$ можно соединить с $\varphi^{-1}(0)$ единственной геодезической в N.

Отметим, что если и кривизна, и кручение обращаются в нуль, то, по теореме 1, существуют координатные системы, обратные к которым переводят произвольные прямые из $U \in R^d$ в геодезические; таким образом, эти координатные системы нормальны относительно каждой из своих точек. Это аффинный вариант локальной изометрии плоского риманова многообразия с евклидовым пространством (см. следствие теоремы 9.3).

Задача 8. Показать, что экспоненциальное отображение в единичном элементе группы Ли для любой из связностей задачи 6 совпадает с экспоненциальным отображением группы Ли, если алгебру Ли отождествить с касательным пространством в единичном элементе, так что указанные связности оказываются полными.

Поэтому, в силу задачи 2.2, образ экспоненциального отображения полной аффинной связности не обязательно заполняет все многообразие, даже если это многообразие связно.

Задача 9. Пусть $G = S^3$ — мультипликативная группа единичных кватернионов. Показать, что геодезическими на S^3 служат большие круги.

6.4. Ковариантное дифференцирование и классические формулировки

6.4.1. Ковариантные производные

С помощью параллельного переноса в $T(M)$ можно определить частные производные векторных полей. Вообще это можно сделать в любом векторном расслоении, ассоциированном с $B(M)$: представление группы $Gl(d, R)$ на векторном пространстве F порождает понятие ковариантного дифференцирования сечений ассоциированного расслоения со слоем F. Дадим несколько определений, отвлекаясь от вопросов эквивалентности и независимости от выбора кривой. Фиксируем аффинную связность H с формой φ.

Пусть (W, F, G, M) — векторное расслоение, ассоциированное с $B(M)$, со слоем F и группой $G = Gl(d, R)$.

Тогда каждое $b \in B(M)$ порождает такой изоморфизм F на слой над $\pi(b)$ в W, что $b(gf) = (bg)f$ при $f \in F$, $g \in G$ (§ 3.3). Пусть U — окрестность точки $m \in M$, $X: U \to W$ — сечение над U и $t \in M_m$. Мы дадим несколько определений $\nabla_t X$, *ковариантной производной сечения X по направлению t.* Часто также используется и обозначение $D_t X$. Прежде всего $\nabla_t X$ будет элементом слоя W над m. Если Y — векторное поле на U, то $\nabla_Y X$ будет обозначать сечение над U, заданное формулой $\nabla_Y X(n) = \nabla_{Y(n)} X$; это ковариантная производная X по направлению $Y(n)$.

(I) $\nabla_t X$ измеряет, насколько X не горизонтально в направлении t. Точнее, сравниваются подъем вектора t, порожденный сечением X, а именно dXt, и горизонтальный подъем $H'(dXt)$ вектора t, где H' — связность на W, индуцированная аффинной связностью на $B(M)$ (§ 5.4). Так как слои в W — векторные пространства, то тем способом, которым векторное пространство обычно отождествляется со своими касательными пространствами (§ 2.5), отождествим вертикальные касательные с элементами этих слоев. После отождествления определим

$$\nabla_t X = V(dXt) = dXt - H'(dXt).$$

(II) $\nabla_t X$ — это дифференцирование относительно параллельного переноса. Пусть γ — кривая в M, причем $\gamma_*(0) = t$; пусть $e_1(u), \ldots, e_k(u)$ — такой базис слоя F над $\gamma(u)$, что каждое e_i оказывается горизонтальным подъемом кривой γ, т. е. $e_i(u)$ получается параллельным переносом вектора $e_i(0)$ вдоль γ в $\gamma(u)$ (§ 5.4). Определим вещественные C^∞-функции f_i из разложения $X(\gamma(u)) = \sum_i f_i(u) e_i(u)$. Тогда

$$\nabla_t X = \sum_i f'_i(0) e_i(0).$$

(III) $\nabla_t X$ соответствует производной в горизонтальном направлении некоторой функции на $B(M)$, ассоциированной с X.

Для каждого $b \in B(M) \cap \pi^{-1}(U)$ определим

$$\tilde{X}(b) = b^{-1} X(\pi b)$$

Таким образом, $\tilde{X}$ — функция на $B(M)\cap\pi^{-1}(U)$ со значениями в F. Заметим, что $\tilde{X}(bg)=g^{-1}b^{-1}X(\pi(b))=$ $=g^{-1}\tilde{X}(b)$. Обратно, всякая C^∞-функция $\tilde{X}:B(M)\to F$, такая, что $\tilde{X}(bg)=g^{-1}\tilde{X}(b)$, порождает сечение $X: M\to W$ вида $\pi(b)\to b\tilde{X}(b)$.

В этом случае столь же просто определить $\nabla_Y X$, как и $\nabla_t X$. Пусть $\overline{Y}$ — единственный горизонтальный подъем поля Y в W, так что $\overline{Y}(b)$ — единственная горизонтальная касательная, для которой $d\pi\overline{Y}(b)=Y(\pi(b))$. Тогда $\nabla_Y X$ — сечение, ассоциированное с функцией $\overline{Y}\tilde{X}$.

Задача 10. Доказать эквивалентность этих определений ковариантной производной.

Приведем некоторые примеры.

(I) Пусть $F=R^d$, $W=T(M)$, тогда X — обычное векторное поле. Если X параллельно вдоль γ, то $\nabla_{\gamma_*}X=0$, и обратно.

Заметим, что в данном случае функция $\tilde{X}$ из определения (III) совпадает с $\omega(\overline{X})$, где $\overline{X}$ — любой подъем поля X в $B(M)$. С помощью этого факта и структурных уравнений можно дать удобную формулировку для $\nabla_t X$.

Теорема 11. Пусть X — векторное поле на M, $t\in M_m$, $\bar{t}$ — подъем t в $b\in B(M)$, $\overline{X}$ — подъем x.

Тогда $\nabla_t X=b(\bar{t}\omega(\overline{X})+\varphi(\bar{t})\omega(\overline{X}(b)))$.

Доказательство. Пусть Y — правоинвариантное векторное поле на $B(M)$, продолжающее $\bar{t}$. Тогда поле $[Y-HY, \overline{X}]$ вертикально, будучи π-связанным с $[0, X]$, откуда

$$
\begin{aligned}
d\omega(Y-HY, \overline{X}) = (Y-HY)\omega(\overline{X}) - \overline{X}\omega(Y-HY) - \\
-\omega([Y-HY, \overline{X}]) = \\
= (Y-HY)\omega(\overline{X}) = \\
= -\varphi(Y-HY)\omega(\overline{X}) + \varphi(\overline{X})\omega(Y-HY) = \\
= -\varphi(Y)\omega(\tilde{X}).
\end{aligned}
$$

Вычисление в точке b дает

$$H\bar{t}\omega(\bar{X}) = \bar{t}\omega(\bar{X}) + \varphi(\bar{t})\omega(\bar{X}(b)).$$

Отображение b переводит $H\bar{t}\omega(\bar{X})$ в $\nabla_t X$, в силу определения (III), что и доказывает нашу формулу.

Из сравнения с леммой 9 легко получаем

Следствие. Кривая γ — геодезическая тогда и только тогда, когда $\nabla_{\gamma_*}\gamma_* = 0$.

(II) Если $F = \mathfrak{gl}(d, R)$ и действие G на F есть присоединенное представление, то W является расслоением, слой которого над m состоит из всех линейных преобразований M_m в себя. Сечения соответствуют горизонтальным эквивариантным R^d-значным 1-формам на $B(M)$.

(III) Согласно § 4.5, G действует на R^{d*}: если $f \in R^{d*}$, $g \in G$, $v \in R^d$, то

$$(gf)(v) = f(g^{-1}v).$$

Соответствующее расслоение W является грассмановым расслоением G^1, а его сечения — 1-формами. Действие G на R^{d*} можно единственным образом продолжить до группы гомоморфизмов алгебры Грассмана над R^{d*}. Это действие приводит к ковариантному дифференцированию дифференциальных форм.

(IV) Комбинированием действий группы G на R^d и R^{d*} определяется ее действие на тензорных произведениях экземпляров R^d и R^{d*}. Сечениями соответствующих ассоциированных векторных расслоений служат тензорные поля. Если в тензорном произведении имеется r экземпляров R^d и s экземпляров R^{d*}, то говорят, что соответствующие тензорные поля имеют тип (r, s). Например, перенос кручения является тензорным полем типа (1.2), тогда как преобразование кривизны — тензорным полем типа (1.3). Вышеуказанный пример (II) в действительности есть случай тензорного поля типа (1.1).

(V) Если X — сечение в W и f — вещественная функция на M, то fX — также сечение над M. Его ковариантная производная следующим образом связана с ковариантной производной X. Пусть $t \in M_m$, тогда

$$\nabla_t(fX) = f(m)\nabla_t X + (tf)X(m).$$

Доказательство. В силу третьего определения ковариантной производной, имеем

$$\widetilde{fX}(b) = b^{-1}(f(\pi b) X(\pi b)) = \\ = f(\pi b) b^{-1} X(\pi b) = f(\pi b) \tilde{X}(b),$$

т. е.

$$\widetilde{fX} = (f \circ \pi) \tilde{X}.$$

Отсюда

$$\bar{t}(\widetilde{fX}) = \bar{t}(f \circ \pi) \tilde{X}(b) + f \circ \pi(b) \bar{t} \tilde{X} = \\ = (tf) \tilde{X}(b) + f(\pi b) \bar{t} \tilde{X},$$

и применение отображения b к обеим сторонам равенства дает

$$\nabla_t(fX) = (tf) X(\pi b) + f(\pi b) \nabla_t X.$$

Задача 11. Показать, что на параллелизуемом M сечения тензорного расслоения находятся во взаимно однозначном соответствии с отображениями M в слой F и что ковариантному дифференцированию относительно прямой связности соответствует дифференцирование этих векторных функций.

Задача 12. На параллелизуемом многообразии M для векторных полей X, Y, таких, как в задаче 5(г), вывести следующие формулы для ковариантных производных:

прямая связность	$\nabla_X Y = 0,$
связность без кручения	$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y],$
противоположная связность	$\nabla_X Y = [X, Y].$

Задача 13. Пусть M есть d-мерное многообразие, и ∇ — ковариантная производная аффинной связности нулевого кручения над M. Пусть θ — дифференциальная форма на M, и пусть $X_1, \ldots, X_d$ — параллелизация окрестности U в M, а $\beta_1, \ldots, \beta_d$ — сопряженные 1-формы на U. Доказать следующую формулу для внешней производной θ на U:

$$d\theta = \sum \beta_i \nabla_{X_i} \theta.$$

(*Указание*: показать, что оператор справа является антидифференцированием и согласуется с d на функциях и 1-формах.)

Вывести отсюда, что дифференциальная форма замкнута, если существует аффинная связность нулевого кручения, относительно которой ковариантные производные данной формы равны нулю, т. е. если эта форма параллельна вдоль каждой кривой. (Дифференциальная форма θ *замкнута*, если $d\theta = 0$.)

Задача 14. Пусть θ есть 2-форма, и X, Y, Z — векторные поля. Показать, что

$$(\nabla_X\theta)(Y, Z) = X\theta(Y, Z) - \theta(\nabla_X Y, Z) - \theta(Y, \nabla_X Z).$$

Обобщить это утверждение.

6.4.2. Определение связности с помощью ковариантной производной

Чтобы определить связность, достаточно задать ковариантное дифференцирование в касательном расслоении, поскольку первый вышеуказанный пример дает дифференциальное уравнение $\nabla_{\gamma_*} X = 0$ для параллельного переноса вдоль γ. Это дифференциальное уравнение линейно и, следовательно, имеет единственное решение при любом начальном условии.

Таким образом, аффинная связность определена, коль скоро любым $m \in M$, $t \in M_m$ и векторному полю X отнесен элемент $\nabla_t X \in M_m$, такой, что

(I) $\nabla_t X$ линейно по t:

$$\nabla_{ut+vs} X = u(\nabla_t X) + v(\nabla_s X),$$

где u, $v \in R$, t, $s \in M_m$;

(II) если f — вещественная C^∞-функция на M, то

$$\nabla_t(fX) = (tf)X(m) + f(m)\nabla_t X.$$

Иногда ковариантную производную удобно обратить, т. е. для каждого векторного C^∞-поля X, заданного на открытом множестве $U \subset M$, рассмотреть линейное преобразование $\tau(X)$, определенное на каждом M_m с $m \in U$ по формуле $\tau(X)t = \nabla_t X$. Связность тогда определяется заданием преобразования $\tau(X)$, удовлетворяющего условию, соответствующему (II) : $\tau(fX)t = f(m)\tau(X)t + (tf)X(m)$ (см. [50]).

Выведем прямое соотношение между ковариантным дифференцированием векторных полей и формой связности на $B(M)$. Оно зависит от некоторого локального сечения над M в $B(M)$. Пусть $X_1, \ldots, X_d$ — такие векторные поля, определенные на открытом множестве $U \subset M$, что отображение

$$\chi : m \to (m, X_1(m), \ldots, X_d(m))$$

является сечением $U \to B(M)$. Для произвольных векторных полей $Y = \sum_i f_i X_i$ и X на U определим

$$L(XY) = \sum_i (Xf_i)\, X_i.$$

Ковариантная производная поля Y в направлении X и форма связности φ связаны соотношением

$$\text{(III)} \quad \nabla_{X(m)} Y = \chi(m)\varphi(d\chi X(m))\chi(m)^{-1} Y(m) + L(XY)(m),$$

где $\chi(m)$ рассматриваются теперь как отображение R^d в M_m.

Так как φ известно на вертикальных касательных, а вертикальные касательные вместе с касательными вида $d\chi t$ порождают $B(M)_{\chi(m)}$, то из формулы (III) φ определяется на всем $B(M)_{\chi(m)}$ и, значит, в силу эквивариантности, на всем $\pi^{-1}(U)$.

Задача 15. Показать, что ковариантные производные связностей комбинируются так же, как сами связности, т. е. если ∇ — ковариантная производная для связности H, Γ — ковариантная производная для связности K, f есть C^∞-функция на M, то ковариантной производной для $(f \circ \pi)H + (1 - f \circ \pi)K$ служит $f\nabla + (1 - f)\Gamma$.

6.4.3. Структурные уравнения [51]

Структурным уравнениям соответствуют формулы для преобразований кручения и кривизны в терминах ковариантных производных. Эти формулы таковы:

(I) $T_{XY}=[X, Y]-\nabla_X Y+\nabla_Y X$,

(II) $R_{XY}=\nabla_{[X,Y]}-\nabla_X\nabla_Y+\nabla_Y\nabla_X$.

Таким образом, кручение показывает, как сильно $\nabla_X Y-\nabla_Y X$ отличается от $[X, Y]$, а кривизна есть мера отличия ∇ от гомоморфизма алгебры Ли.

Задача 16. Доказать (I) и (II).

6.4.4. Координаты

Во всякой системе координат связность, определенная с помощью ковариантных производных, задается достаточно большой совокупностью вещественных функций, снабжаемых для удобства специальными индексами. Эти функции называются *коэффициентами связности.* Другие функции задают коэффициенты переноса кручения, преобразования кривизны и их ковариантные производные. Закон, по которому преобразуются эти коэффициенты при замене координатной системы на M, можно установить с помощью цепного правила для частных производных и свойств ковариантной производной.

Определим эти классические коэффициенты. Пусть $x_1, \ldots, x_d$ — координатная система на M, и положим $X_i=D_{x_i}$. Тогда

$$\nabla_{X_i}X_j=\sum_{k=1}^{d}\Gamma^k_{ij}X_k,$$

$$T_{X_iX_j}=\sum_k T^k_{ji}X_k,$$

$$R_{X_jX_k}(X_m)=-\sum_l R^l_{mjk}X_l,$$

$$\begin{aligned}\nabla R(X_j, X_k, X_s)(X_m)\quad &\text{(по определению)}\\ &=\nabla_{X_s}(R_{X_jX_k}(X_m))-R_{X_jX_k}(\nabla_{X_s}X_m)-\\ &\quad -R_{\nabla_{X_s}X_jX_k}(X_m)-R_{X_j\nabla_{X_s}X_k}(X_m)=\\ &=-\sum_i R^i_{mjk,s}X_i.\end{aligned}$$

Из структурных уравнений (п. 6.4.3) получаем

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$$

и

$$R^l_{mjk} = X_j\Gamma^l_{km} - X_k\Gamma^l_{jm} + \\ + \sum_s (\Gamma^l_{js}\Gamma^s_{km} - \Gamma^l_{ks}\Gamma^s_{jm}).$$

Условием обращения кручения в нуль служит теперь равенство

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}.$$

Поэтому связности с нулевым кручением часто называются симметричными связностями. Использованные обозначения принадлежат Номидзу [51] с точностью до перемены знака T и R.

Выразим, наконец, функции Γ^k_{ij} и R^l_{mjk} непосредственно в терминах связности. Рассмотрим координатное сечение χ в расслоении $B(M)$, определенное как

$$\chi(n) = (n, X_1(n), \ldots, X_d(n)).$$

Тогда

$$R^l_{mjk} = \Phi_{lm}(d\chi X_j, d\chi X_k)$$

и

$$\Gamma^k_{ij} = \varphi_{kj}(d\chi X_i),$$

где φ_{kj} и Φ_{lm} — компоненты $\mathfrak{gl}(dR)$-значных форм φ и Φ.

Знание коэффициентов Γ^k_{ij} для каждой координатной системы из некоторого покрытия M полностью задает связность, поскольку φ достаточно определить на сечениях [см. замечание к (III) в п. 6.4.2].

З а д а ч а 17. Пусть χ — такое же сечение в расслоении $B(M)$, как и выше, ρ, ψ, P, Ψ — снесенные формы $\omega \circ d\chi$, $\varphi \circ d\chi$, $\Omega \circ d\chi$ и $\Phi \circ d\chi$. Получить следующие выражения для этих форм в координатной окрестности:

$$\rho=(dx_1, \ldots, dx_d),$$
$$\psi_{jk}=\sum_i \Gamma^j_{ik}\, dx_i,$$
$$P_k=\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$
$$\Psi_{lm}=\sum_{j,k} R^l_{mjk}\, dx_j\, dx_k.$$

Вывести уравнение, определяющее R^l_{mjk} через Γ^k_{ij}, пользуясь снесенным структурным уравнением

$$d\psi=-\frac{1}{2}[\psi, \psi]+\Psi.$$

Задача 18. Снести на M формулу $d\Phi=-[\varphi, \Phi]$ (следствие, § 5.5), чтобы получить координатную форму тождества Бьянки

$$R^m_{nij,k}+R^m_{njk,i}+R^m_{nki,j}=0.$$

Задача 19. Доказать, что если x_i — нормальные координаты в точке m, то $\Gamma^k_{ij}(m)+\Gamma^k_{ji}(m)=0$.

Задача 20. Доказать, что кручение равно нулю в том и только в том случае, если для каждого m существует такая координатная система в m, что $\Gamma^k_{ij}(m)=0$.

Задача 21. *Связности и действие групп.* Пусть G действует слева на M так, что если $g\in G$ и dg — тождественное преобразование на некотором M_m, то g — единичный элемент G. Пусть $b\in B(M)$, $b=(m, e_1, \ldots, e_d)$ и $I_b: G\to B(M)$, $I_b(g)=(gm, dge_1, \ldots, dge_d)$.

Доказать, что I_b — вложение.

Пусть, кроме того, G действует на $B(M)$ посредством $gb=I_b(g)$. Это послойные отображения. Аффинная связность на M *инвариантна относительно* G, если инвариантна форма связности φ, т. е. $\varphi\circ dg=\varphi$ при любом $g\in G$.

Пусть M — некоторое однородное пространство группы G; показать, что инвариантная связность на (G, M, H)

(см. задачу 5.5) индуцирует инвариантную аффинную связность на M. Пусть, как прежде, $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$. Показать, что при вложении I_b элементы $\mathfrak{h}$ переходят в фундаментальные векторные поля, а элементы $\mathfrak{m}$ — в базисные векторные поля, суженные на $I_b(G)$.

З а д а ч а 22. *Связность произведения.* Пусть M', M'' — многообразия, наделенные аффинными связностями, с формами связности φ', φ'', формами смещения ω', ω'' и т. д. Пусть $M=M'\times M''$. Определим *расслоение адаптированных базисов над M*, образующих *подмногообразие в $B(M)$*:

$$B(M', M'') = \\ =\{((m', m''), e_1, \ldots, e_d) \mid (m', e_1, \ldots, e_{d'}) \in B(M') \text{ и } (m'', e_{d'+1}, \ldots, e_d) \in B(M'')\}.$$

Группой расслоения $B(M', M'')$ является $Gl(d')\times \times Gl(d'')$; очевидно, что $B(M', M'')$ можно отождествить с $B(M')\times B(M'')$. Определить связность $\varphi'\oplus\varphi''$ на $B(M', M'')$ и продолжить по эквивариантности до связности φ на $B(M)$. M вместе с этой аффинной связностью

$$\begin{tikzcd}
 & B(M'\times M'') & \\
B(M')_{\varphi'} \arrow[d] & B(M',M'')_{\varphi'\oplus\varphi''} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[d] & B(M'')_{\varphi''} \arrow[d] \\
M' & M'\times M'' \arrow[l] \arrow[r] & M''
\end{tikzcd}$$

Р и с. 23.

называется *аффинным произведением* аффинно связных многообразий M' и M''. Показать, что связность произведения обладает следующими свойствами:

(а) Пусть γ' и γ'' — кривые в M' и M'', X' и X'' — параллельные векторные поля вдоль γ' и γ'', тогда $X'+X''$ параллельно вдоль $\gamma'\times\gamma''$ и, обратно, всякое параллельное векторное поле на M имеет такой вид.

(б) Геодезические произведения являются произведением геодезических. Поэтому аффинное произведение полных связностей является полным.

(в) $$T_{s'+s'', t'+t''} = T'_{s', t'} + T''_{s'', t''}.$$

(г) $$R_{s'+s'', t'+t''} = R'_{s', t'} + R''_{s'', t''}.$$

Задача 23. Пусть $i: N \to M$ — накрывающее отображение, тогда существует индуцированное естественное накрывающее отображение $\bar{i}: B(N) \to B(M)$ *(продолжение i)*. Если M наделено аффинной связностью и φ — форма связности, то $\bar{i}^*\varphi$ является формой связности на $B(N)$. Описать эту связность в терминах параллельного переноса.

Задача 24. *Связности на аффинном расслоении.* Пусть

$$A(d, R) = \left\{ \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Gl(d+1, R) \mid A \in Gl(d, R), x \in R^d \right\}$$

(x рассматривается как матрица-столбец).

$$A(M) = \{(b, t) \mid b \in B(M), \ t \in M_{\pi(b)}\}.$$

Определим правое действие $A(M) \times A(d, R) \to A(M)$ формулой

$$(b, t) \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (bA, bx + t).$$

Показать, что при этом $A(M)$ становится главным расслоением над M (см. доказательство теоремы 10).

Если рассматривать R^d как гиперплоскость в R^{d+1}, последняя координата которой есть 1, то $A(d, R)$ действует слева на R^d:

$$\begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = Ay + x \quad \text{при} \quad y \in R^d.$$

Поэтому существует ассоциированное расслоение $S(M)$, слои которого гомеоморфны касательным пространствам многообразия M. Раскрыть это соответствие.

Определим отображения

$$\eta\colon B(M)\to A(M),$$
$$\eta_G\colon Gl(d, R)\to A(d, R)$$

равенствами $\eta(b)=(b, 0)$, $\eta_G(A)=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; показать, что это послойное отображение $B(M)$ в $A(M)$, индуцирующее тождественное преобразование базы M.

Пусть ω — форма смещения на $B(M)$; рассмотрим связность φ на $B(M)$ с формами кривизны и кручения Φ и Ω.

Алгебру Ли группы $A(d, R)$ можно реализовать как

$$\mathfrak{a}(d, R)=\left\{\begin{pmatrix} X & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}\middle| X\in \mathfrak{gl}(d, R),\ x\in R^d\right\}.$$

Определим $\mathfrak{a}(d, R)$-значную форму $\bar\varphi$ на $\eta(B(M))$ из условия $\eta^*\bar\varphi=\begin{pmatrix} \varphi & \omega\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; показать, что с помощью правого сдвига $\bar\varphi$ можно продолжить до формы связности на $A(M)$, также обозначаемой через $\bar\varphi$. Пусть $\bar\Phi$ — соответствующая форма кривизны; показать, что

$$\eta^*\bar\Phi=\begin{pmatrix} \Phi & \Omega\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Связность на $A(M)$, индуцированная таким образом связностью на $B(M)$, является частным случаем картановской связности (см. [31, 32, 82]). Рассматривая вместо ω другие горизонтальные R^d-значные эквивариантные формы, можно определить более общие картановские связности; вообще все связности на $A(M)$, распределения которых отличны от $T(\eta(B(M)))$, порождаются таким образом, поскольку $\mathfrak{gl}(d, R)$ приводимо в $\mathfrak{a}(d, R)$.

Возвращаясь к связности $\bar\varphi$, отметим, что параллельный перенос, индуцируемый в ассоциированном расслоении $S(M)$, порождает аффинные преобразования касательных пространств к M, зависящие и от кривизны, и от кручения φ на $B(M)$.

Инфинитезимально преобразование кривизны $\bar{R}$ можно определить аналогично преобразованию кривизны аффинной связности следующим образом.

Пусть x, y, $z \in M_m$, $(b, t) \in A(M)$, $\pi(b, t) = m$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ — подъемы x, y в (b, t). Тогда

$$\bar{R}_{xy} z = -(b, t) \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{y}) (b, t)^{-1} z;$$

здесь слой $S(M)$ над m отождествлен с M_m.

Выбирая $(b, t) \in \eta(B(M))$, показать, что

$$\bar{R}_{xy} z = R_{xy} z + T_{xy}.$$

ГЛАВА 7

Римановы многообразия

На многообразии определяется риманова структура и доказывается, что соответствующая топологическая метрика индуцирует исходную топологию. Определяется расслоение (ортонормальных) реперов, доказывается существование и единственность римановой связности. Заканчивается глава большим набором примеров [22, 33, 80].

7.1. Определения и элементарные свойства

7.1.1. Римановы метрики и ассоциированные топологические метрики

Риманово многообразие — это многообразие M, в каждой точке m которого задана положительно определенная симметричная билинейная форма $\langle\,,\rangle$ на M_m, причем это соответствие принадлежит C^∞ в том смысле, что для всякой координатной системы $(x_1, \ldots, x_d)$ функции $g_{ij} = \langle D_{x_i}, D_{x_j}\rangle \in C^\infty$. Такое соответствие называется *римановой метрикой* на M.

С помощью $Sy(M)$, расслоения симметрических положительно определенных тензоров типа (2,0), можно дать более изящный вариант этого определения: риманово многообразие — это многообразие с выделенным C^∞-сечением расслоения $Sy(M)$.

Пусть M, N — римановы многообразия с метрикой $\langle\,,\rangle_M$ и $\langle\,,\rangle_N$. Тогда C^∞-отображение $f: M \to N$ называется *изометрией*, если оно является гомеоморфизмом и сохраняет метрику, т. е. $\langle dft, dfs\rangle_N = \langle t, s\rangle_M$ при $t, s \in M_m$. Изометрия является диффеоморфизмом. Отображение f называется *локальной изометрией*, если не требуется взаимной однозначности.

Если M — ориентированное риманово многообразие, то существует единственная d-форма θ, определяющая ориентацию, такая, что $\theta(e_1, \ldots, e_d) = \pm 1$ при любом ортонормальном базисе $e_1, \ldots, e_d$ пространства M_m. Форма θ называется *римановым элементом объема* этого ориентированного риманова многообразия.

Примеры в этой главе приведены в последнем параграфе.

Пусть $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система на многообразии M с областью определения O. Тогда на касательных пространствах к O имеется естественное скалярное произведение, а именно евклидово скалярное произведение $\langle D_{x_i}, D_{x_j}\rangle = \delta_{ij}$. Обозначим через $\| \ \|'$ соответствующую евклидову норму.

Обозначим через $\| \ \|$ риманову норму, т. е. $\|t\| = \langle t, t\rangle^{1/2}$, $t \in T(M)$, так что $\|D_{x_i}\| = (g_{ii})^{1/2} \in C^\infty$, и вообще $\left\|\sum_i a_i D_{x_i}\right\| \in C^\infty$ при $a_i \in C^\infty$.

Если вместо положительной определенности требуется лишь невырожденность «билинейной формы» $\langle\ ,\ \rangle$, то M называется *полуримановым многообразием*. Основной результат настоящей главы — существование и единственность римановой связности — справедлив и в полуримановом случае.

Задача 1. Индексом симметричной квадратичной формы на вещественном векторном пространстве называется размерность максимального подпространства, на котором эта форма отрицательно определена. Доказать, что для связного полуриманова многообразия индекс его метрики одинаков на всех касательных пространствах.

В случае несвязного полуриманова многообразия мы также будем требовать, чтобы этот индекс был постоянным.

Многообразие с индексом 1 или $d-1$ называется *лоренцевым многообразием*. Четырехмерное пространство — время Эйнштейна является лоренцевым многообразием.

Длина ломаной C^∞-кривой γ в M определяется интегралом

$$|\gamma| = \int_a^b \|\gamma_*\|,$$

где $[a, b]$ — область определения γ.

Задача 2. Пусть γ — ломаная C^∞-кривая с областью определения $[a, b]$. Рассмотрим неубывающую непрерывную функцию f на $[a, b]$:

$$f(x) = \int_a^x \|\gamma_*\|.$$

(а) Показать, что $f \in C^\infty$ во всякой точке, где $\gamma_*(x)$ существует и отлично от нуля.

(б) Показать, что $\gamma \circ f^{-1} : [0, |\gamma|] \to M$ есть непрерывная корректно определенная функция, даже если f^{-1} не однозначно, и что она принадлежит C^∞ в каждой точке $f(x)$, где $\gamma_*(x) \neq 0$.

(в) Пусть (x, y) — координатная система на двумерном многообразии, а γ — это C^∞-кривая, определенная на интервале, содержащем внутри себя 0, уравнениями

$$x(\gamma(t)) = \int_0^t [\exp(-1/s^2)\sin 1/s]^2\, ds,$$

$$y(\gamma(t)) = \int_0^t \exp(-1/s^2)\sin 1/s\, ds.$$

Показать, что в этом случае $\gamma \circ f^{-1}$ не является ломаной C^∞-кривой, так что на γ нельзя ввести параметр длины с тем, чтобы кривая осталась ломаной C^∞-кривой.

Рассмотрим функцию $\rho : M \times M \to R \cup \{+\infty\}$ вида

$$\rho(m, n) = \inf_{\gamma \in \Gamma} |\gamma|,$$

где Γ — множество всех ломаных C^∞-кривых, соединяющих m с n.

Лемма 1. Функция ρ является метрикой на M.

Доказательство. Очевидно, что эта функция симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника, поэтому надо лишь проверить, что из $\rho(m, n)=0$ следует $m=n$. Предположим, что $m\neq n$, и пусть $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система в m с областью определения U. Пусть O — такой координатный шар, что $\overline{O}\subset U$ и $n\notin O$. Определим функцию $f: R^d\times U\to R$ формулой

$$f(a_1, \ldots, a_d, m)=\left\|\sum a_i D_{x_i}(m)\right\|.$$

Функция $f|_{S^{d-1}\times U}$ непрерывна и положительна и, следовательно, при некотором $k>0$

$$\frac{1}{k}\leqslant f|_{S^{d-1}\times\overline{O}}\leqslant k.$$

Далее, $\left\|\sum a_i D_{x_i}(m)\right\|'=1$ на $S^{d-1}\times O$, откуда

$$\frac{1}{k}\left\|\sum a_i D_{x_i}(m)\right\|'\leqslant\left\|\sum a_i D_{x_i}(m)\right\|\leqslant k\left\|\sum a_i D_{x_i}(m)\right\|' \quad (1)$$

при $(a_1, \ldots, a_d, m)\in S^{d-1}\times\overline{O}$. В силу того, что все выражения в (1) однородны по a_i, неравенства (1) справедливы при $(a_1, \ldots, a_d, m)\in R^d\times\overline{O}$. Пусть теперь γ — произвольная ломаная C^∞-кривая, соединяющая m

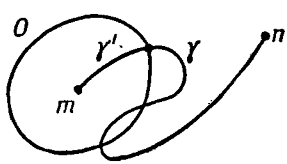


Рис. 24.

с n, и γ' — часть γ от m до точки, в которой γ впервые пересекает границу шара O. Если α — радиус шара O, то

$$\rho(m, n)=\inf|\gamma|\geqslant\inf|\gamma'|\geqslant\frac{1}{k}\inf|\gamma'|'\geqslant\frac{1}{k}\alpha>0,$$

что завершает доказательство леммы.

Задача 3. В этом доказательстве мы воспользовались теоремой о том, что в евклидовом пространстве $|\sigma|' \geqslant \alpha$ для всякой кривой σ, соединяющей начало координат с точкой на сфере радиуса α. Доказать это утверждение, а также то, что равенство достигается, лишь если σ — ломаная C^∞-репараметризация прямой линии. [*Указание*: пусть $r = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$. Разложить $\sigma_*(t)$ на две составляющие: одна составляющая σ_{*T} — это касательная к лучу, исходящему из начала координат, а другая — нормальна к этому лучу. Показать, что $|d(r \circ \sigma)/dt| = \|\sigma_{*T}\|$, и применить основную теорему интегрального исчисления. Сравнить с аналогичной теоремой о геодезических риманова многообразия в § 8.1.]

Теорема 1. Топология, задаваемая метрикой ρ, эквивалентна исходной топологии многообразия M, и потому ρ — непрерывная функция на $M \times M$.

Доказательство. Достаточно для каждой точки $m_0 \in M$ найти окрестность P, топология которой задается метрикой ρ. Пусть $x_1, \ldots, x_d$ — координатная система в m_0, O — открытый шар относительно этих x_i с центром в m_0, O_1 — аналогичный шар, но $\bar{O}_1 \subset O$. Пусть ρ' — евклидова метрика на O, определенная координатами x_i, так что ρ' определяет топологию на O. Таким образом, достаточно найти такие окрестность P точки m_0 и число $c > 0$, что $P \subset O$ и $(1/c)\rho' \leqslant \rho \leqslant c\rho'$ на $P \times P$. Из неравенства (1) следует, что существует такое $c > 0$, для которого

$$\frac{1}{c}\|t\|' \leqslant \|t\| \leqslant c\|t\|'$$

при $t \in M_m$, $m \in \bar{O}_1$. Отсюда для всякой ломаной C^∞-кривой в O_1 имеем $(1/c)|\gamma|' \leqslant |\gamma| \leqslant c|\gamma|'$. Поэтому надо позаботиться лишь о кривых, выходящих из O_1. Снова прибегнем к обрезанию. Пусть δ_1 есть ρ'-радиус O_1 и $\beta \leqslant \delta_1/(2c^2+1)$. Пусть P — открытый шар радиуса β относительно x_i с центром m_0. Теперь уже ясно, что для доказательства неравенств

$$\frac{1}{c}\rho' \leqslant \rho \leqslant c\rho'$$

на $P \times P$ достаточно только проверить, что при вычислении ρ на $P \times P$ можно ограничиться кривыми, содержащимися в O_1. Иначе говоря, если $(m, n) \in P \times P$ и γ — кривая, соединяющая m с n, то существует кривая $\bar{\gamma}$, такая, что $|\bar{\gamma}| \leqslant |\gamma|$, и $\bar{\gamma}$ принадлежит O_1. Пусть γ_1 — это

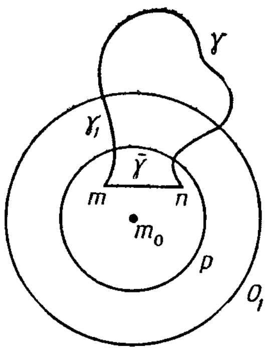


Рис. 25.

часть γ от точки m до первого пересечения γ с границей O_1, и пусть $\bar{\gamma}$ — отрезок прямой от m до n относительно x_i. Тогда

$$|\gamma| \geqslant |\gamma_1| \geqslant \frac{1}{c}|\gamma_1|' \geqslant \frac{1}{c}(\delta_1 - \beta) \geqslant 2c\beta \geqslant c|\bar{\gamma}|' \geqslant |\bar{\gamma}|.$$

Ч. т. д.

Прежде чем продолжать изучение римановых многообразий, покажем, что большой класс многообразий допускает риманову структуру.

Теорема 2. Паракомпактное многообразие M допускает риманову метрику.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — покрытие M координатными окрестностями, $\{f_i\}$ — локально конечное C^∞-разложение единицы, подчиненное этому покрытию. Пусть $(x_1^i, \ldots, x_d^i)$ — координатная система, ассоциированная с U_i, и $\langle\ ,\ \rangle$ — евклидово скалярное произведение, определенное на U_i посредством x_j^i. Тогда на M определяется скалярное произведение $\langle\,,\rangle=\sum f_i\langle\,,\rangle_i$.

Замечание. Для вещественных аналитических многообразий имеется аналогичный результат, вытекающий из решения проблемы аналитического вложения [17, 48].

7.1.2. Векторные расслоения

Пусть (B, R^n, M) есть n-мерное векторное расслоение над M (см. § 3.3, п. (4)) с пространством расслоения B и слоем R^n. *Риманова метрика* на векторном расслоении B — это симметричная положительно определенная билинейная форма класса C^∞ на его слоях. Последнее означает следующее. Пусть $U\subset M$ и χ_1, χ_2 есть C^∞-сечения над U в B. Тогда функция f: $U\to R$, заданная формулой $f(m)=\langle\chi_1(m), \chi_2(m)\rangle$, принадлежит C^∞.

Так же как и выше, можно показать, что всякое n-мерное векторное расслоение B над паракомпактной базой M допускает риманову метрику. Действительно, пусть $U\subset M$ — открытое множество и $\pi^{-1}(U)$ диффеоморфно $R^n\times U$. Тогда в $\pi^{-1}(U)$ с помощью базиса в R^n легко найти n линейно независимых C^∞-сечений $\chi_1, \ldots$ $\ldots, \chi_n$ над U. На $\pi^{-1}(U)$ можно определить риманову метрику, положив $\langle\chi_i, \chi_j\rangle=\delta_{ij}$. Далее доказательство проходит аналогично доказательству теоремы 2 с использованием покрытия M открытыми множествами, над которыми B тривиально, и ассоциированного разложения единицы.

7.2. Расслоение ортонормальных базисов

Пусть M — риманово многообразие. Мы уже рассматривали расслоение базисов $B(M)$ над M. Пусть $F(M)=\{(m, e_1, \ldots, e_d)\,|\,m\in M, e_1, \ldots, e_d$ — ортонормальный базис в $M_m\}$ и π': $F(M)\to M$ — очевидная проекция. $F(M)\subset B(M)$. Мы наделим множество $F(M)$ структурой локального произведения, которая превратит его в подмногообразие многообразия $B(M)$ и в главное расслоение над M, называемое *расслоением ортонормальных* *базисов*; это расслоение порождается приведением группы расслоения $B(M)$ к ортогональной группе.

Пусть $m \in M$, $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система в m с областью определения U. Построим некоторое отображение

$$\lambda_U : U \to Gl(d, R).$$

Пусть $V_1, \ldots, V_d$ — векторные поля на U, определенные следующим условием: при любом $n \in U$ система $V_1(n), \ldots, V_d(n)$ является ортонормализацией Грама — Шмидта системы $D_{x_1}(n), \ldots, D_{x_d}(n)$. Тогда $\lambda_U(n)$ определяется выражением

$$V_i(n) = \sum_{j=1}^{i} (\lambda_U(n))_{ij} D_{x_j}(n).$$

Определим далее отображения

$$\varphi_U\colon \pi^{-1}(U) \to Gl(d, R),$$
$$\varphi'_U\colon \pi'^{-1}(U) \to O(d)$$

из следующих соотношений:

$$e_i = \sum (\varphi_U(n, e_1, \ldots, e_d))_{ij} V_j(n),$$
$$f_i = \sum (\varphi'_U(n, f_1, \ldots, f_d))_{ij} V_j(n),$$

$i = 1, \ldots, d$, где $(n, e_1, \ldots, e_d) \in B(M)$, $(n, f_1, \ldots, f_d) \in F(M)$. Поступая таким образом с координатными окрестностями некоторого покрытия и определяя правое действие так же, как в § 3.2, превратим $B(M)$ и $F(M)$ в главные расслоения, локальные представления которых в виде произведений совместимы с их гладкой структурой. В частности, $F(M)$ является многообразием и имеет структурную группу $O(d)$, тогда как λ_U, являясь, очевидно, отображением класса C^∞, показывает, что структура расслоения, определенная на $B(M)$, совпадает с введенной раньше. Далее, из результатов § 3.4 немедленно следует, что $F(M)$ представляет приведение группы $Gl(d, R)$ расслоения $B(M)$ к подгруппе $O(d)$ и что $F(M)$ — подмногообразие в $B(M)$.

Алгебру Ли $\mathfrak{o}(d)$ можно рассматривать как множество всех $d\times d$-кососимметричных вещественных матриц. Тогда $\{X_{ij}-X_{ji}\mid i<j\}$, где X_{ij} — матрицы, определенные в п. 6.1.2, очевидно, являются базисом в $\mathfrak{o}(d)$. Поэтому $\lambda\mathfrak{o}(d)=\bar{\mathfrak{o}}(d)$ допускает в качестве базиса систему $\{F_{ij}=E_{ij}-E_{ji}\mid i<j\}$. Другими словами, при каждом $f\in F(M)$ вертикальное касательное пространство к

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "O(d) \hookrightarrow Gl(d,R)"] & B(M) \arrow[d] \\
M \arrow[r, phantom, "="] & M
\end{tikzcd}$$

Рис. 26.

$F(M)$, а именно $V'_f=V_f\cap F(M)_f$, где V_f — вертикальное касательное пространство к $B(M)$, порождается касательными

$$\{F_{ij}(f)=E_{ij}(f)-E_{ji}(f)\mid i<j\}.$$

Пусть H' — связность на $F(M)$; тогда с помощью правого действия ее можно продолжить до связности H на $B(M)$. Связность порождает параллельный перенос касательных к M вдоль кривых в M. Далее, очевидно, что этот параллельный перенос сохраняет скалярные произведения, поскольку он определяется посредством $F(M)$, переводя один ортонормальный базис в другой.

Обратно, если H — связность на $B(M)$, при которой параллельный перенос сохраняет скалярные произведения, то H индуцируется некоторой связностью H' на $F(M)$ описанным выше способом. Действительно, пусть $b=(m, f_1, \ldots, f_d)\in F(M)$ и γ — горизонтальная кривая в $B(M)$, проходящая через $(m, f_1, \ldots, f_d)$. Тогда каждая точка на γ должна принадлежать $F(M)$, так как параллельный перенос вдоль $\pi\circ\gamma$, по предположению, переводит $f_1, \ldots, f_d$ в ортонормальные базисы. Следовательно, $H_b \subset F(M)_b$ и потому H' можно определить из условия $H'_b = H_b$.

Задача 4. Доказать, что приведение группы расслоения $B(M)$ к $O(d)$ однозначно порождает риманову метрику, при которой приведенным расслоением оказывается $F(M)$.

Задача 5. Распространить результаты этого параграфа на случай римановой метрики на произвольном векторном расслоении.

Замечание. Аналогично, полуриманова структура на M порождает приведение $B(M)$ к подгруппе группы $Gl(d, R)$, оставляющей инвариантной некоторую невырожденную симметричную билинейную форму, и обратно.

7.3. Римановы связности

Пусть M — риманово многообразие. Связность на $B(M)$ называется *римановой связностью*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(I) параллельный перенос сохраняет скалярные произведения,

(II) форма кручения равна нулю.

Заметим, что ввиду вышесказанного связность на $B(M)$ является римановой тогда и только тогда, когда она является продолжением связности расслоения $F(M)$, форма кручения которой равна нулю. В предыдущей главе мы определили форму смещения ω на $B(M)$. Пусть i: $F(M) \subsetneqq B(M)$ — отображение включения; вновь обозначим через ω горизонтальную 1-форму $i^*\omega$ на $F(M)$. Если H' — связность на $F(M)$, H — ее продолжение на $B(M)$ и соответствующие 1-формы обозначены через φ и φ', то первое структурное уравнение (теорема 6.4) сносится на $F(M)$ в уравнение

$$d\omega = -\varphi'\omega + i^*\Omega.$$

Поэтому распределение H является римановой связностью в том и только в том случае, если оно порождается некоторой связностью на $F(M)$, также называемой римановой, 1-форма φ' которой удовлетворяет соотношению $d\omega = -\varphi'\omega$.

Лемма 2. Между горизонтальными $\mathfrak{o}(d)$-значными 1-формами τ на $F(M)$ и горизонтальными R^d-значными 2-формами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором 1-форме τ соответствует 2-форма $\tau\omega$. Даже если форма τ не горизонтальна, она определяется формой $\tau\omega$.

Доказательство. Покажем вначале, что для всякой горизонтальной 2-формы Ω найдется единственная горизонтальная 1-форма τ, такая, что $\Omega = \tau\omega$. Пусть $K(x, y, z) = \langle \Omega(x, y), \omega(z) \rangle$. Это выражение 3-линейно, горизонтально и кососимметрично по первым двум переменным. Поскольку образом ω служит все R^d, существует единственное $\tau(x) \in \mathfrak{gl}(d, R)$, $x \in F(M)_f$, такое, что при любых $y, z \in F(M)_f$

$$2\langle \tau(x)\omega(y), \omega(z)\rangle = K(x, y, z) + K(z, y, x) - K(x, z, y).$$

Этим $\tau(x)$ действительно определено, поскольку прибавление вертикальных векторов к y и z, не меняющее $\omega(y)$ и $\omega(z)$, не меняет и правой части равенства. Очевидно, τ горизонтально.

Так как перестановка y и z в правой части равенства изменяет ее знак, $\tau(x)$ должно принадлежать $\mathfrak{o}(d)$. Для доказательства равенства $\tau\omega = \Omega$ достаточно проверить, что

$$K(x, y, z) = \langle \tau(x)\omega(y), \omega(z)\rangle - \langle \tau(y)\omega(x), \omega(z)\rangle.$$

Но это так, поскольку сумма второго и третьего членов правой части предыдущего равенства инвариантна относительно перестановки x и y, тогда как первый член меняет при этом знак.

Если τ не горизонтально, то, подставив $\tau\omega$ на место Ω в определении K, автоматически получаем, что $2\langle \tau(x)\omega(y), \omega(z)\rangle$ выражается, как и прежде, через K, откуда $\tau\omega$ определяет τ. Ч. Т. Д.

Замечание. Лемму 2 можно доказать, проверив взаимную однозначность отображения $\tau \to \tau\omega$ и привлекая соображения размерности. Лемма также имеет место, если τ принимает значения в подалгебре, состоящей из всех линейных преобразований, кососимметричных относительно некоторой невырожденной симметричной билинейной формы на R^d.

Теорема 3. Существует взаимно однозначное соответствие между связностями на $F(M)$ и горизонтальными эквивариантными 2-формами на $F(M)$. В качестве соответствующих 2-форм можно брать формы кручения этих связностей, так что две связности равны в том и только в том случае, если равны их кручения.

Доказательство. Пусть φ — форма связности на $F(M)$. Зафиксировав φ, получим взаимно однозначное соответствие между формами связности ψ на $F(M)$ и формами разности $\tau = \psi - \varphi$, которыми являются любые $\mathfrak{o}(d)$-значные горизонтальные эквивариантные 1-формы. По лемме, τ определяется через $\tau\omega$, и легко проверить, что τ эквивариантно тогда и только тогда, когда $\tau\omega$ эквивариантно. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между связностями на $F(M)$ и горизонтальными эквивариантными 2-формами $\tau\omega$.

Наконец, из первого структурного уравнения получаем

$$d\omega = -\varphi\omega + \Omega, \qquad d\omega = -\psi\omega + \Omega_1,$$

откуда

$$\tau\omega = (\psi - \varphi)\,\omega = \Omega_1 - \Omega,$$

т. е. $\Omega_1 = \tau\omega + \Omega$. Поэтому, выбирая $\tau\omega = -\Omega$, мы получим некоторую связность φ_0 с нулевым кручением. Если бы мы начали с φ_0 вместо φ, то получили бы $\Omega_1 = \tau\omega$, т. е. установили бы соответствие между связностями и формами кручения. Ч. Т. Д.

Задача 6. Выразить φ_0 через ω и $d\omega$, исходя из вышеуказанной леммы и того, что $\varphi_0\omega = -d\omega$.

Теорема 4. На $F(M)$ существует единственная связность с нулевым кручением; таким образом, на $B(M)$ имеется единственная риманова связность.

(Это следует непосредственно из предшествующего доказательства.)

Замечание. Из предыдущего замечания ясно, что тем же методом можно доказать существование и единственность римановой связности (определение такое же) для полуримановых структур.

Предложение. Связности на $F(M)$, имеющие те же геодезические, что и данная связность, находятся во взаимно однозначном соответствии с горизонтальными эквивариантными 3-формами на $F(M)$.

Доказательство. Совпадение геодезических двух связностей равносильно тому, что форма их разности τ удовлетворяет условию $\tau(x)\omega(y) = -\tau(y)\omega(x)$ (теорема 6.9); 3-линейная функция $\langle\tau(x)\omega(y), \omega(z)\rangle$ является 3-формой в том и только в том случае, если τ удовлетворяет этому условию и $\mathfrak{o}(d)$-значно. Без труда проверяется, что она горизонтальна и эквивариантна. [Здесь эквивариантность означает инвариантность относительно правого действия группы $O(d)$.]

Задача 7. На двумерном римановом многообразии разные связности на $F(M)$ имеют разные геодезические.

Задача 8. Доказать, что изометрия связного риманова многообразия определяется своими значением и дифференциалом в одной точке по такой схеме:

(а) Вначале задачу свести к тому, что изометрия, которая оставляет неподвижными некоторую точку и касательное пространство в ней, является тождественным отображением.

(б) Изометрия переводит геодезические в геодезические.

(в) Показать, что изометрия, которая оставляет неподвижными некоторую точку и касательное пространство в ней, является тождественной в некоторой окрестности этой точки.

(г) Совокупность всех неподвижных точек непрерывного отображения является замкнутым множеством.

7.4. Примеры и задачи

1. *Евклидово пространство.* Для каждого $m \in R^d$ положим $\langle D_i(m), D_j(m)\rangle = \delta_{ij}$, определив тем самым так называемую *плоскую риманову метрику на* R^d. Если не оговорено противное, метрика на R^d будет предполагаться плоской.

Задача 9. Показать, что связность на пространстве R^d, заданная его групповой структурой, как в задаче 6.6, является римановой, и потому эта риманова связность действительно является плоской. Найти геодезические.

2. *Одномерные римановы многообразия.* Так как римановы многообразия метризуемы, то они паракомпактны, поэтому подлежащее многообразие связного одномерного риманова многообразия должно совпадать либо с R, либо с S^1. В каждом случае имеется только два векторных поля с постоянной нормой, равной 1; интегральная кривая такого векторного поля порождает изометрию многообразия с интервалом из R (см. пример 1) или накрывающее отображение R на S^1, являющееся локальной изометрией и периодической функцией на R. В последнем случае наименьший период является *длиной* S^1, а после деления на 2π — *радиусом* S^1, так как S^1 можно вложить в R^2 как окружность такого радиуса (см. пример 3).

3. *Вложения.* Пусть $i: N \to M$ есть C^∞-вложение (или в более общем случае погружение) и M — риманово многообразие. Тогда на N имеется единственная риманова метрика, при которой di сохраняет скалярные произведения. Если N снабжено этой метрикой, то говорят, что i — *изометричное вложение (погружение)*. Весьма трудная теорема Нэша [55] утверждает, что каждое риманово многообразие допускает изометрическое вложе-

ние в произвольно малую окрестность в евклидовом пространстве размерности $d(d+1)(3d+11)/2$, а если это многообразие компактно, то размерности $d(3d+11)/2$. Один из более трудных открытых вопросов — насколько можно усилить эту теорему, сокращая разрыв в размерностях, а также определяя степень неединственности. (Погружения определяются и рассматриваются в гл. 10.)

Задача 10. Рассмотреть поверхность вращения вокруг оси u_3 окружности радиуса r с центром $(s, 0, 0)$, $r<s$, расположенной в плоскости $u_2=0$. Представить ее как образ вложения 2-тора T^2. Вычислить риманову метрику.

4. *Риманова d-сфера* радиуса r, $S^d=\{x\in R^{d+1} \mid \|x\|=r\}$, наделяется римановой метрикой, индуцированной из R^{d+1}. Все изометрии являются вращениями, поэтому S^d допускает $O(d+1)$ как транзитивную группу изометрий.

Задача 11. Пусть $x_0, \ldots, x_{d-1}$ — линейно независимые точки в R^{d+1}, лежащие на S^d. Показать, что существует единственное изометрическое вложение S^k, k-сферы радиуса r, в S^d, чей образ содержит $x_0, \ldots, x_k$, $k=1, \ldots, d-1$. Это дает цепочку $S^1\subset S^2\subset \ldots \subset S^{d-1}\subset S^d$. Доказать, что всякую такую цепочку можно отобразить на любую другую с помощью некоторого элемента из $SO(d+1)$.

Задача 12. Установить следующие свойства S^d:

(а) Для любого $m\in S^d$ существует единственная изометрия j_m, оставляющая m неподвижным, и такая, что dj_m является отображением умножения на -1 в пространстве S^d_m.

(б) Для каждого ненулевого $t\in S^d_m$ найдется единственная большая окружность $S^1(t)$, касающаяся t, причем $S^1(t)$ инвариантна относительно j_m, т. е. $S^1(t)=j_m(S^1(t))=S^1(-t)$.

(в) Если X — параллельное векторное поле вдоль $S^1(t)$, то $dj_mX=-X$.

(г) Пусть m, n, p — три равноотстоящие точки на $S^1(t)$, и $X(m)=t$. Используя j_n, показать, что $X(p)$

является касательной к $S^1(t)$ в p и, следовательно, $S^1(t)$ — геодезическая.

5. *Римановы произведения.* Пусть M' и M'' — римановы многообразия; $M=M'\times M''$ становится римановым многообразием, если скалярные произведения определить следующим образом:

$$\langle s'+s'',\ t'+t''\rangle=\langle s',\ t'\rangle'+\langle s'',\ t''\rangle'',$$

т. е. касательные одного многообразия считаются перпендикулярными к касательным другого; M называется тогда *римановым произведением* M' *и* M''. Например, R^d есть d-кратное риманово произведение прямой R.

Задача 13. Показать, что риманова связность риманового произведения римановых многообразий является аффинным произведением римановых связностей этих многообразий (см. задачу 6.22).

6. *Плоские торы.* d-кратное риманово произведение окружности S^1 на себя называется *плоским d-мерным тором* T^d. Окружности S^1 разного радиуса обычно не различаются, так что, вообще говоря, не все радиусы тора одинаковы.

Задача 14. Показать, что плоский d-мерный тор T^d является плоским многообразием.

7. *Накрывающие многообразия.* Пусть $i: N\to M$ — накрывающее отображение, и M — риманово многообразие; тогда i можно рассматривать как погружение, и если N наделено индуцированной римановой метрикой, то (i, N) называется *римановым накрытием многообразия* M. Например, односвязным римановым накрывающим пространством плоского тора служит R^d, так как это соотношение верно при $d=1$ и сохраняется для произведений.

Задача 15. Доказать последнее замечание, а именно, что если $i': N'\to M'$, $i'': N''\to M''$ — римановы накрытия, то риманово произведение $N'\times N''$ является римановым накрытием произведения $M'\times M''$ с накрывающим отображением $i'\times i''$.

Задача 16. Этот процесс можно обратить. Если i: $N \to M$ — накрывающее отображение и N снабжено римановой структурой, при которой преобразования листов являются изометриями, то на M имеется естественная индуцированная риманова структура, которая превращает (i, N) в риманово накрытие M. Например, вещественное проективное пространство P^d накрывается S^d и может быть наделено структурой, которая индуцируется римановой структурой S^d из примера 4.

8. *Параллелизуемые многообразия.* Если $X_1, \ldots, X_d$ — параллелизующие векторные поля на многообразии M, то $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ (константы) определяют соответствующую риманову метрику на M. Частными случаями являются R^d и T^d. Вообще всякая группа Ли обладает такой метрикой.

Задача 17. Показать, что риманова связность этой метрики совпадает с прямой или противоположной связностями в том и только в том случае, если $[X_i, X_j] = 0$ для всех i, j.

Задача 18. Риманова связность параллелизации не имеет кручения (задача 6.5) тогда и только тогда, когда для всех постоянных линейных комбинаций X, Y параллелизующих полей выполнено равенство $\langle [X, Y], X \rangle = 0$, равносильное условию

$$\langle [X_i, X_j], X_k \rangle + \langle X_j, [X_i, X_k] \rangle = 0$$

при всех i, j, k. Доказать это с помощью следующей серии задач:

(а) Риманова связность и связность без кручения совпадают тогда и только тогда, когда геодезические римановой связности совпадают с геодезическими прямой связности (следствие теоремы 6.9).

(б) Пусть θ есть $O(d)$-значная форма на M, полученная снесением формы римановой связности с помощью естественного сечения параллелизации, и ρ — параллелизующая форма. Показать, что обе связности совпадают в том и только в том случае, если $\theta(t)\rho(t) = 0$ для каждого $t \in T(M)$. (Воспользоваться теоремой 6.9, заметив, что θ является формой разности, снесенной на M.)

(в) С помощью структурного уравнения $d\rho = -\theta\rho$ и косой-симметрии θ доказать желаемый результат. (Указание: $\langle \rho([X, Y]), \rho(X) \rangle = \langle [X, Y], X \rangle$.)

Отметим, что аффинная связность параллелизует $B(M)$, а, следовательно, и риманову структуру; то же происходит с римановой связностью на $F(M)$. Показать, что в последнем случае горизонтальные геодезические в $F(M)$ совпадают с подъемами геодезических в M, а вертикальные геодезические оказываются интегральными кривыми фундаментальных векторных полей F_{ij}. Однако интегральные кривые постоянных линейных комбинаций фундаментальных и базисных векторных полей в общем случае не являются геодезическими.

9. *Гомометрии.* Пусть $f: N \to M$ — диффеоморфизм римановых многообразий; тогда f называется *гомометрией* (с множителем растяжения a), если при любых s, $t \in N_n$ (n любое) $\langle df(s), df(t) \rangle = a^2 \langle s, t \rangle$. Если f — тождественное преобразование на многообразии, то по данной римановой метрике на M (или N) эта формула определяет другую метрику, и тогда f — гомометрия.

Мы уже отмечали, что S^1 может иметь различные радиусы; окружности разного радиуса гомометричны друг другу.

Если $N = M$ как риманово многообразие, то в этом случае гомометриями могут быть только изометрии ($a = 1$). В самом деле, это так, когда M компактно (более общо — имеет конечный объем), поскольку гомометрия должна умножать объем на a^d. (Понятие объема определяется стандартным способом теории меры.)

Если же M имеет бесконечный объем, то оно вполне может допускать самогомометрии. Например, умножение на a является гомометрией пространства R^d.

Задача 19. Всякая гомометрия $f: M \to N$ распространяется до отображения $\bar{f}: B(M) \to B(N)$ ($\bar{f}(m, e_1, \ldots$ $\ldots, e_d) = (f(m), df(e_1), \ldots, df(e_d))$), называемого *продолжением* f на $B(M)$, которое сохраняет риманову связность. В частности, умножение метрики на положительный скаляр не меняет римановой связности. Однако две метрики с одинаковой связностью не обязательно отличаются только множителем, в чем можно убедиться, рассматривая римановы произведения.

10. *Конформные отображения.* Если в примере 9 коэффициент a считать положительной C^∞-функцией от n, то получается *конформное отображение*

$$f\colon N\to M,\ \langle df(s),\ df(t)\rangle = (a(n))^2\langle s,\ t\rangle,\qquad s, t\in N_n.$$

Дробнолинейные преобразования сферы Римана в теории функций комплексного переменного являются конформными преобразованиями римановой 2-сферы, а гомометрии R^d в комбинации со стереографической проекцией дают конформные отображения римановой d-сферы.

Задача 20. Доказать, что стереографическая проекция является конформным отображением $S^d-\{pt\}$ на R^d.

11. *Действие компактных групп.* Если G — компактная группа Ли, то G обладает единственной мерой (Хаара), инвариантной относительно левых и правых сдвигов, причем мера всего пространства G равна 1. Если G действует гладко на M, то при некоторой метрике на M элементы группы G являются изометриями. Действительно, пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — произвольная риманова метрика на M, и для $s,\ t\in M_m$ положим

$$\langle s,\ t\rangle' = \int\limits_{g\in G}\langle dg(s),\ dg(t)\rangle.$$

Задача 21. Доказать, что элементы G действуют как изометрии на $(M,\ \langle\ ,\ \rangle')$. Пусть f — произвольная самоизометрия на $(M,\ \langle\ ,\ \rangle)$, коммутирующая с действием G, т. е. $fg=gf$ для каждого $g\in G$; показать, что f — изометрия на $(M,\ \langle\ ,\ \rangle')$.

Задача 22. Показать, что ортогональные дополнения вертикальных касательных пространств относительно правоинвариантной метрики на главном расслоении образуют распределение связности. Получить отсюда новое доказательство того, что паракомпактное главное расслоение допускает связность (см. § 5.4).

Задача 23. (а) Показать, что левоинвариантная метрика на группе Ли G соответствует скалярному произведению на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

(б) Левоинвариантная метрика на G является правоинвариантной (и, следовательно, присоединенной инвариантной) в том и только в том случае, если соответствующее скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ на $\mathfrak{g}$ *инвариантно*; это значит, что если $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, то

$$\langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle = 0,$$

т. е. $\operatorname{ad} X$ кососимметрично. (Это всего лишь иное выражение того факта, что функция $\langle \operatorname{Ad} e^{tX} Y, \operatorname{Ad} e^{tX} Z\rangle$ постоянна тогда и только тогда, когда ее производная равна нулю. Ср. с задачей 2.5.)

(в) Если группа G компактна, то она допускает такую метрику.

(г) Римановы связности этих инвариантных метрик на G совпадают со связностью без кручения из задачи 6.6 и, следовательно, полны (см. задачу 18).

(д) *Форма Киллинга* группы Ли G — это билинейная форма $k(\ ,\ )$ на $\mathfrak{g}$, определенная следующим образом: если $X, Y \in \mathfrak{g}$, то

$$k(X, Y) = \operatorname{tr}(ad\ X \circ ad\ Y).$$

Форма $k(\ ,\ )$ обладает свойством инвариантности (б), но не всегда является определенной или даже невырожденной, например если $\mathfrak{g}$ имеет нетривиальный центр.

12. *Римановы однородные пространства.* Если на M действует транзитивная группа Ли изометрий, то M является *римановым однородным пространством.* Пример 11 показывает, что однородное пространство компактной группы Ли можно снабдить однородной метрикой.

Задача 24. Пусть H — замкнутая редуктивная подгруппа группы Ли G (см. задачу 5.5), так что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, причем $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Предположим, что $\mathfrak{m}$ допускает скалярное произведение, инвариантное относительно $\operatorname{Ad} H$. Показать, что G/H является римановым однородным пространством.

Многообразие Штифеля $V_{d,r}$ упорядоченных множеств r ортонормальных векторов в R^d является римановым однородным пространством как группы $O(d)$, так и группы $SO(d)$, а именно:

$$V_{d,r} = O(d)/O'(d-r) = SO(d)/SO'(d-r),$$

где $O'(d-r)$ и $SO'(d-r)$ действуют на последние $d-r$ компонент в R^d. Если положить $O(0)=SO(0)=\{1\}$, то частными случаями будут $O(d)=V_{d,d}$, $SO(d)=V_{d,d-1}$ и $S^{d-1}=V_{d,1}$.

13. *Многообразия флагов.* Если $d_1, \ldots, d_n$ — разбиение числа d, то можно определить многообразие флагов $Fl(d; d_1, \ldots, d_n)$ как множество n-наборов $(V_1, \ldots, V_n)$, где V_i — подпространство в R^d размерности d_i, причем эти подпространства взаимно ортогональны. Другой подход: $Fl(d; d_1, \ldots, d_n)$ можно рассматривать как множество возрастающих последовательностей

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{n-1} \subset W_n = R^d$$

подпространств в R^d, где $d_i = \dim W_i - \dim W_{i-1}$.

Задача 25. (а) Установить взаимно однозначное соответствие между двумя этими множествами.

(б) Ортогональная группа $O(d)$ действует на n-наборы $(V_1, \ldots, V_n)$, а общая линейная группа $Gl(d, R)$ — на возрастающие последовательности $W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{n-1} \subset W_n = R^d$. Найти группу изотропии в каждом случае, снабдив тем самым $Fl(d; d_1, \ldots, d_n)$ структурой однородного пространства двумя разными способами.

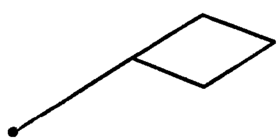


Рис. 27.

(в) Так как $O(d)$ компактно, то на $Fl(d; d_1, \ldots, d_n)$ имеется риманова метрика, при которой элементы $O(d)$ действуют транзитивно и изометрически. При $p = (V_1, \ldots, V_n) \in Fl(d; d_1, \ldots, d_n)$ и $1 \leqslant i < j \leqslant n$ определим

m_{ij} как подпространство в $Fl(d; d_1, \ldots, d_n)_p$, натянутое на касательные к кривым, вдоль которых изменяются только V_i и V_j. Используя инвариантность присоединенного представления алгебры изотропии, показать, что эти подпространства m_{ij} взаимно ортогональны.

14. *Римановы симметрические пространства* [12, 25, 80]. Если риманово многообразие M для каждой своей точки m допускает изометрию f_m, при которой m неподвижно, а $df_m|_{M_m} = -1$ (f_m называется *симметрией в* m), то M является *римановым симметрическим пространством.*

Так как при изометрии геодезические переходят в геодезические, то, последовательно применяя симметрии в точках, расположенных вдоль геодезической, легко видеть, что геодезические неограниченно продолжаемы, откуда M — полное многообразие. Если M связно, то, любые две его точки можно соединить ломаной геодезической (см. задачу 8), а тогда композиция симметрий в серединах этих геодезических сегментов оказывается изометрией, преобразующей один конец ломаной в другой. Таким образом, группа изометрий транзитивна, а так как эта группа всегда является группой Ли, то M — риманово однородное пространство [33].

Риманова сфера S^d — симметрическое пространство.

Задача 26. Доказать, что в римановом симметрическом пространстве всякая C^∞-кривая, инвариантная относительно симметрии в каждой своей точке, является репараметризованной геодезической (ср. с задачей 12).

Задача 27. Риманово однородное пространство, симметричное относительно какой-нибудь своей точки, является римановым симметрическим пространством.

Задача 28. *Другое определение римановых симметрических пространств.* Пусть M — риманово однородное пространство, $M = G/H$. Тогда M является *однородным римановым симметрическим пространством*, если G допускает автоморфизм f с такими свойствами:

(I) f^2 — тождественное преобразование.

(II) Точки H неподвижны относительно f, и H содержит наибольшую связную подгруппу, точки которой неподвижны относительно f.

(а) Пусть π: $G \to M$ — каноническая проекция; определим отображение f_0: $M \to M$ равенством $f_0(\pi(g)) = \pi(f(g))$. Показать, что определение f_0 корректно и что $df_0 = -1$ на M_0, где $0 = \pi(e)$.

(б) Используя формулу $f_0 \circ L_g = L_{f(g)} \circ f_0$, где L_g обозначает левое действие G на M, и изометричность L_g, показать, что f_0 — изометрия. Вывести отсюда, что всякое однородное риманово симметрическое пространство является римановым симметрическим пространством.

(в) Пусть M — связное риманово симметрическое пространство. Мы видели, что M является римановым однородным пространством, $M = G/H$, где $H = \{g \in G \mid g(m) = m\}$, m — фиксированная точка в M. Определим f: $G \to G$ равенством $f(g) = f_m g f_m^{-1}$. Показать, что f удовлетворяет условиям (I) и (II) для однородного риманова симметрического пространства (см. задачу 8).

Задача 29. Пусть G — группа Ли с двусторонней инвариантной метрикой. Показать, что обратное отображение ψ: $G \to G$, определенное как $\psi(g) = g^{-1}$, является изометрией; вывести отсюда, что G — риманово симметрическое пространство.

Можно представить G также как однородное риманово пространство группы $G \times G$ с автоморфизмом f вида $f(g, h) = (h, g)$. Найти группу изотропии и отождествить G с однородным пространством. Описать, в частности, действие $G \times G$ на G.

Задача 30. *Грассмановы многообразия.* Грассманово многообразие $G_{d,r}$ r-плоскостей в R^d является римановым однородным пространством группы $O(d)$, а именно:

$$G_{d,r} = \frac{O(d)}{O(r) \times O'(d-r)},$$

где $O(r)$ действует на первые r, а $O'(d-r)$ на последние $d-r$ компонент в R^d. Пусть $g \in O(d)$, тогда

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A есть $r \times r$-матрица, D есть $(d-r) \times (d-r)$-матрица. Определим f формулой

$$f(g) = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}.$$

Доказать, что f определяет $G_{d,r}$ как однородное риманово симметрическое пространство.

Грассманово многообразие ориентированных r-плоскостей в R^d

$$\tilde{G}_{d,r} = \frac{SO(d)}{SO(r) \times SO'(d-r)}$$

является двулистным накрытием многообразия $G_{d,r}$, а также симметрическим пространством.

Задача 31. Пусть M и N — римановы симметрические пространства, i: $P \to M$ — накрывающее отображение. Показать, что $M \times N$ и P с индуцированными римановыми структурами являются римановыми симметрическими пространствами.

Задача 32. *Линзовые пространства.* Рассмотрим преобразование

$$(z_1, z_2) \to (z_1 \exp 2\pi i/p, \ z_2 \exp 2\pi i q/p)$$

на

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \mid z_i \in C, \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

где p и q — взаимно простые целые числа. Оно порождает дискретную группу изометрий на S^3, которую можно рассматривать как группу преобразований листов некоторого многообразия M, накрытого S^3. Многообразие M называется линзовым пространством и имеет метрику, индуцированную метрикой S^3. Показать, что M не является римановым симметрическим пространством, хотя его накрывающее таковым является.

Замечание. Отметим, что если, не требуя связности, предположить изометричность компонент риманова симметрического пространства M, то M по-прежнему будет однородным, так что в этом случае оба понятия эквивалентны. Нетрудно придумать примеры римановых многообразий, компоненты которых не изометричны, но которые все же допускают симметрии f_m, однако эти примеры довольно искусственны, и мы не будем принимать их во внимание.

15. *Комплексные проективные пространства.* Пусть S^{2d+1} — риманова сфера радиуса r. В главном расслоении (S^{2d+1}, S^1, CP^d) (задача 3.12) S^1 действует как группа изометрий, откуда касательные подпространства, нормальные к вертикальным в точках S^{2d+1}, определяют связность H на главном расслоении S^{2d+1} (задача 22). Если считать $d\pi|_{H_s}$ изометрией между $CP^d_{\pi(s)}$ и H_s, то этим определяется риманова метрика на CP^d. Послойные изометрии на S^{2d+1} (среди них все унитарные преобразования C^{d+1}, суженные на S^{2d+1}) образуют транзитивную группу изометрий на CP^d, откуда CP^d — риманово однородное пространство. Более тщательное изучение этих послойных отображений показывает, что CP^d является также и симметрическим пространством.

16. *Комплексные многообразия* [15, 16, 93]. Пусть M — комплексное многообразие комплексной размерности d (см. задачи 1.7 и 3.10); M называется *эрмитовым многообразием*, если каждому $m \in M$ отнесена положительно определенная эрмитова билинейная форма $\langle\, , \rangle$ на $\mathscr{H}_m$, и это соответствие принадлежит C^∞ в том смысле, что если $z_1, \ldots, z_d$ — комплексная координатная система в m, то функции $g_{ij} = \langle \partial/\partial z_i, \partial/\partial z_j \rangle$ являются комплексными C^∞-функциями, т. е. $g_{ij} \in \mathscr{F}$. Нельзя требовать голоморфности формы $\langle\, , \rangle$, поскольку $g_{ij} = \overline{g}_{ji}$.

Задача 33. Так как M комплексно, то его расслоение базисов $B(M)$ приводится к расслоению $CB(M)$ с группой $GL(d, C)$; $CB(M)$ можно рассматривать как расслоение голоморфных базисов голоморфных касательных пространств $\mathscr{H}_m$ многообразия M. Показать, что существование эрмитовой структуры на M эквивалентно приводимости $CB(M)$ к расслоению $CF(M)$ с группой $U(d) \subset GL(d, C)$. Так или другим способом показать, что эрмитова структура всегда существует. Показать, что $CF(M)$ можно реализовать как расслоение голоморфных базисов, ортонормальных относительно данных эрмитовых форм.

Задача 34. Установить, что $\langle\, ,\rangle$ можно однозначно продолжить до положительно определенной эрмитовой формы на $\mathcal{T}_m$, причем $\langle s, t\rangle=\overline{\langle \bar{s}, \bar{t}\rangle}$, если $s, t \in \mathcal{H}_m$ и $\langle \mathcal{H}_m, \overline{\mathcal{H}}_m\rangle=0$.

Задача 35. Показать, что если $s, t \in \mathcal{M}_m$, то

$$\langle s, t\rangle=2R\langle Ps, Pt\rangle=\frac{1}{2}R\langle \tilde{s}, \tilde{t}\rangle,$$

где $\tilde{s}=s-iJs$, $\tilde{t}=t-iJt$ и R — «вещественная часть».

Этим определяется риманова структура на подлежащем вещественном многообразии эрмитова многообразия M, и потому $F(M)$ определено и обладает римановой связностью. Действительно, $F(M)$ определяется метрикой $\langle\, ,\rangle'=2\langle\, ,\rangle$.

Показать, что J является полем ортогональных преобразований относительно этого симметричного скалярного произведения.

Задача 36. Так как $\mathcal{T}_m=\mathcal{M}_m+i\mathcal{M}_m$, то всякое $t \in \mathcal{H}_m$ можно разложить как $t=Rt+iIt$, где $Rt, It \in \mathcal{M}_m$. Показать, что $\langle Rt, It\rangle=0$ и потому отображение

$$i\colon\ CF(M)\to F(M),$$

заданное равенством $i(m, t_1, \ldots, t_d)=(m, Rt_1 \ldots, Rt_d, It_1, \ldots, It_d)$, корректно определяет вложение вещественного многообразия $CF(M)$, совместимое с ранее определенным включением $CB(M)$ в $B(M)$. Мы будем писать $CF(M)$ вместо $i(CF(M))$.

Следующая задача показывает, что риманова связность на $F(M)$ в общем случае не приводима к некоторой связности на $CF(M)$.

Задача 37. Следующие предложения эквивалентны:

(a) Данная риманова связность на $F(M)$ приводима к связности на $CF(M)$, т. е. если $b \in CF(M)$, то H_b — касательное пространство к $CF(M)$.

(б) Параллельный перенос голоморфной касательной является голоморфной касательной.

(в) Параллельный перенос коммутирует с проекцией P (см. стр. 69).

(г) Параллельный перенос коммутирует с J.

(д) Ковариантные производные J равны нулю.

(е) Если X, Y — векторные поля на M, то $\nabla_X(JY) = J\nabla_X(Y)$.

Задача 38. Для $s,\ t \in \mathcal{M}_m$ определим $\Omega(s,\ t) = -\langle Js,\ t\rangle$. Показать, что Ω — дифференциальная 2-форма на M и

$$\Omega(s,\ t) = 2I\langle Ps,\ Pt\rangle = \frac{1}{2} I\langle\tilde{s},\ \tilde{t}\rangle.$$

Говорят, что M — *кэлерово многообразие*, если $d\Omega = 0$. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

(а) $d\Omega = 0$.

(б) Все ковариантные производные Ω равны нулю.

(в) $\nabla_X(JY) = J\nabla_X(Y)$, здесь X, Y — векторные поля. [*Указание*: проверить следующие импликации:

$$(а) \Rightarrow (в) \Rightarrow (б) \Rightarrow (а).$$

Вспомнить задачи 6.13, 6.14 и определение внешней производной с помощью векторных полей.]

Задача 39. В этой задаче дается набросок прямого доказательства того факта, что кэлеровость M равносильна приводимости римановой связности на $F(M)$ к $CF(M)$.

Пусть φ_{ij}, ω_k — компоненты связности и формы смещения на $F(M)$. Пусть $\tilde{\Omega} = \Omega \circ d\pi$. Определим поле линейных преобразований $\tilde{J}$ на $F(M)$, положив $\tilde{J}|_{V_b} = 1$ и $\tilde{J}|_{H_b} = (d\pi|_{H_b})^{-1} \circ J \circ d\pi$. Доказать следующее:

(а) $d\tilde{\Omega} = 0$ тогда и только тогда, когда $d\Omega = 0$.

(б) Вертикальное касательное пространство к $CF(M)$ порождается векторными полями $F^{i,\,j} + F^{i+d,\,j+d}$ и $F^{i,\,j+d} - F^{i+d,\,j}$.

На $CF(M)$ имеем

(в) $\omega_i \circ \tilde{J} = -\omega_{i+d}, \quad \omega_{i+d} \circ \tilde{J} = \omega_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant d).$

(г) $$\tilde{\Omega} = 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant d} \omega_i \omega_{i+d}.$$

(д) $$\frac{1}{2} d\tilde{\Omega} = \sum_{i,\, j \leqslant d} (\omega_{ij} - \omega_{i+d,\, j+d}) \omega_i \omega_{j+d} + \\ + \sum_{i < j \leqslant d} (\omega_{i+d,\, j} + \omega_{i,\, j+d}) (\omega_{i+d} \omega_{j+d} + \omega_i \omega_j).$$

(е) Утверждение, что если t — касательная к $CF(M)$, то Vt — касательная к $CF(M)$, равносильно равенству $d\tilde{\Omega} = 0$.

Задача 40. Показать, что Ω — форма типа (1.1) и что $\Omega^d \neq 0$. Кроме того, если M компактно и кэлерово, то форма Ω^p не точна ни при каком $p \leqslant d$. (Форма θ называется *точной*, если существует форма ψ, такая, что $d\psi = \theta$.)

Задача 41. Пусть $\langle\, ,\, \rangle$ — риманова форма на комплексном многообразии, относительно которой J ортогонально. Построить эрмитову форму на M, из которой данная риманова форма получается так же, как в задаче 35.

Задача 42. Показать, что (комплексное) подмногообразие кэлерова многообразия также является кэлеровым.

Задача 43. *Комплексное проективное пространство.* Пусть $t_0, \ldots, t_d$ — однородные комплексные координатные функции на CP^d. Тогда можно взять следующую базу координатных систем. Пусть

$$U_i = \{p \in CP^d \mid t_i(p) \neq 0\}, \qquad i = 0, \ldots, d,$$

а координатные функции φ_i: $U_i \to C^d$ определяются равенствами

$$z_j^i = z_j \circ \varphi_i = t_j / t_i.$$

Тогда эти φ_i определяют комплексную структуру на CP^d. На каждом U_i возьмем функцию $f_i = \sum_{j=0}^{d} z_j^i \bar{z}_j^i$. Заметим, что на $U_i \cap U_k$

$$f_k = f_i z_i^k \bar{z}_i^k.$$

Воспользовавшись этим, показать, что на CP^d существует вещественная замкнутая форма Ω типа (1,1), такая, что на U_j

$$\Omega = -id'd''f_j \qquad \text{(задача 4.28)}.$$

Показать, что симметричная форма, ассоциированная с Ω, положительно определена и превращает J в ортогональное преобразование. Вывести отсюда, что CP^d — кэлерово многообразие относительно соответствующей эрмитовой структуры.

Следствием двух предыдущих задач является кэлеровость всякого неособенного проективного многообразия [1]).

[1]) Неособенным проективным многообразием называется комплексное подмногообразие проективного пространства. — *Прим. перев.*

ГЛАВА 8

Геодезические и полные римановы многообразия

В первом параграфе с помощью леммы Гаусса устанавливается свойство локального минимума для геодезических, во втором — доказывается теорема Хопфа — Ринова о полных римановых многообразиях. В частности, показывается, что в случае полного многообразия геодезические реализуют глобальные расстояния. Кроме того, рассматривается длина непрерывной кривой [22, 33, 80, 94].

8.1. Геодезические

В § 6.3 для произвольных $m \in M$, $b = (m, e_1, \ldots, e_d) \in B(M)$ мы определили отображения $\exp_m: M_m \to M$, $\exp_b: M_m \to B(M)$, зависящие от связности на $B(M)$, причем $\exp_b$ — достаточно естественное поднятие отображения $\exp_m$. Мы обратили внимание на то, что, вообще говоря, эти отображения определены только на некоторой окрестности начала в M_m, где они принадлежат C^∞, причем $\exp_m$ является диффеоморфизмом, быть может, меньшей окрестности начала. Для того чтобы эти отображения были определены в целом, нужно предположить, что геодезические, которые выходят из m, неограниченно продолжаемы.

Итак, пусть M — риманово многообразие; тогда отображение $\exp_b$ получается следующим образом:

Пусть $b = (m, f_1, \ldots, f_d) \in F(M)$, φ — риманова связность на $F(M)$, $p = \sum p_i f_i \in M_m$ и $\bar{\sigma}$ — единственная интегральная кривая поля $\sum p_i E_i$, причем $\bar{\sigma}(0) = b$. Тогда $\exp_b(p) = \bar{\sigma}(1)$.

Векторное поле E_i — это сужение на $F(M)$ векторного поля, определенного на $B(M)$ (п. 6.1.2). Отображение $\overline{\exp_b}$ принадлежит C^∞ и фактически является радиально горизонтальным поднятием в $F(M)$ отображения $\exp_m$. В частности, образ M_m при $\overline{\exp_b}$ содержится в $F(M)$.

Пусть Φ — форма кривизны данной римановой связности, ω — форма смещения на $F(M)$, определенная в § 7.3. Рассмотрим формы θ, Θ, ψ на M_m:

$$\theta = \overline{\exp_b}^* \varphi,$$

$$\Theta = \overline{\exp_b}^* \Phi,$$

$$\psi = \overline{\exp_b}^* \omega,$$

тем самым определяются соответственно вещественные формы θ_{ij}, Θ_{ij}, ψ_{ij}. Структурные уравнения принимают вид

$$d\psi = -\theta\psi,$$

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \Theta.$$

(В терминах компонент

$$d\psi_i = \sum_{k=1}^{d} \theta_{ki}\psi_k,$$

$$d\theta_{ij} = -\sum_{k=1}^{d} \theta_{ik}\theta_{kj} + \theta_{ij}.)$$

Пусть $p \in M_m$, ρ — луч из m в p, $\sigma = \exp_m \circ \rho$, $\overline{\exp_b}\, p = (m, f_1', \ldots, f_d')$ (таким образом, f_i' — параллельный перенос вектора f_i вдоль σ). Тогда если $s, t \in (M_m)_p$, то

(а) $d \exp_m s = \sum \psi_i(s) f_i'$,

(б) $$\begin{cases} \langle d \exp_m s,\ d \exp_m t \rangle = \langle \psi(s), \psi(t) \rangle = \sum \psi_i(s)\psi_i(t), \\ \| d \exp_m s \|^2 = \| \psi(s) \|^2 = \sum \psi_i(s)^2. \end{cases}$$

[(б) — непосредственное следствие формулы (а), которая в свою очередь легко вытекает из определения ψ.]

Итак, если $x_1, \ldots, x_d$ — базис, сопряженный к f_i, $s = \sum s_i D_{x_i}(p)$, то $\psi_i(s) - s_i$ выражает различие параллельных переносов в M и M_m.

Если $p = \sum p_i f_i \in M_m$, $s = c \sum p_i D_{x_i}(p) \in (M_m)_p$, т. е. s — касательная к лучу ρ, о котором мы говорили выше, то

(в) $$\psi_i(s) = cp_i,$$

(г) $$\theta(s) = 0.$$

Это показывает, что длины радиальных векторов сохраняются при отображении $d\exp_m$ и что касательные к горизонтальным кривым в $F(M)$ являются горизонтальными касательными.

C^∞-*прямоугольником* в M называется отображение Q прямоугольника $[a, b] \times [c, d] \subset R^2$ в M, которое может быть продолжено до C^∞-отображения некоторой окрестности этого прямоугольника. $Q(a, c)$ — *начальная вершина* прямоугольника Q, тогда как его *база* — это кривая τ вида $Q \circ j_c$, где $j_c(t) = (t, c)$. Вообще кривые

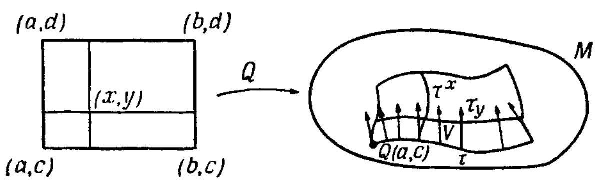


Рис. 28.

$\tau_y = Q \circ j_y$ называются *продольными*, а кривые $\tau^x = Q \circ 'j_x$ ($'j_x(t) = (x, t)$) *трансверсальными*. «Векторное поле» V, определенное вдоль базы τ равенством $V(s) = \tau^s_*(c)$, называется *ассоциированным векторным полем* прямоугольника Q (на самом деле это кривая в касательном расслоении многообразия M), а Q — *ассоциированным прямоугольником* поля V.

Каноническое поднятие. Пусть Q есть C^∞-прямоугольник в римановом многообразии M и $F(M)$ имеет риманову связность φ; тогда для каждого $f \in \pi^{-1}(Q(a, c))$

найдется единственный C^∞-прямоугольник $\bar{Q}$ в $F(M)$ с начальной вершиной f, такой, что

(а) $Q = \pi \circ \bar{Q}$, т. е. $\bar{Q}$ есть поднятие Q,

(б) $\varphi(\bar{Q} \circ j_{y*}) = 0$, т. е. продольные кривые прямоугольника $\bar{Q}$ горизонтальны, и

(в) $\varphi(\bar{Q} \circ 'j_{a*}) = 0$, т. е. начальная трансверсальная кривая горизонтальна.

Задача 1. Доказать существование, единственность и гладкость канонического поднятия C^∞-прямоугольника.

Теорема 1. *(Лемма Гаусса.)* Пусть Q есть C^∞-прямоугольник в M, Q: $[a, b] \times [c, d] \to M$, продольные кривые которого являются геодезическими, причем касательные к этим геодезическим имеют одинаковую длину. Тогда если V — ассоциированное векторное поле, то функция $\langle \tau_{c*}, V \rangle$ является константой. В частности, если $\tau_{c*}(a) \perp V(a)$, то $\tau_{c*}(t) \perp V(t)$ при любом $t \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $\bar{Q}$ — каноническое поднятие через $f \in F(M)$ прямоугольника Q. Введем следующие обозначения: $\varphi^Q = \bar{Q}^* \varphi$, $\omega^Q = \bar{Q}^* \omega$. Первое структурное уравнение принимает вид $d\omega^Q = -\varphi^Q \omega^Q$, что после применения к (D_1, D_2) дает

$$D_1 \omega^Q (D_2) - D_2 \omega^Q (D_1) - \omega^Q ([D_1, D_2]) = \\ = -\varphi^Q (D_1) \omega^Q (D_2) + \varphi^Q (D_2) \omega^Q (D_1).$$

Но $[D_1, D_2] = 0$ и $\varphi^Q (D_1) = 0$, так как продольные кривые поля $\bar{Q}$ горизонтальны; поэтому, скалярно умножив на $\omega^Q (D_1)$, получим

$$\langle D_1 \omega^Q (D_2), \omega^Q (D_1) \rangle - \langle D_2 \omega^Q (D_1), \omega^Q (D_1) \rangle = \\ = \langle \varphi^Q (D_2) \omega^Q (D_1), \omega^Q (D_1) \rangle = 0,$$

поскольку $\varphi^Q (D_2)$ кососимметрично.

Далее, $\omega^Q (D_1) \circ j_y$ — константа, так как кривая τ_y геодезическая, поэтому

$$D_1 \langle \omega^Q (D_2), \omega^Q (D_1) \rangle = \langle D_1 \omega^Q (D_2), \omega^Q (D_1) \rangle;$$

кроме того,

$$D_2\langle\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle = 2\langle D_2\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle.$$

Но $\langle\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle$ — константа, ибо мы предположили, что касательные к продольным кривым имеют одну и ту же длину, отсюда

$$D_2\langle\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle = 0.$$

Следовательно, вышеуказанное равенство принимает вид $D_1\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle = 0$. Однако очевидно, что вдоль базовой кривой $\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle = \langle V,\ \tau_{c*}\rangle$. Ч. Т. Д.

Следствие. Пусть $p \in M_m$, ρ — луч из 0 в p, $\sigma = \exp_m \circ \rho$ и $s \in (M_m)_p$. Тогда $s \perp \rho$ (в евклидовом скалярном произведении) влечет $d \exp_m s \perp \sigma$.

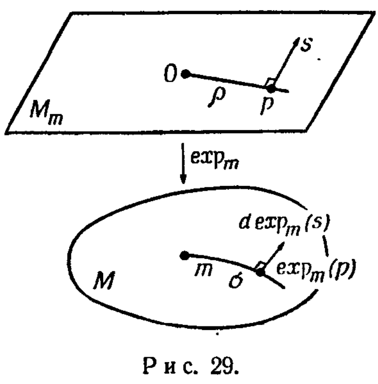


Рис. 29.

Это доказывается применением леммы Гаусса к прямоугольнику Q, начальная трансверсаль которого является вырожденной кривой $m \in M$, а продольные кривые являются образами при отображении $\exp_m$ лучей, исходящих из 0 в M_m. В частности, базой служит σ. Точное построение предоставляется читателю. (Этот прямоугольник можно назвать «куском пирога».)

Следующий результат выражает тот факт, что локально минимум длины ломаных C^∞-кривых достигается на геодезических.

Теорема 2. Пусть $B \subset M_m$ — шар с центром 0, на котором $\exp_m$ является диффеоморфизмом. Пусть $p \in B$, ρ — луч из 0 в p, $\sigma = \exp_m \circ \rho$, τ — произвольная ломаная C^∞-кривая из m в $\exp_m p$ в многообразии M. Тогда $|\tau| \geqslant |\sigma|$, причем равенство достигается только, когда τ — ломаная C^∞-репараметризованная геодезическая σ.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_d$ — сопряженный базис к $f_1, \ldots, f_d$ в M_m. Определим следующие объекты на B и $B' = \exp_m B$:

$$r = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}, \quad \bar{r} = r \circ \exp_m^{-1},$$

$$T = \sum \frac{x_i D_{x_i}}{r},$$ радиальное единичное векторное поле на $B - \{0\}$.

$$\bar{T} = d \exp_m T \circ \exp_m^{-1},$$ определенное на $B' - \{m\}$.

Если $q \in M_m$, $s \in (M_m)_q$, то $s = s_T + s_N$, где s_T кратно $T(q)$, а $s_N \perp T(q)$. Взяв $t \in M_b$, $b \in B'$, запишем аналогично $t = t_T + t_N$, где t_T кратно $\bar{T}(b)$, а $t_N \perp \bar{T}(b)$. Имеем $d \exp_m s = d \exp_m s_T + d \exp_m s_N$, и из следствия теоремы 1 $d \exp_m s_N \perp d \exp_m s_T$. Следовательно,

(I) $d \exp_m s_T = (d \exp_m s)_T$. Кроме того, из (б) стр. 185 вытекает, что

(II) $\| d \exp_m s_T \| = \| s_T \|$.

Пусть $[a, b]$ — интервал определения τ, c — наименьшее число из $[a, b]$, для которого $\bar{r}(\tau(c)) = r(p) = |\sigma|$. Определим теперь на $[a, c]$ кривую

$$\eta = \sigma \circ \frac{\bar{r}}{\| p \|} \circ \tau.$$

Замечая, что $\| \sigma_* \| = \| p \|$, имеем

$$\begin{aligned}
\eta_* &= d\eta\left(\frac{d}{du}\right) = d\sigma \circ \frac{dr}{\| p \|} \circ d \exp_m^{-1} \circ d\tau\left(\frac{d}{du}\right) = \\
&= \frac{1}{\| p \|} d\sigma \circ dr \circ d \exp_m^{-1}(\tau_*) = \\
&= \frac{1}{\| p \|} d\sigma\left(\| (d \exp_m^{-1} \tau_*)_T \| \frac{d}{du}\right) = \\
&= \frac{1}{\| p \|} \| (d \exp_m^{-1} \tau_*)_T \| \, \sigma_*;
\end{aligned}$$

отсюда на $[a, c]$

$$\|\eta_*\| = \|(d\exp_m^{-1}\tau_*)_T\| = \|d\exp_m(d\exp_m^{-1}\tau_*)_T\|, \text{ в силу (II)},$$
$$= \|\tau_{*T}\|, \text{ в силу (I)}.$$

Поэтому если $\tau' = \tau|_{[a, c]}$, то

$$|\tau| \geqslant |\tau'| \geqslant |\eta| \geqslant |\sigma|,$$

что и утверждалось. Если $|\tau| = |\sigma|$, то $\tau_*(u)$, очевидно,

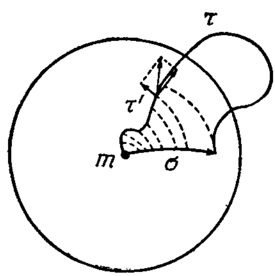


Рис. 30.

должно равняться нулю при $u > c$ и $\tau_{*N} = 0$, откуда вытекает, что образы τ и σ совпадают. Ч. Т. Д.

Следствие 1. Квадрат расстояния до m, $\rho(m, I)^2$, является C^∞-функцией на B'. (I — тождественное отображение на M.)

Доказательство. Он равен $\sum (x_i \circ \exp_m^{-1})^2$.

Следствие 2. Если через $B(m, c)$ обозначен шар радиуса c с центром в m, то $\exp_m(B(0, c)) = B(m, c)$, когда c меньше радиуса B.

Следствие 3. Если τ — ломаная C^∞-кривая из m в n, причем $|\tau| = \rho(m, n)$, то τ — ломаная C^∞-репараметризованная геодезическая.

Доказательство. τ минимизирует длину дуги от m до n, а потому локально минимизирует длину дуги, и в силу доказанной теоремы является ломаной C^∞-репараметризованной геодезической. Этого достаточно. Ч. Т. Д.

Лемма 1. Пусть $m \in M$, O — шар в M_m, на котором $\exp_m$ является диффеоморфизмом $O \to U$, и пусть γ: $(a, b) \to U$ есть C^∞-кривая в U. Предположим, что для $r = \rho(m, \gamma)$ при некотором значении аргумента t имеет место равенство $r'(t) = 0$. Тогда геодезическая в U из m в $\gamma(t)$ перпендикулярна к $\gamma_*(t)$ в точке $\gamma(t)$.

Доказательство. Это сразу же следует из леммы Гаусса, примененной к поднятию кривых в M_m, и аналогичного факта в евклидовом пространстве.

Теорема 3. Пусть N, P — подмногообразия в M, σ — геодезическая из $n \in N$ в $p \in P$, причем $|\sigma| = \rho(P, N)$. Тогда кривая σ перпендикулярна и к N, и к P.

Доказательство. Очевидно, что кусок σ минимизирует длину дуги от N или P до любой точки на σ. Для точек, достаточно близких к N или P, из леммы 1 следует, что σ перпендикулярна к кривым, идущим в N или P через n или p соответственно, и, значит, σ перпендикулярна и к N_n, и к P_p. Ч. Т. Д.

Пусть N — подмногообразие риманова многообразия M; определим $\perp(N)$, *нормальное расслоение* к N, следующим образом [см. § 3.3, п. (4)]:

$$\perp(N) = \{(n, t) \in T(M) \mid t \in M_n \text{ для некоторых } n \in N \text{ и } t \perp N_n\}.$$

Задача 2. Показать, что $\perp(N)$ — подмногообразие в $T(M)$ и что $\mathrm{Exp}|_{\perp(N)}$ невырожденно на тривиальном сечении в $\perp(N)$.

Трубчатая окрестность $\perp_r(N)$ радиуса r подмногообразия N в $\perp(N)$ — это открытое подмножество в $\perp(N)$, пересекающее каждый слой по открытому шару радиуса r с центром в начале слоя.

Теорема 4. Если N — компактное подмногообразие риманова многообразия M, то существует такое $r > 0$, что $\exp$ диффеоморфно на $\perp_r(N)$. В образе $\perp_r(N)$, называемом *трубчатой окрестностью* N в M, каждая точка соединима единственной геодезической с N, минимизирующей длину кривой до N.

Доказательство предоставляется в качестве упражнения.

Локальный вариант этой теоремы обеспечивает существование нормальных координат для N в следующем смысле.

Пусть $n \in N$. Координатная система в точке $n \in M$ *нормальна для* N, если точкам из N соответствуют точки некоторого линейного подпространства размерности, равной размерности N, а прямым, перпендикулярным этому подпространству, — геодезические, перпендикулярные к N.

Задача 3. Пусть i: $N \to M$ — погружение (т. е. di является изоморфизмом в каждой точке). Определить нормальное расслоение погружения и трубчатые окрестности в нем. Показать, что если N компактно, то Exp: $T(M) \to M$ порождает погружение $\perp_r(N)$ в M при некотором r. Привести пример неединственности минимизирующих геодезических, соединяющих точки погружения $\perp_r(N)$ с $i(N)$.

Задача 4. Рассмотреть плоский 2-мерный тор, полученный отождествлением противоположных сторон единичного квадрата в R^2, противоположными вершинами которого служат (0, 0) и (1, 1). Указать геометрическое место точек, удаленных на расстояние 2/3 от вершины. Как изменится это геометрическое место, если удалить из этого тора замкнутый прямолинейный сегмент от (1/4, 0) до (1/4, 1/2), получив некоторое неполное (см. ниже) многообразие?

Задача 5. Показать, что риманово накрывающее отображение не увеличивает расстояний.

8.2. Полные римановы многообразия

Пусть M — риманово многообразие: $E(m, t) = (m, \exp_m t)$ определяет отображение E: $T(M) \to M \times M$. Для того чтобы E было определено на всем $T(M)$, мы должны предположить, что все геодезические неограниченно продолжаемы. Во всяком случае, E определено на некоторой окрестности нулевого сечения в $T(M)$ и в действительности принадлежит там классу C^∞. Кроме того, справедлива

Лемма 2. При любом $m \in M$ отображение dE является изоморфизмом на $T(M)_{(m, 0)}$, и потому по теореме об обратной функции E является диффеоморфизмом окрестности точки $(m, 0)$ на окрестность точки (m, m).

Доказательство. Достаточно проверить, что dE отображает $T(M)_{(m, 0)}$ на $M \times M_{(m, m)}$, поскольку размерности совпадают. Пусть π_i: $M \times M \to M$ — проекция на i-й сомножитель, $i = 1$, 2. Известно, что $E|_{\pi^{-1}(m)}$, заданное формулой $E|_{\pi^{-1}(m)}(m, t) = (m, \exp_m t)$, отображает $(M_m)_0$ на касательное пространство к $\pi_1^{-1}(m)$ в точке (m, m). А теперь остается доказать, что dE отображает касательные к нулевому сечению расслоения $T(M)$ на касательное пространство к диагонали произведения $M \times M$: этого достаточно, поскольку $M \times M_{(m, m)}$, очевидно, порождается касательными к $\pi_1^{-1}(m)$ и касательными к диагонали.

Пусть D: $M \to M \times M$ — диагональное отображение, $D(m) = (m, m)$. Тогда сужение E на нулевое сечение равно сужению $D \circ \pi$ на нулевое сечение. Отображение $d\pi$ является отображением «на», следовательно, dD есть отображение на касательное пространство к диагонали. Ч. Т. Д.

Лемма 3. Пусть C — произвольное компактное подмножество в M. Тогда существует такое $c > 0$, что для каждого $m \in C$ отображение $\exp_m$ определено на $B(O(m), c)$ и является там диффеоморфизмом на шар $B(m, c)$, где $O(m)$ — начало в M_m.

Доказательство. Прежде всего отметим, что если не все геодезические неограниченно продолжаемы, то $\exp_m$ можно определить лишь на окрестности точки $O(m)$. Однако из теории дифференциальных уравнений следует, что для каждого $m \in M$ $\exp_m$ определено на шаре, радиус которого — непрерывная функция от m, и, значит, можно взять такое c_1, что $\exp_m$ определено на $B(O(m), c_1)$ при любом $m \in C$. В силу следствия 2 теоремы 2, нужно лишь показать, что существует такое $c>0$, что при любом $m \in C$ отображение $\exp_m$ является диффеоморфизмом на шаре $B(O(m), c)$. В лемме 2 это фактически утверждается локально, откуда, в силу компактности, следует наш результат.

Все же сначала мы должны переформулировать лемму 2, точное утверждение которой таково: для каждого $m \in C$ существует окрестность P_m точки $(m, 0)$, которая диффеоморфно отображается на окрестность точки (m, m). Следовательно, для каждого $n \in \pi(P_m)$ отображение $d\exp_n$ регулярно (т. е. взаимно однозначное «на»), откуда $\exp_n$ является диффеоморфизмом на множестве $\{t \in M_n \mid (n, t) \in P_m\} = P_{m,n}$; поэтому достаточно показать, что существует $c_m>0$, такое, что шар $B(O(n), c_m)$ относительно римановой метрики содержится в $P_{m,n}$ для всех $n \in \pi(P_m)$.

Пользуясь тем, что $T(M)$ обладает структурой локального произведения с топологией слоя, заданной евклидовой метрикой, что риманова и евклидова метрики эквивалентны на каждом касательном пространстве (см. лемму 7.1) и что риманова метрика непрерывна, найдем, что P_m содержит окрестность вида

$$P'_m = \{(n, t) \mid n \in U_m, \ \|t\| < c_m\},$$

где U_m — окрестность точки m и $c_m>0$. Поэтому, при $n \in U_m$, $\exp_n$ отображает $B(O(n), c_m)$ диффеоморфно на $B(n, c_m)$. В силу компактности, C покрывается конечным числом U_m, каждому из которых соответствует некоторое c_m. Полагая $c = \min c_m$, получаем желаемый результат. Ч. Т. Д.

Отсюда следует, что квадрат функции расстояния ρ^2 есть функция класса C^∞ на окрестности точки (m, m) в $M \times M$.

Теорема 5 (Хопф — Ринов [15, 62, 87]). Для связного риманова многообразия M рассмотрим следующие условия:

(а) M — полное многообразие.

(б) Все ограниченные замкнутые подмножества компактны.

(в) Существует такая точка $m \in M$, что все геодезические, начинающиеся в m, неограниченно продолжаемы.

(г) Все геодезические неограниченно продолжаемы.

(д) Любые точки $m, n \in M$ можно соединить геодезической, длина которой равна $\rho(m, n)$.

Условия (а)—(г) эквивалентны, условие (д) вытекает из них.

Задача 6. Найти пример, когда из (д) не следует (а). Найти также пример, когда минимизирующая геодезическая между двумя точками не единственна: на самом деле их может быть бесконечно много.

Отметим, что (в) можно сформулировать так: «$\exp_m$ определено на всем M_m», а (г) так: «Риманова связность полна» (§ 6.3).

Доказательство. Для всякого метрического пространства условие (а) вытекает из условия (б). То что из (г) следует (в), тривиально, а то что из (а) вытекает (г), является следствием теоремы о продолжаемости решений дифференциальных уравнений (см. приложение).

Итак, нам остается только проверить, что из (в) следует (б), а из (б) вытекает (д).

Зафиксируем $m_0 \in M$ и определим при любом $r > 0$

$$\overline{B}_r = \{m \in M \mid \rho(m_0, m) \leqslant r\} = \overline{B(m_0, r)};$$

$$E_r = \{m \in \overline{B}_r \mid m \text{ можно соединить с } m_0 \text{ геодезической, длина которой равна } \rho(m, m_0)\}.$$

Предполагая условие (в) выполненным для m_0, достаточно доказать, что (1) E_r компактно и (2) $E_r = \overline{B}_r$. Поскольку всякое ограниченное множество содержится в некотором $\overline{B}_r$, то, в силу (1) и (2), замкнутое ограниченное множество компактно — это и есть условие (б); далее, поскольку из (б) вытекает (г), то вместо m_0 можно взять произвольное m, так что из (2) вытекает (д).

Доказательство утверждения (1). Пусть $\bar{E}_r = \{p \in M_{m_0} \mid \rho(m_0, \exp_{m_0} p) = \|p\| \leqslant r\}$; положим $f(p) = \rho(m_0, \exp_{m_0} p) - \|p\|$. Тогда

$$\bar{E}_r = f^{-1}(0) \cap \overline{B(O(m_0), r)};$$

это множество, очевидно, компактно, поскольку оно замкнуто и ограничено. Компактность E_r получается теперь из того, что $E_r = \exp_{m_0} \bar{E}_r$, и непрерывности $\exp_{m_0}$. Ч. Т. Д.

Для доказательства утверждения (2) потребуется

Лемма 4. Если $E_r = \bar{B}_r$ при некотором r и если $\rho(m_0, n) > r$, то существует m, такое, что $\rho(m_0, m) = r$ и $\rho(m_0, n) = r + \rho(m, n)$.

Доказательство. Для $k = 1, 2, \ldots$ возьмем ломаную C^∞-кривую σ_k из m_0 в n с $|\sigma_k| < \rho(m_0, n) + 1/k$ (это возможно, в силу определения ρ). Пусть m_k — последняя точка на σ_k в $\bar{B}_r$, так что $\rho(m_0, m_k) = r$. В силу

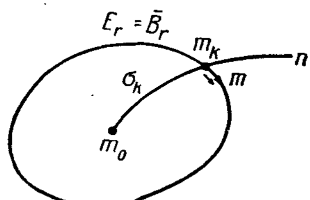


Рис. 31.

компактности $E_r = \bar{B}_r$, эти m_k имеют предельную точку m, и, переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что $\{m_k\}$ сходится к m. Далее,

$$\rho(m_0, n) \leqslant \rho(m_0, m) + \rho(m, n) = r + \rho(m, n).$$

С другой стороны, $\rho(m_0, n) > |\sigma_k| - 1/k = |$длина куска σ_k от m_0 до $m_k| + |$длина куска σ_k от m_k до $n| - 1/k \geqslant r + \rho(m_k, n) - 1/k$, что имеет пределом $r + \rho(m, n)$, откуда $\rho(m_0, n) \geqslant r + \rho(m, n)$, так что имеет место равенство. Тем самым лемма 4 доказана.

Докажем теперь утверждение (2), используя связность множества неотрицательных вещественных чисел; точнее, мы докажем, что

(I) $E_0 = \bar{B}_0$.

(II) $E_r = \bar{B}_r$, $r' < r$, $\Rightarrow E_{r'} = \bar{B}_{r'}$.

(III) $E_{r'} = \bar{B}_{r'}$ для всех $r' < r \Rightarrow E_r = \bar{B}_r$.

(IV) $E_r = \bar{B}_r \Rightarrow$ существует $c > 0$, такое, что

$$E_{r+c} = \bar{B}_{r+c}.$$

Утверждения (I) и (II) тривиальны.

Доказательство утверждения (III). Пусть $m \in \bar{B}_r$. Если $m \in \bar{B}_{r'}$ для $r' < r$, то, по предположению, $m \in E_{r'} \subset E_r$. Поэтому можно считать, что $\rho(m_0, m) = r$. По лемме 4, можно выбрать последовательность $\{m_k\}$, сходящуюся к m, где $m_k \in \bar{B}_{r_k}$, $r_k < r$. Тогда, по предположению, $m_k \in E_{r_k} \subset E_r$, откуда $m \in E_r$, в силу компактности E_r. Ч. Т. Д.

Доказательство утверждения (IV). По лемме 3, существует $c > 0$, такое, что для каждого $m \in \bar{B}_r$, $\exp_m$ отображает $B(O(m), 2c)$ диффеоморфно на $B(m, 2c)$, поскольку E_r компактно. Пусть $n \in \bar{B}_{r+c}$. Покажем, что $n \in E_{r+c}$. По лемме 4 существует $m \in \bar{B}_r$, такое, что $\rho(m_0, n) = r + \rho(m, n)$, где $\rho(m_0, m) = r$. Следовательно, $\rho(m, n) \leqslant c$, и, значит, существует геодезическая γ от m до n, причем $|\gamma| = \rho(m, n)$. Пусть σ — геодезическая от m_0 до m и $|\sigma| = \rho(m_0, m) = r$. Тогда $\sigma + \gamma$ — ломаная C^∞-кривая от m_0 до n, причем $|\sigma+\gamma| = |\sigma| + |\gamma| = r + \rho(m, n) = \rho(m_0, n)$, откуда, в силу следствия 3 теоремы 2, $\sigma+\gamma$ — репараметризованная геодезическая. Поэтому $n \in E_{r+c}$.

Итак, теорема доказана.

Как показали К. Номидзу и Х. Одзеки [52], всякое связное паракомпактное многообразие допускает полную риманову метрику; более того, они показали, что если всякая риманова метрика полна, то многообразие компактно. Обратное утверждение о полноте компактного метрического пространства хорошо известно.

Задача 7. Построить неполное связное риманово многообразие бесконечного диаметра, такое, что никакие две его точки, удаленные друг от друга на расстояние, большее 1, нельзя соединить кривой минимальной длины.

Задача 8. Пусть $i\colon N \to M$ — изометрическое вложение. Пусть ρ — риманово расстояние на M, $\rho' = \rho \circ i$ и ρ'' — риманово расстояние на N. Привести примеры, показывающие, что могут встретиться все восемь вариантов полноты этих метрик.

Задача 9. Показать, что для связной группы Ли, допускающей левую и правую инвариантные метрики, экспоненциальное отображение является отображением «на».

Задача 10. Пусть M и N — полные римановы многообразия. Показать, что риманово произведение $M \times N$ полно. Полнота аффинных связностей также сохраняется в произведениях.

Задача 11. Пусть M — полное риманово многообразие.

(а) Тогда всякое риманово накрытие многообразия M является полным.

(б) Для всякого $m \in M$ в каждом гомотопическом классе петель в m существует геодезический сегмент, начинающийся и кончающийся в m.

Задача 12. Привести примеры, показывающие, что результат задачи 11(б) может иметь, а может и не иметь места, если M не полно.

Задача 13. Пусть M — полное риманово многообразие, которое не является односвязным. Показать, что $\rho(m, l)^2$ не может быть C^∞-функцией на всем M.

Пример. Рассмотрим механическую систему с конечным числом степеней свободы, не содержащую элементов, рассеивающих энергию. Тогда *конфигурационным пространством* называется многообразие M, служащее математической моделью совокупности всевозможных положений данной системы. Кривая в M обычно мыслится как изменение положения системы с течением времени, поэтому касательный вектор задается распределением скоростей элементов системы, совместимых со связями, наложенными на систему. *Фазовое пространство* системы — это $T(M)$. Кинетическая энергия, вычисляемая по заданным скоростям, является положительно определенной квадратичной формой на каждом M_m и задает таким образом риманову метрику на M.

Силовое поле на M — это 1-форма θ; интеграл этой 1-формы вдоль кривой равен работе, произведенной при перемещении по этой кривой. Если силовое поле *консервативно*, то $\theta = -dV$, где V — потенциальная энергия.

Если D — символ ковариантной производной данной метрики и X — векторное поле, определенное условием $2\langle X, Y\rangle = \theta(Y)$ для любого Y, то закон Ньютона движения системы принимает вид

$$D_{\gamma_*}\gamma_* = X,$$

где γ — кривая, параметризованная временем.

В частности, траекторией свободного движения служит геодезическая, а время пропорционально длине геодезической. Таким образом, построенное риманово многообразие полно, если после любого толчка движение системы продолжается неограниченно долго. Тогда из любого начального положения с кинетической энергией 1 систему можно направить таким образом, чтобы свободным движением она достигла любой заданной конфигурации за время, равное расстоянию между этими двумя точками на M.

В частном случае твердого тела, закрепленного в центре тяжести, конфигурационное пространство гомеоморфно $P^3 = SO(3)$. Метрика кинетической энергии инвариантна в том и только в том случае, если эллипсоид инерции является сферическим.

8.3. Непрерывные кривые

Пусть γ — непрерывная кривая γ: $[a, b] \to M$. Пусть

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p < b = t_{p+1}$$

— последовательность чисел, заключенных между a и b. Определим *длину кривой* γ формулой

$$\gamma| = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{p} \rho(\gamma(t_i), \ \gamma(t_{i+1})) \,|\, \text{по всем таким последовательностям } t_i \right\}.$$

Предложение 1. Если γ: $[a, b] \to M$ — непрерывная кривая от m до n и $|\gamma| = \rho(m, n)$, то γ — непрерывная репараметризация геодезической. Это означает, что среди непрерывных кривых геодезические локально минимизируют длину.

Доказательство. Возьмем $c > 0$, согласно лемме 3, относительно образа γ. Пусть $a < t_1 < t_2 < b$ таковы, что $\rho(\gamma(t_1), \ \gamma(t_2)) < c/2$; тогда существует геодезическая σ от $\gamma(t_1)$ до $\gamma(t_2)$ с $|\sigma| = \rho(\gamma(t_1), \ \gamma(t_2))$. Утверждается, что при любом $t \in (t_1, t_2)$ точка $\gamma(t)$ находится на σ. Действительно, возьмем геодезические σ_1, σ_2 от $\gamma(t_1)$ до $\gamma(t)$ и от $\gamma(t)$ до $\gamma(t_2)$ соответственно, причем $|\sigma_1| = \rho(\gamma(t_1), \ \gamma(t))$, $|\sigma_2| = \rho(\gamma(t), \ \gamma(t_2))$. Тогда, поскольку очевидно, что γ локально минимизирует длину, $|\sigma_1 + \sigma_2| = \rho(\gamma(t_1), \ \gamma(t)) + \rho(\gamma(t), \ \gamma(t_2)) = |$длина γ от $\gamma(t_1)$ до $\gamma(t)\,| + |$длина γ от $\gamma(t)$ до $\gamma(t_2)\,| = \rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$, откуда, по теореме 2, $|\sigma_1| + |\sigma_2|$ — ломаная C^∞-репараметризация кривой σ; это показывает, что $\gamma(t)$ лежит на образе σ. Итак, локально γ — непрерывная репараметризация геодезической и потому, в частности, репараметризация ломаной C^∞-кривой. Наш результат теперь вытекает из следствия 3 к теореме 2.

Предложение 2. Если γ — ломаная C^∞-кривая, то оба определения ее длины совпадают.

Доказательство. Пусть $\{\gamma\}$ — длина γ как непрерывной кривой, а через $|\gamma|$ по-прежнему обозначен интеграл длин касательных. Тогда из определения расстояния тривиально следует, что $\{\gamma\} \leqslant |\gamma|$. Кроме того, легко видеть, что оба определения аддитивны:

$$\{\gamma+\sigma\}=\{\gamma\}+\{\sigma\}, \quad |\gamma+\sigma|=|\gamma|+|\sigma|.$$

Предположим теперь, что γ — кривая, для которой $\{\gamma\}+k=|\gamma|$, $k>0$. Тогда, разделив γ пополам, мы должны на одной из половин получить расхождение по крайней мере на $k/2$. Повторным делением придем к последовательности вложенных отрезков $[s_n, u_n]$, таких, что расхождение для γ, суженной на $[s_n, u_n]$, не меньше $k/2^n$, тогда как $u_n - s_n = c/2^n$, где $c=b-a$, $[a, b]$ — интервал определения γ. Пусть t — общий предел s_n и u_n, и пусть t_n — такое число в $[s_n, u_n]$, что

$$\|\gamma_*(t_n)\| c/2^n = \int_{s_n}^{u_n} \|\gamma_*\|$$

(t_n существует по теореме о среднем значении). Тогда

$$\|\gamma_*(t_n)\| c/2^n \geqslant k/2^n + \{\gamma|_{[s_n, u_n]}\} \geqslant$$
$$\geqslant k/2^n + \rho(\gamma(s_n), \gamma(t)) + \rho(\gamma(t), \gamma(u_n)).$$

Введем новый параметр на γ так, чтобы $t=0$. Умножим полученное неравенство на $2^n/c$, перейдем к пределу и получим неравенство

$$\|\gamma_*(0)\| \geqslant k/c + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\rho(\gamma(s_n), \gamma(0)) + \rho(\gamma(0), \gamma(u_n))}{u_n - s_n}.$$

Пусть x_i — нормальные координаты в $\gamma(0)$ и $f_i = x_i \circ \gamma$. Тогда

$$\rho(\gamma(s), \gamma(0)) = \left(\sum f_i(s)^2\right)^{1/2} = \left(\sum f_i'(\theta_i s)^2\right)^{1/2} |s|,$$

где $0<\theta_i<1$ по теореме о среднем значении. Поэтому, если положить

$$g(s) = \rho(\gamma(s), \gamma(0))/|s|,$$

то, поскольку

$$g(u_n)u_n - g(s_n)s_n = g(u_n)(u_n - s_n) + (g(u_n) - g(s_n))s_n,$$

получаем

$$\frac{\rho(\gamma(s_n), \gamma(0)) + \rho(\gamma(0), \gamma(u_n))}{u_n - s_n} \leqslant g(u_n) + |g(u_n) - g(s_n)|.$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} g(u_n) = \|\gamma_*(0)\|$, то это дает

$$\|\gamma_*(0)\| \geqslant k/c + \|\gamma_*(0)\|,$$

что противоречит неравенству $k>0$. Ч. Т. Д.

Задача 14. Пусть γ: $[a, b] \to M$ — непрерывная кривая конечной длины в римановом многообразии. Показать, что γ можно равномерно аппроксимировать ломаными геодезическими.

Задача 15. Пусть φ — отображение риманова многообразия M на риманово многообразие N, сохраняющее расстояния. Доказать, что φ — изометрия (см. [33], стр. 169). Это говорит о том, что топологическая метрика риманова многообразия определяет и риманову метрику, и гладкую структуру.

Задача 16. Пусть φ: $M \to N$ есть C^∞-отображение полного риманова многообразия M на риманово многообразие N, такое, что при любом $m \in M$ пространство M_m распадается в ортогональную сумму подпространств V_m и H_m, а V и H суть C^∞-распределения, причем $V_m = \ker(d\varphi_m)$ и $d\varphi_m$ определяет изометрию из H_m на $N_{\varphi(m)}$. Показать, что

(а) Если γ есть C^∞-кривая в N и $\varphi(m) = \gamma(0)$, то в M существует единственный подъем $\bar{\gamma}$ кривой γ, такой, что $\bar{\gamma}(0) = m$, $\gamma = \varphi \circ \bar{\gamma}$ и $|\gamma| = |\bar{\gamma}|$.

(б) Подъем геодезической (см. (а)) является геодезической.

ГЛАВА 9

Риманова кривизна

Устанавливаются основные свойства римановой кривизны, дан прямой, но, вообще говоря, не эффективный метод вычисления кривизны. После ряда примеров выводится уравнение Якоби для векторных полей, ассоциированных с прямоугольниками, продольные которых — геодезические, а также несколько локальных и глобальных следствий. В частности, показано, что для полного риманова многообразия с неположительной кривизной экспоненциал является накрывающим отображением [24, 33, 50, 83].

9.1. Риманова кривизна

Пусть M есть d-мерное риманово многообразие с метрикой $\langle\ ,\ \rangle$ и преобразованием кривизны R_{st}, где s, t — касательные к M. Всякое двумерное подпространство P в M_m называется *плоским сечением* в точке $m \in M$.

Пусть P — некоторое плоское сечение в m, и пусть $s, t \in M_m$ — два вектора, натягивающие P.

Риманова кривизна (или *кривизна в двумерном направлении*) $K(P)$ *плоского сечения* P определяется равенством

$$K(P) = \frac{\langle R_{st}s, t\rangle}{A(s, t)^2},$$

где $A(s, t) = (\|s\|^2\|t\|^2 - \langle s, t\rangle^2)^{1/2}$ есть площадь параллелограмма, натянутого на s и t.

Прежде всего мы хотим доказать, что $K(P)$ зависит только от P, но не зависит от выбора s и t, порождающих P. Одновременно будет показано, что $K(P)$ определяет R_{st} и, таким образом, ничего не теряется при рассмотрении римановой кривизны вместо формы кривизны на $F(M)$.

Отметим, что если $\dim M=2$, то существует только одно плоское сечение в каждой точке $m\in M$ и потому K — вещественная функция на M, называемая *гауссовой кривизной.*

Задача 1. Пусть $f\colon M\to N$ — локальная изометрия. Показать, что f сохраняет кривизну. Показать, что d-мерная риманова сфера имеет постоянную кривизну так же, как и d-мерное вещественное проективное пространство.

Лемма 1. Пусть $x, y, z, w\in M_m$. Тензор кривизны R удовлетворяет следующим условиям:

(а) $R_{xy}=-R_{yx}$, (б) $\langle R_{xy}z, w\rangle=-\langle z, R_{xy}w\rangle$,
(в) $R_{xy}z+R_{zx}y+R_{yz}x=0$, (г) $\langle R_{xy}z, w\rangle=\langle R_{zw}x, y\rangle$.

Эти условия можно интерпретировать как свойства линейного преобразования, соответствующего R, на втором грассмановом пространстве G^2_m, пространстве бивекторов. Для этого определим R_{xy} как бивектор, удовлетворяющий условию $\langle R_{xy}, zw\rangle=\langle R_{xy}z, w\rangle$ для всех разложимых бивекторов zw. Тогда (б) утверждает, что такое определение R_{xy} корректно; равенство (а) означает, что этот бивектор зависит лишь от бивектора xy, но не от x и y в отдельности, поэтому $xy\to R_{xy}$ можно линейно продолжить до эндоморфизма пространства всех бивекторов; (г) означает, что R — симметрическое преобразование бивекторов, поэтому это преобразование определяется соответствующей квадратичной формой. Наконец, (в) означает, что эта квадратичная форма определяется своими значениями на разложимых элементах (см. ниже, следствие 2).

Если $x_1, \ldots, x_d$ — координатная система в m, то классический объект R_{ijkl} задается равенством

$$R_{ijkl}=\langle R_{X_iX_j}X_k, X_l\rangle,$$

где $X_i=D_{x_i}$. Тогда вышеуказанные формулы соответствуют классическим, а именно:

(а′) $R_{ijkl}=-R_{jikl}$, (б′) $R_{ijkl}=-R_{ijlk}$,
(в′) $R_{ijkl}+R_{klji}+R_{jkli}=0$, (г′) $R_{ijkl}=R_{klij}$.

Доказательство леммы 1. Пусть $x, y \in M_m$, $b \in F(M)$ и $\bar{x}, \bar{y} \in F(M)_b$ таковы, что $d\pi\,\bar{x} = x$, $d\pi\,\bar{y} = y$. Тогда, в силу 6.1.5, если $z \in M_m$, то

$$R_{xy}z = -b\Phi(\bar{x}, \bar{y})\,b^{-1}z,$$

где b рассматривается как отображение $R^d \to M_m$; (а) теперь следует из того, что Φ есть альтернированная форма (б) же вытекает из $\mathfrak{o}(d)$-значности Φ, поскольку $\mathfrak{o}(d)$ состоит из кососимметрических преобразований R^d.

Для доказательства (в) заметим сначала, что при $a, b, c \in R^d$

$$\begin{aligned} H[[E(a), E(b)], E(c)] &= -H[\lambda\Phi(E(a), E(b)), E(c)] && (6.1.4)\\ &= -E(\Phi(E(a), E(b))\,c). && (6.2.1)\end{aligned}$$

Выбирая $\bar{x}, \bar{y}$ специальным образом, получаем

$$R_{xy}z = -b\Phi\left(E\left(b^{-1}(x)\right)(b), E\left(b^{-1}(y)\right)(b)\right)b^{-1}(z),$$

так что

$$\begin{aligned} &E\left(b^{-1}R_{xy}z\right)(b) = \\ &\quad = -E\left(\Phi\left(E\left(b^{-1}(x)\right)(b), E\left(b^{-1}(y)\right)(b)\right)b^{-1}z\right)(b) = \\ &\quad = H\left[\left[E\left(b^{-1}(x)\right), E\left(b^{-1}(y)\right)\right], E\left(b^{-1}(z)\right)\right](b).\end{aligned}$$

Но тождество Якоби дает

$$E\left(b^{-1}(R_{xy}z + R_{zx}y + R_{yz}x)\right)(b) = 0,$$

что доказывает (в), поскольку E и b взаимно однозначны.

Формула (г) вытекает из (а), (б), (в), если взять скалярные произведения равенства (в) на w, после чего циклически переставить x, y, z, w, затем сложить полученные четыре равенства и надлежащим образом воспользоваться (а) и (б). Детали предоставляются читателю.

Следствие 1. $K(P)$ определено корректно.

Доказательство. Для $x, y \in M_m$ положим $K(x, y) = \langle R_{xy}x, y\rangle / A(x, y)^2$. Заметим, что

(I) $K(x, y)=K(y, x)$,
(II) $K(ax, by)=K(x, y)$, если $ab\neq 0$,
(III) $K(x+cy, y)=K(x, y)$.

Отсюда следует, что если $x'=ax+by$, $y'=cx+dy$, $ad-bc\neq 0$, то $K(x', y')=K(x, y)$, поскольку, как известно, это преобразование от (x, y) к (x', y') может быть получено последовательностью преобразований, указанных в (I), (II), (III).

Следствие 2. $\langle R_{xy}x, y\rangle$ определяет преобразования кривизны.

Доказательство. Более точно, $\langle R_{xy}z, w\rangle$ является единственной 4-линейной функцией, удовлетворяющей условиям леммы 1, сужение которой есть $\langle R_{xy}x, y\rangle$. Предположим таким образом, что имеется две 4-линейные функции f и f' на M_m, которые удовлетворяют условиям, соответствующим (а)—(г), и такие, что $f(x, y, x, y)=f'(x, y, x, y)$ для всех $x, y\in M_m$. Полагая $g=f-f'$, найдем, что g удовлетворяет тем же условиям, соответствующим (а)—(г). Заменяя x на $x+z$ в равенстве $g(x, y, x, y)=0$, получим

$$g(x, y, x, y)+g(z, y, x, y)+g(x, y, z, y)+g(z, y, z, y)=0$$

и, значит,

$$g(x, y, z, y)+g(z, y, x, y)=0.$$

В силу (г),

$$g(x, y, z, y)=0.$$

Заменяя y на $y+w$ и поступая таким же образом, находим, что

$$g(x, w, z, y)+g(x, y, z, w)=0.$$

Воспользовавшись (г) и (а), найдем, что

$$g(x, y, z, w)=g(y, z, x, w),$$

откуда $g(\cdot, \cdot, \cdot, w)$ инвариантно относительно циклических подстановок трех аргументов. Но, в силу (в), сумма по таким подстановкам равна 0, откуда $g=0$. Ч. Т. Д.

Замечания. (1) Иногда удобнее иметь дело с кривизной вместо преобразований кривизны; следствие 2 обеспечивает сохранение информации.

(2) Пусть M имеет две римановы структуры; если в некоторой точке совпадают соответствующие скалярное произведение и кривизна, то в этой точке совпадают и преобразования кривизны.

(3) Не верно, что кривизна определяет преобразования кривизны, поскольку различные римановы структуры с различными преобразованиями кривизны могут порождать одинаковую кривизну. Например, пусть $f\colon S^2 \to S^2$ — произвольный диффеоморфизм римановой 2-сферы. Рассматривая f как изометрию, получим две римановы структуры на S^2 с разными преобразованиями кривизны, но с одинаковой (постоянной) кривизной.

Задача 2. Пусть $q(x, y) = f(x, y, x, y)$, $x, y \in M_m$. Установить следующую явную формулу для f в терминах q:

$$\begin{aligned}6f(x, y, z, w) = {} & q(x+z, y+w) - q(x+w, y+z) + \\ & + q(x, y+z) - q(x, y+w) - q(y, x+z) + q(y, x+w) - \\ & - q(z, y+w) + q(z, x+w) - q(w, x+z) + q(w, y+z) + \\ & + q(x, w) - q(x, z) + q(y, z) - q(y, w).\end{aligned}$$

Задача 3. С помощью следующего наброска доказать *теорему Шура* [25]: Если K постоянно на каждом слое расслоения $G_{d,2}(M)$, то K постоянно на всем пространстве $G_{d,2}(M)$ при $d > 2$.

(а) Это предположение эквивалентно условию: для любых $x, y \in R^d$ функция $\langle \Phi(E(x), E(y))x, y\rangle$ постоянна на слоях расслоения $F(M)$.

(б) Поскольку функции, зависящие от x, y в (а), определяют функции $\langle \Phi(E(x), E(y))z, w\rangle$, то эта гипотеза эквивалентна тому, что

$\Phi(E(x), E(y))$ постоянно на слоях в $F(M)$.

(в) Если $F\Phi(E(x), E(y)) = 0$ для всех вертикальных F, x, $y \in R^d$, то $E(z)\Phi(E(x), E(y)) = 0$ для всех x, y, $z \in R^d$, и потому $\Phi(E(x), E(y))$ постоянно на $F(M)$,

K постоянно на $G_{d,2}(M)$. [*Указание*: воспользоваться тождеством Бьянки

$$D\Phi(E(x),\ E(y),\ E(z))=E(x)\Phi(E(y),\ E(z))+\\ +E(y)\Phi(E(z),\ E(x))+E(z)\Phi(E(x),\ E(y))=0$$

и тем, что

$$[\bar{A},\ E(x)]=\bar{A}E(x)-E(x)\bar{A}=E(Ax) \text{ для } A\in\mathfrak{o}(d),$$

откуда $E(x)\bar{A}+E(Ax)=\bar{A}E(x)$.]

9.2. Вычисление римановой кривизны

Мы покажем, как можно вычислить риманову кривизну в терминах метрических коэффициентов g_{ij}. В частности, мы установим связь между преобразованием кривизны и метрикой.

Согласно п. 6.4.3, если X, Y — векторные поля, то

$$R_{XY}=\nabla_{[X,Y]}-[\nabla_X,\ \nabla_Y],$$

где ∇_X — ковариантная производная по X. Но в силу [51, стр. 81], если X, Y, Z — векторные поля, то

$$2\langle\nabla_X Y,\ Z\rangle=X\langle Y,\ Z\rangle+Y\langle X,\ Z\rangle-Z\langle X,\ Y\rangle+\langle[X,\ Y],\ Z\rangle+\\ +\langle[Z,\ X],\ Y\rangle+\langle X,\ [Z,\ Y]\rangle.$$

Эти две формулы дают искомое соотношение.

Задача 4. Вышеуказанная формула опирается на следующие факты:

(1) Кручение равно нулю тогда и только тогда, когда $[X,\ Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X$, где X, Y — произвольные векторные C^∞-поля.

(2) Параллельный перенос сохраняет скалярное произведение в том и только в том случае, если $X\langle Y,\ Z\rangle=\langle\nabla_X Y,\ Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle$. Доказать эти утверждения и формулу. Вывести явную формулу для $K(D_{x_i},\ D_{x_j})$ в терминах g_{ij}.

Задача 5. С помощью этой формулы получить новое решение задачи 7.18.

9.3. Непрерывность римановой кривизны

Кривизна K определена не на самом римановом многообразии M, а на грассмановом многообразии его 2-плоскостей [§ 3.3, п. (5)] и в действительности является там непрерывной функцией. Отсюда будет следовать, что кривизна ограничена на компактном подмножестве в M.

Пусть $G_{d,2}$ — грассманово многообразие плоских сечений (двумерных подпространств) пространства R^d (см. задачу 7.30). Тогда

$$G_{d,2} = O(d)/O(2) \times O'(d-2).$$

Обозначим через $G_{d,2}(M)$ расслоение со слоем $G_{d,2}$, ассоциированное с расслоением ортонормальных базисов $F(M)$, где M — риманово многообразие. Таким образом, $G_{d,2}(M) = F(M) \times_{O(d)} G_{d,2}$. Если $m \in M$, то $G_{d,2}(m)$ означает слой в $G_{d,2}(M)$ над m. Если $b \in F(M)$ таково, что $\pi(b) = m$, то $b\colon G_{d,2} \xrightarrow{\approx} G_{d,2}(m)$, определенное формулой $P \to \{(b, P)\} = (b, P)\,O(d)$, класс эквивалентности точки (b, P) в $G_{d,2}(M)$. Поскольку $b\colon R^d \xrightarrow{\approx} M_m$, то b отображает $G_{d,2}$ изоморфно на множество плоских сечений в точке m, а получающееся отождествление этого множества с $G_{d,2}(m)$ не зависит от b. Следовательно, риманову кривизну K можно рассматривать как вещественную функцию, определенную на $G_{d,2}(M)$. (Здесь через $F(M) \times_{O(d)} G_{d,2}$ обозначено пространство $(F(M) \times G_{d,2})/O(d)$ из § 3.3.)

Предложение 1. Функция $K\colon G_{d,2}(M) \to R$ принадлежит C^∞ и, в частности, непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(M) \times O(d) \arrow[d, "p"] \arrow[ddr, "K \circ q \circ p"] & \\
F(M) \times G_{d,2} \arrow[d, "q"] & \\
F(M) \times_{O(d)} G_{d,2} \arrow[r, "K"] & R
\end{tikzcd}$$

p, q - отображения отождествления

14 Зак. 306

Надо лишь показать, что $K \circ q \circ p \in C^\infty$. Для определения отображения p мы должны сначала выбрать элемент из $G_{d,2}$, скажем P_0. Тогда $p(b, g) = (b, gP_0)$. Отсюда $K \circ q \circ p(b, g) = K(b(gP_0))$, поскольку b — отображение $G_{d,2}$ в пространство плоских сечений в m. Пусть P_0 натянуто на ортонормальные векторы x, $y \in R^d$. Тогда

$$K(bg, P_0) = \langle R_{b(gx)\,b(gy)} b(gx),\ b(gy)\rangle =$$
$$= -\langle b\Phi(E(gx)(b),\ E(gy)(b))\, gx,\ gy\rangle,$$

очевидно, C^∞-функция по b и g. Ч. Т. Д.

Так как $G_{d,2}$ компактно, то мы получаем

Следствие. Если $C \subset M$ — компакт, то существуют H, $L \in R$, такие, что $H \leqslant K(P) \leqslant L$ для любого плоского сечения P в произвольной точке $m \in C$.

Замечание. Кривизна риманова многообразия, очевидно, зависит от той римановой структуры, которой наделено данное многообразие. Так, плоский тор имеет всюду нулевое кручение, тогда как вложенный тор (баранка) имеет точки и с положительной, и с отрицательной кривизной. Все же на данном многообразии кривизна не совсем произвольна. Например, будет доказано, что односвязное компактное многообразие не может иметь всюду неположительную кривизну (см. следствие 2 теоремы 4), тогда как некомпактное полное многообразие не может иметь положительную кривизну с ненулевой нижней границей (гл. 11). Более того, существует связь между кривизной и топологическими инвариантами многообразия, выражаемая теоремой Гаусса — Бонне, которую мы не рассматриваем [89, 92]. Однако в общем случае об этих ограничениях известно немного [11, 14].

Задача 6. Полное риманово многообразие является *локально симметрическим*, если кривизна плоского сечения инвариантна относительно параллельного переноса плоского сечения вдоль геодезических. Показать, что это утверждение эквивалентно обращению в нуль ковариантных производных преобразования кривизны.

Задача 7. Пусть M — риманово симметрическое пространство. Показать, что симметрия f_m пространства M_m переводит касательную в вектор, противоположный ее параллельному переносу вдоль геодезической, проходящей через m. Вывести отсюда, что M — локально симметрическое пространство. Обратно, как следует из соображений монодромии, односвязное локально симметрическое многообразие является римановым симметрическим.

Пусть M — снова риманово симметрическое пространство. Известно (§ 7.4, п. 14), что M — однородное симметрическое пространство, т. е. $M = G/H$, причем G допускает инволюцию f. Положим $0 = eH \in M$, $\mathfrak{h} = \{X \in \in \mathfrak{g} \mid df(X) = X\}$, $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid df(X) = -X\}$; тогда $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H.

Задача 8. Доказать соотношения $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$.

Задача 9. Доказать, что при $X \in \mathfrak{m}$ кривая $e^{tX} \cdot 0$ является геодезической в M. [*Указание*: показать, что если σ — геодезическая, то кривая $\beta(t) = f_0 f_{\sigma(t)}$ в G удовлетворяет следующим условиям:

(1) β — однопараметрическая группа (*трансвекций*).

(2) β соответствует некоторому элементу из $\mathfrak{m}$.] Показать, что тогда существует изоморфизм между $\mathfrak{m}$ и M_0. Далее, пусть скалярное произведение $\langle\,,\rangle$ на M_0 сносится этим изоморфизмом в скалярное произведение $(\,,)$ на $\mathfrak{m}$; показать, что

$$([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) = 0,$$

где $X \in \mathfrak{h}$, $Y, Z \in \mathfrak{m}$. (Форма, обладающая этим свойством, называется *инвариантной* относительно $\mathfrak{h}$. Ср. с задачей 7.23.)

Задача 10. Показать, что группа H компактна, пользуясь тем, что ее можно рассматривать как замкнутое подмножество ортогональной группы. Вывести отсюда, что форму $(\,,)$ можно продолжить до скалярного произведения $(\,,)$ на всем $\mathfrak{g}$ (см. § 7.4, п. 11), инвариантного относительно df и $\mathfrak{h}$.

Форма Киллинга $k(\,,\,)$ на $\mathfrak{g}$ также инвариантна относительно df, ибо $\operatorname{ad}(dfX)\circ\operatorname{ad}(df\,Y)=df\circ\operatorname{ad}X\circ\operatorname{ad}Y\circ\circ df^{-1}$ (задача 7.23). Вывести отсюда, что $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$ взаимно ортогональны относительно каждой из этих форм.

Задача 11. Говорят, что M — *неприводимое* симметрическое пространство, если $\operatorname{ad}\mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}}$ вещественно неприводимо. Вообще существует такое линейное преобразование S_k пространства $\mathfrak{m}$, что для $Y,\ Z\in\mathfrak{m}$

$$k(Y,\,Z)=(S_kY,\,Z).$$

Показать, что $\mathfrak{m}$ распадается в сумму характеристических подпространств преобразования S_k и что эти подпространства инвариантны относительно $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$. В частности, если M неприводимо, то существует вещественное число λ, такое, что на $\mathfrak{m}$

$$k(\,,\,)=\lambda(\,,\,).$$

Из задачи 7.8 вытекает, что только единичный элемент H действует тривиально на $\mathfrak{m}$ и, следовательно, если $X\in\mathfrak{h}$, $X\neq 0$, то $\operatorname{ad}X|_{\mathfrak{m}}\neq 0$. Отсюда, а также из кососимметричности $\operatorname{ad}X$ относительно $(\,,\,)$ вывести, что $k(\,,\,)$ отрицательно определено на $\mathfrak{h}$. Если M неприводимо и $\lambda\neq 0$, то это показывает, что $k(\,,\,)$ невырождено на $\mathfrak{g}$, откуда сразу же следует, что в $\mathfrak{g}$ нет собственных абелевых идеалов, т. е. $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра.* Можно показать, что если $k(\,,\,)$ отрицательно определено, так что $\lambda<0$, то G компактно (см. [80], стр. 141).

Задача 12. Выделим $f\in F(M)$, такое, что $\pi(f)=0$; рассмотрим соответствующее вложение пространства G как гладкого подмногообразия в $F(M)$ (см. задачу 6.21). Показать, что G — подрасслоение в $F(M)$ с группой H, и, значит, H можно рассматривать как подгруппу в $O(d)$.

Задача 13. Группа G действует на $F(M)$, и поэтому можно говорить об инвариантных векторных полях на $F(M)$. Показать, что базисное и фундаментальное векторные поля инвариантны.

Задача 14. Пусть $X\in\mathfrak{m}$, $Y\in\mathfrak{h}$. Показать, что X является сужением на G некоторого базисного векторного поля, и, следовательно, риманова связность на $F(M)$ приводится к связности на G. Это показывает, что группа голономии многообразия M относительно f содержится в группе изотропии H. Обратное также верно [26]. Показать, что Y есть сужение на G некоторого фундаментального векторного поля, и в действительности $Y=\lambda Y$, где $\mathfrak{h}$ рассматривается как подалгебра в $\mathfrak{o}(d)$. Пусть $X=E(x)|_G$, $x\in R^d$; показать, что

$$\operatorname{ad} Y(X)=E(Yx)|_G.$$

Задача 15. Пусть X, Y, $Z\in\mathfrak{m}\approx M_0$. Показать, что преобразование кривизны задается формулой

$$R_{XY}Z=[[X,\ Y],\ Z].$$

Воспользовавшись этим, вывести формулу для кривизны плоского сечения M_0 в терминах структуры алгебры Ли в $\mathfrak{g}$ и скалярного произведения $(\ ,\ )$. Это позволяет определить кривизну всюду на M.

Задача 16. Предположим, что M неприводимо. Показать, что если $\lambda=0$, то и кривизна обращается в нуль, иными словами, кривизна неотрицательна или неположительна в соответствии с тем, отрицательно или положительно λ.

Задача 17. Вычислить (постоянную) кривизну d-мерной римановой сферы радиуса r.

Примеры. *Грассмановы многообразия.*

Вещественный случай. Если A — матрица с вещественными элементами, то через A^* будем обозначать ее транспонированную. Грассманово многообразие $G_{d+e,\,d}$ d-плоскостей в R^{d+e} можно реализовать как однородное пространство $O(d+e)/O(d)\times O(e)$. Элементы алгебры Ли группы $O(d+e)$, разложив на соответствующие блоки, мы можем рассматривать как матрицы вида $\begin{pmatrix} A & C \\ -C^* & B\end{pmatrix}$, где $A^*=-A$, $B^*=-B$. Легко проверяется, что $df\begin{pmatrix} A & C \\ -C^* & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & -C \\ C^* & B\end{pmatrix}$ определяет инволюцию алгебры Ли с неподвижной алгеброй $\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)$, порождающую инволюцию группы $O(d+e)$ с неподвижной подгруппой $O(d)\times O(e)$.

Если положить (X, X) равным сумме квадратов элементов матрицы X, — в этом случае $X\in\mathfrak{o}(d+e)$, $(X, X)= =-\operatorname{tr} X^2$, — то $(\ ,\ )$ оказывается положительно определенной формой на $\mathfrak{o}(d+e)$, инвариантной относительно $\mathfrak{o}(d+e)$ и df. Таким образом, $G_{d+e,\,d}$ становится римановым симметрическим пространством.

Ориентированное грассманово многообразие

$$G'_{d+e,\,d}=SO(d+e)/SO(d)\times SO(e)$$

является двулистным накрытием пространства $G_{d+e,\,d}$ и поэтому также римановым симметрическим пространством.

Задача 18. Проверить не доказанные выше утверждения. Найти явную матричную формулу для инволюции f. Показать, что на $G'_{d+e,\,d}$ есть только одна нетривиальная изометрия, соответствующая тождественному преобразованию на $G_{d+e,\,d}$. Найти группы изометрий пространств $G_{d+e,\,d}$ и $G'_{d+e,\,d}$. Вычислить группы изотропии.

Комплексный и кватернионный случаи. Рассмотрения аналогичны вещественному случаю, только теперь A^* — транспонированная сопряженная к матрице A. Та же формула для df определяет инволюцию вещественных алгебр Ли, продолжающуюся до инволюции унитарной или симплектической групп, порождая инволюции в совокупности всех d-мерных подпространств в C^{d+e}

$$H_{d+e,\,d}=U(d+e)/U(d)\times U(e)$$

и в совокупности d-мерных подпространств в Q^{d+e}

$$K_{d+e,\,d}=Sp(d+e)/Sp(d)\times Sp(e).$$

(Определение симплектической группы см. в [95, стр. 39].)

Сумма норм элементов матрицы снова является положительно определенной квадратичной формой на алгебре Ли, инвариантной относительно действия всей алгебры Ли ($\mathfrak{u}(d+e)$ или $\mathfrak{sp}(d+e)$) и $\mathfrak{df}$. Таким образом, каждое из указанных однородных пространств становится римановым симметрическим пространством.

Касательное пространство в базисной точке каждого из этих симметрических пространств можно отождествить с матрицами вида $\begin{pmatrix} 0 & C \\ -C^* & 0 \end{pmatrix}$, а затем с самими матрицами C, элементы которых принадлежат соответствующим полям. Но тогда это касательное пространство наделяется структурой комплексного или кватернионного векторного пространства. В комплексном случае эта структура инвариантна относительно действия $\mathrm{ad}(\mathfrak{u}(d)+\mathfrak{u}(e))$, поэтому она может быть инвариантно индуцирована на всяком другом касательном пространстве посредством действия группы $U(d+e)$; таким образом, $H_{d+e,\,d}$ обладает структурой почти комплексного многообразия. (В действительности «почти» можно опустить.) Плоские сечения, состоящие из комплексных кратных единственного вектора, называются *голоморфными*. Кватернионная структура не инвариантна относительно $\mathrm{ad}(\mathfrak{sp}(d)+\mathfrak{sp}(e))$, поэтому на произвольном касательном пространстве многообразия $K_{d+e,\,d}$ нельзя инвариантно индуцировать кватернионную структуру.

Задача 19. Показать, что симметрические пространства $G_{d+e,\,d}$, $H_{d+e,\,d}$ и $K_{d+e,\,d}$ неприводимы при отрицательном λ (см. задачу 11). Кроме того, они имеют неотрицательную кривизну, которая все же не положительна, если только d или e не равны 1.

Задача 20. При $d=1$ грассмановы многообразия становятся проективными пространствами или сферами. С помощью задачи 15 показать, что их кривизну можно описать следующим образом:

Вещественное поле: все сечения имеют одинаковую кривизну.

Комплексное поле: если $X \perp Y$, $X, Y \in \mathfrak{m}$ и θ — угол между голоморфными сечениями, порожденными X

и Y, то $K(X, Y)=1+3\cos^2\theta$. В частности, только голоморфные сечения достигают максимальной кривизны 4, и эта так называемая *голоморфная кривизна* постоянна.

Кватернионное поле: если $X\perp Y$, $X, Y\in\mathfrak{m}$ и θ — угол между 4-мерными подпространствами XQ и YQ, то $K(X, Y)=1+3\cos^2\theta$.

Противоположные пространства. Алгебра Ли матриц вида $\begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B\end{pmatrix}$, где $A^*=-A$, $B^*=-B$, с элементами в одном из вышеуказанных полей, обладает инволюцией

$$df\begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & -C \\ -C^* & B\end{pmatrix}.$$

Эта инволюция продолжается до инволюции связной подгруппы G в $Gl(d+e, F)$, соответствующей данной алгебре Ли. Факторизуя по неподвижной подгруппе H, получаем однородное пространство M. Матрицы $\{X\}$ с $A=B=0$ можно отождествить с касательными к M в точке $0=eH$, а с помощью суммы квадратов норм, в данном случае $\operatorname{tr} X^2$, можно наделить M структурой риманова симметрического пространства. В этом случае скалярное произведение на $\mathfrak{m}$ инвариантно лишь относительно $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$, но не всего $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, как для грассмановых многообразий.

Задача 21. Показать, что это неприводимые пространства с положительным λ. Кроме того, отображение, переводящее $\begin{pmatrix} 0 & C \\ -C^* & 0\end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} 0 & C \\ C^* & 0\end{pmatrix}$, определяет изометрию касательного пространства к M с касательным пространством соответствующего грассманова многообразия, причем кривизны соответствующих плоских сечений совпадают по величине, но противоположны по знаку.

В случае вещественного поля и $d=1$ мы получаем, таким образом, *гиперболическое e-пространство R^e*, снабженное метрикой постоянной отрицательной кривизны. Показать, что отображение exp: $R^e \to M$, задаваемое формулой

$$\exp(X) = \exp\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix} \cdot H,$$

взаимно однозначно.

9.4. Прямоугольники и поля Якоби

Большинство теорем этой, а также одиннадцатой главы связано с поведением близких геодезических или его инфинитезимальным аналогом. В общем случае достаточно рассматривать однопараметрическое семейство таких геодезических, и поэтому естественно для их изучения использовать прямоугольник (§ 8.1).

Пусть Q есть C^∞-прямоугольник в римановом многообразии M. Воспользуемся обозначениями § 8.1 и доказательством теоремы 8.1.

Лемма 2. Если продольные кривые в Q являются геодезическими, то имеют место следующие формулы:

(а) $D_1\omega^Q(D_2) - D_2\omega^Q(D_1) = \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)$,

(б) $D_1\varphi^Q(D_2) = \Phi^Q(D_1, D_2)$,

(в) $D_1^2\omega^Q(D_2) = \Phi^Q(D_1, D_2)\,\omega^Q(D_1)$.

Формула (в) является вариантом уравнения Якоби. [Φ^Q не встречалось в § 8.1, но обозначает, разумеется, $\bar{Q}^*\Phi$, где $\bar{Q}$ — канонический подъем Q через $f \in F(M)$.]

Доказательство. Формула (а) уже доказана и применялась в теореме 8.1. Второе структурное уравнение, теорема 6.4, дает

$$d\varphi^Q = -\frac{1}{2}[\varphi^Q, \varphi^Q] + \Phi^Q.$$

Применяя это к D_1, D_2, имеем

$$D_1\varphi^Q(D_2) - D_2\varphi^Q(D_1) - \varphi^Q([D_1, D_2]) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left([\varphi^Q(D_1), \varphi^Q(D_2)] - [\varphi^Q(D_2), \varphi^Q(D_1)]\right) + \Phi^Q(D_1, D_2).$$

Но $\varphi^Q(D_1)=0$ и $[D_1, D_2]=0$, поэтому

$$D_1\varphi^Q(D_2)=\Phi^Q(D_1, D_2),$$

а это есть (б).

Применим теперь D_1 к обеим частям равенства (а):

$$D_1^2\omega^Q(D_2)-D_1D_2\omega^Q(D_1)=$$
$$=(D_1\varphi^Q(D_2))\,\omega^Q(D_2)+\varphi^Q(D_2)(D_1\omega^Q(D_1)).$$

Но $D_1\omega^Q(D_1)=0$, а потому и $D_1D_2\omega^Q(D_1)=D_2D_1\omega^Q(D_1)=0$, так как $[D_1, D_2]=0$. Следовательно,

$$D_1^2\omega^Q(D_2)=(D_1\varphi^Q(D_2))\,\omega^Q(D_1).$$

Формула (в) получается теперь подстановкой (б) в это равенство. Ч. Т. Д.

Поля Якоби устанавливают связь между поведением близких кривых и кривизной. Это специальные векторные поля, определенные вдоль геодезической. Пусть σ — геодезическая и V — векторное поле вдоль σ. [В действительности V — кривая в $T(M)$ над σ.] Поле V является *полем Якоби*, если

$$\nabla_{\sigma_*}(\nabla_{\sigma_*}(V))=-R_{\sigma_* V}\sigma_*.$$

Так как V определено только на σ, то $\nabla_{\sigma_*}V$ мы будем часто обозначать через V'. Таким образом, уравнение Якоби принимает вид $V''=R_{V\sigma_*}\sigma_*$.

Приведем его к классическому виду.

Определим функции R_{ijkl} на $F(M)$, положив $R_{ijkl}=$ $=\Phi_{ij}(E_k, E_l)$. Возьмем $b=(\sigma(0);\ e_1, \ldots, e_d)\in F(M)$, такое, что $e_d=\sigma_*(0)$. Пусть $\bar\sigma(t)=(\sigma(t);\ e_1(t), \ldots, e_d(t))$, $\bar V$ и $\bar e_d$ — горизонтальные подъемы σ, V и e_d соответственно. Имеем $V(t)=\sum v_i(t)\,e_i(t)$. Тогда

$$R_{V(t)\sigma_*(t)}\sigma_*(t)=R_{V(t)e_d(t)}e_d(t)=$$
$$=-\sum \Phi_{id}(\bar V(t), \bar e_d(t))\,e_i(t) \qquad (6.1.5)$$
$$=-\sum \Phi_{id}\left(\sum v_k(t)E_k(\bar\sigma(t)),\ E_d(\bar\sigma(t))\right)e_i(t)=$$
$$=-\sum v_k(t)\,R_{idkd}(\bar\sigma(t))\,e_i(t).$$

С другой стороны, $V''(t)=\sum v_i''(t)\,e_i(t)$, и уравнение Якоби принимает вид $v_i''(t)=-\sum\limits_k v_k(t)\,R_{idkd}\,(\bar\sigma(t))$.

В частности, $v''_d(t)=0$, так что компонента V в направлении σ_* является линейной функцией от t. Таким образом, если V перпендикулярно к σ_* в двух точках, то они перпендикулярны всюду. В любом случае поведение остальных v_i не зависит от v_d, так как $R_{iddd}=0$.

В двумерном случае $v''_1=-R_{1212}(\sigma(t))\,v_1(t)$ или $v''+Kv=0$, где K — гауссова кривизна.

Так как уравнение Якоби — линейное уравнение второго порядка, то из теории дифференциальных уравнений непосредственно вытекает

Предложение 2. Поля Якоби вдоль σ образуют линейное пространство размерности $2d$ над R. Для произвольных x, $y\in M_{\sigma(0)}$ существует единственное поле Якоби V, такое, что $V(0)=x$ и $V'(0)=y$. Поля Якоби, которые в $\sigma(0)$ обращаются в нуль, образуют линейное подпространство размерности d, причем их значения заполняют все $M_{\sigma(t)}$ при достаточно малом t. Если t достаточно мало, то для любых $x\in M_{\sigma(0)}$, $y\in M_{\sigma(t)}$ существует единственное поле Якоби V, такое, что $V(0)=x$ и $V(t)=y$.

Следующая теорема характеризует поля Якоби с геометрической точки зрения.

Теорема 1. Векторное поле V вдоль геодезической σ является полем Якоби в том и только в том случае, если существует прямоугольник Q с базой σ и геодезическими продольными линиями, ассоциированный с полем V.

Доказательство. Если Q — такой прямоугольник, то якобиевость поля V — это фактически следствие леммы 2, поскольку (в) — это уравнение Якоби, только в R^2. Действительно, $V(t)=dQ(D_2(t,c))$, $\sigma_*(t)=dQ(D_1(t,c))$, поэтому, рассматривая $\sigma(t)$ как отображение $R^d\to M_{\sigma(t)}$, имеем

$$
\begin{aligned}
R_{V\sigma_*}\sigma_* &= -\bar{\sigma}\Phi(\bar{V},\bar{\sigma}_*)\bar{\sigma}^{-1}(\sigma_*) && (6.1.5)\\
&= -\bar{\sigma}\Phi^Q(D_2,D_1)\,\omega^Q(D_1)\circ j_c && [j_c(t)=(t,c)]\\
&= \bar{\sigma}D_1^2\omega^Q(D_2)\circ j_c && [(\text{в}),\ \text{лемма } 2]\\
&= V''.
\end{aligned}
$$

С другой стороны, если V — поле Якоби, то, в силу предложения 2, достаточно найти прямоугольник с продольными геодезическими и ассоциированным (вдоль σ) векторным полем W, таким, что $W(0)=V(0)$ и $W'(0)=V'(0)$, так как тогда W будет полем Якоби, ввиду только что доказанного, и потому, в силу единственности, всюду совпадающим с V.

Пусть γ — такая кривая, что $\gamma_*(0)=V(0)$, и $\bar{\gamma}$ — подъем γ, начинающийся в $f=(\sigma(0);\ f_1,\ \ldots,\ f_d)\in F(M)$, так что $\bar{\gamma}(t)=(\gamma(t);\ f_1(t),\ \ldots,\ f_d(t))$. Пусть U — кривая над γ в $T(M)$, $U(t)=\sum h_i(t)f_i(t)$, для которой $U(0)=\sigma_*(0)$ и $\sum h_i'(0)f_i=V'(0)$. Определим теперь прямоугольник Q, положив

$$Q(s,\ t)=\exp_{\gamma(t)} sU(t).$$

Очевидно, продольные линии в Q геодезические, поскольку при фиксированном t мы как раз получаем экспоненциальный образ луча. Далее, так как $U(0)=\sigma_*(0)$, то луч, соответствующий $t=0$, принадлежит σ, поэтому σ — база прямоугольника Q. При $s=0$ получается γ, поэтому ассоциированное векторное поле W удовлетворяет условию $W(0)=\gamma_*(0)=V(0)$. Таким образом, остается только проверить, что $W'(0)=V'(0)$.

Далее, Q удовлетворяет условию леммы 2, поэтому, в силу (a), $D_1\omega^Q(D_2)=D_2\omega^Q(D_1)+\varphi^Q(D_2)\omega^Q(D_1)$. Но $\bar{\gamma}$ горизонтальна, поэтому $\varphi^Q(D_2(0,\ t))=\varphi(\bar{\gamma}_*(t))=0$. Кроме того, $\bar{\gamma}(t)\omega^Q(D_1(0,\ t))$ — касательная к продольной кривой на высоте t, совпадающей с $U(t)$ по определению Q. Таким образом, при $t=0$

$$\begin{aligned}
W'(0)&=f(D_1\omega^Q(D_2)(0,\ 0))=\\
&=f(D_2\omega^Q(D_1)(0,\ 0))=\\
&=f(h'(0)) \qquad\qquad (h(t)=(h_1(t),\ \ldots,\ h_d(t)))\\
&=V'(0). \quad \text{Ч. т. д.}
\end{aligned}$$

Применим теперь полученный результат к случаю, когда $V(0)=0$ и Q вырожденно при $s=0$, т. е. γ — постоянная кривая. Тогда отображение Q можно пропустить через $M_m(m=\sigma(0))$, т. е. $Q=\exp_m \circ S$, где S — прямоугольник в M_m. Тогда наше якобиево поле возникает как образ при $d\exp_m$ векторного поля вдоль луча ρ в M_m, который отображением $\exp_m$ переводится в σ. Мы можем считать U линейным по t:

$$U(t)=\sigma_*(0)+tV'(0),$$

что соответствует равенству

$$S(s, t)=s\sigma_*(0)+stV'(0).$$

Линейно однородное векторное поле вдоль луча ρ в M_m — это кривая X над ρ в $T(M_m)$, для которой $X(0)=0$ и $X''=0$ (дифференцирование возможно, поскольку M_m — линейное пространство).

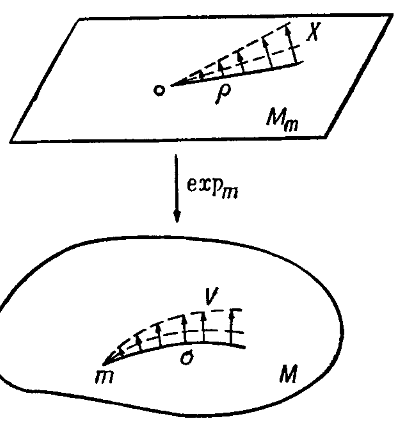


Рис. 32.

Очевидно, что для любого $x \in (M_m)_0$ существует единственное линейное однородное векторное поле, такое, что $X'(0)=x$. Из определения прямоугольника S мы получаем

Следствие. Если V — поле Якоби вдоль $\sigma=\exp_m\circ\rho$, обращающееся в нуль в точке m, и X — такое линейное однородное векторное поле вдоль ρ, что $V'(0)=d\exp_m X'(0)$, то

$$V=d\exp_m X.$$

Нам остается сравнить рост X в «плоском» пространстве M_m с ростом V в M. Это сравнение использует кривизну, поэтому, согласно теореме 1, мы получим соотношение между кривизной и поведением близких геодезических. Метрика на M_m индуцируется скалярным произведением, так что M_m изометрично R^d, например, относительно $f\in F(M)$. Отметим кстати, что X — поле Якоби вдоль геодезической ρ в M_m.

Введем обозначения:

$$W=\rho_*,\quad U=\sigma_*,\quad K(V)=K(U,V)$$

—кривизна сечения, натянутого на V и U, когда они линейно независимы.

Поскольку поведение U-компоненты поля V полностью определено (это линейная функция от U) и поскольку составляющая V, перпендикулярная к U, не зависит от U-компоненты, то в оставшейся части главы предполагается, что $\langle U, V\rangle=0$. Для удобства предположим также, что $\|U\|=1$.

Так как $\|V\|'(0)=\|V'\|(0)=\|X\|'$ (см. (а) в доказательстве теоремы 2. Здесь мы, конечно, предполагаем, что $V(0)=0$), то сравнение роста можно основывать на рассмотрении второй производной, которую определяет

Лемма 3.

$$\|V\|''=-K(V)\|V\|+\frac{A(V',V)^2}{\|V\|^3}.$$

[Как и при определении $K(P)$, $A(x, y)$ означает площадь параллелограмма, натянутого на x и y.]

Отметим, что если $K(V)$ отрицательно, то $\|V\|''$ положительно.

Доказательство.

$$\|V\|' = \left(\frac{1}{2}\right)\langle V, V\rangle^{-1/2}(\langle V', V\rangle + \langle V, V'\rangle) = \\ = \langle V', V\rangle \|V\|^{-1};$$

$$\|V\|'' = (\langle V'', V\rangle + \langle V', V'\rangle)\|V\|^{-1} - \\ - \langle V', V\rangle \|V\|^{-2}\langle V', V\rangle \|V\|^{-1} = \\ = (\langle V', V'\rangle\langle V, V\rangle - \langle V', V\rangle^2)\|V\|^{-3} + \\ + \langle V'', V\rangle \|V\|^{-1} = \\ = A(V', V)^2\|V\|^{-3} - \langle R_{UV}U, V\rangle \|V\|^{-1} = \\ (V \text{ — поле Якоби}) \\ = A(V', V)^2\|V\|^{-3} - K(V)A(U, V)^2\|V\|^{-1}.$$

Но $A(U, V) = \|V\|$, в силу предположений, что $\langle U, V\rangle = 0$ и $\|U\| = 1$. Ч. Т. Д.

Задача 22. Определить поля Якоби на R^d (см. задачу 7.9).

9.5. Теоремы, включающие кривизну

Мы используем обозначения § 9.4.

Теорема 2. Пусть ρ — луч, проходящий через 0 в M_m.

(I) Если $K(V) \leqslant 0$ вдоль ρ, то $\|V\| = \|d \exp_m X\| \geqslant \|X\|$ вдоль ρ, причем строгое неравенство сохраняется.

(II) Если $K(V') > 0$ в 0, то $\|d \exp_m X\| < \|X\|$ на луче ρ вблизи 0.

Доказательство. Пусть $g = \|V\| - \|X\|$. Тогда поскольку $\|X\|(t) = t\|X'\|$ при $t \geqslant 0$, то очевидно, что g' существует на множестве положительных вещественных чисел всюду, где $\|V\| \neq 0$. Поэтому достаточно показать, что

(а) g имеет нулевую правостороннюю производную в точке 0;

(б) если $K(V) \leqslant 0$, то $g'' \geqslant 0$, причем для строгого неравенства имеет место та же импликация;

(в) если $K(V')(0)>0$, то $g''<0$ в окрестности нуля в пространстве положительных вещественных чисел.

Для доказательства (а) заметим, что поскольку $X(t)=tX'(t)$, то

$$\|V\|(t)=\|d\exp_m tX'(t)\|=t\,\|d\exp_m X'(t)\|.$$

Деля на t и переходя к пределу при t, стремящемся к $0+$, получаем

$$\|V\|'(0+)=\|d\exp_m X'(0+)\|=\|X'(0+)\|,$$

поскольку $\exp_m$ — изометрия на $(M_m)_0$.

Так как $\|X\|''=0$, то (б) сразу же вытекает из леммы 3.

Для доказательства (в) перепишем формулу для $\|V\|''$ в виде

$$\|V\|''=\left(-K(V)+\frac{A(V',V)^2}{\|V\|^4}\right)\|V\|.$$

Поскольку $\lim K(V)=\lim K(V/t)=K(V'(0))$, в силу непрерывности K, то достаточно показать, что $\lim A(V',V)^2\langle V,V\rangle^{-2}=0$. Для этого положим $Y=V/u$, тогда $Y=d\exp_m X'$, $V'=Y+uY'$, $V''=2Y'+uY''=-R_{UV}U$ (u — координата на R). В силу того, что uY и $Y+uY'$ натягивают параллелограмм той же площади, что uY и uY', и поскольку $A(x,y)^2$ квадратично по каждому переменному,

$$A(V',V)^2\langle V,V\rangle^{-2}=A(uY,uY')^2\langle uY,uY\rangle^{-2}=$$
$$=A(Y,Y')^2\langle Y,Y\rangle^{-2}.$$

Далее, предел Y в нуле есть $d\exp_m X'(0)=V'(0)\neq 0$, тогда как предел Y', как следует из уравнения для V'', равен 0. Таким образом, $A(Y,Y')^2\langle Y,Y\rangle^{-2}$ стремится к нулю. Ч. Т. Д.

Следствие 1. Если кривизна M всюду неположительна, то $\exp_m$ не может уменьшить длину кривых.

Доказательство. В силу (I), поскольку можно брать произвольную геодезическую из m и любое линейное однородное поле, перпендикулярное к ρ, $\exp_m$

не может уменьшить длины векторов, перпендикулярных к ρ. Но $\|d\exp_m U\| = \|U\|$, откуда $\exp_m$ не может уменьшить длину никакого вектора.

Следствие 2. Если $K(V) \leqslant 0$ для всех полей Якоби вдоль σ, то геодезические из m вблизи σ отклоняются от σ больше, чем соответствующие лучи в M_m.

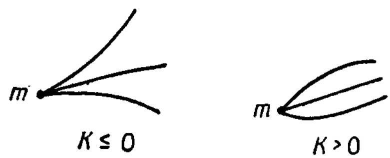


Рис. 33.

Если $K(V) > 0$ вдоль σ вблизи m, то геодезические из m вблизи σ приближаются к σ больше, чем соответствующие лучи в M_m.

Доказательство. Нужно только уточнить терминологию. Пусть ρ, τ — лучи в M_m, проходящие через 0. Пусть S — сфера с центром в 0 и γ — меньшая дуга большого круга в S, пересекающего окружности ρ и τ. Тогда геодезические $\exp_m \circ \rho$ и $\exp_m \circ \tau$ сближаются, если $|\gamma| \geqslant |\exp_m \circ \gamma|$, и расходятся, если $|\gamma| \leqslant |\exp_m \circ \gamma|$. Теперь следствие вытекает из теоремы 2.

Задача 23. С помощью плоской кривизны можно следующим образом сравнивать длины и площади «кругов» в M и в R^2. Пусть x, $y \in M_m$, x, y — ортогональные единичные векторы. Определим C^∞-прямоугольник Q формулой

$$Q(s, t) = \exp_m(s(x\cos t + y\sin t)),$$

$0 \leqslant s$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Пусть $K = K(x, y)$, а V — трансверсальное векторное поле прямоугольника Q.

(а) Показать, что длину V можно выразить в виде

$$\|V\| = s - \frac{1}{6}Ks^3 = s^4 h(s, t),$$

где h принадлежит C^∞ при $s > 0$ и непрерывно в точке $s = 0$.

15 Зак. 306

(б) Пусть $L(s)$ — длина «круга» Q_s. Показать, что $L(s) = 2\pi(s - Ks^3/6) + s^4 f(s)$, где f — непрерывная функция от s; поэтому

$$K = (3/\pi)\lim_{s\to 0}(2\pi s - L(s))/s^3.$$

(в) Определим $A(s) = \int_0^s L(u)\,du$, «площадь» этого «круга»; вывести формулу

$$K = (12/\pi)\lim_{s\to 0}(\pi s^2 - A(s))/s^4.$$

Замечание. Э. Картан обобщил эти формулы на поверхности малых сфер, объемы малых 3-сфер и т. д. [25, стр. 252].

Задача 24. Пусть $M = S^d$ — сфера радиуса r. С помощью задачи 7.12 показать, что «круги радиуса s в S^d» являются кругами радиуса $r\sin s/r$ в R^{d+1}. Вычислить теперь $L(s)$ и доказать, что $K = 1/r^2$ для всех плоских сечений.

Задача 25. Исходя из этого, найти следующее явное выражение полей Якоби на S^d: пусть $\gamma(s)$ — геодезическая, s — длина дуги, а x, $y \in S^d_{\gamma(0)}$ — касательные, перпендикулярные к $\gamma_*(0)$. Отождествляя далее касательные к S^d с касательными к R^{d+1}, можно записать

$$x = \sum a_i D_i(\gamma(0)), \qquad y = \sum b_i D_i(\gamma(0)).$$

Показать, что формула для поля Якоби X вдоль γ с $X(0) = x$, $X'(0) = y$ такова:

$$X(s) = \cos s/r \sum a_i D_i(\gamma(s)) + \sin s/r \sum b_i D_i(\gamma(s)).$$

Пусть M, $'M$ являются d-мерными римановыми многообразиями, $m \in M$, $'m \in {}'M$, $f = (m, f_1, \ldots, f_d) \in F(M)$, $'f = ('m, 'f_1, \ldots, 'f_d) \in F('M)$; положим, как в § 8.1,

$$\theta = \overline{\exp_f^*}\,\varphi, \qquad '\theta = \overline{\exp_{'f}^*}\,'\varphi,$$

$$\Theta = \overline{\exp_f^*}\,\Phi, \qquad '\Theta = \overline{\exp_{'f}^*}\,'\Phi,$$

$$\psi = \overline{\exp_f^*}\,\omega, \qquad '\psi = \overline{\exp_{'f}^*}\,'\omega.$$

Пусть $X \in \mathfrak{o}(d)$; тогда $f \circ (\exp uX) \circ f^{-1}$ — однопараметрическая группа вращений в M_m, порождающая векторное поле $\bar{X}$ на M_m. Взяв $'f$ вместо f, получим аналогичное векторное поле $'\bar{X}$ на $'M_{'m}$. Векторное поле $\bar{X}$ является линейно однородным вдоль всех лучей в M_m и перпендикулярно к ним; кроме того, $(\bar{X} \circ \rho)'(0) = d \exp_m^{-1}(fXf^{-1}(\rho(1)))$.

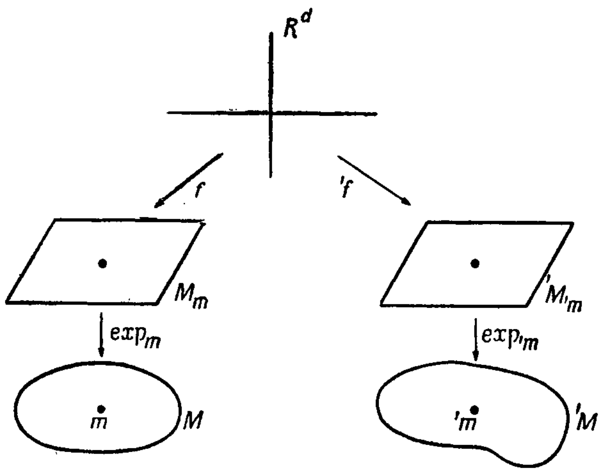


Рис. 34.

Пусть T — радиальное векторное поле, определенное на всем M_m, за исключением 0, и удовлетворяющее равенству $T \circ \rho = U$ (здесь ρ и U такие же, как прежде). Аналогично на $'M_{'m}$ определяется $'T$.

Теорема 3 (Э. Картан). Если для любого x из N, некоторой окрестности нуля в R^d и любого $X \in \mathfrak{o}(d)$ выполняется равенство

$$\Theta(T, \bar{X})(fx) = {'\Theta}('T, '\bar{X})('fx),$$

то существует окрестность U точки m и изометрия J: $U \to {'M}$, такие, что $J(m) = {'m}$ и $dJ \circ f = {'f}$.

Доказательство. Пусть L — линейное отображение $'ff^{-1}$: $M_m \to {'M_{'m}}$. Пусть $\bar{U}$ — окрестность нуля в M_m, на которой $\exp_m$ является диффеоморфизмом и которая содержится в $f(N)$. Положим далее $U=\exp_m \overline{U}$ и определим J формулой $J=\exp_{'m} \circ L \circ (\exp_m|\overline{U})^{-1}$. Ясно, что $J(m)='m$ и $dJ=L$ на M_m, поэтому остается лишь проверить, что J — изометрия.

Очевидно, dJ сохраняет длины радиальных векторов, т. е. $dJ(d\exp_m T)=d\exp_{'m}{}'T$. Следовательно, достаточно показать, что dJ сохраняет длины векторов, нормальных к радиальным. Если t — такая касательная к U, то, в силу выбора U, существуют такие $p\in M_m$ и $X\in\mathfrak{o}(d)$, что $d\exp_m \overline{X}(p)=t$. Кроме того, $dJ(t)=$ $=d\exp_{'m}{}'\overline{X}(Lp)$. Следовательно, по формуле (б), стр. 185, $\|t\|=\|\psi(\overline{X})(p)\|$, $\|dJ(t)=\|'\psi('\overline{X})(Lp)\|$, и потому достаточно доказать, что при любом X

$$\psi(\overline{X})='\psi('\overline{X})\circ L.$$

А теперь заметим следующее:

(а) ψ и $f^{-1}\circ d\exp_m$ совпадают на $(M_m)_0$, и аналогичное утверждение имеет место для $'\psi$;

(б) $\psi(T)='\psi('T)\circ L$;

(в) $\psi(\overline{X})(0)='\psi('\overline{X})(L(0))=0$.

Для каждого луча ρ в M_m

(г) $$(\psi(\overline{X})\circ\rho)'(0)=\psi((\overline{X}\circ\rho)'(0))=Xf^{-1}\rho(1)= \\ =('\psi('\overline{X})\circ L\circ\rho)'(0),$$

в силу (а) и замечания перед формулировкой теоремы, описывающего $(\overline{X}\circ\rho)'(0)$.

В силу (в) и (г), $\psi(\overline{X})$ и $'\psi('\overline{X})\circ L$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям вдоль любого луча. Они окажутся одинаковыми, если удастся показать, что совпадают их вторые производные. Но лучи служат интегральными кривыми поля T, поэтому нужно показать, что совпадают $T^2\psi(\overline{X})$ и $T^2('\psi('\overline{X})\circ L$. Опуская пока доказательство того, что $T^2\psi(\overline{X})=\Theta(T, \overline{X})\psi(T)$, имеем

$$\begin{aligned} T^2('\psi('\overline{X})\circ L) &= ('T^2\,'\psi('\overline{X}))\circ L= \\ &= ('\Theta('T, '\overline{X})\,'\psi('T))\circ L= \\ &= ('\Theta('T, '\overline{X})\circ L)('\psi('T)\circ L)= \\ &= \Theta(T, \overline{X})\psi(T), \text{ по предположению и (б)}, \\ &= T^2\psi(\overline{X}). \end{aligned}$$

Следующая лемма завершает доказательство.

Лемма 4.

(а′) $T\psi(\bar{X})=\bar{X}\psi(T)+\theta(\bar{X})\psi(T)$,

(б′) $T\theta(\bar{X})=\Theta(T, \bar{X})$,

(в′) $T^2\psi(\bar{X})=\Theta(T, \bar{X})\psi(T)$.

Доказательство с точностью до очевидной замены символов совпадает с доказательством леммы 2. Требуется только проверить, что $[T, \bar{X}]=0$. Это равенство вытекает из геометрической интерпретации скобки (теорема 1.4), поскольку в каком бы порядке ни производились следующие операции:

смещение на данное расстояние вдоль луча (следуя интегральной кривой поля T),

вращение около начала (следуя интегральной кривой поля $\bar{X}$),

получается одинаковый результат.

Следствие. Если M — плоское d-мерное риманово многообразие, т. е. $K(P)=0$ для всех плоских сечений P на M, то M локально изометрично R^d.

В дальнейшем многообразия предполагаются связными.

Теорема 4. Пусть M — полное риманово многообразие, $m\in M$. Предположим, что $d\exp_m$ нигде не вырожденно. Тогда $\exp_m$ является накрывающим отображением.

Доказательство. Определим сначала новую метрику на M_m [т. е. на $T(M_m)$], снося метрику на M посредством $d\exp_m$. Поскольку геодезические, выходящие из $0\in M_m$, являются прямыми с линейной параметризацией, то из теоремы 8.5 следует, что M_m полно в этой метрике.

Поэтому, чтобы доказать теорему, достаточно проверить, что если F: $N\to M$ — локальный диффеоморфизм, dF всюду является изометрией и N полно, то F — накрывающее отображение. Для этого нам нужно, показать, что для любого $m \in M$ существует окрестность U точки m, ровно накрываемая отображением F, т. е. $F^{-1}(U)$ распадается на непересекающиеся множества U_i, каждое из которых диффеоморфно U относительно F.

Зафиксируем $m \in M$. Пусть O — шар с центром m, диффеоморфный шару O' радиуса r с центром $0(m)$ в M_m. Пусть U — шар радиуса $r/2$ с центром m, $F^{-1}(m) = \{u_i\}$ и U_i — шар радиуса $r/2$ с центром u_i. Для доказательства того, что это ровное накрытие, нужно проверить следующее:

(1) $F|_{u_i}$ взаимно однозначно,

(2) $F^{-1}(U)$ есть объединение множеств U_i,

(3) из $u_i \neq u_j$ следует, что U_i и U_j не пересекаются.

Доказательство. (1) Пусть U' — шар радиуса $r/2$ с центром $0(m)$ в M_m, и пусть dF_{u_i} отображает N_{u_i} изометрически на M_m. Тогда из равенства $\exp_m \circ dF_{u_i} = F \circ \exp_{u_i}$ выводим, что $U_i = \exp_{u_i} \circ dF_{u_i}^{-1}(U')$ и $F|U_i$ взаимно однозначно, поскольку dF_{u_i} — изометрия.

(2) Пусть $u' \in F^{-1}(U)$. Мы хотим показать, что существует i, такое, что $u' \in U_i$. Пусть $m' = F(u')$ и σ — геодезический сегмент длины $k < r/2$, соединяющий m' с m. Локально σ можно поднять до геодезической $\bar{\sigma}$, выходящей из u'. Поскольку N полно, то $\bar{\sigma}$ можно продолжить до геодезической длины k, а так как F — локальная изометрия, то $F \circ \bar{\sigma}$ — геодезическая и потому совпадает с σ. Но тогда конечная точка $\bar{\sigma}$ (обозначим ее через $\bar{n}$) переходит в конечную точку σ, т. е. $F(\bar{n}) = m$. Следовательно, существует i, такое, что $u_i = \bar{n}$, и, значит, $u' \in U_i$. Тем самым (2) доказано.

(3) Предположим, что $u_i \neq u_j$ и $u' \in U_i \cap U_j$. Тогда

$$\rho(u', u_i) < r/2, \quad \rho(u', u_j) < r/2, \quad \text{откуда } \rho(u_i, u_j) < r.$$

Повторяя доказательство (1), находим, что F взаимно однозначно на шаре радиуса r с центром u_i, что противоречит равенству $F(u_i) = F(u_j)$. Тем самым доказаны утверждение (3) и теорема 4.

Следствие 1. Пусть M — полное односвязное d-мерное плоское риманово многообразие. Тогда M изометрично R^d.

Доказательство. В силу следствия теоремы 3, $\exp_m$: $M_m \to M$ является локальной изометрией при любом $m \in M$, и, значит, по теореме 4, является накрывающим отображением, которое взаимно однозначно, поскольку M односвязно.

Следствие 2 (Адамар — Картан). Пусть M — полное односвязное d-мерное риманово многообразие с неположительной кривизной всех плоских сечений. Тогда M диффеоморфно R^d.

Доказательство вытекает непосредственно из теорем 2 и 4.

Задача 26. Предположим, что N, M — римановы многообразия, N полно и φ: $N \to M$ — регулярное отображение, локально не уменьшающее расстояния. Показать, что φ — накрывающее отображение, если $\dim N = \dim M$.

Задача 27. Пусть M и N — полные многообразия, имеющие одинаковую постоянную кривизну. (Такие многообразия называются *пространственными формами.*)

(а) Показать, что форму кривизны можно записать в виде $\Phi = k\omega\omega^t$, где ω^t — транспозиция ω.

(б) Показать, что M и N локально изометричны.

(в) Если M и N односвязны и $k \leqslant 0$, то они изометричны (M и N связны).

(г) Если $k = a^2 > 0$, то сфера радиуса π/a в M_m посредством $\exp_m$ отображается в точку, причем $\exp_m$ регулярно внутри этой сферы. Построить риманово накрывающее отображение сферы S^d радиуса $1/a$ в M, так что если M односвязно, то оно изометрично S^d.

Погружения и вторая фундаментальная форма

В этой главе мы рассматриваем погружение многообразий в риманово многообразие, а также индуцированную риманову связность на погруженном многообразии. Определяется вторая фундаментальная форма, которая связывается с кривизной и параллельным переносом; доказывается теорема Синга и ставится проблема существования погружений. Глава заканчивается изучением гиперповерхностей [22, 33, 85, 90].

10.1. Определения

Пусть N есть f-мерное риманово многообразие с метрикой $\langle\ ,\ \rangle$ M является d-мерным многообразием и $e=f-d>0$.

Погружением M в N называется такое C^∞-отображение I: $M\to N$, при котором dI — взаимно однозначное отображение на каждом M_m. Напомним, что I — вложение, если оно взаимно однозначно (§ 1.5).

Индуцированная риманова метрика (или *первая фундаментальная форма погружения*) — это форма $\langle\ ,\ \rangle'=$ $=\langle dI, dI\rangle$; она превращает M в риманово многообразие.

С этого момента мы будем предполагать, что I обозначает погружение и что M наделено индуцированной римановой структурой, а также связностью.

Поскольку N и M — римановы многообразия, то им соответствуют ассоциированные расслоения ортонормальных базисов $F(N)$ и $F(M)$. Рассмотрим еще два расслоения. Первое — $F_M(N)$, главное расслоение над M, индуцированное I и $F(N)$; таким образом,

$$F_M(N)=\{(m, b)\,|\,I(m)=\pi_N(b),\ m\in M,\ b\in F(N)\};$$

опустив символ $I(m)$ в выражении $b=(I(m), e_1, \ldots, e_f)$, будем писать $(m, b)=(m, e_1, \ldots, e_f)$.

Группа $O(f)$ действует на R^f и является группой расслоений $F(N)$ и $F_M(N)$. Разложим R^f в прямую сумму R^d+R^e и рассмотрим следующие подгруппы в $O(f)$:

$$O(d)=\{g\in O(f)\mid gR^d\subset R^d,\ g \text{ тождественно на } R^e\},$$
$$O(e)=\{g\in O(f)\mid g \text{ тождественно на } R^d,\ gR^e\subset R^e\}.$$

Пусть $\mathfrak{o}(f)$, $\mathfrak{o}(d)$, $\mathfrak{o}(e)$ — соответствующие алгебры Ли; тогда $\mathfrak{o}(f)=\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)+\mathfrak{k}$, где

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{o}(f)\mid XR^d\subset R^e \quad \text{и} \quad XR^e\subset R^d\}.$$

Заметим, что $O(d)\times O(e)\subset O(f)$ — подгруппа и что

$$\mathrm{Ad}\,(0(d)\times 0(e))\,\mathfrak{k}\subset\mathfrak{k}.$$

Пусть $\perp(M)$ и $T(M)$ — нормальное и касательное расслоения над M соответственно со слоями $M_m^\perp$ и M_m. Определим теперь

$$F(N, M)=\{b\in F_M(N)\mid b(R^d)=dlM_m,\ m=\pi(b)\}, \quad (\S\,3.3)$$

т. е.

$$F(N, M)=\{(m, e_1, \ldots, e_f)\in F_M(N)\mid e_1, \ldots, e_d\in M_m,$$
$$e_{d+1}, \ldots, e_f\in M_m^\perp\}.$$

Расслоение $F(N, M)$ называется расслоением *адаптированных ортонормальных базисов* над M. Оно реализует приведение группы $O(f)$ расслоения $F_M(N)$ к подгруппе $O(d)\times O(e)$. Возникает коммутативная диаграмма,

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[dr, "O(d)"', "\pi_0"] & F(N,M) \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "r"] \arrow[d, "O(d)\times O(e)"', "\pi'"] & F_M(N) \arrow[r, "l'"] \arrow[dl, "O(f)"', "\pi"] & F(N) \arrow[d, "O(f)"', "\pi"] \\
 & M \arrow[rr, "l"] & & N
\end{tikzcd}$$

где s — проекция на первые d касательных.

Задача 1. Пусть S — векторное пространство симметрических $d\times d$-матриц над R. Тогда $O(d)$ действует в S как сужение присоединенного представления группы $Gl(d, R)$: $\mathrm{Ad}\,T(X)=TXT^{-1}$, где $T\in O(d)$, $X\in S$. Пусть I_r — единичная $r\times r$-матрица, положим

$$X_r=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{d-r}\end{pmatrix}.$$

(а) Пусть M — орбита X_r под действием $O(d)$. Показать, что группой изотропии, оставляющей матрицу X_r неподвижной, служит $O(r)\times O(d-r)$, и потому M диффеоморфно $G_{d,r}$.

(б) Если ввести метрику $\langle\ ,\ \rangle$ на S вида $\langle X, X'\rangle=$ $=\mathrm{tr}\,XX'$, то S изометрично плоскому R^D-пространству, $D=d(d+1)/2$, на котором элементы группы $O(d)$ действуют как изометрии. Таким образом, метрика, индуцированная на M, инвариантна относительно $O(d)$, так что M оказывается римановым симметрическим пространством.

Задача 2. Пусть $O(d)$ действует в S так же, как в задаче 1, и $X\in S$ имеет n различных характеристических чисел с кратностями $d_1, \ldots, d_n$. Показать, что орбита X является многообразием флагов $Fl(d; d_1, \ldots, d_n)$ (см. задачу 7.25). Найти соотношение между скалярными произведениями на блоках m_{ij} и характеристическими значениями X.

10.2. Связности

В дальнейшем мы рассмотрим связность на подрасслоении $F(N, M)$, индуцированную связностью на $F_M(N)$. Вообще говоря, горизонтальное распределение на $F_M(N)$ не будет касательным к $F(N, M)$, и потому его следует в некотором смысле «спроектировать» на $F(N, M)$. Мы опишем процедуру этого «проектирования», используя двойственную формулировку для связности.

Пусть (P, G, M) — главное расслоение над многообразием M, и пусть φ — форма связности φ: $T(P)\to\mathfrak{g}$. Пусть i: $B\subset P$, $H\subset G$ и (B, H, M) — подрасслоение расслоения (P, G, M), представляющее приведение G к H.

Тогда $i^*\varphi$ является 1-формой на B со значениями в $\mathfrak{g}$ и потому, вообще говоря, не является формой связности на B. Однако если $\mathfrak{k}$ — векторное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, инвариантное относительно $\mathrm{Ad}\,H$, т. е. $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{h}$, $\mathrm{Ad}\,H(\mathfrak{k})\subset\mathfrak{k}$, то проекция $i^*\varphi$ в $\mathfrak{h}$ при этом разложении $\mathfrak{g}$ является формой связности на B (см. задачу 5.5).

Задача 3. Проверить, что при указанном условии проекция $i^*\varphi$ в $\mathfrak{h}$ является формой связности.

Пусть φ — форма римановой связности на $F(N)$, ω — форма смещения; обозначим теми же символами эти формы, снесенные посредством l' на $F_M(N)$, так что φ — форма связности на $F_M(N)$ и $d\omega=-\varphi\omega$ — первое структурное уравнение.

Заменяя $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ на $\mathfrak{o}(f)$, $\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)$, $\mathfrak{k}$, найдем, что проекция $r^*\varphi$ на $\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)$ является формой связности на $F(N, M)$, обозначаемой, естественно, через $\varphi_d+\varphi_e$. В силу эквивариантности, это вновь дает форму связности ψ на $F_M(N)$; поэтому можно рассмотреть форму разности $\varphi-\psi$, которая горизонтальна и эквивариантна. Но тогда форма $\tau=r^*\varphi-(\varphi_d+\varphi_e)$ тоже оказывается горизонтальной и эквивариантной. Форма τ фактически и есть вторая фундаментальная форма погружения, однако формальное определение будет дано в терминах некоторого связанного с этим объекта.

Воспользуемся формой φ, чтобы определить связность на $F(M)$. Заметим, что φ_d удовлетворяет следующим уравнениям:

(1) $\varphi_d(ds^{-1}(0))=0$,

(2) $R_g^*\varphi_d=\varphi_d$ для $g\in I_d\cdot O(e)$

Из (1) и (2) следует, что на $F(M)$ существует единственная форма φ_0, такая, что

$$\varphi_d=\varphi_0\circ ds.$$

Легко проверить, что φ_0 — форма связности на $F(M)$.

Изучим теперь структурные уравнения всех этих связностей. Отметим прежде всего, что если $b\in F(N, M)$, то

$$d\pi'(F(N,\ M)_b)\subset M_{\pi'(b)}$$

и

$$b^{-1}(M_{\pi'(b)}) \subset R^d.$$

Следовательно, если положить $\omega' = r^*\omega$, то

$$\omega'(F(N, M)_b) = b^{-1}(d\pi'(F(N, M)_b)) \subset R^d,$$

где ω — форма смещения на $F(N)$, снесенная на $F_M(N)$. Отсюда $d\omega' = d(r^*\omega) = r^*d\omega$ также принимает свои значения в R^d и $\varphi_e\omega' = 0$. Поэтому структурное уравнение для φ на $F_M(N)$ дает

$$d\omega' = r^*d\omega = -r^*\varphi\omega = -(\varphi_d + \varphi_e + \tau)\omega' = -\varphi_d\omega' - \tau\omega'.$$

Далее, формы $d\omega'$ и $-\varphi_d\omega'$ являются R^d-значными, тогда как форма $\tau\omega'$ является R^e-значной ввиду R^d-значности ω'. Следовательно,

$$d\omega' = -\varphi_d\omega', \quad \tau\omega' = 0.$$

В частности, связность $\varphi_d + \varphi_e$ имеет нулевое кручение. Кроме того, поскольку $\omega' = s^*\omega_0$, где ω_0 — форма смещения на $F(M)$, то структурным уравнением для φ_0 будет

$$d\omega_0 = -\varphi_0\omega_0,$$

так что φ_0 имеет нулевое кручение. Итак, φ_0 — единственная риманова связность на $F(M)$.

Задача 4. Доказать, что $\omega' = s^*\omega_0$.

Задача 5. На $F(N)$ определим риманову метрику, потребовав, чтобы базисные и фундаментальные векторные поля E_i и F_{ij} были ортонормальны; тогда эта метрика индуцирует некоторую метрику на $F_M(N)$.

(а) Показать, что подпространство $dI'(F(N, M)_b) \subset$

$\subset F_M(N)_b$ ортогонально той части вертикального пространства, которая соответствует $\mathfrak{k}$, т. е. $\lambda\mathfrak{k}$.

(б) Показать, что горизонтальное пространство связности ψ в точке $b \in F_M(N)$ является ортогональной проекцией горизонтального пространства связности φ на $dI'(F(N, M)_b)$.

Полученный результат позволяет описать связность ψ с геометрической точки зрения: это ближайшая к φ связность, при которой параллельный перенос преобразует адаптированные ортонормальные базисы в адаптированнные.

10.3. Кривизна

Используя теперь для φ другое структурное уравнение, мы свяжем кривизну индуцированной структуры на M с кривизной на N.

Отметим следующие очевидные факты:

(1) $[\varphi_d, \varphi_e]=0$,
(2) $[\varphi_d+\varphi_e, \tau]$ $\mathfrak{k}$-значно,
(3) $[\varphi_d, \varphi_d]$ $\mathfrak{o}(d)$-значно,
(4) $[\varphi_d, \varphi_e]$ $\mathfrak{o}(e)$-значно,
(5) $[\tau, \tau]$ $\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)$-значно, $[\tau, \tau]=[\tau, \tau]_d+[\tau, \tau]_e$.

Пусть теперь Φ — форма кривизны связности φ на $F_M(N)$; имеем $\Phi'=r^*\Phi=\Phi_d+\Phi_e+\Gamma$, где Γ принимает значения в $\mathfrak{k}$. Тогда структурное уравнение

$$d\varphi=-\frac{1}{2}[\varphi, \varphi]+\Phi$$

дает

$$d\varphi_d=-\frac{1}{2}[\varphi_d, \varphi_d]-\frac{1}{2}[\tau, \tau]_d+\Phi_d,$$
$$d\varphi_e=-\frac{1}{2}[\varphi_e, \varphi_e]-\frac{1}{2}[\tau, \tau]_e+\Phi_e,$$
$$d\tau=-[\varphi_d+\varphi_e, \tau]+\Gamma.$$

В частности, если Φ_0 — форма кривизны связности φ_0 на $F(M)$, то

$$\Phi_0\circ ds=\Phi_d-\frac{1}{2}[\tau, \tau]_d.$$

Таким образом, эти кривизны связаны посредством формы разности τ.

Точнее, пусть x, y — ортонормальные касательные в M_m, $b\in F(N, M)$ и $\pi'(b)=m$. Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$ — горизонтальные подъемы x, y в b, так что $\tilde{x}=ds(\bar{x})$, $\tilde{y}=ds(\bar{y})$ являются φ_0-горизонтальными подъемами x и y в $s(b)\in F(M)$. Обозначим через $K_0(x, y)$ и $K(x, y)$

кривизны сечения, порожденного x и y в M и N соответственно. Тогда

$$
\begin{aligned}
K_0(x, y) &= \langle R_{0xy}x, y\rangle = \\
&= -\langle s(b)\Phi_0(\tilde{x}, \tilde{y})(s(b))^{-1}x, y\rangle = \\
&= -\langle s(b)\Phi_0(ds(\bar{x}), ds(\bar{y}))(s(b))^{-1}x, y\rangle = \\
&= -\langle b\Phi_d(\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x, y\rangle + \frac{1}{2}\langle b[\tau, \tau](\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x, y\rangle.
\end{aligned}
$$

Но $(\Phi_e(\bar{x}, \bar{y}) + \Gamma(\bar{x}, \bar{y}))b^{-1}x \in R^e$, так как $b^{-1}x \in R^d$. Поэтому, поскольку $\langle R^d, R^e\rangle = 0$, имеем

$$\langle b\Phi_d(\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x, y\rangle = \langle b\Phi'(\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x, y\rangle = -K(x, y),$$

откуда

$$K_0(x, y) = K(x, y) + \frac{1}{2}\langle b[\tau, \tau](\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x, y\rangle,$$

где

$$[\tau, \tau](\bar{x}, \bar{y}) = 2[\tau(\bar{x}), \tau(\bar{y})].$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}[\tau, \tau](\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x = [\tau(\bar{x}), \tau(\bar{y})]\,\omega'(\bar{x}).$$

Последнему выражению с помощью второй фундаментальной формы будет придан геометрический смысл.

10.4. Вторая фундаментальная форма

Пусть $z \in M_m^{\perp}$. *Вторая фундаментальная форма в точке* z является билинейной формой H_z на M_m:

$$H_z(x, y) = -\langle z, b\tau(\bar{x})\omega'(\bar{y})\rangle,$$

где $x, y \in M_m$, $b \in (\pi')^{-1}(m)$, а $\bar{x}, \bar{y}$ — подъем в b. Форма $H_z(x, y)$, очевидно, не зависит от допущенного произвола и является симметрической, поскольку $\tau\omega' = 0$. Поэтому ей соответствует симметрическое преобразование S_z в M_m

$$H_z(x, y) = \langle S_z x, y\rangle.$$

Пусть теперь T — поле линейных преобразований, ассоциированное с формой разности τ, т. е. если $x \in M_m$, $y \in N_{I(m)}$, то

$$T_x y = b\tau(\bar{x}) b^{-1}(y),$$

где $b \in (\pi')^{-1}(m) \subset F(N, M)$ и $\bar{x}$ — подъем x в b. В частности, $T_x(M_m) \subset M_m{}^{\perp}$, $T_x(M_m{}^{\perp}) \subset M_m$. Если $y \in M_m$, то $T_x y = b\tau(\bar{x})\omega'(\bar{y})$. Далее,

$$\begin{aligned}\langle S_z x, y\rangle &= H_z(x, y) = \\ &= -\langle z, b\tau(\bar{x})\omega'(\bar{y})\rangle = \\ &= -\langle z, T_x y\rangle = \\ &= \langle T_x z, y\rangle,\end{aligned}$$

поскольку $\tau(\bar{x})$ кососимметрично. Таким образом, для $x \in M_m$ и $z \in M_m{}^{\perp}$

$$S_z x = T_x z.$$

Получается следующая интерпретация T_x в терминах параллельного переноса. Фактически связности φ и ψ в $F_M(N)$ порождают различные параллельные переносы слоя $N_{I(m)}$, $m \in M$; T — инфинитезимальная мера этого различия.

Пусть $x \in M_m$, X — векторное поле на M, определенное в окрестности m, такое, что $X(m) = x$, и Y — векторное поле касательных к N, определенное на M, т. е. $Y(m') \in N_{I(m')}$. Пусть, наконец, через D и E обозначено ковариантное дифференцирование относительно связностей φ и ψ соответственно. Тогда имеет место

Предложение 1. $T_X Y(m) = (D_X Y - E_X Y)(m)$.

Доказательство. Так же как в п. 6.4.1 (III), определим функцию f_Y: $F_M(N) \to R^f$ формулой $f_Y(b) = b^{-1}Y(\pi(b))$. Пусть $\bar{X}$ и $\tilde{X}$ — соответственно φ- и ψ-горизонтальные подъемы поля X в $F_M(N)$. Тогда из п. 6.4.1 (III) вытекает, что

$$(E_X Y)(m) = b((\tilde{X} f_Y)(b)),$$

$$(D_X Y)(m) = b((\bar{X} f_Y)(b)),$$

где $\pi(b)=m$. Но

$$\begin{aligned}(\tilde{X}-\bar{X})f_Y(b) &= (\tilde{X}-\bar{X})(b)f_Y = \\ &= \lambda\varphi(\tilde{X}-\bar{X})(b)f_Y = \\ &= \lambda\tau(\tilde{X})(b)f_Y = \\ &= -\tau(\tilde{X}(b))f_Y(b) \qquad [\text{лемма } 5.5\ (\mathrm{II})] \\ &= -\tau(\tilde{X})b^{-1}Y(m),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}T_XY(m) &= b\tau(\tilde{X}(b))b^{-1}Y(m) = \\ &= b((\bar{X}-\tilde{X})f_Y)(b) = \\ &= (D_XY)(m)-(E_XY)(m). \qquad \text{Ч. Т. Д.}\end{aligned}$$

Дадим другую интерпретацию преобразования T_xy. Пусть $x\in M_m$, $y\in M_m{}^{\perp}$ и γ — кривая, причем $\gamma(0)=m$ и $\gamma_*(0)=x$. При фиксированном t пусть $Z(t)$ будет ψ-параллельным переносом y вдоль γ в $\gamma(t)$, $Z(t)\in M_{\gamma(t)}{}^{\perp}$, пусть, далее, $Y(t)$ есть φ-параллельный перенос $Z(t)$ обратно вдоль $I\circ\gamma$ в $I(m)$, так что $t\to Y(t)$ является кривой в $N_{I(m)}$.

Предложение 2. $Y'(0)=T_xy$ [$'$ обозначает дифференцирование в векторном пространстве $N_{I(m)}$].

Доказательство. Так как Z является ψ-параллельным вдоль γ, то $E_xZ=0$. Но $D_xZ=Y'(0)$, и потому наше утверждение вытекает из предложения 1.

Задача 6. (а) Если Y_0 — векторное поле вдоль кривой γ_0 в M и $Y=dI(Y_0)$ — соответствующее векторное поле вдоль $\gamma=I\circ\gamma_0$ в N, то Y_0 параллельно (относительно φ_0) тогда и только тогда, когда $D_{\gamma_*}Y$ принадлежит нормальному расслоению $\perp(M)$.

(б) Следовательно, γ_0 является геодезической в M тогда и только тогда, когда $D_{\gamma_*}\gamma_*$ принадлежит $\perp(M)$.

10.5. Кривизна и вторая фундаментальная форма

Применив теперь эту интерпретацию второй фундаментальной формы к нашему прежнему выражению для кривизны $K_0(x, y)$, получим некоторые непосредственные следствия.

Напомним, что для ортонормальных векторов $x, y \in M_m$

$$K_0(x, y) = K(x, y) + \langle b[\tau(\bar{x}), \tau(\bar{y})]\,\omega'(\bar{x}), y\rangle,$$

где $\pi(b) = m$ и $\bar{x}, \bar{y}$ являются $(\varphi_d + \varphi_e)$-горизонтальными подъемами x, y в $b \in F(N, M)$. Далее,

$$[\tau(\bar{x}), \tau(\bar{y})]\,\omega'(\bar{x}) = \tau(\bar{x})\,\tau(\bar{y})\,\omega'(\bar{x}) - \tau(\bar{y})\,\tau(\bar{x})\,\omega'(\bar{x}) = \\ = b^{-1}(T_x T_y x - T_y T_x x).$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что

$$R_{0xy} = (PR_{xy} + T_x T_y - T_y T_x)\,|_{M_m},$$

где P — ортогональная проекция $N_{I(m)} \to M_m$.

Лемма 1. Пусть $z_1, \ldots, z_e$ — ортонормальный базис в $M_m^{\perp}$, $H_l = H_{z_l}$, а x, y — ортонормальная пара в M_m. Тогда

$$K_0(x, y) = K(x, y) + \sum_l (H_l(x, x)\,H_l(y, y) - H_l(x, y)^2).$$

Таким образом, индуцированная кривизна есть кривизна в N плюс сумма «квадратов площадей» относительно второй фундаментальной формы.

Доказательство.

$$\langle T_y x, z_l\rangle = -H_l(x, y),$$

откуда

$$T_y x = -\sum_l H_l(x, y)\,z_l.$$

Поэтому

$$T_x T_y x = -\sum_l H_l(x, y)\,T_x z_l.$$

Далее,

$$\langle T_x z_l, y\rangle = H_l(x, y).$$

Следовательно,

$$\langle T_x T_y x, y\rangle = -\sum_i H_i(x, y)^2.$$

Аналогично

$$T_x x = -\sum_i H_i(x, x) z_i,$$

$$\langle T_y z_i, y\rangle = H_i(y, y),$$

так что

$$-\langle T_y T_x x, y\rangle = \sum_i H_i(x, x) H_i(y, y).$$

Теорема 1. Пусть M погружено в N посредством I, σ — такая кривая многообразия M, что $I \circ \sigma$ является геодезической многообразия N, и пусть P — произвольное плоское сечение многообразия M, касательное к σ. Тогда $K_0(P) \leqslant K(P)$.

Если через Y обозначить φ_0-параллельное векторное поле вдоль σ, такое, что P порождается векторами $x = \sigma_*(0)$ и $y = Y(0)$, то равенство между $K_0(P)$ и $K(P)$ выполняется тогда и только тогда, когда $D_x dI(Y) = 0$. В частности, $K_0(Y, \sigma_*) = K(Y, \sigma_*)$ в том и только в том случае, если $dI(Y)$ параллельно в N.

Доказательство. Можно предполагать, что Y и σ_* нормализованы: $\langle Y, Y\rangle = \langle \sigma_*, \sigma_*\rangle = 1$, $\langle Y, \sigma_*\rangle = 0$. Из свойства локального минимума длины геодезических (или из задачи 6) следует, что σ — геодезическая в M. Поэтому σ_* и $dI(\sigma_*)$ параллельны в M и N соответственно, так что $T_{\sigma_*}\sigma_* = 0$, в силу предложения 1. Пусть z_i, H_i такие же, как выше; тогда $H_i(\sigma_*, \sigma_*) = 0$ для каждого i и

$$K_0(Y, \sigma_*) - K(Y, \sigma_*) = -\sum_i H_i(Y, \sigma_*)^2 \leqslant 0,$$

что доказывает первое утверждение.

Отсюда также следует, что $K_0(P) = K(P)$ тогда и только тогда, когда $H_i(y, x) = 0$ для каждого i. Но

$$H_i(y, x) = -\langle z_i, T_x y\rangle,$$

так что это эквивалентно равенству $T_x y=0$, или, в силу предложения 1,

$$D_x Y = E_x Y = 0,$$

так как Y параллельно в M вдоль σ.

Замечание. Частный случай этой теоремы для $\dim M=2$ известен как *теорема Синга* [61].

Пусть M — подмногообразие риманова многообразия N с индуцированной римановой структурой. Тогда M называется *вполне геодезическим подмногообразием*, если каждая геодезическая многообразия M является геодезической в N.

Теорема 2. Многообразие M является вполне геодезическим подмногообразием многообразия N в том и только в том случае, если его вторая фундаментальная форма обращается в нуль тождественно.

Доказательство. Обращение в нуль второй фундаментальной формы H, очевидно, эквивалентно обращению в нуль формы разности τ, означающему, что расслоение $F(N, M)$ расположено «горизонтально» в расслоении $F_M(N)$. В этом случае совпадают параллельные переносы относительно N и M соответственно, и, значит, каждое векторное поле, параллельное в M, параллельно и в N; это показывает, что геодезические в M являются также геодезическими в N. Поэтому M — вполне геодезическое подмногообразие в N.

Обратно, если M — вполне геодезическое подмногообразие, то каждое $x \in M_m$ касательно к кривой σ, являющейся геодезической и в M, и в N. Тогда, так же как в доказательстве теоремы 1, получаем, что $H_i(x, x)=0$ для всех x, i. Поэтому $H_i=0$ для всех i, в силу своей симметричности, т. е. $H=0$. Ч. Т. Д.

Задача 7. Доказать следующую формулу для преобразований кривизны погруженного многообразия. Пусть z_i, H_i те же, что и выше, S_i — симметрическое линейное преобразование, такое, что $H_i(x, y)=\langle S_i x, y\rangle$.

для всех $x, y \in M_m$. Тогда

(а) $R_{0xy}w = PR_{xy}w + \sum_i (\langle S_i x, w\rangle S_i y - \langle S_i y, w\rangle S_i x)$.

Если рассматривать R_0, R как отображения бивекторов в бивекторы, $G^2{}_m \to G^2{}_m$, то (а) превращается в

(б) $$R_0(xy) = P_2R(xy) + \sum_i (S_i x)(S_i y),$$

или

$$R_0 = P_2R + \sum_i S_{i2}.$$

Здесь P — проекция $N_{I(m)} \to M_m$, и если A — линейное преобразование, то A_2 — его продолжение на бивекторы, задаваемое формулой $A_2(xy) = (Ax)(Ay)$.

Задача 8. Подмногообразие M многообразия N называется *геодезическим в точке* m, если каждая геодезическая многообразия M, проходящая через m, является также геодезической в N.

(а) Показать, что если N имеет постоянную кривизну, то каждое подмногообразие, геодезическое в некоторой точке, является вполне геодезическим.

(б) Обратно, если каждое подмногообразие, геодезическое в некоторой точке, является вполне геодезическим, то N удовлетворяет предположению теоремы Шура (задача 9.3) и, следовательно, имеет постоянную кривизну ($\dim N > 2$) [25, стр. 232—233].

10.6. Локальное гауссово отображение

Пусть U — риманова нормальная координатная окрестность точки $m \in M$ (см. п. 6.3.2). Пусть $\perp(U)$ — сужение на U нормального расслоения многообразия M. Тогда отображение $G_U : \perp(U) \to M_m + M_m^{\perp}$ определяется так: если $z \in \perp(U)$, то $G_U(z)$ есть параллельный перенос в N вектора z назад вдоль геодезического луча в U, идущего из точки m в начальную точку вектора z.

Отображение G_U называется *гауссовым отображением относительно* U.

Замечание. Если $N=R^f$, то параллельный перенос в N не зависит от пути, так что G можно определить глобально на $\perp(M)$, согласованно с G_U на $\perp(U)$. Это всегда так, если N имеет тривиальную группу голономии.

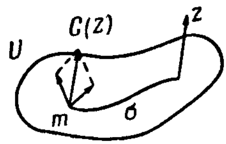


Рис. 35.

Заметим, что $\perp(M)$ как расслоение, ассоциированное с $F(N, M)$, имеет связность, соответствующую форме $\varphi_d+\varphi_e$ (§ 5.4).

Предложение 3. Пусть $x\in M_m$, $z\in M_m{}^{\perp}$ и $\tilde{x}$ — горизонтальный подъем x в $z\in\perp(U)$. Тогда $dG_U(\tilde{x})$ можно отождествить с элементом $y\in M_m+M_m{}^{\perp}$, $y=T_xz$.

Доказательство. Пусть σ — луч в U с касательной x в m. Если $\tilde{\sigma}$ — горизонтальный подъем луча σ в $F(N, M)$, то кривая

$$t\to\tilde{\sigma}(t)\tilde{\sigma}(0)^{-1}z$$

в $\perp(U)$ касается $\tilde{x}$. Композиция G_U с этой кривой порождает кривую

$$t\to\bar{\sigma}(0)\bar{\sigma}(t)^{-1}\tilde{\sigma}(t)\tilde{\sigma}(0)^{-1}z,$$

где $\bar{\sigma}$ — горизонтальный подъем σ в $F_M(N)$. По построению, касательная к этой кривой есть $dG_U(\tilde{x})=y$, но, в силу предложения 2, $y=T_xz$. Ч. Т. Д.

Следствие 1. Если x, $y\in M_m$, $z\in M_m{}^{\perp}$, $\tilde{x}$ — произвольный подъем x в $z\in\perp(U)$, то $H_z(x, y)=\langle dG_U(\tilde{x}), y\rangle$ (здесь снова производится некоторое отождествление).

Доказательство. Если $\tilde{x}$ — горизонтальный подъем, то это утверждение вытекает из предложения 3.

Если $\tilde{x}$ не горизонтально, то, обозначив через x' горизонтальиый подъем, заметим, что $dG_U(\tilde{x}-x')$ — вектор, касательный к $M_m{}^{\perp}$, так что его скалярное произведение с y равно нулю. Это следует из того, что $\tilde{x}-x'$ является вектором, касательным к $M_m{}^{\perp}$, а G_U тождественно на $M_m{}^{\perp}$. Ч. Т. Д.

10.7. Гессианы нормальных координат в N

Пусть M — произвольное многообразие, f — вещественная C^∞-функция на M, $m\in M$.

Функция f имеет *критическую точку* в n, если $df_m=0$. Если m — критическая точка f, то *гессиан* H_f *функции* f *в* m является билинейиой функцией на M_m, определенной следующим образом. Если x, $y\in M_m$, X — векторное C^∞-поле, такое, что $X(m)=x$, то

$$H_f(x,\ y)=y(Xf).$$

Поскольку $df_m=0$, то легко проверить, что $H_f(x,\ y)$ не зависит от выбора X, а также симметричность H_f.

Задача 9. Проверить эти свойства H_f, ие используя координат.

Вернемся теперь к погружению I: $M\to N$. Вторая фундаментальная форма будет связана с гессианами некоторых функций на M (см. ниже теорему 3).

Пусть V — нормальная координатная окрестность точки $n=I(m)$ в N; пусть $v_1, \ldots, v_f$ — нормальные координатные функции на V, так что $V_i(n)=(\partial/\partial v_i)(n)$ — ортонормальный базис в N_n. Пусть $u_i=v_i\circ I$. Тогда m является критической точкой линейной комбинации $\bar{u}=\sum\limits_i a_i u_i$ в том и только в том случае, если

$$\sum_i a_i V_i(n)\in M_m{}^{\perp},$$

т. е. когда $du=\sum\limits_i a_i d\bar{u}_i$ аннулирует M_m.

Предположим для простоты, что $u=u_1$ имеет критическую точку в m. Вычислим $H_u(x,\ x)$ для всех $x\in M_m$, определив тем самым H_u.

Пусть σ — геодезическая, а $\sigma_*(0)=x$; воспользуемся σ_* для определения $H_u(x, x)$. Пусть X — продолжение σ_* на окрестность точки m, а Y — продолжение dIX на окрестность точки n. Пусть $Y=\sum_i g_i V_i$ — координатное выражение для Y. Тогда

$$Xu=\left(\sum_i g_i V_i v_1\right)\circ I=g_1\circ I,$$

так что

$$H_u(x, x)=xXu=x(g_1\circ I)=dI(x)g_1=yg_1,$$

где $y=Y(n)$. В силу предложения 1, имеем

$$\begin{aligned} T_x x &= D_x X - E_x X = \\ &= D_x X, \quad \text{так как } \sigma \text{ — геодезическая в } M, \\ &= D_y Y = \\ &= D_y\left(\sum_i g_i V_i\right) = \\ &= \sum_i (yg_i)V_i(n) + D_y \sum_i g_i(n) V_i = \\ &= \sum_i (yg_i) V_i(n). \end{aligned}$$

На последнем шаге $D_y \sum_i g_i(n) V_i=0$, поскольку v_i — нормальные координаты в N, и, значит, $\sum_i g_i(n)V_i$ — касательиое поле к геодезической в направлении y. Таким образом,

$$\begin{aligned} H_u(x, x) &= yg_1 = \\ &= \langle T_x x, V_1(n)\rangle = \\ &= -H_z(x, x), \qquad z=V_1(n). \end{aligned}$$

Нами доказана

Теорема 3. Пусть $I\colon M\to N$ — погружение, $m\in M$; V — нормальная координатная окрестность точки

$n=I(m)\subset N$, $u=\Sigma a_i u_i$, где $u_i=v_i\circ I$ — нормальные координаты, снесенные на M. Предположим, что $z=\Sigma a_i V_i(n)\in M_m{}^{\perp}$. Тогда m — критическая точка функции u, гессиан которой только знаком отличается от второй фундаментальной формы H_z.

Если $N=R^f$, то можно выбрать нормальные координаты на всем N, и функция u оказывается с точностью до константы линейной функцией, снесенной на M. Гауссово отображение, определенное на всем $\perp(M)$, можно рассматривать как отображение $\perp(M)$ в N, если отождествлять N_n с N, при этом G не зависит от n. Каждому $n\in R^f$ соответствует линейная функция u_n, $u_n(n')=\langle n', n\rangle$ на R^f. Если $G(z)=n$, $z\in M_m{}^{\perp}$, то комбинация нормальных координат, соответствующая z, с точностью до константы есть просто u_n. Итак, мы получаем

Следствие 2. Пусть I: $M\to R^f$ — погружение, $z\in M_m{}^{\perp}$ и $G(z)=n$; тогда следующие три формы эквивалентны:

(а) вторая фундаментальная форма H_z точки z,

(б) форма гессиана функции $u_n\circ I$, взятая с обратным знаком,

(в) форма $(x, y)\to\langle dG(\bar{x}), dIy\rangle$,

где x — подъем x в $\perp(M)_z$.

Задача 10. Предположим, что M — подмногообразие в окрестности $n\in N$, заданное уравнениями $g_i=0$, $i=1, \ldots, e$, где g_i — вещественные C^∞-функции на N, такие, что $g_i(n)=0$ и $dg_i(n)$ линейно независимы. Пусть v_i — вышеуказанные нормальные координаты в точке n, и $M'=V\cap \exp_n(M_n)$, где $\exp_n$ — экспоненциальное отображение N. Пусть

$$g=\sum_l a_l g_l,\quad dg(n)=\sum_l b_l dv_l(n),\quad u=\sum_l b_l u_l,\quad f=g|_{M'}.$$

Показать, что $H_f=-H_u$, причем обе формы определены на $M_n=M'_n$.

Задача 11. Пусть $S_1, \ldots, S_e$ — симметрические $d\times d$-матрицы; показать, что отображение $R^d\to R^f$, определенное формулой $x \to (x, -\langle S_1 x, x\rangle, \ldots, -\langle S_e x, x\rangle)$, является вложением, при котором $S_1, \ldots, S_e$ оказываются матрицами второй фундаментальной формы относительно базиса $D_i(0)$, $i \leqslant d$, в $R^{d}{}_0$ и базиса $D_i(0)$, $i > d$, в нормальном пространстве (только в одной этой точке).

Задача 12. Пусть $f = u_1 u_2 + u_3 u_4$, $g = u_1 u_3 + u_2 u_4 : R^4 \to R$. Тогда пересечение множества $f^{-1}(1) \cap g^{-1}(0)$ с окрестностью точки $(1, 1, 0, 0)$ является двумерным подмногообразием в R^4. Найти кривизну этого подмногообразия в точке $(1, 1, 0, 0)$.

10.8. Формулировка задачи погружения

Теперь мы будем искать достаточные условия, при которых отображение M в N является изометрическим погружением, а также структуры, позволяющие получать такие отображения. Эти условия составляют часть необходимых условий из § 10.2 и 10.3, касающихся расслоения адаптированных ортонормальных базисов. Поскольку мы хотим найти условия в терминах внутренних структур многообразий M и N, необходимо каким-то образом заранее построить это расслоение. Если M диффеоморфно R^d, то это не представляет затруднений, ибо тогда все расслоения над M тривиальны, а расслоение адаптированных ортонормальных базисов будет эквивалентно расслоению произведения $M \times O(d) \times O(e)$. Если M не столь тривиально, то расслоение адаптированных ортонормальных базисов не обязательно единственно как расслоение. Однако всякому решению нашей задачи соответствует гладкое погружение M в N. Если скомбинировать ортонормальные базисы такого погружения и многообразия M относительно его римановой метрики (но не метрики, индуцированной погружением), то получится расслоение B с группой $G = O(d) \times O(e)$, которое может служить моделью требуемого расслоения. В дальнейшем предполагается, что задано это расслоение B.

Если бы существовало изометрическое погружение $I: M \to N$, то имелось бы также соответствующее погружение I': $B \to F(N)$. Отображение I' является послойным: оно переводит слои в слои и коммутирует с действием G. Если I' дано, то, проектируя на M и N, можно восстановить I. Подход к задаче отыскания надлежащего I' будет сформулирован в терминах графика этого отображения, являющегося подмногообразием в $P = B \times \times F(N)$. Заметим, что G действует на P посредством диагонального вложения G в $G \times O(f)$.

Предложение 4. Подмногообразие Q многообразия P тогда и только тогда является графиком послойного отображения I': $B \to F(N)$, когда Q инвариантно относительно действия G, а проекция Q на B является диффеоморфизмом.

Доказательство. Если p_1 и p_2 — проекции P на B и $F(N)$, то I' определяется формулой $I' = p_2(p_1|_Q)^{-1}$. Доказательство сводится к простой проверке.

Формы смещения $F(M)$ и $F(N)$ можно снести на P: первую через промежуточное расслоение B, вторую непосредственно с помощью p_2. Обозначим соответствующие формы через θ и ω; форма ω распадается на R^d-значную и R^e-значную составляющие, $\omega = \omega' + \omega''$.

Пусть π_1: $B \to M$ и π_2: $F(N) \to N$ — проекции в расслоениях. В дальнейшем нам понадобятся такие свойства форм θ, ω: для $t \in P_p$

$$\|d\pi_1 dp_1(t)\| = \|\theta(t)\| \quad \text{и} \quad \|d\pi_2 dp_2(t)\| = \|\omega(t)\|.$$

Теорема 4. Пусть подмногообразие j: $Q \to P$ (j — отображение включения) является графиком послойного отображения I'. Тогда индуцированное отображение I: $M \to N$ в том и только в том случае является изометрическим погружением, когда $j^*(\theta - \omega') = 0$ и $j^*\omega'' = 0$.

Доказательство. Так как, по предположению, $p_1|_Q$ является диффеоморфизмом, то определено отображение

$$J = (p_1|_Q)^{-1}: B \to P.$$

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "j"] & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
B \arrow[u, "J"] \arrow[rr, "I'"'] \arrow[d, "\pi_1"] & & F(N) \arrow[d, "\pi_2"] \\
M \arrow[rr, "I"'] & & N
\end{tikzcd}$$

Предположим, что $j^*(\theta-\omega')=0$, $j^*\omega''=0$. Пусть $x\in M_m$, $\bar{x}$ — подъем x в $B: d\pi_1(\bar{x})=x$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|dI(x)\| &= \|d\pi_2\, dI'(\bar{x})\| = \\
&= \|d\pi_2\, dp_2\, dj\, dJ(\bar{x})\| = \\
&= \|\omega'\, dj\, dJ(\bar{x})\| + \|\omega''\, dj\, dJ(\bar{x})\| = \\
&= \|\theta\, dj\, dJ\, (\bar{x})\| + 0 = \\
&= \|d\pi_1\, dp_1\, dj\, dJ\, (\bar{x})\| = \\
&= \|d\pi_1(\bar{x})\| = \\
&= \|x\|.
\end{aligned}$$

То что изометричность I влечет $j^*(\theta-\omega')=0$ и $j^*\omega''=0$, уже доказано в § 10.2.

Укажем теперь условия, при которых можно построить подмногообразие Q. Поскольку эти условия будут зависеть от свойств второй фундаментальной формы, а мы хотим, чтобы наша формулировка как можно в большей степени основывалась на внутренних свойствах многообразий M и N, то желательно, чтобы предполагаемые свойства второй фундаментальной формы зависели только от формы кривизны $F(M)$, но не от формы кривизны $F(N)$. Однако форма кривизны $F(N)$ входит в выражение для формы кривизны расслоения $F(M)$, и потому необходимо потребовать, чтобы кривизна N не зависела от точки и от направления. Таким образом, *мы предполагаем, что N обладает постоянной кривизной k,* и, следовательно, форма кривизны $F(N)$ сносится на P посредством p_2 в форму $\Phi=k\omega\omega^t$, где ω^t — транспозиция вектора-столбца ω, откуда $\Phi_{ij}=k\omega_i\omega_j$ (см. задачу 9.27).

Условимся, что формы на B имеют индекс 0, который исчезает после снесения на P. Таким образом, $\theta = p_1^* \theta_0$. Форма связности на $F(M)$ сносится на B с помощью проекции q: $B \to F(M)$ в $\mathfrak{o}(d)$-значную форму ψ_0. Положим $\psi = p_1^* \psi_0$. Поступая так же с кривизной, найдем, что структурное уравнение на P принимает вид $d\psi = -\psi^2 + \Psi$.

Форма связности на $F(N)$ с помощью p_2 сносится в форму φ на P. Она распадается на несколько блоков:

форму φ' со значениями в $\mathfrak{o}(d)$,

$d \times e$-матрицу τ со значениями в $\mathfrak{k}_1$,

$e \times d$-матрицу $-\tau^t$

и

форму φ'' со значениями в $\mathfrak{o}(e)$.

Тогда структурные уравнения на $F(N)$ дают

$$\begin{aligned}
d\omega' &= -\varphi'\omega' + \tau\omega'',\\
d\omega'' &= -\tau^t\omega' + \varphi''\omega'',\\
d\varphi' &= -\varphi'^2 + \tau\tau^t + k\omega'\omega'^t,\\
d\tau &= -\varphi'\tau - \tau\varphi'' + k\omega'\omega''^t,\\
d\varphi'' &= -\tau^t\tau - \varphi''^2 + k\omega''\omega''^t.
\end{aligned}$$

Пусть многообразие M связно и односвязно, а N полно.

Теорема 5. Пусть σ_0 и ψ_0'' — такие 1-формы на B, что $\psi_0 + \psi_0''$ есть форма связности, в которой ψ_0'' является $\mathfrak{o}(e)$-значной составляющей; пусть σ_0 — горизонтальная эквивариантная $\mathfrak{k}_1$-значная 1-форма на B, удовлетворяющая условиям:

(1) $\Psi_0 = \sigma_0\sigma_0^t + k\theta_0\theta_0^t$,

(2) $\sigma_0^t\theta_0 = 0$,

(3) $d\sigma_0 = -\psi_0\sigma_0 - \sigma_0\psi_0''$,

(4) $d\psi_0'' = -\psi_0''^2 - \sigma_0^t\sigma_0$.

Тогда прараспределение на P, порожденное формами $\theta - \omega'$, ω'', $\psi - \varphi'$, $\sigma - \tau$ и $\psi'' - \varphi''$, инволютивно; каждое максимальное связное интегральное многообразие является компонентой связности некоторого многообразия Q, удовлетворяющего предположениям теоремы 4, и определяет таким образом изометрическое погружение многообразия M в многообразие N.

Доказательство. То что это кораспределение инволютивно, вытекает из условий (1)—(4) и структурных уравнений. Например,

$$\begin{aligned} d(\psi-\varphi') &= -\psi^2+\Psi+\varphi'^2-\tau\tau^t-k\omega'\omega'^t = \\ &= -(\psi-\varphi')\psi-\varphi'(\psi-\varphi')+\sigma\sigma^t+k\theta\theta^t-\tau\tau^t-k\omega'\omega'^t = \\ &= -(\psi-\varphi')\psi-\varphi'(\psi-\varphi')+(\sigma-\tau)\sigma^t+ \\ &\qquad +\tau(\sigma^t-\tau^t)+k(\theta-\omega')\theta^t+k\omega'\left(\theta^t-\omega'^t\right). \end{aligned}$$

Остальные четыре внешние производные, почти из тех же соображений, находятся в идеале, порожденном теми же пятью формами. (На самом деле следовало бы рассматривать компоненты этих векторнозначных форм, однако подобное обращение с ними легко обосновать.)

Покажем прежде всего, что размерность нашего кораспределения постоянна и дополнительна к размерности B. Это вытекает из того, что на подпространстве касательных к сомножителю $F(N)$ в произведении P (т. е. к ядру dp_1) упомянутые пять форм превращаются в $-\omega'$, ω'', $-\varphi'$, $-\tau$, $-\varphi''$, определяя некоторую параллелизацию этого подпространства с точностью до тривиальных повторений ($\varphi'_{ij}=-\varphi'_{ji}$). Таким образом, пятерка ($\theta-\omega'$, ω'', $\psi-\varphi'$, $\sigma-\tau$, $\psi''-\varphi''$) осуществляет линейное отображение каждого касательного пространства P_p *на* $R^f+\mathfrak{o}(f)$ (допуская некоторую неточность выражения), и, значит, его ядро имеет постоянную размерность, совпадающую с размерностью B.

То же рассуждение показывает, что ядро этого линейного отображения дополнительно к ядру отображения dp_1, так что dp_1 — взаимно однозначное отображение на рассматриваемое распределение. Следовательно, интегральные подмногообразия отображаются локально диффеоморфно в B.

Так как $\psi-\varphi'$ и $\psi''-\varphi''$ аннулируют касательные к орбитам диагонального действия G, то максимальное интегральное подмногообразие Q_0 будет содержать всю компоненту такой орбиты, если только содержит некоторую ее точку. Более того, эквивариантность форм распределения гарантирует, что всякий элемент G преобразует интегральные многообразия в интегральные многообразия. Таким образом, $Q=Q_0G$ будет интегральным многообразием, инвариантным относительно G.

Для доказательства того, что $r=p_1|_Q$ является отображением на B, достаточно проверить, что горизонтальные подъемы геодезических сегментов в M можно поднять в Q: начиная с одной точки в B, мы можем получить все остальные точки движением вдоль таких кривых и действием G. Если γ_0 — горизонтальный подъем геодезической в M, то

$$\theta_0(\gamma_{0*}) = x = \mathrm{const},$$
$$\psi_0(\gamma_{0*}) = 0, \quad \psi_0''(\gamma_{0*}) = 0,$$

и если

$$\sigma_{0ij} = \sum_k s_{0ijk}\theta_{0k},$$

то

$$\sigma_{0ij}(\gamma_{0*}) = \sum_k x_k (s_{0ijk} \circ \gamma_0).$$

Функции $s_{0ijk} \circ \gamma_0$ непрерывны и, следовательно, ограничены, поскольку область определения γ_0 — замкнутый интервал. Подъем γ_0 в P, который мы обозначим через γ, должен удовлетворять следующим условиям:

$$\omega'(\gamma_*) = \theta(\gamma_*) = x, \qquad \omega''(\gamma_*) = 0,$$
$$\varphi'(\gamma_*) = \psi(\gamma_*) = 0, \qquad \varphi''(\gamma_*) = \psi''(\gamma_*) = 0,$$
$$\tau_{ij}(\gamma_*) = \sigma_{ij}(\gamma_*) = \sum_k x_k (s_{ijk} \circ \gamma).$$

Так как нас интересует лишь компонента γ, принадлежащая $F(N)$, спроектируем γ_* на $F(N)$. Получаем

$$dp_2\gamma_* = E(x) + \sum_{i,\,k \leqslant d,\; j > d} x_k (s_{ijk} \circ \gamma \circ p_2) F_{ij} = X.$$

В силу условия полноты N, интегральные кривые такого X, очевидно, существуют, так что существует и подъем γ.

Остается показать, что r взаимно однозначно. Для этого мы замечаем, что Q — главное расслоение с группой G и некоторым базисным многообразием M' и что r: $Q \to B$ — послойное отображение. Так как кривые можно поднимать из B в Q, то их можно поднимать и из M в M'. Таким образом, индуцированное отображение $M' \to M$ оказывается накрывающим отображением, и оно взаимно однозначно, поскольку M односвязно, а M' связно. Отсюда следует, что r тоже взаимно однозначно. Ч. Т. Д.

Замечания. (а) Чтобы найти локальные вложения M в N, достаточно построить формы, такие, как σ_0, ψ_0'', на некотором сечении B над M, поскольку по эквивариантности их можно продолжить на остальную часть слоя; вместо сечения можно также использовать M.

(б) Уравнения (3) и (4) являются структурными уравнениями для σ_0 и ψ_0''. Уравнение (4) показывает, что $\mathfrak{o}(e)$-значная часть кривизны на B есть $-\sigma_0^t\sigma_0$. Для интерпретации (3) как структурного уравнения рассмотрим присоединенное действие G на своем ортогональном дополнении в $\mathfrak{o}(f)$. Тогда $\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0^t & 0 \end{pmatrix}$ принимает значения в этом G-модуле, является горизонтальным и обладает инвариантностью в смысле леммы 5.3, часть (II). Таким образом, (3) можно переформулировать так:

$$(3') \qquad D\sigma_0 = 0,$$

где D, так же как в § 5.3, относится к связности

$$\psi_0 + \psi_0''.$$

(в) Уравнения (1) и (2) являются алгебраическими в каждой точке. Картан [24] показал, что они имеют много решений, если только $f \geqslant \frac{1}{2} d(d+1)$, так что уравнения (1) и (2) локально разрешимы. Решения, полученные Картаном, принадлежат некоторому классу, названному им регулярным; для аналитических римановых многообразий эта регулярность обеспечивает также существование решений уравнений (3) и (4); в этом заключается теорема Картана — Кэлера [23, 37] в нашем контексте. В доказательстве существенно используется аналитичность, поскольку теорема Картана — Кэлера опирается на теорему Коши — Ковалевской, справедливую только в аналитическом случае [81, стр. 81; 37].

Задача 13. Система алгебраических уравнений (1) и (2) эквивалентна отысканию таких матриц второй квадратичной формы S_i, $i=1, \ldots, e$, что кривизна $K(x, y)$ ортонормальных векторов x, $y \in M_m$ задается формулой

$$K(x, y)=\sum_{i=1}^{e}(\langle S_i x, x\rangle\langle S_i y, y\rangle-\langle S_i x, y\rangle^2)+k.$$

Задача 14. Предполагая, что система уравнений (1) и (2) имеет картановское решение, которое удовлетворяет только тождествам кривизны, показать, что если R — тензор (не тензорное поле!), удовлетворяющий тем же тождествам, то существует риманово многообразие, допускающее R как тензор кривизны в одной точке. (*Указание*: положить $k=0$ и рассмотреть вложение задачи 11.)

Следующая задача дает набросок решения системы уравнений (1) и (2), однако при $f=\frac{1}{2}d(d+1)+d$.

Задача 15. Пусть U — пространство 4-линейных функций на R^d, удовлетворяющих тождествам кривизны, S — пространство симметрических $d \times d$-матриц, P — пространство симметрических 4-линейных функций на R^d и T — пространство 4-линейных функций t на R^d, удовлетворяющих следующим тождествам: $t(x, y, z, w)=t(y, x, z, w)=t(z, w, x, y)$, $t \in T$, $x, y, z, w \in R^d$. P — подпространство в T, причем T можно рассматривать как пространство симметрических билинейных форм на V, симметрическом подпространстве в $R^d \otimes R^d$. Пусть $D=d(d-1)/2$, $E=D+d=$размерность V.

Говоря, что форма $t \in T$ положительно определена, мы будем подразумевать, что она такова как симметрическая билинейная форма на V.

Пусть F: $S \to T$ определяется равенством

$$F(s)(x, y, z, w) = \langle sx, y\rangle\langle sz, w\rangle,$$

а G: $T \to U$ равенством

$$G(t)(x, y, z, w) = t(x, z, y, w) - t(x, w, y, z).$$

Проверить следующие утверждения:

(а) Если $s_1, \ldots, s_k \in S$, то формула $R = \sum_i G(F(s_i))$ выражает тензор кривизны R в терминах вторых фундаментальных форм s_i для вложения в R^{d+k}.

(б) $\dim T = E(E+1)/2$, $\dim P = d(d^3+2d^2+3d+2)/24$, $\dim U = d^2(d^2-1)/12 = \dim T - \dim P$, а G является линейным отображением с ядром P, и потому образ G есть все U.

(в) Симметрическая билинейная форма является неотрицательно полуопределенной ранга 1 в том и только в том случае, если ее матрица представляется в виде XX^t, где X — матрица-столбец.

(г) Если в V взять базис из элементов $\frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$, $i \leqslant j$, занумерованных парами $I = (i, j)$, $i \leqslant j$, то матрицей $F(s)$ служит $(s_I s_J)$, где $s_I = s_{ij}$ есть (i, j)-й элемент $d \times d$-матрицы s.

(д) Всякую неотрицательную полуопределенную симметрическую билинейную форму t на V можно разложить в сумму k (= ранг t) таких же матриц ранга 1, $k \leqslant E$. Таким образом, множество сумм $\sum_i F(s_i)$ совпадает с подпространством неотрицательных полуопределенных форм из T.

(е) Если упорядочить двойные индексы I так, чтобы сначала шли пары (i, i), обозначить через I_r единичную матрицу порядка r и через K обозначить $d \times d$-матрицу, все элементы которой равны 1, то билинейная форма на V с матрицей $\begin{pmatrix} I_d + K & 0 \\ 0 & I_D \end{pmatrix}$ положительно определена и принадлежит P.

(ж) Каждый класс смежности $t + P$ содержит положительно определенную форму.

Задача 16. Нижеследующее извлекается из доказательства теоремы 5.

Пусть F: $M \to N$ — дифференцируемое отображение, и N параллелизуемо 1-формами ω_i, $i=1, \ldots, f$. Пусть p_1, p_2 — проекции произведения $M \times N$. Тогда кораспределение, порожденное 1-формами $p_1^* F^* \omega_i - p_2^* \omega_i$, $i=1, \ldots$ $\ldots, f$, интегрируемо, и график отображения F является интегральным подмногообразием.

Обратно, если формы θ_i, $i=1, \ldots, f$, на M таковы, что $p_1^* \theta_i - p_2^* \omega_i$ порождают интегрируемое кораспределение, то интегральное подмногообразие локально является графиком отображений окрестностей многообразия M в многообразие N.

10.9. Гиперповерхности

Гиперповерхностью называется многообразие, погруженное в пространство на 1 большей размерности; в введенных ранее обозначениях $e=1$. При погружении в R^f кривизна выражается в терминах одной фундаментальной формы, и потому каждое R_{xy} либо равно 0, либо имеет ранг 2, так что преобразования кривизны гиперповерхности в R^f имеют весьма специальный вид.

Возможности для расслоения адаптированных ортонормальных базисов также ограничены в случае гиперповерхности. Фактически расслоение единичных нормалей должно быть либо связным двулистным накрытием M, либо распадаться на два экземпляра M; таким образом, B — либо двойное накрытие $F(M)$, либо пара экземпляров $F(M)$. Если M односвязно, возможен лишь случай двух экземпляров. Благодаря этому соответствующий частный случай теоремы 5 существенно проще, поскольку сразу же определяется $\psi''=0$.

Теорема 6. Пусть M — односвязное риманово многообразие с формой кривизны $\Psi_0 = \sigma_0 \sigma_0^t + k \theta_0 \theta_0^t$, где σ_0 есть R^d-значная эквивариантная 1-форма на $F(M)$, такая, что $D\sigma_0 = 0$, $\sigma_0 \theta_0^t = 0$. Если N является $(d+1)$-мерным полным многообразием с постоянной кривизной k, то M можно погрузить в N.

Погружение I однозначно определено указанием второй фундаментальной формы σ_0, дифференциала dI_m при одном $m \in M$ и выбором единичной нормали на M. Это дает теорему единственности:

Теорема 7. Пусть N — такое многообразие постоянной кривизны k, что группа изометрий N транзитивна на $F(N)$ (например, $N=S^{d+1}$ или $N=R^{d+1}$). Если I_i: $M\to N$, $i=1,2$, — изометричные погружения многообразия M как гиперповерхности, вторые фундаментальные формы которых совпадают, то существует такая изометрия J многообразия N, что $JI_1=I_2$.

Теорема 7 справедлива и без предположения односвязности M, поскольку раз погружения существуют, то интегральные многообразия однозначно задают графики своих продолжений. Изометрия J определяется заданием условий в некоторой точке m: $dJ\,dI_{1m}=dI_{2m}$ и $dJ(z_1)=z_2$, где z_i — выбранная единичная нормаль в m для I_i.

Задача 17. Пусть I_i: $M\to N$ — изометрические вложения как гиперповерхности, $i=1, 2$, с согласованными вторыми фундаментальными формами, причем для некоторого $m\in M$ существует изометрия J: $N\to N$, при которой $dJdI_{1m}=dI_{2m}$, и если z — нормаль в m, $z'=dJ(z)$, то $S_{2z'}=S_{1z}\neq 0$, где S_2, S_1 — вторые фундаментальные формы погружений I_1, I_2.

Доказать, что $JI_1=I_2$. [*Указание*: применить задачу 16. Другой способ: пусть γ — кривая в M, начинающаяся в m, $n=I_1(m)$; показать, что развертка $I_1\circ\gamma$ в N_n зависит только от вторых фундаментальных форм вдоль γ и от развертки γ в M_m.]

Задача 18. Пусть g: $N\to R$ — дифференцируемая функция. Показать, что

$$M=g^{-1}(0)\cap\{n\,|\,dg(n)\neq 0\}$$

является гиперповерхностью в N.

Задача 19. Пусть g: $R^f\to R$ — дифференцируемая функция, R^f снабжено евклидовой метрикой, индуцирующей метрику на многообразии M из задачи 18. Показать, что

(а) Во всякой точке $m\in M$ существует единственная единичная нормаль z_1, такая, что $dg(z_1)=a>0$. Эти нормальные векторы образуют дифференцируемое поле в $\perp(M)$, так что M ориентируемо.

17*

(б) Пусть M' — линейная гиперповерхность в R^f, проходящая через точку $m \in M$ и ортогональная к $\perp z_1$; показать, что вторая фундаментальная форма H_1 многообразия M в точке m представляется в виде $H_1(x, y) = (1/a)\, H_{g'}(x, y)$, где $g' = g\,|_{M'}$, $x, y \in M_m$.

(в) Пусть $x = \sum a_i D_i(m)$, $y = \sum b_i D_i(m)$, и пусть $X = \sum a_i D_i$, $Y = \sum b_i D_i$; тогда в M кривизна плоскости, натянутой на x и y, есть $K_0(x, y) = (1/a^2)\{x(Xg)y(Yg) - (x(Yg))^2\}$.

Задача 20. С помощью формулы для K_0, приведенной в задаче 19(в), показать, что кривизна сферы радиуса r, $S^d = g^{-1}(0)$, где $g = \sum u_i^2 - r^2 : R^{d+1} \to R$, постоянна и равна $1/r^2$.

Задача 21. *Линейчатая поверхность* — это гиперповерхность в R^3, через каждую точку которой проходит прямая *(образующая)* в R^3, содержащаяся в этой поверхности. Показать, что кривизна линейчатой поверхности неположительна.

Задача 22. Пусть γ — образующая линейчатой поверхности, являющаяся базисной кривой C^∞-прямоугольника, в котором образующие служат продольными кривыми, параметризованными длиной дуги.

(а) Пользуясь тем, что ассоциированное векторное поле V является якобиевым в R^3, показать, что его можно представить в виде $V = uA + B$, где A, B параллельны вдоль γ в R^3. Далее, если начальная трансверсальная прямая выбрана надлежащим образом, то A, B и γ_* можно сделать взаимно ортогональными.

(б) Пользуясь тем, что V является также якобиевым полем на самой поверхности, вывести, что $E^2V = -KV$, где K — кривизна вдоль γ, E — ковариантная производная на поверхности относительно γ_*.

(в) Пользуясь тем, что EV, E^2V — проекции DV, $D(EV)$ на касательную плоскость к поверхности (предложение 1), выразить E^2V явно в терминах $\langle A, A\rangle$ и $\langle B, B\rangle$, получив, таким образом, формулу для K вдоль γ.

Задача 23. Поверхность в R^3 называется *дважды линейчатой,* если через каждую ее точку проходят две принадлежащие ей различные прямые. Доказать, что дважды линейчатая плоская поверхность ($K=0$) должна быть плоскостью.

Задача 24. Пусть M погружено в R^d, $I: M \to R^d$, таким образом, что последняя координата $v_d = u_d \circ I$ всегда положительна на M. Пусть через I' обозначены первые $d-1$ координат погружения I, так что $I = (I', v_d)$. Рассматривая R^d как подпространство в R^{d+e} последние e координат которого равны нулю, мы получим погружение J многообразия $M \times S^e$, полагая

$$J(m, x) = (I'(m), v_d(m)x).$$

Говорят, что $M \times S^e$ погружено как *многообразие частичного вращения.* Если M — кривая в R^2, то $J(M \times S^e)$ — *гиперповерхность вращения.*

Снабдим M метрикой, индуцированной I, а $M \times S^e$ — метрикой, индуцированной J.

(а) Показать, что $M \times \{x\} \subset M \times S^e$ — вполне геодезическое подмногообразие для каждого $x \in S^e$ и изометрично M.

(б) Показать, что $\{m\} \times S^e \subset M \times S^e$ — вполне геодезическое подмногообразие тогда и только тогда, когда m — критическая точка функции v_d и в этом случае $\{m\} \times S^e$ изометрично e-сфере радиуса $v_d(m)$.

(в) J является вложением тогда и только тогда, когда таковым является I.

Задача 25. *Произведения сфер как гиперповерхности.* Если в задаче 24 положить $M = S^d$, то M вкладывается в R^{d+1} как сдвинутая обычная сфера S^d, такая, что $v_d > 0$. Тогда J определяет вложение $S^d \times S^e$ как гиперповерхности.

(а) Вычислить кривизну $K(X, Y)$ в следующих случаях:

(I) X и Y — касательные к S^d.

(II) X — касательная к S^d, Y — касательная к S^e.

(III) X и Y — касательные к S^e.

(б) Обобщить это на вложение произведения любого числа сфер как гиперповерхности; выяснить, что́ можно сказать о вполне геодезических многообразиях и кривизне. Частный случай — обычное вложение тора как поверхности баранки.

Задача 26. Пусть M — ориентируемая гиперповерхность в R^{d+1}, N — подмногообразие, содержащееся в ограниченной области в R^{e+1}. Рассматривая $R^{d+1} \subset \subset R^{d+e+1}$, получим нормальное расслоение над M, слои которого имеют размерность $e+1$; поскольку M ориентируемо, то это нормальное расслоение имеет $e+1$ независимое глобальное сечение.

(а) Показать, что существует положительная C^∞-функция r на M, такая, что экспоненциальное отображение R^{d+e+1} является диффеоморфизмом на

$$\perp_r(M) = \{(m, x) \in \perp(M) \mid \|x\| < r(m)\}.$$

(б) Показать, что $M \times N$ можно вложить в R^{d+e+1}.

(в) Пусть M компактно. Показать, что функцию r можно взять постоянной и, следовательно, построить такое вложение $M \times N$, чтобы индуцированная метрика имела вид

$$\langle s+t,\ s'+t' \rangle = \langle s,\ s' \rangle_n + c\langle t,\ t' \rangle_2,$$

где s, $s' \in M_m$, t, $t' \in N_n$, $\langle\ ,\ \rangle_n$ — метрика на M, являющаяся дифференцируемой функцией от $n \in N$, $\langle\ ,\ \rangle_2$ — метрика на N, индуцированная из R^{e+1}, и c — постоянная.

(г) Если M, N только погружены, то эта процедура приводит к погружению $M \times N$. Придумать пример, когда M не вложено, а N вложено, однако при некотором непостоянном r получается вложение $M \times N$.

Замечание. Если M есть S^d, то процедура пункта (в) дает $N \times S^d$ как подмногообразие частичного вращения.

Задача 27. Пусть M — гиперповерхность в R^{d+1}. Показать, что преобразование кривизны, рассматриваемое как симметрическое линейное преобразование бивекторов, является диагональным относительно базиса разложимых бивекторов и имеет характеристические значения $\lambda_i\lambda_j$, $i<j$, где λ_i — характеристические значения второй фундаментальной формы. Эти λ_i — классические *главные кривизны.*

Задача 28. Пусть M — гиперповерхность в N, и кривизна N постоянна. Вывести следующие соотношения между второй фундаментальной формой и кривизной в точке m:

(а) Кривизна в m постоянна и совпадает с кривизной N в том и только в том случае, если вторая фундаментальная форма имеет ранг 0 или 1.

(б) Разность между преобразованиями кривизны M и N (суженными на M_m) имеет область значений в фиксированном двумерном подпространстве в M_m в том и только в том случае, если ранг второй фундаментальной формы равен 2.

(в) Если ни (а), ни (б) не имеют места, то кривизна определяет вторую фундаментальную форму.

Задача 29. *Классическая теорема жесткости.* Пусть N — однородное риманово многообразие постоянной кривизны k. Пусть I_i: $M \to N$, $i=1, 2$, — погружения M как гиперповерхности. *Типовое число* $t(m)$ точки $m \in M$ — это ранг второй фундаментальной формы в m; в силу задачи 28, если $t(m) \geqslant 2$, то $t(m)$ определяется кривизной независимо от погружения, за исключением точек, где M имеет постоянную кривизну k.

Доказать, что если $t(m) > 2$, то существует такая изометрия J многообразия N, что $JI_1 = I_2$.

Задача 30. Если M — гиперповерхность в R^{d+1}, то *гауссова кривизна* M определяется как вещественная функция k на M по формуле $k(m) = \det S_z$, где S_z — преобразование второй фундаментальной формы для нормали z в точке m.

(а) Показать, что k вполне определено, когда d четно, но лишь с точностью до знака, если d нечетно.

(б) Показать, что $k(m)$ зависит только от метрики на M, найти формулу для $k(m)$ в терминах кривизны.

В частности, при $d=2$ функция k совпадает с кривизной.

Задача 31. Показать, что преобразования кривизны в точке 3-мерного риманова многообразия можно реализовать как преобразования кривизны в точке гиперповерхности в R^4.

Задача 32. Пусть M — полная гиперповерхность в R^{d+1}, такая, что группа голономии многообразия M приводима, т. е. существует распределение V на M размерности e, $e\neq 0$, d, инвариантное относительно параллельного переноса на любой кривой. Тогда ортогональное дополнение $V^{\perp}$ — такое же распределение.

Предположим, что множество точек, в которых кривизна отлична от 0, плотно в M. Показать, что

(а) Вторая фундаментальная форма равна нулю на V или $V^{\perp}$, например на V.

(б) Параллельный перенос элементов V в M совпадает с их параллельным переносом в R^{d+1}.

(в) Линейное подмногообразие в R^{d+1} размерности e с касательным пространством V_m, где m — произвольная точка в M, содержится в M, и прямые этого линейного подмногообразия являются геодезическими в M.

(г) Если R^{d-e+1} — линейное подпространство в R^{d+1}, перпендикулярное к V, то $M\cap R^{d-e+1}=N$ есть гиперповерхность в R^{d-e+1} и M вложено в R^{d+1} как риманово произведение $N\times R^e\subset R^{d-e+1}\times R^e$.

ГЛАВА 11

Вторая вариация длины кривой

Рассматриваются первая и вторая вариации длины кривой; выводится формула Синга для неинтегрированной второй вариации, а также некоторые ее частные случаи. Определяется индексная форма при общих условиях для концевых точек; после изучения элементарных свойств фокальных и сопряженных точек доказывается теорема Морса об индексе при фиксированной концевой точке. Рассматриваются точки минимума и замкнутые геодезические, а также различные формулировки выпуклости. В заключение приводится вариант теоремы сравнения Рауха и несколько следствий относительно связи кривизны с объемом [22, 33, 85].

11.1. Первая и вторая вариации длины кривой

Приступим к изучению соотношения между длинами продольных кривых прямоугольника и ассоциированным векторным полем. Если базисная кривая является геодезической, а начальный и конечный углы ассоциированного векторного поля подчинены некоторым разумным условиям, то производная длины по трансверсальному параметру равна нулю. Поэтому в данном случае вторая производная показывает, насколько близкие кривые отличаются по длине от базисной кривой.

В общем случае эти первая и вторая производные от длины продольных кривых задаются дифференцированием по трансверсальному параметру под знаком интеграла интегрального выражения длины. Получаются так называемые *первая и вторая вариации длины* кривой прямоугольника в интегральной форме.

Ломаный C^∞-прямоугольник Q — это отображение $[a, b]\times[c, d]\to M$, такое, что при некотором конечном разбиении $u_0=a<u_1<\ldots<u_{n-1}<u_n=b$ отрезка $[a, b]$ сужения Q на $[u_{i-1}, u_i]\times[c, d]$ являются C^∞-прямоугольниками, $i=1, \ldots, n$.

Задача 1. (а) Показать, что ломаный C^∞-прямоугольник непрерывен.

(б) Если Q — ломаный C^∞-прямоугольник, то $dQ(D_2(u, v))$ однозначно определено в любой точке (u, v) области определения Q, порождая ломаный C^∞-прямоугольник в $T(M)$.

(в) В то же время определение $dQ(D_1(u_i, v))$ не обязательно однозначно.

(г) Если M обладает римановой структурой, то ломаный C^∞-прямоугольник допускает канонический подъем в $F(M)$, определенный в § 8.1.

(д) Если τ — ломаная C^∞-кривая в M и V — ломаный C^∞-подъем τ в $T(M)$, то существует ломаный C^∞-прямоугольник Q, для которого τ — базисная кривая и $V(u)=dQ(D_2(u, 0))$ при $u\in[a, b]$, т. е. V — *векторное поле, ассоциированное с* Q.

(е) Если Q — ломаный C^∞-прямоугольник, ω — форма на M, то $Q^*\omega$ не определено однозначно на вертикальных линиях $u=u_i$, хотя можно по непрерывности определить $Q^*\omega(D_2)$; все же на этих линиях $Q^*\omega(D_1)$ имеет правый и левый пределы $Q^*\omega(D_1)(u_i^+, v)$ и $Q^*\omega(D_1)(u_i^-, v)$ соответственно.

Пусть теперь Q — ломаный C^∞-прямоугольник в M, определенный на $[a, b]\times[0, 1]$, с ассоциированным векторным полем V и продольными кривыми τ_y, $y\in[0, 1]$. Тогда длиной τ_y служит

$$l(y)=\int_a^b \|dQ(D_1)\|(u, y)\,du.$$

Поэтому

$$l'(0)=\int_b^a D_2\|dQ(D_1)\|(u, 0)\,du$$

и

$$l''(0)=\int_b^a D_2^2\|dQ(D_1)\|(u, 0)\,du$$

—первая и вторая вариации длины дуги. Подинтегральные выражения $D_2\|dQ(D_1)\|(u, 0)$ и $D_2^2\|dQ(D_1)\|(u, 0)$ называются *неинтегрированными первой и второй вариациями длины дуги.*

Пусть $\bar{Q}$ — канонический подъем Q в $F(M)$. В обозначениях § 8.1 функции $\omega^Q(D_1)$, $\omega^Q(D_2)$, $\varphi^Q(D_1)$ и т. д. определены в R^2 и принимают значения в R^d или $\mathfrak{o}(d)$. Функции $\omega^Q(D_2)$ и $\varphi^Q(D_2)$ определены и являются C^∞-ломаными на всем $[a, b]\times[0, 1]$, тогда как $\omega^Q(D_1)$ может иметь разрывы на вертикалях $u=u_i$; однако в любом случае существуют ее правые и левые пределы и производные в этих точках. Далее, $\varphi^Q(D_1)=0$, поскольку продольные линии прямоугольника $\bar{Q}$ горизонтальны.

Подставляя D_1, D_2 в структурные уравнения, получаем

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & D_1\omega^Q(D_2) - D_2\omega^Q(D_1) = \\
& = -\varphi^Q(D_1)\,\omega^Q(D_2) + \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1) = \\
& \qquad = \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & D_1\varphi^Q(D_2) - D_2\varphi^Q(D_1) = D_1\varphi^Q(D_2) = \\
& = -[\varphi^Q(D_1), \varphi^Q(D_2)] + \Phi^Q(D_1, D_2) = \\
& \qquad = \Phi^Q(D_1, D_2).
\end{aligned}
$$

Скалярные произведения продольных и трансверсальных векторных полей прямоугольника Q определяются соответствующими скалярными произведениями $\omega^Q(D_1)$ и $\omega^Q(D_2)$.

Лемма 1. Пусть Q есть C^∞-прямоугольник, и пусть касательные к базисной кривой Q имеют постоянную длину C. Тогда

$$
\begin{aligned}
l'(0) = & -\frac{1}{C}\int_a^b \langle \omega^Q(D_2), D_1\omega^Q(D_1)\rangle(u, 0)\,du + \\
& + \frac{1}{C}\,[\langle \omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle(b, 0) - \langle \omega^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)\rangle(a, 0)]
\end{aligned}
$$

Доказательство. В соответствии с последним замечанием,

$$\begin{aligned}
D_2\|dQ(D_1)\|(u,0) &= D_2\langle\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle^{1/2}(u,0)= \\
&= \frac{1}{C}\langle D_2\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,0)= \\
&= \frac{1}{C}\langle D_1\omega^Q(D_2)- \\
&\quad -\varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,0)= \\
&= \frac{1}{C}\langle D_1\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,0)= \\
&= \frac{1}{C}D_1\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,0)- \\
&\quad -\frac{1}{C}\langle\omega^Q(D_2),\ D_1\omega^Q(D_1)\rangle(u,0);
\end{aligned}$$

мы воспользовались (1) и кососимметричностью $\varphi^Q(D_2)$. Поэтому

$$l'(0)=-\frac{1}{C}\int_a^b\langle\omega^Q(D_2),\ D_1\omega^Q(D_1)\rangle(u,0)\,du+ \\ +\frac{1}{C}\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,0)\Big]_a^b.$$

Ч. т. д.

Следствие 1. Если Q — ломаный C^∞-прямоугольник, касательные к базисной кривой которого имеют постоянную длину C, то

$$\begin{aligned}
l'(0)=&-\frac{1}{C}\int_a^b\langle\omega^Q(D_2),\ D_1\omega^Q(D_1)\rangle(u,0)\,du+ \\
&+\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n}\Big\{\big\langle\omega^Q(D_2)(u_i,0),\ \omega^Q(D_1)(u_i^-,0)\big\rangle- \\
&-\big\langle\omega^Q(D_2)(u_{i-1},0),\ \omega^Q(D_1)(u_{i-1}^+,0)\big\rangle\Big\}.
\end{aligned}$$

Следствие 2. Если базисная кривая ломаного C^∞-прямоугольника Q является (не ломаной) геодезической и $\langle\omega^Q(D_2),\omega^Q(D_1)\rangle(b,0)=\langle\omega^Q(D_2),\omega^Q(D_1)\rangle(a,0)$, то $l'(0)=0$. В частности, $l'(0)=0$, если трансверсальные кривые перпендикулярны к базисной геодезической.

Доказательство. Базисная кривая является геодезической в том и только в том случае, если $\omega^Q(D_1)$ принадлежит C^∞ и $D_1\omega^Q(D_1)(u, 0)=0$ для каждого u. При сделанных предположениях подинтегральное выражение в следствии 1 равно нулю, и вся сумма сводится к

$$\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle(b,\ 0)-\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle(a,\ 0)=0.$$

Следствие 3. Пусть N, P — подмногообразия в M; будем рассматривать только ломаные C^∞-прямоугольники, начальные и конечные трансверсали которых находятся в N и P. Для всех таких прямоугольников с данной базисной кривой τ $l'(0)=0$ в том и только в том

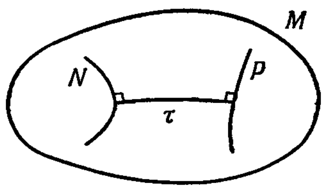


Рис. 36.

случае, если τ — геодезическая от N до P, перпендикулярная к обоим многообразиям.

Доказательство. Основная идея: существуют прямоугольники с настолько широким выбором $\omega^Q(D_2)$, что из выражения для $l'(0)$ и равенства $l'(0)=0$ следует, что $D_1\omega^Q(D_1)(u, 0)=0$; это приводит к отсутствию изломов у кривой τ и ее перпендикулярности к N и P в конечных точках.

Пусть $\bar{\tau}$ — горизонтальный подъем τ в $F(M)$ и $r\neq u_i$; определим в R^d кривую γ, положив $\gamma(u)=f(u)D\omega(\bar{\tau}_*)(u)$, где $f(u)$ — неотрицательная C^∞-функция, положительная в точке r и равная нулю в каждой точке u_i. Тогда $V=\bar{\tau}\gamma$ — подъем τ в $T(M)$, и можно определить прямоугольник $Q(u, v)=\exp_{\tau(u)}vV(u)$. Легко видеть, что для этого Q

$$\langle\omega^Q(D_2),\ D_1\omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0)=f(u)\,\|D_1\omega^Q(D_1)\|^2(u,\ 0)$$

и что в соответствующей сумме из следствия 1 все слагаемые обращаются в нуль. Поэтому из равенства $l'(0)=0$ вытекает, что

$$\int_a^b f(u)\,\|D_1\omega^Q(D_1)\|^2(u,\ 0)\,du=0,$$

откуда $D_1\omega^Q(D_1)(r,\ 0)=0$.

Сама эта сумма исследуется аналогичным образом. Равенство $\langle t,\ \tau_*(u_i^+)-\tau_*(u_i^-)\rangle=0$ для любого $t\in M_{\tau(u_i)}$, $0<i<n$, доказывается с помощью такого же прямоугольника Q, порожденного векторным полем, полученным параллельным переносом t вдоль τ с последующим умножением на неотрицательную функцию, положительную вблизи точки u_i, но равную нулю вне ее окрестности.

Для проверки перпендикулярности в концах τ можно взять прямоугольники, продольные кривые которых состоят из коротких геодезических сегментов, соединяющих $\gamma(v)$ с $\tau(a+\varepsilon)$, и сегмента $\tau|_{[a+\varepsilon,\ b]}$, где γ — кривая в N с $\gamma(0)=\tau(a)$; другой конец исследуется аналогично.

Задача 2. Показать (независимо от гл. 8), что кривая, минимизирующая расстояние между двумя точками, является геодезической. (В классическом анализе геодезическая определялась как решение вариационной задачи отыскания минимальных кривых, откуда уже как следствие вытекало условие самопараллельности $\nabla_{\gamma_*}\gamma_*=$ $=0$.)

В нашем применении вариационного исчисления используется вариация геодезической лишь в направлении, перпендикулярном к этой геодезической в каждой ее точке, т. е. рассматриваются только прямоугольники с базисными геодезическими кривыми, ассоциированные поля которых перпендикулярны к этим кривым. Для более полного оправдания такого ограничения докажем следующее замечание, которое показывает, что для C^∞-прямоугольников, удовлетворяющих концевым условиям, это предположение нисколько не приводит к потере общности. Замечание не верно для *ломаных* C^∞-прямоугольников, если только не допускать кусочно линейных замен параметра базисной геодезической.

Замечание. Если Q есть C^∞-прямоугольник с геодезической базисной кривой, концевые трансверсали которого перпендикулярны к ней, то существует частичная репараметризация Q, при которой продольные кривые оказываются репараметризациями продольных кривых Q, а ассоциированное векторное поле перпендикулярно к базисной кривой.

Доказательство. Пусть V — ассоциированное векторное поле прямоугольника Q, τ — базисная кривая Q, тогда $f=\langle V, \tau_*\rangle$ — вещественная функция на $[a, b]$. По предположению, $f(a)=f(b)=0$. Определим отображение F: $[a, b]\times[c, c+\varepsilon]\to[a, b]\times[c, d]$, положив

$$F(u, v)=\left(u-\frac{1}{k}vf(u), v\right),$$

где $\varepsilon>0$ таково, что значения F принадлежат $[a, b]\times[c, d]$ и $k=\langle\tau_*, \tau_*\rangle$. Тогда прямоугольник $Q\circ F$ удовлетворяет предъявленным требованиям.

Задача 3. Доказать, что векторное поле, ассоциированное с прямоугольником $Q\circ F$, перпендикулярно к τ.

В дальнейшем предполагается, что все ломаные C^∞-прямоугольники имеют геодезические базы, перпендикулярные к ассоциированным векторным полям. Для удобства также предполагается, что базисная кривая нормализована таким образом, что ее касательные векторы единичны, а начальное значение параметра $a=0$, откуда ее длина равна $b=b-a$.

Лемма 2 (формула Синга [68]). Неинтегрированная вторая вариация допускает представление

$$D_2^2\|\omega^Q(D_1)\|=$$
$$=\|D_1\omega^Q(D_2)\|^2-K(dQ(D_1), dQ(D_2))\|\omega^Q(D_2)\|^2+$$
$$+D_1\{\langle\omega^Q(D_1), D_2\omega^Q(D_2)\rangle+\langle\omega^Q(D_1), \varphi^Q(D_2)\omega^Q(D_2)\rangle\},$$

где все функции сужены на $[0, b]\times\{0\}$.

Доказательство проведем прямым вычислением, помня, что везде опускается аргумент $(u, 0)$:

$$D_2^2\|\omega^Q(D_1)\| = D_2\left(D_2\langle\omega^Q(D_1), \omega^Q(D_1)\rangle^{1/2}\right) =$$
$$= -\langle D_2\omega^Q(D_1), \omega^Q(D_1)\rangle^2 + D_2\langle D_2\omega^Q(D_1), \omega^Q(D_1)\rangle,$$

так как множители, появляющиеся в знаменателях, являются степенями выражения $\langle\omega^Q(D_1), \omega^Q(D_1)\rangle(u, 0) = 1$.

Далее, используя первое структурное уравнение (1) и кососимметричность $\varphi^Q(D_2)$, получаем, что

$$\text{(а)}\quad D_2^2\|\omega^Q(D_1)\| = -\langle D_1\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle^2 + $$
$$+ D_2\langle D_1\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle.$$

Базисная кривая τ — геодезическая, так что $D_1\omega^Q(D_1) = 0$, откуда

$$\langle D_1\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle^2 = (D_1\langle\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle)^2 = 0,$$

поскольку ассоциированное поле перпендикулярно к τ.

$$\text{(б)}\ D_2\langle D_1\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle =$$
$$= \langle D_2D_1\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle + \langle D_1\omega^Q(D_2), D_2\omega^Q(D_1)\rangle,$$

$$\text{(в)}\ \langle D_2D_1\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle =$$
$$= \langle D_1D_2\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle = D_1\langle D_2\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle,$$

$$\text{(г)}\ \langle D_1\omega^Q(D_2), D_2\omega^Q(D_1)\rangle =$$
$$= \langle D_1\omega^Q(D_2), D_1\omega^Q(D_2) - \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)\rangle$$

$$\text{(д)}\quad \langle D_1\omega^Q(D_2), \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)\rangle =$$
$$= D_1\langle\omega^Q(D_2), \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)\rangle - \langle\omega^Q(D_2), (D_1\varphi^Q(D_2))\,\omega^Q(D_1)\rangle,$$

$$\text{(е)}\ \langle\omega^Q(D_2), (D_1\varphi^Q(D_2))\,\omega^Q(D_1)\rangle =$$
$$= \langle\omega^Q(D_2), \Phi^Q(D_1, D_2)\,\omega^Q(D_1)\rangle =$$
$$= -K(dQ(D_1), dQ(D_2))\,\|\omega^Q(D_2)\|^2.$$

Теперь желаемый результат достигается подстановкой выражений (а) — (б) в предшествующие им и, наконец, в (а).

Следствие 1. Пусть V — ассоциированное векторное поле вдоль базисной геодезической τ, V' — ковариантная производная относительно τ_*; пусть, наконец, $\bar{V}$ — трансверсальное векторное поле прямоугольника Q. Тогда

$$l''(0)=\int_0^b (\|V'\|^2(u)-K(V)\|V\|^2(u))\,du+\langle\tau_*,\ \nabla_V\bar{V}\rangle|_0^b$$

$(K(V)=K(V,\ \tau_*)$, см. § 9.4).

Это вытекает из того, что $V'(u)=\tau(D_1\omega^Q(D_2)(u,\ 0))$ и $\nabla_V\bar{V}=\bar{Q}(D_2+\varphi^Q(D_2))\omega^Q(D_2)$ (см. теорему 6.11).

Следствие 2. Пусть N и P — подмногообразия, Q — прямоугольник с геодезической базой τ, перпендикулярной к N и P. Тогда

$$l''(0)=\int_0^b (\|V'\|^2(u)-K(V)\|V\|^2(u))\,du+$$
$$+\langle S_{\tau_*(0)}V(0),\ V(0)\rangle-\langle S_{\tau_*(b)}V(b),\ V(b)\rangle,$$

где S — вторая фундаментальная форма соответствующего многообразия и, как и раньше, V — ассоциированное векторное поле.

Доказательство. В указанном выражении интеграл совпадает с интегралом из следствия 1. В силу предложения 10.1, если $T_{V(0)}$ — преобразование разности в $M_{\tau(0)}$, порожденное N как подмногообразием в M, то для векторного поля W на N

$$T_{V(0)}W(\tau(0))=D_{V(0)}W-E_{V(0)}W.$$

Но $E_{V(0)}W$ перпендикулярно к $\tau_*(0)$, откуда для $W=\bar{V}$

$$\begin{aligned}\langle\tau_*(0),\ D_{V(0)}\bar{V}\rangle&=\langle\tau_*(0),\ T_{V(0)}V(0)\rangle=\\&=-\langle T_{V(0)}\tau_*(0),\ V(0)\rangle=\\&=-\langle S_{\tau_*(0)}V(0),\ V(0)\rangle.\end{aligned}$$

Аналогично получается последнее слагаемое.

Заметим, что когда N и P — точки, то указанная формула для второй вариации сводится к такой формуле:

$$l''(0)=\int_0^b (\|V'\|^2(u)-K(V)\|V\|^2(u))\,du.$$

Следствие 3. Если в следствии 2 поле V якобиево, то

$$l''(0)=\langle S_{\tau_*(0)}V(0)-V'(0),\ V(0)\rangle - \\ -\langle S_{\tau_*(b)}V(b)-V'(b),\ V(b)\rangle.$$

Это получается из уравнения Якоби и интегрирования по частям.

11.2. Индексная форма

Пусть N и P — подмногообразия в M, τ — геодезический сегмент, перпендикулярный к N и P в его концах $\tau(0)$ и $\tau(b)$. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное пространство ломаных векторных C^∞-полей вдоль τ, которые перпендикулярны к τ и начальные и конечные векторы которых касательны к N и P. *Индексная форма* геодезической τ — это билинейная форма на $\mathscr{L}$, определенная следующим образом: если $V,\ W\in\mathscr{L}$, то

$$I(V,\ W)=\int_0^b (\langle V',\ W'\rangle(u)-\langle R_{\tau_*V}\tau_*,\ W\rangle(u))du+ \\ +\langle S_{\tau_*(0)}V(0),\ W(0)\rangle-\langle S_{\tau_*(b)}V(b),\ W(b)\rangle.$$

Грубо говоря, если рассматривать функцию длины, определенную на множестве кривых от N до P, то следствие 3 леммы 1 показывает, что критические точки этой функции являются геодезическими, такими, как τ. Индексную форму можно рассматривать как естественное обобщение гессиана функции в критической точке, поскольку она является симметрической билинейной формой, ассоциированной с квадратичной формой $l''(0)$ поля V из следствия 2 леммы 2. В теории Морса исследуется это обобщение.

Если заметить, что вне точек недифференцируемости V $(u_0=0,\ \ldots,\ u_n=b)$

$$\langle V',\ W'\rangle=\langle V',\ W\rangle'-\langle V'',\ W\rangle,$$

то получится другая формула для $I(V, W)$:

$$I(V, W)=\sum_{i=1}^{n-1}\langle V'(u_i^-)-V'(u_i^+), W(u_i)\rangle-$$

$$-\int_0^b \langle V''+R_{\tau_* V}\tau_*, W\rangle(u)\,du+$$

$$+\langle S_{\tau_*(0)}V(0)-V'(0), W(0)\rangle-\langle S_{\tau_*(b)}V(b)-V'(b), W(b)\rangle.$$

Из этой формулы с помощью техники, использованной в доказательстве следствия 3 леммы 1, легко определить нулевое пространство формы I, т. е. условия на V, при которых $I(V, W)=0$ для всех $W\in\mathscr{L}$.

Выделим вытекающие отсюда свойства концов.

Определение. Якобиево поле V является *N-якобиевым полем*, если

(I) V перпендикулярно к геодезической τ;

(II) $V(0)\in N_{\tau(0)}$;

(III) $S_{\tau_*(0)}V(0)-V'(0)$ перпендикулярно к $N_{\tau(0)}$.

Если N — одна точка, $N=\tau(0)$, то (I), (II) и (III) сводятся к следующим соотношениям: $V(0)=0$, $V'(0)$ перпендикулярно к $\tau_*(0)$.

Задача 4. Показать, что N-якобиевы поля образуют линейное пространство размерности $d-1$, где $d=\dim M$.

Теорема 1. Нулевое пространство индексной формы I состоит из пересечения пространств N-якобиевых и P-якобиевых полей.

Мы уже видели, что якобиево поле характеризуется тем, что оно ассоциировано с прямоугольником, продольные которого геодезические. Следующая теорема дает аналогичную характеристику N-якобиевых полей.

Теорема 2. Поле V является N-якобиевым полем в том и только в том случае, если V ассоциировано с некоторым прямоугольником Q, продольные которого являются геодезическими, выходящими из N перпендикулярно к нему и параметризованными длиной дуги.

Доказательство. В силу задачи 4, достаточно показать, что якобиевы поля, ассоциированные с такими прямоугольниками, являются N-якобиевыми полями, значения которых заполняют нормальное пространство к $\tau_*(\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon>0$.

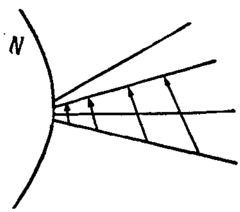


Рис. 37.

Рассматриваемые прямоугольники можно пропустить через $\perp(N)$ с помощью экспоненциального отображения $\perp(N)\to M$. В действительности векторное поле $X=dQ(D_1)$, продольное к такому прямоугольнику Q, дает кривую γ, $\gamma(v)=X(0, v)$ в $\perp_1(N)$, единичном нормальном расслоении, и Q можно представить в виде $Q(u, v)=\exp u\gamma(v)$.

Так как $V(0)=dQ(D_2(0, 0))$ — касательная к проекции γ в N, то условие (II) имеет место.

$$\begin{aligned}
S_{\tau_*(0)}V(0)-V'(0) &= T_{V(0)}X(0)-D_{X(0)}V=\\
&= D_{V(0)}X-E_{V(0)}X-D_{X(0)}V=\\
&= \bar{Q}(0, 0)(D_2\omega^Q(D_1)+\varphi^Q(D_2)\omega^Q(D_1)-\\
&\quad -D_1\omega^Q(D_2)-\varphi^Q(D_1)\omega^Q(D_2))(0, 0)-\\
&\quad -E_{V(0)}X=\\
&= -E_{V(0)}X,
\end{aligned}$$

в силу первого структурного уравнения (1). Но E — ковариантная производная на N и нормальном расслоении, так что производная нормального поля $X(0, \cdot)$ снова является нормальным вектором, что доказывает (III). Наконец, для доказательства (I) нужно лишь показать, что V и V' перпендикулярны к τ_* в одной точке; это уже установлено для $V(0)$ и, следовательно, для $S_{\tau_*(0)}V(0)$. Таким образом, остается проверить, что $E_{V(0)}X$ перпендикулярно к $\tau_*(0)=X(0)$. Но

$$D_2\langle X, X\rangle(0, 0)=2\langle E_{V(0)}X, X(0)\rangle=0,$$

так как $\langle X, X\rangle=1$.

Мы знаем, что отображение $\exp: \perp(N)\to M$ невырождено на нулевом сечении и, значит, в точке $x=\varepsilon\tau_*(0)$ при некотором $\varepsilon>0$. Но касательные в точке x к прямоугольникам в $\perp(N)$ вида $(u, v)\to u\gamma(v)$, где γ — то же, что и выше, заполняют касательное пространство $\perp(N)_x$. Следовательно, касательные в точке $\tau(\varepsilon)$ к прямоугольникам Q заполняют касательное пространство $M_{\tau(\varepsilon)}$, а их нормальные составляющие $V(\varepsilon)$ заполняют пространство, ортогональное к $\tau_*(\varepsilon)$.

Следствие. Образ отображения $d\exp_x$: $\perp(N)_x\to M_p$, где $p=\exp x=\tau(u)$, является пространством, порожденным $\tau_*(u)$ и значениями N-якобиевых полей в точке $u\neq 0$.

Доказательство. Всякий вектор, касательный в x, можно разложить на вектор, касательный к $\perp_u(N)$, и вектор, касательный к лучу, проходящему через x. При отображении $d\exp$ составляющая, касательная к $\perp_u(N)$, переходит в соответствующее значение N-якобиева поля, а составляющая вдоль луча — в вектор, кратный $\tau_*(u)$. ($\perp_u(N)=\{y\in\perp(N)\mid \|y\|=u\}$.)

Квадратичную форму, ассоциированную с I, мы будем снова обозначать через I, так что $I(V)=I(V, V)$. Так как $I(V)$ при $V\in\mathscr{S}$ совпадает с второй вариацией $l''(0)$ прямоугольника, отнесенного к V, то сразу же получается

Теорема 3. Если $V\in\mathscr{S}$ таково, что $I(V)<0$, то каждая окрестность кривой τ содержит более короткие кривые, соединяющие окрестность $\tau(0)$ в N с окрестностью $\tau(b)$ в P.

Вообще размерность максимального подпространства в $\mathscr{L}$, на котором I отрицательно определено, так называемый *индекс формы* I, показывает, сколько имеется независимых направлений, по которым можно сдвинуть τ в более короткую кривую, соединяющую N с P. Ниже показано, что индекс конечен.

Задача 5. Пусть $M=R^d$ с евклидовой метрикой; предположим, что подмногообразия N и P не пересекаются. Пусть $K(N, P)$ — пространство ломаных C^∞-кривых, соединяющих N с P, а $H(N, P)$ — пространство прямых линий, соединяющих N с P. Предположим, что эти кривые параметризованы *приведенной длиной дуги*, т. е. все они определены на отрезке $[0, 1]$ и имеют касательные постоянной длины. Превратим $K(N, P)$ в метрическое пространство, определив расстояние между кривыми σ, τ так:

$$\rho(\sigma, \tau)=\max \rho(\sigma(u), \tau(u)) + ||\sigma|-|\tau||.$$

Пусть φ: $K(N, P)\to H(N, P)$ — отображение, относящее кривой σ линейный сегмент, соединяющий ее концы. Показать следующее:

(а) Отображение φ гомотопно тождественному отображению посредством гомотопии, оставляющей неподвижным $H(N, P)$. Таким образом, $H(N, P)$ — деформационный ретракт пространства $K(N,P)$; оба пространства имеют одинаковые топологические инварианты.

(б) $H(N, P)$ топологически совпадает с $N\times P$; функция длины L дифференцируема как функция на $N\times P$.

(в) Векторные поля V, ассоциированные с прямоугольниками, образы которых принадлежат $H(N, P)$, являются якобиевыми полями в R^d и могут быть отождествлены с касательными к $N\times P$.

(г) Критическими точками L как дифференцируемой функции на $N\times P$ являются линейные сегменты, перпендикулярные к N и P.

(д) Гессиан L является по существу индексной формой, суженной на подпространство якобиевых полей в $\mathscr{L}$.

11.3. Фокальные и сопряженные точки [39, 40, 41, 49, 61, 84]

Пусть N — подмногообразие в M и $\perp(N)$ — нормальное расслоение. Сужение экспоненциального отображения M дает отображение exp: $\perp(N)\to M$, которое, как мы уже видели, является диффеоморфизмом в окрестности нулевого сечения. Пусть $\perp(N)(n)$ — слой расслоения $\perp(N)$ над $n\in N$. Тогда $t\in\perp(N)(n)$ является *фокальной точкой* подмногообразия N, если $d\exp$ вырождено в точке t. Если ρ — луч, соединяющий 0 с t в пространстве $\perp(N)(n)$, то $\exp(t)$ называется *фокальной*

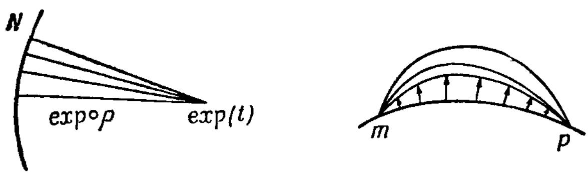


Рис. 38.

точкой N вдоль кривой $\exp\circ\rho$, которая, конечно, является геодезической, перпендикулярной к N. Когда N состоит из одной точки, скажем m, так что $\perp(N)=M_m$, то фокальная точка называется *сопряженной с m*. *Порядком* фокальной точки называется размерность линейного пространства, аннулируемого отображением $d\exp$.

Теорема 2 и ее следствие показывают, что фокальные точки можно определить эквивалентным образом в терминах якобиевых полей следующим образом. Если τ — геодезическая, выходящая перпендикулярно из N, то $\tau(b)$ является фокальной точкой N вдоль τ в том и только в том случае, если существует N-якобиево поле, исчезающее в точке b. Порядок $\tau(b)$ совпадает с размерностью пространства таких якобиевых полей. В силу теоремы 1, порядок совпадает также с размерностью нулевого пространства индексной формы геодезической τ, соединяющей концевое многообразие N с точкой $\tau(b)$.

Последнее утверждение подсказывает, как можно было бы обобщить понятие фокальной точки на «фокальное подмногообразие». Вероятно, тогда надо было бы доказать для случая двух концевых многообразий «теорему об индексе», которую мы выведем ниже в случае одного концевого многообразия и концевой точки. Целью такой теоремы является выражение индекса индексной формы в терминах порядков фокальных точек (или фокальных подмногообразий), расположенных между концевыми многообразиями. Для случая двух концевых многообразий такие теоремы были сформулированы Морсом [49] и Амброзом [1], однако их формулировка и доказательство гораздо труднее, чем в рассматриваемом нами случае, в котором формулировка Морса, очевидно, является окончательной.

Задача 6. Показать, что сопряженность — симметричное отношение, т. е. если m сопряжено с n вдоль геодезической τ, то n сопряжено с m вдоль $-\tau$, где $-\tau$ есть геодезическая с начальной касательной $-\tau_*(0)$.

Задача 7. Показать, что если τ — геодезический сегмент, перпендикулярный к N, на котором нет фокальных точек подмногообразия N, то существуют такие окрестность U сегмента τ в M и окрестность V точки $\tau(0)$ в N, что τ минимизирует расстояние среди кривых в U, соединяющих точки из V с $\tau(b)$ (см. теорему 8.2).

Задача 8. Показать, что если M — полное многообразие, некоторая точка которого не имеет сопряженных точек, то M накрывается пространством R^d.

Задача 9. Показать, что сопряженные точки отсутствуют, если кривизна M неположительна.

Задача 10. Определить сопряженные точки и их порядки для точек d-сферы постоянной кривизны.

Задача 11. Пусть $CP^d = S^{2d+1}/S^1$ наделено метрикой, индуцированной метрикой на сфере S^{2d+1}, имеющей кривизну 1. Показать, что точки, сопряженные с некоторой точкой в CP^d, расположены на расстояниях $(2n+1)\pi/2$ и $n\pi$ (n — целое число) с порядками 1 и $2d-1$ соответственно. Воспользоваться тем, что якобиево поле, отнесенное семейству горизонтальных геодезических в S^{2d+1}, должно проектироваться в якобиево поле на CP^d.

Задача 12. Таким же образом показать, что точки, сопряженные с некоторой точкой в $QP^d=S^{4d+3}/S^3$, где S^{4d+3} — единичная сфера, расположены на расстояниях $(2n+1)\pi/2$ и $n\pi$ с порядками 3 и $4d-1$ соответственно.

11.4. Инфинитезимальные деформации

Полезным приемом для изучения индексной формы служит разложение ее в сумму нескольких индексных форм, получаемых добавлением промежуточных $(d-1)$-мерных многообразий, ортогональных к τ. Мы будем иметь дело с несколькими индексными формами, относящимися, однако, к сегментам одной и той же геодезической τ, и потому введем обозначение $I(T_1, T_2)$ для индексной формы с концевыми многообразиями T_1 и T_2. Символ сужения также будет опускаться, т. е. если V принадлежит $\mathscr{L}$, области определения $I(N, P)$, подмногообразия T_1 и T_2 ортогональны к τ в точках $\tau(u_1)$, $\tau(u_2)$ и $I_1=I(T_1, T_2)$, то $I_1(V)$ будет обозначать $I_1(V|_{[u_1, u_2]})$.

Если промежуточные многообразия выбрать достаточно близко друг к другу, то всякую кривую в некоторой окрестности τ [под *окрестностью* τ понимается совокупность кривых, соединяющих некоторую окрестность $\tau(0)$ в N с некоторой окрестностью $\tau(b)$ в P, расположенных притом в некотором открытом множестве, содержащем τ] можно заменить единственной более короткой ломаной геодезической, с изломами только на промежуточных многообразиях. Если подмногообразие T_i проходит через $\tau(u_i)$, $i=1, \ldots, n$, $u_i<u_{i+1}$, то для этого требуется, чтобы на $\tau|_{[0, u_1]}$ не было фокальных точек N, на $\tau|_{[u_i, u_{i+1}]}$ — точек, сопряженных с $\tau(u_i)$, $i=1, \ldots, n-1$, на $\tau|_{[u_n, b]}$ — фокальных точек P. Кривая σ, достаточно близкая к τ, будет пересекать каждое T_i, и пусть p_i — первое пересечение. Если σ достаточно близко к τ, то существуют единственный кратчайший геодезический сегмент, соединяющий p_1 с окрестностью точки $\tau(0)$ в N, единственный кратчайший геодезический сегмент,

соединяющий p_i с p_{i+1}, и единственный кратчайший геодезический сегмент, соединяющий p_n с выбранной окрестностью $\tau(b)$ в P. Цепочка этих геодезических сегментов дает ломаную геодезическую γ, имеющую изломы только на промежуточных многообразиях T_i. Отображение φ: $\sigma \to \gamma$ является неувеличивающей длину деформа-

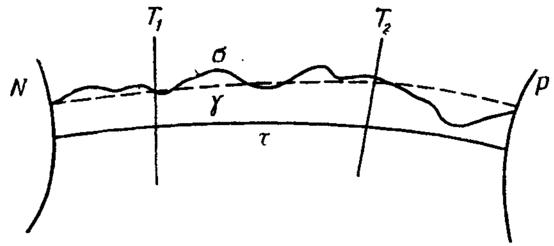


Рис. 39.

цией множества кривых, расположенных вблизи τ, в гораздо меньшую совокупность ломаных геодезических. В действительности образ φ можно рассматривать как произведение многообразий $T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n = T$, а функцию длины на пространстве кривых — как некоторую дифференцируемую функцию на T. Геодезическая τ оказывается критической точкой функции длины, а индексная форма τ — ее гессианом.

Детальные доказательства этих фактов более соответствуют теории Морса, поэтому мы здесь займемся их инфинитезимальными вариантами.

Лемма 3. При условиях, наложенных на выбор u_i, каковы бы ни были $y_i \in \tau_*(u_i)^\perp$, существует единственное векторное поле $Y \in \mathscr{L}$, такое, что $Y(u_i) = y_i$, $Y|_{[u_i, u_{i+1}]}$ — якобиево поле и $Y|_{[0, u_1]}$, $Y|_{[u_n, b]}$ являются N-якобиевым и P-якобиевым полями соответственно.

Отображение G: $\sum\limits_{i=1}^{n} \tau_*(u_i)^\perp \to \mathscr{L}$, $G(y_1, \ldots, y_n) = Y$ является линейным изоморфизмом.

Доказательство. Линейное преобразование, относящее N-якобиеву полю V его значение $V(u_1)$, осуществляет взаимно однозначное отображение на $\tau_*(u_1)^\perp$, поскольку $\tau(u_1)$ не является фокальной точкой N. Таким образом, $Y|_{[0, u_1]}$ существует и единственно; то же верно для $Y|_{[u_n, b]}$.

По тем же причинам существует единственное $\tau(u_i)$-якобиево поле V_i и единственное $\tau(u_{i+1})$-якобиево поле W_i, такие, что $V_i(u_{i+1}) = y_{i+1}$, $W_i(u_i) = y_i$. Тогда $V_i + W_i$ — якобиево поле, принимающее значения y_i в u_i и y_{i+1} в u_{i+1}, откуда следует существование $Y|_{[u_i, u_{i+1}]}$. Более того, если Y задано, то $Y|_{[u_i, u_{i+1}]} - W_i = V_i|_{[u_i, u_{i+1}]}$, в силу единственности V_i, что доказывает единственность $Y|_{[u_i, u_{i+1}]}$.

Свойства линейности и взаимной однозначности отображения G сразу же вытекают из единственности Y и линейности уравнения Якоби.

Обозначим образ G через $\mathscr{K}$. Тогда $\dim \mathscr{K} = (d-1)n$. Вычисляя $V \in \mathscr{L}$ в точках $u_1, \ldots, u_n$, получим линейное преобразование $E\colon \mathscr{L} \to \sum \tau_*(u_i)^{\perp}$, $E(V) = (V(u_1), \ldots$ $\ldots, V(u_n))$. Композиция $F = G \circ E\colon \mathscr{L} \to \mathscr{K}$ является инфинитезимальным аналогом деформации $\varphi : \sigma \to \gamma$, и потому мы будем говорить, что F — *инфинитезимальная деформация*. Свойству $\varphi : \sigma \to \gamma$ не увеличивать длину соответствует тот факт (он доказан ниже), что F не увеличивает индексную форму I.

Задача 13. Пусть Q — ломаный C^∞-прямоугольник с трансверсальными кривыми τ^{u_i}, расположенными в T_i; тогда при действии φ на продольные кривые из Q получается другой прямоугольник $\varphi(Q)$. Показать, что если V — векторное поле, ассоциированное с Q, то $F(V)$ — поле, ассоциированное с $\varphi(Q)$.

Лемма 4. Если Y и Z — якобиевы поля, то разность $\langle Y, Z'\rangle - \langle Y', Z\rangle$ постоянна. Если Y и Z являются N-якобиевыми полями, то эта константа равна нулю.

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned}(\langle Y, Z'\rangle - \langle Y'Z\rangle)' &= \langle Y, Z''\rangle - \langle Y'', Z\rangle = \\ &= -\langle Y, R_{\tau_* Z}\tau_*\rangle + \langle R_{\tau_* Y}\tau_*, Z\rangle = \\ &= 0, \text{ в силу тождества кривизны.}\end{aligned}$$

Если Y и Z являются N-якобиевыми полями, то

(а) $\langle S_{\tau_*(0)}Y(0)-Y'(0),\ Z(0)\rangle=0,$

(б) $\langle S_{\tau_*(0)}Z(0)-Z'(0),\ Y(0)\rangle=0.$

Вычитая (б) из (а) и используя симметричность $S_{\tau_*(0)}$, получаем

$$-\langle Y'(0),\ Z(0)\rangle+\langle Z'(0),\ Y(0)\rangle=0.$$

Задача 14. Пусть $\mathcal{J}$ — такое $(d-1)$-мерное подпространство якобиевых полей вдоль τ, что для любых $Y, Z\in\mathcal{J}$

$$\langle Y,\ Z'\rangle-\langle Y',\ Z\rangle=0.$$

Показать, что существует такое подмногообразие N, ортогональное к τ в точке $\tau(0)$, что $\mathcal{J}$ оказывается пространством N-якобиевых полей.

Теорема 4. *Основное неравенство.* Предположим, что на $\tau((0,\ b])$ нет фокальных точек N. Для всякого $V\in\mathcal{L}$, по лемме 3, найдется такое единственное N-якобиево поле Y, что $Y(b)=V(b)$. Тогда $I(V)\geqslant I(Y)$, причем равенство достигается только в том случае, если $V=Y$.

Доказательство. Пусть $Y_1, \ldots, Y_{d-1}$ — базис пространства N-якобиевых полей. Тогда на $(0, b]$ имеется единственное представление $V=\sum\limits_{i=1}^{d-1} f_iY_i$, где f_i — непрерывные ломаные C^∞-функции. Мы предоставляем в качестве упражнения проверку существования, а также единственности такого представления на $[0,\ b]$ (см. задачу 15).

В точках, где V' существует, положим $W=\sum\limits_i f_i'Y_i$ и $Z=\sum\limits_i f_iY_i'$, так что $V'=W+Z$. Тогда

$$\text{(а)}\ \Big\langle V,\ \sum_j f_j'Y_j'\Big\rangle=\sum_{i,j} f_if_j'\langle Y_i,\ Y_j'\rangle=$$

$$=\sum_{i,j} f_if_j'\langle Y_i',\ Y_j\rangle\ \text{(по лемме 4)}=\langle W,\ Z\rangle.$$

(б) $\langle V, Z\rangle' = \langle V', Z\rangle + \langle V, Z'\rangle =$

$= \langle W, Z\rangle + \langle Z, Z\rangle + \left\langle V, \sum_i f_i' Y_i'\right\rangle + \left\langle V, \sum_i f_i Y_i''\right\rangle =$

$= \langle W, Z\rangle + \langle Z, Z\rangle + \langle W, Z\rangle - \left\langle V, \sum_i f_i R_{\tau_* Y_i} \tau_*\right\rangle =$

$= 2\langle W, Z\rangle + \langle Z, Z\rangle - \langle V, R_{\tau_* V}\tau_*\rangle.$

Таким образом, подинтегральное выражение в $I(V)$ принимает вид

(в) $\langle V', V'\rangle - \langle R_{\tau_* V}\tau_*, V\rangle =$

$= \langle W + Z, W + Z\rangle - \langle R_{\tau_* V}\tau_*, V\rangle =$

$= \langle W, W\rangle + \langle V, Z\rangle'$ [в силу (б)].

(г) $I(V) = \langle S_{\tau_*(0)} V(0), V(0)\rangle - \langle S_{\tau_*(b)} V(b), V(b)\rangle +$

$+ \int_0^b (\langle W, W\rangle + \langle V, Z\rangle')\, du =$

$= \langle S_{\tau_*(0)} V(0), V(0)\rangle - \langle S_{\tau_*(b)} V(b), V(b)\rangle +$

$+ \langle V(b), Z(b)\rangle - \langle V(0), Z(0)\rangle + \int_0^b \langle W, W\rangle\, du.$

Но

$$S_{\tau_*(0)} V(0) - Z(0) = \sum_i f_i(0)\left(S_{\tau_*(0)} Y_i(0) - Y_i'(0)\right) \perp V(0),$$

откуда

(д) $I(V) = \langle Z(b) - S_{\tau_*(b)} V(b), V(b)\rangle + \int_0^b \langle W, W\rangle\, du.$

Совпадающее с V в точке b N-якобиево поле есть $Y = \sum_i c_i Y_i$, где $c_i = f_i(b)$. При $W_1 = \sum_i c_i' Y_i = 0$, $Z_1 = \sum_i c_i Y_i'$ те же вычисления (а) — (д) дают

(е) $I(Y) = \langle Z(b) - S_{\tau_*(b)} V(b), V(b)\rangle,$

ибо $Z_1(b)=Z(b)$, $Y(b)=V(b)$. Отсюда $I(V)-I(Y)=$ $=\int\limits_0^b \langle W, W\rangle du \geqslant 0$. Равенство достигается в том и только в том случае, если $W=0$, что в свою очередь эквивалентно равенству $f_i'=0$ при всех i, т. е. тому, что f_i постоянно при всех i и, наконец, равенству $Y=V$.

Далее, в следствиях 1 и 2 предположения относительно N и $\tau((0, b])$ остаются прежними; это не относится к следствию 3.

Следствие 1. Если $V(b)=0$, то $I(V)\geqslant 0$ и равенство достигается в том и только в том случае, если $V=0$.

Следствие 2. Пусть $Y\in\mathscr{S}$. Тогда Y является N-якобиевым полем в том и только в том случае, если $I(V, Y)=0$ для всех таких $V\in\mathscr{S}$, что $V(b)=0$.

Доказательство. С помощью поляризации равенства (д) получаем для V_1, $V_2\in\mathscr{S}$, $V_1'=Z_1+W_1$, $V_2'=Z_2+W_2$ и т. д., что

$$I(V_1, V_2)=\langle Z_1(b)-S_{\tau_*(b)}V_1(b), V_2(b)\rangle+\int\limits_0^b \langle W_1, W_2\rangle du.$$

Если Y есть N-якобиево поле и $V(b)=0$, то, полагая $V_1=Y$, $V_2=V$, получаем $W_1=0$, $V_2(b)=0$, откуда $I(V_1, V_2)=I(Y, V)=0$.

Обратно, пусть $I(V, Y)=0$ для всех $V\in\mathscr{S}$, таких, что $V(b)=0$. Пусть Y_1 есть N-якобиево поле, такое, что $Y(b)=Y_1(b)$. Тогда $I(Y, Y-Y_1)=0$ по предположению; $I(-Y_1, Y-Y_1)=0$, как только что доказано; следовательно,

$$I(Y-Y_1)=I(Y, Y-Y_1)+I(-Y_1, Y-Y_1)=0.$$

Отсюда, в силу следствия 1, $Y-Y_1=0$.

Следствие 3. Предположим, что на $\tau((0, b])$ нет точек, сопряженных с $\tau(0)$. Для $V\in\mathscr{S}$, в силу леммы 3, существует единственное якобиево поле Y, такое, что $Y(0)=V(0)$, $Y(b)=V(b)$. Тогда $I(V)\geqslant I(Y)$, причем равенство достигается в том и только в том случае, если $V=Y$.

Доказательство. Пусть T_1 и T_2 являются $(d-1)$-мерными трансверсальными многообразиями в $\tau(0)$ и $\tau(b)$ соответственно, вторые фундаментальные формы которых равны 0. Пусть $I_1=I(T_1, T_2)$ — ассоциированная индексная форма. Тогда для $V_1, V_2 \in \mathcal{L}$ имеем

$$I_1(V_1, V_2)-I(V_1, V_2)=$$
$$=-\langle S_{\tau_*(0)}V_1(0), V_2(0)\rangle+\langle S_{\tau_*(b)}V_1(b), V_2(b)\rangle$$

и, следовательно, $I_1(V)-I(V)=I_1(Y)-I(Y)$, так что достаточно проверить неравенство для I_1 вместо I.

Пусть $I_2=I(\tau(0), T_2)$, $I_3=I(T_1, \tau(b))$; тогда I_1, I_2 и I_3 совпадают с точностью до их областей определения.

В силу леммы 3, имеем $Y=Y_1+Y_2$, где Y_1 есть $\tau(0)$-якобиево поле, такое, что $Y_2(0)=V(0)$. Так как $V-Y$ обращается в нуль в концах $\tau(0)$ и $\tau(b)$, то $I_1(V-Y, Y_1)=I_2(V-Y, Y_1)=0$ и $I_1(V-Y, Y_2)=$ $=I_3(V-Y, Y_2)=0$, в силу следствия 2, примененного к I_2 и I_3 соответственно. Складывая эти равенства, получаем

$$I_1(V-Y, Y_1+Y_2)=I_1(V-Y, Y)=0,$$
$$\text{т. е. } I_1(V, Y)=I_1(Y, Y).$$

Но в силу следствия 1,

$$0\leqslant I_2(V-Y, V-Y)=I_1(V, V)-2I_1(V, Y)+I_1(Y, Y)=$$
$$=I_1(V, V)-I_1(Y, Y),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $V-Y=0$.

Задача 15. Пусть $V_1, \ldots, V_d$ являются векторными C^∞-полями вдоль τ, независимыми всюду, кроме точки $\tau(0)$. Пусть V — ломаное векторное C^∞-поле вдоль τ, причем $V=\sum f_i V_i$ на $(0, b]$. Показать на примере, что f_i не обязательно имеют непрерывные продолжения на $[0, b]$, даже если $V(0)=\sum a_i V_i(0)$. Однако если эти V_i — якобиевы поля, то существуют единственные непрерывные продолжения коэффициентов f_i.

Теорема 5. Инфинитезимальная деформация F не увеличивает I, т. е. $I(V)\geqslant I(F(V))$. При этом равенство достигается лишь в том случае, если $V=F(V)$.

Задача 16. Доказать теорему 5 с помощью теоремы 4 и следствия 3.

Следствие 1. (В случае, когда N — точка, это утверждение принадлежит Якоби.) За первой фокальной точкой геодезическая τ не минимизирует расстояние до N.

Доказательство. Пусть $\tau(c)$ — фокальная точка N, $c\in(0, b)$; пусть Y — ненулевое N-якобиево поле, исчезающее в c. Пусть $V\in\mathscr{L}$ определяется равенствами $V|_{[0,c]}=Y|_{[0,c]}$, $V|_{[c,b]}=0$. Пусть $I=I(N,\tau(b))$, $I_1=I(N,\tau(c))$, $I_2=I(\tau(c),\tau(b))$. Тогда $I(V)=I_1(V)+I_2(V)=I_1(Y)+I_2(0)=0$, в силу следствия 2 теоремы 4.

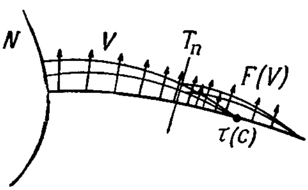


Рис. 40.

Теперь промежуточные многообразия для инфинитезимальной деформации F выберем так, чтобы точка c отличалась от всех u_i. Тогда в точке c поле $F(V)$ гладко, а поле V имеет излом, откуда $F(V)\neq V$ и $I(F(V))<I(V)=0$. По теореме 3, существуют более короткие кривые, соединяющие $\tau(b)$ с N.

Следствие 2. Точка $\tau(c)$ является первой фокальной точкой многообразия N вдоль τ, если $\tau([0, b])$ не минимизирует длину дуги до N при $b>c$, но минимизирует ее при $b<c$.

Увеличенный индекс квадратичной формы — это размерность максимального подпространства, на котором эта форма отрицательно полуопределена,

Следствие 3. Индекс и увеличенный индекс формы I совпадают с индексом и увеличенным индексом формы $I|_{\mathscr{K}}$ и потому конечны.

Доказательство. Так как очевидно, что индекс формы I не меньше индекса $I|_{\mathscr{K}}$, то достаточно доказать обратное неравенство и сделать то же самое для увеличенного индекса.

Пусть $\mathscr{H}$ — подпространство в $\mathscr{L}$, на котором форма I отрицательно полуопределена. Тогда $F|_{\mathscr{H}}$ является изоморфизмом, поскольку если $V \in \mathscr{H}$ принадлежит ядру F, т. е. $F(V)=0$, то $I(F(V))=0 \leqslant I(V)=0$, откуда ввиду того что достигается равенство, имеем $V = F(V)=0$. Так как I отрицательно полуопределена на $F(\mathscr{H})$, то тем самым доказано требуемое совпадение увеличенных индексов. Для самого индекса доказательство аналогично с точностью до замены термина «полуопределенный» на термин «определенный».

Пусть теперь фокальные точки N вдоль τ располагаются на расстояниях c_i, $c_i \leqslant c_{i+1} < b$, $i=1, \ldots, h_-$, причем каждое c_i повторяется столько раз, какова кратность фокальной точки $\tau(c_i)$; не исключено, что множество $\{c_i\}$ не исчерпывает всех *фокальных значений* в $(0, b)$, и заранее неизвестно, что оно конечно. Итак, рассматриваются такие поля $Y_i \in \mathscr{L}$, $i=1, \ldots, h_-$, что $Y_i|_{[0, c_i]}$ являются N-якобиевыми полями, $Y_i|_{[c_i, b]}=0$ и при любом $c \in (0, b)$ поля $\{Y_i | c=c_i\}$ независимы. Пусть $\mathscr{H}_-$ есть линейное пространство, порожденное этими Y_i, $\mathscr{H}=\mathscr{H}_- + \mathscr{H}_0$, где $\mathscr{H}_0$ — нулевое пространство формы I.

Задача 17. Доказать, что Y_i независимы, так что $\dim \mathscr{H}_- = h_-$. Более того, сумма $\mathscr{H}_- + \mathscr{H}_0$ является прямой.

Лемма 5. Сужение I на $\mathscr{H}$ тождественно равно нулю.

Доказательство. Так как $I(\mathscr{H}, \mathscr{H}_0)=0$, то достаточно показать, что $I(\mathscr{H}_-, \mathscr{H}_-)=0$, т. е. что $I(Y_i, Y_j)=0$ при всех i, j. Можно считать, что $c_i \leqslant c_j$.

Пусть $I_1=I(N, \tau(c_j))$, $I_2=I(\tau(c_j), P)$. Тогда

$$I(Y_i, Y_j)=I_1(Y_i, Y_j)+I_2(Y_i, Y_j)=I_1(Y_i, Y_j)=0,$$

так как, в силу теоремы 1, Y_j принадлежит нулевому пространству формы I_1.

Пусть $a(I)$, $i(I)$, $n(I)$ — соответственно увеличенный индекс, индекс и размерность нулевого пространства формы I. Хорошо известно, что на конечномерном пространстве сумма индекса и размерности нулевого пространства совпадают с увеличенным индексом. Поскольку форму I можно сузить на конечномерное пространство $\mathscr{H}$ без изменения индекса и увеличенного индекса, то упомянутый результат также верен и для I, так что $a(I)=i(I)+n(I)$.

В дальнейшем, говоря о *числе* фокальных точек, мы будем иметь в виду сумму их порядков.

Теорема 6. Число фокальных точек многообразия N на $\tau((0, b))$ конечно и не превосходит $i(I)$.

Доказательство. Ввиду задачи 17, леммы 5 и конечности $a(I)$ имеем $h_-+n(I)=\dim\mathscr{H}\leqslant a(I)=i(I)+$ $+n(I)$ и потому $h_-\leqslant i(I)$.

11.5. Теорема Морса об индексе [22, 49]

В этом параграфе мы ограничимся случаем $P=\tau(b)$. Теорема Морса об индексе утверждает, что неравенство теоремы 6 является в этом случае равенством.

Теорема 7. Пусть $I=I(N, \tau(b))$. Тогда $a(I)$ совпадает с числом фокальных точек многообразия N на $\tau((0, b])$.

Доказательство основано на изучении поведения формы $I_t=I(N, \tau(t))$, а также целочисленных функций $a(t)=a(I_t)$, $i(t)=i(I_t)$ и $n(t)=n(I)_t$, когда t меняется от 0 до b.

Поскольку при этом область определения I_t можно рассматривать как возрастающую функцию от t, то функции a и i не убывают. При малых t форма I_t положительно определена, поэтому a и i вначале равны нулю.

Мы уже отмечали, что $a=i+n$ и $n(t)=0$ всюду, за исключением конечного числа значений t, где $n(t)$ совпадает с порядком соответствующей фокальной точки. Таким образом, a должно испытывать скачки, которые по меньшей мере прибавляются к сумме этих $n(t)$ (теорема 6).

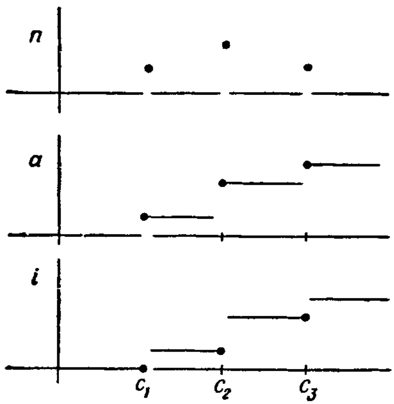


Рис. 41.

С другой стороны, поскольку форма I_t непрерывна по t, то при непрерывном изменении I_t та часть ее, которая из положительно определенной переходит в отрицательно определенную составляющую, обязательно проходит через нулевую составляющую. Поэтому функции a и i терпят разрывы величины $n(t)$ по разные стороны от фокальных значений: скачок функции a слева от t равен $n(t)$, функция же i непрерывна слева, т. е. $a(t)=a(t^-)+n(t)$, $i(t)=i(t^-)$; справа от точки t функция a оказывается непрерывной, n обращается в нуль, и i можно определить из уравнения $a=i+n$, т. е. $a(t^+)=a(t)$, $i(t^+)=i(t)+n(t)$. Итак, нужно лишь аккуратно показать, что $a(t^+)=a(t)$ и $i(t^-)=i(t)$ для каждого t; тогда теорема проверяется простым подсчетом.

Пусть F_t — инфинитезимальная деформация для I_t с промежуточными многообразиями, проходящими через

$\tau(u_i)$, $i=1, \ldots, n$. Тогда те же промежуточные многообразия пригодны для инфинитезимальной деформации F_u формы I_u, если u принадлежит U, некоторой окрестности точки t. Инфинитезимальная деформация задается вычисляющим отображением E и изоморфизмом G_u: $\mathcal{G} \to \mathcal{H}_u$, где $\mathcal{G} = \sum \perp (u_i)$ — прямая сумма касательных пространств промежуточных многообразий. Отображение $H_u = G_u G_t^{-1} : \mathcal{H}_t \to \mathcal{H}_u$ является изоморфизмом, причем оно изменяет только ту часть поля $Y \in \mathcal{H}_t$, которая определена на $(u_n, t]$; на $[0, u_n]$ поле Y остается неизменным. Значение I_t на Y является суммой членов, из которых только один, $-\langle Y'(u_n^+), Y(u_n)\rangle$, изменяется при отображении H_u, но даже здесь $Y(u_n)$ остается прежним.

Пусть $Y_u = H_u(Y)$. Для доказательства непрерывности $I_u(Y_u)$ как функции от u достаточно доказать, что $Y'_u(u_n^+)$ непрерывно по u. По определению Y_u, сужение его на $[u_n, u]$ является якобиевым полем, удовлетворяющим равенствам $Y_u(u)=0$ и $Y_u(u_n)=Y(u_n)=y$. Пусть y, $z \in \perp (u_n)$, $Y_{y,z}$ — такое единственное якобиево поле, что $Y_{y,z}(u_n)=y$ и $Y'_{y,z}(u_n)=z$; отображение $(y,z) \to Y_{y,z}$ линейно по y и z и потому является вычисляющим в точке u, следовательно, $Y_{y,z}(u) = A_u(y)+B_u(z)$, где

$$A_u, \ B_u : \perp (u_u) \to \perp (u)$$

— линейные преобразования. Они непрерывны по u, ибо $Y_{y,z}$ непрерывно. Но уравнение $A_u(y)+B_u(z)=0$ однозначно разрешимо по z, так что B_u^{-1} существует и непрерывно. Таким образом, решение $Y'_u(u_n^+) = z = -B_u^{-1}A_u(y)$ непрерывно по u, откуда следует непрерывность $I_u(Y_u)$.

Пусть теперь $\mathcal{H}^+$ — максимальное подпространство в $\mathcal{H}_t$, на котором форма I_t положительно определена; пусть S^+ — единичная сфера в $\mathcal{H}^+$ относительно I_t. Тогда $a(t) = \operatorname{codim} \mathcal{H}^+$. Далее f: $(u, Y) \to I_u(Y_u)$ — непрерывная функция на $U \times S^+$, положительная на $\{t\} \times S^+$. Так как S^+ компактно, то существует такая окрестность U' точки t, что функция f положительна на $U' \times S^+$ (см. ниже лемму 6). Итак, при $u \in U'$ форма I_u положительно определена на пространстве $H_u(\mathcal{H}^+)$, натянутом на

$H_u(S^+)$, причем $a(u) \leqslant a(t)$. Но a не убывает, и потому $a(t^+) = a(t)$.

То же самое рассуждение, примененное к максимальному подпространству в $\mathscr{K}_t$, на котором I_t отрицательно определено, показывает, что $i(u) \geqslant i(t)$ при u из некоторой окрестности t. Таким образом, $i(t^-) = i(t)$.

Лемма 6. Пусть f — непрерывная вещественная функция на расслоении B с компактным слоем F и базой M. Обозначим через F_p слой над $p \in M$. Определим функции f_m, f_M: $M \to R$, положив

$$f_m(p) = \min \{f(b) | b \in F_p\},$$
$$f_M(p) = \max \{f(b) | b \in F_p\}.$$

Тогда f_m и f_M непрерывны.

Доказательство. Ввиду того что утверждение имеет локальный характер, можно считать, что $B = F \times M$. Для данного $\varepsilon > 0$ можно найти такое конечное покрытие множества $F \times \{p\}$ окрестностями $W_i = V_i \times W$, где W — окрестность точки p, что $|f(b) - f(b')| < \varepsilon$ для всех $b, b' \in W_i$. Тогда для $x \in F$ и $p' \in W$ имеет место неравенство $|f(x, p') - f(x, p)| < \varepsilon$. Далее, если $b_1 = (x_1, p)$ — точка, где $f(b_1) = f_M(p)$, $b_2 = (x_2, p')$ — аналогичная точка для $f_M(p')$, то

$$\begin{aligned} f_M(p') - \varepsilon &= f(x_2, p') - \varepsilon < f(x_2, p) \leqslant f(x_1, p) = \\ &= f_M(p) < f(x_1, p') + \varepsilon \leqslant f(x_2, p') + \varepsilon = \\ &= f_M(p') + \varepsilon, \end{aligned}$$

так что $|f_M(p') - f_M(p)| < \varepsilon$; тем самым доказана непрерывность f_M. Доказательство для f_m вытекает из рассмотрения $-f$.

Задача 18. Пусть J — скалярное произведение $J(Y, Z) = \int\limits_0^b \langle Y, Z \rangle du$ на области определения $\mathscr{L}$ формы $I(N, P)$. Положим $J(Y) = J(Y, Y)$. *Характеристическим значением* формы I относительно J называется число λ, для которого $n(I - \lambda J) \neq 0$; *характеристический* *вектор* формы I, принадлежащий λ, является векторным полем в нулевом пространстве формы $I-\lambda J$. Показать, что

(а) При достаточно отрицательных λ форма $I-\lambda J$ положительно определена.

(б) Поле Y служит характеристическим вектором для I в том и только в том случае, если Y удовлетворяет концевым условиям на N и P ($S_{\tau_*}Y-Y'$ перпендикулярно к N, P) и является решением уравнения второго порядка $Y''+R_{\tau_*Y}\tau_*+\lambda Y=0$.

(в) Увеличенный индекс формы $I-\lambda J$ конечен и равен числу независимых характеристических векторов, принадлежащих значениям $\leqslant\lambda$.

(г) Пусть $P=\tau(b)$ и J_t есть сужение J на область определения I_t. Перенумеруем характеристические значения I_t, начиная с наименьшего и учитывая кратности. Мы получим последовательность функций $\{\lambda_i\}$ от t. Они непрерывны и не возрастают на $(0, b]$, а $n(I_t)$ совпадает с количеством тех i, для которых $\lambda_i(t)=0$.

Задача 19. С каждым $x\in\perp(N)$, не принадлежащим нулевому сечению, связывается индексная форма $I_x=I(N,\exp x)$ геодезической $\exp ux|_{[0,1]}$. Показать, что

(а) Если $n(I_x)=0$, то найдется такая окрестность U точки x, что $i(I_{x'})=i(I_x)$ для каждого $x'\in U$.

(б) Если M полно и N замкнуто в M, то множество $\{m\,|\,n(I_x)=0$ для каждого ненулевого $x\in\exp^{-1}m\}$ всюду плотно в M (см. задачу 1.11).

Тех, кто интересуется теорией Морса и ее приложениями, мы отсылаем к работам [21, 46, 49, 59, 84, 85].

11.6. Геометрическое место минимумов [29, 40, 41, 77]

Минимальный сегмент — это геодезический сегмент, минимизирующий длину дуги между своими концами. *Точка минимума точки p вдоль геодезической* γ — это такая точка m на γ, что сегмент кривой γ от p до m минимален, но всякий больший сегмент не является минимальным. Множество всех точек минимума точки p называется *геометрическим местом минимумов* (или *разрезов*) точки p.

Так как геодезические не минимизируют длину дуги далее первой сопряженной точки, то мы сразу же заключаем, что если m — первая точка, сопряженная с p вдоль γ, то не далее m расположена точка минимума точки p вдоль γ.

Геодезический луч, выходящий из p, содержит самое большее одну точку минимума точки p, хотя может и не содержать их вовсе.

Пусть $t \in M_p$ и $\exp_p t$ — точка минимума точки p вдоль геодезической $\exp_p ut$; тогда говорят, что t — *точка минимума точки p в M_p.*

Теорема 8. (а) Если m не является точкой минимума точки p, то имеется не более одного минимального сегмента γ, соединяющего p с m. Если $\{\sigma_i\}$ — последовательность кривых, соединяющих p с m и таких, что $\lim|\sigma_i| = \rho(p, m)$, то (при надлежащей параметризации) σ_i сходятся к γ.

(б) Если существует минимальный сегмент от p до m, на котором точка m сопряжена с p, то m — точка минимума точки p.

(в) Если M полно, то верно и обратное: если m — точка минимума точки p, то либо имеется два минимальных сегмента, либо точка m сопряжена с p вдоль единственного сегмента.

Доказательство. (а) Первое утверждение вытекает из второго, поскольку если бы γ и σ оба были минимальными сегментами, то, положив $\sigma_i = \sigma$ для всех i, мы получили бы $\lim \sigma_i = \sigma = \gamma$.

Предположим, что γ и каждое σ_i параметризованы длиной дуги. В силу компактности шара в нормальных координатах с центром m и радиусом ε, множество $\{\sigma_i(L_i - \varepsilon)\}$, где $L_i = |\sigma_i|$, содержит сходящиеся подпоследовательности. Если бы какая-нибудь из них не сходилась к $\gamma(L - \varepsilon)$, где $L = \rho(p, m)$, то соответствующие кривые в конце концов образовали бы угол с продолжением γ за точку m. Срезая этот угол, мы получили бы кривые из p в $\gamma(L+\varepsilon)$ меньшей длины, чем $L+\varepsilon$, что противоречит минимальности сегмента γ, продолженного за точку m.

Это рассуждение можно провести аккуратно, используя только неравенство треугольника и свойство локальной минимальности геодезических, причем можно даже показать, что σ_i сходятся к γ в пределах регулярной окрестности точки m. Покрыв γ конечным числом регулярных окрестностей, эту сходимость можно доказать по индукции вдоль γ от m до p. Под термином «регулярный» подразумевается следующее: всякие две точки в такой окрестности можно соединить единственным минимальным сегментом. В качестве упражнения читатель может провести подробное доказательство.

(б) Это утверждение следует непосредственно из того, что геодезические не минимизируют длину дуги за первой сопряженной точкой.

(в) Предположим, что M полно и m — такая точка минимума точки p, с которой ее соединяет единственный миимальный сегмент γ. Нужно показать, что m — сопряженная точка вдоль γ.

Пусть $L=\rho(p, m)$ и σ_i — минимальный сегмент от p до $m_i=\gamma(L+1/i)$, параметризованный длиной дуги, причем $|\sigma_i|=L_i$. Тогда последовательность $\{\sigma_{i*}(0)\}$ должна иметь предельные точки; но геодезические в направлениях таких предельных точек дают минимальные сегменты от p до m, поэтому $\lim \sigma_{i*}(0)=\gamma_*(0)$. Но тогда

$$\exp_p(L_i\sigma_{i*}(0))=m_i=\exp_p\left(L+\frac{1}{i}\right)\gamma_*(0)$$

и

$$\lim L_i\sigma_{i*}(0)=\lim\left(L+\frac{1}{i}\right)\gamma_*(0)=L\gamma_*(0),$$

так что отображение $\exp_p$ не взаимно однозначно в окрестности $L\gamma_*(0)$. Поэтому там $d\exp_p$ вырождено, и, значит, m — сопряженная точка.

Задача 20. Показать, что указанная в (а) сходимость σ_i к γ равномерна.

Задача 21. Показать, что отношение «минимальности» симметрично. Таким образом, если γ — минимальный сегмент от p до ее точки минимума m, то существуют кривые меньшей длины, чем γ, соединяющие m с точками продолжения γ за точку p.

Задача 22. Предположим, что M связно. Будем говорить, что m находится *между* p и q, если все три точки различны и $\rho(p, m)+\rho(m, q)=\rho(p, q)$; это отношение обозначается через $[p, m, q]$. Показать, что

(а) Если $[p, m, q]$, $[p, n, q]$ и $[p, m, n]$, то $[m, n, q]$ и минимальный сегмент γ от m до n единствен. В случае когда γ существует, обозначим через σ наибольшее (открытое) геодезическое продолжение γ, не содержащее p или q. Тогда каждая точка σ находится между p и q. Отсюда $|\sigma|\leqslant\rho(p, q)$ и σ не содержит точек минимума любой из своих точек.

(б) Если M неполно, то для каждого $p\in M$ найдется геодезический луч из p, на котором нет точки минимума точки p.

(в) Если M полно, то $[p, m, q]$ тогда и только тогда, когда m содержится в открытом минимальном сегменте с концами p и q.

Пусть $Q(M)=\{t\in T(M)\,|\,t$ — единичный вектор и $c_t t$ — точка минимума точки $\pi' t$ при некотором $c_t>0\}$. Определим f: $Q(M)\to M$, положив $f(t)=\exp c_t t$, так что при этом отображении касательной t соответствует точка минимума (если она существует) начальной точки вектора t вдоль выходящей из нее геодезической в направлении t.

Теорема 9. Отображение f непрерывно.

Доказательство. Мы хотим показать, что, если $\{t_i\}$ — сходящаяся последовательность в $Q(M)$, то $\lim f(t_i)=f(\lim t_i)$. Пусть $\gamma_i=\exp ut_i$, $p_i=\gamma_i(0)$, $m_i=f(t_i)=\gamma_i(c_i)$, $t=\lim t_i$, $\gamma=\exp ut$, $p=\gamma(0)$ и $m=f(t)=\gamma(c)$. Достаточно показать, что $\lim c_i=c$, ибо тогда, в силу непрерывности exp,

$$\lim m_i=\lim \exp c_i t_i=\exp \lim c_i t_i=\exp(\lim c_i \lim t_i)=\exp ct=m.$$

Предположим, что $\limsup c_i>c$. Тогда существуют такие $\varepsilon>0$, подпоследовательность $\{d_i\}\subset\{c_i\}$ и k, что $d_i>c+\varepsilon$ при $i>k$ и $\gamma(c+\varepsilon)$ существует. Тогда для соответствующих подпоследовательностей $\{\sigma_i\}\subset\{\gamma_i\}$, $\{n_i\}\subset\{m_i\}$

и $\{q_i\}\subset\{p_i\}$ сегмент σ_i является минимальным от q_i до $\sigma_i(c+\varepsilon)$, так что

$$c+\varepsilon=\lim\rho(q_i,\ \sigma_i(c+\varepsilon))=$$
$$=\rho(\lim q_i,\ \lim\sigma_i(c+\varepsilon))=\rho(p,\ \gamma(c+\varepsilon))$$

вопреки тому, что γ не минимизирует длину дуги за точкой $\gamma(c)=m$.

Для доказательства равенства $\liminf c_i=c$ рассмотрим сходящиеся подпоследовательности; предположим, что $\lim c_i=c'<c$, и придем к противоречию. Пусть $\varepsilon=(c-c')/2>0$. Тогда точка $q_i=\gamma_i(c_i+\varepsilon)$ расположена за точкой минимума точки p_i на γ_i, и, значит, найдется более короткая кривая τ_i, соединяющая p_i с q_i. Добавив к τ_i короткие сегменты от p до p_i и от q_i до $q=\gamma(c'+\varepsilon)$, получим кривую σ_i от p до q, такую, что $\lim\ |\sigma_i|=$ $=\rho(p,\ q)$. По теореме 8(a), σ_i сходятся к γ, и потому τ_i тоже сходятся к γ.

Пусть $E=\pi'\times\exp$: $T(M)\to M\times M$. Отображение E невырождено на компактном множестве $\{ut\,|\,0\leqslant u\leqslant c'+\varepsilon\}$, поэтому, в силу задачи 1,12, существует окрестность U, на которой E является диффеоморфизмом. Пусть $V=E(U)$, тогда V — окрестность точки $E(ut)=(p,\gamma(u))$. При достаточно большом i и $(p_i,\gamma_i(u))$, и $(p_i,\tau_i(u))$ принадлежат V. Однако длина $E^{-1}(p_i,\ q_i)$ должна равняться $c_i+\varepsilon$, поскольку $q_i=\exp_{p_i}(c_i+\varepsilon)t_i$, а с другой стороны, она не может превосходить интеграла радиальных длин τ_i, который меньше, чем $c_i+\varepsilon$. Ч. Т. Д.

Следствие 1. Расстояние от фиксированной точки p до ее точки минимума в направлении $t\in M_p$ является непрерывной функцией от t там, где она определена.

(Это сразу же вытекает из непрерывности функции расстояния.)

Предположим теперь, что M связно.

Следствие 2. Риманово многообразие M компактно в том и только в том случае, если для некоторой точки p в любом направлении найдется ее точка минимума.

Доказательство. Если M компактно, то M полно и ограничено. Таким образом, всякий геодезический луч неограниченно продолжаем, однако его сегмент не может минимизировать длину дуги, если его длина больше максимума расстояния на M.

Обратно, если p — такая точка, что каждый геодезический луч, выходящий из p, содержит точку минимума, то функция g: $S \to R$, где S — единичная сфера в M_p, $g(t) = \rho(p, \exp c_t t)$, непрерывна в силу следствия 1. Тогда множество

$$B = \{t \in M_p \mid \|t\| \leqslant g(t/\|t\|) \text{ или } t=0\}$$

замкнуто и ограничено в M_p и, следовательно, компактно. Но тогда компактно и множество $M = \exp B$ [см. задачу 22(б)].

Следствие 3. Если каждый геодезический луч, выходящий из точки p, содержит точку, сопряженную с p, то M компактно.

Следствие 4. Если некоторое накрывающее пространство полного многообразия M не компактно, то из каждого $p \in M$ выходит геодезический луч, на котором нет точек, сопряженных с p.

Доказательство. Можно считать, что данное накрытие является римановым. Тогда проекция сохраняет геодезические, а значит, и сопряженные точки. По следствию 3, некоторая геодезическая, выходящая из точки, расположенной над p, не содержит сопряженных точек, поэтому они отсутствуют и на проекции этой геодезической.

Следствие 5. Если M полно, то расстояние до геометрического места минимумов является непрерывной функцией на M.

Доказательство. Пусть $f(p)$ — расстояние от p до геометрического места минимумов; положим

$$g(p) = \begin{cases} e^{-f(p)}, & \text{если } p \text{ не имеет точки минимума,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Достаточно проверить непрерывность g. Пусть $h(p, t)$ — расстояние от точки p до ее точки минимума на геодезической, выходящей в направлении $t \in M_p$. Тогда h непрерывно на $Q(M)$, и функция

$$\bar{g}(p, t) = \begin{cases} e^{-h(p, t)}, & \text{если } h(p, t) \text{ определено,} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

непрерывна на всем единичном касательном расслоении, так как если $(p, t) \in T(M)$ — предельная точка $Q(M)$, то $\lim\limits_{x \to (p, t)} h(x) = +\infty$, как следует из первой части доказательства теоремы 9.

Поскольку ясно, что g является послойным максимумом функции $\bar{g}$, то наше утверждение вытекает из леммы 6.

Замечание. Следствие 1 показывает, что дополнение к геометрическому месту минимумов некоторой точки является топологической клеткой, когда M полно; в действительности этот гомеоморфизм осуществляется экспоненциальным отображением. Следовательно, с топологической точки зрения вместо многообразия часто можно рассматривать его геометрическое место минимумов.

Задача 23. Распространить результаты этого параграфа, за исключением теоремы 9, на случай, когда вместо p рассматривается замкнутое или компактное (смотря по обстоятельствам) подмногообразие N. В частности, показать на примерах, что обобщения следствий 2, 3 и 4 требуют компактности N.

11.7. Замкнутые геодезические

Замкнутая геодезическая — это геодезический сегмент, начальная и конечная точки которого совпадают; замкнутая геодезическая называется *гладкой*, если при этом совпадают начальная и конечная касательные.

Интуитивно ясно, что на полном многообразии в гомотопическом классе петель с началом в точке p содержится петля минимальной длины, которая должна быть геодезической. В самом деле, в односвязном накрытии такой класс представлен классом всех кривых, соединяющих точки p_0 и p_1, расположенные в слое над p. Минимальный сегмент от p_0 до p_1 проектируется в замкнутую геодезическую из рассматриваемого класса и, очевидно, имеет минимальную длину в нем. Чтобы не исключать из рассмотрения единичный элемент фундаментальной группы, постоянную кривую также нужно считать замкнутой геодезической.

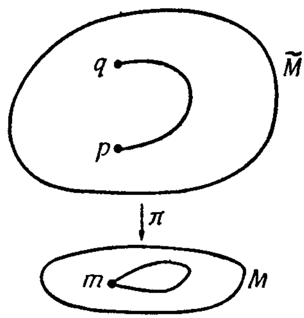


Рис. 42.

Чтобы получить гладкие замкнутые геодезические, рассмотрим свободные гомотопические классы петель. Эти классы находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженных элементов фундаментальной группы, поскольку, грубо говоря, изоморфизм между фундаментальными группами, отнесенными к разным точкам, неразличимыми при свободной гомотопии, определяется лишь с точностью до внутреннего автоморфизма, или сопряжения. Свободный гомотопический класс петель не всегда содержит элемент минимальной длины, даже если M полно, поскольку при стягивании петля может уйти в «бесконечность»: например на поверхности, полученной вращением кривой $xz=1$ вокруг оси z.

Однако если M компактно, то в каждом свободном гомотопическом классе содержится минимальный элемент. В самом деле, такой класс A представляется подъемами своих элементов в односвязное накрытие $\tilde{M}$.

Пусть

$$b=\inf\{\rho(p,\ q) \mid, \text{ если } \sigma \text{ — кривая от } p \text{ до } q, \text{ то } \pi\circ\sigma\in A\},$$

где π: $\tilde{M}\to M$ — накрывающее отображение. Возьмем такую последовательность $\{(p_i,\ q_i)\}$, что $\lim\rho(p_i,\ q_i)=b$, а также последовательность минимальных сегментов γ_i, соединяющих p_i с q_i. В силу компактности M, из последовательности замкнутых геодезических $\pi\circ\gamma_i$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Предел будет минимальной замкнутой геодезической в классе A и притом гладкой, ибо она является минимальным элементом гомотопического класса, отнесенного к любой из своих точек.

Теорема 10. Если M — компактное риманово многообразие, то всякий свободный гомотопический класс петель содержит элемент минимальной длины, являющийся гладкой замкнутой геодезической.

Задача 24. Пусть σ — петля из свободного гомотопического класса A. Тогда σ можно равномерно приблизить ломаной геодезической петлей $\gamma_0\in A$. Пусть M компактно. Тогда можно считать, что изломы γ_0 ближе друг к другу, чем расстояние от произвольной точки до ее геометрического места минимумов. По индукции строится последовательность ломаных геодезических петель γ_i, сегментами которых служат минимальные сегменты между серединами сегментов γ_{i-1}. Показать, что $\gamma_i\in A$ и что некоторая ее подпоследовательность сходится к гладкой замкнутой геодезической из A.

Теорема 11 (теорема Синга [69]). Пусть M — компактное, ориентируемое четномерное многообразие, все плоские сечения которого имеют положительную кривизну. Тогда многообразие M односвязно.

Доказательство. Основная идея — используя вторую вариацию, показать, что нетривиальная гладкая замкнутая геодезическая не может быть минимальной, а затем, по теореме 10, из этого результата будет следовать, что все петли образуют один тривиальный гомотопический класс, т. е. M односвязно.

Пусть γ — гладкая замкнутая геодезическая. Тогда однократный параллельный перенос вдоль γ является ортогональным преобразованием T нечетномерного нормального пространства к γ. Так как M ориентируемо, то определитель T равен 1, и потому по крайней мере одно

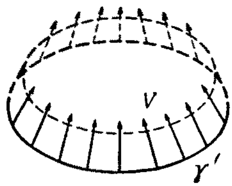


Рис. 43.

характеристическое значение равно 1. (Абсолютные величины характеристических значений T равны 1, причем невещественные значения встречаются сопряженными парами.) Характеристические векторы, принадлежащие значению 1, являются неподвижными точками преобразования T, так что вдоль γ имеется гладкое параллельное поле V. Обозначая через N произвольное трансверсальное многообразие и через I форму $I(N, N)$, найдем, что в выражении для $I(V)$ концевые члены пропадают, а так как $V'=0$, то

$$I(V) = -\int_0^b K(\gamma_*, V)\langle V, V\rangle du.$$

Так как кривизна положительна, то это выражение отрицательно, и, значит, вблизи имеются более короткие кривые, поэтому геодезическая γ не может быть минимальной. Ч. Т. Д.

Задача 25. Пусть M компактно, четномерно, неориентируемо и имеет положительную кривизну. Показать, что фундаментальная группа M есть Z_2.

Задача 26. Пусть M — компактное нечетномерное многообразие, кривизна плоских сечений которого положительна. Показать, что M ориентируемо.

Задача 27. Пусть M — компактное кэлерово многообразие с положительной голоморфной кривизной. Показать, что M односвязно. [*Указание*: если γ — геодезическая, J — оператор комплексной структуры, то $J(\gamma_*)$ параллельно вдоль γ и γ_*, $J(\gamma_*)$ порождают голоморфное сечение.]

Свойства геометрического места минимумов позволяют иногда доказать существование замкнутых геодезических по методу Клингенберга [28].

Теорема 12. Пусть M — полное многообразие, p — точка в M с непустым геометрическим местом минимумов, и m — ближайшая к p точка минимума. Если точка m не сопряжена с p, то через m проходит единственная замкнутая геодезическая с концами в p, оба сегмента которой, соединяющие m с p, минимальны.

Доказательство. В силу теоремы 8, если m не является сопряженной точкой, то имеется по крайней мере два минимальных сегмента от p до m. Покажем, что их в точности два и что они гладко смыкаются в точке m. Пусть γ_1 и γ_2 — любые два минимальных сегмента. Если они не смыкаются гладко в m, то существует геодезическая σ, выходящая из m и образующая

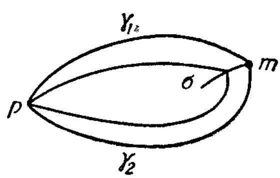


Рис. 44.

острые углы с γ_1 и γ_2. Тогда вблизи γ_1 и γ_2 найдутся более короткие минимальные сегменты, соединяющие p с точками геодезической σ, расположенными вблизи m. Так как γ_1 и γ_2 различны, то и эти сегменты различны, когда концы их на σ достаточно близки к m. В силу теоремы 8, эти точки кривой σ являются точками минимума точки p в противоречие с тем, что m — ближайшая к p точка минимума.

Следствие 1. Пусть M компактно, и (p, m) — пара точек, реализующая минимум расстояния от произвольной точки до ее геометрического места минимумов. Тогда либо p и m сопряжены, либо через p и m проходит единственная гладкая замкнутая геодезическая, оба сегмента которой минимальны.

Следствие 2. Пусть M компактно, четномерно, ориентируемо и имеет положительную кривизну, а p и m — такие же, как в следствии 1. Тогда p и m сопряжены.

Доказательство. Предположим, что p и m не сопряжены, так что, по следствию 1, через p и m проходит единственная гладкая замкнутая минимальная геодезическая петля γ, $\gamma(0)=p$. Используя прием, предложенный Сингом, получаем однопараметрическое семейство

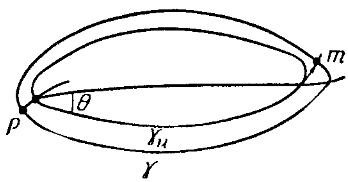


Рис. 45.

гладких петель γ_u, таких, что $\gamma_0=\gamma$ и $|\gamma_u|<|\gamma|$ при $u\neq 0$. Тогда однозначно определенные минимальные сегменты от $\gamma_u(0)$ до других точек кривой γ_u образуют все возможные углы с γ_u в точке $\gamma_u(0)$. Совокупность минимальных сегментов, образующих фиксированный угол θ, содержит последовательность, сходящуюся по параметру u к минимальному сегменту, соединяющему p с некоторой точкой m' на γ. В силу единственности m как точки минимума точки p вдоль γ, m' необходимо совпадает с m. Это противоречит тому, что p соединяет с m не более двух минимальных сегментов.

Замечание. Это следствие показывает, что при указанных условиях найдутся точки, геометрические места сопряженных точек и точек минимума которых пересекаются. Этот факт можно использовать для оценки снизу диаметра многообразия с помощью оценки его кривизны сверху. При более сильном предположении, — когда M есть односвязное риманово симметрическое пространство, — геометрические места минимумов и сопряженных точек совпадают [36, 66].

11.8. Выпуклые окрестности [77; 80, стр. 94; 94]

Множество B в римановом многообразии M *выпукло*, если любые две его точки соединяет единственный минимальный сегмент, содержащийся в B. Открытый шар $B(m, r_0)$ радиуса r_0 с центром m является *локально выпуклым*, если каждая сфера $S(m, r)$ радиуса $r<r_0$ с центром m удовлетворяет следующему *условию выпуклости*: если геодезическая γ касается $S(m, r)$ в некоторой точке $n=\gamma(0)$, то $\rho(m, \gamma(u))\geqslant r$ при достаточно малых u.

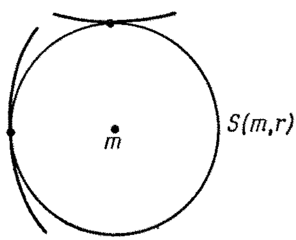


Рис. 46.

Если $B(m, r_0)$ локально выпукло, то отображение $\exp_m$ должно быть взаимно однозначным на $B(0, r_0)\subset M_m$, поскольку в противном случае в $B(m, r_0)$ нашлись бы точки минимума точки m. А тогда если бы γ была перпендикулярной к τ в точке $\tau(r)$, расположенной за точкой минимума на геодезической τ, выходящей из m, то $\rho(m, \gamma(u))$ было бы меньше чем r при малых u, так как $\rho(m, \tau(r))<r$.

Понятия выпуклости и локальной выпуклости связаны не столь просто, как в евклидовых пространствах. Например, в нормальных координатах на плоском цилиндре шар диаметра, превосходящего половину длины окружности цилиндра, будет локально выпуклым, но не выпуклым, поскольку он содержит противоположные точки, которые могут быть соединены двумя минимальными сегментами. С другой стороны, если $S(m, r)$ не удовлетворяет условию выпуклости, то $B(m, r)$ не может быть выпуклым. Для доказательства возьмем геодезическую γ, касающуюся $S(m, r)$ в точке $n=\gamma(0)$ и содержащую вблизи n точку $p=\gamma(u)$ внутри $S(m, r)$. Тогда якобиеву полю вдоль γ, направленному наружу в точке p и обращающемуся в нуль в точке n, соответствует прямоугольник с геодезическими продольными, из которых лишь γ касается $S(m, r)$. Таким образом, нашлись бы сегменты, начинающиеся вблизи p, выходящие из $S(m, r)$ и возвращающиеся в $S(m, r)$ в точке n. Все же может случиться, что $B(m, r')$ выпукло при некотором $r'>r$.

Пример плоского цилиндра показывает, что следующее утверждение является наилучшим результатом такого рода.

Предложение 1. Пусть $B(m, 2r_0)$ — локально выпуклый шар. Тогда каждый минимальный сегмент, соединяющий пару точек в $B(m, r_0)$, целиком содержится в $B(m, r_0)$.

Доказательство. Минимальный сегмент γ, соединяющий пару точек в $B(m, r_0)$, не выходит из $B(m, 2r_0)$. Если бы $\rho(m, \gamma)$ не принимало максимального значения ни в одном из концов γ, то наименьшее значение параметра кривой γ, при котором $\rho(m, \gamma)$ максимально, дало бы точку касания γ со сферой $S(m, r)$, $r<2r_0$, вблизи которой γ попадает внутрь этой сферы в противоречие с локальной выпуклостью шара $B(m, 2r_0)$. Итак, максимум $\rho(m, \gamma)$ достигается в конце кривой γ, так что весь этот сегмент находится внутри $B(m, r_0)$.

Если τ — геодезическая, соединяющая m с $n=\tau(r)$, то подмногообразие $N=\exp_n(\tau_*(r)^{\perp}) \cap U$, где U—окрестность точки n, содержит все малые геодезические сегменты, касающиеся $S(m, r)$ в точке n. Таким образом, индексная форма $I=I(m, N)$ в значительной степени определяет, удовлетворяет ли $S(m, r)$ условию выпуклости в точке n. Если индекс I отличен от нуля, то на N найдутся точки, менее, чем n, удаленные от m. Значит если

$S(m, r)$ удовлетворяет условию выпуклости, то форма I положительно полуопределена; если же форма I положительно определена, то для выпуклости $S(m, r)$ в n достаточно потребовать, чтобы точка n находилась не далее точки минимума точки m на геодезической τ.

В свою очередь положительная (полу)определенность I определяется поведением m-якобиевых полей вдоль τ, ибо если V является m-якобиевым полем, то в выражении для $I(V)$ концевые члены обращаются в нуль, поскольку вторая фундаментальная форма многообразия N в точке n равна нулю. Поэтому $I(V) = \langle V'(r), V(r)\rangle$, в силу следствия 3 леммы 2. Итак, имеет место

Предложение 2. Пусть $\mathscr{K}$ — пространство m-якобиевых полей вдоль геодезической τ, выходящей из точки m и параметризованной длиной дуги. Пусть b_r — квадратичная форма на $\mathscr{K}$ вида $b_r(V) = \langle V'(r), V(r)\rangle$.

(а) Если $B(m, r_0)$ — локально выпуклый шар, то форма b_r положительно полуопределена при $r \in (0, r_0)$.

(б) Если $B(m, r_0)$ — шар в нормальных координатах и форма b_r положительно определена при всех таких τ и всех $r \in (0, r_0)$, то шар $B(m, r_0)$ является локально выпуклым.

Если все такие b_r положительно определены, то $B(m, r_0)$ называется *строго локально выпуклым*, сокращенно СЛВ.

Задача 28. Пусть $B(m, r_0)$ — нормальный координатный шар, τ — геодезическая, выходящая из m, и $z = \tau_*(r)$, где $r \in (0, r_0)$. Тогда значения m-якобиевых полей $\{V(r) \mid V \in \mathscr{K}\}$ образуют касательное пространство к $S(m, r)$ в $\tau(r)$. Показать, что

(а) $\mathscr{K}$ — пространство $S(m, r)$-якобиевых полей вдоль τ, так что m является фокальной точкой многообразия $S(m, r)$ порядка $d - 1$.

(б) Вторая фундаментальная форма H_z многообразия $S(m, r)$, по существу, совпадает с b_r.

Задача 29. Показать из соображений непрерывности, что шар $B(m, r)$ есть СЛВ при достаточно малых r.

Если $B(m, r)$ локально выпукло, но не есть СЛВ, то $B(m, r_1)$ не есть СЛВ при $r_1 > r$. Показать на примерах, что $B(m, r)$ может быть нормальным при всех r, СЛВ при $r \in (0, a)$, локально выпуклым при $r \in [a, b]$, но не локально выпуклым при $r > b$, где a, b подчинены лишь условию $a \leqslant b \leqslant \infty$.

Задача 30. Подмногообразие называется *минимальным*, если все его вторые фундаментальные формы имеют нулевой след, т. е. $\operatorname{tr} S_z = 0$ для каждого нормального z. Показать, что компактное минимальное подмногообразие нельзя погрузить в сильно локально выпуклый шар.

Задача 31. Пусть $B(m, r_0)$ — сильно локально выпуклый шар, N — компактное многообразие, погруженное в $B(m, r_0)$ и наделенное индуцированной метрикой. Предполагается, что $1 + 2\dim N > d = \dim M$. С помощью нижеследующей теоремы Отсуки [57, 58] показать, что имеется такое плоское сечение P, для которого $K_N(P) > K_M(P)$.

Пусть V — вещественное векторное пространство размерности n. Пусть $Q_1, \ldots, Q_k$, $k < n$, — симметрические билинейные вещественные формы на V, для которых

$$\sum_j (Q_j(u, u)\, Q_j(v, v) - Q_j(u, v)^2) \leqslant 0$$

при всех $u, v \in V$.

Тогда существует по меньшей мере один такой ненулевой вектор $u \in V$, что $Q_j(u, u) = 0$ для всех j.

Доказать эту теорему в случае $k = 1$.

Задача 32. Показать, что каждый шар в евклидовом d-пространстве является сильно локально выпуклым. Далее с помощью предыдущей задачи показать, что плоский e-мерный тор можно вложить изометрически в E^d, если только $d \geqslant 2e$.

Для более точных оценок размеров СЛВ шаров можно применять следующую теорему.

Теорема 13. Пусть H — положительная верхняя грань плоских кривизн многообразия M и $r_0 = \pi/2H^{1/2}$. Тогда каждый нормальный координатный шар радиуса $r\leqslant r_0$ является СЛВ. Если плоские кривизны неположительны, то каждый нормальный координатный шар является СЛВ.

Доказательство. Для каждого m-якобиева поля V

$$b_r(V)=I(V)=\int_0^r(\langle V', V'\rangle-K(\tau_*, V)\langle V, V\rangle)\,du\geqslant$$
$$\geqslant\int_0^r(\langle V', V'\rangle-H\langle V, V\rangle)\,du$$

[как прежде, здесь $I=I(m, N)$].

Это последнее выражение выглядит как вторая вариация векторного поля V на некотором римановом многообразии P постоянной кривизны H. Нетрудно видеть, что его можно рассматривать именно таким образом и, значит, можно применить основное неравенство при условии, что $r<\pi/H^{1/2}$, расстояния до первых сопряженных точек на P. Всякое m-якобиево поле на P имеет вид $W=\sin(H^{1/2}u)E$, где E — параллельное поле. При $E(r)=$ $=V(r)$ основное неравенство на многообразии P дает

$$b_r(V)\geqslant\langle W'(r), W(r)\rangle=$$
$$=H^{1/2}\sin(H^{1/2}r)\cos(H^{1/2}r)\langle E, E\rangle.$$

Таким образом, b_r положительно определено при $r<r_0$. Ч. Т. Д.

Задача 33. Пусть C — компактное подмножество в M. Показать, что существует такое $r>0$, что шар $B(m, r)$ является выпуклым и СЛВ, если $m\in C$.

Задача 34. Пусть M полно, односвязно и имеет неположительную кривизну. Тогда каждый шар в M является выпуклым.

Задача 35. Пусть M имеет неположительную кривизну; предположим, что выпуклый шар B содержит геодезический треугольник с длинами сторон a, b, c и противоположными углами α, β, γ. Показать, что

$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma\leqslant c^2$$

$$\alpha+\beta+\gamma\leqslant\pi \quad [80,\ \text{стр. } 88].$$

Топоногов обобщил этот результат на случай произвольной кривизны (см. [9] и [75]).

Замечание. Приведенные выше рассуждения, включающие рассмотрения индексных форм многообразий M и P, составляют часть доказательства теоремы сравнения Рауха. Теорию индексной формы можно обобщить на интегралы, не связанные с P. Для этого *преобразование Риччи* R_X: $V\to R_{XV}X$ заменяется произвольным гладким полем S симметрических линейных преобразований нормальных пространств к τ. Такая общность достаточна для наших целей, однако Морс рассматривал даже более общие формы [49].

Если имеются концевые многообразия N и P, то, сохраняя концевые члены, мы получаем квадратичную форму I_S вида

$$I_S(V)=\langle S_{\tau_*(0)}V(0),\ V(0)\rangle-\langle S_{\tau_*(b)}V(b),\ V(b)\rangle+ \\ +\int_0^b(\langle V',\ V'\rangle-\langle SV,\ V\rangle)\,du.$$

Далее, N-S-полем V называется поле вдоль τ, удовлетворяющее концевым условиям на N и уравнению $V''+SV=0$, а S-фокальной точкой многообразия N называется точка на τ, в которой ненулевое N-S-поле обращается в нуль. Имеет место основное неравенство, принимающее следующую форму.

Предположим, что на τ нет S-фокальных точек многообразия N; для $V\in\mathscr{L}$ найдется единственное N-S-поле Y, такое, что $Y(b)=V(b)$. Тогда $I_S(V)\geqslant I_S(Y)$, причем равенство достигается, если только $V=Y$.

Наиболее важным является случай, когда S получается из преобразования Риччи некоторого риманова многообразия. Приведенное выше доказательство, где S тождественно, является типичным (см. задачу 18).

11.9. Теорема сравнения Рауха [9, 64, 65]

Мы уже рассматривали частный случай (теорема 9.2) теоремы сравнения Рауха, кроме того, некоторые идеи использовались в доказательстве теоремы 13.- В случае $d=2$ аналитическое содержание теоремы Рауха, по существу, совпадает с теоремой сравнения Штурма для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теорема 14. Пусть M и N — римановы многообразия, σ и τ — геодезические сегменты, параметризованные длиной дуги на $[0, b]$ и начинающиеся в точках $m \in N$ и $n \in N$ соответственно. Предположим, что на τ нет точек,

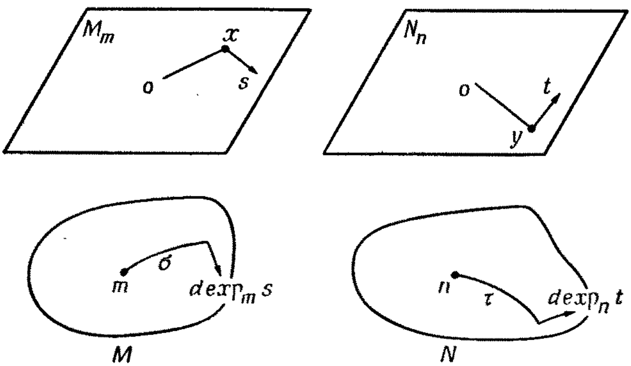


Рис. 47.

сопряженных с n. Пусть $K_M(P) \leqslant K_N(Q)$ для всех плоских сечений P и Q, касательных к σ и τ в точках $\sigma(r)$ и $\tau(r)$ соответственно для всех $r \in [0, b]$.

Пусть $x = b\sigma_*(0)$, $y = b\tau_*(0)$, $s \in (M_m)_x$, $t \in (N_n)_y$. Тогда если s и t имеют одинаковую длину, то

$$\|d \exp_m s\| \geqslant \|d \exp_n t\|.$$

Доказательство. Пусть V — такое m-якобиево поле, что $V(b) = d\exp_m s$; W — такое n-якобиево поле, что $W(b) = d\exp_n t$; $f = \langle V, V\rangle$ и $g = \langle W, W\rangle$. Нужно показать, что $f(b) \geqslant g(b)$. Для этого достаточно проверить, что

(а) $(f/g)(0_+)=1$,

(б) $f'/f \geqslant g'/g$ на $[0, b]$, ибо тогда f/g не убывает.

Для доказательства (а) заметим, что вдоль лучей, идущих к x и y в M_m и N_n, существуют такие постоянные векторные поля A и B, что $A(x)=s$, $B(y)=t$, $V=uX$ и $W=uY$, где $X=d\exp_m A$, $Y=d\exp_m B$. Тогда $f/g = \langle X, X\rangle/\langle Y, Y\rangle$. Но $\langle X, X\rangle(0)=\langle A, A\rangle=\langle s, s\rangle=\langle t, t\rangle = \langle Y, Y\rangle(0)$.

Для доказательства (б) предположим сначала, что на $\sigma((0, r])$ нет точек, сопряженных с m. В таком случае $f(r)\neq 0$, так что можно положить $X=V/f(r)^{1/2}$; аналогично определяется $Y=W/g(r)^{1/2}$. Тогда X и Y — якобиевы поля, так что

$$\begin{aligned}(f'/f)(r)&=\langle X, X\rangle'(r)=\\ &=2\int_0^r (\langle X', X'\rangle - K_M(\sigma_*, X)\langle X, X\rangle)\,du \geqslant\\ &\geqslant 2\int_0^r (\langle X', X'\rangle - K_N(\tau_*, X_N)\langle X, X\rangle)\,du,\end{aligned}$$

где X_N — произвольное ненулевое векторное поле, нормальное к τ. Выбирая параллельные базисы E_i и F_i вдоль σ и τ так, чтобы $X(r)=E_1(r)$, $Y(r)=F_1(r)$, и используя коэффициенты разложения X относительно E_i как коэффициенты X_N относительно F_i, получаем некоторое поле X_N, совпадающее с Y в точке r, для которого $\langle X', X'\rangle=\langle X'_N, X'_N\rangle$ и $\langle X, X\rangle=\langle X_N, X_N\rangle$. В силу основного неравенства для индексной формы вдоль τ, имеем

$$\begin{aligned}(f'/f)(r)&\geqslant 2\int_0^r (\langle Y', Y'\rangle - K_N(\tau_*, Y)\langle Y, Y\rangle)\,du=\\ &=\langle Y, Y\rangle'(r)=(g'/g)(r).\end{aligned}$$

Итак, $f(r)\geqslant g(r)$, пока на $\sigma((0, r])$ нет точки, сопряженной с m. Однако последнее условие нужно было лишь для того, чтобы можно было разделить на $f(r)^{1/2}$, так что, в силу непрерывности, $f(r) \geqslant g(r)$ для любого $r \in (0, b]$.

Следствие 1. В указанных предположениях первая точка, сопряженная с n, должна встретиться раньше, чем первая точка, сопряженная с m.

Следствие 2 (Бонне). Пусть кривизны всех плоских сечений многообразия M, касательных к некоторой геодезической γ, начинающейся в m, удовлетворяют неравенствам $0 < L \leqslant K(P) \leqslant H$, где L и H — константы. Тогда если s — расстояние вдоль γ до первой точки, сопряженной с m на γ, то $\pi/H^{1/2} \leqslant s \leqslant \pi/L^{1/2}$.

Доказательство. Этот результат вытекает непосредственно из следствия 1 и сравнения со сферами постоянной кривизны L и H.

Замечание. Предположения теоремы Синга (теорема 11) можно ослабить, потребовав вместо компактности полноты и строго положительной кривизны.

Задача 36. Обобщить теорему Рауха, заменив точки m и n вполне геодезическими подмногообразиями равной размерности.

Теорема сравнения Рауха и результаты Клингенберга о замкнутых геодезических применяются при исследовании «ущемленных» многообразий, а также при доказательстве теоремы Топоногова о геодезических треугольниках [6—9, 28—30, 64—66, 74—76].

11.10. Кривизна и объем [10, 11, 18]

Преобразования Риччи R_x: $y \to R_{xy}x$ продолжаются до дифференцирований алгебры Грассмана; так как R_x симметрично относительно $\langle\ ,\ \rangle$, то эти продолжения симметричны относительно естественного продолжения $\langle\ ,\ \rangle$ (задача 4.14). Пусть $y_1, \ldots, y_p, x$ — ортонормальные векторы, и P есть p-плоскость, натянутая на $y_1, \ldots, y_p$. Тогда *p-средней кривизной* вектора x и плоскости P называется скалярное произведение $K(x, P) = \langle R_x(y_1, \cdots \cdots y_p), y_1, \cdots, y_p\rangle$. В частности, существует единственная $(d-1)$-плоскость, ортогональная к x; ее $(d-1)$-средняя кривизна $K(x, x^{\perp})$ называется просто *средней кривизной* (или *кривизной Риччи*) вектора x.

Задача 37. Показать, что $K(x, P)=\Sigma K(x, y_i)$, и потому такие суммы зависят только от плоскости, натянутой на y_i. Далее, $K(x, x^{\perp})=\mathrm{tr}\, R_x$.

Пусть γ — геодезическая, начинающаяся в точке m, $\gamma=\exp_m \circ \rho$, где ρ — луч в M_m, параметризованный длиной дуги. Пусть $J_p(t)$ — максимальный из коэффициентов, на которые $\exp_m$ умножает длины разложимых p-векторов, нормальных к ρ в точке $\rho(t)$, т. е. $J_p(t)$ равен максимуму отношения

$$\|d\exp_m s_1 \cdots d\exp_m s_p\| / \|s_1 \cdots s_p\|,$$

где s_i — линейно независимые касательные к M_m, нормальные к ρ в точке $\rho(t)$. Аналогично, пусть $j_p(t)$ — минимум такого отношения. В частности, $J_{d-1}(t)=j_{d-1}(t)$ — якобиан отображения $\exp_m$ в точке $\rho(t)$. Заметим, что $J_p(0)=j_p(0)=1$.

Теорема 15. Предположим, что m не имеет сопряженных точек на $\gamma((0, c])$, и пусть через (p) обозначено следующее условие: $K(\gamma_*(t), P)\geqslant pa^2$ для каждого t и каждой p-плоскости P, нормальной к γ в точке $\gamma(t)$.

(1) Если выполнено условие (p), то $J_p(t)\leqslant \leqslant(\sin at/at)^p$ при $t\in(0, c]$.

(2) Предположим, что $K(\gamma_*(t), y)\leqslant b^2$ для каждого t и каждого вектора y, нормального к γ в точке $\gamma(t)$. Тогда $j_p(t)\geqslant(\sin bt/bt)^p$ при $t\in(0, c]$.

В случае $p=d-1$ можно утверждать большее, а именно, что в (1) функция $J_{d-1}(t)\,(at/\sin at)^{d-1}$ не возрастает относительно t и что в (2) функция $J_{d-1}(t)\,(bt/\sin bt)^{d-1}$ не убывает относительно t.

Мы не предполагаем, что a, b вещественны, но используем комплексное продолжение $\sin$ в случае, когда a^2 или b^2 отрицательно; если a или $b=0$, то $at/\sin at$ или $bt/\sin bt$ заменяется на 1.

Доказательство. Пусть $s_1, \ldots, s_p$ — независимые векторы, нормальные к ρ в точке $\rho(t)$. Эти s_i

порождают линейные однородные поля вдоль ρ, которые при $d\exp_m$ проектируются в p независимых m-якобиевых полей. Так возникает гладкое поле P p-плоскостей, порожденных этими m-якобиевыми полями вдоль кривой γ. Пусть f: $[0, t]\to R$ — функция, которая задает отношения, соответствующие P; тогда $f(0)=1$ и $f(t)$ является типичным отношением, для которого $J_p(t)$ служит максимумом, а $j_p(t)$ — минимумом. В частности, если $p=d-1$, то P единственно и $f=J_{d-1}=j_{d-1}$.

Если m-якобиевы поля $Y_1, \ldots, Y_p$ порождают поле P при каком-то одном значении параметра из $(0, t]$, то они порождают его и при всех значениях. Пусть $Y_i = d\exp_m uA_i$, где A_i — постоянные поля вдоль ρ в M_m; тогда $f=\|Y_1 \cdots Y_p\|/u^pA$, где $A=\|A_1 \cdots A_p\|$ — константа. Предположим теперь, что $Y_1(r), \ldots, Y_p(r)$ ортонормальны; для каждого $r\in(0, t]$ найдется такое множество полей Y_i. Тогда

$$\begin{aligned}\langle Y_1 \cdots Y_p, Y_1 \cdots Y_p\rangle'(r) &= \\ &= 2\sum\langle Y_1 \cdots Y_i' \cdots Y_p, Y_1 \cdots Y_p\rangle(r) = \\ &= 2\sum\langle Y_i', Y_i\rangle(r);\end{aligned}$$

это вытекает из того факта, что базис p-векторов, порожденный ортонормальным векторным базисом, сам является ортонормальным. [Разложить $Y_i'(r)$ в ортонормальном базисе, включающем $Y_1(r), \ldots, Y_p(r)$, и продолжить на $(0, t]$.] Воспользовавшись этим, продифференцируем f^2 и получим

$$\text{(a)} \qquad f'(r)/f(r) = \sum\langle Y_i', Y_i\rangle(r) - p/r.$$

Если W_i — векторное поле вдоль γ, причем $W_i(0)=0$ и $W_i(r)=Y_i(r)$, то, в силу основного неравенства,

$$\langle Y_i', Y_i\rangle(r) = I_r(Y_i) \leqslant I_r(W_i),$$

где $I_r=I(m, N_r)$ с промежуточным подмногообразием N_r, вторая фундаментальная форма которого равна нулю. В частности, если E_i — параллельное поле, порожденное $Y_i(r)$, и g — ломаная C^∞-функция, такая, что $g(0)=0$,

$g(r)=1$, то, полагая $W_i=gE_i$, получим

$$\langle Y_i', Y_i\rangle(r) \leqslant \int_0^r \left((g')^2 - K(\gamma_*, E_i)\,g^2\right)du.$$

Суммируя эти неравенства и используя предположение

$$(p)\colon\ \sum K(\gamma_*, E_i) \geqslant pa^2,$$

выводим из (а), что

$$f'(r)/f(r) \leqslant p\left(\int_0^r \left((g')^2 - a^2g^2\right)du - 1/r\right).$$

Интеграл в этом неравенстве совпадает с второй вариацией векторного поля gE, где E — параллельное единичное поле на пространстве постоянной кривизны a^2. Таким образом, в силу основного неравенства, g лучше всего выбрать так, чтобы gE оказалось якобиевым полем. Поэтому $g=\sin au/\sin ar$ и интеграл принимает значение

$$\langle g'E,\ gE\rangle(r) = a\cos ar/\sin ar.$$

(Если $a=0$, то полагаем $g=u/r$.) Проинтегрируем полученное неравенство:

$$\text{(б)}\qquad f'(r)/f(r) \leqslant p\,(a\cos ar/\sin ar - 1/r)$$

от q до t, $q \in (0,\ t)$, возьмем экспоненту и получим

$$f(t)\,(at/\sin at)^p \leqslant f(q)\,(aq/\sin aq)^p.$$

В случае $p=d-1$ это влечет желаемую монотонность функции $J_{d-1}(t)\,(at/\sin at)^{d-1}$. В остальных случаях переходим к пределу при $q \to 0_+$; поскольку $f(0)=1$, то

$$f(t) \leqslant (\sin at/at)^p.$$

Это верно для всех таких $f(t)$ и, значит, для их максимума $J_p(t)$. Тем самым завершается доказательство утверждения (1).

Для доказательства (2) вернемся к неравенству (а) и воспользуемся предположением, что $K(\gamma_*, Y_i) \leqslant b^2$:

$$\langle Y_i', Y_i\rangle(r) = \int_0^r (\langle Y_i', Y_i'\rangle - K(\gamma_*, Y_i)\langle Y_i, Y_i\rangle)\,du \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^r (\langle Y_i', Y_i'\rangle - b^2\langle Y_i, Y_i\rangle)\,du \geqslant$$

$$\geqslant \langle h'E_i, hE_i\rangle(r),$$

где hE_i — «якобиево поле» для пространства постоянной кривизны b^2; последняя оценка есть следствие основного неравенства. Следовательно, $h = \sin bu/\sin br$. Повторяем теперь прежнее рассуждение, получая (б) с противоположным неравенством, в котором a заменено на b, и далее до заключения утверждения (2).

Следствие 1. Если выполнено условие (p) и $a^2 > 0$, то первая точка, сопряженная с m на γ, расположена не далее чем на расстоянии π/a вдоль γ.

[Точка $\rho(t)$ является сопряженной с m в том и только в том случае, если некоторый ненулевой p-вектор аннулируется отображением $d\exp_m$.]

Следствие 2. (Теорема Майерса [42]). Если M — полное риманово многообразие, средняя кривизна которого отделена от нуля числом $(d-1)a^2 > 0$, то многообразие M компактно, диаметр его не превосходит π/a, а фундаментальная группа конечна.

Доказательство. Первые два утверждения вытекают из следствия 1. Односвязное риманово накрытие многообразия M обладает теми же локальными свойствами и, значит, должно быть компактным. Но слои накрывающего пространства дискретны, поэтому при компактном накрытии они конечны, и, следовательно, фундаментальная группа конечна.

Следствие 3. Пусть при достаточно малых r через $v(m, r)$ обозначен объем сферы $S(m, r)$, содержащейся в нормальной координатной окрестности. Если $(d-1)a^2$

есть нижняя грань средней кривизны на M и b^2 — верхняя грань кривизны, то $v(m, r)(a/\sin ar)^{d-1}$ — невозрастающая функция от r, а $v(m, r)(b/\sin br)^{d-1}$ — неубывающая функция от r.

Доказательство. Так как теперь мы рассматриваем все геодезические, выходящие из m, то пусть $J(r, x)$, $x=\gamma_*(0)$, заменит прежнее обозначение $J_{d-1}(r)$; $J(r, x)$ является якобианом сужения $\exp_m$ на сферу S_r радиуса r в M_m. Композиция $\exp_m$ с отображением $r \to rx$ определяет отображение S_1 на $S(m, r)$ с якобианом $r^{d-1}J(r, x)$. Таким образом,

$$v(m, r) = \int\limits_{S_1} r^{d-1} J(r, x)\, dx,$$

поэтому требуемый результат следует из монотонности $J(r, x)(ar/\sin ar)^{d-1}$ относительно r и аналогично в случае b.

Замечание. Согласно Гюнтеру [18], то же заключение имеет место, если область значений кривизны есть $[a^2, b^2]$.

Следствие 4. Если M полно и $(d-1)a^2$ есть нижняя грань средней кривизны, то объем шара в нормальных координатах не превосходит объема нормального координатного шара того же диаметра в нормальных координатах на *простой пространственной форме* (т. е. на сфере, евклидовом и гиперболическом пространстве) постоянной кривизны a^2.

Если $a^2>0$, то объем M не превосходит объем сферы радиуса $1/a$, причем равенство достигается, лишь когда M изометрично такой сфере.

Доказательство. Объем шара $B(m, r)$ получается интегрированием якобиана отображения $\exp_m$ по шару радиуса r в M_m. Но указанная грань $(\sin ar/ar)^{d-1}$ является якобианом экспоненциального отображения пространственной формы. (Это вытекает из доказательства теоремы 15, так как при постоянной кривизне на протяжении всего доказательства имеет место равенство.)

Если $a^2>0$, то многообразие M компактно и объем его определяется интегрированием якобиана отображения $\exp_m$ по открытому подмножеству в M_m, расположенному внутри геометрического места минимумов. Интеграл от $(\sin ar/ar)^{d-1}$, верхней грани этого якобиана по объемлющему открытому шару радиуса π/a, мажорирует объем M и равняется в то же время объему сферы радиуса $1/a$.

Если объем M равен объему сферы радиуса $1/a$, то все неравенства в доказательстве теоремы 15(1) должны превратиться в равенства; в частности, якобиевы поля на M принимают тот же вид, что и якобиевы поля в сфере радиуса $1/a$, так что M обладает постоянной кривизной a^2 и локально изометрично сфере радиуса $1/a$. Но геометрическое место минимумов в M_m должно быть сферой S радиуса π/a, а так как $d\exp_m$ аннулирует все векторы, касательные к S, то $\exp_m(S)$ оказывается точкой. Так, вставляя экспоненциальные отображения, получаем глобальную изометрию.

Задача 38. Показать, что сила условия (p) монотонна по p, т. е. (p) влечет $(p+1)$ (с тем же a).

Задача 39. Пусть S — простая пространственная форма кривизны a^2, M — многообразие, удовлетворяющее условию (p) вдоль всех геодезических, выходящих из m, N является либо

(1) p-мерным подмногообразием в M_m, расположенным на сфере с центром O внутри нормального координатного шара, либо

(2) $(p+1)$-мерным подмногообразием нормального координатного шара в M_m.

Пусть φ: $M_m \to S_{m'}$ — линейная изометрия. Показать, что

$$\text{объем } (\exp_m(N)) \leqslant \text{объем}(\exp_{m'} \circ \varphi(N)).$$

[*Указание*: для доказательства свойства (2) требуется обобщение теоремы 15 на произвольные $(p+1)$-векторы. Воспользоваться тем, что если $x=\gamma_*(r)$, то произвольный разложимый $(p+1)$-вектор можно представить в виде $(x+y)y_2 \cdots y_{p+1}$, где все y_i нормальны к x.]

Теоремы о дифференциальных уравнениях

Мы рекомендуем читателю перевести нижеследующие утверждения (I) и (II) в координатную форму, проверив, что, по существу, те же теоремы содержатся в книге [34].

Пусть F есть C^∞-отображение $F\colon U^n \times U^m \to T(R^n)$, где U^n и U^m — открытые подмножества в R^n и R^m соответственно, $T(R^n)$ — касательное расслоение над R^n, причем $F(u, u') \in R^n_u$ для каждого $(u, u') \in U^n \times U^m$. Таким образом, F порождает векторное C^∞-поле на U^n при каждом $u' \in U^m$ или, в классической терминологии, систему n дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными, зависящую еще от параметра $u' \in U^m$.

(I) Существование и единственность

Существует единственное C^∞-отображение $\varphi : W — R^n$, где W — окрестность подмножества $\{0\} \times U^n \times U^m$ в пространстве $R \times U^n \times U^m$, такое, что для каждого $p = (t, u, u') \in W$:

(a) $d\varphi_p(D_1(p)) = F(\varphi(p), u')$, где D_1 — оператор частного дифференцирования, соответствующий R и его координате u_1 в $R \times U^n \times U^m$;

(б) $\varphi(0, u, u') = u$.

(II) Продолжение решений

Предположим, что F ограничено в евклидовой метрике на R^n. Можно считать, что эта окрестность W такова, что ее пересечения со слоями проекции $R \times U^n \times U^m \to U^n \times U^m$ имеют вид $(a, b) \times \{u\} \times \{u'\}$, причем либо $b = \infty$, либо $\lim\limits_{t \to b-} \varphi(t, u, u')$ существует и лежит вне U^n;

то же верно для другого конца. Точки a и b зависят от u и u'.

Это означает, что интегральные кривые можно продолжать в обоих направлениях, пока параметр не станет бесконечным или кривая не выйдет из U^n.

(III) Обобщение на многообразия

Перечисленные выше результаты остаются в силе, если U^n — открытое подмножество многообразия N, U^m — открытое подмножество многообразия M,

$$F\colon U^n \times U^m \to T(N).$$

(IV) Локальная группа, ассоциированная с F, $u' \in U^m$

Для всех $u' \in U^m$, t, $s \in R$, там, где это имеет смысл, выполнены условия

(а) $\varphi|_{\{t\} \times U^n \times \{u'\}}$ есть диффеоморфизм,

(б) $\varphi(s, \varphi(t, u, u'), u') = \varphi(s+t, u, u')$,

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Амброз В. (Ambrose W.), The index theorem in Riemannian geometry, *Ann. of Math.*, **73** (1961), 49—86.
2. Амброз В., Зингер И. М. (Ambrose W., Singer I. M.), A theorem on holonomy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 428—443.
3. Атья М. (Atiyah M.), Complex analytic connections in fibre bundles, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 181—207.
4. Ауслaндер Л., Маккензи Р. Е. (Auslander L., MacKenzie R. E.), Introduction to differentiable manifolds, McGraw-Hill, New York, 1963.
5. Берже М. (Berger M.), Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés Riemanniennes, *Bull. Soc. Math. France,* **83** (1955), 279—330.
6. Берже М. (Berger M.), Les variétés riemanniennes dont la courbure satisfait à certaines conditions, Proc. Internat. Congr. of Mathematicians Stockholm, 1962, 447—456.
7. Берже М. (Berger M.), Pincement riemannien et pincement holomorphe, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* [Ser. III], **14** (1960), 151—159.
8. Берже М. (Berger M.), Les variétés riemanniennes (1/4)-pincées, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* Ser. III, **14** (1960), 161—170.
9. Берже М. (Berger M.), An extension of Rauch's metric comparison theorem and some applications, *Illinois J. Math.,* **6** (1962), 700—712.
10. Бишоп Р. (Bishop R.), A relation between volume, mean curvature, and diameter, *Amer. Math. Soc. Not*, **10** (1963), 364.
11. Бишоп Р., Гольдберг С. (Bishop R., Goldberg S.), Some implications of the generalized Gauss-Bonnet theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **112** (1964), 508—535.
12. Борель А. (Borel A.), Lectures on symmetric spaces. M. I. T. lectures notes (1958).
13. Ботт Р., Милнор Дж. (Bott R., Milnor J.), On the parallelizability of the spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **64** (1958), 87—89.
14. Бохнер С., Яно К., Кривизна и числа Бетти, ИЛ, М., 1957.
15. Вейль А., Кэлеровы многообразия, ИЛ, М., 1961.

16. Гольдберг С. И. (Goldberg S. I.), Curvature and homology, Academic Press, New York, 1962.

17. Грауерт Г., О проблеме Леви и вложении вещественных аналитических многообразий, сб. *Математика,* 4:3 (1960), 29—40.

18. Гюнтер П. (Günther P.), Einige Sätze über das Volumenelement eines Riemannschen Raumes, *Publ. Math. Debrecen,* **7** (1960), 78—93.

19. Джекобсон Н., Алгебры Ли, изд-во «Мир», М., 1964.

20. Зейферт Т., Трельфалль В., Топология, ГОНТИ, Москва — Ленинград, 1938.

21. Зейферт Г., Трельфалль В., Вариационное исчисление в целом, ИЛ, М., 1947.

22. Зингер И. (Singer I.), Differential geometry, M. I. T. lecture notes (1962).

23. Картан Э. (Cartan É.), Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales, *Ann. Sci. École Norm. Sup.,* **18** (1901), 241—311.

24. Картан Э. (Cartan É.), Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien, *Ann. Soc. Polon. Math.,* **6** (1927), 1—7.

25. Картан Э. (Cartan É.), Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1946.

26. Картан Э. (Cartan É.), Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, I; II, *Bull. Soc. Math. France,* **54** (1926), 214—264; **55** (1927), 114—134.

27. Кервер М. (Kervaire M.), A manifold which does not admit any differentiable structure, *Comment. Math. Helv.,* **35** (1961), 1—14.

28. Клингенберг В. (Klingenberg W.), Contributions to Riemannian geometry in the large, *Ann. of Math.,* **69** (1959), 654—666.

29. Клингенберг В. (Klingenberg W.), Über kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.,* **137** (1959), 351—361.

30. Клингенберг В. (Klingenberg W.), Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung, *Comment. Math. Helv.,* **35** (1961), 47—54.

31. Кобаяши С. (Kobayashi S.), On connections of Cartan, *Canad. J. Math.,* 8 (1956), 145—156.

32. Кобаяши С. (Kobayashi S.), Theory of connections, *Ann. Mat. Pura Appl.,* **43** (1957), 119—194.

33. Кобаяши С., Номидзу К. (Kobayashi S., Nomizu K.), Foundations of Differential Geometry, Wiley (Interscience), New York, vol. I, 1963; готовится к печати том II.

34. Коддингтон Е., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.

35. Кон П. М. (Cohn P. M.), Lie groups, Cambridge Univ. Press, London — New York, 1957.

36. Криттенден Р. (Crittenden R.), Minimum and conjugate points in symmetric spaces, *Canad. J. Math.*, **14** (1962), 320—328.

37. Кэлер Е. (Kähler E.), Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, *Hamburger Math. Einzelschr.*, **16** (1934).

38. Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономии, ИЛ, М., 1960.

39. Майерс С. (Myers S.), Riemannian manifolds in the large, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 39—49.

40. Майерс С. (Myers S.), Connections between differential geometry and topology, I. Simply connected surfaces, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 376—391.

41. Майерс С. (Myers S.), Connections between differential geometry and topology, II. Closed surfaces, *Duke Math. J.*, **2** (1936), 95—102.

42. Майерс С. (Myers S.), Riemannian manifolds with positive mean curvature, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 401—404.

43. Манкрес Дж. (Munkres J. R.), Elementary differential topology, Ann. Math. Studies No. 54, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963.

44. Милнор Дж., О многообразиях, гомеоморфных семимерной сфере, сб. *Математика*, **1** : 3 (1957), 35—42.

45. Милнор Дж. (Milnor J.), Differential topology, Princeton Univ. lecture notes (1958).

46. Милнор Дж., Теория Морса, изд-во «Мир», М., 1965.

47. Монтгомери Д., Циппин Л. (Montgomery D., Zippin L.), Topological transformation groups, Wiley (Interscience), New York, 1955.

48. Морри С. Б. (Morrey C. B.), The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 159—201.

49. Морс М. (Morse M.), The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc., New York, 1934.

50. Номидзу К. (Nomizu K.), Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 33—65.

51. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, ИЛ, М., 1960.

52. Номидзу К., Одзеки Х. (Nomizu K., Ozeki H.), The existence of complete Riemannian metrics, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 889—891.

53. Ньюландер А., Ниренберг Л., Комплексно-аналитические координаты в квазикомплексных многообразиях, сб. *Математика*, **3** : 6 (1959), 131—144.

54. Ньюнс В. Ф., Уокер А. Г. (Newns W. F., Walker A. G.), Tangent planes to a differentiable manifold, *J. London Math. Soc.*, **31** (1956), 400—407.

55. Нэш Дж. (Nash J.), The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, **63** (1956), 20—63.

56. Одзеки Х. (Ozeki H.), Infinitesimal holonomy groups of bundle connections, *Nagoya Math. J.*, **10** (1956), 105—123.

57. Отсуки Т. (Otsuki T.), On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometric applications, *Proc. Japan Acad.*, **29** (1953), 99—100.

58. Отсуки Т. (Otsuki T.), Isometric imbedding of Riemann manifolds in a Riemann manifold, *J. Math. Soc. Japan*, **6** (1954), 221—234.

59. Питчер Е. (Pitcher E.), Inequalities of critical point theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 1—30.

60. Понтрягин Л., Непрерывные группы, ГТТИ, М., 1954.

61. Прейссман А. (Preissmann A.), Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, *Comment Math. Helv.*, **15** (1942—1943), 175—216.

62. де Рам Ж. (de Rham G.), Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, *Comment. Math. Helv.*, **26** (1952), 328—344.

63. де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.

64. Раух Х. (Rauch H.), A contribution to differential geometry in the large, *Ann. of Math.*, **54** (1951), 38—55.

65. Раух Х. (Rauch H.), Geodesics and curvature in differential geometry in the large, Yeshiva Univ. Press, New York, 1959.

66. Раух Х. (Rauch H.), The global study of geodesics in symmetric and nearly symmetric Riemannian manifolds, *Comment. Math. Helv.*, **35** (1961), 111—125.

67. Сард А. (Sard A.), The measure of the critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 883—890.

68. Синг Дж. Л. (Synge J. L.), The first and second variations of the length in Riemannian space, *Proc. London Math. Soc.*, **25** (1926), 247—264.

69. Синг Дж. Л. (Synge J. L.), On the connectivity of spaces of positive curvature, *Quart. J. Math. Oxford*, Ser. (1), **7** (1936), 316—320.

70. Симонс Дж. (Simons J.), On the transitivity of holonomy systems, *Ann. of Math.*, **76** (1962), 213—234.

71. Смейл С. (Smale S.), A survey of some recent developments in differential topology, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 131—145.

72. Стинрод Н., Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.

73. Том Р., Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий, сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, М., 1958.

74. Тсукамото И. (Tsukamoto Y.), On certain Riemannian manifolds with positive sectional curvature, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, Ser. A., **13** (1959), 140—145.

75. Тсукамото И., (Tsukamoto Y.), On a theorem of A. D. Alexandrov, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, Ser. A, **15** (1962), 83—89.

76. Тсукамото И. (Tsukamoto Y.), On Riemannian manifolds with positive curvature, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, Ser. A, **15** (1962), 90—96.

77. Уайтхед Дж. (Whitehead J. H. C.), On the covering of a complete space by the geodesics through a point, *Ann. of Math.*, **36** (1935), 679—704.

78. Уилмор Т. (Willmore T.), An introduction to differential geometry, Oxford, Univ. Press, London and New York, 1959.

79. Фландерс Г. (Flanders H.), Differential forms, Academic Press, New York, 1963.

80. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, изд-во «Мир», М., 1964.

81. Хельвиг Г. (Hellwig G.), Partielle Differentialgleichungen, Teubner, Stuttgart, 1960.

82. Херман Р. (Hermann R.), Cartan connexions and the equivalence problem for geometric structures. Univ. of California (Berkeley), N. S. F. report (1962).

83. Херман Р. (Hermann R.) É Cartan's theory of exterior differential systems. Univ. of California (Berkeley), N. S. F. report (1963).

84. Херман Р. (Hermann R.), Focal points of closed submanifolds of Riemannian spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. **A**, **66** (1963), 613—628.

85. Херман Р. (Hermann R.), Dynamical systems and the calculus of variations, Academic Press, New York (в печати).

86. Хокинг Дж. Г., Юнг Г. С. (Hocking J. G., Young G. S.), Topology, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1961.

87. Хопф Г., Ринов В. (Hopf H., Rinow W.), Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, *Comment. Math. Helv.*, **3** (1931), 209—225.

88. Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, изд-во «Мир», М., 1964.

89. Чжэнь Шэнь-шэнь (Chern S.-S.), A simple intuitive proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 747—752.

90. Чжэнь Шэнь-шэнь (Chern S.-S.), Topics in differential geometry, Inst. Advanced Study lecture notes (1951).

91. Чжэнь Шэнь-шэнь (Chern S.-S.), An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 771—782.

92. Чжэнь Шэнь-шэнь (Chern S.-S.), On curvature and characteristic classes of a Riemann manifold, *Abh. Hamburger Univ. Math. Sem.*, **20—21** (1955), 117—126.

93. Чжень Шэнь-шэнь, Комплексные многообразия, ИЛ, М., 1961.
94. Чжэнь Шэнь-шэнь (Chern S.-S.), Differentiable manifolds, Univ. of Chicago lecture notes (1959).
95. Шевалле Кл., Теория групп Ли, I, ИЛ, М., 1948.
96. Ямабе Х. (Yamabe H.), On an arc-wise connected subgroup of a Lie group, *Osaka Math. J.*, **2** (1950), 13—14.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ