

О. И. БОГОЯВЛЕНСКИЙ

МЕТОДЫ
КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
В АСТРОФИЗИКЕ
И ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1980



22.31

Б 74

УДК 530.1

БОГОЯВЛЕНСКИЙ О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

В книге описывается и последовательно применяется в ряде важных задач космологии, теоретической астрофизики и газовой динамики новый метод качественного исследования многомерных динамических систем — метод максимально невырожденной компактификации динамической системы. На основе этого метода исследованы модели различных космологических явлений, модели вспышек сверхновых звезд и аккреции вещества на черные дыры, модели пульсаций вращающихся газовых туманностей и различных вихревых движений газа и жидкости, нелинейные колебательные режимы в системах гидродинамического типа и динамика возмущений некоторых известных интегрируемых систем.

Рис. 40, табл. 7, библиография 189.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|------------|
| Предисловие | 6 |
| Г л а в а I. Методы качественного исследования многомерных динамических систем | 9 |
| § 1. Необходимые сведения из качественной теории двумерных динамических систем | 9 |
| § 2. Метод исследования вырожденных особых точек динамической системы | 24 |
| § 3. Метод максимально невырожденной компактификации динамической системы | 28 |
| § 4. Метод сепаратрисной аппроксимации траекторий динамической системы | 34 |
| Г л а в а II. Качественная теория однородных космологических моделей без движения вещества | 35 |
| § 1. Уравнения общей теории относительности | 36 |
| § 2. Классические решения уравнений общей теории относительности | 38 |
| § 3. Общие свойства однородных космологических моделей | 43 |
| § 4. Преобразование гамильтоновой системы | 56 |
| § 5. Космологические модели I и II типов | 63 |
| § 6. Космологическая модель IX типа | 67 |
| § 7. Исследование космологических моделей VIII, VII ₀ и VI ₀ типов | 90 |
| § 8. Преобразование динамической системы для однородных космологических моделей класса B | 99 |
| § 9. Некоторые общие свойства динамики однородных космологических моделей III, IV, VI и VII типов | 106 |
| § 10. Исследование некоторых специальных свойств однородных космологических моделей V, VII, III, VI и IV типов | 117 |
| Г л а в а III. Качественная теория однородных космологических моделей с движением вещества и с электромагнитным полем | 128 |
| § 1. Система уравнений Эйнштейна для однородной космологической модели IX типа с движением вещества | 128 |
| § 2. Преобразование динамической системы | 131 |
| § 3. Степенные асимптотики. Типичные состояния метрики на ранней стадии расширения пространства | 135 |

| | |
|--|------------|
| § 4. Комбинаторная модель колебательного режима | 139 |
| § 5. Некоторые общие свойства динамики однородных космологических моделей с движением вещества | 144 |
| § 6. Однородная космологическая модель IX типа с электромагнитным полем | 150 |
| Глава IV. Автомодельные сферически-симметричные решения в общей теории относительности | 157 |
| § 1. Система уравнений Эйнштейна для сферически-симметричных автомодельных решений | 157 |
| § 2. Исследование динамической системы | 160 |
| § 3. Преобразование автомодельных решений в различных координатах | 170 |
| § 4. Задача о распаде равновесия звезды в общей теории относительности | 173 |
| § 5. Автомодельные решения с расходящимися и с коллапсирующими ударными волнами | 177 |
| Глава V. Автомодельное движение самогравитирующего газа в звездах | 182 |
| § 1. Разрешение особенностей динамической системы | 182 |
| § 2. Асимптотики разлета газа от центра | 193 |
| § 3. Исследование динамической системы на компонентах границы Γ_2 и Γ_3 | 197 |
| § 4. Автомодельная аккреция самогравитирующего газа на центр | 204 |
| § 5. Новые решения в модели вспышек звезд | 207 |
| § 6. Исследование модели вспышек в оболочках звезд | 223 |
| § 7. Автомодельные решения со сходящимися ударными волнами | 231 |
| Глава VI. Автомодельное вращение идеального газа | 235 |
| § 1. Определение автомодельного вращения идеального газа | 235 |
| § 2. Алгебраические интегралы автомодельного вращения идеального газа | 237 |
| § 3. Точные автомодельные решения степенного вида | 242 |
| § 4. Исследование динамической системы | 244 |
| § 5. Автомодельный разлет вращающегося газа | 248 |
| § 6. Некоторые автомодельные решения при $\gamma = 2$ | 254 |
| Глава VII. Динамика газового эллипсоида | 260 |
| § 1. Уравнения движения негравитирующего газового эллипсоида | 261 |
| § 2. Колебательный режим расширения вращающегося газового облака в вакуум | 268 |
| § 3. Исследование одной задачи в теории мелкой воды | 274 |
| § 4. Уравнения движения гравитирующего газового эллипсоида | 276 |
| § 5. Преобразование гамильтоновой системы | 279 |
| § 6. Колебательный режим движения с отрицательной энергией | 282 |
| § 7. О невозможности коллапса гравитирующего газового эллипсоида при наличии вращения газа | 287 |

| | |
|---|------------|
| § 8. Колебательный режим движения с положительной энергией | 290 |
| § 9. Заключительные замечания | 296 |
| Г л а в а VIII. Динамика возмущений периодической цепочки Тода | 300 |
| § 1. Гамильтоновы возмущения цепочки Тода | 300 |
| § 2. Сепаратрисная аппроксимация колебательного режима | 301 |
| § 3. Гамильтоновы системы, связанные с простыми алгебрами Ли | 305 |
| § 4. Нелинейные колебательные режимы в системах гидродинамического типа | 309 |
| Литература | 314 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Однородные космологические модели, автомодельные движения самогравитирующего газа и движения газа с однородной деформацией имеют важное применение в теории эволюции Вселенной, в теории взрывов звезд, теории образования галактик, пульсаций переменных звезд и др. Уравнения общей теории относительности и ньютоновской газовой динамики для перечисленных трех классов решений сводятся к системам конечного (но достаточно большого) числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Возникающие таким образом многомерные динамические системы в последние два десятилетия активно изучаются с помощью традиционных аналитических, а также численных методов. На основе этих методов были установлены важные режимы динамики некоторых решений — в том числе колебательный режим поведения метрики пространства-времени вблизи космологической сингулярности, автомодельное движение самогравитирующего газа с ударной волной и расширяющейся полостью внутри газа, моделирующее вспышку звезды, коллапс пылевого самогравитирующего эллипсоида в диск и др. Однако изучаемые многомерные динамические системы настолько сложны, что полное исследование всех режимов динамики решений с помощью известных традиционных аналитических методов не представляется возможным. Поэтому особую актуальность приобретает разработка эффективных методов качественного исследования многомерных динамических систем и применение этих методов для решения задач астрофизики и газовой динамики, которые не были ранее решены традиционными методами.

В монографии проводится детальное исследование однородных космологических моделей, автомодельных движений самогравитирующего газа и движений газа с однородной деформацией на основе методов качественной теории многомерных динамических систем.

Основные применяемые нами методы — метод максимально невырожденной компактификации динамической системы, метод разрешения вырожденных особых точек и метод сепаратрисной аппроксимации траекторий динамической системы, изложен-

ные в главе I, — являются обобщением и модификацией в конкретных многомерных задачах классических методов качественной теории двумерных динамических систем, созданных в начале XX века Пуанкаре и Бендиксоном.

Метод максимально невырожденной компактификации динамической системы, использующий разрешение вырожденных особых точек, позволяет исследовать поведение решений при предельных значениях параметров — например, при больших значениях энергии или некоторых фазовых координат, а также в окрестности различных сингулярностей.

Метод сепаратрисной аппроксимации траекторий динамической системы позволяет детально исследовать сложные нелинейные режимы динамики решений. Этот метод приводит к более полным и строгим результатам, чем традиционный метод сшивки приближенных решений из последовательных отрезков, на которых отдельные параметры предполагаются пренебрежимо малыми. В целом при изучении неинтегрируемых многомерных динамических систем методы качественного исследования являются по существу единственной альтернативой численных методов. При этом ряд важных вопросов — в частности исследование общих свойств поведения решений для всех значений параметров, или существование счетного множества решений, обладающих каким-либо "исключительным свойством", — во многих задачах успешно решаются качественными методами и принципиально не могут быть решены с помощью одних только численных методов исследования.

Задачи, рассматриваемые в данной книге, относятся как к общей теории относительности, так и к классической ньютоновской теории. В главах II и III проведено качественное исследование динамики во времени всех однородных космологических моделей с гидродинамическим тензором энергии-импульса материи (а также одной однородной космологической модели с электромагнитным полем). В главах IV и V исследуется автомодельное сферически-симметричное движение самогравитирующего газа в общей теории относительности и ньютоновской теории. Изучаемые автомодельные решения в зависимости от значений параметров моделируют различные типы движения газа при вспышках звезд и при аккреции самогравитирующего газа на центр. В главе VI исследуются автомодельные решения с вращением идеального газа, в которых движение частиц газа является существенно трехмерным. В главе VII изучаются нелинейные колебательные режимы в классе движений газа с однородной деформацией, моделирующие движение вращающихся газовых туманностей.

Область применения изложенных в книге методов качественного исследования многомерных динамических систем не ограничивается задачами астрофизики и газовой динамики и может

быть расширена; примером этому является проведенное в главе VIII исследование динамики возмущений известной вполне интегрируемой системы — периодической цепочки Тода.

Разработка и применение методов качественного исследования многомерных динамических систем для изучения однородной космологической модели IX типа без движения вещества были начаты в 1971—1973 годах совместно С. П. Новиковым и О. И. Богоявленским [12] и продолжены в дальнейшем автором при изучении однородных космологических моделей с движением вещества, движений газа с однородной деформацией, автомоделных движений самогравитирующего газа и динамики возмущений периодической цепочки Тода.

Основные материалы монографии обсуждались со специалистами институтов Академии наук СССР: ИТФ, МИАН, ИКИ, ИПМ, ИТЭФ, ИГ СО АН СССР, и ГАИШ. Всем товарищам, принимавшим участие в совместных дискуссиях, автор выражает глубокую благодарность.

Мне особенно приятно выразить искреннюю признательность члену-корреспонденту АН СССР С. П. Новикову и члену-корреспонденту АН СССР И. М. Халатникову за полезные обсуждения результатов работы.

О. И. Богоявленский

МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Основы качественной теории динамических систем были заложены классическими работами Пуанкаре [1] и Бендиксона [2], выполненными в начале XX века в связи с задачами небесной механики. В этих работах, в частности, была создана в современном виде качественная теория двумерных динамических систем, получившая в дальнейшем, начиная с работ А. А. Андронова [3 — 6], важнейшее применение в радиофизике и теории колебаний. В задачах газовой динамики двумерная качественная теория также имеет важное применение, главным образом при изучении автомодельных решений [7]. Методы построения решений динамических систем в виде сходящихся степенных рядов разрабатывались в многочисленных работах, начиная с [1, 8]; методы отыскания асимптотик решений в окрестности вырожденных особых точек, основанные на изучении некоторых «укороченных» систем и применении многогранника Ньютона, развивались в работах [9]. Специальные классы динамических систем, обладающие свойством грубости или структурной устойчивости, активно исследовались в последние десятилетия в многочисленных математических работах (см. [10, 11]).

В данной главе приводятся методы качественного исследования многомерных динамических систем (см. работы [12 — 32]): метод максимально невырожденной компактификации динамической системы, метод разрешения вырожденных особых точек и метод сепаратрисной аппроксимации траекторий динамической системы, которые применяются при дальнейшем изложении для изучения конкретных задач астрофизики и газовой динамики.

§ 1. Необходимые сведения из качественной теории двумерных динамических систем

Качественная теория автономных динамических систем на плоскости изучает динамику траекторий систем двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x, y), \quad (1.1)$$

предельное движение траекторий при $t \rightarrow \pm \infty$ и характер раз-

биения плоскости x, y на ячейки, в каждой из которых поведение траекторий системы (1.1) качественно одинаково. Основой качественного исследования динамической системы (1.1) является изучение ее особых точек (положений равновесия, или точек покоя) (x_0, y_0) , в которых $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

I. Классификация невырожденных особых точек [33—36]. Важнейшими характеристиками особой точки (x_0, y_0) являются ее собственные числа (или собственные числа системы (1.1) в этой особой точке), которые определяются как корни следующего характеристического многочлена:

$$\det \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) - \lambda & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0. \quad (1.2)$$

Здесь штрих означает частное дифференцирование по соответствующей переменной; в дальнейшем предполагается, что все встречающиеся функции являются бесконечно дифференцируемыми. Собственные числа λ_1, λ_2 являются инвариантами особой точки (x_0, y_0) и не меняются при любой регулярной (в точке (x_0, y_0)) замене координат x, y . Особая точка (x_0, y_0) называется невырожденной, если $\operatorname{Re} \lambda_1 \neq 0, \operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$.

Отдельные траектории системы (1.1) могут при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$ входить в особую точку (x_0, y_0) , касаясь некоторых направлений $\bar{k} = (k_x, k_y)$. Эти направления являются собственными векторами характеристической матрицы системы (1.1) в особой точке (x_0, y_0) (см. (1.2)). При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеются два собственных вектора, их угловые коэффициенты $k = k_y/k_x$ следующим образом выражаются через собственные числа:

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - P'_x(x_0, y_0)}{P'_y(x_0, y_0)}, \quad k_2 = \frac{\lambda_2 - P'_x(x_0, y_0)}{P'_y(x_0, y_0)}. \quad (1.3)$$

Поведение траекторий системы (1.1) в малой окрестности невырожденной особой точки (x_0, y_0) качественно эквивалентно поведению траекторий ее линейной части:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \\ \dot{y} &= Q'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Линейная система (1.4) легко интегрируется в явном виде:

$$x - x_0 = \operatorname{Re}(C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}), \quad y - y_0 = \operatorname{Re}(C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t}). \quad (1.5)$$

Полученные формулы позволяют изобразить графически качественное поведение траекторий системы (1.1) в окрестности особой точки (x_0, y_0) (т. е. нарисовать фазовый портрет динамической системы).

С помощью линейной замены координат система (1.1) в окрестности невырожденной особой точки (x_0, y_0) приводится, в зависимости от значений собственных чисел λ_1, λ_2 , к одному из следующих канонических видов (в новых координатах u, v особая точка (x_0, y_0) переходит в точку $(0, 0)$, функции $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ в окрестности точки $(0, 0)$ являются малыми второго порядка):

1. Собственные числа действительны и различны ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Система имеет канонический вид:

$$\dot{u} = \lambda_1 u + \varphi(u, v), \quad \dot{v} = \lambda_2 v + \psi(u, v). \quad (1.6)$$

2. Собственные числа равны ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Система имеет канонический вид:

$$\dot{u} = \lambda u + \varphi(u, v), \quad \dot{v} = \lambda v + \mu u + \psi(u, v), \quad (1.7)$$

где μ — вещественный параметр, который можно считать нулем или единицей.

3. Собственные числа являются комплексно-сопряженными ($\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$). Система имеет канонический вид:

$$\dot{u} = \alpha u - \beta v + \varphi(u, v), \quad \dot{v} = \beta u + \alpha v + \psi(u, v). \quad (1.8)$$

Приведем классификацию невырожденных особых точек, основанную на указанных канонических видах динамической системы (соответствующие фазовые портреты динамической системы представлены на рис. 1 в исходных координатах x, y).

1. Узел (собственные числа λ_1, λ_2 вещественны и одного знака).

а) Невырожденный узел ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Узел называется притягивающим (устойчивым), если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, в этом случае все траектории в окрестности особой точки (x_0, y_0) при $t \rightarrow \infty$ входят в эту особую точку, при этом все траектории, кроме двух, касаются собственного вектора, отвечающего минимальному по модулю собственному числу, а две исключительные траектории касаются второго собственного вектора (см. рис. 1, а). Узел называется отталкивающим (неустойчивым), если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, соответствующий фазовый портрет получается из рис. 1, а обращением направления времени t .

б) Вырожденный узел ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, в канонической форме (1.7) параметр $\mu \neq 0$). При $\lambda < 0$ (притягивающий узел) все траектории в окрестности особой точки (x_0, y_0) при $t \rightarrow \infty$ входят в особую точку, касаясь единственного собственного вектора (см. рис. 1, б). При $\lambda > 0$ узел называется отталкивающим.

в) Дикритический узел ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \mu = 0$). При $\lambda < 0$ (притягивающий узел) все траектории в окрестности особой точки (x_0, y_0) при $t \rightarrow \infty$ входят в точку (x_0, y_0) , касаясь произвольных направлений (см. рис. 1, в), причем каждого направления касает-

ся точно одна траектория. Случай $\lambda > 0$ (отталкивающий узел) описывается аналогично при обращении времени.

2. Седло (собственные числа вещественны и имеют противоположные знаки: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$). Фазовый портрет динамической

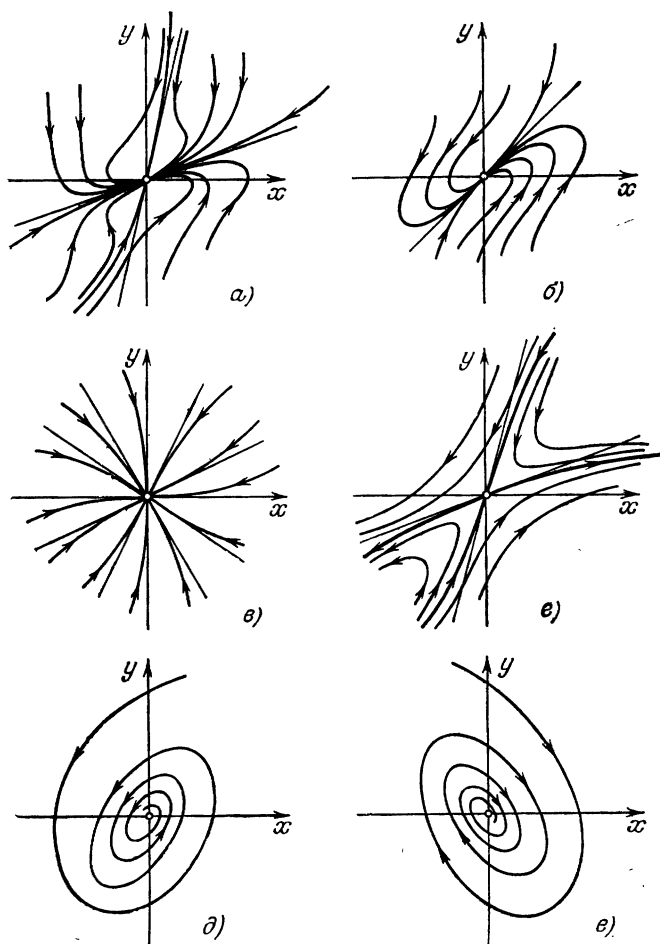


Рис. 1. Фазовые портреты динамической системы в окрестности невырожденных особых точек: а) невырожденный узел, б) вырожденный узел, в) дикри- тический узел, г) седло, д) фокус ($\beta > 0$), е) фокус ($\beta < 0$).

системы в окрестности седла показан на рис. 1, г. Седловая особая точка является неустойчивой при любом направлении времени. Четыре исключительные траектории, входящие при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$ в эту особую точку (см. рис. 1, г), называются сепаратрисами седла.

3. Фокус (собственные числа λ_1, λ_2 комплексно-сопряженные). При $\operatorname{Re} \lambda_i = \alpha < 0$ фокус является притягивающим: все траектории в окрестности этой особой точки (x_0, y_0) являются скручивающимися спиралями, которые при $t \rightarrow \infty$ входят в особую точку (x_0, y_0) , совершая вокруг нее бесконечное число оборотов. Направление вращения траекторий в канонической форме (1.8) определяется знаком $\beta = \operatorname{Im} \lambda_1$. Соответствующие фазовые портреты показаны на рис. 1, ∂ ($\beta > 0$) и рис. 1, e ($\beta < 0$). При $\operatorname{Re} \lambda_i = \alpha > 0$ фокус является отталкивающим и описывается аналогично при обращении направления времени.

Если собственные числа некоторой особой точки (x_0, y_0) чисто мнимые ($\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta$, такая особая точка называется центром), то динамическая система в ее окрестности, так же как и в случае фокуса, имеет канонический вид (1.8) ($\alpha = 0, \beta \neq 0$). Однако качественное поведение динамической системы в окрестности центра существенно зависит от конкретного вида функций $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ (можно утверждать только, что при некотором направлении времени все первоначально близкие к (x_0, y_0) траектории остаются в малой окрестности этой особой точки и совершают вокруг нее бесконечное число оборотов).

II. Исследование вырожденных особых точек. Простая классификация особых точек, у которых одно собственное число $\lambda_1 = 0$, в то время как $\lambda_2 \neq 0$, приведена в [34]. Для исследования вырожденных особых точек, с $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ применяется (начиная с работы Бендиксона [2]) переход к полярной системе координат. Пусть вырожденная особая точка находится в начале координат $(0, 0)$ и разложение правых частей динамической системы (1.1) начинается с членов степени $m > 1$:

$$P(x, y) = P_m(x, y) + \varphi(x, y), \quad Q(x, y) = Q_m(x, y) + \psi(x, y), \quad (1.9)$$

где $P_m(x, y), Q_m(x, y)$ — однородные многочлены степени m , а функции $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ — ряды, содержащие члены более высокого порядка. Динамическая система (1.1) после преобразования в полярные координаты $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ и замены времени $d\tau/dt = r^{m-1}$ принимает вид

$$\dot{r} = r [\cos \varphi P_m(\cos \varphi, \sin \varphi) + \sin \varphi Q_m(\cos \varphi, \sin \varphi) + r\Phi_1], \quad (1.10)$$

$$\dot{\varphi} = \cos \varphi Q_m(\cos \varphi, \sin \varphi) - \sin \varphi P_m(\cos \varphi, \sin \varphi) + r\Phi_2,$$

где Φ_1, Φ_2 — аналитические функции от r, φ . Отметим, что преобразование в полярные координаты является взаимно-однозначным всюду, кроме точки $(0, 0)$, которой в полярных координатах соответствует целая окружность S^1 : $r = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Динамическая система (1.10), очевидно, гладко продолжается на окружность S^1 , которая является интегральной траекторией этой систе-

мы. Если в исходных координатах x, y некоторая траектория системы (1.1) входила в особую точку $(0, 0)$, касаясь луча, образующего с осью x угол φ_* , то соответствующая ей в полярных координатах траектория системы (1.10) входит в особую точку $r = 0, \varphi = \varphi_*$, лежащую на вклеенной (вместо вырожденной особой точки $(0, 0)$) окружности S^1 (рис. 2). Таким образом, все возможные

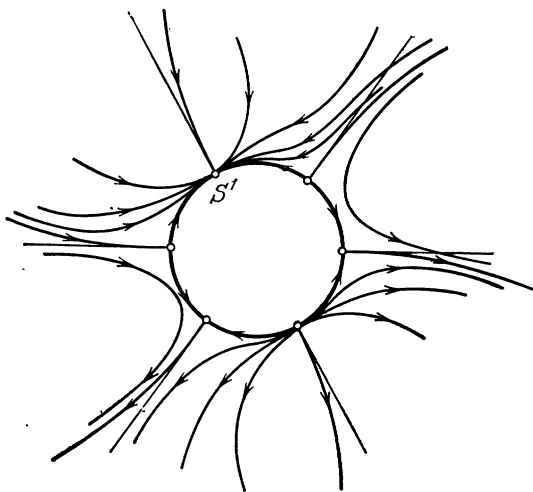


Рис. 2. Возможное поведение траекторий динамической системы в окрестности окружности S^1 , вклеенной вместо вырожденной особой точки.

направления входа траекторий системы (1.1) в особую точку $(0, 0)$ определяются корнями уравнения

$$P(\varphi_*) = \cos \varphi_* Q_m(\cos \varphi_*, \sin \varphi_*) - \sin \varphi_* P_m(\cos \varphi_*, \sin \varphi_*) = 0 \quad (1.11)$$

и соответствуют особым точкам системы (1.10) при $r = 0$. Если все особые точки этой системы, лежащие на окружности S^1 ($r = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$), являются невырожденными, то, основываясь на классификации, приведенной в п. I, можно построить фазовый портрет системы (1.10) в окрестности окружности S^1 , что даст полное описание поведения траекторий системы (1.1) в окрестности вырожденной особой точки $(0, 0)$. Если же некоторые особые точки $r = 0, \varphi = \varphi_*$ являются вырожденными, то для их исследования можно снова применить переход к полярным координатам (с центром в данной особой точке $r = 0, \varphi = \varphi_*$), и т. д. Если же на окружности S^1 вообще нет особых точек системы (1.10), т. е. $R(\varphi) \neq 0$ при всех φ , то окружность S^1 является неособой замкнутой траекторией системы (1.10) и поэтому все траектории в ее

окрестности (т. е. все траектории системы (1.1) в окрестности вырожденной особой точки $(0, 0)$) при некотором направлении времени совершают вокруг нее бесконечное число оборотов.

Отметим, что описанное выше преобразование динамической системы (1.1) в полярные координаты эквивалентно преобразованию в две системы координат:

$$V_1: x, u = y/x; \quad V_2: y, v = x/y, \quad (1.12)$$

в которых особой точке $(0, 0)$ соответствует окружность, покрытая двумя прямыми:

$$L_1: x=0, \quad -\infty < u < +\infty \quad \text{и} \quad L_2: y=0, \quad -\infty < v < +\infty.$$

Это замечание особенно важно при исследовании (подобным методом) вырожденных особых точек многомерных динамических систем (см. § 2).

III. Исследование динамической системы на бесконечности.

Для построения полного фазового портрета динамической системы (1.1) на плоскости x, y необходимо знать поведение траекторий этой системы на бесконечности. Для исследования этого вопроса применяется преобразование динамической системы (1.1) на сферу Пуанкаре. На рис. 3 показано отображение плоскости x, y на нижнюю половину сферы S^2 с помощью лучей, проходящих через центр сферы (точка плоскости и ее образ на сфере лежат на одном луче). При этом отображении бесконечно удаленные точки плоскости соответствуют экватору сферы. Таким образом, вся плоскость x, y , пополненная бесконечно удаленными точками, эквивалентна кругу с граничной окружностью.

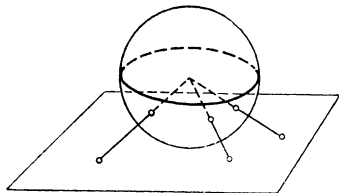


Рис. 3. Отображение плоскости на половину сферы S^2 .

Для получения подобного преобразования плоскости в аналитическом виде можно использовать отображение обратных радиусов: $(x, y) \rightarrow (\rho, \varphi)$, где $\rho = r^{-1} = (x^2 + y^2)^{-1/2}$, $\varphi = \text{arctg}(y/x)$. При таком отображении бесконечно удаленные точки плоскости переходят в точки окружности S^1 : $\rho = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Исследование системы (1.1) после преобразования в координаты ρ, φ в окрестности бесконечно удаленной окружности S^1 вполне аналогично исследованию, описанному в п. II. Однако обычно, при исследовании динамических систем (1.1) с полиномиальными правыми частями $(P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены степени n), используется преобразование системы (1.1) в проективные координаты $z = 1/x, u = y/x$ и $w = 1/y, v = x/y$ (две системы координат

нат z , u и w , v при $u \neq 0$, $v \neq 0$ эквивалентны). Бесконечно удаленным точкам плоскости x , y в проективных координатах отвечает окружность S^1 , покрытая двумя прямыми: $z = 0$, $-\infty < u < +\infty$, и $w = 0$, $-\infty < v < +\infty$. Динамическая система (1.1) после преобразования в проективные координаты z , u и замены времени $d\tau_1/dt = x^{n-1}$ принимает вид

$$\dot{z} = -zP^*(z, u), \quad \dot{u} = Q^*(z, u) - uP^*(z, u), \quad (1.13)$$

где функции

$$P^*(z, u) = z^n P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) \quad \text{и} \quad Q^*(z, u) = z^n Q\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right)$$

являются многочленами от переменных z , u степени не выше n . Очевидно, что прямая $z = 0$ является интегральной траекторией системы (1.13). Исследование системы (1.13) в окрестности интегральной прямой $z = 0$ (соответствующей бесконечно удаленным точкам плоскости x , y) вполне аналогично исследованию, проведенному в п. II.

Отметим, что преимуществом проективных координат и координат (1.12) по сравнению с координатами ρ , φ и полярными координатами r , φ является то, что система (1.1) после преобразования в эти координаты по-прежнему имеет полиномиальные по z , u (или по x , u) правые части.

IV. Критерии существования и отсутствия предельных циклов динамической системы. Замкнутая неособая траектория системы (1.1) называется циклом. Замкнутая траектория, очевидно, делит плоскость x , y на две части — внутреннюю и внешнюю. Предельным циклом называется изолированная замкнутая траектория. Все траектории динамической системы (1.1) в окрестности изолированного цикла X при некотором направлении времени стремятся к X . Предельный цикл называется устойчивым, если все траектории системы (1.1) в его окрестности стремятся к X при $t \rightarrow +\infty$, и неустойчивым, если такое стремление реализуется при $t \rightarrow -\infty$. Например, динамическая система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4), \\ \dot{y} &= x - y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \end{aligned}$$

имеет два предельных цикла, $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 4), причем внутренний цикл является неустойчивым, а внешний — устойчивым. Предельный цикл X называется полуустойчивым, если с одной стороны плоскости (например, с внешней по отношению к X) траектории стремятся к X при $t \rightarrow +\infty$, а с другой стороны — при $t \rightarrow -\infty$.

Доказательство существования или отсутствия предельных циклов является наиболее трудной задачей двумерной качествен-

ной теории, для решения которой не существует универсального метода. Однако для динамических систем специального вида известен ряд методов, которые во многих конкретных задачах являются весьма эффективными. Допустим, например, что траектории динамической системы (1.1) пересекают некоторую замкнутую кривую \mathcal{L} и входят внутрь области U , ограниченной этой кривой, причем в области U имеется единственная особая точка системы (1.1), являющаяся отталкивающей. В этом случае в области U

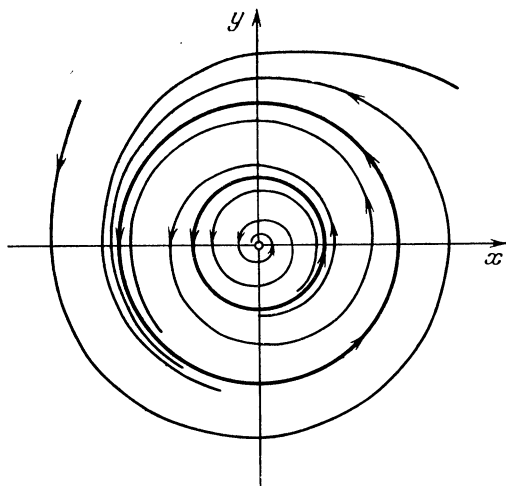


Рис. 4. Поведение траекторий динамической системы в окрестности предельных циклов.

существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл, точнее: число устойчивых циклов в области U на единицу больше числа неустойчивых циклов (если все циклы являются изолированными).

Для доказательства существования предельных циклов применяются методы теории бифуркаций динамических систем [6, 34]. Например, устойчивый цикл рождается из особой точки — фокуса, если при изменении параметров задачи притягивающий фокус переходит в отталкивающий. Широко используется метод малого параметра [33, 34, 37—41], дающий, в частности, достаточные условия для существования предельных циклов динамических систем, близких к гамильтоновым системам, у которых все траектории замкнуты.

Для доказательства отсутствия замкнутых траекторий (циклов) динамической системы вида (1.1) во многих задачах эффективно применим следующий критерий Дюлака — Бендиксона. Если в некоторой области G существует такая гладкая функция $F(x, y)$,

что

$$\frac{\partial FP}{\partial x} + \frac{\partial FQ}{\partial y} > 0, \quad (1.14)$$

то в области G нет замкнутых траекторий системы (1.1), стягивающихся в этой области в точку. Действительно, если бы такой цикл l , ограничивающий стягиваемую область s , существовал, то (по теореме Гаусса — Остроградского)

$$\oint_l (FP \, dy - FQ \, dx) = \int_s \left(\frac{\partial FP}{\partial x} + \frac{\partial FQ}{\partial y} \right) dx \, dy > 0.$$

Однако выражение слева на траектории (l) системы (1.1) тождественно равно 0.

V. Исследование конкретного примера. В качестве иллюстрации применим описанные выше методы для изучения следующей динамической системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y^3 (x^2 - 1)(2 + xy), \\ \dot{y} &= x^3 (y^2 - 1)(2 - xy). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Система (1.15) в конечной части плоскости x, y имеет девять особых точек: $A_1(-1, 1)$, $A_2(1, 1)$, $A_3(1, -1)$, $A_4(-1, -1)$,

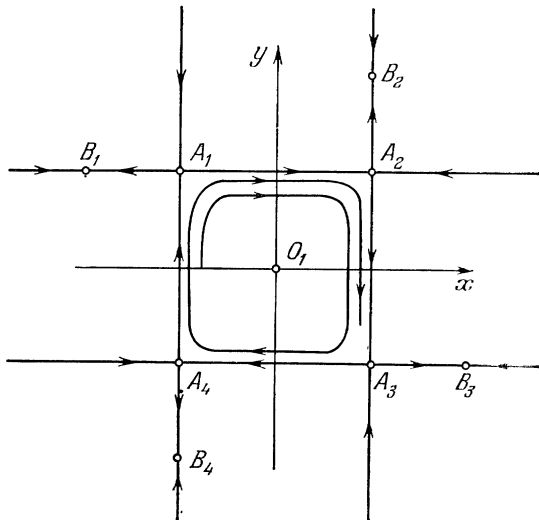


Рис. 5. Пример динамической системы, у которой сепаратрисы четырех неустойчивых (седловых) особых точек A_i образуют цикл.

$B_1(-2, 1)$, $B_2(1, 2)$, $B_3(2, -1)$, $B_4(-1, -2)$, $O_1(0, 0)$ (рис. 5). Каждая особая точка A_i имеет собственные числа $\lambda_1 = -6$,

$\lambda_2 = 2$, т. е. является неустойчивой (седловой). Каждая особая точка B_i имеет собственные числа $\lambda_1 = -64$, $\lambda_2 = -3$, т. е. является притягивающим узлом. Особая точка $O_2(0, 0)$ является вырожденной ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).

Сепаратрисы неустойчивых особых точек A_i интегрируются в явном виде: вдоль каждой сепаратрисы одна из координат x, y постоянна и равна ± 1 (см. рис. 5). Имеется последовательность четырех сепаратрис: $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$, идущих из одной

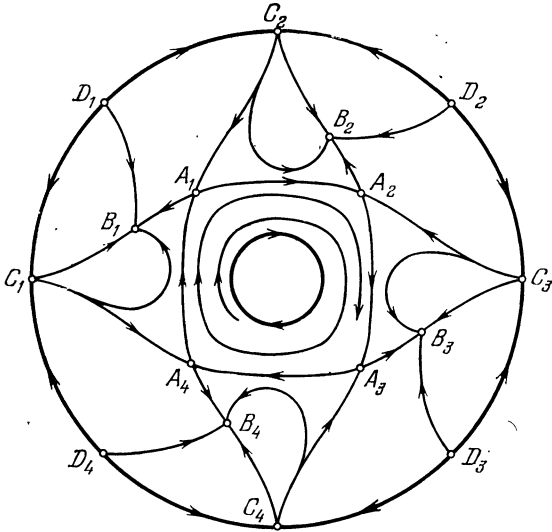


Рис. 6. Полный фазовый портрет динамической системы (1.15).

особой точки A_i в другую и образующих замкнутую диаграмму. Траектория системы (1.15), находящаяся внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ и начинающаяся достаточно близко от его границы, будет сколь угодно долго двигаться вдоль последовательности сепаратрис неустойчивых особых точек A_i . Тем самым доказано наличие колебаний в динамической системе (1.15) при $|x| < 1$, $|y| < 1$. Проведенное рассуждение является простейшей иллюстрацией метода сепаратрисной аппроксимации траекторий динамической системы (см. § 4), который эффективно применим при исследовании некоторых многомерных динамических систем.

Для изучения вырожденной особой точки $O_1(0, 0)$ преобразуем систему (1.15) в полярные координаты r, φ (см. п. II). При этом вместо точки $O_1(0, 0)$ вклеивается окружность $S^1: r = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (рис. 6). После замены времени $d\tau/dt = r^2$ система

(1.15) в полярных координатах принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r \left(-\frac{1}{2} \sin 4\varphi + \frac{1}{4} r^2 \sin^2 2\varphi - \frac{1}{8} r^4 \sin^4 2\varphi \right), \\ \dot{\varphi} &= -2 + \sin^2 2\varphi + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi (\sin 2\varphi + \cos 2\varphi) - \\ &\quad - \frac{1}{16} r^4 \sin^2 2\varphi \sin 4\varphi. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Система (1.16) на окружности S^1 ($r = 0$) не имеет особых точек; окружность S^1 является замкнутой интегральной траекторией этой системы. Поэтому все траектории системы (1.15) — (1.16) при $r \ll 1$ совершают бесконечное число оборотов вокруг особой точки $O_1(0, 0)$.

Покажем, что все траектории динамической системы (1.15) внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ при некотором направлении времени входят в особую точку O_1 , а при противоположном направлении времени наматываются на сепаратрисный цикл $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$. Для этого достаточно доказать, что внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ ($|x| < 1, |y| < 1$) система (1.15) не имеет замкнутых траекторий. Воспользуемся критерием Дюлака — Бендиксона (см. п. IV). Функция $F = (x^2 - 1)^{-1} (y^2 - 1)^{-1}$, очевидно, регулярна внутри квадрата. Для системы (1.15) получаем

$$\frac{\partial FP}{\partial x} + \frac{\partial FQ}{\partial y} = \frac{x^4}{1-x^2} + \frac{y^4}{1-y^2} > 0$$

при $|x| < 1, |y| < 1$, что и доказывает отсутствие замкнутых траекторий.

Для исследования поведения траекторий динамической системы (1.15) на бесконечности преобразуем эту систему в проективные координаты $z = 1/x, u = y/x$ и $w = 1/y, v = x/y$ (см. п. III). При этом преобразовании плоскость x, y пополняется бесконечно удаленной окружностью, покрытой двумя прямыми, $z = 0$ и $w = 0$. В координатах z, u после замены времени $d\tau_1/dt = x^6$ получаем динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= zu^3(1-z^2)(u+2z^2), \\ \dot{u} &= (u^2-z^2)(-u+2z^2) + u^4(1-z^2)(u+2z^2). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Система (1.17) на приклеенной границе ($z = 0$) в области $z \geq 0$ ($x \geq 0$) имеет три особые точки (см. рис. 6): D_2 ($u = 1$), D_3 ($u = -1$), C_3 ($u = 0$) (и три аналогичные точки D_1, D_4, C_1 в области $z \leq 0$ ($x \leq 0$)). В особых точках D_2 и D_3 система (1.17) имеет собственные числа $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, т. е. эти особые точки являются отталкивающими узлами. Особая точка C_3 является вырожденной (дополнительное исследование показывает, что особая точка C_3 неустойчива). В проективных координатах w, v система (1.15) имеет аналогичные особые точки C_2 и C_4 .

Полный фазовый портрет динамической системы (1.15) после разрешения вырожденной особой точки $O_1(0, 0)$ и пополнения плоскости x, y границей на бесконечности показан на рис. 6.

§ 2. Метод исследования вырожденных особых точек динамической системы

I. Общая система обыкновенных дифференциальных уравнений, определенная в фазовом пространстве переменных x_1, \dots, x_n , имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

В дальнейшем всегда предполагается, что система (2.1) является автономной системой, т. е. правые части f_i не содержат времени t . Любая неавтономная система сводится к виду (2.1) после введения новой переменной $x_{n+1} = t$: $dx_{n+1}/dt = 1$. Если первоначальная система дифференциальных уравнений содержала производные по t более высокого порядка $\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(k)}$, то такая система сводится к виду (2.1) с помощью введения новых переменных $z_1 = \dot{y}, \dots, z_{k-1} = y^{(k-1)}$. Часто используются также другие способы преобразования системы к виду (2.1). Например, во многих задачах изменение параметров во времени определяется некоторым принципом наименьшего действия:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i) dt = 0. \quad (2.2)$$

Поэтому первоначальные уравнения являются уравнениями второго порядка и имеют лагранжев вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Для преобразования лагранжевой системы (2.3) к виду (2.1) наиболее удобно использовать преобразование Лежандра: $p_i = \partial L / \partial \dot{p}_i$. В $2n$ -мерном фазовом пространстве $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ система (2.3) принимает гамильтонов вид:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (2.4)$$

и, следовательно, является частным случаем систем вида (2.1).

Размерности фазового пространства x_1, \dots, x_n динамических систем, возникающих в задачах астрофизики и газовой динамики, могут быть достаточно большими. Например, динамические системы, описывающие наиболее общие однородные космологиче-

ские модели в общей теории относительности, определены в 12-мерном фазовом пространстве — в число координат x_i входят шесть компонент метрики g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и шесть соответствующих импульсов p_{ij} . Динамические системы, описывающие автомодельные решения в газовой динамике (с учетом ньютоновского тяготения), определены в четырехмерном пространстве компонент скорости, массы, плотности и давления газа. Движения газа с однородной деформацией описываются гамильтоновой системой в 18-мерном фазовом пространстве, а для систем гидродинамического типа размерность фазового пространства может быть сколь угодно большой.

Переменная t в системе вида (2.1) может иметь различный физический смысл: в различных задачах это может быть как время, так и некоторая комбинация времени и пространственных координат. В данной главе мы, отвлекаясь от первоначального смысла переменной t , будем для простоты называть ее временем.

Для многих динамических систем вида (2.1), возникающих в задачах астрофизики и газовой динамики, правые части (f_i) являются рациональными функциями своих аргументов x_1, \dots, x_n . В этих случаях функции f_i после приведения к общему знаменателю принимают вид $f_i = F_i/F$, где F_i и F — некоторые многочлены от x_1, \dots, x_n . Часто бывает удобно преобразовать систему с помощью замены времени $t \rightarrow \tau$:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{F(x_1, \dots, x_n)} \quad (2.5)$$

в систему, имеющую вид

$$\frac{dx_i}{d\tau} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad (2.6)$$

где все F_i являются многочленами. Преобразование (2.5) устраняет сингулярности системы (2.1), в которых функция $F = 0$. Обычно используются замены (2.5) вида $d\tau/dt = 1/|F|$, не меняющие направления времени, но в некоторых задачах, например при исследовании автомодельных решений, необходимо использовать также немонотонную замену времени (2.5).

II. Точка (x_1^0, \dots, x_n^0) называется особой точкой (или точкой покоя) динамической системы (2.6), если в этой точке все функции $F_i(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$. В этом случае система (2.6) имеет следующее простое решение: $x_i(t) \equiv x_i^0$. Особым точкам системы (2.6) часто отвечают важные нестационарные решения изучаемой задачи (обычно имеющие степенной вид), поскольку функции x_i являются, как правило, некоторыми комбинациями физических параметров, которые по отдельности изменяются при изменении t . Нахождение всех особых точек системы (2.6) и отвечающих им реше-

ний сводится, таким образом, к решению системы из n алгебраических уравнений $F_i(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Рассмотрим в особой точке (x_1^0, \dots, x_n^0) характеристическую матрицу системы (2.6): $A_i^j = \partial F_i / \partial x_j$. Характеристические корни этой матрицы, т. е. n корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ уравнения

$$\det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_i^0) - \lambda \delta_i^j \right\| = 0, \quad (2.7)$$

называются собственными числами системы (2.6) в особой точке (x_1^0, \dots, x_n^0) . Особая точка называется невырожденной, если в этой точке все собственные числа λ_i имеют ненулевые вещественные части: $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$.

Наряду с системой (2.6) рассмотрим также ее линейную часть:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)(x_j - x_j^0). \quad (2.8)$$

Справедлива следующая важная теорема (см. [42]): Если особая точка (x_1^0, \dots, x_n^0) является невырожденной, то существует некоторое непрерывное и взаимно-однозначное преобразование окрестности этой точки, которое переводит траектории системы (2.6) в траектории системы (2.8). Таким образом, качественное поведение системы (2.6) в окрестности невырожденной особой точки эквивалентно поведению ее линейной части.

Пусть $(\xi_i^1), \dots, (\xi_i^n)$ — собственные векторы матрицы $A_i^j = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$:

$$\sum_{j=1}^n A_i^j \xi_j^k = \lambda_k \xi_i^k.$$

В случае комплексных собственных чисел $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ координаты собственных векторов (ξ_i^k) также являются комплексными. В общем случае матрица A_i^j имеет n различных собственных векторов (жорданова нормальная форма матрицы A_i^j диагональна), при этом все решения системы (2.8) имеют вид

$$x_i(t) - x_i^0 = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n C_k \xi_i^k e^{\lambda_k t}. \quad (2.9)$$

Поэтому качественный характер поведения траекторий системы (2.8) определяется собственными числами λ_k .

Невырожденная особая точка (x_1^0, \dots, x_n^0) называется притягивающей, если для всех собственных чисел $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$; в этом случае все траектории в окрестности особой точки при $\tau \rightarrow +\infty$

входят в эту особую точку. Невырожденная особая точка называется отталкивающей, если все $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$; в этом случае все траектории в окрестности (x_1^0, \dots, x_n^0) входят в эту особую точку при $t \rightarrow -\infty$.

При изучении произвольных особых точек системы (2.6) постоянно используется следующая теорема [42]: Если в некоторой особой точке (x_1^0, \dots, x_n^0) система (2.6) имеет d собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ с отрицательными вещественными частями $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_d < 0$ (собственные числа учитываются с их кратностями), то существует (локально) инвариантное d -мерное многообразие W_s^d , на котором все траектории системы (2.6) при $t \rightarrow \infty$ входят в особую точку $(x_1^0, \dots, x_n^0)^1$. Для каждого такого решения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \left[\left(\sum_{j=1}^n (x_j(t) - x_j^0)^2 \right)^{1/2} \right] = \alpha_i \quad (2.10)$$

при некотором i . Если собственное число λ_d с максимальной отрицательной вещественной частью α_d единственно, то почти все траектории на инвариантном многообразии W_s^d касаются соответствующего собственного вектора ξ^d и имеют при $t \rightarrow \infty$ асимптотику (2.10) при $i = d$. Аналогично, если в особой точке (x_1^0, \dots, x_n^0) система (2.6) имеет k собственных чисел с положительной вещественной частью, то существует k -мерное инвариантное многообразие W_u^k , на котором все траектории выходят из этой особой точки.

Траектории, входящие при $t \rightarrow \pm \infty$ в некоторую особую точку, называются сепаратрисами. Предыдущая теорема указывает, в частности, асимптотики сепаратрис в окрестности особых точек.

Невырожденная особая точка (x_1^0, \dots, x_n^0) называется седловой (неустойчивой), если динамическая система (2.6) имеет в этой особой точке d собственных чисел с отрицательными вещественными частями и $n - d$ собственных чисел с положительными вещественными частями. Согласно указанной выше теореме существуют два инвариантных многообразия W_s^d и W_u^{n-d} , проходящие через седловую особую точку и заполненные входящими и выходящими из этой особой точки сепаратрисами. Эти многообразия называются соответственно устойчивым и неустойчивым много-

¹⁾ Многообразие \mathcal{M} называется инвариантным многообразием динамической системы, если каждая траектория, проходящая через некоторую неособую точку на \mathcal{M} , целиком (при всех $-\infty < t < +\infty$) лежит в этом многообразии. Инвариантное многообразие \mathcal{M} могут пересекать только траектории, входящие в особые точки динамической системы, лежащие на этом многообразии.

образием системы (2.6), проходящим через точку (x_1^0, \dots, x_n^0) . Все остальные траектории, не лежащие на инвариантных многообразиях W_s^d и W_u^{n-d} , не входят в рассматриваемую седловую особую точку.

В динамических системах, обладающих некоторой симметрией, особые точки часто заполняют непрерывные множества, являющиеся многообразиями M^k размерности k . Динамическая система (2.6) в таких особых точках необходимо имеет k нулевых собственных чисел. Особое множество M^k называется невырожденным, если в почти всех особых точках этого множества имеется $n - k$ собственных чисел системы (2.6) с ненулевыми вещественными частями. На невырожденные особые множества очевидным образом переносятся все указанные выше определения (притягивающих, отталкивающих и седловых особых множеств).

III. Поведение траекторий динамической системы (2.6) в окрестности вырожденных особых точек (в которых, например, все собственные числа $\lambda_i = 0$) обычно является значительно более сложным, чем поведение траекторий в окрестности невырожденных особых точек. Например, число сепаратрис и целых инвариантных многообразий, входящих в вырожденную особую точку под различными углами, может быть сколь угодно большим.

Для исследования вырожденных особых точек применяется метод разрешения особенностей с помощью специального преобразования фазового пространства (своеобразное раздутие фазового пространства в особой точке), при котором вместо особой точки вклеивается целое инвариантное многообразие¹⁾. Предположим для определенности, что особая точка имеет координаты $(0, \dots, 0)$. Введем в фазовом пространстве $X(x_1, \dots, x_n)$ n систем координат (локальных карт) V_1, \dots, V_n . В локальной карте V_i определены координаты

$$y_1^{(i)} = x_1/x_i, \dots, y_j^{(i)} = x_j/x_i, \dots, x_{i, \dots, y_n^{(i)}} = x_n/x_i. \quad (2.11)$$

Траектории, входившие в особую точку $(0, \dots, 0)$, касаясь некоторых векторов $(\alpha_1, \dots, \underset{i}{1}, \dots, \alpha_n)$, в локальной карте V_i входят

в точки с координатами $(y_j^{(i)} = \alpha_j, x_i = 0)$. Таким образом, особой точке $(0, \dots, 0)$ в координатах V_i (2.11) отвечает целая гиперплоскость $L_i: x_i = 0$. Отметим, что на каждой прямой, проходящей через точку $(0, \dots, 0)$, лежат два луча, входящие в точку $(0, \dots, 0)$ с противоположными направлениями. Конечные

¹⁾ При изучении конкретных многомерных динамических систем метод разрешения вырожденных особых точек независимо от совместной работы автора и С. П. Новикова 1973 г. [12] применялся также в работах 1974 г. [43, 44], посвященных исследованию движения четырех притягивающихся по закону Ньютона масс на прямой.

точки двух таких лучей в координатах (2.11) отождествляются. Это отождествление не всегда удобно, и для того, чтобы его избежать, вводятся две системы координат V_i : V_i^+ и V_i^- , в соответствии со знаком координаты x_i . Все $2n$ систем координат V_i^\pm покрывают преобразованное фазовое пространство X_1 , которое взаимнооднозначно отображается на исходное фазовое пространство X , кроме особой точки $(0, \dots, 0)$. Особой точке $(0, \dots, 0)$ на многообразии X_1 отвечает $(n-1)$ -мерная сфера S^{n-1} , покрытая в локальных картах V_i^\pm гиперплоскостями L_i^\pm ($x_i = \pm 0$). Если использовать только локальные карты V_i , то на вклеенной вместо особой точки $(0, \dots, 0)$ $(n-1)$ -мерной сфере S^{n-1} противоположные точки окажутся отождествленными, т. е. вместо особой точки $(0, \dots, 0)$ будет вклеено проективное пространство RP^{n-1} . В этом случае проведенное преобразование фазового пространства называется в алгебраической геометрии σ -процессом.

После преобразования системы (2.6) в локальные координаты V_i (2.11) получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= \frac{1}{x_i} (F_j(y_1 x_i, \dots, x_i, \dots, y_n x_i) - y_j F_i(y_1 x_i, \dots, x_i, \dots, y_n x_i)), \\ \dot{x}_i &= F_i(y_1 x_i, \dots, x_i, \dots, y_n x_i), \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq i. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Предположим, что в вырожденной особой точке $(0, \dots, 0)$ разложение правых частей системы (2.6) — многочленов F_i — начинается с членов степени $k > 1$ (для дальнейших построений достаточно, чтобы функции F_i в окрестности особой точки $(0, \dots, 0)$ представлялись сходящимися степенными рядами). В этом случае из правых частей системы (2.10) можно вынести общий множитель x_i^{k-1} . После замены времени

$$\frac{d\tau_1}{d\tau} = |x_i^{k-1}| \quad (2.13)$$

система (2.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_j}{d\tau_1} &= P_j(y_1, \dots, x_i, \dots, y_n) - y_j P_i(y_1, \dots, x_i, \dots, y_n), \\ \frac{dx_i}{d\tau_1} &= x_i P_i(y_1, \dots, x_i, \dots, y_n), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $P_j = \text{sign}(x_i^{k-1}) \cdot F_j/x_i^k$. Таким образом, правые части преобразованной системы (2.14) по-прежнему являются многочленами. Гиперплоскость L_i^\pm ($x_i = \pm 0$) является инвариантным многообразием системы (2.14). Поэтому вся $(n-1)$ -мерная сфера S^{n-1} , вклеенная в результате сделанных преобразований вместо особой точки $(0, \dots, 0)$, является инвариантным многообразием ди-

намической системы (2.6) после преобразования на многообразии X_1 и надлежащих замен времени типа (2.13).

Динамическая система (2.14) на инвариантной гиперплоскости $x_i = 0$, вообще говоря, имеет ряд новых особых точек. Если среди этих особых точек есть невырожденные особые точки, то их исследование дает важную информацию о поведении траекторий исходной системы (2.6) в окрестности вырожденной особой точки $(0, \dots, 0)$. Например, сепаратрисы невырожденных особых точек, не лежащие целиком в плоскости $x_i = 0$, определяют траектории системы (2.6), входящие в точку $(0, \dots, 0)$. Если система (2.14) на гиперплоскости $x_i = 0$ имеет вырожденные особые точки, то в этих особых точках следует повторить все проделанные выше преобразования вида (2.11), и т. д.

В важном частном случае, когда многочлены F_i являются однородными многочленами степени k (система (2.6) инвариантна относительно группы масштабных преобразований), уравнение (2.14) для координаты x_i отделяется, т. е. порядок системы (2.6) при преобразовании в координаты (2.11) понижается на 1. В этом случае динамика системы (2.6) полностью определяется динамикой системы (2.14) на сфере S^{n-1} , вклеенной при преобразованиях (2.11) вместо вырожденной особой точки $(0, \dots, 0)$.

Отметим, что динамическая система на инвариантной плоскости $x_i = 0$ часто оказывается существенно проще исходной динамической системы (например, за счет понижения порядка). Поэтому исследование системы (2.14) при $x_i = 0$ обычно дает гораздо большую информацию, чем простое исследование невырожденных особых точек.

В тех случаях, когда динамическая система (2.6) обладает какой-либо симметрией, например, записывается в тензорном виде (как в теории однородных космологических моделей), для разрешения вырожденных особых точек удобно использовать сферическую систему координат:

$$y_i = x_i/G, \quad G = (x_1^2, \dots, x_n^2)^{1/2}. \quad (2.15)$$

Система n уравнений (2.6) после преобразования в координаты (2.15) переходит в систему из $n + 1$ уравнений, рассматриваемую на уровне связи

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1. \quad (2.16)$$

В целом фазовое пространство системы (2.6) в координатах (2.15) является произведением $(n - 1)$ -мерной единичной сферы S^{n-1} (2.16) на полупрямую $G \geq 0$. Особой точке $(0, \dots, 0)$ в координатах (2.15) отвечает инвариантное многообразие — $(n - 1)$ -мерная сфера S^{n-1} , выделенная условиями (2.16) и $G = 0$. Переход к сферическим координатам (2.15) полностью эквивалентен введению локальных карт V_i^\pm вида (2.11). В различных случаях один

из этих двух способов разрешения вырожденных особых точек оказывается наиболее удобным (требует меньших вычислений).

Разрешение вырожденных особых множеств осуществляется с помощью преобразований, аналогичных (2.11) (или (2.15)), вдоль этих множеств. Пусть множество вырожденных особых точек M^k размерности k локально задается уравнениями $x_1 = \dots = x_k = 0$. Тогда для разрешения особого множества M^k следует применить преобразования (2.11), где $(k + 1) \leq i, j \leq n$. В результате этих преобразований вместо каждой точки множества M^k вклеивается $(n - k - 1)$ -мерная сфера S^{n-k-1} .

§ 3. Метод максимально невырожденной компактификации динамической системы

Динамические системы, возникающие в физических задачах, определены, как правило, в некоторой области S_1 фазового пространства, выделенной рядом физических условий типа неравенств:

$$\Phi_j(x_1, \dots, x_n) > 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.1)$$

К таким условиям могут относиться условия знакоопределенности энергии, знакоопределенности некоторых координат и т. д. Для исследования динамической системы полезно пополнить область S_1 границей, состоящей из нескольких компонент Γ_j (лежащих в конечной области координат), на которых одно из условий (3.1) обращается в равенство:

$$\Gamma_j: \Phi_j(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (3.2)$$

Если траектории динамической системы не покидают область S_1 при любом направлении времени, то все компоненты границы Γ_j после надлежащей замены времени являются инвариантными многообразиями динамической системы.

Во многих случаях важно знать поведение траекторий динамической системы (2.1) при больших значениях координат x_i . Например, в гамильтоновых системах вида (2.4) часто необходимо исследовать асимптотическое поведение траекторий при больших энергиях, т. е. при $H \gg 1$. В других задачах (например, в задаче о сильном взрыве в атмосфере) представляют интерес только изолированные траектории системы, уходящие на бесконечность при некотором направлении времени. Для исследования поведения траекторий при больших значениях координат x_i необходимо пополнить фазовое пространство границей на бесконечности. Такое пополнение осуществляется с помощью введения $2n$ карт U_i^\pm проективных координат

$$y_1^{(i)} = \frac{x_1}{x_i}, \dots, \quad y_j^{(i)} = \frac{x_j}{x_i}, \dots, \quad z_i = \frac{1}{x_i}, \dots, \quad y_n^{(i)} = \frac{x_n}{x_i}. \quad (3.3)$$

В локальной карте U_i^\pm имеем $\text{sign } z_i = \pm 1$. В координатах (3.3) бесконечно удаленным точкам соответствуют точки гиперплоскости L_i^\pm : $z_i = \pm 0$. Траектории, уходившие на бесконечность с некоторой асимптотой $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, при $\alpha_i \neq 0$ входят в точку $y_j^{(i)} = \alpha_j/\alpha_i$, $z_i = \pm 0$, лежащую на гиперплоскости L_i^\pm .

В результате преобразований координат вида (3.3) к фазовому пространству в области бесконечно больших значений координат x_i приклеивается граница — $(n - 1)$ -мерная сфера S^{n-1} , покрытая гиперплоскостями L_i^\pm .

Динамическая система (2.1) после преобразования в проективные координаты (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= \frac{1}{x_i} (F_j(y_1 x_i, x_i, y_n x_i) - y_j F_i(y_1 x_i, x_i, y_n x_i)), \\ \dot{z}_i &= -\frac{1}{x_i} z_i F_i(y_1 x_i, x_i, y_n x_i). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Предположим, что старшая степень многочленов F_i равна m ¹⁾. Вынесем из правых частей системы (3.4) общий множитель x_i^{m-1} . В оставшиеся выражения переменная x_i входит только в отрицательных степенях, т. е. в эти выражения в положительных степенях входит переменная $z_i = x_i^{-1}$. Поэтому после замены времени

$$\frac{d\tau_2}{d\tau} = |x_i|^{m-1} \quad (3.5)$$

система (3.4) преобразуется в систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= P_j(y_1, \dots, z_i, \dots, y_n) - y_j P_i(y_1, \dots, z_i, \dots, y_n), \\ \dot{z}_i &= -z_i P_i(y_1, \dots, z_i, \dots, y_n); \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq i, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $P_j = \text{sign}(x_i^{m-1}) \cdot F_j/x_i^m$. Правые части полученной системы (3.6) по-прежнему являются многочленами от своих переменных.

Гиперплоскость L_i ($z_i = 0$), очевидно, является инвариантным многообразием динамической системы (3.6). Следовательно, граничная сфера S^{n-1} , приклеенная к фазовому пространству в области бесконечно больших значений координат x_i , также является инвариантным многообразием динамической системы на пополненном фазовом пространстве.

Система (3.6) на инвариантной гиперплоскости L_i может иметь ряд невырожденных особых точек. Сепаратрисы, входящие в

¹⁾ Проективное пополнение фазового пространства можно эффективно применить также для исследования динамических систем, у которых правые части F_i не являются многочленами, но обладают некоторыми свойствами однородности.

эти особые точки и не лежащие целиком на граничной сфере S^{n-1} , определяют траектории динамической системы (2.1), уходящие на бесконечность с некоторой линейной асимптотой. Если система (3.6) на приклеенной границе S^{n-1} ($z_i = 0$) имеет вырожденные особые точки, то для их исследования необходимо разрешить эти особенности с помощью преобразований, указанных в § 2.

В тех случаях, когда система (2.1) обладает некоторой симметрией, для пополнения фазового пространства на бесконечности удобно воспользоваться (так же, как и в § 2) сферической системой координат:

$$y_i = x_i \cdot \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2}. \quad (3.7)$$

Динамическая система (2.1) после преобразования в координаты (3.7) рассматривается на уровне связи (2.16): $y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1$. В целом координаты (3.7) покрывают многообразие, являющееся произведением $(n-1)$ -мерной единичной сферы S^{n-1} (2.16) на полупрямую $\mathfrak{G} \geq 0$. Граничная сфера, приклеенная к исходному фазовому пространству в области бесконечных значений координат x_i , выделяется условиями (2.16) и $\mathfrak{G} = 0$.

В некоторых динамических системах фазовые переменные естественным образом разбиваются на несколько групп: например, в случае гамильтоновых систем (2.4) — на n координат q_i и n импульсов p_i . В таких случаях бывает удобно производить пополнение (компактификацию) фазового пространства на бесконечности отдельно по каждой группе координат. Преобразование координат в каждой группе можно по-прежнему взять в виде (3.3) или (3.7). При этом полная граница, приклеенная к фазовому пространству на бесконечности, состоит из нескольких компонент, каждая из которых соответствует пополнению фазового пространства по некоторой одной группе переменных. Компоненты границы пересекаются по углам границы, которые также являются инвариантными многообразиями динамической системы на пополненном фазовом пространстве.

Физическая область S_1 в результате указанных выше преобразований — пополнения фазового пространства границей на бесконечности и разрешения вырожденных особых точек динамической системы — преобразуется в замкнутое (компактное) многообразие S с границей Γ . Многообразие S является по существу многогранником — полиэдром, граница которого состоит из нескольких компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, пересекающихся попарно по различным углам границы $\Gamma_i \cap \Gamma_j$. Многообразие S покрыто некоторой системой локальных карт, в которых наряду с исходными координатами x_i введены координаты вида (2.11), (2.15), (3.3) и (3.7). Динамическая система на многообразии S определена в результате преобразований системы (2.6) во все эти локальные карты и надлежащих (монотонных) замен времени типа (2.13) и (3.5).

Динамические системы, полученные таким образом в пересечении любых двух локальных карт, полностью эквивалентны и отличаются друг от друга только монотонной заменой времени.

Компоненты границы Γ_i , пополняющие фазовое пространство на бесконечности и приклеенные к фазовому пространству в результате разрешения вырожденных особых точек, являются инвариантными многообразиями динамической системы, преобразованной на замкнутое (компактное) многообразие S . Компоненты границы Γ_j типа (3.2), пополняющие физическую область S_1 при конечных значениях координат x_i , могут не быть инвариантными многообразиями — в случае, если траектории динамической системы остаются в области S_1 только при одном направлении времени. В этом случае траектории динамической системы пересекают указанные компоненты границы только в одну сторону — внутрь многообразия S .

Преобразования, указанные в §§ 2, 3, составляют основное содержание следующего общего метода исследования многомерных динамических систем. Метод максимально невырожденной компактификации динамической системы, определенной в некоторой физической области S_1 , состоит в построении такого компактного многообразия S с границей Γ (состоящей из нескольких компонент) и динамической системы на S , что построенная динамическая система гладко продолжается на границу Γ , имеет максимально невырожденные особые точки и внутри многообразия S эквивалентна исходной динамической системе в физической области S_1 . Построение компактного многообразия S использует изложенные выше методы — пополнение фазового пространства границей на бесконечности и разрешение вырожденных особых точек динамической системы.

§ 4. Метод сепаратрисной аппроксимации траекторий динамической системы

После построения компактного многообразия S с указанными в § 3 свойствами следует перейти к изучению невырожденных особых точек и особых множеств динамической системы, определенной на многообразии S , и их сепаратрис. Особым точкам динамической системы, лежащим внутри многообразия S , соответствуют простейшие точные решения изучаемой задачи. Невырожденные особые точки, лежащие внутри многообразия S и на различных компонентах границы Γ в стороне от углов границы, имеют сепаратрисы, входящие в них из физической области. Этим сепаратрисам отвечают некоторые специальные решения рассматриваемой задачи. Асимптотики при $\tau \rightarrow +\infty$ (или $\tau \rightarrow -\infty$) и устойчивость таких решений полностью определяются свойствами особых точек.

Неустойчивые особые точки динамической системы, лежащие в углах границы $\Gamma_i \cap \Gamma_j$, имеют сепаратрисы, целиком лежащие на компонентах границы Γ_i и Γ_j (являющихся инвариантными многообразиями динамической системы), и могут вообще не иметь сепаратрис, входящих в них из физической области S_1 . Каждая такая сепаратриса по отдельности не соответствует никакому точному решению исходной динамической системы (поскольку она лежит на приклеенной компоненте границы, которая отсутствовала в исходном фазовом пространстве). Однако во многих случаях сепаратрисы, лежащие на различных компонентах границы Γ_i , идут из одной неустойчивой особой точки в другую, из второй неустойчивой особой точки в третью и т. д., образуя при этом длинные последовательности сепаратрис, которые аппроксимируют сложные режимы динамики истинных физических траекторий динамической системы.

Действительно, если все сепаратрисы, выходящие из одной неустойчивой особой точки X_i , идут в некоторую другую неустойчивую особую точку X_j и т. д., образуя последовательность переходов

$$\dots \rightarrow X_i \rightarrow X_j \rightarrow X_k \rightarrow X_l \rightarrow \dots, \quad (4.1)$$

то траектории динамической системы, начавшиеся достаточно близко от одной из этих сепаратрис или особых точек, будут, по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных данных, сколь угодно долго двигаться вдоль некоторой последовательности сепаратрис (4.1).

Указанная ситуация реализуется, если для последовательности особых точек (4.1) неустойчивое многообразие $W_u(X_i)$ особой точки X_i (см. § 2) целиком принадлежит устойчивому многообразию $W_s(X_j)$ особой точки X_j и т. д. В общем случае пересечение любых двух инвариантных многообразий $W_u(X_k)$ и $W_s(X_l)$ является некоторым новым инвариантным многообразием W , на котором все траектории при $t \rightarrow -\infty$ выходят из особой точки X_k и при $t \rightarrow +\infty$ входят в особую точку X_l . Траектории, лежащие в пересечении двух инвариантных многообразий $W_u(X_k)$ и $W_s(X_l)$, называются гетероклиническими. Траектории, лежащие в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий одной и той же особой точки — $W_s(X_i)$ и $W_u(X_i)$ — называются гомоклиническими траекториями точки X_i . Устойчивые многообразия $W_s(X_k)$ и $W_s(X_l)$ разных особых точек попарно не пересекаются (также не пересекаются попарно и неустойчивые многообразия) — это следует из их определения.

Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия существуют не только у особых точек динамической системы, но и у неособых замкнутых траекторий — циклов Z_i . Гомоклинические и гетероклинические траектории, возникающие в пересече-

чениях таких инвариантных многообразий $W_u(Z_i)$ и $W_s(Z_j)$, имеют очень сложную динамику в фазовом пространстве: при $t \rightarrow -\infty$ и при $t \rightarrow +\infty$ эти решения осциллируют в окрестности инвариантных многообразий $W_s(Z_i)$ и $W_u(Z_j)$, никогда их не пересекая. Впервые гомоклинические решения были найдены А. Пуанкаре в задаче трех тел [1]. Для изучения гомоклинических решений рассматривают, следуя Пуанкаре, гиперповерхности \mathcal{L} в фазовом пространстве, трансверсально пересекающие траектории динамической системы. В окрестности цикла Z_i , пересекающей гиперповерхность \mathcal{L} в точке Y_i , определено отображение f (дiffeоморфизм) поверхности \mathcal{L} в себя, называемое функцией последования. Каждая точка x на поверхности \mathcal{L} является начальной точкой некоторой траектории $l(x)$; отображение f переводит точку x в следующую точку пересечения траектории $l(x)$ с гиперповерхностью \mathcal{L} . Замкнутые траектории — циклы Z_j — соответствуют неподвижным точкам Y_j отображения f , у которых также имеются устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия (пересечения инвариантных многообразий $W_s(Z_j)$ и $W_u(Z_j)$ с гиперповерхностью \mathcal{L}). Для diffeоморфизма f аналогично определяются гетероклинические и гомоклинические точки неподвижных точек Y_j . Гомоклинические точки и связанные с ними свойства траекторий подробно изучались в большом числе работ, начиная с [1, 8]; обзор последних результатов см. в [11].

Специфика рассматриваемых в данной книге динамических систем, возникающих в задачах астрофизики и газовой динамики, заключается в том, что большинство особых точек этих динамических систем лежат на различных компонентах границы Γ_i соответствующих компактных многообразий S . Динамические системы на компонентах границы Γ_i сильно упрощаются, вследствие чего сепаратрисы особых точек X_j во многих случаях удается полностью исследовать (а иногда даже проинтегрировать в явном виде). Доказательство того, что некоторая сепаратриса идет из одной особой точки в другую, часто опирается на существование специальных монотонных функций U ($dU/d\tau > 0$) динамической системы на данных компонентах границы. При исследовании движения сепаратрис на двумерных компонентах границы часто оказывается полезным критерий Дюлака — Бендиксона отсутствия замкнутых траекторий (циклов); см. § 1, п. IV.

Все реализующиеся в рассматриваемой динамической системе сепаратрисные переходы между особыми точками и особыми множествами удобно систематизировать в сепаратрисной диаграмме, которую можно изобразить в виде матрицы $n \times n$ (где n — число особых точек и особых множеств) или в виде графа на плоскости (например, типа (4.1)). Если последовательность сепаратрисных переходов (4.1) содержит конечное число сепаратрис и начинается в некоторой отталкивающей особой точке X_1 и заканчивается

в некоторой притягивающей особой точке X_n , то сепаратрисная аппроксимация (4.1) дает полное (при всех t) качественное описание динамики близких траекторий динамической системы.

В некоторых динамических системах реализуются бесконечные последовательности сепаратрисных переходов (4.1), содержащие циклы, возвраты в окрестность начальной особой точки и т. д. В этих случаях в динамической системе имеются сложные нелинейные колебательные режимы, которые аппроксимируются последовательностями сепаратрис (4.1), причем существуют физические траектории, совершающие сколь угодно большое число сепаратрисных переходов. Если особые точки образуют непрерывные особые множества, то сепаратрисные переходы между ними определяют отображения одного особого множества на другое (начальная точка сепаратрисы отображается в конечную точку этой сепаратрисы). Полученные таким образом отображения особых множеств представляют собой дискретные комбинаторные модели сложных нелинейных колебательных режимов в изучаемой динамической системе. Отображения особых множеств в некоторых случаях обладают (при неограниченном повторении) эргодическими свойствами и поэтому обуславливают стохастизацию (по некоторым параметрам) траекторий динамической системы, идущих вдоль последовательностей сепаратрис между этими особыми множествами.

Другой механизм стохастизации траекторий связан с возможностью неоднозначных сепаратрисных переходов в сепаратрисной диаграмме (4.1). Такая неоднозначность реализуется, например, если из некоторой особой точки X_k выходит целый пучок сепаратрис, которые при неограниченном продолжении идут в различные особые точки X_1, \dots, X_l . Эта неоднозначность также обуславливает стохастическое поведение траекторий и связана с неустойчивостью траекторий в зависимости от начальных данных в окрестности особых точек динамической системы.

Отметим, что в некоторых случаях удается проинтегрировать сепаратрисы особых точек, идущие внутри многообразия S . Аппроксимация траекторий динамической системы такими сепаратрисными переходами позволяет исследовать поведение траекторий не только в окрестности границы Γ , но и внутри многообразия S .

Таким образом, метод сепаратрисной аппроксимации траекторий динамической системы, основанный на методе максимально невырожденной компактификации динамической системы, позволяет в принципе детально изучить сложные нелинейные режимы динамики траекторий, обладающие рядом стохастических свойств, а также получить картину поведения траекторий динамической системы в целом. Эффективность изложенных в данной главе методов качественного исследования многомерных динамических систем показана в дальнейших главах книги.

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ОДНОРОДНЫХ
КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ БЕЗ ДВИЖЕНИЯ
ВЕЩЕСТВА

Однородные космологические модели являются одним из важнейших классов решений уравнений общей теории относительности. Исследование однородных космологических моделей, начиная с классических работ А. А. Фридмана [45, 46], явилось началом современной релятивистской космологии и оказало в дальнейшем решающее влияние на ее развитие. Полный класс однородных решений уравнений общей теории относительности впервые был выделен в работе [47]. Исследованию характера сингулярности в общих решениях уравнений Эйнштейна посвящен цикл работ [48—52], вершиной которого явилось открытие общего колебательного режима поведения метрики вблизи космологической сингулярности [49, 50]. Большое значение для исследования сингулярностей в решениях уравнений Эйнштейна имеют общие теоремы, доказанные в работах [53—56]. Важнейшими физическими вопросами при изучении однородных космологических моделей являются: выяснение конкретного характера сингулярности решения при сжатии пространства, исследование изотропизации решений при расширении пространства, отыскание наиболее общих режимов динамики однородных космологических моделей при сжатии и при расширении пространства, исследование конкретных свойств колебательного режима поведения метрики вблизи сингулярности и др. Изучению этих вопросов посвящено большое число работ [57—76], подробная библиография которых приведена в [74, 75]. Все указанные работы используют традиционные теор-физические методы исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым сводятся уравнения Эйнштейна для однородных космологических моделей (к числу этих методов относятся метод аппроксимации траекторий сложной системы уравнений решениями некоторых более простых систем с последующими сшивками решений, метод малого параметра, а также численный счет).

В работах [77, 78] при исследовании простейших однородных космологических моделей, для которых система уравнений Эйнштейна сводится на плоскость, впервые были применены классические методы двумерной качественной теории Пуанкаре — Бендиксона (в дальнейшем подобные методы применялись в работах [79—81]). Однако более сложные однородные космологические

модели описываются динамическими системами в пространствах большей размерности, которая для наиболее общих моделей равна 12. В совместной работе С. П. Новикова и автора [12] для исследования шестимерной динамической системы, описывающей важную однородную космологическую модель IX типа без движения вещества, были впервые применены методы качественной теории многомерных динамических систем (результаты этой работы в подробном виде были опубликованы в [15, 21]). Дальнейшее исследование однородных космологических моделей [13, 16, 18, 19, 24, 82, 83] показало, что качественная теория многомерных динамических систем является наиболее адекватным математическим аппаратом для изучения однородных космологических моделей, позволяющим с помощью строгих методов получить полную картину их динамики. Данная глава и глава III посвящены подробному исследованию методами качественной теории многомерных динамических систем всех однородных космологических моделей с гидродинамическим тензором энергии-импульса, а также с электромагнитным полем.

§ 1. Уравнения общей теории относительности

Широко известны классические учебники [84, 85], подробно излагающие основные понятия и различные специальные вопросы общей теории относительности. Поэтому в данном и следующем параграфах приводятся только наиболее общие и необходимые для дальнейшего сведения.

Основными объектами изучения в общей теории относительности являются различные свойства четырехмерных пространственно-временных многообразий M^4 и движение материи на этих многообразиях. Геометрические свойства пространства-времени определяются метрикой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.1)$$

(всюду по повторяющимся индексам производится суммирование), где симметричная матрица $g_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеет сигнатуру $(+ - - -)$. В каждой точке существует такая система координат (называемая локально-лоренцевой системой отсчета), в которой метрика (1.1) с точностью до членов второго порядка приводится к виду

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.2)$$

Вид материи, заполняющей пространство-время, и ее свойства определяются тензором энергии-импульса материи T_{ij} . В данной книге рассматриваются два вида тензоров T_{ij} : гидродинамический тензор энергии-импульса

$$T_{ij} = (p + \epsilon)u_i u_j - p g_{ij} \quad (1.3)$$

и тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ik} F_{jl} g^{kl} + \frac{1}{4} g_{ij} F_{lm} F^{lm} \right). \quad (1.4)$$

В первом случае ε — плотность энергии вещества, p — давление, u^i — вектор 4-скорости вещества, по определению удовлетворяющий условию $g_{ij} u^i u^j = 1$. Уравнение состояния вещества рассматривается в виде $p = k\varepsilon$, $0 \leq k < 1$. В случае (1.4) кососимметричный тензор F_{ij} является тензором электромагнитного поля; по определению

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}, \quad (1.5)$$

где A^i — вектор-потенциал электромагнитного поля.

Уравнения общей теории относительности (ОТО) — уравнения Эйнштейна — связывают геометрические свойства пространственно-временного многообразия \mathcal{M}^4 со свойствами заполняющей его материи и имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ij}. \quad (1.6)$$

Тензор Риччи R_{ij} является сверткой тензора Римана $R^l{}_{ikj}$ ($R_{ij} = R^l{}_{ijl}$), который полностью определяет свойства кривизны пространства-времени (см. [84—86]). Скалярная кривизна R является полной сверткой тензора Римана: $R = R^l{}_{il} g^{ij} = R_{ij} g^{ij}$. В дальнейшем используется система единиц измерения, в которой скорость света $c = 1$ и гравитационная постоянная $k = 1/8\pi$.

Уравнения ОТО (1.6) (вместе с граничными условиями) полностью определяют эволюцию метрики g_{ij} ; эти уравнения определяют также и движение материи, поскольку из (1.6) в силу тождества Бьянки [84, 86] следуют уравнения

$$T^i{}_{ij} = 0 \quad (1.7)$$

(здесь используется стандартное обозначение для ковариантной производной [84, 86]). Уравнения (1.7) для гидродинамического тензора энергии-импульса (1.3) являются уравнениями гидродинамики (в инвариантной четырехмерной записи). Для тензора энергии-импульса электромагнитного поля (1.4) уравнения (1.7) являются обобщением на искривленное пространство второй пары уравнений Максвелла.

Уравнения Эйнштейна (1.6) следуют из принципа наименьшего действия Гильберта:

$$\delta \int (R \sqrt{|g|} + \Lambda \sqrt{|g|}) d\Omega = 0, \quad (1.8)$$

где $R \sqrt{|g|}$ и $\Lambda \sqrt{|g|}$ — действия соответственно для гравита-

ционного поля и метрики, $|g| = |\det(g_{ij})|$. Отметим, что в вариационном принципе (1.8) вариации метрики δg_{ij} предполагаются финитными по пространственно-временному многообразию M^4 . В случае электромагнитного поля действие

$$\Lambda \sqrt{|g|} = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik}.$$

Для гидродинамического тензора энергии-импульса (1.3) формально можно принять

$$\Lambda \sqrt{|g|} = -(p + \varepsilon) u_i u_j g^{ij} \sqrt{|g|} - (p - \varepsilon) \sqrt{|g|},$$

где связь $u_i u_j g^{ij} = 1$ используется только после варьирования действия по компонентам метрики.

Различные общие свойства решений уравнений Эйнштейна наглядно проявляются в ряде специальных, обладающих большой симметрией точных решений.

§ 2. Классические решения уравнений общей теории относительности

Один из основных методов получения точных решений уравнений общей теории относительности состоит в исследовании решений, инвариантных относительно некоторых групп преобразований координат. Такие решения обладают глубокими симметриями и являются наиболее простыми и вместе с тем естественными моделями многих астрофизических и космологических явлений. Классификация различных типов инвариантных решений на основе теории групп дана в книге [87].

Инвариантность решения относительно некоторой группы преобразований G означает, в частности, что группа G является группой изометрий метрики (1.1) на данном многообразии M^4 . Наибольшей инвариантностью обладает плоское пространство Минковского, метрика которого (1.2) имеет десятимерную группу изометрий — группу Пуанкаре. Эта группа порождается шестимерной группой преобразований Лоренца $O(1, 3)$ (группа линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму (метрику) (1.2)) и четырехмерной коммутативной группой R^4 произвольных сдвигов плоского пространства-времени.

I. Решения Фридмана. Шестимерными группами изометрий обладают замкнутое, открытое и плоское решения Фридмана. Эти решения были предложены А. А. Фридманом в 1922 г. в качестве нестационарных моделей однородной и изотропной Вселенной, метрика которой является метрикой постоянной кривизны. Вещество в решениях Фридмана покоится, т. е. 4-скорость вещества u^i имеет компоненты $(1, 0, 0, 0)$. Метрика замкнутой мо-

дели Фридмана имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (2.1)$$

Пространственные сечения $t = t_0$ этой модели являются трехмерными сферами S^3 , на которых ограничение метрики (2.1) имеет постоянную положительную кривизну $\lambda = a(t_0)^{-2}$ (т. е. сфера S^3 имеет радиус $a(t_0)$). Метрика (2.1) при любой зависимости $a(t)$ инвариантна относительно шестимерной группы $O(4)$ вращений стандартной трехмерной сферы. В случае уравнения состояния вещества $p = k\varepsilon$, $0 \leq k < 1$, уравнения Эйнштейна для метрик (2.1) сводятся к двум уравнениям:

$$\varepsilon a^4 = 3 \left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 + a^2, \quad \varepsilon a^{3(1+k)} = \text{const}, \quad (2.2)$$

где переменная η определяется соотношением $dt = a d\eta$.

Уравнения (2.2) в случае пылевидной материи ($p = k = 0$) решаются в следующем виде:

$$a = a_0 (1 - \cos \eta), \quad t = a_0 (\eta - \sin \eta). \quad (2.3)$$

Таким образом, радиус мира $a(t)$ в замкнутой модели Фридмана при изменении η от 0 до π монотонно растет от $a(0) = 0$ (что означает сингулярность решения, * поскольку $\varepsilon = Ca^{-3} \rightarrow \infty$) до состояния максимального расширения $a(\pi a_0) = 2a_0$ и затем при изменении η от π до 2π радиус мира монотонно уменьшается до нуля: $a(2\pi a_0) = 0$. Аналогичные свойства имеют замкнутые решения Фридмана при любых $k \neq 0$.

Метрика открытой модели Фридмана имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (2.4)$$

Здесь пространственные сечения $t = t_0$ являются многообразиями постоянной отрицательной кривизны $\lambda = -a(t_0)^{-2}$ (трехмерными пространствами Лобачевского), которые имеют шестимерную группу изометрий, являющуюся группой Лоренца $O(1, 3)$. Уравнения Эйнштейна для метрик вида (2.4) сводятся к двум уравнениям:

$$\varepsilon a^4 = 3 \left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 - a^2, \quad \varepsilon a^{3(1+k)} = \text{const}, \quad (2.5)$$

которые в случае пылевидной материи решаются в следующем виде:

$$a = a_0 (\text{ch} \eta - 1), \quad t = a_0 (\text{sh} \eta - \eta). \quad (2.6)$$

Согласно (2.6) открытое решение Фридмана (2.4) имеет сингулярность при $t = 0$, поскольку $a(0) = 0$; при возрастании t от 0 до ∞ функция $a(t)$ монотонно растет до бесконечности.

Метрика решений Фридмана с плоским трехмерным пространством имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \quad (2.7)$$

Решения (2.7), очевидно, инвариантны относительно шестимерной группы изометрий плоского трехмерного пространства (сдвиги и ортогональные вращения). Уравнения Эйнштейна для метрик (2.7) сводятся к уравнениям

$$\varepsilon a^4 = 3 \left(\frac{da}{dt} \right)^2, \quad \varepsilon a^{3(1+k)} = \text{const}, \quad (2.8)$$

которые легко решаются при всех k :

$$a = a_0 t^{2/(3(1+k))}. \quad (2.9)$$

Следовательно, в плоском решении Фридмана функция $a(t)$ при возрастании t от 0 до ∞ монотонно растет от сингулярности $a(0) = 0$ до бесконечности, как и в открытом решении Фридмана.

Общим свойством всех трех решений Фридмана является наличие физической сингулярности $a(0) = 0$, где плотность энергии $\varepsilon \rightarrow \infty$ (при этом $|R| \rightarrow \infty$, поскольку $R = -T_{ij}g^{ij} = (3k - 1)\varepsilon$). Наличие некоторой физической сингулярности в общем решении уравнений Эйнштейна гарантируется рядом теорем, доказанных в работах [54 — 57]. Конкретный характер сингулярности может быть существенно различным. Например, уже простейшее обобщение плоского решения Фридмана имеет совершенно другую — анизотропную сингулярность.

II. Решения Казнера. Обобщением плоского решения Фридмана являются метрики следующего вида:

$$ds^2 = dt^2 - q_1(t)dx_1^2 - q_2(t)dx_2^2 - q_3(t)dx_3^2, \quad (2.10)$$

среди которых решение Фридмана выделяется условиями $q_1(t) \equiv q_2(t) \equiv q_3(t)$. Группа изометрий общей метрики (2.10) состоит из произвольных сдвигов по трехмерному пространству x_1, x_2, x_3 , т. е. является трехмерной коммутативной группой R^3 . Уравнения Эйнштейна для метрик (2.10) сводятся к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} ((q_1q_2q_3)^{1/2} (\ln q_i))' &= (\varepsilon - p)(q_1q_2q_3)^{1/2}, \\ 2(\ln(q_1q_2q_3))'' + \sum_{i=1}^3 ((\ln q_i)')^2 &= -2(\varepsilon + 3p), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где точка означает дифференцирование по времени.

В случае пылевидной материи ($p = 0$) уравнения (2.11) легко решаются [88, 59] и имеют следующие два типа решений:

$$\varepsilon = 0: q_i(t) = C_i t^{2p_i}, \quad (2.12)$$

$$\varepsilon \neq 0: q_i(t) = C_i t^{2p_i} (t + t_0)^{4/3 - 2p_i}, \quad \varepsilon = 4/3t(t + t_0). \quad (2.13)$$

Постоянные p_1, p_2, p_3 удовлетворяют двум условиям:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \quad (2.14)$$

и называются казнеровскими показателями.

Решения Казнера [88] (2.12) определяют метрики вида (2.10) в пустом пространстве. При $t = 0$ эти решения при всех наборах казнеровских показателей p_1, p_2, p_3 , кроме набора $(1, 0, 0)$, имеют физическую особенность, не устранимую никаким преобразованием координат. Исключительное решение

$$ds^2 = dt^2 - C_1 t^2 dx_1^2 - C_2 dx_2^2 - C_3 dx_3^2 \quad (2.15)$$

после преобразования в координаты $\tau = t \operatorname{ch} x_1$, $\xi = t \operatorname{sh} x_1$ переходит в решение Минковского (1.2). Решение (2.15) является простейшим примером, показывающим, что наличие особенности в данном конкретном виде метрики еще не означает наличие физической особенности решения, поскольку особенность метрики в отдельных случаях может быть устранена с помощью некоторого преобразования координат.

Решения (2.13) в заполненном пространстве, полученные впервые в работе [59], содержат как частный случай при $C_1 = C_2 = C_3$, $t_0 = 0$ плоское решение Фридмана (2.7) — (2.9). В общем случае $t_0 > 0$ решения (2.13) при $t \rightarrow 0$ имеют анизотропную сингулярность того же вида, что и решения Казнера (2.12) в пустоте. Таким образом, плоское решение Фридмана (2.7) — (2.9) при сжатии пространства ($\det(g_{ij}) \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$) является неустойчивым в классе возмущений вида (2.10). При расширении пространства ($t \rightarrow \infty$) все решения (2.13) имеют ту же асимптотику, что и решение Фридмана. Следовательно, при расширении пространства происходит изотропизация первоначально анизотропных решений (2.13).

Метрики вида (2.10) определяют простейшую однородную космологическую модель — модель I типа. В рассмотренном случае два важных физических вопроса — исследование характера поведения метрики в окрестности космологической сингулярности ($\det \|g_{ij}\| = 0$) и исследование характера изотропизации метрики при расширении пространства — имеют весьма простое решение. Для более сложных однородных космологических моделей уравнения Эйнштейна уже не удается проинтегрировать в явном виде. Полное исследование всех режимов поведения метрики однородных космологических моделей проводится в дальнейших параграфах с помощью методов качественной теории динамических систем.

III. Решение Шварцшильда. Это классическое решение описывает гравитационное поле, создаваемое в пустом пространстве сферически-симметричным телом массы $m = r_g/2$. Метрика пространства-времени в этом случае необходимо является статической

и имеет следующий вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.16)$$

Решение Шварцшильда при $r \rightarrow \infty$ стремится к плоскому решению Минковского, имеет физическую сингулярность при $r = 0$ и нефизическую, устранимую сингулярность на гравитационном радиусе $r = r_g$.

Полное сферически-симметричное решение в пустом пространстве, не имеющее нефизических сингулярностей, было построено Крускалом [89] с помощью следующего преобразования решения (2.16) в координаты τ, ζ :

$$\begin{aligned} r > r_g: \quad \tau &= 2r_g e^{r/2r_g} (r - r_g)^{1/2} \operatorname{sh} (t/2r_g), \\ \zeta &= 2r_g e^{r/2r_g} (r - r_g)^{1/2} \operatorname{ch} (t/2r_g); \\ r < r_g: \quad \tau &= 2r_g e^{r/2r_g} (r_g - r)^{1/2} \operatorname{ch} (t/2r_g), \\ \zeta &= 2r_g e^{r/2r_g} (r_g - r)^{1/2} \operatorname{sh} (t/2r_g). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Метрика (2.16) в новых координатах τ, ζ принимает вид

$$ds^2 = \frac{1}{r} e^{-r/r_g} (d\tau^2 - d\zeta^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.18)$$

причем функция $r(\tau, \zeta)$ в силу формул (2.17) определяется из соотношения

$$\tau^2 - \zeta^2 = 4r_g^2 e^{r/r_g} (r_g - r). \quad (2.19)$$

Линии $r = \text{const}$ на плоскости τ, ζ в силу (2.19) являются гиперболой. Решение (2.18) определено в области плоскости τ, ζ , заключенной между двумя ветвями гиперболы $r(\tau, \zeta) = 0$, на которой решение (2.18) имеет неустранимую физическую особенность. Линия $r = r_g$ состоит из двух прямых $\tau = \pm \zeta$, на которых метрика (2.18) совершенно регулярна. Прямые $\tau = \pm \zeta$ делят плоскость на четыре области: две области T_+ ($\tau > 0$) и T_- ($\tau < 0$), находящиеся под гравитационным радиусом ($r < r_g$, $|\tau| > |\zeta|$), и две области R_1 и R_2 , находящиеся вне гравитационного радиуса ($r > r_g$, $|\tau| < |\zeta|$). Области T_+ и R_1 в силу преобразования (2.17) соответствуют двум областям $r < r_g$ и $r > r_g$ решения Шварцшильда (2.16).

В полном решении Крускала (2.18) две области R_1 и R_2 не сообщаются никакими физическими сигналами. В области T_+ все времениподобные и световые линии за конечный отрезок собственного времени входят в физическую особенность $r = 0$. Пространственно-подобные сечения $\tau = \tau_0$, $-\infty < \zeta < +\infty$, при $\tau_0^2 < 4r_g^2$ являются произведением двумерной сферы S^2 на прямую R^1 , причем минимальный радиус сферы S^2 определяется из (2.19)

при $\zeta = 0$. В дальнейшем, в главе IV, будут построены автомодельные решения уравнений Эйнштейна в заполненном пространстве с уравнением состояния вещества $p = k\varepsilon$, обладающие рядом аналогичных свойств.

§ 3. Общие свойства однородных космологических моделей

I. Однородными космологическими моделями называются пространственно-временные многообразия M^4 , на которых задана метрика ds^2 , удовлетворяющая уравнениям Эйнштейна и инвариантная относительно некоторой трехмерной группы Ли G преобразований многообразия M^4 , действующей с трехмерными орбитами (орбитой называется множество точек, получаемых из данной точки действием всех преобразований группы G). Наибольшее значение для космологии имеют пространственно-однородные космологические модели, для которых орбиты группы Ли G являются пространственно-подобными (ограничение метрики ds^2 на орбитах группы G отрицательно определено). Только такие однородные модели и рассматриваются в дальнейшем. Пусть X_0 — векторное поле, ортогональное к орбитам группы G . В силу пространственной однородности метрики векторное поле X_0 является времениподобным. Поэтому можно нормировать длину векторного поля X_0 ($\langle X_0, X_0 \rangle = 1$) и рассматривать интегральные кривые поля X_0 в качестве линий времени t , причем на каждой орбите группы G имеем $t = \text{const}$. Можно показать, что если метрика ds^2 удовлетворяет уравнениям Эйнштейна, то каждая интегральная кривая поля X_0 пересекает любую орбиту группы G только один раз (в силу существования монотонной функции). Поэтому пространственно-временное многообразие M^4 можно представить в виде произведения оси времени R^1 на некоторую орбиту G_1 : $M^4 = R^1 \times G_1$ (орбита G_1 сама является трехмерной группой Ли, имеющей ту же алгебру Ли, что и группа Ли G).

Пусть X_1, X_2, X_3 — векторные поля, являющиеся генераторами действия группы Ли G . Векторные поля X_1, X_2, X_3 касаются орбит группы G и удовлетворяют коммутационным соотношениям, определенным алгеброй Ли \mathfrak{G} группы Ли G :

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k. \quad (3.1)$$

По построению векторные поля X_0 и X_i коммутируют ($[X_0, X_i] = 0$); метрика ds^2 в базисе векторных полей X_0, X_1, X_2, X_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & -g_{ij} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

где матрица $g_{ij}(t)$ положительно определена. В однородных кос-

мологических моделях все параметры материи, заполняющей пространство, должны быть инвариантны относительно преобразований из группы Ли G . В случае вещества, имеющего гидродинамический тензор энергии-импульса (1.3), компоненты скорости u^i в базисе инвариантных векторных полей X_0, X_1, X_2, X_3 , а также плотность энергии ϵ и давление p зависят только от времени t . Таким образом, локальные свойства однородных космологических моделей полностью определяются типом соответствующей трехмерной алгебры Ли G .

Приведем простую классификацию трехмерных алгебр Ли, полученную впервые Бьянки в 1897 г. [90]. Структурные константы C_{ij}^k (3.1) в силу антисимметричности по индексам i, j могут быть представлены в следующем виде:

$$C_{ij}^k = \epsilon_{ijl} n^{kl} + \delta_j^k a_i - \delta_i^k a_j, \quad (3.3)$$

где ϵ_{ijl} — полностью антисимметричный трехмерный тензор, n^{kl} — трехмерный симметричный тензор второго ранга, a_i — трехмерный вектор. Тождество Якоби

$$[[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], X_i] + [[X_k, X_i], X_j] = 0$$

приводит к условию $n^{kl} a_l = 0$, т. е. вектор a_l (если $a_l \neq 0$) является собственным вектором матрицы n^{kl} , отвечающим нулевому собственному числу. Симметричная матрица n^{kl} в некотором новом базисе X_1, X_2, X_3 приводится к диагональному виду; пусть n_1, n_2, n_3 — собственные значения матрицы n^{kl} . В силу условия $n^{kl} a_l = 0$ можно считать, что вектор a_l в новом базисе имеет координаты $(0, 0, a)$, причем либо $n_3 = 0$, либо $a = 0$. В новом базисе X_1, X_2, X_3 коммутационные соотношения (3.1) — (3.3) принимают вид

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= n_3 X_3, & [X_2, X_3] &= n_1 X_1 - a X_2, \\ [X_3, X_1] &= n_2 X_2 + a X_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

С помощью линейных растяжений векторов X_1, X_2, X_3 коммутационные соотношения (3.4) и соответствующие трехмерные алгебры Ли приводятся к одному из девяти типов, указанных в табл. 1, где параметр a — любое положительное число. Типы VI и VII образуют однопараметрические семейства неизоморфных алгебр Ли.

В приведенной таблице содержатся следующие известные трехмерные алгебры Ли: тип I — коммутативная алгебра Ли R^3 ; тип VIII — алгебра Ли группы $SO(2, 1)$ или $SL(2, R)$; тип IX — алгебра Ли группы $SO(3)$. По стандартной алгебраической классификации алгебр Ли (см. [91]) алгебра Ли типа II является нильпотентной, алгебры Ли типов III—VII являются разрешимыми, алгебры Ли типов VIII и IX являются так называемыми простыми алгебрами Ли,

Таблица 1

Классификация Бьянки трехмерных алгебр Ли

| Тип по Бьянки | a | n_1 | n_2 | n_3 | Тип по Бьянки | a | n_1 | n_2 | n_3 |
|------------------|-----|-------|-------|-------|-------------------|-----|-------|-------|-------|
| I | 0 | 0 | 0 | 0 | III | 1 | 1 | -1 | 0 |
| II | 0 | 1 | 0 | 0 | IV | 1 | 1 | 0 | 0 |
| VI ₀ | 0 | 1 | -1 | 0 | V | 1 | 0 | 0 | 0 |
| VII ₀ | 0 | 1 | 1 | 0 | VI ($a \neq 1$) | a | 1 | -1 | 0 |
| VIII | 0 | 1 | 1 | -1 | VII | a | 1 | 1 | 0 |
| IX | 0 | 1 | 1 | 1 | | | | | |

С алгеброй Ли \mathfrak{G} группы Ли G естественно связана еще одна группа Ли G_2 — группа внутренних автоморфизмов алгебры Ли \mathfrak{G} , или группа всех линейных преобразований алгебры Ли, не меняющих коммутационных соотношений между векторами X_i . Для коммутативной алгебры Ли (тип I) группой внутренних автоморфизмов G_2 является полная девятимерная группа всех линейных преобразований пространства R^3 ; для простых алгебр Ли VIII и IX типов группы внутренних автоморфизмов G_2 совпадают с соответствующими этим алгебрам трехмерными группами Ли — $SO(2, 1)$ и $SO(3)$ соответственно; для остальных трехмерных алгебр Ли группа внутренних автоморфизмов G_2 имеет размерность четыре и выше.

Трехмерные алгебры Ли и связанные с ними однородные космологические модели естественно разбиваются на два класса [62], соответствующие двум частям табл. 1: класс A ($a = 0$) и класс B ($a \neq 0$, $n_3 = 0$). Однородные космологические модели в каждом из этих двух классов имеют целый ряд важных общих свойств.

II. Для однородных космологических моделей все компоненты тензора кривизны Римана R_{jkl}^i метрики (3.2) в базисе векторных полей X_0, X_1, X_2, X_3 выражаются через компоненты метрики $g_{ij}(t)$, ее производные (первого и второго порядка) по времени t и структурные константы C_{ij}^k соответствующей алгебры Ли. Все необходимые вычисления проводятся по стандартным формулам, определяющим кривизну метрики в неголономном репере (см. [84, 85]). Компоненты тензора кривизны Риччи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 R_0^0 &= -\frac{1}{2} \dot{\kappa}_\alpha^\alpha - \frac{1}{4} \kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha, \quad \alpha, \beta, i, j, k, l = 1, 2, 3, \\
 R_i^0 &= -\frac{1}{2} \kappa_k^j (C_{ji}^k - \delta_i^k C_{lj}^l), \\
 R_i^j &= -P_i^j - \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \frac{d}{dt} (\sqrt{|g|} \kappa_i^j).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь $\kappa_k^j = \dot{g}_{ki}g^{ij}$, $|g| = |\det(g_{ij})|$; компоненты трехмерного тензора Риччи P_{ij} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} P_{ij} &= -\Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^l - C_{lk}^l \Gamma_{ij}^k, \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} (C_{ij}^k + C_{il}^m g_{mj} g^{kl} + C_{jl}^m g_{mi} g^{kl}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Система уравнений Эйнштейна $R_i^j - 1/2 \delta_i^j R = T_i^j$ для однородных космологических моделей с гидродинамическим тензором энергии-импульса материи (1.3) является, в силу приведенных формул (3.5), (3.6), системой шести «тензорных» уравнений $(i, j) \neq 0$, содержащих вторые производные по времени от метрики $g_{ij}(t)$, и четырех уравнений $R_0^0 - 1/2 R = T_0^0$ и $R_i^0 = T_i^0$, содержащих только первые производные от компонент метрики $g_{ij}(t)$. Эти четыре уравнения позволяют выразить плотность энергии ϵ и три независимые компоненты скорости u^i через компоненты метрики $g_{ij}(t)$ и их первые производные по времени. После подстановки полученных выражений в шесть тензорных уравнений Эйнштейна получается замкнутая система дифференциальных уравнений второго порядка на компоненты метрики $g_{ij}(t)$.

Для однородных космологических моделей без движения вещества, рассматривающихся в данной главе, вектор 4-скорости материи в базисе инвариантных векторных полей X_0, X_1, X_2, X_3 имеет следующие компоненты: $u^0 = 1, u^i = 0$ (это означает, что система отсчета, в которой рассматривается метрика (3.2), является синхронной ($g_{00} = 1, g_{0i} = 0$) и сопутствующей ($u^i = 0, i \neq 0$)). В этом случае уравнения Эйнштейна $R_i^0 = T_i^0 = 0$ являются тремя связями для системы шести тензорных уравнений Эйнштейна.

Покажем, что на уровне связей $R_i^0 = 0$ метрика однородных космологических моделей класса A одновременно во все моменты времени t приводится к диагональному виду, а в случае однородных космологических моделей класса B — к виду с одним недиагональным коэффициентом. Такое приведение основано на важном свойстве системы уравнений Эйнштейна для однородных космологических моделей — инвариантность относительно группы G_2 внутренних автоморфизмов соответствующей алгебры Ли. Действительно, если преобразование $X_i \rightarrow X'_i = A_i^j X_j$ не меняет коммутационных соотношений между векторами X_i (не меняет коэффициенты C_{jk}^i), то система уравнений Эйнштейна в базисе векторных полей X_0, X'_i имеет тот же вид, что и в базисе X_0, X_i . Поэтому соответствующее преобразование метрики

$$g_{ij} \rightarrow g'_{ij} = A_i^k g_{kl} A_j^l \quad (3.7)$$

переводит решения этой системы снова в решения.

В случае однородной космологической модели I типа группа G_2 внутренних автоморфизмов коммутативной алгебры Ли R^4 является группой всех линейных преобразований R^3 . Поэтому с помощью некоторого внутреннего автоморфизма можно одновременно привести к диагональному виду метрику $g_{ij}(t)$ модели I типа и матрицу ее первых производных по времени $\dot{g}_{ij}(t)$. Решение с диагональными начальными данными в однородной модели I типа остается диагональным во все моменты времени, что и означает возможность приведения произвольного решения в модели I типа к диагональному виду.

Метрику любой однородной космологической модели $g_{ij}(t)$ с помощью внутреннего автоморфизма соответствующей алгебры Ли можно привести в данный момент времени $t = t_0$ к диагональному виду. При этом уравнения Эйнштейна $R_i^0 = 0$ для однородных космологических моделей класса A в силу (3.5) имеют вид (в момент времени $t = t_0$)

$$\begin{aligned} (-2)R_1^0 &= g_{23}(n_2g^{33} - n_3g^{22}) = 0, \\ (-2)R_2^0 &= g_{13}(n_3g^{11} - n_1g^{33}) = 0, \\ (-2)R_3^0 &= g_{21}(n_1g^{22} - n_2g^{11}) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для однородной модели II типа ($n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$) с помощью внутреннего автоморфизма соответствующей алгебры Ли можно одновременно привести метрику $g_{ij}(t_0)$ к диагональному виду и добиться, чтобы коэффициент $\dot{g}_{23}(t_0) = 0$. В этом случае из уравнений (3.8) следует $\dot{g}_{13}(t_0) = \dot{g}_{21}(t_0) = 0$. Для остальных однородных моделей класса A из уравнений (3.8) при $g^{ii} \neq g^{jj}$ следует $\dot{g}_{ij} = 0$. Если же, например, $g^{11} = g^{22}$ и $n_1 = n_2 = 1$, то ортогональный поворот векторов X_1, X_2 сохраняет коммутаторы и диагональность метрики $g_{ij}(t_0)$ и позволяет добиться $\dot{g}_{12}(t_0) = 0$.

Таким образом, для каждой однородной космологической модели класса A в начальный момент времени t_0 можно с помощью линейного преобразования векторов X_1, X_2, X_3 , сохраняющего коммутационные соотношения, и в силу уравнений Эйнштейна $R_i^0 = 0$ одновременно привести к диагональному виду две матрицы, $g_{ij}(t_0)$ и $\dot{g}_{ij}(t_0)$.

В силу остальных уравнений Эйнштейна для однородных моделей класса A из диагональности начальных данных $g_{ij}(t_0)$ и $\dot{g}_{ij}(t_0)$ следует диагональность решения во все моменты времени, что и означает искомое одновременное приведение решения к диагональному виду.

Для однородных космологических моделей класса B уравнения Эйнштейна $R_i^0 = 0$ (3.5) при условии диагональности метрики

$g_{ij}(t_0)$ имеют вид (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} (-2) R_1^0 &= (n_2 \dot{g}_{23} + 3a \dot{g}_{13}) g^{33} = 0, \\ (-2) R_2^0 &= (3a \dot{g}_{23} - n_1 \dot{g}_{13}) g^{33} = 0, \\ (-2) R_3^0 &= -a (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\kappa_3^2) + n_1 \kappa_1^2 - n_2 \kappa_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из первых двух уравнений (3.9) при $9a^2 + n_1 n_2 \neq 0$ следует, что $\dot{g}_{13}(t_0) = \dot{g}_{23}(t_0) = 0$. Решения уравнений Эйнштейна для однородных моделей класса B с такими начальными данными имеют тождественно $g_{13}(t) \equiv g_{23}(t) \equiv 0$, что и означает возможность приведения решения к виду с одним недиагональным коэффициентом $g_{12}(t)$. Исключительный случай $9a^2 + n_1 n_2 = 0$ реализуется только для однородной модели VI типа при $a = 1/3$; в этом случае необходимо рассматривать решения уравнений Эйнштейна в полном пространстве трехмерных матриц (см. главу III). В случае однородной модели V типа ($a = 1$, $n_i = 0$) с помощью внутреннего автоморфизма соответствующей алгебры Ли можно одновременно преобразовать метрику $g_{ij}(t_0)$ к диагональному виду и добиться, чтобы $\dot{g}_{12}(t_0) = 0$. Поэтому (и в силу уравнений (3.9)) решения уравнений Эйнштейна в однородной модели V типа приводятся одновременно во все моменты времени к диагональному виду.

Для однородных космологических моделей класса A и однородной модели V типа в качестве координат в пространстве диагональных метрик $g_{ij}(t)$ используем их собственные числа $q_i(t) = g_{ii}(t)$. Для остальных однородных космологических моделей класса B приведем метрику $g_{ij}(t)$ (имеющую один недиагональный элемент $g_{12}(t) \neq 0$) к диагональному виду с помощью зависящего от времени линейного преобразования $\mathcal{P}(t)$, сохраняющего коммутационные соотношения в соответствующей алгебре Ли. Такие преобразования имеют следующий вид:

$$\mathcal{P}(t) = \begin{pmatrix} \text{Тип VII} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}(t) = \begin{pmatrix} \text{Тип III, VI} \\ \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi & 0 \\ \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}(t) = \begin{pmatrix} \text{Тип IV} \\ 1 & \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

По определению имеем

$$\mathcal{P}^t \cdot g \cdot \mathcal{P} = q, \quad g = (\mathcal{P}^t)^{-1} \cdot q \cdot \mathcal{P}^{-1}, \quad (3.11)$$

где g — матрица метрики (g_{ij}), q — диагональная матрица с коэффициентами на диагонали q_1, q_2, q_3 .

Отметим, что для однородных космологических моделей класса A диагональные метрики $g_{ii}(t)$ тождественно удовлетворяют уравнениям Эйнштейна $R_i^0 = 0$. Для однородных моделей класса B метрики с одним недиагональным коэффициентом $g_{12}(t)$ тождест-

венно удовлетворяют уравнениям $R_1^0 = R_2^0 = 0$, в то время как уравнение $R_3^0 = 0$ (см. (3.9)) является дополнительным условием, которое будет учитываться в дальнейшем.

III. Тензорные компоненты уравнений Эйнштейна можно записать в весьма удобной лагранжевой форме. Для этого воспользуемся выводом уравнений Эйнштейна из принципа наименьшего действия (1.8), основанным на следующем известном тождестве (в дальнейшем индексы тензоров принимают следующие значения: $i, j, k, \alpha, \beta = 1, 2, 3$; $l, n, m = 0, 1, 2, 3$):

$$\delta(R\sqrt{|g|}) = \left(R_{mn} - \frac{1}{2}g_{nm}R\right)\sqrt{|g|}\delta g^{nm} + \sqrt{|g|}g^{nm}\delta R_{nm}. \quad (3.12)$$

Здесь и далее $|g| = |\det(g_{ij})|$. Последнее слагаемое в (3.12) является дивергенцией (см. [84]):

$$\sqrt{|g|}g^{nm}\delta R_{nm} = \partial(\sqrt{|g|}w^l)/\partial x^l, \quad (3.13)$$

и поэтому интеграл от этого выражения по всему четырехмерному пространству-времени в случае финитных вариаций метрики δg_{ij} тождественно равен нулю. Для однородных космологических моделей вариации метрики по самому определению однородности не являются финитными, поэтому при выводе лагранжевой формы уравнений Эйнштейна для однородных космологических моделей последнее слагаемое в (3.12) необходимо учитывать (исключением является однородная космологическая модель IX типа, где однородные вариации метрики финитны в силу компактности группы $SO(3)$). С помощью формул (3.5) находим

$$\sqrt{|g|}g^{nm}\delta R_{nm} = -\sqrt{|g(t)|}g^{ik}(t)\delta P_{ik} + \frac{d}{dt}(\sqrt{|g|}w^0), \quad (3.14)$$

где $w^0 = -1/2(g^{ik}\delta g_{ik} + \delta(\ln|g|))$. Запишем первое слагаемое в (3.14) в виде

$$-\sqrt{|g(t)|}g^{ik}(t)\delta P_{ik} = h'_i\delta q_i + h'_\varphi\delta\varphi. \quad (3.15)$$

Здесь и далее используется представление метрики $g_{ij}(t)$ в виде (3.11): $g = (\mathcal{P}^l)^{-1}q\mathcal{P}^{-1}$; координата φ для моделей класса B определена формулами (3.10); для моделей класса A (и модели V типа) координата $\varphi \equiv 0$, $\mathcal{P}(\varphi) \equiv 1$. Коэффициенты h'_i и h'_φ будут вычислены в дальнейшем.

Проведем необходимые преобразования оставшихся слагаемых в тождестве (3.12). В силу уравнений Эйнштейна при отсутствии движения вещества (уравнение состояния вещества $p = k\varepsilon$; см. (1.3)) получаем

$$\begin{aligned} \left(R_{nm} - \frac{1}{2}g_{nm}R\right)\sqrt{|g|}\delta g^{nm} &= T_{nm}\sqrt{|g|}\delta g^{nm} = \\ &= -T^l_{ng^{nm}}\sqrt{|g|}\delta g_{ml} = -\varepsilon\sqrt{|g|}(g_{00}^{-1}{}_{00} - kg^{ij}\delta g_{ji}) = \\ &= -\varepsilon\sqrt{|g|}(g_{00}^{-1}\delta g_{00} - kq_i^{-1}\delta q_i). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь, использовано тождество $g^{il} \delta g_{il} = |g|^{-1} \delta |g| = q_i^{-1} \delta q_i$. В синхронной системе отсчета (3.2) на основании формул (3.5) получаем

$$R \sqrt{|g|} = (R_0^0 + R_i^i) \sqrt{|g|} = \frac{1}{4} \sqrt{|g|} (\kappa_\alpha^\alpha \kappa_\beta^\beta - \kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha) - \\ - P_\alpha^\alpha \sqrt{|g|} - \frac{d}{dt} (\kappa_\alpha^\alpha \sqrt{|g|}) = L_1 - \frac{d}{dt} L_2, \quad (3.17)$$

где введены обозначения $L_2 = \kappa_\alpha^\alpha \sqrt{|g|}$, $L_1 = T' - V'_G$ и

$$T' = \frac{1}{4} (q_1 q_2 q_3)^{1/2} (\kappa_\alpha^\alpha \kappa_\beta^\beta - \kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha), \quad V'_G = P_\alpha^\alpha (q_1 q_2 q_3)^{1/2}. \quad (3.18)$$

Функция L_1 содержит только первые производные по времени от метрики $g_{ij}(t)$ и в дальнейшем играет роль лагранжиана.

Рассмотрим систему отсчета, отличающуюся от синхронной системы (см. (3.2)) заменой времени

$$\frac{d\tau}{dt} = |g(t)|^{-k/2} = (q_1 q_2 q_3)^{-k/2}. \quad (3.19)$$

В этой системе отсчета имеем $g_{00} = (q_1 q_2 q_3)^k$, поэтому выражение (3.16) тождественно обращается в нуль. Выражение (3.14) в новой системе отсчета имеет вид

$$\sqrt{|g|} g^{nm} \delta R_{nm} = - (q_1 q_2 q_3)^{(1+k)/2} g^{ik}(t) \delta P_{ik} + \\ + \frac{d}{d\tau} (w^0 (q_1 q_2 q_3)^{(1+k)/2}). \quad (3.20)$$

Вследствие инвариантности скалярной кривизны R в новой системе отсчета имеем

$$R \sqrt{|g|} = L_0 - \frac{d}{d\tau} L_2, \quad L_0 = L_1 (q_1 q_2 q_3)^{k/2}. \quad (3.21)$$

Для дальнейшего оказывается удобным использовать лагранжиан $L = 1/2 L_0$. В новой системе отсчета подставим в тождество (3.12) найденные выражения (3.16), (3.20) и (3.21) и проинтегрируем по времени τ от τ_1 до τ_2 (при этом предполагается, что на концах отрезка интегрирования $\delta g_{ij}(\tau_k) = 0$); в результате получим следующее уравнение:

$$\int \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i d\tau + \int \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi d\tau = \\ = \int h_i \delta q_i d\tau + \int h_\varphi \delta \varphi d\tau, \quad (3.22)$$

где $h_i = 1/2 h_i^i (q_1 q_2 q_3)^{k/2}$. Отсюда ввиду произвольности вариаций δq_i , $\delta \varphi$ получаем, что уравнения Эйнштейна для однородных космологических моделей без движения вещества эквивалентны

системе уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = h_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = h_\varphi. \quad (3.23)$$

Отметим, что проведенный вывод позволил исключить из уравнений Эйнштейна плотность энергии ε и получить замкнутую систему дифференциальных уравнений (3.23), определяющую изменение метрики $g_{ij}(t)$. Плотность энергии ε выражается через метрику g_{ij} и первые производные \dot{g}_{ij} в силу уравнения Эйнштейна $R_0^0 - 1/2 R = T_0^0$. Действительно, из формул (3.5) получаем

$$\begin{aligned} 2\varepsilon \sqrt{|g|} &= 2 \left(R_0^0 - \frac{1}{2} R \right) \sqrt{|g|} = (R_0^0 - R_\alpha^\alpha) \sqrt{|g|} = \\ &= \frac{1}{4} (\kappa_\alpha^\alpha \kappa_\beta^\beta - \kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha) \sqrt{|g|} + P_\alpha^\alpha \sqrt{|g|} = T' + V_G. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Функция $H' = T' + V_G$ (см. (3.18)) является энергией для лагранжиана L_1 (3.17). Энергия, соответствующая лагранжиану $L = 1/2 L_0$, в силу (3.21) имеет вид

$$H = T + V_G = \frac{1}{2} (q_1 q_2 q_3)^{k/2} (T' + V_G) = \varepsilon (q_1 q_2 q_3)^{(1+k)/2}. \quad (3.25)$$

В дальнейшем будет показано, что эта функция является первым интегралом системы (3.23).

IV. Перейдем к нахождению явного вида функции L и коэффициентов h_i, h_φ . Кинетическая энергия T согласно (3.25) и (3.18) имеет вид

$$T = \frac{1}{8} (q_1 q_2 q_3)^{(1+k)/2} \left[\left(\text{Sp} \left(\frac{dg}{dt} \circ g^{-1} \right) \right)^2 - \text{Sp} \left(\frac{dg}{dt} \circ g^{-1} \circ \frac{dg}{dt} \circ g^{-1} \right) \right]. \quad (3.26)$$

Это выражение после подстановки матрицы g в виде (3.11) и проведения простых преобразований, использующих стандартные свойства следа матрицы и явный вид матриц $\mathcal{P}(t)$ (для однородных моделей класса A имеем $\mathcal{P}(t) \equiv 1, \varphi \equiv 0$), переходит в окончательную формулу

$$T = \frac{1}{4 (q_1 q_2 q_3)^{(1+k)/2}} (\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + q_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_1 q_2 \dot{q}_3 - \dot{\varphi}^2 q_3 (n_1 q_1 - n_2 q_2)^2). \quad (3.27)$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени τ , определенному согласно замене (3.19). Отметим, что кинетическая энергия T , рассматриваемая как квадратичная форма от скоростей \dot{q}_i , является индефинитной. Это обстоятельство существенно отличает динамические системы, описывающие однородные космологические модели в общей теории относительности, от гамильтоновых систем, изучаемых в классической механике.

Потенциальная энергия $V_G = (q_1 q_2 q_3)^{(1+k)/2} P_\alpha^\alpha$ является скаляром, и поэтому достаточно вычислить значение V_G для диагональной метрики q . Тензор Риччи \bar{P}_{ik} для диагональной метрики в силу формул (3.6) и (3.4) имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{11} &= -2a^2 q_1 q_3^{-1} + \frac{1}{2} (n_1^2 q_1^2 - (n_2 q_2 - n_3 q_3)^2) q_2^{-1} q_3^{-1}, \\ \bar{P}_{22} &= -2a^2 q_2 q_3^{-1} + \frac{1}{2} (n_2^2 q_2^2 - (n_3 q_3 - n_1 q_1)^2) q_3^{-1} q_1^{-1}, \\ \bar{P}_{33} &= -2a^2 + \frac{1}{2} (n_3^2 q_3^2 - (n_1 q_1 - n_2 q_2)^2) q_1^{-1} q_2^{-1}, \\ \bar{P}_{12} = \bar{P}_{21} &= a (n_1 q_1 - n_2 q_2) q_3^{-1}, \quad \bar{P}_{13} = \bar{P}_{31} = \bar{P}_{23} = \bar{P}_{32} = 0.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Отсюда для однородных моделей класса A ($a = 0$) получаем

$$V_G = \frac{1}{4 (q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} \left(2 \sum_{i < j}^3 n_i n_j q_i q_j - \sum_{i=1}^3 n_i^2 q_i^2 \right). \quad (3.29)$$

Для однородных моделей класса B ($a \neq 0$, $n_3 = 0$) из (3.28) находим

$$V_G = \frac{1}{4 (q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} (-12a^2 q_1 q_2 - (n_1 q_1 - n_2 q_2)^2). \quad (3.30)$$

Полученные формулы (3.27) (3.29), (3.30) и определяют явный вид функции $L = T - V_G$ для всех однородных космологических моделей без движения вещества.

Для вычисления коэффициентов $h_i = 1/2 h_i' (q_1 q_2 q_3)^{k/2}$, заданных соотношением (3.15), воспользуемся матричной записью свертки:

$$g^{ik} \delta P_{ik} = \text{Sp} (g^{-1} \delta P) \quad (3.31)$$

и следующими выражениями:

$$\begin{aligned}g^{-1} &= \mathcal{P} q^{-1} \mathcal{P}^t, \quad P = (\mathcal{P}^t)^{-1} \bar{P} \mathcal{P}^{-1}, \\ \delta P &= \delta ((\mathcal{P}^t)^{-1}) \bar{P} \mathcal{P}^{-1} + (\mathcal{P}^t)^{-1} \delta \bar{P} \mathcal{P}^{-1} + (\mathcal{P}^t)^{-1} \bar{P} \delta (\mathcal{P}^{-1}).\end{aligned}\quad (3.32)$$

Здесь тензор Риччи P для метрики g , удовлетворяющей соотношениям (3.11), выражен через тензор Риччи \bar{P} , вычисленный для диагональной метрики q и имеющий компоненты (3.28). Используя стандартные свойства следа произведения матриц, получаем

$$\text{Sp} (g^{-1} \delta P) = \text{Sp} (q^{-1} \delta \bar{P}) + 2 \text{Sp} (q^{-1} \bar{P} \delta (\mathcal{P}^{-1}) \mathcal{P}). \quad (3.33)$$

Матрицы $q^{-1} \bar{P}$ и $\delta (\mathcal{P}^{-1}) \mathcal{P}$ на основании формул (3.28) и (3.10) имеют вид

$$q^{-1} \bar{P} = \begin{pmatrix} q_1^{-1} \bar{P}_{11} & q_1^{-1} \bar{P}_{12} & 0 \\ q_2^{-1} \bar{P}_{12} & q_2^{-1} \bar{P}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_3^{-1} \bar{P}_{33} \end{pmatrix}, \quad \delta (\mathcal{P}^{-1}) \mathcal{P} = \delta \mathcal{P} \begin{pmatrix} 0 & -n_1 & 0 \\ n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Отсюда находим

$$2\text{Sp}(q^{-1}\bar{P}\delta(\mathcal{P}^{-1})\mathcal{P}) = 2\bar{P}_{12}(n_2q_1^{-1} - n_1q_2^{-1})\delta\varphi. \quad (3.35)$$

Вычисление первого слагаемого в (3.33) по формулам (3.28) дает

$$\text{Sp}(q^{-1}\delta\bar{P}) = 4a^2q_3^{-2}\delta q_3 - 2a^2q_1^{-1}q_3^{-1}\delta q_1 - 2a^2q_2^{-1}q_3^{-1}\delta q_2. \quad (3.36)$$

Коэффициенты h_i , h_φ входят в разложение величины $-1/2(q_1q_2q_3)^{(1+k)/2}g^{ij}\delta P_{ij}$, поэтому в силу выражений (3.33), (3.35) и (3.36) получаем окончательные формулы

$$\begin{aligned} h_1 &= a^2q_2/Q, & h_2 &= a^2q_1/Q, & h_3 &= -2a^2q_1q_2/q_3Q, \\ h_\varphi &= a(n_1q_1 - n_2q_2)^2/Q, & Q &= (q_1q_2q_3)^{(1-k)/2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Таким образом, для всех однородных моделей класса A ($a = 0$) коэффициенты $h_i = h_\varphi = 0$. Следовательно, уравнения Эйнштейна для моделей класса A эквивалентны лагранжевой системе вида (3.23), и поэтому соответствующая энергия $H = T + V_G$ (см. (3.25)) сохраняется: $H = \text{const}$.

Для однородных моделей класса B имеет $h_i \neq 0$, поэтому система уравнений (3.23) не является лагранжевой. Эта система эквивалентна системе уравнений Эйнштейна (при отсутствии движения вещества) при выполнении дополнительного условия $R_3^0 = 0$ (см. (3.9)). Это условие после простого вычисления принимает следующий вид:

$$\frac{\dot{q}_1}{q_1} + \frac{\dot{q}_2}{q_2} - 2\frac{\dot{q}_3}{q_3} + \frac{(n_1q_1 - n_2q_2)}{aq_1q_2}\dot{\varphi} = 0. \quad (3.38)$$

V. Для исследования поведения траекторий системы (3.23) преобразуем эту систему в динамическую систему, определенную в фазовом пространстве с координатами p_i , q_i , p_φ , φ . Импульсы p_i , p_φ определяются преобразованием Лежандра:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{4(q_1q_2q_3)^{(1+k)/2}}(\dot{q}_j q_k + q_j \dot{q}_k), & i, j, k &= 1, 2, 3, \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{1}{2(q_1q_2q_3)^{(1+k)/2}}\dot{\varphi} q_3(n_1q_1 - n_2q_2)^2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\frac{\dot{q}_i}{q_i} = \frac{2}{(q_1q_2q_3)^{(1-k)/2}}(p_j q_j + p_k q_k - p_i q_i). \quad (3.40)$$

Лагранжева система (3.23) ($h_i = h_\varphi = 0$), определяющая эволюцию метрики однородных космологических моделей класса A ($a = 0$), после преобразования Лежандра (3.39) переходит в гамильтонову систему

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (3.41)$$

Гамильтониан H имеет вид

$$\begin{aligned}
 H &= \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = T + V_G = \\
 &= \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} \left[2 \sum_{i < j}^3 p_i p_j q_i q_j - \sum_{i=1}^3 p_i^2 q_i^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(2 \sum_{i < j}^3 n_i n_j q_i q_j - \sum_{i=1}^3 n_i^2 q_i^2 \right) \right]. \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

В случае однородных космологических моделей класса B система уравнений (3.23) после преобразования Лежандра (3.39) переходит в динамическую систему ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} - h_i, & \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\
 \dot{p}_\varphi &= - \frac{\partial H}{\partial \varphi} - h_\varphi, & \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}.
 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Здесь коэффициенты h_i , h_φ определяются формулами (3.37), а гамильтониан H имеет вид

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} \left[2 \sum_{i < j}^3 p_i p_j q_i q_j - \sum_{i=1}^3 p_i^2 q_i^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{p_\varphi^2 q_1 q_2}{(n_1 q_1 - n_2 q_2)^2} - \frac{1}{4} (12a^2 q_1 q_2 + (n_1 q_1 - n_2 q_2)^2) \right]. \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Динамическая система (3.43) рассматривается на уровне связи $R_3^0 = 0$ (3.38), которая после подстановки выражений (3.40) принимает вид

$$2p_3 q_3 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_\varphi / 2a = 0. \quad (3.45)$$

В случае однородной модели V типа ($n_i = 0$, $a = 1$) без движения вещества имеем $\varphi = p_\varphi \equiv 0$, в результате чего система уравнений (3.43) — (3.45) сильно упрощается.

Общим свойством динамических систем (3.41) и (3.43) — (3.45) является сохранение гамильтониана H и наличие монотонной функции

$$F = \frac{d}{dt} |g|^{1/6}, \quad (3.46)$$

где $|g| = \det \|g_{ij}\|$. Существование монотонной функции (3.46) является общим свойством уравнений Эйнштейна в синхронной системе отсчета (при отсутствии однородности всюду используются частные производные по t). Приведем доказательство этого утверждения, которое фактически было получено в [84]. Производ-

ная функции F по t имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{d^2|g|^{1/6}}{dt^2} = \frac{|g|^{1/6}}{6} \left(\left(\frac{|g|}{|g|} \right)' \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{|g|}{|g|} \right)' \left(\frac{|g|}{|g|} \right)' = \\ &= \frac{|g|^{1/6}}{6} \left(\kappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{6} (\kappa_\alpha^\alpha)^2 \right) \leq \frac{|g|^{1/6}}{3} \left(\frac{1}{2} \kappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{4} \kappa_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta \right) = \\ &= \frac{|g|^{1/6}}{3} (-R_0). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Здесь использованы алгебраическое неравенство $(\kappa_\alpha^\alpha)^2 \leq 3\kappa_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta$ и явная формула (3.5) для тензора Риччи в синхронной системе отсчета. В силу уравнения Эйнштейна

$$R_0^0 = T_0^0 - \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} (\varepsilon + 3p) + \frac{(p + \varepsilon)v^2}{1 - v^2} \geq 0 \quad (3.48)$$

(здесь v^2 — квадрат трехмерной скорости вещества). Поэтому из (3.47) и (3.48) получаем

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d^2|g|^{1/6}}{dt^2} \leq \frac{|g|^{1/6}}{3} (-R_0^0) \leq 0, \quad (3.49)$$

что и означает монотонность изменения функции F в силу уравнений Эйнштейна. Отметим, что неравенство (3.49) означает, что в синхронной системе отсчета функция $|g|^{1/6}$ является выпуклой вверх функцией. Вследствие этого $|g|$ не имеет локальных минимумов по t , кроме $|g| = 0$, и за конечный отрезок времени t (при направлении времени в сторону убывания $|g|$) детерминант $|g|$ обращается в нуль. Последнее утверждение означает неизбежность возникновения сингулярности метрики в синхронной системе отсчета.

Общий способ построения синхронной системы отсчета состоит в следующем: выбирается произвольная трехмерная пространственно-подобная гиперповерхность; из точек этой гиперповерхности выпускается пучок ортогональных к ней геодезических (времениподобных); семейство пространственно-подобных сечений определяется условиями $t = \text{const}$, где время t совпадает с длиной геодезической и $t = 0$ на исходной гиперповерхности. При общем выборе начальной гиперповерхности ($t = 0$) пучок ортогональных к ней геодезических фокусируется в фокальных точках, при этом сингулярность метрики в построенной синхронной системе отсчета может оказаться фиктивной, т. е. исчезающей при другом выборе системы отсчета.

В случае однородных космологических моделей имеется выделенное семейство пространственно-подобных сечений — орбиты действия трехмерной группы изометрий G . В соответствующей синхронной системе отсчета (которая и используется в дальнейшем) сингулярность метрики однородных космологических моде-

лей в общем случае является истинной. Докажем этот факт для однородных моделей в заполненном пространстве (и при отсутствии движения вещества). Из существования первого интеграла $H = \varepsilon (q_1 q_2 q_3)^{(1+k)/2}$ (см. (3.25)) получаем $\varepsilon \rightarrow \infty$ при $|g| = q_1 q_2 q_3 \rightarrow 0$. В силу уравнений Эйнштейна скалярная кривизна $R = -T_{ij} g^{ij} = (3k - 1)\varepsilon$, поэтому $|R| \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$, что и означает неустранимость сингулярности решения.

Монотонная функция F (3.46) в фазовом пространстве динамических систем (3.41) и (3.43) имеет вид

$$F = \frac{d(q_1 q_2 q_3)^{1/6}}{dt} = \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}{3(q_1 q_2 q_3)^{1/3}}, \quad \frac{dF}{d\tau} \leq 0 \quad (3.50)$$

и существенно используется в следующих параграфах. Дальнейшее исследование однородных космологических моделей проводится уже отдельно в классе A и в классе B .

§ 4. Преобразование гамильтоновой системы

I. Уравнения Эйнштейна для однородных космологических моделей класса A , как показано в § 3, эквивалентны гамильтоновой системе в фазовом пространстве p_i, q_i ($i = 1, 2, 3$) с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} \left[T(p_i q_i) + \frac{1}{4} V_G(q_i) \right],$$

где

$$T(p_i q_i) = 2 \sum_{i < j}^3 p_i p_j q_i q_j - \sum_{i=1}^3 p_i^2 q_i^2,$$

$$V_G(q_i) = 2 \sum_{i < j}^3 n_i n_j q_i q_j - \sum_{i=1}^3 n_i^2 q_i^2.$$

Гамильтонова система в новом времени τ , связанном с синхронным временем t по формуле $d\tau/dt = (q_1 q_2 q_3)^{-k/2}$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} \left[2p_i (p_j q_j + p_k q_k - p_i q_i) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} n_i (n_j q_j + n_k q_k - n_i q_i) - \left(\frac{1-k}{2} \right) \bar{H}/q_i \right], \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} [2q_i (p_j q_j + p_k q_k - p_i q_i)]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $i, j, k = 1, 2, 3$, $\bar{H} = T(p_i q_i) + 1/4 V_G(q_i)$.

Важным свойством гамильтоновой системы (4.1) является наличие монотонной функции

$$F = \frac{d}{dt} (\det (g_{ij}))^{1/6} = \frac{1}{3} \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}{(q_1 q_2 q_3)^{1/3}}. \quad (4.2)$$

В силу системы (4.1) имеем

$$\frac{dF}{dt} = \frac{2}{3 (q_1 q_2 q_3)^{5/6}} \left[-\frac{1}{3} (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3)^2 + T (p_i q_i) - \frac{1+3k}{4} \bar{H} \right]. \quad (4.3)$$

Поскольку квадратичная форма $-\frac{1}{3} (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3)^2 + T (p_i q_i)$ неположительно определена (имеет два отрицательных собственных значения и одно нулевое, отвечающее направлению $p_1 q_1 = p_2 q_2 = p_3 q_3$) и по условию $\bar{H} \geq 0$, то из (4.3) следует, что $dF/dt \leq 0$. Таким образом, $d^2 (\det g_{ij})^{1/6} / dt^2 \leq 0$, следовательно, $\det (g_{ij})(t)$ может иметь только один локальный максимум и вообще не имеет локальных минимумов. При $F < 0$ происходит сжатие объема $\det (g_{ij})(t)$, а при $F > 0$ — расширение. Оба эти процесса описываются системой (4.1) в одной области $p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 < 0$, но с противоположным направлением времени (в соответствии с этим мы будем говорить о направлении времени в сторону сжатия ($d (\det g_{ij}) / dt < 0$) и в сторону расширения ($d (\det g_{ij}) / dt > 0$)).

Траектории системы (4.1) пересекают множество нулей производной $dF/dt = 0$ ($p_1 q_1 = p_2 q_2 = p_3 q_3$, $\bar{H} = 0$) трансверсально всюду, кроме особых точек T_k ($p_\alpha q_\alpha = 0$, $n_i q_i = n_j q_j$, $n_k q_k = 0$). Следовательно, функция F монотонно убывает вдоль траекторий системы (4.1) и система (4.1) не имеет особых точек в физической области $q_i > 0$ (кроме указанных особых точек T_k для моделей I и VII₀ типов, соответствующих плоскому решению Минковского). Это означает, что стационарных однородных космологических моделей, кроме решения Минковского, не существует.

Все особые точки динамической системы (4.1) лежат на границе физической области. Наличие у системы (4.1) трехмерного многообразия вырожденных особых точек ($q_1 = q_2 = q_3 = 0$, импульсы p_i произвольны), а также некомпактность фазового пространства затрудняют исследования поведения этой системы вблизи космологической особенности, т. е. вблизи $q_1 q_2 q_3 = 0$.

Для исследования системы (4.1) методами качественной теории дифференциальных уравнений мы построим компактное многообразие S с динамической системой на нем, которая на внутренней части многообразия S эквивалентна системе (4.1) и продолжается на границу Γ многообразия S с сохранением направления времени. Граница Γ не является гладким многообразием — она состоит из нескольких граней, которые пересекаются по углам различных размерностей. При этом все особые точки имеют по крайней мере два ненулевых собственных числа.

Некоторым особым точкам соответствуют траектории, входящие в них из физической области — внутренности многообразия S , такие точки дают степенные асимптотики решений вблизи особенности $q_1 q_2 q_3 = 0$. Другие особые точки, лежащие в углах границы Γ , не имеют сепаратрис, входящих в них из физической области; их сепаратрисы целиком лежат на крае многообразия S (вернее, на разных компонентах края, пересекающихся по этому углу) и идут из одной особой точки в другую. Особые точки и их сепаратрисы образуют «скелет» динамической системы: асимптотическое поведение решений] вблизи особенности определяется движением траектории вдоль сепаратрис из окрестности одной неустойчивой особой точки в окрестность другой и т. д., до попадания в окрестность притягивающей особой точки, если для рассматриваемой космологической модели такие особые точки существуют.

II. Перейдем к построению компактного многообразия S и динамической системы на нем. В общем случае (все $n_i \neq 0$) многообразии S имеет размерность 5 и покрыто двумя локальными картами W_1 и W_2 . В локальной карте W_1 введены координаты \bar{s}_i, y_i :

$$\bar{s}_i = p_i q_i / G, \quad y_i = q_i / G, \quad G = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Координаты \bar{s}_i пробегают евклидово пространство R^3 , а координаты y_i пробегают двумерную единичную сферу S^2 : $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$.

Для компактификации евклидова пространства R^3 на бесконечности введем локальную карту W_2 с координатами y_i, s_i, w :

$$\begin{aligned} s_i &= \bar{s}_i / (\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2^2 + \bar{s}_3^2)^{1/2} = p_i q_i / P, \\ w &= (\bar{s}^2 + \bar{s}_2^2 + \bar{s}_3^2)^{-1}, \\ P &= (p_1^2 q_1^2 + p_2^2 q_2^2 + p_3^2 q_3^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Координаты s_i пробегают единичную сферу S^2 : $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$, а координата w пробегает полуось $0 \leq w < \infty$. Двумерная сфера $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1, w = 0$ соответствует бесконечно удаленной сфере в координатах \bar{s}_i . Две системы координат \bar{s}_i и s_i, w вместе покрывают замкнутый трехмерный шар D^3 . Компактное пятимерное многообразие S является подмножеством произведения $D^3 \times S_y^2$ и выделяется физическими условиями

$$y_i \geq 0, \quad w \geq 0, \quad H_2 \geq 0, \quad \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3 \leq 0, \quad (4.6)$$

где функция

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{p^2} H (q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2} = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 + \\ &+ \frac{1}{4} w \left(2 \sum_{i < j}^3 n_i n_j y_i y_j - \sum_{i=1}^3 n_i^2 y_i^2 \right). \end{aligned}$$

Граница Γ многообразия S не является гладким многообразием: Γ состоит из шести четырехмерных компонент (граней), определенных условиями

$$\begin{aligned} \Gamma_0: H_2 = 0, \quad \Gamma_i: y_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \Gamma_w: w = 0, \quad \Gamma_m: \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3 = 0. \end{aligned}$$

Компоненты границы Γ_0, Γ_m лежат в «физической» области многообразия S , т. е. этим компонентам отвечают неособые состояния метрики, в то время как компоненты границы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_w$ являются компактификацией физической области S по вырожденным состояниям метрики и соответствуют космологической сингулярности $q_1 q_2 q_3 = 0$. Компонента границы Γ_w в силу условий (4.6) является произведением $\Gamma_w = \Delta \times D^2$, где координаты y_i пробегает треугольник Δ ($y_i \geq 0$), а координаты s_i пробегает круг D^2 :

$$2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 \geq 0, \quad (4.7)$$

выделенный на сфере $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1, w = 0$, условием $H_2 \geq 0$.

Гамильтонова система (4.1) после преобразования в локальные координаты W_1 и замены времени $\frac{d\tau_1}{d\tau} = \frac{G}{2(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{s}}_i &= -n_i y_i (n_j y_j + n_k y_k - n_i y_i) + (1 - k) H_1 - 4\bar{s}_i (\bar{s}_\alpha - 2\bar{s}_\beta y_\beta^2), \\ \dot{y}_i &= 8y_i (y_\alpha^2 \bar{s}_\alpha - \bar{s}_i), \\ \dot{G} &= 4G (\bar{s}_\alpha - 2\bar{s}_\beta y_\beta^2), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$H_1 = (q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2} H/G^2 = T(\bar{s}_i) + 1/4 V_G(y_i)$$

(в (4.8) и (4.9) по индексам $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ производится суммирование).

В локальных координатах W_2 гамильтонова система (4.1) после замены времени $\frac{d\tau_2}{d\tau} = \frac{P}{2(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= w [-n_i y_i (n_j y_j + n_k y_k - n_i y_i) + \\ &\quad + s_i (n_\alpha y_\alpha s_\alpha (n_\beta y_\beta + n_\gamma y_\gamma - n_\alpha y_\alpha))] + \\ &\quad + (1 - k)(1 - s_i (s_1 + s_2 + s_3)) H_2, \\ \dot{w} &= 2w [w (n_\alpha y_\alpha s_\alpha (n_\beta y_\beta + n_\gamma y_\gamma - n_\alpha y_\alpha)) - \\ &\quad - (1 - k)(s_\alpha) H_2 + 4(s_\alpha - 2s_\beta y_\beta^2)], \\ \dot{y}_i &= 8y_i (s_\alpha y_\alpha^2 - s_i), \\ \dot{G} &= 4G (s_\alpha - 2s_\beta y_\beta^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Локальные координаты W_1 удобно использовать для изучения поведения однородных космологических моделей в окрестности состояния максимального расширения $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3 = 0$, а локальные координаты W_2 — в окрестности космологической сингулярности $q_1 q_2 q_3 = 0$.

Отметим, что в системах (4.8) и (4.9) переменная G отделяется — это следствие инвариантности гамильтоновой системы (4.1) относительно группы масштабных преобразований

$$\Phi_\lambda: q_i \rightarrow \lambda q_i, \quad \Phi_\lambda: p_i \rightarrow p_i, \quad \Phi_\lambda: \tau \rightarrow \lambda^{(1-3k)/2} \tau. \quad (4.10)$$

Вследствие такого понижения порядка динамическая система (4.1) эквивалентна динамической системе (4.8) — (4.9), определенной на компактном пятимерном многообразии S . Очевидно, что полученная динамическая система гладко продолжается на компоненты границы Γ . При этом компоненты границы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_w$ являются инвариантными подмногообразиями динамической системы.

Различные компоненты границы Γ пересекаются попарно и определяют трехмерные углы границы $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$, также являющиеся (кроме Y_6) инвариантными подмногообразиями динамической системы. Угол границы $Y_0 = \Gamma_0 \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)$, здесь $H_2 = 0$, а координаты y_1, y_2, y_3 пробегают стороны сферического треугольника Δ . Углы границы Y_1, Y_2, Y_3 проектируются в вершины треугольника Δ , на Y_i имеем $y_i = 1, y_j = y_k = 0$, т. е. $Y_i = \Gamma_j \cap \Gamma_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$). Угол границы Y_i при $n_i = 0$ является заполненным конусом

$$2 \sum_{i < j}^3 \bar{s}_i \bar{s}_j - \sum_{i=1}^3 \bar{s}_i^2 \geq 0, \quad \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3 \leq 0,$$

пополненным кругом D^2 (4.7); при $n_i = \pm 1$ угол Y_i является усеченным параболоидом

$$2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 - \frac{1}{4} w \geq 0, \quad w \geq 0.$$

Угол границы $Y_4 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \cap \Gamma_w = \partial \Delta \times D^2$, здесь координаты y_1, y_2, y_3 пробегают стороны сферического треугольника Δ , $w = 0$, координаты s_i пробегают круг D^2 (4.7). Угол Y_4 является заполненным трехмерным тором и состоит из трех цилиндров $\Gamma_i \cap \Gamma_w$, склеенных попарно по их основаниям. Угол границы $Y_5 = \Gamma_0 \cap \Gamma_w = \Delta \times S^1$, здесь координаты y_1, y_2, y_3 пробегают сферический треугольник Δ , а координаты s_i пробегают окружность $S^1 = \partial D^2$, $w = 0$. Угол границы $Y_6 = \Gamma_0 \cap \Gamma_m$ целиком лежит в «физической» области многообразия S , кроме трех исключительных точек T_i^0 : $\bar{s}_k = 0, y_i = 0, y_j = y_k = 1/\sqrt{2}$.

Углы границы Y_i также имеют пересечения в точках, где сходятся три компонента границы (пересечение не обязательно в общем положении) $Y_{kl} = Y_k \cap Y_l$ ($k, l = 0, 1, \dots, 6; \alpha = 1, 2, 3$):

$$Y_{0\alpha} = \partial Y_\alpha \times x_\alpha, \quad Y_{04} = Y_{05} = \partial \Delta \times S^1, \quad Y_{06} = T_\alpha^0,$$

$$Y_{\alpha 4} = x_\alpha \times D^2, \quad Y_{\alpha 5} = x_\alpha \times S^1, \quad Y_{45} = Y_{045} = \partial \Delta \times S^1.$$

Здесь x_α — три вершины сферического треугольника Δ . Имеются также пересечения четырех компонент границы, или четырех углов: $Y_{0\alpha 4} = Y_{0\alpha 5} = Y_{\alpha 45} = Y_{0\alpha 45} = x_\alpha \times S^1 = (\psi, \alpha)$. Окружность (ψ, α) (ψ — угол на окружности, α — номер вершины x_α) имеет координаты $w = 0$, $y_i = \delta_{i\alpha}$, $s_1 + s_2 + s_3 = -\sqrt{2}$, $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ ($H_2((\psi, \alpha)) = 0$) и полностью состоит из особых точек динамической системы (4.9).

Все пересечения углов границы также являются инвариантными множествами динамической системы на многообразии S .

У многообразий S , соответствующих разным моделям, могут быть полностью тождественными некоторые компоненты границы Γ , или некоторые углы, вместе с динамической системой на них. Например, система на компоненте угла Y_i , соответствующей i -й вершине, определяется тем, будет ли $n_i = \pm 1$, или $n_i = 0$ (см. (4.9)). Для всех моделей система на границе Γ_w ($w = 0$) одна и та же. Все особые точки на Γ_w вместе с их собственными числами и сепаратрисами, лежащими на Γ_w , одинаковы для всех моделей класса A . Для моделей с разрешимыми группами (типа I, II, VI₀, VII₀) система (4.7) содержит замкнутую подсистему меньшего числа уравнений, поэтому нет необходимости рассматривать эти системы на полном пятимерном многообразии S . Фактически вся информация об этих моделях содержится в моделях VIII и IX типов, поскольку динамические системы, определяющие эволюцию однородных моделей с разрешимыми группами, совпадают с системами на различных компонентах границы Γ и углах Y_i для моделей IX и VIII типов.

Функция F (4.2) в силу инвариантности относительно масштабных преобразований (4.10) определена также на пятимерном многообразии S и в координатах (4.5) имеет вид $F = (s_1 + s_2 + s_3)/3w (y_1 y_2 y_3)^{1/3}$. Отметим, что на компонентах границы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_w$ имеем $w (y_1 y_2 y_3)^{1/3} = 0$; на компоненте границы Γ_i ($y_i = 0$) из условия $H_2 = (s_1 + s_2 + s_3)^2 - 2 - \frac{w}{4} (n_j y_j - n_k y_k)^2 \geq \geq 0$ получаем $(s_1 + s_2 + s_3) \leq -\sqrt{2}$ и точно так же на компоненте границы Γ_w , поэтому на компонентах границы $\Gamma_w, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ при конечных w функция $F = -\infty$. Единственными точками на этих компонентах границы, в которых функция $F \neq -\infty$ (и не определена), являются особые точки T_i^0 ($\bar{s}_i = 0, y_i = 0, y_j = y_k = 1/\sqrt{2}$). Из монотонности функции F (см. (4.3)) следует,

что все траектории динамической системы (4.9) для моделей IX и VIII типов при $\tau \rightarrow \infty$ покидают любую компактную область U внутри многообразия S , а также на компонентах границы Γ_0 , Γ_m (иначе функция F , ограниченная в области U , неограниченно возросла бы по модулю). Следовательно, все траектории динамической системы (4.9) для моделей IX и VIII типов при $\tau \rightarrow \infty$ приближаются к компонентам границы Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_w , при этом $F \rightarrow -\infty$.

Отметим, что локальные координаты (4.4) и (4.5) удобны прежде всего для построения компактного многообразия S . Однако исследование особых точек, например динамической системы (4.9), для некоторых моделей приводит к громоздким вычислениям, поскольку здесь фактически имеется замкнутая система семи уравнений в переменных s_i , w , y_i , определенная на уровне связей $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$. Для исследования динамической системы (4.9) во многих случаях удобно преобразовать ее, после разрешения указанных связей, в замкнутую систему пяти уравнений. А именно, при $y_1 > 0$ введем новые координаты V_1 :

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= \frac{y_2}{y_1}, & \bar{y}_3 &= \frac{y_3}{y_1}, \\ \bar{u} &= \frac{s_1}{s_2 + s_3}, & \bar{v}_2 &= \frac{s_2 - s_3}{s_2 + s_3}, & \bar{w} &= \frac{y_1}{2(s_2 + s_3)} w^{1/2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

и сделаем замену времени $\frac{d\tau_3}{dt} = \frac{q_1}{(q_1 q_2 q_3)^{1/2} |\bar{w}|}$. При $y_2 \neq 0$ и $y_3 \neq 0$ введем две аналогичные системы координат V_2 и V_3 , циклически переставив индексы 1, 2, 3. Динамическая система (4.1) — (4.9) в координатах (4.11) и времени τ_3 принимает вид

$$\dot{\bar{u}} = n_1 (n_2 \bar{y}_2 + n_3 \bar{y}_3 - n_1) \bar{w}^2 - \bar{u} \bar{w}^2 (n_2 \bar{y}_2 (n_1 + n_3 \bar{y}_3 - n_2 \bar{y}_2) + n_3 \bar{y}_3 (n_1 + n_2 \bar{y}_2 - n_3 \bar{y}_3)) + (2\bar{u} - 1) \bar{H}_1,$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}}_2 &= [n_2 \bar{y}_2 (n_1 - n_2 \bar{y}_2) - n_3 \bar{y}_3 (n_1 - n_3 \bar{y}_3)] \bar{w}^2 - \\ &\quad - \bar{v}_2 \bar{w}^2 (n_2 \bar{y}_2 (n_1 + n_3 \bar{y}_3 - n_2 \bar{y}_2) + \\ &\quad + n_3 \bar{y}_3 (n_1 + n_2 \bar{y}_2 - n_3 \bar{y}_3)) + 2\bar{v}_2 \bar{H}_1, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\dot{\bar{w}} = \bar{w} [\bar{u} - 1 - \bar{w}^2 (n_2 \bar{y}_2 (n_1 + n_3 \bar{y}_3 - n_2 \bar{y}_2) + n_3 \bar{y}_3 (n_1 + n_2 \bar{y}_2 - n_3 \bar{y}_3)) + 2\bar{H}_1],$$

$$\dot{\bar{y}}_2 = \bar{y}_2 (1 + \bar{v}_2 - 2\bar{u}), \quad \dot{\bar{y}}_3 = \bar{y}_3 (1 - \bar{v}_2 - 2\bar{u}), \quad \dot{q}_1 = q_1 (\bar{u} - 1),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= H (q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2} \frac{\bar{w}^2}{q_1^2} = \frac{1-k}{4} [1 - (\bar{u} - 1)^2 - \bar{v}_2^2 + \\ &\quad + \bar{w}^2 (2n_1 n_2 \bar{y}_2 + 2n_1 n_3 \bar{y}_3 + 2n_2 n_3 \bar{y}_2 \bar{y}_3 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 \bar{y}_2^2)]. \end{aligned}$$

Система координат V_1 (4.11) определена при $y_1 > 0$ и $s_2 + s_3 < 0$,

следовательно, $\bar{w} < 0$. Из условия $\bar{H}_1 \geq 0$ следует, что на компонентах границы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_w$ многообразия S , кроме трех точек T_i^0 : $\bar{s}_k = 0, \psi_i = 0, y_j = y_k = 2^{-1/2}$ (если они принадлежат многообразию S для рассматриваемой модели), координата \bar{w} ограничена по модулю. Поэтому системы координат V_1, V_2, V_3 покрывают окрестность этих компонент границы Γ (кроме малой окрестности особых точек T_i^0) и для изучения поведения динамической системы в этой окрестности достаточно исследовать динамическую систему (4.12). Очевидно, что компоненты границы $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_w$ в координатах (4.11) определяются уравнениями $\bar{y}_2 = 0, \bar{y}_3 = 0, \bar{w} = 0$ соответственно.

§ 5. Космологические модели I и II типов

I. Решения в однородной космологической модели I типа при $k = 0$ ($p = 0$), как отмечалось в § 2, были проинтегрированы явно в работах [59, 83]. Динамика этих решений полностью определяется замкнутой подсистемой системы (4.9) при $n_i = 0$ (при произвольных $0 \leq k < 1$):

$$\dot{s}_i = (1 - k)(1 - s_i(s_1 + s_2 + s_3))H_3, \quad (5.1)$$

$$H_3 = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1. \quad (5.1)$$

Система (5.1) определена в круге D^2 (4.7) ($H_3 \geq 0$) на двумерной сфере S^2 : $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ и эквивалентна динамической системе (4.9) на компоненте границы Γ_w (эта система одинакова для всех однородных моделей класса A).

Многообразием S для модели I типа является, таким образом, круг D^2 . Граница круга — окружность S^1 : $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1, s_1 + s_2 + s_3 = -\sqrt{2}$ ($H_3 = 0$) — состоит из притягивающих особых точек, которым соответствуют решения Казнера для пустого пространства:

$$q_i = C_i t^{2p_i}, \quad p_i = 1 - \frac{2s_i}{s_1 + s_2 + s_3} = 1 + \sqrt{2} s_i. \quad (5.2)$$

Система (5.1) имеет также одну отталкивающую особую точку Φ ($s_i = -1/\sqrt{3}$), которой соответствует плоское решение Фридмана

$$q_i = C_i t^{4/3(1+k)}. \quad (5.3)$$

В силу системы (5.1) имеем $(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)/(s_2 - s_3) = \text{const}$, поэтому траектории системы (5.1) являются дугами больших кругов на сфере S^2 , выходящими (при $\tau \rightarrow -\infty$) из отталкивающей особой точки Φ и входящими (при $\tau \rightarrow +\infty$) в притягивающие

особые точки на окружности S^1 (рис. 7). При этом метрика имеет асимптотики (5.3) и (5.2) соответственно.

Отсюда следует известное утверждение о том, что любое решение для заполненного пространства в модели I типа в сторону сжатия имеет асимптотику решений Казнера, а в сторону расширения — асимптотику плоского решения Фридмана, т. е. изотропизуется.

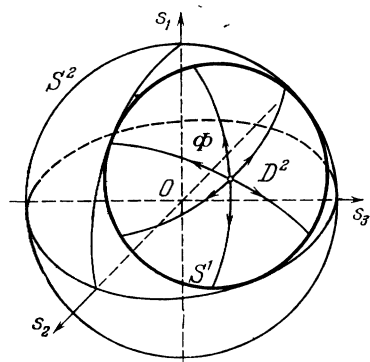


Рис. 7. Фазовый портрет динамической системы (5.1), определенной в круге D^2 на единичной сфере S^2 (однородная космологическая модель I типа).

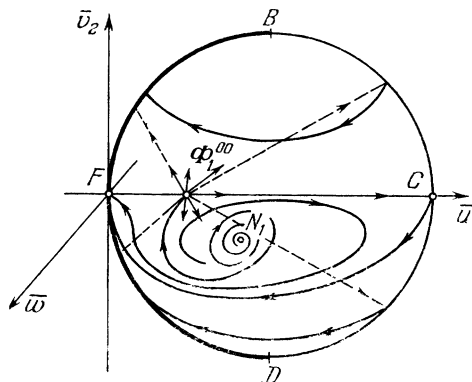


Рис. 8. Качественное поведение траекторий динамической системы (5.4) на замкнутом трехмерном многообразии S для однородной космологической модели II типа.

II. Исследуем асимптотическое поведение решений в модели II типа, в которой $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$. Система (4.42) для этой модели имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}} &= -\bar{u}^2 + (2\bar{u} - 1)\bar{H}_2, & \dot{\bar{v}}_2 &= 2\bar{v}_2\bar{H}_2, & \dot{\bar{w}} &= \bar{w}(\bar{u} - 1 + 2\bar{H}_2), \\ \dot{\bar{y}}_2 &= \bar{y}_2(1 + \bar{v}_2 - 2\bar{u}), & \dot{\bar{y}}_3 &= \bar{y}_3(1 - \bar{v}_2 - 2\bar{u}), & \dot{q}_1 &= q_1(\bar{u} - 1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь

$$\bar{H}_2 = \frac{(1-k)}{4} (1 - (\bar{u} - 1)^2 - \bar{v}_2^2 - \bar{w}^2).$$

Первые три уравнения (5.4) образуют замкнутую подсистему, которая совпадает с динамической системой (4.9) на угле Y_1 ($\bar{y}_2 = \bar{y}_3 = 0$) границы Γ . Поэтому многообразием S для модели II типа служит угол Y_1 , или половина шара $\bar{H}_2 \geq 0$ (рис. 8):

$$(\bar{u} - 1)^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{w}^2 \leq 1, \quad \bar{w} \leq 0. \quad (5.5)$$

Система (5.4) на S имеет следующие инвариантные многообразия: 1) $\bar{w} = 0$; 2) $\bar{v}_2 = 0$; 3) $\bar{H}_2 = 0$. Перечислим множества

особых точек системы (5.4):

1) окружность: $\bar{w} = 0$, $(\bar{u} - 1)^2 + \bar{v}_2^2 = 1$;

2) точка Φ_1^{00} : $\bar{w} = 0$, $\bar{u} = 1/2$, $\bar{v}_2 = 0$;

3) точка N_1 : $\bar{u} = \frac{3+k}{5-k}$, $\bar{w} = -\frac{1}{5-k}((1-k)(1+3k))^{1/2}$,
 $\bar{v}_2 = 0$.

Собственные числа этих особых точек следующие (в скобках около собственных чисел указаны переменные, соответствующие собственным направлениям):

1) $\lambda_1 = -\frac{(1+k)}{2}(1+\bar{u})$, $\lambda_2 = 0$, (\bar{u}, \bar{v}_2) ; $\lambda_3 = \bar{u} - 1$, (\bar{w}) .

Нулевое собственное число отвечает одномерности окружности особых точек (1).

2) $\lambda_1 = \frac{3}{8}(1-k)$, (\bar{u}) ; $\lambda_2 = \frac{3}{8}(1-k)$, (\bar{v}_2) ;

$$\lambda_3 = -\frac{1+3k}{8}, (w).$$

3) $\lambda_{1,2} = \frac{1-k}{5-k} \pm \frac{i}{5-k} \left(\left(\frac{1-k}{2} \right) (3 + 16k - 3k^2) \right)^{1/2}$, (\bar{u}, w) ;

$$\lambda_3 = \frac{2(1-k)}{5-k}, (\bar{v}_2).$$

Отсюда следует, что дуга \widehat{DFB} ($\bar{u} < 1$; см. рис. 8) состоит из притягивающих особых точек; особая точка N_1 является отталкивающей; особые точки на дуге \widehat{BCD} ($\bar{u} > 1$) и Φ_1^{00} неустойчивы.

Траекториям, входящим в притягивающие особые точки на дуге \widehat{DFB} , отвечает казнеровская асимптотика K_1 , обобщающая точные решения (5.2):

$$q_1 \approx C_1 t^{2(1-\bar{u})/(1+\bar{u})}, \quad q_2 \approx C_2 t^{2(\bar{u}-\bar{v})/(1+\bar{u})}, \quad q_3 \approx C_3 t^{2(\bar{u}+\bar{v})/(1+\bar{u})}, \quad (5.6)$$

причем дуге \widehat{FB} отвечает асимптотика K_2 (показатель $p_2 < 0$; см. (5.2), т. е. $q_2 \rightarrow \infty$, $q_1, q_3 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$), а дуге \widehat{DF} отвечает казнеровская асимптотика K_3 ($p_3 < 0$). Отталкивающей особой точке N_1 отвечает следующее точное решение (которое также обозначаем N_1), устойчивое при расширении пространства:

$$q_1 = C_1 t^{(1-k)/(1+k)}, \quad q_2 = C_2 t^{(3+k)/2(1+k)}, \quad q_3 = C_3 t^{(3+k)/2(1+k)}. \quad (5.7)$$

Одномерной сепаратрисе, входящей в неустойчивую особую точку Φ_1^{00} , отвечает асимптотика $\Phi_{\text{ЛХ}}$ (5.3) (при $t \rightarrow 0$).

Асимптотическое поведение решений в однородной космологической модели II типа полностью описывается следующей теоремой.

Теорема. Все метрики однородной модели II типа в замкнутом пространстве имеют при сжатии пространства одну

из следующих асимптотик: N_1 , $\Phi_{ЛХ}$, K_2 , K_3 . При расширении пространства все метрики стремятся к точному решению N_1 (5.7). Решения в пустом пространстве имеют при сжатии асимптотики K_2 , K_3 , а при расширении — асимптотику K_1 .

Для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что в физической области $w < 0$ каждая траектория системы (5.4), не являющаяся точкой покоя N_1 , при направлении времени в сторону сжатия входит в одну из особых точек на дуге \overline{DFB} , или Φ_1^{01} . Допустим, что в начальной точке траектории $\bar{v}_2 \neq 0$. Поскольку функция \bar{v}_2 вдоль траекторий системы (5.4) монотонна, то траектория прижимается к границе $\bar{H}_2 = 0$ многообразия S (см. рис. 8). Особые точки динамической системы (5.4) на границе $\bar{H}_2 = 0$ заполняют две дуги, \overline{BCD} и \overline{DFB} . Траектории из физической области $\bar{w} < 0$ не могут войти в неустойчивые особые точки на дуге \overline{BCD} — траектории, входящие в эти особые точки, лежат на границе $\bar{w} = 0$ многообразия S и поэтому не отвечают никаким физическим решениям.

На границе $\bar{H}_2 = 0$ все траектории идут в притягивающие особые точки дуги \overline{DFB} . Поэтому и каждая приближающаяся к границе $\bar{H}_2 = 0$ траектория (т. е. все траектории внутри многообразия S) также попадает в одну из притягивающих особых точек на дуге \overline{DFB} . Предположим теперь, что в начальной точке траектории $\bar{v}_2 = 0$. Система (5.4) на плоскости $\bar{v}_2 = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}} &= -\bar{w} + (2\bar{u} - 1)\bar{H}_2 = f_{\bar{u}}, \\ \dot{\bar{w}} &= w(\bar{u} - 1 + 2\bar{H}_2) = f_{\bar{w}}, \quad \bar{H}_2 = \frac{1-k}{4}(1 - (\bar{u} - 1)^2 - w^2) \end{aligned} \quad (5.8)$$

и определена в полукруге $H_2 \geq 0$, $\bar{w} \leq 0$. Легко проверить, что справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}}(F_0 f_{\bar{u}}) + \frac{\partial}{\partial \bar{w}}(F_0 f_{\bar{w}}) = \frac{2}{w} < 0, \quad \text{где} \quad F_0 = \frac{1}{w\bar{H}_2}.$$

Следовательно, согласно критерию Дюлака — Бендиксона, система (5.7) не имеет предельных циклов. Поэтому существует единственная сепаратриса, выходящая из точки N_1 (которая на плоскости $\bar{v}_2 = 0$ является отталкивающим фокусом) в виде раскручивающейся спирали и идущая в точку Φ_1^{00} . Все остальные траектории попадают в точку F .

Изменяя направление времени, получаем, что в сторону расширения все траектории из внутренней части многообразия S , т. е. в заполненном пространстве, попадают в особую точку N_1 .

Траектории на границе $\bar{H}_2 = 0$ (т. е. в пустом пространстве) движутся по окружности в плоскости \bar{u} , \bar{w} с постоянным значением \bar{v}_2 , и, таким образом, выйдя из точки (\bar{u}, \bar{v}_2) на дуге \overline{BCD} , траектория

попадает в точку $(2 - \bar{u}, \bar{v}_2)$ на дуге \widehat{DFB} . Соответствующие решения при расширении пространства имеют асимптотику (5.6), отвечающую дуге \widehat{BCD} , т. е. K_1 ($p_1 < 0$), а при сжатии пространства — асимптотики (5.6) K_2 ($p_2 < 0$) или K_3 ($p_3 < 0$).

§ 6. Космологическая модель IX типа¹⁾

Однородная космологическая модель IX типа с группой изометрий $SO(3)$ ($n_1 = n_2 = n_3 = 1$) по своему значению занимает исключительное положение среди остальных космологических моделей. Это обусловлено в первую очередь тем, что однородная модель IX типа является единственным возможным однородным возмущением однородного и изотропного закрытого решений Фридмана. Наиболее важным при изучении однородной модели IX типа является: исследование различных режимов поведения метрики вблизи сингулярности, исследование наиболее сложного колебательного режима поведения метрики, постановка и решение вопроса о типичных состояниях метрики вблизи сингулярности при сжатии и при расширении пространства, исследование характера изотропизации метрики при расширении пространства.

I. Особые точки динамической системы и степенные асимптотики решений. Динамическая система (4.9) на замкнутом многообразии S для модели IX типа имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= w [-y_i (y_j + y_k - y_i) + s_i (s_\alpha y_\alpha (y_\beta + y_\gamma - y_\alpha)) + \\ &\quad + (1 - k)(1 - s_i (s_1 + s_2 + s_3))] H_2, \\ \dot{w} &= 2w [w (s_\alpha y_\alpha (y_\beta + y_\gamma - y_\alpha)) - (1 - k)(s_1 + s_2 + s_3) H_2 + \\ &\quad + 4 (s_\alpha - 2s_\beta y_\beta^2)], \quad (6.1) \\ \dot{y}_i &= 8y_i (s_\alpha y_\alpha^2 - s_i), \\ \dot{G} &= 4G (s_\alpha - 2s_\beta y_\beta^2), \end{aligned}$$

где $H_2 = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 + w \frac{1}{4} (2 \sum_{i < j}^3 y_i y_j - 1)$, по индексам α ,

$\beta, \gamma = 1, 2, 3$ в (6.1) производится суммирование; переменную времени τ_2 в системе (6.1) далее обозначаем τ .

Как отмечалось в § 4, из существования монотонной функции $F = \frac{1}{3} \frac{(s_1 + s_2 + s_3)}{w (y_1 y_2 y_3)^{1/3}}$ следует, что динамическая система (6.1) не имеет особых точек внутри физической области многообразия S и все ее особые точки лежат на различных компонентах границы Γ . Полная совокупность особых точек состоит из множеств шести

¹⁾ Основные результаты этого параграфа были получены в совместной работе автора и С. П. Новикова [12].

типов: $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N_i , T_i , A_i , B_i , (ψ, i) (рис. 9). Укажем координаты этих особых множеств и их собственные числа.

1) Треугольник особых точек $\Phi_{\text{ЛХ}}$ лежит на компоненте границы Γ_w и определяется условиями: $w = 0$, $s_i = -1/\sqrt{3}$, координаты y_1, y_2, y_3 пробегает треугольник Δ , $H_2(\Phi_{\text{ЛХ}}) = 1$. Собст-

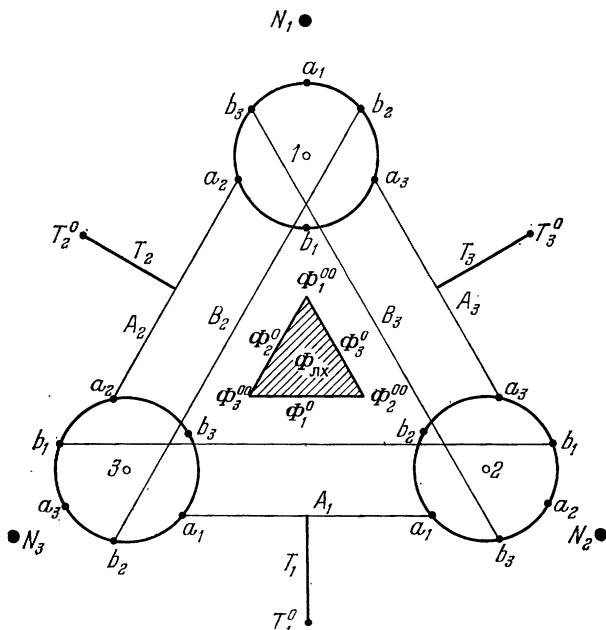


Рис. 9. Общее расположение особых точек динамической системы (6.1) на многообразии S для однородной космологической модели IX типа.

венные числа системы (6.1) на многообразии S в этих особых точках имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= (1 - k) \sqrt{3} && \text{(переменные } s_i), \\ \lambda_3 &= -2(1 + 3k) / \sqrt{3} && \text{(переменная } w), \\ \lambda_{4,5} &= 0 && \text{(переменные } y_i). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Обозначим Φ_i^0 стороны треугольника $\Phi_{\text{ЛХ}}$ (на Φ_i^0 $y_i = 0$) и Φ_i^{00} — вершины треугольника $\Phi_{\text{ЛХ}}$ (в Φ_i^{00} $y_k = \delta_{ik}$).

2) Три изолированные особые точки N_i лежат в углах границы $Y_i = \Gamma_j \cap \Gamma_k$ и имеют координаты

$$\begin{aligned} s_i &= -(3 + k) \sqrt{2} u_0, & s_j &= s_k = -(5 - k) u_0 / \sqrt{2}, \\ w &= 8(1 + 3k)(1 - k) u_0^2, & y_i &= 1, y_j = y_k = 0, \\ u_0 &= (43 + 2k + 3k^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Собственные числа системы (6.1) в особых точках N_i имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 8(1-k)\sqrt{2}u_0 \quad (\text{переменные } s_j), \\ \lambda_{2,3} &= 4\left[(1-k) \pm i\left(\left(\frac{1-u_0}{2}\right)(3+16k-3k^2)\right)^{1/2}\right]\sqrt{2}u_0 \\ &\quad (\text{переменные } s_j, w), \quad (6.4) \\ \lambda_4 &= \lambda_5 = -4(1+3k)\sqrt{2}u_0 \quad (\text{переменные } y_i).\end{aligned}$$

3) Три отрезка особых точек T_i лежат на компонентах границы T_i и имеют координаты $y_i = 0$, $y_j = y_k = 1/\sqrt{2}$, $s_i = 0$, $s_j = s_k = -1/\sqrt{2}$, $0 \leq w \leq \infty$, $H_2(T_i) = 0$. Один конец отрезка T_i , имеющий координату $w = 0$, лежит в пересечении $\Gamma_i \cap \Gamma_w$, а второй конец — T_i^0 ($w = \infty$) в локальной карте W_1 (4.2) имеет координаты $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = \bar{s}_3 = 0$, т. е. лежит в пересечении $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 \cap \Gamma_m$. Система (6.1) в особых точках T_i имеет следующие собственные числа:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -4\sqrt{2} \quad (\text{переменная } y_i), \\ \lambda_{2,3} &= \pm 2i\sqrt{w}, \quad \lambda_4 = -2\sqrt{2}(1-k), \quad \lambda_5 = 0 \quad (\text{переменные } y_j, \\ &\quad y_k, s_i, w). \quad (6.5)\end{aligned}$$

4) Три окружности особых точек (ψ, i) ($0 \leq \psi \leq 2\pi$, $i = 1, 2, 3$) являются пересечениями четырех компонент границы $\Gamma_j \cap \Gamma_k \cap \Gamma_w \cap \Gamma_0$ и имеют координаты $y_j = \delta_{ij}$, $w = 0$. Координаты s_1, s_2, s_3 пробегает окружность S^1 :

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1, \quad s_1 + s_2 + s_3 = -\sqrt{2}.$$

Система (6.1) имеет в особых точках (ψ, i) следующие собственные числа:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2(1-k)(s_1 + s_2 + s_3) \quad (\text{переменные } s_j), \\ \lambda_2 &= 8(s_j + s_k - s_i) \quad (\text{переменная } w), \\ \lambda_3 &= 8(s_i - s_j), \quad \lambda_4 = 8(s_i - s_k) \quad (\text{переменные } y_j, y_k).\end{aligned} \quad (6.6)$$

Нулевое собственное число λ_5 соответствует (так же как и $\lambda_5 = 0$ для особых точек на отрезке T_i ; см. (6.5)) одномерности множества особых точек (ψ, i) .

Окружность S^1 разбита точками a_i ($s_i = -2\sqrt{2}/3$, $s_j = s_k = -1/3\sqrt{2}$) и b_i ($s_i = 0$, $s_j = s_k = -1/\sqrt{2}$) на шесть дуг β_{ik} (рис. 10); на β_{ik} имеем $s_i < s_k < s_j < 0$. Удобно ввести также дуги $\alpha_i = \beta_{ij} + a_i + \beta_{ik}$ ($s_i < s_j, s_k$). Дуги особых окружностей (ψ, i) будем обозначать (α_i, k) , (β_{ij}, k) , где $k = 1, 2, 3$ указывает номер окружности.

Знаки собственных чисел особых точек на дугах окружностей (ψ, i)

| | (β_{ik}, i) | (β_{ij}, i) | (β_{ki}, i) | (β_{kj}, i) | (β_{jk}, i) | (β_{ji}, i) |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| λ_1 | — | — | — | — | — | — |
| $\lambda_2(w)$ | + | + | — | — | — | — |
| $\lambda_3(y_j)$ | — | — | — | + | + | + |
| $\lambda_4(y_k)$ | — | — | + | + | + | — |

В табл. 2 указаны знаки собственных чисел (6.6), зависящие от положения особой точки на окружности (ψ, i) и не меняющиеся внутри каждой дуги (β_{jk}, i) .

Из таблицы следует, что все особые точки на окружностях (ψ, i) , кроме точек a_i, b_i (в которых собственные числа (6.6) меняют знак), являются невырожденными и неустойчивыми.

5) Три отрезка особых точек A_i и три отрезка особых точек B_i лежат в пересечении компонент границы $\Gamma_i \cap \Gamma_w \cap \Gamma_0$. В этих особых точках $y_i = 0, y_j^2 + y_k^2 = 1, w = 0, H_2(A_i) = H_2(B_i) = 0$. На отрезках A_i имеем $s_i = -2\sqrt{2}/3, s_j = s_k = -1/3\sqrt{2}$. Собственные числа системы (6.1) в особых

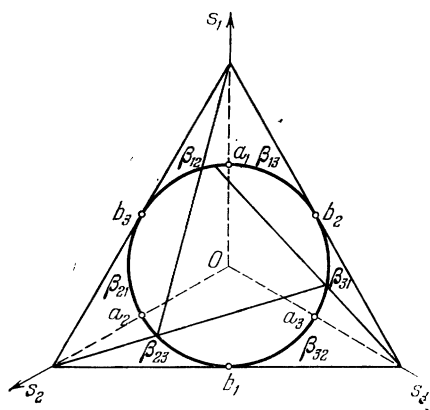


Рис. 10. Окружность S^1 разбита на шесть дуг β_{ik} . Прямые, проходящие через вершины треугольника Δ , определяют на окружности S^1 отображение проектирования T .

точках A_i имеют вид

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 4\sqrt{2} \quad (\text{переменная } y_i), \\
 \lambda_2 &= -2\sqrt{2}(1 - k) \quad (\text{переменные } s_j), \\
 \lambda_3 &= -16\sqrt{2}/3 \quad (\text{переменная } w), \\
 \lambda_4 &= \lambda_5 = 0.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

На отрезках B_i имеем $s_i = 0, s_j = s_k = -1/\sqrt{2}$. Собственные

числа системы (6.1) в этих особых точках имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -4\sqrt{2} \text{ (переменная } y_i), \\ \lambda_2 &= -2\sqrt{2}(1-k) \text{ (переменные } s_j), \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = \lambda_5 = 0.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Отрезки особых точек A_i соединяют особые точки (a_i, k) , (a_i, j) , а отрезки B_i соединяют особые точки (b_i, k) , (b_i, j) , лежащие на особых окружностях (ψ, k) , (ψ, j) .

Приведенное вычисление собственных чисел особых точек показывает, что динамическая система на многообразии S вообще не имеет притягивающих или отталкивающих особых точек. Особые точки множеств $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N_i , T_i и (ψ, i) являются невырожденными (т. е. число нулевых собственных чисел равно размерности этих множеств) и неустойчивыми (поскольку в каждой особой точке имеются собственные числа с противоположными знаками их вещественных частей; отметим, что неустойчивость особых точек T_i проявляется только во втором порядке и следует из анализа поведения динамической системы на границе Γ_i ; см. ниже, п. IV). Вырожденные особые точки A_i и B_i также являются неустойчивыми.

Сепаратрисы, входящие в особые точки $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N_i , T_i , проходят (почти все) в физической области многообразия S . Решения, соответствующие этим сепаратрисам, имеют степенные асимптотики метрики при сжатии пространства ($t \rightarrow 0$). В особые точки на множестве $\Phi_{\text{ЛХ}}$ входит трехмерная сепаратриса (отвечающая собственным числам λ_3 , λ_4 , λ_5 (6.2)), которой соответствует квазиизотропная асимптотика, найденная впервые Е. М. Лифшицем и И. М. Халатниковым [48] и обобщающая асимптотику решений Фридмана:

$$q_i \approx C_i t^{4/3(1+k)}. \quad (6.9)$$

В особые точки N_i входит двумерная сепаратриса (собственные числа λ_4 , λ_5 (6.4)), которой отвечает асимптотика, найденная впервые С. П. Новиковым:

$$\begin{aligned}q_i &\approx C_i t^{(1-k)/(1+k)}, & q_j &\approx C_j t^{(3+k)/2(1+k)}, \\ q_k &\approx C_k t^{(3+k)/2(1+k)}.\end{aligned}\quad (6.10)$$

В особые точки T_i входит трехмерная сепаратриса (собственные числа λ_1 , λ_4 , λ_5 (6.5)), которой отвечает асимптотика, обнаруженная впервые Таубом [47]:

$$q_i \cong C t^2, \quad q_j \cong q_k \cong C_1. \quad (6.11)$$

Указанные степенные асимптотики решений при сжатии пространства ($t \rightarrow 0$) являются неустойчивыми, поскольку неустойчивы

особые точки $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N_i и T_i . Траектория динамической системы, движущаяся в окрестности сепаратрис, входящих в особые точки $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N_i , T_i , при приближении к границе Γ отклоняется от входящей сепаратрисы и начинает двигаться вдоль сепаратрисы, выходящей из этих (неустойчивых) особых точек. Все выходящие из особых точек $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N_i , T_i сепаратрисы лежат на различных компонентах границы Γ . Поэтому для изучения дальнейшего движения траекторий вдоль границы Γ необходимо исследовать поведение динамической системы (6.1) на различных компонентах границы Γ .

II. Исследование сепаратрис особых точек $\Phi_{\text{ЛХ}}$. Динамическая система (6.1) на компоненте границы Γ_w имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= (1 - k)(1 - s_i(s_1 + s_2 + s_3))H_3, \\ \dot{y}_i &= 8y_i \left(\sum_{\alpha=1}^3 s_\alpha y_\alpha^2 - s_i \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

где $H_3 = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1$. В области $H_3 > 0$ в силу системы (6.12)

имеем $(s_1 - s_2)/(s_3 - s_2) = \text{const}$. Поэтому траектории системы (6.12) в координатах s_i движутся на единичной сфере $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ по дугам больших кругов, проходящих через точку Φ ($s_i = -1/\sqrt{3}$). При $\tau \rightarrow -\infty$ эти траектории выходят из особой точки Φ , при этом согласно (6.12) координаты y_i стремятся к некоторым константам. Следовательно, все траектории системы (6.12) в области $H_3 > 0$ являются сепаратрисами, выходящими из особых точек $\Phi_{\text{ЛХ}}$ ($s_i = -1/\sqrt{3}$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, $y_i \geq 0$, $w = 0$). Особые точки, заполняющие треугольник $\Phi_{\text{ЛХ}}$, на компоненте границы Γ_w являются отталкивающими, причем сепаратрисы, выходящие из особой точки (y_1, y_2, y_3) , заполняют некоторую двумерную поверхность.

Выясним, в какие особые точки входят при $\tau \rightarrow +\infty$ сепаратрисы, выходящие из особой точки (y_1, y_2, y_3) на треугольнике $\Phi_{\text{ЛХ}}$. Каждая такая сепаратриса в координатах s_i при $\tau \rightarrow +\infty$ стремится к некоторой (произвольной) точке s_i^0 на окружности S^1 : $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$, $s_1 + s_2 + s_3 = -\sqrt{2}$ ($H_3 = 0$). В силу системы (6.11) имеем

$$(y_i / y_j)' = -(y_i / y_j)(s_i - s_j). \quad (6.13)$$

Пусть особая точка (y_1, y_2, y_3) лежит внутри треугольника $\Phi_{\text{ЛХ}}$. Тогда: 1) если $s_k^0 < s_j^0$, s_i^0 , то y_k/y_j , $y_k/y_i \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, т. е. траектория стремится к дуге (α_k, k) на окружности особых точек (ψ, k) ; 2) если $s_k^0 = s_j^0 < s_i^0$ (в этом случае $s_i^0 = 0$), то $y_k/y_j = \text{const}$, $y_k/y_i \rightarrow \infty$, следовательно, траектория при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к некоторой точке на отрезке B_i .

Если особая точка (y_1, y_2, y_3) лежит на стороне $\Phi_i^0 (y_i = 0)$ треугольника $\Phi_{\text{ЛХ}}$, то вдоль выходящих из этой точки сепаратрис $y_i \equiv 0$, при этом: 1) если $s_j^0 < s_k^0$, то согласно (6.13) $y_j/y_k \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, т. е. траектория стремится к дуге $(\alpha_j, j) + (\beta_{ij}, j)$ ($s_j < s_k$) на окружности особых точек (ψ, j) ; 2) если $s_j^0 = s_k^0$, то $y_j/y_k = \text{const}$ и траектория при $s_i^0 = -2\sqrt{2}/3$, $s_j^0 = s_k^0 = -1/3\sqrt{2}$ стремится к точке x_i^0 на отрезке A_i , а при $s_i^0 = 0$, $s_j^0 = s_k^0 = -1/\sqrt{2}$ стремится к точке x_i^1 на отрезке B_i .

Если особая точка (y_1, y_2, y_3) является вершиной $\Phi_i^{00} (y_k = \delta_{ki})$ треугольника $\Phi_{\text{ЛХ}}$, то выходящие из этой особой точки сепаратрисы лежат в углу границы $\Gamma (y_k = \delta_{ki})$ и вдоль них изменяются только координаты s_j . Предельные (при $\tau \rightarrow +\infty$) точки этих сепаратрис целиком заполняют окружность особых точек (ψ, i) .

III. Исследование сепаратрис особых точек $(\psi, i), A_i, B_i, N_i$. Согласно (6.6) на дуге (β_{ji}, i) ($s_j < s_i < s_k$) имеем $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 < 0$, следовательно, из каждой особой точки (s_i^0) , лежащей на дуге (β_{ji}, i) , выходит одномерная сепаратриса, вдоль которой $y_k = 0, w = 0, s_i = s_i^0 = \text{const}$, и отношение y_j/y_i неограниченно растет. Конечная точка этой сепаратрисы лежит на дуге (β_{ji}, j) на окружности (ψ, j) .

На дуге (β_{jk}, i) ($s_j < s_k < s_i$) согласно (6.6) имеем $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$, следовательно, из каждой особой точки (s_i^0) , лежащей на дуге (β_{jk}, i) , выходит двумерная сепаратриса, вдоль которой $w = 0, s_i = s_i^0 = \text{const} (H_3 = 0)$. Динамика координат y_1, y_2, y_3 определяется системой (6.12) и интегрируется в явном виде:

$$y_i(\tau) = \frac{y_i^0 e^{-s_i^0 \tau}}{\left(\sum_{k=1}^3 (y_k^0)^2 e^{-16s_k^0 \tau} \right)^{1/2}}. \quad (6.14)$$

Все эти сепаратрисы, кроме одной исключительной, при $\tau \rightarrow \infty$ входят в особую точку (s_i^0) на дуге (β_{jk}, j) ; исключительная сепаратриса, вдоль которой $y_j \equiv 0$, входит в точку (s_i^0) на дуге (β_{jk}, k) (следующий сепаратрисный переход из этой точки также приводит в точку (s_i^0) на дуге (β_{jk}, j)).

Вдоль сепаратрис, выходящих из особой точки (b_i, i) ($s_i = 0, s_j = s_k = -1/\sqrt{2}$), имеем $y_k/y_j = \text{const}, y_k/y_i \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. Следовательно, эти сепаратрисы при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к произвольным точкам отрезка особых точек B_i .

Вдоль сепаратрис, выходящих из отрезка особых точек A_i ($s_i = -2\sqrt{2}/3, s_j = s_k = -1/3\sqrt{2}$) (см. (6.7)), имеем $y_j/y_k =$

$= \text{const}$, $y_i/y_j \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. Следовательно, эти сепаратрисы при $\tau \rightarrow \infty$ входят в особую точку (a_i, i) .

В особых точках на дуге $(\alpha_i, i) = (\beta_{ij}, i) + (a_i, i) + (\beta_{ik}, i)$ ($s_i < s_j, s_k$) согласно (6.6) имеем $\lambda_3, \lambda_4 < 0, \lambda_2 > 0$; поэтому из каждой особой точки (s_i^0) , лежащей на дуге (α_i, i) , выходит одномерная сепаратриса, вдоль которой $y_k \equiv \delta_{ik}$. Динамика координат w, s_i определяется системой (6.1) на угле границы $y_k = \delta_{ik}$:

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= w(1 - s_i^2) + (1 - k)(1 - s_i(s_1 + s_2 + s_3))\bar{H}_2, \\ \dot{s}_j &= w(-s_i s_j) + (1 - k)(1 - s_j(s_1 + s_2 + s_3))\bar{H}_2, \\ \dot{s}_k &= w(-s_i s_k) + (1 - k)(1 - s_k(s_1 + s_2 + s_3))\bar{H}_2, \\ \dot{w} &= 2w(-s_i w - (1 - k)(s_1 + s_2 + s_3)\bar{H}_2 + 4\left(\sum_{\alpha=1}^3 s_\alpha - 2s_i\right)), \end{aligned} \quad (6.15)$$

где $\bar{H}_2 = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 + w/4$. Рассматриваемая сепаратриса, в силу ее единственности, лежит на поверхности $\bar{H}_2 = 0$. Вдоль этой сепаратрисы, согласно (6.15), $s_j/s_k = \text{const}$, $\dot{s}_i > 0$, следовательно, на сфере $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ сепаратриса движется по дуге большого круга, проходящего через точку $s_i = 1, s_j = s_k = 0$ и через начальную точку (s_i^0) , лежащую на дуге α_i окружности S^1 . Конечная точка сепаратрисы (s_i^1) является второй точкой пересечения этого большого круга с окружностью S^1 :

$$w = 0, \quad s_i^1 = -\frac{3s_i^0 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}s_i^0}, \quad s_j^1 = \frac{s_j^0}{3 + 2\sqrt{2}s_i^0}, \quad s_k^1 = \frac{s_k^0}{3 + 2\sqrt{2}s_i^0}. \quad (6.16)$$

Приведем простую геометрическую интерпретацию полученного отображения T окружности S^1 (начальная точка сепаратрисы отображается в конечную точку). Окружность S^1 лежит в плоскости P : $s_1 + s_2 + s_3 = -\sqrt{2}$ и вписана в равносторонний треугольник Δ — пересечение плоскости P с гранями квадранта $s_i \leq 0$. Точки касания S^1 с Δ разбивают окружность на три дуги α_i (см. рис. 10). Рассмотрим прямую l — пересечение плоскости $s_j/s_k = \text{const}$, в которой лежит сепаратриса, с плоскостью P . Очевидно, прямая l проходит через i -ю вершину треугольника Δ , начальную точку сепаратрисы (s_i^0) , лежащую на дуге α_i , и конечную точку сепаратрисы (s_i^1) . Следовательно, отображение T является проектированием дуги (α_i, i) окружности S^1 лучами, выходящими из i -й вершины треугольника Δ , на две другие дуги:

$$\begin{aligned} (\alpha_j, i) + (b_i, i) + (\alpha_k, i) &= (\beta_{ji}, i) + (a_j, i) + (\beta_{jk}, i) + \\ &+ (b_i, i) + (\beta_{kj}, i) + (a_k, i) + (\beta_{ki}, i) \end{aligned} \quad (6.17)$$

(см. рис. 10).

Исследуем сепаратрисы особых точек N_i . Особые точки N_i (6.3) согласно (6.4) имеют двумерную входящую сепаратрису, лежащую в физической области многообразия S , и трехмерную выходящую сепаратрису, лежащую на угле границы $y_k = \delta_{ik}$. Система (6.15) на угле границы $y_k = \delta_{ik}$ имеет одну отталкивающую особую точку N_i , седловые особые точки на дуге (α_i, i) и в вершине Φ_i^{00} треугольника $\Phi_{ЛХ}$ и притягивающие особые точки на дуге (6.17) окружности особых точек (ψ, i) . Система (6.15) эквивалентна системе (5.4), описывающей динамику однородной космологической модели II типа, которая была исследована (в других фазовых переменных) в § 5.

Из результатов § 5 следует, что все сепаратрисы, выходящие из особой точки N_i , кроме одной, при $\tau \rightarrow +\infty$ входят в (произвольные) особые точки на дуге (6.17). Исключительная сепаратриса, лежащая на инвариантном многообразии $s_j = s_k$ ($\bar{v}_2 = 0$), выходит из особой точки N_i в виде раскручивающейся спирали и при $\tau \rightarrow \infty$ входит в особую точку Φ_i^{00} .

IV. Исследование сепаратрис особых точек T_i . В отрезок особых точек T_i , согласно (6.5), входит трехмерная сепаратриса, заполняющая инвариантное многообразие $V_i: y_j = y_k, s_j = s_k$. Пересечение этого многообразия с компонентой границы $\Gamma_i (y_i = 0)$ является двумерной плоскостью $\mathcal{L}: y_i = 0, y_j = y_k = 1/\sqrt{2}, s_j = s_k$, заполненной сепаратрисами, входящими в особые точки T_i и соответствующими собственным числам λ_4, λ_5 (6.5). В окрестности особых точек T_i все траектории системы (6.1), не лежащие на многообразии V_i , вследствие наличия чисто мнимых собственных чисел (6.5) вращаются вокруг многообразия V_i . Покажем, что при этом на компоненте границы Γ_i все траектории удаляются от инвариантной плоскости \mathcal{L} (это и означает неустойчивость особых точек T_i). Действительно, на компоненте границы $\Gamma_i (y_i = 0)$ функция H_2 (см. (6.1)) имеет вид

$$H_2 = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 - \frac{w}{4} (y_j - y_k)^2 \geq 0,$$

следовательно, $2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 \geq 0$, а это при $s_1 + s_2 + s_3 \leq 0$ означает, что все $s_k \leq 0$. Вследствие этого на компоненте границы Γ_i следующая функция F_i монотонно возрастает вдоль траекторий системы (6.1):

$$F_i = \frac{4(s_k - s_j)^2 + w(y_k - y_j)^2}{wy_k y_j}, \quad \frac{dF_i}{d\tau} = -32 \frac{s_i (s_k - s_j)^2}{wy_k y_j} \geq 0. \quad (6.18)$$

Отметим, что траектории системы (6.1) пересекают поверхность $s_k = s_j$ — множество нулей производной $dF/d\tau_2$ — трансверсально

(всюду вне плоскости \mathcal{L}). Поэтому вне плоскости \mathcal{L} каждая траектория X покидает любую конечную область U внутри компоненты границы Γ_i и, следовательно, стремится к углам границы $y_i = 0$, $w = 0$ или $y_i = y_j = 0$, $y_k = 1$; $y_i = y_k = 0$, $y_j = 1$ (иначе функция F_i вдоль траектории X в области U возросла бы неограниченно). При приближении к углам границы траектория X начинает двигаться вдоль траекторий на этих углах границы, которые, как показано выше, входят в особые точки N_j , N_k , Φ_i^0 , A_i , B_i , (ψ, j) , (ψ, k) . После конечного числа переходов вдоль сепаратрис неустойчивых особых точек траектория X входит в притягивающие (на компоненте границы Γ_i) особые точки на дугах (β_{ik}, k) , (β_{ij}, j) или же траектория X сама является сепаратрисой одной из неустойчивых особых точек (такие траектории не являются типичными и заполняют подмногообразия меньшей размерности).

Рассмотрим поведение траекторий системы (6.1) на инвариантной плоскости \mathcal{L} . Система (6.1) при $y_i = 0$, $y_j = y_k = 1/\sqrt{2}$, $s_j = s_k$ принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= 2(1-k)s_i s_j (s_j - s_i)(4s_j - s_i), \\ \dot{w} &= 2ws_i [4 - (1-k)(s_i + 2s_j)(4s_j - s_i)], \end{aligned} \quad (6.19)$$

где $s_i^2 + 2s_j^2 = 1$. Система (6.19) определена в области $H_2 = s_i(4s_j - s_i) > 0$, или $4s_j < s_i < 0$. Система (6.19), очевидно, имеет отрезок притягивающих особых точек $T_i: s_i = 0$, $0 \leq w \leq \infty$, притягивающую особую точку $s_i = -1/3\sqrt{2}$, $w = 0$, лежащую на отрезке A_i , и седловую особую точку $s_i = -1/\sqrt{2}$, $w = 0$, лежащую на отрезке Φ_i^0 . При $\tau \rightarrow +\infty$ траектория $s_i = s_j$ входит в особую точку на отрезке Φ_i^0 , траектории в области $s_j < s_i$ входят в отрезок T_i , а траектории в области $4s_j < s_i < s_j$ входят в особую точку на отрезке A_i . При $\tau \rightarrow -\infty$ все траектории системы (6.19) выходят из вырожденной особой точки T_i^0 ($s_\alpha = 0$, $y_i = 0$, $y_j = y_k = 1/\sqrt{2}$).

V. Сепаратрисная диаграмма при сжатии пространства. Результаты проведенного исследования сепаратрис особых точек $\Phi_{ЛХ}$, N_i , T_i , A_i , B_i , (ψ, i) собраны в сепаратрисной диаграмме табл. 3. В диаграмме используются обозначения: заполненный квадрат означает сепаратрису, идущую (при направлении времени в сторону сжатия) из одного множества особых точек в верхней строке в другое множество в столбце, цифра в нем означает размерность этой сепаратрисы, пустой квадрат означает отсутствие сепаратрисы, буква T обозначает отображение проектирования (6.16).

При направлении времени в сторону сжатия каждая траектория системы (6.1), как показано в § 4, в силу наличия монотон-

ной функции $F = (s_1 + s_2 + s_3)/w (y_1 y_2 y_3)^{1/3}$ при $\tau \rightarrow \infty$ приближается к компонентам границы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_w$. Траектории (сепаратрисы), входящие в неустойчивые особые точки $\Phi_{ЛХ}, N_i, T_i$, соответствуют решениям со степенной асимптотикой метрики вблизи особенности (6.9) — (6.11). Все остальные траектории при $\tau \rightarrow \infty$ начинают двигаться вдоль траекторий системы (6.1) на компонентах границы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_w$, которые, как показано в пп. II—IV, идут из одной неустойчивой особой точки в другую. Таким образом, почти все траектории системы (6.1) при $\tau \rightarrow \infty$ движутся вдоль последовательностей сепаратрис неустойчивых особых точек и допускают поэтому сепаратрисную аппроксимацию.

Согласно сепаратрисной диаграмме (табл. 3) траектория, после конечного числа переходов (не более трех) вдоль сепаратрис особых точек $\Phi_{ЛХ}, N_i, T_i$, начинает двигаться вдоль сепаратрис трех особых окружностей (ψ, i) , которые образуют замкнутую систему. Итак, траектория при $\tau \rightarrow \infty$ аппроксимируется бесконечной последовательностью сепаратрис

$$\dots \rightarrow (\psi_0, \alpha_0) \rightarrow (\psi_1, \alpha_1) \rightarrow (\psi_2, \alpha_2) \rightarrow \dots \quad (6.20)$$

При этом $(\psi_{s+1}, \alpha_{s+1})$ является однозначной функцией от (ψ_s, α_s) , если ψ_s лежит на дугах (β_{ij}, i) и (β_{ji}, i) ; если же ψ_s лежит на дуге (β_{jk}, i) , то переход к $(\psi_{s+1}, \alpha_{s+1})$ двузначен:

$$(\beta_{jk}, k) \overset{\text{II}}{\leftarrow} (\beta_{jk}, i) \overset{\text{I}}{\rightarrow} (\beta_{jk}, j). \quad (6.21)$$

Переход I осуществляется вдоль двумерной выходящей сепаратрисы, а переход II — вдоль ее граничной одномерной сепаратрисы, при этом, исходя из результата пути II, на следующем шаге мы придем к тому же результату, что давал путь I за один шаг.

Три окружности (ψ, k) и выходящие из них (при направлении времени в сторону сжатия пространства) сепаратрисы образуют инвариантное относительно динамической системы (6.1) множество P , являющееся клеточным комплексом. Одномерными клетками множества являются окружности (ψ, k) , двумерные клетки заполнены сепаратрисами окружностей (ψ, k) , лежащими в углах границы Γ , трехмерные клетки заполнены сепаратрисами, лежащими на компоненте границы Γ_w и выходящими из дуг (β_{jk}, i) и осуществляющими переход I в (6.21).

Множество P является притягивающим множеством динамической системы (6.1). Действительно, в силу существования монотонной функции F (4.2) все траектории системы (6.1) при $\tau \rightarrow \infty$ неограниченно приближаются к компонентам границы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_w$ многообразия S . Почти все траектории динамической системы на компонентах границы Γ_i ($i = 1, 2, 3$) (кроме некоторых исключительных сепаратрис), в силу существования монотонных функций F_i (6.18) при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к множеству P , точнее, к трем

Сепаратрисная диаграмма динамической системы (6.1) для однородной

| | S | T_i^0 | $\Phi_{ЛХ}$ | T_i | N_i | Φ_i^0 |
|-------------------|--------------------|-------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| $\Phi_{ЛХ}$ | 3 | | | | | |
| T_j | 3 $j = 1, 2, 3$ | 2 $j = i$ | | | | |
| N_j | 2 $j = 1, 2, 3$ | 1 $j = i \pm 1$ | | | | |
| Φ_j^0 | | 2 $j = i$ | | | | |
| Φ_j^{00} | | | | | 1 $j = i$ | |
| (β_{xy}, x) | | | 4 $x = 1, 2, 3$ $y = x \pm 1$ | | | 3 $x = i \pm 1$ $y = x \pm 1$ |
| (β_{yx}, x) | | 4 $x = i \pm 1$ $y = i$ | | 3 $x = i \pm 1$ $y = i$ | 3 $x = i$ $y = i \pm 1$ | 3 $x = i \pm 1$ $y = i$ |
| (β_{yz}, x) | | | | | 3 $x = i$ $y = i \pm 1$ | |
| (a_x, x) | | | 3 $x = 1, 2, 3$ | | | 2 $x = i \pm 1$ |
| (b_x, x) | | | | | 2 $x = i$ | |
| A_j | | 3 $j = i$ | | 2 $j = i$ | | 2 $j = i$ |
| B_j | | | 3 $j = 1, 2, 3$ | | | 2 $j = i$ |

космологической модели IX типа (при сжатии пространства)

| Φ_i^{00} | (β_{ij}, i) | (β_{ji}, i) | (β_{jk}, i) | (a_i, i) | (b_i, i) | A_i | B_i |
|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------|--------------|-------------------------------|-------------------------------|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 2 $x = i$ $y = i \pm 1$ | | 2 $x = j$ $y = i$ | 3 $x = j$ $y = k$ | | | | |
| 2 $x = i$ $y = i \pm 1$ | 2^T $x = i$ $y = j$ | | 2 $x = k$ $y = j$ | | | 2 $x = i \pm 1$ $y = i$ | 2 $x = i \pm 1$ $y = i$ |
| 2 $x = i$ $y = i \pm 1$ | 2^T $x = i$ $y = j$ | | | | | | |
| 1 $x = i$ | | | | | | 2 $x = i$ | |
| 1 $x = i$ | | | | 1^T $x = i$ | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | 2 $j = i$ | | |

окружностям (ψ, k) ; на компоненте границы Γ_w это же свойство следует из явного интегрирования динамической системы на Γ_w , см. п. II. Вследствие этого все траектории динамической системы на многообразии S , кроме сепаратрис, входящих в особые точки $\Phi_{ЛХ}$, N_i , T_i , при $\tau \rightarrow \infty$ приближаются к множеству P , которое и является поэтому притягивающим множеством.

Следуя современной терминологии притягивающее множество P , которое не является гладким многообразием, можно назвать странным аттрактором. Отметим некоторые особенности этого странного аттрактора. Множество P расположено на границе Γ , приклеенной к физической области многообразия S , поэтому каждой отдельной траектории на P не соответствует никаких точных решений исходной динамической системы (4.1); динамика траекторий на множестве P весьма проста: все траектории являются сепаратрисами, идущими из некоторой особой точки (ψ, α) в другую особую точку (ψ_1, α_1) . Однако траектории динамической системы (6.1) внутри многообразия S при неограниченном приближении к аттрактору P обнаруживают весьма сложное поведение: каждая траектория при $\tau \rightarrow \infty$ аппроксимируется последовательностью сепаратрис (6.20), которая в общем случае всюду плотна на множестве P . Действительно, последовательное изменение точек (s_i) на особых окружностях (ψ, k) вдоль траектории (6.20) определено действием отображения T на окружности S^1 (проектирование из вершин описанного равностороннего треугольника Δ , см. п. III, (6.16), рис. 10). Отображение T , очевидно, имеет степень -2 (T меняет ориентацию на S^1 и каждая точка имеет два прообраза). Отображение T имеет три неподвижные точки — точки касания окружности S^1 с треугольником Δ . Очевидно, что отображение T всюду увеличивает длину дуги (только в точках касания $|dT(\varphi)/d\varphi| = 1$). Вследствие этого отображение T имеет счетное всюду плотное на S^1 множество периодических точек, каждая из которых является неустойчивой. Для всех остальных точек x на S^1 множество $T^k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) является всюду плотным на S^1 , поэтому и общая последовательность сепаратрис (6.20) всюду плотна на аттракторе P . Отметим, что отображение T имеет гладкую инвариантную меру на окружности S^1 , которая становится сингулярной в точках касания S^1 с Δ , причем полная мера на S^1 оказывается бесконечной.

Важнейшим свойством аттрактора P в динамической системе на многообразии S , описывающей однородную космологическую модель IX типа, является то, что траектории динамической системы в окрестности аттрактора P , несмотря на их весьма сложное поведение, допускают детальное исследование, поскольку в сепаратрисной аппроксимации траекторий (6.20) все сепаратрисные переходы проинтегрированы явно. Аналогичная ситуация реализуется также и в некоторых других динамических системах,

где аттрактор расположен на границе, приклеенной к исходной физической области (см. главу VIII).

Напомним, что окружности особых точек (ψ, k) находятся в углах границы Y_{0123} , где $y_i = \delta_{ik}$. Поэтому на траектории, движущейся вдоль последовательности сепаратрис (6.20), периодически $q_i \gg q_j, q_k$, т. е. изменение метрики g_{ij} происходит в некотором колебательном режиме. При этом при направлении времени в сторону сжатия траектория неограниченно приближается к аттрактору P и периодически оказывается все ближе к особым окружностям (ψ, k) ; следовательно, амплитуда колебаний величин q_i/q_k при $\tau \rightarrow \infty$ растет до бесконечности.

Общий колебательный режим поведения метрики вблизи космологической сингулярности был впервые открыт Белинским, Лифшицем и Халатниковым (БЛХ) [49, 50] и исследовался также Мизнером [58].

В работах [49—52] эволюция метрики (например, однородной космологической модели IX типа) вблизи сингулярности разбита на ряд так называемых «казнеровских эпох», в каждой из которых метрика аппроксимируется решениями Казнера $q_i = C_i t^{2p_i}$, где «казнеровские показатели» p_i удовлетворяют условиям:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (6.22)$$

При сшивке двух соседних «казнеровских эпох» происходит смена «казнеровских показателей», причем если на одной эпохе было $p_1 < 0 < p_2 < p_3$, то на следующей эпохе

$$p'_1 = \frac{-p_1}{1+2p_1}, \quad p'_2 = \frac{2p_1+p_2}{1+2p_1}, \quad p'_3 = \frac{2p_1+p_3}{1+2p_1}. \quad (6.23)$$

Часто используется представление чисел $p_1 < p_2 < p_3$ в параметрическом виде ($u > 1$)

$$p_1(u) = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2(u) = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3(u) = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}.$$

Закон смены казнеровских показателей (6.23) выглядит особенно просто при использовании параметра u [50]: если на одной казнеровской эпохе было

$$p_l = p_1(u), \quad p_m = p_2(u), \quad p_n = p_3(u),$$

то на следующей казнеровской эпохе казнеровские показатели имеют вид:

$$p'_l = p_2(u-1), \quad p'_m = p_1(u-1), \quad p'_n = p_3(u-1).$$

Покажем, что сепаратрисная аппроксимация траекторий (6.20) при выборе в (6.21) однозначного перехода по пути I изоморфна описанию колебательного режима, полученному в работе [50]. Действительно, при движении траектории вдоль сепаратрис

особых точек (β_{jk}, i) ($s_j < s_i$), идущих по компоненте границы Γ_w ($w = 0$), координаты s_i в первом приближении постоянны. При этом метрика аппроксимируется решением Казнера:

$$q_i = C_i t^{2p_i}, \quad p_i = 1 + \sqrt{2s_i}. \quad (6.24)$$

Условия (6.22) выполнены в силу условий на окружностях особых точек (ψ, i) :

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1, \quad H_2(s) = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - \sum_{i=1}^3 s_i^2 = 0.$$

Согласно сепаратрисной диаграмме табл. 3 после каждого перехода вдоль сепаратрис, идущих по компоненте границы Γ_w ($w = 0$) и входящих в особые точки (β_{jk}, i) , следует переход вдоль сепаратрис, идущих по углу границы Y_i ($y_k = \delta_k^i$), и наоборот. При таком переходе изменяются координаты s_i , причем конечные координаты (s_i^1) связаны с начальными (s_i^0) отображением ($s_i^1 = T(s_i^0)$) (6.16). Этот переход эквивалентен «смене казнеровских показателей»: легко проверить, что из соотношений (6.16) при условиях $p_i = 1 + \sqrt{2s_i}$ (6.24) следуют соотношения (6.23).

Таким образом, колебательному режиму БЛХ соответствует движение траекторий динамической системы (6.1) в окрестности странного аттрактора P . «Длинная эра», в течение которой колеблются два собственных значения метрики $q_i, q_j \gg q_k$, реализуется когда проекция траектории на координаты s_i находится в окрестности точек касания окружности S^1 с треугольником Δ , см. рис. 10. При направлении времени в сторону сжатия пространства все метрики в однородной космологической модели IX типа, кроме метрик, имеющих степенные асимптотики (6.9) — (6.11), выходят на колебательный режим, который является поэтому типичным состоянием метрики при сжатии пространства.

VI. Типичные состояния метрики на ранней стадии расширения пространства. Современные астрономические исследования показывают, что наблюдаемая расширяющаяся Вселенная является с огромной точностью изотропной. Из наблюдений реликтового излучения следует, что изотропия Вселенной наступила чрезвычайно рано, когда величина относительного красного смещения $z \gg 10^3$; из данных о химическом составе вещества для момента изотропизации получается $z > 10^9$, см. [74]. Вследствие этого в релятивистской космологии возникает проблема теоретического обоснования изотропизации метрики на ранней стадии расширения пространства.

Область применимости уравнений общей теории относительности, как известно [74], ограничена снизу планковскими мас-

штабами времени и длины:

$$t_g = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,3 \cdot 10^{-44} \text{ с}, \quad l_g = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см},$$

где G — постоянная тяготения, \hbar — постоянная Планка, c — скорость света; при $t < t_g$, $l < l_g$ принципиальную роль играют квантовые эффекты. Возможна точка зрения, что процесс формирования вблизи космологической сингулярности изотропного решения описывается неизвестной в настоящее время квантовой теорией гравитации — и к моменту включения классической общей теории относительности решение уже является с высокой точностью изотропным и поэтому остается таковым в процессе дальнейшей эволюции.

Однако представляется более правдоподобным, что к моменту включения ОТО неизвестный квантовый механизм формирования начальных данных выбрасывает некоторую реализацию из целого ансамбля возможных состояний метрики, которые достаточно произвольны и могут быть далеки от изотропного состояния. При таком естественном предположении для исследования возможности ранней изотропизации метрики необходимо изучить эволюцию решений уравнений Эйнштейна с начальными данными из выделенного ансамбля состояний. В принципе эти решения через некоторое время в процессе расширения пространства могут оказаться сосредоточенными в окрестности некоторых специальных режимов, которые естественно назвать типичными состояниями метрики при расширении пространства. Если среди типичных состояний метрики на ранней стадии расширения пространства содержится изотропное решение Фрийдмана, то это означает, что в рамках классической общей теории относительности действует механизм, обеспечивающий произвольно раннюю изотропизацию метрики для целой области в пространстве решений.

Проведем намеченную программу для однородной космологической модели IX типа, основываясь на полном качественном исследовании динамической системы (6.1), определенной на компактном многообразии S . Как отмечалось в п. V, в работах [49, 50] впервые показано, что типичным состоянием метрики вблизи космологической сингулярности при сжатии пространства является колебательный режим. Однако отсюда еще не следует, что колебательный режим является типичным состоянием метрики на ранней стадии расширения пространства, поскольку типичные свойства поведения решений динамической системы могут необратимым образом зависеть от направления времени.

Необратимый характер типичных свойств поведения решений динамической системы (6.1) вблизи космологической сингулярности $q_1 q_2 q_3 = 0$ (или вблизи компонент границы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_w$ многообразия S) наглядно виден из сравнения сепаратрисной диа-

граммы при сжатии пространства (табл. 3) и сепаратрисной диаграммы при расширении пространства (при обращении направления времени). При направлении времени в сторону сжатия пространства общая траектория динамической системы (6.1) при $\tau \rightarrow \infty$ после конечного числа переходов вдоль сепаратрис особых точек $\Phi_{\text{ЛХ}}, N_i, T_i, A_i, B_i$ неограниченно приближается к аттрактору P и движется вдоль последовательностей (6.20) сепаратрис особых точек (ψ, α) . При направлении времени в сторону расширения пространства траектория проходит особые точки в обратной последовательности. Перед уходом от особенности, или от границы Γ , на обращенной по времени сепаратрисной диаграмме возможны лишь пути, изображенные на рис. 11. Здесь многоточие означает особые точки типов $(\psi, \alpha), A_i, B_i$. Прямая стрелка означает сепаратрису, цифра над ней — ее размерность; волнистая стрелка — переход по непрерывности за счет того, что одно особое множество лежит на границе другого; исклю-

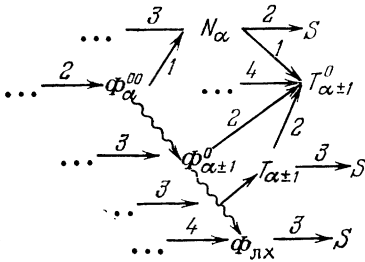


Рис. 11. Пути на сепаратрисной диаграмме в сторону расширения перед уходом от особенности.

чительные точки T_{α}^0 следует причислить к физической области (хотя они лежат в замыкании границы, но в окрестности этих точек система может находиться долго, вплоть до момента максимального расширения). Из рис. 11 видно, что траектория может отойти от границы Γ , лишь пройдя около особых точек $\Phi_{\text{ЛХ}}, N_i, T_i$, а вакуумный колебательный режим БЛХ, основанный на сепаратрисах, лежащих в углах границы Γ , из-за отсутствия сепаратрис, уходящих из этих углов в физическую область от границы Γ , может, в принципе, исчезать произвольно рано. Отметим, что некоторые из путей на рис. 11 были найдены также (другими, преимущественно численными, методами) в работе [70].

Для точной постановки вопроса о типичных состояниях метрики на ранней стадии расширения пространства существенно следующее свойство монотонной функции $F = d(\det g_{ij})^{1/6}/dt$ (см. (4.2)): при направлении времени в сторону расширения пространства функция $|F|$ вдоль каждого решения убывает от ∞ до 0, причем $F = 0$ в момент максимального расширения. Естественно назвать ранней стадией расширения те состояния метрики, в которых $F \gg 1$. Отметим, что функция F инвариантна относительно масштабных преобразований (4.10) и имеет простой физический смысл: это скорость изменения среднего радиуса мира, определяемого как $|g|^{1/6}$ ($|g|^{1/6}$ имеет размерность длины). Для решения Фридмана $F = \dot{a}$, где a — радиус трехмерной сферы (функция $F = \partial(|g|^{1/6})/\partial t$ является монотонной вдоль любого,

...

например, неоднородного, решения уравнения Эйнштейна в синхронной системе отсчета, см. конец § 3).

Определение типичных состояний метрики на ранней стадии расширения пространства состоит в следующем. Допустим, что при $|F| = F_1 \gg 1$ в фазовом пространстве координат g_{ij} и импульсов p^{ij} каким-то образом заданы начальные условия (например; распределение можно взять равномерным на поверхности $|F| = F_1$). Эти начальные условия в силу уравнений Эйнштейна перемещаются в фазовом пространстве и при некотором значении $|F| = F_2 \gg 1$ ($F_2 < F_1$) могут сосредоточиться в малой окрестности некоторых специальных точек фазового пространства. При этом метрика будет аппроксимироваться некоторыми специальными режимами, которые мы и будем называть типичными состояниями метрики на ранней стадии расширения пространства.

В рассматриваемой модели условие $|F| = F_1 \gg 1$ означает, что начальные данные на многообразии S находятся в малой окрестности границы Γ . Поэтому траектории, выходящие из этих начальных состояний, движутся вдоль сепаратрис особых точек системы (6.4), лежащих на границе Γ , до попадания в окрестность особых точек, имеющих сепаратрисы, выходящие в физическую область многообразия S . Такими особыми точками являются точки множеств $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N_i и T_i , см. рис. 11. Таким образом, исходное распределение начальных данных преобразуется в распределение, сосредоточенное в окрестности особых точек $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N_i и T_i . При этом траектории по-прежнему находятся около границы Γ , следовательно, $|F| \gg 1$. При движении траектории вдоль сепаратрис особых точек $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N_i и T_i , выходящих в физическую область многообразия S , метрика аппроксимируется степенными режимами (6.9), (6.10), (6.11), которые и являются типичными состояниями метрики однородной космологической модели IX типа на ранней стадии расширения пространства (при этом функция $|F|$ уменьшается до значений $|F| \sim 1$).

Отметим, что время t_0 выхода метрики на один из этих степенных режимов (t_0 больше времени действия колебательного режима) может быть сколь угодно малым и существенно зависит от самого решения (это очевидно уже из наличия масштабных преобразований (4.10)). Для всех решений время $t_0 \ll t_m$, где t_m — время, протекающее от сингулярности (при $t = 0$) до момента максимального расширения пространства. Существенно, что время t_0 выхода метрики на квазиизотропную асимптотику (6.9) также может быть сколь угодно малым, т. е. изотропизация решений в однородной модели IX типа может наступать (после анизотропного колебательного режима) произвольно рано.

Исследование типичных состояний метрики в всех остальных однородных космологических моделях на ранней стадии расширения пространства можно провести вполне аналогичным обра-

зом, основываясь на материале глав II и III. Такое исследование показывает, что типичные состояния метрики на ранней стадии расширения пространства мало зависят от типа модели и от состояния движения вещества. Точнее, степенные асимптотики (6.10), (6.11) в разных моделях могут видоизменяться, однако во всех моделях в число типичных состояний метрики входит квазиизотропная асимптотика (6.9). Это обстоятельство свидетельствует о том, что квазиизотропная асимптотика (6.9) является типичным состоянием метрики на ранней стадии расширения пространства и в общем неоднородном случае.

VII. Геометрическая модель колебательного режима. Приведем еще одно описание колебательного режима в однородной космологической модели IX типа с помощью сепаратрисной аппроксимации траекторий динамической системы. Преобразуем систему (4.1) в координаты $P_i = 2p_i q_i$, q_i и сделаем замену времени $d\tau_0/dt = 1/q_1 q_2 q_3$; получим следующую систему:

$$\dot{P}_i = -q_i (q_j + q_k - q_i) + H_0, \quad \dot{q}_i = q_i (P_j + P_k - P_i), \quad (6.25)$$

где

$$H_0 = \frac{1-k}{4} (T(P_i) + V(q_i)), \quad (i, j, k) = (1, 2, 3).$$

Особые точки системы (6.25) образуют четыре двумерных множества:

1) Три плоскости особых точек T_i : $q_i = 0$, $q_j = q_k$, $P_i = 0$, $P_j = P_k$. Плоскость T_i лежит на уровне $H_0 = 0$. Собственные числа этих особых точек имеют вид

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = P_i (1 - k), \quad \lambda_{4,5} = \pm 2iq_1, \quad \lambda_6 = 2P_i.$$

2) Конус K особых точек

$$q_i = 0, \quad V(P_i) = 2 \sum_{i < j}^3 P_i P_j - \sum_{i=1}^3 P_i^2 = 0,$$

лежащий в отрицательном квадранте координат P_1, P_2, P_3 . Собственные числа системы (6.25) в особых точках на конусе K имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 0, & \lambda_3 &= P_1 + P_2 + P_3 < 0, \\ \lambda_{q_1} &= P_2 + P_3 - P_1 = x_1, & \lambda_{q_2} &= P_1 + P_3 - P_2 = x_2, \\ & & \lambda_{q_3} &= P_1 + P_2 - P_3 = x_3. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$V(P_i) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0$$

и

$$P_1 + P_2 + P_3 = x_1 + x_2 + x_3 < 0.$$

Отсюда следует, что одно из x_i положительно, а два других отрицательны. Если $x_1 = 0$, то или $x_2 = 0$, или $x_3 = 0$ (так как $V(P_i) = 0$), поэтому лишние нулевые собственные числа появляются только при $P_i = 0$, $P_j = P_k$, т. е. при пересечении конуса с плоскостями T_i , как и должно быть.

Из каждой точки P_1^0, P_2^0, P_3^0 на конусе, кроме пересечений с плоскостями T_i , выходит одномерная сепаратриса, соответствующая единственному положительному собственному числу. Пусть $x_1 > 0$, тогда вдоль этой сепаратрисы $q_2 = q_3 = 0$, $H_0 = 0$ и уравнения (6.25) принимают вид

$$\dot{P}_2 = 0, \quad \dot{P}_3 = 0, \quad \dot{P}_1 = q_1^2, \quad \dot{q}_1 = q_1(P_2 + P_3 - P_1).$$

Поэтому вдоль сепаратрисы $P_2 = P_2^0 = \text{const}$, $P_3 = P_3^0 = \text{const}$.

Сделав замену времени $\frac{d\tau_1}{d\tau_0} = q_1$, получим уравнения

$$\dot{P}_1 = q_1, \quad \dot{q}_1 = P_2^0 + P_3^0 - P_1;$$

их решения имеют вид

$$q_1 = (P_2^0 + P_3^0 - P_1^0) \sin \tau_1, \\ P_1 = P_2^0 + P_3^0 - (P_2^0 + P_3^0 - P_1^0) \cos \tau_1,$$

где $0 \leq \tau_1 \leq \pi$.

Таким образом, максимум координаты q_1 вдоль этой сепаратрисы $q_1^{\max} = P_2^0 + P_3^0 - P_1^0 = x_1^0$, и сепаратриса входит в некоторую другую особую точку на конусе K , координаты которой получаются из координат начальной точки с помощью отображения T_0 :

$$P_1^1 = 2(P_2^0 + P_3^0) - P_1^0, \quad P_2^1 = P_2^0, \quad P_3^1 = P_3^0.$$

Это, очевидно, вторая точка пересечения прямой $P_2 = P_2^0, P_3 = P_3^0$ с конусом $V(P_i) = 0$. В этой точке $x_1^1 = -x_1^0 < 0$, поэтому вдоль выходящей из нее сепаратрисы растет координата q_2 или q_3 и т. д. Для траектории, движущейся вдоль некоторой последовательности сепаратрис, периодически $q_i \gg q_j, q_l$ и максимум величины q_i за одну осцилляцию приблизительно равен $x_i^{(k)}$. Следовательно, отображение T_0 на конусе $V(P_i) = 0$ определяет еще одну модель колебательного режима.

Отображение T_0 линейно, поэтому для всех точек конуса, лежащих на одной образующей конуса, закон чередования максимальных величин q_i один и тот же. От положения на образующей конуса зависит амплитуда колебаний, которая в целом убывает, поскольку последовательность точек $(P_i^k) = T_0^k(P_i^0)$ сходится к вершине конуса $P_i = 0$. В силу линейности отображение T_0 определяет отображение T , действующее на окружности S^1 , получаемой сечением конуса плоскостью $P_1 + P_2 + P_3 = -\sqrt{2}$.

Отображение T , очевидно, совпадает с отображением (6.16), полученным в п. III при исследовании сепаратрис особых точек на окружностях (ψ, i) (см. рис. 10). Таким образом, аппроксимация траекторий динамической системы (6.25) сепаратрисами особых точек, лежащих на конусе $V(P_i) = 0$, приводит к полученной ранее геометрической модели колебательного режима и добавляет к ней описание последовательного изменения амплитуды колебаний максимальных величин q_i . Это описание справедливо для любого конечного числа колебаний на траекториях системы (6.25), начинающихся достаточно близко к особым точкам конуса K .

VIII. Асимптотики модели Тауба с материей около особенности. Осесимметричная ($q_2 \equiv q_3$) космологическая модель IX типа (модель Тауба), имеющая группу изометрий $SO(2) \times SO(3)$, была проинтегрирована Таубом в случае пустого пространства ($\varepsilon = 0$) [47]. Исследуем асимптотическое поведение этой модели в общем случае $\varepsilon > 0$.

Т е о р е м а. Метрика модели Тауба при $0 \leq k < 1$ вблизи особенности $q_1 q_2^2 = 0$ имеет (при $t \rightarrow 0$) одну из следующих асимптотик:

$$q_1 \approx C_1 t^{4/3(1+k)}, \quad q_2 \approx C_2 t^{4/3(1+k)}, \quad (6.26)$$

$$q_1 \approx C_1 t^{(1-k)/(1+k)}, \quad q_2 \approx C_2 t^{(3+k)/2(1-k)}, \quad (6.27)$$

$$q_1 \approx C_1 t^2, \quad q_2 \approx \text{const} \quad (6.28)$$

(очевидно, асимптотики (6.26) — (6.28) являются частными случаями асимптотик (6.9) — (6.11)).

Осесимметричная космологическая модель IX типа описывается системой (4.1) на инвариантном многообразии V : $q_2 \equiv q_3$, $p_2 \equiv p_3$. Система (4.1) на многообразии V в координатах

$$\bar{u} = \frac{p_1 q_1}{2 p_2 q_2}, \quad w = \frac{q_1}{4 p_2 q_2}, \quad v = \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{1/2} w, \quad q_1$$

и времени τ_2 : $\frac{d\tau_2}{dt} = -\frac{w}{q_1^{1/2} v^2}$ имеет вид

$$\dot{\bar{u}} = -w^2 + 2v^2 - 2\bar{u}v^2 + (2\bar{u} - 1)H_2,$$

$$\dot{w} = w(\bar{u} - 1 - 2v^2 + 2H_2),$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2}v(-k - (1-k)(\bar{u} - 1)^2 - (1-k)w^2 - 4kv^2), \quad (6.29)$$

$$\dot{q}_1 = q_1(\bar{u} - 1),$$

$$H_2 = \frac{1-k}{4}(1 - (\bar{u} - 1)^2 - w^2 + 4v^2).$$

Первые три уравнения (6.29) образуют замкнутую систему, определенную в однополостном гиперboloиде $H_2 \geq 0$. Траектории си-

стемы (6.29) в области $p_2 q_2 > 0$ ($w > 0$, $v > 0$) и времени $\tau_3 = -\tau_2$ ($d\tau_3/dt > 0$) за конечное время уходят на бесконечность по координатам w , v ; при этом величина $p_2 q_2$ (w , v) меняет знак. Поэтому при направлении времени в сторону сжатия достаточно рассмотреть систему (6.29) в инвариантной области $w < 0$, $v < 0$.

В силу системы (6.29) $\dot{v}/v < 0$, поэтому траектория движется внутри гиперboloида $H_2 \geq 0$, приближаясь к многообразию $v = 0$; в частности, знак v сохраняется. Асимптотическое поведение решений определяется, таким образом, системой на многообразии

$$v = 0, \quad (\bar{u} - 1)^2 + w^2 \leq 1, \quad w \leq 0. \quad (6.30)$$

Выпишем особые точки системы (6.29) и их собственные числа (во всех точках $v = 0$, $q_1 = 0$):

$$T: \bar{u} = 0, \quad w = 0, \quad \lambda_{\bar{u}} = -\frac{1-k}{2}, \quad \lambda_v = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_w = -1, \\ \lambda_{q_1} = -\frac{1}{2},$$

$$\Phi: \bar{u} = \frac{1}{2}, \quad w = 0, \quad \lambda_{\bar{u}} = \frac{3}{8}(1-k), \\ \lambda_v = -\frac{1+3k}{8}, \quad \lambda_w = -\frac{1+3k}{8}, \quad \lambda_{q_1} = -\frac{1}{4},$$

$$N_1: \bar{u} = \frac{3+k}{5-k}, \quad w = -\frac{1}{5-k} \sqrt{(1+3k)(1-k)}, \\ \lambda_v = -\frac{1+3k}{2(5-k)}, \quad \lambda_{q_1} = -\frac{1-k}{5-k},$$

$$\lambda_{\bar{u}, w} = \frac{1-k \pm i \sqrt{\frac{(1-k)}{2}(3+16k-3k^2)}}{5-k},$$

$$C: \bar{u} = 2, \quad w = 0, \quad \lambda_{\bar{u}} = -\frac{3}{2}(1-k), \\ \lambda_v = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_w = 1, \quad \lambda_{q_1} = \frac{1}{2}.$$

Устойчивой является только особая точка T , ей соответствует асимптотика (6.28), справедливая, таким образом, для целой области в пространстве решений. В особую точку Φ входит трехмерная сепаратриса, которой соответствует асимптотика (6.26) Асимптотика (6.27) соответствует двумерной сепаратрисе, входящей в особую точку N_1 . Сепаратрисы, входящие в особую точку C , лежат на нефизической границе $w \equiv 0$. Никаких физических асимптотик точке C не соответствует.

Докажем, что все траектории системы (6.29), кроме сепаратрис особых точек Φ , N_1 , C , входят в особую точку T . Поскольку каждая траектория системы (6.29) прижимается к многообразию (6.30), то это утверждение следует из того, что все траектории на много-

образии (6.30), кроме сепаратрис этих особых точек, входят в притягивающую особую точку T . Для доказательства этого последнего утверждения достаточно показать, что система (6.29) на многообразии (6.30), совпадающая с двумерной системой (5.8), не имеет предельных циклов, а это уже было доказано в § 5 (для системы (5.8)).

§ 7. Исследование космологических моделей VIII, VII₀ и VI₀ типов

VIII тип. Компактное пятимерное многообразие S с динамической системой (4.9) на нем для модели VIII типа ($n_1 = -1$, $n_2 = n_3 = 1$) было построено в § 4. Компонента границы $\Gamma_m (\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3 = 0)$ многообразия S в силу условия (см. (4.8),

$$H_1 = (\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3)^2 - 2(\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2^2 + \bar{s}_3^2) + \\ + \frac{1}{4}(-2y_1y_2 - 2y_1y_3 - y_1^2 - (y_2 - y_3)^2) \geq 0$$

вырождается в одну точку $T_1^0: \bar{s}_i = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = y_3 = 1/\sqrt{2}$) Точка T_1^0 , таким образом, является единственной точкой «максимального расширения» в модели VIII типа. При направлении времени в сторону расширения каждая траектория динамической системы (4.9) в силу монотонности функции $F = (\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3)/(y_1y_2y_3)^{1/3}$ (см. § 4) покидает любую компактную область внутри многообразия S (а также в окрестности границы Γ_0 , лежащей в физической области) и, следовательно, приближается к компонентам границы Γ_m , Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_w . При этом траектория может войти только в особую точку T_1^1 , поскольку функция F монотонно возрастает (при расширении пространства) и во всех точках границы Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_w , кроме T_1^0 , функция $F = -\infty$. Таким образом, при бесконечном расширении пространства в модели VIII типа изотропизации по компонентам метрики не происходит.

При направлении времени в сторону сжатия функция F монотонно убывает и траектории динамической системы (4.9) приближаются к компонентам границы Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_w . Динамическая система на компонентах границы Γ_1 ($y_1 = 0$) и Γ_w ($w = 0$) совпадает с динамической системой (6.1) на этих же компонентах границы, которая подробно изучена в § 6. Динамические системы (4.9) на углах границы Y_i ($y_k = \delta_{ik}$) для модели IX и VIII типов также тождественны. Системы (4.9) на компонентах границы Γ_2 ($y_2 = 0$) и Γ_3 ($y_3 = 0$) для модели VIII типа эквивалентны (переходят одна в другую при перестановке координат q_2 и q_3). Поэтому для изучения поведения метрики модели VIII типа вблизи космологической особенности (т. е. динамической системы (4.9) в окрестности компонент границы Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_w) остается рассмотреть динамическую систему на компоненте границы Γ_2 .

Динамическую систему на Γ_2 удобно исследовать в локальных координатах V_1 (4.11). Система (4.12) для космологической модели VIII типа имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}} &= \bar{w}^2 (-\bar{y}_2 - \bar{y}_3 - 1) - \bar{u}\bar{w}^2 (\bar{y}_2 (\bar{y}_3 - \bar{y}_2 - 1) + \\ &\quad + \bar{y}_3 (\bar{y}_2 - \bar{y}_3 - 1)) + (2\bar{u} - 1) H_2, \\ \dot{\bar{v}}_2 &= \bar{w}^2 (-\bar{y}_2 (1 + \bar{y}_2) + \bar{y}_3 (1 + \bar{y}_3)) - \\ &\quad - \bar{v}_2 \bar{w}^2 (\bar{y}_2 (\bar{y}_3 - \bar{y}_2 - 1) + \bar{y}_3 (\bar{y}_2 - \bar{y}_3 - 1)) + 2\bar{v}_2 H_2, \quad (7.1) \\ \dot{\bar{w}} &= \bar{w} [\bar{u} - 1 - \bar{w}^2 (\bar{y}_2 (\bar{y}_3 - \bar{y}_2 - 1) + \bar{y}_3 (\bar{y}_2 - \bar{y}_3 - 1)) + 2H_2], \\ \dot{\bar{y}}_2 &= \bar{y}_2 (1 + \bar{v}_2 - 2\bar{u}), \quad \dot{\bar{y}}_3 = \bar{y}_3 (1 - \bar{v}_2 - 2\bar{u}), \quad \dot{q}_1 = q_1 (\bar{u} - 1).\end{aligned}$$

Здесь

$$H_2 = \frac{1-k}{4} [1 - (\bar{u} - 1)^2 - \bar{v}_2^2 + \bar{w}^2 (-(\bar{y}_2 - \bar{y}_3)^2 - 2(\bar{y}_2 - \bar{y}_3) - 1)].$$

Условие положительности энергии $H_2 \geq 0$ вырезает над каждой точкой сферического треугольника Δ компактный эллипсоид в соответствующих координатах \bar{u} , \bar{v}_2 , \bar{w} . Лишь над точкой $y_1 = 0$, $y_2 = y_3 = 1/\sqrt{2}$ координата \bar{w} неограничена (в точке $T_1^0 \bar{w} = -\infty$). Компонента границы Γ_2 диффеоморфна произведению $D^3 \times I$, здесь D^3 — половина ($\bar{w} \leq 0$) эллипсоида в координатах \bar{u} , \bar{v}_2 , \bar{w} ; I представляет собой отрезок определения координаты \bar{y}_3 : при $0 \leq \bar{y}_3 < \varepsilon$ мы используем координату \bar{y}_3 и локальную карту V_1 , а при $\bar{y}_3 \geq \varepsilon$ — координату $q_1/q_3 = 1/\bar{y}_3$ и локальную карту V_3 . Основания $\Gamma_2 - D^3 \times 0$ и $D^3 \times 1$ — совпадают с углами Y_1, Y_3 . Динамическая система на Y_1, Y_3 изучена выше (см. §§ 5, 6), где, в частности, найдено, что на Y_i находятся отталкивающие (на Y_i) особые точки N_1 и N_3 , причем из Γ_2 в них входит одномерная сепаратриса. Оказывается что внутри Γ_2 есть единственная особая точка, которая на этом многообразии является отталкивающей.

Запишем систему (7.1), используя вместо \bar{v}_2 координату $x = 2\bar{u} + \bar{v}_2 - 1$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\bar{w}^2 [\bar{y}_3 (\bar{y}_3 + 1) + \bar{y}_2 (\bar{y}_2 + 1 - 2\bar{y}_3)] + 2xH_3 + \\ &\quad + 2\bar{w}^2 [\bar{y}_3^2 - 1 - \bar{y}_2 (\bar{y}_2 + 1)], \\ \dot{\bar{y}}_3 &= -\bar{y}_3 x, \\ \dot{\bar{u}} &= \bar{w}^2 (-\bar{y}_2 - \bar{y}_3 - 1) - \bar{u}\bar{w}^2 (\bar{y}_2 (\bar{y}_3 - \bar{y}_2 - 1) + \\ &\quad + \bar{y}_3 (\bar{y}_2 - \bar{y}_3 - 1)) + (2\bar{u} - 1) H_2, \quad (7.2) \\ \dot{\bar{w}} &= \bar{w} [\bar{u} - 1 - \bar{w}^2 (\bar{y}_2 (\bar{y}_3 - \bar{y}_2 - 1) + \bar{y}_3 (\bar{y}_2 - \bar{y}_3 - 1)) + 2H_2], \\ \dot{\bar{y}}_2 &= \bar{y}_2 (2 + x - 4\bar{u}), \quad \dot{\zeta}_1 = q_1 (\bar{u} - 1), \\ H_2 &= \frac{(1-k)}{4} [1 - (\bar{u} - 1)^2 - (x - 2\bar{u} + 1)^2 + \\ &\quad + \bar{w}^2 (-(\bar{y}_2 - \bar{y}_3)^2 - 2(\bar{y}_2 + \bar{y}_3) - 1)].\end{aligned}$$

Особые точки системы (7.2) при $\bar{y}_3 \neq 0$, $\bar{w} \neq 0$ обязаны лежать на инвариантном многообразии $x = 0$, $\bar{y}_3 = 1$, $\bar{y}_2 = 0$. Рассмотрим систему (7.2) на этом многообразии:

$$\dot{\bar{u}} = 2\bar{w}^2 (\bar{u} - 1) + (2\bar{u} - 1) \bar{H}_2 = f_{\bar{u}},$$

$$\dot{\bar{w}} = \bar{w} (\bar{u} - 1 + 2\bar{w}^2 + 2\bar{H}_2) = f_{\bar{w}}.$$

Здесь

$$\bar{H}_2 = \frac{(1-k)}{4} \left(\frac{4}{5} - 5 \left(\bar{u} - \frac{3}{5} \right)^2 - 4\bar{w}^2 \right) \geq 0.$$

Система (7.3) при $\bar{w} \neq 0$ имеет единственную особую точку M_2 с координатами $\bar{u} = \frac{3+k}{5-k}$, $\bar{w} = -\frac{(1+2k-3k^2)^{1/2}}{5-k}$. Собственные числа системы (7.2) в этой особой точке имеют вид (в скобках указаны соответствующие собственные направления)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1-k}{5-k} (1 \pm i(1+6k)^{1/2}), \quad (\bar{u}, \bar{w}); \quad \lambda_3 = -2 \frac{1+3k}{5-k}, \quad (\bar{y}_2);$$

$$\lambda_{4,5} = \frac{1-k}{5-k} \pm i \frac{((1-k)(3+13k))^{1/2}}{5-k}, \quad (x, \bar{y}_3);$$

$$\lambda_6 = -2 \frac{1-k}{5-k}, \quad (q_1).$$

Таким образом, на компоненте границы Γ_2 особая точка M_2 является отталкивающей. Отрицательным собственным числам λ_3 , λ_6 отвечает входящая в особую точку M_2 двумерная неустойчивая сепаратриса. Соответствующие решения имеют при $t \rightarrow 0$ асимптотику

$$q_2 \approx C_2 t^2, \quad q_1 \approx q_3 \approx C_1 t^{(1-k)/(1+k)}. \quad (7.5)$$

В этой асимптотике q_2 изменяется как в таубовской асимптотике (6.11), а q_1 и q_3 изменяются как в асимптотике (6.10).

На рис. 12 показаны особые точки динамической системы на компактном многообразии S для модели VIII типа. Вместо отрезков особых точек T_2 и T_3 модели IX типа здесь появились изолированные точки M_2 и M_3 . Остальные особые точки вместе со всеми их собственными числами совпадают в обеих моделях. Соответственно этому многие сепаратрисы также совпадают; исключением являются сепаратрисы, идущие внутри Γ_2 и Γ_3 . На Γ_2 кроме отталкивающей особой точки M_2 , неустойчивых особых точек N_1 , N_3 и некоторых дуг окружностей есть полностью притягивающие (на Γ_2) особые точки дуг $(\beta_{21}, 1)$ и $(\beta_{23}, 3)$. Из этого, конечно, не следует, что сепаратрисы, выходящие из M_2 , идут в особые точки на этих дугах, так как, вообще говоря, могут существовать инвариантные многообразия внутри Γ_2 , на которые наматываются

сепаратрисы. Для модели IX типа отсутствие таких инвариантных многообразий на Γ_i следовало из существования монотонных функций F_i (6.18). Для модели VIII типа докажем менее сильное утверждение: на компоненте границы Γ_2 не существует гладкого

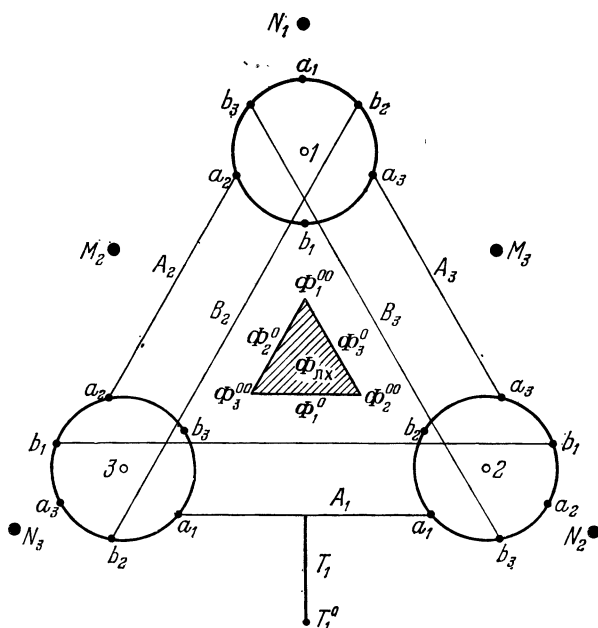


Рис. 12. Особые точки динамической системы (4.9) на многообразии S для однородной космологической модели VIII типа.

трехмерного инвариантного относительно системы (7.1) многообразия W , содержащего внутри себя особую точку M_2 . Действительно, если такое многообразие W существует, то оно пересекается с двумерным инвариантным многообразием $x = 0, \bar{y}_3 = 1, \bar{y}_2 = 0$, проходящим через точку M_2 , по некоторому циклу — замкнутой траектории системы (7.3). Однако легко доказать, что система (7.3), рассматриваемая в области $\bar{H}_2 \geq 0, \bar{w} \leq 0$, не имеет циклов. Действительно, справедливо тождество

$$\frac{\partial (F_0 f_{\bar{u}})}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial (F_0 f_{\bar{w}})}{\partial \bar{w}} = \frac{2\bar{w}}{\bar{H}^2} + \frac{2}{\bar{w}} < 0, \quad \text{где } F_0 = \frac{1}{\bar{w}\bar{H}_2}.$$

Поэтому, согласно критерию Дюлака — Бендиксона, циклов нет.

Отметим, что фазовый портрет динамической системы (7.3), определенной в половине эллипса $\bar{H}_2 \geq 0, \bar{w} \leq 0$, качественно тот же, что и фазовый портрет системы (5.8) (рис. 13). Система (7.3)

в рассматриваемой области имеет отталкивающую особую точку M_2 , притягивающую особую точку a_2 (принадлежащую отрезку A_2) с координатами $\bar{u} = 1/5$, $\bar{w} = 0$ и две неустойчивые особые точки: точку Φ_2 ($\bar{u} = 1/2$, $\bar{w} = 0$), принадлежащую отрезку Φ_2^0 , и точку d_2 ($\bar{u} = 1$, $\bar{w} = 0$), принадлежащую отрезку B_2 .

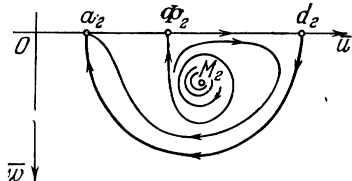


Рис. 13. Фазовый портрет динамической системы (7.3) в области, выделенной физическими условиями $\bar{H}_2 \geq 0$, $\bar{w} \leq 0$.

Все сепаратрисные переходы между особыми точками, лежащими на компонентах границы Γ_1 и Γ_w , для модели VIII типа тождественно то же, что и для модели IX типа. В частности, все сепаратрисные переходы между особыми окружностями (ψ , k) те же, что и в сепаратрисной диаграмме (табл. 3). Поэтому все выводы о свойствах колебательного режима поведения метрики модели IX типа вблизи особенности, сделанные

в § 6, в равной мере относятся и к модели VIII типа.

Так же как и в п. VIII § 6, докажем следующую теорему.

Т е о р е м а. *Осесимметричные метрики ($q_2 \equiv q_3$) модели VIII типа имеют вблизи особенности $q_1 q_2 q_3 = 0$ одну из асимптотик (при $t \rightarrow 0$) (6.26), (6.27), (6.28). При расширении пространства ($t \rightarrow \infty$) все осесимметричные метрики имеют асимптотику*

$$q_1 \approx C_1, \quad q_2 = q_3 \approx C_2 t^2. \quad (7.6)$$

Рассматриваемый класс метрик описывается системой (7.1) на инвариантном многообразии $\bar{y}_2 = \bar{y}_3$, $\bar{v}_2 = 0$. Эта система в новых координатах \bar{u} , \bar{w} , $v = \bar{y}_2^{1/2} \bar{w}$, q_1 и времени τ_2 :

$$\frac{d\tau_2}{dt} = - \frac{1}{\bar{w} (q_1 y_2 y_3)^{1/2}} = - \frac{\bar{w}}{q_1^{1/2} v^2}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}} &= -\bar{w}^2 - 2v^2 + 2\bar{u}v^2 + (2\bar{u} - 1)\bar{H}_2, \\ \dot{\bar{w}} &= \bar{w}(\bar{u} - 1 + 2v^2 + 2\bar{H}_2), \\ \dot{v} &= \frac{1}{2}v(-k(1 - 4v^2) - (1 - k)(\bar{u} - 1)^2 - (1 - k)w^2), \\ \dot{q}_1 &= q_1(\bar{u} - 1). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь

$$\bar{H}_2 = \frac{1-k}{4}(1 - (\bar{u} - 1)^2 - \bar{w}^2 - 4v^2).$$

Условие $\bar{H}_2 \geq 0$ выделяет эллипсоид $(\bar{u} - 1)^2 + \bar{w}^2 + 4v^2 \leq 1$, причем $\bar{w} \leq 0$, $v \leq 0$.

Функция $|v|$ в силу системы (7.7) монотонно убывает, поэтому в сторону сжатия каждая траектория прижимается к плоскости $v = 0$. Система (7.7) на плоскости $v = 0$ тождественно совпадает с системой (6.29) при $v = 0$. Совпадают также все собственные числа особых точек, поэтому утверждение об асимптотиках в сторону сжатия доказано в п. VIII § 6.

В обратную сторону по времени функция $|v|$ монотонно растет. Отсюда следует, что все физические траектории ($v \neq 0, w \neq 0$) входят в притягивающую (в сторону расширения) особую точку ($v = -1/2, \bar{u} = 1, \bar{w} = 0$) (других особых точек при $v \neq 0$ нет). В этой особой точке $\lambda_{\bar{u}} = -1/2, \lambda_v = -k, \lambda_{\bar{w}} = -1/2, \lambda_{q_i} = 0$. После пересчета в синхронное время t получаем асимптотику (7.6).

При вложении осесимметричных метрик в общие метрики модели VIII типа притягивающая в сторону расширения особая точка ($v = -1/2, \bar{u} = 1, \bar{w} = 0$) переходит в притягивающую особую точку T_1^0 .

VII₀ тип. Динамическая система (4.9) для космологической модели VII₀ типа ($n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0$) содержит замкнутую подсистему, совпадающую с системой (6.1) для модели IX типа на компоненте границы Γ_3 , которая поэтому и является компактным многообразием S для модели VII₀ типа. Особые точки динамической системы (6.1) на Γ_3 показаны на соответствующей части рис. 9. Две дуги $(\beta_{31}, 1)$ и $(\beta_{32}, 2)$ на окружностях $(\psi, 1)$ и $(\psi, 2)$ состоят из притягивающих на Γ_3 особых точек (см. табл. 2 собственных чисел на стр. 70). Решения, соответствующие траекториям динамической системы на Γ_3 , входящим в эти притягивающие особые точки, имеют при $t \rightarrow 0$ устойчивую казнеровскую асимптотику

$$q_i \cong C_i t^{2p_i}, \quad p_i = 1 + \sqrt{2} s_i. \quad (7.8)$$

На дугах $(\beta_{31}, 1)$ и $(\beta_{32}, 2)$ имеем $s_3 < -1/\sqrt{2}$, поэтому $p_3 < 0$ и в указанных асимптотиках $q_1, q_2 \rightarrow 0, q_3 \rightarrow \infty$.

При направлении времени в сторону сжатия траектории динамической системы на Γ_3 , как показано в п. IV § 6, приближаются к границе многообразия Γ_3 (состоящей из трех компонент, заданных условиями $y_i = \delta_{i1}, y_i = \delta_{i2}; w = 0$) и начинают двигаться вдоль сепаратрис особых точек. Сепаратрисная диаграмма для модели VII₀ типа (а также VI₀ типа) показана в табл. 4 (обозначения те же, что и на сепаратрисной диаграмме табл. 3, столбец M_3 относится к модели VI₀ типа). Существенно, что любая последовательность сепаратрис неустойчивых особых точек на Γ_3 после конечного числа переходов заканчивается в притягивающих особых точках на дугах $(\beta_{31}, 1)$ и $(\beta_{32}, 2)$ (см. табл. 4). Поэтому почти все решения в модели VII₀ типа при сжатии пространства имеют устойчивую казнеровскую асимптотику (7.8). В качестве

Сепаратрисная диаграмма динамической системы (4.9) для однородных

| | M_3 | Φ_3^0 | Φ_i^{00} | N_i | (β_{i3}, i) | (β_{ij}, i) |
|-------------------|-----------------|-----------------|---------------|--------------|-------------------|-----------------------------|
| Φ_3^0 | 2 | | | | | |
| Φ_j^{00} | | | | 1 $j = i$ | | |
| N_j | 2 $i = 1, 2$ | | | | | |
| (β_{x3}, x) | | 3 $x = 1, 2$ | 2 $x = i$ | | | |
| (β_{xy}, x) | | 3 $x = 1, 2$ | 2 $x = i$ | | | |
| (β_{yx}, x) | | | 2 $x = i$ | 3 $x = i$ | | 2^T $x = i$ $y = j$ |
| (β_{3x}, x) | 4 $x = 1, 2$ | 3 $x = 1, 2$ | 2 $x = i$ | 3 $x = i$ | 2^T $x = i$ | |
| (β_{y3}, x) | | | 2 $x = i$ | 3 $x = i$ | | 2^T $x = i$ $y = j$ |
| (β_{3y}, x) | | | 2 $x = i$ | 3 $x = i$ | 2^T $x = i$ | |
| A_3 | 3 | 2 | | | | |
| B_3 | | 2 | | | | |
| T_3 | | | | | | |

промежуточной асимптотики в решениях модели VII₀ типа может реализоваться любое конечное число колебаний на «длинной эре», где собственные числа метрики q_1 и $q_2 \gg q_3$ колеблются точно так же, как и в моделях IX и VIII типов.

Геометрическая модель колебательного режима (см. рис. 10) наглядно показывает, что эти колебания через конечное число шагов обрываются, поскольку любая точка на окружности S^1 при последовательном действии отображения (проектирования) T попадает на дуги β_{31} или β_{32} .

Траектории динамической системы на инвариантном многообразии $s_1 = s_2, y_1 = y_2 = 1/\sqrt{2}$ описывают осесимметричные метрики в модели VII₀ типа (см. (6.19)). Среди них имеются точные решения: плоское решение Фридмана

$$q_1 = q_2 = C_1 t^{4/3(1+k)}, \quad q_3 = C_3 t^{4/3(1+k)},$$

входящее в особую точку на отрезке Φ_3^0 ; казнеровское решение

$$q_1 = q_2 = C_1 t^{4/3}, \quad q_3 = C_3 t^{-2/3},$$

входящее в особую точку на отрезке A_3 ; таубовское решение, соответствующее особым точкам T_3 (и изометричное решению Минковского):

$$q_1 = q_2 = C_1, \quad q_3 = C_3 t^2.$$

Во всех осесимметричных решениях модели VII₀ типа трехмерные пространственные сечения ($t = \text{const}$) согласно формулам для кривизны Риччи (3.28) являются плоскими.

При направлении времени в сторону расширения все траектории динамической системы на Γ_3 (кроме особых точек T_3) в силу существования монотонной функции F_3 (6.18) при $t \rightarrow \infty$ входят в (вырожденную) особую точку T_3^0 (см. п. IV § 6). Однако при этом асимптотики метрики, как показывают приведенные выше точные решения, могут быть различными.

VI₀ тип. Динамическая система (4.9) для космологической модели VI₀ типа ($n_1 = 1, n_2 = -1, n_3 = 0$) эквивалентна динамической системе на компоненте границы Γ_3 (или Γ_2) для модели VIII типа. Поэтому компактным многообразием S для модели VI₀ типа является четырехмерное многообразие Γ_3 (Γ_3 , как показано выше, есть произведение половины шара (угол Y_1) на отрезок I). Особые точки динамической системы на Γ_3 показаны на соответствующей части рис. 12. Все эти особые точки вместе с их собственными числами совпадают с аналогичными особыми точками для модели VII₀ типа, только вместо отрезка T_3 и T_3^0 здесь имеется отталкивающая особая точка M_3 . В соответствии с этим в сепаратрисной диаграмме (табл. 4) нужно отбросить строки и столбцы T_3 и T_3^0 .

Поведение решений модели VI_0 типа при сжатии пространства вполне аналогично поведению решений VII_0 типа — почти все решения после конечного числа колебаний на «длинной эре» переходят на устойчивую казнеровскую асимптотику (7.8).

При направлении времени в сторону расширения особая точка M_3 является притягивающей. Этой особой точке в модели VI_0 типа соответствует следующее точное решение:

$$q_3 = C_3 t^2, \quad q_1 = q_2 = C_1 t^{(1-k)/(1+k)}, \quad (7.9)$$

устойчивое в сторону расширения. Асимптотика (7.9) при $t \rightarrow \infty$ справедлива для целой области в пространстве решений. Поэтому в модели VI_0 типа нет изотропизации метрики при бесконечном расширении пространства.

Таблица 5

Степенные асимптотики метрики однородных космологических моделей класса А при сжатии пространства

| Тип модели | Степенные асимптотики при $t \rightarrow 0$ |
|------------|---|
| II | $K_2, K_3, \Phi_{ЛХ}, N_1$ |
| VI_0 | $K_3, \Phi_{ЛХ}, M_3, N_1, N_2$ |
| VII_0 | $K_3, \Phi_{ЛХ}, T_3, N_1, N_2$ |
| VIII | $\Phi_{ЛХ}, T_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3$ |
| IX | $\Phi_{ЛХ}, T_1, T_2, T_3, N_1, N_2, N_3$ |

В заключение перечислим степенные асимптотики в сторону сжатия, имеющиеся в однородных космологических моделях класса А (см. табл. 5). В этой таблице степенные асимптотики обозначены так же, как и соответствующие им особые точки; K_i — казнеровские асимптотики (7.8), в которых отрицательный казнеровский показатель p_i соответствует переменной q_i (т. е. $q_i \rightarrow \infty$, $q_j, q_k \rightarrow 0$ при $t = 0$).

§ 8. Преобразование динамической системы для однородных космологических моделей класса В

I. Общие свойства динамической системы. Система уравнений Эйнштейна для однородных космологических моделей класса В, как показано в § 3, сводится к следующей динамической системе в фазовом пространстве $p_i q_i, p_\varphi, \varphi$:

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} - h_i, & \frac{dp_\varphi}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} - h_\varphi, \\ \frac{dq_i}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Система (8.1) определена на уровне связи, заданной уравнением Эйнштейна $R_3^0 = 0$:

$$R = 2p_3q_3 - p_1q_1 - p_2q_2 - \frac{1}{2a} p_\varphi = 0, \quad (8.2)$$

и рассматривается в области $H = \varepsilon (q_1q_2q_3)^{(1+k)/2} \geq 0$. Время τ связано с синхронным временем t соотношением $d\tau/dt = (q_1q_2q_3)^{-k/2}$, гамильтониан H и слагаемые h_i , h_φ имеют вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{(q_1q_2q_3)^{(1-k)/2}} (T(p_iq_i) + V_G(q_i)), \\ T &= 2 \sum_{i < j}^3 p_iq_i p_jq_j - \sum_{i=1}^3 p_i^2q_i^2 - \frac{p_\varphi^2q_1q_2}{(n_1q_1 - n_2q_2)^2}, \\ V_G(q_i) &= -\frac{1}{4} (12a^2q_1q_2 + (n_1q_1 - n_2q_2)^2), \\ h_1 &= \frac{1}{(q_1q_2q_3)^{(1-k)/2}} a^2q_2, \quad h_2 = \frac{1}{(q_1q_2q_3)^{(1-k)/2}} a^2q_1, \\ h_3 &= \frac{1}{(q_1q_2q_3)^{(1-k)/2}} \left(-2a^2 \frac{q_1q_3}{q_3} \right), \\ h_\varphi &= \frac{1}{(q_1q_2q_3)^{(1-k)/2}} a (n_1q_1 - n_2q_2)^2. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Константы a , n_1 , n_2 определяют тип рассматриваемой модели согласно табл. 1 на стр. 45. Все метрики модели V типа ($a = 1$, $n_1 = n_2 = 0$), алгебра Ли которой имеет шестимерную группу внутренних автоморфизмов, как показано в § 3, приводятся к диагональному виду. Поэтому для модели V типа $p_\varphi \equiv 0$ и условие (8.2) принимает вид $2p_3q_3 = p_1q_1 + p_2q_2$, в результате чего система (8.1) сильно упрощается — сводится к двумерной системе (см. ниже, § 10).

Проверим, что в силу системы (8.1) справедливы уравнения

$$\frac{dR}{d\tau} = 0, \quad \frac{dH}{d\tau} = -\frac{4a^2q_1q_2}{(q_1q_2q_3)^{1-k}} R, \quad (8.4)$$

в частности, сохраняется связь $R = 0$ (8.2); на уровне этой связи сохраняется гамильтониан $H \geq 0$. Найдем выражение $dH/d\tau$:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} - h_i \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \left(-\frac{\partial H}{\partial \varphi} - h_\varphi \right) + \\ &+ \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = -h_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - h_\varphi \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = -\frac{2a^2}{(q_1q_2q_3)^{1-k}} \left[q_1 (p_3q_3 + p_2q_2 - \right. \\ &- p_1q_1) q_2 + q_2 (p_1q_1 + p_3q_3 - p_2q_2) q_1 + q_3 (p_1q_1 + p_2q_2 - p_3q_3) \left(-\frac{2q_1q_2}{q_3} \right) - \\ &\left. - \frac{p_\varphi q_1q_2}{(n_1q_1 - n_2q_2)^2} \frac{(n_1q_1 - n_2q_2)^2}{a} \right] = -\frac{4a^2q_1q_2}{(q_1q_2q_3)^{1-k}} R. \end{aligned}$$

Запишем систему (8.1) в явном виде:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= - \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} \left[2p_1 (p_2 q_2 + p_3 q_3 - p_1 q_1) + \frac{p_\varphi^2 (n_1 q_1 + n_2 q_2)}{(n_1 q_1 - n_2 q_2)^3} q_2 - \right. \\ &\quad \left. - 2a^2 q_2 - \frac{1}{2} n_1 (n_1 q_1 - n_2 q_2) - \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{H_0}{q_1} \right], \\ \dot{p}_2 &= - \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} \left[2p_2 (p_1 q_1 + p_3 q_3 - p_2 q_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p_\varphi^2 (n_1 q_1 + n_2 q_2)}{(n_1 q_1 - n_2 q_2)^3} q_1 - 2a^2 q_1 + \frac{1}{2} n_2 (n_1 q_1 - n_2 q_2) - \frac{1-k}{2} \frac{H_0}{q_2} \right], \\ \dot{p}_3 &= - \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} \left[2p_3 (p_1 q_1 + p_2 q_2 - p_3 q_3) - \right. \\ &\quad \left. - 2a^2 \frac{q_1 q_2}{q_3} - \frac{1-k}{2} \frac{H_0}{q_3} \right], \\ \dot{q}_i &= \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} [2q_i (p_j q_j + p_k q_k - p_i q_i)], \quad i, j, k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\dot{p}_\varphi = - \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} a (n_1 q_1 - n_2 q_2)^2,$$

$$\dot{\varphi} = - \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{(1-k)/2}} \frac{2p_\varphi q_1 q_2}{(n_1 q_1 - n_2 q_2)^2}.$$

Здесь $H_0 = T + V_G$. Система (8.5) в новых координатах $P_i = p_i q_i$ и времени τ_0 , определенном соотношением $d\tau_0/d\tau = (q_1 q_2 q_3)^{-(1-k)/2}$ (или $d\tau_0/dt = (q_1 q_2 q_3)^{-1/2}$), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= - \frac{p_\varphi^2 (n_1 q_1 + n_2 q_2)}{(n_1 q_1 - n_2 q_2)^3} q_1 q_2 + 2a^2 q_1 q_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} n_1 q_1 (n_1 q_1 - n_2 q_2) + \frac{1-k}{2} H_0, \\ P_2 &= + \frac{p_\varphi^2 (n_1 q_1 + n_2 q_2)}{(n_1 q_1 - n_2 q_2)^3} q_1 q_2 + 2a^2 q_1 q_2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} n_2 q_2 (n_1 q_1 - n_2 q_2) + \frac{1-k}{2} H_0, \\ \dot{P}_3 &= 2a^2 q_1 q_2 + \frac{1-k}{2} H_0, \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\dot{q}_i = 2q_i (P_j + P_k - P_i),$$

$$\dot{p}_\varphi = - a (n_1 q_1 - n_2 q_2)^2,$$

$$\dot{\varphi} = - \frac{2p_\varphi q_1 q_2}{(n_1 q_1 - n_2 q_2)^2}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_0 = T + V_G &= (P_1 + P_2 + P_3)^2 - 2 \sum_{j=1}^3 P_j^2 - \frac{p_\varphi^2 q_1 q_2}{(n_1 q_1 - n_2 q_2)^2} - \\ &\quad - \frac{1}{4} (12a^2 q_1 q_2 + (n_1 q_1 - n_2 q_2)^2). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Теперь нетрудно проверить, что функция $R = 2P_3 - P_1 - P_2 - \frac{1}{2a} p_\varphi$ является первым интегралом системы (8.1) — (8.6):

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau_0} &= 2\dot{P}_3 - \dot{P}_1 - \dot{P}_2 - \frac{1}{2a} \dot{p}_\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} (n_1 q_1 - n_2 q_2)^2 - \frac{1}{2a} (-a) (n_1 q_1 - n_2 q_2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Из условия $H_0 \geq 0$ (см. (8.7)) следует, что в физической области ($q_i > 0$) $T(P_i) > 0$, поэтому все P_i имеют одинаковый знак и $P_i \neq 0$. Вследствие этого в однородных космологических моделях класса B объем $(q_1 q_2 q_3)^{1/2}$ изменяется монотонно (поскольку $(\ln(q_1 q_2 q_3))' = P_1 + P_2 + P_3 \neq 0$). При направлении времени в сторону сжатия $P_1 + P_2 + P_3 < 0$, следовательно, все $P_i < 0$. Система (8.6) имеет две монотонно возрастающие функции $P_1 + P_2 < 0$ и $P_3 < 0$, две монотонно убывающие функции $q_1 q_2$ и $p_\varphi = 2a(2P_3 - P_1 - P_2)$ и, также как и система (4.1) для однородных моделей класса A , монотонно убывающую функцию

$$F = \frac{d}{dt} (\det g_{ij})^{1/6} = \frac{1}{3} \frac{P_1 + P_2 + P_3}{(q_1 q_2 q_3)^{1/3}},$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{2}{3 (q_1 q_2 q_3)^{5/6}} \left[-\frac{1}{3} (P_1 + P_2 + P_3)^2 + T(P_i) - \frac{P_\varphi^2 q_1 q_2}{(n_1 q_1 - n_2 q_2)^2} - \frac{1 + 3k}{4} H_0 \right].$$

Вследствие наличия монотонных функций все особые точки динамической системы (8.6) лежат на границе физической области.

II. Понижение порядка динамической системы. Отметим следующие важные для дальнейшего свойства динамической системы (8.6): 1) координата φ является циклической координатой этой системы; 2) на уровне сохраняющейся в силу системы связи $R = 0$ импульс $p_\varphi = 2a(2P_3 - P_1 - P_2)$ исключается из уравнений (8.6); 3) после этих исключений система (8.6) инвариантна относительно масштабных преобразований

$$P_i \rightarrow \lambda P_i, \quad q_i \rightarrow \lambda q_i, \quad \tau_0 \rightarrow \frac{1}{\lambda} \tau_0$$

и содержит замкнутую подсистему пяти уравнений на переменные P_1, P_2, P_3, q_1, q_2 . Вследствие этого порядок системы (8.6) понижается до четырех.

Введем масштабнo-инвариантные координаты (аналогичные координатам, использовавшимся в § 4)

$$y_1 = \frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}, \quad y_2 = \frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}, \quad (8.8)$$

$$s_i = \frac{P_i}{(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)^{1/2}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad w = \frac{q_1^2 + q_2^2}{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}.$$

Координаты y_i и s_i удовлетворяют двум связям:

$$y_1^2 + y_2^2 = 1, \quad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1. \quad (8.9)$$

Динамическая система (8.6) в координатах (8.8) и времени τ_1 , определенном соотношением

$$\frac{d\tau_1}{dt} = \frac{(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)^{1/2}}{2(q_1 q_2 q_3)^{1/2}},$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= 2 \frac{\bar{P}_\Phi^2 (n_1 y_1 + n_2 y_2)}{(n_1 y_1 - n_2 y_2)^3} y_1 y_2 (-1 + s_1 (s_1 - s_2)) + \\ &\quad + w [4a^2 y_1 y_2 (1 - s_1 (s_1 + s_2 + s_3)) + (n_1 y_1 - n_2 y_2) \times \\ &\quad \times (n_1 y_1 - s_1 (s_1 n_1 y_1 - s_2 n_2 y_2))] + (1 - k) H_2 (1 - s_1 (s_1 + s_2 + s_3)), \\ \dot{s}_2 &= 2 \frac{\bar{P}_\Phi^2 (n_1 y_1 + n_2 y_2)}{(n_1 y_1 - n_2 y_2)^3} y_1 y_2 (1 + s_2 (s_1 + s_2)) + \\ &\quad + w [4a^2 y_1 y_2 (1 - s_2 (s_1 + s_2 + s_3)) + (n_1 y_1 - n_2 y_2) \times \\ &\quad \times (-n_2 y_2 - s_2 (s_1 n_1 y_1 - s_2 n_2 y_2))] + (1 - k) H_2 (1 - s_2 (s_1 + s_2 + s_3)), \\ \dot{s}_3 &= 2 \frac{\bar{P}_\Phi^2 (n_1 y_1 + n_2 y_2)}{(n_1 y_1 - n_2 y_2)^3} y_1 y_2 (s_3 (s_1 - s_2)) + \\ &\quad + w [4a^2 y_1 y_2 (1 - s_3 (s_1 + s_2 + s_3)) + (n_1 y_1 - n_2 y_2) \times \\ &\quad \times (-s_3 (s_1 n_1 y_1 - s_2 n_2 y_2))] + (1 - k) H_2 (1 - s_3 (s_1 + s_2 + s_3)), \\ \dot{w} &= 2w \left[4(s_1 + s_2 + s_3 - 2y_1^2 s_1) + 2(s_1 - s_2) \frac{\bar{P}_\Phi^2 (n_1 y_1 + n_2 y_2)}{(n_1 y_1 - n_2 y_2)^3} y_1 y_2 - \right. \\ &\quad \left. - w \{4a^2 y_1 y_2 (s_1 + s_2 + s_3) + (s_1 n_1 y_1 - s_2 n_2 y_2) (n_1 y_1 - n_2 y_2)\} - \right. \\ &\quad \left. - (1 - k) H_2 (s_1 + s_2 + s_3) \right], \\ \dot{y}_i &= 8y_i (y_1^2 s_1 + y_2^2 s_2 - s_i), \quad i = 1, 2, \\ \dot{\Phi} &= - \frac{4\bar{P}_\Phi y_1 y_2}{(n_1 y_1 - n_2 y_2)^2}, \quad \bar{P}_\Phi = 2a (2s_3 - s_1 - s_2), \\ \dot{q}_3 &= 4q_3 (s_1 + s_2 - s_3). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Здесь функция

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{H_0}{(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)} = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - \sum_{i=1}^3 s_i^2 - \frac{\bar{P}_\Phi^2 y_1 y_2}{(n_1 y_1 - n_2 y_2)^2} - \\ &\quad - \frac{w}{4} (12a^2 y_1 y_2 + (n_1 y_1 - n_2 y_2)^2). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Динамическая система (8.10) содержит замкнутую подсистему в координатах $s_1, s_2, s_3, w, y_1, y_2$, удовлетворяющих двум связям (8.9), и поэтому определенную на некотором четырехмерном мно-

гообразии. Все особые точки системы (8.10) для моделей III и VI типов ($n_1 = 1, n_2 = -1, n_3 = 0, a > 0$) оказываются невырожденными. Поэтому динамику моделей III и VI типов удобно изучать на построенном четырехмерном многообразии S , которое в системе координат W_1 (8.8) выделяется естественными условиями:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, H_2 \geq 0, w \geq 0, s_1 + s_2 + s_3 \leq 0, \tag{8.12}$$

$$y_1^2 + y_2^2 = 1, s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1.$$

При каждом значении y_1, y_2 условия $H_2 \geq 0, w \geq 0$ вырезают в координатах s_i, w ограниченное трехмерное множество P (диффеоморфное половине трехмерного шара). Поэтому многообразие S диффеоморфно произведению $P \times I$, где I — отрезок $y_i \geq 0$ на окружности $y_1^2 + y_2^2 = 1$.

III. Построение компактного четырехмерного многообразия для однородной модели VII типа. В случае модели VII типа ($n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0$) трехмерное множество P при $y_1 = y_2$ сжимается в двумерный диск ($\bar{p}_\varphi = 0$), целиком состоящий из вырожденных особенностей системы (8.10). Для разрешения этих особенностей введем систему координат W_2 :

$$s_1, s_2, y_1, y_2, w, z = \frac{2s_3 - s_1 - s_2}{y_1 - y_2}. \tag{8.13}$$

Компактное многообразие S для модели VII типа покрыто локальными картами W_1 и W_2 и выделяется в них условиями (8.12) (координаты z и w на многообразии S ограничены в силу условия $H_2 \geq 0$). Система (8.10) в координатах W_2 и времени τ_3 : $d\tau_3/d\tau_2 = = 1/(y_1 - y_2)$ (полагаем $y_1 > y_2$) принимает вид

$$\dot{s}_1 = 8a^2z^2 (y_1 + y_2) y_1y_2 (-1 + s_1 (s_1 - s_2)) +$$

$$+ w (y_1 - y_2) [4a^2y_1y_2 (1 - s_1Z) +$$

$$+ (y_1 - y_2) (y_1 - s_1(s_1y_1 - s_2y_2))] + (1 - k) (y_1 - y_2) H_2 \times$$

$$\times (1 - s_1Z),$$

$$\dot{s}_2 = 8a^2z^2 (y_1 + y_2) y_1y_2 (1 + s_2 (s_1 - s_2)) +$$

$$+ w (y_1 - y_2) [4a^2y_1y_2 (1 - s_2Z) +$$

$$+ (y_1 - y_2) (-y_2 - s_2 (s_1y_1 - s_2y_2))] + (1 - k) (y_1 - y_2) H_2 \times$$

$$\times (1 - s_2Z),$$

$$\dot{z} = 8a^2z^3 (y_1 + y_2) y_1y_2 (s_1 - s_2) + \tag{8.14}$$

$$+ wz [-4a^2y_1y_2 (y_1 - y_2)Z - (y_1 - y_2)^2 (s_1y_1 -$$

$$- s_2y_2)] - (1 - k) H_2z (y_1 - y_2) Z - w (y_1 - y_2)^2 -$$

$$- 8z [(y_1 - y_2) (y_1^2s_1 + y_2^2s_2) - (y_1s_1 - y_2s_2)],$$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= 2w (y_1 - y_2) [4(Z - 2y_k^2 s_k) - \\ &\quad - w \{4a^2 y_1 y_2 Z + (s_1 y_1 - s_2 y_2) (y_1 - y_2)\} - \\ &\quad - (1 - k) H_2 Z] + 16wa^2 z^2 (y_1 + y_2) y_1 y_2 (s_1 - s_2), \\ \dot{y}_1 &= 8 (y_1 - y_2) y_1 (y_1^2 s_1 + y_2^2 s_2 - s_1), \\ \dot{y}_2 &= 8 (y_1 - y_2) y_2 (y_1^2 s_1 + y_2^2 s_2 - s_2), \\ \dot{\phi} &= - 8az y_1 y_2, \\ \dot{q}_3 &= 2q_3 (y_1 - y_2) (s_1 + s_2 - z (y_1 - y_2)). \end{aligned}$$

Здесь используются обозначения

$$\begin{aligned} Z &= (s_1 + s_2 + s_3) = \frac{1}{2} (3 (s_1 + s_2) + z (y_1 - y_2)), \\ H_2 &= - (s_1 - s_2)^2 + \frac{1}{4} (s_1 + s_2 + z (y_1 - y_2)) (3 (s_1 + s_2) - z (y_1 - y_2)) - \\ &\quad - 4a^2 z^2 y_1 y_2 - \frac{w}{4} (12a^2 y_1 y_2 + (y_1 - y_2)^2). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Координаты W_2 (8.13) на многообразии S используются в окрестности точек $y_1 = y_2 = 1/\sqrt{2}$; при всех y_1, y_2 условие $H_2 \geq 0$ вырезает некоторое компактное трехмерное множество P в координатах s_i, z, w (на уровне связи

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s_1^2 + s_2^2 + \frac{1}{4} (z (y_1 - y_2) + s_1 + s_2)^2 = 1).$$

IV. Построение компактного многообразия S для однородной модели IV типа. В случае модели IV типа ($n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0, a > 0$) трехмерное множество P , вырезанное в координатах s_i, w условием $H_2 \geq 0$ (см. (8.11)), при $(y_1, y_2) \rightarrow (0, 1)$ растягивается в двумерную полосу $2s_3 - s_1 - s_2 = 0, s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1, 0 \leq w < \infty$, которая целиком состоит из вырожденных особенностей системы (8.10). Для разрешения этих особых точек введем новые координаты W_3 :

$$s_1, s_2, \bar{y}_1 = y_1^{1/2}, \quad y_2, \quad w_1 = w y_1, \quad z_1 = \frac{2s_3 - s_1 - s_2}{y_1^{1/2}}. \quad (8.16)$$

В координатах W_3 функция H_2 (8.11) имеет вид

$$\begin{aligned} H_2 &= - (s_1 - s_2)^2 + \frac{1}{4} (s_1 + s_2 + z_1 \bar{y}_1) (3 (s_1 + s_2) - z_1 \bar{y}_1) - \\ &\quad - 4a^2 z_1^2 y_2 - \frac{w_1}{4} (12a^2 y_2 + \bar{y}_1^2). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Очевидно, что в окрестности точек $\bar{y}_1 = 0, y_2 = 1$ условие $H_2 \geq 0$ вырезает в координатах s_1, s_2, z_1, w_1 компактное трехмерное

множество (на уровне связи

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s_1^2 + s_2^2 + \frac{1}{4} (z_1 \bar{y}_1 + s_1 + s_2)^2 = 1).$$

Компактное четырехмерное многообразие S для модели IV типа покрыто локальными координатами W_1 и W_3 и выделяется в них условиями (8.12). Динамическая система (8.10) в координатах W_3 имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= 8a^2 z_1^2 y_2 (-1 + s_1 (s_1 - s_2)) + \\ &+ w_1 [4a^2 y_2 (1 - s_1 Z_1) + (1 - s_1^2) \bar{y}_1^2] + (1 - k) H_2 (1 - s_1 Z_1), \\ \dot{s}_2 &= 8a^2 z_1^2 y_2 (1 + s_2 (s_1 - s_2)) + w_1 [4a^2 y_2 (1 - s_2 Z_1) - s_1 s_2 \bar{y}_1^2] + \\ &+ (1 - k) H_2 (1 - s_2 Z_1), \\ \dot{z}_1 &= 8a^2 z_1^3 y_2 (s_1 - s_2) + \\ &+ w_1 z_1 [4a^2 y_2 (-Z_1) - s_1 \bar{y}_1^2] - (1 - k) H_2 z_1 Z_1 - \\ &- w_1 \bar{y}_1 - 4z_1 (\bar{y}_1^4 s_1 + y_2^2 s_2 - s_1), \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= 2w_1 \{4 (Z_1 - 2\bar{y}_1^4 s_1 - 2y_2^2 s_2) + 8 (s_1 - s_2) a^2 z_1^2 y_2 - \\ &- w_1 [4a^2 y_2 Z_1 + s_1 \bar{y}_1^2] - (1 - k) H_2 Z_1 + \\ &+ 4 (\bar{y}_1^4 s_1 + y_2^2 s_2 - s_1)\}, \end{aligned}$$

$$\dot{\bar{y}}_1 = 4\bar{y}_1 (\bar{y}_1^4 s_1 + y_2^2 s_2 - s_1), \quad \dot{y}_2 = 8y_2 (\bar{y}_1^4 s_1 + y_2^2 s_2 - s_2),$$

$$\dot{\phi} = -8az_1 \frac{y_2}{\bar{y}_1}, \quad \dot{q}_3 = 2q_3 (s_1 + s_2 - z_1 \bar{y}_1).$$

Здесь используется обозначение

$$Z_1 = (s_1 + s_2 + s_3) = \frac{1}{2} (3(s_1 + s_2) + z_1 \bar{y}_1).$$

§ 9. Некоторые общие свойства динамики однородных космологических моделей III, IV, VI и VII типов

I. Некоторые точные решения и асимптотики метрики для моделей класса В. Компактные четырехмерные многообразия S , построенные в § 8 для моделей III, IV, VI и VII типов, являются произведениями $P \times I$, где P — трехмерное ограниченное множество в координатах s_i, w или $s_i, z, w; s_i, z_1, w_1$, диффеоморфное половине трехмерного шара, а I — отрезок на окружности $y_1^2 + y_2^2 = 1, y_i \geq 0$. Граница Γ многообразия S состоит из четырех компонент: $\Gamma_0 (H_2 = 0)$, $\Gamma_w (w = 0)$, $Y_1 (y_1 = 1, y_2 = 0)$, $Y_2 (y_1 = 0, y_2 = 1)$; в пересечении этих компонент находятся углы границы. Компоненты границы Γ и все их пересечения являются инвариантными многообразиями динамической системы (8.10) (соответственно (8.14) или (8.18)) на многообразии S .

Полезно сравнить систему (8.10) с аналогичной системой (4.9) для однородных моделей класса *A*. Как отмечалось в § 4, системы (4.9) для всех моделей класса *A* при $w = 0$ оказываются полностью тождественными. В противоположность этому в классе *B* система (8.10) при $w = 0$ оказывается совершенно другой (это проявление недиагональности метрики для моделей класса *B*) и зависит от типа модели (вследствие того, что метрика приводится к диагональному виду различными преобразованиями; см. § 3). Однако некоторые особые точки систем (8.10) и (4.9) при $w = 0$ совпадают, например особые точки $\Phi_{\text{ЛХ}}$ ($s_i = -1/\sqrt{3}$, $w = 0$); совпадают также все собственные числа в этих особых точках. Поэтому во всех моделях класса *B* также имеются квазиизотропные асимптотики при $t \rightarrow 0$, имеющие коразмерность два:

$$q_i \approx C_i t^{4/3(1+k)}, \quad (9.1)$$

при этом $\varphi \rightarrow \text{const}$.

Система (8.10) на компонентах границы Y_1 при $n_i \neq 0$ тождественно совпадает с системой (4.9) (или (6.1)) на соответствующих углах Y_i многообразия S для моделей класса *A*. Поэтому на многообразии S для моделей класса *B* также имеются окружности особых точек (ψ, i) ($s_1 + s_2 + s_3 = -\sqrt{2}$, $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$, $y_k = \delta_{ik}$, $w = 0$), изолированные особые точки N_i (6.3) и точки Φ_i^{00} — концевые точки отрезка $\Phi_{\text{ЛХ}}$ ($y_1^2 + y_2^2 = 1$) (здесь $i = 1, 2$ для моделей III, VI и VII типов и $i = 1$ для модели IV типа). Совпадают также все собственные числа этих особых точек. Поэтому в моделях класса *B* также реализуются (неустойчивые) асимптотики N_i , имеющие коразмерность три:

$$\begin{aligned} q_i &\approx C_1 t^{(1-k)/(1+k)}, & q_j &\approx C_2 t^{(3+k)/2(1+k)}, \\ q_3 &\approx C_3 t^{(3+k)/2(1+k)}, & i, j &= 1, 2, \end{aligned} \quad (9.2)$$

при этом $\varphi \rightarrow \text{const}$ при $t \rightarrow 0$.

Две дуги $(\beta_{31}, 1)$ ($s_3 < s_1 < s_2$) и $(\beta_{32}, 2)$ ($s_3 < s_2 < s_1$) на окружностях особых точек $(\psi, 1)$ и $(\psi, 2)$ (для модели IV типа только дуга $(\beta_{31}, 1)$), так же как и для моделей VI₀ и VII₀ типов (см. § 7), состоят из притягивающих в сторону сжатия особых точек. Решения, соответствующие траекториям, входящим в эти особые точки, имеют при $t \rightarrow 0$ устойчивую казнеровскую асимптотику метрики

$$q_i \approx C_i t^{2p_i}, \quad p_i = 1 + \sqrt{2}s_i, \quad \varphi \rightarrow \text{const}. \quad (9.3)$$

Перечисленные особые точки лежат на границе физической области многообразия S , и поэтому им соответствуют не точные решения, а асимптотики метрики. Ряд точных решений в однородных моделях класса *B* можно найти, исследуя особые точки в физической области $w \neq 0$, $y_i \neq 0$ многообразия S . В дальнейших

вычислениях удобно разрешить связи (8.9) и перейти (в физической области) к новым координатам

$$\begin{aligned} u &= 2 \frac{P_1 - P_2 - P_3}{q_1} = 2 \frac{s_1 - s_2 - s_3}{y_1 w^{1/2}}, \\ v &= 4 \frac{P_1 - P_2}{q_1} = 4 \frac{s_1 - s_2}{y_1 w^{1/2}}, \\ x &= 4 \frac{2P_3 - P_1 - P_2}{q_1} = 4 \frac{2s_3 - s_1 - s_2}{y_1 w^{1/2}}, \quad y = \frac{q_2}{q_1} = \frac{y_2}{y_1}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Динамическая система (8.6) — (8.10) в координатах (9.4) и времени $\tau_1' = 2\tau_1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= yv, \\ \dot{v} &= uv + 2(n_1^2 - n_2^2 y^2) - 2a^2 \frac{x^2(n_1 + n_2 y)y}{(n_1 - n_2 y)^3}, \\ \dot{x} &= xu - 2(n_1 - n_2 y)^2, \\ \dot{u} &= u^2 + n_1^2 - n_2^2 y^2 - 4a^2 y - a^2 \frac{x^2(n_1 + n_2 y)y}{(n_1 - n_2 y)^3} + H_3. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Здесь функция H_3 имеет вид

$$H_3 = \frac{1-k}{4} \left[3u^2 + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}vx - 3uv + ux - \frac{a^2 x^2 y}{(n_1 - n_2 y)^2} - 12a^2 y - (n_1 - n_2 y)^2 \right].$$

Система (9.5) при $y \neq 0$ имеет одномерное множество особых точек L_y с координатами (y — параметр)

$$v = 0, \quad x = \frac{(n_1 - n_2 y)^2}{a \sqrt{y}}, \quad u = 2a \sqrt{y}. \quad (9.6)$$

В этих особых точках $H_3 = 0$.

В случае однородной модели IV типа других особых точек у системы (9.5) — (8.10) в области $y \neq 0$, $w \neq 0$ нет. Для моделей III, VI и VII типов кроме линии L_y имеются еще особые точки при $y = 1$ (их мы рассмотрим отдельно в § 10). Особые точки L_y определяют следующие точные вакуумные решения в моделях III, IV, VI и VII типов:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1^0 t^{2/(x^2+1)}, \quad q_2 = y q_1, \quad \kappa = \frac{n_1 - n_2 y}{2a \sqrt{y}}, \\ q_3 &= q_3^0 t^2, \quad \varphi = -\frac{\ln t}{2 \sqrt{q_3^0}} + \varphi_0. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Эти точные решения для моделей III, VI и VII типов впервые были найдены в работе [70], где указаны также приближенные оценки области их устойчивости.

Устойчивость решений (9.7) можно исследовать полностью (и найти точные границы (по параметру y) области устойчивости) на основе вычисления собственных чисел особых точек (9.6). Выпишем характеристическую матрицу системы (9.5)

$A_i^j(\lambda) = \left| \frac{\partial' f_i}{\partial x_j} - \lambda \delta_j^i \right|$ в этих особых точках:

| | y | v | x | u |
|-----|--|--|-------------------------------|--|
| y | $-\lambda$ | y | 0 | 0 |
| v | $-\frac{2}{y} m_1$ | $2a \sqrt{y} - \lambda$ | $-\frac{4am_3 \sqrt{y}}{m_2}$ | 0 |
| x | $4n_2 \cdot m_2$ | 0 | $2a \sqrt{y} - \lambda$ | $\frac{m_2^2}{a \sqrt{y}}$ |
| u | $-4a^2 + \frac{1-k}{4} \times$ $\times \left(-12a^2 - \frac{(m_2)^2}{y} \right) -$ $-\frac{1}{y} m_1$ | $\frac{1-k}{8} \left(\frac{(m_2)^2}{a \sqrt{y}} + \right.$ $\left. + 12a \sqrt{y} \right)$ | $-\frac{2am_3 \sqrt{y}}{m_2}$ | $4a \sqrt{y} - \lambda -$ $-\frac{1-k}{4} \left(12a \sqrt{y} + \right.$ $\left. + \frac{(m_2)^2}{a \sqrt{y}} \right)$ |

Здесь

$$m_1 = n_1^2 + 4n_1 n_2 y + 3n_2^2 y^2, \quad m_2 = n_1 - n_2 y, \quad m_3 = n_1 + n_2 y.$$

Вычисление определителя этой матрицы удобно производить, упростив ее сначала с помощью следующих элементарных операций (каждая последующая операция применяется к результату предыдущей):

- 1) к 4-й строке прибавим 2-ю строку, умноженную на $(-1/2)$;
- 2) ко 2-му столбцу прибавим 4-й столбец, умноженный на $1/2$;
- 3) к 4-й строке прибавим 1-ю строку, умноженную на $(-a/\sqrt{y})$;
- 4) к 1-му столбцу прибавим 4-й столбец, умноженный на (a/\sqrt{y}) .

В результате этих операций, не меняющих определителя, исходная матрица преобразуется в матрицу, представленную на стр. 110. Характеристические корни λ_k полученной матрицы ($\det(A_i^j(\lambda_k)) = 0$), являющиеся собственными числами особых точек L_y , имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \lambda_{2,3} &= 2a \sqrt{y} \pm 2i (n_1 + n_2 y), \\ \lambda_4 &= 4a \sqrt{y} - \frac{1-k}{4} \left(12a \sqrt{y} + \frac{(n_1 - n_2 y)^2}{a \sqrt{y}} \right). \end{aligned} \quad (9.8)$$

| | y | v | x | u |
|-----|--|------------------------------|------------------------------|--|
| y | $-\lambda$ | y | 0 | 0 |
| v | $-\frac{2}{y} m_1$ | $2a\sqrt{y} - \lambda$ | $-\frac{4am_3\sqrt{y}}{m_2}$ | 0 |
| x | $4n_2m_2 + \frac{(m_2)^2}{2a\sqrt{y}}$ | $\frac{(m_2)^2}{2a\sqrt{y}}$ | $2a\sqrt{y} - \lambda$ | $\frac{(m_2)^2}{a\sqrt{y}}$ |
| u | 0 | 0 | 0 | $4a\sqrt{y} - \lambda - \frac{1-k}{4} \times$ $\times \left(12a\sqrt{y} + \frac{(m_2)^2}{a\sqrt{y}} \right)$ |

Нулевое собственное число $\lambda_1 = 0$ отвечает одномерности множества особых точек L_y . Собственные числа $\lambda_{2,3}$ относятся к решениям в пустом пространстве ($H_3 = 0$). Вследствие того, что вещественные части $\lambda_{2,3}$ положительны, особые точки L_y (9.6) и соответствующие им решения (9.7) являются устойчивыми (при всех $y > 0$) в пустом пространстве при направлении времени в сторону расширения.

Характер устойчивости особых точек (9.6) и соответствующих им решений (9.7) в заполненном пространстве определяется знаком λ_4 . При y достаточно малом, очевидно, $\lambda_4 < 0$ для всех рассматриваемых моделей, т. е. особые точки (9.6) и решения (9.7) неустойчивы. Граница области устойчивости определяется равенством $\lambda_4 = 0$, или

$$\left(\frac{n_1}{\sqrt{y_0}} - n_2 \sqrt{y_0} \right)^2 = \frac{4a^2(1+3k)}{(1-k)}. \quad (9.9)$$

В случае модели VII типа ($n_1 = 1, n_2 = 1$) уравнение (9.9) при всех значениях параметров a, k имеет два корня: $y_0 < 1$ и $1/y_0$; в случае модели IV типа ($n_1 = 1, n_2 = 0$) это уравнение имеет один корень $y_1 = (1-k)/4a^2(1+3k)$; в случае моделей III и VI типов ($n_1 = 1, n_2 = -1$) уравнение (9.9) не имеет вещественных корней, если

$$\frac{a^2(1+3k)}{1-k} < 1; \quad (9.10)$$

если же выполнено противоположное неравенство, то уравнение (9.9) имеет два корня: $y_0 < 1$ и $1/y_0$;

Устойчивые при направлении времени в сторону расширения решения (9.7) (особые точки L_y (9.6)) определяются условиями

($\lambda_4 > 0$): для модели VII типа $y_0 < y < 1/y_0$; для модели IV типа $y_1 < y$; для моделей III и VI типов $y_0 < y < 1/y_0$, если $a^2(1 + 3k)/(1 - k) > 1$, в противоположном случае все решения (9.7) неустойчивы.

Отметим, что точные решения (9.7) при $k \neq 1$, очевидно, анизотропны при $t \rightarrow \infty$. Поэтому наличие в однородных моделях класса В (кроме модели V типа) устойчивых при расширении пространства асимптотик (9.7) означает, что в этих моделях изотропизация метрики возможна только на промежуточной стадии эволюции решения; при $t \rightarrow \infty$ метрика согласно (9.7) становится анизотропной.

Решения (9.7) дают также асимптотики при направлении времени в сторону сжатия. Согласно формулам собственных чисел (9.8), асимптотики (9.7), для которых y принадлежит области неустойчивости $\lambda_4 < 0$, имеют коразмерность два, а асимптотики, для которых y принадлежит области устойчивости $\lambda_4 > 0$, имеют в сторону сжатия коразмерность три.

II. Колебательный режим на длинной эре в моделях класса В. Отметим сначала некоторые свойства динамической системы (8.10), связанные с недиагональностью метрики

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

моделей класса В. Покажем, что в случае модели VII типа почти все траектории системы (8.10) никогда не пересекают поверхность $y_1 = y_2$. Для этого запишем уравнения Эйнштейна как динамическую систему в восьмимерном фазовом пространстве g_{ij} , \dot{g}_{ij} . Траектория системы (8.10), пересекающая поверхность $y_1 = y_2$, перейдет в траекторию, пересекающую подмногообразие W_0 матриц с двумя равными собственными числами. (Координаты q_1, q_2, q_3 в случае модели VII типа являются собственными числами метрики g_{ij} , поскольку метрика приводится к диагональному виду с помощью ортогонального поворота на угол φ ; см. § 3.) Многообразие W_0 матриц с равными собственными числами $q_1 = q_2$ имеет размерность два, поэтому в пространстве g_{ij} , \dot{g}_{ij} ему соответствует шестимерное многообразие W_1 (скорости \dot{g}_{ij} произвольны) и траектории динамической системы, проходящие через многообразие W_1 , заполняют некоторое подмногообразие размерности семь в восьмимерном фазовом пространстве g_{ij} , \dot{g}_{ij} . Поэтому почти все траектории динамической системы не лежат на этом многообразии, т. е. не пересекают поверхность $y_1 = y_2$. Следовательно, для исследования общих решений модели VII типа достаточно изучить систему (8.10) в области $y_1 > y_2$.

В случае однородных моделей III, IV и VI типов метрика g_{ij} приводится к диагональному виду с помощью преобразований

(сохраняющих коммутаторы), которые не являются ортогональными преобразованиями (например, для моделей III и VI типов это гиперболический поворот). В этом случае координаты q_1 и q_2 не являются собственными числами матрицы g_{ij} (9.11) и, как нетрудно проверить, подмногообразие матриц g_{ij} , для которых $q_1 = q_2$, имеет размерность три и поэтому целая область в пространстве решений пересекает многообразие $q_1 = q_2$. Этим объясняется существенное отличие динамики указанных моделей от динамики модели VII типа — здесь амплитуда колебаний величины $y = q_2/q_1$ может быть неограниченной, в то время как в модели VII типа $y < 1$.

В рассматриваемых однородных моделях класса B , так же как и для моделей VI_0 и VII_0 типов класса A , имеется промежуточный режим поведения метрики перед выходом (при сжатии пространства) на устойчивую казнеровскую асимптотику (9.3) — колебательный режим на длинной эре (колеблются $q_1, q_2 \gg q_3$), который обусловлен дрейфом траектории системы (8.10) вдоль сепаратрис неустойчивых особых точек окружностей $(\psi, 1)$ и $(\psi, 2)$. Однако в классе B колебательный режим изменения величин q_1, q_2, q_3 по указанным выше причинам существенно зависит от типа модели.

Сепаратрисы неустойчивых особых точек (ψ, i) лежат на компонентах границы Y_i и Γ_w ($w = 0$). Система (8.10) на компонентах границы Y_i (кроме Y_2 для модели IV типа) тождественно та же, что и для моделей класса A , и изучена в § 6. Система (8.10) на компоненте границы Γ_w имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= Z_2 (-1 + s_1 (s_1 - s_2)) + (1 - k) H_2 (1 - s_1 (s_1 + s_2 + s_3)), \\ \dot{s}_2 &= Z_2 (1 + s_2 (s_1 - s_2)) + (1 - k) H_2 (1 - s_2 (s_1 + s_2 + s_3)), \\ \dot{s}_3 &= Z_2 (s_3 (s_1 - s_2)) + (1 - k) H_2 (1 - s_3 (s_1 + s_2 + s_3)), \\ \dot{y}_1 &= 8y_1 (y_1^2 s_1 + y_2^2 s_2 - s_1), \quad \dot{y}_2 = 8y_2 (y_1^2 s_1 + y_2^2 s_2 - s_2). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_2 &= 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - \sum_{i=1}^3 s_i^2 - \frac{4a^2 (2s_3 - s_1 - s_2)^2 y_1 y_2}{(n_1 y_1 - n_2 y_2)^2}, \\ Z_2 &= \frac{8a^2 (2s_3 - s_1 - s_2)^2 (n_1 y_1 + n_2 y_2) y_1 y_2}{(n_1 y_1 - n_2 y_2)^3}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Для определенности рассмотрим сепаратрисы особых точек окружности $(\psi, 1)$ (система (8.10) для моделей III, VI и VII типов не меняется при перестановке индексов 1, 2, а в случае модели IV типа имеется только одна окружность $(\psi, 1)$). Согласно табл. 2 знаков собственных чисел на стр. 70 из каждой точки (s_1^0, s_2^0, s_3^0)

дуги $s_2 < s_1$ ($(\beta_{21}, 1)^* + (\beta_{23}, 1) + (\beta_{32}, 1)$)^{*} окружности $(\psi, 1)$ выходит на одномерную сепаратриса, идущая по углу границы $\Gamma_w \cap \cap \Gamma_0$: $w = 0$, $H_2 = 0$. Вдоль этой сепаратрисы в силу системы (9.12) имеем]

$$\left(\frac{s_1 + s_2}{s_3}\right)^* = 0, \quad \dot{y} = 8y(s_1 - s_2), \quad y = \frac{y_2}{y_1}. \quad (9.14)$$

Следовательно, в координатах s_1, s_2, s_3 сепаратриса движется на сфере $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ по дуге γ_c большого круга, вырезанного плоскостью $s_1 + s_2 = cs_3$ (рис. 14). Направление этого движения определяется знаком $\dot{s}_1 = = Z_2(-1 + s_1(s_1 - s_2))$. Множитель $-1 + s_1(s_1 - s_2) = = -s_2^2 - s_3^2 - s_1s_2 < 0$, поскольку $s_i < 0$ (в силу $H_2 > 0$) на многообразии S ; поэтому направление движения определяется знаком Z_2 , или $(n_1y_1 + + n_2y_2) / (n_1y_1 - n_2y_2)^3$. Величина $y = y_2/y_1$ согласно (9.14) возрастает до пересечения дуги γ_c с дугой κ ($s_1 = s_2$), и y убывает после пересечения.

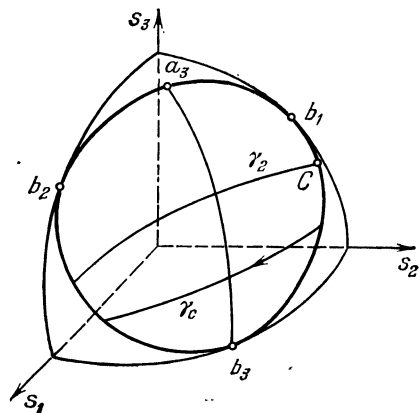


Рис. 14. Движение сепаратрис особых точек окружности $(\psi, 1)$ в координатах s_1, s_2, s_3 .

В случае модели VII типа ($n_1 = n_2 = 1$) на всех сепаратрисах $s_1 + s_2 = cs_3$ при $c \neq 2$ имеем $y < 1$, иначе при $y = 1$ функция H_2 стала бы отрицательной ($H_2 = -\infty$). Поэтому на этих сепаратрисах $Z_2 > 0$ и движение по дуге γ_c происходит в одну сторону ($\dot{s}_1 < 0$), а величина y проходит через максимум $y_m < 1$. Конечная точка такой сепаратрисы получается из начальной точки (s_1^0, s_2^0, s_3^0) отражением θ в плоскости $s_1 = s_2$: получаем (s_2^0, s_1^0, s_3^0) . Если в начальной точке $2s_3^0 - s_1^0 - s_2^0 = 0$, то вдоль выходящей из нее сепаратрисы $s_i \equiv s_i^0$ и сепаратриса идет в ту же точку (s_1^0, s_2^0, s_3^0) на окружности $(\psi, 2)$.

В случае модели IV типа ($n_1 = 1, n_2 = 0$) имеем $Z_2 > 0$ (кроме $2s_3^0 - s_1^0 - s_2^0 = 0$), поэтому сепаратрисы ведут себя так же, как и в модели VII типа (но величина y_m может быть любой).

В случае моделей III и VI типов ($n_1 = 1, n_2 = -1$) имеются три типа сепаратрис. 1) Вдоль сепаратрисы $y < 1$, сепаратриса устроена так же, как в модели VII типа. 2) Вдоль сепаратрисы y переходит через единицу, при этом величина Z_2 меняет знак и движение по дуге γ_c меняет направление на обратное, y растет до ∞ и сепаратриса

ратриса входит в точку (s_1^0, s_2^0, s_3^0) на окружности $(\psi, 2)$. 3) Две исключительные сепаратрисы входят в неустойчивые особые точки j_1 и j_2 , в которых $y = 1, w = 0$.

Найдем максимальное значение y_m , которое достигается на сепаратрисах, возвращающихся в точку исходной окружности $(\psi, 1)$. Максимум y_m достигается в точке (s, s, s_3) пересечения дуги γ_c с дугой κ , при этом

$$\frac{s_1^0 + s_2^0}{s_3^0} = \frac{2s}{s_3^1}. \quad (9.15)$$

Вдоль сепаратрисы имеем $H_2 = 0$, поэтому из (9.13), подставляя выражение (9.15), находим

$$\frac{y_m}{(n_1 - n_2 y_m)^2} = \frac{T(s_1^1)}{4a^2 (2s_3^1 - s_1^1 - s_2^1)^2} = \frac{s_3^0}{4a^2} \frac{(2(s_1^0 + s_2^0) - s_3^0)}{(s_1^0 + s_2^0 - 2s_3^0)^2}. \quad (9.16)$$

Из этой формулы следует, что при стремлении начальной точки сепаратрисы (s_1^0, s_2^0, s_3^0) на окружности $(\psi, 1)$ к точкам $a_3 \left(\frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{-4}{3\sqrt{2}} \right)$ или $b_3 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ (см. рис. 14) имеем $y_m \rightarrow 0$.

В случае модели VII типа функция $y_m / (1 - y_m)^2$ монотонна, и поэтому при стремлении начальной точки (s_1^0, s_2^0, s_3^0) к точке C на дуге γ_2 ($s_1^0 + s_2^0 = 2s_3^0$) величина y_m монотонно возрастает до 1; в случае модели IV типа при этом имеем $y_m \rightarrow \infty$.

В случае моделей III и VI типов функция $y_m / (1 + y_m)^2 \leq 1/4$ при всех y_m , поэтому, если начальная точка сепаратрисы (s_1^0, s_2^0, s_3^0) находится на дуге I_1 ($s_2 < s_1$),

$$\frac{s_3^0 (2(s_1^0 + s_2^0 - s_3^0))}{4a^2 (s_1^0 + s_2^0 - 2s_3^0)^2} > \frac{1}{4}, \quad (9.17)$$

то вдоль такой сепаратрисы функция $y = y_2/y_1$ не имеет максимума и монотонно возрастает до бесконечности, при этом сепаратриса входит в особую точку (s_1^0, s_2^0, s_3^0) на окружности $(\psi, 2)$, осуществляя тем самым такой же сепаратрисный переход, что и в моделях VI₀ и VII₀ типов класса A. Если начальная точка (s_1^0, s_2^0, s_3^0) лежит вне дуги I_1 , то выходящая из нее сепаратриса устроена так же, как и в случае модели VII типа ($y_m < 1$); если же точка (s_1^0, s_2^0, s_3^0) является одной из двух концевых точек дуги I_1 , то выходящая из нее сепаратриса идет в неустойчивую особую точку j_1 или j_2 ($y = 1, w = 0$). Отметим, что дуга I_1 содержит точку C ($s_1^0 + s_2^0 = 2s_3^0$) (см. рис. 14); при $a \rightarrow 0$ дуга I_1 растягивается на всю дугу $s_2 < s_1$.

Опишем, основываясь на проведенном исследовании сепаратрис особых окружностей $(\psi, 1)$ и $(\psi, 2)$, свойства колебательного режима на длинной эре в однородных моделях класса *B*. Соответствующие траектории системы (8.10) аппроксимируются последовательностью особых точек и их сепаратрис, мимо которых эти траектории движутся:

$$\dots \rightarrow (\psi_l, i_l) \rightarrow (\psi_{l+1}, i_{l+1}) \rightarrow (\psi_{l+2}, i_{l+2}) \rightarrow \dots \quad (9.18)$$

Все сепаратрисные переходы между особыми окружностями в случае моделей класса *B* однозначны, и за каждой сепаратрисой, идущей по компоненте границы Y_1 (или Y_2), следует сепаратриса, идущая по компоненте границы Γ_w ($w = 0$), и наоборот.

Последовательность особых точек (ψ_l, i_l) в (9.18) определяется следующими отображениями (в скобках указаны компоненты границы, по которым идут соответствующие сепаратрисы; в случае моделей IV и VII типов $i_{l+1} = i_l = i$, полагаем $i = 1$):

$$K(\psi_l, 1) = (\psi_{l+1}, 1) = \begin{cases} (T_1\psi_l, 1), & \psi \text{ на дуге } (\alpha_1, 1), (Y_1), \\ (\theta\psi_l, 1), & \psi \text{ на дуге } s_2 < s_1, (\Gamma_w), \\ (\psi_l, 1), & \psi \text{ на дуге } (\beta_{31}, 1). \end{cases} \quad (9.19)$$

Здесь отображение T_1 — проектирование (6.16) дуги α_1 из первой вершины треугольника Δ : θ — отражение $\theta(s_1, s_2, s_3) = (s_2, s_1, s_3)$; при попадании точки $(\psi_s, 1)$ на дугу $(\beta_{31}, 1)$, состоящую из притягивающих особых точек, аппроксимация (9.18) заканчивается выходом решения на устойчивую казнеровскую асимптотику (9.3).

В случае моделей III и VI типов имеем

$$K(\psi_l, 1) = (\psi_{l+1}, i_{l+1}) = \begin{cases} (\psi_l, 2), \psi & \text{на дуге } I_1, (\Gamma_w), \\ (T_1\psi_l, 1), \psi & \text{на дуге } (\alpha_1, 1), (Y_1), \\ (\theta\psi_l, 1), \psi & \text{на дуге } s_2 < s_1 \text{ вне } I_1, (\Gamma_w), \\ (\psi_l, 1), \psi & \text{на дуге } (\beta_{31}, 1). \end{cases} \quad (9.20)$$

Отображение $K(\psi_l, 2)$ получается из (9.20) заменой индексов $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$. Исключительные сепаратрисы, выходящие из границ дуг I_1 и I_2 , идут в неустойчивые особые точки j_1 и j_2 (см. § 10) и не влияют на колебательный режим.

Последовательное изменение точки (s_1, s_2, s_3) на окружности S^1 ($s_1 + s_2 + s_3 = -\sqrt{2}, s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$) в силу отображений (9.19) и (9.20) показано соответственно на рис. 15, *a, б*. На этих рисунках наглядно видно, что колебания на длинной эре заканчиваются через конечное число шагов при попадании точки ψ_s

на дугу $(\beta_{31}, 1)$ (или $(\beta_{32}, 2)$). Также очевидно, что в случае моделей III и VI типов колебания внутри отрезка I_1 (см. рис. 15, б) те же, что и для моделей VI₀ и VII₀ типов в классе А.

При движении траектории (9.18) в окрестности особой точки (s_1, s_2, s_3) на окружности (ψ_l, i_l) метрика аппроксимируется казнеровским решением (9.3), при этом, в отличие от моделей класса А, показатели p_i приближенно постоянны только в окрестности окружностей (ψ_l, i_l) и меняются вдоль обоих типов сепаратрис

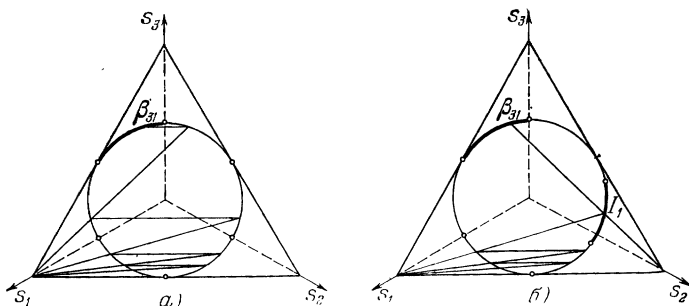


Рис. 15. Последовательное преобразование особой точки на окружности S^1 для однородных космологических моделей IV и VII типов (а) и III и VI типов (б).

(идущих по Y_i и Γ_w). Параметр казнеровских показателей u

$$p_1(u) = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2(u) = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3(u) = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2} \tag{9.21}$$

за одно полное колебание величины $y = q_2/q_1$ в моделях IV и VII типов уменьшается на 1, в то время как в моделях класса А параметр u уменьшается на 2. Действительно, одному колебанию в моделях класса В отвечают преобразования θT_1 точки на окружности S^1 , а в моделях класса А — преобразования $T_2 T_1$; при проецированиях T_1 и T_2 параметр u уменьшается на 1 (см. п. V § 6), а при отражении θ параметр u не меняется.

Амплитуда последовательных колебаний величины $y = q_2/q_1$ на длинной эре вычисляется согласно (9.16) и после подстановки выражений (9.21) и $p_i = 1 + \sqrt{2} s_i$ следующим образом выражается через параметр u казнеровских показателей:

$$\frac{y_m}{(n_1 - n_2 y_m)^2} = \frac{1}{4a^2} \left(\frac{1+2u}{1-2u-2u^2} \right)^2. \tag{9.22}$$

Здесь значение параметра u берется в начале данного колебания и расположено (для моделей III и VI типов) вне отрезка I_1 (9.17). При $u \rightarrow (\sqrt{3}-1)/2$ имеем $y_m \rightarrow \infty$ в модели IV типа и $y_m \rightarrow 1$ в модели VII типа.

Изменение угла φ за одно полное колебание (при этом траектория проходит вдоль одной сепаратрисы (9.18) на Y_1 и одной сепаратрисы на Γ_w) в силу системы (8.10) имеет вид

$$\Delta\varphi = \oint \dot{\varphi} d\tau_1 = -8a \int \frac{(2s_3 - s_1 - s_2)y}{(n_1 - n_2 y)^2} d\tau_1. \quad (9.23)$$

Переход вдоль сепаратрисы, идущей по компоненте границы Y_1 ($y = 0$), дает нулевой вклад в этот интеграл. Интеграл (9.23) по сепаратрисе, идущей по компоненте границы Γ_w , можно вычислить явно в случае модели IV типа. Действительно, в силу системы (9.12) при $H_2 = 0$ (на сепаратрисе) имеем

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= -8a \int (2s_3 - s_1 - s_2)y d\tau_1 = -a \int \frac{2s_3 - s_1 - s_2}{s_1 - s_2} dy = \\ &= \frac{1}{2a} \left(\int_0^{y_m} + \int_{y_m}^0 \right) \left(\frac{d}{dy} \right) \left(\frac{s_1 - s_2}{2s_3 - s_1 - s_2} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2a} \left(\frac{s_1 - s_2}{2s_3 - s_1 - s_2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{a} \left(\frac{s_1^0 - s_2^0}{2s_3^0 - s_1^0 - s_2^0} \right). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Последнее равенство учитывает, что конечная точка рассматриваемой сепаратрисы получается из ее начальной точки отражением θ : $(s_1^1, s_2^1, s_3^1) = (s_2^0, s_1^0, s_3^0)$. Подставляя в полученную формулу выражения $p_i = 1 + \sqrt{2} s_i$ и (9.21), находим выражение угла поворота осей q_1, q_2 через параметр u казнеровских показателей:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{a} \frac{1 + 2u}{1 - 2u - 2u^2}. \quad (9.25)$$

Для однородных моделей III, VI и VII типов формула (9.25) справедлива по порядку величины при больших u . Из (9.25) следует, что полный поворот осей, формально вычисленный за всю длинную эру $\left(\sum_{i=1}^N \Delta\varphi(u+i) \right)$, при $N \rightarrow \infty$ расходится как $\frac{1}{a} \ln N$.

§ 10. Исследование некоторых специальных свойств однородных космологических моделей V, VII, III, VI и IV типов

V тип. Однородная космологическая модель V типа ($a = 1, n_1 = n_2 = n_3 = 0$) содержит как частный случай открытое решение Фридмана $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3$ и поэтому используется при изучении динамики возмущений этого решения. Исследование однородной модели V типа проще исследования остальных моделей класса B, поскольку все метрики модели V типа без движения вещества приводятся к диагональному виду (см. § 3) и, следовательно, импульс

$p_\varphi = 0$. Система (8.6) в этом случае имеет вид

$$\dot{P}_i = 2q_1q_2 + \frac{1-k}{2} H_1, \quad \dot{q}_i = 2q_i(P_j + P_k - P_i). \quad (10.1)$$

Здесь $H_1 = 2 \sum_{i < j}^3 P_i P_j - \sum_{i=1}^3 P_i^2 - 3q_1q_2$. Условие (8.2) $R = 0$ дает связь $P_3 = (P_1 + P_2)/2$.

Система (10.1) в масштабно-инвариантных координатах

$$r = \frac{(q_1q_2)^{1/2}}{P_1 + P_2}, \quad v = \frac{2(P_1 - P_2)}{P_1 + P_2}$$

и новом времени τ_1 : $d\tau_1/d\tau_0 = -(P_1 + P_2) = -2P_3 > 0$ принимает вид

$$\dot{r} = r \left(-1 + \left(\frac{1-k}{4} \right) H_2 + 4r^2 \right), \quad \dot{v} = v \left(\frac{1-k}{4} H_2 + 4r^2 \right), \quad (10.2)$$

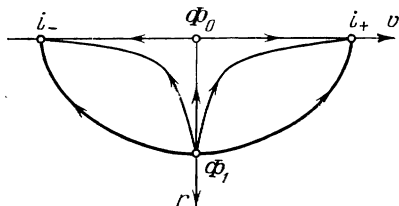
$$\dot{q}_1 = q_1(v - 1), \quad \dot{q}_2 = q_2(-v - 1), \quad \dot{q}_3 = -q_3,$$

$$\dot{P}_3 = -P_3 \left(\frac{1-k}{4} H_2 + 4r^2 \right).$$

Здесь $H_2 = 4H_1/(P_1 + P_2)^2 = 4 [- (P_1 - P_2)^2 - P_3(P_3 - 2(P_1 + P_2)) - 3q_1q_2] / (P_1 + P_2)^2 = -v^2 + 3 - 12r^2$. Первые два уравнения (10.2) образуют замкнутую систему, определенную в половине эллипса: $v^2 + 12r^2 \leq 3$ ($H_2 \geq 0, r \leq 0$).

Фазовый портрет этой двумерной системы показан на рис. 16. Здесь имеются две притягивающие особые точки i_{\pm} ($r = 0, v = \pm \sqrt{3}$), которым отвечают устойчивые при сжатии пространства асимптотики казнеровского типа:

Рис. 16. Фазовый портрет динамической системы (10.2) на двумерном многообразии S для однородной космологической модели V типа.



$$q_i \approx C_i t^{2p_i}, \quad p_1^{\pm} = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}, \quad p_2^{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \quad p_3^{\pm} = \frac{1}{3}. \quad (10.3)$$

Неустойчивой особой точке Φ_0 ($r = v = 0$) отвечает квазифридмановская асимптотика $q_i \approx C_i t^{4/3(1+k)}$. Отталкивающей особой точке Φ_1 ($r = -1/2, v = 0$) отвечает точное решение в пустом пространстве

$$q_i = C_i t^2. \quad (10.4)$$

Открытое решение Фридмана в модели V типа соответствует сепаратрисе $v = 0$, идущей из особой точки Φ_1 в особую точку

Φ_0 . В силу монотонности изменения координаты v получаем известное утверждение [61]: при направлении времени в сторону расширения все метрики в модели V типа изотропизируются и имеют при $t \rightarrow \infty$ асимптотику открытого решения Фрийдмана (10.4) (все траектории системы (10.2) входят в притягивающую при таком направлении времени особую точку Φ_1); при направлении времени в сторону сжатия все метрики имеют при $t \rightarrow 0$ либо устойчивую анизотропную казнеровскую асимптотику (10.3), либо неустойчивую квазифрийдмановскую асимптотику.

VII тип. Однородная космологическая модель VII типа ($n_1 = n_2 = 1, n_3 = 0, a > 0$), так же как и модель V типа, содержит открытое решение Фрийдмана, которому отвечает исключительная траектория системы (8.5) — (8.10): $q_1 = q_2 = q_3, p_\varphi^2 / (q_1 - q_2)^3 \equiv 0, s_1 = s_2 = s_3$. На многообразии S для модели VII типа, как показано в § 9, при всех a имеется отрезок притягивающих (при направлении времени в сторону расширения) особых точек L_y (9.6), которым отвечают устойчивые при расширении пространства точные решения (9.7). Частным случаем этих решений при $y = 1$ является точное решение в пустом пространстве

$$q_1 = q_2 = C_1 t^2, \quad q_3 = a^2 t^2, \quad \varphi = \text{const.} \quad (10.5)$$

Решение (10.5) при $C_1 = a^2$ изотропно и при $t \rightarrow \infty$ имеет асимптотику открытого решения Фрийдмана. Все остальные устойчивые решения (9.7) при $y \neq 1$ становятся анизотропными при $t \rightarrow \infty$, поэтому изотропизация решений в модели VII типа возможна только на промежуточной стадии эволюции.

Рассмотрим последние оставшиеся не исследованными особые точки динамической системы (8.10) — (8.14) на многообразии S . В этих особых точках $y_1 = y_2$. Система (8.14) на инвариантном многообразии $y_1 = y_2 = 1/\sqrt{2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= 4\sqrt{2} a^2 z^2 (-1 + s_1 (s_1 - s_2)), \\ \dot{s}_2 &= 4\sqrt{2} a^2 z^2 (1 + s_2 (s_1 - s_2)), \end{aligned} \quad (10.6)$$

$$\dot{z} = 4\sqrt{2} a^2 z^3 (s_1 - s_2) + 4\sqrt{2} z (s_1 - s_2),$$

$$\dot{w} = 8\sqrt{2} w a^2 z^2 (s_1 - s_2).$$

Система (10.6) рассматривается на уровне связи $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s_1^2 + s_2^2 + \frac{1}{4}(s_1 + s_2)^2 = 1$ в области $H_2 \geq 0, H_2 = -(s_1 - s_2)^2 + \frac{3}{4}(s_1 + s_2)^2 - 2a^2 z^2 - \frac{3}{2} a^2 w, w \geq 0$. Особые точки системы (10.6) образуют двумерный диск $W: y_1 = y_2, z = 0$. Собственные числа системы (8.14) в этих особых точках имеют вид

$$\lambda_w = 0, \quad \lambda_{s_i} = 0, \quad \lambda_z = 4\sqrt{2}(s_1 - s_2), \quad \lambda_{y_i} = -4\sqrt{2}(s_1 - s_2). \quad (10.7)$$

Таким образом, особые точки W при $s_1 \neq s_2$ являются невырожденными и неустойчивыми. Отрезок $s_1 = s_2$, $0 < w < 2/3a^2$ на W состоит из вырожденных особых точек и соединяет особые точки $\Phi_{ЛХ}$ ($y_1 = y_2$) и L_y ($y = 1$).

Траектории системы (8.14) могут пересечь инвариантное многообразие $y_1 = y_2$, лишь войдя в какую-либо особую точку на нем, т. е. в особую точку на множестве W . Множество траекторий

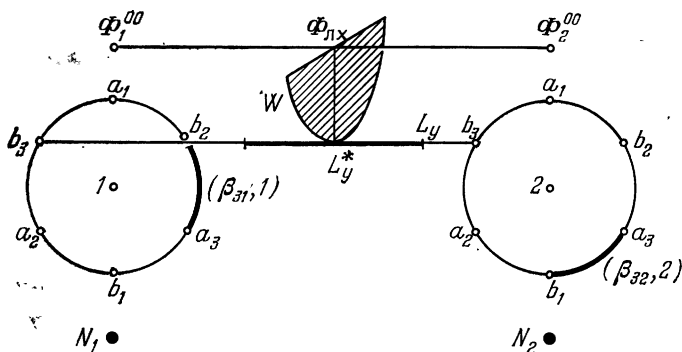


Рис. 17. Общее расположение особых точек динамической системы (8.10) — (8.14) на многообразии S для однородной космологической модели VII типа.

сепаратрис), входящих в седловые особые точки W , заполняет некоторое трехмерное множество в четырехмерном многообразии S . Нетрудно проверить, что для этих сепаратрис при вхождении в особую точку величины q_i стремятся к ненулевым константам, т. е. это именно те исключительные траектории, которые имеют начальные данные на многообразии W_0 коразмерности два (см. п. II § 9). Все остальные траектории системы (8.14) никогда не пересекают многообразие $y_1 = y_2$, поэтому почти для всех траекторий всегда $y_1 > y_2$, или $y_1 < y_2$.

Перечислим особые точки системы (8.10) — (8.14) на компактном многообразии S (рис. 17).

1) На компонентах границы Y_1 ($y_1 = 1, y_2 = 0$) и Y_2 ($y_1 = 0, y_2 = 1$) особые точки те же, что и для моделей класса A : две окружности $(\psi, 1)$ и $(\psi, 2)$; изолированные особые точки N_1 и N_2 ; Φ_1^{00} и Φ_2^{00} ; дуги $(\beta_{31}, 1)$ и $(\beta_{32}, 2)$ на окружностях (ψ, i) являются притягивающими при сжатии пространства.

2) При $w = 0, y_1 \neq y_2 \neq 0$ — линия особых точек $\Phi_{ЛХ}$.

3) В области $w \neq 0, y_1 \neq y_2 \neq 0$ — линия особых точек L_y (9.6); L_y содержит отрезок притягивающих в сторону расширения особых точек — L_y^* .

4) При $y_1 = y_2$ — двумерный диск W неустойчивых особых точек.

Сепаратрисные переходы между особыми точками систематизированы в сепаратрисной диаграмме (табл. 6). Здесь ввиду отмеченной выше инвариантности области $y_1 > y_2$ рассматривается половина многообразия S ($y_1 \geq y_2$); множество особых точек W разбито на две части: W_+ ($\lambda_z > 0, s_1 > s_2$) и W_- ($s_1 < s_2$).

III и VI тип. Однородные модели II и VI типов определяются условиями $n_1 = 1, n_2 = -1, n_3 = 0, a > 0$, причем модель III типа выделяется условием $a = 1$, в этом случае алгебра Ли соответствующей группы G имеет одномерную производную подалгебру (производной называется подалгебра, натянутая на коммутаторы), при $a \neq 1$ производная подалгебра двумерна. Модель III типа рассматривается ниже как частный случай модели VI типа; модель III типа обнаруживает некоторые отличия в свойствах имеющих асимптотик.

Все особые точки динамической системы (8.10) на соответствующем компактном многообразии S при $y_1 \neq y_2$ указаны в § 9. Особые точки при $y_1 = y_2, w \neq 0$ удобно исследовать в координатах (9.4). Эти особые точки должны лежать на инвариантном многообразии $y = 1, v = 0$, на котором динамическая система (9.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xu - 8, & \dot{u} &= u^2 - 4a^2 - H_3, \\ H_3 &= \frac{1-k}{4} \left[3u^2 + ux - \frac{a^2x^2}{4} - 12a^2 - 4 \right]. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Система (10.8) в области $H_3 \geq 0$ имеет две особые точки:

1) L_1 : $u = 2a, x = 4/a$; L_1 лежит на линии особых точек L_y (9.6) при $y = 1, H_3(L_1) = 0$;

$$\begin{aligned} 2) M: u &= 2 \sqrt{\frac{1-k}{1+3k}}, & x &= 4 \sqrt{\frac{1+3k}{1-k}}, \\ H_2(M) &= 4 \left(\frac{1-k}{1+3k} - a^2 \right). \end{aligned}$$

Отметим, что координаты этой точки не зависят от a . Характеристическая матрица системы (9.5) в особой точке M распадается на два блока, поэтому ее собственные числа легко вычисляются:

$$\lambda_{y, v} = \sqrt{\frac{1-k}{1+3k}} \pm \sqrt{\frac{1-k}{1+3k} - 4 \left(1 - a^2 \frac{1+3k}{1-k} \right)}, \quad (10.9)$$

$$\lambda_{x, u} = \sqrt{\frac{1-k}{1+3k}} \pm \sqrt{\frac{1-k}{1+3k} - 2(1-k - a^2(1+3k))}.$$

Аналогичная особая точка уже встречалась ранее в моделях VIII и VI₀ типов. Особая точка M принадлежит физической области $H_3 \geq 0$ лишь при

$$a \leq \sqrt{\frac{1-k}{1+3k}}. \quad (10.10)$$

Сепаратрисная диаграмма динамической системы (8.10) — (8.14) для

| | L_y^* | L_y | $\Phi_{ЛХ}$ | Φ_1^{00} | N_1 | W_+ |
|-------------------|---------|-------|-------------|---------------|-------|-------|
| L_y | 2 | | | | | |
| $\Phi_{ЛХ}$ | 2 | | | | | |
| Φ_1^{00} | | | | | 1 | |
| N_1 | 1 | | | | | |
| W_+ | 3 | | | | | |
| W_- | | | | | | 3 |
| $(\beta_{13}, 1)$ | | | 3 | 2 | | |
| $(\beta_{12}, 1)$ | | | 3 | 2 | | |
| $(\beta_{21}, 1)$ | | | | 2 | 3 | |
| $(\beta_{31}, 1)$ | 4 | 3 | | 2 | 3 | |
| $(\beta_{23}, 1)$ | | | | 2 | 3 | |
| $(\beta_{32}, 1)$ | | | | 2 | 3 | |

В частности, при $a > 1$ точка M ни при каких значениях k не принадлежит физической области. При $a = \sqrt{\frac{1-k}{1+3k}}$ точка M совпадает с точкой L_1 , лежащей на линии уже изученных особых точек (9.6). Таким образом, значение $a = 1$ (модель III типа) выделено тем, что при $a \leq 1$ модель VI типа при некоторых значениях k (см. (10.10)) имеет асимптотику, соответствующую M , тогда как при $a > 1$ таких асимптотик нет.

Т а б л и ц а 6

однородной космологической модели VII типа (при сжатии пространства)

| W_- | $(\beta_{13}, 1)$ | $(\beta_{12}, 1)$ | $(\beta_{21}, 1)$ | $(\beta_{31}, 1)$ | $(\beta_{23}, 1)$ | $(\beta_{32}, 1)$ |
|-------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | 2^0 |
| | | | 2^0 | | | |
| | | 2^T | | | | |
| 3 | 2^T | | | | | 2^0 |
| | | 2^T | | | | |
| | 2^T | | | | | |

В случае, если точка M лежит в физической области $H_3 \geq 0$, все четыре собственных числа (10.9) имеют положительную вещественную часть (в силу справедливости (10.10)), т. е. особая точка M является притягивающей в сторону расширения. Этой особой точке отвечает точное решение, устойчивое при расширении пространства:

$$q_1 = q_2 = q_1^0 t^{(1-k)/(1+k)}, \quad q_3 = q_3^0 t^2, \quad (10.11)$$

$$\varphi = -a \sqrt{\frac{1+3k}{1-k}} (q_3^0)^{-1/2} \ln t.$$

Отметим, что условие (10.10) существования в физической области притягивающей в сторону расширения особой точки M совпадает с условием (9.10) отсутствия отрезка притягивающих особых точек на линии L_y (9.6). Поэтому, если $a < 1$, то при изменении параметра k от 0 до 1 сначала решения в заполненном пространстве имеют при $t \rightarrow \infty$ асимптотику (10.11), тогда как решения в пустоте имеют асимптотику (9.7), а затем при $a > \sqrt{(1-k)/(1+3k)}$ все решения имеют асимптотику (9.7). Таким образом, изменению параметра k уравнения состояния материи соответствует качественное изменение асимптотических свойств решений в однородной космологической модели VI типа. Однако в любой из устойчивых асимптотик метрики (9.7) или (10.11) для моделей III и VI типов нет изотропизации при $t \rightarrow \infty$.

Исследуем особые точки динамической системы (8.10) ($n_1 = 1$, $n_2 = -1$) при $y_1 = y_2$, $w = 0$. В этих особых точках необходимо $s_1 = s_2$ и либо $H_2 = 0$, либо $s_i = -1/\sqrt{3}$. Поэтому система (8.10) при $y_1 = y_2$, $w = 0$ имеет три особые точки:

1) особая точка Φ_1 ($s_i = -1/\sqrt{3}$), принадлежащая отрезку $\Phi_{\text{ЛХ}}$;

2) две особые точки j_+ и j_- , в которых $s_1 = s_2$, $H_2(j_{\pm}) = 0$, координаты $s_1 = s_2 = s$ и s_3 определяются условиями

$$2s^2 + s_3^2 = 1, \quad \frac{s_3}{s} = 2 \frac{1 + 2a^2 \pm \sqrt{1 + 3a^2}}{1 + 4a^2}.$$

Собственные числа системы (8.10) в этих особых точках имеют вид

$$\lambda_{1,2} = 8s_3 < 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}a(2s_3 - s_1 - s_2),$$

$$\lambda_3 = -\frac{1-k}{2a} \sqrt{1+3a^2} |\lambda_1|.$$

Таким образом, особые точки j_+ , j_- невырожденные и неустойчивые. Из особых точек j_{\pm} выходят одномерные сепаратрисы, которые лежат на инвариантном многообразии Γ_w ($w = 0$) и поэтому не отвечают никаким физическим решениям. Трехмерные сепаратрисы, входящие при $\tau_1 \rightarrow \infty$ из физической области многообразия S в особые точки j_{\pm} , определяют следующие (неустойчивые) асимптотики метрики при сжатии пространства ($t \rightarrow 0$):

$$q_1 \approx q_1^0 t^{2(4+\bar{x})/(12-\bar{x})}, \quad q_2 \approx q_1^0 t^{2(1+\bar{x})/(12-\bar{x})},$$

$$q_3 \approx q_3^0 t^{4(4-3\bar{x})/(12-\bar{x})}, \quad (10.12)$$

$$\varphi \cong -\frac{2a\bar{x}}{12-\bar{x}} \ln t + \varphi_0, \quad \bar{x} = 4 \frac{-1 \pm 4\sqrt{1+3a^2}}{16a^2+5}.$$

Отметим, что для особой точки j_- показатели всех степеней t в (10.12) положительны при всех a , т. е. $q_i \rightarrow 0$. Для j_+ получаем $(4 + \bar{x})/(12 - \bar{x}) > 0$ при всех a , тогда как $(4 - 3\bar{x})/(12 - \bar{x}) \leq 0$ при $a \geq 1$, т. е. при $a > 1$ в асимптотике (10.12) имеем $q_1 \rightarrow 0$, $q_2 \rightarrow 0$, $q_3 \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$). При $a = 1$ асимптотика (10.12) в особой точке j_+ принимает вид

$$q_1 \cong q_2 \cong q_1^0 t, \quad q_3 \cong \text{const.}$$

Особые точки j_+ и j_- лежат на угле границы Γ ; этот угол $\Gamma_w \cap \Gamma_0$ ($w = 0$, $H_2 = 0$) является двумерным цилиндром $S^1 \times I$. Весь цилиндр заполнен сепаратрисами окружностей $(\psi, 1)$ и $(\psi, 2)$.

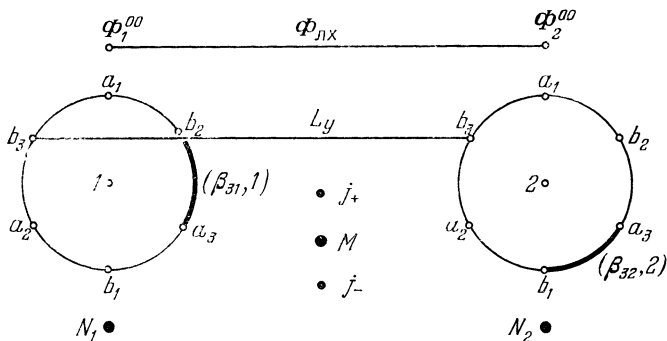


Рис. 18. Особые точки динамической системы (8.10) на многообразии S для однородных космологических моделей III и VI типов.

Особые точки j_+ и j_- на цилиндре неустойчивы, и их сепаратрисы идут в границы отрезков I_1 и I_2 на окружностях $(\psi, 1)$ и $(\psi, 2)$ и в образы этих границ при отражении θ . Эти сепаратрисы делят цилиндр на шесть областей; в четырех из них траектории имеют начало и конец на одной окружности, а в двух областях начало и конец каждой траектории лежат на разных окружностях.

Особые точки динамической системы (8.10) на компактном многообразии S для моделей III и VI типов изображены на рис. 18.

IV тип. Особые точки динамической системы (8.10) — (8.18) на компактном многообразии S для модели IV типа ($n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$, $a > 0$) при $y_2 \neq 1$ и асимптотические свойства соответствующих решений исследованы в § 9. Система (8.18) на инвариантном многообразии $y_2 = 1$, $H_2 \geq 0$ имеет четыре особые точки:

- 1) особая точка Φ_2^{00} ($s_1 = s_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_1 = 0$, $w_1 = 0$) — концевая точка отрезка Φ_{LX} ;
- 2) особая точка L_0 ($s_1 = s_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_1 = 0$, $w_1 = \frac{1}{3a^2}$) — концевая точка отрезка L_y (9.6), $H_2(L_0) = 0$.

3) две особые точки $i_+ \left(s_1 = \frac{-2 + \sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, s_2 = \frac{-2 - \sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, z_1 = 0, w_1 = 0 \right)$, $i_- \left(s_1 = \frac{-2 - \sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, s_2 = \frac{-2 + \sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, z_1 = 0, w_1 = 0 \right)$, $H_2(i_{\pm}) = 0$.

Полная совокупность особых точек динамической системы на многообразии S для модели IV типа показана на рис. 19.

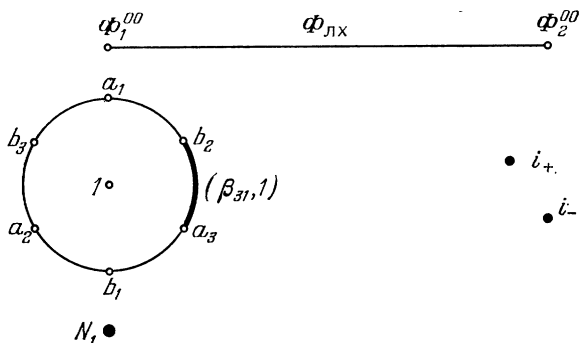


Рис. 19. Особые точки динамической системы (8.10)–(8.18) на многообразии S для однородной космологической модели IV типа.

Собственные числа системы (8.18) в особых точках Φ_2^{00} , L_0 , i_{\pm} имеют вид

$$\Phi_2^{00}: \lambda_{z_1} = \sqrt{3}(1-k), \quad \lambda_{s_i} = \sqrt{3}(1-k), \quad \lambda_{w_1} = -2 \frac{1+3k}{\sqrt{3}}, \quad \lambda_{y_1} = 0;$$

$$L_0: \lambda_{z_1} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \lambda_{s_i} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \lambda_{w_1} = 2 \frac{1+3k}{\sqrt{3}}, \quad \lambda_{y_1} = 0, \quad (10.13)$$

$$i_{\pm}: \lambda_{z_1} = 4(s_1 - s_2), \quad \lambda_{s_i} = 3(1-k)(s_1 + s_2) < 0, \\ \lambda_{w_1} = 4(s_1 + s_2) < 0, \quad \lambda_{y_1} = 4(s_2 - s_1).$$

Согласно (10.13), особые точки Φ_2^{00} , i_+ и i_- являются неустойчивыми; особая точка L_0 принадлежит отрезку отталкивающих особых точек на линии L_y (9.6). Сепаратрисы особых точек Φ_2^{00} , i_- , L_0 лежат на компонентах границы Γ_w ($w = 0$) и Y_2 ($\bar{y}_1 = 0, y_2 = 1$) и поэтому не отвечают никаким физическим решениям. В неустойчивую особую точку i_+ из физической области S входит трехмерная сепаратриса, которой отвечает казнеровская асимпт-

тотика метрики при сжатии пространства ($t \rightarrow 0$):

$$q_1 \approx q_1^0 t^{2/3(1+\sqrt{3})}, \quad q_2 \approx q_2^0 t^{2/3(1-\sqrt{3})}, \quad q_3 \approx q_3^0 t^{2/3}, \quad \varphi \rightarrow \text{const.} \quad (10.14)$$

Таким образом, в однородной модели IV типа наряду с устойчивыми при сжатии пространства казнеровскими асимптотиками метрики (9.3) (в которых $q_1, q_2 \rightarrow 0, q_3 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$), соответствующими дуге притягивающих особых точек $(\beta_{31}, 1)$ на окружности $(\psi, 1)$, имеется также одна исключительная неустойчивая казнеровская асимптотика метрики (10.14), в которой $q_2 \rightarrow \infty, q_1, q_3 \rightarrow 0$.

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ОДНОРОДНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ДВИЖЕНИЕМ ВЕЩЕСТВА И С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

§ 1. Система уравнений Эйнштейна для однородной космологической модели IX типа с движением вещества

Изучавшиеся в главе II однородные космологические модели без движения вещества являются частным случаем решений уравнений Эйнштейна с гидродинамическим тензором энергии-импульса материи:

$$T_{ij} = (p + \varepsilon) u_i u_j - p g_{ij},$$

где u^i — 4-скорость материи, ε — плотность энергии, p — давление $p = k\varepsilon$, $0 \leq k < 1$. Более общими являются однородные решения, в которых система координат, сопутствующая движению материи, не является синхронной, или, наоборот, в синхронной системе координат материя движется (т. е. компоненты скорости $u^i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$)).

Пусть X^0, X^1, X^2, X^3 — базис правоинвариантных при действии трехмерной группы Ли G векторных полей на пространственно-временном многообразии $M^4 = R^1 \times G$, причем поля X^1, X^2, X^3 касаются группы G и коммутационные соотношения имеют стандартный вид (см. главу II, табл. 1):

$$\begin{aligned} [X^0, X^i] &= 0, \quad [X^i, X^j] = C_{ij}^k X^k, \\ C_{ij}^k &= \varepsilon_{ijk} n^k + \delta_j^k \delta_{ia}^3 - \delta_i^k \delta_{ja}^3, \quad an^3 = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для однородных космологических моделей компоненты метрики g_{ij} и скорости материи u^i (а также плотность энергии ε и давление p) в базисе правоинвариантных векторных полей X^0, X^1, X^2, X^3 зависят только от времени. В дальнейшем будет изучаться только (наиболее важная с физической точки зрения) часть пространственно-временного многообразия $M^4 = R^1 \times G$, в которой ограничение метрики g_{ij} на группу G отрицательно определено. В этом случае базис векторных полей $X^0, X^i = \{e_\alpha^i\}$ можно выбрать так, чтобы метрика ds^2 имела вид

$$ds^2 = g_{00}(\tau) d\tau^2 - g_{ij}(\tau) e_\alpha^i e_\beta^j dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.2)$$

где матрица $g_{ij}(\tau)$ положительно определена, а $g_{00}(\tau)$ ниже будет задано специальным выбором масштаба времени,

Уравнения Эйнштейна

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = T_{ij} \quad (1.3)$$

в базисе X^0, X^1, X^2, X^3 определяют систему дифференциальных уравнений второго порядка на матрицу $g_{ij}(\tau)$. В дальнейшем, в §§ 1—4, проводится подробное качественное исследование системы уравнений Эйнштейна (1.3) для однородной модели IX типа, а в § 5 указывается, как разработанные методы используются при изучении остальных однородных космологических моделей с движением вещества.

Для построения динамической системы, эквивалентной системе (1.3), удобно воспользоваться следующим тождеством [84]:

$$\int \delta R \sqrt{-g} dt dG = - \int \left(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \right) \sqrt{-g} \delta g_{ij} dt dG + \int g^{ij} \sqrt{-g} \delta R_{ij} dt dG. \quad (1.4)$$

Второе слагаемое в правой части (1.4), как известно [84], является полной дивергенцией и поэтому обращается в нуль, если вариации метрики δg_{ij} по пространству финитны. В случае модели IX типа однородные вариации метрики являются финитными (в силу компактности группы $SO(3)$). Поэтому в силу тождества (1.4) уравнения Эйнштейна (1.3) (кроме $(0, i)$ уравнений) следуют из вариационного принципа

$$\delta \int R \sqrt{-g} dt = - \int T^{ij} \delta g_{ij} \sqrt{-g} dt, \quad (1.5)$$

где метрика g_{ij} и ее вариации однородны (зависят только от t). Для всех остальных однородных моделей однородные вариации метрики не являются финитными. Тем не менее для всех моделей класса A справедлив вариационный принцип (1.5), поскольку в классе A для однородных вариаций метрики справедливо тождество $g^{ij} \delta R_{ij} = 0$ (см. формулы (3.5), (3.28) главы II). В случае однородных моделей класса B второе слагаемое в правой части (1.4) дает ненулевой вклад в вариационный принцип (1.5) (подробнее см. § 5).

Выражение $T^{ij} \delta g_{ij}$ (см. (1.5)) для метрики (1.2) имеет вид

$$T^{ij} \delta g_{ij} = \varepsilon \delta \ln \frac{g_{00}}{|g|^k} + (1+k) \varepsilon (g_{ab} u^a u^b g_{00} \delta g_{00} - u^i u^j \delta g_{ij}). \quad (1.6)$$

Здесь и ниже $|g| = \det \|g_{ab}\|$.

Для упрощения выражения (1.5) выберем время τ так, чтобы

$$g_{00}(\tau) = |g|^k, \quad (1.7)$$

тогда первое слагаемое в (1.6) при условии (1.7) равно нулю. Время τ связано с синхронным временем t ($g_{00}(t) \equiv 1$) соотношением $dt = |g|^{k/2} d\tau$.

Согласно вариационному принципу (1.5) и (1.6), «тензорные компоненты» ($i, j = 1, 2, 3$) уравнений Эйнштейна (1.3) для однородной модели IX типа являются линейными комбинациями уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial g_{ij}} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_{ij}} = \frac{1+k}{2} \varepsilon (u^i u^j - k g_{ab} u^a u^b g^{ij}) |g|^{(1+k)/2} \quad (1.8)$$

и уравнения $R_0^0 - 1/2 R = T_0^0$ (поскольку вариации δg_{00} связаны условием (1.7)). Функция $L(g_{ij}, \dot{g}_{ij})$ получается из $1/2 R \sqrt{-g}$ отбрасыванием полной производной по времени и имеет вид

$$L = 1/8 |g|^{(1-k)/2} (\kappa_\alpha^\alpha \kappa_\beta^\beta - \kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha) - 1/4 |g|^{-(1-k)/2} (2 |g| g^{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}), \quad (1.9)$$

где $\kappa_\alpha^\beta = \dot{g}_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$.

Уравнения Эйнштейна $R_0^0 - 1/2 R = T_0^0$ и $R_{0\alpha} = T_{0\alpha}$ являются связями, позволяющими выразить плотность энергии ε и скорость материи u^i через компоненты метрики g_{ij} и ее первые производные по времени \dot{g}_{ij} . Действительно, уравнение Эйнштейна $R_0^0 - 1/2 R = T_0^0$ имеет вид

$$H = \varepsilon ((1+k) u_0^2 g^{00} - k) |g|^{(1+k)/2}, \quad (1.10)$$

$$H = \dot{g}_{ij} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_{ij}} - L = \frac{1}{8} |g|^{(1-k)/2} (\kappa_\alpha^\alpha \kappa_\beta^\beta - \kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha) + \frac{1}{4} |g|^{-(1-k)/2} (2 |g| g^{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}).$$

Уравнения Эйнштейна $R_{0\alpha} = T_{0\alpha}$ имеют вид

$$- 1/2 \kappa_\beta^\gamma C_{\alpha\gamma}^\beta = (1+k) \varepsilon u_0 u_\alpha, \quad (1.11)$$

где $C_{\alpha\gamma}^\beta$ — структурные константы группы IX типа (SO(3)) в стандартной записи (1.1): $n^i = 1, a = 0$.

Из уравнений (1.10), (1.11) и условия

$$u_0^2 g^{00} - u_\alpha u_\beta g^{\alpha\beta} = 1 \quad (1.12)$$

легко получить следующие выражения:

$$\frac{\varepsilon u_0^2 |g|^{(1+k)/2}}{g_{00}} = \frac{1}{2} \left[H + \left(H^2 - \frac{16k}{(1+k)^2} X_\alpha X_\beta g^{\alpha\beta} |g|^k \right)^{1/2} \right], \quad (1.13)$$

$$\frac{1+k}{2} \varepsilon u^i u^j |g|^{(1+k)/2} = \frac{4 X^i X^j |g|^k}{(1+k) [H + (H^2 - 16k (1+k)^{-2} X_\alpha X_\beta g^{\alpha\beta} |g|^k)^{1/2}]}, \quad (1.14)$$

где $X_\alpha = - 1/4 \kappa_\beta^\gamma C_{\alpha\gamma}^\beta |g|^{(1-k)/2}$.

Подставляя (1.14) в уравнения (1.8), получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений второго порядка на компоненты матрицы $g_{ij}(\tau)$:

$$\frac{\partial L}{\partial g_{ij}} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_{ij}} = h^{ij},$$

$$h^{ij} = \frac{4 (X^i X^j - k g_{ab} X^a X^b g^{ij}) |g|^k}{(1+k)[H + (H^2 - 16k(1+k)^{-2} X_a X_b g^{ab} |g|^{k+2})^{1/2}]}. \quad (1.15)$$

Преобразуем систему (1.15) в систему уравнений первого порядка, определенную в фазовом пространстве p^{ij}, g_{ij} . Импульсы p^{ij} определяются выражениями

$$p^{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_{ij}} = \frac{|g|^{(1-k)/2}}{4} (g^{ij} (\ln |g|)^{\cdot} - \dot{g}_{kl} g^{ik} g^{jl}). \quad (1.16)$$

Система (1.15) в фазовом пространстве переходит в систему

$$\dot{p}^{ij} = - \frac{\partial H}{\partial g_{ij}} - h^{ij}, \quad \dot{g}_{ij} = \frac{\partial H}{\partial p^{ij}}. \quad (1.17)$$

Функция $H = \dot{g}_{ij} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_{ij}} - L$ в координатах p^{ij}, g_{ij} имеет вид

$$H = \frac{1}{|g|^{(1-k)/2}} \left[(\text{Sp}(p \circ g))^2 - 2\text{Sp}(p \circ g \circ p \circ g) + \frac{1}{4} (2|g|g^{\alpha\alpha} - \text{Sp}(g^2)) \right]. \quad (1.18)$$

Здесь $\text{Sp}(Y)$ — след матрицы Y , $p \circ g$ — произведение матриц $p = \|p^{ij}\|$ и $g = \|g_{jk}\|$.

Динамическая система (1.17) согласно проведенному выводу эквивалентна полной системе уравнений Эйнштейна. Зависимость от времени скоростей u_α и плотности энергии ϵ определяется из уравнений (1.10) — (1.12).

§ 2. Преобразование динамической системы

Динамическая система (1.17) определена в 12-мерном фазовом пространстве (p^{ij}, g_{ij} — симметричные матрицы). Эта система инвариантна относительно масштабных преобразований

$$p^{ij} \rightarrow p^{ij}, \quad g_{ij} \rightarrow \lambda g_{ij}, \quad \tau \rightarrow \lambda^{(1+3k)/2} \tau$$

и поэтому допускает понижение порядка на 1. Для исследования системы (1.17) методами качественной теории динамических систем мы преобразуем ее, используя указанную масштабную инвариантность, в динамическую систему, определенную на некотором 11-мерном компактном многообразии S и имеющую до-

статочны простые (невырожденные) особые точки. Это преобразование удобно разбить на три этапа.

1. Введем координаты $S_k^j = g_{ki} p^{ij}$. Согласно (1.16),

$$S_k^j = \frac{|g|^{(1-k)/2}}{4} (\kappa_\alpha^\alpha \delta_k^j - \kappa_k^j), \tag{2.1}$$

где $\kappa_k^j = \dot{g}_{ki} g^{ij}$. Собственные направления матрицы S_k^j совпадают с собственными направлениями матрицы κ_k^j , которые в работе [51] названы казнеровскими осями. Матрица $S = \| S_k^j \|$ при ненулевых скоростях u_α не является симметричной (в отличие от матриц $g = \| g_{ij} \|$ и $p = \| p^{ij} \|$). Действительно, используя (1.11) и (1.16), получаем

$$X_\alpha = -1/4 \kappa_\beta^\gamma C_{\alpha\gamma}^\beta |g|^{(1-k)/2} = 1/2 (1 + k) \varepsilon u_0 u_\alpha |g|^{(1-k)/2} = S_\beta^\gamma C_{\alpha\gamma}^\beta. \tag{2.2}$$

Очевидно, матрицы S и g удовлетворяют тождеству

$$g \circ S^t = S \circ g. \tag{2.3}$$

Здесь S^t — транспонированная матрица.

Система (1.17) в координатах S_k^j, g_{ij} принимает вид

$$S_k^j = -\frac{1}{2|g|^{(1-k)/2}} [|g| (\delta_k^j g^{\alpha\alpha} - g^{kj}) - g_{ki} g_{ij}] + \delta_k^j \left(\frac{1-k}{2} \right) H - g_{ki} h^{ij}, \tag{2.4}$$

$$\dot{g}_{ij} = \frac{2}{|g|^{(1-k)/2}} (g_{ij} S_k^k - 2g_{ik} S_j^k).$$

Система (2.4) имеет два первых интеграла L и K :

$$L = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2, \tag{2.5}$$

$$K = \left[\left(H^2 - \frac{16k}{(1+k)^2} Z \right)^{1/2} + H \right] \left[\left(H^2 - \frac{16k}{(1+k)^2} Z \right)^{1/2} - \frac{1-k}{1+k} H \right]^{(1-k)/(1+k)}. \tag{2.6}$$

Здесь $Z = X_a X_b g^{ab} |g|^k$. Используя формулы (2.2), (1.10) и (1.13), получаем выражение этих интегралов через скорости u_α и ε :

$$L = \left(\frac{1+k}{2} \right)^2 \varepsilon^2 \bar{u}_0^2 |g| (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

$$K = 2 \left(\frac{2k}{1+k} \right)^{(1-k)/(1+k)} \varepsilon^{2/(1+k)} \bar{u}_0^2 |g|, \tag{2.7}$$

где \bar{u}_0 — компонента скорости в синхронной системе отсчета. При $k \rightarrow 0$ вместо интеграла K (2.6) следует взять dK/dk (формаль-

но (2.6) дает $K = 0$ при $k = 0$). Интегралы (2.7) для случая $k = 1/3$ были указаны в работе [68]. В дальнейшем мы, используя выражения (2.5) и (2.6), укажем важные применения этих интегралов к вопросу о типичных состояниях метрики на ранней стадии расширения пространства.

Система (2.4), как и общая система уравнений Эйнштейна в синхронной системе отсчета (см. § 3 главы II), имеет монотонную функцию

$$F = \frac{d}{dt} |g|^{1/6} = \frac{1}{3} (S_i^i) |g|^{-1/3}, \quad \frac{dF}{d\tau} \leq 0. \quad (2.8)$$

При сжатии пространства функция $F < 0$ и $S_i^i < 0$. Из монотонности функции F следует, что траектории системы (2.4) не покидают область $S_i^i \leq 0$. Процесс расширения пространства описывается системой (2.4) в этой же области ($S_i^i \leq 0$), но с противоположным направлением времени.

2. Введем координаты

$$\bar{s}_k^j = \frac{S_k^j}{G}, \quad y_{ij} = \frac{g_{ij}}{G}, \quad G, \quad (2.9)$$

где

$$G = \left(\sum_{\alpha, \beta}^3 g_{\alpha\beta}^2 \right)^{1/2}.$$

Координаты y_{ij} , \bar{s}_k^j удовлетворяют тождествам

$$\sum_{i, j=1}^3 y_{ij}^2 = 1, \quad y \circ \bar{s}^t = \bar{s} \circ y.$$

Координаты (2.9) удобны для изучения поведения системы (2.4) в окрестности состояния максимального расширения, где $\det \|g_{ij}\|$ достигает максимума и $\bar{s}_k^k = 0$.

3. Для изучения поведения решений (траекторий системы (2.4)) в окрестности космологической сингулярности $G = 0$ необходимо пополнить систему координат (2.9) границей на бесконечности по координатам \bar{s}_k^j . Такое пополнение осуществляется с помощью введения координат

$$s_k^j = \frac{\bar{s}_k^j}{\bar{s}} = \frac{S_k^j}{\mathfrak{S}}, \quad y_{ij}, \quad w = \frac{G^2}{\mathfrak{S}^2}, \quad G, \quad (2.10)$$

где

$$\bar{s} = \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^3 (\bar{s}_\alpha^\beta)^2 \right)^{1/2}, \quad \mathfrak{S} = \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^3 (S_\alpha^\beta)^2 \right)^{1/2}.$$

Координаты s_k^j удовлетворяют тождеству

$$\sum_{k, j=1}^3 (s_k^j)^2 = 1.$$

Две системы координат, \bar{s}_k^j и s_k^j , w , вместе покрывают девяти-мерный шар D^9 , причем в окрестности центра шара используются координаты \bar{s}_k^j , а в окрестности граничной сферы — координаты s_k^j , w . Граничная сфера $\sum_{k, j=1}^3 (s_k^j)^2 = 1$ определяется условием $w = 0$ и соответствует бесконечности по координатам \bar{s}_k^j .

Динамическая система (2.4) в координатах (2.10) после замены времени

$$\frac{d\tau_1}{d\tau} = \frac{\mathfrak{E}^2}{2|g|^{(1-k)/2}} \quad (2.11)$$

принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_k^j = & w [-|y|(\delta_k^j y^{\alpha\alpha} - y^{jk}) + \\ & + y_{ki}y_{ij} + s_k^j (|y|(s_\alpha^\alpha y^{\beta\beta} - s_\alpha^\beta y^{\alpha\beta}) - y_{\alpha\beta} s_\gamma^\beta y_{\gamma\alpha})] + \\ & + (\delta_k^j - s_k^j s_\alpha^\alpha) H_1 (1 - k) - \\ & - \frac{8|y|w}{(1+k)[H_1 + (H_1^2 - 16k(1+k)^{-2} w x_a x_b |y| y^{ab})^{1/2}]} \times \\ & \times [x_k x_\alpha y^{\alpha j} - k x_a x_b y^{ab} \delta_k^j - s_k^j (x_\alpha x_\gamma y^{\beta\gamma} s_\alpha^\beta - k x_a x_b y^{ab} s_\gamma^\beta)], \\ \dot{y}_{ij} = & 8(-y_{ij} s_j^k + y_{ij} y_{\alpha\beta} s_\gamma^\beta y_{\gamma\alpha}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} = & 2w \left[s_\alpha^\alpha (4 - (1 - k) H_1) - 8 y_{\alpha\beta} s_\gamma^\beta y_{\gamma\alpha} + \right. \\ & + w (|y| (s_\alpha^\alpha y^{\beta\beta} - s_\alpha^\beta y^{\alpha\beta}) - y_{\alpha\beta} s_\gamma^\beta y_{\gamma\alpha} + \\ & \left. + \frac{8}{(1+k)} \frac{(x_\alpha x_\gamma |y| y^{\gamma\beta} s_\alpha^\beta - k x_a x_b |y| y^{ab} s_\gamma^\beta)}{(H_1 + (H_1^2 - 16k(1+k)^{-2} w x_a x_b |y| y^{ab})^{1/2})} \right], \\ \dot{G} = & 4G (s_\alpha^\alpha - 2 y_{\alpha\beta} s_\gamma^\beta y_{\gamma\alpha}). \end{aligned}$$

Здесь

$$H_1 = H/\mathfrak{E}^2 = (s_\alpha^\alpha)^2 - 2s_\alpha^\beta s_\beta^\alpha + 1/4 w (2|y| y^{\alpha\alpha} - 1), \quad x_\alpha = s_\beta^\beta C_{\alpha\gamma}^\beta.$$

Система (2.12) содержит замкнутую подсистему в координатах s_k^j , y_{ij} , w — это следствие масштабной инвариантности исходной динамической системы (1.17).

Компактное 11-мерное многообразие S , на котором рассматривается динамическая система (2.12), вложено в 17-мерное пространство $D^9 \times S^8$, где S^8 — единичная сфера $\sum_{i, j}^3 y_{ij}^2 = 1$, и выде-

ляется в нем естественными условиями

$$y \circ s^t = s \circ y, \quad y_{ij} = y_{ji}, \quad \sum_{i, j=1}^3 y_{ij}^2 = 1, \quad \sum_{k, j=1}^3 (s_k^j)^2 = 1, \\ |y| = \det \|y_{ij}\| \geq 0, \quad 0 \leq w \leq \infty, \quad K \geq 0, \quad \bar{s}_k^k \leq 0. \quad (2.13)$$

Из условия $K \geq 0$ следует, в частности, что

$$H_1 \geq 0, \quad H_1^2 \geq 16k(1+k)^{-2} w x_a x_b |y| y^{ab}.$$

Граница Γ многообразия S состоит из четырех компонент: Γ_0 , Γ_1 , Γ_w и Γ_m , которые определяются следующими условиями: Γ_0 : $\det \|y_{ij}\| = 0$; Γ_1 : $K = 0$; Γ_w : $w = 0$; Γ_m : $s_k^k = 0$. Очевидно, что система (2.4) — (2.12) непрерывно продолжается на компоненты границы Γ_0 , Γ_w и Γ_m и компоненту границы Γ_1 при $H_1 \neq 0$. При $H_1 \rightarrow 0$ выражения, содержащие H_1 в знаменателе (см. (2.12)), в силу условия

$$H_1^2 \geq 16k(1+k)^{-2} w x_a x_b |y| y^{ab} \quad (2.14)$$

ограничены сверху величинами

$$cH_1 \frac{|x_k x_j |y| y^{ij}|}{x_a x_b |y| y^{ab}}, \quad c |x_k| (|y| y^{ii} w)^{1/2}. \quad (2.15)$$

Поэтому такие выражения стремятся к нулю при $H_1 \rightarrow 0$, исключая точки, в которых матрица y_{ij} однократно вырождена, причем $x_a x_b |y| y^{ab} = 0$, $w \neq 0$, $(x_1, x_2, x_3) \neq 0$. Таким образом, всюду, кроме этих исключительных точек, которые выделяются двумя условиями: $\det \|y_{ij}\| = 0$, $x_a x_b |y| y^{ab} = 0$, система (2.12) при $H_1 \rightarrow 0$ непрерывно продолжается на границу Γ .

Компоненты границы Γ_0 , Γ_1 , Γ_w являются инвариантными многообразиями системы (2.12), т. е. траектория, начавшаяся на границе, остается на ней все время.

§ 3. Степенные асимптотики. Типичные состояния метрики на ранней стадии расширения пространства

Найдем степенные (по t) асимптотики метрики модели IX типа с движением вещества при сжатии пространства. Метрика, имеющая такую асимптотику, в координатах (2.10) представляется траекторией системы (2.12), входящей в одну из особых точек этой системы. В силу существования монотонной функции $F = s_k^k / w^{1/2} |y|^{1/3}$ все особые точки системы (2.12) лежат на компонентах границы Γ_0 ($|y| = 0$) или Γ_w ($w = 0$). Особые точки образуют шесть множеств: Φ_{IX} , N , T , A , B и K . Исследование поведения динамической системы (2.12) в окрестности этих особых множеств показывает, что все они, так же как и в случае диаго-

нальной модели IX типа (без движения вещества), являются неустойчивыми.

1. Множество Φ_{LX} имеет размерность 5 и определяется условиями $s_k^j = -\frac{1}{\sqrt{3}} \delta_k^j$, $w = 0$, y_{ij} произвольны, $H_1(\Phi_{LX}) = 1$. Система (2.12) на многообразии S имеет следующие собственные числа в особых точках Φ_{LX} :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = (1 - k)/\sqrt{3}, \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = \lambda_5 = \sqrt{3}(1 - k) \quad (\text{переменные } s_k^j), \\ \lambda_6 &= -2(1 + 3k)/\sqrt{3} \quad (\text{переменная } w), \\ \lambda_7 &= \dots = \lambda_{11} = 0 \quad (\text{переменные } y_{ij}). \end{aligned}$$

В пятимерное множество особых точек Φ_{LX} из физической области многообразия S входит шестимерная сепаратриса (отвечающая отрицательному собственному числу λ_6), которой соответствуют диагонализуемые метрики (движение вещества отсутствует) с квазиизотропной асимптотикой, найденной Лифшицем и Халатниковым [48]:

$$g_{ij}(t) \approx t^{4/(1+k)} g_{ij}^0 \tag{3.1}$$

(здесь синхронное время $t \rightarrow 0$).

2. Множество N , имеющее размерность 2, определяется условиями

$$\|y_{ij}\| = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1^t, \quad \|s_k^j\| = Q_1 \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix} Q_1^t.$$

Здесь и ниже Q_1 — произвольная ортогональная матрица;

$$s_1 = -2(3 + k)(43 + 2k + 3k^2)^{-1/2}, \quad s_2 = -\frac{(5 - k) \times}{(2(43 + 2k + 3k^2))^{-1/2}},$$

$$w = \frac{8(1 + 3k)(1 - k)}{43 + 2k + 3k^2}, \quad H_1(N) = \frac{8(5 - k)}{43 + 2k + 3k^2}.$$

Собственные числа системы (2.12) в этих особых точках следующие:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = -4(1 + 3k)(2/(43 + 2k + 3k^2))^{1/2} \quad (\text{переменные } y_{ij}), \\ \lambda_4 &= \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 8(1 - k)(2/(43 + 2k + 3k^2))^{1/2} \quad (\text{переменные } s_k^j), \\ \lambda_{8,9} &= 4\{1 - k \pm i^{1/2}(1 - k)(3 + 16k - 3k^2)^{1/2}\} \times \\ &\quad \times (2/(43 + 2k + 3k^2))^{1/2} \quad (\text{переменные } w, s_k^j), \\ \lambda_{10} &= \lambda_{11} = 0 \quad (\text{переменные } y_{ij}, s_k^j). \end{aligned}$$

В особые точки N из физической области S входит пятимерная сепаратриса, представляющая диагонализуемые метрики, имеющие

асимптотику

$$g_{ij}(t) \approx Q_1 \begin{pmatrix} C_1 t^{(1-k)/(1+k)} & 0 & 0 \\ 0 & C_2 t^{(3+k)/2(1+k)} & 0 \\ 0 & 0 & C_3 t^{(3+k)/2(1+k)} \end{pmatrix} Q_1^t. \quad (3.2)$$

Особые точки $\Phi_{\text{ЛХ}}$ и N являются невырожденными и неустойчивыми.

3. Множество T , имеющее размерность 5, определяется условиями

$$\|y_{ij}\| = Q_1 \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1^t, \quad \|s_k^j\| = Q_1 \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1^t.$$

Здесь координаты s, x удовлетворяют условиям $s \leq 0, 2s^2 + x^2 = 1, w \geq 0$ — произвольное число, $H_1(T) = 0$.

В множество T из физической области S входит семимерная сепаратриса, представляющая метрики (с вращением осей при $x \neq 0$), имеющие асимптотику, обобщающую асимптотику, найденную Таубом:

$$g_{ij}(t) \approx Q_1 \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 + C_2 x^2 t^2 & -C_2 x s t^2 \\ 0 & -C_2 x s t^2 & C_2 s^2 t^2 \end{pmatrix} Q_1^t. \quad (3.3)$$

Границей множества T при $s = 0$ является множество вырожденных особых точек T^0 .

4. Множества A и B , имеющие размерность 6, определяются условиями

$$\|y_{ij}\| = Q_1 \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1^t, \quad \|y_k^j\| = Q_1 \begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_1^3 \\ 0 & s_1 & s_2^3 \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix} Q_1^t, \quad w = 0.$$

На множестве A $s_1 = 1/4 s_2$, на множестве B $s_2 = 0$; $H_1(A) = H_1(B) = 0$. Особые точки A и B не имеют сепаратрис, входящих в них из физической области S , поэтому им не отвечают никакие асимптотики.

5. Множество K имеет размерность 7 и определяется условиями

$$\|y_{ij}\| = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1^t, \quad \|s_k^j\| = Q_1 \begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ 0 & s_2^2 & s_2^3 \\ 0 & 0 & s_3^3 \end{pmatrix} Q_1^t, \\ w = 0, \quad H_1(K) = 0. \quad (3.4)$$

Множество K лежит в пересечении компонент границы $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_w$. Эти особые точки являются невырожденными (при $s_1^1 \neq s_2^2 \neq s_3^3$) и неустойчивыми (подробное исследование особых точек

K проведено ниже, в § 4). Сепаратрисы особых точек K лежат на границе Γ и идут (при направлении времени в сторону сжатия пространства) из одной особой точки K в другую. Особым точкам K не соответствует никаких степенных асимптотик. Эти особые точки вместе с их сепаратрисами являются аппроксимацией (см. § 4) наиболее общего режима поведения метрики при сжатии пространства — колебательного режима БЛХ [50, 51].

Покажем, что при наличии движения вещества степенные асимптотики (3.1) и (3.2) не реализуются. Из интегралов L (2.5) и K (2.6) можно образовать интеграл M , инвариантный относительно преобразований

$$g_{ij} \rightarrow \lambda^2 g_{ij}, \quad S_k^j \rightarrow \lambda^2 S_k^j, \quad t \rightarrow \lambda t. \quad (3.5)$$

Интеграл M в координатах s_k^j, y_{ij}, w имеет вид

$$\begin{aligned} M &= L \cdot K^{-2(1+k)/(1+3k)} = \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) |y|^{2(1-k)/(1+3k)} w^{3(1-k)/(1+3k)} \times \\ &\times \left(Z_1^{1/2} - \frac{1-k}{1+k} H_1 \right)^{-2(1-k)/(1+3k)} (Z_1^{1/2} + H_1)^{-2(1+k)/(1+3k)} = \\ &= C(k) \varepsilon^{2(3k-1)/(1+3k)} \bar{u}_0^{2(k-1)/(1+3k)} |g|^{(k-1)/(1+3k)} \times \\ &\times (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2), \quad (3.6) \end{aligned}$$

где

$$Z_1 = H_1^2 - 16k(1+k)^{-2} w x_\alpha x_\beta |y| y^{\alpha\beta}.$$

Если метрика вплоть до сингулярности имеет асимптотику (3.1) или (3.2), то соответствующая траектория системы (2.12) входит в особые точки $\Phi_{ЛХ}$ или N . Интеграл M (3.6) в особых точках $\Phi_{ЛХ}$ и N равен нулю. Поэтому траектория, входящая в эти особые точки, соответствует метрике без движения вещества, т. е. асимптотики (3.1) и (3.2) при наличии движения вещества и при сжатии пространства вплоть до сингулярности не реализуются.

Отметим, что значение параметра $k = 1/3$ выделено тем, что интеграл M при $k = 1/3$ не зависит от плотности энергии ε :

$$M \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2^{4/3}}{9} \bar{u}_0^{-2/3} |g|^{-1/3} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2).$$

Представляется естественным назвать движение вещества быстрым, если $M \gg 1$, и медленным, если $M \lesssim 1$.

При направлении времени в сторону сжатия пространства все траектории системы (2.12) в силу наличия монотонной функции F (см. (2.8)) приближаются к границе Γ . При этом вдоль каждой траектории $F \rightarrow -\infty$, поскольку на границе $F = -\infty$. Траектория системы (2.12), попав в малую окрестность границы Γ , определенную условием $|F| \gg 1$, начинает двигаться вдоль траекторий этой системы, лежащих на границе Γ . Все траектории системы

(2.12) на границе Γ являются сепаратрисами особых точек и ведут из одной особой точки в другую (мы не приводим здесь сепаратрисную диаграмму, поскольку она в основном совпадает с приведенной в § 6 главы II сепаратрисной диаграммой для диагональной модели IX типа). После конечного числа переходов (которое всегда не больше трех) вдоль сепаратрис особых точек $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N , T , A и B траектория попадает в окрестность особых точек K и начинает двигаться вдоль их сепаратрис. При таком движении траектории метрика изменяется в колебательном режиме (см. § 4). Таким образом, все метрики модели IX типа с движением вещества, кроме метрик, имеющих таубовскую асимптотику (3.3), выходят на колебательный режим, который является поэтому типичным состоянием метрики при сжатии пространства.

Определение понятия типичных состояний метрики дано в § 6 главы II. Для однородной модели IX типа с движением вещества типичными состояниями метрики на ранней стадии расширения пространства, определенной условием $|F| = |d(|g|^{1/2})/dt| \gg \gg 1$, являются степенные режимы (3.1) — (3.3), соответствующие сепаратрисам особых точек $\Phi_{\text{ЛХ}}$, N , T , вдоль которых траектории динамической системы (2.12) на многообразии S могут отойти от границы Γ .

При наличии движения вещества типичные состояния метрики на ранней стадии расширения существенно зависят от величины интеграла M . Если для некоторого решения $M \gg 1$ (быстрое движение вещества), то соответствующая траектория системы (2.12) никогда не может оказаться в окрестности множеств $\Phi_{\text{ЛХ}}$ и N , поскольку на этих множествах $M = 0$. Следовательно, при $M \gg 1$ единственным типичным состоянием метрики на ранней стадии расширения является степенной режим (3.3), обобщающий таубовский режим. Если же $M \lesssim 1$ (медленное движение вещества), то типичными состояниями метрики на ранней стадии расширения являются степенные режимы (3.1), (3.2) и (3.3), как и для диагональной метрики.

§ 4. Комбинаторная модель колебательного режима

Приведем полное интегрирование сепаратрис особых точек и вывод комбинаторной модели колебательного режима с помощью аппроксимации траектории системы (2.12) последовательностью сепаратрис особых точек K , мимо которых эта траектория движется (при сжатии пространства).

Для дальнейшего исследования удобно следующее инвариантное описание множества K . Точка P этого множества определяется двумя матрицами: $P = (y_{ij}, s_j^k)$ (при этом $w = 0$, $H_1(P) = (\text{Sp}(s))^2 - 2\text{Sp}(s^2) = 0$, $s = \|s_j^k\|$). Матрица y_{ij} согласно (3.4) имеет ранг 1; пусть e_j — собственный вектор матрицы y_{ij} , отвечающий ее

единичному собственному числу. Согласно (3.4), вектор e_j является также собственным вектором матрицы s_j^k ; пусть s — отвечающее ему собственное число этой матрицы. (Эквивалентная формулировка: матрица y_{ij} является проектором на некоторое собственное направление матрицы s_j^k).

Пусть $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ — три собственных числа матрицы s_j^k . Удобно разбить множество K на три подмножества K_1, K_2, K_3 , определенные следующим условием: на K_l имеем $s = s_l$.

Собственные числа системы (2.12) и их собственные направления в особых точках K_l следующие:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2(1 - k)(s_1 + s_2 + s_3) \quad (\text{переменные } s_j^k), \\ \lambda_2 &= 8(s_n + s_m - s_l) \quad (\text{переменная } w), \\ \lambda_3 &= 8(s_l - s_n), \quad \lambda_4 = 8(s_l - s_m) \quad (\text{переменные } y_{ij}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $(s_l, s_m, s_n) = (s_1, s_2, s_3)$. Остальные семь собственных чисел $\lambda_5, \dots, \lambda_{11}$ равны нулю и отвечают направлениям, касающимся множества K . В силу условий

$$H_1(K) = (s_1 + s_2 + s_3)^2 - 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = 0 \quad \text{и} \quad s_1 + s_2 + s_3 \leq 0$$

получаем, что $s_i \leq 0$. Знаки собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ в особых точках K_1, K_2, K_3 указаны в следующей формуле:

| | | | | |
|-------------|-------|-------|-------|-------|
| | K_1 | K_2 | K_3 | |
| λ_1 | — | — | — | |
| λ_2 | — | — | + | |
| λ_3 | + | — | — | |
| λ_4 | + | + | — | (4.2) |

Таким образом, в каждой особой точке множеств K_1, K_2 и K_3 имеются четыре ненулевых собственных числа с противоположными знаками, следовательно, эти особые точки являются невырожденными и неустойчивыми.

Принтегрируем сепаратрисы особых точек K . Из каждой точки $\bar{P}(\bar{y}_{ij}, \bar{s}_k^j)$, принадлежащей K_1 , выходит двумерная сепаратриса, идущая по компоненте границы $\Gamma_w (w = 0)$ на уровне $H_1 = 0$ (см. (4.1)). Эта сепаратриса имеет вид

$$w = 0, \quad s_k^j(\tau_1) = \bar{s}_k^j, \quad y_{ij}(\tau_1) = \frac{\exp(-8\tau_1 \bar{s}_k^j) \circ g_0}{[\text{Sp}((\exp(-8\tau_1 \bar{s}_k^j)) \circ g_0)^2]^{1/2}}, \tag{4.3}$$

где g_0 — симметричная матрица такая, что $g_0 \bar{s}^t = \bar{s} g_0$ (тогда при всех τ_1 $y(\tau_1) \bar{s}^t = \bar{s} y(\tau_1)$; см. (2.13)) и $y_{ij}(-\infty) = \bar{y}_{ij}$. Обозначим $y_{ij}^1 = y_{ij}(+\infty)$. Очевидно, что матрица y_{ij}^1 имеет ранг 1 и $y^1 \bar{s}^t = \bar{s} y^1$. Нетрудно проверить, что равенство $y^1 \bar{s}^t = \bar{s} y^1$ означает, что

матрица y^1 является проектором на некоторое собственное направление матрицы \bar{s} , т. е. точка $P_1 = (y_{ij}^1, \bar{s}_k^j)$ принадлежит либо множеству K_2 , либо множеству K_3 . Из (4.1) следует, что в точку K_2 по многообразию $w = 0$, $H_1 = 0$ входит только одномерная сепаратриса, поэтому почти вся двумерная сепаратриса, выходящая из точки \bar{P} , идет в точку $P^1 = (y_{ij}^1, \bar{s}_k^j)$, принадлежащую K_3 , и от нее отщепляется одномерная сепаратриса, идущая в точку (y_{ij}^2, \bar{s}_k^j) , принадлежащую K_2 . Матрицы y_{ij}^1 и y_{ij}^2 являются проекторами на собственные направления матрицы \bar{s}_k^j , отвечающие собственным числам соответственно s_3 и s_2 .

Из каждой точки $\bar{P} = (\bar{y}_{ij}, \bar{s}_k^j)$, принадлежащей K_2 , выходит одномерная сепаратриса, имеющая вид (4.3), которая идет в точку $P^1 = (y_{ij}^1, \bar{s}_k^j)$, принадлежащую K_3 .

Из каждой точки $\bar{P} = (\bar{y}_{ij}, \bar{s}_k^j)$, принадлежащей K_3 , выходит одномерная сепаратриса, имеющая вид

$$y_{ij}(t) = \bar{y}_{ij}, \quad s_k^j(t) = \bar{s}_k^j \frac{\text{ch } t_0}{\text{ch } t} + \frac{\text{sh } t - \text{sh } t_0}{\text{ch } t} \bar{y}_{ij}, \quad (4.4)$$

$$w(t) = -4(\text{sh } t - \text{sh } t_0) [\text{sh } t + \text{sh } t_0 - 2(s_1 + s_2) \text{ch } t_0] \text{ch}^{-2}t.$$

Здесь время t связано с τ_1 соотношением $dt = w(t) d\tau_1$, константа t_0 определена условием $\text{th } t_0 = s_3$, где $0 \geq s_1 \geq s_2 \geq s_3$ — собственные числа матрицы \bar{s}_k^j . Сепаратриса (4.4) определена при $t_0 \leq t \leq t_1 < 0$. При $t = t_0$ получаем начальную точку $\bar{P} = (\bar{y}_{ij}, \bar{s}_k^j)$; при $t = t_1$

$$\text{sh } t_1 = \frac{2(s_1 + s_2) - s_3}{(1 - (s_3)^2)^{1/2}},$$

получаем конечную точку $P^1 = (\bar{y}_{ij}, s_k^j(t_1))$, $w(t_1) = 0$, $H_1(t) \equiv 0$.

Из (4.4) следует, что конечная матрица $s_k^j(t_1)$ получается как первая точка пересечения кратчайшей дуги большого круга, проходящего (на сфере $\sum_{k,j=1}^3 (s_k^j)^2 = 1$) через две матрицы \bar{s}_k^j и \bar{y}_{ij} , с поверхностью $H_1(s_k^j) = (\text{Sp } s)^2 - 2\text{Sp } (s^2) = 0$. Матрица $s_k^j(t_1)$ имеет вид

$$s_k^j(t_1) = \frac{\bar{s}_k^j + 2(s_1 + s_2 - s_3) y_{ij}}{\sqrt{1 + 4(s_1 + s_2)^2 - 4s_3(s_1 + s_2)}}. \quad (4.5)$$

Общий собственный вектор e_y двух матриц \bar{s}_k^j и y_{ij} является также собственным вектором матрицы $s_k^j(t_1)$, поэтому конечная точка сепаратрисы (4.4) $P^1 = (\bar{y}_{ij}, s_k^j(t_1))$ принадлежит множеству K . В этой особой точке собственное число λ_2 , отвечающее изменению координаты ω (см. (4.1)), отрицательно, поэтому точка P_1 принадлежит или множеству K_1 , или множеству K_2 (см. (4.2)).

Результаты проведенного интегрирования сепаратрис отражены в сепаратрисной диаграмме рис. 20, где стрелка и символ a_i^j означают переход по сепаратрисе, идущей из множества K_i в множество K_j . Отметим, что из каждой точки K_1 возможны два перехода: a_1^3 и a_1^2 , однако, как нетрудно проверить, $a_2^3 \circ a_1^2 = a_1^3$, т. е. после этих двух переходов получается одна и та же точка на множестве K_3 .

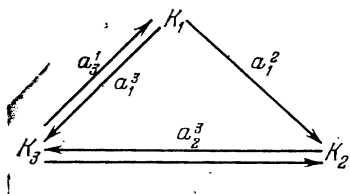


Рис. 20. Сепаратрисные переходы между особыми множествами K_1 , K_2 , K_3 .

Как отмечалось ранее, общая траектория системы (2.12) с некоторого момента времени начинает двигаться вдоль сепаратрис особых точек K_i и поэтому аппроксимируется,

согласно (4.4), бесконечной последовательностью этих сепаратрис и особых точек. При нахождении траектории в окрестности особых точек K_i одно из собственных чисел метрики $g_{ij}(t)$ много больше двух других (поскольку матрица

$$y_{ij} = g_{ij} / \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^3 g_{\alpha\beta}^2 \right)^{1/2} \quad (4.6)$$

на множестве K имеет ранг 1). Этому максимальному собственному числу отвечает собственное направление матрицы g_{ij} , асимптотически близкое к общему собственному вектору матриц y_{ij} и s_k^j (1). Таким образом, бесконечная последовательность сепаратрис, определенная диаграммой рис. 20, является аппроксимацией колебательного режима поведения метрики $g_{ij}(t)$. Такая аппроксимация следующим образом отображается в найденную в работе [51] кусочную аппроксимацию колебательного режима решениями Казнера.

Пусть e_1^i, e_2^i, e_3^i — собственные векторы матрицы s_k^i (как отмечалось ранее, они совпадают с собственными векторами матрицы x_k^i , которые в работе [51] названы «казнеровскими осями») и s_1, s_2, s_3 — соответствующие им собственные числа. При движении траектории вдоль сепаратрис a_1^3, a_1^2, a_2^3 метрика $g_{ij}(t)$ аппроксимируется следующим решением Казнера:

$$g_{ij}(t) = C_1 t^{2p_1} e_1^i e_1^j + C_2 t^{2p_2} e_2^i e_2^j + C_3 t^{2p_3} e_3^i e_3^j, \quad (4.7)$$

¹⁾ Отметим, что для почти всех траекторий системы (2.12) соотношения порядка собственных чисел $q_1 > q_2 > q_3$ метрики g_{ij} сохраняются при всех значениях времени t . Это свойство имеет чисто геометрическую природу и следует из того, что в шестимерном пространстве симметричных матриц g_{ij} многообразии W матриц с двумя равными собственными числами имеет размерность 4, поэтому почти все траектории системы (2.12) никогда не пересекают многообразие W . Аналогичное свойство динамических систем в пространстве двумерных матриц используется в § 3 главы VII.

где казнеровские показатели p_i определены формулами

$$p_i = 1 - \frac{2s_i}{s_1 + s_2 + s_3}, \quad (4.8)$$

$$p_1 = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3 = \frac{u+u^2}{1+u+u^2}.$$

Движению траектории вдоль сепаратрис a_3^1 и a_3^2 в модели БЛХ [51] соответствует «смена казнеровских показателей и поворот казнеровских осей». Допустим, что матрица \bar{s}_k^j приведена к треугольному виду (3.4). Согласно (4.5), собственные числа $s_i = s_i^i$ матрицы \bar{s}_k^j (здесь $s_1 < s_2 < s_3 < 0$, поэтому в (4.5) нужно поменять местами s_1 и s_3) преобразуются так же, как и в диагональной модели IX типа. Следовательно (см. § 6 главы II), преобразование (4.5) приводит к указанному в работе [51] закону смены казнеровских показателей:

$$p_1' = p_2(u-1), \quad p_2' = p_1(u-1), \quad p_3' = p_3(u-1).$$

Собственным числам s_i отвечают следующие собственные векторы матриц \bar{s}_k^j и $s_k^j(t_1)$:

$$s_1 \rightarrow (1, 0, 0), \quad s_2 \rightarrow (s_1^2, s_2 - s_1, 0), \quad (4.9)$$

$$s_3 \rightarrow (s_1^2 s_2^3 + (s_3 - s_1) s_1^3, (s_3 - s_1) s_2^3, (s_3 - s_1)(s_3 - s_2)).$$

Запишем координаты этих векторов с помощью углов поворота:

$$L(1, 0, 0), \quad M(\cos \theta_m, \sin \theta_m, 0),$$

$$N(\cos \theta_n, \sin \theta_n \cos \varphi_n, \sin \theta_n \sin \varphi_n). \quad (4.10)$$

Из формул (4.5), (4.8) получаем связь углов поворота собственных векторов матриц \bar{s}_k^j и $s_k^j(t_1)$ после сепаратрисных переходов a_3^1, a_3^2 :

$$\frac{\text{tg } \theta_n'}{\text{tg } \theta_n} = \frac{u-2}{u+2}, \quad \frac{\text{tg } \theta_m'}{\text{tg } \theta_m} = -\frac{2u-1}{2u+1}, \quad \varphi_n' = \varphi_n. \quad (4.11)$$

Полученные формулы совпадают с выведенным в работе [51] «законом поворотов казнеровских осей». Следовательно, сепаратрисная аппроксимация метрики $g_{ij}(t)$, определенная диаграммой рис. 20, изоморфна аппроксимации, указанной в работе [51], при условии, что из двух возможных переходов a_1^3 и a_1^2 выбирается основной переход по двумерной сепаратрисе a_1^3 .

Опишем кратко полученную здесь комбинаторную модель колебательного режима, состоящую в том, что траектория системы (2.12) периодически оказывается в окрестности особых точек K , которые получаются одна из другой последовательным действием некоторого отображения T .

Точкой множества K является пара матриц (y_{ij}, s_k^j) , удовлетворяющая условиям

$$s_j^j \leq 0, \quad H_1(s) = (\text{Sp } s)^2 - 2 \text{Sp } (s^2) = 0, \\ \sum_{i,j=1}^3 y_{ij}^2 = 1, \quad \sum_{k,j=1}^3 (s_k^j)^2 = 1, \quad (4.12)$$

причем матрица y_{ij} имеет ранг 1 и является проектором на некоторое (вещественное) собственное направление матрицы s_k^j . Пусть s_y — соответствующее этому направлению собственное число матрицы s_k^j (в силу (4.12) $s_y \leq 0$).

На множестве K действует отображение T , определенное следующим образом. Если s_y не является минимальным собственным числом матрицы s_k^j , то отображение T может быть двузначным и переводит точку (y_{ij}, s_k^j) в точку $(\bar{y}_{ij}, \bar{s}_k^j)$, где \bar{y}_{ij} — проектор на другое собственное направление матрицы s_k^j , отвечающее собственному числу, меньшему, чем s_y . Если s_y — минимальное собственное число матрицы s_k^j , то отображение T однозначен и переводит точку (y_{ij}, s_k^j) в точку (y_{ij}, \bar{s}_k^j) , где матрица \bar{s}_k^j есть первая точка пересечения кратчайшей дуги большого круга (на сфере $\sum_{k,j=1}^3 (s_k^j)^2 = 1$), проходящего через точки s_k^j и y_{ij} , с поверхностью $H_1(s) = 0$.

Отображение этой комбинаторной модели в комбинаторную модель БЛХ определяется тем, что собственные направления матрицы s_k^j совпадают с «казнеровскими осями», а казнеровские показатели p_i определяются формулами

$$p_i = 1 - \frac{2s_i}{s_1 + s_2 + s_3},$$

где s_1, s_2, s_3 — собственные числа матрицы s_k^j .

§ 5. Некоторые общие свойства динамики однородных космологических моделей с движением вещества

I. Построение динамической системы. Указанная в §§ 1, 2 конструкция динамической системы на компактном многообразии S , эквивалентной системе уравнений Эйнштейна для модели IX типа, обобщается на все остальные однородные модели с движением вещества ¹⁾. Так же как и в § 1, правоинвариантные при действии

¹⁾ Такое обобщение было проведено в работе А. А. Пересецкого [83], которому и принадлежит результаты этого параграфа. Существование общего колебательного режима поведения метрики однородной космологической модели VII типа с движением вещества впервые было обнаружено в работе [92].

группы Ли G векторные поля X^0, X^1, X^2, X^3 предполагаются выбранными так, что структурные константы C_{ij}^k имеют стандартный вид (1.1), а метрика ds^2 имеет вид (1.2).

Подставим в тождество (1.4) тензор T^{ij} вместо $R^{ij} - 1/2 g^{ij} R$ (в силу уравнений Эйнштейна (1.3)) и заменим вариации δR_{ij} их выражениями через вариации метрики δg_{ij} по формулам (3.5), (3.28) главы II. После этих подстановок и при выборе времени τ согласно (1.7) тождество (1.4) в силу независимости однородных вариаций метрики δg_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial g_{ij}} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_{ij}} = \Pi^{ij} + M^{ij}, \quad (5.1)$$

где функции Π^{ij} и M^{ij} имеют вид ($|g| = \det(g_{ij})$)

$$\begin{aligned} \Pi^{ij} = \frac{1}{2} |g|^{-(1-k)/2} g^{lj} [6a^2 |g| g^{3i} \delta_i^3 - 2a^2 |g| g^{33} \delta_i^i + \\ + a |g| g^{3m} \varepsilon_{lmi} n^i + a g_{lk} g_{km} \varepsilon_{ikm} n^k], \quad (5.2) \end{aligned}$$

$$M^{ij} = \frac{1+k}{2} \varepsilon(u^i u^j - k g_{ab} u^a u^b g^{ij}) |g|^{(1+k)/2}.$$

Функция $L(g_{ij}, \dot{g}_{ij})$ в (5.1) получается из $1/2 R \sqrt{|g|}$ после отбрасывания полной производной по времени и имеет вид

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{8} |g|^{(1-k)/2} (\kappa_\alpha^\alpha \kappa_\beta^\beta - \kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha) + \\ + \frac{1}{4} |g|^{-(1+k)/2} [12a^2 |g| g^{33} - |g| g^{ii} |\varepsilon_{ijk}| n^j n^k + g_{ij}^2 n^i n^j], \quad (5.3) \end{aligned}$$

где $\kappa_\alpha^\beta = \dot{g}_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$.

Так же как и в § 1, введем импульсы $p^{ij} = \partial L / \partial \dot{g}_{ij}$ и координаты $s_k^j = g_{ki} p^{ij}$. Очевидно, что вид импульсов p^{ij} и координат s_k^j одинаков для всех однородных моделей (поскольку кинетическая энергия в (5.3) не зависит от типа модели) и дается формулами (1.16), (2.1).

Уравнение Эйнштейна $R_0^0 - 1/2 R = T_0^0$ имеет вид

$$H = \varepsilon |g|^{(1+k)/2} [(1+k) u_0^2 (-g)^{-k} - k], \quad (5.4)$$

где функция $H = \dot{g}_{ij} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_{ij}} - L$ выражается через фазовые координаты p^{ij}, g_{ij} по формуле

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{|g|^{(1-k)/2}} \left\{ (\text{Sp}(p \circ g))^2 - 2 \text{Sp}(p \circ g \circ p \circ g) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} [12a^2 |g| g^{33} - |g| g^{ii} |\varepsilon_{ijk}| n^j n^k + g_{ij}^2 n^i n^j] \right\}. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Система уравнений (5.1) и (5.4) эквивалентна системе (0, 0) и (i, j) уравнений Эйнштейна (1.3).

Уравнения Эйнштейна $R_{0\alpha} = T_{0\alpha}$ имеют вид

$$s_{\beta}^{\gamma} C_{\alpha\gamma}^{\beta} - s_{\alpha}^{\beta} C_{\alpha\beta}^{\alpha} = \frac{1+k}{2} |g|^{(1-k)/2} \varepsilon u_0 u_{\alpha}. \quad (5.6)$$

Из уравнений (5.6) следует, что в однородной модели I типа ($C_{\alpha\gamma}^{\beta} \equiv 0$) включение движения материи невозможно (поскольку из (5.6) следует, что $u_{\alpha} \equiv 0$). Для однородной модели II типа ($n^1 = n^2 = a = 0$, $n^3 = 1$) из (5.6) получаем $u_3 = 0$, в то время как u_1 и u_2 могут быть ненулевыми. Для остальных моделей III—VIII типов возможно введение всех трех компонент скорости материи.

Уравнения (5.4), (5.6), так же как и для однородной модели IX типа, являются связями, позволяющими выразить компоненты скорости материи u_i и плотность энергии ε через компоненты метрики g_{ij} и импульсы p^{ij} . Учитывая условие (1.12), из (5.4) и (5.6) получаем следующие выражения:

$$2\varepsilon u_0^2 |g|^{(1-k)/2} = H + \left(H^2 - \frac{16k}{(1+k)^2} X_a X_b g^{ab} |g|^k \right)^{1/2} = Z, \\ \frac{1+k}{2} \varepsilon u^i u^j |g|^{(1+k)/2} = \frac{4|g|^k X^i X^j}{(1+k)Z}, \quad (5.7)$$

$$X_i = s_k^j C_{ji}^k - s_i^j C_{kj}^k = s_k^j \varepsilon_{jik} n^k - a s_k^k \delta_i^3 + 3a s_i^3.$$

Система (5.1) после подстановки выражений (5.6) и преобразования в фазовые координаты p^{ij} , g_{ij} принимает вид

$$\dot{p}^{ij} = -\frac{\partial H}{\partial g^{ij}} - \Pi^{ij} - M^{ij}, \quad \dot{g}_{ij} = \frac{\partial H}{\partial p^{ij}}. \quad (5.8)$$

Здесь функции Π^{ij} определяются формулами (5.2), а функции M^{ij} в силу (5.7) имеют вид

$$M^{ij} = 4 |g|^k [X^i X^j - k g^{ij} (g_{ab} X^a X^b)] / (1+k) Z.$$

Динамическая система (5.8) после преобразования в координаты (2.10) и замены времени (2.11) принимает вид

$$\frac{ds_j^i}{d\tau_1} = (1-k) H_1 (\delta_j^i - s_j^i s_{\alpha}^{\alpha}) + \\ + \frac{8yw}{(1+k)Z_1} [B_j^i - s_j^i \text{Sp}(s^t \circ B)] + w (Q_j^i - s_j^i \text{Sp}(s^t \circ Q)), \\ \frac{dw}{d\tau_1} = 8w (\text{Sp} s - 2 \text{Sp}(y^2 \circ s)) - \\ - 2w \left[(1-k) H_1 \text{Sp} s + \frac{8yw}{(1+k)Z_1} \text{Sp}(s^t \circ B) + w \text{Sp}(s^t \circ Q) \right], \\ \frac{dy_{ij}}{d\tau_1} = 8 (-y_{ik} s_j^k + y_{ij} \text{Sp}(y^2 \circ s)), \\ \frac{dG}{d\tau_1} = 4G (\text{Sp} s - 2 \text{Sp}(y^2 \circ s)). \quad (5.9)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_j^i &= -y^{it} x_i x_j + k \delta_{ij}^i y^{ab} x_a x_b, \\ x_i &= s_l^j \varepsilon_{jil} n^l - a s_\alpha \alpha_i^3 + 3 a s_i^3, \\ Q_j^i &= \delta_j^i (4 a^2 y y^{33} - n^2 n^3 y y^{11} - n^1 n^3 y y^{22} - n^1 n^2 y y^{33}) + \\ &+ a \varepsilon_{jli} y y^{3l} n^i + a \varepsilon_{izl} y l m y m_j n^m + \\ &+ \frac{1}{2} y y^{ij} n^k n^l | \varepsilon_{jkl} | + y_i y_l j n^i n^l, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$H_1 = (\text{Sp } s)^2 - 2 \text{Sp } (s^2) - \frac{1}{4} w \text{Sp } Q,$$

$$Z_1 = H_1 + \left(H_1 - \frac{16k}{(1+k)^2} |y| w y^{ab} x_a x_b \right)^{1/2}.$$

Динамическая система (5.9) определена на таком же, что и для однородной модели IX типа, компактном 11-мерном многообразии S , выделенном в координатах s_k^i, y_{ij}, w естественными условиями (2.13). Система (5.9) в силу условий (2.14) непрерывно продолжается на компоненты границы Γ_w и Γ_0 , кроме некоторых исключительных точек (см. конец § 2).

II. Сепаратрисная аппроксимация колебательного режима. Динамическая система (5.9) на компоненте границы $\Gamma_w (w=0)$ не зависит от типа однородной модели. Поэтому особые точки системы (5.9) и их сепаратрисы, лежащие на компоненте границы Γ_w , для всех однородных моделей те же, что и для модели IX типа (см. §§ 3, 4). Остаются неизменными также все собственные числа особых точек на Γ_w .

Исследуем сепаратрисы особых точек множества K , разбитого на три подмножества: K_1, K_2, K_3 (см. § 4). Сепаратрисы, выходящие из особых точек множеств K_1 и K_2 , лежат на компоненте границы Γ_w и, как показано в § 4, идут в особые точки множества K_3 .

Пусть точка $P = (\bar{y}_{ij}, \bar{s}_j^k, w=0)$ принадлежит множеству K_3 . Напомним, что это означает, что матрица \bar{y}_{ij} имеет ранг 1 и поэтому представляется в виде $\bar{y}_{ij} = y_i y_j$, где (y_1, y_2, y_3) — единичный собственный вектор e_y матрицы \bar{y}_{ij} . Вектор e_y является также собственным вектором матрицы \bar{s}_j^k , отвечающим наименьшему собственному числу. При этом $H_1(P) = (\text{Sp } (s))^2 - 2 \text{Sp } (s^2) = 0$. Из особой точки P , согласно формулам для собственных чисел (4.1) — (4.2), выходит одномерная сепаратриса, вдоль которой $y_{ij} = \text{const}$, $H_1 = 0$, и уравнения (5.9) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{ds_k^j}{d\tau_1} &= w (Q_k^j - s_k^j \text{Sp } (s \circ Q)), \\ \frac{dw}{d\tau_1} &= 8w (\text{Sp } s - 2 \text{Sp } (y^2 \circ s)) - 2w^2 \text{Sp } (s \circ Q), \end{aligned} \quad (5.11)$$

Матрица $Q(\bar{y}_{ij})$ не зависит от времени и согласно (5.10) имеет вид

$$Q(\bar{y}_{ij}) = Q = a \cdot y \circ N \circ y \circ K + y \circ N \circ y \circ N,$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Пусть $\|Q\| = \text{Sp}^{1/2}(Q^t \circ Q) \neq 0$. После замены времени $dt = w(\tau_1) \|Q\| d\tau_1$ система (5.11) интегрируется:

$$s_k^j(t) = \frac{\text{ch } t_0}{\text{ch } t} \bar{s}_k^j + \frac{\text{sh } t - \text{sh } t_0}{\text{ch } t} \bar{Q}_k^j, \quad \bar{Q}_k^j = \frac{Q_k^j}{\|Q\|},$$

$$w(t) = 4(2\text{Sp}(y^2 \circ Q) - \text{Sp } Q)(\text{sh } t - \text{sh } t_0)(\text{sh } t_1 - \text{sh } t), \quad (5.13)$$

где t_1 определяется из условия

$$(\text{sh } t_1 - \text{sh } t_0)(2\text{Sp}(\bar{y}^2 \circ \bar{Q}) - \text{Sp } \bar{Q}) = 2 \text{ch } t_0 (\text{Sp } \bar{s} - 2\text{Sp}(\bar{y}^2 \circ \bar{s})).$$

В момент времени $t = t_1$ сепаратриса (5.13), выходящая из особой точки $P(\bar{y}, \bar{s})$, принадлежащей множеству K_3 , попадает в особую точку $P'(y', s')$, где $w = 0$, $y' = \bar{y}$, $s' = s(t_1)$, $H_1(P') = 0$. Поскольку в особой точке P' собственное число $\lambda_w < 0$, то P' принадлежит либо множеству K_1 , либо множеству K_2 (см. (4.2)). Матрица $s' = s(t_1)$ вследствие формул (5.13) является второй точкой пересечения большого круга, проведенного на сфере $\Sigma (s_k^j)^2 = 1$ через две точки (\bar{s}_k^j) и (\bar{Q}_k^j) , с поверхностью $H_1(s_k^j) = 0$. Отметим, что в случае однородной модели IX типа матрица $Q = \bar{y}^2 = \bar{y}$ и формулы (5.13) эквивалентны формулам (4.4).

Предположим теперь, что $Q(\bar{y}_{ij}) = 0$. В этом случае сепаратриса, выходящая из особой точки $P = (\bar{y}_{ij}, \bar{s}_k^j)$, принадлежащей K_3 , уходит из множества K . Действительно, при $Q = 0$ из системы (5.11) получаем

$$s_k^j = \text{const}, \quad \bar{y}_{ij} = \text{const}, \quad w = w_0 \exp [8\tau_1(\text{Sp } s - 2\text{Sp}(y^2 s))]. \quad (5.14)$$

Условие $Q(y_{ij}) = 0$ означает

$$\|Q\|^2 = \text{Sp } Q^t \circ Q = (n_1 y_1^2 + n_2 y_2^2 + n_3 y_3^2)^2 \times \\ \times [(ay_1 + n_2 y_2)^2 + (ay_2 - n_1 y_1)^2 + n_3^2 y_3^2] = 0.$$

Последнее равенство в силу $a \cdot n_3 = 0$ выполнено одновременно с $n_1 y_1^2 + n_2 y_2^2 + n_3 y_3^2 = 0$. Таким образом, условие $Q(y_{ij}) = 0$ для моделей I и V типов выполнено тождественно. В случае моделей II, III, IV, VI и VIII типов условие $Q(y_{ij}) = 0$ вырезает на двумерном многообразии RP^2 матриц $y_{ij} = y_i y_j$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ некоторую кривую; в случае модели VII типа — точку; в случае модели IX типа — пустое множество.

Таким образом, для всех однородных моделей, кроме моделей I и V типов почти во всех точках множества K_3 имеем $Q(y_{ij}) \neq 0$. Следовательно, сепаратриса, выходящая из этих особых точек, имеет вид (5.13) и идет в особые точки множеств K_1 и K_2 . Поэтому для всех однородных моделей, кроме I и V типов, почти все особые точки множества K обладают следующим свойством: сепаратрисные переходы, начавшиеся из данной особой точки, все время возвращаются в точки множества K и образуют бесконечные последовательности.

Траектории системы (5.9) при сжатии пространства, в полной аналогии с поведением траекторий системы (2.12), в силу существования монотонной функции $F = \frac{d(\det g_{ij})^{1/6}}{dt}$ приближаются к границе Γ многообразия S и начинают двигаться вдоль последовательностей сепаратрис особых точек K (за исключением сепаратрис особых точек типа ФЛХ, N , M , T). При этом отношения q_i/q_j собственных чисел метрики g_{ij} осциллируют, т. е. изменение метрики происходит в колебательном режиме. Таким образом, для всех однородных моделей с движением вещества, кроме моделей I и V типов, общим режимом поведения метрики вблизи сингулярности является колебательный режим.

При движении траектории вдоль сепаратрисных переходов $K_1 \rightarrow K_3$ и $K_2 \rightarrow K_3$ метрика аппроксимируется решением Казнера (4.7). При движении траектории вдоль сепаратрис (5.13) $K_3 \rightarrow K_1$, K_2 происходит смена казнеровских показателей p_i и поворот казнеровских осей (собственных векторов матрицы s_k^j).

Покажем, что преобразование собственных чисел матрицы s_k^j (и связанных с ними казнеровских показателей p_i , см. (4.8)) при переходе (5.13) из особой точки $P(\bar{y}_{ij}, \bar{s}_k^j)$ в особую точку $P'(\bar{y}_{ij}, (s_k^j)')$ не зависит от типа однородной модели. Действительно, динамическая система (5.9) — (5.11) инвариантна относительно действия матриц A из группы автоморфизмов $\text{Aut}(\mathfrak{G})$ алгебры Ли \mathfrak{G} группы G :

$$s \rightarrow P_1(A s A^{-1}), \quad y \rightarrow P_1(A y A^t), \quad (5.15)$$

где оператор P_1 означает проекцию матрицы x_j^i на единичную сферу:

$$P_1(x_j^i) = x_j^i \left(\sum_{\alpha, \beta}^3 (x_\beta^\alpha)^2 \right)^{-1/2}.$$

С помощью преобразований (5.15) матрицы \bar{y}_{ij} и \bar{s}_k^j можно привести к виду

$$\bar{y}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{s}_k^j = \begin{pmatrix} s_1 & s_1^2 & s_1^3 \\ 0 & s_2 & s_2^3 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}, \quad s_1 < s_2 < s_3 < 0. \quad (5.16)$$

В случае модели VIII типа возможно еще приведение матрицы \bar{y}_{ij} к виду $\bar{y}_{ij} = \delta_i^3 \delta_j^3$ (см. [83]).

В силу (5.13) имеем

$$(s_k^j)' = s_k^j(t_1) = \text{const} \left[\|\bar{s}_k^j\| + 2(s_2 + s_3 - s_1) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (5.17)$$

Поэтому преобразование казнеровских показателей $p_i = 1 - 2s_i \times (s_1 + s_2 + s_3)^{-1}$ при переходе (5.13) не зависит от типа модели (и указано в § 4).

Связь углов поворота казнеровских осей, которые для матрицы s_k^j вида (5.16) можно записать в виде (4.10), отличается от (4.11) и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\text{tg } \theta_n'}{\text{tg } \theta_n} &= \frac{u - 2}{u + 2 + 4a \text{tg } \theta_n \cos \varphi_n}, \quad \varphi_n' = \varphi_n, \\ \frac{a + \text{ctg } \theta_m}{a + \text{ctg } \theta_m'} &= -\frac{2u - 1}{2u + 1}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Отметим, что при приведении матрицы s_k^j с помощью преобразований (5.15) к треугольному виду (5.16) собственные векторы матрицы s_k^j преобразуются матрицами A , которые для всех однородных моделей, кроме модели IX типа, не являются ортогональными и поэтому изменяют углы между векторами. Вследствие этого в общем случае закон поворотов казнеровских осей зависит не только от их взаимного расположения (начальных значений $\theta_m, \theta_n, \varphi_n$), но и от их расположения относительно базисных векторов X^1, X^2, X^3 .

Для всех однородных моделей с движением вещества, так же как и для модели IX типа (см. § 3), можно полностью исследовать все особые точки динамической системы (5.9) и соответствующие им асимптотики. Это исследование было проведено в работе [83], где показано, что все имеющиеся особые точки и асимптотики являются обобщениями особых точек и асимптотик, имевшихся в однородных моделях без движения вещества (см. главу II), и качественно новых асимптотик и особых точек при включении движения вещества не возникает.

§ 6. Однородная космологическая модель IX типа с электромагнитным полем

I. Уравнения Эйнштейна — Максвелла в лагранжевой форме. Электромагнитное поле в однородной космологической модели IX типа, так же как и метрика, инвариантно при правых сдвигах по группе SO (3). Метрика имеет вид (1.2), где $g_{00}(t) \equiv 1$. Вектор-

потенциал электромагнитного поля в базисе X^0, X^1, X^2, X^3 имеет координаты

$$A_i = (A_0(t), A_1(t), A_2(t), A_3(t)).$$

Тензор электромагнитного поля $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}$ в рассматриваемом базисе имеет вид

$$F_{ik} = C_{ki}^s A_s + \nabla_{X^i} A_k - \nabla_{X^k} A_i, \quad (6.1)$$

где значок ∇_{X^i} означает производную Ли по полю X^i , а C_{ki}^s — структурные константы: $[X_i, X_k] = C_{ik}^s X_s$, $C_{ik}^0 = C_{0i}^s \equiv 0$. Выбирая структурные константы группы $SO(3)$ в стандартном виде (4.1), из (6.1) получаем, что

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{A}_1 & \dot{A}_2 & \dot{A}_3 \\ -\dot{A}_1 & 0 & -A_3 & A_2 \\ -\dot{A}_2 & A_3 & 0 & -A_1 \\ -\dot{A}_3 & -A_2 & A_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\dot{A}_i = \frac{dA_i}{dt} \right).$$

Тензор F_{ik} вследствие градиентной инвариантности не зависит от компоненты $A_0(t)$; в дальнейшем полагаем $A_0(t) \equiv 0$.

В однородной космологической модели метрика g_{ij} и вектор-потенциал A_i удовлетворяют уравнениям Эйнштейна — Максвелла (см. [84, 93—99])

$$R_{ik} - 1/2 g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} = \frac{2k}{c^4} \left(-F_{il} F_k^l + \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik} \right),$$

$$F_{;k}^{ik} = 0, \quad i, k, l, m = 0, 1, 2, 3. \quad (6.2)$$

Эти уравнения, как известно, следуют из вариационного принципа

$$\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega + \frac{k}{c^4} \delta \int F_{ik} F^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = 0 \quad (6.3)$$

при независимом варьировании всех компонент метрики g_{ij} и вектор-потенциала A_i . В дальнейшем мы используем систему единиц, в которой $2k/c^4 = 1$.

Вариационный принцип (6.3) при условиях однородности метрики и электромагнитного поля переходит в лагранжев принцип

$$\delta \int (L_1 + L_2) dt = 0, \quad (6.4)$$

где

$$L_1 = \frac{1}{8} \sqrt{|g|} (\kappa_\alpha^\alpha \kappa_\beta^\beta - \kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha) - \frac{1}{4 \sqrt{|g|}} (2|g| g^{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}),$$

$$\kappa_\alpha^\beta = \dot{g}_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}, \quad |g| = \det \|g_{\alpha\beta}\|, \quad (6.5)$$

$$L_2 = -\frac{1}{2} \dot{A}_\alpha \dot{A}_\beta g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|} + \frac{1}{2} A_\alpha A_\beta g_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{|g|}}.$$

Уравнения Лагранжа $\partial(L_1 + L_2)/\partial q = (d/dt)(\partial(L_1 + L_2)/\partial \dot{q})$, соответствующие (6.4), эквивалентны «тензорным» компонентам уравнений Эйнштейна при $i, k = 1, 2, 3$ и уравнениям Максвелла при $i = 1, 2, 3$ (см. (6.2)). Уравнение Максвелла $F_{;k}^{0k} = 0$ выполняется тождественно в силу однородности метрики и электромагнитного поля. Уравнение Эйнштейна

$$R_{00} - 1/2 g_{00}R = -F_{0l}F_0^l + 1/4 F_{lm}F^{lm}g_{00}$$

означает, что $H = 0$, где H — энергия, отвечающая лагранжиану $L_1 + L_2$. Уравнения Эйнштейна

$$R_{0\alpha} = -F_{0\beta}F_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}$$

имеют вид

$$-1/2 \kappa_{\beta}^{\gamma} C_{\gamma\alpha}^{\beta} = \dot{A}_{\beta} C_{\gamma\alpha}^{\delta} A_{\delta} g^{\gamma\beta}, \quad (6.6)$$

где $C_{\gamma\alpha}^{\beta}$ — структурные константы SO(3) в стандартной записи (1.1).

Таким образом, уравнения Эйнштейна — Максвелла (6.2) для однородной космологической модели IX типа с электромагнитным полем эквивалентны лагранжевой системе с лагранжианом $L_1 + L_2$, рассматриваемой на уровне связей (6.6) и $H = 0$ (ниже мы покажем, что связи (6.6) сохраняются лагранжевой системой).

II. Первые интегралы гамильтоновой системы. Преобразуем полученную лагранжевую систему с помощью преобразования Лежандра в эквивалентную ей гамильтонову систему. Введем импульсы

$$p^{ij} = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{g}_{ij}} = \frac{V|g|}{4} (g^{ij} (\ln |g|) \cdot - \dot{g}_{kl} g^{ik} g^{jl}), \quad (6.7)$$

$$P_i = \frac{\partial L_2}{\partial \dot{A}_i} = -\dot{A}_j g^{ij} V|g| \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

В фазовом пространстве (p, q) с координатами p^{ij}, P_i, g_{ij}, A_i получаем гамильтонову систему

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (6.8)$$

с гамильтонианом $H = H_1 - H_2$, где

$$H_1 = \frac{1}{V|g|} [(\text{Sp}(p \circ g))^2 - 2 \text{Sp}(p \circ g \circ p \circ g) + \frac{1}{4} (2|g| \text{Sp}(g^{-1}) - \text{Sp}(g^2))], \quad (6.9)$$

$$H_2 = \frac{1}{2V|g|} (P_i P_j + A_i A_j) g_{ij}.$$

Здесь p, g — матрицы $\|p^{ij}\|, \|g_{ij}\|$; $|g| = \det \|g_{ij}\|$. Отметим, что гамильтониан H_2 , описывающий изменение электромагнитного поля, есть гамильтониан трехмерного осциллятора (с изменяющейся метрикой).

Лагранжиан L и, следовательно, гамильтонова система (6.8) имеют группу симметрий $SO(3)$, действующую по закону

$$g \rightarrow Q^t \circ g \circ Q, \quad p \rightarrow Q^t \circ p \circ Q, \quad A \rightarrow Q^t \circ A, \quad P \rightarrow Q^t \circ P, \quad (6.10)$$

где Q — ортогональная матрица.

По теореме Нетер (см. [100]) гамильтонова система (6.8), в силу наличия трехмерной группы симметрий (6.10), имеет три первых интеграла — «момента»:

$$M_\alpha = g_{\beta\gamma} P^\gamma C_{\delta\alpha}^\beta + 1/2 A_\beta P_\gamma C_{\gamma\alpha}^\beta. \quad (6.11)$$

С помощью интегралов M_α легко доказать, что связи (6.6) сохраняются гамильтоновой системой (6.8). Действительно, используя формулы (6.7), легко проверить, что связи (6.6) означают, что $M_\alpha = 0$. Таким образом, гамильтонова система (6.8) рассматривается на общем нулевом уровне гамильтониана $H = 0$ и моментов $M_\alpha = 0$.

Система (6.8) имеет еще один первый интеграл

$$W = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 (P_i^2 + A_i^2) \right). \quad (6.12)$$

Действительно, легко проверить, что скобка Пуассона $\{H, W\} = 0$.

III. Колебательный режим поведения решений с диагональной метрикой вблизи космологической сингулярности. Уравнения Эйнштейна — Максвелла для однородной космологической модели IX типа имеют частные решения с диагональной метрикой g_{ij} и однокомпонентным вектор-потенциалом A_i :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}, \quad A_i = (0, A_1, 0, 0). \quad (6.13)$$

Такие решения тождественно удовлетворяют связям $M_\alpha = 0$. Гамильтониан $H = H_1 - H_2$ (6.9) при условиях (6.13) имеет вид

$$H = \frac{1}{\sqrt{q_1 q_2 q_3}} \left[\left(\sum_{i=1}^3 p_i q_i \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^3 p_i^2 q_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\left(\sum_{i=1}^3 q_i \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^3 q_i^2 \right) - \frac{(P_1^2 + A_1^2)}{2} q_1 \right]. \quad (6.14)$$

Соответствующая гамильтонова система на уровне $H = 0$ после

замены времени $d\tau_1/dt = 1/(2\sqrt{q_1q_2q_3})$ и замены координат $\bar{s}_i = p_i q_i$ ($i = 1, 2, 3$) переходит в систему

$$\dot{\bar{s}}_i = -q_i \left(\sum_{k=1}^3 q_k - 2q_i \right) + 2H_0 \delta_i^1, \quad \dot{q}_i = 4q_i \left(\sum_{k=1}^3 \bar{s}_k - 2\bar{s}_i \right), \quad (6.15)$$

где

$$H_0 = H_1 \sqrt{q_1 q_2 q_3} = \left(\sum_{i=1}^3 \bar{s}_i \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^3 \bar{s}_i^2 + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^3 q_i \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i^2.$$

При этом вектор-потенциал удовлетворяет уравнениям

$$P_1 = \sqrt{W} \sin \varphi(\tau_1), \quad A_1 = \sqrt{W} \cos \varphi(\tau_1), \quad \dot{\varphi} = 2q_1. \quad (6.16)$$

Здесь $W = 2H_0/q_1$ — первый интеграл системы (6.15).

Рассмотрим поведение метрики (6.13) при сжатии пространства ($(q_1 q_2 q_3) < 0$) в окрестности космологической сингулярности $q_1 q_2 q_3 = 0$. Сжатую пространство отвечает область $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3 \leq \leq 0$; по смыслу задачи $q_i \geq 0$, $H_0 = H_1 \sqrt{q_1 q_2 q_3} = H_2 \sqrt{q_1 q_2 q_3} \geq 0$.

Система (6.15) имеет двумерное множество невырожденных особых точек — конус L :

$$\left(\sum_{i=1}^3 \bar{s}_i \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^3 \bar{s}_i^2 = 0, \quad q_1 = q_2 = q_3 = 0.$$

Конус L лежит в отрицательном квадранте $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3 \leq 0$ и касается биссектрис координатных углов $\bar{s}_i = \bar{s}_j, \bar{s}_k = 0$. Биссектрисы делят конус L на три части; обозначим L_i часть конуса, ближайшую к оси \bar{s}_i .

Собственные числа особых точек L следующие: $\lambda_{q_1} = \lambda_{s_1} = 4(\bar{s}_2 + \bar{s}_3 - \bar{s}_1)$, $\lambda_{q_2} = 4(\bar{s}_3 + \bar{s}_1 - \bar{s}_2)$, $\lambda_{q_3} = 4(\bar{s}_1 + \bar{s}_2 - \bar{s}_3)$, $\lambda_{s_2} = \lambda_{s_3} = 0$. Очевидно, что на множестве L_i $\lambda_{q_j} > 0$, $\lambda_{q_j} < 0$, $\lambda_{q_k} < 0$ ($i, j, k = 1, 2, 3$). Следовательно, из множества L_i выходит сепаратриса, вдоль которой изменяются координаты q_i и \bar{s}_i , а координаты $q_j = q_k = 0$; \bar{s}_j, \bar{s}_k постоянны.

Сепаратриса, выходящая из точки $(\bar{s}_1^0, \bar{s}_2^0, \bar{s}_3^0)$ на множестве L_1 ($\bar{s}_2^0 + \bar{s}_3^0 - \bar{s}_1^0 > 0$), после замены времени $d\tau/d\tau_1 = q_1$ имеет вид

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= W \cos 2\tau + 2(\bar{s}_2^0 + \bar{s}_3^0 - \bar{s}_1^0) \sin 2\tau - W, \\ \bar{s}_1(\tau) &= (\bar{s}_1^0 - \bar{s}_2^0 - \bar{s}_3^0) \cos 2\tau + \frac{W}{2} \sin 2\tau + \bar{s}_2^0 + \bar{s}_3^0, \\ q_2 = q_3 &= 0, \quad \bar{s}_2 = \bar{s}_2^0, \quad \bar{s}_3 = \bar{s}_3^0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_1. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Конечная точка этой сепаратрисы достигается при $\tau = \tau_1$: $\text{tg } \tau_1 =$

$= 2(\bar{s}_2^0 + \bar{s}_3^0 - \bar{s}_1^0)/W$; $q_1(\tau_1) = 0$, $\bar{s}_1(\tau_1) = 2(\bar{s}_2^0 + \bar{s}_3^0) - \bar{s}_1^0$ и принадлежит множеству L_2 или L_3 . В координатах $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ сепаратриса (6.17) движется из точки $(\bar{s}_1^0, \bar{s}_2^0, \bar{s}_3^0)$ в точку $(2(\bar{s}_2^0 + \bar{s}_3^0) - \bar{s}_1^0, \bar{s}_2^0, \bar{s}_3^0)$ по прямой, параллельной оси \bar{s}_1 . Максимум величины q_1 вдоль (6.17) достигается при $\tau = \tau_m : \text{tg}(2\tau_m) = 2(\bar{s}_2^0 + \bar{s}_3^0 - \bar{s}_1^0)/W$ и равен

$$q_{1\max} = (W^2 + 4(\bar{s}_2^0 + \bar{s}_3^0 - \bar{s}_1^0)^2)^{1/2} - W. \quad (6.18)$$

Аналогичные формулы справедливы для сепаратрис особых точек L_2 и L_3 , где нужно переставить индексы и положить $W = 0$.

Особые точки L_i вместе с их сепаратрисами представляют собой аппроксимацию колебательного режима Белинского — Лифшица — Халатникова [50]: траектория, идущая в окрестности сепаратрисы (6.17), попадает в окрестность некоторой неустойчивой особой точки множества L_i и затем движется вдоль выходящей из этой особой точки сепаратрисы типа (6.17) до попадания в окрестность новой неустойчивой особой точки множества L_j и т. д. Таким образом, вдоль траектории последовательно одна из трех величин q_1, q_2, q_3 оказывается много больше двух других. При этом формулы (6.17) показывают, что очередность максимумов величин q_1, q_2, q_3 не зависит от величины W (наличие электромагнитного поля) и является такой же, как в пустом пространстве ($W = 0$); следовательно, также справедлив закон смены «казнеровских показателей» [50]. Однако величина максимумов q_1 согласно (6.18) при наличии электромагнитного поля уменьшается; в случае сильного поля ($W \gg q_1$) имеем

$$q_{1\max}(W) \cong (q_{1\max}(0))^2/2W,$$

где $q_{1\max}(0)$ — соответствующий максимум q_1 в пустоте ($W = 0$).

Полное качественное исследование динамической системы (6.15) можно провести с помощью методов, применявшихся в § 6 главы II. Система (6.15) после преобразования в координаты

$$\begin{aligned} s_i &= \bar{s}_i/P, & y_i &= q_i/G, & w &= G^2/P^2, \\ G &= (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}, & P &= (\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2^2 + \bar{s}_3^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.19)$$

и замены времени $d\tau_2/d\tau_1 = P$ принимает вид

$$\dot{s}_i = w[-y_i(y_j + y_k - y_i) + s_i(y_\alpha s_\alpha(y_\beta + y_\gamma - y_\alpha))] + 2(\delta_i^1 - s_i s_1)H_2,$$

$$\dot{w} = 2w[w(y_\alpha s_\alpha(y_\beta + y_\gamma - y_\alpha)) - 2s_1 H_2 + 4\left(\sum_{\alpha=1}^3 s_\alpha - 2\sum_{\beta=1}^3 s_\beta y_\beta^2\right)],$$

$$\dot{y}_i = 8y_i(s_\alpha y_\alpha^2 - s_i),$$

$$\dot{G} = 4G\left(\sum_{\alpha=1}^3 s_\alpha - 2\sum_{\beta=1}^3 s_\beta y_\beta^2\right). \quad (6.20)$$

Здесь $H_2 = \frac{H_0}{P^2} = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 + \frac{1}{4} w \left(2 \sum_{i < j}^3 y_i y_j - 1 \right)$. Система

(6.20), так же как и система (4.9) главы II, определена на компактном многообразии S , выделенном условиями $H_2 \geq 0$, $y_i \geq 0$, $s_1 + s_2 + s_3 \leq 0$. На поверхности $H_2 = 0$ эти две системы, очевидно, совпадают. Поэтому система (6.20), согласно результатам § 6 главы II, имеет следующие множества особых точек, лежащие на уровне $H_2 = 0$: три окружности (ψ, i) и девять отрезков A_i , B_i , T_i . Нетрудно проверить, что других особых точек (в области $H_2 > 0$) у системы (6.20) нет. Поэтому все степенные асимптотики метрики при сжатии пространства соответствуют сепаратрисам особых точек T_i (особые точки (ψ, i) , A_i и B_i не имеют сепаратрис, входящих в них из физической области).

Покажем, не вычисляя собственных чисел в особых точках T_i , что в рассматриваемой задаче реализуется только таубовская асимптотика $q_1 \cong C_1 t^2$, $q_2 \equiv q_3 \rightarrow C_2 > 0$ при $t \rightarrow 0$, соответствующая особым точкам T_1 . Действительно, из условия $H = 0$ (см. (6.14)) следует $H_0/q_1 = (P_1^2 + A_1^2)/2 = W = \text{const}$. Отсюда получаем $y_1 = H_2 G/wW$. В таубовских асимптотиках имеем $G \rightarrow \text{const}$, $w \rightarrow \text{const}$, $H_2 \rightarrow 0$, поэтому $y_1 \rightarrow 0$, т. е. возможна только асимптотика T_1 . Такую асимптотику имеют точные решения ($q_2 \equiv q_1$), найденные в работе [93]; все остальные решения в рассматриваемой задаче при $t \rightarrow 0$ выходят на колебательный режим (соответствующие траектории системы (6.20) движутся вдоль сепаратрис трех окружностей особых точек (ψ, i)).

Отметим, что напряженности электрического и магнитного полей в лоренцевой системе отсчета имеют вид $E_1 = -P_1/\sqrt{q_2 q_3}$, $H_1 = A_1/\sqrt{q_2 q_3}$. Отсюда в силу существования интеграла $P_1^2 + A_1^2 = 2W$ следует, что для общего решения вблизи космологической особенности $E_1^2 + H_1^2 \rightarrow \infty$, в то время как для частных решений с $q_2 \equiv q_3$ напряженности E_1 и H_1 все время ограничены.

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Наряду с однородными космологическими моделями существует еще один важный класс решений уравнений Эйнштейна, для которого уравнения общей теории относительности сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, — класс автомодельных решений. Автомодельные сферически-симметричные решения в общей теории относительности впервые рассматривались в работе [101]. Уравнения Эйнштейна для этих решений преобразовывались к различному виду в [102, 103] и рассматривались в сопутствующей системе отсчета в [104, 105]. Автомодельные обобщения однородных космологических моделей были указаны в [106]. Классификация частично инвариантных решений уравнений Эйнштейна, включающая автомодельные решения, дана в работе [107]. В связи с проблемой образования нестационарных черных дыр автомодельные решения изучались в работе [108]; автомодельные решения, несингулярные внутри светового горизонта, исследовались в [109]. Методы, применявшиеся в перечисленных работах, позволили исследовать ряд свойств автомодельных решений, однако не дали полной картины динамики этих решений.

В данной главе проведено качественное исследование трехмерной динамической системы, описывающей автомодельные сферически-симметричные решения в общей теории относительности. Впервые обнаружено наличие радиальных колебаний газа в автомодельных решениях (этот эффект имеет аналог также и в классической теории; см. главу V); найдены автомодельные решения, у которых трехмерные пространственно-подобные сечения имеют ту же топологию, что и в решении Шварцшильда — Крускала.

§ 1. Система уравнений Эйнштейна для сферически-симметричных автомодельных решений

I. Сферически-симметричные автомодельные решения уравнений Эйнштейна являются четырехмерными многообразиями M^4 с эйнштейновской метрикой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, которые обладают трехмерной группой изометрий $SO(3)$, действующей с двумерными орбитами (сферами S^2) и одномерной группой преобразований

$$\Phi_\lambda: M^4 \rightarrow M^4,$$

при действии которой происходит растяжение метрики

$$\varphi_\lambda : ds^2 \rightarrow c(\lambda) ds^2, \quad c(\lambda_1 + \lambda_2) = c(\lambda_1) c(\lambda_2).$$

Автомодельные решения могут быть представлены в различных эквивалентных формах (см. ниже, § 3). В дальнейшем мы исследуем метрику автомодельных решений в конформно-статическом виде:

$$ds^2 = l^2 e^{2\tau} (\sigma e^{\nu(r)} d\tau^2 - \sigma e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2), \quad (1.1)$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi$ — стандартная метрика постоянной положительной кривизны $\kappa = +1$ на двумерной сфере S^2 , $\sigma = \pm 1$, l — константа с размерностью длины, переменные τ , r безразмерны. В автомодельном решении (1.1) группа φ_μ действует сдвигами по τ . Одновременно с (1.1) можно рассмотреть автомодельные решения с метрикой $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sh}^2 \theta d\varphi^2$ постоянной отрицательной кривизны $\kappa = -1$ и с метрикой $d\Omega^2 = d\theta^2 + d\varphi^2$ нулевой кривизны $\kappa = 0$.

Предположим, что в автомодельном решении (1.1) материя имеет гидродинамический тензор энергии-импульса

$$T_{ij} = (p + \varepsilon) u_i u_j - p g_{ij}, \quad (1.2)$$

где плотность энергии ε , давление p и 4-скорость материи u^i имеют вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}(r) e^{-2\tau}, \quad p = k\varepsilon, \quad 0 \leq k < 1, \quad (1.3)$$

$$(u^0, u^1, u^2, u^3) = e^{-\tau} \left[\left(\frac{\sigma e^{-\nu}}{1-u^2} \right)^{1/2}, \quad u \left(\frac{\sigma e^{-\lambda}}{1-u^2} \right)^{1/2}, \quad 0, \quad 0 \right].$$

Здесь ε_0 — константа с размерностью плотности энергии. При $\sigma = +1$ функция $u(r) = v(r)/c$, $|u| < 1$, а при $\sigma = -1$ имеем $u(r) = c/v(r)$, $|u| > 1$, где $v(r)$ — трехмерная радиальная скорость материи.

Уравнения Эйнштейна для автомодельных решений имеют вид (здесь $\kappa_0 = 8\pi k/c^4$)

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R = \kappa_0 T_0^0:$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + 3e^{-\nu} + \frac{\kappa}{r^2} = \kappa_0 \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \frac{1+ku}{1-u^2}, \quad (1.4)$$

$$R_1^1 - \frac{1}{2} R = \kappa_0 T_1^1:$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + e^{-\nu} + \frac{\kappa}{r^2} = -\kappa_0 \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \frac{u^2+k}{1-u^2}, \quad (1.5)$$

$$R_2^2 - \frac{1}{2} R = \kappa_0 T_2^2:$$

$$-\frac{1}{4} e^{-\lambda} \left(2v'' + v'^2 - \frac{2}{r} \lambda' + \frac{2}{r} v' - v' \lambda' \right) + e^{-\nu} = -\kappa_0 k \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}, \quad (1.6)$$

$$R_{01} = \kappa_0 T_{01}: \quad v' = -(1+k) \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \frac{\sigma u}{1-u^2} e^{(\nu+\lambda)/2}. \quad (1.7)$$

II. Рассмотрим систему двух уравнений Эйнштейна:

$$R_0^0 - R_1^1 = \kappa_0 (T_0^0 - T_1^1), \quad R_2^2 - \frac{1}{2} R = \kappa_0 T_2^2 \quad (1.8)$$

и одного уравнения гидродинамики $T_{1;k}^k = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T_1^1}{\partial r} + 2T_1^0 - \frac{1}{2} v' T_0^0 - \frac{1}{2} \lambda' T_1^1 - \frac{2}{r} T_2^2 = 0, \quad (1.9)$$

где $\sqrt{g} = r^2 e^{(v+\lambda)/2}$. Уравнения (1.8), (1.9) после исключения $\varepsilon_0 \bar{\varepsilon}$ из уравнения (1.7) и перехода к новым переменным

$$\zeta = \ln r, \quad Q = r e^{(\lambda-v)/2}, \quad w = \frac{dv}{d\zeta} = v' r \quad (1.10)$$

определяют замкнутую трехмерную динамическую систему

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\zeta} &= \dot{Q} = Q \left(1 - w - Q^2 - wQ \frac{1+u^2}{2u} \right), \\ \dot{w} &= w \left\{ -1 - w - Q^2 - Q \left[\frac{w(1+u^2)}{2u} + \frac{2k(1-u^2)}{(1-k)u} + \frac{1+u^2}{u} \right] \right\}, \\ \dot{u} &= -\frac{1-u^2}{u^2-k} \left[\frac{wu(1-k)}{2} - 2ku + Q \frac{u^2(1-k) - k(1+3k)}{(1+k)} \right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Траектории динамической системы (1.11) полностью определяют автомодельное решение (1.1). Уравнение Эйнштейна (1.5) после исключения $\varepsilon_0 \bar{\varepsilon}$ из уравнения (1.7) определяет связь, сохраняющуюся в силу системы (1.11):

$$V = w + 1 - Q^2 + wQ \frac{k+u^2}{(1+k)u} = \sigma \kappa e^\lambda \quad (1.12)$$

(здесь константа $\kappa = \pm 1$, 0 равна постоянной кривизне двумерной метрики $d\Omega^2$; см. (1.1)).

Динамическая система (1.11) определена в области $Q > 0$, $\text{sign } w = -\text{sign } u$ (последнее условие следует из (1.7) в силу положительности ε). Согласно (1.12), система (1.11) в области $\sigma V > 0$ описывает сферически-симметричные решения ($\kappa = +1$) в области $\sigma V < 0$ — решения с двумерной метрикой $d\Omega^2$ отрицательной кривизны $\kappa = -1$ (группа симметрий $SL(2, R)$), а на инвариантном многообразии $V = 0$ — решения с $\kappa = 0$ (плоская симметрия). Два вида метрики (1.1) ($\sigma = \pm 1$) описываются системой (1.11) в различных областях: при $\sigma = +1$ имеем $|u| < 1$, а при $\sigma = -1$ имеем $|u| > 1$.

Система (1.11) на инвариантных многообразиях $u = \delta = \pm 1$ имеет первый интеграл

$$K = \frac{wQ}{(1+w-\delta Q)^2} \quad (1.13)$$

и может быть проинтегрирована в явном виде. Эта система описывает направленные потоки нейтрино (при классическом задании тензора энергии-импульса $T_0^0 = -T_1^1 = -\delta T_{01} e^{-(\nu+\lambda)/2}$; см. [71]).

§ 2. Исследование динамической системы

I. Условия на разрывах. Существенным свойством автомодельных решений в общей теории относительности, так же как и в классической газовой динамике, является наличие в них ударных волн. На языке динамической системы (1.11) возникновение ударных волн в автомодельных решениях обусловлено наличием поверхности непродолжимости решений L_{\pm} : $u = \pm k^{1/2}$: с двух сторон от этой поверхности ($u^2 - k < 0$ и $u^2 - k > 0$) векторное поле системы (1.11) направлено в противоположные стороны (и в пределе $|u| \rightarrow k^{1/2}$ перпендикулярно поверхности L_{\pm}). Вследствие такой непродолжимости некоторые решения могут быть определены при всех r только с введением разрыва — ударной волны.

Положение фронта ударной волны определяется некоторым постоянным значением координаты r . Поэтому система координат (1.4) является системой, сопутствующей ударной волне. На фронте ударной волны сшиваются решения системы (1.11), расположенные по разные стороны от поверхности непродолжимости решений L_{\pm} , т. е. дозвуковое решение ($|u|^2 < k = dp/d\varepsilon$) сшивается со сверхзвуковым ($|u|^2 > k^{1/2}$). Можно рассмотреть более общую ситуацию, когда в области за ударной волной материя имеет уравнение состояния $p = k_1 \varepsilon$, а в области перед ударной волной — уравнение состояния $p = k_2 \varepsilon$, $0 \leq k_2 \leq k_1$. Наиболее интересны случаи $k_2 = k_1$ и $k_2 = 0$. Предельные значения параметров с двух сторон разрыва связаны следующими естественными условиями: 1) коэффициенты метрики ν, λ, r всюду непрерывны; 2) на разрыве выполнены законы сохранения (см. [110]): $[T_i^k n_k] = 0$ (здесь $n_k = (0, 1, 0, 0)$ — вектор, ортогональный к фронту волны). Эти условия приводят к следующим равенствам (индексы 1 и 2 определяют параметры по разные стороны разрыва, в дозвуковой и сверхзвуковой областях соответственно):

$$\begin{aligned} [T_1^1] = 0: & \frac{\bar{\varepsilon}_1 (u_1^2 + k_1)}{1 - u_1^2} = \frac{\bar{\varepsilon}_2 (u_2^2 + k_2)}{1 - u_2^2}, \\ [T_0^1] = 0: & \frac{(1 + k_1) \bar{\varepsilon}_1 u_1}{1 - u_1^2} = \frac{(1 + k_2) \bar{\varepsilon}_2 u_2}{1 - u_2^2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отсюда получаем соотношения

$$\frac{(1 + k_1) u_1}{u_1^2 + k_1} = \frac{(1 + k_2) u_2}{u_2^2 + k_2}, \quad \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\bar{\varepsilon}_2} = \frac{1 + k_2}{1 + k_1} \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{1 - u_1^2}{1 - u_2^2}, \quad (2.2)$$

определяющие $u_2, \bar{\varepsilon}_2$ по найденным из решения $u_1, \bar{\varepsilon}_1$, причем из

двух значений u_2 (при $k_2 \leq k_1$) выбирается сверхзвуковое ($u_2^2 > k_2$). Из условия $|u_2| < 1$ и (2.2) следует, что $|u_1| > k_1$. При $k_2 = k_1$ имеем $u_1 u_2 = k_1$, при $k_2 = 0$ $u_2 = (u_1^2 + k_1)/u_1(1 + k_1)$. Из выражения (1.12), непрерывности функций v , λ , r и первого соотношения (2.2) следует, что на фронте ударной волны функции w (и $v' = wr$) непрерывны. Таким образом, функции v , λ , r , v' , w , Q на разрыве непрерывны, а скачок u и ε определяется из (2.2).

Перейдем к исследованию динамической системы (1.11) в области $|u| < 1$. Поведение решений в этой области представляет наибольший интерес, поскольку именно здесь в решениях возникают разрывы, соответствующие ударным волнам.

II. Непрерывность решений при $0 < u < 1$. Сферически-симметричные автомодельные решения в области $0 \leq u \leq 1$ описываются траекториями динамической системы (1.11), лежащими в области $S_0: Q \geq 0, w \leq 0, V \geq 0, 0 \leq u \leq 1$. Из вида функции V (1.12) легко следует, что эта область является ограниченной: здесь $0 \leq Q \leq 1, -1 \leq w \leq 0$.

Покажем, что все траектории в области S_0 при некотором конечном $r = r_1$ выходят из поверхности L_+ ($u = k^{1/2}$). В области $0 < u < k^{1/2}$ это следует из того, что в силу системы (1.11) $\dot{u} < 0$ и $|\dot{u}| \rightarrow \infty$ на L_+ . В области $k^{1/2} < u < 1$, в силу системы (1.11), имеем $\dot{w} > -w > 0$, поэтому, в силу ограниченности области S_0 , все траектории при некотором конечном r выходят из поверхности L_+ . Вследствие этого в области S_0 даже с введением разрыва нельзя получить ни одного решения, определенного при $r \rightarrow 0$. Поэтому решения в области S_0 ($0 < u < 1$) не имеют физического смысла и в дальнейшем не будут рассматриваться.

III. Разрешение особенностей динамической системы при $-1 \leq u \leq 0$. В рассматриваемом случае автомодельные сферически-симметричные решения определены в области $S_1: Q \geq 0, w \geq 0, V \geq 0, -1 \leq u \leq 0$. Область S_1 неограничена по w ; при $-k < u < 0$ из условия $V > 0$ получаем $Q < 1$, а при $-1 < u < -k$ получаем $Q < (1 + k) |u| (k + u^2)^{-1}$. На плоскости $u = 0$ условие $V \geq 0$ вырезает отрезок l_1 ($u = w = 0, 0 \leq Q \leq 1$) и полупрямую l_2 ($u = Q = 0, w \geq 0$), на которых динамическая система (1.11) становится сингулярной. Для исследования динамической системы (1.11) в области S_1 мы преобразуем эту систему в систему, определенную на некотором замкнутом трехмерном многообразии S с границей Γ и имеющую только невырожденные особые точки. Построение многообразия S осуществляется с помощью следующих замен координат:

1. Разрешение сингулярных линий l_1 и l_2 :

$$q = \frac{Q}{u}, \quad u, \quad w, \quad \zeta; \quad (2.3)$$

$$Q, \quad u_1 = \frac{u}{Q}, \quad w, \quad \frac{d\zeta_1}{d\zeta} = -\frac{Q}{u} > 0. \quad (2.4)$$

2. Пополнение многообразия S_1 на бесконечности по координате w :

$$q = \frac{Q}{u}, \quad u, \quad v = \frac{1}{w}, \quad \frac{d^2 x_2}{d\xi^2} = w. \quad (2.5)$$

Замкнутое трехмерное многообразие S покрыто системами координат (1.10), (2.3) — (2.5) и выделяется в них следующими условиями:

$$\begin{aligned} Q, w, v &\geq 0, & u, u_1, q &\leq 0, \\ V(Q, u, w) &\geq 0, & -1 &\leq u \leq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Граница Γ многообразия S состоит из шести компонент Γ_i ($i = 1, \dots, 6$). Условия, определяющие компоненты границы и системы координат, продолжающиеся на Γ_i , имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : v &= 0 \quad (2.5); & \Gamma_2 : u &= -1 \quad (1.10); \\ \Gamma_3 : u &= 0 \quad (2.3) - (2.4); & \Gamma_4 : V &= 0 \quad (1.10); \\ \Gamma_5 : Q &= 0 \quad (1.10), (2.3); & \Gamma_6 : w &= 0 \quad (1.10), (2.4). \end{aligned}$$

Укажем вид динамической системы (1.11) после преобразования в координаты (2.3) — (2.5). Система (1.11) в координатах (2.3) и переменной ξ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q} &= q \left[1 - w - q^2 u^2 - wq \frac{1 + u^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - u^2}{u^2 - k} \left\{ \frac{w}{2} (1 - k) - 2k + \frac{1}{1 + k} q [u^2 (1 - k) - k (1 + 3k)] \right\} \right], \\ \dot{w} &= w \left[-1 - w - q^2 u^2 - wq \frac{1 + u^2}{2} - 2q \frac{k}{1 + k} (1 - u^2) - \right. \\ &\quad \left. - q (1 + u^2) \right], \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\dot{u} = -u \frac{1 - u^2}{u^2 - k} \left\{ \frac{w}{2} (1 - k) + \frac{1}{1 + k} q [u^2 (1 - k) - k (1 + 3k)] - 2k \right\}.$$

Система (1.11) в координатах (2.4) и переменной ξ_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= Q \left(u_1 (-1 + w + Q^2) + w \frac{1 + u_1^2 Q^2}{2} \right), \\ \dot{u}_1 &= u_1 \left[\frac{1 - u_1^2 Q^2}{u_1^2 Q^2 - k} \left(\frac{w u_1 (1 - k)}{2} - 2k u_1 + \frac{u_1^2 Q^2 (1 - k) - k (1 + 3k)}{1 + k} \right) - \right. \\ &\quad \left. - u_1 (-1 + w + Q^2) - w \frac{1 + u_1^2 Q^2}{2} \right], \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\dot{w} = w \left[u_1 (1 + w + Q^2) + \frac{w (1 + u_1^2 Q^2)}{2} + \frac{2k (1 - u_1^2 Q^2)}{1 + k} + 1 + u_1^2 Q^2 \right].$$

Система (1.11) в координатах (2.5) и переменной ζ_2 имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_2 &= q \left[v - 1 - vq^2u^2 - q \frac{1+u^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-u^2}{u^2-k} \left\{ \frac{1-k}{2} + \frac{1}{1+k} vq (u^2(1-k) - k(1+3k)) - 2vk \right\} \right], \\ \dot{v} &= v \left[1 + v + vq^2u^2 + q \frac{1+u^2}{2} + 2qv \frac{k}{1+k} (1-u^2) + \right. \\ &\quad \left. + qv(1+u^2) \right], \quad (2.9) \\ \dot{u} &= -u \frac{1-u^2}{u^2-k} \left[\frac{1-k}{2} + \frac{1}{1+k} qv (u^2(1-k) - k(1+3k)) - 2vk \right]. \end{aligned}$$

Динамические системы (1.11), (2.7) — (2.9) в координатах (1.10), (2.3) — (2.5) определяют динамическую систему на многообразии S , которая гладко продолжается на границу Γ и имеет только невырожденные особые точки.

IV. Исследование особых точек динамической системы на многообразии S . Рассматриваемая динамическая система имеет восемь изолированных особых точек:

$$\begin{aligned} A (v = 0, \quad q = -1, \quad u = 0), \quad B (v = q = u = 0), \\ C (w = q = u = 0), \\ G (v = q = 0, \quad u = -1), \quad H (w = q = 0, \quad u = -1), \\ Z_1 (w = u = 0, \quad q = -3(1+k)/(1+3k)), \\ Z_2 (Q = 1, \quad w = 0, \quad u = u_2 = \\ = [k(1-k) - \{k^2(1+k) + k(1-k)(1+3k)\}^{1/2}]/(1-k), \\ Z_3 (u = 0, \quad q = -1, \quad w = 4k/(1+k)) \end{aligned}$$

и три линии особых точек:

$$\begin{aligned} l_1 (u_1 = w = 0, \quad 0 \leq Q \leq 1), \quad DE (Q = 1, \quad u = -1, \quad 0 \leq w \leq \infty), \\ I (u = -k^{1/2}, \quad w(1-k) + 8Qk^{3/2}(1+k)^{-1} = 4k). \end{aligned}$$

Все особые точки лежат на различных компонентах границы Γ (кроме линии I , лежащей на поверхности непродолжимости решений L_-). Многообразие S вместе с особыми точками динамической системы и их сепаратрисами изображено на рис. 21.

Особые точки A, B, C, G, H лежат в углах границы Γ и являются неустойчивыми (седловыми); все их сепаратрисы лежат на различных компонентах границы Γ , и им не отвечает никакие точные физические решения.

Особые точки на линии l_1 являются отталкивающими; их собственные числа имеют вид $\lambda_{u_1} = \lambda_w = \frac{1+3k}{1+k}$, $\lambda_Q = 0$. Вдоль каждой сепаратрисы, выходящей из линии особых точек l_1 , параметр r изменяется до некоторого конечного значения $r = r_0$, причем $u(r_0) = w(r_0) = 0$. При $r < r_0$ соответствующие решения

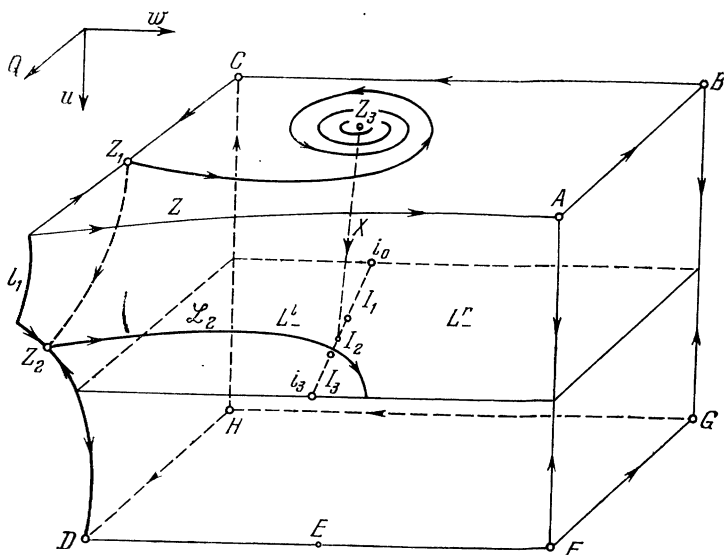


Рис. 21. Общее расположение особых точек и сепаратрис динамической системы (1.11) на замкнутом многообразии S .

могут быть гладко продолжены в области $u > 0$, однако в этой области решения, вследствие возникновения непродолжимости, не имеют физического смысла. Решения, соответствующие сепаратрисам особых точек l_1 , определены при $r \geq r_0$ и описывают образование расширяющейся пустоты внутри газа. Действительно, поверхность $r = r_0$ является сохраняющейся при движении границей газа, поскольку $u(r_0) = 0$; решение при $r < r_0$ может быть сшито (с сохранением непрерывности метрики) с пространством Минковского, метрика которого в координатах (1.1) имеет вид

$$ds^2 = e^{2\tau} \left(C_1 d\tau^2 - \frac{C_1}{C_1 + r^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \right).$$

При этом на границе пустоты плотность энергии ε и давление p имеют разрыв — так же, как и в решениях с расширяющейся пустотой в классической газовой динамике [7]. Для придания физического смысла этим решениям необходимо предположить (так же, как и в классической газовой динамике; см. [7]), что газ вытес-

няется изнутри некоторым сферическим поршнем, уравновешивающим ненулевое давление на внутренней границе.

Особые точки на прямой DF имеют следующие собственные числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = w - 2$, $\lambda_3 = 0$. Таким образом, отрезок DE ($0 \leq w < 2$) состоит из притягивающих особых точек, а отрезок EF ($2 < w \leq \infty$) — из отталкивающих. Все траектории системы (1.11) на компоненте границы Γ_2 ($u = -1$) начинаются при некотором $w = w_0$ на отрезке EF и заканчиваются при $w = 4/w_0$ на отрезке DE — это следует из существования первого интеграла $K = wQ(1 + w + Q)^{-2}$ (см. (1.13)). Траектории системы (1.11), близкие к компоненте границы Γ_2 ($u \approx -1$), ведут себя аналогичным образом. Метрика, соответствующая траекториям, входящим в особые точки DE (при $r \rightarrow \infty$) или EF (при $r \rightarrow 0$), оказывается неполной и может быть гладко продолжена в синхронной системе отсчета (см. ниже, § 3).

Линия особых точек I разбивает поверхность непродолжимости решений L_- ($u = -k^{1/2}$) на левую и правую части: L_-^l , L_-^r (см. рис. 21). Левая часть L_-^l выбрасывает траектории в многообразии S (в окрестности L_-^l имеем $\dot{u} > 0$ при $u > -k^{1/2}$ и $\dot{u} < 0$ при $u < -k^{1/2}$), а правая часть L_-^r притягивает траектории из многообразия S . При этом в обоих случаях траектории пересекают поверхность L_- при конечном значении r .

Для изучения поведения траекторий в малой окрестности линии I сделаем следующую замену координат и (немонотонную) замену переменной ζ :

$$\alpha = \frac{1}{Q}, \quad \beta = \frac{(1-k)w}{2Q} - \frac{2k}{Q}, \quad \frac{d\tau_1}{d\zeta} = -\frac{Q}{u^2 - k}. \quad (2.10)$$

Линия I ($\beta = -4k^{3/2}(1+k)^{-1}$, $u = -k^{1/2}$, $\alpha > 0$) состоит из невырожденных особых точек системы (1.11) в координатах (2.10). Собственные числа полученной системы в этих особых точках имеют вид

$$\lambda_{\pm} = -k^{1/2}(1-k) \pm k^{1/2}(1-k)(1+2Z_0(1-k)^{-1})^{1/2}, \quad \lambda_3 = 0, \\ Z_0 = \frac{2k(1+3k)}{1-k} \alpha^2 - \frac{2k}{1-k^2} [(1+k)^3 + 2k(3+k^2)] \alpha + \\ + \frac{16k^2(1+k^2)}{(1+k)^2(1-k)} + 6k. \quad (2.11)$$

Линия особых точек I внутри многообразия S разбита на три отрезка: $I_1: \infty > \alpha > \alpha_1$, $I_2: \alpha_1 > \alpha > \alpha_2$, $I_3: \alpha_2 > \alpha > \alpha_3$, где α_1 и α_2 — наибольшие корни квадратных уравнений $Z_0(\alpha_1) = 0$, $Z_0(\alpha_2) = -(1-k)/2$, α_3 является координатой точки i_3 пересечения линии I с компонентой границы Γ_4 ($V = 0$, рис. 22, $k = 4$).

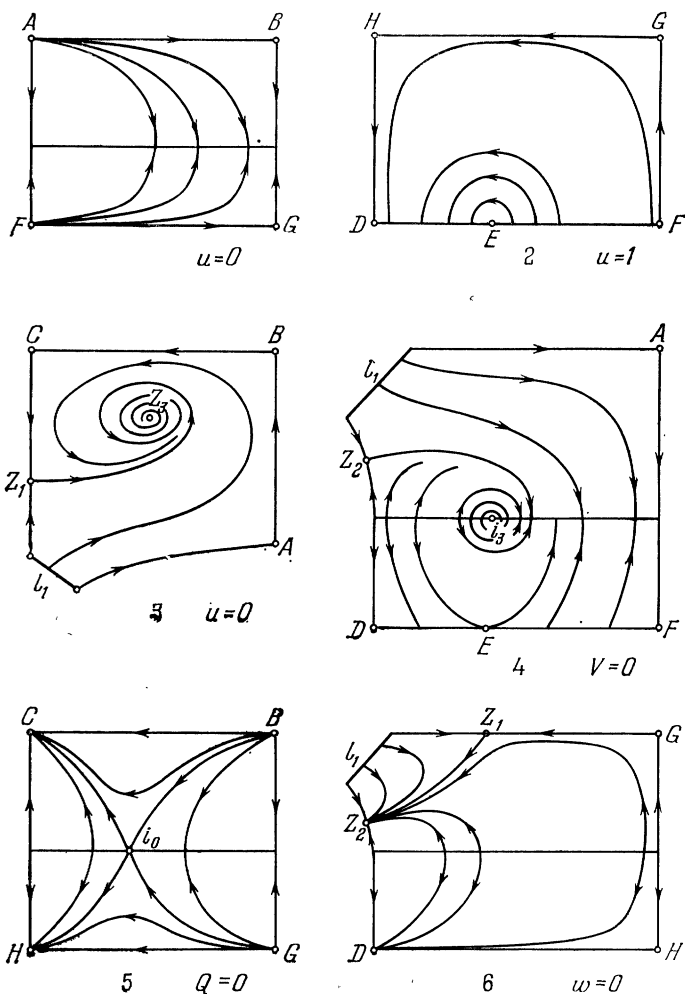


Рис. 22. Движение траекторий динамической системы на компонентах границы Γ_k (цифры под рисунками соответствуют значениям $k = 1, \dots, 6$).

Из (2.11) следует, что особые точки отрезка I_1 являются неустойчивыми седлами, особые точки отрезка I_2 являются притягивающими узлами, а особые точки отрезка I_3 являются притягивающими фокусами. Отрезок I_1 пересекается с компонентой границы Γ_5 ($Q = 0$) в точке i_0 ($\alpha = \infty$) (см. рис. 22, $k = 5$).

Возвращаясь к исходным координатам w, Q, u , получаем, что из дозвуковой области многообразия S ($|u| < k^{1/2}$) в отрезок I_1 входит двумерная сепаратриса L'_2 и выходит (из I_1) двумерная

сепаратриса L'_1 (рис. 23). В отрезок I_2 входит трехмерная сепаратриса L . При этом имеется двумерная сепаратриса L_2 , являющаяся гладким продолжением L'_2 , соответствующая собственным числам $\lambda_-(\alpha)$; все остальные входящие в отрезок траектории касаются двумерной сепаратрисы L_1 , соответствующей собственным числам $\lambda_+(\alpha)$. Во всех случаях при вхождении траектории в отрезок I параметр $\zeta = \ln r$ остается конечным.

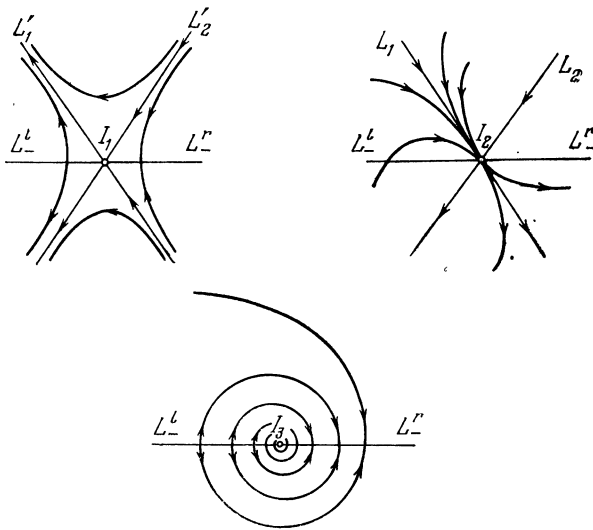


Рис. 23. Качественная картина поведения траекторий динамической системы (1.11) в окрестности особых точек на отрезках I_1, I_2, I_3 .

Особые точки Z_1, Z_2, Z_3 и их сепаратрисы имеют наибольшее физическое значение. Динамическая система на многообразии S имеет в этих особых точках следующие собственные числа (индекс внизу указывает соответствующее собственное направление):

$$\begin{aligned}
 Z_1: \lambda_q &= -3, & \lambda_w &= 2, & \lambda_u &= 1; \\
 Z_2: \lambda_Q &= -2, & \lambda_w &= -\frac{(1-k)u_2}{k} > 0, \\
 \lambda_u &= \frac{2(1-u_2^2)(u_2(1-k) - k(1+k))}{(k-u_2^2)(1+k)} < 0; & & & (2.12) \\
 Z_3: \lambda_{q, w} &= \frac{-(1+3k) \pm i(7+42k-k^2)^{1/2}}{2(1+k)}, \\
 \lambda_u &= \frac{1-k}{1+k}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, особые точки Z_1 и Z_2 являются неустойчивыми седлами; особая точка Z_3 (также неустойчивая) на компоненте границы Γ_3 ($u = 0$) является притягивающим фокусом и имеет одномерную выходящую из нее внутрь многообразия S сепаратрису X .

Все траектории на компонентах границы Γ_6 ($w = 0$) (при $0 > u > -k^{1/2}$) и Γ_3 входят в притягивающие (на этих компонентах границы) особые точки Z_2 и Z_3 соответственно. На компоненте границы Γ_6 это следует из того, что $\dot{Q} > 0$ на Γ_6 . На компоненте границы Γ_3 ($u = 0$) это следует из того, что динамическая система (2.7) при $u = 0$ не имеет предельных циклов. Действительно, при $u = 0$ на линии $q = -(1+k)/k$, в силу системы (2.7), имеем $\dot{q} = (1+k)/k^2$, поэтому циклы могут находиться только в области $q > -(1+k)/k$ (поскольку в этой области находится особая точка Z_3 ($q = -1$)). Система (2.7) при $u = 0$ после преобразования в координаты q , $V_1 = 1 + w(1 + qk/(1+k))$ (в области $q > -(1+k)/k$, имеем $V_1 > 1$) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{q} &= q \left[3 + \frac{1+k}{2k} - \frac{1+k}{2k} V_1 + \frac{1+3k}{1+k} q \right] = P, \\ \dot{V}_1 &= -\frac{V_1(V_1-1)}{1+q(k/(1+k))} (1+q) = Q. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Система (2.13) в области $V_1 > 1$ (а следовательно, и динамическая система на компоненте границы Γ_3) не имеет предельных циклов в силу критерия Дюлака — Бендиксона, поскольку справедливо тождество

$$\frac{\partial fP}{\partial q} + \frac{\partial fQ}{\partial V_1} = -\frac{1+3k}{(1+k)V_1(V_1-1)} < 0,$$

где $f = (qV_1(1-V_1))^{-1}$.

Качественное поведение динамической системы на компонентах границы Γ_k показано на рис. 22 ($k = 1, \dots, 6$). При этом построении использовано доказанное выше отсутствие предельных циклов на компоненте границы Γ_3 , наличие простых монотонных функций на компонентах границы $\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ и наличие интеграла (1.13) динамической системы на компоненте границы Γ_2 .

Вычисление собственных чисел (2.12) показывает, что из особой точки Z_1 выходит некоторая двумерная сепаратриса Z . Одномерные сепаратрисы, получаемые пересечением Z с компонентами границы Γ_6 и Γ_3 , соединяют особую точку Z_1 с Z_2 и Z_3 . Поэтому одномерная сепаратриса \mathcal{L}_2 , выходящая из особой точки Z_2 (см. рис. 22, $k = 4$), является пересечением сепаратрисы Z с компонентой границы Γ_4 ($V = 0$) (сепаратрисе \mathcal{L}_2 отвечает некоторое точное решение с плоской симметрией), а одномерная сепаратриса X , выходящая из особой точки Z_3 , является предельной линией, на которую наматывается двумерная сепаратриса Z (см. рис. 21).

Сепаратриса X , выходящая из особой точки Z_3 , интегрируется явно: на этой траектории

$$Q = -u = \frac{c_1 r^{1-\alpha}}{|c_1^2 r^{2(1-\alpha)} - 1|^{1/2}}, \quad w = 2\alpha, \quad \alpha = \frac{2k}{1+k}. \quad (2.14)$$

Траектории X отвечает следующее точное статическое решение уравнений Эйнштейна, найденное впервые Оппенгеймером и Волковым (см. [111, 112]):

$$ds^2 = R^{2\alpha} dt^2 - A dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.15)$$

где $A = (1 + 6k + k^2)(1 + k)^{-2}$, плотность энергии $\varepsilon = 4k[\kappa_0(1 + 6k + k^2)R^2]^{-1}$, давление $p = k\varepsilon$. Автомодельной переменной в решении (2.15) является $\mu = tR^{\alpha-1}$. Связь автомодельных переменных μ и r дается выражением

$$r(\mu) = \frac{1}{c_1} \left| 1 - \frac{(\alpha-1)^2}{A} \mu^2 \right|^{1/(2\alpha-2)}.$$

Одна сепаратриса, выходящая из особой точки Z_1 (и принадлежащая двумерной сепаратрисе Z), также интегрируется явно: на этой траектории

$$Q = \frac{u}{\beta-1-\beta u^2}, \quad w = -\frac{2\beta u^2}{\beta-1-\beta u^2}, \quad u = (\beta-1)\mu, \quad (2.16)$$

$$r(\mu) = C_2 \mu (1 - (\beta-1)^2 \mu^2)^{1/(2\beta-2)}, \quad \beta = \frac{2}{3(1+k)}.$$

Траектория (2.16) соответствует плоскому решению Фридмана

$$ds^2 = dt^2 - t^{2\beta} (dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)), \quad \varepsilon = \frac{c_0}{t^2}, \quad (2.17)$$

которое при всех k является автомодельным с автомодельной переменной $\mu = Rt^{\beta-1}$. Связь автомодельных переменных μ и r дается (2.16). Все остальные сепаратрисы, выходящие из особой точки Z_1 , описывают, таким образом, некоторые возмущения плоского решения Фридмана. Все эти решения продолжаются до центра симметрии и имеют следующую асимптотику при $r \rightarrow 0$ (здесь $T = \exp \tau$):

$$t^{-2} ds^2 \approx \left(1 + \frac{c_1}{2} r^2\right) dT^2 - T^2 \left[\left(1 + \left(\frac{c_1}{1+3k} - 1\right) r^2\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.18)$$

$$u \approx -\frac{1+3k}{3(1+k)} r, \quad \varepsilon \approx \frac{3c_1}{1+3k} \frac{1}{T^2}.$$

Очевидно, что решения с асимптотикой (2.18) регулярны и в центре симметрии $r = 0$.

V. Гравитационный радиус вещества в автомодельных решениях. Функция гравитационного радиуса r_g для сферически-симметричных решений уравнений Эйнштейна определяется следующим выражением [73, 108]:

$$r_g = R \left(1 + g^{ij} \frac{\partial R}{\partial x^i} \frac{\partial R}{\partial x^j} \right), \quad (2.19)$$

где функция R определяет радиус двумерной сферы S^2 . Для конформно-статической метрики (1.1) имеем $R = re^v$; гравитационный радиус r_g принимает вид

$$r_g = R (1 + \sigma e^{-\lambda} (r^2 e^{\lambda-v} - 1)). \quad (2.20)$$

После подстановки в это выражение формул (1.10) и (1.12) получаем

$$\frac{r_g}{R} = \frac{w(1 + Q(k + u^2)/(1 + k)u)}{w(1 + Q(k + u^2)/(1 + k)u) + 1 - Q^2}. \quad (2.21)$$

По определению, вещество находится вне гравитационного радиуса, если $r_g/R < 1$, и под гравитационным радиусом, если $r_g/R > 1$. Согласно (2.21), выражение $r_g/R > 1$ в двух случаях: в области $-1 < u < 0$ ($\sigma = +1$, $V > 0$; см. (1.12)) при $Q > 1$ (для этого необходимо, чтобы $-1 < u < -k$); в области $|u| > 1$ ($\sigma = -1$, $V < 0$) при $Q < 1$.

В особой точке Z_1 ($w = u = Q = 0$) имеем $r_g/R = 0$; в особой точке Z_3 и на всей сепаратрисе X (2.14) (т. е. для статического решения (2.15)) получаем $r_g/R = 4k(1 + 6k + k^2)^{-1} < 1$; в особой точке Z_2 выражение (2.21) имеет неопределенность. На инвариантной плоскости $u = -1$ выражение (2.21) приобретает вид $r_g/R = w/(w + 1 + Q)$. Следовательно, для всех траекторий системы (1.11), движущихся в окрестности плоскости $u = -1$, имеем $r_g/R < 1$, т. е. в соответствующих автомодельных решениях вещество находится вне гравитационного радиуса.

§ 3. Преобразование автомодельных решений в различных координатах

I. Автомодельные сферически-симметричные метрики могут быть представлены, кроме конформно-статического вида (1.1), также в виде

$$ds^2 = \exp \left(v_0 \left(\frac{ct}{R} \right) \right) c^2 dt^2 - \exp \left(\lambda_0 \left(\frac{ct}{R} \right) \right) dR^2 - R^2 \exp \left(\mu_0 \left(\frac{ct}{R} \right) \right) d\Omega^2, \quad (3.1)$$

где функции v_0 , λ_0 , μ_0 удовлетворяют произвольной (невырожден-

ной) связи $F(v_0, \lambda_0, \mu_0, ct/R) = 0$. При этом плотность энергии ε и 4-скорость материи u^i определяются формулами

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\bar{\varepsilon}(ct/R)}{R^2}, \quad (3.2)$$

$$(u^0, u^1, u^2, u^3) = \left(\frac{\exp(-v_0/2)}{(1-v^2)^{1/2}}, v \frac{\exp(-\lambda_0/2)}{(1-v^2)^{1/2}}, 0, 0 \right),$$

где $cv(ct/R)$ — трехмерная радиальная скорость материи. Автономные решения могут быть представлены в виде (3.1) также в сопутствующей системе отсчета (см., например, [104, 105]), где вместо связи $F = 0$ имеется связь $v = 0$. Часто применяется запись метрики автономных решений в виде

$$ds^2 = X \left(\frac{ct}{R} \right) c^2 dt^2 - Y \left(\frac{ct}{R} \right) dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.3)$$

(связь $F = \mu_0 = 0$) и в синхронной системе отсчета (связь $F = v_0 = 0$):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - U \left(\frac{ct}{R} \right) dR^2 - R^2 V \left(\frac{ct}{R} \right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.4)$$

II. Метрика (1.4) следующим образом отображается в синхронную метрику вида (3.4):

$$\frac{ct}{l} = f_1(\zeta) \exp \tau, \quad \frac{R}{l} = f_2(\zeta) \exp \tau, \quad \zeta = \ln r, \quad (3.5)$$

где функции f_1, f_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{df_1}{d\zeta} = Q (f_1^2 - \sigma \exp(v))^{1/2},$$

$$\frac{df_2}{d\zeta} = f_1 f_2 Q (f_1^2 - \sigma \exp(v))^{-1/2}. \quad (3.6)$$

При этом отображении коэффициенты метрики (3.4), радиальная скорость v и плотность энергии ε имеют вид

$$U = (f_1^2 - \sigma \exp(v)) f_2^2, \quad V = \exp(2\zeta) f_2^2,$$

$$v = \frac{(f_1^2 - \sigma \exp(v))^{1/2} + u f_1}{f_1 + u (f_1^2 - \sigma \exp(v))^{1/2}}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \sigma (1 - u^2) w f_2^2 \exp(-v)}{\beta Q (1 + k) u R^2}. \quad (3.7)$$

Пересчитаем с помощью формул (3.5) — (3.7) в синхронную систему (3.4) асимптотики решений, входящих при $\zeta \rightarrow +\infty$ в притягивающие особые точки на отрезке DE (см. § 2). Получим асимптотики

$$f_1 \approx \exp \zeta, \quad f_2 \approx C_2 \exp \zeta, \quad \frac{R}{ct} = \frac{f_2}{f_1} \approx C_2, \quad (3.8)$$

$$U \approx V \approx C_2^{-2}, \quad \varepsilon \rightarrow \text{const}, \quad v \rightarrow \text{const}.$$

Таким образом, при отображении (3.5) метрика (1.1) при $\xi \rightarrow \infty$ переходит в метрику (3.4), определенную в области $R/ct < C_2$, причем при $R/ct \rightarrow C_2$ метрика (3.4) невырождена. Поэтому решение гладко продолжается в области $ct/R < C_2^{-1}$. При этом автомодельная переменная ct/R становится времениподобной, а прямая $ct/R = C_2^{-1}$ является световой. Такое продолжение решения возможно до $ct/R = 0$, при этом все параметры решения остаются регулярными и новых качественных особенностей решения не возникает. В области $ct/R < C_2^{-1}$ метрика (3.4) соответствует метрике (1.1) с $\sigma = -1$, а соответствующая ей траектория системы (1.11) гладко продолжает в области $u < -1$ исходную траекторию.

Аналогично, в синхронной системе (3.4) продолжают метрики (1.1), соответствующие траекториям, выходящим при $\xi \rightarrow -\infty$ из отрезка отталкивающих особых точек EF .

III. Метрику (1.1) можно преобразовать к виду (3.3) с помощью преобразования

$$R = l \exp(\tau + \zeta), \quad \frac{ct}{l} = \exp(\tau + \varphi(\zeta)), \quad (3.9)$$

где $d\varphi/d\zeta = Q^2$. При этом компоненты метрики, скорость материи v и плотность энергии ε имеют вид

$$X\left(\frac{ct}{R}\right) = \frac{\sigma \exp(v - 2\varphi)}{1 - Q^2}, \quad Y\left(\frac{ct}{R}\right) = \frac{\sigma \exp(v - 2\zeta) Q^2}{1 - Q^2}, \quad (3.10)$$

$$v = \frac{Q + u}{1 + uQ}, \quad \varepsilon = -\frac{\varepsilon_0 \sigma (1 - u^2) w \exp(2\zeta - v)}{\beta Q (1 + k) u R^2}.$$

Отметим, что скорость v движения ударной волны (на которой $ct/R = \text{const}$) в системе отсчета (3.3) имеет вид $v/c = (Y/X)^{1/2} \cdot (R/ct) = Q$.

Асимптотика решений, отвечающих сепаратрисам Z при $\xi \rightarrow -\infty$, после преобразования (3.9) имеет вид (при $R/ct \rightarrow 0$)

$$ds^2 \approx \left(1 + \frac{d}{2} \left(\frac{R}{ct}\right)^2\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{d}{1+3k} \left(\frac{R}{ct}\right)^2\right) dR^2 - R^2 d\Omega^2, \quad (3.11)$$

$$vc \approx \frac{2}{3(1+k)} \frac{R}{t}, \quad \varepsilon \approx \frac{3\varepsilon_0 d}{\beta(1+3k)} \frac{1}{t^2}, \quad d = \text{const}.$$

При $\xi \rightarrow +\infty$ имеем $R/ct \rightarrow C_1$ — так же, как и при отображении (3.5). Метрика (3.3) может быть гладко продолжена в области $ct/R < C_1^{-1}$, однако при $ct/R \rightarrow 0$ эта метрика, вообще говоря, имеет нефизическую сингулярность с асимптотикой $X \approx (ct/R)^\nu$, $Y \rightarrow \text{const}$. Эта сингулярность устраняется с помощью указанного выше перехода (3.5) к синхронной системе отсчета.

§ 4. Задача о распаде равновесия звезды в общей теории относительности

I. Постановка задачи о вспышке звезды в классической газовой динамике [7] (см. также главу V) естественно переносится в общую теорию относительности. Предположим, что в начальный момент времени метрика пространства-времени и распределение газа внутри звезды являются статическими и имеют вид (2.15). Допустим, что в результате некоторого возмущения из центра симметрии при $t = 0$ выходит ударная волна, причем движение газа и метрика пространства-времени за фронтом ударной волны являются автомодельными. Решение задачи о распаде равновесия звезды в общей теории относительности состоит, таким образом, в отыскании автомодельных решений уравнений Эйнштейна, которые в силу условий (2.2) сшиваются на ударной волне со статическим решением (2.15).

Отметим, что, как показано в известной работе Опенгеймера и Волкова [111], уравнение состояния вещества $p = k\varepsilon$ применимо (при $k = 1/3$) в окрестности центра нейтронных звезд. Однако плотность вещества в центре устойчивой нейтронной звезды не может превышать величины $\rho_c^0 \approx 10^{15}$ г/см³, которой соответствует предел Опенгеймера — Волкова массы нейтронной звезды $M_{ОВ} \approx \approx 1,6 M_\odot$; см. [111, 73] (M_\odot — масса Солнца). Все равновесные конфигурации с центральной плотностью $\rho_c > \rho_c^0$ являются неустойчивыми [73], и, как показано в работах [113, 112], масса таких равновесных конфигураций (с учетом реального уравнения состояния вещества) является периодической функцией от ρ_c при $\rho_c \rightarrow \infty$ (график зависимости M от ρ_c , полученный впервые в работе [114], приведен на стр. 221, рис. 31). В частности, равновесная конфигурация с $\rho_c = \infty$, совпадающая в окрестности центра $r = 0$ с точным решением (2.15), при учете (во внешних слоях звезды) реального уравнения состояния ферми-газа нейтронов имеет конечную массу и является неустойчивой.

Рассматриваемые в данном параграфе автомодельные решения описывают, в связи с вышеизложенным, особый взрывной тип распада неустойчивого равновесия звезды. Эти решения можно рассматривать как модель эволюции звезды с массой $M < M_{ОВ}$ (такая звезда не обязана коллапсировать в «черную дыру»), однако имеющей центральную плотность $\rho_c > \rho_c^0$.

Аutomодельные решения вида (1.1), которые сшиваются через ударную волну со статическим решением (2.15) (в силу условий (2.2) при $k_1 = k_2$), описываются траекториями динамической системы (1.11), входящими при некотором $r = r_1$ в линию Y (в «дозвуковой» области $|u| < k^{1/2}$):

$$u = -\frac{k}{Q}, \quad w = 2\alpha, \quad \alpha = \frac{2k}{1+k}. \quad (4.1)$$

Линия Y при преобразовании (2.2): $w \rightarrow w$, $Q \rightarrow Q$, $u_1 \rightarrow k/u_2$ переходит в траекторию X (2.14), соответствующую статическому решению (2.15). Положение фронта ударной волны определяется условием $r = r_1$. Ударная волна является расходящейся: действительно, радиус ударной волны $R = r_1 \exp(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. При $r > r_1$ решение описывается отрезком траектории X и является статическим. Естественным параметром на линии Y является $M = Qk^{-1/2}$ — число Маха движения ударной волны ($M = v/(ck^{1/2})$) в системе отсчета (3.3).

II. В трехмерном многообразии S три линии — траектория X , линия Y и линия особых точек I — пересекаются в одной точке Y_1 ($Q = -u = k^{1/2}$, $w = 2\alpha$, $M = 1$) (пересечение этих трех линий в одной точке не является каким-либо вырождением, а необходимо следует из их определения). Исследуем поведение траекторий динамической системы (1.11) в окрестности особой точки Y_1 . Собственные числа (2.11) в особой точке Y_1 принимают вид

$$\lambda_+^0 = -\frac{2k^{1/2}(1-k)^2}{1+k}, \quad \lambda_-^0 = -\frac{4k^{3/2}(1-k)}{1+k}, \quad \lambda_3 = 0. \quad (4.2)$$

Соответствующие собственные векторы l_+ , l_- , l_3 (вектор l_3 касается линии особых точек I) и вектор l_4 , касательный к линии Y в точке Y_1 , в координатах α , u , β ($\alpha = 1/Q$, $\beta = \left(\frac{1-k}{2}w - 2k\right) / Q$; см. (2.10)) имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} l_+ &: \left(\frac{1}{k}, 1, -\frac{4k}{1-k} \right), \\ l_- &: \left(\frac{1-k}{2k^2}, 1, -2\frac{1-k}{1+k} \right), \\ l_3 &: (1, 0, 0), \\ l_4 &: \left(-\frac{1}{k}, 1, \frac{4k^2}{1+k} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В окрестности особой точки Y_1 имеются две инвариантные относительно системы (1.11) поверхности L_1 и L_2 , заполненные сепаратрисами особых точек I , отвечающими собственным числам λ_+ и λ_- . В точке Y_1 поверхность L_1 касается двумерной плоскости \mathcal{L}_+ , натянутой на векторы l_+ и l_3 , а поверхность L_2 касается двумерной плоскости \mathcal{L}_- , натянутой на векторы l_- и l_3 .

Плоскости \mathcal{L}_+ и \mathcal{L}_- пересекают плоскость u, β под прямым углом (поскольку вектор l_3 ортогонален этой плоскости). Поэтому взаимное расположение поверхностей L_1, L_2 и линии Y в окрестности точки Y_1 определяется расположением проекций векторов l_+ , l_- и l_4 на плоскость u, β ; их расположение показано на рис. 24. Здесь случаи $k < 1/3$ и $k > 1/3$ качественно отличаются, посколь-

ку при $k < 1/3$ имеем $4k/(1+k) < 2(1-k)/(1+k)$ и наоборот (см. (4.3)).

Траектория X является входящей сепаратрисой особой точки Y_1 , соответствующей собственному числу λ_+^0 , и лежит поэтому на поверхности L_1 . При $k < 1/3$ имеем $\lambda_+^0 < \lambda_-^0$; вследствие этого в окрестности особой точки Y_1 все траектории в «дозвуковой» области $|u| < k^{1,2}$ (кроме траекторий, лежащих на поверхности L_1)

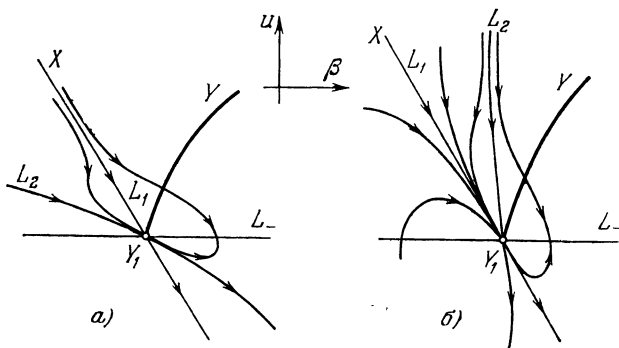


Рис. 24. Качественное поведение траекторий динамической системы (1.11) в окрестности особой точки Y_1 (в проекции на плоскость u, β) при $0 \leq k \leq 1/3$ (а) и $1/3 < k < 1$ (б).

входят в притягивающие особые точки на линии I , касаясь поверхности L_2 . В частности, все траектории, идущие в окрестности траектории X , при приближении к особой точке Y_1 при $k < 1/3$ отклоняются от поверхности L_1 и оказываются в малой окрестности поверхности L_2 . Поэтому, вследствие указанного на рис. 24 расположения линии Y , некоторый отрезок Y_1Y (M_0) линии Y ($M_0 > 1$) целиком пересечен траекториями, двигавшимися ранее в окрестности траектории X .

Как показано в § 2, в окрестности траектории X находится обмотанная вокруг нее бесконечное число раз двумерная инвариантная относительно системы (1.11) поверхность — сепаратриса Z особой точки Z_1 . Эта поверхность пересекает линию Y в бесконечном числе точек $Y(M_i)$, $M_i \rightarrow 1$ при $i \rightarrow \infty$. Таким образом, при $k < 1/3$ существует бесконечное число решений задачи о распаде равновесия звезды, являющихся сепаратрисами особой точки Z_1 и поэтому продолжающихся без особенности до центра симметрии. Эти решения, так же как и аналогичные решения в классической газовой динамике при $\gamma < \gamma_1 < 4/3$, $\omega < 5/2$ (см. главу V), описывают распад равновесия звезды без выделения энергии.

Все решения, соответствующие числам Маха M : $M_i > M > M_{i+1}$, описываются траекториями, выходящими из особых точек

линии l_1 . Эти решения, как показано в § 2, имеют расширяющуюся пустоту ($r < r_1$) внутри газа, образующуюся в результате вытеснения газа изнутри сферическим поршнем.

Отметим, что каждое решение задачи о распаде равновесия звезды, отвечающее числу Маха M движения ударной волны (в системе отсчета (3.3)), совершает некоторое конечное число $N(M)$ оборотов вокруг траектории X (рис. 25), причем $N(M) \rightarrow \infty$ при

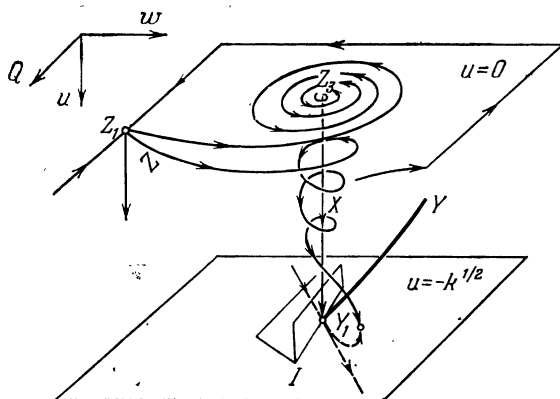


Рис. 25. К решению задачи о распаде равновесия звезды в общей теории относительности.

$M \rightarrow 1$. Радиальная скорость газа v в системе отсчета (3.3) имеет вид (3.10): $v = \frac{Q+u}{1+uQ}$. Поскольку на траектории X имеем $Q+u=0$, то в рассматриваемых решениях скорость газа v имеет $2N(M)$ нулей, следовательно, в этих решениях газ совершает конечное число $N(M)$ радиальных колебаний (по координате R (3.3), имеющей очевидный физический смысл), причем $N(M) \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow 1$. На каждом отрезке $M_i > M \geq M_{i+1}$ число колебаний $N(M)$ является постоянным и на двух последовательных отрезках возрастает на единицу, в частности $N(M_{i+1}) = N(M_i) + 1$. После окончания радиальных пульсаций газа происходит монотонный разлет газа от центра с асимптотикой (2.18) — (3.11) для решений с $M = M_i$ и с некоторой асимптотически (при $r \rightarrow r_1$) постоянной скоростью разлета газа в системе отсчета (3.3) для решений с $M \neq M_i$.

III. При всех k особые точки на линии I в окрестности точки Y_1 являются притягивающими (см. 4.2)), причем при вхождении в особые точки на линии I при $k < 1/3$ все траектории, кроме траекторий, лежащих на поверхности L_1 , касаются поверхности L_2 (поскольку $\lambda_+^0 < \lambda_-^0$), а при $k > 1/3$ все траектории, кроме траекторий, лежащих на поверхности L_2 , касаются поверхности L_1 (по-

сколькx $\lambda_+^0 > \lambda_-^0$); см. рис. 24. Для каждой особой точки линии I в окрестности точки Y_1 существует двумерная инвариантная поверхность \mathcal{P} , заполненная сепаратрисами, входящими в эту особую точку.

Двумерная поверхность \mathcal{P} (Y_1) пересекается с обмотанной вокруг траектории X бесконечное число раз двумерной сепаратрисой Z по бесконечному числу траекторий R_i . Эти траектории после вхождения в особую точку Y_1 могут быть продолжены траекторией X . Полученные таким образом решения продолжаютx до центра симметрии и описывают распад равновесия звезды без выделения энергии и без ударной волны. В этих решениях на поверхности сшивки автомодельного решения со статическим имеется слабый разрыв — все физические параметры непрерывны, а их производные имеют скачок. При этом при $k \leq 1/3$ уже первые производные имеют скачок (см. рис. 24, а), а при $k > 1/3$ первые производные решения остаются непрерывными (см. рис. 24, б) на поверхности сшивки, а вторые производные имеют разрыв.

Все остальные траектории на поверхности \mathcal{P} (Y_1) выходят из линии особых точек I_1 и соответствуют решениям с расширяющейся пустотой внутри газа и также имеют аналогичный слабый разрыв.

Все выводы, сделанные выше относительно конечного числа радиальных колебаний газа в системе отсчета (3.3), справедливы и для найденных решений со слабым разрывом.

Отметим, что при любых k : $0 < k < 1$ двумерная сепаратриса Z пересекается с поверхностью L_1 по бесконечному числу траекторий, которые гладко продолжаютx через линию особых точек I . Соответствующие решения представляют собой некоторые гладкие возмущения статического решения (2.15), не имеющие особенности в центре симметрии и обладающие произвольным конечным числом радиальных колебаний газа.

§ 5. Автомодельные решения с расходящимися и с коллапсирующими ударными волнами

Проведенное выше исследование динамической системы (1.11) показывает, что в дозвуковой области многообразия S ($0 > u > -k^{1/2}$) существуют траектории этой системы следующих четырех типов: А) траектории, выходящие из отталкивающих особых точек I_1 ; Б) траектории, заполняющие двумерную сепаратрису Z особой точки Z_1 (в частности, сепаратрисы \mathcal{L}_2 и X особых точек Z_2 и Z_3); В) траектории, заполняющие двумерную сепаратрису L_1 , выходящую из отрезка особых точек I_1 ; Д) траектории, выходящие из поверхности V_-^l . (По всей видимости в многообразии S нет траекторий, наматывающихся на какие-либо инвариантные подмножества, и тогда каждая траектория в «дозвуковой» области

принадлежит к одному из перечисленных четырех типов.) Среди траекторий указанных четырех типов назовем траекториями типа E траектории, входящие в отрезки особых точек I_1 и I_2 (и заполняющие поэтому сепаратрисы L'_2 и L , см. § 2).

I. Траектории типа A и B исследовались в § 4, где указаны их приложения в решении задачи о распаде равновесия звезды. Эти траектории могут быть использованы также при исследовании распространения расходящейся ударной волны в движущемся (в системе отсчета (3.3)) потоке газа. В этом случае разрыв на траектории вводится при $r=r_0$ в некоторой точке «дозвуковой» области многообразия S , не лежащей на линии Y (4.1). В «дозвуковой» ($|u| < k^{1/2}$) области решения имеем $r < r_0$, следовательно, скорость газа u ($u < 0$) направлена внутрь «дозвуковой» области, где, согласно (2.2), $\bar{\epsilon}_1 > \bar{\epsilon}_2$, т. е. ударная волна является волной сжатия. Радиус R_0 ударной волны равен $l \exp(\tau) r_0 = R_0$, следовательно, $R_0 \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, т. е. ударная волна является расходящейся.

В случае сильного разрыва, т. е. при $u_1 \approx -k$, сшиваемое с данным решением сверхзвуковое решение имеет в разрыве $u_2 \approx -1$ и поэтому, как отмечалось в § 2, соответствующая траектория движется вдоль компоненты границы Γ_2 ($u = -1$) до попадания при $r \rightarrow \infty$ в некоторую притягивающую особую точку на отрезке DE . При этом автомодельная переменная $\zeta = \ln r$ становится световой и далее, как показано в § 3, при времениподобной переменной ζ решение продолжается в синхронной системе (3.4) в области $ct/R \geq 0$. Разрыв в решении происходит при постоянном значении $\zeta = \ln r_0$, т. е. ударной волне отвечает $ct/R = \text{const}$. Следовательно, в синхронной системе (3.4) ударная волна движется с некоторой постоянной скоростью v_0 .

Образование ударной волны происходит в центре симметрии $R = 0$ при $t = 0$. В этот момент трехмерная метрика (3.4) $U(0) dR^2 + R^2 V(0) d\Omega^2$ имеет при $U(0) \neq V(0)$ коническую особенность в нуле, на бесконечности метрика, очевидно, плоская; скорость газа $v(0)$ постоянна по пространству, плотность энергии $\epsilon = c_0^2/R^2$ (такое распределение плотности энергии в конечной области может реализоваться, например, в результате постоянного истечения вещества из звезды).

Траектории типа A описывают решения, в которых газ вытесняется изнутри сферическим поршнем (см. § 2). Решения, соответствующие траекториям типа B , в системе отсчета (3.3) имеют при $R/ct \rightarrow 0$ асимптотику (3.11). Отсюда получаем следствие: 1) решения типа B с расходящейся ударной волной продолжают до центра симметрии $R = 0$, причем в центре симметрии метрика после выхода ударной волны ($t > 0$) не имеет особенности; 2) газ в окрестности центра симметрии движется от центра (с линейной

асимптотикой скорости (3.11) при $R \rightarrow 0$); 3) плотность энергии вблизи центра приближенно постоянна по R и падает как c_0/t^2 .

II. Траектории типа C при убывании параметра ζ непрерывно продолжаются через отрезок I_1 в сверхзвуковую область (см. рис. 23). После такого однозначного продолжения траектории типа C (сепаратрисы L'_1), проходящие через отрезок I_1 в окрестности точки i_0 , аппроксимируются последовательностью сепаратрис \overrightarrow{FG} , $\overrightarrow{Gi_0}$, $\overrightarrow{i_0C}$, $\overrightarrow{CZ_1}$, Z (см. рис. 21, рис. 22, $k = 5$). Таким образом, траектории типа C при возрастании ζ движутся в окрестности сепаратрисы Z и поэтому, так же как и траектории типа B , соответствуют решениям с расходящейся ударной волной. После введения разрыва эти траектории продолжаются в синхронной системе отсчета (3.4) в области V_1 : $C_1 \geq ct_1/R_1 \geq 0$ (где автомодельная переменная ζ времениподобна).

Однако поведение решений типа C в области за ударной волной существенно отличается от решений типа B . Из указанной выше сепаратрисной аппроксимации следует, что решения типа C после гладкого продолжения через точки отрезка I_1 в сверхзвуковую область при $\zeta \rightarrow -\infty$ входят в притягивающие (при таком направлении ζ) особые точки отрезка EF . При этом автомодельная переменная ζ снова становится световой и, как показано в § 3, решение гладко продолжается при времениподобной переменной ζ в статической системе отсчета (3.4) в новой области V_2 : $C_2 \geq ct_2/R_2 \geq 0$.

Полное решение типа C склеено из областей V_2 , V_{2c} , V_g , V_{1c} , V_1 , граничащих друг с другом в указанном порядке. Дозвуковая область V_g описывается движением траектории вдоль сепаратрис $\overrightarrow{i_0C}$, $\overrightarrow{CZ_1}$, Z до точки разрыва (см. рис. 21, рис. 22, $k = 5$). Область V_{2c} описывается движением траектории вдоль сепаратрис \overrightarrow{FG} , $\overrightarrow{Gi_0}$. Область V_{1c} склеена с областью V_g через ударную волну и описывается движением траектории в сверхзвуковой области многообразия S от точки разрыва до притягивающего отрезка DE .

Области V_1 и V_2 ограничены светоподобными поверхностями $ct_1/R_1 = C_1$ и $ct_2/R_2 = C_2$ и поэтому не могут быть связаны между собой физическими сигналами. Ударная волна движется по общей границе областей V_g и V_{1c} . Образование ударной волны происходит в центре симметрии, как и в решениях типа B , однако при $t > 0$ пространственно-подобное сечение имеет «горловину» и топологически является произведением двумерной сферы на прямую, как и в известном решении Крускала [89].

III. Траектории типа D определены при $r > r_1 > 0$, поэтому для того, чтобы продолжить соответствующее решение при всех $r > 0$, необходимо ввести разрыв, которому в данном случае при положительном направлении τ соответствует ударная волна разрежения. Однако ударные волны разрежения в веществе с нормальными

свойствами невозможны [115]. Поэтому решения типа D могут иметь физический смысл только после замены $t \rightarrow -t$, $u \rightarrow -u$, в результате которой разрыву соответствует ударная волна сжатия (см. ниже). Такое решение будет определено при всех r (без дополнительных разрывов разрежения), только если соответствующая траектория продолжается через линию особых точек I , т. е. принадлежит к типу E .

Некоторые траектории типа E уже использовались выше (см. § 4) в качестве решений со слабым разрывом задачи о распаде равновесия звезды. Укажем применения других траекторий типа E , заполняющих сепаратрису L'_2 и проходящих через отрезок особых точек I_1 в окрестности точки i_0 . Такие траектории при убывании параметра ζ аппроксимируются устойчивой последовательностью сепаратрис $\vec{i_0B}$, \vec{BA} , $\vec{Al_1}$ и попадают в притягивающие (при убывании ζ) особые точки отрезка l_1 . При возрастании ζ сепаратрисы L'_2 движутся вдоль сепаратрис $\vec{i_0H}$, \vec{HD} и, следовательно, попадают в отрезок притягивающих особых точек DE . Сепаратрисы L'_2 после введения разрыва в окрестности сепаратрисы $\vec{Bi_0}$ определяют решения с коллапсирующей ударной волной.

Действительно, решения уравнений Эйнштейна вида (1.1) переходят снова в решения при преобразовании $\tau_1 = -\tau$, $u_1(r) = -u(r)$, все остальные функции от r не изменяются. При этом преобразовании метрика (1.1) принимает вид

$$ds^2 = l^2 \exp(-2\tau_1) [\exp(v(r)) d\tau_1^2 - \exp(\lambda(r)) dr^2 - r^2 d\Omega^2].$$

Пусть разрыв на рассматриваемых траекториях вводится при $r = r_0$ (разрыв необходим в силу того, что эти траектории выходят из l_1 , L'_1). В области за ударной волной, где течение газа дозвуковое, $r > r_0$. Скорость газа $u_1(r) = -u(r) > 0$ направлена внутрь этой области, поэтому ударная волна является волной сжатия. Радиус ударной волны $R_0 = l \exp(-\tau_1) r_0$, следовательно, $R_0 \rightarrow 0$ при $\tau_1 \rightarrow +\infty$, т. е. ударная волна является сходящейся.

Полное решение типа E склеено из следующих областей: V_2 , V_{2c} , V_g , V_{1c} , V_1 . Область V_g описывается движением траектории при возрастании переменной ζ в дозвуковой области многообразия S от разрыва до попадания в отрезок особых точек I_2 . Область V_{1c} описывается движением траектории в сверхзвуковой области многообразия S от отрезка I_2 до отрезка притягивающих особых точек DE . Далее решение, как показано в § 3, продолжается в области V_1 , где переменная ζ времениподобна. В синхронной системе (3.4) область V_1 определена условием $-C_1 \leq ct_1/R_1 \leq 0$; область $V_g + V_{1c}$ определена условием $-C_0 \leq ct_1/R_1 \leq -C_1$, уравнение ударной волны $ct_1/R_1 = -C_0$. Ударная волна коллап-

сирует с некоторой постоянной скоростью в центр симметрии при $t_1 = 0$.

Область V_{2c} склеена с областью V_g через ударную волну и описывается, при убывании переменной ζ , движением траектории в сверхзвуковой области многообразия S от разрыва до отрезка EF . Далее решение переходит в область V_2 , где переменная ζ снова времениподобна. Область V_2 в статической системе отсчета определена условием $-C_2 \leq ct_2/R_2 \leq 0$. Поскольку поверхности $ct_1/R_1 = -C_1$ и $ct_2/R_2 = -C_2$ светоподобны, то области V_1 и V_2 не сообщаются физическими сигналами. Пространственно-подобные сечения в этих решениях топологически являются произведением двумерной сферы на прямую, как и в решении Крускала (см. § 2 главы II), и имеют «горловину», которая сжимается в точку при коллапсе ударной волны в центр. Однако для рассматриваемых решений в силу (2.21) имеем $r_g/R < 1$, т. е. вещество в решениях типа E находится вне своего гравитационного радиуса.

Производная функции $R = re^{-\tau}$ (см. (5.1) вдоль траекторий движения газа имеет вид

$$R' = \frac{\partial R}{\partial x^i} u^i = - \frac{e^{-\lambda/2}}{(\sigma(1-u^2))^{1/2}} (Q + u).$$

В двух внешних областях V_1 и V_2 , описываемых движением траекторий системы (1.11) в области $u < -1$, $Q + u > 0$, имеем $R' < 0$. Поэтому решения типа E описывают коллапс материи (при наличии давления), сопровождающийся образованием сходящейся ударной волны.

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА В ЗВЕЗДАХ

В ньютоновской теории автомодельные сферически-симметричные движения идеального самогравитирующего газа при наличии ударных волн впервые были рассмотрены в работах [7, 116] в качестве модели вспышек сверхновых звезд. При этом в работе [7] был проведен анализ законов сохранения для автомодельных решений, найден ряд точных решений и некоторые решения исследованы численно; в работе [116] использовались в основном численные методы. Последующие работы [117—123] содержали уточнение результатов работ [7, 116] и развитие примененных в этих работах методов. Автомодельное движение идеального газа в поле притягивающего центра рассматривалось в работах [124—127].

В данной главе модель вспышек звезд [7, 116] изучается с помощью методов качественной теории многомерных динамических систем. Проведено также качественное исследование модели вспышек в оболочках звезд. Получены все возможные асимптотики автомодельной аккреции самогравитирующего газа на центр и построен ряд решений со сходящимися ударными волнами.

§ 1. Разрешение особенностей динамической системы

I. Уравнения газовой динамики для автомодельных решений. Основными физическими параметрами сферически-симметричных движений идеального газа в ньютоновской теории являются радиальная скорость газа $v(r, t)$, плотность газа $\rho(r, t)$ и давление газа $p(r, t)$, где r — радиальная координата, t — время. Температура идеального газа T определяется из уравнения состояния

$$p = \frac{R_0}{\mu} \rho T, \quad (1.1)$$

где R_0 — газовая постоянная, μ — масса одной грамм-молекулы газа. Энтропия S единицы массы идеального газа определяется выражением $S = C_V \ln(p/\rho^\gamma)$, где $\gamma = C_p/C_V > 1$, C_p и C_V — удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и объеме. Движение газа, в котором отсутствует поступление энергии извне, называется адиабатическим; в этом случае $dS/dt = 0$, постоянная γ называется показателем адиабаты.

При наличии ньютоновского гравитационного притяжения частиц газа на частицу массы m , находящуюся на расстоянии r

от центра симметрии, действует сила притяжения

$$F = -G \frac{m \mathcal{M}(r, t)}{r^2}, \quad (1.2)$$

где $\mathcal{M}(r, t)$ — полная масса газа внутри сферы радиуса r в момент времени t , G — гравитационная постоянная, имеющая размерность $[G] = M^3 \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} = \text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$. По определению имеем

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho. \quad (1.3)$$

Уравнения адиабатического движения идеального самогравитирующего газа, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии, в сферически-симметричном случае имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + G \frac{\mathcal{M}}{r^2} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial t} + v \frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial r} = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения газовой динамики (1.3) — (1.6) инвариантны при действии трехмерной группы R^3 масштабных преобразований, соответствующих растяжению единиц измерения физических величин:

$$\begin{aligned} r' &= lr, & t' &= \tau t, & \mathcal{M}'(r', t') &= \mu \mathcal{M}(r, t), \\ v'(r', t') &= \frac{l}{\tau} v(r, t), & \rho'(r', t') &= \frac{\mu}{l^3} \rho(r, t), \\ p'(r', t') &= \frac{\mu}{\tau^2 l} p(r, t), & G' &= \frac{l^3}{\tau^2 \mu} G. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Автомодельными решениями уравнений газовой динамики по определению называются решения, инвариантные относительно некоторой однопараметрической подгруппы R^1 масштабных преобразований, не меняющих гравитационную постоянную G . Все такие подгруппы R^1 определяются одним параметром ω , причем $l = \tau^{2/\omega}$, $\mu = \tau^{2(3/\omega-1)}$, $\tau \in R_+^1$. Соответствующие автомодельные решения имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{G t^2} R(\lambda), & p &= \frac{r^2}{G t^4} P(\lambda), \\ \mathcal{M} &= \frac{r^3}{G t^2} m(\lambda), & v &= \frac{r}{t} V(\lambda), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где λ — безразмерная автомодельная переменная:

$$\lambda = \frac{r}{(AG t^2)^{1/\omega}}, \quad (1.9)$$

константа A имеет размерность $M \cdot L^{\omega-3}$. Автомоделльные решения зависят от двух безразмерных постоянных: показателя адиабаты $\gamma > 1$ и показателя автомодельности ω (из положительности p и M в равновесном распределении газа следует $1 < \omega < 3$ [7]; см. ниже, § 5).

Уравнения газовой динамики (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6) после подстановки выражений (1.8) с использованием новой переменной $z(\lambda) = \gamma P/R$ вместо $P(\lambda)$ преобразуются в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [7]:

$$\begin{aligned} \lambda \left[V' - \left(\frac{2}{\omega} - V \right) \frac{R'}{R} \right] &= 2 - 3V, \\ \lambda m' &= -3m + 4\pi R, \\ \lambda \left[\left(\frac{2}{\omega} - V \right) V' - \frac{z}{\gamma} \left(\frac{z'}{z} + \frac{R'}{R} \right) \right] &= m + V^2 - V + \frac{2z}{\gamma}, \\ \lambda \left(V - \frac{2}{\omega} \right) \left[\frac{z'}{z} - (\gamma - 1) \frac{R'}{R} \right] &= -2(V + \gamma - 2), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где штрих означает производную по λ . Система дифференциальных уравнений (1.10), как показано в книге [7], имеет два интеграла (существование этих интегралов можно проверить непосредственной подстановкой): интеграл масс

$$\lambda^3 \left[(1 - 3/\omega) m - 2\pi R (V - 2/\omega) \right] = C_1 \quad (1.11)$$

и интеграл адиабатичности

$$z R^{1-\gamma} m^{\left(\gamma + \frac{2}{\omega} - 2\right)} / \left(1 - \frac{3}{\omega}\right) \lambda^{(3\gamma-4)} / \left(1 - \frac{3}{\omega}\right) = C_2. \quad (1.12)$$

В данной главе автомоделльные решения рассматриваются на уровне интеграла $C_1 = 0$ — это физически наиболее важный случай отсутствия источника вещества в центре симметрии [7]. В этом случае интеграл (1.11) дает связь

$$R = \frac{1 - 3/\omega}{2\pi} \cdot \frac{m}{V - 2/\omega}. \quad (1.13)$$

Система уравнений газовой динамики для автомоделльных решений — система (1.10) — после подстановки связи (1.13) и перехода к новой переменной $\tau = \ln \lambda$ преобразуется в следующую трехмерную динамическую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} = z' &= \frac{z}{\gamma(V - 2/\omega)(z - (V - 2/\omega)^2)} [z(2\gamma - 4(1 - 1/\omega)(\gamma - 1) - 2\gamma V) - \\ &- \gamma(2 + (1 - 3\gamma)V)(V - 2/\omega)^2 - \gamma(\gamma - 1)(m + V^2 - V)(V - 2/\omega)], \\ V' &= \frac{z(4 - 3\gamma V - 4/\omega) + \gamma(m + V^2 - V)(V - 2/\omega)}{\gamma(z - (V - 2/\omega)^2)}, \\ m' &= m \frac{2 - 3V}{V - 2/\omega}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Первое уравнение системы (1.14) можно представить также в виде

$$z' = \frac{z}{V - 2/\omega} [-(\gamma - 1)V' + 2 + (1 - 3\gamma)V]. \quad (1.15)$$

Динамическая система (1.14) рассматривается в области S_1 , выделенной естественными физическими условиями:

$$z > 0, \quad m > 0, \quad V - 2/\omega < 0 \quad (1.16)$$

(последнее условие при $\omega < 3$ в силу (1.13) означает $\rho > 0$).

Поверхность $L = z - (V - 2/\omega)^2 = 0$ является поверхностью непродолжимости траекторий системы (1.14), так как с двух сторон от этой поверхности векторное поле системы (1.14) направлено в противоположные стороны. Как известно [7], с формальной точки зрения наличие такой поверхности приводит к возникновению в некоторых автомодельных решениях ударной волны. Закон движения ударной волны определяется условием $\lambda = \lambda_*$.

С помощью автомодельных решений вида (1.8) можно построить модели таких важных астрофизических явлений, как разлет в результате взрыва самогравитирующего газа, образующего звезду, коллапс самогравитирующего газа на центр, сжатие самогравитирующего газа сходящейся ударной волной и др. Движение газа во всех этих моделях описывается некоторыми траекториями трехмерной динамической системы (1.14). Исследование автомодельных решений с помощью численных методов и методов поиска точных решений, основанных на нахождении первых интегралов, проведенное в работах [7, 116], позволило получить важную информацию о поведении решений в модели вспышек звезд только при специальных значениях параметров γ , ω . Для более подробного изучения автомодельных движений самогравитирующего газа необходимо провести полное исследование динамической системы (1.14) методами качественной теории многомерных динамических систем, изложенными в главе I. Такое исследование проводится в данном параграфе и в §§ 2, 3.

II. Построение замкнутого многообразия S . Для полного исследования поведения траекторий системы (1.14) в области S_1 (см. (1.16)) мы преобразуем эту систему в систему, определенную на некотором замкнутом трехмерном многообразии S с границей Γ (отметим, что граница Γ не является гладким многообразием, а состоит из нескольких компонент, которые пересекаются по углам границы). При этом преобразовании осуществляется разрешение сложных особенностей системы (1.14) (например, особой точки $z = m = 0$, $V = 2/\omega$). Укажем последовательно преобразования координат, с помощью которых будет построено замкнутое многообразие S , и замены переменной τ на переменные τ_i , в которых динамическая система (1.14) продолжается на соответствующие компоненты границы Γ .

Очевидно, что динамическая система (1.14) в области S_1 (1.16) после замены переменной $d\tau_3/d\tau = -(V - 2/\omega)$ гладко продолжается на три координатные плоскости, являющиеся тремя компонентами границы Γ многообразия S : $\Gamma_6 (V - 2/\omega = 0)$, $\Gamma_7 (m = 0)$, $\Gamma_8 (z = 0)$. Эти три компоненты границы являются инвариантными многообразиями динамической системы (1.14). В области S_1 удобно использовать координаты

$$\begin{aligned} u &= z^{1/2} > 0, & v_0 &= V - 2/\omega < 0, \\ m_0 &= -(m(V - 2/\omega))^{1/3} > 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Для исследования поведения траекторий динамической системы (1.14) при больших значениях координат u , v_0 , m_0 необходимо пополнить область S_1 границей на бесконечности по координатам u , v_0 , m_0 . Такое пополнение осуществляется с помощью перехода к проективным координатам

$$v_1 = \frac{v_0}{u}, \quad \rho_0 = \frac{1}{u}, \quad m_1 = \frac{m_0}{u}, \quad \frac{d\tau_1}{d\tau} = -\frac{u}{v_0}, \quad (1.18)$$

$$v_2 = \frac{v_0}{m_0}, \quad u_1 = \frac{u}{m_0}, \quad \mu = \frac{1}{m_0}, \quad \frac{d\tau_2}{d\tau} = -\frac{m_0}{v_0}, \quad (1.19)$$

$$\eta = \frac{1}{v_0}, \quad u_2 = -\frac{u}{v_0}, \quad m_2 = -\frac{m_0}{v_0}, \quad \tau. \quad (1.20)$$

Бесконечности по координатам u , v_0 , m_0 в координатах (1.18) отвечает плоскость $\rho_0 = 0$, являющаяся компонентой границы Γ_1 многообразия S . Динамическая система (1.14) в координатах (1.18) — (1.20) и соответствующих переменных τ_i гладко продолжается на компоненту границы Γ_1 , которая является инвариантным многообразием динамической системы.

Динамическая система (1.14) в области S_1 , пополненной границей Γ_1 , имеет следующие вырожденные особые точки (особая точка называется вырожденной, если все собственные числа в этой точке $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$): точка $O_1 (v_1 = m_1 = \rho_0 = 0)$, лежащая на компоненте границы Γ_1 ; точка $O_2 (u = v_0 = m_0 = 0)$, линия вырожденных особых точек: $l: u = v_0 = 0, 0 \leq m_0 \leq \infty$. Для разрешения особой точки O_1 сделаем следующие преобразования координат:

$$v_0 = \frac{v_1}{\rho_0}, \quad m_2 = \frac{m_1^3}{\rho_0} = -\frac{v_0 m}{u^2}, \quad \rho_0 = \frac{1}{u}, \quad \frac{d\tau_3}{d\tau} = -\frac{1}{v_0}, \quad (1.21)$$

$$v_1 = \frac{v_0}{u}, \quad m_3 = -\frac{m_1^3}{v_1} = \frac{m}{u^2}, \quad \rho_2 = -\frac{\rho_0}{v_1} = -\frac{1}{v_0}, \quad \tau, \quad (1.22)$$

$$v_3 = \frac{v_1}{m_1^3} = -\frac{u^2}{m}, \quad M_1 = m_1^3, \quad \rho_3 = \frac{\rho}{m_1^3} = -\frac{u^2}{v_0 m}, \quad \frac{d\tau_4}{d\tau} = \frac{m}{u^2}. \quad (1.23)$$

В координатах (1.21) — (1.23) вместо особой точки O_1 вклеивается двумерная плоскость ($v_1 = 0$, координаты $m_3 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$ произвольны), являющаяся компонентой границы Γ_2 многообразия S . Динамическая система (1.14) в координатах (1.21) — (1.23) и соответствующих переменных τ_i гладко продолжается на компоненту границы Γ_2 , которая является инвариантным многообразием динамической системы. При этом все особые точки динамической системы, лежащие на компоненте границы Γ_2 , оказываются невырожденными. Это означает, что преобразования (1.21) — (1.23) дают полное разрешение вырожденной особой точки O_1 .

Для разрешения вырожденной особой точки O_2 ($u = v_0 = m_0 = 0$) сделаем следующие преобразования координат (ниже $M_0 = m_0^3 = -m(V - 2/\omega)$):

$$v_1 = \frac{v_0}{u}, \quad u, \quad M_2 = \frac{M_0}{u} = -\frac{v_0 m}{u}, \quad \frac{d\tau_5}{d\tau} = -\frac{1}{uv_0}, \quad (1.24)$$

$$v_0, \quad u_2 = -\frac{u}{v_0}, \quad m = -\frac{M_0}{v_0}, \quad \frac{d\tau_6}{d\tau} = \frac{1}{v_0^2}, \quad (1.25)$$

$$v_5 = \frac{v_0}{M_0} = -\frac{1}{m}, \quad u_3 = \frac{u}{M_0} = -\frac{u}{v_0 m}, \quad M_0, \quad \frac{d\tau_7}{d\tau} = \frac{1}{v_0^2 m}. \quad (1.26)$$

В координатах (1.24) — (1.26) вместо особой точки O_2 вклеивается двумерная плоскость ($M_0 = 0$, координаты $v_5 \leq 0$ и $u_3 \geq 0$ произвольны), являющаяся компонентой границы Γ_3 ($M_0 = 0$) многообразия S . Компонента границы Γ_3 , так же как и Γ_1 и Γ_2 , является инвариантным многообразием динамической системы (1.14) на многообразии S . Динамическая система на компоненте границы Γ_3 имеет наряду с невырожденными особыми точками одну вырожденную особую точку O_3 ($v_1 = u = M_2 = 0$). Для разрешения этой особой точки сделаем следующие преобразования координат:

$$v_4 = \frac{v_1}{u} = \frac{v_0}{u^2}, \quad u, \quad m_2 = \frac{M_2}{u} = -\frac{v_0 m}{u^2}, \quad \tau_3, \quad (1.27)$$

$$v_1 = \frac{v_0}{u}, \quad u_4 = -\frac{u}{v_1} = -\frac{u^2}{v_0}, \quad m = -\frac{M_2}{v_1}, \quad \frac{d\tau_8}{d\tau} = u^{-2}, \quad (1.28)$$

$$v_5 = \frac{v_1}{M_2} = -\frac{1}{m}, \quad u_5 = \frac{u}{M_2} = -\frac{u^2}{v_0 m}, \quad M_2 = -\frac{v_0 m}{u}, \quad \tau_4. \quad (1.29)$$

В координатах (1.27) — (1.29) вместо особой точки O_3 вклеивается двумерная плоскость ($M_2 = 0$, координаты $v_5 \leq 0$, $u_5 \geq 0$ произвольны), являющаяся компонентой границы Γ_4 ($M_2 = 0$) многообразия S . Эта компонента границы, так же как и компоненты границы Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , является инвариантным многообразием динамической системы на многообразии S . Все особые точки динамической системы, лежащие на компоненте границы Γ_4 , являются

невырожденными. Это означает, что преобразования (1.24)—(1.29) дают полное разрешение вырожденной особой точки O_2 .

Для разрешения линии вырожденных особых точек l ($u = u_3 = v_5 = v_0 = 0$, $0 \leq M_0 \leq \infty$) в окрестности $M_0 = 0$ введем следующие координаты (см. (1.26)):

$$v_5 = -\frac{1}{m}, \quad u_2 = -\frac{u_3}{v_5} = -\frac{u}{v_0}, \quad M_0, \quad \frac{d\tau_9}{d\tau} = \frac{m}{v_0^2}, \quad (1.30)$$

$$v_6 = \frac{v_5}{u_3} = \frac{v_0}{u}, \quad u_3 = \frac{u}{M_0}, \quad M_0, \quad \tau_4. \quad (1.31)$$

В окрестности $M_0 = \infty$ введем координаты (см. (1.19))

$$v_2 = \frac{v_0}{m_0}, \quad u_2 = -\frac{u_1}{v_2} = -\frac{u}{v_0}, \quad \mu = \frac{1}{m_0}, \quad \tau_9, \quad (1.32)$$

$$v_1 = \frac{v_2}{u_1} = \frac{v_0}{u}, \quad u_1 = \frac{u}{m_0}, \quad \mu, \quad \tau_4. \quad (1.33)$$

В координатах (1.30) — (1.33) вместо линии l вклеивается двумерная плоскость ($v_5 = 0$, координаты $u_2 \geq 0$, $M_0 \geq 0$ произвольны), являющаяся компонентой границы Γ_5 многообразия S . Динамическая система (1.14) в координатах (1.30)—(1.33) и соответствующих переменных τ_i гладко продолжается на компоненту границы Γ_5 , являющуюся инвариантным многообразием динамической системы. Все особые точки динамической системы на многообразии S , лежащие на компоненте границы Γ_5 , являются невырожденными, т. е. преобразования (1.30) — (1.33) дают полное разрешение линии вырожденных особых точек l .

После проделанных преобразований координат (1.17) — (1.33) легко завершить построение замкнутого трехмерного многообразия S .

Замкнутое трехмерное многообразие S покрыто системами координат (1.17) — (1.33) и выделяется в них естественными условиями:

$$\eta, v_i \leq 0; \quad u_i, m_i, M_i, \rho_i, \mu \geq 0.$$

Граница Γ многообразия S состоит из восьми компонент Γ_i ($i = 1, \dots, 8$). Условия, выделяющие компоненты границы Γ_i и системы координат, продолжающиеся на Γ_i , имеют вид

$$\Gamma_1: \mu = 0 \quad (1.18) - (1.20); \quad \Gamma_2: v_1 = 0 \quad (1.21) - (1.23);$$

$$\Gamma_3: M_0 = 0 \quad (1.24) - (1.26); \quad \Gamma_4: M_2 = 0 \quad (1.27) - (1.29);$$

$$\Gamma_5: u = 0 \quad (1.30) - (1.33); \quad \Gamma_6: v_0 = 0 \quad (1.17);$$

$$\Gamma_7: m = 0 \quad (1.16); \quad \Gamma_8: z = 0 \quad (1.16).$$

III. Преобразование динамической системы. Динамическая система на многообразии S определяется после преобразования системы (1.14) в локальные карты (1.17) — (1.33). Выполняя эти

преобразования, легко убедиться, что система (1.14) гладко продолжается (в соответствующей переменной τ_j) на компоненты границы Γ_i . При этом все компоненты границы Γ_i и их пересечения являются инвариантными подмногообразиями динамической системы на многообразии S .

При дальнейшем исследовании наиболее часто используются преобразования динамической системы (1.14) в двух локальных картах (1.21) и (1.27). Укажем эти преобразования в явном виде. Система (1.14) в координатах (1.21) и переменной τ_3 имеет вид

$$\dot{v}_0 = -\frac{v_0}{\gamma(1-v_0^2\rho_0^2)} \left[\left(4 - \frac{4}{\omega} - \frac{6\gamma}{\omega} \right) - 3\gamma v_0 - \gamma m_2 + \right. \\ \left. + \gamma v_0 \left(v_0 + \frac{2}{\omega} \right) \left(v_0 + \frac{2}{\omega} - 1 \right) \rho_0^2 \right], \quad (1.34)$$

$$\dot{m}_2 = -\frac{m_2}{2\gamma(1-v_0^2\rho_0^2)} \left[4\gamma - \frac{12\gamma}{\omega} - 2\gamma v_0 - 2\gamma^2 m_2 + \right. \\ \left. + 2\gamma^2 v_0 \left(v_0 + \frac{2}{\omega} \right) \left(v_0 + \frac{2}{\omega} - 1 \right) \rho_0^2 + 4\gamma \left(1 + \frac{1-3\gamma}{\omega} + \frac{1-3\gamma}{2} v_0 \right) v_0^2 \rho_0^2 + \right. \\ \left. + 2\gamma \left(2 \frac{\omega-3}{\omega} - 3v_0 \right) (1 - v_0^2 \rho_0^2) \right],$$

$$\dot{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{2\gamma(1-v_0^2\rho_0^2)} \left[4 - 2\gamma - \frac{4}{\omega} - 2\gamma v_0 + \gamma(\gamma-1)m_2 - \right. \\ \left. - 2\gamma \left(1 + \frac{1-3\gamma}{\omega} + \frac{1-3\gamma}{2} v_0 \right) v_0^2 \rho_0^2 - \right. \\ \left. - \gamma(\gamma-1)v_0 \left(v_0 + \frac{2}{\omega} \right) \left(v_0 + \frac{2}{\omega} - 1 \right) \rho_0^2 \right].$$

Система (1.14) в координатах (1.27) и переменной τ_3 имеет вид

$$\dot{v}_4 = -\frac{v_4}{\gamma(1-v_4^2 u^2)} \left[2\gamma - \frac{6\gamma}{\omega} - \gamma v_4 u^2 - \gamma^2 m_2 + \right. \\ \left. + \gamma^2 v_4 \left(\left(v_4 u^2 + \frac{2}{\omega} \right)^2 - \left(v_4 u^2 + \frac{2}{\omega} \right) \right) + \right. \\ \left. + 2\gamma v_4^2 u^2 \left(1 + \frac{1-3\gamma}{\omega} + \frac{1-3\gamma}{2} v_4 u^2 \right) \right],$$

$$\dot{m}_2 = -\frac{m_2}{\gamma(1-v_4^2 u^2)} \left[2\gamma - \frac{6\gamma}{\omega} - \gamma v_4 u^2 - \gamma^2 m_2 + \right. \\ \left. + \gamma \left(2 - \frac{6}{\omega} - 3v_4 u^2 \right) (1 - v_4^2 u^2) + \gamma^2 v_4 \left(\left(v_4 u^2 + \frac{2}{\omega} \right)^2 - \left(v_4 u^2 + \frac{2}{\omega} \right) \right) + \right. \\ \left. + 2\gamma v_4^2 u^2 \left(1 + \frac{1-3\gamma}{\omega} + \frac{1-3\gamma}{2} v_4 u^2 \right) \right], \quad (1.35)$$

$$\dot{u} = -\frac{u}{2\gamma(1-v_4^2 u^2)} \left[4 - \frac{4}{\omega} - 2\gamma v_4 u^2 + \gamma(\gamma-1)m_2 - 2\gamma - \right. \\ \left. - \gamma(\gamma-1)v_4 \left(\left(v_4 u^2 + \frac{2}{\omega} \right)^2 - \left(v_4 u^2 + \frac{2}{\omega} \right) \right) - \right. \\ \left. - 2\gamma v_4^2 u^2 \left(1 + \frac{1-3\gamma}{\omega} + \frac{1-3\gamma}{2} v_4 u^2 \right) \right].$$

IV. Особые точки динамической системы на многообразии S . Нетрудно проверить, что следующие функции Φ_μ изменяются монотонно вдоль траекторий системы (1.14):

$$\Phi_\mu = z \left(V - \frac{2}{\omega} \right)^{\gamma-1} m^\mu,$$

$$\frac{d\Phi_\mu}{d\tau} = \Phi_\mu \frac{2(1-3\gamma+\omega+\mu(\omega-3)) + \omega(1-3\gamma-3\mu)(V-2/\omega)}{\omega(V-2/\omega)}, \quad (1.36)$$

где μ находится между двумя числами: $\mu_1 = (1-3\gamma)/3$ и $\mu_2 = (1-3\gamma+\omega)/(3-\omega)$. При $\gamma < 4/3$ имеем $\mu_1 < \mu_2$ и $\Phi'_\mu < 0$; при $\gamma > 4/3$ имеем $\mu_1 > \mu_2$ и $\Phi'_\mu > 0$; при $\gamma = 4/3$ $\mu_1 = \mu_2 = -1$ и Φ_{-1} является первым интегралом системы (1.14). Отметим, что монотонную функцию Φ_{μ_2} можно получить также из интеграла адиабатичности (1.12).

Существование монотонных функций (1.36) доказывает, что система (1.14) при $\gamma \neq 4/3$ не имеет особых точек внутри многообразия S — все особые точки этой системы лежат на различных компонентах границы Γ (а также на поверхности непродолжимости решений $L = 0$). Динамическая система в многообразии S имеет шестнадцать изолированных особых точек:

$$A (v_1 = m_3 = \rho_2 = 0), \quad B (v_3 = \rho_3 = M_1 = 0), \quad C (v_1 = u_1 = \mu = 0),$$

$$C_1 (v_2 = u_2 = \mu = 0), \quad D (v_6 = u_3 = M_0 = 0), \\ H (\eta = u_2 = m_4 = 0),$$

$$Z_1 \left(v_0 = \frac{4(\omega-1)-6\gamma}{3\gamma\omega}, \quad m_2 = \rho_0 = 0 \right),$$

$$Z_2 \left(m_3 = \frac{1}{\gamma-1}, \quad v_1 = \rho_2 = 0 \right),$$

$$Z_3 \left(v_0 = -\frac{2}{\omega}, \quad m_2 = \frac{4(\omega-1)}{\gamma\omega}, \quad \rho_0 = 0 \right), \quad Z_4 (v_0 = m_2 = \rho_0 = 0),$$

$$Z_5 (v_4 = m_2 = u = 0), \quad Z_6 (\omega > 2) \left(v_4 = -\frac{\omega(3-\omega)}{\gamma(\omega-2)}, \quad m_2 = u = 0 \right),$$

$$Z_6 (\omega < 2) (z = m = 0, \quad V = 1), \quad Z_8 (v = z = m = 0),$$

$$Z_7 \left(V = \frac{2}{3\gamma-1}, \quad z = 6\gamma \frac{(3\gamma-(1+\omega))(\gamma-1)}{(3\gamma-1)^2 [2(\omega-1)-3\gamma(\omega-2)]}, \quad m = 0 \right),$$

$$Z_9 \left(V = \frac{2}{3}, \quad z = 0, \quad m = \frac{2}{9} \right), \quad Z_{10} (\eta = u_2 = 0, \quad m_4 = 2^{-1/3})$$

и четыре линии особых точек:

$$EF (u_5 = M_2 = 0, \quad -\infty \leq v_5 \leq 0), \quad D_1G (M_0 = u_3 = 0, \\ -\infty \leq v_5 \leq 0),$$

$$I_1 I_2, \quad I_3 I_4 \quad (z = v_0^2, \quad m = 2v_0^2 + v_0 [\omega + 2 - 4(\omega - 1)/\gamma] \omega^{-1} + \\ + 2(\omega - 2) \omega^{-2}), \\ J_1 J_2 \quad (2 < \omega < 3) \quad (v_5 = -\omega^2/2(\omega - 2), \quad u_5 = 0, \quad 0 \leq M_2 \leq \infty).$$

При $\gamma = 5/3$ на компоненте границы Γ_1 имеется линия особых точек \mathcal{L} , проходящая через особые точки Z_2, I_4, Z_{10} :

$$m_1^3 = -v_1(3 + v_1^2)/2, \quad \rho_0 = 0, \quad -\infty \leq v_1 \leq 0.$$

При $\gamma = 4/3$ имеются две линии особых точек: \mathcal{L}_1 , проходящая через особые точки Z_7, Z_9 и пересекающая отрезок особых точек $I_3 I_4$: $z = 4/27 - 2m/3, V = 2/3, 0 \leq m \leq 2/9$ (см. [7]), и \mathcal{L}_2 ,

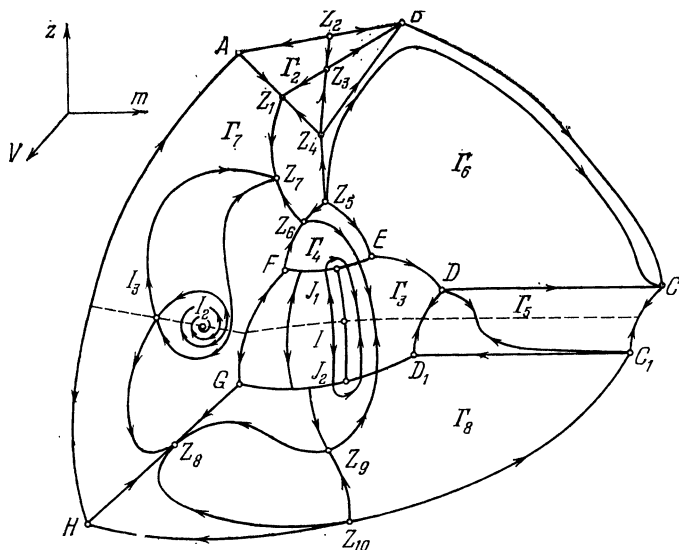


Рис. 26. Многообразие S после разрешения вырожденных особых точек динамической системы (1.14) и пополнения физической области границей на бесконечности по координатам z, m, V .

проходящая на компоненте границы Γ_2 через особые точки Z_1, Z_2, Z_3 : $\rho_0 = 0, v_0 = -((3 - \omega)/\omega + m_2/3), 0 \leq m_2 \leq \infty$. При $\gamma = \gamma_1 = 2(\omega - 1)/\omega$ имеется линия особых точек \mathcal{L}_3 , являющаяся пересечением компонент границы Γ_6 и Γ_7 и проходящая через особые точки Z_4 и Z_5 :

$$v_4 = m_2 = 0, \quad 0 \leq u \leq \infty.$$

На рис. 26 изображен вид на многообразие S «через» компоненту границы Γ_1 . Здесь показаны все особые точки, кроме отрезков $I_1 I_2, I_3 I_4$, лежащих на поверхности непродолжимости решений $L = 0$ (пунктиром показано пересечение компонент границы с по-

верхностью $L = 0$). Указано качественное поведение динамической системы на компонентах границы Γ при $2 < \omega < 3$, $\gamma > \{\gamma_0 = 4(\omega - 1)(2 - (\omega - 2)^{1/2})^{-2}, 4/3\}$.

V. Исследование линии особых точек I_1I_2, I_3I_4 . Линия особых точек I_1I_2, I_3I_4 лежит на поверхности непродолжимости решений $L = 0$. При $\omega > 2$ эта линия состоит из двух отрезков I_1I_2 и I_3I_4 , если $\gamma > \gamma_0$; если же $\gamma < \gamma_0$, то имеется только один отрезок I_1I_4 . Концевые точки определяются из условий I_1 ($v_0 = 0$); I_2, I_3 ($m(v_{0;2,3}) = 0$), I_4 ($v_0 = -\infty$) и лежат соответственно на компонентах границы $\Gamma_3, \Gamma_7, \Gamma_1$. При $\omega < 2$ имеется только один отрезок I_3I_4 .

Для исследования линии особых точек I (I_1I_2, I_3I_4) сделаем немонотонную замену переменной:

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = - \left[\gamma \left(V - \frac{2}{\omega} \right) \left(z - \left(V - \frac{2}{\omega} \right)^2 \right) \right]^{-1}.$$

В новой переменной τ_0 поверхность непродолжимости решений $L = 0$ всюду, кроме линии особых точек I , становится неособой поверхностью динамической системы (1.14). Собственные числа $\lambda_{1,2}$ системы (1.14) в точках линии I (в переменной τ_0) удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \frac{\gamma v_0^2}{\omega} (3\omega - 10) \lambda + \\ + \gamma^2 v_0^3 \left\{ 2(3\gamma - 5)v_0^3 + \frac{4}{\omega} \left(-7 + 3\gamma + \frac{4(\omega - 1)}{\gamma} + \omega\gamma - 2\omega \right) v_0^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{\omega^2} \left[\gamma\omega^2 - \gamma\omega - 4\omega^2 - 3\omega - 2 + 6\gamma + \frac{16(\omega - 1)}{\gamma} \right] v_0 + \right. \\ \left. + 4(\omega - 2)(\omega - 3)(\gamma + 1)\omega^{-3} \right\} = 0 \quad (1.37) \end{aligned}$$

(собственное число $\lambda_3 = 0$ в силу одномерности линии I).

Существенно отметить, что траектории системы (1.14), продолжающиеся (в переменной τ) через поверхность $L = 0$, обязаны проходить через особые точки на линии I , причем только через те точки, которые в силу (1.37) являются узлами или седлами. Примеры таких траекторий будут указаны ниже.

VI. Заключительные замечания. Вычисление собственных чисел особых точек динамической системы (1.14), проведенное ниже, в §§ 2—4, показывает, что все особые точки (кроме линии J_1J_2) являются невырожденными. Это и означает, что при построении многообразия S осуществляется разрешение особенностей исходной динамической системы (1.14).

Разрешение особых точек линии J_1J_2 с помощью последовательности стандартных преобразований координат (называемых в алгебраической геометрии сигма-процессами вдоль многообразия) приводит к своеобразному заикливанию: применение таких преобразований в любом конечном числе приводит к появлению

наряду с линиями невырожденных (и неустойчивых) особых точек M_i новой линии вырожденных особых точек, свойства которой те же, что и свойства исходной линии особых точек $J_1 J_2$. При этом невырожденные особые точки M_i не имеют сепаратрис, входящих в них из физической области, — их сепаратрисы лежат на компонентах границы Γ и не отвечают никаким физическим решениям. Вследствие этого и исходная линия вырожденных особых точек $J_1 J_2$ не имеет физических применений.

Шесть изолированных особых точек: A, B, C, C_1, D, H и особые точки на отрезках $EF, D_1 G$ являются неустойчивыми (седловыми), причем все их сепаратрисы лежат на компонентах границы Γ и поэтому им не отвечают никакие точные физические решения.

Десять изолированных особых точек Z_i наиболее важны в рассматриваемой системе. Эти особые точки имеют сепаратрисы, проходящие внутри многообразия S , которым отвечают важные физические асимптотики решений. В следующих параграфах мы укажем собственные числа λ_x особых точек Z_i (в переменных τ_j , определяемых согласно (1.18) — (1.33) по координатам особой точки; буквенный индекс x внизу указывает соответствующее собственное направление) и соответствующие им асимптотики. Для удобства изложения мы сгруппируем особые точки Z_i, L_k в соответствии с физическим смыслом определяемых ими асимптотик.

§ 2. Асимптотики разлета газа от центра

Асимптотики разлета газа от центра распадаются на два класса: асимптотики, в которых движение газа продолжается до центра симметрии $r = 0$, и асимптотики с образованием расширяющейся пустоты внутри газа. Асимптотики разлета газа, продолжающиеся до центра симметрии, соответствуют сепаратрисам особых точек Z_1, Z_9, Z_6 ($\omega < 2$), L_1, L_2 ($\gamma = 4/3$), Z_7 . Укажем собственные числа динамической системы на многообразии S в этих особых точках и явный вид соответствующих асимптотик.

$$\text{I. } Z_1 \left(v_0 = \frac{4(\omega - 1) - 6\gamma}{3\gamma\omega}, \quad m_2 = \rho_0 = 0 \right): \lambda_{v_0} = \frac{4(\omega - 1) - 6\gamma}{\gamma\omega},$$

$$\lambda_{m_2} = \frac{4(4 - 3\gamma)(\omega - 1)}{3\gamma\omega}, \quad \lambda_{\rho_0} = \frac{2(\omega - 1) + 3\gamma(2 - \omega)}{3\gamma\omega}.$$

Особая точка Z_1 лежит в многообразии S , если $\gamma > 2(\omega - 1)/3$. Точка Z_1 имеет сепаратрисы, проходящие внутри многообразия S , в двух случаях:

1) $2(\omega - 1)/3 < \gamma < 4/3$. Точка Z_1 неустойчива ($\lambda_{v_0} < 0$, $\lambda_{m_2} > 0$, $\lambda_{\rho_0} > 0$) и имеет двумерную выходящую (при $\lambda \rightarrow 0$) сепаратрису;

2) $\gamma > 2(\omega - 1)/3$ ($\omega - 2$) (при этом $\omega > 2$). Точка Z_1 является притягивающей при $\lambda \rightarrow \infty$.

Соответствующие \mathcal{T} -асимптотики (при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= C_1 A r^{3-\omega} \lambda^a, & \rho &= \frac{3\gamma b}{4\pi} C_1 A \lambda^a r^{-\omega}, \\ p &= C_2 \frac{(AG)^{2/\omega}}{G} t^{-4(\omega-1)/\omega}, & v &= \frac{4(\omega-1)}{3\gamma\omega} \frac{r}{t}, \\ a &= 2(\omega-1)b, & b &= \frac{3-\omega}{3\gamma-2(\omega-1)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Особая точка Z_9 ($V = 2/3$, $z = 0$, $m = 2/9$):

$$\lambda_{V, m} = \frac{3\omega}{2(3-\omega)}, \quad \frac{-\omega}{3-\omega}, \quad \lambda_z = -\frac{\omega(4-3\gamma)}{3-\omega}.$$

При $\gamma < 4/3$ имеется двумерная входящая в Z_9 сепаратриса ($\lambda \rightarrow \infty$), а при $\gamma > 4/3$ — двумерная выходящая из Z_9 сепаратриса ($\lambda \rightarrow 0$). Соответствующие асимптотики (при $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{2}{9} \frac{r^3}{G t^2}, & \rho &= \frac{1}{6\pi G t^2}, & v &= \frac{2}{3} \frac{r}{t}, \\ p &= C_1 \frac{1}{G} (AG)^a r^{2-\omega a} \cdot t^{2a-4}, & a &= \frac{4-3\gamma}{3-\omega}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Асимптотики (2.1) описывают разлет газа с асимптотически постоянным (по r) давлением, а асимптотики (2.2) описывают разлет газа с асимптотически постоянной (по r) плотностью. При $\gamma = 2(\omega-1)/\omega$ имеется одномерная сепаратриса, выходящая из Z_1 и входящая в Z_9 , вдоль которой

$$V = 2/3, \quad m = 2/9, \quad 0 \leq z \leq \infty. \quad (2.3)$$

Для этой сепаратрисы асимптотики (2.1) и (2.2) являются точными решениями, указанными ранее в книге [7].

II. Особая точка Z_6 ($\omega < 2$) ($z = m = 0$, $V = 1$):

$$\lambda_m = \frac{\omega}{2-\omega}, \quad \lambda_z = \frac{3\omega(\gamma-1)}{2-\omega}, \quad \lambda_V = \frac{\omega}{2-\omega}.$$

Особая точка Z_6 ($\omega < 2$) является отталкивающей. Сепаратрисы, выходящие из этой особой точки, имеют при $\lambda \rightarrow 0$ асимптотику

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= C_1 A r^{3-\omega} \lambda^{\omega(3-\omega)/(2-\omega)} \\ \rho &= \frac{3-\omega}{2\pi(2-\omega)} C_1 A r^{-\omega} \lambda^{\omega(3-\omega)/(2-\omega)}, \\ p &= C_1 A^2 G r^{-2(\omega-1)} \lambda^{\omega(3\gamma-2(\omega-1))/(2-\omega)}, \quad v = \frac{r}{t}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В этой устойчивой при $t \rightarrow \infty$ асимптотике материя движется от центра с постоянной скоростью, причем число Маха течения газа $\mathcal{M} \rightarrow \infty$.

III. Линия особых точек \mathcal{L}_1 ($\gamma = 4/3$) ($z = 4/27 - 2m/3$, $V = 2/3$, $0 \leq m \leq 2/9$) лежит внутри многообразия S , поэтому особым точкам линии \mathcal{L}_1 отвечают точные решения, указанные впервые в книге [7]. При $0 \leq m \leq B = 2/9 - 2(3 - \omega)^2/3\omega^2$ (отрезок \mathcal{L}_1 в «дозвуковой» области $L > 0$) эти решения устойчивы при $\lambda \rightarrow \infty$; при $B < m < 2/9$ эти решения неустойчивы. Особые точки на линии \mathcal{L}_2 ($\gamma = 4/3$): $\rho_0 = 0$, $v_0 = -((3 - \omega)/\omega + m_2/3)$, $0 \leq m_2 \leq \infty$, имеют собственные числа

$$\lambda_{\rho_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{3 - \omega}{\omega} + m_2 \right), \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{m_2}{3} - \frac{3(3 - \omega)}{\omega}.$$

Эти особые точки при $m_2 > 9(3 - \omega)/\omega$ являются отталкивающими — им соответствует трехмерная выходящая сепаратриса ($\lambda \rightarrow 0$), а при $m_2 < 9(3 - \omega)/\omega$ являются неустойчивыми — выходящая из них сепаратриса двумерна. Соответствующие асимптотики при $\lambda \rightarrow 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= A_1 r^{6(3-\omega)\alpha_2}, & \rho &= A_1 \frac{3-\omega}{2\pi\omega|v_0|} r^\alpha, \\ p &= A_1 \frac{G}{m_2} \frac{3-\omega}{2\pi\gamma\omega} r^{-4\omega m_2 \alpha_2}, & v &= \frac{\alpha_1}{3} \frac{r}{t}, \\ \alpha &= -3 \frac{3-\omega + \omega m_2}{3(3-\omega) + \omega m_2}, & \alpha_1 &= \frac{3(\omega-1) - \omega m_2}{\omega}, \\ \alpha_2 &= (3(3-\omega) + \omega m_2)^{-1}, & A_1 &= (AG)^{-\alpha/\omega} \frac{m_2}{G|v_0|} t^{-2(3-\omega)\alpha_1\alpha_2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В асимптотике (2.5) плотность и давление в центре ($r \rightarrow 0$) бесконечны. Особая точка Z_3 ($m_2 = 3(\omega - 1)/\omega$, $v_0 = -2/\omega$, $\rho_0 = 0$) делит линию \mathcal{L}_2 на две части: при $m_2 > 3(\omega - 1)/\omega$ в асимптотике (2.5) газ падает ($v < 0$) на центр за бесконечное время; при $m_2 < 3(\omega - 1)/\omega$ имеем разлет газа от центра, причем линии тока выходят из центра при $t = 0$.

IV. Особая точка Z_7 лежит в многообразии S при всех $\omega \leq 2$ и при $\omega > 2$, если $\frac{1+\omega}{3} < \gamma < \frac{2(\omega-1)}{3(\omega-2)}$. Точка Z_7 лежит в «дозвуковой области» $L > 0$, если

$$3\gamma(\gamma - 1)\omega^2 - 2(3\gamma - (1 + \omega))(2(\omega - 1) + 3\gamma(2 - \omega)) > 0.$$

При $\omega > 2$ это условие выполнено при всех γ . Если особая точка Z_7 лежит в «дозвуковой» области, то на плоскости $m = 0$ она является притягивающей. Собственное число $\lambda_m = \omega \frac{4 - 3\gamma}{3\gamma - (1 + \omega)}$. Поэтому при $\gamma < 4/3$ имеется одномерная выходящая из Z_7 сепаратриса ($\lambda \rightarrow 0$), а при $\gamma > 4/3$ имеется трехмерная входящая в Z_7 сепаратриса ($\lambda \rightarrow \infty$, точка Z_7 является притягивающей). Если (при $\omega < 2$) особая точка Z_7 лежит в «сверхзвуковой» области $L < 0$, то на плоскости $m = 0$ особая точка Z_7 является седлом.

Поэтому при $\gamma < 4/3$ имеется двумерная выходящая из Z_7 сепаратриса ($\lambda \rightarrow 0$), а при $\gamma > 4/3$ имеется двумерная входящая в Z_7 сепаратриса ($\lambda \rightarrow \infty$). Соответствующие асимптотики при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= C_1 A r^{3-\omega} \lambda^a, & \rho &= \frac{(3\gamma-1)a}{4\pi\omega} C_1 A r^{-\omega} \lambda^a, \\ p &= \frac{3(\gamma-1)}{2\pi(3\gamma-1)[2(\omega-1)-3\gamma(\omega-2)]} C_1 A^2 G r^{-2(\omega-1)} \lambda^{\omega+a}, & (2.6) \\ v &= \frac{2}{3\gamma-1} \frac{r}{t}, & a &= \omega \frac{3-\omega}{3\gamma-(1+\omega)}. \end{aligned}$$

V. Решения, имеющие расширяющуюся пустоту внутри газа, при $\omega = 5/2$ подробно исследованы в книге [7]. Здесь мы укажем условия существования таких решений при произвольных γ , ω и приведем их асимптотики на внутренней границе. Решения с расширяющейся пустотой соответствуют сепаратрисам особых точек Z_4 , Z_5 , Z_6 ($\omega > 2$) и линии особых точек \mathcal{L}_3 ($\gamma = \gamma_1$):

$$\begin{aligned} Z_4 (v_0 = m_2 = \rho_0 = 0): & \lambda_{v_0} = -\frac{4(\omega-1)-6\gamma}{\gamma\omega}, \\ & \lambda_{m_2} = 4 \frac{3-\omega}{\omega}, \quad \lambda_{\rho_0} = \frac{2(\omega-1)-\gamma\omega}{\gamma\omega}; \\ Z_5 (v_4 = m_2 = u = 0): & \lambda_{v_4} = 2 \frac{3-\omega}{\omega}, \quad \lambda_{m_2} = 4 \frac{3-\omega}{\omega}, \\ & \lambda_u = \frac{\gamma\omega-2(\omega-1)}{\gamma\omega}; \\ \mathcal{L}_3 \left(\gamma = \gamma_1 = \frac{2(\omega-1)}{\omega} \right) & (v_4 = m_2 = 0, \quad 0 \leq u \leq \infty): \\ & \lambda_{v_4} = 2 \frac{3-\omega}{\omega}, \quad \lambda_{m_2} = 4 \frac{3-\omega}{\omega}, \quad \lambda_u = 0. \end{aligned}$$

Особая точка Z_4 является отталкивающей при $2(\omega-1)/3 < \gamma < \gamma_1$, особая точка Z_5 является отталкивающей при $\gamma > \gamma_1$, а линия особых точек \mathcal{L}_3 является отталкивающей при $\gamma = \gamma_1$. При таких значениях параметров сепаратрисы, выходящие из особых точек Z_4 , Z_5 , \mathcal{L}_3 имеют при $\lambda \rightarrow \lambda_1$ устойчивую асимптотику

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{r^3}{Gt^2} C_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right)^a, & \rho &= \frac{C_1}{Gt^2} \frac{3-\omega}{2\pi\omega b} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right)^{a-1}, \\ p &= \frac{r^2}{Gt^2} C_2, & v &= \frac{r}{t} \left(\frac{2}{\omega} - b \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right) \right), & (2.7) \\ a &= \gamma \frac{3-\omega}{3\gamma-2(\omega-1)}, & b &= 2 \frac{3\gamma-2(\omega-1)}{\gamma\omega}. \end{aligned}$$

Особая точка Z_6 ($\omega > 2$) ($v_4 = -\frac{\omega(3-\omega)}{\gamma(\omega-2)}$, $m_2 = u = 0$) является неустойчивой: $\lambda_{v_4} = -\lambda_{m_2} = \frac{2(3-\omega)}{\omega}$, $\lambda_u = \frac{3\gamma-(1+\omega)}{\omega}$.

При $\gamma > \frac{1+\omega}{3}$ имеется двумерная выходящая из Z_6 сепаратри-са, которой соответствует следующая асимптотика при $\lambda \rightarrow \lambda_1$:

$$\begin{aligned} M &= \frac{r^3}{Gt^2} C_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right)^c, & \rho &= \frac{C_1}{Gt^2} \frac{3-\omega}{2\pi\omega d} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right)^{c-1}, \\ p &= \frac{r^2}{Gt^4} \frac{\omega-2}{2\pi\omega^2} C_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right)^c, & v &= \frac{r}{t} \left(\frac{2}{\omega} - d \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right) \right), \\ c &= \gamma \frac{3-\omega}{3\gamma - (1+\omega)}, & d &= 2 \frac{3\gamma - (1+\omega)}{\gamma\omega}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В асимптотиках (2.7), (2.8) масса газа внутри расширяющейся сферы $\lambda = \lambda_1$ равна нулю, т. е. внутри этой сферы пустота. В асимптотике (2.7) давление газа на внутренней границе $p \neq 0$, т. е. газ вытесняется некоторым «сферическим поршнем» [7], моделью которого может служить бесконечно нагретый газ (температура $T = \infty$, плотность $\rho = 0$). При $\gamma > \gamma_1$ на внутренней границе плотность газа $\rho \rightarrow \infty$, следовательно, температура газа $T \sim p/\rho \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1$. Поэтому в реальном, неавтомодельном решении на внутренней границе возникнет интенсивный теплообмен с бесконечно горячим газом внутри полости, который приведет к заполнению пустоты газом с ненулевой плотностью.

Другой тип неустойчивости внутренней границы связан с известным механизмом возникновения тейлоровской неустойчивости [128, 129]. А именно, при $\omega < 2$ ускорение внутренней границы $a_1 > 0$, т. е. в системе, связанной с внутренней границей, ускорение направлено в сторону пустоты, что и приводит к тейлоровской неустойчивости газа; при $\omega > 2$ этой неустойчивости нет. При $\gamma < \gamma_1$ (в этом случае $\omega > 2$, $\gamma < 4/3$) плотность газа $\rho \rightarrow 0$ и температура $T \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1$, поэтому внутренняя граница устойчива относительно рассмотренных возмущений.

В асимптотике (2.8) на внутренней границе $p \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1$, т. е. эта асимптотика описывает расширение газа со свободной внутренней границей, которая в силу $\omega > 2$ (ускорение $a_1 < 0$) является устойчивой.

Из условий существования асимптотик (2.7), (2.8) следует важный вывод: при $\gamma < 2(\omega - 1)/3$ (при этом $\omega > 5/2$) автомодельных решений с образованием полости внутри газа не существует. В частности, в этой области значений параметров таких решений нет и в задаче о вспышке звезды.

§ 3. Исследование динамической системы на компонентах границы Γ_2 и Γ_3

На основе проведенного в § 1 разрешения особенностей системы автомодельных уравнений оказывается возможным подробно исследовать асимптотики автомодельной аккреции самогравити-

рующего газа на центр и решения задачи о вспышке звезды. Поведение соответствующих автомодельных решений существенно зависит от поведения динамической системы на компонентах границы Γ_2 и Γ_8 , к рассмотрению которого мы и перейдем в данном параграфе.

1. Исследование динамической системы на компоненте границы Γ_2 . Динамическая система на компоненте границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) имеет шесть невырожденных особых точек: Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, A, B . Особые точки A и B рассмотрены в § 2. Особые точки A и B , как отмечалось в § 1, являются седловыми и не имеют сепаратрис, проходящих внутри физической области; на компоненте границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) особая точка A также является седловой, а особая точка B является притягивающей. Особая точка Z_2 ($v_1 = 0, m_3 = (\gamma - 1)^{-1}, \rho_2 = 0$) имеет следующие собственные числа:

$$\lambda_{v_1} = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)}, \quad \lambda_{m_3} = 1, \quad \lambda_{\rho_2} = -\frac{4 - 3\gamma}{\gamma - 1}. \quad (3.1)$$

Эта особая точка имеет сепаратрисы, проходящие внутри физической области, при $4/3 < \gamma < 5/3$, и является при этом отталкивающей. Выходящие из особой точки Z_2 сепаратрисы при $4/3 < \gamma < 5/3$ определяют устойчивую асимптотику аккреции газа на центр, которая обсуждается в § 4.

Динамическую систему на компоненте границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) удобно рассмотреть в координатах v_0, m_2 , в которых она имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{d\tau_3} &= v_0 \left(\frac{6\gamma - 4(\omega - 1)}{\gamma\omega} + 3v_0 + m_2 \right) = P, \\ \frac{dm_2}{d\tau_3} &= m_2 \left(4 \frac{3 - \omega}{\omega} + 4v_0 + \gamma m_2 \right) = Q. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Особая точка Z_3 ($v_0 = -2/\omega, m_2 = 4(\omega - 1)/\gamma\omega, \rho_0 = 0$) имеет следующие собственные числа:

$$\begin{aligned} \lambda_{v_0, m_2} &= \lambda_{\pm} = \{2\omega - 5 \pm [(2\omega - 5)^2 - 8(\omega - 1)(4 - 3\gamma)/\gamma]^{1/2}\} \omega^{-1}, \\ \lambda_{\rho_0} &= 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Особая точка Z_3 является отталкивающей при $\gamma < 4/3, 5/2 < \omega < 3$ и неустойчивой при $\gamma < 4/3, 1 < \omega < 5/2$ и $\gamma > 4/3, 1 < \omega < 3$. Сепаратрисы, выходящие из особой точки Z_3 , имеют в указанных случаях размерности 3, 1 и 2 соответственно. Для исследования модели вспышек звезд оказывается существенным следующее обстоятельство. Выходящая из особой точки Z_3 одномерная сепаратриса, соответствующая собственному числу $\lambda_{\rho_0} = 1$, интегрируется явно и является следующей траекторией X системы (1.14):

$$V = 0, \quad z = \frac{\gamma}{2(\omega - 1)} m. \quad (3.4)$$

Траектории X соответствует точное решение уравнений газовой динамики, описывающее равновесное состояние газа:

$$\rho = \frac{c_1 A}{r^\omega}, \quad p = \frac{2\pi c_1^2 A^2 G}{(\omega - 1)(3 - \omega)} r^{2(1-\omega)}, \quad M = \frac{4\pi c_1 A}{3 - \omega} r^{3-\omega}, \quad v = 0. \quad (3.5)$$

Остальные сепаратрисы, выходящие из особой точки Z_3 , описывают приближение газа при $\lambda \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) к равновесному состоянию (3.5).

При $\gamma < \gamma_2 = 4 [3 + (2\omega - 5)^2/8 (\omega - 1)]^{-1} < 4/3$ собственные числа λ_{\pm} (3.3) комплексные, т. е. особая точка Z_3 на компоненте границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) является фокусом и все траектории в ее

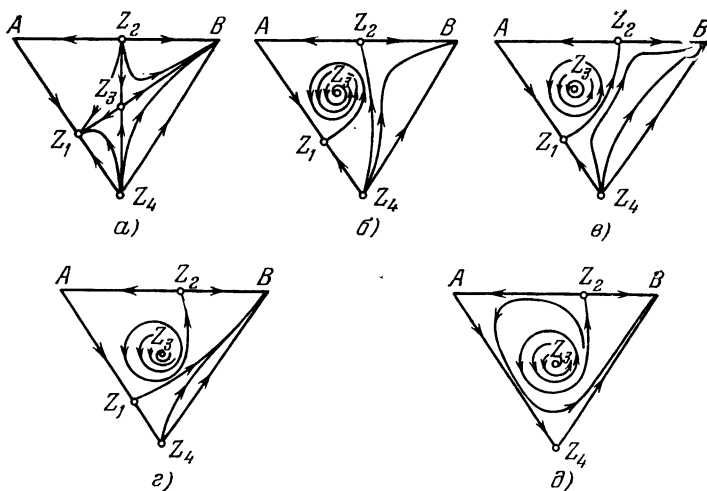


Рис. 27. Фазовые портреты динамической системы (3.2) на компоненте границы Γ_2 : а) $\gamma > 4/3$, $1 < \omega < 3$; б) $\gamma < 4/3$, $\omega < 5/2$; в) $\gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$; г) $\gamma < 4/3$, $5/2 < \omega < 1 + 3\gamma/2$; д) $\gamma < 4/3$, $1 + 3\gamma/2 < \omega < 3$.

окрестности (кроме выходящей сепаратрисы X) вращаются вокруг этой точки (при $1 < \omega < 5/2$, $\gamma < \gamma_2$ фокус Z_3 является притягивающим (на плоскости $\rho_0 = 0$), а при $5/2 < \omega < 3$, $\gamma < \gamma_2$ — отталкивающим). В соответствующих решениях скорость газа v колеблется около нуля (поскольку в особой точке Z_3 имеем $V = 0$) и газ совершает радиальные колебания.

При $\gamma > 4/3$ особая точка Z_3 на компоненте границы Γ_2 согласно (3.3) является седловой. В этом случае фазовый портрет динамической системы (3.2) на Γ_2 однозначно определяется свойствами особых точек и указан на рис. 27, а. При $\gamma < 4/3$ собственные числа λ_{\pm} (3.3) имеют одинаковый знак вещественных частей, по-

этому для установления фазового портрета динамической системы (3.2) необходимо исследовать наличие у этой системы предельных циклов.

Система (3.2) принадлежит к общему классу двумерных динамических систем вида $\dot{x} = xL_1$, $\dot{y} = yL_2$, где L_1 и L_2 — линейные функции от x , y , изученному в работе [130]. Следуя методу работы [130], найдем, что для функции

$$B = v_0^{k-1} m_2^{h-1}, \quad k = \frac{\gamma}{3\gamma - 4}, \quad h = -\frac{3(\gamma - 1)}{3\gamma - 4},$$

справедливо тождество

$$\frac{\partial B P}{\partial v_0} + \frac{\partial B Q}{\partial m_2} = \frac{2(\omega - 5)}{\omega} B.$$

Отсюда, согласно критерию Дюлака — Бендиксона, следует, что система (3.2) на компоненте границы Γ при $\omega \neq 5/2$ не имеет замкнутых траекторий (а также сепаратрисных циклов). Этот факт вместе с полученной выше информацией об особых точках Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 , A и B позволяет полностью восстановить фазовый портрет динамической системы (3.2). В зависимости от значений параметров γ , ω фазовые портреты показаны на рис. 27.

Случай $\omega = 5/2$ является особым: в этом случае динамическая система (3.2) имеет первый интеграл

$$F_1 = \left| \frac{4}{5\gamma} + \frac{v_0}{\gamma - 1} + m_2 \right|^{4-3\gamma} |v_0|^{-\gamma} m_2^{3(\gamma-1)}. \quad (3.6)$$

При $\gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$ особая точка Z_3 на компоненте границы Γ_2 является центром: $\operatorname{Re} \lambda_{\pm} = 0$. Интеграл F_1 в точке Z_3 имеет минимум. Поэтому все траектории динамической системы (3.2), совпадающие с линиями уровня интеграла F_1 , в области $4/(5\gamma) + v_0/(\gamma - 1) + m_2 < 0$ являются замкнутыми кривыми (см. рис. 27, е).

Таким образом, при $5/2 \leq \omega < 3$, $\gamma < 4/3$ особая точка Z_3 является устойчивой при $\lambda \rightarrow 0$. Траектории динамической системы (1.14) — (1.34), движущиеся в окрестности особой точки Z_3 , при $5/2 \leq \omega < 3$, $\gamma < \gamma_2$ определяют автомодельные решения, в которых при $\lambda \rightarrow 0$ происходит бесконечное число радиальных колебаний газа. Выведем асимптотические формулы (при $\lambda \rightarrow 0$) для таких автомодельных решений. Для этого достаточно проинтегрировать линейную часть системы (1.34) в окрестности точки Z_3 . Линеаризованная в окрестности точки Z_3 ($v_0 = -\frac{2}{\omega}$, $m_2 = \frac{4(\omega - 1)}{\gamma\omega}$, $\rho_0 = 0$) система (1.34) после перехода к переменной $\tau = \ln \lambda$ и координатам $x_0 = v_0 + \frac{2}{\omega} = V$, $y_0 = m_2 - \frac{4(\omega - 1)}{\gamma\omega}$

имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -3x_0 - y_0, \\ \dot{y}_0 &= \frac{2(\omega - 1)}{\gamma} (4x_0 + \gamma y_0), \\ \dot{\rho}_0 &= \rho_0 \frac{\omega}{2} \left(1 + \left(\frac{\omega}{2} - 1 \right) x_0 + \frac{\gamma - 1}{2} y_0 \right). \end{aligned}$$

Эта система легко интегрируется:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2} x_0 = x &= C_1 \lambda^{\omega - 5/2} \sin(\beta(\ln \lambda) + \theta), \\ \frac{\gamma \omega}{4(\omega - 1)} y_0 = y &= -\frac{\gamma}{2(\omega - 1)} C_1 \lambda^{\omega - 5/2} [(\omega + 1/2) \sin(\beta(\ln \lambda) + \theta) + \\ &\quad + \beta \cos(\beta \ln \lambda + \theta)], \quad (3.7) \\ \rho_0^2 &= C_2 \lambda^\omega (1 + u), \\ u &= 2C_1 \lambda^{\omega - 5/2} \left[\left((\omega - 5/2) \alpha - \frac{\gamma - 1}{2} \right) \sin(\beta \ln \lambda + \theta) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \beta \cos(\beta \ln \lambda + \theta) \right]. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = \gamma \frac{\omega - 3\gamma + 1}{4(\omega - 1)(4 - 3\gamma)}, \quad \beta = \left(\frac{2(\omega - 1)(4 - 3\gamma)}{\gamma} - (\omega - 5/2)^2 \right)^{1/2},$$

β — мнимая часть собственных чисел λ_{\pm} (3.3) (при $\gamma < \gamma_2$), C_1 , C_2 , θ — произвольные постоянные. Полученные решения (3.7) после пересчета в исходные координаты V , m , R , P :

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{\omega} x, & m &= \frac{m_2}{\rho_0^2 |v_0|} = \frac{2(\omega - 1)(1 + y)}{\gamma \rho_0^2 (1 - x)}, \\ R &= \frac{(1 - 3/\omega)m}{2\pi(V - 2/\omega)}, & P &= \frac{1}{\gamma} zR = \frac{R}{\gamma \rho_0^2} \end{aligned}$$

и подстановки в (1.8) приводят к следующим асимптотическим формулам для автомодельных решений при $5/2 \leq \omega < 3$, $\gamma < \gamma_2$, $\lambda \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} v &= \frac{r}{t} \frac{2}{\omega} x, & \rho &= \frac{C_0 A}{r^\omega} (1 + 2x + y - u), \\ p &= \frac{2\pi C_0^2 A^2 G}{(\omega - 1)(3 - \omega)} r^{2(1 - \omega)} (1 + 2x + y - 2u), \quad (3.8) \\ m &= \frac{4\pi}{3 - \omega} C_0 A r^{3 - \omega} (1 + x + y - u). \end{aligned}$$

Здесь $C_0 = C_2 (\omega - 1)(3 - \omega)/2\pi\gamma$, функции u , x , y определены в (3.7). Формулы (3.7) — (3.8) описывают асимптотический характер автомодельных колебаний самогравитирующего газа в окрестно-

сти равновесного состояния (3.5), которое является пределом (3.8) при $x^2 + y^2 + u^2 \rightarrow 0$. Область применимости формул (3.7) — (3.8) определяется условиями: при $\omega = 5/2$, $\gamma < 4/3$ $C_1 \ll 1$, $\lambda \rightarrow 0$; при $\omega > 5/2$, $\gamma < \gamma_2$ $C_1 \lambda^{\omega-5/2} \ll 1$, $\lambda \rightarrow 0$.

При $\omega > 5/2$, $\gamma < \gamma_2$ автомодельные колебания самогравитирующего газа являются затухающими, при этом во всем пространстве $r > 0$ диссипация энергии отсутствует в силу адиабатичности движения газа. Покажем, что в этих автомодельных решениях отсутствует также поток энергии к центру симметрии $r = 0$, где решение (3.8) имеет сингулярность. Плотность энергии (на единицу массы) идеального самогравитирующего газа имеет вид

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{(\gamma-1)\rho} - \frac{GM}{r}.$$

Полное количество энергии, перенесенной газом через сферу радиуса r_0 , и совершенной при этом работы против сил давления в течение бесконечного отрезка времени $t_0 < t < \infty$ определяется формулой

$$\Phi(r_0) = \int_{t_0}^{\infty} 4\pi r_0^2 (\rho\varepsilon + p) v dt = 4\pi r_0^2 \int_{t_0}^{\infty} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p - \frac{\rho GM}{r_0} \right) v dt.$$

Эта величина после подстановки асимптотических формул (3.7) — (3.8) имеет вид ($\lambda_0 = r_0 (AGt_0^2)^{-1/\omega}$)

$$\Phi(r_0) = \frac{8\pi^2 \gamma C_0^2 C_1 A^2 G [\gamma - 2(\omega - 1)(\gamma - 1)]}{\omega(\omega - 1)^2 (3 - \omega)(\gamma - 1)(4 - 3\gamma)} [r_0 (AGt_0^2)^{1/\omega}]^{(5/2-\omega)} \times \\ \times [-(\omega - 5/2) \sin(\beta \ln \lambda_0 + \theta) + \beta \cos(\beta \ln \lambda_0 + \theta)].$$

Функция $\Phi(r_0)$ при $r_0 \rightarrow 0$ осциллирует и бесконечное число раз меняет знак. Это и означает, что в процессе затухающих автомодельных колебаний самогравитирующего газа поток энергии в центр симметрии $r = 0$ отсутствует.

II. Исследование динамической системы на компоненте границы Γ_8 . Динамическая система на компоненте границы Γ_8 ($z = 0$) описывает автомодельные движения самогравитирующей пыли (давление $p = 0$). В этом случае вдоль линий тока плотность энергии $\varepsilon = (v^2/2) - (GM/r)$ остается постоянной, т. е. $d\varepsilon/dt = 0$. Для автомодельных решений $\varepsilon = (r^2/t^2)(V^2/2 - m)$. Обозначим $\varepsilon_1 = V^2/2 - m$. Закон сохранения ε переходит в уравнение

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\tau} = -2\varepsilon_1 \frac{V-1}{V-2/\omega}. \quad (3.9)$$

Система автомодельных уравнений (1.14) на компоненте границы Γ_8 имеет вид

$$V' = -\frac{m + V^2 - V}{V - 2/\omega}, \quad m' = m \frac{2 - 3V}{V - 2/\omega}. \quad (3.10)$$

Эта система имеет монотонную функцию $f = \varepsilon_1 m^\alpha$, $\alpha = (2 - \omega)/(\omega - 3)$:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\omega}{\omega - 3} f, \quad f = f_0 \exp\left(\frac{\omega}{\omega - 3} \tau\right).$$

Из (3.9) легко получаем в явном виде одну точную траекторию системы (3.10):

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \text{или} \quad m = V^2/2.$$

Динамическая система на компоненте границы Γ_8 при $\omega > 2$ имеет пять изолированных невырожденных особых точек: Z_8 ,

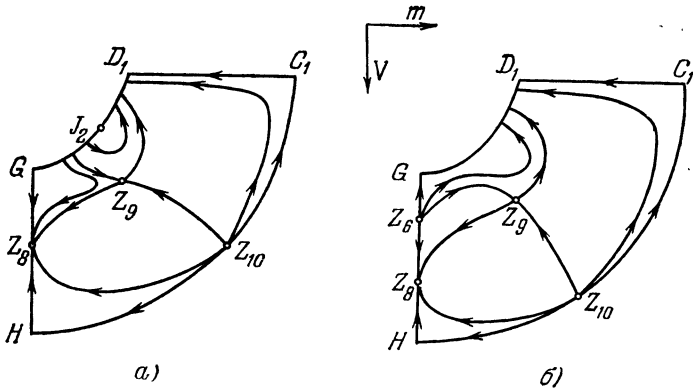


Рис. 28. Фазовые портреты динамической системы (3.10) на компоненте границы Γ_3 : а) $\gamma > 1$, $2 < \omega < 3$; б) $\gamma > 1$, $1 < \omega < 2$.

Z_9 , Z_{10} , C_1 , H (и еще особую точку Z_6 при $\omega < 2$) и отрезок седловых особых точек D_1G . Особые точки на отрезке D_1G и особые точки C_1 , H , как отмечалось в § 1, являются седловыми, и все их сепаратрисы лежат на различных компонентах границы Γ . Особые точки Z_6 ($\omega < 2$) и Z_9 рассмотрены в § 2. Отметим, что особые точки Z_8 , Z_9 и Z_{10} лежат на параболе $m = V^2/2$, которая, таким образом, состоит из сепаратрис этих особых точек.

Особая точка Z_{10} ($\eta = u_2 = 0$, $m_4 = 2^{-1/2}$) имеет следующие собственные числа:

$$\lambda_{m_1} = 1, \quad \lambda_\eta = \frac{3}{2}, \quad \lambda_{u_2} = \frac{5 - 3\gamma}{4}. \quad (3.11)$$

При $1 < \gamma < 5/3$ особая точка Z_{10} является отталкивающей. Сепаратрисам, выходящим из этой особой точки, соответствует устойчивая при $\lambda \rightarrow 0$ асимптотика аккреции газа на центр, которая обсуждается в § 4. При $\gamma > 5/3$ особая точка Z_{10} является седловой, причем двумерная выходящая из Z_{10} сепаратриса лежит на компоненте границы Γ_8 , а одномерная входящая в Z_{10} сепаратриса лежит на компоненте границы Γ_1 .

Особая точка Z_8 ($V = z = m = 0$) является притягивающей, ее собственные числа имеют вид $\lambda_m = \lambda_z = -\omega$, $\lambda_V = -\omega/2$. Траектория X (3.4), выходящая при $\lambda \rightarrow 0$ из особой точки Z_3 , при $\lambda \rightarrow \infty$ входит в особую точку Z_8 . Остальные сепаратрисы, входящие при $\lambda \rightarrow \infty$ в эту особую точку, имеют асимптотику

$$\begin{aligned} M &= \frac{4\pi A_1}{3-\omega} r^{3-\omega}, \quad \rho = A_1 r^{-\omega}, \quad v = (AG)^{1/2} C_3 r^{1-\omega/2}, \\ p &= \frac{4\pi}{(3-\omega)\gamma} \frac{C_1}{C_2} A_1^2 G r^{2(1-\omega)}, \quad A_1 = \frac{3-\omega}{4\pi} AC_2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

причем для сепаратрис, касающихся плоскости $V = 2(\omega - 1)z/\gamma - m$, скорость газа $v = AG(2(\omega - 1)C_1/\gamma - C_2)r^{1-\omega}$. Очевидно, асимптотика (3.12) описывает некоторое возмущение равновесного состояния (3.5).

Проведенное исследование особых точек позволяет полностью восстановить фазовый портрет динамической системы на компоненте границе Γ_8 (рис. 28).

§ 4. Автомодельная аккреция самогравитирующего газа на центр

Автомодельные решения, описывающие при $t \rightarrow \infty$ аккрецию (падение) самогравитирующего газа на центр, соответствуют сепаратрисам особых точек Z_2 , Z_{10} , \mathcal{L} ($\gamma = 5/3$) и \mathcal{L}_2 ($\gamma = 4/3$). Укажем асимптотики аккреции, соответствующие сепаратрисам этих особых точек.

Сепаратрисы, выходящие из отталкивающей при $4/3 < \gamma < 5/3$ особой точки Z_2 , имеют при $\lambda \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) следующую устойчивую асимптотику:

$$\begin{aligned} M &= A^{3/\omega} G^{(3-\omega)/\omega} C_1 t^{2(3-\omega)/\omega}, \\ \rho &= (AG)^{1/(\gamma-1)\omega} \frac{3-\omega}{2\pi\omega G} C_1 C_2 r^{-1/(\gamma-1)} t^{2(1/(\gamma-1)\omega-1)}, \\ p &= (AG)^{(3\gamma-2)/(\gamma-1)\omega} \frac{(3-\omega)(\gamma-1)}{2\pi\gamma\omega G} C_1^2 C_2 r^{-\gamma/(\gamma-1)} t^{-2(2-(3\gamma-2)/(\gamma-1)\omega)}, \\ v &= -\frac{1}{C_2} (AG)^{(3\gamma-4)/(\gamma-1)\omega} r^{(3-2\gamma)/(\gamma-1)} t^{-1-2(4-3\gamma)/(\gamma-1)\omega}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Сепаратрисам, выходящим из отталкивающей при $1 < \gamma < 5/3$ особой точки Z_{10} , соответствует устойчивая при $\lambda \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) асимптотика

$$\begin{aligned} M &= (AG)^{3/\omega} \frac{C_1^2}{2G} t^{2(3-\omega)/\omega}, \\ \rho &= (AG)^{3/2\omega} \frac{(3-\omega)C_1}{4\pi\omega G} r^{-3/2} t^{(3-2\omega)/\omega}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$p = (AG)^{(4+3\gamma)/2\omega} \frac{C_2}{G} r^{-3\gamma/2} t^{(4+3\gamma)/\omega-4},$$

$$v = -(AG)^{3/2\omega} C_1 r^{-1/2} t^{(3-\omega)/\omega}.$$

Особые точки на линии \mathcal{L} ($\gamma = 5/3$) ($\rho_0 = 0$, $m_1^3 = -v_1(3 + v_1^2)/2$, $-\infty \leq v_1 \leq 0$) являются отталкивающими и имеют следующие собственные числа: $\lambda_{\rho_0} = -3v_1/2$, $\lambda_2 = -v_1$, $\lambda_3 = 0$. Сепаратрисы, выходящие из этих особых точек, имеют при $\lambda \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) следующую устойчивую асимптотику

$$M = (AG)^{3/\omega} \frac{3 + v_1^2}{2G} C_1^2 t^{2(3-\omega)/\omega},$$

$$\rho = (AG)^{3/2\omega} a r^{-3/2} t^{(3-2\omega)/\omega}, \quad a = \frac{(3-\omega)(3+v_1^2)C_1}{4\pi\omega G |v_1|}, \quad (4.3)$$

$$p = (AG)^{3/2\omega} \frac{a}{\gamma} C_1^2 r^{-5/2} t^{(3-4\omega)/\omega}, \quad v = v_1 (AG)^{3/2\omega} C_1 r^{-1/2} t^{(3-\omega)/\omega}.$$

В асимптотиках (4.1) — (4.3) газ падает на центр за конечное время. В центре $r = 0$ образуется точечная масса, растущая со временем. Поэтому эти асимптотики описывают в классической теории аккрецию газа на «черную дыру». При этом в центре симметрии давление, плотность, температура и скорость газа бесконечны. В асимптотике (4.1) число Маха течения газа $M \rightarrow 0$, в асимптотике (4.2) $M \rightarrow \infty$, а в асимптотике (4.3) $M \rightarrow |v_1|$ при $\lambda \rightarrow 0$. Особым точкам на линии \mathcal{L}_2 ($\gamma = 4/3$) соответствует устойчивая асимптотика аккреции (2.5) (при $m_2 > 3$ ($\omega - 1$)/ ω). В этой асимптотике газ падает на центр за бесконечное время, масса в центре $M(0) = 0$ и «черная дыра» не образуется.

Проведенное в §§ 2—4 полное исследование всех особых точек динамической системы на многообразии S показывает, что асимптотиками (4.1) — (4.3) и (2.5) исчерпываются все возможные асимптотики автомодельной аккреции. Таким образом, автомодельная аккреция самогравитирующего газа на центр при $1 < \gamma < 4/3$ имеет при $t \rightarrow \infty$ асимптотику (4.2); при $\gamma = 4/3$ возможны две асимптотики (2.5) и (4.2); при $4/3 < \gamma < 5/3$ возможны две асимптотики (4.1) и (4.2); при $\gamma = 5/3$ реализуется асимптотика (4.3). При $\gamma > 5/3$ автомодельной аккреции самогравитирующего газа не существует.

Используя построенные в § 3 фазовые портреты динамической системы на компонентах границы Γ_2 и Γ_3 , можно получить полное (при всех $0 < \lambda < \infty$) качественное описание некоторых автомодельных решений, в которых отсутствуют ударные волны. Действительно, согласно фазовому портрету рис. 27 при $\omega > 2$ и $4/3 < \gamma_3 = 2(\omega - 1)/3(\omega - 2) < \gamma < 5/3$ (в этом случае $\omega > 8/3$) имеется целая область многообразия S , заполненная

устойчивыми траекториями, выходящими при $\lambda \rightarrow 0$ из отталкивающей особой точки Z_2 и входящими при $\lambda \rightarrow \infty$ в притягивающую особую точку Z_1 . В соответствующих автомодельных решениях газ при $t \ll 1$ разлетается от центра с асимптотикой (2.1), затем при возрастании t происходит поворот направления движения газа и при дальнейшем возрастании t газ падает на центр (на «черную дыру») за конечное время, при этом реализуется асимптотика аккреции (4.1).

При $4/3 < \gamma < \gamma_3$ особая точка Z_1 является седловой (см. § 2) и имеет одномерную выходящую сепаратрису, которая лежит на компоненте границы Γ_7 и входит (при $\omega > 2$) в притягивающую особую точку Z_7 (см. рис. 26). Поэтому при $4/3 < \gamma < \gamma_3$, $\omega > 2$ имеется область S , заполненная устойчивыми траекториями, выходящими при $\lambda \rightarrow 0$ из отталкивающей особой точки Z_2 и входящими при $\lambda \rightarrow \infty$, после движения вдоль сепаратрис Z_2Z_1 , Z_1Z_7 , в притягивающую особую точку Z_7 . Эти решения имеют при $t \ll 1$ асимптотику разлета (2.6), в остальном они подобны описанным выше решениям.

При тех же значениях параметров γ , ω находим, что имеется целая область многообразия S , заполненная устойчивыми траекториями, выходящими при $\lambda \rightarrow \lambda_1$ из отталкивающей особой точки Z_5 и входящими при $\lambda \rightarrow \infty$, после движения вдоль сепаратрис Z_5Z_4 , Z_4Z_1 при $\gamma_3 < \gamma < 5/3$ (и вдоль сепаратрис Z_5Z_4 , Z_4Z_1 , Z_1Z_7 при $4/3 < \gamma < \gamma_3$), в притягивающую особую точку Z_1 (соответственно Z_7). В соответствующих решениях газ монотонно разлетается от центра, причем на бесконечности r реализуется асимптотика разлета (2.1) (соответственно (2.6)), а внутри газа образуется расширяющаяся с асимптотикой (2.7) пустота.

Описанные два класса решений разделяются неустойчивой двумерной сепаратрисой, выходящей при $\lambda \rightarrow 0$ из седловой особой точки Z_3 и входящей при $\lambda \rightarrow \infty$ в притягивающую особую точку Z_1 (Z_7). Соответствующие автомодельные решения описывают неустойчивый процесс формирования равновесного состояния (3.5) из первоначально разлетавшегося с асимптотикой (2.1) (соответственно (2.6)) газа.

Совершенно аналогично, используя фазовые портреты рис. 28, получим, что при $1 < \gamma < 5/3$ целая область многообразия S заполнена устойчивыми траекториями, выходящими при $\lambda \rightarrow 0$ из отталкивающей особой точки Z_{10} и входящими при $\lambda \rightarrow \infty$ в притягивающую особую точку Z_8 . Соответствующие автомодельные решения описывают интенсивную аккрецию (число Маха $M \rightarrow \infty$) самогравитирующего газа на центр (асимптотика (4.2)) из первоначального состояния (3.12), являющегося некоторым возмущением (за счет наличия движения газа при $t = 0$) равновесного состояния (3.5). В этих решениях скорость газа v при $t = 0$ может иметь любой знак. При $\omega > 2$ в асимптотике (3.12) скорость

газа $v \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, поэтому указанные решения описывают в классической теории коллапс звезды с образованием в центре «черной дыры» из асимптотически (при $r \rightarrow \infty$) равновесного состояния (3.12).

Отметим, что при $\gamma = 5/3$ и $\gamma = 4/3$ также существуют автомодельные решения, аналогичные описанным выше и имеющие асимптотики аккреции (4.3) и (2.5).

§ 5. Новые решения в модели вспышек звезд

I. Постановка задачи. Напомним физическую постановку модели вспышек звезд, следуя работам [7, 116]. В этой модели предполагается, что в начальный момент времени звезда образована массой идеального самогравитирующего газа, находящейся в состоянии равновесия:

$$\rho = \frac{c_1 A}{r^\omega}, \quad p = \frac{2\pi c_1^2 A^2 G}{(\omega - 1)(3 - \omega)} r^{2(1-\omega)}, \quad M = \frac{4\pi c_1 A}{3 - \omega} r^{3-\omega}, \quad v = 0, \quad (5.1)$$

где $1 < \omega < 3$, c_1 — безразмерная постоянная. Затем из центра симметрии $r = 0$ в результате выделения энергии (например, взрыва) или потери устойчивости начинает распространяться ударная волна — разрыв физических параметров газа (плотности, давления, скорости газа и энтропии). Предполагается, что движение газа за ударной волной является автомодельным, т. е. параметры газа имеют вид

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{Gt^2} R(\lambda), & p &= \frac{r^2}{Gt^4} P(\lambda), \\ M &= \frac{r^3}{Gt^2} m(\lambda), & v &= \frac{r}{t} V(\lambda), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где автомодельная переменная $\lambda = r/(AGt^2)^{1/\omega}$. Отметим, что равновесное состояние (5.1) также является автомодельным: этому решению соответствуют безразмерные функции

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= c_1 \lambda^{-\omega}, & P(\lambda) &= \frac{2\pi c_1^2}{(\omega - 1)(3 - \omega)} \lambda^{-2\omega}, \\ m(\lambda) &= \frac{4\pi c_1}{3 - \omega} \lambda^{-\omega}, & V(\lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

После преобразования в переменные $z = \gamma P/R$, m , V равновесному состоянию (5.1) соответствует траектория X системы автомодельных уравнений (1.14):

$$V = 0, \quad z = \frac{\gamma}{2(\omega - 1)} m. \quad (5.4)$$

Закон движения ударной волны в автомодельном решении есть $\lambda = \lambda_*$. Скорость распространения ударной волны $v_* = \frac{2}{\omega} \lambda_* (AG)^{1/\omega} t^{(2-\omega)/\omega}$, поэтому при $\omega > 2$ ударная волна замедляется при удалении от центра, а при $\omega < 2$ ускоряется. На фронте ударной волны выполнены условия сохранения массы, количества движения и потока энергии, которые после пересчета в безразмерные переменные принимают вид (индексы 1 и 2 указывают величины по разные стороны разрыва)

$$\begin{aligned} R_1 (V_1 - 2/\omega) &= R_2 (V_2 - 2/\omega), \quad m_1 = m_2, \\ V_1 - \frac{2}{\omega} + \frac{z_1}{\gamma(V_1 - 2/\omega)} &= V_2 - \frac{2}{\omega} + \frac{z_2}{\gamma(V_2 - 2/\omega)}, \\ (V_1 - \frac{2}{\omega})^2 + \frac{2z_1}{\gamma-1} &= (V_2 - \frac{2}{\omega})^2 + \frac{2z_2}{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

При преобразовании (5.5) (величины с индексом 2 переходят в величины с индексом 1) траектория X (5.4) отображается в линию $Y(q)$:

$$z = \frac{4(2\gamma - (\gamma - 1)q)(\gamma - 1 + 2q)}{\omega^2(\gamma + 1)^2}, \quad m = \frac{8(\omega - 1)}{\gamma\omega^2} q, \quad V = \frac{4(1 - q)}{(\gamma + 1)\omega}. \quad (5.6)$$

Автомодельные решения, которые сопрягаются через ударную волну с равновесным состоянием газа (5.1), соответствуют траекториям системы (1.14), входящим при некотором $\lambda = \lambda_*$ в точки на линии $Y(q)$ ($0 < q < 1$); при $\lambda_* < \lambda < \infty$ решение определяется отрезком траектории X (5.4) (при этом траектория при $\lambda < \lambda_*$ лежит в «дозвуковой» области $L = z - (V - 2/\omega)^2 > 0$ многообразия S , а отрезок траектории X при $\lambda > \lambda_*$ лежит в «сверхзвуковой» области $L < 0$). Поскольку на ударной волне $m_1 = m_2$, то, сопоставляя выражения для m из (5.3) и (5.6), находим, что

$$q = \frac{\pi\gamma\omega^2 c_1}{2(\omega - 1)(3 - \omega)} \lambda_*^{-\omega}. \quad (5.7)$$

Таким образом, решения задачи о вспышке звезды определяются единственным параметром $q = M^{-2}$, где $M > 1$ — число Маха движения ударной волны по покоящемуся газу.

Для равновесного состояния (5.1) полная энергия (гравитационная плюс тепловая) шарового слоя $r_1 < r < r_2$ имеет вид

$$E = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{p}{\gamma - 1} - \frac{\rho G M}{r} \right) 4\pi r^2 dr,$$

$$\omega \neq 5/2: E = 8\pi^2 \frac{1 - 2(\omega - 1)(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)(\omega - 1)(3 - \omega)} c_1^2 G A^2 \frac{1}{5 - 2\omega} r^{5-2\omega} \Big|_{r_1}^{r_2}, \quad (5.8)$$

$$\omega = 5/2: E = c_1^2 G A^2 \frac{32\pi^2(4 - 3\gamma)}{3(\gamma - 1)} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

При $\omega < 5/2$ полная энергия E шара радиуса r конечна, а при $\omega \geq 5/2$ бесконечна, причем $E < 0$ при $\gamma > \gamma_4$ и $E \geq 0$ при $\gamma \leq \gamma_4$, где $\gamma_4 = (2\omega - 1)/2 (\omega - 1)$.

Решения задачи о вспышке звезды в рассматриваемом классе движений газа при $\omega > 5/2$ вследствие расходимости энергии на нижнем пределе (см. (5.8)) являются некоторыми промежуточными асимптотиками, применимыми вне малой окрестности центра $r = 0$. Решения с $\gamma \leq \gamma_4$ ($E \geq 0$) описывают разрушение неустойчивого равновесия звезды. Закон выделения энергии в автомодельном решении имеет вид

$$E = \alpha G^{5/\omega-1} A^{5/\omega} t^{2(5-2\omega)/\omega}. \quad (5.9)$$

Выделившаяся энергия E не зависит от времени только при $\omega = 5/2$ или при $\alpha = 0$. Константа α вычисляется из самого решения путем сравнения полной энергии (5.8) газового шара радиуса r в равновесном состоянии и его энергии в момент выхода ударной волны на поверхность шара; таким образом, α является функцией от числа Маха движения ударной волны M . В некоторых случаях константа α оказывается бесконечной. Соответствующие решения являются асимптотиками очень сильного взрыва ($E \gg 1$).

II. Исследование особой точки $Y_1 = Y$ (1). Для изучения решений задачи о вспышке звезды при числах Маха $M \approx 1$ необходимо исследовать поведение траекторий динамической системы (1.14) в окрестности точки $Y_1 = Y$ (1):

$$z = \frac{4}{\omega^2}, \quad m = \frac{8(\omega-1)}{\gamma\omega^2}, \quad V = 0. \quad (5.10)$$

Точка Y_1 лежит на поверхности непродолжимости решений $L = 0$ и является неподвижной точкой отображения (5.5). В этой точке пересекаются три линии — линия $Y(q)$ (5.6), траектория X (5.4) и линия особых точек $I_1 I_4$. Точка Y_1 делит линию $Y(q)$ и траекторию X на две части, лежащие в «дозвуковой» ($L > 0$) и «сверхзвуковой» ($L < 0$) областях многообразия S . Ниже мы исследуем расположение отрезка $Y(q)$, $0 < q < 1$, лежащего в «дозвуковой» области.

Собственные числа (1.37) в особой точке Y_1 принимают вид

$$\lambda_1 = 20\gamma(\omega-2)\omega^{-3}, \quad \lambda_2 = -8\gamma\omega^{-2}, \quad \lambda_3 = 0. \quad (5.11)$$

Собственные числа особых точек на линии $I_1 I_4$, близких к Y_1 , разумеется, получаются из (5.11) непрерывным изменением. Система (1.14) имеет две инвариантные двумерные поверхности L_1 и L_2 , проходящие через линию особых точек $I_1 I_4$ и заполненные сепаратрисами этих особых точек, отвечающими собственным числам λ_1 и λ_2 . Траектория X в «дозвуковой» области $L > 0$ является входящей сепаратрисой особой точки Y_1 и лежит на поверхности L_2 .

Покажем, что отрезок линии $Y(q)$, $0 < q < 1$, в окрестности особой точки Y_1 при $\omega > 10/7$ лежит (в «дозвуковой» области) между поверхностями L_1 и L_2 . Обозначим l_1 , l_2 и l_3 собственные векторы, отвечающие собственным числам λ_1 , λ_2 и λ_3 (5.11) (вектор l_3 касается линии особых точек $I_1 J_4$), и пусть y — вектор, касательный к линии $Y(q)$ в точке Y_1 . Координаты $(\delta z, \delta m, \delta V)$ этих векторов имеют вид

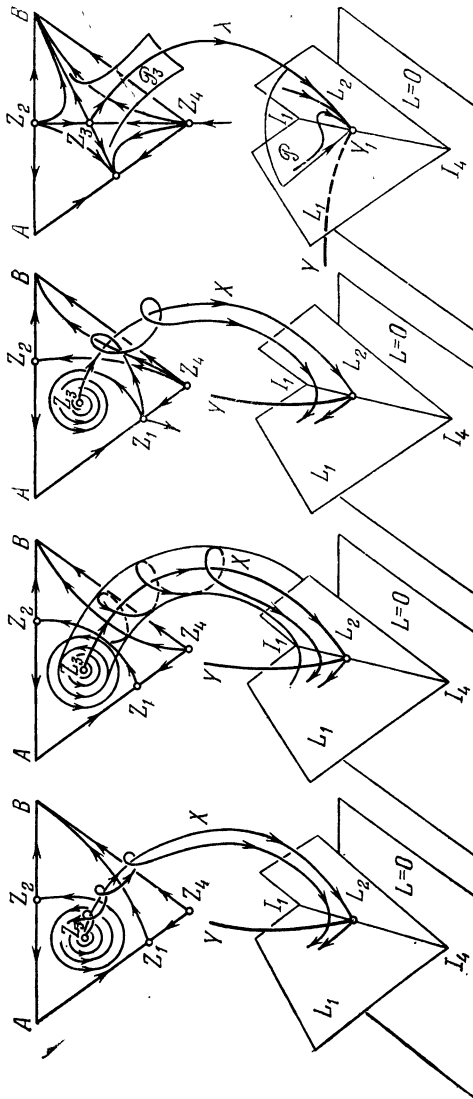
$$\begin{aligned} l_1: & \left(\frac{2}{\omega} \cdot \frac{5(\gamma-1)(\omega-2)-4\omega}{7\omega-10}, \quad -\frac{8(\omega-1)(\gamma+1)}{\gamma(7\omega-10)}, \quad 1 \right), \\ l_2: & \left(\frac{\gamma}{2(\omega-1)}, \quad 1, \quad 0 \right), \\ l_3: & \left(-\frac{4}{\omega}, \quad -\frac{4(\omega-1)+6\gamma-\gamma\omega}{\gamma\omega}, \quad 1 \right), \\ y: & \left(-\frac{3-\gamma}{\omega}, \quad -\frac{2(\omega-1)(\gamma+1)}{\gamma\omega}, \quad 1 \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Поверхность L_1 в точке Y_1 касается двумерной плоскости P_1 , проходящей через векторы l_1 и l_3 , а поверхность L_2 касается плоскости P_2 , проходящей через векторы l_2 и l_3 . Нетрудно вычислить следующие определители:

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(l_1, l_3, y) = \frac{5(\omega-2)(\gamma+1)}{\omega^2(7\omega-10)}(3\omega-10), \\ D_2 &= \det(l_1, l_3, l_2) = -\gamma \frac{5(\omega-2)}{2\omega(\omega-1)}, \\ D_3 &= \det(y, l_3, l_2) = D_2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Поскольку $D_2 = D_3$, то вектор y лежит по ту же сторону от плоскости P_2 , что и вектор l_1 . Поскольку при $\omega > 10/7$ $\text{sign } D_1 = \text{sign } D_2$, то вектор y лежит по ту же сторону от плоскости P_1 , что и вектор l_2 . Следовательно, при $\omega > 10/7$ вектор y лежит между плоскостями P_1 и P_2 , т. е. линия $Y(q)$ в окрестности точки Y_1 лежит между поверхностями L_1 и L_2 (рис. 29, а, б, в).

Все траектории динамической системы (1.14), идущие в окрестности траектории X и не лежащие на поверхности L_2 , при приближении к линии $I_1 J_4$ при $\omega > 10/7$ отклоняются от поверхности L_2 и оказываются в малой окрестности поверхности L_1 (это следует из того, что $\lambda_1 > \lambda_2$ при $\omega > 10/7$). Поскольку при $\omega > 10/7$ линия Y находится между поверхностями L_1 и L_2 , то некоторый отрезок $Y_1 Y(q_0)$ ($q_0 < 1$, числа Маха $M \approx 1$) на линии Y целиком пересечен траекториями, двигавшимися ранее в окрестности траектории X . Это обстоятельство вместе с тем, что траектория X выходит из особой точки Z_3 , лежащей на компоненте границы Γ_2 , позволяет подробно исследовать решения задачи о вспышке звезды при числах Маха движения ударной волны $M \approx 1$. При этом суще-



а)

б)

в)

г)

Рис. 29. К решению задачи о вспышке звезды при числе Маха движения ударной волны $M \approx 1$; а) $\gamma < \gamma_2$, $\omega > 5/2$; б) $\gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$; в) $\gamma < \gamma_2$, $\omega < 5/2$; г) $4/3 < \gamma < \gamma_2$, $1 < \omega < 10/7$.

ственно используются фазовые портреты рис. 27 динамической системы на Γ_2 (см. § 3).

III. Автомодельные решения с бесконечными затухающими радиальными пульсациями газа. Особая точка Z_3 при $\gamma < 4/3$, $\omega > 5/2$ является отталкивающей (см. (3.3)). Поэтому вся окрестность траектории X заполнена сепаратрисами этой особой точки и, следовательно, все решения задачи о вспышке звезды для чисел Маха $M \approx 1$ при $\lambda \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) стремятся к равновесному состоянию (5.1) (см. рис. 29, а). При приближении к равновесному состоянию скорость газа v при $\gamma < \gamma_2 = 4 [3 + (2\omega - 5)^2/8 (\omega - 1)]^{-1}$ имеет бесконечное число колебаний около нуля; см. (3.6) (в этом случае особая точка Z_3 на компоненте границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) является отталкивающим фокусом; см. рис. 29, в). Таким образом, при $\gamma < \gamma_2$, $\omega > 5/2$ в решениях задачи о вспышке звезды при $M \approx 1$ газ после прохождения ударной волны начинает пульсировать, причем все частицы газа совершают бесконечное число затухающих колебаний. Асимптотические формулы для этих колебаний указаны в § 3 (см. (3.7) — (3.8)). При $\omega \rightarrow 5/2$ период (по переменной τ_3) каждого колебания много меньше времени релаксации. Найденные решения являются автомодельными возмущениями, не разрушающими равновесия звезды (которое в целом при $\gamma < 4/3$ является неустойчивым; см. [73]). Полная энергия E газового шара радиуса r согласно (5.8) в этих решениях равна $\pm\infty$ (в зависимости от соотношения γ и γ_4), причем энергия этого же шара после прохождения ударной волны также равна $\pm\infty$, поэтому вопрос о количестве энергии, выделяющейся согласно (5.9) в центре симметрии, в данном случае нельзя решить путем сравнения энергии газового шара до и после вспышки. Однако с помощью асимптотических формул (3.7) — (3.8) можно показать, что в рассматриваемых автомодельных решениях отсутствует направленный поток энергии в центр симметрии (см. § 3, п. I).

IV. Исследование решений задачи о вспышке звезды при $\omega = 5/2$. Рассматриваемый случай представляет особый интерес, поскольку он соответствует мгновенному выделению энергии в центре симметрии (взрыву); см. (5.9). При $\omega = 5/2$ динамическая система (1.14) имеет, кроме монотонной функции (1.36), связанной с интегралом адиабатичности (1.12), еще монотонную функцию «интеграл энергии» [7]:

$$H = -m \left[\frac{z}{\gamma - 1} + \frac{v_0^2}{2} - m + \frac{4}{5} \left(v_0 + \frac{z}{v_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right)^2 \right] = C e^{-5\tau}. \quad (5.14)$$

При $\omega = 5/2$ все особые точки Z_i , кроме Z_3 , Z_4 , Z_5 , лежат на поверхности $H = 0$, инвариантной относительно системы (1.14) и являющейся двумерной сепаратрисой, выходящей из особой

точки Z_6 . Особые точки Z_4, Z_5 лежат в области $H > 0$ (в особой точке Z_3 $H < 0$ при $\gamma < 4/3$ и $H > 0$ при $\gamma > 4/3$). Линия $Y(q)$ (5.6) при $\gamma < 4/3$ лежит в области $H < 0$ (а при $\gamma > 4/3$ — в области $H > 0$). Отсюда получаем следствие.

С л е д с т в и е. *Задача о вспышке звезды при $\gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$ при любом числе Маха ($1 < M < \infty$) движения ударной волны не имеет решений с расширяющейся пустотой внутри газа.*

При $\gamma = 4/3$, $\omega = 5/2$ линия $Y(q)$ лежит на поверхности $H = 0$ — сепаратрисе особой точки Z_6 , что и обуславливает исключительность поведения решений задачи о взрыве звезды при $\gamma = 4/3$ (проинтегрированной в работе [7]). В этом случае все решения с расширяющейся пустотой внутри газа (числа Маха $M > 6$) выходят из особой точки Z_6 и имеют асимптотику (2.8), которая не реализуется для решений при $\gamma \neq 4/3$, $\omega = 5/2$. Кроме этого, при $\gamma = 4/3$, $\omega = 5/2$ решения для чисел Маха $6 > M > 1$ являются сепаратрисами линии особых точек \mathcal{L}_2 , которая отсутствует при $\gamma \neq 4/3$.

Из двух монотонных функций (1.36) и (5.14) можно образовать интеграл системы (1.14) (ранее не использовавшийся), который в координатах (1.21) имеет вид

$$F = |H|^{4-3\gamma} \Phi_{\mu_2}^{-1}, \quad (5.15)$$

$$F = \left| \frac{4}{5\gamma} + \frac{v_0}{\gamma-1} + m_2 + 2^{-1}v_0 \left(v_0 + \frac{4}{5} \right)^2 \rho_0^2 \right|^{4-3\gamma} |v_0|^{-\gamma} m_2^3 (\gamma-1).$$

Интеграл F на траектории X принимает постоянное значение $F = F_0 = \gamma^{-1} (4/5)^{1-\gamma} 3^{3(\gamma-1)} |4-3\gamma|^{4-3\gamma} / (\gamma-1)^{4-3\gamma}$, причем линия X состоит из экстремумов функции F , т. е. первый дифференциал $dF = 0$. Второй дифференциал d^2F на линии X имеет вид

$$d^2F = -F_0 3^{-1} \gamma^2 (\gamma-1) (5/4)^2 (4-3\gamma)^{-1} \times \\ \times [(3dv_0 + dm_2)^2 + 3\gamma^{-1} (4-3\gamma) (1 - (4/5)^2 \rho_0^2) dv_0^2]. \quad (5.16)$$

Рассмотрим отдельно два случая: $\gamma < 4/3$ и $\gamma > 4/3$. При $\gamma < 4/3$ отрезок линии X от точки Z_3 ($\rho_0 = 0$) до точки Y_1 ($\rho_0 = 5/4$) состоит, согласно (5.16), из максимумов функции F . Поэтому поверхности уровня интеграла F в окрестности отрезка $Z_3 Y_1$ на линии X являются двумерными цилиндрами и пересекают компоненту границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) по циклам — замкнутым интегральным кривым динамической системы на Γ_2 . Интеграл F на Γ_2 совпадает с интегралом F_1 (3.6). Как отмечалось в § 3, в области $m_2 + v_0/(\gamma-1) + 4/(5\gamma) < 0$ на компоненте границы Γ_2 все траектории динамической системы (3.2) ($\gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$) (уровни интеграла F) являются циклами. При убывании λ ($\lambda \rightarrow 0$) все циклы, согласно (1.34), являются притягивающими ($\rho_0 \rightarrow 0$). Отсюда нетрудно вывести, что все решения задачи о взрыве звезды

для чисел Маха $M \approx 1$ при $\lambda \rightarrow 0$ наматываются на циклы $F = \text{const}$, $\rho_0 = 0$ (см. рис. 29, б).

Решения задачи о взрыве звезды для чисел Маха $M \gg 1$ соответствуют траекториям системы (1.14), проходящим через линию $Y(q)$ в окрестности точки Y_0 ($q = 0$): $V = 4/(\gamma + 1)\omega$, $z = 8\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)^{-2}\omega^{-2}$, $m = 0$. Точка Y_0 лежит на интегральной кривой $H = 0$ системы (1.14) на компоненте границы Γ_7 :

$$z = -\gamma(\gamma - 1) \frac{(V - 4/5)V^2}{2(\gamma V - 4/5)}, \quad m = 0. \quad (5.17)$$

При $9/7 < \gamma < 4/3$ траектория (5.17), выходящая из точки Y_0 , при убывании λ входит в особую точку Z_6 . Поэтому все траектории выходящие из линии $Y(q)$ ($q \approx 0$, $M \gg 1$), при убывании λ при некотором конечном $\lambda = \lambda_1$ входят в поверхность $L = 0$ (поскольку линия $Y(q)$ при $\gamma < 4/3$ лежит в области $H < 0$; см. рис. 26). Эти траектории не имеют физического смысла, поскольку их нельзя продолжить при $\lambda < \lambda_1$ (непрерывное продолжение, очевидно, невозможно, продолжение с разрывом требует введения ударной волны разрежения, что также невозможно в веществе с нормальными свойствами; см. [115]). Поэтому в рассматриваемом классе автомодельных движений газа при $9/7 < \gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$ не существует решений задачи о вспышке звезды для чисел Маха ударной волны $M \gg 1$.

При $\gamma = 9/7$ точка Y_0 совпадает с особой точкой Z_7 , которая также всегда лежит на линии (5.17). При $1 < \gamma < 9/7$ траектория (5.17), выходящая из точки Y_0 , при $\lambda \rightarrow 0$ входит в особую точку Z_1 . Поэтому все траектории, выходящие из линии $Y(q)$ ($q \approx 0$, $M \gg 1$), при убывании λ также оказываются в окрестности особой точки Z_1 и, поскольку они лежат в области $H < 0$, наматываются на предельные циклы $F = \text{const}$, $\rho_0 = 0$. В этих решениях ($M \gg \gg 1$) функция $V(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ изменяется от конечного максимума $V_* < 4/(5\gamma)$ до сколь угодно большого отрицательного минимума.

В решениях, соответствующих траекториям, наматывающимся на предельные циклы, газ после прохождения ударной волны совершает незатухающие колебания. Действительно, вдоль линий тока газа

$$\frac{d \ln r}{d \ln t} = V = v_0 + \frac{4}{5}, \quad \frac{d \ln \lambda}{d \ln t} = v_0, \quad \frac{d \tau_3}{d \ln t} = -1; \quad (5.18)$$

отсюда $d \ln r / d \tau_3 = -(v_0 + 4/5)$. В окрестности цикла изменение $\ln r$ за период одного колебания $\ln r \Big|_0^T \approx - \int (v_0 + 4/5) d \tau_3 = A$. Обозначим $B = \int (m_2 - 12/5\gamma) d \tau_3$. Из системы (3.2) при $\omega = 5/2$ следует, что $-3A + B = 0$, $-4A + \gamma B = 0$; отсюда при $\gamma \neq 4/3$

$A = B = 0$ для всех циклов. Таким образом, в процессе колебаний газа дрейфа не происходит.

Период колебаний в окрестности особой точки Z_3 в переменной t_3 приближенно равен $T_0 = 5\pi (\gamma/12(4 - 3\gamma))^{1/2}$. Во времени t , согласно (5.18), колебания газа замедляются; периоды последовательных колебаний возрастают в геометрической прогрессии с показателем $\exp T_0$. Амплитуда A_0 колебаний $\ln r$ для решений с $M \approx 1$ имеет порядок $A_0 \sim T_0 (M - 1)^{3/2}$. В решениях с $M \gg 1$ ($1 < \gamma < 9/7$) имеем $A_0 \sim 2 [3(\gamma - 1)(4 - 3\gamma)]^{-1} \ln M$ при $M \rightarrow \infty$.

Отметим, что описанные колебания реализуются в классе автомодельных решений и качественно отличаются от строго периодических колебаний однородных газовых шаров, использующихся в качестве модели пульсаций переменных звезд-цефеид [132]. В частности, в найденных решениях при фиксированном t скорость газа v при $r \rightarrow 0$ имеет бесконечно много нулей и плотность газа $\rho \rightarrow \infty$, однако полная масса газа в окрестности центра $r = 0$ конечна и изменяется как $Cr^{1/2}$ (см. асимптотические формулы для автомодельных колебаний газа (3.7) — (3.8)).

Указанные решения, так же как и в исследованном выше случае $\gamma < 4/3$, $\omega > 5/2$, являются автомодельными возмущениями, при которых звезда пульсирует в окрестности равновесного распределения (5.1), хотя полная энергия газового шара $E = +\infty$ (см. (5.8)). Найденные решения на любом конечном отрезке t и на отрезке $0 < r_1 < r < r_2$ являются устойчивыми и могут быть использованы, даже и вне связи с задачей о взрыве, в качестве модели замедляющихся пульсаций газа в недрах звезды (с постоянной амплитудой).

При $\gamma > 4/3$, согласно (5.16), отрезок Z_3Y_1 линии X состоит из седел функции F , причем окрестность отрезка Z_3Y_1 разбита поверхностью уровня $F = F_0$ на четыре области: две области D_1, D_2 , в которых $F \leq F_0$, и две области D_3, D_4 , в которых $F \geq F_0$. Поверхность $F = F_0$ является однолистной поверхностью, поскольку из (5.15) следует, что на этой поверхности ρ_0 — однозначная функция v_0, m_2 . Пересечение поверхности $F = F_0$ с компонентой границы Γ_2 состоит из четырех сепаратрис особой точки Z_3 , изображенных на рис. 26. Область D_1 при $\rho_0 = 0$ вырезает треугольник Δ , ограниченный сепаратрисами Z_4Z_3, Z_3Z_1, Z_1Z_4 . Покажем, что проекция любой траектории в области D_1 на плоскость v_0, m_2 не пересекает сепаратрис Z_3Z_1, Z_4Z_3 . Действительно, поскольку в точках этих сепаратрис $F = F_0, H > 0$, то в любой точке над ними, где $\rho_0 > 0$, из (5.15) получаем $F > F_0$. Далее, в треугольнике Δ функция $V > 0$, поэтому во всей области D_1 также $V > 0$ (аналогично можно показать, что в области D_2 $V < 0$).

На линии Y (q) интеграл F монотонно возрастает от 0 до F_0 :

$$F(Y(q)) = F_0 \frac{q(\gamma + 1)^{\gamma+1}}{(2\gamma - (\gamma - 1)q)(\gamma - 1 + 2q)^\gamma} \quad (5.19)$$

и функция $V > 0$. Поэтому линия $Y(q)$, $0 < q < 1$, целиком лежит в области D_1 при $H > 0$. Опишем геометрию этой области. Пересечение области D_1 с границей Γ ограничено сепаратрисами Z_3Z_1 , $Z_1Z_7Z_6$, Z_6Z_5 , Z_5Z_4 , Z_4Z_3 (см. рис. 26). Область D_1 является замкнутой инвариантной относительно системы (1.14) областью многообразия S , целиком лежащей в «дозвуковой» части $L > 0$ (это следует из того, что функция F (5.15) на поверхности $L = 0$: $\rho_0 = |v_0|$ над треугольником Δ в области $H > 0$ имеет единственный экстремум — минимум в точке Y_1 ($F(Y_1) = F_0$)).

В области D_1 имеется единственная отталкивающая особая точка Z_5 и единственная притягивающая особая точка Z_7 . Все остальные особые точки в этой области, Z_1 , Z_3 , Z_4 , Z_6 , неустойчивы, и их сепаратрисы лежат на границе области D_1 . Поэтому, вследствие наличия монотонной функции Φ_μ (1.36), все траектории в области D_1 , в частности все траектории, проходящие через линию $Y(q)$, выходят из особой точки Z_5 . Тем самым доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. *Все решения задачи о вспышке звезды при $\gamma > 4/3$, $\omega = 5/2$ при всех числах Маха ($1 < M < \infty$) движения ударной волны имеют расширяющуюся пустоту внутри газа с асимптотикой (2.7).*

Во всех этих решениях разлет газа от центра происходит монотонно вследствие того, что $V > 0$ в области D_1 . Решения с расширяющейся пустотой внутри газа впервые были найдены численно при $\gamma = 5/3$ и аналитически при $\gamma = 4/3$ в работах [7, 116]. Отметим, что, как показано выше, в задаче о вспышке звезды при $\gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$ не существует решений с образованием пустоты внутри газа.

В указанных решениях при $\gamma > 4/3$ полная энергия, выделившаяся при взрыве, $E = +\infty$, т. е. эти решения следует рассматривать как асимптотики, описывающие взрыв звезды при $E \rightarrow \infty$.

Проведенный анализ показывает, что поведение решений задачи о вспышке звезды в общем случае $\gamma \neq 4/3$ ($\omega = 5/2$) качественно отличается от проинтегрированного в работе [7] случая $\gamma = 4/3$, $\omega = 5/2$, где, во-первых, вообще нет колебаний газа, и, во-вторых, при числах Маха $1 < M \leq 6$ все решения продолжают до центра симметрии.

V. Автомодельные решения с произвольным конечным числом радиальных пульсаций газа. При $\gamma < 4/3$, $\omega < 5/2$ особая точка Z_3 на компоненте границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) является притягивающей (при $\gamma < \gamma_2$ — притягивающий фокус; см. (3.3)). Малая окрестность особой точки Z_3 заполнена сепаратрисами особых точек Z_4 (или Z_5 , в зависимости от соотношения γ и γ_1 ; см. § 2) и Z_1 . При $\gamma < \gamma_2$ двумерная сепаратриса Z , выходящая из особой точки Z_1 , пересекается с компонентой границы Γ_2 по спирали, бесконечно наматывающейся на особую точку Z_3 (см. рис. 29, в). Поэтому вся

двумерная сепаратриса Z бесконечное число раз обматывается вокруг сепаратрисы X , выходящей из точки Z_3 . Следовательно, в окрестности особой точки Y_1 сепаратриса Z бесконечное число раз пересекает линию Y в точках $Y_i (M_i)$ (числа Маха $M_i \rightarrow 1$ при $i \rightarrow \infty$) (см. рис. 29, e). Таким образом, доказано, что при $\gamma < \gamma_2$, $10/7 < \omega < 5/2$ существует бесконечная последовательность чисел Маха движения ударной волны $M_i \rightarrow 1$, для которых решения задачи о вспышке звезды продолжают до центра симметрии и имеют при $\lambda = 0$ асимптотику (2.1). В этих решениях энергия массы газа за ударной волной равна энергии этой же массы газа в состоянии равновесия (поскольку в центре $r = 0$ асимптотика (2.1) не имеет особенности и течение газа всюду является адиабатическим). Поэтому найденные решения соответствуют взрывному типу разрушения равновесия звезды без выделения энергии. Первое решение такого типа («динамический взрыв равновесия») было указано в явном виде при $\gamma = 7/6$, $\omega = 12/5$ в работе [7], для этого решения $M^2 = 15/2$ и колебания газа отсутствуют.

Все решения для чисел Маха M : $M_i > M > M_{i+1}$ являются сепаратрисами особой точки Z_4 (или Z_5) и, следовательно, имеют расширяющуюся с асимптотикой (2.7) пустоту внутри газа. Соответствующие траектории динамической системы (1.14) совершают некоторое конечное число $N(M)$ оборотов вокруг траектории X , на которой $V = 0$; поэтому в этих решениях безразмерная скорость газа V обращается в нуль $2N(M)$ раз. Вдоль линий тока газа, согласно (5.18), имеем $d \ln r / d\tau_3 = -V$, следовательно в рассматриваемых решениях все частицы газа совершают $N(M)$ колебаний. Число оборотов траекторий вокруг линии X $N(M) \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow 1$, поэтому при $\gamma < \gamma_2$, $\omega < 5/2$ существуют решения задачи о вспышке звезды с произвольным конечным числом колебаний газа после прохождения ударной волны. Колебания газа переходят затем в монотонное расширение газа от центра, которое для дискретного множества значений чисел Маха ударной волны M происходит с асимптотикой (2.1), а для всех остальных значений чисел Маха — с асимптотикой (2.7).

VI. Автомодельные решения со слабым разрывом. В предыдущих разделах были изучены автомодельные решения, описывающие различные типы распада равновесия звезды после прохождения ударной волны. Рассмотрим новый тип распада равновесия звезды, в котором нет ударных волн, а по покоящемуся в состоянии (5.1) газу распространяется слабый разрыв, за которым решение является автомодельным. В точках слабого разрыва, по определению (см. [7]), все физические параметры газа (ρ , p , v , \mathcal{M} и энтропия S) остаются непрерывными, а некоторые их производные имеют разрыв. Траектории динамической системы (1.14), соответствующие рассматриваемым решениям, входят в особую

точку Y_1 при $\lambda = \lambda_*$ (λ_* определяется из (5.7) при $q = 1$) и при $\lambda > \lambda_*$ продолжаются отрезком траектории X (5.4). Закон движения поверхности слабого разрыва есть $\lambda = \lambda_*$.

При $\omega > 2$ особая точка Y_1 , согласно (5.11), является седловой и поэтому в точку Y_1 входит единственная траектория X , т. е. искомых решений со слабым разрывом при $\omega > 2$ не существует.

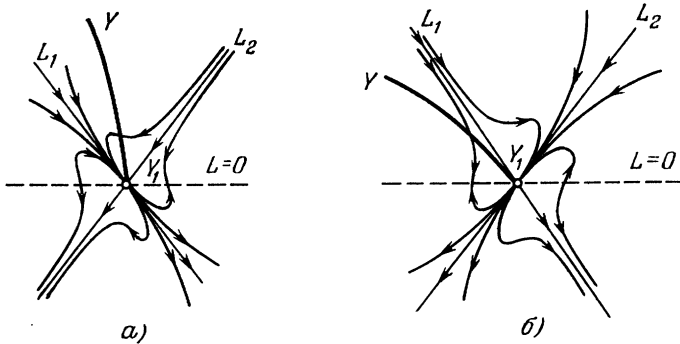


Рис. 30. Поведение траекторий динамической системы (1.14) в окрестности особой точки Y_1 : а) $\gamma > 1$, $10/7 < \omega < 2$; б) $\gamma > 1$, $1 < \omega < 10/7$.

При $1 < \omega < 2$ особая точка Y_1 и все особые точки на линии I_1I_4 в окрестности Y_1 являются притягивающими. Поэтому существует некоторая двумерная поверхность \mathcal{P} , заполненная траекториями динамической системы (1.14), входящими в особую точку Y_1 . Согласно проведенному выше (в п. II) исследованию, при $10/7 < \omega < 2$ траектории в окрестности точки Y_1 входят в линию особых точек I_1I_4 , касаясь поверхности L_1 (рис. 30, а), а при $1 < \omega < 10/7$ — касаясь поверхности L_2 , на которой лежит, в частности, траектория X (рис. 30, б). Вследствие этого при $1 < \omega < 10/7$ во всех решениях со слабым разрывом, кроме одного, лежащего на поверхности L_1 , первые производные физических величин остаются непрерывными, а разрыв имеют их вторые производные.

Рассмотрим автомодельные решения со слабым разрывом при $1 < \omega < 10/7$, $4/3 < \gamma < 5/3$. При $4/3 < \gamma < 5/3$ окрестность траектории X разбита двумерной сепаратрисой \mathcal{P}_3 ; выходящей из особой точки Z_3 (см. рис. 29, з), на две области U_1 и U_2 . Траектории системы (1.14) в области U_1 выходят из особой точки Z_2 ; соответствующие решения описывают аккрецию газа на «черную дыру» (см. § 4). Траектории в области U_2 выходят из особой точки Z_5 и описывают разлет газа с образованием расширяющейся пустоты внутри газа (см. § 2). В общем случае две инвариантные относительно системы (1.14) двумерные поверхности \mathcal{P} и \mathcal{P}_3 пересекаются по единственной траектории X , при этом поверхность

\mathcal{P} пересекает обе области U_1 и U_2 . При $1 < \omega < 10/7$ все траектории на поверхности \mathcal{P} в окрестности траектории X входят в особую точку Y_1 (см. рис. 29, з). Поэтому при $1 < \omega < 10/7$, $4/3 < \gamma < 5/3$ пересечение поверхности \mathcal{P} с областью U_1 определяет однопараметрическое семейство траекторий, входящих при $\lambda = \lambda_*$ в особую точку Y_1 и выходящих при $\lambda = 0$ из особой точки Z_2 . Эти траектории после продолжения их отрезком траектории X (при $\lambda > \lambda_*$) определяют автомодельные решения со слабым разрывом, моделирующие распад равновесного состояния звезды (5.1), после которого газ коллапсирует в центр с асимптотикой (4.1) (при $\lambda \rightarrow 0$), при этом в центре образуется «черная дыра» (растущая точечная масса). Такой тип распада равновесия звезды сопровождается при $4/3 < \gamma < 3/2$ излучением бесконечно большой энергии. Действительно, в равновесном состоянии (5.1) газовый шар радиуса r при $1 < \omega < 10/7$ обладает конечной положительной энергией (5.8). Полная энергия шарового слоя $r_1 < r < r_2$ в асимптотике (4.1) имеет вид

$$E = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} - \frac{\rho G M}{r} \right) 4\pi r^2 dr = \\ = - \frac{K_1}{2\gamma - 3} r^{(2\gamma - 3)/(\gamma - 1)} \Big|_{r_1}^{r_2} + \frac{K_2}{2 - \gamma} r^{(2 - \gamma)/(\gamma - 1)} \Big|_{r_1}^{r_2}, \quad (5.20)$$

где положительные величины K_1 и K_2 выражаются через константы асимптотики (4.1) и время t . Энергия (5.19) при $\gamma < 3/2$ расходится на нижнем пределе, т. е. при $4/3 < \gamma < 3/2$ газовый шар в асимптотике (4.1) обладает бесконечной отрицательной энергией. Следовательно, при $4/3 < \gamma < 3/2$, $1 < \omega < 10/7$ в указанных решениях при распаде равновесного состояния (5.1) происходит потеря (излучение) бесконечно большой положительной энергии. (Для этих решений в законе выделения энергии (5.9) константа $\alpha = -\infty$.)

Другой интересный класс автомодельных решений со слабым разрывом имеется при $1 < \omega < 2$, $\gamma < \gamma_2 < 4/3$. В этом случае двумерная поверхность \mathcal{P} пересекается с обмотанной вокруг траектории X бесконечное число раз двумерной сепаратрисой Z особой точки Z_1 по бесконечному числу траекторий, которые, следовательно, выходят при $\lambda = 0$ из особой точки Z_1 и входят при $\lambda = \lambda_*$ в особую точку Y_1 . Этим траекториям, после продолжения их при $\lambda > \lambda_*$ отрезком траектории X , соответствуют решения со слабым разрывом, в которых распад равновесия звезды происходит без выделения энергии и которые гладко продолжаютя до центра симметрии без особенности. К этим решениям также применимы все выводы п. V о наличии конечного (сколь угодно большого) числа радиальных колебаний газа.

При всех ω : $1 < \omega < 2$ и $\gamma > 1$ имеются однопараметрические множества решений со слабым разрывом и с расширяющейся пустотой внутри газа (с асимптотикой (2.7)). При $\gamma > 4/3$ эти решения соответствуют траекториям, лежащим в пересечении поверхности \mathcal{P} с областью U_2 (см. выше). При $\gamma < 4/3$ существование рассматриваемых решений следует из того, что почти все траектории в окрестности траектории X — сепаратрисы особой точки Z_5 .

VII. Физическая интерпретация. В равновесном состоянии (5.1) самогравитирующий газ заполняет все пространство $0 < r < < \infty$, причем плотность газа $\rho \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Поэтому исследованная в данном параграфе модель вспышки звезды может применяться для моделирования нестационарного движения газа в реальных звездах только в области $0 < r_0 < r < R_0 < R$, где R — радиус звезды, и на отрезке времени $t < T_0$, где T_0 — время выхода ударной волны на поверхность звезды. Степенной закон (5.1) распределения плотности и давления является, разумеется, лишь приближением к реальности; необходимым условием допустимости такого приближения является устойчивость распределения (5.1) относительно конвективных возмущений, что согласно критерию Шварцшильда [73] ($dS/dr > 0$, S — плотность энтропии) означает

$$\gamma > 2 - \frac{2}{\omega}. \quad (5.21)$$

При $\gamma > 4/3$ это условие выполнено на всем отрезке $1 < \omega < 3$.

Автомодельные решения с $\omega = 5/2$, $\gamma > 4/3$ (см. п. IV) моделируют наиболее мощные вспышки сверхновых, при которых подавляющая часть массы звезды рассеивается в окружающее пространство и массой остатка (нейтронной звезды) можно пренебречь по сравнению с полной начальной массой звезды. Условием применимости этой модели является $E \gg E_1, E_2$, где E — полная энергия, выделяющаяся (в окрестности центра звезды) при взрыве, E_1 — энергия, переносимая путем излучения нейтрино и последующего поглощения их во внешних слоях звезды¹⁾ (такая форма переноса энергии называется депозицией; см. [73]), E_2 — энергия, выделяющаяся на фронте ударной волны в результате детонации газа²⁾.

¹⁾ Современные оценки роли нейтринного механизма переноса энергии в процессах взрывов звезд см. в работах [73, 134]. Автомодельные решения с излучением нейтрино исследовались в работе [135].

²⁾ Детонационные волны (с условием Чепмана — Жуге) в автомодельном движении самогравитирующего газа можно ввести только при $\omega = 2$ (см. [118]). Для качественного исследования автомодельных решений с детонационными волнами, имеющими числа Маха $M \approx 1$, достаточно провести разделение особой точки Y_1 , которая при $\omega = 2$ является вырожденной (собственное число $\lambda_1 = 0$; см. (5.11)), и использовать полученные выше результаты о поведении траекторий динамической системы (1.14) в окрестности компоненты границы Γ_2 .

Для выяснения физической применимости автомодельных решений с $\gamma < 4/3$ напомним полученную в работе [114] зависимость массы M звезды (на конечной стадии эволюции) от плотности в центре ρ_c (рис. 31; эта зависимость была выведена в работе [114] в результате численного интегрирования уравнений равновесия с использованием реального уравнения состояния вещества). Необходимым условием устойчивости равновесной конфигурации

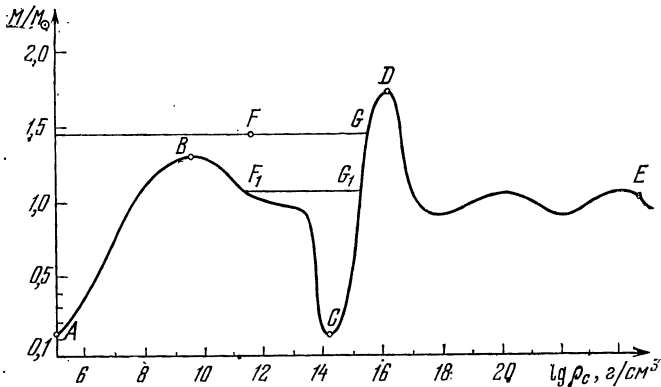


Рис. 31. Зависимость массы холодной звезды M от плотности в центре ρ_c , данные Саакяна и Вартаняна [114].

является $dM/d\rho_c > 0$ (см. [73]). Этому условию отвечают два отрезка AB и CD кривой рис. 31, определяющие соответственно белые карлики и нейтронные звезды. Точки B и D соответствуют пределу Чандрасекара и пределу Оппенгеймера — Волкова. Отрезок BC соответствует неустойчивым конфигурациям, в которых уравнение состояния вещества звезды приближенно является адиабатой с показателем $\gamma < 4/3$ (см. [73]). Равновесные конфигурации с $\lg \rho_c < 14$ хорошо описываются ньютоновской теорией гравитации. Для изучения конфигураций с большей плотностью ($\lg \rho_c \gtrsim 15$) необходимо учитывать эффекты общей теории относительности. Все равновесные конфигурации при $\lg \rho_c > 16$ неустойчивы; в силу уравнений ОТО масса равновесной конфигурации M является периодической функцией от ρ_c при $\rho_c \rightarrow \infty$ [113, 112].

Рассмотрим звезду, которой на диаграмме $M - \rho_c$ соответствует точка F или F_1 . Эти конфигурации являются неустойчивыми, им соответствует адиабата с $\gamma < 4/3$ (см. [73]). В процессе эволюции звезда на диаграмме $M - \rho_c$ сдвигается по горизонтали (поскольку масса M постоянна) до попадания в окрестность устойчивого равновесия G или G_1 . При этом в окрестности устойчивого

равновесия звезда в первом приближении будет совершать затухающие колебания (см. [73]).

Описанный процесс эволюции звезды моделируется автомодельными решениями с $\omega > 5/2$, $\gamma < \gamma_2 = 4 [3 + (2\omega - 5)^2/8 (\omega - 1)]^{-1} < 4/3$ (см. п. III). В этих решениях газ при $t \rightarrow \infty$ совершает затухающие колебания в окрестности равновесного состояния (5.1). Полная энергия шарового слоя ($r_1 < r < r_2$) в равновесном состоянии (5.1) отрицательна, если $\gamma > \gamma_4 = (2\omega - 1)/2 (\omega - 1)$, и положительна, если $\gamma < \gamma_4$ (см. (5.8)). В целом произвольные равновесные конфигурации с $\gamma < 4/3$ считаются неустойчивыми [73, 76], равновесные распределения (5.1) с $\omega \geq 5/2$, $\gamma < 4/3$ можно назвать метастабильными относительно определенного класса возмущений (включающего автомодельные возмущения).

Отметим, что аналогичных автомодельных решений в общей теории относительности не существует — в автомодельных решениях в ОТО реализуется только конечное число радиальных колебаний газа, после которых происходит разлет всей массы газа от центра (см. § 4 главы IV). Этот факт находится в полном соответствии с тем, что в сугубо релятивистской области $\ln \rho_c > 16$ (см. рис. 31, отрезок DE) не существует устойчивых равновесных конфигураций.

В равновесном состоянии (5.1) при $1 < \omega \leq 5/2$, $\gamma < 4/3$ полная энергия шарового слоя ($r_1 < r < r_2$) положительна. Конфигурации с положительной энергией не могут возникнуть из диффузного вещества, однако в принципе могут существовать и даже быть метастабильными (см. [73]). Автомодельные решения в модели вспышки звезды при $1 < \omega < 5/2$, $\gamma < \gamma_2 < 4/3$ (см. п. V) описывают особый, взрывной тип распада неустойчивой конфигурации с положительной энергией: существуют сколь угодно малые возмущения, соответствующие числам Маха движения ударной волны $M_i \rightarrow 1$, при которых отсутствует выделение энергии, однако (после конечного числа радиальных пульсаций) происходит полный разлет всей массы газа (первое решение такого типа было получено при $\gamma = 7/6$, $\omega = 12/5$ в работе [7]) (в рассматриваемых автомодельных решениях при $1 < \omega < 10/7$, $\gamma < \gamma_2$ вместо ударной волны имеется слабый разрыв; см. п. VI). Автомодельные решения с $1 < \omega < 5/2$, $\gamma < \gamma_2$, имеющие сколь угодно большое, но обязательно конечное число радиальных пульсаций газа, можно рассматривать также как модель пульсационной неустойчивости, которая реализуется в некоторых массивных звездах [73].

Другой тип распада равновесной конфигурации с положительной энергией моделируют автомодельные решения с $1 < \omega < 10/7$, $4/3 < \gamma < 3/2$ (см. п. VI). В этих решениях в результате излучения из центра бесконечно большой энергии начинается коллапс всей массы звезды, причем равновесное распределение (5.1) сшивается

с автомодельным решением, описывающим аккрецию газа на центр, через слабый разрыв. Описанные автомодельные решения моделируют процесс имплозии центральной части звезды, сопровождаемый мощной депозицией [73], например, за счет нейтринного излучения.

§ 6. Исследование модели вспышек в оболочках звезд

I. Постановка задачи. Согласно современным данным (см. [73, 152]), при вспышках некоторых новых звезд выделение энергии и движение газа происходят только в области, окружающей поверхность звезды, — в ее оболочке. При таких вспышках вещество ядра звезды не вовлекается в движение, однако посредством своего гравитационного притяжения оказывает существенное влияние на движение газа в оболочке. Масса оболочки звезды M_0 много меньше массы ядра M , поэтому самогравитацией газа в оболочке можно пренебречь по сравнению с силой гравитационного притяжения ядра, которая в сферически-симметричном случае равна силе притяжения материальной точки массы M , находящейся в центре симметрии. Таким образом, для изучения вспышек в оболочках звезд необходимо исследовать сферически-симметричное движение идеального газа (без учета самогравитации) в поле притягивающего центра.

В работах [124, 125] впервые была предложена следующая модель вспышек в оболочках звезд. Первоначально газ в оболочке звезды находится в состоянии равновесия под действием сил давления и силы гравитационного притяжения материальной точки массы M . Параметры газа в состоянии равновесия имеют вид

$$\rho = \frac{c_1 a (G.M)^{s/2}}{r^\omega}, \quad p = \frac{c_1 a (G.M)^{1+s/2}}{(\omega + 1) r^{\omega+1}}, \quad v = 0, \quad (6.1)$$

где a — константа с размерностью $ML^k T^s$, параметр $\omega = \frac{3}{2}(s + 2) + k$, c_1 — безразмерная постоянная. Затем в результате выделения энергии (например, взрыва) или потери устойчивости из центра симметрии $r = 0$ выходит ударная волна, за которой движение газа является адиабатическим и автомодельным. Движение газа удовлетворяет уравнениям газовой динамики (1.4)–(1.6) при $M = \text{const}$. В эти уравнения входит постоянная $G.M = b^3$ с размерностью $L^3 T^{-2}$, поэтому автомодельная переменная λ определена однозначно: $\lambda = r/(bt^{2/s})$. Параметры автомодельного движения газа имеют вид

$$\rho = \frac{a}{r^{k+3/s}} R(\lambda), \quad p = \frac{a}{r^{k+1/s+2}} P(\lambda), \quad v = \frac{r}{t} V(\lambda). \quad (6.2)$$

Исследование модели вспышек в оболочках звезд сводится к изучению автомодельных решений вида (6.2), которые в силу условий

Гюгонио (см. (5.5)) сопрягаются через ударную волну с равновесным состоянием газа (6.1).

В данном параграфе проводится качественное исследование модели вспышек в оболочках звезд, которое во многом аналогично исследованию § 5. Предполагается, что параметр ω удовлетворяет условиям $0 \leq \omega < 3$ — при этом в равновесном состоянии (6.4) плотность газа ρ не возрастает при удалении от центра и масса газа в окрестности центра $r = 0$ конечна. Критерий Шварцшильда устойчивости равновесия газа относительно конвективных возмущений (см. п. VII, § 5) приводит к условию $\omega > 1/(\gamma - 1)$, из которого при $\omega < 3$ следует $\gamma > 4/3$. Поэтому решения в модели вспышек в оболочках звезд могут иметь отношение к реальности только при значениях параметров $\gamma > 4/3$, $1/(\gamma - 1) < \omega < 3$. Однако исследование автомодельных решений с $\gamma < 4/3$, $\omega < 3$ представляет самостоятельный интерес в связи с вопросом о существовании автомодельных колебаний идеального газа в поле притягивающего центра, аналогичных автомодельным пульсациям самогравитирующего газа, изученным в §§ 3, 5 главы V и в § 4 главы IV.

II. Общие свойства динамической системы. Система уравнений газовой динамики (1.4)–(1.6) для автомодельных решений вида (6.2) в новых переменных $z = \gamma P/R$, R , V , $\tau = \ln \lambda$ имеет вид (штрих означает производную по τ)

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{V - \delta} (-V' + s + kV), \quad (6.3)$$

$$V'(V - \delta) + \frac{z'}{\gamma} + \frac{z}{\gamma} \frac{R'}{R} = -\frac{2}{\gamma} z - V^2 + V + \frac{k+3}{\gamma} z - \lambda^{-3}, \quad (6.4)$$

$$\frac{z'}{z} (V - \delta) - (\gamma - 1) \frac{R'}{R} (V - \delta) = 2 - s(\gamma - 1) - V(2 + (\gamma - 1)(k + 3)). \quad (6.5)$$

Система уравнений (6.3)–(6.5) содержит явную зависимость от переменной τ в виде члена λ^{-3} . Для получения автономной динамической системы введем новую переменную $m = \lambda^{-3}$. После исключения R'/R (в силу (6.3)) из уравнений (6.4), (6.5) и разрешения полученных уравнений относительно производных приходим к трехмерной динамической системе в переменных z , V , m :

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{z - (V - \delta)^2} \left[z \left(\frac{2(\omega + 1)}{3\gamma} - 3V \right) + (m + V^2 - V)(V - \delta) \right], \\ z' &= \frac{z}{(V - \delta)(z - (V - \delta)^2)} \left[-(\gamma - 1) \left\{ z \left(\frac{2(\omega + 1)}{3\gamma} - 3V \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (m + V^2 - V)(V - \delta) \right\} + (2 + (1 - 3\gamma)V)(z - (V - \delta)^2) \right], \\ m' &= -3m. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь

$$\omega = \frac{3}{2}(s + 2) + k, \quad \delta = \frac{2}{3}.$$

Алгебраическая структура уравнений (6.6) аналогична структуре уравнений (1.14). Поэтому качественное исследование динамической системы (6.6) естественно провести на основе конструкций, разработанных в §§ 1—5. Рассмотрим наиболее существенные моменты этого исследования.

Равновесное состояние газа (6.1) соответствует следующей траектории X динамической системы (6.6):

$$z = \frac{\gamma}{\omega + 1} m, \quad V = 0. \quad (6.7)$$

Автомодельные решения, сопряженные через ударную волну с равновесным состоянием газа (6.1), соответствуют траекториям системы (6.6), проходящим через линию Y , которая при преобразовании Гюгонио (5.5) переходит в линию X . Точки на линии Y параметризуются переменной $q = 1/M^2$, где M — число Маха движения ударной волны, и имеют следующие координаты:

$$z = \frac{4(2\gamma - (\gamma - 1)q)(\gamma - 1 + 2q)}{9(\gamma + 1)^2}, \quad m = \frac{4(\omega + 1)}{9\gamma} q, \\ V_0^2 = \frac{4(1 - q)}{3(\gamma + 1)}. \quad (6.8)$$

Закон движения ударной волны имеет вид $\lambda = \lambda_*$, где константа λ_* определяется из выражения (6.8) для переменной $m = \lambda^{-3}$; отсюда $\lambda_*^3 = 9\gamma/(4q(\omega + 1))$. Траектория X и линия Y пересекаются в точке Y_1 ($q = 1$, $z = 4/9$, $m = 4(\omega + 1)/9\gamma$, $V = 0$), лежащей на поверхности непродолжимости решений $L = z - (V - \delta)^2 = 0$. Точка Y_1 принадлежит линии особых точек I , определенной следующими условиями:

$$z = (V - \delta)^2, \quad m = (V - \delta) \left(3V - \frac{2(\omega + 1)}{3\gamma} \right) + V - V^2.$$

Разрешение вырожденных особых точек динамической системы (6.6) и построение компактного многообразия S осуществляются с помощью тех же преобразований координат (1.17)—(1.33). Укажем вид динамической системы (6.6) в координатах (1.21) ($v_0 = V - \delta$, $m_2 = -v_0 m z^{-1}$, $\rho_0 = z^{-1/2}$). После замены переменной $d\tau_3/d\tau = -1/v_0$ в координатах (1.21) получаем систему

$$\dot{v}_0 = - \frac{v_0}{1 - \rho_0^2 v_0^2} \left[-3v_0 - m_2 + \frac{2(\omega + 1)}{3\gamma} - 3\delta + v_0(v_0 + \delta) \times \right. \\ \left. \times (v_0 + \delta - 1)\rho_0^2 \right],$$

$$\dot{m}_2 = \frac{m_2}{1 - \rho_0^2 v_0^2} \left[3v_0 (1 - \rho_0^2 v_0^2) - \gamma \left\{ -3v_0 - m_2 + \frac{2(\omega + 1)}{3\gamma} - 3\delta + v_0(v_0 + \delta)(v_0 + \delta - 1)\rho_0^2 \right\} + (2 + (v_0 + \delta)(1 - 3\gamma))(1 - \rho_0^2 v_0^2) \right], \quad (6.9)$$

$$\dot{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{2(1 - \rho_0^2 v_0^2)} \left[-(\gamma - 1) \left\{ -3v_0 - m_2 + \frac{2(\omega + 1)}{3\gamma} - 3\delta + v_0(v_0 + \delta)(v_0 + \delta - 1)\rho_0^2 \right\} + (2 + (v_0 + \delta)(1 - 3\gamma))(1 - \rho_0^2 v_0^2) \right].$$

На компоненте границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) система (6.9) имеет три особые точки:

$$Z_1 \left(v_0 = \frac{2(\omega + 1)}{9\gamma} - \delta = \alpha, \quad m_2 = 0, \quad \rho_0 = 0 \right),$$

$$Z_3 \left(v_0 = -\delta, \quad m_2 = \frac{2(\omega + 1)}{3\gamma}, \quad \rho_0 = 0 \right), \quad Z_4 \left(v_0 = m_2 = \rho_0 = 0 \right).$$

Особая точка Z_1 лежит в физической области $v_0 < 0$ при $\alpha < 0$, или $\gamma > (\omega + 1)/3$. Собственные числа системы (6.9) в особых точках Z_1, Z_3, Z_4 следующие (индекс у собственного числа указывает соответствующее собственное направление):

$$Z_1: \lambda_{v_0} = 3\alpha < 0, \quad \lambda_{m_2} = \frac{2(\omega + 1)(4 - 3\gamma)}{9\gamma}, \quad \lambda_{\rho_0} = \frac{1 + \omega + 3\gamma(2 - \omega)}{9\gamma}; \quad (6.10)$$

$$Z_3: \lambda_{1,2} = \frac{\omega - 2}{3} \pm \left[\frac{\omega - 2}{3} - \frac{4(\omega + 1)}{3\gamma} \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \right]^{1/2}, \quad \lambda_{\rho_0} = 1; \quad (6.11)$$

$$Z_4: \lambda_{v_0} = -3\alpha, \quad \lambda_{m_2} = \frac{2(3 - \omega)}{3}, \quad \lambda_{\rho_0} = \frac{\omega + 1 - \gamma\omega}{3\gamma}. \quad (6.12)$$

Согласно (6.10), особая точка Z_1 при $(\omega + 1)/3 < \gamma < 4/3$ неустойчива и имеет двумерную выходящую сепаратрису; соответствующие автомодельные решения продолжают до центра симметрии и имеют при $\lambda \rightarrow 0$ следующую асимптотику:

$$v = \frac{r}{t} V_1, \quad R = C_1 \lambda^{\frac{s+kV_1}{V_1-2/3}}, \quad (6.13)$$

$$P = C_2 \lambda^{\frac{2+s+(1-3\gamma+k)V_1}{V_1-2/3}}, \quad V_1 = \frac{2(\omega + 1)}{9\gamma}.$$

Особая точка Z_3 при $\gamma > 4/3$ согласно (6.11) является седловой и имеет двумерную выходящую сепаратрису. Траектория X в координатах (1.21) определяется условиями $v_0 = -\frac{2}{3}$, $m_2 = \frac{2(\omega + 1)}{3\gamma}$,

$\rho_0 > 0$. При $\lambda \rightarrow 0$ эта траектория выходит из особой точки Z_3 и является поэтому сепаратрисой, соответствующей собственному числу λ_{ρ_0} .

Собственные числа $\lambda_{1, 2}$ (6.11) при $\gamma < \gamma_1 = \frac{4/3}{1 + (\omega - 2)^2 / (12(\omega + 1))}$ становятся комплексно-сопряженными. В этом случае особая точка Z_3 на компоненте границы Γ_2 ($\rho_c = 0$) является фокусом; при $\omega < 2$ — это притягивающий фокус, при $\omega > 2$ — отталкивающий фокус, при $\omega = 2$ — центр. Траектории, движущиеся в окрестности особой точки Z_3 , при $\gamma < \gamma_1$ вращаются вокруг выходящей сепаратрисы X (6.7), на которой $V = 0$. Поэтому в соответствующих им автомодельных решениях скорость газа V колеблется около нуля, т. е. газ совершает радиальные колебания. При $\gamma < \gamma_1$, $\omega < 2$ в автомодельных решениях реализуется сколь угодно большое, но обязательно конечное число радиальных колебаний газа. При $\gamma < \gamma_1$, $\omega > 2$ существуют автомодельные решения с бесконечным числом затухающих радиальных колебаний газа. При $\omega = 2$ колебания газа являются асимптотически периодическими во времени $\ln t$. Асимптотические формулы для автомодельных колебаний идеального газа в поле притягивающего центра выводятся так же, как и в § 3.

Задача о вспышке в оболочке звезды при $\gamma < \gamma_1$, $0 \leq \omega < 3$ и числах Маха движения ударной волны $M \approx 1$ имеет решения с радиальными пульсациями газа, полностью аналогичные решениям, исследованным в § 5.

Особая точка Z_4 является отталкивающей при $(\omega + 1)/3 < \gamma < (\omega + 1)/\omega$, $\omega < 3$. Сепаратрисы, выходящие из этой особой точки, описывают автомодельные решения с расширяющейся пустотой внутри газа, имеющие следующую асимптотику на внутренней границе ($\lambda \rightarrow \lambda_1$):

$$V = \frac{2}{3} - \frac{2(\gamma - (\omega + 1)/3)}{\gamma} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right),$$

$$R = C_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right)^{\frac{-\gamma\omega + 1 + \omega}{3\gamma - 1 - \omega}}, \quad P = C_2. \quad (6.14)$$

Такую же асимптотику при $\lambda \rightarrow \lambda_1$ имеют решения, соответствующие сепаратрисам, выходящим из отталкивающей (при $\gamma > (\omega + 1)/\omega$) особой точки Z_5 ($v_4 = v_0/z = 0$, $z = m_2 = 0$). В асимптотике (6.14) на внутренней границе $\lambda = \lambda_1$ давление $p \neq 0$, т. е. газ вытесняется изнутри сферическим поршнем, моделью которого может служить сильно нагретый газ, заполняющий область $\lambda < \lambda_1$ и имеющий малую плотность.

При $\gamma > 4/3$ имеется еще один класс решений с расширяющейся пустотой внутри газа. Эти решения соответствуют сепаратрисам, выходящим из линии неустойчивых особых точек \mathcal{L} , лежащей на

компоненте границы Γ_4 (см. рис. 26) и определенной условиями

$$z = 0, \quad m_2 + \frac{2}{9}v_4 + \frac{2(3-\omega)}{3\gamma} = 0. \quad (6.15)$$

Асимптотика таких решений при $\lambda \rightarrow \lambda_1$ является неустойчивой и имеет вид

$$V = \frac{2}{3} + \frac{2(4-3\gamma)}{3\gamma} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right), \quad R = C_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right)^{\frac{\gamma\omega-4}{4-3\gamma}},$$

$$P = C_2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right)^{\frac{\gamma(\omega-3)}{4-3\gamma}}.$$

Асимптотика (6.14) для $(\omega + 1)/3 < \gamma < 4/3$ является единственной возможной асимптотикой автомодельных решений с расширяющейся пустотой внутри газа; для $\gamma < (\omega + 1)/3$ таких решений вообще не существует. При $\gamma > 4/3$, $\omega < 3$ автомодельные решения с расширяющейся пустотой внутри газа имеют на внутренней границе либо устойчивую асимптотику (6.14), либо неустойчивую асимптотику (6.16).

Ускорение a_0 частиц газа в системе отсчета, связанной с движущейся границей $\lambda = \lambda_1$, определяется формулами

$$a_0 = a_1 - a_2 = \frac{2}{9} \frac{\lambda_1^3 G M}{r^2} - \frac{G M}{r^2},$$

где ускорение $a_1 = -d^2r/dt^2$, $r = \lambda_1 b t^{2/3}$, ускорение a_2 обусловлено гравитационным притяжением материальной точки массы M . При $\lambda_1^3 > 9/2$ ускорение a_0 направлено в сторону газа, в этом случае граница раздела газа с пустотой является устойчивой (см. [128]). Если некоторое решение задачи о вспышке в оболочке звезды имеет расширяющуюся пустоту внутри газа, то необходимое условие устойчивости внутренней границы имеет вид

$$\frac{9}{2} < \lambda_1^3 < \lambda_*^3 = \frac{9\gamma}{4q(\omega+1)},$$

где λ_* — значение λ на фронте ударной волны. Отсюда получаем, что внутренняя граница газа в таких решениях может быть устойчива только при

$$M > M_0 > \left(\frac{2(\omega+1)}{\gamma} \right)^{1/2},$$

где $M = q^{-1/2}$ — число Маха движения ударной волны.

III. Исследование специального случая $\omega = 2$. Энергия в автомодельном адиабатическом движении идеального газа может подводиться в центре симметрии, если решение имеет особенность при $r = 0$, или на границе расширяющейся полости $\lambda = \lambda_1$. За-

кон выделения энергии имеет вид

$$E = \alpha a (G\mathcal{M})^{\frac{2-k}{3}} t^{\frac{2(2-\omega)}{3}}. \quad (6.17)$$

Постоянная α зависит от самого решения; для вычисления α необходимо сравнить энергию газового шара радиуса r в состоянии равновесия (6.1) и в момент выхода ударной волны на его поверхность. Энергия шарового слоя $r_1 < r < r_2$ в равновесном состоянии (6.1) определяется следующими формулами:

$$E_0 = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{p}{\gamma-1} - \frac{\rho G\mathcal{M}}{r} \right) 4\pi r^2 dr,$$

$$\omega \neq 2: E_0 = \frac{1 - (\gamma-1)(\omega+1)}{2-\omega} 4\pi c_1 a (G\mathcal{M})^{1+s/2} r_2^{2-\omega} \Big|_{r_1}^{r_2}, \quad (6.18)$$

$$\omega = 2: E_0 = \frac{4-3\gamma}{\gamma-1} 4\pi c_1 a (G\mathcal{M})^{1+s/2} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Отсюда получаем, что $E_0 > 0$ при $\gamma < \gamma_2 = (\omega+2)/(\omega+1)$ и $E_0 < 0$ при $\gamma > \gamma_2$. Из формул (6.17), (6.18) следует, что значение параметра $\omega = 2$ является исключительным [124, 125] — в этом случае количество выделившейся энергии E не зависит от времени.

Автомодельные решения вида (6.2) имеют монотонную функцию — интеграл адиабатичности [125]

$$\Phi = z(V - \delta)^{\gamma-1+\beta} R^\beta = C_1 \lambda^{1-3\gamma+k\beta}, \quad \beta = \frac{4-3\gamma}{3-\omega}. \quad (6.19)$$

При $\omega = 2$ существует еще одна монотонная функция — интеграл энергии [7, 125]

$$H = R \left[\frac{zV}{\gamma} + (V - \delta) \left(\frac{V^2}{2} + \frac{z}{\gamma(\gamma-1)} - \lambda^{-3} \right) \right] = C_2 \lambda^{k-2}. \quad (6.20)$$

Из двух монотонных функций Φ и H при $\omega = 2$ можно исключить переменную R и тем самым получить первый интеграл $F = |H|^{4-3\gamma} \Phi^{-1}$ динамической системы (6.6), при этом переменная λ заменяется на $m = \lambda^{-3}$. Интеграл F в координатах (1.21) имеет вид

$$F = \left| \frac{2}{3\gamma} + \frac{v_0}{\gamma-1} + m_2 + \frac{v_0}{2} \left(v_0 + \frac{2}{3} \right)^2 \rho_0^2 \right|^{4-3\gamma} |v_0|^{-\gamma} m_2^{3(\gamma-1)}. \quad (6.21)$$

На траектории X интеграл F принимает постоянное значение

$$F(X) = F_0 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{3^4}{2} \right)^{\gamma-1} \left(\frac{|4-3\gamma|}{\gamma-1} \right)^{4-3\gamma}.$$

В точках линии X первый дифференциал $dF = 0$, т. е. линия X состоит из экстремумов функции F . Второй дифференциал d^2F имеет вид

$$d^2F = -F_0 \left(\frac{3}{8} \right) \gamma^2 (\gamma - 1) (4 - 3\gamma)^{-1} \left[(3dv_0 + dm_2)^2 + 3\gamma^{-1} (4 - 3\gamma) \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \rho_0^2 \right) dv_0^2 \right]. \quad (6.22)$$

При $\gamma < 4/3$ отрезок линии X от точки Z_3 до точки Y_1 ($\rho_0 = 3/2$) состоит, согласно (6.22), из максимумов функции F . Поэтому поверхности уровня $F = \text{const}$ в окрестности отрезка Z_3Y_1 при $\gamma < 4/3$ являются двумерными цилиндрами и пересекают компоненту границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) по циклам — замкнутым траекториям системы (6.9) в области $\rho_0 = 0$, $\frac{2}{3\gamma} + \frac{v_0}{\gamma - 1} + m_2 < 0$. Траектории, наматывающиеся на эти циклы, определяют автомодельные решения, в которых происходят бесконечные незатухающие радиальные колебания газа в поле притягивающего центра, являющиеся асимптотически периодическими во времени $\ln t$.

При $\gamma > 4/3$ отрезок Z_3Y_1 состоит из седел функции F . Поверхность уровня $F = F_0$ разбивает окрестность линии X на четыре области: две области D_1 и D_2 , в которых $F \leq F_0$ (при этом в области D_1 имеем $V > 0$, а в области D_2 имеем $V < 0$), и две области D_3, D_4 , в которых $F \geq F_0$.

Значения функции F на линии $Y(q)$ (6.8) определяются той же формулой (5.19), что и в п. IV § 5. На отрезке линии $Y(q)$ ($0 < q < 1$, $\infty > M > 1$) имеем $V > 0$ и $F < F_0$, следовательно, этот отрезок при $\gamma > 4/3$ лежит в области D_1 . В полной аналогии с рассуждениями п. IV § 5 можно показать, что все траектории в области D_1 при убывании λ выходят из отталкивающей особой точки Z_5 или (при $\gamma < (\omega + 1)/\omega = 3/2$) из отталкивающей особой точки Z_4 . В частности, этим свойством обладают все траектории, проходящие через отрезок линии $Y(q)$, $0 < q < 1$. Тем самым доказано, что все решения в модели вспышек в оболочках звезд при $\omega = 2$, $\gamma > 4/3$ при всех числах Маха движения ударной волны $M > 1$ имеют расширяющуюся пустоту внутри газа с асимптотикой на внутренней границе (6.14).

Энергия E_0 газового шара радиуса r при $\omega = 2$, $\gamma > 4/3$ в равновесном состоянии (6.1) согласно (6.18) равна ($-\infty$); после прохождения ударной волны энергия газового шара (с полостью внутри) конечна. Следовательно, в рассматриваемых автомодельных решениях при $\omega = 2$, $\gamma > 4/3$, $M > 1$ в момент времени $t = 0$ в центре симметрии $r = 0$ выделяется бесконечная энергия, т. е. эти решения являются моделью сильного взрыва звезды, при котором происходит сброс легкой оболочки звезды и масса остатка много больше массы сброшенной оболочки.

§ 7. Автомоделные решения со сходящимися ударными волнами

1. Рассмотрим задачу о движении сходящейся ударной волны по покоящемуся газу, которая без учета гравитации впервые изучалась в известных работах [136, 137]. При наличии самогравитации газа решениями этой задачи являются автомоделные решения со сходящейся ударной волной, в которых в области перед ударной волной газ находится в состоянии равновесия (5.1), а за ударной волной устанавливается движение газа с нулевой скоростью на бесконечности.

Автомоделные решения со сходящимися ударными волнами в некоторых случаях можно связать с решениями с расходящимися ударными волнами, которые естественно назвать двойственными друг другу. Действительно, пусть B_1 и B_2 — две точки многообразия S , сопряженные при преобразовании (5.5) (причем точка B_1 лежит в «дозвуковой» области $L > 0$, а точка B_2 лежит в «сверхзвуковой» области $L < 0$), и AB_1C и DB_2E — траектории системы автомоделных уравнений (1.14), проходящие через эти точки (рис. 32). Автомоделное решение с расходящейся ударной волной, соответствующей разрывному переходу из точки B_1 в точку B_2 , определено отрезками траекторий AB_1, B_2E , причем отрезок траектории B_2E описывает решение в области перед ударной волной. Автомоделное решение со сходящейся ударной волной, определенное при $t < 0, r > 0$, соответствует, после преобразования $t \rightarrow -t, v \rightarrow -v$, отрезкам траекторий DB_2, B_1C . В этом решении область перед ударной волной описывается отрезком траектории DB_2 .

Если оба указанных решения существуют, т. е. определены при всех $0 < \lambda < \infty$, то они и называются двойственными друг другу.

Простой пример двойственных решений легко построить, используя найденное в работе [7] при $\gamma = 7/6, \omega = 12/5$ точное решение «динамический взрыв равновесия». В этом решении закон движения ударной волны есть $\lambda = \lambda_0 = (6\pi/5)^{5/12}$. При $\lambda > \lambda_0$ газ находится в равновесном состоянии (5.1); при $0 < \lambda < \lambda_0$ решение имеет вид

$$\rho = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad p = \frac{K}{G t^{7/3}}, \quad K = \frac{4(30\pi G A)^{5/6}}{189\pi}, \quad (7.1)$$

$$\mathcal{M} = \frac{2}{9} \frac{r^3}{G t^2}, \quad v = \frac{2}{3} \frac{r}{t}.$$

Это решение соответствует сепаратрисе (2.3), идущей из особой

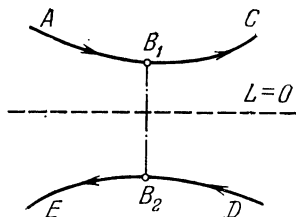


Рис. 32. К построению двойственных решений.

точки Z_1 в особую точку Z_9 и пересекающей линию I_1I_4 в особой точке I_0 ($V = 2/3$, $m = 2/9$, $z = 1/6^2$) (рис. 33). Траектория (2.3) при $\gamma = 7/6$, $\omega = 12/5$ пересекает линию Y (5.6) в точке $B_1 = Y(2/15)$, сопряженной в силу преобразования (5.5) с точкой B_2 , лежащей на траектории X (5.4). Полное решение «динамический взрыв равновесия» [7] описывается отрезками траекторий

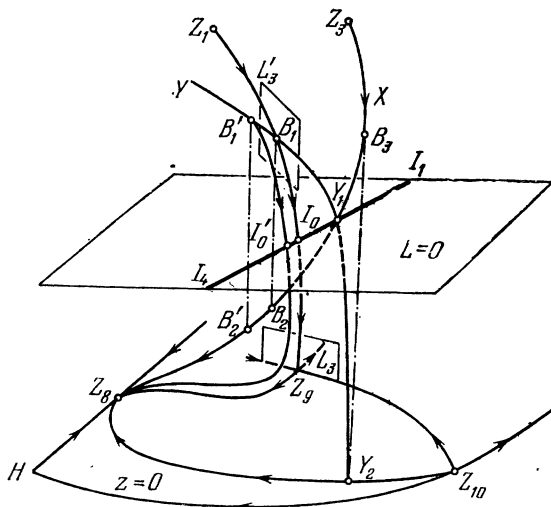


Рис. 33. Построение некоторых автомодельных решений со сходящимися ударными волнами.

Z_1B_1 ($0 < \lambda < \lambda_0$), B_2Z_8 ($\lambda_0 < \lambda < \infty$). Двойственное решение в данном случае соответствует траекториям Z_3B_2 ($0 < \lambda < \lambda_0$ (5.4)), B_1Z_9 ($\lambda_0 < \lambda < \infty$ (7.1)) и после замены $t \rightarrow -t$, $v \rightarrow -v$ описывает коллапс первоначально покоявшейся звезды (отрезок траектории Z_3B_2) в результате сжатия ее ударной волной, в процессе которого устанавливается постоянная по пространству плотность газа (отрезок траектории B_1Z_9), растущая со временем при $t \rightarrow -0$ согласно (7.1).

Используем полученное решение для исследования задачи о движении сходящейся ударной волны по покоящемуся газу. При $\gamma = 7/6$, $\omega = 12/5$ собственные числа (1.37) в особой точке I_0 ($V = 2/3$, $m = 2/9$, $z = 1/6^2$) имеют вид $\lambda_1 = -14/6^2$, $\lambda_2 = -35/6^2$, $\lambda_3 = 0$. Траектория (2.3) является входящей сепаратрисой особой точки I_0 , соответствующей собственному числу λ_1 , и лежит на гладкой двумерной поверхности L_1 , проходящей, (в окрестности точки I_0) через линию I_1I_4 (см. § 5). Все траектории, близкие к траектории (2.3) вне поверхности $L = 0$, продолжают через линию особых точек I_1I_4 (поскольку особые точки в окрест-

ности I_0 являются притягивающими: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и касаются поверхности L_1 (поскольку $\lambda_1 > \lambda_2$); таким образом, эти траектории остаются близкими к траектории (2.3) и при продолжении через особые точки линии I_1I_4 . В частности, все траектории, проходящие в окрестности особой точки Z_9 , при убывании λ оказываются (пройдя через линию особых точек I_1I_4) в окрестности точки B_1 .

Окрестность особой точки Z_9 разделена входящей (при $\lambda \rightarrow \infty$) в эту точку двумерной сепаратрисой L_3 (см. § 2) на две области V_1 и V_2 . Траектории, выходящие из области V_1 , при возрастании λ входят в притягивающую особую точку Z_8 ; траектории, выходящие из области V_2 , при возрастании λ входят в поверхность непродолжимости решений $L = 0$ (см. рис. 26 и 33) и поэтому не имеют физических применений. Двумерная сепаратриса L_3 при убывании λ определяет некоторую поверхность L_3 , пересекающую линию Y (5.6) в точке B_1 . Все траектории, выходящие из области V_1 , при убывании λ находятся по одну сторону от поверхности L_3 , а траектории, выходящие из области V_2 , находятся по другую сторону. Вследствие этого отрезок линии Y по одну сторону от точки B_1 целиком пересечен траекториями, вышедшими (при убывании λ) из области V_1 , а по другую сторону точки B_1 целиком пересечен траекториями, вышедшими из области V_2 .

Проведенные рассуждения доказывают существование траекторий $B_1I_0Z_8$ (см. рис. 33), проходящих в окрестности траектории (2.3) через линию Y и через область V_1 . Эти траектории и определяют решение задачи о движении сходящейся ударной волны по покоящемуся газу. Действительно, пусть B'_2 — точка, сопряженная с B_1 при преобразовании (5.5) (B'_2 лежит на траектории X). Автомодельное решение, определенное после замены $t \rightarrow -t$, $v \rightarrow -v$ отрезками траекторий $Z_3B'_2$, $B_1I_0Z_8$, удовлетворяет всем условиям рассматриваемой задачи. Отметим, что в силу непрерывности поведения траекторий динамической системы (1.14) такие же решения существуют и при всех значениях γ , ω , близких к $\gamma = 7/6$, $\omega = 12/5$.

Полученные решения (при γ , ω , близких к $7/6$, $12/5$ и числах Маха движения ударной волны $M \approx (15/2)^{1/2}$) описывают процесс сжатия звезды ударной волной, при котором после прохождения ударной волны при $t \rightarrow -0$ устанавливается состояние (3.12), являющееся некоторым возмущением исходного равновесного состояния (5.1), причем скорость газа $v \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Найденные решения имеют слабый разрыв (теряют аналитичность) при продолжении через линию особых точек I_1I_4 в точках I'_0 . Можно показать, что в окрестности $\gamma = 7/6$, $\omega = 12/5$ существует бесконечно много значений γ , ω , для которых имеется некоторое аналитичное всюду (кроме ударной волны) решение рассматриваемой задачи.

II. Приведем еще один точный пример двойственных решений. Рассмотрим точку пересечения линии Y (5.6) с компонентой границы Γ_8 ($z = 0$):

$$Y_2(z=0, m = \frac{16(\omega-1)}{(\gamma-1)\omega^2}, V = -\frac{4}{(\gamma-1)\omega}).$$

При $\omega = \omega_0 = (2\gamma - 1) / 2(\gamma - 1)$ траектория динамической системы (1.14), проходящая через точку Y_2 , интегрируется явно: $z = 0$, $m = V^2/2$ (см. § 3). Эта траектория проходит через особые точки Z_8 и Z_{10} (см. рис. 33); ей соответствует точное решение

$$\mathcal{M} = \frac{r^3}{2Gt^2} V^2, \quad v = -\frac{r}{t} V, \quad \rho = \frac{(3-\omega)V}{Gt^2\pi(2+\omega V)}, \quad p = 0, \quad (7.2)$$

где функция $V(\lambda) > 0$ определена уравнением

$$V^{-1}(1 + 3V/2)^{1-\omega/3} = \lambda^{\omega/2}. \quad (7.3)$$

Решение (7.2) описывает при $t > 0$ коллапс холодного газа с образованием в центре «черной дыры» (см. (4.2)).

Пусть B_3 — точка, сопряженная с точкой Y_2 в силу преобразования (5.5) (B_3 лежит на траектории X). Отрезки траекторий Z_3B_3 , Y_2Z_8 (см. рис. 33) определяют решение с расходящейся ударной волной. В этом решении на ударной волне $\lambda = \lambda_1$, где λ_1 определяется из (7.3) при $V = 4\omega/(\gamma - 1)$; при $0 \leq \lambda < \lambda_1$ газ находится в равновесном состоянии (5.1), при $\lambda > \lambda_1$ решение описывает коллапс холодного газа (7.2), причем при $r \rightarrow \infty$ решение является равновесным (с асимптотикой (3.12)) и скорость газа $v \rightarrow 0$ при $\gamma < 3/2$. В целом это решение описывает образование покоящейся звезды в результате разогрева коллапсирующего холодного газа ударной волной.

Двойственное решение соответствует траекториям $Z_{10}Y_2, B_3Z_8$ и после замены $t \rightarrow -t$, $v \rightarrow -v$ описывает при $0 < \lambda < \lambda_1$ (отрезок $Z_{10}Y_2$) идущий от центра поток холодного газа, причем в центре, согласно асимптотике (4.2), имеется убывающая при $t \rightarrow -0$ точечная масса — аналог «белой дыры» в классической теории. При $\lambda > \lambda_1$ (отрезок B_3Z_8) решение является равновесным состоянием (5.1). Таким образом, это решение описывает режим сжатия «белой дыры» ударной волной, при котором газ переходит в состояние равновесия. Решения с аналогичными свойствами существуют также при всех близких γ , ω и при $p \neq 0$.

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В природе существует обширный круг явлений, в которых существенную роль играет вращение газа или жидкости вокруг неподвижной оси. Например, в области геофизических явлений необходимо учитывать вращение атмосферы и океанов, обусловленное вращением Земли. Вращение является основным свойством таких явлений, как циклоны и смерчи в атмосфере и водовороты в воде. Вращение также необходимо учитывать в некоторых видах движения плазмы в магнитном поле. Существенно, что в перечисленных явлениях угловая скорость вращения газа, вообще говоря, зависит от расстояния до оси вращения. Простейшим классом решений уравнений газовой динамики, обладающих этим свойством, являются автомодельные решения с вращением газа, изучению которых и посвящена данная глава.

Автомодельные решения с вращением идеального газа относятся к классу частично инвариантных решений по классификации работы [138]. Автомодельное вращение вязкой несжимаемой жидкости исследовалось в работах [139, 140]. Полная классификация инвариантных и частично-инвариантных решений уравнений Навье — Стокса, включающая автомодельное вращение вязкой несжимаемой жидкости, дана в работах [141, 142].

§ 1. Определение автомодельного вращения идеального газа

При изучении автомодельных решений с вращением газа вокруг неподвижной оси наиболее естественно использовать цилиндрическую систему координат. В произвольной системе координат уравнения газовой динамики имеют следующий инвариантный вид:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i_{;j} v^j = -\frac{1}{\rho} p_{;j} g^{ij}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{;i} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial t} + \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)_{;i} v^i = 0. \quad (1.3)$$

Здесь g_{ij} — метрика в данной системе координат и используются

стандартные обозначения для ковариантных производных:

$$\begin{aligned} v^i_{;j} &= \frac{\partial v^i}{\partial x_j} + \Gamma^i_{kj} v^k, & P_{;j} &= \frac{\partial p}{\partial x_j}, \\ v^i_{;j;k} &= \frac{\partial v^i_{;j}}{\partial x_k} - \Gamma^m_{jk} v^i_{;m} + \Gamma^i_{mk} v^m_{;j}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Символы Кристоффеля имеют стандартный вид:

$$\Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_l} \right). \quad (1.5)$$

В цилиндрической системе координат r, φ, z_1 метрика евклидова пространства имеет вид $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz_1^2$. Среди символов Кристоффеля этой метрики только три символа отличны от нуля:

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = r^{-1}.$$

Вектор скорости газа в цилиндрических координатах имеет компоненты (v, ω, u) , где v — радиальная скорость, ω — угловая скорость, u — скорость газа по оси z_1 . В дальнейшем будет использоваться обозначение $w = r\omega$.

С помощью формул (1.4) получаем явный вид уравнений динамики газа (1.1) в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \frac{\partial v}{\partial z_1} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \frac{\partial w}{\partial z_1} + \frac{vw}{r} &= -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \frac{\partial u}{\partial z_1} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_1}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнения неразрывности и адиабатичности (1.2) и (1.3) принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho w)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho u}{\partial z_1} + \frac{\rho v}{r} = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial t} + v \frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial \varphi} + u \frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial z_1} = 0. \quad (1.8)$$

Параметры идеального газа в автомодельных решениях с вращением имеют следующий вид:

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad w = \frac{r}{t} \Omega(\lambda), \quad \dot{u} = \frac{z_1}{t} U(\lambda), \quad (1.9)$$

$$\rho = \frac{a}{r^{k+3} t^s} R(\lambda), \quad p = \frac{a}{r^{k+1} t^{s+2}} P(\lambda).$$

Здесь автомодельная переменная $\lambda = r/bt^\delta$, константы a и b имеют размерности $[a] = ML^k T^s$, $[b] = LT^{-\delta}$. В решениях вида (1.9)

наряду с радиальным движением газа происходит также вращение газа вокруг оси z_1 и разлет по этой оси. Таким образом, в автомодельных решениях (1.9) движение частиц газа является существенно трехмерным.

Автомодельные решения с одномерным движением частиц газа, имеющие плоские, цилиндрические и сферические волны, подробно изучались в большом числе работ [7, 115, 137, 143—147]. В случае цилиндрических волн эти решения имеют вид (1.9) при $w \equiv u \equiv 0$ и описывают одномерное радиальное движение газа. Ряд точных автомодельных решений с вращением вязкой несжимаемой жидкости найден в работах [139, 140, 148] (эти решения имеют известные применения в задаче о диффузии вихря [139, 143] и при моделировании торнадо [140]). Автомодельное вращение идеального газа, судя по имеющимся публикациям и монографиям [7, 115, 137, 143—147], совершенно не изучалось. В данной главе проводится детальное исследование автомодельного вращения идеального газа.

Отметим, что в классе автомодельных решений с плоскими волнами также реализуются существенно трехмерные движения идеального газа. Пусть в системе декартовых координат x^1, x^2, x^3 волна распространяется по оси $x^1 = r$. В обобщенном автомодельном решении давление и плотность газа определяются формулами (1.9), а скорости газа v^i (по оси x^i) имеют вид

$$v^1 = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad v^i = \frac{x^j}{t} U_j^i(\lambda) + \frac{r}{t} W^i(\lambda), \quad (1.10)$$

где $i, j = 2, 3$. В решениях вида (1.9) — (1.10) скорости газа при фиксированных $t = \text{const}$ и $r = \text{const}$ являются линейными функциями остальных пространственных координат. Это обстоятельство сближает автомодельные решения вида (1.9)—(1.10) с движениями газа с однородной деформацией (см. главу VII).

§ 2. Алгебраические интегралы автомодельного вращения идеального газа

I. Система автомодельных уравнений. Уравнения адиабатического движения идеального газа (1.6)—(1.8) для автомодельных решений (1.9) в переменных $V(\tau), \Omega(\tau), z(\tau) = \gamma P/R, R(\tau), U(\tau), \tau = \ln \lambda$ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= z' = \frac{z}{(V-\delta)(z-(V-\delta)^2)} [z(2-\kappa(\gamma-1)-2V) + \\ &+ (2(\gamma V-1) + (\gamma-1)U)(V-\delta)^2 - (\gamma-1)(-\Omega^2 + V^2 - V)(V-\delta)], \\ V' &= \{z(\kappa - 2V - U) + (-\Omega^2 + V^2 - V)(V-\delta)\}(z - (V-\delta)^2)^{-1}, \\ \Omega' &= \frac{\Omega(1-2\Gamma)}{V-\delta}, \quad U' = \frac{U(1-U)}{V-\delta}, \quad \kappa = \frac{s+2+\delta(k+1)}{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнение для изменения плотности отделяется:

$$\frac{R'}{R} = \frac{-V' + s + (k+1)V - U}{V - \delta}. \quad (2.2)$$

Отметим, что первое уравнение (2.1) можно записать также в виде

$$\frac{z'}{z} = \frac{-(\gamma-1)V' + 2(1-\gamma V) - (\gamma-1)U}{V - \delta}. \quad (2.3)$$

Система (2.1) имеет три инвариантных трехмерных подмногообразия: $\Omega = 0$, $U = 0$ и $U = 1$. На двумерном инвариантном многообразии $\Omega = 0$, $U = 0$ система (2.1) описывает автомодельные радиальные движения газа с цилиндрическими волнами, подробно изученные в книге [7].

Алгебраическая структура динамической системы (2.1) вполне аналогична алгебраической структуре системы (1.14) из главы V, описывающей автомодельные сферически-симметричные движения самогравитирующего газа, при этом формальным аналогом переменной m является переменная Ω^2 . Система (2.1), так же, как и система (1.14) главы V, имеет поверхность непродолжимости решений $L = z - (V - \delta)^2 = 0$. Существование этой поверхности формально является причиной возникновения в некоторых автомодельных решениях с вращением газа ударных волн.

Система (2.1) становится сингулярной при $V = \delta$. Вне поверхности $V = \delta$ (в конечной области координат z , V , Ω , U) находятся (при любых γ) шесть особых точек системы (2.1), которые мы обозначаем Z_i^e по аналогии с особыми точками системы (1.14) главы V:

$$\begin{aligned} Z_6^e: V = 1, \quad \Omega = 0, \quad U = \varepsilon = 0; 1; \quad z = 0; \\ Z_7^0: V = \frac{1}{\gamma}, \quad \Omega = 0, \quad U = 0, \quad z = \frac{(\gamma-1)(1-\gamma\delta)}{\gamma^2(\kappa\gamma-2)}; \\ Z_7^1: V = \frac{3-\gamma}{2\gamma}, \quad \Omega = 0, \quad U = 1, \quad z = \frac{3(\gamma-1)(3-\gamma)(3-\gamma-2\gamma\delta)}{8\gamma^2(\kappa\gamma-3)}; \\ Z_8^e: V = 0, \quad \Omega = 0, \quad U = \varepsilon = 0; 1; \quad z = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Все эти особые точки являются невырожденными. Вырожденные особые точки системы (2.1) можно полностью разрешить с помощью последовательности преобразований координат, примененной в § 1 главы V (см. ниже, § 4).

Система уравнений газовой динамики для обобщенных автомодельных движений с плоскими волнами, имеющих вид (1.10), сводится к следующей системе (обозначения см. в (2.1)):

$$\begin{aligned} z' = \frac{z}{(V-\delta)(z-(V-\delta)^2)} [z(2-\kappa(\gamma-1)-2V) + \\ + ((1+\gamma)V-2+(\gamma-1)U_i)(V-\delta)^2 - (\gamma-1)(V^2-V)(V-\delta)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V' &= \{z(\kappa - V - U_i^i) + (V - \delta)(V^2 - V)\}(z - (V - \delta)^2)^{-1}, \\
 U_i^{j'}(V - \delta) &= U_i^j - U_k^j U_i^k, \quad W^{i'}(V - \delta) = W^i - U_k^i W^k, \\
 R'(V - \delta) &= R(-V' + s + (k + 2)V - U_i^i).
 \end{aligned}$$

Здесь по повторяющимся индексам $i, k = 2, 3$ производится суммирование. Нетрудно получить простые точные решения с плоскими волнами, соответствующие особым точкам указанной системы, в которых матрица U_j^i диагональна и имеет собственные числа, равные 1 или 0.

В данном параграфе мы укажем для системы автомодельных уравнений (2.1) — (2.2) (в основном при $U \equiv 0$) ряд алгебраических интегралов, связывающих в конечном виде величины

$$V, R, P, \Omega, \lambda = \exp \tau.$$

II. Интеграл момента количества движения. Для получения интегралов автомодельных уравнений (2.1) — (2.2) при $U \equiv 0$, связанных с различными сохраняющимися величинами F (значение F вычисляется для единичного объема газа), мы воспользуемся следующим приемом, предложенным в книге [7]. Рассмотрим подвижные цилиндрические поверхности $r'(t)$ и $r''(t)$, на которых автомодельная переменная λ принимает постоянные значения λ' и λ'' . Для любой функции F справедливо следующее тождество [7]:

$$\frac{d}{dt} \int_{r'}^{r''} Fr \, dr = \frac{\tilde{d}}{dt} \int_{r'}^{r''} Fr \, dr + \left[Fr' \left(\frac{dr}{dt} - v \right) \right]_{r'}^{r''}. \quad (2.5)$$

Здесь символ \tilde{d}/dt означает дифференцирование по времени, производимое над интегралом по подвижному объему, составленному из одних и тех же частиц газа. Интеграл в (2.5) для функции F , не зависящей от z_1 и φ , совпадает с полным интегралом по столбу газа единичной высоты, ограниченному цилиндрами радиусов r' и r'' .

В силу закона сохранения момента количества движения имеем

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \int_{r'}^{r''} \rho r^2 w \, dr = 0.$$

После подстановки формул (1.10) получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{r'}^{r''} \rho r^2 w \, dr &= ab^{1-k} t^{(1-k)\delta-s-2} ((1-k)\delta - (1+s)) \int_{\lambda'}^{\lambda''} R \Omega \lambda^{-k} d\lambda, \\
 \rho r^2 w \left(\frac{dr}{dt} - v \right) \Big|_{r'}^{r''} &= ab^{1-k} t^{(1-k)\delta-s-2} R \Omega \lambda^{1-k} (\delta - V) \Big|_{\lambda'}^{\lambda''}.
 \end{aligned}$$

Поэтому тождество (2.5) при $F = \rho r w$ дает

$$((1 - k) \delta - (1 + s)) \int_{\lambda'}^{\lambda''} R \Omega \lambda^{-k} d\lambda = R \Omega \lambda^{1-k} (\delta - V) \Big|_{\lambda'}^{\lambda''}. \quad (2.6)$$

Согласно (2.6), при $(1 - k) \delta - (1 + s) = 0$ ($\kappa = (2\delta + 1)/\gamma$) значения функции $R \Omega \lambda^{1-k} (V - \delta)$ на произвольной траектории системы (2.1) — (2.2) совпадают при любых λ' , λ'' . Следовательно, при $\kappa = (2\delta + 1)/\gamma$ имеется интеграл системы (2.1)—(2.2):

$$\Phi_1 = R \Omega (V - \delta) = \text{const } \lambda^{k-1}. \quad (2.7)$$

Отметим, что условие существования интеграла (2.7) $(1 - k) \delta - (1 + s) = 0$ означает, что из констант автомодельного решения a и b (см. (1.9)) можно образовать константу с размерностью момента количества движения, рассчитанного на единицу длины, а именно $[ab^{1-k}] = MLT^{-1}$.

III. Интеграл энергии. Полная энергия столба газа единичной высоты, ограниченного цилиндрами радиусов r' и r'' , равна

$$\mathcal{E} = 2\pi \int_{r'}^{r''} \left(\varepsilon + \frac{v^2 + w^2}{2} \right) \rho r dr.$$

При адиабатическом движении плотность внутренней энергии газа $\varepsilon = p/(\gamma - 1) \rho$. Изменение энергии частиц газа, находящихся в данный момент времени между цилиндрическими поверхностями $r' = \text{const}$, $r'' = \text{const}$, равно работе сил давления на этих поверхностях, поэтому

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -2\pi (p'' v'' r'' - p' v' r'), \quad (2.8)$$

где v означает радиальную составляющую скорости частиц газа.

Тождество (2.5) при $F = p/(\gamma - 1) + \rho (v^2 + w^2)/2$ после подстановки формул (1.10) и (2.8) и сокращения на общий множитель дает

$$\begin{aligned} ((1 - k) \delta - (s + 2)) \int_{\lambda'}^{\lambda''} \left(\frac{P}{\gamma - 1} + R \frac{V^2 + \Omega^2}{2} \right) \lambda^{-k} d\lambda = \\ = -\lambda^{1-k} R \left[\frac{P}{R} V + (V - \delta) \left(\frac{V^2 + \Omega^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1) R} \right) \right] \Big|_{\lambda'}^{\lambda''}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отсюда при $(1 - k) \delta - (s + 2) = 0$ (или $\kappa = 2\delta/\gamma$) получаем интеграл системы (2.1)—(2.2):

$$H = R \left(\frac{P}{R} V + (V - \delta) \left(\frac{V^2 + \Omega^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1) R} \right) \right) = \text{const } \lambda^{k-1}. \quad (2.10)$$

Условие существования интеграла (2.10) $(1 - k) \delta - (s + 2) = 0$ означает — так же, как и в [7], что из констант автомодельного

решения a и b можно образовать константу с размерностью энергии, рассчитанной на единицу длины, а именно $[ab^{1-k}] = MLT^{-2}$.

IV. Интегралы масс и адиабатичности. Эти интегралы существуют при всех значениях параметров задачи, и их вывод совершенно аналогичен выводу, проведенному в книге [7]. Пусть $\mathcal{M}(r, t)$ — масса газа (на единицу высоты) внутри цилиндрической поверхности радиуса r . В автомодельном решении имеем

$$\mathcal{M} = \frac{a}{r^{k+1} t^s} m(\lambda).$$

Интеграл масс имеет вид [7]

$$(s + \delta(k + 1))m - 2\pi R(V - \delta) = \text{const } \lambda^{1+k}. \quad (2.11)$$

Интеграл адиабатичности имеет вид [7]

$$\Phi_2 = PR^{-\gamma+x} |V - \delta|^x = \text{const } \lambda^y, \quad (2.12)$$

$$x = \frac{2 - (\gamma - 1)s + \delta(k + 1 - \gamma(k + 3))}{s + \delta(k + 1)}, \quad y = -2 \frac{\gamma s + k + 1}{s + \delta(k + 1)}.$$

Используя уравнение (2.3), нетрудно проверить, что система (2.1) ($U = 0$) имеет монотонную функцию

$$\Phi_3 = z |V - \delta|^{\gamma-1} \Omega^{2(1-\gamma\delta)/(2\delta-1)} = \text{const} \cdot \lambda^{2(\gamma-2)/(2\delta-1)}. \quad (2.13)$$

Система (2.1) — (2.2) имеет первый интеграл

$$\Phi_4 = R^\alpha z |V - \delta|^{(\gamma-1)+\alpha} \Omega^{-2-\alpha s}, \quad \alpha = \frac{2(\gamma-2)}{2s+k+1}. \quad (2.14)$$

Интеграл Φ_4 при $\gamma \neq 2$ позволяет выразить переменную R через переменные z , V , Ω . При $\gamma = 2$ монотонная функция Φ_3 является первым интегралом и совпадает с интегралом Φ_4 . Этот интеграл при $\gamma = 2$ позволяет понизить порядок системы (2.1) ($U \equiv 0$) на единицу, т. е. преобразовать эту систему на плоскость.

Система (2.1) — (2.3) при $U \equiv 0$ имеет монотонную функцию

$$\Phi_5 = R\Omega^\beta (V - \delta) = \text{const } \lambda^{k+1-2\beta}, \quad \beta = \frac{\kappa\gamma - 2}{2\delta - 1}. \quad (2.15)$$

Частным случаем этой монотонной функции при $\kappa = (2\delta + 1)/\gamma$, $\beta = 1$ является «интеграл момента количества движения» Φ_1 (2.7).

V. Интегралы полной системы автомодельных уравнений. Система четырех уравнений (2.1) имеет монотонную функцию

$$\Phi_6 = \Omega \left| \frac{U}{1-U} \right|^{2\delta-1} = \text{const} \cdot \lambda^{-2}. \quad (2.16)$$

Используя уравнение (2.3), нетрудно проверить, что система (2.1) имеет также первый интеграл

$$\Phi_7 = z |V - \delta|^{\gamma-1} \Omega^{-\gamma} U^{\gamma-2} |1 - U|^{3-2\gamma}. \quad (2.17)$$

Система уравнений (2.1)—(2.2) имеет первый интеграл

$$\begin{aligned} \Phi_8 &= R (V - \delta) \Omega^{(k+1)/2} U^x |1 - U|^y, \\ x &= -s - (k + 1)/2, \quad y = s + (k - 1)/2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Интеграл Φ_8 позволяет выразить плотность R через переменные V, Ω, U . Интеграл Φ_7 позволяет понизить на единицу порядок системы (2.1). При $\gamma = 2$ этот интеграл определен на инвариантном многообразии $U = 0$, где совпадает с интегралом (2.13). При $\gamma = 3/2$ интеграл Φ_7 определен на инвариантном многообразии $U = 1$ и поэтому позволяет преобразовать систему (2.1) при $U = 1, \gamma = 3/2$ на плоскость.

§ 3. Точные автомодельные решения степенного вида

Представим автомодельные решения (1.10) в виде степеней r и t с неопределенными показателями и числовыми множителями. После подстановки этих выражений в уравнения (1.6)—(1.8) и разрешения полученных алгебраических уравнений получим все автомодельные решения степенного вида. В некоторых из этих точных решений газ не вращается. Это шесть решений, отвечающих особым точкам $Z_6^0, Z_6^1, Z_7^0, Z_7^1, Z_8^0, Z_8^1$ (2.4) и четыре решения, существующие при специальных значениях параметра κ и отвечающие следующим простым траекториям системы (2.1):

$$\begin{aligned} \kappa = 0: & V = 0, \quad \Omega = 0, \quad U = 0, \quad z = C_1 \lambda^{-2\delta}; \\ \kappa = 1: & V = 0, \quad \Omega = 0, \quad U = 1, \quad z = C_1 \lambda^{(\gamma-3)\delta}; \\ \kappa = 2: & V = 1, \quad \Omega = 0, \quad U = 0, \quad z = C_1 \lambda^{2(1-\gamma)/(1-\delta)}; \\ \kappa = 3: & V = 1, \quad \Omega = 0, \quad U = 1, \quad z = C_1 \lambda^{3(1-\gamma)/(1-\delta)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При $\gamma = 2$ и $\gamma = 3/2$ имеются решения степенного вида, в которых угловая скорость вращения газа не зависит от координат r . Эти решения соответствуют двум следующим линиям особых точек (Ω_0 — параметр):

$$\gamma = 2: \quad V = \frac{1}{2}, \quad \Omega = \Omega_0, \quad U = 0, \quad z = \frac{1 - 2\delta}{2(\kappa - 1)} \left(\Omega_0^2 + \frac{1}{4} \right); \quad (3.2)$$

$$\gamma = \frac{3}{2}: \quad V = \frac{1}{2}, \quad \Omega = \Omega_0, \quad U = 1, \quad z = \frac{1 - 2\delta}{2(\kappa - 2)} \left(\Omega_0^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (3.3)$$

Обозначим при $\gamma = 2$ $\alpha_1 = 4 \frac{\kappa - 1}{1 - 2\delta}, u_1 = 0$, при $\gamma = \frac{3}{2}$ $\alpha_2 = 3 \frac{\kappa - 2}{1 - 2\delta}, u_2 = 1$. Решения, соответствующие особым точкам (3.2) и (3.3),

при $\alpha_i > 0$ определяются следующим формулами:

$$v = \frac{1}{2} \frac{r}{t}, \quad w = \Omega_0 \frac{r}{t}, \quad u = u_i \frac{z_1}{t},$$

$$p = \frac{C_1}{\alpha_i} \left(\Omega_0^2 + \frac{1}{4} \right) ab^{-\alpha-\alpha_i} r^{\alpha_i} t^{-\delta\alpha_i-\nu\kappa}, \quad (3.4)$$

$$\rho = C_1 ab^{-\alpha-\alpha_i} r^{\alpha_i-2} t^{-\delta\alpha_i-\nu\kappa+2}, \quad \alpha = (\nu\kappa - s - 2)/\delta.$$

В решении (3.4) при $\nu = 2$ ($i = 1$) частицы газа движутся по логарифмическим спиральям $\varphi = C_0 \ln r + C_2$, $z_1 = C_3$ и выходят из оси вращения $r = 0$ при $t = 0$. В решении (3.4) при $\nu = 3/2$ ($i = 2$) движение частиц газа происходит по логарифмическим спиральям, лежащим на параболоидах $z_1 = Cr^2$; при $t = 0$ частицы газа выходят из центра $r = z_1 = 0$.

Решения (3.4), так же как и решения, соответствующие особым точкам (2.4) и траекториям (3.1), относятся к классу движений газа с однородной деформацией (скорости газа являются линейными функциями координат).

При $\kappa/\delta < 0$ существует стационарное решение степенного вида, в котором газ только вращается:

$$v = 0, \quad w = C_1 b^{1/\delta} r^{1-1/\delta}, \quad u = 0, \quad (3.5)$$

$$p = -\frac{\delta}{\nu\kappa} C_1^2 C_2 ab^{\frac{2+s}{\delta}} r^{-\frac{\nu\kappa}{\delta}}, \quad \rho = C_2 ab^{\frac{s}{\delta}} r^{-\frac{\nu\kappa}{\delta} + \frac{2(1-\delta)}{\delta}}.$$

Это решение соответствует следующей траектории системы (2.1):

$$V = 0, \quad U = 0, \quad z = -\frac{\delta}{\kappa} \Omega^2, \quad \Omega = C_1 \lambda^{1/\delta}. \quad (3.6)$$

При $\nu = 2$ и $\nu = 5/3$ существуют нестационарные решения степенного вида, в которых угловая скорость вращения газа, так же как и в решении (3.5), зависит от расстояния до оси вращения. Эти решения соответствуют следующим двум траекториям системы (2.1):

$$\nu = 2: \quad V = 1, \quad U = 0, \quad z = \frac{1-\delta}{\kappa-2} \Omega^2, \quad \Omega = C_1 \lambda^{1/(\delta-1)}; \quad (3.7)$$

$$\nu = \frac{5}{3}: \quad V = 1, \quad U = 1, \quad z = \frac{1-\delta}{\kappa-3} \Omega^2, \quad \Omega = C_1 \lambda^{1/(\delta-1)}. \quad (3.8)$$

Обозначим при $\nu = 2$ $\beta_1 = \frac{2(\kappa-2)}{1-\delta}$, $u_1 = 0$ и при $\nu = \frac{5}{3}$ $\beta_2 = \frac{5(\kappa-3)}{3(1-\delta)}$, $u_2 = 1$. Траекториям (3.7) и (3.8) при $\beta_i > 0$ соот-

ветствуют следующие решения:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{r}{t}, \quad w = C_1 b \frac{1}{1-\delta} r \frac{\delta}{\delta-1} t^{-\frac{2\delta-1}{\delta-1}}, \quad u = u_i \frac{z_1}{t}, \\
 \rho &= C_2 a b^{-\beta-\beta_i} - \frac{2}{1-\delta} r^{\beta_i} + \frac{2\delta}{1-\delta} t^{-\beta_i \delta - \gamma \kappa - 2} \frac{2\delta-1}{1-\delta}, \\
 p &= \frac{C_1^3 C_2}{\beta_i} a b^{-\beta-\beta_i} r^{\beta_i} t^{-\beta_i \delta - \gamma \kappa}, \quad \beta = \frac{\gamma \kappa - s - 2}{\delta}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

В решении (3.9) при $\gamma = 2$ ($i = 1$) частицы газа движутся по спиральям $\varphi = C_3 + C_0/r$, $z_1 = C_4$ и при $t = 0$ выходят из оси вращения $r = 0$. В решении (3.9) при $\gamma = 5/3$ ($i = 2$) частицы газа движутся по спиральям $\varphi = C_3 + C_0/r$, лежащим на конусах $z_1 = C_4 r$; при $t = 0$ частицы газа выходят из центра $r = z_1 = 0$.

§ 4. Исследование динамической системы

Динамическая система (2.1) в дальнейшем рассматривается в следующей области S' четырехмерного пространства (z, Ω, V, U) :

$$z \geq 0, \quad \Omega \geq 0, \quad -\infty < V < +\infty, \quad 0 \leq U \leq 1. \tag{4.1}$$

Ограничение области значений координаты U обусловлено тем, что вне отрезка $(0,1)$ координата U вдоль траекторий системы (2.1) обращается в бесконечность при конечных значениях переменной λ . Система (2.1) становится сингулярной при $V = \delta$, причем каждая траектория системы (2.1) при всех λ остается в одной из областей S_1 ($V < \delta$) или S_2 ($V > \delta$).

Алгебраическая структура динамической системы (2.1), как отмечалось в § 2, вполне аналогична алгебраической структуре системы (1.14) главы V, причем переменная t является формальным аналогом переменной Ω^2 . Вследствие этого полное разрешение особенностей динамической системы (2.1), или построение компактного многообразия S , на котором система (2.1) имеет только невырожденные особые точки, осуществляется с помощью преобразований координат (1.17)–(1.33) из главы V, где переменную t следует заменить на Ω^2 , а параметр $2/\omega$ обозначить δ . При всех этих преобразованиях координата U не меняется. Компактное многообразие S для каждой из инвариантных областей S_1 ($V < \delta$) и S_2 ($V > \delta$) является произведением трехмерного компактного многообразия S_0 , построенного в главе V, на отрезок $I(0,1)$ (область значений координаты U). Две новые компоненты границы $U = 0$ и $U = 1$, очевидно, являются инвариантными многообразиями динамической системы (2.1).

Исследуем наиболее интересные особые точки динамической системы (2.1) и соответствующие им степенные асимптотики реше-

ний. Особые точки будем обозначать Z_i^ε , где номер i совпадает с номером соответствующей особой точки на компактном многообразии S_0 главы V, а индекс $\varepsilon = 0, 1$ означает два экземпляра этой особой точки, лежащие при $U = 0$ и $U = 1$. В дальнейшем в основном рассматривается система (2.1) в области S_1 ($V < \delta$). Сделаем замену переменной $d\tau_\varepsilon/d\tau = -1/(V - \delta)$ и введем новые координаты (аналогичные координатам (1.17) главы V)

$$u = z^{1/2} > 0, \quad v_0 = V - \delta < 0, \quad w_0 = -(\Omega^2(V - \delta))^{1/2} > 0 \quad (4.2)$$

(в области S_2 ($V > \delta$) производится замена времени $d\tau_\varepsilon/d\tau = 1/(V - \delta)$ и координаты (4.2) удовлетворяют условиям $u > 0, v_0 > 0, w_0 < 0$). В координатах (4.2) динамическая система (2.1) имеет инвариантное подмногообразие $v_0 = 0$ (компонента границы Γ_ε многообразия S).

Для исследования поведения траекторий динамической системы (2.1) при больших значениях координат u, v_0, w_0 произведем пополнение области S_1 границей на бесконечности по координатам u, v_0, w_0 . Такое пополнение осуществляется с помощью следующих координат (указана также замена переменной τ):

$$v_1 = \frac{v_0}{u}, \quad \rho_0 = \frac{1}{u}, \quad w_1 = \frac{w_0}{u}, \quad \frac{d\tau_1}{d\tau} = -\frac{u}{v_0}. \quad (4.3)$$

Координаты (4.3) аналогичны координатам (1.18) главы V. В координатах (4.2) и (4.3) система (2.1) имеет четыре вырожденные особые точки: O_1^ε ($v_1 = w_1 = \rho_0 = 0, U = \varepsilon = 0, 1$) и O_2^ε ($v_0 = w_0 = u = 0, U = \varepsilon = 0, 1$). Для разрешения вырожденной особой точки O_1^ε введем координаты (см. главу V, (1.24))

$$v_0 = \frac{v_1}{\rho_0}, \quad w_2 = \frac{w_1^3}{\rho_0} = -\frac{v_0\Omega^2}{u^2}, \quad \rho_0 = \frac{1}{u}, \quad \tau_3. \quad (4.4)$$

Для разрешения вырожденной особой точки O_2^ε введем координаты (см. главу V, (1.27))

$$v_4 = \frac{v_1}{u} = \frac{v_0}{u^2}, \quad u, \quad w_2 = -\frac{v_0\Omega^2}{u^2}, \quad \tau_3. \quad (4.5)$$

Координаты (4.3) — (4.5) при условиях (4.2) покрывают часть многообразия S , показанную на рис. 34, где изображены также особые точки динамической системы (для сравнения см. рис. 26).

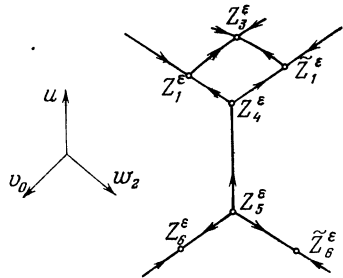


Рис. 34. Разрешение вырожденных особых точек O_1^ε и O_2^ε .

Динамическая система (2.1) в координатах (4.4) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{v}_0 &= \frac{v_0}{1 - \rho_0^2 v_0^2} (X_1 + 2v_0 + 2\delta + U - \kappa - w_2), & \dot{U} &= -U(1 - U), \\ \dot{w}_2 &= \frac{w_2}{1 - \rho_0^2 v_0^2} [\gamma X_1 + X_2 + X_3 - U - 2(1 - 2\delta - 2v_0)(1 - v_0^2 \rho_0^2)],\end{aligned}\quad (4.6)$$

$$\dot{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{2(1 - \rho_0^2 v_0^2)} [(1 - \gamma) X_1 - X_2 + X_3 + 2v_0 + 2\delta - \kappa - w_2],$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}X_1 &= -v_0(v_0 + \delta)(v_0 + \delta - 1)\rho_0^2, & X_2 &= 2 - \gamma(\kappa + w_2), \\ X_3 &= v_0^2 \rho_0^2 (2 - (\gamma - 1)U - 2\gamma\delta - 2\gamma v_0).\end{aligned}$$

В координатах (4.5) динамическая система (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{v}_4 &= \frac{v_4}{1 - v_4 u^2} (\gamma Y_1 + Y_2 - Y_3), & \dot{U} &= -U(1 - U), \\ \dot{w}_2 &= \frac{w_2}{1 - v_4 u^2} [\gamma Y_1 + Y_2 - Y_3 - 2(1 - 2\delta - 2v_4 u^2)(1 - v_4^2 u^2)], & (4.7) \\ \dot{u} &= \frac{u}{2(1 - v_4^2 u^2)} [(1 - \gamma) Y_1 - Y_3 + (\gamma - 1)(\kappa + w_2) + 2\delta - 2 + 2v_2 u^2].\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}Y_1 &= -v_4(v_4 u^2 + \delta)(v_4 u^2 + \delta - 1), & Y_2 &= 2 + U - \gamma(\kappa - w_2), \\ Y_3 &= v_4^2 u^2 (2 - (\gamma - 1)U - 2\gamma\delta - 2\gamma v_4 u^2).\end{aligned}$$

Динамические системы (4.6) — (4.7) имеют на вклеенных в результате проведенных преобразований (4.4)—(4.5) компонентах границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) и Γ_4 ($u = 0$) следующие особые точки (всюду координата U принимает значения $U = \varepsilon = 0, 1$):

$$\begin{aligned}Z_1^\varepsilon: \rho_0 &= 0, & w_2 &= 0, & v_0 &= \frac{\kappa - \varepsilon}{2} - \delta; \\ \tilde{Z}_1^\varepsilon: \rho_0 &= 0, & w_2 &= \frac{\varepsilon + 4\delta}{\gamma} - \kappa, & v_0 &= 0; \\ Z_3^\varepsilon: \rho_0 &= 0, & w_2 &= \frac{\varepsilon}{2 - \gamma} - \kappa, & v_0 &= \frac{\varepsilon(\gamma - 1)}{2(2 - \gamma)} - \delta; \\ Z_4^\varepsilon: \rho_0 &= w_2 = v_0 = 0; & Z_5^\varepsilon: u &= w_2 = v_4 = 0; \\ Z_6^\varepsilon: u &= 0, & w_2 &= 0, & v_4 &= \frac{\varepsilon + 2 - \kappa\gamma}{\gamma\delta(\delta - 1)}; \\ \tilde{Z}_6^\varepsilon: u &= 0, & w_2 &= \frac{\varepsilon + 4\delta}{\gamma} - \kappa, & v_4 &= 0.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Здесь волной отмечены особые точки, у которых нет аналогов на компактном многообразии S_0 главы V (см. рис. 34 и 26). При $\delta \rightarrow 1$ в особой точке Z_6^e координата $v_4 \rightarrow -\infty$ (см. (4.8)). Поэтому в случае $\delta = 1$ для полного исследования вырожденной особой точки O_2 преобразования координат (4.5) недостаточно. Необходимое дополнительное преобразование координат при $\delta = 1$ указано ниже, в § 5.

Отметим, что во всех особых точках Z_i^0 собственное число системы (4.6) — (4.7), отвечающее координате U , $\lambda_U = -1$, а в особых точках Z_i^1 имеем $\lambda_U = +1$ (в дальнейшем не будем указывать вновь собственное число λ_U).

Исследуем подробно два типа особых точек, имеющих приложения в построениях §§ 5, 6. При $\gamma = 2$ и $2\delta - \kappa > 0$ на компоненте границы Γ_2 ($\rho_0 = 0$) имеется отрезок особых точек \mathcal{L} , на котором

$$\rho_0 = 0, U = 0, w_2 - 2v_0 = 2\delta - \kappa, 0 \leq w_2 \leq 2\delta - \kappa. \quad (4.9)$$

Отрезок \mathcal{L} проходит через особые точки $Z_1^0, \tilde{Z}_1^0, Z_3^0$. Особые точки на отрезке \mathcal{L} имеют следующие собственные числа:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_U = -1, \lambda_3 = -w_2 + \kappa - 2\delta < 0, \lambda_{\rho_0} = 1 - w_2 - \kappa.$$

При $\kappa > 1$ отрезок \mathcal{L} целиком состоит из притягивающих особых точек. При $\kappa < 1$ на отрезке \mathcal{L} имеется отрезок неустойчивых особых точек $\kappa/2 < V < 1/2$, из которых в физическую область многообразия S выходит двумерная сепаратриса. Соответствующие решения при $\lambda \rightarrow 0$ имеют следующую асимптотику:

$$v = V \frac{r}{t}, \quad w = \left| \frac{2\Gamma - \kappa}{V - \delta} \right|^{1/2} C_1 b^{-\alpha} r^{1+\alpha} t^{1-\delta\alpha}, \quad u = 0,$$

$$\rho = C_2 a b^{-k-1-\sigma} r^{\sigma-2} t^{-V\sigma}, \quad \sigma = 2 \frac{\kappa-1}{V-\delta} > 0, \quad \alpha = \frac{1-2V}{V-\delta}, \quad (4.10)$$

$$p = \frac{C_1^2 C_2}{\gamma} a b^{-k+3-\beta} r^{2(\kappa-2V)/(V-\delta)} t^{-V\beta}, \quad \beta = 2 \frac{\kappa-2\delta}{V-\delta} > 0.$$

В этой асимптотике на оси вращения давление $p = 0$. Асимптотика (4.10) имеет физический смысл, если при $r = 0$ имеем также $w = 0$, т. е. $1 + \alpha > 0$ или $1 - \delta < V < \delta$.

Сепаратрисы особых точек линии \mathcal{L} определяют решения, продолжающиеся до оси симметрии $r = 0$. Таким же свойством обладают решения, соответствующие сепаратрисам особых точек Z_1^e, Z_3^e .

Особые точки $\tilde{Z}_1^e, Z_4^e, Z_5^e, Z_6^e, \tilde{Z}_6^e$ лежат на инвариантном многообразии $v_0 = 0$. Сепаратрисы этих особых точек определяют решения, в которых область, заполненная газом, имеет движущуюся границу $\lambda = \lambda_0$. Особая точка Z_6^e имеет следующие собственные

числа:

$$\lambda_u = \delta - 1 + (\varepsilon + 2)(\gamma - 1)/2\gamma, \quad \lambda_{u_4} = -(\varepsilon + 2 - \kappa\gamma),$$

$$\lambda_{w_2} = 2(2\delta - 1). \quad (4.11)$$

Сепаратрисы особой точки Z_6^{ε} определяют решения с внутренней ($\lambda > \lambda_0$) или внешней ($\lambda < \lambda_0$) границей газа при одновременно положительных или одновременно отрицательных собственных числах λ_u, λ_{w_2} (4.11). Эти решения имеют следующую асимптотику при $\lambda \rightarrow \lambda_0$:

$$v = \lambda_0 b t^{\delta-1} \left(\delta - \alpha \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \right) \right), \quad u = \varepsilon \frac{z_1}{t},$$

$$w = b t^{\delta-1} C_1 \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \right|^{\beta_1}, \quad p = -\frac{\alpha}{\gamma v_4} a b^{-k-1} C_2 t^{-\kappa\gamma} \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \right|^{-\beta_2},$$

$$\rho = a b^{-k-3} t^{2(1-\delta)-\kappa\gamma} C_2 \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \right|^{-1-\beta_2}, \quad (4.12)$$

$$\alpha = 2\lambda_u = 2(\delta - 1) + (\varepsilon + 2) \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \quad \beta_1 = \frac{2\delta - 1}{\alpha} = \frac{\lambda_{w_2}}{4\lambda_u} > 0,$$

$$\beta_2 = \frac{\kappa\gamma - 2 - \varepsilon}{\alpha} = \frac{\lambda_{v_4}}{2\lambda_u}, \quad v_4 = \frac{\varepsilon + 2 - \kappa\gamma}{\gamma\delta(\delta - 1)}.$$

В асимптотике (4.12) скорость газа $w \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Из необходимого условия ограниченности давления при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ получаем $\beta_2 < 0$. Поэтому асимптотика (4.12) имеет физический смысл только в случае неустойчивой особой точки Z_6^{ε} (собственные числа λ_{v_4} и λ_u имеют противоположные знаки). В этом случае на границе $\lambda = \lambda_0$ давление газа $p = 0$; температура газа $T \sim p/\rho \sim |\lambda/\lambda_0 - 1| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$; при $-1 - \beta_2 > 0$ плотность газа на границе $\rho \rightarrow 0$, т. е. можно считать, что газ граничит с пустотой.

§ 5. Автомодельный разлет вращающегося газа

В данном параграфе исследуются три различных типа автомодельного разлета вращающегося газа, существующие при следующих значениях параметра δ : $\delta > 1$; $\delta = 1$; $1 > \delta > 1/2$ (в последнем случае показатель адиабаты $\gamma = 3/2$). Во всех трех случаях соответствующие траектории системы (2.1) при $\tau \rightarrow \infty$ входят в притягивающую особую точку Z_8^0 ($z = V = \Omega = U = 0$), что обеспечивает необходимую асимптотику решений при $r \rightarrow \infty$. Поведение исследуемых решений в окрестности оси вращения различно и зависит от значения параметра δ .

1. Для построения решений, описывающих автомодельный разлет вращающегося газа при $\delta > 1$, исследуем свойства особых точек Z_6^{ε} ($V = 1, \Omega = z = 0, U = \varepsilon = 0, 1$) и Z_8^{ε} ($V = \Omega = z = 0,$

$U = \varepsilon = 0, 1$). Система (2.1) в особой точке \bar{Z}_8^{ε} имеет следующие собственные числа:

$$\lambda_z = \frac{\gamma - 1}{\delta - 1} (2 + \varepsilon), \quad \lambda_V = \frac{1}{\delta - 1}, \quad \lambda_{\Omega} = \frac{1}{\delta - 1}, \quad \lambda_U = \frac{2\varepsilon - 1}{\delta - 1}. \quad (5.1)$$

Особая точка \bar{Z}_6^1 при $\delta > 1$ является отталкивающей, причем при $\gamma > 4/3$ все сепаратрисы (кроме одной), выходящие из особой точки \bar{Z}_6^1 , касаются в этой точке инвариантного многообразия $z = 0$ (поскольку $\lambda_z > \lambda_V = \lambda_{\Omega} = \lambda_U$ при $\gamma > 4/3$). Соответствующие решения имеют следующую асимптотику при $\lambda \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{r}{t}, \quad w = C_1 r^{\frac{\delta}{\delta-1}} t^{\frac{1-2\delta}{\delta-1}}, \quad u = \frac{z_1}{t}, \\ \rho &= ab^{\frac{s+k}{\delta-1}} C_1 r^{\frac{5-2\delta-\kappa\gamma}{\delta-1}} t^{\frac{\kappa\gamma-2-\delta}{\delta-1}}, \\ p &= ab^{\frac{s+k-3(\gamma-1)}{\delta-1}} C_2 r^{\frac{\gamma(3-\kappa)}{\delta-1}} t^{\frac{\gamma(\kappa-3\delta)}{\delta-1}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В асимптотике (5.2) при $\kappa < (5 - 2\delta)/\gamma < 3$ имеем $\rho \rightarrow 0$, $p \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

В особой точке Z_8^{ε} система (2.1) имеет следующие собственные числа:

$$\lambda_z = \frac{1}{\delta} (-2 + (\gamma - 1)\varepsilon), \quad \lambda_V = \lambda_{\Omega} = -\frac{1}{\delta}, \quad \lambda_U = \frac{2\varepsilon - 1}{\delta}. \quad (5.3)$$

Особая точка Z_8^0 при $\delta > 0$ является притягивающей, причем все траектории (кроме одной), входящие в эту особую точку, касаются инвариантного многообразия $z = 0$ (поскольку $|\lambda_z| > |\lambda_V| = |\lambda_{\Omega}| = |\lambda_U|$). Соответствующие решения имеют при $\lambda \rightarrow \infty$ следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} v &= b^{1/\delta} C_1 r^{(\delta-1)/\delta}, \quad w = b^{1/\delta} C_2 r^{(\delta-1)/\delta}, \quad u = b^{1/\delta} C_3 z_1 r^{-1/\delta}, \\ \rho &= ab^{s/\delta} C_4 r^{(2-2\delta-\kappa\gamma)/\delta}, \quad p = ab^{(s+2)/\delta} C_5 r^{-\kappa/\delta}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

В асимптотике (5.4) константа C_1 может быть любого знака; остальные константы C_i положительны.

В случае расширения газа в атмосферу необходимыми условиями при $r \rightarrow \infty$ являются $p \rightarrow p_0$, $\rho \rightarrow \rho_0$, что в асимптотике (5.4) достигается только при $\kappa = 0$, $\delta = 1$. В случае расширения газа в вакуум при $r \rightarrow \infty$ имеем $p \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, что достигается при $\kappa > 0$; $2(1 - \delta)/\gamma$. Для решений с асимптотикой (5.4) условия конечности (при $r \gg 1$) массы и полной энергии газа в слое единичной высоты (по координате r_1) имеют вид

$$\kappa > 2/\gamma, \quad \kappa > 2\delta/\gamma. \quad (5.5)$$

При $\delta > 1$ система (2.1) имеет траектории (сепаратрисы), выходящие из отталкивающей особой точки \bar{Z}_6^1 и входящие в притягивающую особую точку Z_8^0 . Действительно, рассмотрим систему (2.1) на инвариантном многообразии $z = 0$:

$$\begin{aligned} V' &= - [(V - 1/2)^2 - \Omega^2 - 1/4] (V - \delta)^{-1}, \\ \Omega' &= - 2\Omega (V - 1/2) (V - \delta)^{-1}, \\ U' &= - U (U - 1) (V - \delta)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Траектории системы (5.6) в плоскости V, Ω являются дугами окружностей

$$(V - 1/2)^2 + (\Omega - K)^2 = K^2 + 1/4, \quad (5.7)$$

где $K = [(V - 1/2)^2 + \Omega^2 - 1/4] (2\Omega)^{-1}$ — первый интеграл системы (5.6). Все окружности семейства (5.7) проходят через две точки $V = 1, \Omega = 0$ и $V = 0, \Omega = 0$. Поэтому, если окружность (5.7) не пересекает линию $V = \delta$ (в этом случае $K < \delta (\delta - 1)$, $\delta > 1$), то соответствующая траектория системы (5.6) выходит из особой точки \bar{Z}_6^1 и входит в особую точку Z_8^0 (координата U в области $V < \delta$ в силу системы (5.6) монотонно убывает от 1 до 0).

Траекторий системы (2.1) при $z \ll 1$ аппроксимируются траекториями системы (5.6) и, поскольку особая точка \bar{Z}_6^1 является отталкивающей, а особая точка Z_8^0 является притягивающей, также имеют начало и конец в этих особых точках (аналогичные решения имеются и при $U \equiv 0$ и соответствуют траекториям, идущим из особой точки \bar{Z}_6^0 в особую точку Z_8^0). Соответствующие решения при $\kappa > 0, \delta > 1$ описывают разлет вращающегося газа в вакуум. Асимптотики этих решений при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ имеют вид (5.2), (5.4). При выполнении условий $2\delta\gamma^{-1} < \kappa < (5 - 2\delta)\gamma^{-1}$ рассматриваемые решения являются регулярными при всех $r \geq 0$, причем полная масса и энергия столба газа единичной высоты конечны. Угловая скорость вращения газа $\Omega \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0, \infty$; Ω достигает максимума $\Omega_0 \approx K + (K^2 + 1/4)^{1/2}$ при некотором $\lambda = \lambda_1$. Область наиболее быстрого вращения газа $w \approx r\Omega_0/t$ распространяется по частицам со скоростью $v_1 = \delta\lambda_1 b t^{\delta-1}$. Знак скорости газа v при $r \rightarrow \infty$ противоположен знаку K .

II. При $\delta = 1$ особая точка \bar{Z}_6^2 совпадает с вырожденной особой точкой O_2^2 ($V = \delta, z = \Omega = 0$). Для разрешения вырожденной особой точки O_2^2 при $\delta = 1$ сделаем наряду с преобразованием (4.5) следующее преобразование координат:

$$v_0 = V - 1, \quad u_2 = \frac{u^2}{v_0^2} = \frac{z}{v_0^2}, \quad w_3 = \frac{w_0^3}{v_0^2} = -\frac{\Omega^2}{v_0}. \quad (5.8)$$

Система (2.1) в координатах (5.8) и переменной τ_3 ($d\tau_3/d\tau =$

$= -1/v_0)$ имеет следующий вид ($\delta = 1$):

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= -\frac{v_0}{u_2-1} [u_2(\kappa - U - 2v_0 - 2) + w_3 + v_0 + 1], \\ \dot{w}_3 &= \frac{w_3}{u_2-1} [u_2(\kappa - U + 2v_0) + w_3 - 1 - 3v_0], \\ \dot{u}_2 &= -\frac{u_2}{u_2-1} [u_2(2v_0 - (\gamma + 1)\kappa + 4 + 2U) - (\gamma + 1)w_3 - \\ &\quad - 3 + \gamma + (\gamma - 1)v_0 + (\gamma - 1)U], \\ \dot{U} &= -U(U - 1). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Система (5.9) имеет инвариантное многообразие $v_0 = 0$, на котором лежат следующие особые точки этой системы ($U = \varepsilon = 0, 1$):

$$\begin{aligned} X_1^\varepsilon: v_0 = u_2 = w_3 = 0; \quad X_2^\varepsilon: v_0 = u_2 = 0, \quad w_3 = 1; \\ X_3^\varepsilon: v_0 = w_3 = 0, \quad u_2 = u_2^0 = \frac{3 - \gamma - \varepsilon(\gamma - 1)}{4 - (\gamma + 1)\kappa + 2\varepsilon}; \\ X_4^\varepsilon: v_0 = 0, \quad u_2 = 1, \quad w_3 = 1 + \varepsilon - \kappa. \end{aligned} \quad (5.10)$$

При $\kappa < 1 + \varepsilon$ в особой точке X_3^ε имеем $u_2^0 < 1$, а в особой точке X_4^ε имеем $w_3 > 0$. Собственные числа системы (5.9) в особых точках (5.10) имеют вид

$$\begin{aligned} X_1^\varepsilon: \lambda_{v_0} = 1, \quad \lambda_{u_2} = -(3 - \gamma - (\gamma - 1)\varepsilon), \quad \lambda_{w_3} = 1; \\ X_2^\varepsilon: \lambda_{v_0} = 2, \quad \lambda_{u_2} = -4 + (\gamma - 1)\varepsilon, \quad \lambda_{w_3} = -1; \\ X_3^\varepsilon: \lambda_{v_0} = \alpha = \frac{(2 + \varepsilon)(\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad \lambda_{u_2} = \frac{3 - \gamma - \varepsilon(\gamma - 1)}{1 - u_2^0}, \\ \lambda_{w_3} = \beta = \frac{4 + \varepsilon(1 - \gamma)}{\gamma + 1}; \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$X_4^\varepsilon: \lambda_{v_0} = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(3 + \varepsilon - \gamma\kappa \pm [(3 + \varepsilon - \gamma\kappa)^2 + 4(1 - \varepsilon - \kappa)(4 - \varepsilon(\gamma - 1))]^{1/2}).$$

Собственные числа (5.11) в особой точке X_2^ε , лежащей на поверхности непродолжимости решений $z - (V - \delta)^2 = 0$, вычислены после замены переменной $d\tau_4/d\tau_3 = (1 - u_2)^{-1}$. Особая точка X_4^ε принадлежит некоторой линии особых точек I , лежащей на поверхности непродолжимости решений $u_2 = 1$. При $\kappa < 2$ и $1 < \gamma < 2$ из (5.11) получаем, что особые точки X_1^1, X_2^1, X_4^1 являются седловыми, а особая точка X_3^1 является отталкивающей; для особых точек X_i^0 это же верно при $\kappa < 1, 1 < \gamma < 3$ (особая точка X_3^0 является отталкивающей на многообразии $U = 0$). Расположение особых точек и качественное поведение траекторий системы (5.9) на трехмерном инвариантном многообразии $U = 1$ при

$\kappa < 2$, $1 < \gamma < 2$ в окрестности двух плоскостей $v_0 = 0$ и $u_2 = 0$ показано на рис. 35.

Сепаратрисы, выходящие из особой точки X_3^1 , определяют решения с расширяющейся границей ($\lambda = \lambda_0$) внутри газа. Асимптотика этих решений при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ имеет вид ($\delta = 1$, $\kappa < 2$; $1 < \gamma < 2$)

$$\begin{aligned} v &= \lambda_0 b \left(1 - \alpha \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \right) \right), & w &= \lambda_0 b C_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \right)^{(\alpha+\beta)/2\alpha}, \\ \rho &= ab^{-\kappa-3} C_2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \right)^\sigma, & u &= \frac{z_1}{t}, \\ p &= ab^{-\kappa-1} \lambda_0^2 C_2 \frac{u_2^0 \alpha^2}{\gamma} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \right)^{2+\sigma}, & \sigma &= \frac{6 - \kappa\gamma(1 + \gamma)}{3(\gamma - 1)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Константы u_2^0 , α , β определены выше (см. (5.10), (5.11)). В асимптотике (5.12) при $\kappa < 6\gamma^{-1}$

$(1 + \gamma)^{-1}$ плотность газа, давление и угловая скорость w на внутренней границе равны нулю. Поэтому можно считать, что в области $\lambda < \lambda_0$ образуется пустота. Внутренняя граница газа $\lambda = \lambda_0$ расширяется с постоянной скоростью $v_0 = \lambda_0 b$; вследствие наличия вращения газа внутренняя граница является устойчивой.

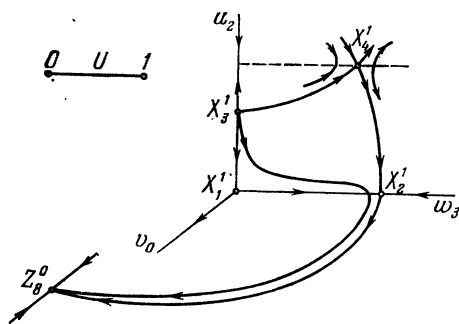


Рис. 35. К построению решений, описывающих автомодельный разлет вращающегося газа при $\delta = 1$.

Рассмотрим траектории системы (5.9), идущие вдоль устойчивой последовательности сепаратрис $X_3^1 X_1^1$, $X_1^1 X_2^1$, $X_2^1 Z_0^0$ (см. рис. 35). (Отметим, что траектории системы (5.9) при $u_2 = 0$ ($z = 0$) изучены в п. I; см. (5.7); в частности, сепаратрисе $X_2^1 Z_0^0$ соответствует окружность (5.7) при $K = 0$.) Соответствующие решения при

$$\delta = 1, \quad 2\gamma^{-1} < \kappa < 6\gamma^{-1} (\gamma + 1)^{-1}, \quad \kappa < 2$$

описывают автомодельный разлет вращающегося газа в вакуум. Эти решения регулярны при всех $r > 0$, причем полная масса и энергия столба газа единичной высоты конечны. Внутри газа образуется расширяющаяся с постоянной скоростью $v_0 = \lambda_0 b$ пустота ($\lambda < \lambda_0$), на границе которой ($\lambda \rightarrow \lambda_0$) решение имеет асимптотику (5.12). На этой границе вертикальная скорость газа u достигает максимума. Максимальная угловая скорость $\Omega \approx 1/2$

достигается при $\lambda \approx \sqrt{2} \lambda_0$. Область наиболее быстрого вращения газа $\Omega \approx 1/2$ распространяется по частицам с постоянной скоростью $v_1 \approx \sqrt{2} \lambda_0 b$. Асимптотика рассматриваемых решений при $r \rightarrow \infty$ имеет вид (5.4), $\delta = 1$, причем предельная радиальная скорость газа v может быть сколь угодно мала.

III. При специальном значении показателя адиабаты $\gamma = 3/2$ (что достаточно близко к $\gamma = 1,4$ для обычного воздуха) существует еще один класс автомодельных решений, описывающих разлет вращающегося газа. Для построения этих решений исследуем свойства линии особых точек (3.3):

$$V = 1/2, \quad \Omega = \Omega_0, \quad U = 1, \quad z_0 = \alpha (\Omega_0^2 + 1/4) \quad (5.13)$$

при $\alpha = (1/2 - \delta)(\kappa - 2) > 0$. Система (2.1) в особых точках (3.3) имеет следующие собственные числа: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_4 = \lambda_U = (\delta - 1/2)^{-1}$, собственные числа $\lambda_{2,3}$ удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + \lambda (2z_0 + (4\Omega_0^2 + 3)/8) L_0^{-1} + (3/4 - \Omega_0^2) L_0^{-1} = 0, \quad (5.14)$$

$$L_0 = z_0 - (1/2 - \delta)^2.$$

Собственные векторы, соответствующие собственным числам λ_1 , λ_2 , λ_3 , лежат в плоскости $U = 1$.

Линия особых точек (5.13) при $\beta = (1/2 - \delta)(\kappa - 2) - 1/4 > 0$ разбита поверхностью непродолжимости решений $L = z - (V - \delta)^2 = 0$ на две части: $I_1 (L_0 < 0, 0 < \Omega_0 < \beta^{1/2})$ и $I_2 (L_0 > 0, \Omega_0 > \beta^{1/2})$. На отрезке I_1 при $1/2 < \delta < 1, 0 < \kappa < 2$ имеем $\Omega_0^2 < 3/4$, поэтому из (5.14) получаем $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = (3/4 - \Omega_0^2) L_0^{-1} < 0$, т. е. $\lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$. Следовательно, из каждой точки отрезка I_1 выходит двумерная сепаратриса \mathcal{L}_0 , отвечающая собственным числам $\lambda_2 > 0, \lambda_4 > 0$.

При $\gamma = 3/2$ система (2.1) на инвариантном многообразии $U = 1$ имеет первый интеграл (см. (2.17))

$$\Phi_7 = z | V - \delta |^{1/2} \Omega^{-3/2} = \text{const.}$$

На поверхности уровня интеграла $\Phi_7 = C$ система (2.1) при $U = 1$ преобразуется на плоскость z, V ; качественное поведение траекторий полученной системы при $\Phi_7 = C > C_0 = \alpha | 1/2 - \delta |^{1/2} (3/4)^{-3/4}$ в области $L < 0$ показано на рис. 36. Из каждой особой точки отрезка $I_1 (L < 0)$ линии (5.13) выходит единственная сепаратриса l (отвечающая собственному числу $\lambda_2 > 0$), входящая при $\tau \rightarrow \infty$ в особую точку $Z_3^1 (z = V = \Omega = 0, U = 1)$. Из особой точки Z_3^1 , согласно (5.3), выходит единственная сепаратриса (вдоль которой координата U изменяется от 1 до 0), идущая в притягивающую особую точку Z_3^0 . Поэтому существуют сепара-

трысы, выходящие из особых точек отрезка I_1 , отвечающие собственным числам $\lambda_2 > 0$, $\lambda_4 > 0$ и идущие в особую точку Z_8^0 .

Автомодельные решения, соответствующие указанным сепаратрисам, при

$$1/2 < \delta < 1, \quad 2/\gamma < \kappa < 2, \quad \beta > 0, \quad \Omega_0 < \beta^{1/2}$$

описывают разлет вращающегося газа (при $\gamma = 3/2$) в вакуум. Эти решения регулярны при всех $r \geq 0$ и имеют при $r \rightarrow 0$ асимпто-

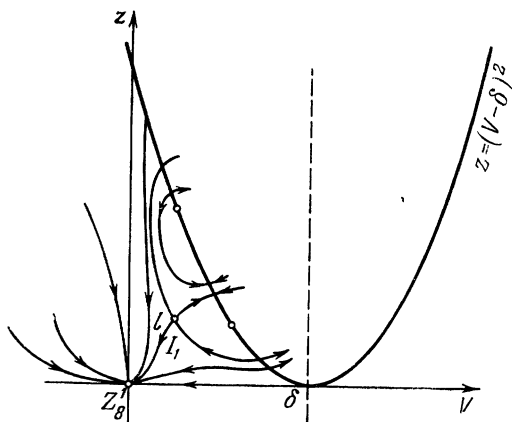


Рис. 36. Качественное поведение траекторий динамической системы (2.1) при $\gamma = 3/2$, $U = 1$ на уровне интеграла $\Phi_7 = C > C_0$.

тику точного решения (3.4); в окрестности оси вращения получаем $p \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, $w \rightarrow rt^{-1} \Omega_0$, $u \rightarrow z_1 t^{-1}$, $v \rightarrow 1/2 rt^{-1}$. При $r \rightarrow \infty$ рассматриваемые решения имеют асимптотику (5.4), причем полная энергия и масса слоя газа единичной высоты конечны. В рассматриваемых решениях угловая скорость вращения газа Ω и вертикальная скорость газа u максимальны в окрестности оси $r = 0$. При $\delta = 1$, $\kappa = 0$ существуют аналогичные решения, описывающие автомодельный разлет вращающегося газа в атмосферу (эти решения применимы в некоторой конечной области $0 \leq r < R_0$ при $0 < t_1 < t < t_2$).

§ 6. Некоторые автомодельные решения при $\gamma=2$

I. Применение интеграла энергии. Показатель адиабаты $\gamma = 2$ выделен в первую очередь тем, что к адиабатическому движению газа с $\gamma = 2$ сводятся следующие две важные задачи: 1) движение идеальной несжимаемой жидкости в теории мелкой воды [110]; 2) движение газа в магнитной газовой динамике при следующей

часто применяемой идеализации [149, 150]: бесконечная проводимость газа и замороженность вертикально направленного магнитного поля, ортогонального к скорости газа. Поэтому автомодельные движения газа с $\gamma = 2$ можно использовать для построения моделей некоторых явлений в указанных теориях.

Динамическая система (2.1) при $\gamma = 2$ и $\dot{U} \equiv 0$ имеет первый интеграл Φ_3 (см. (2.13)):

$$z(V - \delta)\Omega^{-2} = C_0. \quad (6.1)$$

При $\kappa = \delta$ система (2.1) имеет также интеграл энергии (см. (2.10)).

$$H = R(zV + (V - \delta)(V^2 + \Omega^2 + z)) = \text{const } \lambda^{k-1}. \quad (6.2)$$

На нулевом уровне интеграла энергии $H = 0$ из (6.1) и (6.2) получаем

$$z = -\frac{C_0(V - \delta)V^2}{C_0(2V - \delta) + (V - \delta)^2}, \quad \Omega^2 = -\frac{V^2(V - \delta)^2}{C_0(2V - \delta) + (V - \delta)^2}. \quad (6.3)$$

Поэтому интегрирование автомодельного вращения газа при $\gamma = 2$, $\kappa = \delta$ сводится (после подстановки (6.3) в (2.1)) к следующей квадратуре:

$$\frac{dV}{d\tau} = -V(2V - 1) \frac{C_0(2V - \delta) + (V - \delta)^2}{[C_0(2V - \delta) + (V - \delta)^2](V - \delta) + C_0V^2}, \quad \tau = \ln \lambda. \quad (6.4)$$

После интегрирования уравнения (6.4) (которое может быть проведено в явном виде) функции z , Ω находятся из выражений (6.3), а функция R вычисляется с помощью монотонной функции Φ_3 (см. (2.15)):

$$R\Omega^\kappa(V - \delta) = \text{const } \lambda^{k+1-2\beta}, \quad \beta = 2 \frac{\delta - 1}{2\delta - 1}. \quad (6.5)$$

Решение (6.3)–(6.4) определено в области

$$C_0 < 0, \quad V_1 < V < \delta, \quad C_0(2V - \delta) + (V - \delta)^2 \leq 0, \quad (6.6)$$

где $V_1 = \delta - C_0 - (C_0^2 - C_0\delta)^{1/2}$ — корень уравнения (6.6). В указанной области при

$$1/2 < \delta < 1, \quad C_0 < (1/2 - \delta)^2(\delta - 1)^{-1} < 0 \quad (6.7)$$

имеются две траектории уравнения (6.4): траектория A , идущая из точки $V = \delta$ в особую точку $V = 1/2$, и траектория B , идущая из особой точки $V = V_1$ в особую точку $V = 1/2$ ($V_1 < 1/2 < \delta < 1$). Решения, соответствующие этим траекториям, при $\lambda \rightarrow \infty$ стремятся к точному решению (3.4) (при этом угловая скорость $\Omega \rightarrow \Omega_0 = \text{const}$). Решение, соответствующее траектории A , имеет при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ расширяющуюся пустоту внутри газа, на гра-

нице которой

$$V \rightarrow \delta, \quad P \sim |V - \delta|^{\frac{1-\delta}{\delta-1/2}}, \quad R \sim |V - \delta|^{\frac{3/4-\delta}{\delta-1/2}}, \quad \Omega \sim |V - \delta|. \quad (6.8)$$

Таким образом, на внутренней границе ($\lambda \rightarrow \lambda_0$) при $1/2 < \delta < 3/4$ имеем $p \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$. Решение, соответствующее траектории B , продолжается до центра симметрии ($\lambda \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$), при этом $V \rightarrow V_1$.

Отметим, что поверхность $H = 0$ на многообразии S (см. § 4) проходит через особые точки Z_6^0 (4.8), Z_7^0 (2.4), через линию особых точек \mathcal{L} (4.9) и линию особых точек (3.2) (при $1/2 < \delta < 1$). Траектории A на многообразии S отвечает траектория, идущая из особой точки Z_6^0 в особую точку на линии (3.2), поэтому соответствующее решение при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ имеет асимптотику (4.12) (которая совпадает с асимптотикой (6.8)). Траектории B на многообразии S отвечает траектория, идущая из особой точки на линии \mathcal{L} (см. (4.9)) в особую точку на линии (3.2), поэтому соответствующее решение при $\lambda \rightarrow 0$ имеет асимптотику (4.10), которая имеет физический смысл (скорость $w \rightarrow 0$) при $1 - \delta < V_1$. Остальные решения (6.3) — (6.4), определенные в области параметров, отличной от (6.7), имеют при некотором направлении λ нефизические асимптотики.

II. Автомодельное вращение в теории мелкой воды. Теория мелкой воды применяется главным образом при рассмотрении течений идеальной несжимаемой жидкости, в которых высота слоя жидкости $h(x, y) \ll L$, где L — некоторый характерный продольный размер и вертикальная компонента скорости $u_3 \ll u_1, u_2$ [110, 151]. При этих предположениях давление $p = \rho_0 g (h - z_1)$, где ρ_0 — постоянная плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, z_1 — вертикальная координата. Вводятся новые величины — эффективные давление и плотность:

$$\bar{p} = \int_0^h p dz_1 = \rho_0 g \frac{h^2}{2}, \quad \bar{\rho} = \rho_0 h, \quad (6.9)$$

которые, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\bar{p} = \frac{g}{2\rho_0} \bar{\rho}^2. \quad (6.10)$$

Эффективные давление и плотность \bar{p} , $\bar{\rho}$ вместе с горизонтальными скоростями u_1, u_2 удовлетворяют всем уравнениям газовой динамики в двумерном случае, причем уравнение (6.10) играет роль уравнения адиабатичности с показателем $\gamma = 2$. Полученное эффективное движение двумерного газа является изэнтропическим, поскольку $g/2\rho_0 = \text{const}$.

Таким образом, для построения автомодельных решений в теории мелкой воды достаточно найти среди автомодельных решений вида (1.9) (при $\gamma = 2$, $u \equiv 0$) движения газа с постоянной энтропией. Согласно (1.1),

$$\frac{p}{\rho^2} = \frac{1}{a} r^{k+5} t^{s-2} \frac{P}{R^2} = \frac{1}{\gamma a} \left(\frac{r}{t^{(2-s)/(k+5)}} \right)^{k+5} \frac{z}{R}. \quad (6.11)$$

В силу уравнений (2.2) и (2.3) получаем ($\gamma = 2$, $U = 0$)

$$\frac{d \ln(z/R)}{d \ln \lambda} = -\frac{(k+5)}{k+5} \frac{V - (2-s)/(k+5)}{V_s - \delta}. \quad (6.12)$$

При $\delta = (2-s)/(k+5)$ (или $\kappa = 2/(1-\delta)$) из (6.11) и (6.12) следует, что $p/\rho^2 = \text{const}$. Поэтому при этих значениях параметров автомодельные решения (1.9) являются изэнтропическими.

Описанные выше автомодельные движения газа (6.3)—(6.4) при $\kappa = \delta = 2/3 = 2(1-\delta)$ являются изэнтропическими и определяют поэтому интегрируемые автомодельные движения в теории мелкой воды. При $\delta = 1$ и $\kappa = 2(1-\delta) = 0$ в теории мелкой воды существуют автомодельные решения двух типов, аналогичные решениям, описанным в пп. II, III § 5. Решения первого типа соответствуют траекториям системы (5.9) при $U \equiv 0$, идущим вдоль последовательности сепаратрис $X_3^0 X_1^0$, $X_1^0 X_2^0$, $X_2^0 Z_8^0$ (см. рис. 35), и описывают автомодельное растекание от центра вращающегося тонкого слоя жидкости, имеющего постоянную толщину при $r \rightarrow \infty$ и расширяющуюся от центра внутреннюю границу.

Для построения решений второго типа исследуем особые точки на линии (3.2) (при произвольных κ , δ):

$$V = 1/2, \quad \Omega = \Omega_0, \quad U = 0, \quad z_0 = \alpha (\Omega_0^2 + 1/4), \quad (6.13)$$

где $\alpha = (1/2 - \delta)/(\kappa - 1) > 0$. Линия (6.13) при $\delta > 1/2$, $\kappa < 1$ и $\beta = (1/2 - \delta)(\kappa - 1) - 1/4 > 0$ разбита поверхностью непродолжимости решений $L = z - (V - \delta)^2 = 0$ на две части: I_1 ($L < 0$, $0 < \Omega_0 < \beta^{1/2}$) и I_2 ($L > 0$, $\Omega_0 > \beta^{1/2}$). Собственные числа $\lambda_{2,3}$ системы (2.1) при $\gamma = 2$, $U \equiv 0$ в особых точках линии (3.2) удовлетворяют следующему характеристическому уравнению (собственное число $\lambda_1 = 0$ в силу одномерности линии (3.2)):

$$\lambda^2 + \lambda (2z_0 + 2\Omega_0^2 + 1/2) L_0^{-1} + L_0^{-1} = 0, \quad (6.14)$$

$$L_0 = z_0 - (1/2 - \delta)^2.$$

Таким образом, $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = L_0^{-1}$, следовательно, отрезок I_1 состоит из неустойчивых (седловых) особых точек, а отрезок I_2 состоит из притягивающих особых точек.

Динамическая система (2.1) при $\gamma = 2$, $U = 0$ с помощью интеграла $\Phi_3 = z(V - \delta)\Omega^{-2}$ сводится к однопараметрическому се-

мейству (в зависимости от величины интеграла Φ_3) систем двух уравнений на плоскости z, V . Фазовый портрет одной из таких систем при $\beta > 0$ показан на рис. 37. Существует единственная траектория X , идущая из неустойчивой особой точки Z_Ω , лежащей на отрезке I_1 линии (3.2), в притягивающую особую точку Z_3^0 .

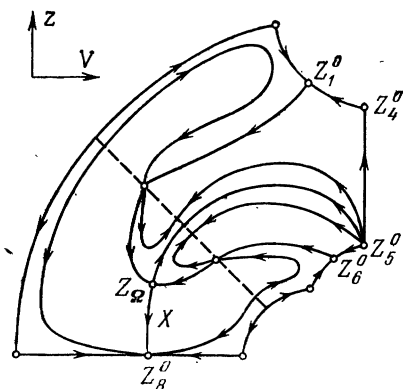


Рис. 37. Фазовый портрет динамической системы (2.4) при $\gamma = 2$, $U = 0$ на уровне интеграла $\Phi_3 = C$ в области $V < \delta$ после разрешения вырожденных особых точек и пополнения области $z \geq 0$, $V \leq \delta$ границей на бесконечности.

полная энергия и масса газа при $r \rightarrow \infty$ расходятся; см. (5.5)). При $\delta = 1$, $\kappa = 0$ в автомодельном решении X имеем $p \rightarrow p_0$, $\rho \rightarrow \rho_0$ при $r \rightarrow \infty$, следовательно, в теории мелкой воды для этого решения толщина слоя жидкости $h \rightarrow \text{const}$ при $r \rightarrow \infty$. В этом случае решение X можно рассматривать как модель затухающего крупномасштабного вихря в океане.

Укажем в теории мелкой воды автомодельные решения с движущимися разрывами, которые принято называть борами или, в стационарном случае, гидравлическими прыжками [151]. Условия на разрыве в теории мелкой воды являются следствием изэнтропичности движения ($g/2\rho_0 = \text{const}$; см. (6.10)) и законов сохранения массы и импульса:

$$z_1/R_1 = z_2/R_2, \quad R_1(V_1 - \delta) = R_2(V_2 - \delta), \quad (6.15)$$

$$V_1 - \delta + \frac{z_1}{2(V_1 - \delta)} = V_2 - \delta + \frac{z_2}{2(V_2 - \delta)}, \quad \Omega_1 = \Omega_2.$$

Здесь индексы 1 и 2 обозначают величины по разные стороны от разрыва. Отметим, что в теории мелкой воды энергия на разрыве

Автомодельное решение, соответствующее траектории X , регулярно при всех $r \geq 0$ и имеет при $r \rightarrow 0$ асимптоту точного решения (3.4), а при $r \rightarrow \infty$ — асимптоту (5.4). При значениях параметров $1/2 < \delta < 1$, $1 - \delta < \kappa < 1$, $\beta > 0$ все характеристики газа p , ρ , v , w стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$. В этом случае рассматриваемые решения описывают расползание вращающегося плазменного шнура (угловая скорость вращения максимальна на оси $r = 0$), а также растекание вращающегося тонкого слоя жидкости, толщина которого $h \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Эти решения применимы в некоторой конечной области $0 \leq r < C$ при $0 < C_1 < t < C_2$ (поскольку при $\kappa < 1$, $\gamma = 2$

не сохраняется (в отличие от условий Гюгонио (см. главу V, (5.5)) на ударных волнах в классической газовой динамике). Из условий (6.15) получаем

$$\begin{aligned} V_2 - \delta &= \frac{1}{4} \left(\frac{z_1}{V_1 - \delta} - \left(\left(\frac{z_1}{V_1 - \delta} \right)^2 + 8z_1 \right)^{1/2} \right), \\ z_2 &= - \frac{V_1 - \delta}{2} \left(\frac{z_1}{V_1 - \delta} + \left(\left(\frac{z_1}{V_1 - \delta} \right)^2 + 8z_1 \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Для построения автомодельного решения с движущимся разрывом рассмотрим при $1/2 < \delta < 1$, $\kappa = 2(1 - \delta)$ некоторую сепаратрису Y , выходящую из (неустойчивой) особой точки Z_6^0 (см. рис. 37) — например, при $\delta = 2/3$ — точное решение (6.3). В особой точке Z_6^0 согласно (4.8) и (4.5) имеем

$$v_4 = \frac{V - \delta}{z} = \frac{2(\delta - 1/2)}{\delta(\delta - 1)}, \quad V = \delta, \quad z = 0, \quad \Omega = 0.$$

Поэтому точка Z_6^0 после преобразования (6.16) переходит в точку x с координатами

$$V = \frac{\delta(5\delta - 3)}{4(\delta - 1/2)}, \quad z = 0, \quad \Omega = 0.$$

Пусть разрыв на сепаратрисе Y вводится в точке y_1 , достаточно близкой к точке Z_6^0 . После преобразования (6.16) точка y_1 переходит в точку x_1 , достаточно близкую к точке x ; поэтому траектория системы (2.1), проходящая через точку x_1 , движется в окрестности плоскости $z = 0$ и, как показано в § 5 (см. (5.7)), при $\lambda \rightarrow \infty$ входит в особую точку Z_8^0 ($z = V = \Omega = 0$). Автомодельное решение, определенное отрезками траекторий $Z_6^0 y_1$, $x_1 Z_8^0$, определяет растекание от центра вращающегося тонкого слоя жидкости с разрывом (амплитуда скачка $\frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{V_2 - \delta}{V_1 - \delta} > 1$), движение которого определяется условием $\lambda = \lambda_1 = \text{const}$. В этом решении имеется расширяющаяся от центра внутренняя граница ($\lambda = \lambda_0$), на которой согласно асимптотике (4.12) толщина слоя жидкости $h = 0$, давление $p = 0$, угловая скорость $\Omega = 0$. При $\lambda \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) все параметры решения (скорость, давление, высота h) стремятся к нулю согласно асимптотике (5.4). Указанные автомодельные решения, вероятно, могут быть использованы при моделировании некоторых явлений в океане.

В данной главе изучаются адиабатические движения идеального газа с однородной деформацией, в которых скорости частиц газа являются линейными функциями координат. Такие движения сплошной среды изучались в большом числе работ, первыми из которых были классические работы Дирихле, Дедекинда и Римана по теории фигур равновесия идеальной несжимаемой гравитирующей жидкости (см. [153—155]). Сферически-симметричные движения идеального газа с однородной деформацией рассматривались в работе [156] и с учетом ньютоновской гравитации — в [157]. Полный класс движений идеального газа с однородной деформацией впервые был выделен в работе [158], гамильтонов формализм в этих задачах развивался в [159]. Движения с однородной деформацией применялись при изучении расширения в вакуум невращающегося газового эллипсоида [160, 161] и сжатия эллипсоида под действием внешнего давления [162], при изучении движения пылевого гравитирующего эллипсоида (с применениями к теории образования галактик и динамики звезд в галактиках) [163—165], эллипсоида заряженной жидкости [166] и эллипсоида несжимаемой негравитирующей жидкости [167], а также в магнитной газовой динамике при изучении пульсаций плазменного шнура [168]. Движение гравитирующего газового шара рассматривалось в качестве модели пульсаций переменных звезд-цефеид [132]. Движение гравитирующих газовых эллипсоидов в работах [169, 170], использующих в основном численные методы, рассматривалось в качестве модели образования галактик и звезд из облаков первоначально холодного газа. При этом в работе [169] было отмечено, что адиабатическое движение гравитирующего газового эллипсоида при отрицательной энергии E , как и движение эллипсоида несжимаемой жидкости, исследованное Дирихле в 1860 г. (см. [153]), происходит в колебательном режиме.

В данной главе показано, что общий колебательный режим движения гравитирующего газового эллипсоида при $E < 0$ при определенных значениях параметров можно аппроксимировать последовательностью более простых движений гравитирующего пылевого эллипсоида, и указан новый колебательный режим движения газового эллипсоида при $E > 0$ (расширение вращающегося газового облака в вакуум). Проведено исследование различных свойств двух колебательных режимов движения гравитирующего газового эллипсоида.

§ 1. Уравнения движения негравитирующего газового эллипсоида

I. Движения газа с однородной деформацией. Уравнения адиабатических движений идеального газа в декартовых координатах имеют вид

$$\rho \frac{du^i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x^k} \eta^{ki}, \quad \frac{d\rho}{dt} = - \rho \operatorname{div} u^i, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad (1.1)$$

где u^i — вектор скорости газа, p — давление, ρ — плотность газа, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты, $\eta_{kt} = \delta_{kt}^i$ — метрический тензор евклидова пространства. Движениями газа с однородной деформацией называются решения уравнений газовой динамики (1.1), для которых эйлеровы координаты частиц газа x^i являются линейными функциями лагранжевых координат a^k :

$$x^i = F_k^i(t) a^k, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

(всюду по повторяющимся индексам производится суммирование). Напомним, что эйлеровыми координатами частиц газа называются их (изменяющиеся) координаты в евклидовом пространстве x^1, x^2, x^3 , в то время как лагранжевы координаты a^1, a^2, a^3 различают частицы газа и остаются постоянными (для каждой частицы газа) в течение всего процесса движения сплошной среды. В силу определения (1.2) получаем

$$u^i = \frac{dx^i}{dt} = \dot{F}_k^i a^k = \dot{F}_k^i (F^{-1})_j^k x^j, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = \dot{F}_k^i (F^{-1})_i^k = \frac{d(\ln \det (F_k^i))}{dt},$$

где F^{-1} — матрица, обратная к матрице F : $F_\rho F^{-1} = E$.

Уравнения газовой динамики (1.1) для движений газа вида (1.2) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, если давление и плотность газа имеют вид

$$p = p(t) P(\zeta), \quad \rho = \rho(t) R(\zeta), \quad \zeta = - \frac{1}{2} g_{ij} a^i a^j, \quad (1.4)$$

где g_{ij} — некоторая постоянная симметричная матрица. Установим связи между функциями $\rho(t)$, $p(t)$, $P(\zeta)$, $R(\zeta)$. Уравнения (1.1) после подстановки выражений (1.2) — (1.4) переходят в систему уравнений

$$\rho(t) R(\zeta) \dot{F}_k^i (F^{-1})_j^k x^j = p(t) \frac{dP}{d\zeta} g_{ik} (F^{-1})_j^k (F^{-1})_n^l \eta^{ni} x^j, \quad (1.5)$$

$$\frac{d \ln \rho(t)}{dt} = - \frac{d \ln \det (F_k^i)}{dt}, \quad p(t) = C(\rho(t))^\gamma.$$

Из системы (1.5) получаем следующие необходимые условия:

$$\begin{aligned} R(\zeta) &= C_1 \frac{dP}{d\zeta}, \quad \rho(t) = C_2 (\det(F_i^k))^{-1}, \\ p(t) &= C_3 (\det(F_i^k))^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

После подстановки этих выражений в уравнения динамики (1.5) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{F}_k^i = C (\det F)^{1-\gamma} g_{lk} (F^{-1})_n^l \eta^{ni}, \quad C = C_3/C_1 C_2. \quad (1.7)$$

Система (1.7) является лагранжевой системой. Действительно, после свертки уравнений (1.7) с тензором $g^{kj} \eta_{im}$ получаем систему уравнений

$$\ddot{F}_k^i g^{kj} \eta_{im} = C (\det(F))^{1-\gamma} (F^{-1})_m^j = - \frac{C}{\gamma-1} \frac{\partial (\det(t))^{1-\gamma}}{\partial F_j^m}, \quad (1.8)$$

которая, очевидно, имеет лагранжев вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad q_i = F_j^m$$

с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \dot{F}_k^i \dot{F}_j^m g^{kj} \eta_{im} - \frac{C}{\gamma-1} (\det(F_k^i))^{1-\gamma}. \quad (1.9)$$

Таким образом, в случае индефинитной метрики g_{ij} движения газа с однородной деформацией описываются лагранжевой системой (1.8)—(1.9) с индефинитной кинетической энергией. В случае индефинитной метрики g_{ij} поверхности постоянного давления и постоянной плотности газа являются гиперболами (см. (1.4)); поэтому такие решения могут быть использованы, например, для моделирования движений газа типа смерчей в атмосфере (наряду с автотельным вращением газа, изученным в главе VI).

В дальнейшем рассматриваются два случая — положительно и отрицательно определенной метрики g_{ij} . Без ограничения общности можно считать, что $g_{ij} = \sigma \delta_{ij}$, $\sigma = \pm 1$, $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = C = \gamma - 1$. При таких нормировках лагранжева система (1.8) принимает вид

$$\ddot{F}_k^i = \sigma (\gamma - 1) (\det(F))^{1-\gamma} (F^{-1})_i^k = - \sigma \frac{\partial (\det(I))^{1-\gamma}}{\partial F_k^i}. \quad (1.10)$$

Давление p и плотность газа ρ даются формулами

$$p = \frac{(\gamma-1) P(\zeta)}{(\det(F_k^i))^\gamma}, \quad \rho = \frac{dP(\zeta)/d\zeta}{(\det(F_k^i))}, \quad (1.11)$$

где $P(\zeta)$ — произвольная функция параметра $\zeta = -\sigma(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)/2$. Из условия неотрицательности плотности газа ρ следует

(см. (1.11)) необходимое условие $dP(\zeta)/d\zeta \geq 0$. Взяв функцию $P(\zeta) = \exp(\zeta)$ при $\sigma = +1$, получим изотермическую массу газа, заполняющую все пространство и имеющую гауссовское распределение плотности. Если же функция $P(\zeta)$ финитна и имеет вид, показанный на рис. 38, то получаем конечную массу газа со свободной границей, на которой $p = \rho = 0$. При $\sigma = -1$ давление растет при удалении от центра ($a_i = 0$); в этом случае газ находится под внешним давлением, изменяющимся согласно (1.11). Отметим, что поверхности постоянной плотности и давления газа в Эйлеровых координатах x_i являются эллипсоидами, форма и расположение которых в пространстве изменяются в силу системы (1.10).

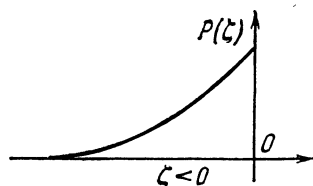


Рис. 38. Вид функции $P(\zeta)$, обеспечивающий выполнение условий $p = \rho = 0$ на границе газового эллипсоида.

II. Общие свойства динамики газового эллипсоида. Лагранжева система (1.10) инвариантна относительно шестимерной группы преобразований

$$F \rightarrow O_1 F O_2,$$

где O_1 и O_2 — ортогональные матрицы, и имеет вследствие этого шесть первых интегралов, образующих две трехмерные кососимметричные матрицы:

$$J = \bar{F}\dot{F}^t - \dot{F}F^t, \quad K = F^t\dot{F} - \dot{F}^t F \quad (1.12)$$

(здесь F^t — транспонированная матрица F). Интегралы J и K впервые были указаны в работе [159]; эти интегралы связаны с сохраняющимся полным моментом количества движения газа и вихрем. Если $J = K = 0$, то после некоторого преобразования $F \rightarrow O_1 F O_2$ матрица F_j^i во все моменты времени приводится к диагональному виду.

Полная энергия газа, заполняющего эллипсоид, пропорциональна интегралу энергии лагранжевой системы (1.10) (см. [159]):

$$E = T + \sigma (\det(F))^{1-\nu}, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^3 (\dot{F}_k^i)^2. \quad (1.13)$$

При $\sigma = +1$ из вида интеграла энергии E следует, что решения системы (1.10) существуют при всех $t: -\infty < t < +\infty$ (траектории системы (1.10) не входят в особые точки, поскольку из (1.13) следует $\det(F) > E^{1/(1-\nu)}$, и не уходят на бесконечность за конечное время, поскольку $(\dot{F}_k^i)^2 < 2E$). Покажем, что при $t \rightarrow \pm \infty$ движение газового эллипсоида со свободной границей ($\sigma = +1$)

является неограниченным¹⁾. Оценим скорость изменения суммы квадратов полуосей газового эллипсоида

$$D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \text{Tr}(F \circ F^t) = \sum_{i,k}^3 (F_k^i)^2.$$

В силу уравнений (1.10) получаем

$$\dot{D} = 2 \sum_{i,k}^3 (\dot{F}_k^i)^2 + 2 \sum_{i,k}^3 \ddot{F}_k^i F_k^i = 4T + 6(\gamma - 1)(\det(F))^{1-\gamma}. \quad (1.14)$$

Заменив поочередно каждое из двух последних слагаемых в (1.14) их выражениями из интеграла энергии (1.13), находим

$$\begin{aligned} \ddot{D} &= 6(\gamma - 1)E + 2(5 - 3\gamma)T, \\ \ddot{D} &= 4E - 2(5 - 3\gamma)(\det(F))^{1-\gamma}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отсюда в зависимости от величины $\gamma > 1$ получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \gamma < 5/3: & \quad 6(\gamma - 1)E < \ddot{D} < 4E, \\ \gamma > 5/3: & \quad 4E < \ddot{D} < 6(\gamma - 1)E. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Из (1.16) следуют оценки скорости роста суммы квадратов полуосей газового эллипсоида

$$\begin{aligned} \gamma < 5/3: & \quad 6(\gamma - 1)Et^2 + A_1t + B_1 < D < 4Et^2 + A_2t + B_2, \\ \gamma < 5/3: & \quad 4Et^2 + A_1t + B_1 < D < 6(\gamma - 1)Et^2 + A_2t + B_2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

При $\gamma = 5/3$ оба выражения (1.15) совпадают и определяют дополнительные интегралы A и B системы (1.10), указанные впервые в работе [161]:

$$D = 2Et^2 + At + B. \quad (1.18)$$

В силу (1.17), (1.18) получаем, что при всех $\gamma > 1$ сумма квадратов полуосей газового эллипсоида $D \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \pm \infty$.

Отсутствие ограниченных (при всех t) движений газового эллипсоида со свободной границей можно доказать также с помощью теоремы вириала [171]. Согласно теореме вириала, если в лагранжевой системе с лагранжианом $L = T - U$ (где кинетическая энергия T и потенциальная энергия U являются однородными функциями степени 2 и k соответственно) существует ограниченная при всех t траектория, то усредненные вдоль этой траектории

¹⁾ Приведенное ниже доказательство является обобщением рассуждений работы [161], где при $\gamma = 5/3$ впервые был найден первый интеграл (1.18) и с помощью этого интеграла доказано (для $\gamma = 5/3$), что при $t \rightarrow \pm \infty$ происходит бесконечный разлет газового эллипсоида.

величины \bar{T} и \bar{U} удовлетворяют равенству $2\bar{T} = k\bar{U}$. Для лагранжевой системы (1.10) имеем $k = 3(1 - \gamma) < 0$, поэтому равенство $2\bar{T} = 3(1 - \gamma) \overline{(\det(F))^{1-\gamma}}$ невозможно, что и означает отсутствие ограниченных при всех t движений газового эллипсоида.

Важным свойством динамики газового эллипсоида, находящегося под действием внешнего давления ($\sigma = -1$), является наличие сингулярностей $\det(F(t_*)) = 0$. Существование таких сингулярностей можно установить с помощью оценок величины D . При $\sigma = -1$ равенства (1.15) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{D} &= 6(\gamma - 1)E + 2(5 - 3\gamma)T, \\ \ddot{D} &= 4E + 2(5 - 3\gamma)(\det(F))^{1-\gamma}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Отсюда при $\gamma \geq 5/3$ получаем

$$D \leq 6(\gamma - 1)Et^2 + At + B. \quad (1.20)$$

Из (1.20) следует, что при $\gamma \geq 5/3$, $\sigma = -1$, $E < 0$ решение существует на конечном отрезке времени I : $t_0 \leq t \leq t_1$ (поскольку $D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \geq 0$) и, следовательно, имеет сингулярности $\det(F(t_0)) = \det(F(t_1)) = 0$ (иначе решение продолжалось бы вне отрезка I).

Для исследования сингулярностей решения при всех $\gamma > 1$, $\sigma = -1$ можно использовать следующую функцию:

$$\begin{aligned} (\ln(\det(F_k^i)))^{\cdot\cdot} &= \sum_{i,k}^3 \ddot{F}_k^i (F^{-1})_i^k - \sum_{i,k,\alpha,\beta}^3 \dot{F}_k^i (F^{-1})_i^\beta \dot{F}_\beta^\alpha (F^{-1})_\alpha^k = \\ &= -(\gamma - 1) \sum_{i,k}^3 ((F^{-1})_i^k)^2 (\det(F))^{1-\gamma} - \text{Tr}(A^2), \end{aligned} \quad (1.21)$$

где матрица $A = \dot{F} \circ F^{-1}$. Матрица A является симметричной ($A = A^t$), если интеграл $K = 0$ (см. (1.12)). В этом случае из (1.21) в силу $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(A \circ A^t) \geq 0$ получаем

$$(\ln(\det(F_k^i)))^{\cdot\cdot} < 0. \quad (1.22)$$

Следовательно, при $K = 0$ функция $\det(F_k^i(t))$ является выпуклой вверх функцией и поэтому, по крайней мере при одном направлении времени t , решение имеет сингулярность $\det(F(t_*)) = 0$.

III. Преобразование динамической системы. Изучение динамики решений (1.2) во времени сводится, как показано выше, к изучению динамики лагранжевой системы (1.10). Эта система для простейших классов матриц F_j^i (скалярных, осесимметричных) была изучена в работах [156, 161], использующих стандартные методы анализа. Изучение системы (1.10) в общем случае при ненулевых интегралах (1.12) требует привлечения методов качественной теории дифференциальных уравнений.

Первым шагом применения этих методов является построение динамической системы, определенной на некотором компактном многообразии S с границей Γ , эквивалентной системе (1.10) и имеющей достаточно простые особые точки. Поскольку все последующие рассмотрения не зависят от конкретного вида потенциала в (1.10), мы будем рассматривать общую лагранжеву систему

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (1.23)$$

с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 - \sigma (U(q_i))^\alpha, \quad (1.24)$$

где $\alpha < 0$, $\sigma = \pm 1$, $U(q_i)$ — однородная функция степени $\mu \geq 0$ такая, что поверхность $U(q_i) = 0$ имеет размерность $n - 1$. Для системы (1.10) $\alpha = 1 - \gamma$, $q_i = F_k^j$, $U(q_i) = \det \| F_k^j \|$, $n = 9$, $\mu = 3$. Лагранжева система (1.23) в фазовом пространстве имеет вид

$$\dot{P}_i = -\alpha \sigma U^{\alpha-1} \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.25)$$

Эту систему мы рассматриваем в области $U(q_i) > 0$ (точки границы $U(q_i) = 0$, согласно (1.11), отвечают физической особенности решения). Система (1.25) допускает группу масштабных преобразований

$$q_i \rightarrow \lambda q_i, \quad P_i \rightarrow \lambda^{\alpha\mu/2} P_i, \quad t \rightarrow \lambda^{1-(\alpha\mu/2)} t. \quad (1.26)$$

При этом преобразование энергии $E = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^n P_\beta^2 + \sigma U(q_i)^\alpha$ имеет вид $E \rightarrow \lambda^\alpha E$. В силу наличия группы масштабных преобразований (1.26), система (1.25) допускает понижение порядка, т. е. эквивалентна некоторой системе от $2n - 1$ переменных.

Для построения компактного многообразия S размерности $2n - 1$ введем две локальные карты W_1 и W_2 . В локальной карте W_1 введем координаты

$$y_i = \frac{q_i}{\left(\sum_{\beta=1}^n q_\beta^2 \right)^{1/2}}, \quad P_i^0 = \frac{P_i}{(U(q_i))^{\alpha/2}}.$$

В локальной карте W_2 — следующие координаты:

$$y_i, \quad P_i = \frac{P_i}{\left(\sum_{\beta=1}^n P_\beta^2 \right)^{1/2}}, \quad w = \frac{U^\alpha(q_i)}{\sum_{\beta=1}^n P_\beta^2}. \quad (1.27)$$

Координаты y_i пробегают единичную сферу S^{n-1} : $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$. Координаты p_i также пробегают единичную сферу S^{n-1} : $\sum_{i=1}^n p_i^2 = 1$, в то время как координаты p^0 пробегают все евклидово пространство E^n . Координаты $p_i = p^0 / (\sum (p_\beta^0)^2)^{1/2}$, $w = 1 / (\sum (p_\beta^0)^2)^{1/2}$ компактифицируют евклидово пространство E^n на бесконечности — ей отвечает сфера $w = 0$, $\sum_{i=1}^n p_i^2 = 1$. Таким образом, координаты p_i^0, p_i, w можно представлять себе как пробегающие единичный шар D^n : $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1$; в окрестности центра шара координаты p_i^0 , а в окрестности граничной сферы S^{n-1} ($\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$) координаты p_i, w .

Многообразие S в локальных картах W_1 и W_2 выделяется условиями

$$U(y_i) \geq 0, \quad w \geq 0.$$

Граница Γ многообразия S состоит из двух компонент $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Компонента Γ_0 определяется условиями $w = 0, U(y_i) \geq 0$, а компонента Γ_1 — условиями $w > 0, U(y_i) = 0$. Пересечение этих компонент $N = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ (угол края Γ) имеет размерность $2n - 3$ и задается условиями

$$U(y_i) = 0, \quad w = 0. \quad (1.28)$$

Динамическая система на многообразии S определяется путем преобразования системы (1.25) в координаты W_1 и W_2 (это преобразование использует однородность функции $U(q_i)$). В координатах W_1 и времени τ_1 :

$$\frac{d\tau_1}{dt} = \frac{U^{\alpha/2}(q_i)}{U(y_i) \left(\sum_{\beta=1}^n q_\beta^2 \right)^{1/2}}$$

получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^0 &= \alpha \sigma \left(-\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{\sigma}{2} p_i^0 \left(\sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_\gamma} p_\gamma^0 \right) \right), \\ \dot{y}_i &= U(y_j) \left(p_i^0 - y_i \left(\sum_{\gamma=1}^n p_\gamma^0 y_\gamma \right) \right), \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\frac{dU(q_j)}{d\tau_1} = U(q_j) \left(\sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial U(y)}{\partial y_\gamma} p_\gamma^0 \right).$$

В координатах W_2 и времени τ_2 :

$$\frac{d\tau_2}{dt} = \frac{U^{\alpha/2}(q_i)}{U(y_i) w^{1/2} \left(\sum_{\beta=1}^n q_{\beta}^2 \right)^{1/2}} \quad (1.30)$$

система (1.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \sigma \alpha w \left(-\frac{\partial U}{\partial q_i} + p_i \left(\sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_{\gamma}} p_{\gamma} \right) \right), \\ \dot{y}_i &= U(y_j) \left(p_i - y_i \left(\sum_{\gamma=1}^n p_{\gamma} y_{\gamma} \right) \right), \\ \dot{w} &= \alpha w (1 + 2\sigma w) \left(\sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_{\gamma}} p_{\gamma} \right), \\ \frac{dU(q_i)}{d\tau_2} &= U(q_i) \left(\sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_{\gamma}} p_{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Очевидно, что граница $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ является инвариантным многообразием для систем (1.29) и (1.31). При $\sigma = -1$ система (1.31) имеет еще одно инвариантное многообразие V : $w = 1/2$, соответствующее нулевой полной энергии $E = 1/2 \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 + \sigma U^{\alpha}(q_i)$.

§ 2. Колебательный режим расширения вращающегося газового облака в вакуум

В этом параграфе мы укажем новый колебательный режим движения газа путем аппроксимации траекторий системы (1.24) последовательностями особых точек и их сепаратрис, мимо которых эти траектории движутся.

I. Перечислим множества особых точек и их собственные числа для системы (1.29), (1.31) при $\sigma = +1$:

1) M_{ε} : $w = 0$, $p_i = \varepsilon y_i$, $\varepsilon = \pm 1$. M_{ε}^{\pm} лежит на границе Γ_0 , $\dim M_{\varepsilon} = n - 1$. Собственные числа этих особых точек следующие:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha \lambda \varepsilon U(y_j) && \text{(переменная } w); \\ \lambda_2 &= \dots = \lambda_n = 0 && \text{(переменные } p_i), \\ \lambda_{n+1} &= \dots = \lambda_{2n-1} = -\varepsilon U(y_j) && \text{(переменные } y_i). \end{aligned}$$

Особые точки M_{ε} невырождены, поскольку число нулевых собственных чисел равно $(n - 1)$ -размерности M_{ε} . При сделанных

выше предположениях ($\alpha < 0$, $\lambda > 0$; см. (1.24)) особые точки M_+ являются притягивающими, а особые точки M_- являются отталкивающими.

2) N : $w = 0$, $U(y_i) = 0$. N есть угол границы Γ : $N = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$, $\dim N = 2n - 3$. В этих особых точках $2n - 3$ собственных числа, отвечающих размерности множества N , равны нулю и имеются два ненулевых собственных числа:

$$\lambda_1 = \alpha \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_\nu} p_\nu \right) \quad (\text{переменная } w), \quad (2.1)$$

$$\lambda_2 = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_\nu} p_\nu \quad (\text{переменные } y_i).$$

Условие $\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_\nu} p_\nu > 0$ на N выделяет множество N_+ , а условие

$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_\nu} p_\nu < 0$ определяет множество N_- . Эти условия, очевидно,

означают, что точка (p_ν, y_ν) , принадлежащая множеству N , лежит на N_+ , если точка (p_ν) на единичной сфере S^{n-1} лежит по ту же сторону от плоскости, касательной к поверхности $U(y) = 0$ в точке (y_ν) , что и нормаль к этой поверхности $\frac{\partial U(y)}{\partial y_\nu} / |\text{grad } U(y)|$.

Аналогично, точка (p_ν, y_ν) лежит на N_- , если точка (p_ν) лежит по отрицательную сторону от этой касательной плоскости.

Особые точки N_+ и N_- невырожденные и неустойчивые, каждая точка N_+ имеет одну входящую сепаратрису, идущую по Γ_1 , и одну выходящую сепаратрису, идущую по Γ_0 , а точки N_- — наоборот.

3) Вырожденные особые точки L , в которых $\frac{\partial U}{\partial y_i} = 0$ (особые в геометрическом смысле точки поверхности $U(y_i) = 0$), координаты p_i, w произвольны.

II. Для нахождения сепаратрис особых точек M_ε и N проинтегрируем систему (1.31) на границе $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Траектории этой системы на компоненте Γ_0 имеют вид

$$p_i = p_i^0, \quad w = 0, \quad y_i = y_i^0 \frac{\text{ch } \tau_0}{\text{ch } \tau} + p_i^0 \frac{\text{sh } \tau - \text{sh } \tau_0}{\text{ch } \tau}. \quad (2.2)$$

Здесь p_i^0, y_i^0, τ_0 — константы, причем $\text{th } \tau_0 = \sum_{i=1}^n p_i^0 y_i^0$. Время τ связано с τ_2 по формуле $d\tau = U(y_i) d\tau_2$. Траектория в координатах y_i движется по кратчайшей дуге большого круга на единичной сфере S^{n-1} , проходящего через точки (y_i^0) и (p_i^0) . Концы тра-

ектории (2.2) лежат на множествах особых точек M_+ , M_- , или N , т. е. каждая траектория является сепаратрисой некоторой особой точки.

Траектории системы (1.31) на компоненте границы Γ_1 ($U(y_i) = 0$) имеют следующий вид:

$$y_i = y_i^0, \quad w = \frac{\text{ch}^2 \tau_0 - \text{ch}^2 \tau}{2 \text{ch}^2 \tau}, \quad p_i = p_i^0 \frac{\text{ch} \tau_0}{\text{ch} \tau} + s_i^0 \frac{\text{sh} \tau - \text{sh} \tau_0}{\text{ch} \tau}. \quad (2.3)$$

Здесь $y_i^0, p_i^0, \tau_0, (s_i^0) = \frac{\text{grad } U(y_i^0)}{|\text{grad } U(y_i^0)|}$ — константы, причем

$$\sum_{i=1}^n p_i^0 s_i^0 = \text{th} \tau_0 < 0, \quad \sum_{i=1}^n p_i s_i^0 = \text{th} \tau. \quad (2.4)$$

Время τ определено выражением $d\tau = w |\alpha| |\text{grad } U(y_i^0)| d\tau_2$ в (2.3). Траектория (2.3) имеет начальную точку $(p_i^0, y_i^0, w = 0)$ при $\tau = \tau_0$ на N_- , конечная точка этой траектории $(p_i(\tau), \tau = -\tau_0, y_i^0, w = 0)$ в силу (2.4) лежит на N_+ . Конечная точка $(p_i(-\tau_0))$ получается из начальной точки (p_i^0) отражением в плоскости, касательной к поверхности $U(y_i) = 0$ в точке (y_i^0) . Максимальное значение w вдоль траектории (2.3) достигается при $\tau = 0$ и равно

$$w_* = \frac{\text{ch}^2 \tau_0 - 1}{2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n p_i^0 s_i^0\right)^2}{2 \left(1 - \left(\sum_{i=1}^n p_i^0 s_i^0\right)^2\right)}. \quad (2.5)$$

III. Полученный вид сепаратрис (2.2), (2.3) приводит к следующей сепаратрисной диаграмме:

$$M_- \xrightarrow{\alpha_-} N_- \xleftrightarrow[\beta_+]{\beta_-} N_+ \xrightarrow{\alpha_+} M_+. \quad (2.6)$$

Здесь стрелка означает, что особая точка, являющаяся начальной для некоторой выходящей из нее сепаратрисы, отображается в конечную точку этой сепаратрисы. Отображения, определенные таким образом, обозначены $\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+$.

Вырожденные особые точки L в сепаратрисную диаграмму не входят, поскольку между ними и особыми точками M_\pm, N нет сепаратрисных переходов. Особые точки L не влияют на описываемые ниже режимы.

Отображения $\alpha_-, \beta_+, \alpha_+$ осуществляются сепаратрисами (2.2), идущими по компоненте границы Γ_0 ($w = 0$). Вдоль этих сепаратрис координаты $p_\gamma = p_\gamma^0 = \text{const}$, а координаты y_γ изменяются

по кратчайшей дуге большого круга, проходящего через точки (p_γ^0) и (y_γ^0) ((p_γ^0, y_γ^0) — начальная точка сепаратрисы). В отталкивающих особых точках M_- имеем $p_\gamma^0 = -y_\gamma^0$. Через две точки $(p_\gamma^0 = -y_\gamma^0)$ и (y_γ^0) на единичной сфере S^{n-1} проходит $(n-2)$ -мерное множество больших кругов, поэтому отображение α_- неоднозначно. Отметим, что пересечение каждого такого круга с N_- в интересующем нас случае ($\mu = 3$) всегда существует.

Отображение β_- осуществляется сепаратрисой (2.3), идущей по компоненте границы Γ_1 ($U(y_\gamma) = 0$). Вдоль этой сепаратрисы $y_\gamma = y_\gamma^0 = \text{const}$. Конечная точка $(p_\gamma^1, y_\gamma^0, w = 0)$ получается из начальной точки $(p_\gamma^0, y_\gamma^0, w = 0)$ путем отражения точки (p_γ^0) в плоскости l , касательной к поверхности $U(y_\gamma) = 0$ в точке (y_γ^0) . Очевидно, конечная точка принадлежит N_+ .

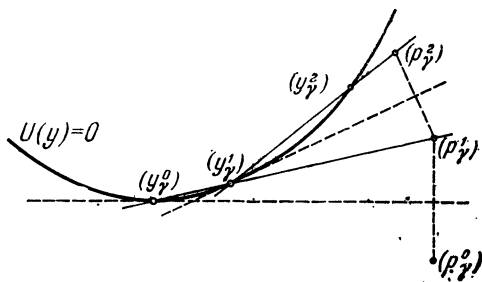


Рис. 39. Последовательное изменение особой точки (p_γ^i, y_γ^i) при сепаратрисных переходах (2.2) и (2.3).

Пусть расстояние от точки (p_γ^0) до плоскости l равно h . При малых h кратчайшая дуга большого круга, соединяющего точки (p_γ^1) и (y_γ^0) , имеет пересечение с поверхностью $U(y_\gamma) = 0$ в точке (y_γ^1) , близкой к точке (y_γ^0) (рис. 39). (Предполагается, что поверхность $U(y_\gamma) = 0$ в точке y_γ^0 выпукла в сторону нормали. Такие точки (y_γ^0) в рассматриваемом случае существуют.)

Итак,

$$\beta_-(p_\gamma^0, y_\gamma^0) = (p_\gamma^1, y_\gamma^0), \quad \beta_+(p_\gamma^1, y_\gamma^0) = (p_\gamma^1, y_\gamma^1). \quad (2.7)$$

Точка (p_γ^1, y_γ^1) при $h \rightarrow 0$ бесконечно близка к точке (p_γ^0, y_γ^0) , и повторение отображений β_- , β_+ снова приводит к близким точкам. Поэтому при $h \rightarrow 0$ сепаратрисная диаграмма (2.6) дает любое конечное число переходов между множествами N_- и N_+ :

$$M_- \xrightarrow{\alpha_-} N_- \xrightarrow{\beta_-} N_+ \xrightarrow{\beta_+} \dots \xrightarrow{\beta_-} N_+ \xrightarrow{\alpha_+} M_+. \quad (2.8)$$

Отметим, что расстояние между точками (p_γ^i) и (y_γ^i) при отображении β_- не изменяется, а при отображении β_+ уменьшается, поэтому колебания между множествами N_- и N_+ всегда обрываются попаданием точки на множество M_+ , где $p_\gamma = y_\gamma$.

Движение точки по последовательности сепаратрис, определенной диаграммой (2.8), в координатах y_γ представляет собой

свободное движение точки по геодезическим на единичной сфере S^{n-1} в области $U(y_\nu) > 0$, причем точка отражается от поверхности $U(y_\nu) = 0$ по закону упругого отражения (см. (2.7)). В этом смысле математической моделью описываемого ниже режима является геодезический бильярд на сфере S^{n-1} с отражающей поверхностью $U(y_\nu) = 0$.

IV. Перейдем к выводам из полученной сепаратрисной диаграммы (2.6), (2.8).

Сепаратрисная диаграмма (2.8) реализована сепаратрисами, идущими по границе Γ_0 и Γ_1 физической области S , и поэтому ей не отвечает никакое точное физическое решение. Однако существуют физические траектории ($w \neq 0$, $U(y_\nu) \neq 0$), идущие сколь угодно близко вдоль всей последовательности сепаратрис (2.8). Отрезок такой траектории, выходящий из отталкивающей особой точки M_- , отвечает сжатию газа по инерции из бесконечно разреженного состояния, а отрезок траектории, входящий в притягивающую особую точку M_+ , соответствует бесконечному свободному расширению газа.

Внутренняя часть диаграммы (2.8) описывает чередующиеся сжатия и расширения газа. Действительно, в задаче о газовом слое $U(q_i) = \det \|F_{jk}\|$ и условие $U(y_\nu) = \det \|Y_{jk}\| = 0$ ($\sum_{j,k}^3 Y_{jk}^2 = 1$) означает, что газ сжат по нулевому собственному направлению матрицы $\|Y_{jk}\|$. Поэтому близость траектории к неустойчивым особым точкам N_- или N_+ означает, что эллипсоид постоянной плотности газа имеет сильно сжатую форму.

Далее, согласно (1.34), $\frac{dU(q_i)}{d\tau_2} = U(q_i) \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial U(y)}{\partial y_\nu} p_\nu \right)$. Поэтому

в окрестности $N_- \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_\nu} p_\nu < 0 \right)$ $U(q_i) = \det \|F_{jk}\|$ уменьша-

ется, т. е. газ сжимается, а в окрестности $N_+ \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial U(y)}{\partial y_\nu} p_\nu > 0 \right)$

$\det \|F_{jk}\|$ увеличивается, т. е. газ расширяется. Следовательно, на отрезке траектории, отвечающем переходу $N_- \xrightarrow{\beta_-} N_+$, существует минимум объема газа, а на отрезке траектории, отвечающем переходу $N_+ \xrightarrow{\beta_+} N_-$, существует максимум объема газа.

Для определения величины объема ($\det \|F_{jk}\|$) в этих экстремумах предположим, что движение газа, соответствующее выбранной траектории системы (1.24), имеет полную энергию E . По

определению,

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \dot{r}_{jk}^2 + (\det \| F_{jk} \|)^{1-\nu}, \quad w = \frac{(\det \| F_{jk} \|)^{1-\nu}}{\sum_{j,k} \dot{r}_{jk}^2}.$$

Отсюда

$$\det \| F_{jk} \| = \left(\frac{1+2w}{2Ew} \right)^{1/(\nu-1)}. \quad (2.9)$$

Поэтому минимумы объема, достигаемые на отрезках траектории, отвечающих переходам $N_- \xrightarrow{\beta_-} N_+$, приближенно равны следующей величине:

$$\min \det \| F_{jk} \| = \left(\frac{1+2w_*}{2Ew_*} \right)^{1/(\nu-1)}, \quad (2.10)$$

где w_* дается формулой (2.5). Для траектории, достаточно близкой к последовательности сепаратрис (2.8), величина (2.10) достигается сколь угодно точно. Максимумы объема $\det \| F_{jk} \|$ достигаются на отрезках траектории, близких к сепаратрисам, осуществляющим переход $N_+ \xrightarrow{\beta_+} N_-$, где $w = 0$. Поэтому значение $\max \det \| F_{jk} \|$ может быть сколь угодно большим (см. (2.9)).

Отметим, что каждой траектории системы (1.34) в координатах (1.27) отвечает однопараметрическое семейство траекторий исходной системы (1.25), параметризуемое постоянным значением энергии E ($0 < E < \infty$). В силу масштабной инвариантности относительно группы преобразований (1.26) время t движения вдоль траектории связано с энергией E соотношением

$$tE^{1/2+1/(3(\nu-1))} = \text{const}. \quad (2.11)$$

Таким образом, мы доказали, используя сепаратрисную диаграмму (2.8), что существуют следующие движения идеального газа: 1) первоначально газ сжимается из состояния бесконечного разрежения; 2) затем начинается колебательный режим: газ сколь угодно большое число раз сжимается и расширяется по изменяющимся направлениям, причем амплитуда осцилляций объема $\det \| F_{jk} \|$ в силу (2.9)—(2.10) может быть сколь угодно большой, а следовательно, при больших E сколь угодно велики осцилляции плотности ρ , тогда как время осцилляций, согласно (2.11), может быть сколь угодно малым; 3) колебательный режим заканчивается бесконечным свободным расширением газа.

Отметим, что колебательный режим существует даже в том случае, если первоначальное распределение газа было близким к сферически-симметричному распределению. Далее, из (2.10) и (2.5) следует, что для движений с ограниченной энергией E и

с большим числом осцилляций $\det \| F_{jk} \|$ все время велик и поэтому газ в колебательном режиме остается разреженным.

Подчеркнем, что исследованный в данном параграфе колебательный режим движения газового эллипсоида реализуется за счет одних лишь сил внутреннего давления при наличии вращения газа (интегралы J и $K \neq 0$). В § 8 мы покажем, что этот колебательный режим сохраняется также при наличии гравитационного взаимодействия частиц газа.

§ 3. Исследование одной задачи в теории мелкой воды

Аналогом задачи о расширении газового эллипсоида в вакуум в двумерной гидродинамике является задача о растекании вращающегося жидкого эллипса в теории мелкой воды (в этом случае $\gamma = 2$; см. главу VI, § 6, п. II). Эта задача сведена к квадратурам в работе [161]. Однако полученные в [161] явные формулы настолько сложны, что исследование их явилось бы отдельной трудной задачей. Покажем, независимо от предыдущего изложения и не исследуя явных формул, что в двумерной задаче (или в задаче о разлете эллиптического цилиндра) также существует колебательный режим, аналогичный описанному в § 2.

В пространстве двумерных матриц F_{ij} введем координаты d_i , d_2 , φ_1 , φ_2 такие, что

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Лагранжиан (1.24) для двумерной задачи имеет вид

$$L = \frac{1}{2} (\dot{d}_1^2 + \dot{d}_2^2 + (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) (d_1^2 + d_2^2) + 4\varphi_1\varphi_2 d_1 d_2) - \sigma (d_1 d_2)^{-1}. \quad (3.2)$$

Координаты φ_1 и φ_2 являются циклическими координатами, и поэтому соответствующие импульсы $p_{\varphi_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = J$ и $p_{\varphi_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = -K$ сохраняются. Интегралы J и K совпадают соответственно с интегралом момента количества движения и вихрем (см. (1.12)).

На плоскости d_1 , d_2 введем полярные координаты r , φ :

$$d_1 = r \cos \varphi, \quad d_2 = r \sin \varphi. \quad (3.3)$$

Лагранжева система с лагранжианом (3.2) в фазовом пространстве $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$, $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$, r , φ переходит в гамильтонову систему с гамильтоном

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} p_\varphi^2 + U(\varphi) \right) \right), \quad (3.4)$$

где

$$U(\varphi) = \frac{J^2 + K^2 + 2JK \sin 2\varphi}{2 \cos^2 2\varphi} + \frac{2\sigma}{\sin 2\varphi}.$$

Эта система после замены координат $r = 1/x$ и замены времени $dx/dt = 1/r^2$ распадается на две гамильтоновы системы с гамильтонианами

$$H = -\frac{1}{2} p_r^2 - x^2 H_0, \quad H_0 = \frac{1}{2} p_\varphi^2 + U(\varphi). \quad (3.5)$$

Из (3.4) следует, что (при $\sigma = +1$ и $J \neq -K$) $U(\varphi) \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow 0, \pi/4$. Таким образом, угол φ колеблется в потенциальной яме, определенной потенциалом $U(\varphi)$. Колебания угла φ обуславливают изменение соотношения полуосей эллипса d_1, d_2 и являются отражением общего колебательного режима § 2 (рис. 40).

Оценим число малых колебаний угла φ вблизи положения равновесия φ_0 ($\frac{dU}{d\varphi}(\varphi_0) = 0$) за все время T существования решения. За время T координата x изменяется от 0 ($r^2 = d_1^2 + d_2^2 = \infty$) до максимума $x_m = |H|^{1/2} |H_0|^{-1/2}$ и снова до 0. Отсюда время $T = \pi(2H_0)^{-1/2}$. Период T_φ малых колебаний угла φ , как известно, равен $T_\varphi \cong 2\pi(U''_\varphi(\varphi_0))^{-1/2}$. Вычисления показывают, что при $J \cong \approx K \gg 1$ корень уравнения $\frac{dU}{d\varphi} = 0$ равен $\varphi_0 \cong (2JK)^{-1/2}$. В этой точке $H_0 \cong \cong U(\varphi) \cong \frac{J^2 + K^2}{2}$ и $U''_\varphi(\varphi_0) = 4(2JK)^{3/2}$. Отсюда $T = \pi(J^2 + K^2)^{-1/2}$, $T_\varphi = = \pi(2JK)^{-3/4}$. Число колебаний $N = = \frac{T}{T_\varphi} = \frac{(2JK)^{3/4}}{(J^2 + K^2)^{1/2}}$. Следовательно,

при $J \approx K \rightarrow \infty$ число колебаний N становится сколь угодно большим и растет как $J^{1/2}$. Нетрудно показать, что малые колебания угла φ с амплитудой $\sim \varphi_0^{3/2} \ll \varphi_0$ обуславливают колебания величины $\frac{\sin 2\varphi}{2x^2} = \det \|F_{ij}\|$.

В двумерной задаче, аналогичной задаче о сжатии капли под давлением, где $\sigma = -1$, потенциал $U(\varphi) \rightarrow -\infty$ при $\varphi \rightarrow 0$ и $U(\varphi) \rightarrow +\infty$ при $\varphi \rightarrow \pi/4$ (см. рис. 40). При $J \approx -K \gg 1$, $J \neq -K$ потенциал $U(\varphi)$ при $0 < \varphi < \pi/4$ имеет два экстремума: максимум φ_1 и минимум φ_2 , при этом $U(\varphi_2) > 0$. Решения, в которых угол φ колеблется в окрестности минимума φ_2 , не имеют физических особенностей — в них сжатие из разреженного состоя-

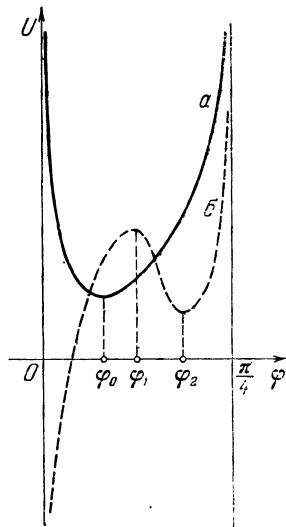


Рис. 40. Вид потенциала $U(\varphi)$: а) $\sigma = +1$, $J \neq -K$; б) $\sigma = -1$, $J \cong \approx -K \gg 1$, $J \neq -K$.

ния сменяется расширением. Аналогичных решений трехмерной задачи, по-видимому, не существует.

Отметим, что бесконечно высокий барьер потенциала $U(\varphi)$ при $\varphi = \pi/4$ (являющийся одной из причин возникновения колебаний, другой причиной является барьер при $\varphi = 0$, созданный давлением) имеет следующее чисто геометрическое происхождение. В четырехмерном пространстве матриц F_{ij} множество матриц с $d_1 = d_2$ (см. (3.1)) имеет размерность 2. Поэтому для почти всех траекторий лагранжевой системы (3.2) во все моменты времени $d_1 \neq d_2$, следовательно, почти все траектории гамильтоновой системы (3.4) не пересекают поверхность $\varphi = \pi/4$, а это возможно лишь при наличии бесконечного потенциального барьера. По тем же причинам в трехмерной задаче отношение порядка между полуосями эллипсоида постоянной плотности: $d_1 < d_2 < d_3$ сохраняется для почти всех движений газа во все моменты времени.

§ 4. Уравнения движения гравитирующего газового эллипсоида

Адиабатическое движение гравитирующего идеального газа определяется уравнениями

$$\rho \frac{du^i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \frac{d\rho}{dt} = - \rho \operatorname{div} u^i, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad (4.1)$$

где все обозначения те же, что и в § 1, а $\Phi(x)$ — ньютоновский гравитационный потенциал

$$\Phi(x) = G \int_V \frac{\rho(x')}{|x - x'|} dx',$$

созданный в данной точке x всей массой газа, G — гравитационная постоянная. Уравнения (4.1), так же как и уравнения (1.1) при отсутствии гравитационного взаимодействия, имеют решения с однородной деформацией, в которых эйлеровы координаты частиц газа x^i являются линейными функциями лагранжевых координат a^k :

$$x^i = F_k^i(t) a^k, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

Для существования таких решений необходимо, чтобы гравитационный потенциал $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ был квадратичной функцией координат x_i , а это свойство выполнено только для гравитационного поля внутри эллипсоида, заполненного газом с постоянной плотностью (см. [172, 173]). Поэтому для решений вида (4.2) плотность газа ρ и давление p определяются формулами (при

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq 1)$$

$$\rho = \frac{3M}{4\pi} |\det(F_k^i)|^{-1}, \quad p = \alpha \frac{3M(\gamma - 1)(1 - a^2)}{8\pi |\det(F_k^i)|^\gamma}. \quad (4.3)$$

Здесь α , M — константы, M — полная масса газа. При $a^2 > 1$ полагаем $\rho = 0$, $p = 0$.

Оператор F_k^i можно представить в виде

$$F = Q_1 D Q_2, \quad (4.4)$$

где Q_1 , Q_2 — ортогональные матрицы, а матрица D диагональна: $D_j^i = d_j \delta_j^i$. Единичная сфера в лагранжевых координатах a^k при отображении (4.2) переходит в эллипсоид с полуосями d_1 , d_2 , d_3 и главными направлениями $\bar{e}_i = Q_1 e_i$. В силу условий (4.3), газ с постоянной плотностью заполняет этот эллипсоид; давление p максимально в центре эллипсоида и равно нулю на его поверхности.

Ньютоновский потенциал Φ в точке (x_1, x_2, x_3) внутри эллипсоида (в координатах, связанных с главными осями) имеет вид (с точностью до константы)

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{4} GM \int_0^\infty \left(\frac{x_1^2}{d_1^2 + s} + \frac{x_2^2}{d_2^2 + s} + \frac{x_3^2}{d_3^2 + s} \right) \times \\ \times ((d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s))^{-1/2} ds. \quad (4.5)$$

Для вывода уравнений движения гравитирующего газового эллипсоида введем матрицу $\varphi^{ij} = F_\alpha^i F_\alpha^j$ ($\varphi = F \circ F^t$). Очевидно, что собственные числа матрицы φ^{ij} есть d_1^2 , d_2^2 , d_3^2 . Если матрица F_k^i диагональна: $F_k^i = D_k^i$, то ньютоновский потенциал (4.5) можно представить в виде

$$\Phi = - \frac{\partial U}{\partial \varphi^{ij}} x^i x^j, \quad (4.6)$$

где

$$U = \frac{3}{2} GM \int_0^\infty ((d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s))^{-1/2} ds. \quad (4.7)$$

Поскольку потенциал Φ является скаляром, то выражение (4.6) справедливо в любом базисе. Отметим, что подинтегральную функцию в (4.7) можно выразить непосредственно через компоненты матрицы F_k^i :

$$(d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s) = \\ = \det(F F^t) + \frac{1}{2} s [(\text{Tr}(F F^t))^2 - \text{Tr}(F F^t F F^t)] + s^2 \text{Tr} F F^t + s^3.$$

Основные уравнения динамики (4.1) с учетом (4.3) и (4.6) переходят в систему уравнений

$$\ddot{F}_k^i = -\alpha \frac{\partial}{\partial F_k^i} (\det F)^{1-\nu} + \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi^{il}} + \frac{\partial U}{\partial \varphi^{li}} \right) F_k^l. \quad (4.8)$$

Согласно определению $\varphi^{il} = F_\alpha^i F_\alpha^l$ имеем

$$F_k^l = \frac{\partial \varphi^{il}}{\partial F_k^i} = \frac{\partial \varphi^{li}}{\partial F_k^i}.$$

Поэтому система уравнений (4.8) является лагранжевой системой

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{F}_k^i} = \frac{\partial L}{\partial F_k^i} \quad (4.9)$$

с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (\dot{F}_k^i)^2 - \alpha (\det F)^{1-\nu} + \frac{3}{2} GM \int_0^\infty ((d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s))^{-1/2} ds. \quad (4.10)$$

Таким образом, изучение динамики гравитирующего газового эллипсоида эквивалентно изучению динамики материальной точки в девятимерном пространстве матриц F_k^i в поле с потенциалом, определенным (4.10). Отметим, что лагранжиан (4.10) зависит от одного характерного, не устранимого заменой времени, параметра $\beta = \alpha/3GM$. Лагранжева система (4.9)—(4.10), так же как и система (1.10), инвариантна относительно преобразований $F \rightarrow Q_1 F Q_2$, где Q_1, Q_2 — ортогональные матрицы, и имеет первые интегралы J и K (1.12).

Полная энергия газа, заполняющего эллипсоид v , имеет вид

$$E = \int_v \left[\frac{\rho (u^i)^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} - \rho \Phi(x) \right] dx = \\ = \frac{M}{5} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,k} (\dot{F}_k^i)^2 + \alpha (\det F)^{1-\nu} - \frac{3}{2} GM \int_0^\infty ((d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s))^{-1/2} ds \right].$$

В важном частном случае сферически-симметричных движений $F_k^i = F \delta_k^i$ лагранжиан (4.10) переходит в

$$L_1 = \frac{1}{2} \dot{F}^2 - \frac{\alpha}{3} F^{3(1-\nu)} + GMF^{-1}.$$

При $\gamma > 4/3$ и отрицательной энергии

$$E_1 = \frac{1}{2} \dot{F}^2 + \frac{\alpha}{3} F^{3(1-\gamma)} - GMF^{-1}$$

газовый шар пульсирует в окрестности положения равновесия

$$F_0^{3\gamma-4} = 3(\gamma - 1)\beta.$$

Эти колебания газового шара изучались в книге [132] в качестве модели пульсаций переменных звезд-цефеид. При $\gamma \leq 4/3$ и $E_1 < 0$ происходит коллапс газового шара в центр симметрии.

Динамика системы (4.9) при $\alpha = 0$ (давление $p = 0$) — движение пылевого гравитирующего эллипсоида — изучалась впервые в работах [163, 164] и имеет приложения в теории образования галактик (см. [165, 74]). Динамика системы (4.9)—(4.10) для диагональных матриц F_k^i при $\alpha > 0$, $GM > 0$ изучалась в работах [169, 170] с помощью численных методов.

§ 5. Преобразование гамильтоновой системы

Переходя к изучению лагранжевой системы (4.9) методами качественной теории дифференциальных уравнений, мы преобразуем эту систему в эквивалентную ей систему, определенную на некотором компактном многообразии S . Для удобства записи гамильтониан H , соответствующий (4.10), представим в виде

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i^2 + \alpha V^{1-\gamma}(q_i) - \frac{3GM}{8} U(q_i), \quad P_i = \dot{q}_i. \quad (5.1)$$

Здесь координаты q_i соответствуют F_{jk} , $V(q_i) = \det \|F_{jk}\|$ — однородная функция степени 3, $U(q_i) = \int_0^\infty ((d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s))^{-1/2} ds$ — однородная функция степени (-1) , $n = 9$. Гамильтонова система, соответствующая гамильтониану (5.1), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\alpha(1-\gamma)V^{-\gamma}(q_i)\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{3GM}{8}\frac{\partial U}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} = P_i. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Система (5.2) рассматривается в области S_1 фазового пространства, выделенной условием $V(q_i) > 0$, поскольку, согласно (4.3), точкам поверхности $V(q_i) = 0$ отвечает физическая особенность решения. Введем в фазовом пространстве P_i , q_i две системы коор-

динат W_1 и W_2 . Координаты W_1 имеют вид

$$\bar{p}_i = \frac{P_i}{(\alpha V^{1-\gamma}(q_i) + (3GM/8)U(q_i))^{1/2}}, \quad (5.3)$$

$$u = \frac{U(q_i)}{(8\alpha/3GM)V^{1-\gamma}(q_i) + U(q_i)}, \quad y_i = \frac{q_i}{\left(\sum_{k=1}^n q_k^2\right)^{1/2}}.$$

Координаты y_i пробегают единичную сферу S^{n-1} : $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$, координаты \bar{p}_i пробегают все евклидово пространство E^n , а координата u пробегает интервал $0 < u < 1$. Отметим, что координаты u, y_i при $\gamma = 4/3$ становятся зависимыми, ниже мы полагаем $\gamma \neq 4/3$.

Координаты W_2 имеют вид

$$p_i = \frac{\bar{p}_i}{\left(\sum_{k=1}^n \bar{p}_k^2\right)^{1/2}} = \frac{P_i}{\left(\sum_{k=1}^n P_k^2\right)^{1/2}}, \quad u, y_i, \quad (5.4)$$

$$w = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \bar{p}_k^2} = \frac{\alpha V^{1-\gamma}(q_i) + (3GM/8)U(q_i)}{\sum_{k=1}^n P_k^2}.$$

Координаты p_i пробегают единичную сферу S^{n-1} : $\sum_{k=1}^n p_k^2 = 1$, а координата w — полуось $0 < w < \infty$.

Гамильтонова система (5.2) в координатах W_1 и времени τ_1 :

$$\frac{d\tau_1}{dt} = \frac{(\alpha V^{1-\gamma}(q_i) + (3GM/8)U(q_i))^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^n q_k^2\right)^{1/2} V(y)} \quad (5.5)$$

имеет следующий вид:

$$\dot{\bar{p}}_i = (1-\gamma)(1-u) \left(-\frac{\partial V}{\partial y_i} - \frac{1}{2} \bar{p}_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \bar{p}_k \right) +$$

$$+ u \frac{V(y)}{U(y)} \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{1}{2} \bar{p}_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_k} \bar{p}_k \right),$$

$$\dot{y}_i = V(y) \left(\bar{p}_i - y_i \sum_{k=1}^n \bar{p}_k y_k \right), \quad (5.6)$$

$$\dot{u} = u(1-u) \left(\frac{V(y)}{U(y)} \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_k} \bar{p}_k - (1-\gamma) \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \bar{p}_k \right).$$

Эта же система в координатах W_2 и времени τ_2 :

$$\frac{d\tau_2}{dt} = \frac{\left(\sum_{k=1}^n P_k^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^n q_k^2\right)^{1/2} V(y)} \quad (5.7)$$

принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= (1 - \gamma)w(1 - u) \left(-\frac{\partial V}{\partial y_i} + p_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k \right) + \\ &\quad + wu \frac{V(y)}{U(y)} \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} - p_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_k} p_k \right), \\ \dot{y}_i &= V(y) \left(p_i - y_i \sum_{k=1}^n p_k y_k \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u(1 - u) \left(\frac{V(y)}{U(y)} \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_k} p_k - (1 - \gamma) \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k \right), \\ \dot{w} &= w \left((1 - \gamma)(1 - u)(1 + 2w) \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k + \right. \\ &\quad \left. + u(1 - 2w) \frac{V(y)}{U(y)} \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_k} p_k \right). \end{aligned}$$

Отметим, что в согласии с определением координат y_i и p_i системы (5.6) и (5.8) рассматриваются лишь на подмногообразиях

$$\sum_{k=1}^n y_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n p_k^2 = 1.$$

Область фазового пространства S_1 , в которой определена система (5.2), в координатах W_1 , W_2 задается условиями $w > 0$, $0 < u < 1$, $V(y_i) > 0$. Добавим к этой области границу Γ , состоящую из четырех компонент, которые определяются следующими условиями: Γ_w : $w = 0$; Γ_0 : $u = 0$; Γ_1 : $u = 1$; Γ_2 : $V(y_i) = 0$. Обозначим через S замкнутое многообразие, полученное в результате такого добавления границы (на S имеем $w \geq 0$, $0 \leq u \leq 1$, $V(y_i) \geq 0$). На многообразии S определена динамическая система, совпадающая в координатах W_1 и W_2 с системами (5.6) и (5.8) соответственно. Очевидно, что эти системы непрерывно продолжают на компоненты границы Γ_w , Γ_0 , Γ_1 .

Далее, используя явный вид потенциала $U(q_i)$ (4.7), можно показать, что при $V(y) = \det \| Y_{jk} \| \rightarrow 0$ выражения $\frac{V(y)}{U(y)} \frac{\partial U}{\partial y_i} \rightarrow 0$, поэтому на компоненте границы Γ_2 ($V(y) = 0$) мы доопределяем

эти выражения нулем — их предельным значением. В результате такого доопределения система (5.6)—(5.8) непрерывно продолжается на компоненту границы Γ_2 .

Нетрудно проверить, что все компоненты границы Γ и их пересечения являются инвариантными подмногообразиями динамической системы в S , т. е. траектория, начинающаяся на некоторой компоненте границы Γ , остается на ней все время. Система, определенная таким образом на компоненте границы Γ_0 ($u = 0$), тождественна системе, описывающей движение газового негравитирующего эллипсоида, а система, определенная на компоненте границы Γ_1 ($u = 1$), тождественна системе, описывающей движение пылевого гравитирующего эллипсоида. Таким образом, динамическая система на многообразии S , описывающая движение гравитирующего газового эллипсоида, содержит в себе также и всю информацию об этих двух предельных видах движения.

§ 6. Колебательный режим движения с отрицательной энергией

I. Исследуем поведение системы (5.6) при $H \leq 0$ и $\gamma < 4/3$. Гамильтониан H в локальных координатах W_1 имеет вид

$$H = \frac{3GM}{8} \left(\frac{8\alpha}{3GM} \right)^{1/(4-3\gamma)} V(y)^{(1-\gamma)/(4-3\gamma)} \times \\ \times \left(\frac{U(y)}{u} \right)^{3(1-\gamma)/(4-3\gamma)} (1-u)^{-1/(4-3\gamma)} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{p}_k^2 + 1 - 2u \right). \quad (6.1)$$

Отсюда следует, что область $H \leq 0$ или $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{p}_k^2 \leq 2u - 1$ целиком лежит в координатах W_1 . Все особые точки динамической системы (5.6) при $H \leq 0$ и $\gamma < 4/3$ лежат на границе Γ и образуют четыре множества: K_1 , Φ_+ , Φ_- , L .

1. Особые точки K_1 ($u = 1$, $V(y) = 0$) — пересечение инвариантных подмногообразий Γ_1 ($u = 1$) и Γ_2 ($V(y) = 0$). Эти особые точки являются невырожденными (при $\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \bar{p}_k \neq 0$) и неустойчивыми и имеют два ненулевых собственных числа:

$$\lambda_1 = (1 - \gamma) \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \bar{p}_k \quad (\text{переменная } u),$$

$$\lambda_2 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \bar{p}_k \quad (\text{переменные } y_i).$$

Остальные $2n - 2$ нулевых собственных числа соответствуют направлениям, касающимся многообразия K_1 . Знаки собственных чисел λ_1 и λ_2 ввиду $\gamma > 1$ противоположны, т. е. точки K_1 имеют седловой тип. Удобно разбить множество K_1 на две части:

$$K_+ \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \bar{p}_k \geq 0 \right) \text{ и } K_- \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \bar{p}_k \leq 0 \right).$$

Каждая особая точка K_+ имеет одну входящую сепаратрису, идущую по многообразию Γ_2 , и одну выходящую сепаратрису, идущую по многообразию Γ_1 , а точки K_- — наоборот.

2. Особые точки Φ_ε ($u = 1$, $p_i = \varepsilon y_i$, $w = 1/2$, $\varepsilon = \pm 1$, $y_i = Y_{jk} = 3^{-1/2} Q_{jk}$), Q_{jk} — ортогональная матрица. Собственные числа системы (5.8) в особых точках Φ_ε имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2}{3} \varepsilon (4 - 3\gamma) \quad (\text{переменная } u), \\ \lambda_2 &= \frac{2}{3} \varepsilon \quad (\text{переменная } w), \\ \lambda_3 = \lambda_4 &= \frac{1}{3} \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{53}{20} \right)^{1/2} \right) > 0, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{\varepsilon}{2} - \left(\frac{53}{20} \right)^{1/2} \right) < 0, \\ \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 &= 0, \quad \lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{15} = \frac{1}{3} \left(-\frac{\varepsilon}{2} + i \left(\frac{43}{20} \right)^{1/2} \right), \\ \lambda_{16} = \lambda_{17} = \lambda_{18} &= \frac{1}{3} \left(-\frac{\varepsilon}{2} - i \left(\frac{43}{20} \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Первые шесть собственных чисел отвечают «диагонализуемым» сепаратрисам, т. е. решениям, имеющим вид $F(t) = Q \cdot D(t)$, где $D(t)$ — диагональная матрица. Согласно (6.2), особые точки Φ_ε являются невырожденными и неустойчивыми. При этом каждая точка трехмерного множества Φ_- имеет четырехмерную входящую сепаратрису, образованную диагонализуемыми решениями со сферически-симметричным характером сжатия, обобщающими точные сферически-симметричные решения, и одиннадцатимерную выходящую сепаратрису (лежащую на границе Γ_1 на нулевом уровне энергии). Поэтому сферически-симметричное сжатие является неустойчивым (уже в классе диагональных решений). Свойства особых точек Φ_+ тождественны свойствам особых точек Φ_- при противоположном направлении времени.

3. Вырожденные особые точки L : $V(y) = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y_i} = 0$, \bar{p}_i , u произвольны. В этих особых точках матрица Y_{jk} двукратно вырождена. Таким образом, у системы (5.6) при $H \leq 0$, $\gamma < 4/3$ нет устойчивых особых точек; это является одной из причин существования колебательного режима.

II. Как отмечалось выше, сепаратрисы особых точек K_+ , K_- лежат на инвариантных многообразиях Γ_1 и Γ_2 . Рассмотрим систему (5.6) на этих многообразиях.

1) Система (5.6) на многообразии Γ_1 ($u = 1$) описывает движение пылевого гравитирующего эллипсоида. В работах [164, 174] показано, что в процессе движения пылевого гравитирующего эллипсоида с отрицательной энергией H объем эллипсоида ($\det \| F_{jk} \|$) дважды обращается в нуль, т. е. расширение из сжатого состояния сменяется сжатием. При этом для почти всех решений эллипсоид в начальном и конечном состояниях сжат в диск, т. е. $d_1 = 0$, $d_2 \neq 0$, $d_3 \neq 0$. В координатах W_1 этот результат означает, что почти все траектории системы (5.6) на многообразии Γ_1 при $H < 0$ имеют начало и конец на многообразии особых точек K_1 ($V(y) = 0$, $u = 1$) или для почти каждой особой точки K_+ выходящая из нее сепаратриса идет в некоторую особую точку K_- .

2) Систему (5.6) на многообразии Γ_2 ($V(y) = 0$) можно проинтегрировать явно. Траектории этой системы во времени τ , определенном выражением $d\tau = 2^{1/2} (\gamma - 1) (1 - u) |\text{grad } V(y_i^0)| d\tau_1$, даются формулами

$$y_i = y_i^0, \quad \bar{p}_i = 2^{1/2} s_i \frac{\sin \tau - \sin \tau_0}{\cos \tau} + \bar{p}_i^0 \frac{\cos \tau_0}{\cos \tau}, \quad (6.3)$$

$$u = \frac{\cos^2 \tau_0}{\cos^2 \tau}.$$

Здесь $y_i^0, s_i = \frac{\text{grad } V(y_i^0)}{|\text{grad } V(y_i^0)|}$, τ_0, \bar{p}_i^0 — константы, причем $V(y_i^0) = 0$,

$\sum_{k=1}^n \bar{p}_k^0 s_k = 2^{1/2} \text{tg } \tau_0 < 0$, $|\tau_0| < \pi/2$, $\sum_{k=1}^n \bar{p}_k s_k = 2^{1/2} \text{tg } \tau$. Траектория (6.3) определена при $\tau_0 \leq \tau \leq -\tau_0$ и идет из особой точки $(\bar{p}_i^0, y_i^0, u = 1)$, принадлежащей K_- , в особую точку $(\bar{p}_i^1 = \bar{p}_i(-\tau_0), y_i^0, u = 1)$, принадлежащую K_+ (следовательно, все траектории (6.3) являются сепаратрисами особых точек K_+ и K_-). Легко видеть, что конечная точка траектории (6.3) $(\bar{p}_i^1 = \bar{p}_i(-\tau_0))$ получается из начальной точки (\bar{p}_i^0) путем отражения ее в плоскости, касательной к поверхности $V(y_i) = 0$ в точке (y_i^0) .

III. Полученные результаты приводят к следующей сепаратрисной диаграмме:

$$\dots \rightarrow K_+ \xrightarrow{\text{I}} K_- \xrightarrow{\text{II}} K_+ \xrightarrow{\text{I}} K_- \xrightarrow{\text{II}} \dots \quad (6.4)$$

Здесь показанные стрелками отображения обозначают переход по сепаратрисе из ее начальной точки в конечную. Отображения I и II осуществляются сепаратрисами, идущими по многообразиям

Γ_1 и Γ_2 соответственно. Сепаратрисные переходы между множествами K_+ , K_- и Φ_ε , L не показаны в диаграмме (6.4) ввиду того, что для почти всех особых точек K_+ , K_- вся бесконечная последовательность отображений (6.4) не выводит за пределы множеств K_+ , K_- .

Бесконечная последовательность сепаратрис, определенная диаграммой (6.4), является аппроксимацией траекторий системы (5.6) при больших отрицательных энергиях H , а также при $\beta = \frac{8\alpha}{3GM} \rightarrow 0$. Действительно, функция H (см. (6.1)) ограничена снизу на многообразии S везде, кроме компонент границы Γ_1 ($u = 1$) и Γ_2 ($V(y) = 0$), где $H \rightarrow -\infty$. Поэтому траектории системы (5.6) с большой отрицательной энергией H все время остаются в малой окрестности многообразий Γ_1 и Γ_2 (это же верно и при любых $H < 0$, но $\beta \rightarrow 0$; см. (5.3), определение координаты u). Следовательно, эти траектории движутся вдоль траекторий системы (5.6) на многообразиях Γ_1 и Γ_2 , т. е. общая траектория системы (5.6) движется вдоль последовательности сепаратрис особых точек K_+ , K_- .

Полученная аппроксимация траекторий системы (5.6) последовательностью сепаратрис (6.4) доказывает, что общее движение гравитирующего газового эллипсоида с большой отрицательной энергией H или с малым параметром β имеет пульсирующий, колебательный характер. Действительно, согласно аппроксимации (6.4), траектория периодически оказывается в окрестности особых точек K_+ , K_- , где $\det Y_{jk} = V(y_i) = 0$, т. е. эллипсоид периодически оказывается сжатым в диск. Кроме того, из уравнения

$$\frac{dV(q_i)}{d\tau_1} = V(q_i) \sum_{k=1}^n \frac{\partial V(y)}{\partial y_k} \bar{p}_k \quad (6.5)$$

следует, что объем эллипсоида $\det \|F_{jk}\| = V(q_i)$ при движении траектории системы (5.6) вдоль сепаратрисного перехода I достигает максимума, а при движении траектории вдоль сепаратрисного перехода II (см. (6.4)) $\det \|F_{jk}\|$ достигает минимума. Следовательно, изменение плотности ρ газа, заполняющего эллипсоид, $\rho = \frac{3M}{4\pi \det \|F_{jk}\|}$ также имеет колебательный характер. Период каждой пульсации эллипсоида в силу соотношения (см. (5.5))

$$dt = d\tau_1 |H|^{-3/2} \left(\frac{8\alpha}{3GM}\right)^{1/(1-\gamma)} \left(\frac{3GM}{8}\right)^{(2-\gamma)/(1-\gamma)} \frac{V(y)U(y)}{u} \times \\ \times \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{p}_k^2 + 1 - 2u \right|^{3/2} \quad (6.6)$$

при $H \rightarrow -\infty$ становится сколь угодно малым.

Из уравнения состояния идеального газа

$$p = \rho RT$$

и (4.3) получаем выражение для температуры:

$$T = \alpha (\gamma - 1) R^{-1} (1 - a^2)^{\gamma-1} (F), \quad (6.7)$$

где R — газовая постоянная. Очевидно, пульсации объема газа сопровождаются колебаниями его температуры, а также и других физических параметров газа. Константа α определяется начальной температурой в центре эллипсоида.

Описанное пульсирующее движение эллипсоида при $H \rightarrow -\infty$ происходит в состоянии сильного сжатия, поскольку величина

$$\begin{aligned} d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 &= \sum_{k=1}^n q_k^2 = \\ &= \left(\frac{3GM}{8\alpha} \right)^{2/(4-3\gamma)} \left(U(y) \frac{1-u}{u} \right)^{2/(4-3\gamma)} (V(y))^{2(\gamma-1)/(4-3\gamma)} \end{aligned} \quad (6.8)$$

стремится к нулю при $H \rightarrow -\infty$ (т. е. или $V(y) \rightarrow 0$, или $u \rightarrow 1$).

Сепаратрисная аппроксимация (6.4) означает, что асимптотическое движение траекторий системы (5.6) в координатах y_i при $H \rightarrow -\infty$ или $\beta \rightarrow 0$ происходит следующим образом:

1) В области $V(y_i) > 0$ движение происходит по траекториям, соответствующим пылевому гравитирующему эллипсоиду. Такая траектория в общем случае пересекается с поверхностью $V(y_i) = 0$ в некоторой точке y_i^0 (переход I).

2) В точке пересечения траектория упруго отражается от поверхности $V(y_i) = 0$ (переход II; см. (6.3)).

3) Затем движение снова происходит по траектории, соответствующей пылевому гравитирующему эллипсоиду, до следующего пересечения с поверхностью $V(y_i) = 0$ и т. д.

Таким образом, можно сказать, что модель колебательного режима движения гравитирующего газового эллипсоида является многомерный бильярд в области $\det \| Y_{jk} \| = V(y_i) \geq 0$ на восьмимерной сфере $S^8 \left(\sum_{j,k=1}^3 Y_{jk}^2 = 1 \right)$ с упруго отражающей гра-

ницей $\det \| Y_{jk} \| = 0$. Причем между соударениями с границей точка движется по траекториям, описывающим движение пылевого гравитирующего эллипсоида. Наличие газодинамического давления проявляется в свойстве упругого отражения траектории от границы $\det \| Y_{jk} \| = 0$.

§ 7. О невозможности коллапса гравитирующего газового эллипсоида при наличии вращения газа

В данном параграфе мы получим (при $\gamma < 4/3$) оценки сверху и снизу для полуосей эллипсоида d_i для движения с отрицательной энергией

$$H = \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{F} \dot{F}^t + \frac{\alpha}{(\det F)^{\gamma-1}} - \frac{3}{2} GM \int_0^{\infty} ((d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s))^{-1/2} ds \quad (7.1)$$

и ненулевыми интегралами J и K (1.12). Оценим сначала интеграл энергии H (7.1). Матрицу F представим в виде (4.4): $F = Q_1 D Q_2$. Тогда $F^t = Q_2^t D Q_1^t$. Введем кососимметричные матрицы A и B :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= -Q_1 A, & \dot{Q}_2 &= B Q_2, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\beta_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

В этих обозначениях получаем

$$\dot{F} = Q_1 (-AD + \dot{D} + DB) Q_2, \quad \dot{F}^t = Q_2^t (-BD + \dot{D} + DA) Q_1^t.$$

Первые интегралы J и K имеют вид

$$J = F \dot{F}^t - \dot{F} F^t = Q_1 j Q_1^t, \quad K = F^t \dot{F} - \dot{F}^t F = Q_2^t k Q_2,$$

где

$$j = -2DBD + D^2 A + AD^2, \quad k = -2DAD + D^2 B + BD^2. \quad (7.3)$$

Трехмерные векторы (или кососимметричные матрицы) j и k получаются из постоянных векторов J и K с помощью ортогонального поворота (на Q_1^t и Q_2 соответственно), и поэтому

$$|j| = |J|, \quad |k| = |K|.$$

Равенства (7.3) в координатной записи принимают вид

$$\begin{aligned} j_l &= \alpha_l (d_m^2 + d_n^2) - 2d_m d_n \beta_l, \\ k_l &= \beta_l (d_m^2 + d_n^2) - 2d_m d_n \alpha_l, \quad (m, n, l) = (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \frac{j_l (d_m^2 + d_n^2) + 2k_l d_m d_n}{(d_m^2 - d_n^2)^2}, \\ \beta_l &= \frac{k_l (d_m^2 + d_n^2) + 2j_l d_m d_n}{(d_m^2 - d_n^2)^2}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Кинетическая энергия газа T имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \text{Tr} (\dot{F} \dot{F}^t) = \frac{1}{2} \text{Tr} (\dot{D}^2 - A^2 D^2 - B^2 D^2 + 2ADBD).$$

Используя формулы (7.2) и (7.4) получаем

$$2T = \sum_{i=1}^3 \dot{d}_i^2 + \sum_{l \neq m \neq n}^3 \frac{(j_l^2 + k_l^2)(d_m^2 + d_n^2) + 4j_l k_l d_m d_n}{(d_m^2 - d_n^2)^2}. \quad (7.5)$$

Кинетическую энергию T , очевидно, можно представить в виде

$$2T = \sum \dot{d}_i^2 + \sum_{l \neq n \neq m} \frac{(d_m - d_n)^2 (j_l^2 + k_l^2) + 2d_m d_n (j_l + k_l)^2}{(d_m - d_n)^2 (d_m + d_n)^2}. \quad (7.6)$$

Пусть $d_1 < d_2 < d_3$; тогда из (7.6) следует

$$T > \frac{1}{8d_3^2} (|J|^2 + |K|^2). \quad (7.7)$$

Оценим интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{ds}{((d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s))^{1/2}} = \frac{1}{d_3} \int_0^{\infty} \frac{ds}{((\delta_1^2 + s)(\delta_2^2 + s)(1 + s))^{1/2}},$$

где $\delta_1 = d_1/d_3$, $\delta_2 = d_2/d_3$. Очевидно,

$$(\delta_1^2 + s)(\delta_2^2 + s) = (\delta_1 \delta_2)^2 + (\delta_1^2 + \delta_2^2)s + s^2 > (\delta_1 \delta_2 + s)^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{d_3} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(\delta_1 \delta_2 + s)(1 + s)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{d_3} \left(\int_0^y \frac{ds}{(\delta_1 \delta_2 + s)(1 + s)^{1/2}} + \int_y^{\infty} \frac{ds}{(\delta_1 \delta_2 + s)(1 + s)^{1/2}} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{d_3} \left(\int_0^y \frac{ds}{(\delta_1 \delta_2 + s)} + \int_y^{\infty} \frac{ds}{s(1 + s)^{1/2}} \right) = \\ &= \frac{1}{d_3} \left(\ln \frac{\delta_1 \delta_2 + y}{\delta_1 \delta_2} + \ln \frac{\sqrt{1 + y} + 1}{\sqrt{1 + y} - 1} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{d_3} \left(\ln(1 + y) \frac{\sqrt{1 + y} + 1}{\sqrt{1 + y} - 1} - \ln \delta_1 \delta_2 \right). \end{aligned}$$

Минимум первого слагаемого достигается при $y = (1 + \sqrt{5})/2$.

Отсюда получаем оценку

$$I \leq \frac{1}{d_3} (C_1 - \ln \delta_1 \delta_2), \quad C_1 = 5 \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (7.8)$$

С учетом (7.7) и (7.8) получаем оценку интеграла энергии H (7.1):

$$0 > H > \frac{|J|^2 + |K|^2}{8d_3^2} + \frac{\alpha}{d_3^{3(\gamma-1)}(\delta_1\delta_2)^{\gamma-1}} - \frac{3GM}{2} \frac{1}{d_3} (C_1 - \ln \delta_1\delta_2).$$

Умножив это неравенство на $2d_3/3GM$, получаем

$$\frac{A_0^2}{d_3} + \frac{\beta d_3^{4-3\gamma}}{x^{\gamma-1}} - (C_1 - \ln x) < 0, \tag{7.9}$$

где

$$A_0^2 = \frac{|J|^2 + |K|^2}{12GM}, \quad \beta = \frac{2\alpha}{3GM}, \quad x = \delta_1\delta_2.$$

Из неравенства (7.9) после отбрасывания первого слагаемого следует неравенство

$$d_3^{4-3\gamma} < C_2 \frac{\ln z}{z}, \tag{7.10}$$

где

$$C_2 = \frac{\exp(C_1(\gamma-1))}{\beta(\gamma-1)}, \quad z = \frac{\exp(C_1(\gamma-1))}{x^{\gamma-1}} > 1.$$

Поскольку $(\ln z)/z < e^{-1}$, то неравенство (7.10) определяет верхнюю оценку для d_3 :

$$d_3 < \left(\frac{\exp(C_1(\gamma-1)) - 1}{\beta(\gamma-1)} \right)^{1/(4-3\gamma)} = C_3. \tag{7.11}$$

Для получения нижней оценки величины $x = \delta_1\delta_2$ преобразуем (7.9) (разделив на d_3) к следующему виду:

$$\left(\frac{A_0}{d_3} - \frac{C_1 - \ln x}{2A_0} \right)^2 - \left(\frac{C_1 - \ln x}{2A_0} \right)^2 + \frac{\beta}{d_3^{3(\gamma-1)}x^{\gamma-1}} < 0.$$

Отсюда, отбрасывая первое слагаемое и используя оценку (7.11), получаем неравенство

$$D_0 < \frac{\ln z_1}{z_1}, \tag{7.12}$$

где

$$D_0 = \frac{(\gamma-1)\beta^{1/2} \exp(-C_1(\gamma-1)/2)}{C_3^{3(\gamma-1)/2}} A_0, \quad z_1 = \frac{\exp(-C_1(\gamma-1)/2)}{x^{(\gamma-1)/2}}. \tag{7.13}$$

Из неравенства (7.12) следует, что $D_0 < e^{-1}$ — ограничение величины интегралов J и K для движений с отрицательной энергией.

Из (7.12) получаем $D_0 z_1 < \ln D_0 z_1 - \ln D_0 < e^{-1} D_0 z_1 - \ln D_0$.

Следовательно, $z_1 < \frac{e}{e-1} \frac{|\ln D_0|}{D_0}$. Отсюда получаем оценку снизу

для x :

$$x > eC_1 \left(\frac{e-1}{e} \frac{D_0}{|\ln D_0|} \right)^{2/(\gamma-1)} = D_1. \quad (7.14)$$

Переходя к выводу из (7.14) нижней границы для d_1, d_2 , укажем нижнюю границу для d_3 . Из неравенства (7.9), отбрасывая второе слагаемое, получаем

$$d_3 > \frac{A_0^2}{\ln[(\exp C_1)/x]}.$$

Используя оценку снизу для x (7.14), находим

$$d_3 > \frac{\gamma-1}{2} \frac{A_0^2}{\ln[(e/(e-1))(\ln D_0)/D_0]}. \quad (7.15)$$

Теперь из (7.14) и (7.15) легко следует оценка снизу для полуосей эллипсоида:

$$\begin{aligned} d_2 > d_1 &= \frac{d_1}{d_3} d_3 \geq x d_3 > \\ &> eC_1 \left(\frac{e-1}{e} \frac{D_0}{|\ln D_0|} \right)^{2/(\gamma-1)} \frac{A_0^2}{2/(\gamma-1) |\ln[(e-1)/e] (D_0/|\ln D_0|)]}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Выведенные неравенства (7.11) и (7.16) определяют (при $\gamma < 4/3$) двусторонние оценки полуосей эллипсоида d_i для движения с отрицательной энергией H и $|J|^2 + |K|^2 \neq 0$ и доказывают невозможность коллапса эллипсоида при наличии вращения газа. Движение газового эллипсоида при $H \rightarrow -\infty$, как показано в § 6, происходит в колебательном режиме в состоянии сильного сжатия, однако, как следует из вышеизложенного, объем эллипсоида (при наличии вращения газа) остается ограниченным снизу.

§ 8. Колебательный режим движения с положительной энергией

I. Рассмотрим поведение динамической системы на многообразии S при $H \geq 0$, $\gamma > 4/3$. Особыми точками системы (5.6) в координатах W_1 являются множества $K_1 = K_+ \cup K_-$, Φ_+ , Φ_- , L , свойства которых те же, что и при $H \leq 0$ (см. § 6). Перечислим особые точки, которые не покрыты координатами W_1 , т. е. лежат на инвариантном многообразии Γ_w ($w = 0$) в координатах W_2 , и укажем собственные числа системы (5.8) в этих особых точках.

1) $M_{1\epsilon}$: $u = 1$, $w = 0$, $p_i = \epsilon y_i$, $\epsilon = \pm 1$.

Особые точки M_{1-} являются отталкивающими, а особые точки M_{1+} являются притягивающими.

$$2) M_{0\varepsilon}: u = 0, \quad w = 0, \quad p_i = \varepsilon y_i, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Это невырожденные и неустойчивые особые точки.

$$3) N_0: u = 0, \quad w = 0, \quad V(y_i) = 0.$$

В особых точках N_0 имеются три ненулевых собственных числа:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\gamma - 1) \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k \quad (\text{переменная } w), \\ \lambda_2 &= (\gamma - 1) \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k \quad (\text{переменная } u), \\ \lambda_3 &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k \quad (\text{переменные } y_i). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Отсюда следует, что особые точки N_0 при $\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k \neq 0$ невырожденные и неустойчивые.

$$4) N_1: u = 1, \quad w = 0, \quad V(y_i) = 0.$$

Эти особые точки являются границей (при $w \rightarrow 0$) множества особых точек K_1 (см. § 6) и, как и точки K_1 , имеют два ненулевых собственных числа противоположных знаков:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (1 - \gamma) \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k \quad (\text{переменная } u), \\ \lambda_2 &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k \quad (\text{переменные } y_i). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Удобно разбить каждое из множеств N_0 и N_1 на две части: N_{0-} , N_{1-} (здесь $\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k \leq 0$) и N_{0+} , N_{1+} (здесь $\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k \geq 0$). Легко видеть, что сепаратрисы неустойчивых особых точек N_{0-} , N_{0+} лежат на компоненте границы Γ_w ($w = 0$) и на угле границы $\Gamma_0 \cap \Gamma_2$ ($u = 0$, $V(y_i) = 0$), а сепаратрисы неустойчивых особых точек N_{1-} , N_{1+} лежат на углах границы $\Gamma_w \cap \Gamma_1$ ($w = 0$, $u = 1$) и $\Gamma_w \cap \Gamma_2$ ($w = 0$, $V(y_i) = 0$).

5) Вырожденные особые точки $L_1: w = 0$, $V(y) = 0$, $\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k = 0$, координата u произвольна. Множество L_1 имеет своими границами пересечение $N_{0-} \cap N_{0+}$ (при $u = 0$) и $N_{1-} \cap N_{1+}$ (при $u = 1$).

II. Переходя к построению сепаратрисной диаграммы при $H \geq 0$, отметим, что сепаратрисы неустойчивых особых точек N_{0e} , N_{1e} , K_e лежат на следующих инвариантных подмногообразиях: Γ_1 , Γ_2 , Γ_w , $\Gamma_0 \cap \Gamma_2$.

Система (5.6)–(5.8) на многообразии Γ_1 , как уже отмечалось, описывает движение пылевого гравитирующего эллипсоида; этот вид движения изучен в работах [163–165, 174]. Система (5.6) на многообразии Γ_2 ($V(y) = 0$) при $u \neq 0$ проинтегрирована явно (см. (6.3)). Систему (5.8) на многообразиях Γ_w и $\Gamma_0 \cap \Gamma_2$ также можно явно проинтегрировать.

1) Траектории системы (5.8) на многообразии Γ_w ($w = 0$) имеют вид

$$p_i = p_i^0, \quad w = 0, \quad y_i = y_i^0 \frac{\text{ch } \tau_0}{\text{ch } \tau} + p_i^0 \frac{\text{sh } \tau - \text{sh } \tau_0}{\text{ch } \tau}, \quad (8.3)$$

$$u = \frac{C (\text{ch } \tau)^{3\gamma-4} U(y_i) (V(y_i))^{\gamma-1}}{1 + C (\text{ch } \tau)^{3\gamma-4} U(y_i) (V(y_i))^{\gamma-1}}.$$

Здесь p_i^0 , y_i^0 , τ_0 , C — константы, причем $\text{th } \tau_0 = \sum_{k=1}^n p_k^0 y_k^0$. Время τ связано с τ_2 по формуле $d\tau = V(y_i) d\tau_2$. Траектория (8.3) в координатах y_i при $\tau > \tau_0$ движется по дуге большого круга на единичной сфере S^{n-1} , проходящего через точки y_i^0 и p_i^0 . Концы траектории (8.3) лежат на множествах особых точек M или N , т. е. каждая траектория является сепаратрисой некоторой особой точки. На угле границы $\Gamma_w \cap \Gamma_2$ ($w = 0$, $V(y) = 0$) лежат траектории, вдоль которых изменяется только координата u (от 0 до 1).

2) Траектории системы (5.8) на многообразии $\Gamma_0 \cap \Gamma_2$ ($u = 0$, $V(y) = 0$) имеют следующий вид:

$$y_i = y_i^0, \quad p_i = p_i^0 \frac{\text{ch } \tau_0}{\text{ch } \tau} + s_i^0 \frac{\text{sh } \tau - \text{sh } \tau_0}{\text{ch } \tau}, \quad (8.4)$$

$$w = \frac{\text{ch}^2 \tau_0 - \text{ch}^2 \tau}{2 \text{ch}^2 \tau}.$$

Здесь y_i^0 , p_i^0 , $s_i^0 = \frac{\text{grad } V(y_i^0)}{|\text{grad } V(y_i^0)|}$ — константы, причем

$$\sum_{k=1}^n p_k^0 s_k^0 = \text{th } \tau_0 < 0, \quad \sum_{k=1}^n p_k s_k^0 = \text{th } \tau. \quad (8.5)$$

Время τ в (8.4) определено выражением $d\tau = d\tau_2 w (\gamma - 1) \times |\text{grad } V(y_i^0)|$. Траектория (8.4) имеет начальную точку $(p_i^0, y_i^0,$

$w = 0, u = 0$) при $\tau = \tau_0$ на N_{0-} , конечная точка этой траектории $(p_i(\tau), \tau = -\tau_0, y_i^0, w = 0, u = 0)$ в силу (8.5) лежит на N_{0+} . Конечная точка $p_i(-\tau_0)$ получается из начальной точки (p_i^0) отражением в плоскости, касательной к поверхности $V(y_i) = 0$ в точке (y_i^0) . Максимальное значение w вдоль траектории (8.4) достигается при $\tau = 0$ и равно

$$w_* = \frac{\text{ch}^2 \tau_0 - 1}{2} = \frac{\left(\sum_{k=1}^n p_k^0 s_k^0\right)^2}{2\left(1 - \left(\sum_{k=1}^n p_k^0 s_k^0\right)^2\right)}. \quad (8.6)$$

Результаты интегрирования сепаратрис собраны в сепаратрисной диаграмме (табл. 7), где использованы следующие обозначения:

а) В заполненном квадрате символ a_i^k означает сепаратрису, идущую из множества особых точек в верхней строке, в множество особых точек в левом столбце, число перед символом a_i^k есть полная размерность этой сепаратрисы. Пустой квадрат означает отсутствие сепаратрисы. Цифры над буквами в верхней строке означают размерность множества особых точек (напомним, что размерность многообразия S равна 18).

б) Буквой S_1 обозначены инвариантные подмногообразия в физической области многообразия S , на которые, вообще говоря, могут наматываться некоторые сепаратрисы особых точек M_{1e} .

Особые точки Φ_e, L, L_1 не включены в сепаратрисную диаграмму ввиду того, что их сепаратрисы имеют меру нуль в пространстве всех сепаратрис и для почти всех остальных особых точек бесконечная итерация отображений, определенных диаграммой табл. 7, не выводит за рамки этой диаграммы.

Сепаратрисная диаграмма для случая $H \geq 0, \gamma < 4/3$ отличается от табл. 7 некоторым изменением сепаратрис особых точек M_{0e}, M_{1e} и включением неустойчивых положений равновесия P , лежащих в физической области S_1 . Описываемый ниже колебательный режим движения эллипсоида в равной степени относится и к случаю $\gamma \leq 4/3, H \geq 0$.

III. Согласно сепаратрисной диаграмме табл. 7, на границе Γ имеются следующие последовательности сепаратрис:

$$M_{1-} \xrightarrow{a_7^1} N_{0-} \xrightarrow{a_8^7} N_{0+} \rightarrow \dots \rightarrow N_{0+} \xrightarrow{a_2^8} M_{1+}. \quad (8.7)$$

Покажем, что имеются последовательности (8.7), в которых число переходов между множествами N_{0-} и N_{0+} сколь угодно велико. Возьмем точку (y_i^0) на поверхности $V(y_i) = 0$. Пусть n^i — нормаль и l — касательная плоскость к поверхности $V(y_i) = 0$

Таблица 7

Сепаратрисная диаграмма динамической системы (5.8) при $H \geq 0$, $\gamma > 4/3$

| | 8 M_{1-} | 8 M_{1+} | 16 K_- | 16 K_+ | 15 N_{1-} | 15 N_{1+} | 15 N_{0-} | 15 N_{0+} | 8 M_{0-} | 8 M_{0+} | S_1 |
|----------|---------------|---------------|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|------------|
| M_{1-} | | | | | | | | | | | |
| M_{1+} | $18a_2^1$ | | | $17a_2^4$ | | $16a_2^6$ | | $17a_2^8$ | | $9a_2^{10}$ | a_2^{11} |
| K_- | $17a_3^1$ | | | $17a_3^4$ | | | | | | | |
| K_+ | | | $17a_4^3$ | | | | | | | | |
| N_{1-} | $16a_5^1$ | | | | | $16a_5^6$ | | | | | |
| N_{1+} | | | | | | | $16a_6^8$ | | | | |
| N_{0-} | $17a_7^1$ | | | | $16a_7^5$ | | | $17a_7^8$ | $16a_7^9$ | | |
| N_{0+} | | | | | | | $16a_8^7$ | | | | |
| M_{0-} | $9a_9^1$ | | | | | | | | | | |
| M_{0+} | | | | | | | | $16a_{10}^8$ | $17a_{10}^9$ | | |
| S_1 | a_{11}^1 | | | | | | | | | | |

в точке (y_i^0) . Проведем через нормаль n^i двумерную плоскость l' и выберем направление нормали таким, чтобы кривая, вырезанная на плоскости l' поверхностью $V(y_i) = 0$, была выпукла в сторону нормали n^i . Пусть точка (p_i^0) лежит в плоскости l' по отрицательную сторону от нормали на малом расстоянии h от плоскости l . Точка $P_0 = (p_i^0, y_i^0, w = 0, u = 0)$ лежит на N_{0-} . Сделанный выбор точки P_0 предполагает наличие вращения эллипсоида. Точка $P_1 = a_8^7(P_0)$, согласно определению отображения a_8^7 (см. (8.4)), имеет координаты $(p_i^1, y_i^0, w = 0, u = 0)$, где точка (p_i^1) получается из (p_i^0) путем отражения в плоскости l . Очевидно, точка

P_i принадлежит N_{0+} . Точка $P_2 = a_7^8(P_1)$, в силу определения отображения a_7^8 (см. (8.3)), имеет координаты $(p_i^1, y_i^1, w = 0, u = 0)$, где точка (y_i^1) является точкой пересечения кратчайшей дуги большого круга на S^{n-1} , проходящего через точки (p_i^1) и (y_i^0) , с поверхностью $V(y_i) = 0$. Очевидно, что при малых h точка $P_2 = a_7^8 \circ a_8^7(P_0)$ сколь угодно близка к начальной точке P_0 (аналогичная ситуация поясняется рис. 39; см. § 2). Следовательно, при $h \rightarrow 0$ итерации отображения $a_7^8 \circ a_8^7$ в любом конечном числе приводят к близким точкам и поэтому соответствующая последовательность сепаратрис (8.7) содержит любое конечное число переходов между множествами N_{0-} и N_{0+} .

Переходы между множествами N_{0-} и N_{0+} в общем случае обрываются попаданием точки на множество $M_{1\pm}$, где $p_i = \varepsilon y_i$. Причиной этого является то, что при отображении $a_7^8 \circ a_8^7$ расстояние между точками $(p_i^{(k)})$ и $(y_i^{(k)})$ уменьшается. Отметим, что кроме циклических переходов между множествами N_{0-} , N_{0+} сепаратрисная диаграмма (табл. 7) содержит также циклические переходы между множествами K_- , K_+ и N_{0-} , N_{0+} , N_{1+} , N_{1-} . Однако при $w \rightarrow 0$ соответствующие последовательности сепаратрис стремятся к последовательностям (8.7).

Рассмотрим траекторию системы (5.8), выходящую из особой точки M_{1-} близко к компоненте границы Γ_w ($w = 0$). Такая траектория будет все время оставаться вблизи последовательности сепаратрис (8.7) и также попадет в притягивающие особые точки M_{1+} . Нахождению траектории системы (5.8) в окрестности особых точек M_{1-} и M_{1+} отвечают соответственно инерциальное сжатие газового эллипсоида из бесконечно разреженного состояния и инерциальное бесконечное расширение эллипсоида. Нахождение траектории в окрестности особых точек N_{0-} , N_{0+} (где $\det \| Y_{jk} \| = V(y_i) = 0$) означает, что эллипсоид сжат в диск вдоль собственного вектора матрицы Y_{jk} , поэтому переходам траектории между множествами N_{0-} и N_{0+} отвечает некоторый колебательный режим движения эллипсоида. Используя определения H и w , нетрудно получить, что

$$\det \| F_{jk} \| = V(q_i) = \left(\alpha \frac{1 + 2(1 - 2u)w}{2H(1 - u)w} \right)^{1/(\nu-1)}. \quad (8.8)$$

Из уравнения (6.5) следует, что при движении траектории системы (5.8) вдоль сепаратрисы a_8^7 объем эллипсоида $\det \| F_{jk} \|$ достигает минимума, который в силу (8.4) и (8.8) равен

$$\min \det \| F_{jk} \| = \left(\alpha \frac{1 + 2w_*}{2Hw_*} \right)^{1/(\nu-1)}, \quad (8.9)$$

где w_* определено (8.6). При движении траектории вдоль сепара-

трисы $a_7^8 \det \| F_{jk} \|$ достигает максимума, который согласно (8.3) и (8.8) может быть как угодно велик. Отметим, что при произвольной величине энергии $H > 0$ имеются траектории системы (5.8), достаточно близкие к последовательности сепаратрис (8.7). Отсюда следует, что при больших H имеются движения газа, в которых $\det \| F_{jk} \|$ колеблется от сколь угодно малого минимума (см. (8.9)) до сколь угодно большого максимума, при этом осцилляции плотности газа $\rho = \frac{3M}{4\pi \det \| F_{jk} \|}$ сколь угодно велики. Время осцилляций зависит от способа приближения траектории к последовательности сепаратрис (8.7).

Таким образом, мы доказали, используя сепаратрисную аппроксимацию (8.7), что при наличии вращения и $w \rightarrow 0$ (кинетическая энергия много больше потенциальной) имеются следующие движения газового гравитирующего эллипсоида:

1) первоначально газ сжимается из состояния бесконечного разрежения;

2) затем начинается колебательный режим: газ сколь угодно большое число раз сжимается и расширяется по изменяющимся направлениям, причем при больших энергиях H амплитуда осцилляций плотности сколь угодно велика;

3) колебательный режим заканчивается бесконечным расширением газа.

Отметим, что движение точки на многообразии S по последовательности сепаратрис (8.7) в координатах y_i представляет собой свободное движение точки по геодезическим на восьмимерной сфере S^8 в области $\det \| Y_{jk} \| \geq 0$, причем точка отражается от границы $\det \| Y_{jk} \| = 0$ по закону упругого отражения. В этом смысле математической моделью колебательного режима движения газа при наличии вращения является геодезический бильярд на сфере S^8 с упруго отражающей поверхностью $\det \| Y_{jk} \| = 0$. При отсутствии вращения газа (матрица Y_{jk} диагональна) поверхность $\det \| Y_{jk} \| = 0$ вырождается в три координатные плоскости и поэтому реализуются только три колебания — три последовательных сжатия и расширения эллипсоида по ортогональным осям.

Описанный колебательный режим может служить моделью движения облака расширяющегося и вращающегося газа, образовавшегося в результате взрыва вращающейся сверхновой звезды.

§ 9. Заключительные замечания

Приведем краткое описание найденных в данной главе колебательных режимов движения гравитирующего газового эллипсоида. Исследование движения гравитирующего газового эллипсоида, как показано в § 4, эквивалентно исследованию динамики

следующей лагранжевой системы, определенной в пространстве трехмерных матриц:

$$\frac{d^2 F_k^i(t)}{dt^2} = -\alpha \frac{\partial V^{1-\gamma}(F)}{\partial F_k^i} + \frac{3}{2} GM \frac{\partial U(F)}{\partial F_k^i}, \quad (9.1)$$

$$V(F) = \det F, \quad U(F) = \int_0^\infty ((d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s))^{-1/2} ds.$$

Если полуоси эллипсоида d_1, d_2, d_3 сравнимы друг с другом ($d_i \sim d$), то

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} GMU(F) &\sim \frac{3}{2} GMd^{-1}, & \frac{3}{2} GM \frac{\partial U(F)}{\partial F_k^i} &\sim d^{-2}, \\ \alpha V^{1-\gamma} &\sim \alpha d^{3(1-\gamma)}, & \alpha \frac{\partial V^{(1-\gamma)}}{\partial F_k^i} &\sim \alpha d^{3(1-\gamma)-1}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Эти простые оценки будут использованы ниже.

I. Колебательный режим расширения в вакуум вращающегося газового облака. Рассмотрим движение сильно расширившегося газового эллипсоида с полной энергией $E > 0$ и $\gamma > 1$, где

$$E = T + \alpha V^{1-\gamma}(F) - \frac{3}{2} GMU(F), \quad (9.3)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (\dot{F}_k^i)^2.$$

Здесь T — кинетическая энергия газа. Пусть

$$d_1, d_2, d_3 \sim d \gg \frac{GM}{T} + \left(\frac{\alpha}{T}\right)^{1/3(\gamma-1)}. \quad (9.4)$$

Тогда изменение скорости $\Delta \left| \frac{dF_k^i}{dt} \right|$ при движении на отрезке траектории длины $\sim d$ допускает, после подстановки (9.4) в (9.2) и (9.1), следующую оценку:

$$\Delta \left| \frac{dF_k^i}{dt} \right| \sim \left| \frac{d^2 F_k^i}{dt^2} \right| \frac{d}{\sqrt{T}} \ll \sqrt{T} \sim \left| \frac{dF_k^i}{dt} \right|.$$

Поэтому при условиях (9.4) коэффициенты $F_k^i(t)$ в первом приближении изменяются по прямым:

$$F_k^i(t) = A_k^i t + B_k^i. \quad (9.5)$$

При подходящем выборе констант A_k^i, B_k^i прямая (9.5) при некотором $t = t_0$ пересекает поверхность $L: V(F) = 0$, т. е. эллип-

соид при $t \rightarrow t_0$ сжимается в диск вдоль некоторого направления. Однако при этом давление, препятствующее сжатию, растет неограниченно, а скорости газа и гравитационные силы остаются конечными; поэтому сжатие сменяется расширением. Такая смена происходит как упругое отражение прямой (9.5) от поверхности L в точке пересечения при $t = t_0$. Затем коэффициенты $F_k^i(t)$ снова изменяются по прямой вида (9.5) с новыми константами $(A_k^i)^1$, $(B_k^i)^1$. Эта прямая снова может пересекаться с поверхностью L , что означает новое сжатие эллипсоида, и т. д. Таким образом, изменение коэффициентов $F_k^i(t)$ на всей оси времени t в первом приближении происходит по ломаным линиям, которые упруго отражаются от поверхности L в точках пересечения.

Используя тот факт, что L — сильно изогнутая поверхность, можно направить первоначальную прямую (9.5) так, чтобы построенная по ней ломаная имела сколь угодно большое (но конечное) число пересечений с этой поверхностью.

При изменении $F_k^i(t)$ вдоль любого отрезка ломаной объем эллипсоида ($V(F)$) достигает максимума, а затем убывает, т. е. газ находится в колебательном режиме. При этом амплитуда колебаний объема эллипсоида и плотности газа $\rho(t) = \frac{3M}{4\pi \det(F_k^i)}$ может быть сколь угодно большой. Очевидно, проведенные рассуждения справедливы и при $G = 0$, поэтому колебательный режим реализуется и при отсутствии гравитационного взаимодействия между частицами газа.

Колебательный режим обрывается, когда очередной отрезок ломаной при неограниченном продолжении не пересекается с поверхностью L ; в этом случае происходит бесконечное свободное расширение газа.

Для реализации колебательного режима необходимо наличие вращения газа, так как при отсутствии вращения (матрица $\|F_{ik}(t)\|$ диагональна) поверхность L вырождается в три координатные плоскости и ломаная имеет только три отражения, которым соответствуют три последовательных сжатия и расширения эллипсоида по ортогональным осям.

II. Колебательный режим движения с отрицательной энергией. Рассмотрим движение гравитирующего газового эллипсоида при $E < 0$, $\gamma < \frac{4}{3}$ в состоянии сильного сжатия. Пусть полуоси $d_i \sim d \ll (GM/\alpha)^{1/(4-3\gamma)}$. Тогда при $\gamma < \frac{4}{3}$ в силу (9.2) получаем

$$\left| \frac{3}{2} GM \frac{\partial U(F)}{\partial F_k^i} \right| \gg \alpha \left| \frac{\partial V^{1-\gamma}(F)}{\partial F_k^i} \right|.$$

Поэтому движение эллипсоида определяется гравитационными силами и, следовательно, аппроксимируется движением гравити-

рующего пылевого эллипсоида. Согласно [164], под действием гравитационных сил пылевой эллипсоид в общем случае сжимается в диск (т. е. $d_1 \rightarrow 0$, $d_2 \rightarrow C_2 > 0$, $d_3 \rightarrow C_3 > 0$ и $V(F) = d_1 d_2 d_3 \rightarrow 0$). Однако при наличии давления неограниченное сжатие эллипсоида в диск невозможно, так как скорости газа и гравитационные силы при таком сжатии остаются конечными, а давление, препятствующее сжатию, растет неограниченно. Поэтому сжатие в диск сменится расширением (такая смена происходит как упругое отражение вектора скорости $d\vec{F}_k/dt$ от поверхности L), в результате которого полуоси d_1 , d_2 , d_3 вновь станут сравнимы одна с другой, движение вновь будет определяться гравитационными силами и будет аппроксимироваться движением пылевого эллипсоида. Это приведет к новому сжатию эллипсоида в диск (возможно, вдоль другого направления), которое после упругого отражения вектора скорости от поверхности L снова сменится расширением, и так далее, до бесконечности.

Для справедливости описанной аппроксимации колебательного режима не обязательно сильное сжатие эллипсоида; достаточно, чтобы $\beta = 8\alpha/(3GM) \ll 1$ (это неравенство выполнено при низкой начальной температуре газа).

Приведенная аппроксимация колебательного режима является точной при сильном сжатии эллипсоида ($E \rightarrow -\infty$) или при $\beta \rightarrow 0$.

При этих значениях параметров единственными решениями системы (9.1), не обнаруживающими колебаний, являются решения со сферически-симметричным режимом сжатия [156]. Однако такой режим сжатия неустойчив. Поэтому, если на некотором отрезке времени движение эллипсоида близко к сферически-симметричному, то при дальнейшем движении эллипсоид уходит от этого режима и вновь начинаются колебания. Колебания объема эллипсоида сопровождаются колебаниями температуры и других физических параметров газа.

§ 1. Гамильтоновы возмущения цепочки Тода

В 1970 г. японский физик М. Тода при численном исследовании различных моделей взаимодействия атомов в кристаллической решетке обнаружил отсутствие стохастизации в системе частиц единичной массы на прямой, взаимодействие которых определяется потенциалом

$$V = \sum_i \exp(q_i - q_{i+1}),$$

где q_i — отклонение i -й частицы от положения равновесия [175]. В дальнейшем в этой задаче был найден ряд первых интегралов [176] и с помощью подбора подходящей $L - A$ -пары доказана [177, 178] полная интегрируемость цепочки Тода, которая в периодическом случае $q_i \equiv q_{i+n+1}$ имеет гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 + \sum_{i=1}^n \exp(q_i - q_{i+1}) + \exp(q_{n+1} - q_1). \quad (1.1)$$

Периодическая цепочка Тода изучалась также в работе [179] с помощью алгебро-геометрических методов.

Очевидно, что в реальной физической ситуации более правдоподобна реализация некоторого общего возмущения гамильтониана (1.1) — например, за счет включения парного взаимодействия между всеми частицами, а не только между ближайшими соседями, и за счет различия масс взаимодействующих частиц. В связи с этим представляется важным исследовать наиболее общие режимы динамики возмущений периодической цепочки Тода и выяснить характер симметрии, выделяющей вполне интегрируемую цепочку Тода среди ее общих неинтегрируемых возмущений ¹⁾.

¹⁾ В работе [180], независимой от работы автора [20], численными методами изучалась динамика системы из двух частиц с произвольными массами и потенциалом цепочки Тода. Результаты работы [180] указывают на наличие стохастизации траекторий при $H \gg 1$, что согласуется с результатами работы [20], полученными для более широкого класса возмущений цепочки Тода с произвольным числом частиц.

В данной главе эти вопросы решаются для произвольных возмущений цепочки Тода в классе гамильтоновых систем вида

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, & \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ H &= \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n a_{ij} p_i p_j + \sum_{k,l}^{n+1} b_{kl} \exp(\{\alpha_k, q\} + \{\alpha_l, q\}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ — векторы в n -мерном пространстве R^n , имеющие координаты $\alpha_k = (d_{k1}, \dots, d_{kn})$, q — вектор (q_1, \dots, q_n) . В R^n заданы два скалярных произведения (x, y) и $\{x, y\}$:

$$(x, y) = \sum_{i,j}^n a_{ij} x_i y_j, \quad \{x, y\} = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1.3)$$

Векторы α_k и квадратичные формы a_{ij} , b_{kl} удовлетворяют условиям A и B :

А. Для всякого вектора p в R^n

$$\max_k (\alpha_k, p) > 0.$$

В. Для всех k

$$(\alpha_k, \alpha_k) b_{kk} > 0.$$

Гамильтониан (1.1) принимает вид (1.2) после перехода к системе «центра масс», т. е. $p_1 + p_2 + \dots + p_{n+1} = 0$. Отметим, что гамильтоновы системы вида (1.2) возникают также в теории однородных космологических моделей. Например, однородная модель IX типа в пустом пространстве (на уровне $H = 0$) описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = 2 \sum_{i < j}^3 p_i p_j - \sum_{i=1}^3 p_i^2 + 2 \sum_{i < j}^3 \exp(q_i + q_j) - \sum_{i=1}^3 \exp(2q_i). \quad (1.4)$$

Вследствие очевидного сходства гамильтонианов (1.2) и (1.4) колебательные режимы в этих системах обнаруживают общие свойства и допускают единый вывод, приведенный ниже (в более общем случае), в § 4.

§ 2. Сепаратрисная аппроксимация колебательного режима

Для изучения гамильтоновой системы (1.2) методами качественной теории дифференциальных уравнений перейдем к координатам

$$r_k = \frac{Q_k}{G}, \quad s_i = \frac{p_i}{P}, \quad w = \frac{G^2}{P^2}, \quad (2.1)$$

где

$$Q_k = \exp(\{\alpha_k, q\}), \quad k = 1, \dots, n+1, \quad Q_k > 0, \\ P = (p_1^2 + \dots + p_n^2)^{1/2}, \quad G = (Q_1^2 + \dots + Q_{n+1}^2)^{1/2},$$

и сделаем замену времени $d\tau_1 = P dt$. Система (1.2) в координатах (2.1) и времени τ_1 принимает вид

$$\dot{r}_k = r_k \left(\sum_{i,j} d_{ki} a_{ij} s_j - \sum_{i,j,l} r_l^2 d_{li} a_{ij} s_j \right), \\ \dot{s}_i = w \left(- \sum_{k,l} b_{kl} (d_{ki} + d_{li}) r_k r_l + s_i \sum_{k,l,m} s_l b_{km} (d_{kl} + d_{ml}) r_k r_m \right), \quad (2.2) \\ \dot{w} = 2w \left(\sum_{i,j,k} r_k^2 (d_{ki} a_{ij} s_j) + w \sum_{i,k,l} s_i b_{kl} (d_{ki} + d_{li}) r_k r_l \right).$$

Эта система определена на $2n$ -мерном инвариантном многообразии

$$r_1^2 + \dots + r_{n+1}^2 = 1, \quad s_1^2 + \dots + s_n^2 = 1, \quad w \geq 0, \quad r_k \geq 0.$$

Очевидно, система (2.2) гладко продолжается на границу Γ многообразия V , где $w = 0$, $r_k = 0$, причем компоненты границы Γ являются инвариантными подмногообразиями системы (2.2).

В дальнейшем понадобится также преобразование системы (1.2) в координаты r_i, p_i, w :

$$\dot{r}_k = r_k \left(\sum_{i,j} d_{ki} a_{ij} p_j - \sum_{i,j,l} r_l^2 d_{li} a_{ij} p_j \right), \\ \dot{p}_i = - \sum_{k,l} b_{kl} (d_{ki} + d_{li}) r_k r_l P^2 w, \quad (2.3) \\ \dot{w} = 2w \left(\sum_{i,j,k} r_k^2 (d_{ki} a_{ij} p_j) + w \sum_{i,k,l} p_i b_{kl} (d_{ki} + d_{li}) r_k r_l \right).$$

Система (1.2) эквивалентна системе (2.3), рассматриваемой на инвариантном $2n$ -мерном подмногообразии

$$(wP^2)^{(c_1 + \dots + c_{n+1})/2} r_1^{c_1} \dots r_{n+1}^{c_{n+1}} = 1, \quad r_1^2 + \dots + r_{n+1}^2 = 1,$$

где набор чисел c_i определен условиями

$$c_1 \alpha_1 + \dots + c_{n+1} \alpha_{n+1} = 0, \quad c_1 + c_2 + \dots + c_{n+1} = c,$$

причем c можно считать нулем или единицей.

Система (2.2) имеет $n+1$ множество M_i ($i = 1, \dots, n$) особых точек. Каждое множество M_i является $(n-1)$ -мерной сферой и имеет координаты

$$r_k = \delta_{ki}, \quad w = 0, \quad s_1^2 + \dots + s_n^2 = 1.$$

Точка s на множестве M_k обозначается парой $\{s, k\}$.

Собственные числа системы (2.2) на многообразии V в особой точке $\{s, k\}$ следующие (в скобках указаны соответствующие соб-

ственные направления):

$$\begin{aligned}\lambda_l &= (\alpha_l, s) - (\alpha_k, s) \text{ (переменные } r_l; l = 1, \dots, n+1, l \neq k), \\ \lambda_n &= 2(\alpha_k, s) \text{ (переменная } w), \\ \lambda_{n+1} &= \dots = \lambda_{2n} = 0 \text{ (переменные } s_i).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Из условия A (§ 1) и (2.4) следует, что все особые точки M_k , кроме подмногообразий меньшей размерности, являются невырожденными и неустойчивыми (особая точка называется невырожденной, если число ее нулевых собственных чисел равно размерности множества M_k).

На каждом множестве M_k выделим два подмножества V_k и W_k :

$$\text{на } V_k \quad (\alpha_k, s) < 0,$$

$$\text{на } W_k \quad (\alpha_k, s) = \max_i (\alpha_i, s) > 0.$$

Сепаратрисы, выходящие (при $\tau_1 \rightarrow -\infty$) из точки $\{s^0, j\}$, принадлежащей множеству V_j , имеют вид

$$\begin{aligned}r_m(\tau_1) &= C_m \exp((\alpha_m, s^0) \tau_1) \left(\sum_l C_l^2 \exp(2(\alpha_l, s^0) \tau_1) \right)^{-1/2}, \\ w &\equiv 0, \quad s_i \equiv s_i^0, \quad C_m \geq 0.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Здесь m, l пробегает числа i , для которых $\lambda_i > 0$ (см. (2.1)); если же $\lambda_i < 0$, то $r_i \equiv 0$. Пусть $(\alpha_k, s^0) = \max_i (\alpha_i, s^0)$. Очевидно, все сепаратрисы (2.2), для которых $C_k > 0$, при $\tau_1 \rightarrow +\infty$ идут в особую точку $\{s^0, k\}$ на множестве W_k .

Из особой точки $\{s^0, k\}$, принадлежащей множеству W_k , согласно (2.4), выходит единственная сепаратриса \mathcal{L} , лежащая на инвариантном многообразии $r_i = \delta_{ik}$. Для интегрирования этой сепаратрисы удобно обратиться к системе (2.3), поскольку все траектории системы (2.2) (на многообразии $s_1^2 + \dots + s_n^2 = 1$) получаются из траекторий системы (2.3) при отображении

$$s_i = p_i/P. \quad (2.6)$$

Траектории системы (2.3) на многообразии $r_i = \delta_{ik}$ после замены времени $d\tau/dt = P^2 w$ легко интегрируются:

$$p_i = s_i^0 - \tau b_{kk} d_{ki}, \quad w(\tau) = \tau \frac{(\alpha_k, s^0) - \frac{\tau}{2} b_{kk} (\alpha_k, \alpha_k)}{\{s^0 - \tau b_{kk} \alpha_k, s^0 - \tau b_{kk} \alpha_k\}} \quad (2.7)$$

(при этом, вместо интегрирования уравнения (2.3) для w , удобно воспользоваться интегралом H (1.2)).

Траектория (2.7) при $\tau = \tau_* = 2(\alpha_k, s^0)/b_{kk}(\alpha_k, \alpha_k)$ ($\tau_* > 0$ согласно определению s^0 и условию B , § 1) входит в точку

$$p^1 = \tau_k(s^0) = s^0 - \frac{2(\alpha_k, s^0)}{(\alpha_k, \alpha_k)} \alpha_k, \quad w(\tau_*) = 0. \quad (2.8)$$

Очевидно, что отображение τ_k является отражением в плоскости, ортогональной (по метрике a_{ij}) к вектору α_k , и $(p^1, \alpha_k) = -(s^0, \alpha_k) < 0$. Сепаратриса \mathcal{L} , получающаяся из траектории (2.7) при отображении (2.6), при $\tau = \tau_1$ входит в особую точку, принадлежащую множеству V_k (поскольку $(p^1, \alpha_k) < 0$).

Проведенное интегрирование сепаратрис (2.5), (2.7) показывает, что сепаратрисы, выходящие из множеств особых точек V_k , W_i , снова входят в такие же множества. Поэтому существуют бесконечные последовательности, образованные сепаратрисами, идущими между этими особыми множествами:

$$\dots \rightarrow V_j \xrightarrow{I} W_k \xrightarrow{II} V_k \xrightarrow{I} W_i \xrightarrow{II} \dots \quad (2.9)$$

Траектория системы (2.2), начавшаяся в достаточно малой окрестности одного из особых множеств V_j , W_k , будет сколь угодно долго двигаться вдоль последовательности сепаратрис (2.9). Соответствующая траектория в исходных координатах q_i движется следующим образом: при переходе I (2.5) происходит движение с приблизительно постоянным направлением импульса p_i , это движение заканчивается, когда некоторое $Q_k \gg Q_i$ для всех l ; затем при переходе II (2.7) происходит эффективное «отражение» импульса, описываемое отображением (2.8); затем снова движение с постоянным направлением импульса и т. д.

Этот колебательный режим в случае положительно определенной метрики a_{ij} реализуется (асимптотически точно) при $H \gg 1$. Действительно, из условия A (§ 1) следует, что по крайней мере одно $Q_i > 1$, поэтому

$$w = \frac{G^2}{P^2} > \frac{1}{P^2}.$$

Далее, интеграл энергии H в координатах (2.1) имеет вид

$$H = \frac{1}{2} P^2 \left(\sum_{i,j} a_{ij} s_i s_j + w_i \sum_{k,l} b_{kl} r_k r_l \right). \quad (2.10)$$

Поскольку при сепаратрисных переходах I $w \ll 1$, то при положительно определенной метрике a_{ij} (без потери общности ее можно считать евклидовой) получаем $H \gg 1$. Отметим, что при этом из (2.10) следует также, что при переходах I не только направление, но и модуль импульса p_i по порядку величины не меняется. В случае индефинитной метрики a_{ij} , как показывает пример (1.4), колебательный режим реализуется и при $H = 0$.

Согласно (2.8), приближенно постоянные векторы направлений импульса s_N при последовательных переходах вдоль сепаратрис I (2.5) получаются один из другого действием отображения T :

$$s_{N+1} = T(s_N) = \frac{\tau_k(s_N)}{\{\tau_k(s_N), \tau_k(s_N)\}}. \quad (2.11)$$

где номер k определяется условием

$$(\alpha_k, s_N) = \max_i (\alpha_i, s_N), \quad (2.12)$$

а отображение τ_k , являющееся отражением в плоскости, ортогональной к вектору α_k , определено (2.8).

Отображение T для цепочки Тода (1.1) является периодическим — здесь векторы α_i являются корнями простой алгебры Ли типа A_n ($SL(n+1)$). Для гамильтоновой системы (1.2) отображение T будет периодическим, если группа Кокстера G , порожденная отражениями (2.8), конечна (если d — порядок группы G , то $T^d \cdot T^d = T^d$, но отображение T может быть необратимым). Все конечные группы Кокстера G известны [91] и, кроме трех исключительных случаев, являются группами Вейля простых алгебр Ли (при условии, что G не разлагается в произведение двух других групп). Исключениями являются две группы Кокстера в трехмерном и четырехмерном пространствах и бесконечная серия диэдральных групп (групп симметрий правильных многоугольников) в двумерном пространстве.

Свойство периодичности отображения T , отражающее глубокую алгебраическую симметрию гамильтониана (1.1), выделяет периодическую цепочку Тода среди ее общих возмущений (1.2). В общем случае (1.2) группа Кокстера G бесконечна и ее замыкание (при положительно определенной метрике a_{ij}) совпадает с ортогональной группой $O(n)$ и для общего вектора p множество $T^k(p)$ всюду плотно на сфере $(p, p) = \text{const}$. Общая гамильтонова система (1.2), по-видимому, не имеет никаких первых интегралов, кроме энергии H .

§ 3. Гамильтоновы системы, связанные с простыми алгебрами Ли

В данном параграфе указаны новые примеры гамильтоновых систем вида (1.2), для которых, как и для цепочки Тода (1.1), отображение T является периодическим и которые допускают представление в виде $L - A$ пары (и имеют вследствие этого большой набор первых интегралов). Построение этих систем использует теорию простых алгебр Ли \mathfrak{G} .

Суммируем необходимые в дальнейшем сведения о базисе Картана — Вейля e_{α_i}, h_k в \mathfrak{G} [91]. В картановской подалгебре H (H — максимальная коммутативная подалгебра в \mathfrak{G}) имеется набор векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, называемых корнями, и выбран некоторый базис h_1, \dots, h_n ($n = \dim H$ — ранг алгебры \mathfrak{G}). Векторы e_{α_i}, h_k образуют базис алгебры \mathfrak{G} и удовлетворяют коммута-

ЦИОННЫМ СООТНОШЕНИЯМ

$$\begin{aligned} [e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}] &= N_{\alpha_i \alpha_j} e_{\alpha_i + \alpha_j}, & [e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}] &= \alpha_i, \\ [h_k, e_{\alpha_i}] &= (h_k, \alpha_i) e_{\alpha_i}, & [h_k, h_j] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Скалярное произведение (x, y) определено формой Киллинга — Картана

$$(x, y) = \text{Tr} (\text{ad } x \circ \text{ad } y), \quad \text{ad } x (z) = [x, z].$$

Назовем набор корней $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ допустимым, если для всех $i, j \leq N$ вектор $\alpha_i - \alpha_j$ не является корнем; тогда

$$[e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = 0.$$

В каждой простой алгебре Ли \mathfrak{G} имеется один важный допустимый набор корней

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, -\Omega, \quad (3.2)$$

где ω_i — простые корни (все корни α_i являются целочисленными линейными комбинациями ω_k), а $\Omega = k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n$ — так называемый максимальный корень ($\Omega + l_1 \omega_1 + \dots + l_n \omega_n$ не является корнем при всех $l_i \geq 0$). Допустимыми являются также все подмножества этого набора корней.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть \mathfrak{G} — простая алгебра Ли ранга n , h_1, \dots, h_n — базис ее картановской подалгебры, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ — допустимый набор корней, $\alpha_i = d_{i1} h_1 + \dots + d_{in} h_n$, b_j — произвольные действительные константы, скалярное произведение (x, y) в \mathfrak{G} определено формой Киллинга — Картана. Утверждается, что гамильтонова система в $2n$ -мерном фазовом пространстве p_i, q_i :

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (3.3)$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k,l} (h_k, h_l) p_k p_l + \sum_{j=1}^N b_j \exp \left(2 \sum_{k=1}^n d_{jk} q_k \right)$$

допускает представление в виде $L - A$ -пары.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все решения системы (3.3) при отображении

$$l_j = b_j^{1/2} \exp \left(\sum_{k=1}^n d_{jk} q_k \right), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.4)$$

переходят в решения системы

$$\dot{p}_k = -2 \sum_{j=1}^N l_j^2(t) d_{jk}, \quad (3.5)$$

$$\dot{l}_j = l_j \sum_{k,l} d_{jl} p_k (h_k, h_l).$$

Рассмотрим в алгебре Ли \mathfrak{G} уравнение [181]

$$\dot{l} = [l, A(l)], \quad (3.6)$$

где векторы $l(t)$ и $A(l(t))$ имеют вид

$$l(t) = \sum_{j=1}^N l_j(t) (e_{\alpha_j} + e_{-\alpha_j}) + \sum_{k=1}^n p_k h_k, \quad (3.7)$$

$$A(l(t)) = \sum_{j=1}^N l_j(t) (e_{\alpha_j} - e_{-\alpha_j}).$$

Используя коммутационные соотношения (3.1) и определение допустимого набора корней $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, легко проверить, что система (3.5) эквивалентна уравнению (3.6) (при условиях (3.7)).

Уравнение (3.6) при любом линейном представлении T алгебры \mathfrak{G} определяет $L - A$ -пару:

$$T(l) = [T(l), T(A(l))]. \quad (3.8)$$

Таким образом, при отображениях (3.4), (3.7) все решения системы (3.3) переходят в решения уравнения (3.6), а следовательно, и в решения уравнения (3.8). Возьмем в качестве T точное представление алгебры \mathfrak{G} , имеющее минимальную размерность. Тогда уравнение (3.8) при $l(t)$, заданном (3.7) и (3.4), будет эквивалентно системе (3.3), что и доказывает теорему 1.

Из представления в виде $L - A$ -пары следует, что система (3.3) имеет первые интегралы

$$I_k = \text{Tr} (T^k (l(t))).$$

Уравнение (3.6) всегда имеет интеграл (l, l) (I_2), который при условии (3.7) имеет вид

$$(l, l) = \sum_{k,l}^n (h_k, h_l) p_k p_l + 2 \sum_{j=1}^N l_j l_j = 2H.$$

Приведем конкретные примеры систем (3.3). Воспользуемся классификацией простых алгебр Ли и стандартной записью корней алгебры \mathfrak{G} в ортонормированном базисе e_1, \dots, e_n (см. [91]) (для алгебр типа A_n, E_6, E_7, G_2 удобно расширить картановскую подалгебру элементом, коммутирующим со всей алгеброй; в этом расширении имеем базис e_1, \dots, e_n, e_{n+1}). В качестве базиса h_i возьмем ортонормированный базис e_i , а в качестве допустимого набора корней — набор (3.2). Соответствующий гамильтониан (3.3) имеет вид ¹⁾

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m p_i^2 + V_{\mathfrak{G}}(q_i). \quad (3.9)$$

¹⁾ Другой класс вполне интегрируемых гамильтоновых систем, связанных с простыми алгебрами Ли, указан в работе [182], где используется конструкция $L - A$ пары Мозера — Калоджеро [183, 184].

Здесь $m = n + 1$ для алгебр типа A_n , E_6 , E_7 , G_2 и $m = n$ для остальных типов (n — ранг алгебры \mathfrak{G}). Введем обозначение

$$V_k = \sum_{i=1}^k \exp(q_i - q_{i+1}).$$

Явный вид потенциалов $V_{\mathfrak{G}}(q_i)$ в зависимости от типа \mathfrak{G} следующий:

$$V_{A_n} = V_n + \exp(q_{n+1} - q_1), \quad n \geq 2,$$

$$V_{B_n} = V_{n-1} + \exp(q_n) + \exp(-(q_1 + q_2)), \quad n \geq 2,$$

$$V_{C_n} = V_{n-1} + \exp(2q_n) + \exp(-2q_1), \quad n \geq 3,$$

$$V_{D_n} = V_{n-1} + \exp(q_{n-1} + q_n) + \exp(-q_1 - q_2), \quad n \geq 4,$$

$$V_{E_6} = V_5 + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 - q_2 - q_3 + q_4 + q_5 + q_6) + \frac{1}{\sqrt{2}}q_7\right) + \exp(-\sqrt{2}q_7), \quad (3.10)$$

$$V_{E_7} = V_5 + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 + q_2 + \dots + q_7 - q_8)\right) + \exp(-q_1 - q_2) + \exp(-q_7 + q_8),$$

$$V_{E_8} = V_6 + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 + q_2 + \dots + q_7 - q_8)\right) + \exp(-q_1 - q_2) + \exp(q_7 + q_8),$$

$$V_{F_4} = \exp(q_1 - q_2) + \exp(q_2 - q_3) + \exp(q_3) + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 - q_2 - q_3 + q_4)\right) + \exp(-q_1 - q_4),$$

$$V_{G_2} = \exp(q_1 - q_2) + \exp(-2q_1 + q_2 + q_3) + \exp(q_1 + q_2 - 2q_3).$$

Используя стандартные линейные представления простых алгебр Ли, можно показать, что гамильтоновы системы с гамильтонианами (3.9) имеют ровно m интегралов; в некоторых случаях удается доказать их инволютивность¹⁾.

Для алгебр Ли типа A_n ($SL(n+1)$) гамильтониан (3.9) определяет периодическую цепочку Toda, для остальных типов получаем новые цепочки частиц, имеющие большое число интегралов движения (отметим, однако, что система (3.9) для типа C_n

¹⁾ В недавних работах [185, 186] доказано, что гамильтоновы системы (3.9) для всех простых алгебр Ли являются вполне интегрируемыми системами. При этом в работе [185] в явном виде проинтегрированы системы (3.9), у которых в потенциале (3.10) отброшен максимальный корень и поэтому происходит разлет частиц на бесконечность. В самое последнее время в работе [187] изучалась связь интегрируемости гамильтоновых систем (3.9) с теорией представлений полупростых алгебр Ли.

вкладывается в цепочку Тода из $2n$ частиц). Во всех этих системах стохастизация невозможна.

Для системы двух частиц из (3.10) получаем, кроме цепочки Тода, еще две интегрируемые гамильтоновы системы с потенциалами

$$V_B = \exp(q_1 - q_2) + \exp(q_2) + \exp(-q_1 - q_2),$$

$$V_G = \exp(q_1) + \exp(\sqrt{3} q_2) + \exp\left(-\frac{3}{2} q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} q_2\right).$$

Отметим, что обе эти системы отличаются от рассмотренной в [179] системы с потенциалом

$$V_T = \exp(q_1 - q_2) + \exp(q_2) + \exp(-q_1),$$

описывающим цепочку Тода с одной фиксированной частицей.

Основываясь на теореме 1, можно указать много других примеров гамильтоновых систем, допускающих представление в виде $L - A$ -пары — например, такие системы получаются из (3.9) отбрасыванием нескольких слагаемых в потенциале V_G .

§ 4. Нелинейные колебательные режимы в системах гидродинамического типа

Понятие системы гидродинамического типа (с.г.т.) было введено в работе [188]. Такие системы возникают при конечномерной аппроксимации уравнений гидродинамики по методу Галеркина и имеют вид

$$\dot{u}^i = \Gamma_{jk}^i u^j u^k \quad (4.1)$$

при постоянных Γ_{jk}^i . Согласно определению работы [188], система гидродинамического типа обладает квадратичным по u^i интегралом энергии E и поток, определенный системой (4.1), сохраняет фазовый объем ($\text{div } \dot{u}^i = 0$). Гамильтоновы системы (1.2) при $\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1} = 0$ при отображении $Q_k = \exp(\{\alpha_k, q\})$ переходят в с.г.т.

Выделим общий класс динамических систем, включающий в себя системы (1.2), (1.4), и некоторые системы гидродинамического типа (4.1), для которого докажем наличие сложных нелинейных колебательных режимов, допускающих сепаратрисную аппроксимацию, подобную описанной в § 2.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида (переменные разбиты на две группы: $Q^\alpha \in R^m$, $p^i \in R^n$):

$$\dot{Q}^\alpha = a_{\beta\gamma}^\alpha Q^\beta Q^\gamma + Q^\alpha (b_i^\alpha p^i + \lambda^\alpha),$$

$$\dot{p}^i = c_{\beta\gamma}^i Q^\beta Q^\gamma + d_{\beta j}^i Q^\beta p^j + \lambda_{\beta}^i Q^\beta \quad (4.2)$$

(всюду по индексам, повторяющимся в одной части уравнений, производится суммирование).

Предложение 1. Следующие условия A, B, C являются достаточными для существования в системе (4.2) нелинейного колебательного режима, допускающего сепаратрисную аппроксимацию:

$A.$ Для почти всех $p^i \in R^n$

$$\max_{\alpha} (b_i^{\alpha} p^i + \lambda^{\alpha}) = b_i^{\gamma} p^i + \lambda^{\gamma} > 0, \quad \gamma = \gamma(p). \quad (4.3)$$

Для каждого α вектор $(b_i^{\alpha}) \neq 0$.

$B.$ Для каждого α матрицы порядка $(n+1) \times (n+1)$

$$S_{\alpha} = \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha}^{\alpha} & b_j^{\alpha} \\ c_{\alpha\alpha}^i & d_{\alpha}^i \end{vmatrix}$$

имеют диагональную жорданову нормальную форму и все их собственные числа λ_i имеют $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$.

$C.$ Для всех $\beta \neq \alpha$ $a_{\beta\beta}^{\alpha} = 0$.

Для изучения колебательного режима перейдем к координатам

$$q^{\alpha} = Q^{\alpha}/\Omega, \quad \Omega = ((Q^1)^2 + \dots + (Q^m)^2)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Система (4.2) в координатах q^{α}, p^i, Ω имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q}^{\alpha} &= a_{\beta\gamma}^{\alpha} q^{\beta} q^{\gamma} \Omega + q^{\alpha} (b_i^{\alpha} p^i + \lambda^{\alpha}) - \\ &\quad - q^{\alpha} (a_{\beta\gamma}^{\delta} q^{\beta} q^{\gamma} \Omega + (q^{\delta})^2 (b_i^{\delta} p^i + \lambda^{\delta})), \\ \dot{\Omega} &= \Omega (a_{\beta\gamma}^{\delta} q^{\beta} q^{\gamma} \Omega + (q^{\delta})^2 (b_i^{\delta} p^i + \lambda^{\delta})), \\ \dot{p}^i &= \Omega (c_{\beta\gamma}^i q^{\beta} q^{\gamma} \Omega + d_{\beta j}^i q^{\beta} p^j + \lambda_{\beta}^i q^{\beta}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Система (4.5) рассматривается, в силу замены (4.4), на инвариантном многообразии $(q^1)^2 + \dots + (q^m)^2 = 1, \Omega > 0$ и непрерывно продолжается на границу $\Omega = 0$, также являющуюся инвариантным многообразием. Эта система имеет $2m$ множеств особых точек $M_{\alpha}^{\varepsilon} = R^n$ ($\alpha = 1, \dots, m; \varepsilon = \pm 1$) с координатами

$$q^{\beta} = \varepsilon \delta_{\alpha}^{\beta}, \quad \Omega = 0, \quad p^i \in R^n.$$

Точки, принадлежащие множествам M_{α}^{ε} , обозначаем тройками (p, α, ε) .

Собственные числа системы (4.5) в особых точках (p, α, ε) следующие (в скобках указаны соответствующие собственные направления):

$$\mu_{\beta} = (b_i^{\beta} p^i + \lambda^{\beta}) - (b_i^{\alpha} p^i + \lambda^{\alpha}) \quad (\text{переменные } q^{\beta}; \beta = 1, \dots, m, \beta \neq \alpha),$$

$$\mu_m = b_i^{\alpha} p^i + \lambda^{\alpha} \quad (\text{переменная } \Omega),$$

$$\mu_{m+1} = \dots = \mu_{m+n} = 0 \quad (\text{переменные } p^i).$$

Из условия A следует, что почти все особые точки M_α^e невырожденные (т. е. число нулевых собственных чисел равно размерности M_α^e) и неустойчивые.

Выделим два подмножества V_α^e и W_α^e на каждом M_α^e : на V_α^e ($b_i^\alpha p^i + \lambda^\alpha < 0$); на W_α^e $\alpha = \gamma(p)$ (см. (4.3)). Сепаратрисы, выходящие (при $t \rightarrow -\infty$) из точки $(p_0, \alpha, \varepsilon) \in V_\alpha^e$, имеют вид

$$q^\beta = C^\beta \exp((b_i^\beta p_0^i + \lambda^\beta) t) \left(\sum_\delta (C^\delta)^2 \exp(2t(b_i^\delta p_0^i + \lambda^\delta)) \right)^{-1/2}, \quad (4.6)$$

$$\Omega(t) \equiv 0, \quad p^i(t) = p_0^i, \quad C^\alpha = \varepsilon, \quad -\infty < t < +\infty$$

(здесь β пробегает те индексы, для которых $\mu_\beta > 0$; для остальных индексов β $q^\beta \equiv 0$). Пусть $\gamma = \gamma(p_0)$ (см. (4.3)). Если $C^\gamma > 0$, то все сепаратрисы (4.6) при $t \rightarrow +\infty$ идут в особую точку $(p_0, \gamma(p_0), +1) \in W_\gamma^{+1}$; если $C^\gamma < 0$ — то в особую точку $(p_0, \gamma(p_0), -1) \in W_\gamma^{-1}$. Исключительные сепаратрисы, для которых $C^\gamma = 0$, неустойчивы. Ниже, при определении отображения T_1 , мы не будем их рассматривать.

Сепаратрисы, выходящие из особых точек $(p_0, \alpha, \varepsilon) \in W_\alpha^e$, лежат на инвариантном (в силу условия C) многообразии $q^\beta = \varepsilon \delta_\alpha^\beta$. Система (4.5) на этом многообразии после замены времени $d\tau/dt = \Omega > 0$ переходит в линейную систему

$$\dot{X} = \varepsilon S_\alpha \cdot X + \varepsilon \cdot Y, \quad (4.7)$$

где векторы X, Y имеют координаты $X = (\varepsilon \Omega, p^i)$, $Y = (\lambda^\alpha, \lambda_\alpha^i)$. В силу условия B , каждая траектория системы (4.7), начинающаяся на плоскости $\Omega = 0$ при $b_i^\alpha p^i + \lambda^\alpha > 0$ (сепаратриса, выходящая из особых точек W_α^e), снова пересекает эту плоскость (при $b_i^\alpha p^i + \lambda^\alpha < 0$). Обозначим определенную таким образом функцию последования T_α^e .

Таким образом, на множествах особых точек V_α^e, W_α^e определено отображение T_1 , переводящее начальную особую точку в конечную точку выходящей из нее сепаратрисы. Отображение T_1 имеет вид

$$(p, \alpha, \varepsilon) \in W_\alpha^e: T_1(p, \alpha, \varepsilon) = (T_\alpha^e(p), \alpha, \varepsilon) \in V_\alpha^e, \\ (p, \alpha, \varepsilon) \in V_\alpha^e: T_1(p, \alpha, \varepsilon) = \begin{cases} (p, \gamma(p), +1) \in W_\gamma^{+1}, \\ (p, \gamma(p), -1) \in W_\gamma^{-1}. \end{cases} \quad (4.8)$$

В последнем случае отображение T_1 двузначно.

Траектория системы (4.5), начавшаяся в достаточно малой окрестности особых множеств V_α^e, W_α^e , будет сколь угодно долго двигаться вдоль некоторой последовательности сепаратрис в диа-

грамме

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & V_{\alpha}^{\varepsilon} & \nearrow & W_{\alpha}^{+1} & \rightarrow & V_{\alpha}^{+1} & \nearrow \dots \\ & & & \searrow & & & & \searrow \dots \\ & & & & W_{\alpha}^{-1} & \rightarrow & V_{\alpha}^{-1} & \nearrow \dots \\ & & & & & & & \searrow \dots \end{array} \quad (4.9)$$

(стрелка означает сепаратрису, идущую между особыми множествами), т. е. колебательный режим в системе (4.2)—(4.5) допускает сепаратрисную аппроксимацию. Ниже мы укажем класс систем (4.2)—(4.5), у которых пространство Q^{α} , p^i разбито на инвариантные области, в каждой из которых все переходы в диаграмме (4.9) однозначны.

В исходных координатах Q^{α} , p^i колебательный режим имеет следующую динамику. Траектория, начавшаяся при достаточно малых значениях координат Q^{α} , периодически оказывается в окрестности точек плоскости P ($Q^1 = \dots = Q^m = 0$), получающихся одна из другой последовательным действием отображения T (двузначного), определенного следующим образом. Плоскость P разбита на подмножества P_{α} : на P_{α} имеем $\gamma(p) = \alpha$ (см. (4.3)). На каждом P_{α} отображение $T = T_{\alpha}^{\varepsilon}$ (см. (4.8)), т. е. $T(p) = T_{\gamma(p)}^{\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$. При переходе траектории между двумя последовательными точками плоскости P сильно изменяется координата $Q^{\gamma(p)}$, причем $\text{sign } Q^{\gamma(p)} = \varepsilon$, а для остальных координат $|Q^{\beta}| \ll \ll |Q^{\gamma(p)}|$. Стохастические свойства колебательного режима определяются свойствами отображения T .

Отображение T (и сепаратрисная диаграмма (4.9)) сводится к однозначным отображениям в важном частном случае систем (4.2), когда коэффициенты

$$a_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \beta, \gamma \neq \alpha. \quad (4.10)$$

В этом случае все плоскости $Q^{\alpha} = 0$ являются инвариантными многообразиями системы и, следовательно, каждая из 2^m областей σ , в которой $\text{sign } Q^{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}$, также инвариантна. Если траектория в области σ движется вдоль некоторой сепаратрисы (4.6), то необходимо $\text{sign } C^{\gamma} = \varepsilon_{\gamma}$ (см. (4.6)), поэтому все переходы в диаграмме (4.9) для траекторий, лежащих в области σ , однозначны. Соответствующее отображение $T = T_{\sigma}$ на множестве P_{α} имеет вид $T_{\sigma} = T_{\sigma}^{\varepsilon_{\alpha}}$ и также однозначно. Все отображения T_{σ} и соответствующие им колебательные режимы, вообще говоря, различны.

Если система вида (4.2) при выполнении условия (4.10) рассматривается только в некоторой одной области σ ($\text{sign } Q^{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}$), то достаточные условия существования колебательного режима можно ослабить: вместо условия B достаточно потребовать, чтобы $\text{Re } \lambda_i \geq 0$, где λ_i — собственные числа матриц $\varepsilon_{\alpha} \cdot S_{\alpha}$.

Примерами систем, удовлетворяющих условиям предложения 1, являются гамильтоновы системы (1.2) и (1.4). Системы (1.2) после отображения $Q_k = \exp \{ \alpha_k, q \}$ принимают вид (4.2) и удовлетворяют условиям A, B, C (4.10) (в силу условий A и B , § 1). Колебательный режим, указанный выше, для этих систем переходит в колебательный режим, найденный в § 2. Гамильтонова система (1.4) после отображения $Q_i = \exp q_i$ принимает вид (4.2) и удовлетворяет условию A в особых точках $H = 0, Q_i = 0$ и условиям B, C , (4.10). Колебательный режим в этом случае изоморфен колебательному режиму БЛХ (см. § 6 главы II).

Системы гидродинамического типа (4.1), допускающие представление (4.2) (с $\lambda^\alpha = \lambda_\beta^i = 0$) и имеющие интеграл энергии E вида $E = (u^1)^2 + \dots + (u^n)^2$, автоматически удовлетворяют условиям A (в силу сохранения объема, $\operatorname{div} u^i = 0$) и B (в силу существования интеграла энергии E). Выполнения условия C , вообще говоря, нужно требовать дополнительно.

Простейшим примером с.г.т. являются уравнения Эйлера движения твердого тела, или триплет [189]:

$$\dot{v}_1 = l(v_2^2 - v_3^2), \quad \dot{v}_2 = -lv_1v_2, \quad \dot{v}_3 = lv_1v_3,$$

очевидно, удовлетворяющий условиям A, B, C (4.10). Здесь координатами p^i является неустойчивая мода v_1 , а координатами $Q^\alpha - v_2$ и v_3 — линейные комбинации устойчивых мод.

Имеется специальный класс систем гидродинамического типа, автоматически удовлетворяющих условиям A, B, C . Такие с.г.т. можно получить путем суперпозиции [189] триплетов по следующему правилу: если два триплета зацеплены по некоторой моде, то эта мода в обоих триплетах является либо устойчивой, либо неустойчивой. При этом возможны двойные зацепления триплетов и каждый триплет может быть зацеплен с любым числом других. Полученные таким образом с.г.т. имеют дополнительный интеграл $F = Q^1 \dots Q^m$; в колебательном режиме безразмерный интеграл $F \cdot E^{-m/2} \ll 1$.

Для таких с. г. т. матрицы S_α имеют ранг 2 и каждое отражение $T_\alpha^{+1} = T_\alpha^{-1}$ является отражением τ_α в плоскости, ортогональной к вектору (b_i^α) . Таким образом, с отображением T , так же как и для возмущений цепочки Тода, можно связать группу Кокстера G , порожденную отражениями τ_α . Как известно, для общего набора векторов (b_i^α) замыкание группы G совпадает с ортогональной группой $O(n)$ (для $m > n$). По-видимому, в общем случае отображение T является эргодическим на сферах постоянного радиуса (инвариантной мерой для обратимого отображения T является обычная евклидова мера), хотя доказательство этого факта является трудным уже в двумерном случае, где задача сводится к переключиванию отрезков на окружности,

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincare H.* Les methodes nouvelles de la mecanique celeste.— Paris, 1899 (русский перевод: Пуанкаре А. Избранные труды.— М.: Наука, 1971, т. 1, 2).
2. *Vendixon I.*— Acta Math., 1901, v. 24, p. 1.
3. *Андронов А. А.* Собрание трудов.— М.: Изд-во АН СССР, 1956.
4. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1959.
5. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка.— М.: Наука, 1966.
6. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1967.
7. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике.— 3-е изд.— М.: Наука, 1954; 8-е изд.— М.: Наука, 1977.
8. *Биркгоф Дж.* Динамические системы: Пер. с англ./Под ред. А. А. Маркова.— М.— Л.: Гостехиздат, 1941.
9. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1979; Труды Моск. матем. о-ва.— М.: Изд-во МГУ, 1975, т. 25, с. 119; 1976, т. 26, с. 199.
10. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова.— М.: Наука, 1967, т. 90.
11. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику: Пер. с англ./Под ред. В. М. Алексеева.— М.: Мир, 1975.
12. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.*— ЖЭТФ, 1973, т. 64, № 5, с. 1475.
13. *Богоявленский О. И.*— УМН, 1973, т. 28, № 5, с. 1973.
14. *Богоявленский О. И.*— Письма в Астроном. ж., 1975, т. 1, № 9, с. 22.
15. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.*— Труды семинара им. И. Г. Петровского.— М.: Изд-во МГУ, 1975, вып. 1, с. 7.
16. *Богоявленский О. И.*— Труды семинара им. И. Г. Петровского.— М.: Изд-во МГУ, 1976, вып. 2, с. 67.
17. *Богоявленский О. И.*— ПММ, 1976, т. 40, № 2, с. 270.
18. *Богоявленский О. И.*— ЖЭТФ, 1976, т. 70, № 2, с. 361.
19. *Богоявленский О. И.*— ТМФ, 1976, т. 27, № 2, с. 184.
20. *Vogouavlensky O. I.*— Comm. Math. Phys., 1976, v. 51, № 3, p. 201.
21. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.*— УМН, 1976, т. 31, № 5, с. 33.
22. *Богоявленский О. И.*— Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 6, с. 1289.
23. *Богоявленский О. И.*— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, № 2, с. 63.
24. *Vogouavlensky O. I.*— Phys. Lett., 1977, v. 60A, № 3, p. 163.
25. *Богоявленский О. И.*— ЖЭТФ, 1977, т. 73, № 4, с. 1201.
26. *Богоявленский О. И.*— Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 27, № 2, с. 91.
27. *Богоявленский О. И.*— Астрофизика, 1978, т. 14, № 3, с. 501.
28. *Богоявленский О. И.*— Письма в Астроном. ж., 1978, т. 4, № 9, с. 397.
29. *Vogouavlensky O. I.*— J. Geoph. Astroph. Fl. Dyn., 1979, v. 12, № 1/2, p. 117.

30. *Богоявленский О. И.*— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, № 10, с. 622.
31. *Bogoyavlensky O. I.*— In: Proc. Intern. Congr. of Math.— Helsinki, 1980, v. 1, p. 395.
32. *Богоявленский О. И.*— Труды семинара им. И. Г. Петровского.— М.: Изд-во МГУ, 1980, вып. 6.
33. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— 4-е изд.— М.: Наука, 1975.
34. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1976.
35. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— 6-е изд. испр.— М.: Наука, 1970.
36. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с англ./Под редакцией В. В. Немыцкого.— М.: ИЛ, 1968.
37. *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды.— Киев: Наукова думка, 1969, т. I.
38. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1974.
39. *Дородницын А. А.*— ПММ, 1947, т. 11, № 3, с. 313.
40. *Тихонов А. Н.*— Матем. сб., 1948, т. 22, № 2, с. 193.
41. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М.: Наука, 1975.
42. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: Пер. с англ./Под ред. В. М. Алексеева.— М.: Наука, 1976, гл. IX.
43. *McGehee R.*— Invent. math., 1974, v. 27, p. 191.
44. *Mather J., McGehee R.*— In: Lecture Notes in Physics/Ed. J. Moser.— New York, 1975, v. 38, p. 673.
45. *Friedmann A. A.*— Z. Phys., 1922, v. 10, p. 377.
46. *Friedmann A. A.*— Z. Phys., 1924, v. 21, p. 326.
47. *Taub A. H.*— Ann. Math., 1951, v. 53, p. 472.
48. *Лифшиц Е. М., Халатников И. М.*— УФН, 1963, т. 80, с. 391.
49. *Белинский В. А., Халатников И. М.*— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 1700.
50. *Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М.*— УФН, 1970, т. 102, с. 463.
51. *Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М.*— ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 1969.
52. *Белинский В. А., Халатников И. М.*— ЖЭТФ, 1972, т. 63, с. 1121.
53. *Penrose R.*— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 14, p. 57.
54. *Hawking S. W.*— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 689.
55. *Geroch R. P.*— Phys. Rev. Lett., 1966, v. 17, p. 445.
56. *Пенроуз Р.* Структура пространства-времени: Пер. с англ./Под ред. Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова.— М.: Мир, 1972.
57. *Arnowitz R., Deser S., Misner C. W.*— Phys. Rev., 1960, v. 118, p. 1100.
58. *Misner C. W.*— Phys. Rev. Lett., 1969, v. 22, p. 1071.
59. *Hechtman O., Schücking E.*— In: Gravitation: an introduction to current research.— New York, 1962, p. 438.
60. *Newman E., Tamburino L., Unti T.*— J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 915.
61. *Гришук Л. П., Дорошкевич А. Г., Новиков И. Д.*— ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 2281.
62. *Ellis G. F. R., MacCallum M. A. H.*— Comm. Math. Phys., 1969, v. 12, p. 108; Comm. Math. Phys., 1970, v. 19, p. 31.
63. *Matzner R. A., Shepley L. C., Warren I. C.*— Ann. Phys., 1970, v. 57, p. 401.
64. *Фаддеев Л. Д.*— ТМФ, 1969, т. 1, с. 3.
65. *Фаддеев Л. Д., Попов В. Н.*— УФН, 1973, т. 111, с. 427.
66. *MacCallum M. A. H.*— Comm. Math. Phys., 1971, v. 20, p. 57.
67. *Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н., Новиков И. Д.*— ЖЭТФ, 1971, т. 60, p. 1201.

68. Грищук Л. П., Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н.— ЖЭТФ, 1974, т. 61, с. 3.
69. Новиков С. П.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 1977.
70. Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н., Новиков И. Д.— ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 1457.
71. Лукаш В. Н., Старобинский А. А.— ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 1515.
72. Пиблс П. Физическая космология: Пер. с англ./Под ред. Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова.— М.: Мир, 1975.
73. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд.— М.: Наука, 1971.
74. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Строение и эволюция Вселенной.— М.: Наука, 1975.
75. Ryan M. P., Shepley L. C. Homogeneous Relativistic Cosmologies.— New Jersey: Princ. Univ. Press, 1975.
76. Вейнберг С. Гравитация и космология: Пер. с англ./Под ред. Я. А. Смородинского.— М.: Мир, 1975.
77. Шикин И. С.— Докл. АН СССР, 1967, т. 176, с. 1048.
78. Collins C. V.— Comm. Math. Phys., 1974, v. 23, p. 137.
79. Шикин И. С.— ЖЭТФ, 1972, т. 63, с. 1529; ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 1583.
80. Collins C. V.— Comm. Math. Phys., 1974, v. 39, № 2, p. 131.
81. Велинский В. А., Халатников И. М.— Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 223; ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 401; ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 3.
82. Григорян С. Д.— Изв. АН Арм. ССР, 1976, т. 11 № 5, с. 468; Матем. заметки, 1979, т. 26, № 2, с. 235.
83. Пересецкий А. А.— УМН, 1976, т. 31, № 5, с. 251; Матем. заметки 1977, т. 21, № 1, с. 71.
84. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1973.
85. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация: Пер. с англ./Под ред. В. Б. Брагинского и И. Д. Новикова.— М.: Мир, 1977, т. 1—3.
86. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия.— М.: Наука, 1979.
87. Петров А. З. Пространства Эйнштейна.— М.: Физматгиз, 1961.
88. Kasner E.— Am. J. Math., 1921, v. 43, p. 217.
89. Kruskal M.— Phys. Rev., 1960, v. 119, p. 1743.
90. Bianchi L.— Mem Soc. It. Della, Sc., 1897, v. 11, p. 267.
91. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли: Пер. с фр./Под ред. А. И. Кострикина.— М.: Мир, 1972.
92. Лукаш В. Н.— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 499.
93. Brill D. R.— Phys. Rev., 1964, v. B133, p. 845.
94. Дорошкевич А. Г.— Астрофизика, 1965, т. 1 с. 255.
95. Шикин И. С.— Докл. АН СССР, 1966, т. 171, с. 73.
96. Халатников И. М.— Письма в ЖЭТФ, 1967, т. 5, с. 595.
97. Hughston L. P., Jacobs K. C.— Astroph. J., 1970, v. 160, p. 147.
98. Collins C. V.— Comm. Math. Phys., 1972, v. 27, p. 37.
99. Belinsky V. A., Khalatnikov I. M.— In: Rand. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino.— Torino, 1977, v. 35, p. 159.
100. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
101. Скрипкин В. А.— ПМТФ, 1960, т. 4, с. 3; Астроном. ж., 1961, т. 38, с. 192.
102. Станюкович К. П.— Докл. АН СССР, 1961, т. 150, с. 77; ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 826.
103. Гурович В. П., Станюкович К. П., Шаршекеев О. Ш.— Докл. АН СССР, 1965, т. 165, с. 510.
104. Cahill M. E., Taub A. H.— Comm. Math. Phys., 1971, v. 21, p. 1.
105. Taub A. H.— Comm. Math. Phys., 1973, v. 29, p. 79.
106. Eardley D. M.— Comm. Math. Phys., 1974, v. 37, p. 287.

107. *Ибрагимов Н. Х.* Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений.— Новосибирск.: Наука, 1967.
108. *Carr V. J., Hawking S. W.*— Mon. Not. R. Astr. Soc., 1974, v. 168, p. 399.
109. *Сибгатуллин Н. Р., Динариев О. Ю.*— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 1599.
110. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред.— М.—Л.: Гостехиздат, 1954.
111. *Oppenheimer J. R., Volkoff G.*— Phys. Rev., 1939, v. 55, p. 374.
112. *Уилер Д., Гаррисон Б., Вакано М., Торн К.* Теория гравитации и гравитационный коллапс: Пер. с англ./Под ред. Я. Б. Зельдовича.— М.: Мир, 1967.
113. *Дмитриев Н. А., Холин С. А.*— Вопросы космогонии.— М.: Изд-во АН СССР, 1963, т. 9, с. 254.
114. *Саакян Г. С., Вартамян Ю. Л.*— Сообщ. Бюраканской обс., 1963, т. 33, с. 55; *Астроном ж.*, 1964, т. 41, с. 193.
115. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Физматгиз, 1963.
116. *Saggus P. A., Fox A. A., Haas S., Korpal Z.*— Astrophys. J., 1951, v. 113, № 3, p. 496.
117. *Korpal Z.*— Astrophys. J., 1954, v. 120, № 1, p. 159.
118. *Яворская И. М.*— Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 4, с. 783.
119. *Sakurai A.*— J. Fluid Mech., 1956, v. 1, № 1, p. 436.
120. *Rogers M. N.*— Astroph. J., 1957, v. 125, № 2, p. 478.
121. *Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В.*— Теория точечного взрыва.— М.: Физматгиз, 1961.
122. *Курт Р.* Анализ размерностей в астрофизике: Пер. с англ.— М.: Мир, 1975.
123. *Дибай Э. А., Каплан С. А.* Размерности и подобие астрофизических величин.— М.: Наука, 1976.
124. *Sarrus P. A., Fox A. A., Haas F., Korpal Z.*— Astrophys. J., 1951, v. 113, № 1, p. 193.
125. *Лидов М. Л.*— *Астроном. ж.*, 1957, т. 34, № 4, с. 603.
126. *Каждан Я. М., Луцкий А. Е.*— *Астрофизика*, 1977, т. 13, № 3, с. 535.
127. *Cheng A. F.*— Astrophys. J., 1977, v. 213, № 2, p. 537.
128. *Taylor G.*— Proc. Roy. Soc.— London, 1950, v. A201, p. 192.
129. *Анисимов С. И., Зельдович Я. Б.*— Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, № 20, с. 1081.
130. *Баутин Н. Н.*— ПММ, 1954, т. 18, № 1, с. 36.
131. *Чандрасекар С.* Введение в учение о строении звезд: Пер. с англ./Под ред. А. Б. Северного.— М.: ИЛ, 1950.
132. *Росселанд С.* Теория пульсаций переменных звезд: Пер. с англ./Под ред. А. Б. Северного.— М.: ИЛ, 1952.
133. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды.— 3-е изд. испр. доп.— М.: Наука, 1976, т. 1, 2.
134. *Змитриенко Н. В., Имшенник В. С., Хлопов М. Ю., Чететкин В. М.*— ЖЭТФ, 1979, т. 75, № 10, с. 1169.
135. *Надежин Д. К.*— *Астроном. ж.*, 1968, т. 45, с. 1166.
136. *Guderley G.*— Luftfahrtforschung, 1942, v. 19, p. 302.
137. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды.— М.: Гостехиздат, 1955.
138. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
139. *Oseen C. W.*— Ark. Mat. Astr. Fys., 1911, № 7.
140. *Bellamy-Knights P. G.*— J. Fluid. Mech., 1970, v. 41, № 3, p. 673.
141. *Пухначев В. В.*— Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 2, с. 302.
142. *Бытнев В. О.*— ПМТФ, 1972, № 6, с. 56.
143. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.*— Теоретическая гидродинамика. 6-е изд. испр.— М.: Физматгиз, 1963, ч. 1, 2.

144. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. Методы. Факты. Подobie.: Пер. с англ./ Под ред. М. И. Гуревича и В. А. Смирнова.— М.: ИЛ, 1963.
145. *Биркгоф Г., Сарантонелло Е.* Струи, следы и каверны.: Пер. с англ./ Под ред. Г. Ю. Степанова.— М.: Мир, 1964.
146. *Соболев С. Л.*— Изв. АН СССР: Сер. матем., 1954, т. 18, № 1, с. 3.
147. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ.— М.: Мир, 1977.
148. *Капитанский Л. В.*— Записки научных семинаров ЛОМИ, 1979, т. 84, с. 89.
149. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика.— М.: Наука, 1963.
150. *Кадоццев Б. Б.* Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
151. *Стокер Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. Пер. с англ./ Под ред. М. А. Лаврентьева и Н. Н. Моисеева.— М.: ИЛ, 1959.
152. *Шкловский И. С.* Сверхновые звезды и связанные с ними проблемы.— М.: Наука, 1976.
153. *Dirichlet G. L.*— J. und angew. Math. 1860, v. 58, № 1, p. 181.
154. *Ламб Г.* Гидродинамика: Пер. с англ./ Под ред. Н. А. Слезкина.— М.— Л.: ОГИЗ, 1947.
155. *Чандрасекар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия.: Пер. с англ./ Под ред. В. В. Румянцева.— М.: Мир, 1973.
156. *Седов Л. И.*— Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5, с. 735.
157. *Лидов М. Л.*— Докл. АН СССР, 1954, т. 97, № 3, с. 409.
158. *Овсянников Л. В.*— Докл. АН СССР, 1957, т. 111, № 1, с. 47.
159. *Dyson J. F.*— J. Math. Mech., 1968, v. 18, № 1, p. 91.
160. *Немчинов И. В.*— ПММ, 1965, т. 29, № 1.
161. *Анисимов С. И., Лысков Ю. И.*— ПММ, 1970, т. 34, № 5, с. 926.
162. *Анисимов С. И., Иногамов Н. А.*— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, № 3, с. 174.
163. *Lynden-Bell D.*— Proc. Cambridge Phys. Soc., 1962, v. 58, № 4, p. 709.
164. *Зельдович Я. Б.*— Астроном. ж., 1964, т. 41, № 5, с. 873.
165. *Зельдович Я. Б.*— Астрофизика, 1970, т. 6, № 2, с. 319.
166. *Невзглядов В. Г.* Теория тела однородной деформации и ее применение к атомному ядру— Владивосток: Изд-во ДГУ, 1970.
167. *Андреев В. К., Пухначев В. В.*— ПМТФ, 1979, № 2, с. 25.
168. *Куликовский А. Г.*— Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 5, с. 984.
169. *Fujimoto M.*— Astroph. J., 1968, v. 152, № 2, p. 523.
170. *Naga T., Matsuda T., Nakasawa K.*— Progr. Theor. Phys., 1973, v. 49, № 2, p. 460.
171. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика.— М.: Наука, 1965.
172. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1974.
173. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала.— М.— Л.: ОГИЗ, 1946.
174. *Новиков И. Д.*— Астроном. ж., 1975, т. 52, № 5, с. 1038.
175. *Toda M.*— Progr. Theor. Phys. Suppl., 1970, v. 45, p. 174.
176. *Непон М.*— Phys. Rev., 1974, v. B9, p. 1921.
177. *Flascka H.*— Phys. Rev., 1974, v. B9, p. 1924.
178. *Манаков С. В.*— ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 2, с. 543.
179. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.*— УМН, 1976, т. 31, № 1, с. 55.
180. *Cassati G., Ford J.*— Phys. Rev., 1975, v. A12, p. 1702.
181. *Lax P. D.*— Comm. Pure Appl. Math., 1968, v. 21, p. 467.

182. *Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.*— *Inv. Math.*, 1976, v. 37, p. 93.
183. *Moser J.*— *Adv. Math.*, 1965, v. 16, p. 197.
184. *Calogero F., Ragnisco O., Marchioro C.*— *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, v. 13, p. 383.
185. *Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.*— Preprint ITER-157, Moscow, 1978.
186. *Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А., Френкель И. Б.*— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 802.
187. *Kostant B.* The Solution to a Generalized Toda Lattice and Representation Theory.— Massachusetts: Preprint, 1979.
188. *Обухов А. М.*— Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2, с. 309.
189. *Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А.* Нелинейные системы гидродинамического типа.— М.: Наука, 1974.

Олег Игоревич Богоявленский

**МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
В АСТРОФИЗИКЕ И ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ**

М., 1980 г., 320 стр. с илл.

Редактор *Г. М. Карасева*
Техн. редактор *Н. В. Кошелева*
Корректор *Г. В. Подвельская*

ИБ № 11523

Сдано в набор 29.03.80. Подписано к печати 19.09.80.
Т-17801. Бумага 60×90¹/₁₆. Тип. № 1.
Обыкновенная гарнитура. Высокая печать.
Условн. печ. л. 20. Уч.-изд. л. 21,24. Тираж 3000 экз.
Заказ № 3143. Цена книги 3 р. 50 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»,
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10