

Н.Н. БОГОЛЮБОВ,  
В.В. ТОЛМАЧЕВ, Д.В. ШИРКОВ

НОВЫЙ МЕТОД  
В ТЕОРИИ  
СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

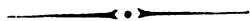
А К А Д Е М И Я  Н А У К  С С С Р  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В. А. СТЕКЛОВА  

---

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Н. Н. БОГОЛЮБОВ,  
В. В. ТОЛМАЧЕВ, Д. В. ШИРКОВ

НОВЫЙ МЕТОД  
В ТЕОРИИ  
СВЕРХПРОВОДИМОСТИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

*Москва - 1958*

Настоящая работа содержит дальнейшее развитие нового метода в теории сверхпроводимости, недавно предложенного одним из авторов.

Рассчитана энергия основного сверхпроводящего состояния гамильтониана Фрелиха, однофермионные и коллективные элементарные возбуждения, соответствующие этому состоянию. При этом выяснено, что окончательные формулы, полученные недавно Бардиным, Купером и Шриффером для основного состояния и однофермионных возбуждений, в первом приближении являются правильными. Физическая же картина явления оказалась в некотором отношении более близкой к той, которую представляли себе Шафрот, Батлер и Блатт.

Произведен детальный анализ влияния кулоновского взаимодействия электронов в теории сверхпроводимости.

Рассмотрена система ферми-частиц с четвертым гамильтонианом взаимодействия и установлен критерий ее сверхтекучести.

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Очерк состояния теории сверхпроводимости.** В течение длительного времени, несмотря на ряд успехов частного характера, всякие попытки построения микроскопической теории сверхпроводимости не приводили ни к каким результатам.

Существенный вклад в развитие теории был сделан в 1950 г. Фрелихом [1], который первый высказал идею о том, что явление сверхпроводимости определяется главным образом взаимодействием электронов с фононами решетки, т. е. тем самым взаимодействием, которое в нормальных условиях обуславливает обычное сопротивление металла. На основе этой идеи, исходя из соображений размерности, Фрелиху удалось предсказать весьма важный изотопический эффект, открытый вскоре после этого экспериментально.

После открытия изотопического эффекта стало очевидным, что электронно-фононное взаимодействие должно явиться основой для построения микроскопической теории сверхпроводимости. Однако ввиду исключительной математической сложности задачи первоначальные попытки корректного решения ее терпели неудачу [1, 2]. Тем не менее эти попытки сыграли важную роль в исследовании вопроса о применимости обычной теории возмущений в данной задаче.

Наиболее поучительной в этом отношении явилась одномерная модель, изученная Фрелихом [3]. Здесь задачу удалось решить точно. При этом оказалось, что результаты нельзя было получить с помощью теории возмущений, так как разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний имеет неаналитическую зависимость от константы связи  $\rho$  типа  $\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right)$ . Как теперь мы знаем в результате детального исследования, именно эта ситуация служила основной трудностью также и в трехмерном случае.

Новую важную идею выдвинули Шафрот, Батлер и Блатт [4]. Они предложили и подробно обсудили представление о существенной роли парных корреляций, в особенности между электронами, находящимися вблизи поверхности Ферми. Эти коррелированные пары представлялись им существенными в связи с явлением бозе-эйнштейновской конденсации таких образований. Появление конденсата они трактовали как возникновение сверхпроводящего состояния. Следует подчеркнуть, что пара электронов, находящаяся в бозе-эйнштейновском конденсате, обладает нулевым полным импульсом. В концепции Шафрота, Батлера и Блатта основным фактором, обеспечивающим образование коррелированных пар, является фреиховское притяжение двух электронов в окрестности поверхности Ферми. Как мы увидим ниже, представления Шафрота, Батлера и Блатта оказались совершенно правильными.

Дальнейшее развитие теории, связанное с выходом за рамки теории возмущений, было достигнуто в самое недавнее время в работах Купера и Бардина, Купера и Шриффера [5]. Эти авторы рассмотрели упрощенную схему, в которой взаимодействие электронов с фононами заменено притяжением между электронами, находящимися в окрестности сферы Ферми, причем в гамильтониане оставлены только члены, соответствующие взаимодействию пар электронов с противоположными импульсами. Физически это соответствует учету только таких пар, которые образуют бозе-эйнштейновский конденсат.

Исходя из представления о том, что частицы с противоположными импульсами образуют связанные пары, указанные авторы выбирают волновую функцию основного состояния в виде произведения парных функций, содержащих параметры, которые определяются из вариационного принципа минимума энергии.

Следует заметить, что метод Бардина, Купера и Шриффера оставляет без ответа ряд вопросов, таких, например, как обоснование законности используемой процедуры, исследование роли кулоновского взаимодействия и т. п., ввиду чего могут возникнуть сомнения в отношении убедительности полученных ими результатов. Однако теперь, когда удалось вполне строго решить задачу о взаимодействии электронов с фононами, выяснилось, что окончательные формулы, полученные Бардиным, Купером и Шриффером для расчета основного состояния и однофермионных возбуждений, в первом приближении правильны. С другой стороны, в их схеме отсутствует ветвь спектра, соответствующая коллективным возбуждениям, и, кроме того, не учтен надлежащим образом эффект кулоновских сил.

Полностью решить проблему как в первоначальной постановке Фрелиха, так и с дополнительными усложнениями, обусловленными, например, учетом кулоновского взаимодействия, удалось с помощью нового метода, разработанного в работе [6]. Этот новый метод основывается на глубокой физической и математической аналогии с явлением сверхтекучести и является прямым обобщением метода, развитого еще в 1947 г. [7] для построения микроскопической теории сверхтекучести.

В настоящей работе дано систематическое изложение этого нового метода и его приложения к изучению основного состояния и элементарных возбуждений (как однофермионных, так и коллективных).

**1.2. Краткое изложение микроскопической теории сверхтекучести.** Начнем с краткого обзора основных принципов микроскопической теории сверхтекучести бозе-систем.

Хорошо известно, что импульсы всех частиц идеального бозе-газа при абсолютном нуле температуры точно равны нулю; как говорят, система находится в состоянии конденсата.

Однако в случае отсутствия взаимодействий такой конденсат не образует связанного коллектива и потому не может обладать свойством сверхтекучести. Действительно, пусть конденсату сообщено движение, так что все частицы газа станут обладать скоростью  $u$ . Тогда полная энергия системы будет

$$E = \frac{1}{2} N m u^2,$$

где  $N$  — число частиц,  $m$  — масса. Пусть одна из частиц вследствие какого-либо процесса соударения с частицами примеси или со стенкой сосуда изменила свою скорость  $u$  на меньшую  $u_1$ . Ясно, что в таком случае полная энергия

$$E = \frac{1}{2} (N - 1) m u^2 + \frac{m u_1^2}{2}$$

уменьшится. Поэтому энергетически выгодно отдельным частицам газа «выпадать из конденсата» и замедляться из-за процессов соударений, ввиду чего движение газа в целом также будет постепенно замедляться.

Таким образом идеальный бозе-газ не может служить моделью для изучения свойства сверхтекучести. Совершенно иное положение возникает в случае неидеального бозе-газа, между частицами которого имеется хотя бы сколь угодно

слабое взаимодействие. В представлении вторичного квантования гамильтониан слабо-неидеального бозе-газа имеет вид

$$H = \sum_p \frac{|p|^2}{2m} \dot{a}_p^\dagger a_p + \frac{1}{2V} \sum_{(p_1+p_2=p'_1+p'_2)} v(p_1 - p'_1) \dot{a}_{p_1}^\dagger \dot{a}_{p_2}^\dagger a_{p'_2} a_{p'_1}, \quad (1.1)$$

где  $p$  — импульс частицы,  $v(p)$  — фурье-представление энергии взаимодействия пары частиц; эта величина далее будет считаться пропорциональной малому параметру,  $\dot{a}_p$ ,  $a_p$  — бозевские операторы порождения и уничтожения частиц,  $V$  — объем системы.

Существенным фактором, обеспечивающим возможность решения задачи, является наличие конденсата в системе, т. е. нахождение подавляющей части молекул на низшем энергетическом уровне. В силу того, что конденсат содержит макроскопически большое число частиц  $N_0$ , можно пренебречь некоммутуируемостью операторов порождения и уничтожения частиц из вакуума  $\dot{a}_0$ ,  $a_0$  и заменить их обычными числами. Тогда, вводя новые бозе-операторы

$$b_p = \dot{a}_0 N_0^{-1/2} a_p, \quad \dot{b}_p = \dot{a}_p N_0^{-1/2} a_0,$$

можно преобразовать (1.1) к виду

$$H = H_0 + H_{int},$$

$$H_0 = \sum \frac{|p|^2}{2m} \dot{b}_p^\dagger b_p, \quad (1.2)$$

$$H_{int} = \frac{N^2}{2V} v(0) + \frac{N_0}{2V} \sum v(p) (\dot{b}_p^\dagger \dot{b}_{-p}^\dagger + b_p b_{-p} + 2\dot{b}_p^\dagger b_p) + H',$$

где  $H'$  — выражение, состоящее из форм третьего и четвертого порядка по отношению к амплитудам  $\dot{b}_p$ ,  $b_p$ .

Стандартная теория возмущений не применима к гамильтониану в этой форме. Действительно, матричные элементы, соответствующие виртуальному порождению частиц из вакуума, сопровождаются энергетическими знаменателями

$$\frac{p_1^2}{2m} + \dots + \frac{p_s^2}{2m}.$$

Такие знаменатели, вообще говоря, не опасны и при интегрировании по  $p_1, \dots, p_s$  к расходимостям не приводят, кроме одного случая, когда имеет место виртуальное порождение двух частиц с импульсами  $\pm p$ . В этом случае

в высших приближениях появляются энергетические знаменатели вида

$$\left(\frac{p^2}{2m}\right)^n,$$

ведущие к расходимостям. Физически это означает, что даже при сколь угодно малом  $\nu$  взаимодействие между частицами с противоположными импульсами будет весьма интенсивным, если только эти импульсы оказываются достаточно малыми.

В методе работы [7] указанная трудность устраняется путем выделения из гамильтониана  $H$  квадратичной части (по отношению к  $\hat{b}_k$ ,  $b_k$ ) и диагонализации ее с помощью канонического преобразования:

$$b_k = u_k \xi_k + v_k \xi_{-k}^{\dagger}, \quad (1.3)$$

в котором  $\xi_k$ ,  $\xi_k^{\dagger}$  — новые бозе-амплитуды, а  $u_k$ ,  $v_k$  — обычные вещественные функции  $k$ , связанные соотношением

$$u_k^2 - v_k^2 = 1 \quad (1.4)$$

и, кроме того,  $u_k = u_{-k}$ ,  $v_k = v_{-k}$ .

Диагонализация перепутывает операторы рождения и уничтожения частиц и означает фактически выбор нового основного состояния, исправленного на взаимодействие.

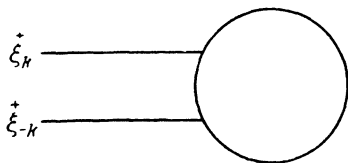
Отметим, что указанная процедура эквивалентна в низшем порядке по  $\nu$  следующему приему. Подберем  $u_k$ ,  $v_k$  так, чтобы аннулировать суммарный вклад диаграмм типа фиг. 1, соответствующих виртуальному рождению из вакуума пары частиц с противоположными импульсами. Поскольку при таком выборе  $u_k$ ,  $v_k$  указанные процессы больше учитывать не надо, то отпадает и то препятствие для применения обычной теории возмущений, о котором мы говорили выше.

В упомянутой работе для спектра элементарных возбуждений слабо-неидеального бозе-газа было получено следующее выражение:

$$E(p) = \sqrt{\frac{N_0}{V} \frac{|p|^2}{m} \nu(p) + \frac{|p|^4}{4m^2}} \quad (1.5)$$

или приближенно для малых  $|p|$

$$E(p) = \sqrt{\frac{N_0}{V} \nu(0)} |p| \quad (1.6)$$



Фиг. 1



и для больших  $|p|$

$$E(p) = \frac{|p|^2}{2m} + \frac{N_0 v(p)}{V}. \quad (1.7)$$

Основное состояние  $C_0$  в первом приближении характеризуется нулевыми числами заполнения  $\xi_p^\dagger \xi_p$ . Из (1.6) убеждаемся, что для устойчивости  $C_0$  мы должны потребовать, чтобы

$$v(0) = \int \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} > 0, \quad (1.8)$$

так как в противном случае  $E(p)$  оказалось бы комплексным. Условие (1.8) выражает доминирование сил отталкивания.

Легко показать, что рассмотренная модель обладает свойством сверхтекучести. Для этого заметим, что ввиду трансляционной инвариантности изучаемой динамической системы имеется ковариантность по отношению к изменению начала отсчета импульсов и скоростей.

Возьмем новую систему отсчета

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - m\mathbf{u}$$

и построим для нее соответствующее состояние  $C_0$ , которое будем обозначать  $C_u$ . Ясно, что в старой, «покоящейся», системе отсчета состояние  $C_u$  будет таким состоянием, в котором частицы имеют среднюю скорость  $\mathbf{u}$ . Нетрудно заметить, что энергия элементарного возбуждения для «движущегося» состояния  $C_u$  в обычной, покоящейся, системе отсчета будет

$$E(p) - (\mathbf{p}\mathbf{u}).$$

Пусть скорость  $\mathbf{u}$  меньше некоторой критической скорости:

$$|\mathbf{u}| < u_{kp} = \min_{(p)} \frac{E(p)}{|p|}. \quad (1.9)$$

Для таких скоростей энергии элементарных возбуждений положительны. Поэтому замедление отдельных частиц путем выпадения их из коллектива или, что то же самое, порождение элементарных возбуждений энергетически не выгодно. Состояние  $C_u$  будет, следовательно, метастабильным при

$|u| < u_{kp}$ . Мы имеем связанный коллектив, обладающий свойством сверхтекучести.

Из (1.9) можем опять убедиться, что в случае идеального газа, когда  $E(p) = p^2/2m$ ,

$$\min_{(p)} \frac{E(p)}{|p|} = 0$$

и сверхтекучести не будет.

Укажем в заключение, что метод работы [7] получил в последнее время дальнейшее развитие в работах Брюкнера и Савада [8], в которых рассмотрена более реалистичская модель гелия II.

---

## § 2. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ В МОДЕЛИ ФРЕЛИХА \*

**2.1. Принцип компенсации «опасных» диаграмм.** Мы будем исходить из модели, предложенной Фрелихом, в которой кулоновское взаимодействие явным образом не вводится и динамическая система характеризуется гамильтонианом \*\*

$$H_{Fr} = \sum_{k, s} E(k) \hat{a}_{ks} a_{ks} + \sum_q \omega(q) \hat{b}_q b_q + H_{int}, \quad (2.1)$$

$$H_{int} = g \sum_{\substack{k, k', q, s \\ (k' - k = q)}} \left( \frac{\omega(q)}{2V} \right)^{1/2} \hat{a}_{ks} a_{k's} \hat{b}_q + \text{сопр.}, \quad (2.2)$$

$$|q| < q_M$$

где  $E(k)$  — энергия электрона,  $\omega(q)$  — энергия фонона,  $g$  — константа связи,  $V$  — объем системы,  $k, k', q$  — волновые векторы,  $q_M$  — импульс обрезания,  $\hat{a}, a$  и  $\hat{b}, b$  — операторы порождения и уничтожения электронов и фононов соответственно,  $s$  — спиновый индекс, принимающий два значения:  $+\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$ .

Строго говоря, в  $H_{int}$  мы должны всегда включать отталкивание между электронами, например, хотя бы сильно экранированное кулоновское взаимодействие, так как одно электронно-фононное взаимодействие не может обеспечить стабильность электронной системы.

\* Изложение этого параграфа основывается на работе [6].

\*\* Здесь принята система единиц, в которой  $\hbar = 1$ .

Однако при использовании теории возмущений мы можем явно не принимать во внимание такие стабилизирующие взаимодействия, считая их достаточно малыми.

Покажем, что в такой модели действительно проявляется свойство сверхпроводимости.

Как хорошо известно, обычная теория возмущений по степеням константы связи неприменима, так как электронно-фононное взаимодействие, несмотря на свою малость, оказывается весьма существенным вблизи поверхности Ферми.

Совершим предварительно некоторое каноническое преобразование, исходя из соображений, аналогичных изложенным во введении при анализе положения в теории сверхтекучести.

Заметим, что матричные элементы, соответствующие виртуальному порождению «частиц» из вакуума, всегда сопровождаются энергетическими знаменателями

$$\varepsilon(k_1) + \dots + \varepsilon(k_{2s}) + \omega(q_1) + \dots + \omega(q_r),$$

в которых  $\varepsilon(k) = |E(k) - E_F|$  представляет энергию частицы, электрона ( $E(k) > E_F$ ) или дырки ( $E(k) < E_F$ ), становящуюся малой у поверхности Ферми.

Такие знаменатели вообще не являются «опасными», и при интегрировании по импульсам к расходимостям не приводят, кроме того случая, когда имеем дело с виртуальным процессом порождения одной пары без фононов. Тогда, в силу законов сохранения, частицы этой пары будут иметь противоположно направленные импульсы  $\pm k$ , и энергетический знаменатель  $2\varepsilon(k)$  становится уже опасным при интеграции. Заметим далее, что спины этой пары также будут противоположны.

Следует подчеркнуть, что в обычной теории возмущений, непосредственно примененной к нормальному состоянию, такие знаменатели не появляются из-за закона сохранения числа реальных электронов. Но если перепутать электроны и дырки каноническим преобразованием, то закон сохранения уже не имеет места, и эти знаменатели возникают.

Обобщая преобразование (1.3), использованное в теории сверхтекучести, введем в рассматриваемом сейчас случае новые ферми-амплитуды  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{k0} &= u_k a_{k,+} - v_k \dot{a}_{-k,-}, \\ \alpha_{k1} &= u_k a_{-k,-} + v_k \dot{a}_{k,+} \end{aligned} \quad (2.3)$$

или

$$\begin{aligned} a_{k,+} &= u_k \alpha_{k0} + v_k \dot{\alpha}_{k1}, \\ a_{-k,-} &= u_k \alpha_{k1} - v_k \dot{\alpha}_{k0}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $u_k, v_k$  — вещественные числа, связанные соотношением

$$u_k^2 + v_k^2 = 1 \quad (2.5)$$

и симметричные по отношению к преобразованию  $k \rightarrow -k$ .\*

Нетрудно проверить, что такое преобразование сохраняет все перестановочные свойства ферми-операторов и потому является каноническим. Заметим еще, что оно представляет обобщение обычного преобразования, с помощью которого вводятся операторы порождения и уничтожения дырок внутри поверхности Ферми и электронов вне этой поверхности. Действительно, если положить

$$u_k = 1, v_k = 0 \text{ для } E(k) > E_F,$$

$$u_k = 0, v_k = 1 \text{ для } E(k) < E_F,$$

то получим

$$\alpha_{k0} = a_{k,+}, \alpha_{k1} = a_{-k,-} \text{ для } E(k) > E_F,$$

$$\alpha_{k0} = -\dot{a}_{-k,-}, \alpha_{k1} = \dot{a}_{k,+} \text{ для } E(k) < E_F,$$

так что, например,  $\alpha_{k0}$  вне сферы Ферми будет оператором уничтожения электрона с импульсом  $k$  и спином  $+\frac{1}{2}$ , а внутри — оператором уничтожения дырки с импульсом  $-k$  и спином  $-\frac{1}{2}$ . В общем случае, когда  $(u_k, v_k) \neq (0, 1)$ , мы имеем дело с суперпозицией дырки и электрона.

Чтобы не вводить дополнительного условия постоянства числа частиц

$$\sum_{k,s} \dot{a}_{ks} a_{ks} = N_0,$$

где  $N_0$  — полное число электронов, воспользуемся известным приемом статистической физики и введем параметр  $\lambda$ , играющий роль химического потенциала. Тогда вместо  $H_{Fr}$  будем иметь дело с гамильтонианом

$$H = H_{Fr} - \lambda N. \quad (2.6)$$

Для определения  $\lambda$  воспользуемся условием

$$\bar{N} = N_0. \quad (2.7)$$

---

\* Как мы недавно узнали, Валатин, основываясь на работе [7], показал [25], что с помощью преобразования (2.3) можно и саму теорию Бардина, Купера, Шриффера представить в более ясной и наглядной форме.

Преобразовав  $H$  к новым ферми-амплитудам, получим

$$H = U + H_0 + H_{int},$$

$$H_{int} = H_1 + H_2 + H_3,$$

где  $U$  — постоянная:

$$U = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2,$$

а также

$$H_1 = \sum_{\substack{k, k', q \\ (k' - k = q)}} g \left\{ \frac{\omega(q)}{2V} \right\}^{1/2} \{ u_k v_{k'} \check{\alpha}_{k0} \check{\alpha}_{k'1} + u_k v_{k'} \check{\alpha}_{-k'0} \check{\alpha}_{-k1} + u_k v_k \alpha_{k1} \alpha_{k'0} + \\ + u_k v_k \alpha_{-k'1} \alpha_{-k0} \} \check{b}_q + \text{сопр.},$$

$$H_2 = \sum_{\substack{k, k', q \\ (k' - k = q)}} g \left\{ \frac{\omega(q)}{2V} \right\}^{1/2} \{ u_k u_{k'} \check{\alpha}_{k0} \alpha_{k'0} + u_k u_{k'} \check{\alpha}_{-k1} \alpha_{-k'1} - \\ - v_k v_{k'} \check{\alpha}_{k'1} \alpha_{k1} - v_k v_{k'} \check{\alpha}_{-k'0} \alpha_{-k0} \} \check{b}_q + \text{сопр.},$$

$$H_3 = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) u_k v_k (\check{\alpha}_{k0} \check{\alpha}_{k1} + \alpha_{k1} \alpha_{k0}),$$

$$H_0 = \sum_k (E(k) - \lambda) (u_k^2 - v_k^2) (\check{\alpha}_{k0} \alpha_{k0} + \check{\alpha}_{k1} \alpha_{k1}) + \sum_q \omega(q) \check{b}_q b_q.$$

Введем числа заполнения

$$\nu_{k0} = \check{\alpha}_{k0} \alpha_{k0}, \quad \nu_{k1} = \check{\alpha}_{k1} \alpha_{k1}$$

новых квазичастиц, порождаемых операторами  $\check{\alpha}$ . Тогда «вакуумом без взаимодействия», т. е. состоянием  $C_v$ , в котором

$$H_0 C_v = 0,$$

будет, очевидно, состояние

$$C_v = \prod_k \delta(\nu_{k0}) \delta(\nu_{k1})$$

с нулевыми числами заполнения  $\nu$ .

Заметим еще, что  $\lambda$  должна быть близка к  $E_F$ , поскольку  $\lambda = E_F$  при отсутствии взаимодействия, и что, следовательно, выражение

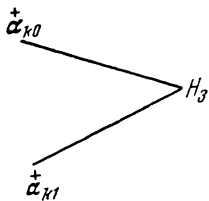
$$\varepsilon(k) = [E(k) - \lambda] (u_k^2 - v_k^2) \quad (2.8)$$

должно обращаться в нуль на поверхности, близкой к поверхности Ферми. Мы видим теперь, что «опасным» в смысле данного ранее критерия будет виртуальный процесс рождения из вакуума одной пары квази-частиц  $\nu_{k0}$ ,  $\nu_{k1}$  без фононов, так

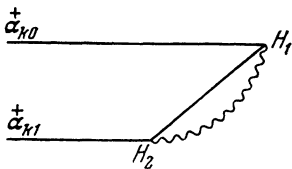
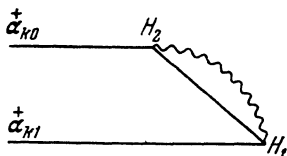
как соответствующий энергетический знаменатель будет равен  $2\varepsilon(k)$ . К такому процессу приводит гамильтониан  $H_3$ , результат действия которого на вакуум соответствует диаграмме фиг. 2\*. Этот же процесс получается также при совместном действии  $H_1$  и  $H_2$ . Так, например, во втором порядке по константе связи  $g$  имеем диаграммы, изображенные на фиг. 3. В высших порядках получаются диаграммы типа фиг. 4,

где кружок обозначает связную часть, которая не может быть разбита на две связные части, соединенные только двумя линиями одной рассматриваемой пары.

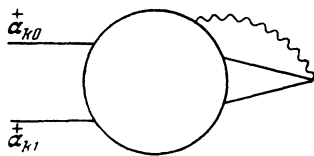
Используя ранее выдвинутый принцип компенсации «опасных» диаграмм, мы должны приравнять нулю сумму вкладов от диаграмм фиг. 2 и 4. Таким путем получается уравнение для определения  $u$ ,  $v$ . После этого мы можем не принимать во внимание диаграммы фиг. 2 и 4 (и им сопряженные),



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

и потому в разложениях теории возмущений не будут появляться выражения с опасными энергетическими знаменателями. Построим сейчас уравнение для  $u$ ,  $v$  во втором порядке. В этом приближении мы должны компенсировать диаграмму фиг. 1 диаграммами фиг. 3. Получим

$$2[E(k) - \lambda] u_k v_k + \Lambda_k = 0,$$

\* Здесь используются диаграммы, введенные Гугенгольцем [9].

где  $\Lambda_k$  — коэффициент при  $\dot{\alpha}_{k_0}\dot{\alpha}_{k_1}C_v$  в выражении

$$-H_2H_0^{-1}H_1C_v.$$

В явном виде получим:

$$\{\tilde{E}(k) - \lambda\} u_k v_k = \frac{(u_k^2 - v_k^2)}{2V} \sum_{k'} g^2 \frac{\omega(k - k')}{\omega(k - k') + \varepsilon(k) + \varepsilon(k')} u_{k'} v_{k'}, \quad (2.9)$$

где

$$\tilde{E}(k) = E(k) - \frac{1}{2V} \sum_{k'} g^2 \frac{\omega(k - k')}{\omega(k - k') + \varepsilon(k') + \varepsilon(k)} (u_{k'}^2 - v_{k'}^2) \quad (2.10)$$

и  $\varepsilon(k)$  определяется по (2.8). Оставаясь в пределах принятого приближения, заменим в знаменателе правой части (2.9)  $\varepsilon(k)$  на

$$\tilde{\varepsilon}(k) = \{\tilde{E}(k) - \lambda\} (u_k^2 - v_k^2).$$

Тогда, полагая

$$\tilde{E}(k) - \lambda = \xi(k),$$

запишем уравнение (2.9) в виде

$$\xi(k) u_k v_k = \frac{u_k^2 - v_k^2}{2(2\pi)^3} \int g^2 \frac{\omega(k - k')}{\omega(k - k') + \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k')} u_{k'} v_{k'} d\mathbf{k}'. \quad (2.11)$$

**2.2. Анализ уравнения компенсации.** Уравнение (2.11) обладает, очевидно, тривиальным решением

$$uv = 0, \quad (u, v) = (0, 1),$$

соответствующим нормальному состоянию. Выберем эти  $u, v$  в виде

$$u_k = \theta_G(k) = \begin{cases} 1 & E(k) > E_F \\ 0 & E(k) < E_F \end{cases} \quad (2.12)$$

$$v_k = \theta_F(k) = \begin{cases} 0 & E(k) > E_F \\ 1 & E(k) < E_F \end{cases}$$

Уравнение (2.11) обладает еще решением другого типа, переходящим в тривиальное при отдалении от поверхности Ферми. Этим двум решениям отвечает наличие двух состояний системы: нормального и особенного. Последнее обладает более низкой энергией, чем нормальное, и потому реализуется. В этом проявляется характерное отличие фермиевских систем от бозевских, где есть только одно основное состояние. В дальнейшем мы покажем, что особенное состояние



обладает свойством сверхпроводимости, и потому будем называть его сверхпроводящим.

Обозначая

$$C(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int g^2 \frac{\omega(k-k')}{\omega(k-k') + \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k')} u_{k'} v_{k'} d\mathbf{k}' \quad (2.13)$$

и принимая во внимание (2.5), находим из (2.11):

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\}, \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\}. \quad (2.14)$$

Отсюда

$$u_k v_k = \frac{1}{2} \frac{C(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}}; \quad \tilde{\varepsilon}(k) = \frac{\xi^2(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}}. \quad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.13), получаем уравнение для определения  $C(k)$ :

$$C(k) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int g^2 \frac{\omega(k-k')}{\omega(k-k') + \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k')} \frac{C(k')}{\sqrt{C^2(k') + \xi^2(k')}} d\mathbf{k}'. \quad (2.16)$$

Это уравнение имеет своеобразную особенность: при  $g^2 \rightarrow 0$  решение  $C$  стремится к нулю как  $\exp(-A/g^2)$ , где  $A = \text{const} > 0$ . Это связано с тем, что интеграл в правой части (2.16) становится логарифмически расходящимся вблизи поверхности  $\xi(k) = 0$ , если положить  $C = 0$ . В такой ситуации нетрудно получить асимптотическую форму решения при малых  $g$ :

$$C(k) = \tilde{\omega} e^{-\frac{1}{\rho}} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\omega\{k_0 \sqrt{2(1-t)}\}}{\omega\{k_0 \sqrt{2(1-t)}\} + |\xi(k)|} dt, \quad (2.17)$$

где

$$\rho = g^2 \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{k^2}{\frac{d\tilde{E}(k)}{dk}} \right)_{k=k_0}, \quad \tilde{E}(k_0) = \lambda \quad (2.18)$$

и

$$\ln \tilde{\omega} = \int_0^\infty \ln \left( \frac{1}{2\xi} \right) \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\omega\{k_0 \sqrt{2(1-t)}\}}{\omega\{k_0 \sqrt{2(1-t)}\} + \xi} dt \right\}^2 d\xi, \quad (2.19)$$

причем величина  $\tilde{E}(k)$  определяется выражением (2.10). Импульс обрезания  $q_M$  явно не входит в (2.17) и (2.19), так как формально можно считать  $\omega(q) = 0$  при  $|q| > q_M$ .

Учитывая дополнительное условие (2.7) и полученные выражения (2.14) и (2.17), можно заметить, что

$$k_0 = k_F.$$

Поправки к выражению (2.10), происходящие от замены входящих в него  $u$ ,  $v$  на их нормальные значения (2.12), будут экспоненциально малыми. Поэтому в формулах (2.17), (2.18) мы можем без потери точности заменить  $\bar{E}(k)$  на соответствующую форму для нормального состояния и интерпретировать множитель

$$\frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{k^2}{d\bar{E}} \right)_{k=k_F} = \frac{1}{V} \left\{ \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi k^2 dk}{dE} \right\}_{k=k_F}$$

как относительную плотность  $dn/dE$  числа электронных уровней в бесконечно узком слое вблизи поверхности Ферми. Тогда

$$\rho = g^2 \frac{dn}{dE}. \quad (2.20)$$

### 2.3. Основное состояние и однофермионные возбуждения.

Перейдем теперь к вычислению энергии основного состояния во втором приближении. Из всего  $H_{int}$  мы должны теперь учесть только  $H_1$ . Получим при этом для собственного значения  $H$  в основном состоянии

$$U - \langle \hat{C}_v^* H_1 H_0^{-1} H_1 C_v \rangle = \\ = 2 \sum_k [E(k) - \lambda] v_k^2 - \sum_{\substack{k, k' \\ (k \neq k')}} \frac{g^2}{V} \frac{\omega(k' - k) \{u_k^2 v_{k'}^2 + u_k v_k u_{k'} v_{k'}\}}{\omega(k' - k) + \varepsilon(k) + \varepsilon(k')}.$$

Подставив сюда найденные для  $u$ ,  $v$  выражения, вычисляем разность  $\Delta E$  между энергией нормального состояния и энергией сверхпроводящего состояния.

В результате получаем:

$$\frac{\Delta E}{V} = - \frac{dn}{dE} \frac{\bar{\omega}^2}{2} \exp \left\{ - \frac{2}{\rho} \right\}. \quad (2.21)$$

Построим в этом же приближении формулу для энергии элементарного возбуждения. Возьмем для этого возбужденное

состояние  $C_1 = \hat{\alpha}_{k_0} C_v$  и применим к нему обычным образом теорию возмущений. Получим для энергии элементарного возбуждения с импульсом  $k$  следующее выражение:

$$E_e(k) = \varepsilon(k) - \langle \hat{C}_1 H_{int} (H_0 - \varepsilon(k))^{-1} H_{int} C_1 \rangle_{\text{связ}},$$

раскрывая которое, найдем

$$E_e(k) = \tilde{\varepsilon}(k) \left\{ 1 - \frac{g^2}{V} \sum_{k'} \omega(k-k') \frac{u_k^2 u_{k'}^2 + v_k^2 v_{k'}^2}{[\omega(k-k') + \varepsilon(k')]^2 - \varepsilon^2(k)} \right\} + \\ + \frac{g^2}{V} 2u_k v_k \sum_{k'} \frac{\omega(k-k') [\omega(k-k') + \varepsilon(k')]}{[\omega(k-k') + \varepsilon(k')]^2 - \varepsilon^2(k)} u_{k'} v_{k'}.$$

Первый член, пропорциональный  $\tilde{\varepsilon}(k)$ , никакими особыми свойствами не обладает и обращается в нуль на поверхности Ферми. Второй же член на поверхности Ферми равен

$$\frac{g^2}{V} 2u_k v_k \sum_{k'} \frac{\omega(k-k')}{\omega(k-k') + \varepsilon(k')} u_{k'} v_{k'} = 2u_k v_k C(k) = C(k_F) = \tilde{\omega} e^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Таким образом, мы получили, что элементарные возбуждения являются фермиевскими и что они отделены от основного состояния щелью

$$\Delta = \tilde{\omega} e^{-\frac{1}{\rho}}. \quad (2.22)$$

Для нормального состояния элементарные возбуждения щели не имеют. Мы подчеркиваем, что здесь получен фермиевский тип возбуждений [в системе есть возбуждения и бозевского типа (см. § 4)].

Следует здесь также отметить, что указанные однофермионные возбуждения не сохраняют число частиц основного состояния. Из них, конечно, можно составить такие возбуждения, которые будут сохранять в среднем число частиц. Для этого достаточно рассмотреть в качестве элементарного возбуждения пару из однофермионных возбуждений.

В связи с формулами (2.21), (2.22) заметим, что первые качественные результаты принадлежат Фрелиху [3]. Для одномерной задачи он установил, что разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний пропорциональна  $\exp(-2/\rho)$  и в энергетическом спектре электронов имеется щель порядка  $\exp(-1/\rho)$ . Отсюда Фрелихом был сделан важный вывод

о неаналитической зависимости решений от  $\rho$  в окрестности точки  $\rho = 0$ . Далее им было показано, что состояние со щелью является токовым (сравни с § 3).

Интересно также отметить, что полученные в [6] результаты относительно разности энергий нормального и сверхпроводящего состояний совпадают с результатом теории Бардина, Купера и Шриффера [5], если параметры  $\omega$  и  $V$  их теории выбрать следующим образом:

$$2\omega = \tilde{\omega}, \quad V = g^2.$$

Таким образом, в этом параграфе мы исследовали основное и возбужденные состояния гамильтониана модели Фрелиха и установили явный вид энергии элементарных возбуждений. Легко видеть, что последние удовлетворяют критерию сверхтекучести, сформулированному во введении. В следующем параграфе мы покажем для более усовершенствованной теории, что из такого спектра элементарных возбуждений следует свойство сверхпроводимости (сверхтекучести фермиевской системы).

---

### § 3. РЕНОРМИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ В МОДЕЛИ ФРЕЛИХА \*

В предыдущем параграфе были изложены основные принципы нового метода в теории сверхпроводимости. При этом рассматривалась модель Фрелиха и использовались разложения по степеням константы электронно-фононного взаимодействия. Фактически эти разложения проводились по степеням безразмерного параметра (2.20):

$$\rho = g^2 \frac{dn}{dE}.$$

Заметим, что в задаче имеется еще один малый параметр — отношение энергии звукового кванта к энергии Ферми,  $\omega/E_F$ . Параметр  $\rho$  не является весьма малым и принимает, по оценке Пайнса [11], значения между 0,1 и 0,49, отношение же  $\omega/E_F$  действительно мало. Так как в гамильтониане электронно-фононного взаимодействия константа  $g$  входит вместе с множителем  $\sqrt{\omega}$  и так как естественной единицей энергии является  $E_F$ , то казалось бы, что разложения должны происходить по степеням  $\rho\omega/E_F$ . Однако расчет следующего приближения показывает, что при этом результаты первого приближения относительно изменяются на величины порядка  $\rho$ , а не  $\rho\omega/E_F$ .

Это происходит потому, что при виртуальном рождении пары фононов без фермионов, энергетический знаменатель пропорционален  $\omega$ , в результате чего в формулах появляются  $\rho$  без сопровождающего множителя  $\omega/E_F$ .

Таким образом, точность приближения может быть существенно повышена, если провести ренормировку энергии фоно-

\* Изложение этого параграфа основывается на работе [10].

нов или, что то же самое, применить методику компенсации диаграмм, чтобы скомпенсировать вклад процессов виртуального рождения пары фононов. Тогда процессы виртуального рождения большого числа фононов, появляющиеся в высших приближениях, также не будут ухудшать сходимости, поскольку в соответствующие матричные элементы  $\rho\omega/E_F$  будет входить в достаточно высокой степени. Поэтому сокращение одного множителя  $\omega/E_F$  за счет энергетического знаменателя уже не уничтожит всего малого множителя при  $\rho$ .

**3.1. Уравнения компенсации и перенормировки.** Будем исходить из выражения для гамильтониана (2.6):

$$H_{Fr} = \sum_{k,s} \{E(k) - \lambda\} \hat{a}_{ks}^\dagger a_{ks} + \sum_q \omega(q) \hat{b}_q^\dagger b_q + H_{int},$$

$$H_{int} = \sum_{\substack{k, k', q, s \\ (k' - k = q)}} g(q) \left\{ \frac{\omega(q)}{2V} \right\}^{1/2} \hat{a}_{ks}^\dagger a_{k's} \hat{b}_q^\dagger + \text{сопр.}, \quad (3.1)$$

в котором вместо постоянной  $g$  введена некоторая вещественная функция  $g(q)$ . Для упрощения выкладок сделаем обычное допущение о том, что функции  $E(k)$ ,  $\omega(q)$ ,  $g(q)$  инвариантны по отношению к отражению  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ . Свойства радиальной симметрии предполагать не будем.

В соответствии с намеченной программой совершим каноническое преобразование квантованных амплитуд фермионов (2.4) и бозонов (1.3):

$$\begin{aligned} a_{k,+} &= u_k \alpha_{k0} + v_k \hat{\alpha}_{k1}^\dagger \\ a_{-k,-} &= u_k \alpha_{k1} - v_k \hat{\alpha}_{k0}^\dagger \\ b_q &= \lambda_q \beta_q + \mu_q \hat{\beta}_{-q}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $\lambda_q$ ,  $\mu_q$  — вещественные числа, связанные соотношениями

$$u_k^2 + v_k^2 = 1, \quad \lambda_q^2 - \mu_q^2 = 1 \quad (3.3)$$

и четные относительно замены  $k \rightarrow -k$ ,  $q \rightarrow -q$ . В преобразованном гамильтониане выделим часть

$$H_0 = \sum_k \tilde{\varepsilon}(k) (\hat{\alpha}_{k0}^\dagger \alpha_{k0} + \hat{\alpha}_{k1}^\dagger \alpha_{k1}) + \sum_q \tilde{\omega}(q) \hat{\beta}_q^\dagger \beta_q,$$

в которой  $\tilde{\varepsilon}(k)$ ,  $\tilde{\omega}(q)$  представляют «перенормированные» энергии фермионных и бозонных возбуждений; остальные члены преобразованного гамильтониана отнесем к гамильтониану взаимодействия. Получим из (3.1)

$$H = H_0 + U + H' + H'',$$

где

$$U = \text{const} = 2 \sum_k \{E(k) - \lambda\} v_k^2 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2,$$

$$\begin{aligned} H' = & \sum_{\substack{k, k', q \\ (k' - k = q)}} g(q) \left\{ \frac{\omega(q)}{21'} \right\}^{1/2} (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k) (\dot{\alpha}_{k_0} \dot{\alpha}_{k'_1} + \alpha_{k_1} \alpha_{k'_0}) (\mu_q + \lambda_q) \times \\ & \times (\dot{\beta}_q + \beta_{-q}) + \sum_{\substack{k, k', q \\ (k' - k = q)}} g(q) \left\{ \frac{\omega(q)}{21'} \right\}^{1/2} (u_k u_{k'} - v_k v_{k'}) \times \\ & \times (\dot{\alpha}_{k_0} \alpha_{k'_0} + \dot{\alpha}_{k'_1} \alpha_{k_1}) (\lambda_q + \mu_q) (\dot{\beta}_q + \beta_q), \\ H'' = & \sum_k \{ (E(k) - \lambda) (u_k^2 - v_k^2) - \tilde{\varepsilon}(k) \} \{ \dot{\alpha}_{k_0} \alpha_{k_0} + \dot{\alpha}_{k_1} \alpha_{k_1} \} + \\ & + 2 \sum_k \{ E(k) - \lambda \} u_k v_k (\dot{\alpha}_{k_0} \dot{\alpha}_{k_1} + \alpha_{k_1} \alpha_{k_0}) + \\ & + \sum_q \{ \omega(q) (\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q) \} \dot{\beta}_q \beta_q + \sum_q \omega(q) \lambda_q \mu_q (\dot{\beta}_q \dot{\beta}_{-q} + \beta_{-q} \beta_q). \end{aligned}$$

Применим принцип компенсации «опасных» диаграмм, чтобы скомпенсировать процессы виртуального рождения из вакуума пары фермионов  $\dot{\alpha}_{k_0} \dot{\alpha}_{k_1}$  и пары бозонов  $\dot{\beta}_q \dot{\beta}_{-q}$ . Получим во втором порядке следующие уравнения:

$$\begin{aligned} 2 [E(k) - \lambda] u_k v_k - \langle \dot{C}_v \alpha_{k_1} \alpha_{k_0} H' H_0^{-1} H' C_v \rangle &= 0, \\ \omega(q) \lambda_q \mu_q - \langle \dot{C}_v \beta_{-q} \beta_q H' H_0^{-1} H' C_v \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $C_v$  — вакуумная волновая функция с нулевыми числами заполнения  $\dot{\alpha}_{k_0} \alpha_{k_0}$ ,  $\dot{\alpha}_{k_1} \alpha_{k_1}$ ,  $\dot{\beta}_q \beta_q$ .

Для определения ренормированных энергий  $\tilde{\varepsilon}(k)$ ,  $\tilde{\omega}(k)$  имеем в принятом приближении

$$\begin{aligned} \{E(k) - \lambda\} (u_k^2 - v_k^2) - \tilde{\varepsilon}(k) - \\ - \langle \dot{C}_v \alpha_{k_0} H' (H_0 - \tilde{\varepsilon}(k))^{-1} H' \dot{\alpha}_{k_0} C_v \rangle &= 0, \\ \omega(q) (\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q) - \\ - \langle \dot{C}_v \beta_q H' (H_0 - \tilde{\omega}(q))^{-1} H' \dot{\beta}_q C_v \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подчеркнем, что в полученных уравнениях в выражениях матричных элементов учитываются только связанные диаграммы. В уравнении (3.5) ничего не изменилось бы, если мы поставим  $\alpha_{k_1}$ ,  $\dot{\alpha}_{k_1}$  вместо  $\alpha_{k_0}$ ,  $\dot{\alpha}_{k_0}$ , ввиду симметрии по отношению

к преобразованию (0)  $\rightleftharpoons$  (1). Раскроем теперь уравнения (3.4) и (3.5). Получим

$$\left\{ E(k) - \frac{1}{2V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') \omega(k-k')}{\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')} (\lambda_{k'-k} + \mu_{k'-k})^2 \times \right. \\ \left. \times (u_{k'}^2 - v_{k'}^2) - \lambda \right\} u_k v_k = \frac{u_k^2 - v_k^2}{2V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') \omega(k-k')}{\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')} \times \\ \times (\lambda_{k'-k} + \mu_{k'-k})^2 u_{k'} v_{k'}, \quad (3.6)$$

$$\lambda_q \mu_q - (\lambda_q + \mu_q)^2 \frac{g^2(q)}{2V} \sum_{\substack{k, k' \\ (k'-k=q)}} \frac{(u_k v_{k'} + u_{k'} v_k)^2}{\bar{\omega}(q) + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')} = 0, \quad (3.7)$$

$$\bar{\varepsilon}(k) = \left\{ E(k) - \frac{1}{2V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') \omega(k-k') (\lambda_{k-k'} + \mu_{k-k'})^2}{\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')} \times \right. \\ \left. \times (u_{k'}^2 + v_{k'}^2) - \lambda \right\} (u_k^2 - v_k^2) - \frac{1}{V} \sum_{k'} \bar{\varepsilon}(k') \times \\ \times \frac{g^2(k-k') (\lambda_{k-k'} + \mu_{k-k'})^2 \omega(k-k')}{[\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k')]^2 - [\bar{\varepsilon}(k)]^2} (u_k^2 u_{k'}^2 + v_k^2 v_{k'}^2) + 2u_k v_k \frac{1}{V} \times \\ \times \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') (\lambda_{k-k'} + \mu_{k-k'})^2 \omega(k-k') [\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k')]}{[\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k')]^2 - [\bar{\varepsilon}(k)]^2} u_{k'} v_{k'}, \quad (3.8)$$

$$\bar{\omega}(q) = \omega(q) (\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \frac{\omega(q) g^2(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{2V} \sum_{(k'-k=q)} (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k)^2 \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k') - \bar{\omega}(q)} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k') + \bar{\omega}(q)} \right\}. \quad (3.9)$$

**3.2. Упрощение выведенных соотношений.** Займемся сейчас некоторым упрощением этих соотношений. С одной стороны, они излишне сложны, с другой стороны, — и это самое главное — они еще содержат члены, по своей малости превышающие принятую степень приближения. Мы должны поэтому ограничиться в них членами не выше первого порядка по отношению к нашему малому параметру  $\rho\omega/E_F$ .



Начнем с уравнений (3.7) и (3.9). Решая их, найдем:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_q + \mu_q)^2 &= \left\{ 1 - \frac{2}{V} \sum_{k'-k=q} g^2(q) \frac{(u_k v_{k'} + u_{k'} v_k)^2}{\bar{\omega}(q) + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')} \right\}^{-1/2}, \\
 \bar{\omega}(q) &= \omega(q) \left\{ 1 - \frac{g^2(q)}{2V} \sum_{k'-k=q} (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k)^2 \times \right. \\
 &\times \left[ \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k') + \bar{\omega}(q)} + \frac{3}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k') - \bar{\omega}(q)} \right] \left. \right\} \times \\
 &\times \left\{ 1 - \frac{2}{V} g^2(q) \sum_{k'-k=q} \frac{(u_k v_{k'} + u_{k'} v_k)^2}{\bar{\omega}(q) + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')} \right\}^{-1/2}. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Заметим теперь, что  $u$ ,  $v$  могут отличаться от своих нормальных значений (0, 1) лишь в окрестности поверхности Ферми в энергетическом слое ширины  $< \omega$ . Кроме того, ясно, что  $\bar{\varepsilon}(k) \sim |E(k) - E_F|$ . Поэтому, оставляя в (3.10) лишь главные члены, найдем

$$\begin{aligned}
 (\lambda_q + \mu_q)^2 &= \left\{ 1 - \frac{4g^2(q)}{V} \sum_{k'-k=q} \frac{\theta_G(k) \theta_F(k')}{E(k) - E(k')} \right\}^{-1/2}, \\
 \bar{\omega}(q) &= \omega(q) \left\{ 1 - \frac{4g^2(q)}{V} \sum_{k'-k=q} \frac{\theta_G(k) \theta_F(k')}{E(k) - E(k')} \right\}^{1/2},
 \end{aligned}$$

где  $\theta_G$  и  $\theta_F$  определены согласно (2.12).

Перейдем к уравнению (3.6) и введем в рассмотрение «ренормированную» функцию  $\tilde{g}(q)$ :

$$\tilde{g}^2(q) = g^2(q) \left\{ 1 - \frac{4g^2(q)}{V} \sum_{k'-k=q} \frac{\theta_G(k) \theta_F(k')}{E(k) - E(k')} \right\}^{-1}. \quad (3.11)$$

Ренормировка возможна, пока значения параметра связи достаточно малы. Во всяком случае они не могут превышать значения, выше которого становятся мнимыми ренормированная частота звука  $\bar{\omega}(q)$  и ренормированная функция  $\tilde{g}(q)$ . Такое же предельное значение для параметра связи было получено другим методом при исследовании устойчивости решетки по отношению к электронно-фононному взаимодействию в работе С. В. Тябликова и одного из авторов [12].

Положим, далее,

$$\xi(k) = E(k) - \frac{1}{2V} \sum_{k'} \frac{\bar{g}^2(k-k') \bar{\omega}(k-k')}{\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')} \times \\ \times (u_{k'}^2 - v_{k'}^2) - \lambda, \quad (3.12)$$

$$C(k) = \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{\bar{g}^2(k-k') \bar{\omega}(k-k')}{\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')} u_{k'} v_{k'}. \quad (3.13)$$

Тогда на основании (3.6) будем иметь

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\}, \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\} \quad (3.14)$$

и

$$C(k) = \frac{1}{2V} \sum_{k'} \frac{\bar{g}^2(k-k') \bar{\omega}(k-k')}{\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k') + \bar{\varepsilon}(k)} \frac{C(k')}{\sqrt{C^2(k') + \xi^2(k')}}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим теперь последний член в первой части формулы (3.8). Заметим, что он всегда мал (при малом  $\rho$  он будет порядка  $\omega e^{-1/\rho}$ ). Кроме того, когда  $\bar{\varepsilon}(k)$ , увеличиваясь, достигает величин порядка  $\omega$ , множитель  $u_k v_k$  практически исчезает. Поэтому, оставаясь в рамках принятого приближения, мы можем заменить знаменатель в этом члене на

$$[\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k')]^2.$$

Таким образом, получим на основании (3.12), (3.13), (3.14):

$$\bar{\varepsilon}(k) \left\{ 1 + \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{\bar{g}^2(k-k') \bar{\omega}(k-k') (u_k^2 u_{k'}^2 + v_k^2 v_{k'}^2)}{[\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}(k')]^2 - [\bar{\varepsilon}(k)]^2} \right\} = \\ = \sqrt{\xi^2(k) + C^2(k)}. \quad (3.16)$$

Для нормального состояния, когда

$$u_k = \theta_G(k), \quad v_k = \theta_F(k), \quad (3.17)$$

имеем

$$\xi_n(k) = E(k) - \lambda - \frac{1}{2V} \sum_{k'} \frac{\bar{g}^2(k-k') \bar{\omega}(k-k') \{\theta_G(k') - \theta_F(k')\}}{\bar{\omega}(k-k') + |E(k) - E_F| + |E(k') - E_F|},$$

$$\bar{\varepsilon}_n(k) = \{1 - \eta_n(k)\} |\xi_n(k)|,$$

$$\eta_n(k) = \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{\bar{g}^2(k-k') \bar{\omega}(k-k')}{[\bar{\omega}(k-k') + \bar{\varepsilon}_n(k')]^2 - [\bar{\varepsilon}_n(k)]^2} \times \\ \times [\theta_G(k) \theta_G(k') + \theta_F(k) \theta_F(k')].$$

Здесь индексом  $n$  обозначены величины для состояния (3.17). Состоянию, соответствующему нетривиальному решению уравнения (3.15), сопоставим индекс  $s$ . Заметим, что в обоих случаях величины  $\xi(k) = (E(k) - E_F)$  и  $\eta(k)$  будут первого порядка малости. Разности же  $\xi_n(k) - \xi_s(k)$ ,  $\eta_n(k) - \eta_s(k)$  будут величинами более высокого порядка малости. Поэтому из (3.16) можем получить

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_s(k) &= \sqrt{(1 - \eta_s)^2 \xi_s(k) + (1 - \eta_s)^2 C^2(k)} \approx \\ &\approx \sqrt{(1 - \eta_n)^2 \xi_n^2(k) + C^2(k)}.\end{aligned}$$

Итак, в рассматриваемом приближении

$$\tilde{\varepsilon}_s(k) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_n^2(k) + C^2(k)}.$$

Заметим далее, что в формулах (3.14) и уравнении (3.15) мы можем заменить  $\tilde{\varepsilon}(k)$  и  $|\xi(k)|$  прямо на  $|E(k) - E_F|$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}C(k) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{\tilde{g}^2(k-k') \tilde{\omega}(k-k')}{\tilde{\omega}(k-k') + |\xi(k)| + |\xi(k')|} \times \\ &\times \frac{C(k')}{\sqrt{\xi^2(k') + C^2(k')}} dk',\end{aligned}\quad (3.18)$$

где

$$\xi(k) = E(k) - E_F.$$

Мы пришли здесь к уравнению (2.16) предыдущего параграфа. Отличие состоит в том, что теперь полученное уравнение выведено без ограничительного допущения о радиальной симметрии. Основное же преимущество обусловлено тем, что мы за счет простой ренормировки  $g(q)$  и  $\omega(q)$  добились существенного улучшения степени точности, так как использовали асимптотические приближения не по степеням  $\rho$ , а по степеням  $\rho\omega/E_F$ . Величина

$$\rho(q) = \tilde{g}^2(q) \frac{dn}{dE}$$

не обязательно должна быть теперь весьма малой. Достаточно лишь, чтобы решение  $C(k)$  уравнения (3.18) было мало по сравнению с  $\omega$  (важна, так сказать, только экспоненциальная малость).

**3.3. Разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний.** Перейдем теперь к оценке разности

$$H_s(\lambda) - H_n(\lambda) \quad (3.19)$$

собственных значений гамильтониана  $H$  для состояний  $s$  и  $n$  при одном и том же значении  $\lambda \sim E_F$ . Имеем в рассматриваемом приближении

$$H(\lambda) = U - \langle \dot{C}_\epsilon H' H_0^{-1} H' C_\nu \rangle = \\ = 2 \sum_k \{E(k) - \lambda\} v_k^2 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2 - \langle \dot{C}_\epsilon H' H_0^{-1} H' C_\nu \rangle.$$

Раскрывая, получим:

$$H(\lambda) = 2 \sum_k \{E(k) - \lambda\} v_k^2 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2 - \\ - \frac{1}{V} \sum_{(k \neq k')} \frac{\tilde{g}^2(k-k') \tilde{\omega}(k-k')}{\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k')} \{u_k^2 v_{k'}^2 + u_k v_k u_{k'} v_{k'}\}. \quad (3.20)$$

Далее, подставим в (3.20) нетривиальные и тривиальные значения  $u_k, v_k$ . Упрощая и отбрасывая члены высшего порядка малости, найдем:

$$H_s(\lambda) - H_n(\lambda) = \\ = - \sum_k \theta_G(k) \frac{v_k^3}{u_k} C(k) - \sum_k \theta_F(k) \frac{u_k^3}{v_k} C(k)$$

или, на основании (3.14),

$$\frac{H_s(\lambda) - H_n(\lambda)}{V} = - \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)} \times \\ \times \left\{ \theta_G(k) \left[ 1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right]^2 + \right. \\ \left. + \theta_F(k) \left[ 1 + \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) - \xi^2(k)}} \right]^2 \right\}. \quad (3.21)$$

Перейдем к вычислению разности  $E_s^N - E_n^N$  энергий обоих рассматриваемых состояний при одном и том же числе электронов  $N = N_0$ . Заметим для этого, что

$$H(\lambda) = E(\lambda) - \lambda N(\lambda),$$

$$\frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda} = N(\lambda).$$

Имеем, следовательно,

$$\begin{aligned}
 E_s^N - E_n^N &= E_s[\lambda_s(N)] - E_n[\lambda_n(N)] = \\
 &= H_s\{\lambda_s(N)\} - H_n\{\lambda_n(N)\} + [\lambda_s(N) - \lambda_n(N)]N = \\
 &= H_s\{\lambda_s(N)\} - H_n\{\lambda_s(N)\} + H_n\{\lambda_s(N)\} - H_n[\lambda_n(N)] + \\
 &\quad + [\lambda_s(N) - \lambda_n(N)]N = \\
 &= H_s\{\lambda_s(N)\} - H_n\{\lambda_s(N)\} + H_n\{\lambda_s(N)\} - H_n\{\lambda_n(N)\} - \\
 &\quad - [\lambda_s(N) - \lambda_n(N)] \left( \frac{\partial H_n(\lambda)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_n(N)} = \\
 &= H_s(\lambda_s) - H_n(\lambda_s) + \frac{1}{2} [\lambda_s(N) - \lambda_n(N)]^2 \frac{\partial^2 \widetilde{H}_n}{\partial \lambda^2}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что второй член в последнем выражении будет второго порядка малости по отношению к первому и потому в принятом приближении

$$E_s^N - E_n^N = H_s(\lambda_s) - H_n(\lambda_s). \quad (3.22)$$

Таким образом, рассматриваемая разность энергий определяется той же формулой (3.21), что и  $H_s(\lambda) - H_n(\lambda)$ .

**3.4. Свойство сверхпроводимости.** Установим свойство сверхпроводимости. Так как мы здесь отвлекаемся от изучения действия магнитного поля, то, строго говоря, дело здесь будет идти об установлении свойства сверхтекучести электронной жидкости в модели Фрелиха. Для этого покажем, что существует такое состояние с отличным от нуля средним суммарным импульсом электронов, у которого энергии элементарных возбуждений все положительны. Тем самым мы установим возможность токового состояния, устойчивого по отношению к слабым возмущениям.

Чтобы формально не выходить из класса состояний с нулевым суммарным импульсом электронов и совершенно не менять предыдущие рассуждения, будет удобно изменить начало отсчета импульсов электронов, т. е. провести трансляцию в этом импульсном пространстве:

$$\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{p}. \quad (3.23)$$

Тогда очевидно, что состояние с нулевым суммарным импульсом электронов в новой системе отсчета, в нормальной системе отсчета будет обладать импульсом, равным  $N\mathbf{p}$ .

С другой стороны, нетрудно заметить, что влияние трансляции (3.23) на рассматриваемый гамильтониан  $H$  сводится лишь к замене  $E(\mathbf{k})$  на

$$E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = E(\mathbf{k}) - \left( \mathbf{p} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \right) + \dots \quad (3.24)$$

Добавка  $-\left(\mathbf{p} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}\right)$  приводит к появлению в  $H$  дополнительного члена

$$-\sum_{k, s} \left(\mathbf{p} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}\right) \dot{a}_{ks} a_{ks} = -\sum_{k, s} \left(\mathbf{p} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}\right) (\dot{a}_{k_0} a_{k_0} - \dot{a}_{k_1} a_{k_1}),$$

который включим в  $H''$ . Предположим, что импульс  $\mathbf{p}$  столь мал, что  $\left(\mathbf{p} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}\right)$  и  $E(\mathbf{k}) \sim E_F$  будут величинами порядка  $C(k)$ . Тогда ввиду малости дополнительного члена в  $H$  его влиянием на  $u_k, v_k, \lambda_q, \mu_q$  следует пренебречь и единственным его эффектом будет изменение энергии элементарных возбуждений:

$$\tilde{\varepsilon}(k) \rightarrow \tilde{\varepsilon}(k) \pm \left(\mathbf{p} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}\right).$$

Обозначим через  $\Delta$  энергетическую щель, отделяющую энергию основного нетокового состояния от энергии возбуждений. Иначе говоря, обозначим через  $\Delta$  наименьшее значение  $C(k)$  на поверхности Ферми.

Так как  $\tilde{\varepsilon}(k) > \Delta$ , то элементарные возбуждения останутся положительными для токового состояния, если средняя скорость электронов настолько мала, что

$$\left|\mathbf{p} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}\right| < \Delta, \quad E(\mathbf{k}) \sim E_F$$

или в случае радиальной симметрии

$$|\mathbf{u}k_F| < \Delta,$$

где  $\mathbf{u}$  — средняя скорость.

Следовательно, при достаточно малых скоростях токовое состояние остается устойчивым по отношению к малым возмущениям.

Разумеется, если бы  $\Delta = 0$ , это свойство не имело бы места, поскольку тогда энергии элементарных возбуждений могли бы принимать отрицательные значения. Подчеркнем, что, пока мы не принимаем во внимание действие магнитного поля, токовое состояние мы должны считать метастабильным. Его энергия тогда оказывается больше энергии покоящегося состояния на величину, пропорциональную  $u^2$ . Формально это приращение энергии мы можем вычислить, дополняя (3.24) следующим членом:

$$\frac{1}{2} \sum_{(\alpha, \beta=1, 2, 3)} p^\alpha p^\beta \frac{\partial^2 E(\mathbf{k})}{\partial k^\alpha \partial k^\beta}$$

и учитывая его влияние на энергию основного токового состояния.

Подчеркнем еще аналогию со случаем бозе-газа. В этом случае вместо ферми-сферы мы имеем в низшем энергетическом состоянии конденсат. При отсутствии взаимодействия, т. е. в случае идеального бозе-газа, свойства сверхтекучести не будет. Оно появляется только из-за наличия хотя бы слабого взаимодействия. Тогда появляется также существенное взаимодействие частиц вне конденсата с противоположными малыми импульсами  $\pm k$ ; это препятствует возможности применения обычной теории возмущения.

В рассматриваемом здесь случае идеального электронного газа положение совершенно аналогично: газ без взаимодействия свойством сверхпроводимости (сверхтекучести) не обладает и только электронно-фононное взаимодействие, ведущее к взаимодействию электронов с импульсами  $\pm k$  и спинами  $\pm 1/2$ , ведет к появлению свойства сверхпроводимости. В некотором приближении это взаимодействие можно свести к эквивалентному взаимодействию между фермионами и тогда аналогия с бозе-газом в отношении свойства сверхтекучести делается еще более полной.

До последнего времени считалось, что свойство сверхтекучести возможно только для систем частиц, подчиняющихся статистике Бозе. Ввиду создавшейся ситуации с теорией сверхпроводимости это положение нуждается в пересмотре. По-видимому, реальный случай для изучения свойств сверхтекучести ферми-систем, именно сверхтекучести, а не сверхпроводимости, представляет теория ядерной материи.

---

## § 4. СПЕКТР КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СОСТОЯНИЯ \*

4. 1. Метод приближенного вторичного квантования в применении к системе с кулоновским взаимодействием. До сих пор мы рассматривали элементарные возбуждения простейшего, «индивидуального» типа — появление фермиона с энергией  $\tilde{\epsilon}(k)$  или фонона с энергией  $\tilde{\omega}(k)$ . Займемся теперь исследованием более сложной ветви спектра, соответствующей коллективным возбуждениям фермионов. Типичный случай такого рода возбуждений в фермионных системах представляют плазменные колебания в плотном электронном газе.

Вполне корректный и вместе с тем достаточно простой анализ их можно произвести с помощью методики, разработанной Гелл-Манном, Брюкнером, Савада, Брутом и Фукуда [13]. Так, для получения основного приближения можно ограничиться суммированием только тех диаграмм, в которых не разрушается элементарный комплекс частица—дырка (фиг. 5). С физической точки зрения важность диаграмм именно этого типа обусловлена наличием кулоновского притяжения между частицей и дыркой.

Чтобы получить секулярное уравнение для определения энергетического спектра  $E(q)$  плазменных колебаний, следует просуммировать диаграммы типа фиг. 6.

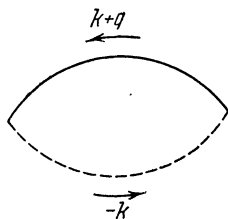
Для суммирования их удобно воспользоваться методом приближенного вторичного квантования и построить упрощенный гамильтониан, допускающий точную диагонализацию таким образом, чтобы он приводил только к диаграммам рассматриваемого типа, но с тем же вкладом, как и у точного гамильтониана. При этих условиях диагонализацией упрощен-

\* Изложение этого параграфа основывается на исследованиях, проведенных Н. Н. Боголюбовым и частично (пункт 4. 4) В. В. Толмачевым.

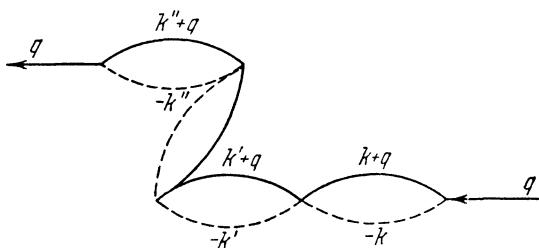


ного гамильтониана мы естественно получим те же результаты, что и путем непосредственного суммирования диаграмм.

Для построения такого упрощенного «эквивалентного» гамильтониана необходимо обеспечить выполнение следующих требований: надо, чтобы комплекс фиг. 5 не разрывался, чтобы вершинные части упрощенного гамильтониана имели тот же вклад, что и те вершинные части точного гамильтониана, которые учитываются в рассматриваемых диаграммах, и, наконец, чтобы энергетические знаменатели были одинаковы в обоих случаях.



Фиг. 5



Фиг. 6

Первому условию удовлетворим, описав появление и уничтожение комплекса частица—дырка не произведением ферми-амплитуд

$$\ddot{a}_{k+q}^\dagger \ddot{b}_k, \quad b_k a_{k+q},$$

как в точном случае, а бозе-амплитудами\*

$$\ddot{\beta}_q(k), \quad \beta_q(k)$$

с двумя индексами  $k, q$ .

\* Заметим, что в диаграммах фиг. 6 все комплексы различны:  $k \neq k' \neq k'' \dots$ . При пользовании бозе-амплитудами у нас в диаграммах смогут появляться несколько одинаковых комплексов, например, с  $k = k'$ , несводимые к одному. Однако такие лишние элементы будут давать лишь бесконечно малый вклад в случаях расчета элементарных возбуждений, поскольку проводится интеграция по всем импульсам  $k, k', k''$  и мы имеем линейную цепочку комплексов.

При расчете основного состояния иногда может возникнуть интересная ситуация, когда необходимо прямо запретить повторение в диаграммах одинаковых комплексов. В этих случаях [14] следует считать амплитуды  $\ddot{\beta}, \beta$  не бозевскими, а паулиевскими. Иначе говоря, мы должны подчинить их всем перестановочным соотношениям типа Бозе, кроме соотношения

$$\beta \ddot{\beta} - \ddot{\beta} \beta = 1,$$

которое следует заменить на  $\beta \ddot{\beta} + \ddot{\beta} \beta = 1$ .

В рассматриваемых диаграммах имеются вершинные части типов, изображенных на фиг. 7. В точном гамильтониане им соответствуют члены

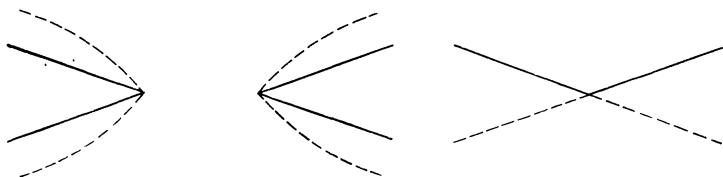
$$P_q(k, k') \hat{a}_{k+q}^\dagger \hat{b}_k^\dagger \hat{a}_{k'-q}^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger,$$

$$\hat{P}_q(k, k') b_k^\dagger a_{k'-q}^\dagger b_k a_{k+q}, \quad Q_q(k, k') \hat{a}_{k+q}^\dagger \hat{b}_k^\dagger b_k a_{k'+q}.$$

Поэтому гамильтониан взаимодействия в упрощенной модели мы должны составить из членов вида

$$P_q(k, k') \hat{\beta}_q(k) \hat{\beta}_{-q}(k'), \quad \hat{P}_q(k, k') \beta_{-q}(k') \beta_q(k),$$

$$Q_q(k, k') \hat{\beta}_q(k) \beta_q(k').$$



Ф и г. 7

Наконец, чтобы обеспечить правильные энергетические знаменатели, необходимо в качестве  $H_0$  (собственной энергии комплексов частица—дырка) взять выражение

$$\sum_{k, q} \{ \varepsilon_+(k+q) + \varepsilon_-(k) \} \hat{\beta}_q(k) \beta_q(k),$$

в котором  $\varepsilon_+$ ,  $\varepsilon_-$  — энергия частицы и дырки.

Таким образом, мы получаем упрощенный полный гамильтониан в виде квадратичной формы из бозе-операторов. Составив для нее секулярное уравнение, получим тем самым уравнение для определения энергии  $\varepsilon(q)$  коллективных возбуждений (в рассматриваемом случае плазменных колебаний). При фиксированном  $q$  величина  $E(q)$  будет изолированным корнем этого уравнения, соответствующим, так сказать, «связанному состоянию» пары частица—дырка, в то время как непрерывный спектр здесь будет спектром из комбинаций обычных однофермионных возбуждений.

Мы кратко изложили сейчас характерные приемы метода приближенного вторичного квантования [15] в применении к хорошо известному случаю плазменных колебаний плотного электронного газа, так как именно этот метод будет положен в основу нашего исследования коллективных возбуждений сверхпроводящего состояния, к которому теперь и приступим.

4. 2. Коллективные возбуждения в модели Фрелиха. Прежде всего заметим, что в рассматриваемой модели Фрелиха имеется притяжение между электронами с противоположными спинами и импульсами  $\pm k$  для  $k$ , лежащих вблизи поверхности Ферми. Такое же притяжение имеется и у дырок. Ясно, что это притяжение должно иметь место и в том случае, когда соответствующие импульсы частиц пары не точно противоположны, а, скажем, равны  $k + q$ ,  $-k$  с достаточно малым  $q$ .

Перейдем, как всегда, к фермионам  $(k, 0)$ ,  $(k, 1)$ , характеризующимся амплитудами

$$\hat{\alpha}_{k_0}, \alpha_{k_0}; \hat{\alpha}_{k_1}, \alpha_{k_1}.$$

Заметим, что возникновение пары

$$\hat{\alpha}_{k+q, 0} \hat{\alpha}_{k_1}$$

не изменяет спин и изменяет суммарный импульс на  $q$ . В связи с этим нетрудно обнаружить наличие эффективного притяжения между фермионами  $(k + q, 0)$ ,  $(k, 1)$  при достаточно малых  $q$ .

Отсюда мы получаем важное указание для программы надлежащего применения метода приближенного вторичного квантования. В соответствии с этим введем в качестве «неразложимого элемента» диаграмм комплекс, характеризующийся при точном рассмотрении произведениями ферми-амплитуд:

$$\hat{\alpha}_{k+q, 0} \hat{\alpha}_{k_1}, \alpha_{k_1} \alpha_{k+q, 0}.$$

В нашей приближенной модели мы сопоставим этому комплексу бозе-амплитуды

$$\hat{\beta}_q(k), \beta_q(k)$$

с двумя индексами. Нам следует теперь получить гамильтониан взаимодействия  $\Gamma'$  между различными комплексами в виде \*

$$\begin{aligned} \Gamma' = & - \sum_{\substack{(k, k', p) \\ (k \neq k')}} \hat{\beta}_p(k) \beta_p(k') A_p(k, k') - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\substack{(k, k', p) \\ (k \neq k')}} B_p(k, k') \{ \hat{\beta}_{-p}(k') \hat{\beta}_p(k) + \beta_p(k) \beta_{-p}(k') \}. \quad (4. 1) \end{aligned}$$

\* См. примечание на следующей странице.

Тогда, добавив сюда собственную энергию пар, получим полный гамильтониан упрощенной модели:

$$\Gamma = \sum_{(k, p)} \{ \tilde{\varepsilon}(k+p) + \tilde{\varepsilon}(k) \} \hat{\beta}_p(k) \beta_p(k) + \Gamma'. \quad (4.2)$$

Как известно [15], диагонализация такой квадратичной формы сводится к решению в  $C$ -числах системы однородных линейных уравнений относительно  $\varphi_k, \chi_k$ :

$$\begin{aligned} \{ \tilde{\varepsilon}(k+p) + \tilde{\varepsilon}(k) - E \} \varphi_p(k) &= \sum_{k'} A_p(k, k') \varphi_p(k') + \\ &+ \sum_{k'} B_p(k, k') \chi_p(k'), \\ \{ \tilde{\varepsilon}(k+p) + \tilde{\varepsilon}(k) + E \} \chi_p(k) &= \sum_{k'} B_{-p}(k, k') \varphi_p(k') + \\ &+ \sum_{k'} A_{-p}(k', k) \chi_p(k') \end{aligned} \quad (4.3)$$

с условием нормировки

$$\sum_{(k, p)} \{ \varphi_p^2(k) - \chi_p^2(k) \} = 1. \quad (4.4)$$

Энергия коллективных возбуждений  $E = E_c(p)$  для данного фиксированного импульса  $p$  определяется изолированным корнем соответствующего системе уравнений (4.3) секулярного уравнения. Нам остается только найти явные выражения для  $A$  и  $B$ . Заметим для этого, что в упрощенной модели

$$\begin{aligned} A_p(k, k') &= \langle \beta_p(k) \Gamma' \hat{\beta}_p(k') \rangle, \\ B_p(k, k') &= \langle \beta_{-p}(k') \beta_p(k) \Gamma' \rangle, \end{aligned}$$

где усреднение производится по вакууму операторов  $\beta$ . В рассматриваемой же точной модели Фрелиха такие вершинные части осуществляются только через обмен фононами.

Учитывая в первом приближении лишь обмен одним фононом, положим

$$\begin{aligned} -A_p(k, k') &= \langle C_v^* \alpha_{k,1} \alpha_{k+p,0} H' H_0^{-1} H' \hat{\alpha}_{k'+p,0} \hat{\alpha}_{k',1} C_v \rangle \\ -B_p(k, k') &= \langle C_v^* \alpha_{k',1} \alpha_{k'-p,0} \alpha_{k,1} \alpha_{k+p,0} H' H_0^{-1} H' C_v \rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$

\* И без всяких вычислений можно сразу же заметить, что  $A_p(k, k')$ ,  $B_p(k, k')$  должны быть вещественны, так как гамильтониан в модели Фрелиха инвариантен по отношению к инверсии времени и содержит только вещественные коэффициенты.

Здесь  $H'$  — гамильтониан электронно-фононного взаимодействия (см. формулы § 3), который напомним в форме

$$H' = \sum_{\substack{(k, k', q) \\ (k' - k = q)}} \tilde{g}(q) \left\{ \frac{\tilde{\omega}(q)}{2V} \right\}^{1/2} (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k) (\tilde{\alpha}_{k_0} \tilde{\alpha}_{k'_1} + \alpha_{k_1} \alpha_{k'_0}) (\tilde{\beta}_q + \beta_{-q}) + \\ + \sum_{\substack{(k, k', q) \\ (k' - k = q)}} \tilde{g}(q) \left\{ \frac{\tilde{\omega}(q)}{2V} \right\}^{1/2} (u_k u_{k'} - v_k v_{k'}) (\tilde{\alpha}_{k_0} \alpha_{k'_1} + \tilde{\alpha}_{k'_1} \alpha_{k_1}) (\tilde{\beta}_q + \beta_{-q}).$$

Подставляя эти выражения в (4.5), найдем

$$A_p(k, k') = \tilde{g}^2(k - k') \frac{\tilde{\omega}(k - k')}{2V} \{u_{k'+p} u_{k+p} - v_{k'+p} v_{k+p}\} \times \\ \times \{u_k u_{k'} - v_k v_{k'}\} \left\{ \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(k+p) + \tilde{\varepsilon}(k') + \tilde{\omega}(k' - k)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(k'+p) + \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\omega}(k' - k)} \right\} + \\ + \tilde{g}^2(p) \frac{1}{2V} \{u_{k'+p} v_{k'} + u_{k'} v_{k'+p}\} \{u_{k+p} v_k + u_k v_{k+p}\} + \\ + \tilde{g}^2(p) \frac{\tilde{\omega}(p)}{2V} \frac{\{u_{k'+p} v_{k'} + u_{k'} v_{k'+p}\} \{u_{k+p} v_k + u_k v_{k+p}\}}{\tilde{\varepsilon}(k'+p) + \tilde{\varepsilon}(k') + \tilde{\varepsilon}(k+p) + \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\omega}(p)}, \quad (4.6)$$

$$B_p(k, k') = -\tilde{g}^2(k' - k - p) \frac{\tilde{\omega}(k' - k - p)}{2V} \times \\ \times \frac{\{u_{k+p} v_{k'} + u_{k'} v_{k+p}\} \{u_{k'-p} v_k + u_k v_{k'-p}\}}{\tilde{\varepsilon}(k') + \tilde{\varepsilon}(k+p) + \tilde{\omega}(k' - k - p)} - \tilde{g}^2(k' - k' + p) \times \\ \times \frac{\tilde{\omega}(k - k' + p)}{2V} \frac{\{u_{k+p} v_{k'} + u_{k'} v_{k+p}\} \{u_{k'-p} v_k + u_k v_{k'+p}\}}{\tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k' - p) + \tilde{\omega}(k - k' + p)} + \\ + \tilde{g}^2(p) \frac{\tilde{\omega}(p)}{2V} \frac{\{u_{k+p} v_k + u_k v_{k+p}\} \{u_{k'-p} v_{k'} + u_{k'} v_{k'-p}\}}{\tilde{\varepsilon}(k+p) + \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\omega}(p)} + \\ + \tilde{g}^2(p) \frac{\tilde{\omega}(p)}{2V} \frac{\{u_{k+p} v_k + u_k v_{k+p}\} \{u_{k'-p} v_{k'} + u_{k'} v_{k'-p}\}}{\tilde{\varepsilon}(k' - p) + \tilde{\varepsilon}(k') + \tilde{\omega}(p)}. \quad (4.7)$$

Чтобы упростить полученные слишком сложные выражения, допустим, что для малых  $p$  можно положить

$$\tilde{g}(p) = 0.$$

Такое допущение является разумным и с физической точки зрения [11].

Упростим эти формулы за счет того, что освободимся в них от членов такой малости, которая по существу не должна учитываться в принятом приближении. Заметим, прежде всего, что в рассматриваемом процессе коллективных колебаний, как это видно хотя бы из уравнений (4.3), существенны лишь большие передачи импульсов  $k - k'$ . Поэтому в величинах типа  $\tilde{g}^2(k - k' - p)$ ,  $\tilde{\omega}(k - k' - p)$ , плавно зависящих от импульса, мы можем пренебречь добавочным импульсом  $p^*$ .

Далее, так как в том энергетическом слое, от которого практически зависит весь эффект, энергии  $\tilde{\epsilon}(k)$  малы по сравнению с  $\tilde{\omega}$ , мы заменим (как, кстати сказать, и при выводе основного уравнения для  $C(k)$ ) величины

$$\tilde{\epsilon}(k), \quad \tilde{\epsilon}(k' - p), \dots$$

просто на

$$|\xi(k)|, \quad |\xi(k')|,$$

где, как и раньше,

$$\xi(k) = E(k) - E_F.$$

Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} A_p(k, k') &= \frac{J(k, k')}{V} \{u_{k'+p}u_{k+p} - v_{k'+p}v_{k+p}\} \{u_{k'}u_k - v_{k'}v_k\}, \\ B_p(k, k') &= -\frac{J(k, k')}{V} \{u_{k+p}v_{k'} + u_{k'}v_{k+p}\} \{u_{k'-p}v_k + v_{k'-p}u_k\}, \quad (4.8) \\ J(k, k') &= \tilde{g}^2(k - k') \frac{\tilde{\omega}(k - k')}{|\xi(k)| + |\xi(k')| + \tilde{\omega}(k - k')}. \end{aligned}$$

Как видим, выражение  $J(k, k')$  здесь будет тем же самым, что и в основном уравнении для определения  $C(k)$ :

$$C(k) = \sum_{k'} \frac{J(k', k)}{2V} \frac{C(k')}{\sqrt{C^2(k') + \xi^2(k')}}. \quad (4.9)$$

Положим для сокращения

$$\begin{aligned} u_{k'}u_k - v_{k'}v_k &= L(k, k'), \\ u_{k'}v_k + v_{k'}u_k &= M(k, k'). \end{aligned}$$

\* Заметим, что, к сожалению, мы не можем сразу убрать  $p$  из выражений типа  $u(k + p)$ , так как в основной области, где  $|\xi(k)| \sim \Delta$ , эти функции быстро меняются.

Тогда (4.8) можно представить в форме

$$A_p(k, k') = \frac{J(k, k')}{V} L(k+p, k'+p) L(k, k'),$$

$$B_p(k, k') = -\frac{J(k, k')}{V} M(k+p, k') M(k, k'-p).$$

**4.3. Решение секулярных уравнений. Продольные возбуждения.** Обратимся теперь к секулярным уравнениям (4.3) и введем новые неизвестные

$$\varphi_p(k) + \chi_p(k) = \vartheta_p(k),$$

$$\varphi_p(k) - \chi_p(k) = \theta_p(k).$$

Получим:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) + \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} + \bar{\varepsilon}(k) \right\} \theta_p(k) - \\ & - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ \frac{L(k+p, k'+p) + L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') + \right. \\ & \left. + \frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) + M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} \right\} \theta_p(k') = \\ & = \left\{ E - \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) - \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} \right\} \vartheta_p(k) + \\ & + \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ \frac{L(k+p, k'+p) - L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') - \right. \\ & \left. - \frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) - M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} \right\} \vartheta_p(k'), \quad (4.10) \\ & \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) + \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} + \bar{\varepsilon}(k) \right\} \vartheta_p(k) - \\ & - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ \frac{L(k+p, k'+p) + L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') - \right. \\ & \left. - \frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) + M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} \right\} \vartheta_p(k') = \\ & = \left\{ E - \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) - \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} \right\} \theta_p(k') + \\ & + \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ \frac{L(k+p, k'+p) - L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') + \right. \quad (4.11) \\ & \left. + \frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) - M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} \right\} \theta_p(k'). \end{aligned}$$

Рассмотрим сперва случай, когда  $p=0$ . Тогда уравнения (4.10), (4.11) существенно упростятся и мы будем иметь

$$2 \sqrt{\xi^2(k) + C^2(k)} \vartheta_0(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \vartheta_0(k') = E \vartheta_0(k), \quad (4.12)$$

$$2 \sqrt{\xi^2(k) + C^2(k)} \vartheta_0(k) + \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{C(k)C(k') - \xi(k)\xi(k')}{\{[\xi^2(k) + C^2(k)][\xi^2(k') + C^2(k')]\}^{1/2}} \times \\ \times J(k, k') \vartheta_0(k') = E \vartheta_0(k). \quad (4.13)$$

Видим на основании (4.9), что система эта имеет решение

$$\vartheta_0(k) = 0, \quad \theta_0(k) = S \frac{C(k)}{\sqrt{\xi^2(k) + C^2(k)}}, \quad S = \text{const.} \\ E = 0$$

Таким образом, приходим к важному заключению о том, что спектр коллективных возбуждений начинается с нуля.

Перейдем теперь к исследованию коллективных возбуждений при  $p$  малых, но отличных от нуля. Чтобы не усложнять вычислений, ограничимся здесь случаем радиальной симметрии.

Прежде всего нам надо будет разложить коэффициенты, входящие в наши уравнения по степеням  $p$ . Так как в существенной энергетической области  $E(k)$  весьма близко к  $E_F$ , можно положить

$$\xi(k+p) = s(pe) + \xi(k),$$

где  $s$  — абсолютная величина скорости электронов на сфере Ферми,  $e$  — орт вектора  $k$ . Удобнее принять направление  $p$  за ось отсчета  $e$ :

$$\xi(k+p) = spe_0 + \xi(k).$$

Заметим далее, что в выражениях, заключающих  $\xi^2 + C^2(\xi)$ , мы можем пренебречь изменением  $C(\xi)$  по сравнению с  $\xi$ , поскольку  $C(\xi)$  является медленно меняющейся функцией. Найдем тогда

$$u(k+p) = u(\xi) + spe_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \dots,$$

$$\bar{\varepsilon}(k+p) = \bar{\varepsilon}(\xi) + spe_0 \frac{\partial \bar{\varepsilon}(\xi)}{\partial \xi} + \dots$$



Удобно при этом ввести в качестве аргументов вместо вектора  $k$  число  $\xi$  и орт  $e$ . Таким образом придем к асимптотическим формулам вида

$$\begin{aligned} & \frac{L(k+p, k'+p) + L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{\xi\xi' - CC'}{2 [(\xi^2 + C^2)(\xi'^2 + C'^2)]^{1/2}} + spe_0 P_1(\xi, \xi') + sp e'_0 P_2(\xi, \xi') + \dots, \\ & \frac{L(k+p, k'+p) - L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') = \\ & = spe_0 Q_1(\xi, \xi') + spe'_0 Q_2(\xi, \xi') + \dots, \\ & \frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) + M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} = \\ & = \frac{1}{2} - \frac{\xi\xi' - CC'}{2 [(\xi^2 + C^2)(\xi'^2 + C'^2)]^{1/2}} + (sp)^2 \{e_0^2 R_1(\xi, \xi') + e_0 e'_0 R_2(\xi, \xi') + \\ & \quad + e_0'^2 R_3(\xi, \xi') + R_4(\xi, \xi')\} + \dots \\ & \frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) - M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} = \\ & = spe_0 S_1(\xi, \xi') + spe'_0 S_2(\xi, \xi') + \dots \end{aligned}$$

Применим теперь к секулярным уравнениям (4.10), (4.11) обычную теорию возмущений, считая  $p$  и  $E$  величинами первого порядка малости. Положим

$$\begin{aligned} \theta_p(k) &= \theta_0(\xi) + spe_0 \theta_1(\xi) + \dots, & \vartheta_p(k) &= E \vartheta_1(\xi) + spe_0 \bar{\vartheta}_1(\xi) + \dots, \\ \theta_0(k) &= S \frac{C}{\sqrt{\xi^2 + C^2}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Подставив эти выражения в (4.10), (4.11) и отделив члены различных порядков, можем определить  $\theta_1(\xi)$ ,  $\vartheta_1(\xi)$ ,  $\bar{\vartheta}_1(\xi)$  через  $\theta_0(\xi)$ . Воспользовавшись полученными выражениями, представим уравнение (4.10) в явном виде с точностью до величин второго порядка малости. Таким образом, построим соотношение вида

$$2\bar{\varepsilon}(k) \theta(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \theta(k') = F(E, sp, k), \quad (4.15)$$

где  $F(E, sp, k)$  — квадратичная форма по отношению к  $E, sp$ . Умножим (4.15) на  $C(k) [2V\bar{\varepsilon}(k)]^{-1}$  и просуммируем по  $k$ . В силу уравнения (4.9), получим

$$\frac{1}{V} \sum_k F(E, sp, k) \frac{C(k)}{\bar{\varepsilon}(k)} = 0.$$

Отсюда и определим

$$E = \alpha sp,$$

где  $\alpha$  — численный коэффициент. Так, если отбросить члены, исчезающие вместе с параметром  $\rho = \tilde{g}^2 \frac{dn}{dE}$ , то будем иметь:

$$E \vartheta_1(\xi) + spe_0 \bar{\vartheta}_1(\xi) = \frac{E - e_0 ps}{2\tilde{\varepsilon}(\xi)} \theta_0(\xi),$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{3}.$$

Получим, следовательно, два корня для  $E$ . Чтобы определить должный знак, обратимся к условию нормировки (4.4), которое запишем в форме

$$\sum_k \vartheta_p(k) \theta_p(k) = 1,$$

откуда

$$E \sum \frac{\theta_0^2(\xi)}{2\tilde{\varepsilon}(\xi)} = 1$$

и поэтому

$$E > 0.$$

Итак, в принятом приближении

$$E_c(p) = \frac{sp}{\sqrt{3}}. \quad (4.16)$$

Заметим теперь, что коллективные возбуждения будут существовать лишь пока

$$E_c(p) < 2\Delta,$$

где  $\Delta$  — величина энергетической щели (т. е. значение  $C$  при  $\xi = 0$ ). Действительно, в противном случае  $E = E_c(p)$  перекрывается со спектром

$$\tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k+p)$$

и перестает быть изолированным корнем секулярного уравнения.

Подтвердим это интуитивное рассуждение прямым расчетом. Для упрощения будем удерживать только главные члены по параметру  $\rho$  и заменим функцию  $J(k, k')$  постоян-

ной  $J$  в некотором энергетическом слое  $(E_F \pm \omega)$  и нулем вне этого слоя. В таком приближении из (4.11) найдем

$$\vartheta_p(k) = \frac{E - \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) - \bar{\varepsilon}(k-p)}{2}}{\bar{\varepsilon}(k) + \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) + \bar{\varepsilon}(k-p)}{2}} \theta_p(k).$$

Это выражение подставим в (4.10) и ограничимся тут опять только основными членами. Тогда получим

$$\left\{ \bar{\varepsilon}(k) + \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) + \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} - \frac{\left( E - \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) - \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} \right)^2}{\bar{\varepsilon}(k) + \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) + \bar{\varepsilon}(k-p)}{2}} \right\} \theta_p(k) = \\ = \frac{J}{V} \sum_{k'} \theta_p(k').$$

Соответствующее секулярное уравнение будет

$$1 = \frac{J}{2V} \sum_k \left\{ \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k+p) - E} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k-p) + E} \right\}.$$

С другой стороны, основное уравнение для  $C$  в рассматриваемом приближении имеет вид

$$C = \frac{J}{2V} C \sum \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k)}.$$

Поэтому наше секулярное уравнение может быть представлено в форме

$$\sum_k \left\{ \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k+p) - E} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k-p) + E} - \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k)} \right\} = 0. \quad (4.17)$$

При фиксированном  $p$  это уравнение имеет непрерывный спектр

$$E = \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k+p) + 0 \left( \frac{1}{V} \right),$$

где

$$0 \left( \frac{1}{V} \right) \rightarrow 0 \text{ при } V \rightarrow \infty.$$

Непрерывный спектр начинается от значения  $E = 2C = 2\Delta$  и характеризуется при данном  $p$  векторным индексом  $k$ . Как видно, он соответствует просто возбуждению двух «индивидуальных» фермионов.

Дискретный спектр, соответствующий коллективным возбуждениям, возможен лишь при таких значениях  $p$ , при которых уравнение (4.17) имеет изолированный корень

$$E < 2\Delta.$$

Удобно написать (4.17) в интегральной форме. Имеем:

$$\int_{-1}^{+1} dt \int_0^{\infty} d\xi \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + C^2} + \sqrt{(\xi + sp t)^2 + C^2} - E} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + C^2} + \sqrt{(\xi - sp t)^2 + C^2} + E} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + C^2}} \right\} = 0$$

или

$$\Phi\left(\frac{E}{C}, \frac{sp}{C}\right) + \Phi\left(-\frac{E}{C}, \frac{sp}{C}\right) = 0,$$

где

$$\Phi(\zeta, \nu) = \int_{-1}^{+1} dt \int_0^{\infty} d\xi \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2} + \sqrt{1 + (\xi + t\nu)^2} - \zeta} - \frac{1}{2\sqrt{1 + \xi^2}} \right\}.$$

При  $sp \ll C$  мы, естественно, получим для  $E$  значение (4.16). Но и вплоть до  $E = 2C$  отношение  $E/sp$  будет величиной порядка единицы. Уравнение для определения  $p_{\max}$  будет

$$\Phi\left(2, \frac{sp}{C}\right) + \Phi\left(-2, \frac{sp}{C}\right) = 0,$$

откуда

$$sp_{\max} = \gamma C,$$

где  $\gamma$  — численный коэффициент.

Пользуясь случаем, заметим, что эти уравнения мы могли бы получить и без упрощения структуры функции  $J(k, k')$ . Их применимость обусловлена лишь малостью параметра  $p$ .

Благодаря тому, что коллективные колебания существуют лишь для импульсов  $p$ , меньших  $p_{\max}$ , тот факт, что  $E_c(p)$  не исчезает при полном отсутствии электронно-фотонного взаимодействия, не является парадоксальным. Действительно, в таком случае формула (4.16) вообще не будет иметь области применимости, поскольку  $\Delta = 0$ .

Мы рассматривали до сих пор коллективные возбуждения только для сверхпроводящего состояния. Проанализируем теперь, какую роль они играют для нормального состояния.

Возьмем для простоты случай  $p=0$ . Тогда из уравнений (4.12), (4.13) получим

$$2|\xi(k)|\theta(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \theta(k') = E\vartheta(k), \quad (4.18)$$

$$2|\xi(k)|\vartheta(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{\xi\xi'}{|\xi\xi'|} J(k, k') \theta(k') = E\theta(k). \quad (4.19)$$

Рассмотрим радиально-симметричные решения и перейдем в (4.18), (4.19) к интегральной форме. Получим

$$2|\xi|\theta(\xi) - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi\xi') \theta(\xi') d\xi' = E\vartheta(\xi), \quad (4.20)$$

$$2|\xi|\vartheta(\xi) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\xi'}{|\xi\xi'|} \rho(\xi\xi') \theta(\xi') d\xi' = E\theta(\xi), \quad (4.21)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(\xi, \xi') = & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^{+1} \frac{k_F^2}{\left(\frac{dE}{dk}\right)_F} \tilde{g}^2(k_F \sqrt{2(1-t)}) \times \\ & \times \frac{\tilde{\omega}(k_F \sqrt{2(1-t)})}{|\xi| + |\xi'| + \tilde{\omega}(k_F \sqrt{2(1-t)})} dt. \end{aligned}$$

В интегральных уравнениях (4.20), (4.21) мы использовали бесконечные пределы интегриации, поскольку точные значения их безразличны — весь вклад практически обусловлен интервалом  $|\xi| \leq \tilde{\omega}$ . Положим:

$$C_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi, \xi') \theta(\xi') d\xi', \quad (4.22)$$

$$C_2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\xi'}{|\xi\xi'|} \rho(\xi, \xi') \theta(\xi') d\xi'. \quad (4.23)$$

Тогда из (4.20), (4.21) будем иметь

$$\theta(\xi) = \frac{2|\xi|C_1(\xi) + \frac{\xi}{|\xi|} C_2(\xi) E}{4\xi^2 - E^2}.$$

Подставим это выражение в (4.22) и заметим, что  $C_1(\xi)$ ,  $C_2(\xi)$ ,  $\rho(\xi, \xi')$  — четные функции  $\xi$ ,  $\xi'$ . Следовательно,

$$C_1(\xi) = \int_0^{\infty} \rho(\xi, \xi') \frac{4\xi'}{\xi'^2 - E^2} C_1(\xi') d\xi'.$$

Отсюда при малых  $\rho = \rho(0, 0)$  получим асимптотическую формулу вида

$$-E^2 \sim 4\omega_0^2 e^{-\frac{2}{\rho}},$$

где  $\omega_0$  — некоторое среднее значение  $\omega$ .

Итак, энергия коллективных возбуждений оказывается чисто мнимой, что и указывает на неустойчивость нормального состояния. Именно эти коллективные возбуждения обуславливают неустойчивость, тогда как фермионные и фоновые возбуждения нормального состояния обладают положительными энергиями.

**4.4. Решение секулярных уравнений. Поперечные возбуждения.** До сих пор мы рассматривали только такие решения секулярных уравнений (4.10), (4.11), которые можно представить в форме рядов (4.14). Точнее говоря, мы ограничивались только такими зависимостями  $\theta_p(k)$  и  $\vartheta_p(k)$ , при которых

$$\begin{aligned} \theta_p(k) &= \theta(|p|, |k|, (kp)), \\ \vartheta_p(k) &= \vartheta(|p|, |k|, (kp)). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Указанные решения соответствуют продольным волнам. Однако помимо продольных волн у секулярных уравнений имеется еще целый класс решений другого типа, соответствующих поперечным волнам. Другими словами, для этих решений

$$\begin{aligned} \theta_p(k) &= \theta(|p|, |k|, (kp)) [k \times p]_n, \\ \vartheta_p(k) &= \vartheta(|p|, |k|, (kp)) [k \times p]_n, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где индекс  $n$  указывает на компоненту векторного произведения по направлению  $n$ .

Ради простоты рассмотрим случай  $p=0$ . В этом случае достаточно рассмотреть уравнения (4.12) и (4.13). Однако

теперь мы будем искать не сферически симметричные решения, а решения типа

$$\theta_0(k) = \theta_0(|k|) e_x,$$

$$\vartheta_0(k) = \vartheta_0(|k|) e_x.$$

Для удобства без ограничения общности мы считаем  $p$  направленным по оси  $z$ , а  $n$  — по оси  $x$ ;  $e_x$  — компонента по оси  $x$  орта вектора  $k$ . Для  $\theta_0(|k|)$  и  $\vartheta_0(|k|)$  будем иметь при этом уравнения

$$2\bar{\varepsilon}(k) \theta_0(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} \tilde{J}(k, k') \theta_0(k') = E \vartheta_0(k), \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} 2\bar{\varepsilon}(k) \vartheta_0(k) + \frac{1}{V} \sum_{k'} \tilde{J}(k, k') \frac{C(k)C(k') - \xi(k)\xi(k')}{\bar{\varepsilon}(k)\bar{\varepsilon}(k')} \vartheta_0(k') = \\ = E \theta_0(k), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$\tilde{J}(k, k') = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} J(|k|, |k'|, \sqrt{|k|^2 + |k'|^2 - 2|k||k'|t}) t dt,$$

$$\bar{\varepsilon}(k) = \sqrt{\xi^2(k) + C^2(k)}.$$

Далее удобно будет ограничиться рассмотрением случая, когда  $\tilde{J}(k, k')$  сосредоточено вблизи поверхности Ферми и его можно заменить некоторой константой  $\tilde{J}$  внутри слоя  $E_F \pm \bar{\omega}$ . Кроме того, для самого  $J(k, k')$  примем такую же аппроксимацию: заменим его константой  $J$  внутри слоя  $E_F \pm \omega$  и нулем — вне этого слоя. При сделанных предположениях секулярные уравнения (4.26), (4.27) легко разрешаются, если ввести вместо функций  $\theta_0(k)$  и  $\vartheta_0(k)$  новые неизвестные:

$$x = \frac{\tilde{J}}{V} \sum \theta_0(k),$$

$$y = \frac{\tilde{J}}{V} \sum \frac{C(k)}{\bar{\varepsilon}(k)} \vartheta_0(k),$$

$$z = \frac{\tilde{J}}{V} \sum \frac{\xi(k)}{\bar{\varepsilon}(k)} \vartheta_0(k),$$

где суммирование ведется по области  $E_F \pm \bar{\omega}$  вблизи сферы Ферми.

Уравнение для определения  $E$  принимает вид

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{2\bar{\varepsilon}(k)}{4\bar{\varepsilon}^2(k) - E^2} - 1 \\ \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{C(k)E}{\bar{\varepsilon}(k)(4\bar{\varepsilon}^2(k) - E^2)} \\ \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{\xi(k)E}{\bar{\varepsilon}(k)(4\bar{\varepsilon}^2(k) - E^2)} \end{array} \right| - \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{C(k)E}{\bar{\varepsilon}(k)(4\bar{\varepsilon}^2(k) - E^2)} \\ \left| \begin{array}{l} \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{2C^2(k)}{\bar{\varepsilon}(k)(4\bar{\varepsilon}^2(k) - E^2)} - 1 \\ \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{2\xi(k)C(k)}{\bar{\varepsilon}(k)(4\bar{\varepsilon}^2(k) - E^2)} \\ \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{2\xi^2(k)}{\bar{\varepsilon}(k)(4\bar{\varepsilon}^2(k) - E^2)} - 1 \end{array} \right| = 0. \quad (4.28)$$

Произведем теперь асимптотическое разложение детерминанта (4.28) при малых  $C$ , ограничиваясь при этом лишь не исчезающими при  $C \rightarrow 0$  членами. Фактически такое разложение будет происходить по малому параметру  $C/\omega$  или  $C/\bar{\omega}$ . Окончательно (4.28) принимает вид

$$\left\{ \left( \bar{\rho} \ln \frac{2\Omega}{C} - 1 + \varepsilon^2 \right) \left( \frac{\tilde{\rho}}{\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \arctg \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + 1 \right) - \varepsilon^2 \right\} \times \\ \times \left\{ \bar{\rho} \ln \frac{2\Omega}{C} - \bar{\rho} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \arctg \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right\} = 0; \quad (4.29)$$

здесь

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{J}}{2\pi^2} \frac{k_F^2}{E'(k_F)}, \quad \Omega = \min(\omega, \bar{\omega}), \quad \varepsilon = \frac{E}{2C}.$$

Исследование корней уравнения (4.29) не представляет большого труда. Результат этого исследования следующий. Уравнение (4.28) асимптотически при малых  $C/\Omega$  имеет единственный корень, если только  $\bar{\rho}$  лежит в пределах

$$-1 < \bar{\rho} < \frac{1}{\ln \frac{2\Omega}{C}}. \quad (4.30)$$

При  $\bar{\rho}$ , близких к  $-1$  значение корня равно

$$E = 2C \sqrt{\frac{3}{2}(1 + \bar{\rho})}.$$



При увеличении  $\bar{\rho}$  от  $-1$  до  $0$  корень увеличивается и достигает значения  $2C$ , и решение переходит в непрерывный спектр. При  $\bar{\rho}$ , близких к нулю,

$$E = 2C \left( 1 - \frac{\pi^2}{8} \bar{\rho}^4 \ln^2 \frac{2\Omega}{C} \right).$$

При дальнейшем увеличении  $\bar{\rho}$  от  $0$  до  $\left( \ln \frac{2\Omega}{C} \right)^{-1}$  значение корня изменяется в обратном направлении от  $2C$  до нуля и для  $\bar{\rho}$ , близких к  $\left( \ln \frac{2\Omega}{C} \right)^{-1}$ , значение корня равно

$$E = 2C \sqrt{\ln \frac{2\Omega}{C} \left( 1 - \bar{\rho} \ln \frac{2\Omega}{C} \right)}.$$

Рассмотренный нами корень возникает от первого множителя в (4.29). Второй множитель может иметь корень только в весьма узкой области изменения значений  $\bar{\rho}$ :

$$\frac{1}{\ln \frac{2\Omega}{C}} < \bar{\rho} < \frac{1}{\ln^2 \frac{\Omega}{C} - 1},$$

которая асимптотически при  $C \rightarrow 0$  стягивается в точку. Поэтому рассмотрение этого корня не представляет интереса.

Заметим еще, что если  $\bar{\rho}$  выходит за пределы (4.30), у секулярного уравнения появляется чисто мнимый корень, свидетельствующий о неустойчивости основного состояния в этом случае.

Нам остается теперь сделать замечания относительно того, как будет себя вести найденный корень при  $p$ , отличных от нуля. Не производя выкладок непосредственно, из рассмотрения секулярных уравнений (4.10), (4.11) можно заключить, что при малых  $p$

$$E(p) = \sqrt{E^2 + \alpha p^2 s_F^2},$$

где  $s$  — скорость [на поверхности Ферми и  $\alpha$  — численный множитель.

В заключение поясним физический смысл найденных поперечных решений. Рассмотрим выражение

$$m \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{i} \sum_j \left[ \frac{\partial}{\partial r} \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} \right], \quad (4.31)$$

физически представляющую собой вихрь поля скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . В представлении вторичного квантования (4.31) запишется в виде

$$m \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{k, k'} (\dot{a}_{k, +} a_{k', +} + \dot{a}_{-k, -} a_{-k', -}) e^{i(k-k', r)} [k \times k'].$$

Переходя от операторов  $\dot{a}, a$  к операторам  $\dot{\alpha}, \alpha$  посредством  $u, v$ -преобразования, получим

$$m \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{i}{V} \sum_{k, k'} M(k'; k) (\dot{\alpha}_{k'1} \alpha_{k1} - \dot{\alpha}_{k'0} \alpha_{k'0}) e^{i(k-k', r)} [k \times k'] + \\ + \frac{i}{V} \sum_{k, k'} L(k, k') (\alpha_{k1} \alpha_{k'0} - \dot{\alpha}_{k0} \dot{\alpha}_{k'1}) e^{i(k-k', r)} [k \times k']. \quad (4.32)$$

Постараемся представить этот оператор с помощью коллективных бозе-амплитуд  $\dot{\beta}_q(k), \beta_q(k)$ . Легко видеть, что это достигается путем сопоставления оператору (4.32) следующего «модельного» оператора:

$$m \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{i}{V} \sum_{q, k} L(k+q, k) \dot{\beta}_q(k) e^{iqr} [k \times q] + \text{сопр.} \quad (4.33)$$

Теперь нам остается преобразовать оператор (4.33) к новым бозе-амплитудам, диагонализующим квадратичную форму (4.2). Будем иметь:

$$m \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{i}{2V} \sum_{\mu, q} \xi_{\mu}^{\dagger} \left\{ \sum_k L(k+q, k) (\partial_q(k; \mu) + \right. \\ \left. + \theta_q(k; \mu)) [k \times q] \right\} e^{iqr} + \frac{i}{2V} \sum_{\mu, q} \xi_{\mu} \times \\ \times \left\{ \sum_k L(k+q, k) (\partial_{-q}(k; \mu) - \theta_{-q}(k; \mu)) [k \times q] \right\} e^{iqr}. \quad (4.34)$$

Напомним, что новые бозе-амплитуды  $\xi^{\dagger}, \xi$  связаны со старыми  $\dot{\beta}, \beta$  преобразованиями

$$\beta_q(k) = \sum_{\mu} \{ \xi_{\mu} \varphi_q(k; \mu) + \xi_{\mu}^{\dagger} \chi_{-q}(k; \mu) \}.$$

В случае продольных волн, согласно (4.24), обращаются в нуль суммы в фигурных скобках в (4.34). Совсем не так обстоит дело в случае поперечных волн. Ввиду (4.25), выражения в фигурных скобках уже больше не равны нулю в этом случае. Таким образом, можно утверждать, что попе-

речные коллективные возбуждения представляют собой вихревые образования. По всей видимости их свойства окажутся во многом эквивалентными тем, которые изучались для так называемых ротоннов в связи с построением микроскопической теории сверхтекучести. Там, однако, не установлено существование специальной ветви спектра, характеризующей эти возбуждения.

Итак, мы закончили исследование основного состояния, однофермионных и коллективных возбуждений в модели Фрелиха. При этом следует подчеркнуть, что указанный метод расчета основного состояния и однофермионных возбуждений является регулярным приемом, здесь вопрос принципиально ясен. Напротив, метод расчета коллективных возбуждений скорее следует интерпретировать как способ суммирования важнейших в главных приближениях диаграмм. Вопрос о возбуждении различных коллективных колебаний в системе представляет собой интересную, но довольно сложную проблему. В частности, было бы желательным рассмотреть коллективные возбуждения, базирующиеся не на парах, а, скажем, на четверках ферми-амплитуд.

---

## § 5. УЧЕТ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОНАМИ \*

**5. 1. Постановка задачи.** До сих пор мы не учитывали явным образом кулоновского отталкивания между электронами и в наши формулы входило только электронно-фононное взаимодействие.

Нетрудно видеть, что все предыдущие рассуждения тривиальным образом распространяются и на тот случай, когда мы в  $H_{int}$  включим экранированное кулоновское взаимодействие и будем считать его малым так, чтобы применять на равных правах теорию возмущений к обоим частям  $H_{int}$ . При этом мы получили бы по существу те же результаты, что и раньше, лишь с соответственно измененными числовыми значениями эквивалентных параметров, например,  $\rho$ . Такой подход, однако, не является удовлетворительным с физической точки зрения и не дает действительного улучшения модели Фрелиха.

Во-первых, электростатическое отталкивание электронов более интенсивно, чем слабое притяжение, обусловленное обменом виртуальными фонами. Кроме того, как мы увидим дальше, экранизация кулоновского взаимодействия существенно меняет структуру энергетического спектра продольных коллективных колебаний.

Мы приступим поэтому к обобщению наших рассуждений для случая более реалистической модели с гамильтонианом вида

$$H = \sum_{k,s} (E(k) - \lambda) \hat{a}_{ks} a_{ks} + \sum_q \omega(q) \hat{b}_q b_q + H_{ph} + H_c, \quad (5.1)$$

\* Изложение этого параграфа основывается на исследованиях Д. В. Ширкова.

где

$$H_{ph} = \sum_{\substack{(k, k', q, s) \\ (k' - k = q)}} g(q) \sqrt{\frac{\omega(q)}{2V}} \hat{a}_{k_s} a_{k'_s} \hat{b}_q + \text{сопр.} \quad (5.2)$$

и где

$$H_c = \sum_{\substack{(k'_1, k'_2, s_1, s_2) \\ (k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2)}} \frac{1}{V} I(k_1, k_2, k'_2, k'_1) \hat{a}_{k_1 s_1} \hat{a}_{k_2 s_2} a_{k'_2 s_2} a_{k'_1 s_1}. \quad (5.3)$$

Функция  $I$  представляет собой кулоновское взаимодействие так же, как и  $E(k)$ ,  $\omega(q)$ ,  $g(q)$  предполагается вещественной и инвариантной при отражении импульсов. В качестве малого параметра возьмем, как и в § 3, величину порядка  $\omega/E_F$  и в получаемых асимптотических формулах ограничимся главными членами. Допущение о малости  $H_c$  не является необходимым для нашего метода и потому при суммировании диаграмм мы должны будем формально учитывать диаграммы всех порядков по отношению к  $H_c$ . Кроме того, чтобы максимально упростить результаты вычислений, будем предполагать, что  $u$ ,  $v$  практически отличаются от своих нормальных значений лишь в весьма узком энергетическом слое около поверхности Ферми. Основываясь на таком допущении, мы можем удерживать в наших формулах лишь главные члены по отношению к эффективной толщине этого слоя. Заметим, что, как было показано в § 2, эта величина имеет «экспоненциальный» порядок малости  $\omega e^{-1/\rho}$ , если не учитывать кулоновского взаимодействия между электронами. Поскольку кулоновское взаимодействие может только уменьшать эффективную величину  $\rho$ , сделанное предположение представляется весьма разумным. К тому же, получив в явной форме приближенное уравнение для определения  $u$ ,  $v$ , мы сможем тем самым проанализировать вопрос об эффективной ширине того энергетического слоя, в котором  $u$ ,  $v$  заметно отличаются от своих нормальных значений, благодаря чему будет оценена степень точности сделанного приближения.

Мы будем здесь применять рассуждения § 3 и проведем компенсацию как двухфермионной, так и двухбозонной диаграмм.

**5.2. Условия компенсации и перенормировки.** Совершим каноническое преобразование (см. § 3, 1)

$$\begin{aligned} a_{k,+} &= u_k a_{k0} + v_k \hat{a}_{k1}, \\ a_{-k,-} &= u_k a_{k1} - v_k \hat{a}_{k0}, \\ b_q &= \lambda_q \beta_q + \nu_q \hat{\beta}_{-q}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $u_k, v_k, \lambda_q, \mu_q$  — вещественные числа, связанные соотношениями  $u_k^2 + v_k^2 = 1, \lambda_q^2 + \mu_q^2 = 1$  и четные относительно  $k$  и  $q$ .

В преобразованном гамильтониане выделим часть

$$H_0 = U + \sum_k \tilde{\varepsilon}(k) (\dot{\alpha}_{k_0} \alpha_{k_0} + \dot{\alpha}_{k_1} \alpha_{k_1}) + \sum_q \tilde{\omega}(q) \dot{\beta}_q \beta_q,$$

в которой  $U$  представляет энергию основного состояния  $\tilde{\varepsilon}(k)$ ,  $\tilde{\omega}(q)$  — перенормированные энергии фермионных и бозонных возбуждений. Остальные члены отнесем к гамильтониану взаимодействия. Тогда из (5.1) получим

$$H = H_0 + H_{int},$$

$$H_{int} = U' + H' + H'' + H_{ph} + H_c, \quad (5.5)$$

где

$$U' = \text{const} = 2 \sum_k \{E(k) - \lambda\} v_k^2 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2 - U,$$

$$H' = \sum_k \{(E(k) - \lambda)(u_k^2 - v_k^2) - \tilde{\varepsilon}(k)\} (\dot{\alpha}_{k_0} \alpha_{k_0} + \dot{\alpha}_{k_1} \alpha_{k_1}) +$$

$$+ 2 \sum_k \{E(k) - \lambda\} u_k v_k (\dot{\alpha}_{k_0} \dot{\alpha}_{k_1} + \alpha_{k_1} \alpha_{k_0}),$$

$$H'' = \sum_q \{\omega(q) (\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q)\} \dot{\beta}_q \beta_q +$$

$$+ \sum_q \omega(q) \lambda_q \mu_q (\dot{\beta}_q \dot{\beta}_{-q} + \beta_{-q} \beta_q),$$

$$H_{ph} = \sum_{\substack{k, k', q \\ k' - k = q}} g(q) \sqrt{\frac{\omega(q)}{2V}} \{(\lambda_q + \mu_q) (\dot{\beta}_q + \beta_{-q}) \times$$

$$\times \{(u_k v_{k'} + u_{k'} v_k) (\dot{\alpha}_{k_0} \alpha_{k'_1} + \alpha_{k_1} \alpha_{k'_0}) +$$

$$+ (u_k u_{k'} - v_k v_{k'}) (\dot{\alpha}_{k_0} \alpha_{k'_0} + \dot{\alpha}_{k'_1} \alpha_{k_1})\}$$

и  $H_c$  представляет выражение (5.3), преобразованное к новым фермионным амплитудам.

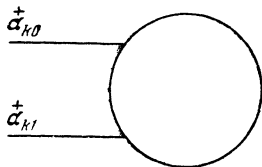
Приступим теперь к получению основных уравнений принципа компенсации. Приравняем нулю сумму вкладов всех диаграмм типа изображенных на фиг. 8. Кржжком на этой фигуре обозначены сильно связанные диаграммы, которые нельзя

разбить на две части, соединенные только двумя фермионными или только двумя бозонными линиями. Тогда получим

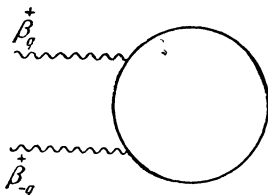
$$2 [E(k) - \lambda] u_k v_k + \langle \tilde{C}_v \alpha_{k_1} \alpha_{k_0} H_c C_v \rangle + \sum_{(m>1)} \langle \tilde{C}_v \alpha_{k_1} \alpha_{k_0} R_m(0) C_v \rangle_{\text{связ}} = 0, \quad (5.6)$$

где вообще

$$R_m(E) = (-1)^{m-1} H_{int} (H_0 - E)^{-1} H_{int} \dots (H_0 - E)^{-1} H_{int},$$



Фиг. 8



Фиг. 9

$C_v$ , как всегда, обозначает «вакуумное состояние», в котором все числа заполнения  $\hat{\alpha}_{k_0} \alpha_{k_0}$ ,  $\hat{\alpha}_{k_1} \alpha_{k_1}$ ,  $\hat{\beta}_q \beta_q$  равны нулю. Знак «связ» указывает, что здесь учитываются лишь члены, соответствующие выше упомянутым сильно связным диаграммам.

Приравняем, далее, нулю сумму вкладов всех диаграмм типа фиг. 9. Кругом опять обозначим диаграммы, которые нельзя разбить на две части, соединенные только двумя бозонными или только двумя фермионными линиями. Получим

$$2\omega(q) \lambda_q \mu_q + \sum_{(m>1)} \langle \tilde{C}_v \beta_{-q} \beta_q R_m(0) C_v \rangle_{\text{связ}} = 0. \quad (5.7)$$

Теперь нам надо будет составить еще уравнения для определения  $U$ ,  $\tilde{\varepsilon}(k)$  и  $\tilde{\omega}(q)$ . Они имеют вид

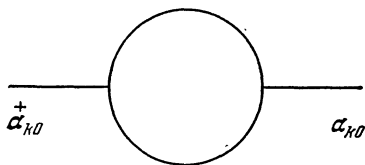
$$U = 2 \sum_k [E(k) - \lambda] v_k^2 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2 + \sum_{(m>1)} \langle \tilde{C}_v R_m(0) C_v \rangle_{\text{связ}}, \quad (5.8)$$

$$[E(k) - \lambda] (u_k^2 - v_k^2) - \tilde{\varepsilon}(k) + \langle \tilde{C}_v \alpha_{k_0} H_c \hat{\alpha}_{k_0} C_v \rangle_{\text{связ}} + \sum_{(m>1)} \langle \tilde{C}_v \alpha_{k_0} k_m (\tilde{\varepsilon}(k)) \hat{\alpha}_{k_0} C_v \rangle_{\text{связ}} = 0, \quad (5.9)$$

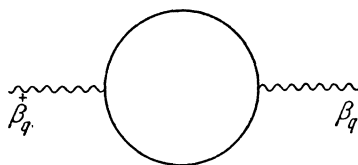
$$\omega(q) (\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q) + \sum_{-1} \langle \tilde{C}_v \beta_q R_m(\tilde{\omega}(q)) \hat{\beta}_q C_v \rangle_{\text{связ}} = 0. \quad (5.10)$$

Уравнения (5.9), (5.10) представляют собой не что иное, как условия аннулирования сумм вкладов от собственно энергетических диаграмм, изображенных на фиг. 10 и 11, т. е. условия отсутствия радиационных поправок к перенормированным энергиям  $\tilde{\varepsilon}(k)$  и  $\tilde{\omega}(q)$ .

**5.3. Переход к «зависящей от времени» формулировке.** Удобно теперь перейти к более компактной «зависящей от времени» форме записи, используя формулировку, подобную той, которая обычно применяется в ковариантной квантовой теории поля (на возможность ее применения в кванто-



Ф и г. 10



Ф и г. 11

вой статистике недавно было указано Голдстоном [16]). Заметим, что сумма

$$R(E) = \sum_{m \geq 1} R_m(E) = H_{int} + H_{int} \frac{1}{E - H_0} H_{int} + \dots \quad (5.11)$$

с помощью  $S$ -матрицы,

$$S = S_{-\infty}^0 = T \left( e^{-i \int_{-\infty}^0 H_{int}(\tau) d\tau} \right), \quad (5.12)$$

может быть представлена в компактной форме. В самом деле, пусть  $C_E$  — собственное состояние оператора  $H_0$  с собственным значением  $E$ , т. е.

$$H_0 C_E = E C_E.$$

Тогда с помощью соотношения

$$R C_E = R(E) C_E$$

можно ввести оператор  $R$ , имеющий вид

$$R = H_{int} S = T \left( H_{int}(0) e^{-i \int_{-\infty}^0 H_{int}(\tau) d\tau} \right). \quad (5.13)$$



В формулах (5.12) и (5.13)  $H_{int}(\tau)$  — гамильтониан  $H_{int}$  в представлении взаимодействия:

$$H_{int}(\tau) = e^{-iH_0\tau} H_{int} e^{iH_0\tau}.$$

Используя введенный оператор  $R$ , уравнения (5.6), (5.7), (5.8), (5.9) и (5.10) запишем в виде

$$\langle \alpha_{k_1} \alpha_{k_0} R \rangle_c = 0, \quad (5.14)$$

$$\langle \beta_{-q} \beta_q R \rangle_c = 0, \quad (5.15)$$

$$\langle R \rangle_c = 0, \quad (5.16)$$

$$\langle \alpha_{k_0} R \dot{\alpha}_{k_0} \rangle_c = 0, \quad (5.17)$$

$$\langle \beta_q R \dot{\beta}_q \rangle_c = 0, \quad (5.18)$$

где мы использовали более краткое обозначение для имеющегося здесь усреднения.

Ниже окажется также удобным использовать понятие вариационной производной от  $R$  по операторам полей. Мы введем их обычным образом\*. Оговорим здесь особо лишь свойства производных по ферми-операторам. Производные  $\delta/\delta a$  и  $\delta/\delta \alpha$  будем всегда считать правыми производными. Например,

$$\frac{\delta C}{\delta a_q(t)} = \lim_{\eta \rightarrow 0} A_q(t, a + \eta),$$

где  $A_q$  — коэффициент главной части приращения

$$\delta C(a + \eta) = \sum_q \int A_q(t, a + \eta) \delta \eta_q(t) dt.$$

Производные  $\delta/\delta \dot{a}$  и  $\delta/\delta \dot{\alpha}$  будем, по определению, считать левыми производными:

$$\frac{\delta C}{\delta \dot{a}_q(t)} = \lim_{\xi \rightarrow 0} B_q(t, \dot{a} + \xi); \quad \delta \dot{C}(\dot{a} + \xi) = \sum_q \int \delta \xi_q(t) B_q(t, \dot{a} + \xi) dt.$$

Напомним еще, что «ферми-производная слева» совпадает с производной справа, когда функционал  $C$  является «полиномом» нечетной степени от ферми-операторов, и отличается от нее знаком, когда  $C$  — «полином» четной степени. Урав-

\* Подобно тому как это сделано, например, в § 47.1 монографии [17].

Нения (5.14), (5.15), (5.17) и (5.18) представим теперь в виде

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \dot{\alpha}_{k1}(t) \delta \dot{\alpha}_{k0}(t')} \right\rangle_c [\alpha_{k1}, \dot{\alpha}_{k1}(t)]_+ [\alpha_{k0}, \dot{\alpha}_{k0}(t')]_+ dt dt' = 0,$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \dot{\beta}_{-q}(t) \delta \dot{\beta}_q(t')} \right\rangle_c [\beta_{-q}, \dot{\beta}_{-q}(t)]_- [\beta_q, \dot{\beta}_q(t')]_- dt dt' = 0,$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \dot{\alpha}_{k0}(t) \delta \alpha_{k0}(t')} \right\rangle_c [\alpha_{k0}, \dot{\alpha}_{k0}(t)]_+ [\alpha_{k0}(t'), \dot{\alpha}_{k0}]_+ dt dt' = 0,$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \dot{\beta}_q(t) \delta \beta_q(t')} \right\rangle_c [\beta_q, \dot{\beta}_q(t)]_- [\beta_q(t'), \dot{\beta}_q(t')]_- dt dt' = 0;$$

здесь  $\alpha(t)$ ,  $\dot{\alpha}(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\dot{\beta}(t)$  — операторы в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned} \alpha_{k0}(t) &= \alpha_{k0} e^{-i\tilde{\epsilon}_k t}, & \dot{\alpha}_{k1}(t') &= \dot{\alpha}_{k1} e^{i\tilde{\epsilon}(k)t'}, \\ \beta_q(t) &= \beta_q e^{-i\tilde{\omega}(q)t}, & \dot{\beta}_q(t') &= \dot{\beta}_q e^{i\tilde{\omega}(q)t'}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Представляя коммутаторы в явном виде, находим

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \dot{\alpha}_{k1}(t) \delta \dot{\alpha}_{k0}(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t+t')} dt dt' = 0, \quad (5.20)$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \dot{\alpha}_{k0}(t) \delta \alpha_{k0}(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t-t')} dt dt' = 0, \quad (5.21)$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \dot{\beta}_{-q}(t) \delta \dot{\beta}_q(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\omega}(q)(t+t')} dt dt' = 0, \quad (5.22)$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \dot{\beta}_q(t) \delta \beta_q(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\omega}(q)(t-t')} dt dt' = 0. \quad (5.23)$$

Заметим, что при усреднении в формулах (5.20)—(5.23) и ниже в соответствии с ранее сказанным учитываются лишь сильно связанные диаграммы. Ввиду этого формулы (5.20)—(5.23) можно несколько преобразовать, выписав явно результат варьирования слагаемых  $H'(0)$  и  $H''(0)$  из гамильтониана  $H_{int}(0)$ . Получаем этим путем:

$$2(E(k) - \lambda) u_k v_k + \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{\alpha}_{k1}(t) \delta \dot{\alpha}_{k0}(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t+t')} dt dt' = 0, \quad (5.24)$$

$$(E(k) - \lambda) (u_k^2 - v_k^2) - \tilde{\epsilon}(k) - \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{\alpha}_{k0}(t) \delta \alpha_{k0}(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t-t')} dt dt' = 0, \quad (5.25)$$

$$\omega(q) \lambda_q \mu_q + \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{\beta}_{-q}^{\dagger}(t) \delta \dot{\beta}_q^{\dagger}(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\omega}(q)(t+t')} dt dt' = 0, \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} & \omega(q) (\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \bar{\omega}(q) - \\ & - \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{\beta}_q^{\dagger}(t) \delta \dot{\beta}_q^{\dagger}(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\omega}(q)(t-t')} dt dt' = 0; \end{aligned} \quad (5.27)$$

здесь

$$R' = T \left\{ [H_c(0) + H_{ph}(0)] e^{-i \int_{-\infty}^0 H_{int}(\tau) d\tau} \right\}. \quad (5.28)$$

**5.4. Окончательная форма уравнения компенсации электронных диаграмм.** Займемся теперь преобразованием уравнения компенсации (5.24). Прежде всего произведем в нем переход от  $\alpha$ -представления к  $a$ -представлению. В качестве первого шага для этого воспользуемся вытекающими из (5.4) формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \dot{a}_{k0}^{\dagger}(t)} &= u_k \frac{\delta}{\delta \dot{a}_{k,+}^{\dagger}(t)} - v_k \frac{\delta}{\delta a_{-k,-}(t)}, \\ \frac{\delta}{\delta \dot{a}_{k1}^{\dagger}(t)} &= u_k \frac{\delta}{\delta \dot{a}_{-k,-}^{\dagger}(t)} + v_k \frac{\delta}{\delta a_{k,+}(t)}. \end{aligned}$$

Введенные в этих формулах операторы  $a_{k,\pm}(t)$  и  $\dot{a}_{k,\pm}^{\dagger}(t)$  уже не имеют простой временной зависимости типа (5.19). Однако в предельном случае

$$u_k = \theta_G(k), \quad v_k = \theta_F(k) \quad (5.29)$$

эта зависимость может быть выражена в виде

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a_{k,\pm}(t) &= a_{k,\pm} e^{-i\tilde{\varepsilon}(k)t} \\ \dot{a}_{k,\pm}^{\dagger}(t) &= \dot{a}_{k,\pm}^{\dagger} e^{i\tilde{\varepsilon}(k)t} \end{aligned} \right\} \text{при } k > k_F, \\ \left. \begin{aligned} a_{k,\pm}(t) &= \pm \dot{a}'_{k,\mp} e^{i\tilde{\varepsilon}(k)t} \\ \dot{a}_{k,\pm}^{\dagger}(t) &= \pm a'_{-k,\mp} e^{-i\tilde{\varepsilon}(k)t} \end{aligned} \right\} \text{при } k < k_F, \end{aligned}$$

где  $\dot{a}'_{k\sigma}$  и  $a'_{k\sigma}$  — операторы порождения и уничтожения «дырок» в сфере Ферми. Здесь фактически введено еще одно новое представление электронных операторов, отличающееся

от исходного  $a$ -представления переименованием операторов уничтожения и порождения внутри сферы Ферми:

$$\left. \begin{aligned} a_{k, \pm} &= \pm \dot{a}'_{-k, \mp} \\ \dot{a}_{k, \pm} &= \pm a'_{-k, \mp} \end{aligned} \right\} \text{при } k < k_F. \quad (5.30)$$

Как видно, это представление, которое мы будем иногда именовать  $a'$ -представлением, соответствует  $a$ -представлению с предельными тривиальными значениями величин  $u_k, v_k$  (5.29). Получаем этим путем из (5.24):

$$\begin{aligned} & 2E[(k) - \lambda] u_k v_k + \\ & + u_k v_k \int dt dt' e^{i\epsilon(k)(t+t')} \left\{ \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{k, +}(t) \delta \dot{a}_{k, +}(t')} \right\rangle_c - \right. \\ & \left. - \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{-k, -}(t) \delta a_{-k, -}(t')} \right\rangle_c \right\} = \\ & = \int dt dt' e^{i\epsilon(k)(t+t')} \left\{ u_k^2 \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{k, +}(t') \delta \dot{a}_{-k, -}(t)} \right\rangle_c + \right. \\ & \left. + v_k^2 \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{k, +}(t) \delta a_{-k, -}(t')} \right\rangle_c \right\}. \quad (5.31) \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь допущением о том, что ширина энергетической полосы, в которой  $u_k$  и  $v_k$  заметно отличаются от своих «нормальных» значений (5.29), является весьма малой величиной и в соответствии с этим оставим в уравнении (5.31) лишь главные члены. Так, в левой части (5.31) в коэффициенте при произведении  $uv$ , стремящемся к нулю при удалении от поверхности Ферми, заменим  $u$  и  $v$  их значениями (5.29). Это сведется к тому, что матричные элементы вторых вариационных производных будут усредняться не по состоянию  $C_v$ , а по состояниям  $C_0$  — ферми-сфере, соответствующей «вакуумному состоянию невзаимодействующих электронов».

Подобная замена  $C_v$  на  $C_0$  в правой части (5.31) обратила бы ее в нуль. Поэтому, прежде чем делать соответствующий предельный переход, коэффициенты при  $u^2$  и  $v^2$  следует слегка преобразовать, чтобы выделить соответствующие малые величины порядка  $uv$ .

Возьмем, например, коэффициент при  $u_k^2$  и представим его в виде \*

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{k,+}(t') \delta \dot{a}_{-k,-}(t)} \right\rangle_c = \\ & = - \sum_{k'} \int \left\langle \frac{\delta^4 R'}{\delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau') \delta \dot{a}_{k,+}(t') \delta \dot{a}_{-k,-}(t)} \right\rangle_c \times \\ & \quad \times \overbrace{a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau')} d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Здесь

$$\overbrace{a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau')} \equiv \langle T a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau') \rangle_c$$

есть хронологическое спаривание, которое в  $a$ -представлении равно нулю; однако в  $\alpha$ -представлении, в соответствии с (5.4), оно имеет вид

$$\overbrace{a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau')} = -u_{k'} v_{k'} e^{-i\tilde{\epsilon}(k')|\tau-\tau'|}, \quad (5.33)$$

т. е. имеет «первый порядок малости по  $uv$ ». Переходя теперь к пределу  $\alpha \rightarrow a$  в первом множителе под интегралом (5.32) и замечая, что под знаком четвертой вариационной производной  $R'$  можно заменить на  $R$ , находим

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{k,+}(t') \delta \dot{a}_{-k,-}(t)} \right\rangle_c = \\ & = \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} \int \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau') \delta \dot{a}_{k,+}(t') \delta \dot{a}_{-k,-}(t')} \right\rangle_0 \times \\ & \quad \times e^{-i\tilde{\epsilon}(k')|\tau-\tau'|} d\tau d\tau'. \end{aligned}$$

Примем теперь еще во внимание, что отклонения  $u_k^2$  и  $v_k^2$  от их предельных значений (5.29) практически исчезают вне узкого слоя около поверхности Ферми. В результате уравнение (5.31) можем представить в виде

$$2\xi(k) u_k v_k = (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} Q(k, k'), \quad (5.34)$$

\* Здесь использовано положение, известное в квантовой теории поля под названием «обобщенной теоремы Вика» (см. [17], § 34. 2).

где

$$\xi(k) = E(k) - \lambda - \frac{1}{2} \int dt dt' e^{i\tilde{\varepsilon}(k)(t'+t)} \left\{ \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{k,+}(t') \delta a_{k,+}(t)} \right\rangle_0 + \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{-k,-}(t) \delta a_{-k,-}(t')} \right\rangle_0 \right\}, \quad (5.35)$$

$$Q(k, k') = \begin{cases} = \int \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau') \delta \dot{a}_{k,+}(t') \delta \dot{a}_{-k,-}(t)} \right\rangle_0 \times \\ \times e^{i\tilde{\varepsilon}(k)(t+t') - i\tilde{\varepsilon}(k')|\tau - \tau'|} dt dt' d\tau d\tau' \text{ при } k > k_F \\ \\ = \int \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta \dot{a}_{k',+}(\tau) \delta \dot{a}_{-k',-}(\tau') \delta a_{k,+}(\tau) \delta a_{-k,-}(\tau')} \right\rangle_0 \times \\ \times e^{i\tilde{\varepsilon}(k)(t+t') - i\tilde{\varepsilon}(k')|\tau - \tau'|} dt dt' d\tau d\tau' \text{ при } k < k_F. \end{cases} \quad (5.36)$$

Напомним, что в соответствии со смыслом предельного перехода  $\alpha \rightarrow a$  функционал  $R$ , входящий в уравнения (5.35) и (5.36), зависит от гамильтониана  $H_{int}$ , полученного из формул (5.8) путем замены  $u_k$  и  $v_k$  их предельными значениями (5.29). Так, например,

$$H' = \sum_{(k > k_F, s)} \{E(k) - \lambda - \tilde{\varepsilon}(k)\} \dot{a}_{ks} a_{ks} + \sum_{(k' < k_F, \sigma)} \{-E(k') + \lambda - \tilde{\varepsilon}(k')\} a_{k'\sigma} \dot{a}_{k'\sigma},$$

$$H_{ph} = \sum_{\substack{(k, k', q, s) \\ (k' - k = q)}} g(q) \sqrt{\frac{\omega(q)}{2V}} \dot{a}_{ks} a_{k's} (\beta_q + \beta_{-q}) (\lambda_q + \mu_q).$$

Уравнение (5.34) является уравнением для определения  $u$  и  $v$ , связанных между собой соотношением  $u^2 + v^2 = 1$ . Удобно поэтому произвести в нем замену переменных и преобразовать его к уравнению, в которое явно входит одна неизвестная величина. Положим для этого

$$C(k) = \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} Q(k, k'). \quad (5.37)$$

Разрешая теперь (5.34) относительно  $u$  и  $v$ , находим

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\}; \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\}, \quad (5.38)$$

а также

$$u_k v_k = \frac{1}{2} \frac{C(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}}. \quad (5.39)$$

Уравнение (5.34) тем самым приводится к форме

$$C(k) = \frac{1}{2} \sum_{k'} Q(k, k') \frac{C(k')}{\sqrt{C^2(k') + \xi^2(k')}}. \quad (5.40)$$

Как указывалось, целью настоящего параграфа является последовательный учет влияния кулоновского взаимодействия. Нам следует поэтому изучить теперь структуру выражений  $\xi(k)$  и  $Q(k, k')$  для рассматриваемого случая. Однако мы несколько отложим это исследование и установим сейчас связь между энергией основного состояния и решением уравнения (5.40).

**5.5. Энергия основного состояния и энергия однофермионного возбуждения.** Энергия основного состояния должна быть определена из уравнения (5.16).

Мы будем сейчас преобразовывать выражение  $\langle R \rangle_c$  методом, аналогичным тому, который использовался в § 5.4 при получении формулы (5.36). Используя обобщенную теорему Вика, можем написать

$$\begin{aligned} U = & 2 \sum_k \{E(k) - \lambda\} v_k^2 + \sum_q \omega(q) u_q^2 - \\ & - \sum_{k, s} \int dt dt' \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{ks}(\tau) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_c \overline{\dot{a}_{ks}(t) a_{ks}(t')} + \\ & + \sum_{k, k'} \int dt dt' \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta \dot{a}_{k,+}(t) \delta \dot{a}_{-k,-}(t') \delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau')} \right\rangle_c \times \\ & \times \overline{\dot{a}_{k,+}(t) \dot{a}_{-k,-}(t')} \overline{a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau')} d\tau d\tau'. \quad (5.41) \end{aligned}$$

Выписывая явные выражения для входящих в (5.41) хронологических спариваний

$$\overline{\dot{a}_{k,+}(t') a_{k,+}(t)} = \begin{cases} v_k^2 e^{-i\bar{\epsilon}(k)(t-t')} & t > t' \\ -u_k^2 e^{-i\bar{\epsilon}(k)(t'-t)} & t' < t, \end{cases}$$

$$\overline{\dot{a}_{k,+}(t) \dot{a}_{-k,-}(t')} = u_k v_k e^{-i\bar{\epsilon}(k)|t-t'|},$$

$$\overline{a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau')} = -u_{k'} v_{k'} e^{-i\bar{\varepsilon}(k')|\tau-\tau'|},$$

перейдем к пределу (5.29) в матричных элементах вариационных производных. Получим

$$\begin{aligned} U = & 2 \sum_k \{E(k) - \lambda\} v_k^2 - \sum_{k,s} v_k^2 \int_{t>t'} \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{ks}(t) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_0 \times \\ & \times e^{-i\bar{\varepsilon}(k)(t-t')} dt dt' + \sum_{k,s} u_k^2 \int_{t'>t} \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{ks}(t) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_0 \times \\ & \times e^{-i\bar{\varepsilon}(k)(t'-t)} dt dt' + \sum_{k,k'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} \int dt dt' d\tau d\tau' e^{-i\bar{\varepsilon}(k)|t-t'| - i\bar{\varepsilon}(k')|\tau-\tau'|} \times \\ & \times \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta \dot{a}_{k+}(t) \delta \dot{a}_{-k,-}(t') \delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau')} \right\rangle_0 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2. \quad (5.42) \end{aligned}$$

При  $u$  и  $v$ , отличных от их нормальных значений, эта формула представляет собой энергию основного сверхпроводящего состояния  $U_s$ . При  $u_k = \theta_G(k)$ ,  $v_k = \theta_F(k)$  выражение (5.42) описывает энергию основного нормального состояния  $U_n$ . Беря разность этих выражений, имеем:

$$\begin{aligned} U_s - U_n = & 2 \sum_k \{E(k) - \lambda\} (v_k^2 - \theta_F(k)) - \\ & - \sum_{k,s} (v_k^2 - \theta_F(k)) \int_{t>t'} \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{ks}(t) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_0 e^{-i\bar{\varepsilon}(k)(t-t')} dt dt' + \\ & + \sum_{k,s} (u_k^2 - \theta_G(k)) \int_{t'>t} \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{ks}(t) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_0 e^{-i\bar{\varepsilon}(k)(t'-t)} dt dt' - \\ & - \sum_{k,k'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} \int e^{-i\bar{\varepsilon}(k)|t-t'| - i\bar{\varepsilon}(k')|\tau-\tau'|} dt dt' d\tau d\tau' \times \\ & \times \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta \dot{a}_{k+}(t) \delta \dot{a}_{-k,-}(t') \delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau')} \right\rangle_0. \quad (5.43) \end{aligned}$$

Заметим теперь, что в соответствии с (5.38)

$$\begin{aligned} v_k^2 - \theta_F(k) &= -\{u_k^2 - \theta_G(k)\} = \\ &= \frac{\theta_G(k)}{2} \left\{ 1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\} - \frac{\theta_F(k)}{2} \left\{ 1 + \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\} \end{aligned}$$



и что суммирование по  $k$  и  $k'$  в (5. 43) фактически проводится по узкому «слою размытости» около поверхности Ферми. В этом слое энергии  $\tilde{\varepsilon}(k')$  и  $\tilde{\varepsilon}(k)$  являются малыми и поэтому приближенно

$$2[E(k) - \lambda] - \sum_s \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{ks}(t) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_0 e^{-i\tilde{\varepsilon}(k)|t-t'|} dt dt' = 2\xi(k),$$

а также

$$\int \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta \dot{a}_{k+}(t) \delta \dot{a}_{-k,-}(t') \delta a_{k'+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau')} \right\rangle_0 \times e^{i\tilde{\varepsilon}(k)|t-t'| - i\tilde{\varepsilon}(k')|\tau-\tau'|} dt dt' d\tau d\tau' = Q(k, k').$$

Собирая результаты, формулу (5. 43) представим в виде

$$U_s - U_n = \sum_k \theta_G(k) \xi(k) \left\{ 1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\} - \\ - \sum_k \theta_F(k) \xi(k) \left\{ 1 + \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\} - \\ - \sum_{k, k'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} Q(k, k').$$

Преобразуя последнее слагаемое правой части с помощью формул (5. 37) и (5. 39), получаем окончательно

$$U_s - U_n = -\frac{1}{2} \sum_k \sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)} \times \\ \times \left\{ \theta_G(k) \left( 1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right)^2 + \theta_F(k) \left( 1 + \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right)^2 \right\}.$$

Перейдем к анализу энергетического спектра  $\tilde{\varepsilon}(k)$  однофермионных возбуждений для сверхпроводящего состояния. Величина «перенормированной энергии»  $\tilde{\varepsilon}$  определяется уравнением (5. 25), которое имеет вид

$$\{E(k) - \lambda\} (u_k^2 - v_k^2) - \tilde{\varepsilon}(k) - \\ - \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \bar{a}_{k0}(t) \delta a_{k0}(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\varepsilon}(k)(t-t')} dt dt' = 0.$$

Совершая здесь в последнем члене преобразование типа преобразования от (5. 24) к (5. 34), получаем

$$\tilde{\varepsilon}(k) = u_k^2 \varepsilon_1(k) + v_k^2 \varepsilon_2(k) + u_k v_k \varepsilon_3(k), \quad (5. 44)$$

где

$$\varepsilon_1(k) = E(k) - \lambda - \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{k,+}(t) \delta a_{k,+}(t')} \right\rangle_0 e^{i\tilde{\varepsilon}(k)(t-t')} dt dt', \quad (5.45)$$

$$\varepsilon_2(k) = -E(k) + \lambda + \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{-k,-}(t') \delta a_{-k,-}(t)} \right\rangle_0 \times \\ \times e^{i\tilde{\varepsilon}(k)(t-t')} dt dt', \quad (5.46)$$

$$\varepsilon_3(k) = \sum_k u_k v_k \int e^{i\tilde{\varepsilon}(k)(t-t') - i\tilde{\varepsilon}(k')|\tau-\tau'|} dt dt' d\tau d\tau' \times \\ \times \left\{ \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau') \delta \dot{a}_{k,+}(t) \delta \dot{a}_{-k,-}(t')} \right\rangle_0 + \right. \\ \left. + \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta a_{k,+}(t') \delta a_{-k,-}(t) \delta \dot{a}_{k',+}(\tau) \delta \dot{a}_{-k',-}(\tau')} \right\rangle_0 \right\}. \quad (5.47)$$

Заметим, что выражение  $\varepsilon_3(k)$  входит в (5.44) с коэффициентом  $u_k v_k$ , который не является малым по сравнению с единицей лишь в малой окрестности поверхности Ферми. Поэтому в пределе малых  $\tilde{\varepsilon}(k)$ ,  $\tilde{\varepsilon}(k')$  в соответствии с (5.36) и (5.37) имеем

$$u_k v_k \varepsilon_3(k) = 2u_k v_k \sum_k Q(k, k') u_{k'} v_{k'} = \\ = 2C(k) u_k v_k = \frac{C^2(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (5.44) в малой окрестности поверхности Ферми, когда  $\tilde{\varepsilon}(k)$  мало. С учетом симметрии относительно перестановки спинов в пределе малого  $\tilde{\varepsilon}(k)$  из (5.35), (5.45) и (5.46) вытекает, что

$$\varepsilon_1(k) = -\varepsilon_2(k) = \xi(k).$$

Замечая еще, что согласно (5.34) на самой поверхности Ферми, когда  $u_k^2 = v_k^2 = 1/2$ , величина  $\xi(k_F)$  обращается в нуль, получаем из (5.44)

$$\tilde{\varepsilon}(k_F) = C(k_F).$$

Таким образом, энергии возбужденных состояний отделены от энергии основного состояния щелью

$$C(k_F) = \Delta.$$

**5.6. Преобразование ядра  $Q(k, k')$ .** Теперь следует принять во внимание, что в соответствии с проведенной компенса-

цией фононных диаграмм типа фиг. 9, функционал  $R$  зависит от  $g^2$  лишь через малый параметр  $g^2 \frac{\tilde{\omega}}{E_F}$ . Ввиду этого в левых частях уравнений (5.35) и (5.36) можно провести разложение по степеням  $g^2$  и ограничиться двумя старшими членами, т. е. членами нулевого и первого порядка по  $g^2$ . Удобно разложить по степеням  $g^2$  оператор  $R$ :

$$R = R_c + R_{ph} + \dots \quad (5.48)$$

Член  $R_c$  соответствует  $R$  при  $g=0$ , т. е.  $H_{int}$  с исключенным слагаемым  $H_{ph}$ . Ясно также, что в силу условия связности оператора  $R$  в  $R_c$  не будут давать вклада  $U'$  и  $H''$ . Член  $H'$  можно также опустить в соответствии с условием ренормировки энергии электрона. Иными словами

$$R_c = T \left( H_c(0) e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\tau) d\tau} \right), \quad (5.49)$$

Член  $R_{ph}$  может быть представлен в виде

$$R_{ph} = R_1 + R_2, \quad (5.50)$$

где

$$R_1 = -iT \left( H_{ph}(0) \int_{-\infty}^0 d\tau' H_{ph}(\tau') e^{-i \int_{-\infty}^0 \tilde{H}(\tau) \tau \tau'} \right),$$

$$R_2 = (-i)^2 T \left( H_c(0) \int_{-\infty}^0 H_{ph}(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^0 H_{ph}(\tau'') d\tau'' e^{-i \int_{-\infty}^0 \tilde{H}(\tau) d\tau} \right),$$

причем

$$\tilde{H} = H_c + H''.$$

Роль  $H''$ , стоящего в выражениях для  $R_1$  и  $R_2$ , сводится к компенсации радиационных поправок в единственную внутреннюю фононную линию. В силу условия ренормировки энергии фонона (5.10) эти поправки равны нулю, вследствие чего  $H''$  в этих выражениях можно опустить. Таким образом

$$R_1 = -iT \left( H_{ph}(0) \int_{-\infty}^0 d\theta H_{ph}(\theta) e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\theta'') d\theta''} \right), \quad (5.51)$$

$$R_2 = (-i)^2 T \left( H_c(0) \int_{-\infty}^0 d\theta H_{ph}(\theta) \int_{-\infty}^0 d\theta' H_{ph}(\theta') e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\theta'') d\theta''} \right). \quad (5.52)$$

Не составляет труда произвести усреднение по вакууму фононов в выражениях (5.51) и (5.52). Получаем тогда

$$R_1 = -i \sum_{\substack{(l, l', p, p', s, \sigma) \\ (l'-l=p'-p=q)}} \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{2V} \times \\ \times \int_{-\infty}^0 d\theta e^{i\tilde{\omega}(q)\theta} T \left( \dot{a}_{p's}(0) a_{ps}(0) \dot{a}_{l\sigma}(\theta) a_{l\sigma}(\theta) e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\theta'') d\theta''} \right), \quad (5.53)$$

$$R_2 = - \sum_{\substack{(l, l', p, p', s, \sigma) \\ (l'-l=p'-p=q)}} \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{2V} \int_{-\infty}^0 d\theta \int_{-\infty}^{\theta} d\theta' e^{i\tilde{\omega}(q)(\theta'-\theta)} \times \\ \times T \left( H_c(0) \dot{a}_{p's}(\theta) a_{ps}(\theta) \dot{a}_{l\sigma}(\theta) a_{l\sigma}(\theta') e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\theta'') d\theta''} \right). \quad (5.54)$$

Можно провести еще один этап упрощения выражений (5.53) и (5.54). Для пояснения идеи этих упрощений необходимо обратиться к выражениям  $Q(k, k')$  в целом, полученным путем явного выполнения интегралов по временным переменным в правых частях формулы (5.36). Для описания полученных таким образом «не зависящих от времени» выражений удобно обратиться к графическому описанию. Для этой цели мы прибегнем к диаграммам типа Гугенгольца [9]. При этом нам будет удобно проследить их связь с обычными «зависящими от времени» диаграммами типа используемых в квантовой теории поля диаграмм Фейнмана. Эту связь для наглядности мы проиллюстрируем сперва на простейших примерах.

Рассмотрим низшие члены разложения выражения (5.36) в ряд по степеням кулоновского взаимодействия. Для этой цели исследуем выражение (5.53) для  $R_1$ . Учитывая, что в (5.36) нам потребуется четвертая вариационная производная от  $R_1$ , проведем в (5.53) некоторые операции спаривания так, чтобы в каждом члене разложения неспаренными оста-

вались по два оператора рождения  $\hat{a}^\dagger$  и по два оператора уничтожения  $a$ . Получаем этим путем

$$\begin{aligned}
 R_1 = & -i \sum_q \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{2V} \int_{-\infty}^0 d\theta e^{i\theta\bar{\omega}(q)} \times \\
 & \times \left\{ \hat{a}_{p's}^\dagger(0) a_{ps}(0) \hat{a}_{l\sigma}^\dagger(\theta) a_{l'\sigma}(\theta) - \frac{i}{V} \sum_{k_1, k_2, k'_2, k'_1} I(k_1, k_2, k'_2, k'_1) \int_{-\infty}^0 d\theta' \times \right. \\
 & \times \left[ T \left( \hat{a}_{p's}^\dagger(0) a_{ps}(0) \hat{a}_{l\sigma}^\dagger(\theta) a_{l'\sigma}(\theta) \overbrace{\hat{a}_{k_1s_1}^\dagger(\theta') \hat{a}_{k_2s_2}^\dagger(\theta') a_{k_2s_2}(\theta') a_{k_1s_1}(\theta')} \right) + \right. \\
 & + T \left( \hat{a}_{p's}^\dagger(0) a_{ps}(0) \hat{a}_{l\sigma}^\dagger(\theta) a_{l'\sigma}(\theta) \overbrace{\hat{a}_{k_1s_1}^\dagger(\theta') \hat{a}_{k_2s_2}^\dagger(\theta') a_{k_2s_2}(\theta') a_{k_1s_1}(\theta')} \right) + \\
 & + T \left( \hat{a}_{p's}^\dagger(0) a_{ps}(0) \hat{a}_{l\sigma}^\dagger(\theta) a_{l'\sigma}(\theta) \overbrace{\hat{a}_{k_1s_1}^\dagger(\theta') \hat{a}_{k_2s_2}^\dagger(\theta') a_{k_2s_2}(\theta') a_{k_1s_1}(\theta')} \right) + \\
 & \left. \left. + \dots \right] + \dots \right\}. \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

Сумма в (5.55) распространяется на все возможные члены с двумя электронными спариваниями

$$\overbrace{a_{k_s}(\tau) \hat{a}_{k'\sigma}^\dagger(\tau')} = -\overbrace{\hat{a}_{k'\sigma}^\dagger(\tau) a_{k_s}(\tau)} = \frac{\delta_{kk'} \delta_{s\sigma}}{i} S(t - \tau' | \bar{\varepsilon}(k)),$$

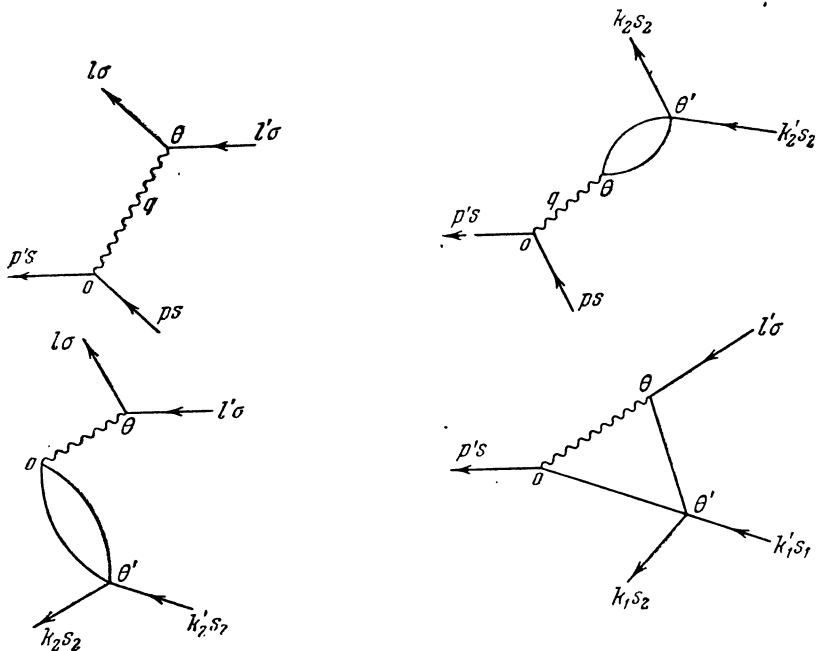
где

$$S(\tau|\varepsilon) = \begin{cases} S^+(\tau|\varepsilon) = i\theta(\tau) e^{-i\varepsilon\tau} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iE\tau}}{E - \varepsilon + i\alpha} dE \quad \text{при } k > k_F, \\ S^-(\tau|\varepsilon) = -i\theta(-\tau) e^{i\varepsilon\tau} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iE\tau}}{E - \varepsilon - i\alpha} dE \quad \text{при } k < k_F. \end{cases}$$

Слагаемым выражения (5.55) могут быть сопоставлены фейнмановские диаграммы, изображенные на фиг. 12. В процессе вычисления четвертой вариационной производной импульсам и спинам внешних линий диаграмм сопоставляются импульсы

$\pm k$ ,  $\pm k'$  и спины  $\pm \frac{1}{2}$ , соответствующие аргументам в (5.36), а временным переменным  $0, \theta, \theta', \dots$  сопоставляются  $t, t', \tau, \tau'$ .

Рассмотрим теперь процедуру вычисления интегралов по временным переменным, в результате которой для  $Q(k, k')$  получаются выражения, содержащие произведения энергетических знаменателей. Благодаря тому, что все зависимости



Фиг. 12

от временных переменных имеют простой экспоненциальный характер, интегралы по этим переменным сводятся к формулам типа

$$i \int_{-\infty}^{t_n-1} e^{it_n z_n} dt_n = \frac{e^{it_n - r'z_n}}{Z_n},$$

где  $Z_n$  — линейная форма вида

$$\bar{\omega}(k_1) + \bar{\varepsilon}(k_2) + \bar{\varepsilon}(k_3) + \dots$$

или

$$\bar{\varepsilon}(k_1) + \bar{\varepsilon}(k_2) + \bar{\varepsilon}(k_3) + \dots$$

В результате последовательного вычисления таких интегралов мы получаем для  $Q$  сумму членов с энергетическими знаменателями  $Z_i$ .

Производя, в частности, соответствующие вычисления для рассматриваемых членов (5.55), получаем для  $Q(k, k')$  вклады вида

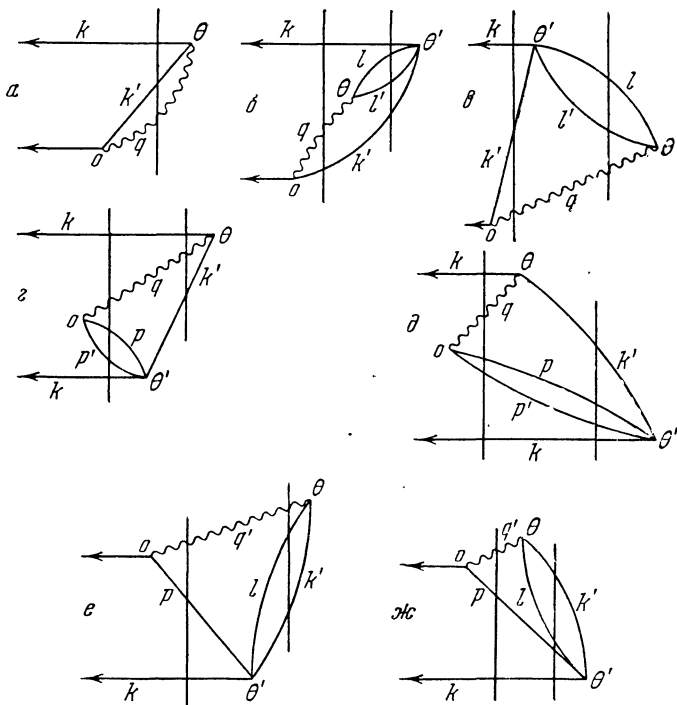
$$\begin{aligned}
 Q'_{ph}(k, k') = & \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{[\bar{\omega}(q) + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')]} V + \\
 & + \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{\bar{\omega}(q) + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')} \sum \frac{I(l', -k, -k', l) + I(l', k, k', l)}{2V^2} \times \\
 & \times \left\{ \sum \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k') + \bar{\varepsilon}(l') + \bar{\varepsilon}(l)} + \sum \frac{1}{\bar{\omega}(q) + \bar{\varepsilon}(l') + \bar{\varepsilon}(l)} \right\} + \\
 & + \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{2V^2} \sum \frac{I(p, -k, -k', p') + I(p, k, k', p')}{2\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\omega}(q) + \bar{\varepsilon}(p) + \bar{\varepsilon}(p')} \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{\bar{\omega}(q) + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k')} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k') + \bar{\varepsilon}(p) + \bar{\varepsilon}(p')} \right\} + \\
 & + \sum_{q'=\pm(k-p)} \frac{g^2(q') \omega(q') (\lambda_{q'} + \mu_{q'})^2}{2V^2} \sum \frac{I(-k, p, l, -k') + I(k, p, l, k')}{\bar{\omega}(q') + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(p)} \times \\
 & \times \left\{ \sum \frac{1}{\bar{\omega}(q') + \bar{\varepsilon}(l) + \bar{\varepsilon}(l')} - \sum \frac{1}{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k') + \bar{\varepsilon}(p) + \bar{\varepsilon}(l)} \right\} + \dots \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

Слагаемым этого выражения соответствуют диаграммы, изображенные на фиг. 13. Эти диаграммы представляют собой по существу диаграммы типа диаграмм Гугенгольца. Для того чтобы сопоставить им энергетические знаменатели слагаемых из правой части (5.66), достаточно провести через них вертикальные сечения и сложить энергии, соответствующие линиям, пересекаясь этими сечениями. Так, например, диаграмма фиг. 13, б может быть рассечена двумя вертикалями (см. фиг. 14), каждая из которых соответствует одному из знаменателей. При этом движение по диаграмме справа налево соответствует возрастанию времени, в связи с чем на диаграммах фиг. 13 существует временной порядок вершинных аргументов. Так, диаграмма фиг. 13, д соответствует предпоследнему члену суммы (5.55) и отличается от диаграммы фиг. 13, з лишь временным порядком следования вершин ( $\theta > \theta'$  для фиг. 13, д и  $\theta' > \theta$  для фиг. 13, з). Линии  $\pm k$  являются внешними линиями диаграмм, что соответствует фиг. 8, а линия  $k'$  является внутренней линией диаграмм в соответствии с хронологическим характером спаривания (5.33).

Отличие введенных диаграмм от обычных диаграмм Гугенгольца заключается в том, что энергия дырок входит в ре-

зультулирующие знаменатели со знаком плюс, что обусловлено проведенной перенормировкой энергии  $\tilde{\epsilon}$ .

Оценим теперь относительные вклады различных членов в сумме (5.56). Примем для этого во внимание, что максимальная энергия фонона будет малой величиной по отношению к энергии Ферми. С другой стороны, в соответствии с (5.34), существенна область импульсов  $k$ ,  $k'$ , лежащих



Фиг. 13

в тонком «слое размытости» около поверхности Ферми. В этой области также будут малы энергии электронов  $\tilde{\epsilon}(k)$  и  $\tilde{\epsilon}(k')$ . Таким образом, в (5.56) является малой сумма

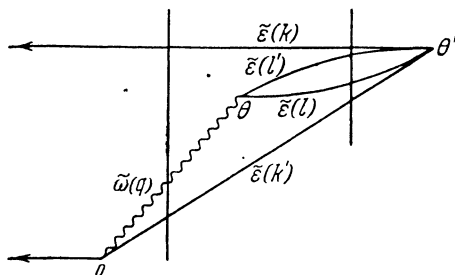
$$\tilde{\omega}(k - k') + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')$$

и, следовательно, члены, содержащие в знаменателе только эту сумму, велики.

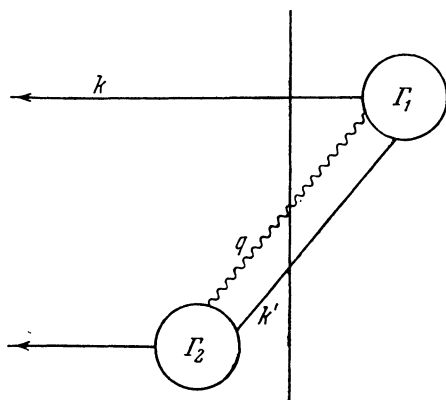
Поставим теперь задачу отделения членов большой величины в выражениях (5.53) и (5.54). Таким членам должны соответствовать диаграммы, которые можно разбить верти-



калью, пересекающей только три линии  $\tilde{\omega}(k-k')$ ,  $\tilde{\varepsilon}(k)$  и  $\tilde{\varepsilon}(k')$ , т. е. диаграммы типа, изображенного на фиг. 15. Круги на фиг. 15 соответствуют «обобщенным вершинам», включающим кулоновские поправки всех порядков. При этом все вершины из  $\Gamma_1$  по времени должны быть расположены позже всех вершин в  $\Gamma_2$ .



Фиг. 14



Фиг. 15

Итак, в рассматриваемом приближении ядро  $Q(k, k')$  уравнения (5.34) может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

$$Q(k, k') = Q_c(k, k') + Q_{ph}(k, k').$$

Первое слагаемое  $Q_c$  соответствует чисто кулоновскому взаимодействию [формулы (5.36), (5.48)], а главная часть второго слагаемого имеет вид

$$Q_{ph}(k, k') = \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2 \Lambda}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k')}. \quad (5.57)$$

Величина  $\Lambda$  соответствует произведению множителей, описывающих обобщенные вершины  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (фиг. 15). В пределе отсутствия кулоновского взаимодействия величина  $\Lambda$  равна единице. В общем случае  $\Lambda$  может быть представлено при помощи формулы

$$\frac{\Lambda}{V \{ \tilde{\omega}(q) + \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k') \}} = \sum_{\sigma} (M_{\sigma} + N_{\sigma}) P_{\sigma}. \quad (5.58)$$

Величина  $P_{\sigma}$  соответствует вершине  $\Gamma_1$  со всеми кулоновскими поправками:

$$P_{\pm} = -i \int_{-\infty}^0 e^{i\theta \tilde{\omega}(q) + i\tilde{\varepsilon}(k)\tau + i\tilde{\varepsilon}(k')\tau'} d\tau_1 d\tau_2 d\theta \left\langle \frac{\partial^2 R_{-q}(\theta)}{\partial \tilde{a}_{\pm k, \pm}(\tau) \partial \tilde{a}_{\pm k', \pm}(\tau')} \right\rangle, \quad (5.59)$$

где

$$R_{-q}(\theta) = T \{ H_q(\theta) S_{-\infty}^0 \},$$

$$H_q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2V}} \sum_{p,s} \dot{a}_{p+q,s}^\dagger(\tau) a_{ps}(\tau).$$

В пределе выключения кулоновского взаимодействия  $P_\pm$  имеет вид

$$P_\pm = \frac{1}{\sqrt{2V} \{ \bar{\omega}(q) + \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k') \}}.$$

Функции  $M$  и  $N$  представляют собой вершины  $\Gamma_2$  для операторов  $R_1$  и  $R_2$  соответственно. Они имеют вид

$$M_\pm = \int_{-\infty}^0 d\tau d\tau' \left\langle \frac{\delta^2 R_{-q}(0)}{\delta \dot{a}_{\pm k, \pm}^\dagger(\tau) \delta a_{\pm k', \pm}(\tau')} \right\rangle_0, \quad (5.60)$$

$$N_\pm = -i \int_{-\infty}^0 d\theta d\tau d\tau' \left\langle \frac{\delta^2 [H_c(0) R_q(\theta)]}{\delta \dot{a}_{\pm k, \pm}^\dagger(\tau) \delta a_{\pm k', \pm}(\tau')} \right\rangle_0. \quad (5.61)$$

В пределе выключения кулоновского взаимодействия  $M$  и  $N$  принимают значения

$$M_\pm = \frac{1}{\sqrt{2V}}, \quad N_\pm = 0.$$

Структура выражения  $\Lambda$  весьма прозрачна, однако прямой вывод формул (5.57)—(5.61) несколько громоздок. Поэтому мы набросаем ниже лишь схему этого вывода.

Начнем рассуждение с формулы (5.31), в которой содержится член

$$F(k) = u_k^2 \int dt dt' e^{i\bar{\varepsilon}(k)(t+t')} \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \dot{a}_{k+}^\dagger(t') \delta \dot{a}_{-k,-}(t)} \right\rangle_c.$$

При  $k > k_F$  этот член может быть представлен в виде

$$F(k) = \langle a_{k+} a_{-k,-} R_1 \rangle_c.$$

Запишем условие связности рассматриваемых здесь диаграмм в явном виде с помощью матрицы  $\hat{S}^\dagger$ :

$$\hat{S}_\alpha^\dagger = (S_\alpha^+)^* = \hat{T} \left( e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c^z(\tau) d\tau} \right); \quad \hat{S}_\alpha^\dagger S_\alpha = 1,$$

где индекс  $\alpha$  указывает представление электронных операторов. Имеем

$$F(k) = \langle a_{k,+} a_{-k,-} R_1 \hat{S}_\alpha^\dagger \rangle.$$

Записывая  $R_1 \hat{S}_\alpha^\dagger$  в виде

$$R_1 \hat{S}_\alpha^\dagger = R_1 \hat{S}_{a'}^\dagger S_{a'} \hat{S}_\alpha^\dagger,$$

произведем разложение полученного произведения операторов  $R_1 \hat{S}_{a'}^\dagger$  и  $S_{a'} \hat{S}_\alpha^\dagger$  по состояниям, содержащим два  $a'$ -электрона с импульсами  $\pm k$ ,  $\pm k'$  и один фотон  $\pm(k - k')$  (тем самым мы ограничиваемся членами в  $Q_{ph}$ , содержащими малый знаменатель  $\tilde{\omega} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}$ ). Получаем тогда

$$F(k) = \sum \langle a_{k,+} a_{-k,-} R_1 \hat{S}_{a'}^\dagger n_\sigma \rangle \langle \hat{n}_\sigma S_{a'} \hat{S}_\alpha^\dagger \rangle;$$

здесь  $n_\sigma$  — выражения вида  $\hat{a}_{\pm k}^\dagger \hat{a}_{\mp k}^\dagger \hat{\beta}_{\pm(k-k')}$ . Преобразуя вторые сомножители с помощью формулы (5.33), выделяем множитель  $u_{k'} v_{k'}$ . Принимая во внимание, что роль операторов  $\hat{S}^\dagger$  сводится к компенсации несвязных диаграмм, приходим к формулам (5.57)—(5.61).

**5.7. Определение  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\tilde{\omega}$ .** Перейдем теперь к рассмотрению условия (5.26) компенсации фотонных диаграмм, изображенных на фиг. 9, и определим из него коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$ . Раскрывая вариационную производную и ограничиваясь главными членами по  $g^2$ , получаем

$$2\omega(q) \lambda_q \mu_q - g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2 Z(q) = 0, \quad (5.62)$$

где

$$Z(q) = \frac{1}{2V} \int dt dt' e^{i\tilde{\omega}(q)(t+t')} \times \\ \times \sum \left\langle T H_c(0) \hat{a}_{ks}(t) a_{k's}(t) \hat{a}_{l\sigma}(t') a_{l'\sigma}(t') e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\tau) d\tau} \right\rangle_0 + \\ + \frac{i}{V} \int_{-\infty}^0 dt e^{i\tilde{\omega}(q)t} \sum \left\langle T \hat{a}_{ks}(0) a_{k's}(0) \hat{a}_{l\sigma}(t) a_{l'\sigma}(t) e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\tau) d\tau} \right\rangle_0. \quad (5.63)$$

Решая уравнение (5.62) относительно  $(\lambda_q + \mu_q)^2$ , находим

$$(\lambda_q + \mu_q)^2 = (1 - 2g^2(q) Z(q))^{-1/2}. \quad (5.64)$$

Рассмотрим, далее, уравнение (5.27), определяющее перенормированную энергию  $\tilde{\omega}$ . Проводя в нем аналогичные преобразования, имеем

$$\omega(q)(\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q) - \tilde{\omega}(q)g^2(q)(\lambda_q + \mu_q)^2 Y(q) = 0, \quad (5.65)$$

где

$$Y(q) = \frac{1}{2V} \int dt dt' e^{i\tilde{\omega}(q)(t-t')} \times$$

$$\times \sum_{\substack{(k'-k=l-l'=q) \\ s, \sigma}} \left\langle T H_c(0) \dot{a}_{ks}(t) a_{k's}(t) \dot{a}_{l\sigma}(t') a_{l'\sigma}(t') e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\tau) d\tau} \right\rangle_0 +$$

$$+ \frac{i}{2V} \int dt (e^{i\tilde{\omega}(q)t} + e^{-i\tilde{\omega}(q)t}) \times$$

$$\times \sum \left\langle T \dot{a}_{ks}(0) a_{k's}(0) \dot{a}_{l\sigma}(t) a_{l'\sigma}(t) e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\tau) d\tau} \right\rangle_0. \quad (5.66)$$

Разрешая (5.65) относительно  $\tilde{\omega}$  с учетом (5.64), получаем

$$\tilde{\omega}(q) = \frac{1 - g^2(q)(Y(q) + Z(q))}{\sqrt{1 - 2g^2(q)Z(q)}} \omega(q). \quad (5.67)$$

**5.8. Связь с модельной задачей.** Покажем теперь, что формы  $Z(q)$ ,  $Y(q)$ , а следовательно, и величины  $(\lambda_q + \mu_q)^2$ ,  $\tilde{\omega}(q)$ , а также входящая в (5.57) величина  $\Lambda$  могут быть приближенно выражены через решение некоторой вспомогательной задачи.

Рассмотрим для этого модельную систему, описываемую гамильтонианом

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (5.68)$$

$$H_0 = \sum_{(s, k > k_F)} \tilde{\epsilon}(k) \dot{a}_{ks} a_{ks} + \sum_{(s, k < k_F)} \tilde{\epsilon}(k) a_{ks} \dot{a}_{ks}, \quad (5.69)$$

$$H_{int} = H_c + \frac{\delta}{\sqrt{2V}} \sum_{k, s} (\dot{a}_{k+q, s} a_{ks} + \dot{a}_{ks} a_{k+q, s}), \quad (5.70)$$

где  $H_c$  — гамильтониан кулоновского взаимодействия в форме (5.3), а  $\delta$  — малый параметр. Энергия основного состояния такой модельной системы,

$$U = \langle R \rangle_0 = \left\langle T \left( H_{int}(0) e^{-i \int_{-\infty}^0 H_{int}(\tau) d\tau} \right) \right\rangle_0,$$

может быть разложена в ряд по степеням  $\delta$ :

$$U = U_0 + \delta^2 U_2^q + \dots, \quad (5.71)$$

причем коэффициент  $U_2^q$  имеет вид

$$U_2^q = -\frac{1}{2V} \int dt dt' \times$$

$$\times \sum_{(k, l, s, \sigma)} \left\langle T \left( H_c(0) \dot{a}_{k+q, s}(t) a_{ks}(t) \dot{a}_{l-q, \sigma}(t') a_{l\sigma}(t') e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\tau) d\tau} \right) \right\rangle_0 -$$

$$-\frac{i}{V} \int dt \sum_{k, l, s, \sigma} \left\langle T \left( \dot{a}_{k+q, s}(0) a_{ks}(0) \dot{a}_{l-q, \sigma}(t) a_{l\sigma}(t) e^{-i \int_{-\infty}^0 H_c(\tau) d\tau} \right) \right\rangle_0. \quad (5.72)$$

Сравнивая между собой формулы (5.63), (5.66), (5.72), видим, что в пределах малых  $\tilde{\omega}(q)$  имеет место равенство

$$Z(q) = Y(q) = -U_2^q,$$

вследствие чего формулы (5.64) и (5.67) приобретают вид

$$(\lambda_q + \mu_q)^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2g^2(q) U_2^q}}, \quad (5.73)$$

$$\tilde{\omega}(q) = \sqrt{1 + 2g^2(q) U_2^q} \omega(q). \quad (5.74)$$

Перейдем теперь к построению в рамках рассматриваемой модели величин, соответствующих  $M$ ,  $N$  и  $P$  из (5.58). Рассмотрим для этого матричные элементы

$$V_{\pm} = \langle a_{\pm k, \pm} R \dot{a}_{\pm k', \pm} \rangle_0, \quad (5.75)$$

$$W_{\pm} = \langle a_{\pm k, \pm} S_{-\infty}^0 \dot{a}_{\pm k', \pm} \rangle_0. \quad (5.76)$$

Величины  $V$  и  $W$  могут быть разложены в ряд по степеням параметра  $\delta$ :

$$V_{\pm} = \delta V_{\pm}^1 + \dots, \quad W_{\pm} = \delta W_{\pm}^1 + \dots,$$

причем коэффициенты  $V^1$ ,  $W^1$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 V_{\pm}^1 &= \langle a_{\pm k, \pm} \{H_q(0) + H_{-q}(0)\} S_{-\infty}^0 \dot{a}_{\pm k', \pm} \rangle_0 - \\
 &- i \left\langle a_{\pm k, \pm} \int_{-\infty}^0 H_c(0) T [\{H_q(\theta) + H_{-q}(\theta)\} S_{-\infty}^0] \dot{a}_{\pm k', \pm} \right\rangle_0 d\theta = \\
 &= 2(M_{\pm} + N_{\pm}), \\
 W_{\pm}^1 &= -i \int \langle a_{\pm k, \pm} T [\{H_q(\theta) + H_{-q}(\theta)\} S_{-\infty}^0] \dot{a}_{\pm k', \pm} \rangle_0 d\theta = \\
 &= 2 \frac{\tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k') + \tilde{\omega}(q)}{\tilde{\varepsilon}(k') + \tilde{\varepsilon}(k)} P_{\pm}.
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (5.58) и (5.57), получаем

$$Q_{ph}(k, k') = \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{\tilde{\omega}(k - k') + \tilde{\varepsilon}(k') + \tilde{\varepsilon}(k)} \cdot \frac{\sum_{\sigma} V_{\sigma}^1 \tilde{W}_{\sigma}^1}{4}.$$

Введенное здесь выражение  $\tilde{W}_{\sigma}^1$ ,

$$\tilde{W}_{\sigma}^1 = \{\tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k')\} W_{\sigma}^1, \quad (5.77)$$

фактически не зависит от малого параметра  $\tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k')$ .

С учетом формул (5.73) и (5.74)  $Q_{ph}(k, k')$  может быть также представлено в виде

$$Q_{ph}(k, k') = \frac{g^2(q) \tilde{\omega}(q)}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k')} \cdot \frac{\sum_{\sigma} V_{\sigma}^1 \tilde{W}_{\sigma}^1}{4}, \quad (5.78)$$

где  $\tilde{g}$  -- перенормированная функция  $g$ :

$$\tilde{g}^2(q) = \frac{1}{1 + 2g^2(q) U_2^q} g^2(q). \quad (5.79)$$

## § 6. КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТОВ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ\*

**6.1. Приближенное определение ренормированных  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{g}$ .**  
В § 5.8 мы свели вопрос определения величин  $\lambda + \mu$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $Q_{ph}$  к решению модельной задачи, гамильтониан которой (5.68) содержит лишь «кинетическую энергию», энергию кулоновского взаимодействия электронов и некоторый член, соответствующий взаимодействию с классическим полем. Займемся теперь получением оценок для величин  $\lambda + \mu$ ,  $\tilde{\omega}$ , ... в приближении «сильно сжатого» электронного газа, когда кулоновская энергия может рассматриваться как малая по сравнению с кинетической энергией.

Как хорошо известно, в задачах с кулоновским взаимодействием нельзя пользоваться прямыми разложениями по степеням квадрата заряда, т. е. по степеням кулоновского взаимодействия, так как при этом появляются расходимости в области малых импульсов и возникает положение, напоминающее «инфракрасную катастрофу» в квантовой теории поля.

После работ Гелл-Манна и Брюкнера и Савада [13] процедура исправления формул, к которым приводят подобные разложения, стала совершенно ясной. Так, для улучшения основного приближения низшего порядка по  $e^2$  необходимо просуммировать графы из комплексов частица—дырка, о которых упоминалось в § 4. Этим приемом мы сейчас и воспользуемся, причем, как и в § 4, для удобства придадим ему форму метода приближенного вторичного квантования.

---

\* Изложение пунктов 6.1 и 6.2 основано на исследовании Н. Н. Боголюбова. Изложение пункта 6.3 проведено на основе исследования В. В. Толмачева.

Введем прежде всего ферми-амплитуды для частиц и дырок с помощью нашего канонического преобразования

$$\begin{aligned} a_{k,+} &= u_k \alpha_{k0} + v_k \dot{\alpha}_{k1}, \\ a_{-k,-} &= u_k \alpha_{k1} - v_k \dot{\alpha}_{k0} \end{aligned} \quad (6.1)$$

с тривиальными значениями  $u_k, v_k$ :

$$u_k = \theta_G(k); \quad v_k = \theta_F(k). \quad (6.2)$$

Представление (6.1) совпадает с введенным выше  $a'$ -представлением (5.30), в котором фактически и получены все результаты.

Рассмотрим фурье-компоненты пространственной плотности электронов

$$\rho(q) = \sum_{k,s} \dot{\alpha}_{k+q,s} a_{ks} \quad (q \neq 0).$$

Преобразуем их к амплитудам  $\alpha$  и оставим в полученном выражении лишь члены, которые не обращаются в нуль после того, как они подействуют только слева (или только справа) на волновую функцию  $\dot{C}_0$  (или  $C_0$ ) «вакуумного состояния»

$$\dot{C}_\alpha \dot{\alpha}_\nu = 0, \quad \alpha_\nu C_0 = 0 \quad \nu = 0, 1.$$

Тогда получим приближенно

$$\rho(q) = \sum_k M(k, k+q) \dot{\alpha}_{k+q,0} \dot{\alpha}_{k,1} + M(k, k-q) \alpha_{k,1} \alpha_{k-q,0},$$

где

$$M(k, q) = u_k v_q + u_q v_k.$$

В соответствии с правилами метода приближенного вторичного квантования заменим здесь произведения ферми-амплитуд на бозе-амплитуды

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{k+q,0} \dot{\alpha}_{k,1} &\rightarrow \dot{\beta}_q(k), \\ \alpha_{k,1} \alpha_{k-q,0} &\rightarrow \beta_{-q}(k). \end{aligned}$$

Получим

$$\rho(q) = \sum_k M(k, k+q) \dot{\beta}_q(k) + \sum_k M(k, k-q) \beta_{-q}(k).$$



Подставим это выражение в энергию кулоновского взаимодействия

$$H_c = \frac{4\pi e^2}{2V} \sum_{\substack{q \\ (q \neq 0)}} \frac{\rho^*(q) \rho(q)}{|q|^2}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} H_c = \frac{2\pi e^2}{V} \sum_{\substack{k, k', q \\ (q \neq 0)}} \frac{1}{|q|^2} \{ & M(k, k+q) M(k', k'-q) \dot{\beta}_{-q}(k') \dot{\beta}_q(k) + \\ & + M(k, k-q) M(k', k'+q) \beta_{-q}(k) \beta_q(k') + \\ & + M(k, k+q) M(k', k'+q) \dot{\beta}_q(k) \beta_q(k') + \\ & + M(k, k-q) M(k', k'-q) \dot{\beta}_{-q}(k') \beta_{-q}(k) \}. \end{aligned}$$

Аналогичным путем в том же приближении для «члена взаимодействия с классическим полем» в (5.70) получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2V} \sum_k \{ & M(k, k+p) \dot{\beta}_p(k) + M(k, k-p) \dot{\beta}_{-p}(k) + \\ & + M(k, k-p) \beta_{-p}(k) + M(k, k+p) \beta_p(k) \}. \end{aligned}$$

Как было показано в § 4, для получения правильных энергетических знаменателей нам надо теперь в качестве собственной энергии взять выражение

$$\sum_{k, q} \{ \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k+q) \} \dot{\beta}_q(k) \beta_q(k).$$

Итак, полный гамильтониан рассматриваемой задачи в модели метода приближенного вторичного квантования имеет вид

$$\begin{aligned} H = \sum_{k, q} \{ \bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k+q) \} \dot{\beta}_q(k) \beta_q(k) + \\ + \frac{2\pi e^2}{V} \sum_{(k, k', q \neq 0)} \frac{1}{|q|^2} \{ & M(k, k+q) M(k', k'-q) \dot{\beta}_q(k) \dot{\beta}_{-q}(k') + \\ & + M(k, k+q) M(k', k'-q) \beta_q(k) \beta_{-q}(k') + \\ & + 2M(k, k+q) M(k', k'+q) \dot{\beta}_q(k) \beta_q(k') \} + \\ + \frac{\delta}{\sqrt{2V}} \sum_k \{ & M(k, k+p) (\dot{\beta}_p(k) + \beta_p(k)) + \\ & + M(k, k-p) (\dot{\beta}_{-p}(k) + \beta_{-p}(k)) \}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Как видно, этот гамильтониан представляется суммой квадратичной формы из бозе-амплитуд и линейной формы, пропорциональной  $\delta$ . Чтобы учесть влияние этой формы на смещение энергетического уровня основного состояния и вычислить тем самым величину  $U_2^p$ , можно воспользоваться известным элементарным приемом трансляции бозе-амплитуд.

Совершим преобразование

$$\beta_q(k) \rightarrow \beta_q(k) + C_q(k), \quad \dot{\beta}_q(k) \rightarrow \dot{\beta}_q(k) + \dot{C}_q(k) \quad q = \pm p,$$

где  $C$  и  $\dot{C}$  —  $C$ -числа, определяемые из условий исчезновения линейных форм:

$$\frac{\partial H}{\partial \beta_q} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{\beta}_q} = 0 \quad q = \pm p.$$

Раскрывая эти условия, имеем

$$\{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k+q)\} C_q(k) + \frac{2\pi e^2}{V|q|^2} 2M(k, k+q) X(q) + \\ + \frac{\delta}{\sqrt{2V}} M(k, k+q) = 0,$$

$$\{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k+q)\} \dot{C}_{-q}(k) + \frac{2\pi e^2}{V|q|^2} 2M(k, k-q) X(q) + \\ + \frac{\delta}{\sqrt{2V}} M(k, k-q) = 0,$$

где

$$X(q) = \sum_{k'} \{M(k', k'+q) C_q(k') + M(k', k'-q) \dot{C}_{-q}(k')\}.$$

Определим из этих уравнений величину  $X(q)$ :

$$X(q) = -\delta \sqrt{\frac{V}{2}} \frac{F(q)}{1 + \frac{4\pi e^2}{|q|^2} F(q)}, \quad (6.4)$$

где

$$F(q) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{M^2(k, k+q)}{\{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k+q)\}} + \frac{M^2(k, k-q)}{\{\bar{\varepsilon}(k) + \bar{\varepsilon}(k-q)\}} \right\}.$$

Заметим теперь, что в низшем приближении по  $\delta$  энергетический сдвиг равен

$$\Delta U = \frac{\delta}{\sqrt{2V}} \sum_k \{M(k, k+p) (\dot{C}_p(k) + C_p(k)) + M(k, k-p) (\dot{C}_{-p}(k) + C_{-p}(k))\} = \frac{\delta}{\sqrt{2V}} \{X(p) + X(-p)\}.$$

Подставляя сюда значение (6.4), получаем

$$\Delta U = -\frac{\delta^2}{2} \frac{F(p)}{1 + \frac{4\pi e^2}{|p|^2} F(p)}.$$

Входящее сюда выражение  $F(q)$  может быть преобразовано к виду

$$F(q) = \frac{2}{V} \sum_k \frac{M^2(k, k+q)}{\tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k+q)} = \frac{4}{V} \sum_{k'-k=q} \frac{\theta_G^{\bar{v}}(k) \theta_F^{\bar{v}}(k')}{\tilde{E}(k) - \tilde{E}(k')}, \quad (6.5)$$

где  $\tilde{E}(k)$  — энергия элементарного возбуждения электронов, так что

$$\tilde{\varepsilon}(k) = |\tilde{E}(k) - E_F|.$$

Из сравнения формул (5.71) и (6.5) получаем

$$U_p^2 = -\frac{1}{2} \frac{F(p)}{1 + \frac{4\pi e^2}{|p|^2} F(p)}. \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (5.74) и (5.79), находим

$$\tilde{\omega}(q) = \omega(q) \left\{ 1 - \frac{g^2(q) F(q)}{1 + \frac{4\pi e^2}{|q|^2} F(q)} \right\}^{1/2}, \quad (6.7)$$

$$\tilde{g}(q) = g(q) \left\{ 1 - \frac{g^2(q) F(q)}{1 + \frac{4\pi e^2}{|q|^2} F(q)} \right\}^{-1/2}. \quad (6.8)$$

Сравнивая полученные формулы (6.7) и (6.8) с соответствующими формулами § 3.2, видим, что при малых  $q$  кулоновские силы практически уничтожают «ренормировку».

**6.2. Обсуждение свойств величин  $Q_c$  и  $Q_{ph}$ .** Рассмотрим теперь величины  $Q_c$  [формулы (5.36), (5.48)] и  $V_\sigma^1, \dot{W}_\sigma^1$ , определяющие, согласно (5.78), ядро  $Q_{ph}$ . Здесь можно было бы

также провести приближенный анализ этих величин с целью выяснения их свойств в области инфракрасной кулоновской катастрофы, т. е. в области, где кулоновское взаимодействие не является малым. Однако, поскольку подобный анализ по существу претендует лишь на количественные результаты, с одной стороны, и поскольку строгое рассмотрение значительно более сложно\* — с другой, мы не будем заниматься здесь подобными рассуждениями. Мы ограничимся чисто качественным обсуждением свойств величин  $Q_c$  и  $Q_{ph}$ .

Заметим, что основной результат § 6.1 состоит в том, что кулоновские поправки суммируются по геометрической прогрессии в формулу типа (6.6). Это свойство — не случайное следствие использованной модели приближенного вторичного квантования, а представляет собой проявление общей структуры кулоновского взаимодействия. Другим проявлением этой структуры является, как известно, свойство экранировки. Можно утверждать, что учет всех кулоновских поправок к данной вершине диаграммы, в которой происходит рассеяние электронов с передачей малого импульса  $q$ , приводит к появлению множителя типа

$$\frac{1}{1 + \frac{4\pi e^2}{|q|^2} \Phi(q)}, \quad (6.9)$$

где  $\Phi(q) > 0$ . Как раз такой множитель содержит формула (6.6). Ясно также, что введение множителя (6.9) в обычную кулоновскую вершину

$$\frac{4\pi e^2}{V |q|^2}$$

приведет к эффекту экранировки

$$\frac{4\pi e^2}{V |q|^2} \frac{1}{1 + \frac{4\pi e^2}{|q|^2} \Phi(q)} = \frac{\frac{4\pi e^2}{V}}{|q|^2 + 4\pi e^2 \Phi(q)}. \quad (6.10)$$

С другой стороны, введение множителя (6.9) в вершину не кулоновского типа (например, фононную) приводит к эффекту обрезания при малых  $|q|^2$ , как это имеет место в формулах (6.7), (6.8).

Обратимся теперь к функциям  $Q_c$ ,  $Q_{ph}$ . Величина  $Q_c$  в низшем (по  $e^2$ ) приближении сводится к чисто кулоновской вершине. Следовательно, в результате экранировки полное

\* Соответствующие вычисления проводятся в настоящее время.

выражение  $Q_c$  будет конечным при  $q=0$ . Коэффициент при главной части  $Q_{ph}$  в низшем приближении соответствует обычным фононным вершинам. Полные выражения для него при  $q=0$  должны обращаться в нуль.

**6.3. Общие свойства основного уравнения компенсации.** Приступим в заключение к рассмотрению уравнения компенсации в форме (5.40),

$$C(k) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int dk' Q(k, k') \frac{C(k')}{\sqrt{\xi^2(k') + C^2(k')}} ,$$

причем ограничимся для простоты случаем радиальной симметрии. В этом случае исследуемое уравнение можно привести к одномерному уравнению, взяв  $\xi$  в качестве новой независимой переменной:

$$C(\xi) = \frac{1}{2} \int Q(\xi, \xi') n(\xi') \frac{C(\xi')}{\sqrt{\xi'^2 + C^2(\xi')}} d\xi' , \quad (6.11)$$

где

$$n(\xi) = \frac{1}{2\pi^2} \left( k^2 \frac{d|k|}{d|\xi|} \right) ,$$

$$Q(\xi, \xi') = \frac{1}{4\pi} \int Q(|k|, |k'| e) de .$$

Для анализа свойств решения уравнения (6.11) вблизи поверхности Ферми упростим его, заменив под корнем в знаменателе величину  $C^2(\xi')$  на  $\Delta^2 = C^2(0)$ . Такое упрощение асимптотически вполне законно, поскольку при очень малых  $\xi$  мы всегда можем положить

$$\sqrt{\xi'^2 + C^2(\xi')} \sim \sqrt{\xi'^2 + \Delta^2} .$$

Получим таким путем «квазилинейное» уравнение

$$C(\xi) = \frac{1}{2} \int Q(\xi, \xi') n(\xi') \frac{C(\xi')}{\sqrt{\xi'^2 + \Delta^2}} d\xi' , \quad (6.12)$$

$$C(0) = \Delta . \quad (6.13)$$

Как мы установили в § 5.6, ядро  $Q$  разбивается на чисто кулоновскую часть  $Q_c$  и часть  $Q_{ph}$ , существенно обусловленную взаимодействием электронов с фононами,

$$Q = Q_c + Q_{ph} .$$

В соответствии с рассуждениями § 6.2,  $Q_c$  можно приближенно представить в виде функции типа (6.10), соответствующей

щей экранированному кулоновскому взаимодействию. Согласно (5.78), член  $Q_{ph}$  эффективен лишь в окрестности поверхности Ферми при  $|\xi| \leq \tilde{\omega}$ .

Рассмотрим во вспомогательных целях интегральное уравнение с ядром, пропорциональным  $Q_c$ ,

$$u(\xi) - \frac{1}{2} \int Q_c(\xi, \xi') n(\xi') \frac{u(\xi')}{\sqrt{\xi'^2 + \Delta^2}} d\xi' = f(\xi) \quad (6.14)$$

и введем соответствующую резольвенту

$$u(\xi) = f(\xi) - \frac{1}{2} \int G_\Delta(\xi, \xi'') f(\xi'') d\xi'' \quad (6.15)$$

Ввиду особенности ядра уравнения (6.14) при  $\Delta \rightarrow 0$  резольвента  $G_\Delta$  также будет иметь особенности типа

$$G_\Delta(\xi, \xi'') = G_\Delta^{reg}(\xi, \xi'') + \frac{Z(\xi)}{\sqrt{\xi''^2 + \Delta^2}} \quad \text{при } \xi'' \sim 0, \quad (6.16)$$

где  $Z(\xi)$  является решением уравнения

$$Z(\xi) - \frac{1}{2} \int Q_c(\xi, \xi') n(\xi') \frac{Z(\xi')}{\sqrt{\xi'^2 + \Delta^2}} d\xi' = -Q_c(\xi, 0) n(0). \quad (6.17)$$

Заметим, что рассмотренное уравнение (6.12) приводится к виду (6.14), если положить

$$u(\xi) = C(\xi), \\ f(\xi) = \frac{1}{2} \int Q_{ph}(\xi, \xi') n(\xi') \frac{C(\xi')}{\sqrt{\xi'^2 + \Delta^2}} d\xi'.$$

Поэтому на основании (6.15) и (6.16) имеем

$$C(\xi) = \frac{1}{2} \int \left\{ Q_{ph}(\xi, \xi') - \frac{1}{2} \int G_\Delta^{reg}(\xi, \xi'') Q_{ph}(\xi'', \xi') d\xi'' - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int \frac{Z(\xi)}{\sqrt{\xi''^2 + \Delta^2}} Q_{ph}(\xi'', \xi') d\xi'' \right\} n(\xi') \frac{C(\xi')}{\sqrt{\xi'^2 + \Delta^2}} d\xi'.$$

Как отмечалось, величина  $Q_{ph}$  эффективна лишь в малой окрестности поверхности Ферми, когда оба аргумента близки к нулю. Поэтому интегральный член

$$\int G_\Delta^{reg}(\xi, \xi'') Q_{ph}(\xi'', \xi') d\xi''$$

является малым и может быть отброшен. Равным образом величины  $n(\xi')$  и  $Z(\xi)$  следует заменить их значениями на поверхности Ферми  $n(0)$  и  $Z(0)$ . Таким образом приходим к следующему уравнению:

$$C(\xi) = \frac{1}{2} \int \left\{ Q_{ph}(\xi, \xi') - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} Z(0) \int \frac{Q_{ph}(\xi'', \xi')}{\sqrt{\xi''^2 + \Delta^2}} d\xi'' \right\} n(0) \frac{C(\xi'')}{\sqrt{\xi''^2 + \Delta^2}} d\xi''. \quad (6.18)$$

Для исследования уравнения (6.18) можно было бы использовать асимптотический метод, изложенный в § 2. Однако в целях простоты изложения мы применим здесь его более грубый вариант, заменив функцию  $Q_{ph}(\xi, \xi')$  постоянной величиной  $Q_{ph}(0, 0)$  внутри некоторой зоны  $|\xi| < \tilde{\omega}$  и нулем вне этой зоны. Получим этим путем (с учетом того, что  $\tilde{\omega}/\Delta \gg 1$ )

$$C(\xi) = \frac{\rho}{2} \int_{-\tilde{\omega}}^{\tilde{\omega}} \left\{ 1 - Z(0) \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta} \right\} \frac{C(\xi')}{\sqrt{\xi'^2 + \Delta^2}} d\xi' \quad \text{при } |\xi| < \tilde{\omega}, \quad (6.19)$$

где

$$\rho = Q_{ph}(0, 0) n(0).$$

Из (6.19) вытекает, что

$$C(\xi) = \Delta \quad \text{при} \quad -\tilde{\omega} < \xi < \tilde{\omega},$$

причем соотношение для определения  $\Delta$  имеет вид

$$1 = \rho \left( 1 - Z(0) \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta} \right) \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta}. \quad (6.20)$$

Сравнивая (6.20) с соответствующим уравнением из § 2

$$1 = \rho \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta},$$

видим, что наличие кулоновского взаимодействия приводит к изменению эффективной величины  $\rho$ :

$$\rho \rightarrow \rho \left( 1 - Z(0) \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta} \right),$$

причем величина  $Z(0)$  определяется уравнением (6.17).

Для нахождения простой, грубо ориентировочной оценки значения  $Z(0)$  заменим в (6.17) функцию  $-Q_e(\xi, \xi') n(\xi')$

усредненной постоянной  $\rho_c = \frac{4\pi e^2}{k_c^2} \bar{n}$ ,  $k_c \sim k_F$  внутри области  $|\xi| < \tilde{E}_F$ ,  $\tilde{E}_F \sim E_F$  и нулем вне ее. Тогда уравнение (6.17) имеет решение (при  $\tilde{E}_F \gg \Delta$ ):

$$Z(0) = \frac{\rho_c}{1 + \rho_c \ln \frac{2\tilde{E}_F}{\Delta}}.$$

Подставляя это выражение в (6.20), получаем

$$1 = \rho \left( 1 - \frac{\rho_c \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta}}{1 + \rho_c \ln \frac{2\tilde{E}_F}{\Delta}} \right) \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta}.$$

Разрешая это соотношение относительно  $\ln \Delta$ , имеем

$$1 = \left( \rho - \frac{\rho_c}{1 + \rho_c \ln \frac{\tilde{E}_F}{\omega}} \right) \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta}. \quad (6.21)$$

Как видно, кулоновское взаимодействие эффективно уменьшает параметр  $\rho$  и тем самым противодействует появлению сверхпроводимости. Сверхпроводящее состояние не может существовать при сколь угодно малом  $\rho$ . Необходимо для этого, чтобы выполнялось условие

$$\rho > \frac{\rho_c}{1 + \rho_c \ln \frac{\tilde{E}_F}{\tilde{\omega}}}. \quad (6.22)$$

Заметим, что в теории Бардина—Купера—Шриффера [5] вместо уравнения (6.21) и условия (6.22) получаются соотношения вида

$$1 = (\rho - \rho_c) \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta},$$

$$\rho > \rho_c.$$

Как видно, в нашей теории противодействующая возникновению сверхпроводимости роль кулоновского взаимодействия значительно ослаблена из-за появления «большого логарифма»  $\ln(\tilde{E}/\tilde{\omega})$ .



Заметим еще, что в случае, когда

$$\rho_c > \rho > \frac{\rho_c}{1 + \rho_c \ln \frac{\tilde{E}_F}{\tilde{\omega}}},$$

ядро  $Q = Q_c + Q_{ph}$  может быть везде отрицательно, а сверхпроводящее состояние существует. Таким образом, отрицательность  $Q$  сама по себе ни о чем не свидетельствует, вопреки основным положениям теории Бардина—Купера—Шриффера.

Изложенные качественные соображения, разумеется, можно было бы уточнить, основываясь на уравнениях (6.17) и (6.18). Однако здесь следует иметь в виду, что полностью убедительных количественных результатов\* можно ожидать лишь при явном учете кристаллической структуры металла.

---

\* В настоящее время производится соответствующее исследование.

## § 7. ФЕРМИ-СИСТЕМЫ СО СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ\*

**7.1. Формулировка теории Бардина—Купера—Шриффера.** В предыдущих параграфах мы все время рассматривали электронно-фононное взаимодействие с помощью гамильтониана Фрелиха. Тем не менее основные результаты могут быть также получены при оперировании с некоторым модельным гамильтонианом, в котором фононы исключены.

Так, Бардин, Купер, Шриффер [5] в согласии с более ранними результатами Бардина и Пайнса [18] сразу исходят из гамильтониана, в котором взаимодействие электронов с фононами заменено прямым электрон-электронным взаимодействием. В наших обозначениях их исходный гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{k, s} E(k) \hat{a}_{ks}^{\dagger} a_{ks} + H_{int},$$

где

$$H_{int} = -\frac{1}{2V} \sum_{\substack{(k_1, k_2, k'_1, k'_2, s_1, s_2) \\ k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2}} \frac{g^2 (k'_1 - k_1) \omega^2 (k'_1 - k_1)}{\omega^2 (k'_1 - k_1) - [E(k_1) - E(k'_1)]^2} \times \hat{a}_{k'_2 s_2}^{\dagger} a_{k_2 s_2} \hat{a}_{k'_1 s_1}^{\dagger} a_{k_1 s_1}. \quad (7.1)$$

Бардин, Купер и Шриффер производят дальнейшее упрощение этого гамильтониана. В качестве основной аппроксимации они опускают в (7.1) все члены, ведущие к разрушению пары частиц с противоположно направленными импуль-

---

\* Изложение этого параграфа основывается на исследовании, проведенном В. В. Толмачевым.

сами  $\pm k$  и противоположными спинами  $\pm 1/2$ . Получающийся при этом упрощенный гамильтониан имеет вид

$$H_{red} = -\frac{1}{V} \sum_{k, k'} \frac{g^2 (k' - k) \omega^2 (k' - k)}{\omega^2 (k' - k) - [E(k) - E(k')]^2} \times \\ \times \hat{a}_{-k', -} a_{-k, -} \hat{a}_{k', +} a_{k, +}. \quad (7.2)$$

Обработка гамильтониана (7.2) с помощью вариационного принципа и составляет основное содержание указанной работы [5].

Законность выбора исходного гамильтониана (7.1), так же как и правильность основной аппроксимации (7.2) в работе Бардина, Купера и Шриффера [5], не исследована достаточно полно. В настоящем параграфе мы покажем, что до тех пор, пока приходится иметь дело с энергией основного состояния или фермиевской ветвью спектра элементарных возбуждений, подобного типа сведение гамильтониана Фрелиха к модельному гамильтониану типа (7.2) действительно имеет место. Однако, согласно нашим расчетам, модельный гамильтониан следует выбрать несколько иначе, а именно:

$$H_{red} = -\frac{1}{V} \sum_{k, k'} \frac{g^2 (k - k') \omega (k' - k)}{\omega (k' - k) + |E(k') - E_F| + |E(k) - E_F|} \times \\ \times \hat{a}_{-k', -} a_{-k, -} \hat{a}_{k', +} a_{k, +}. \quad (7.3)$$

Дело обстоит сложнее, когда рассматривается особая бозонная ветвь спектра элементарных возбуждений гамильтониана Фрелиха, связанная с коллективными эффектами электронно-фононного взаимодействия. Для нее указанное сведение больше не осуществляется. Точнее говоря, мы все еще можем в этом случае пользоваться гамильтонианом типа (7.1), но уже не в праве применять к этому гамильтониану аппроксимацию Бардина, Купера и Шриффера, ведущую к гамильтонианам типа (7.2) или (7.3).

Сам по себе тот факт, что фононные операторы можно исключить из гамильтониана Фрелиха, несколько не удивителен. В самом деле, с помощью хорошо известной в квантовой теории поля процедуры Фейнмана мы всегда можем провести функциональную квадратуру по виртуальным фононам и прийти к некоторой четверной форме по ферми-амплитудам электронных состояний. Такая четверная форма, однако, будет нелокальной, так как будет содержать еще

интегрирование по времени. Физически это означает, что в получившуюся четверную форму автоматически входят эффекты запаздывания электронно-фононного взаимодействия.

Гамильтониан с прямым электрон-электронным взаимодействием типа (7.1) является лишь приближением к указанной четверной форме с эффектами запаздывания, когда последними пренебрегают. С точки зрения энергетических соотношений такое пренебрежение означает, что пользование локальным гамильтонианом позволительно, когда речь идет о расчете энергетических возбуждений, энергии которых малы по сравнению со средней энергией передающего взаимодействия агента.

Именно так обстоит дело при расчете энергии основного сверхпроводящего состояния. Здесь, как это было выяснено в предыдущих параграфах, разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний мала по сравнению со средней энергией фонона\*.

При расчете фермиевской ветви элементарных возбуждений также можно пренебречь эффектами запаздывания. Действительно, в предыдущих параграфах мы установили, что влияние взаимодействия на эту ветвь ограничено сравнительно малыми энергиями, много меньшими средней энергии фонона. При более высоких энергиях фермиевская ветвь переходит в обычные ферми-возбуждения идеального газа. Таким образом, для расчета влияния взаимодействия на фермиевскую ветвь спектра можно полагать, что фононы обладают бесконечно большими энергиями; следовательно, можно пренебрегать эффектами запаздывания.

Эффекты запаздывания также не оказывают никакого влияния на особую бозонную ветвь гамильтониана Фрелиха, так как все эти бозонные возбуждения имеют весьма малые энергии, много меньше средних фононных энергий.

Итак, для расчета энергии основного состояния фермиевской и особой бозевской ветвей спектра элементарных возбуждений мы можем заменить гамильтониан Фрелиха гамильтонианом типа (7.1) с прямым электрон-электронным взаимодействием. Подчеркнем еще раз, что здесь мы говорим об общей форме локального четверного взаимодействия, а не об упрощенной форме (7.2) или (7.3). Что касается этой последней упрощенной формы, то она вообще не содержит в себе эффектов коллективного взаимодействия и не имеет никакой особой бозевской ветви элементарных возбуждений.

---

\* Мы в праве при этом говорить о средней энергии фонона, потому что, как это ясно из детального рассмотрения гамильтониана Фрелиха, в эффектах электронно-фононного взаимодействия являются одинаково важными фононы всех частот.

**7.2. Уравнение компенсации.** Желая учитывать также это коллективное взаимодействие, с самого начала будем рассматривать гамильтониан \*

$$H = \sum_{k, s} (E(k) - \lambda) \hat{a}_{ks} a_{ks} + H_{int},$$

$$H_{int} = -\frac{1}{2V} \sum J(k'_1, k'_2; k_1, k_2) \times \hat{a}_{k'_2 s_2} a_{k_2 s_2} \hat{a}_{k'_1 s_1} a_{k_1 s_1}, \quad (7.4)$$

$$\left( \begin{array}{c} s_1, s_2, k_1, k_2, k'_1, k'_2 \\ k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2; k_1 \neq k'_1 \end{array} \right)$$

где, как и в предыдущих параграфах, в гамильтониан введен параметр  $\lambda$ , играющий роль химического потенциала. Считая потенциал взаимодействия двух частиц инвариантным по отношению к перестановке обеих частиц, а также инвариантным относительно пространственных отражений, получим, что  $J$  является действительной функцией; кроме того,

$$J(k'_1, k'_2; k_1, k_2) = J(k_1, k_2; k'_1, k'_2),$$

$$J(k'_1, k'_2; k_1, k_2) = J(-k'_1, -k'_2; -k_1, -k_2),$$

$$J(k'_1, k'_2; k_1, k_2) = J(k'_2, k'_1; k_2, k_1).$$

Совершим теперь, как и раньше в случае гамильтониана Фрелиха, переход к новым ферми-амплитудам с помощью того же самого канонического преобразования. В настоящем параграфе удобно будет, однако, записать его в иной форме:

$$a_{2sk, s} = u_k \alpha_{k, -s} + 2sv_k \hat{\alpha}_{k, s},$$

причем  $u_k^2 + v_k^2 = 1$  и  $u_k, v_k$  действительные величины. (Для сравнений с формулами предыдущих параграфов укажем, что  $\alpha_{k, -1/2} \equiv \alpha_{k_0}$ ,  $\alpha_{k, +1/2} \equiv \alpha_{k_1}$ .) Преобразованный гамильтониан будет иметь вид

$$H = U + H_0 + H' + H'',$$

где

$$U = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2,$$

$$H_0 = \sum_{k, s} (E(k) - \lambda) (u_k^2 - v_k^2) \hat{\alpha}_{ks} \alpha_{ks},$$

\* Заметим кстати, что рассмотрение этого гамильтониана представляет самостоятельный интерес, скажем, для теории ядерной материи.

$$\begin{aligned}
H' = & -\frac{1}{2V} \sum_{\substack{s_1, s_2, k_1, k_2, k'_1, k'_2 \\ (k_1+k_2=k'_1+k'_2, k_1 \neq k'_1)}} J(2s_1 k_1, 2s_2 k_2; 2s_1 k'_1, 2s_2 k'_2) \times \\
& \times \{u_{k_2, \check{\alpha}_{k_2, -s_2}} + 2s_2 v_{k_2, \alpha_{k_2, s_2}}\} \{u_{k_2, \alpha_{k_2, -s_2}} + 2s_2 v_{k_2, \check{\alpha}_{k_2, s_2}}\} \times \\
& \times \{u_{k_1, \check{\alpha}_{k_1, -s_1}} + 2s_1 v_{k_1, \alpha_{k_1, s_1}}\} \{u_{k_1, \alpha_{k_1, -s_1}} + 2s_1 v_{k_1, \check{\alpha}_{k_1, s_1}}\}, \\
H'' = & \sum_{k, s} (E(k) - \lambda) 2s u_k v_k (\check{\alpha}_{k, s} \check{\alpha}_{k, -s} + \alpha_{k, -s} \alpha_{k, s}).
\end{aligned}$$

Применим теперь к этому гамильтониану принцип компенсации «опасных» диаграмм, чтобы запретить порождение из вакуума пары фермионов  $\check{\alpha}_{k, -}$ ,  $\check{\alpha}_{k, +}$ . При этом получим следующее уравнение для  $u_k$ ,  $v_k$ :

$$2(E(k) - \lambda) u_k v_k - \langle \check{C}_v \alpha_{k+} \alpha_{k, -} H' C_v \rangle = 0, \quad (7.5)$$

где  $C_v$  — вакуумная волновая функция с нулевыми числами заполнения  $\check{\alpha}_{k, s} \alpha_{k, s}$ . В уравнении (7.5) ничего не изменится, если поменять местами спиновые индексы  $+$  и  $-$ , так как исходный гамильтониан инвариантен по отношению к этому преобразованию.

Раскрывая (7.5), получим

$$2\check{\xi}(k) u_k v_k = \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, -k; k', -k') u_{k'} v_{k'} (u_k^2 - v_k^2), \quad (7.6)$$

где

$$\check{\xi}(k) = E(k) - \lambda - \frac{1}{2V} \sum_{k'} J(k', k; k, k') (u_{k'}^2 - v_{k'}^2). \quad (7.7)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$C(k) = \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, -k; k', -k') u_{k'} v_{k'}.$$

Тогда уравнение (7.6) можно преобразовать в уравнение для  $C(k)$ :

$$C(k) = \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, -k; k', -k') \frac{C(k')}{2\check{\xi}(k')}, \quad (7.8)$$

где

$$\check{\xi}(k) = \sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}.$$

Кроме того, получим

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\xi(k)}{\varepsilon(k)} \right\}, \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\xi(k)}{\varepsilon(k)} \right\}, \quad u_k v_k = \frac{C(k)}{2\varepsilon(k)}.$$

Уравнение (7.8) всегда имеет тривиальное решение  $C(k) = 0$ , для которого

$$u_k = \begin{cases} 0 & E(k) < \lambda \\ 1 & E(k) > \lambda \end{cases}, \quad v_k = \begin{cases} 1 & E(k) < \lambda \\ 0 & E(k) > \lambda \end{cases}.$$

Это решение описывает нормальное, не сверхтекучее состояние.

Помимо этого тривиального решения уравнение (7.8) может иметь еще другое, не тривиальное решение, ведущее к сверхтекучему состоянию.

Для простоты ограничимся рассмотрением случая радиально симметричных решений уравнения (7.8). Тогда, переходя в нем от суммы к интегралу, получим

$$C(k) = \int_0^{\infty} K(k, k') \frac{C(k') k'^2 dk'}{\sqrt{C^2(k') + \xi^2(k')}} , \quad (7.9)$$

где

$$\begin{aligned} K(k, k') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} J(k, -k; k', -k') dt \equiv \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} J(|k|, |k'|, \sqrt{|k|^2 + |k'|^2 - 2|k||k'|t}) dt. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Если мы хотим написать условие, которому должно удовлетворять  $K(k, k')$ , чтобы существовало нетривиальное решение, то надо поступить следующим образом. Позволим ядру  $K(k, k')$  плавно меняться от такой формы, при которой нетривиальное решение уравнения (7.9) отсутствует, до такой, при которой оно имеется. Ввиду непрерывной зависимости нетривиального решения от формы ядра  $K(k, k')$ , при вышеуказанном изменении формы  $K(k, k')$ , нетривиальное решение должно плавно ответвляться от тривиального нулевого решения. Поэтому нам достаточно ограничиться рассмотрением вместо уравнения (7.9) следующего уравнения:

$$\begin{aligned} C(k) &= -2 \ln \frac{C(k_F)}{E'(k_F)} K(k, k_F) k_F^2 \frac{C(k_F)}{E'(k_F)} - \\ &- \int_0^{\infty} \frac{d}{dk'} \left[ K(k, k') k'^2 C(k') \frac{k' - k_F}{|\xi(k')|} \right] \ln 2 |k' - k_F| dk', \end{aligned} \quad (7.11)$$

правая часть которого при малых  $C$  асимптотически совпадает с правой частью уравнения (7.9).

Введем теперь новую неизвестную функцию

$$f(k) = - \frac{C(k)}{C(k_F) \ln \left( \frac{C(k_F)}{E'(k_F)} \right)}.$$

Обратное соотношение имеет вид

$$C(k) = f(k) \frac{E'(k_F)}{f(k_F)} e^{-\frac{1}{f(k_F)}}.$$

Решение  $C(k)$  будет близко к нулю, если  $f(k_F)$  стремится к нулю, оставаясь положительной. Уравнение для  $f(k)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{E'(k_F)}{k_F^2} f(k) = 2K(k, k_F) - \\ - \int_0^\infty \frac{d}{dk'} \left[ K(k, k') f(k') \frac{k'^2 E'(k_F)}{k_F^2} \frac{k' - k_F}{|\xi(k')|} \right] \ln 2 |k' - k_F| dk'. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Следует отметить, что уравнение (7.12) является линейным интегральным уравнением.

При некоторой форме ядра  $K(k, k')$  решение  $f(k)$  уравнения (7.12) будет таким, что  $f(k_F) > 0$ . При этом нелинейное интегральное уравнение (7.9) будет иметь нетривиальное решение. При другой форме ядра  $K(k, k')$  решение  $f(k)$  будет таким, что  $f(k_F) < 0$ , и уравнение (7.9) не будет иметь нетривиального решения. Таким образом, условием того, что имеется нетривиальное решение, будет

$$f(k_F; K(k, k')) > 0, \quad (7.13)$$

где второй аргумент означает функциональную зависимость  $f(k)$  от формы ядра  $K(k, k')$ .

Заметим кстати, что критерий сверхпроводимости с учетом кулоновского взаимодействия, полученный в § 6.3, легко получается также из условия (7.13).

Обсудим качественно, какая форма взаимодействия  $K(k, k')$  благоприятствует появлению нетривиального решения уравнения (7.9).

Прежде всего, когда  $K(k_F, k_F)$  положительно (что соответствует притяжению электронов вблизи поверхности Ферми) и достаточно мало,  $f(k_F)$  тоже будет мало и порядка  $K(k_F, k_F)$ ,



а следовательно, второе слагаемое в (7.12) с интегральным членом будет более высокого порядка малости, чем первое слагаемое. Система будет обладать свойством сверхтекучести.

Другой случай, когда нетривиальное решение существует, представляет взаимодействие, локализованное на сфере Ферми. В этом случае перед вторым слагаемым в правой части (7.12) будет стоять малый параметр — отношение длины локализации взаимодействия к радиусу сферы Ферми. Система опять оказывается сверхтекучей. Заметим еще, что текучестью могут обладать ферми-системы с отрицательным ядром  $K(k, k')$  (что соответствует преимущественно силам отталкивания). Необходимо только, чтобы для такого ядра существовали области в  $k$ -пространстве, где ядро быстро меняется. Тогда в этих областях производная, входящая в интегральное слагаемое в правой части (7.12), будет велика, и положительное второе интегральное слагаемое может пересилить отрицательное первое слагаемое.

Оставляя в стороне рассмотрение таких нерегулярных взаимодействий, следует сказать, что свойством сверхтекучести, как правило, обладают ферми-системы с преобладанием сил притяжения. (Следует отметить, что наличие хотя бы сколь-угодно малых сил отталкивания на небольших расстояниях совершенно необходимо, чтобы обеспечить стабильность системы в целом). В работе [7] по микроскопической теории сверхтекучести бозе-систем было показано, что для появления сверхтекучести в таких системах необходима как раз обратная ситуация, а именно, преобладание сил отталкивания.

Таким образом, критерии сверхтекучести бозе- и ферми-систем исключают друг друга. Указанное обстоятельство находится в хорошем соответствии с тем, что такая ферми-система, как  $He_3$ , не сверхтекуча. Действительно, вряд ли молекулярные силы  $He_3$  существенно отличаются от молекулярных сил в  $He_4$ , но последний, являясь бозе-системой, обладает сверхтекучестью.

Вернемся к уравнению (7.11). Приближенным решением его при малых  $C$  будет

$$C(k) = \omega \frac{K(k, k_F)}{K(k', k_F)} e^{-\frac{1}{\rho}}, \quad (7.14)$$

где

$$\rho = \frac{k_F^2 K(k_F, k_F)}{(2\pi)^2 E'(k_F)},$$

$$\ln \omega = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dk'} \left[ \left( \frac{K(k_F, k')}{K(k_F, k_F)} \right)^2 \frac{k'^2 (k' - k_F) E'(k_F)}{k_F^2 |E(k') - E(k_F)|} \right] \times \\ \times \ln 2E'(k_F) |k' - k_F| dk'. \quad (7.15)$$

Эти формулы тем лучше описывают решение нелинейного интегрального уравнения (7.14), чем ближе мы находимся к точке ответвления нетривиального решения.

Из непосредственного рассмотрения формул (7.14), (7.15) видим, что для асимптотики сверхпроводящего решения от всей формы  $J(k_1, k_2; k'_1, k'_2)$  существенна сравнительно небольшая часть  $J(k, -k; k', -k')$ . Таким образом, мы получили бы в точности те же самые формулы, если бы в уравнении (7.8) сразу положили бы

$$\tilde{\varepsilon}(k) = \sqrt{C^2(k) + (E(k) - E(k_F))^2} \quad (7.16)$$

или, что абсолютно эквивалентно, исходили бы не из гамильтониана (7.4), а из упрощенного гамильтониана

$$H_{red} = -\frac{1}{V} \sum_{k \neq k'} J(k, -k; k', -k') \tilde{a}_{-k', -} \tilde{a}_{-k, -} \tilde{a}_{k', +} a_{k, +}. \quad (7.17)$$

Более того, уравнения (7.8) и (7.16) полностью совпадают с соответствующим уравнением для гамильтониана Фрелиха, если положить

$$J(k, -k; k', -k') = \frac{\tilde{g}^2(k - k') \tilde{\omega}(k - k')}{\tilde{\omega}(k - k') + |E(k) - E(k_F)| + |E(k') - E(k_F)|}. \quad (7.18)$$

Тем самым оправдывается сведение гамильтониана Фрелиха к упрощенному модельному гамильтониану (7.17), (7.18) в отношении функции  $C(k)$  и связанных с ней величин.

Указанное сведение осуществляется также для гамильтониана Фрелиха с учетом кулоновского взаимодействия. Действительно, согласно § 5.3, для этого необходимо только положить

$$\frac{1}{V} J(k, -k; k', -k') = Q(k, k'). \quad (7.19)$$

Рассчитаем теперь энергию основного состояния

$$2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2 + \langle C_v^* H_{int} C_v \rangle = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2 - \\ - \frac{1}{V} \sum_{k \neq k'} J(k', k; k, k') v_k^2 u_{k'}^2 - \frac{1}{V} \sum_{k \neq k'} J(k, -k; k', -k') u_k v_k u_{k'} v_{k'}.$$

Для случая гамильтониана (7.17) эта формула выглядит особенно просто. Она преобразуется к виду

$$\sum_k \{E(k) - E_F - \tilde{\varepsilon}(k)\},$$

где  $\tilde{\varepsilon}(k)$  дается формулой (7.16). Для разности энергий нормального и сверхпроводящего состояний получим выражения

$$E_n^N - E_s^N = \sum_k \{\tilde{\varepsilon}(k) - E(k) + E_F\},$$

которое полностью совпадает с аналогичным выражением для гамильтониана Фрелиха, приведенным в § 3.3.

Нам остается еще рассчитать энергию элементарного возбуждения фермиевской ветви спектра. Это можно сделать с помощью формулы

$$E_e(k) = (E(k) - \lambda)(u_k^2 - v_k^2) + \langle C_v^* \alpha_{k,+} H_{int} \dot{\alpha}_{k,+} C_v \rangle, \quad (7.20)$$

в которой при вычислении среднего по вакууму надо иметь в виду, что  $\alpha_{k,+}$  нельзя спаривать с  $\dot{\alpha}_{k,+}$ . Заметим, что если бы мы заменили в формуле (7.20) спиновой индекс  $+$  на  $-$ , то, конечно, получили бы тот же самый результат вследствие инвариантности гамильтониана (7.4) относительно этого преобразования. Раскрывая формулу (7.20), найдем

$$E_e(k) = \xi(k)(u_k^2 - v_k^2) + \frac{2}{V} \sum_{k'} J(k, -k; k', -k') u_k v_k u_{k'} v_{k'},$$

что с использованием (7.9) можно преобразовать к виду

$$E_e(k) = \tilde{\varepsilon}(k). \quad (7.21)$$

Таким образом, введенная нами величина  $\tilde{\varepsilon}(k)$  является энергией элементарного возбуждения.

Для случая гамильтониана (7.17) формулу (7.21) можно записать в виде

$$E_e^s(k) = \sqrt{(E_e^n(k))^2 + C^2(k)}, \quad (7.22)$$

который полностью аналогичен соотношению для гамильтониана Фрелиха в § 3.3.

До сих пор мы исследовали гамильтониан (7.4) с помощью принципа компенсации «опасных» диаграмм. При этом мы ограничивались первым порядком теории возмущений и использовали указанный принцип в форме (7.5). Можно показать, однако, что учет высших порядков теории возмуще-

ний в основное уравнение для  $C(k)$  ничего принципиально нового не вносит. Это было подробно продемонстрировано в работе С. В. Тябликова и одного из авторов [19].

Действительно, во втором порядке принцип компенсации «опасных» диаграмм принимает форму

$$2(E(k) - \lambda) u_k v_k - \langle \dot{C}_t \alpha_{k,+} \alpha_{k,-} (H_{int} - H_{int} H_0^{-1} H_{int}) C_v \rangle_{\text{КОМП}} = 0. \quad (7.23)$$

Значок «комп» указывает на то, что помимо учета диаграммы первого порядка, порождающей из вакуума пару частиц, необходимо заботиться только о диаграмме второго порядка, описывающей порождение из вакуума четырех частиц и последующее превращение трех частиц в одну.

Раскрывая уравнения (7.23) и ограничиваясь для простоты случаем локализованного и постоянного вблизи поверхности Ферми ядра  $J(k_1, k_2; k'_1, k'_2)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} 2 \left\{ \xi(k) - \left( \frac{J}{V} \right)^2 \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ (k_2 - k_1 + k_3 = k)}} \frac{\{u_{k_1}^2 v_{k_2}^2 - (u_{k_1} v_{k_1})(u_{k_2} v_{k_2})\} (u_{k_3}^2 - v_{k_3}^2)}{|\xi(k)| + |\xi(k_1)| + |\xi(k_2)| + |\xi(k_3)|} \right\} u_k v_k = \\ = (u_k^2 - v_k^2) \left\{ \frac{J}{V} \sum_{k_1} u_{k_1} v_{k_1} + \right. \\ \left. + \left( \frac{J}{V} \right)^2 \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ (k_2 - k_1 + k_3 = k)}} \frac{u_{k_1} v_{k_1} \{ (u_{k_2} v_{k_2})(u_{k_3} v_{k_3}) - u_{k_2}^2 v_{k_3}^2 \}}{|\xi(k)| + |\xi(k_1)| + |\xi(k_2)| + |\xi(k_3)|} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\xi(k) = E(k) - E(k_F).$$

Отсюда непосредственно видно, что поправочные члены с  $J^2$  фактически являются еще более малыми, так как содержат произведения  $uv$  с одним и тем же индексом. Последние же дают экспоненциально малый вклад и, как можно видеть, не меняют найденных ранее асимптотических величин.

**7.3. Коллективные возбуждения. Влияние кулоновского взаимодействия.** Перейдем теперь к рассмотрению коллективной ветви гамильтониана (7.4). Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в § 4.2 для коллективной ветви гамильтониана Фрелиха, мы приходим к необходимости диагонализации квадратичной формы

$$\Gamma = \sum_{k, p} \{ \bar{\varepsilon}(k+p) + \bar{\varepsilon}(k) \} \beta_p^\dagger(k) \beta_p(k) + \Gamma', \quad (7.24)$$

где

$$\Gamma' = \sum_{\substack{k, k', p \\ (k \neq k')}} \hat{\beta}_p(k) \beta_p(k') A_p(k, k') + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k, k', p \\ (k \neq k')}} \beta_p(k) \beta_{-p}(k') B_p(k, k') + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k, k', p \\ (k \neq k')}} \hat{\beta}_{-p}(k') \hat{\beta}_p(k) B_p(k, k'). \quad (7.25)$$

В свою очередь коэффициенты  $A_p(k, k')$  и  $B_p(k, k')$  связаны с матричными элементами исходного гамильтониана посредством соотношений

$$A_p(k, k') = \langle \hat{C}_v \alpha_{k_1} \alpha_{k+p, 0} H_{int} \hat{\alpha}_{k'+p, 0} \hat{\alpha}_{k', 1} C_v \rangle, \quad (7.26) \\ B_p(k, k') = \langle \hat{C}_v \alpha_{k', 1} \alpha_{k'-p, 0} \alpha_{k, 1} \alpha_{k+p, 0} H_{int} C_v \rangle,$$

для которых так же, как в § 4.2, можно получить явные выражения.

В случае ферми-газа со слабым притяжением мы имеем по существу ту же ситуацию, что и в § 4. Почти дословно повторяя приведенные там рассуждения, мы можем убедиться в существовании коллективных возбуждений разных типов, как продольных, так и поперечных.

В настоящем разделе мы займемся обсуждением влияния кулоновского взаимодействия между электронами на коллективные возбуждения, исследованные в § 4.3 и 4.4 для гамильтониана Фрелиха. При этом, желая получить хотя бы грубое представление об имеющейся здесь ситуации, мы ограничимся рассмотрением гамильтониана

$$H = \sum_{k, s} (E(k) - \lambda) \hat{a}_{ks} a_{ks} + H_{int}, \\ H_{int} = \frac{1}{2V} \sum_{\substack{s_1, s_2, k_1, k_2, k'_1, k'_2 \\ (k_1+k_2=k'_1+k'_2, k_1 \neq k'_1)}} \{-J(k_1, k'_1) + \\ + v(|k'_1 - k_1|)\} \hat{a}_{k_2, s_2} a_{k_2, s_2} \hat{a}_{k'_1, s_1} a_{k_1, s_1}. \quad (7.27)$$

Взаимодействие  $J(k, k')$  представляет прямое притяжение между электронами, возникшее из электронно-фононного взаимодействия и сосредоточенное вблизи поверхности Ферми. Взаимодействие  $v(|k'_1 - k_1|)$  описывает кулоновское отталкивание электронов.

Вычисляя матричные элементы (7.26) для гамильтониана (7.27), получим

$$A_p(k, k') = \frac{1}{V} \{-J(k' + p, k + p) + \nu(|k' - k|)\} \times \\ \times L(k, k') L(k + p, k' + p) + \frac{1}{V} \{-J(k, k + p) + \nu(|p|)\} \times \\ \times M(k', k' + p) M(k, k + p),$$

$$B_p(k, k') = \frac{1}{V} \{-J(k', k' - p) + \nu(|p|)\} \times \\ \times M(k, k + p) M(k', k' - p) - \frac{1}{V} \{-J(k, k' - p) + \\ + \nu(|k - k'|)\} M(k', k + p) M(k, k' - p).$$

Эти выражения еще достаточно сложны. Мы можем, однако, рассмотреть случай малых  $p$ . При этом в членах, содержащих  $\nu(|p|)$ , можно только его и оставить, так как при малых  $p$  кулоновское  $\nu(|p|)$  имеет сильную особенность. Наоборот, в остальных членах  $\nu(|k - k'|)$  можно объединить с фоновым взаимодействием, так как в рассматриваемых коллективных возбуждениях существенны лишь большие передачи импульсов  $k - k'$  и, кроме того, как показывают рассуждения в § 6.3, в подобных выражениях, где кулоновское отталкивание входит суммарно с фоновым притяжением, оно обязательно заэкранировано. Таким образом,

$$A_p(k, k') = -\frac{J(k, k')}{V} L(k, k') L(k + p, k' + p) + \\ + \frac{\nu(p)}{V} M(k, k + p) M(k', k' + p),$$

$$B_p(k, k') = \frac{J(k, k')}{V} M(k', k + p) M(k, k' - p) + \\ + \frac{\nu(p)}{V} M(k, k + p) M(k', k' - p). \quad (7.28)$$

Секулярные уравнения, соответствующие (7.28), примут вид

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \bar{\varepsilon}(k) + \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) + \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} \right\} \vartheta_p(k) - \\
 & - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ L(k, k') \frac{L(k+p, k'+p) + L(k-p, k'-p)}{2} - \right. \\
 & - \left. \frac{M(k', k+p)M(k, k'-p) - M(k', k-p)M(k, k'+p)}{2} \right\} \vartheta_p(k') + \\
 & + \frac{\nu(p)}{2V} \sum_{k'} \{ M(k, k+p)M(k', k'+p) + \\
 & + M(k', k'-p)M(k, k-p) + M(k, k+p)M(k', k'-p) + \\
 & + M(k, k-p)M(k', k'+p) \} \vartheta_p(k') = \\
 & = \left( E - \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) - \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} \right) \vartheta_p(k) + \\
 & + \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ L(k, k') \frac{L(k+p, k'+p) - L(k-p, k'-p)}{2} + \right. \\
 & + \left. \frac{M(k', k+p)M(k, k'-p) - M(k', k-p)M(k, k'+p)}{2} \right\} \vartheta_p(k') - \\
 & - \frac{\nu(p)}{2V} \sum_{k'} \{ M(k, k+p)M(k', k'+p) - \\
 & - M(k', k'-p)M(k, k-p) - M(k, k+p)M(k, k-p) + \\
 & + M(k, k-p)M(k', k'+p) \} \vartheta_p(k'), \quad (7.29) \\
 & \left\{ \bar{\varepsilon}(k) + \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) + \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} \right\} \vartheta_p(k) - \\
 & - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ L(k, k') \frac{L(k+p, k'+p) + L(k-p, k'-p)}{2} + \right. \\
 & + \left. \frac{M(k', k+p)M(k, k'-p) + M(k', k-p)M(k, k'+p)}{2} \right\} \vartheta_p(k') + \\
 & + \frac{\nu(p)}{2V} \sum_{k'} \{ M(k, k+p)M(k', k'+p) + \\
 & + M(k', k'-p)M(k, k-p) - M(k, k+p)M(k', k'-p) - \\
 & - M(k', k'+p)M(k, k-p) \} \vartheta_p(k') = \\
 & = \left( E - \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) - \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} \right) \vartheta_p(k) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ L(k, k') \frac{L(k+p, k'+p) - L(k-p, k'-p)}{2} - \right. \\
& - \frac{M(k', k+p) M(k, k'-p) - M(k', k-p) M(k, k'+p)}{2} \left. \right\} \vartheta_p(k') - \\
& - \frac{\nu(p)}{2V} \sum_{k'} \{ M(k, k+p) M(k', k'+p) - \\
& - M(k', k'-p) M(k, k-p) + M(k, k+p) M(k', k'-p) - \\
& - M(k, k-p) M(k', k'+p) \} \vartheta_p(k'). \quad (7.30)
\end{aligned}$$

Эти секулярные уравнения отличаются от приведенных в § 4.2 уравнений (4.10), (4.11) только дополнительными членами с кулоновским взаимодействием.

Из структуры этих членов без дальнейшей дискуссии сразу ясно, что поперечные волны § 4.4 обращают эти члены в нуль. Мы приходим, таким образом, к важному заключению, что влияние кулоновского взаимодействия на поперечные возбуждения сводится лишь к изменению эффективного взаимодействия  $J(k, k')$ .

Дело обстоит сложнее с продольными коллективными возбуждениями. При явном учете кулоновского взаимодействия эти возбуждения модифицируются таким образом, что возникает обычная плазменная ветвь коллективных возбуждений. В этом можно легко убедиться, оставляя в секулярных уравнениях (7.29), (7.30) только члены существенные при достаточно больших  $p$ , когда  $u_k, v_k$  мы в праве заменить их нормальными значениями:

$$u_k = \theta_G(k), \quad v_k = \theta_F(k).$$

Кроме того, достаточно рассмотреть в (7.29), (7.30) только члены с кулоновским взаимодействием. Удобно при этом будет перейти от функций  $\vartheta, \theta$  к первоначальным функциям  $\varphi, \chi$ . Для них будем иметь уравнения:

$$\begin{aligned}
& \{ \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k+p) - E \} \varphi_p(k) = \\
& = \frac{\nu(p)}{V} M(k, k+p) \sum_{k'} \{ M(k', k'+p) \varphi_p(k') + \\
& + M(k', k'-p) \chi_p(k') \}, \quad (7.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k-p) + E \} \chi_p(k) = \\
& = \frac{\nu(p)}{V} M(k, k-p) \sum_{k'} \{ M(k', k'+p) \varphi_p(k') + \\
& + M(k', k'-p) \chi_p(k') \}, \quad (7.32)
\end{aligned}$$



которые легко разрешаются и приводят к следующему уравнению для определения  $E$ :

$$1 = \frac{2\nu(p)}{V} \sum_k \left\{ \frac{\theta_F(k) \theta_G(k-p)}{E - E(k+p) + E(k)} + \frac{\theta_F(k) \theta_G(k+p)}{E - E(k+p) - E(k)} \right\}, \quad (7.33)$$

которое полностью соответствует плазменному секулярному уравнению в теории Савада и Брута [13].

При малых импульсах  $p$ , меньших тех, которые соответствуют энергетической щели  $\Delta$ , мы уже не можем заменить  $u_k, v_k$  их нормальными значениями; нетривиальное поведение  $u_k, v_k$  становится существенным. Здесь физически мы имеем дело с весьма интересной дисперсией плазменной частоты при малых  $p$ . Эта дисперсия оказывается характерным свойством сверхпроводников и может послужить основой для экспериментального определения входящей в теорию величины  $C$ .

## § 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**8.1. Термодинамика и электродинамика сверхпроводящего состояния.** До сих пор мы ограничивались рассмотрением основного состояния и элементарных возбуждений. Не представляет особых затруднений получить термодинамические формулы. Заметим прежде всего, что коллективные возбуждения, о которых мы говорили, не являются в данном случае существенными. Благодаря малости максимально возможного импульса коллективных возбуждений ими можно пренебречь при расчете термодинамических функций (при отсутствии тока и магнитного поля).

В самом деле, эффективный импульсный объем фермионных возбуждений здесь будет пропорционален величине

$$k_F s \Delta,$$

где  $s$  — скорость на поверхности Ферми, а соответствующий объем для коллективных возбуждений будет гораздо более высокого порядка малости:

$$\frac{\Delta^3}{s^3}.$$

Поэтому для получения термодинамических формул можно исходить из гамильтониана, в котором оставлены только парные взаимодействия и который, как мы выше видели, правильно передает основное состояние и элементарные возбуждения однофермионного типа. Такой гамильтониан имеет еще ту любопытную особенность, что допускает точный расчет свободной энергии, который был произведен в работе Д. Н. Зубарева и Ю. А. Церковникова и одного из авторов [20]. Из этого расчета в том приближении, когда  $J$  заменяется постоянной вблизи поверхности Ферми, легко

получаются формулы Бардина, Купера и Шриффера, которые эти авторы получили вариационным принципом.

Приведем здесь вышеуказанный расчет. Рассмотрим гамильтониан

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_{int}, \\
 H_0 &= \sum_{k, s} (E(k) - \lambda) \hat{a}_{ks} a_{ks}, \\
 H_{int} &= -\frac{J}{V} \sum_{\substack{k, k' \\ (k \neq k')}} \hat{a}_{-k, -} \hat{a}_{k, +} a_{k', +} a_{-k', -}. \quad (8.1)
 \end{aligned}$$

Суммирование в  $H_{int}$  распространено по импульсам  $k, k'$ , принадлежащим к энергетическому слою

$$E_F - \omega < E(k) < E_F + \omega. \quad (8.2)$$

Покажем, что для этого гамильтониана можно асимптотически точно (при  $V \rightarrow \infty$ ) построить термодинамический потенциал

$$\psi = F - \lambda N = -\theta \ln \text{Sp} e^{-\frac{H}{\theta}}.$$

Более того, покажем, что такой расчет возможен и для более общего выражения:

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{k, s} (E(k) - \lambda) \hat{a}_{ks} a_{ks} - \\
 &- \frac{1}{V} \sum_{k, k'} J(k, k') \hat{a}_{-k, -} \hat{a}_{k, +} a_{k', +} a_{k'}, \quad (8.3)
 \end{aligned}$$

содержащего вещественную ограниченную функцию  $J(k, k')$ , практически исчезающую вне некоторой конечной области импульсов.

Ввиду того, что в теории фазовых переходов имеется лишь весьма мало точно решаемых примеров, разработка методики расчетов термодинамических функций для гамильтониана (8.3) нам представляется целесообразной, тем более, что здесь получаются приложения к теории сверхпроводимости.

Совершим наше каноническое преобразование

$$\begin{aligned}
 a_{k, +} &= u_k a_{k0} + v_k \hat{a}_{k1}, \\
 a_{-k, -} &= u_k a_{k1} - v_k \hat{a}_{k0}
 \end{aligned}$$

с вещественными функциями  $u_k, v_k$ , связанными соотношением  $u_k^2 + v_k^2 = 1$ . Получим

$$\begin{aligned}
 H &= H^{(0)} + H', \\
 H^{(0)} &= V + \sum_k H_k, \\
 H' &= -\frac{1}{V'} \sum_{(k, k')} J(k, k') B_k^\dagger B_{k'}, \quad (8.4)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 V = \text{const} &= 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2 - \frac{1}{V} \sum_{k, k'} J(k, k') u_k v_k u_{k'} v_{k'}, \\
 H_k &= \left\{ (E(k) - \lambda) (u_k^2 - v_k^2) + 2u_k v_k \sum_{k'} \frac{J(k, k')}{V} u_{k'} v_{k'} \right\} \times \\
 &\quad \times (\tilde{\alpha}_{k_0} \alpha_{k_0} + \tilde{\alpha}_{k_1} \alpha_{k_1}) + \left\{ 2(E(k) - \lambda) u_k v_k - \right. \\
 &\quad \left. - (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} \frac{J(k, k')}{V} u_{k'} v_{k'} \right\} (\tilde{\alpha}_{k_0} \tilde{\alpha}_{k_1} + \alpha_{k_1} \alpha_{k_0}), \quad (8.5) \\
 B_k &= u_k v_k (\tilde{\alpha}_{k_0} \alpha_{k_0} + \tilde{\alpha}_{k_1} \alpha_{k_1}) - u_k^2 \alpha_{k_1} \alpha_{k_0} + v_k^2 \tilde{\alpha}_{k_0} \tilde{\alpha}_{k_1}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что все операторы  $H_k, B_k, B_k^\dagger$  коммутируют между собой при различных  $k$ .

Применим к форме (8.4) статистическую теорию возмущений. Получим

$$\begin{aligned}
 &\frac{\text{Sp } e^{-\frac{H}{\theta}}}{\text{Sp } e^{-\frac{H^{(0)}}{\theta}}} = 1 + \\
 &+ \sum_{(n \geq 1)} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{\theta}} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \frac{\text{Sp} \left\{ e^{-\frac{H^{(0)}}{\theta}} H'(t_1) \dots H'(t_n) \right\}}{\text{Sp} \left\{ e^{-\frac{H^{(0)}}{\theta}} \right\}},
 \end{aligned}$$

где

$$H'(t) = e^{-H^{(0)}t} H' e^{H^{(0)}t}.$$

Это соотношение можем также представить в виде

$$\ln \operatorname{Sp} e^{-\frac{H}{\theta}} = \ln \operatorname{Sp} e^{-\frac{H^{(0)}}{\theta}} + \ln \left\{ 1 + \sum_{(n \geq 1)} \int_0^{\frac{1}{\theta}} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{Q}_n \right\}, \quad (8.6)$$

где

$$\mathcal{Q}_n = \frac{1}{V^n} \sum_{\substack{(k_1 \dots k_n) \\ (k'_1 \dots k'_n)}} J(k_p, k'_1) \dots J(k_n, k'_n) \times \\ \times \frac{\operatorname{Sp} \left\{ e^{-\frac{H^{(0)}}{\theta}} \tilde{B}_{k_1}(t_1) B_{k'_1}(t_1) \dots \tilde{B}_{k_n}(t_n) B_{k'_n}(t_n) \right\}}{\operatorname{Sp} \left\{ e^{-\frac{H^{(0)}}{\theta}} \right\}}, \quad (8.7)$$

$$B_k(t) = e^{-H^{(0)}t} B_k e^{H^{(0)}t} = e^{-H_k t} B_k e^{H_k t},$$

$$\tilde{B}_k(t) = e^{-H_k t} \tilde{B}_k e^{H_k t}.$$

Покажем, что если для всех  $k$

$$\operatorname{Sp} \left( e^{-\frac{H_k}{\theta}} B_k \right) = 0, \quad (8.8)$$

то каждое из  $\mathcal{Q}_n$  остается ограниченным в процессе предельного перехода  $V \rightarrow \infty$ .

Возьмем в сумме (8.7) какой-либо чл  $z$ , для которого имеется хотя бы один импульс  $k_q$  или  $k'_q$ , не равный ни одному из остальных импульсов  $k_j$ ,  $k'_j$ . Нетрудно заметить, что такой член будет пропорционален

$$\operatorname{Sp} \left\{ e^{-\frac{H_{k_q}}{\theta}} B_{k_q}(t) \right\} = \operatorname{Sp} \left\{ e^{-\frac{H_{k_q}}{\theta}} \tilde{B}_{k_q} \right\} = 0$$

или

$$\operatorname{Sp} \left\{ e^{-\frac{H'_{k'_q}}{\theta}} B_{k'_q}(t) \right\} = \operatorname{Sp} \left\{ e^{-\frac{H'_{k'_q}}{\theta}} B_{k'_q} \right\} = 0.$$

Поэтому в сумме (8.7) надо учитывать лишь те члены, у которых среди импульсов  $k_1, k'_1, \dots, k_n, k'_n$  имеется не больше

$n$  различных. Но они приводят к величине порядка  $V^n$ , которая компенсируется множителем  $\frac{1}{V^n}$ . Следовательно,  $\mathcal{Q}_n$  остается конечной при  $V \rightarrow \infty$ . С другой стороны, оба члена в левой части (8.6) должны быть пропорциональны  $V$  для  $V \rightarrow \infty$ . Пренебрегая на этом основании членами конечного порядка, можем заменить  $\ln \text{Sp} e^{-\frac{H}{\theta}}$  на  $\ln \text{Sp} e^{-\frac{H^{(0)}}{\theta}}$  и получить для рассматриваемого термодинамического потенциала выражение вида

$$\psi = U - \theta \sum_k \ln \text{Sp} e^{-\frac{H_k}{\theta}}. \quad (8.9)$$

Итак, для решения поставленной задачи нам надо определить  $u_k, v_k$  из условия (8.8) и затем воспользоваться формулой (8.9).

Эту программу удобно провести, диагонализовав форму  $H_k$  с помощью канонического преобразования

$$\begin{aligned} \alpha_{k0} &= \lambda_k \beta_{k0} + \mu_k \dot{\beta}_{k1}, \\ \alpha_{k1} &= \lambda_k \beta_{k1} + \mu_k \dot{\beta}_{k0} \end{aligned} \quad (8.10)$$

с вещественными коэффициентами, связанными соотношением

$$\lambda_k^2 + \mu_k^2 = 1.$$

Коэффициенты эти определим из условия обращения в нуль недиагональной части оператора  $H_k$ , которая оказывается пропорциональной

$$\beta_{k1} \beta_{k0} + \dot{\beta}_{k0} \dot{\beta}_{k1}.$$

Подставив затем (8.10) в выражение (8.5) для  $B_k$ , раскрываем уравнение (8.8). Таким образом найдем:

$$u_k v_k = \frac{C(k)}{2\Omega(k)} \frac{1 - e^{-\frac{\Omega(k)}{\theta}}}{1 + e^{-\frac{\Omega(k)}{\theta}}}, \quad C(k) = \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') u_{k'} v_{k'}, \quad (8.11)$$

$$\Omega(k) = \sqrt{(E(k) - \lambda)^2 + C^2(k)}.$$

Отсюда получаем уравнение для определения  $C(k)$ :

$$C(k) = \frac{1}{2V} \sum_{k'} J(k, k') \text{th} \frac{\Omega(k')}{2\theta} \frac{C(k')}{\Omega(k')}. \quad (8.12)$$

Интересно отметить, что это уравнение, особенно если его представить в виде

$$2\Omega(k) u_k v_k = \frac{\operatorname{th} \frac{\Omega(k)}{2\theta}}{V} \sum_{k'} J(k, k') u_{k'} v_{k'},$$

имеет некоторую аналогию с уравнением задачи двух тел, написанным в импульсном представлении.

Заметим, что уравнение (8.12) всегда имеет тривиальное решение  $C(k) = 0$ .

Раскрывая соотношение (8.9), получим

$$\psi = \sum_k \left\{ E(k) - \lambda + \frac{C^2(k)}{2\Omega(k)} \operatorname{th} \frac{\Omega(k)}{2\theta} - \Omega(k) - 2\theta \ln \left( 1 + e^{-\frac{\Omega(k)}{\theta}} \right) \right\}. \quad (8.13)$$

Будем рассматривать это выражение как функцию  $\varphi(\dots, C^2(k), \dots)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial C^2(k)} &= C^2(k) \frac{\partial \Omega(k)}{\partial C^2(k)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Omega(k)} \frac{1}{2\Omega(k)} \operatorname{th} \frac{\Omega(k)}{2\theta} \right\} = \\ &= \frac{C^2(k)}{4\theta^3} f\left(\frac{\Omega(k)}{\theta}\right), \end{aligned}$$

где

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} x - x}{2x^3 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} > 0.$$

Поэтому при  $C^2 \neq 0$  величина  $\psi$  всегда имеет меньшее значение, чем для тривиального решения.

Таким образом, фазовый переход будет иметь место при той температуре, при которой у уравнения (8.12) появляется нетривиальное решение.

Несколько сложнее обстоит дело с вопросом получения уравнений электродинамики. Здесь надо учитывать, что систематическое движение электронов всегда связано с магнитным полем и, кроме того, что сверхпроводники обладают специфическими магнитными свойствами, примером которых может служить эффект Мейсснера.

Если ограничиться случаем слабых магнитных полей, то естественно искать связь между током и векторным потенциалом в линейной форме. Известны два типа таких соотношений, которые были получены из феноменологических со-

ображений — уравнения Лондонов и уравнения Пиппарда. Уравнения Лондонов локальны,  $\mathbf{j}(x)$  в них пропорционален  $A(x)$  в той же точке пространства. В более общих уравнениях Пиппарда  $\mathbf{j}(x)$  и  $A(x)$  связываются интегральным соотношением.

Нетрудно видеть, даже не производя никаких вычислений, что в нашей теории в линейном приближении благодаря наличию пространственной корреляции между электронами должны получаться уравнения типа Пиппарда. Соответствующие интегральные ядра должны быть размазаны по пространству с линейными размерами, характеризуемыми характерной длиной корреляции частиц с противоположными спинами.

Здесь и возникает существенная трудность. Дело в том, что для получения уравнений электродинамики следует учесть наличие коллективных колебаний, особенно поперечных. С другой стороны, и это самое главное, необходимо учесть наличие границ, так как пространственная корреляция между электронами в сверхпроводящем состоянии достигает размеров  $10^{-4} - 10^{-5}$  см, а магнитное поле проникает в сверхпроводник на расстояние порядка  $10^{-5}$  см.

Поясним сказанное относительно размеров пространственной корреляции. Для этого вычислим парную корреляционную функцию  $F_2(x, x'; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$  для электронов с противоположными спинами при нулевой температуре.

Пользуясь обычным определением корреляционной функции, имеем

$$F_2(x, x'; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \langle \psi_{\uparrow 1/2}(x) \psi_{\downarrow 1/2}^\dagger(x') \psi_{\downarrow 1/2}(x') \psi_{\uparrow 1/2}(x) \rangle,$$

где

$$\psi_{\uparrow 1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k a_{k, \uparrow 1/2} e^{ikx}, \quad \psi_{\downarrow 1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k a_{k, \downarrow 1/2} e^{ikx}$$

— вторично квантованные волновые функции. Усреднение ведется по вакууму, соответствующему числам заполнения  $\hat{\alpha}_{k_0} \alpha_{k_0}$ ,  $\hat{\alpha}_{k_1} \alpha_{k_1}$ . Выражая операторы  $a_{ks}$  через  $\alpha_{k_0}$  и  $\alpha_{k_1}$  с помощью канонического преобразования, получим

$$F_2(x-x'; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = V^{-2} \left( \sum_k v_k^2 \right)^2 + \\ + V^{-2} \left| \sum_k u_k v_k e^{-ik(x-x')} \right|^2 = \frac{1}{4} \left\{ n_0^2 + \frac{1}{V^2} \left| \sum_k \frac{C(k) e^{-ik(x-x')}}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right|^2 \right\},$$

где  $n_0 = 2V^{-1} \sum_k v_k^2$  — плотность электронов.



Мы видим отсюда что в случае нормального состояния, когда  $C(k) = 0$  ( $u_k v_k = 0$ ), корреляция электронов с противоположными спинами отсутствует.

В сверхпроводящем состоянии произведение  $u_k v_k$  существенно отлично от нуля лишь в области  $\Delta k$  вблизи поверхности Ферми, где  $\Delta k$  определяется соотношением

$$|E(k_F + \Delta k) - E_F| \geq C(k_F),$$

т. е.

$$\Delta k \sim \frac{C(k_F) k_F}{E_F} \sim 10^4 \text{ см}^{-1},$$

откуда для длины корреляции  $\Delta x$  из соотношения неопределенностей получим следующую оценку:

$$\Delta x \sim \frac{1}{\Delta k} \sim 10^{-4} \text{ см.}$$

Заметим, что корреляционная функция для электронов с одинаковыми спинами

$$F_2(x - x', \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \sum_{k_1, k_2} v_{k_1}^2 v_{k_2}^2 (1 - e^{-i(k_1 - k_2)(x - x')})$$

определяется в основном обменным эффектом и практически одинакова для нормального и сверхпроводящего состояний.

Ограничимся самым грубым вариантом и не будем учитывать ни эффекты границы, ни эффекты коллективных колебаний. При этом более последовательно было бы иметь дело с гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{k, s} \left(k - \frac{e}{c} A\right)^2 + \mu \mathcal{H} + H_{int}$$

с постоянными  $A$  и  $\mathcal{H}$ . Таким образом мы получили бы уравнения типа Лондона с нелинейной зависимостью длины проникновения от магнитного поля.

Чтобы усовершенствовать теорию и получить какую-либо информацию о функциях Ниппарда, кроме чисто качественной, необходимо работать с полным гамильтонианом, учитывающим взаимодействие пар не только с противоположными импульсами и спинами, и обязательно принимать во внимание существование границы.

**8. 2. Качественная картина явления сверхпроводимости.** Скажем в заключение несколько слов относительно физической природы сверхтекучего или сверхпроводящего состояния  $C_s$ .

Ввиду того, что  $\alpha_k$  представляют амплитуды для суперпозиции частиц и дырок  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$ , сфера Ферми вообще расширяется. Появляются характерные корреляции между частицами  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$  и дырками  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$ . Наглядно можно представить себе положение следующим образом: имеется притяжение как между частицами  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$ , так и между дырками  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$ . Поэтому с точки зрения энергии взаимодействия выгодно разбавлять сферу Ферми дырками  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$ . С другой стороны, такое расширение невыгодно для кинетической энергии. Эффективный баланс этих обоих факторов и приводит к наинижнему энергетическому состоянию. В нормальном состоянии, если взять достаточно высокое приближение, мы всегда можем заметить наличие корреляции между частицами и импульсами  $k+q, -k$ , но при этом значение  $q=0$  ничем не будет выделено. В состоянии же  $C_s$  здесь имеет место разрыв. В связи с этим понятно, например, такое обстоятельство, что член взаимодействия типа

$$\frac{1}{V} \sum J(k, k') \hat{a}_{k,+} \hat{a}_{-k,-} a_{-k'} a_{k'+},$$

который при  $V \rightarrow \infty$  вносит бесконечно малый вклад в случае нормального состояния, является весьма существенным для  $C_s$ . Нельзя, разумеется, чрезмерно упрощать положение и говорить о связанных парах частиц. Действительно, если отнестись серьезно к такому представлению и подсчитать энергию связи пары, то мы найдем, что это будет величина того же порядка, что и энергия взаимодействия пар друг с другом.

На самом деле мы имеем связанный коллектив того же типа, как и для бозе-систем. Если воспользоваться несколько неясной, но обладающей теперь определенной «квази-наглядностью» терминологией квантовой теории поля, можно говорить о виртуальных парах и рассматривать  $C_s$  как связанный бозе-конденсат из таких виртуальных пар.

Элементарные возбуждения связанного коллектива, когда таковой обладает докритическим макроскопическим импульсом движения, все положительны, что гарантирует стабильность такого состояния. Здесь следует сказать, что для указанной стабильности нет необходимости, чтобы бозонные возбуждения начинались с нуля. Энергетическая щель важна только для фермионных возбуждений, которые связаны с предельным импульсом Ферми.

Аналогия с бозе-системами подчеркивается еще тем обстоятельством, что кроме однофермионных возбуждений, соответствующих выпадению из коллектива отдельных частиц, имеются и возбуждения всего коллектива в целом.

Наличие корреляции между частицами в импульсном пространстве естественно приводит к появлению «корреляционного облака» в обычном пространстве.

Любопытна структура этого «облака» в случае сверхпроводящего состояния. Электрон с определенным спином здесь окружен дырками, быстро экранирующими его заряд, на расстояниях порядка  $10^{-7}$  см. На гораздо более далеких расстояниях, порядка  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  см, имеется слабое преобладание электронов с противоположными спинами из-за наличия притяжения.

Авторы выражают глубокую признательность Д. Н. Зубареву, С. В. Тябликову и Ю. А. Церковникову за ценные обсуждения и полезные советы.

---

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. К ВОПРОСУ ОБ УСЛОВИИ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ В ТЕОРИИ ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ \*

В § 7 мы отмечали, что система из ферми-частиц может обладать свойством сверхтекучести при некоторых условиях, сводящихся, грубо говоря, к условиям преобладания сил притяжения. Ввиду этого естественно рассмотреть вопрос о сверхтекучести ядерной материи. Такой вопрос, однако, существенно осложняется тем обстоятельством, что ядерные взаимодействия являются сильными и их нельзя трактовать с помощью теории возмущений, приводящей к рядам, расположенным по степеням интенсивности взаимодействия. Наиболее последовательный подход можно было бы получить путем обобщения методики § 5, требующей выполнения суммирования диаграмм. Ввиду сложности строгого проведения подобной программы мы считаем целесообразным для целей получения предварительных оценок рассмотреть некоторую упрощенную модель, допускающую точную интеграцию.

В соответствующей теории ядерной материи считается, что нуклоны в ядерной материи можно приближенно считать свободными. Влияние сил взаимодействия в основном сводится к эффективному изменению зависимости энергии нуклона от импульса. В ядерной материи энергия нуклона уже не равна  $p^2/2M$ , а представляется иной функцией  $E(p)$ , которую обычно аппроксимируют выражением типа

$$E(p) \sim \frac{p^2}{2M_{eff}} + V, \quad V < 0.$$

В такой схеме основное состояние ядерной материи представляется волновой функцией  $C_n$ , соответствующей обычной сфере

\* Изложение приложения 1 основано на работе [21].

Ферми: все состояния с  $E(p) < E_F$  заполнены, остальные — пусты.

Ввиду этого рассмотрим модельную динамическую систему с гамильтонианом

$$H = \sum_{k\sigma} \{E(k) - E_F\} \hat{a}_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma} + \\ + \frac{1}{2V} \sum_{(k, k', \dots, \sigma, \dots)} J(k, k' | \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2', \sigma_1') \hat{a}_{k\sigma_1}^\dagger \hat{a}_{-k\sigma_2}^\dagger a_{-k'\sigma_2'} a_{k'\sigma_1'}. \quad (I. 1)$$

Здесь  $\sigma$  — дискретный индекс, характеризующий спин и изотопический спин нуклона,  $E_F$  — параметр, играющий роль химического потенциала; в нормальном состоянии он равен энергии Ферми, ввиду чего для него и принято подобное обозначение,  $V$  — объем системы.

Неполнота, «модельность», такого гамильтониана обусловлена тем, что в нем учитываются только взаимодействия пар частиц с противоположными импульсами.

Нетрудно заметить, что принятый здесь гамильтониан взаимодействия  $H'$  не эффективен в состоянии  $C_n$ . Действительно, вычислив

$$\langle \overline{H'^2} \rangle_{C_n},$$

найдем, что эта величина остается конечной, когда  $V \rightarrow \infty$ , тогда как энергия должна быть пропорциональной  $V$  в процессе такого предельного перехода\*.

Можно поэтому считать, что в рассматриваемой модели мы явно учитываем только взаимодействия, эффективные лишь в особом «сверхтекучем» состоянии  $C_s$ , всю же остальную «регулярную» часть взаимодействия учитываем через ее влияние на энергию нуклона  $E(k)$ .

Покажем сейчас, что это состояние  $C_s$  можно найти в нашей схеме асимптотически точно для процесса предельного перехода  $V \rightarrow \infty$  и дать условия его существования. Для удобства записи целесообразно ввести вместо импульсного индекса  $k$  индекс  $q$  пары  $(k, -k)$ ;  $q$  и  $-q$  описывают одну и ту же пару; суммирование по  $q$  понимается как суммирование по различным парам. При этом очевидно потребуются ввести еще дополнительный индекс  $\rho = \pm 1$  и  $k$  описывать как  $(q, \rho)$ . Целесообразно  $\rho$ , как дискретный индекс, соеди-

\* Можно показать также, что если применить к (I. 1) теорию возмущений, исходя из состояния  $C_n$ , то в разложении для энергии поправочный член любого порядка окажется бесконечно малым при  $V \rightarrow \infty$ .

нить вместе с  $\sigma$  и положить  $s = (\sigma, \rho)$ . В таких обозначениях рассматриваемый гамильтониан (I. 1) представится в следующей форме:

$$H = \sum_{q, s} \{E(q) - E_F\} \hat{a}_{qs} a_{qs} + \\ + \frac{1}{2V} \sum_{(q, q', \dots, s, \dots)} I(q, q' | s_1, s_2, s'_2, s'_1) \hat{a}_{qs_1} \hat{a}_{qs_2} a_{q's'_2} a_{q's'_1}. \quad (I. 2)$$

Воспользуемся вариантом приема, предложенным Д. Н. Зубаревым и Ю. А. Церковниковым [20]. Введем какие-то  $C$ -функции  $A_q(s_1, s_2)$  и запишем гамильтониан (I. 2) в виде

$$H = U + H_0 + H_1,$$

где

$$U = \text{const} = -\frac{1}{2V} \sum I(q, q' | s_1, s_2, s'_2, s'_1) \hat{A}_q(s_1, s_2) A_{q'}(s'_1, s'_2), \\ H_0 = \sum_q H_q; \quad H_1 = \frac{1}{2V} \sum I(q, q' | s_1, s_2, s'_2, s'_1) \hat{B}_q(s_1, s_2) B_{q'}(s'_1, s'_2),$$

причем

$$H_q = \{E(q) - E_F\} \sum_s \hat{a}_{qs} a_{qs} + \\ + \frac{1}{2V} \sum \{I(q, q' | s_1, s_2, s'_2, s'_1) A_{q'}(s'_1, s'_2) \hat{a}_{qs_1} \hat{a}_{qs_2} + \\ + I(q', q | s_1, s_2, s'_2, s'_1) \hat{A}_{q'}(s_1, s_2) a_{qs_2} a_{qs_1}\}, \\ B_q(s_1, s_2) = a_{qs_2} a_{qs_1} - A_q(s_1, s_2). \quad (I. 3)$$

Так как  $H_q$  является квадратичной формой из ферми-операторов, то ее диагонализация совершается элементарно с помощью линейного канонического преобразования

$$a_{qs} = \sum_{s'} \{u(q, s, s') a_{qs'} + v(q, s, s') \hat{a}_{qs'}\}. \quad (I. 4)$$

Входящие сюда функции  $u, v$  должны удовлетворять соотношениям ортонормированности

$$\xi \equiv \sum_{s''} \{\hat{u}(q, s, s'') u(q, s', s'') + \hat{v}(q, s, s'') v(q, s', s'')\} = \delta_{s, s'}, \\ \eta \equiv \sum_{s''} \{u(q, s, s'') v(q, s', s'') + v(q, s, s'') u(q, s', s'')\} = 0. \quad (I. 5)$$

Определив  $u, v$  из секулярных уравнений, соответствующих форме (I.3), приведем ее к виду

$$H_q = \Gamma_q + \sum_s \varepsilon_s(q) \hat{\alpha}_{qs} \alpha_{qs}.$$

Поэтому у гамильтониана  $H_0$  основное состояние  $C_0$  будет вакуумным состоянием для новых фермионных амплитуд:

$$\alpha_{ks} C_0 = 0.$$

Подберем теперь  $c$ -функции  $A$  таким образом, что

$$\langle \hat{C}_0 B_q(s_1, s_2) C_0 \rangle = 0,$$

и примем во внимание тот важный факт, что  $H_q, B_q, \hat{B}_q^*$ , соответствующие различным  $q$ , все коммутируют между собой.

Тогда нетрудно показать (см. [20]), что вклад в энергию основного состояния, происходящий от  $H_1$ , становится пренебрежимо малым по сравнению с вкладом от  $U + H_0$  при  $V \rightarrow \infty$ . Грубо говоря, это положение обусловлено тем обстоятельством, что  $\bar{H}_1^2$  остается конечным при  $V \rightarrow \infty$ , тогда как энергия пропорциональна  $V$ .

Итак, соответствующим подбором функций  $u, v$  можно добиться того, что среднее значение  $\bar{H} = \langle \hat{C}_0 H C_0 \rangle$  асимптотически точно представляет энергию основного состояния для рассматриваемого гамильтониана  $H$ .

Отсюда вытекает, что фактическое определение  $u, v$  можно произвести следующим образом: подставляем формулы преобразования (I.4) в выражение  $\bar{H}$  и находим:

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \sum_{q, s} \{E(q) - E_F\} \sum_{s'} \hat{v}(q, s, s') v(q, s, s') + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{(q, q', \dots, s, \dots)} I(q, q' | s_1, s_2, s'_2, s'_1) \left\{ \sum_s \hat{v}(q, s_1, s) \hat{u}(q, s_2, s) \right\} \times \\ & \times \left\{ \sum_s u(q, s'_2, s) \hat{v}(q, s'_1, s) \right\} = \varepsilon(u, v). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тогда  $u, v$  мы должны определить из условия минимума формы  $\varepsilon(u, v)$  при наличии дополнительных условий (I.5). Для таких  $u, v$  выражение  $\varepsilon$  и дает искомое значение энергии основного состояния.

Соответствующее уравнение стационарности будет

$$\delta \varepsilon \equiv \delta \left\{ \varepsilon + \sum_{q, s, s'} [\lambda(q, s, s') \xi(q, s, s') + \mu(q, s, s') \eta(q, s, s') + \hat{\mu}(q, s, s') \hat{\eta}^*(q, s, s')] \right\} = 0, \quad (1.7)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  — эйлеровские множители. Легко заметить, что это уравнение всегда допускает тривиальное решение:

$$\begin{aligned} u_q &= \theta_G(q) \delta_{ss'}, & v_q &= \theta_F(q) \delta_{ss'}, \\ \mu &= 0, & \lambda &= \theta_F(q) (E_F - E(q)) \delta_{ss'}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Как видно, в соответствующем состоянии  $C_n$  взаимодействие не эффективно, и весь вклад в энергию его вносится только первым членом гамильтониана (I. 4).

Чтобы решить вопрос о том, когда энергия  $C_n$  не будет минимальной и когда, следовательно, основное состояние  $C_n$  будет характеризоваться нетривиальным решением уравнений (I. 7), обратимся к известной процедуре вариационного исчисления. Построим выражение второй вариации  $\delta^2 \varepsilon$  для тривиального решения. Найдем

$$\begin{aligned} \delta^2 \varepsilon &= \sum_{q, s, s'} |E(q) - E_F| \psi(q, s, s') \psi(q, s, s') + \\ &+ \frac{1}{2V} \sum_{(q, q', \dots, s \dots)} I(q, q' | s_1, s_2, s'_2, s'_1) \check{\psi}(q, s_1, s_2) \check{\psi}(q', s'_1, s'_2), \end{aligned}$$

где

$$\psi(q, s, s') = \theta_F(q) \delta u(q, s, s') + \theta_G(q) \delta v(q, s, s').$$

Функции  $\psi$  связаны только одними условиями антисимметрии:  $\psi(q, s', s) = -\psi(q, s, s')$ , получающимися при вариации условий ортонормированности. Возвратимся теперь к системе индексов, принятой при написании гамильтониана (I. 4). Получим

$$\begin{aligned} \delta^2 \varepsilon &= \sum_{k, \sigma, \sigma'} |E(k) - E_F| \check{\psi}(k, \sigma, \sigma') \check{\psi}(k, \sigma, \sigma') + \\ &+ \frac{1}{2V} \sum_{(k, k', \dots, \sigma)} J(k, k' | \sigma_1, \sigma_2, \sigma'_2, \sigma'_1) \check{\psi}(k, \sigma_1, \sigma_2) \check{\psi}(k', \sigma'_1, \sigma'_2). \end{aligned}$$

Условие антисимметрии будет

$$\psi(-k, \sigma_2, \sigma_1) = -\psi(k, \sigma_1, \sigma_2).$$

Как видно, знак  $\delta^2 \varepsilon$  может быть сделан отрицательным тогда и только тогда, когда уравнение

$$\begin{aligned} &2 |E(k) - E_F| \check{\psi}(k, \sigma_1, \sigma_2) + \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{k', \sigma'_1, \sigma'_2} J(k, k' | \sigma_1, \sigma_2, \sigma'_2, \sigma'_1) \check{\psi}(k', \sigma'_1, \sigma'_2) = E \check{\psi}(k, \sigma_1, \sigma_2) \end{aligned} \quad (1.9)$$



имеет собственное решение с отрицательным значением  $E$ . В таком случае энергия  $C_n$  не будет минимальной и возникает основное состояние  $C_s$  другого типа, характеризующееся нетривиальным решением уравнений (I.7). Интересно отметить, что уравнение (I.9), написанное в  $r$ -представлении (для взаимодействия, не зависящего от скорости),

$$2|E(k) - E_F|\psi(\mathbf{r}, \sigma_1, \sigma_2) + \sum_{\sigma_1', \sigma_2'} \Phi(\mathbf{r}|\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2', \sigma_1')\psi(\mathbf{r}, \sigma_1', \sigma_2') = E\psi(\mathbf{r}, \sigma_1, \sigma_2) \quad (I.10)$$

весьма напоминает уравнение Шредингера для задачи двух тел в системе центра инерции. Отличие состоит в своеобразной форме оператора «кинетической энергии». Это отличие естественно исчезает в случае нулевой плотности, когда  $E_F = 0$ .

Полученное уравнение (I.10) можно применить для исследования вопроса о сверхтекучести ядерной материи в качестве критерия неустойчивости нормального состояния.

Для этой цели удобно воспользоваться вариационным принципом и находить минимум выражения

$$2 \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int |E(k) - E_F| |\hat{\psi}(k, \sigma_1, \sigma_2)|^2 dk + \sum_{(\dots \sigma \dots \sigma' \dots)} \int \Phi(\mathbf{r}|\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2', \sigma_1') \psi^*(\mathbf{r}, \sigma_1, \sigma_2) \psi(\mathbf{r}, \sigma_1', \sigma_2') d\mathbf{r}, \quad (I.11)$$

где

$$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{r}$$

при дополнительном условии

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int |\psi(\mathbf{r}, \sigma_1, \sigma_2)|^2 d\mathbf{r} = 1.$$

Если соответствующим подбором пробной функции  $\psi$  данное выражение можно сделать отрицательным, то отсюда будет следовать, что в уравнении (I.10)  $E < 0$  и что тем самым наш критерий выполнен.

В заключение заметим, что в рассматриваемой модели можно асимптотически точно построить и явную форму для свободной энергии. Здесь получаются довольно сложные нелинейные уравнения, но уравнения для определения критической температуры фазового перехода в нормальное состояние опять будут линейными. Как показали И. А. Квасников

и один из авторов [22], эти линейные уравнения отличаются от уравнений (I. 10) только тем, что в них  $E = 0$  и выражение

$$2|E(k) - E_F|$$

заменяется на

$$2|E(k) - E_F| \operatorname{cth} \frac{|E(k) - E_F|}{2\theta},$$

где  $\theta$  — критическая температура.

---

## II. ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ В ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ \*

Мы изучали в настоящей работе лишь пространственно однородные задачи. В ряде случаев, однако, представляет большой интерес рассмотрение пространственно неоднородных задач. Так, для получения правильных уравнений электродинамики в теории сверхпроводимости мы должны принять во внимание границу сверхпроводящего вещества. Кроме того, было бы весьма важно для дальнейшего развития теории явным образом учесть наличие кристаллической решетки металла.

Мы не говорим уже о теории ядра, где рассмотрение неограниченной ядерной материи представляет в сущности лишь далеко идущее упрощение. Имея в виду эти весьма разнообразные с физической точки зрения задачи, мы предлагаем здесь новый приближенный метод, являющийся естественно обобщением известного метода Фока [24].

Рассмотрим динамическую систему ферми-частиц с гамильтонианом вида

$$H = \sum \{T(f, f') - \lambda \delta_{f, f'}\} \hat{a}_f a_{f'} + \\ + \frac{1}{2} \sum J(f_1, f_2, f'_2, f'_1) \hat{a}_{f_1} \hat{a}_{f_2} a_{f'_2} a_{f'_1}, \quad (\text{II. 1})$$

где  $\lambda$  — химический потенциал, а  $a$ ,  $\hat{a}$  — ферми-амплитуды,  $f$  — совокупность индексов, характеризующих состояние одной частицы. Совершим линейное преобразование ферми-амплитуд:

$$a_f = \sum_{\nu} (u_{f\nu} \alpha_{\nu} + v_{f\nu} \tilde{\alpha}_{\nu}). \quad (\text{II. 2})$$

\* Изложение приложения 2 основано на работе [23].

Чтобы это преобразование было каноническим и не нарушало тем самым коммутационных свойств ферми-амплитуд,  $C$ -функции  $u$ ,  $v$  должны удовлетворять следующим условиям ортонормированности:

$$\begin{aligned}\xi_{f, f'} &\equiv \sum_{\nu} \{u_{f\nu} \dot{u}_{f'\nu} + v_{f\nu} \dot{v}_{f'\nu}\} = \delta_{f, f'}, \\ \eta_{f, f'} &\equiv \sum_{\nu} \{u_{f\nu} v_{f'\nu} + v_{f\nu} u_{f'\nu}\} = 0.\end{aligned}\tag{II. 3}$$

Подставим (2.2) в выражение (2.1) и найдем среднее значение  $H$  по вакуумному состоянию  $C_0$ ,

$$\alpha_{\nu} C_0 = 0,$$

для новых ферми-амплитуд. Получим

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \sum \{T(f, f) - \lambda \delta_{f, f'}\} F_1(f, f) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum J(f_1, f_2, f_2, f_1) \Phi^*(f_1, f_2) \Phi(f_1, f_2) + \\ &+ F_1(f_1, f_1) F_1(f_2, f_2) - F_1(f_2, f_1) F_1(f_1, f_2) \equiv \varepsilon(u, v).\end{aligned}\tag{II. 4}$$

где

$$\begin{aligned}F_1(f, f) &= \sum_{\nu} v_{f\nu}^* v_{f\nu}, \\ \Phi(f, f) &= \sum_{\nu} v_{f\nu} u_{f\nu}.\end{aligned}$$

Определим  $u$ ,  $v$  из условия минимума формы  $\varepsilon(u, v)$  при наличии дополнительных условий (II.3). Соответствующее уравнение стационарности будет

$$\begin{aligned}\delta \bar{\varepsilon}(u, v) &= 0, \\ \bar{\varepsilon}(u, v) &= \varepsilon(u, v) + \sum_{f, f'} \{\lambda(f, f') \xi(f, f) + \\ &+ \mu(f, f') \eta(f, f) + \dot{\mu}(f, f') \dot{\eta}(f, f')\},\end{aligned}\tag{II. 5}$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  — эйлеровские множители; вариации  $\delta u$ ,  $\delta v$  и  $\delta \dot{u}$ ,  $\delta \dot{v}$  рассматриваются здесь как независимые.

Мы приходим теперь к формулировке нового приближенного метода в задаче многих тел. В этом методе мы берем такие  $u$ ,  $v$ , удовлетворяющие уравнениям стационарности, которые дают минимальное значение форме  $\varepsilon(u, v)$ . Для них соответствующее  $C_0$  считаем волновой функцией основного состояния, а  $\varepsilon(u, v)$  — энергией основного состояния.

Вопрос об обосновании метода и пределах применимости достаточно сложный. Поэтому мы здесь ограничимся лишь рядом замечаний. Так, на основании результатов приложения I можем утверждать, что предложенный метод дает точное решение задачи в случае, когда в гамильтониане учитываются только взаимодействия пар частиц с противоположными импульсами.

С другой стороны, покажем, что среди решений уравнения стационарности всегда содержится решение, точно соответствующее известному методу Фока [24]. В самом деле, возьмем ортонормированную в обычном смысле систему функций  $\varphi_{f\nu}$ ,

$$\zeta(f, f') \equiv \sum_{\nu} \hat{\varphi}_{f\nu}^* \varphi_{f'\nu} = \delta_{f, f'} \quad (\text{II. 6})$$

и разделим всю совокупность индексов  $\nu$  на две части  $F$  и  $G$ . В качестве  $F$ -«сферы Ферми» возьмем конечное множество индексов  $\nu$ , состоящее из  $N$  элементов (где  $N$  — число частиц). Остальные  $\nu$  объединим в дополнительное множество  $G$ . Положим

$$\begin{aligned} u_{f\nu} &= 0, & v_{f\nu} &= \varphi_{f\nu} & \text{при } \nu \in F; \\ u_{f\nu} &= \varphi_{f\nu}, & v_{f\nu} &= 0 & \text{при } \nu \in G. \end{aligned} \quad (\text{II. 7})$$

Тогда очевидно все условия ортогональности (II. 3) будут выполнены. Если подставить такие  $u, v$  в форму  $\varepsilon$ , то  $\Phi$  в ней исчезает и она будет зависеть только от  $F_1$ , а тем самым только от  $\varphi_{f\nu}$  при  $\nu \in F$ . Условимся обозначать  $\nu \in F$  буквой  $\omega$ . Определим  $\varphi_{f\omega}$  из условия минимума формы  $\varepsilon(\dots \varphi_{f\omega} \dots)$  при дополнительных условиях (II. 6).

Соответствующее уравнение стационарности будет

$$\delta \bar{\varepsilon}_F(0) = 0, \quad \bar{\varepsilon}_F = \varepsilon(\dots \varphi_{f\omega} \dots) + \sum_{f, f'} \lambda(f, f') \xi(f, f'). \quad (\text{II. 8})$$

Нетрудно заметить, что мы сейчас сформулировали не что иное, как обычный метод Фока. Волновая функция системы  $S_0$  соответствует такому положению, когда индивидуальные частицы занимают все состояния  $\varphi_{f\omega}$ ; остальные состояния  $\varphi_{f\nu}$  пусты.

С другой стороны, из уравнения (II. 5) видим, что они всегда имеют решение типа (II. 7), в котором  $\varphi_{f\omega}$  подобраны по методу Фока как решения уравнений (II. 8). Итак, наш метод может рассматриваться как обобщение метода Фока и, следовательно, его пределы применимости во всяком случае не будут более узкими.

Рассуждая, как в приложении 1, и составляя выражение для второй вариации  $\delta^2 \tilde{\varepsilon}(u, v)$  для «нормального решения» (П. 7), можно получить условие его неустойчивости. Условие это формулируется с помощью задачи на собственные значения у соответствующей системы линейных уравнений. Практически оно может быть использовано, например, для получения критерия сверхпроводимости в модели, в которой явным образом учитывается кристаллическая решетка металла.

В заключение заметим, что изложенный метод может получить дальнейшее развитие и уточнение с помощью исследования цепочки уравнений для «функций распределения».

$$\overline{\dot{\alpha}_{f_1} \dots \dot{\alpha}_{f_s} \alpha_{f_r'} \dots \alpha_{f_1'}} = F_{s+r}(f, f_1, \dots, f_s; f_r', \dots, f_1').$$

Так например, если взять стационарный случай и оставить в уравнениях цепочки только функции  $F_{0+2}(f_1, f_2)$ ,  $F_{2+0}(f_1', f_2')$ , а остальными пренебречь, то мы опять получим уравнения нашего метода.

Взяв случай, когда  $F_{0+2}$ ,  $F_{2+0}$  явно зависят от времени, и ограничиваясь линейным приближением по отклонениям

$$F_{0+2} - F_{0+2}^{st}, \quad F_{2+0} - F_{2+0}^{st},$$

получим уравнения для определения спектра коллективных колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. H. Fröhlich. Phys. Rev., **79**, 845 (1950); Proc. Roy. Soc., **A215**, 291 (1952).
2. J. Bardeen. Phys. Rev., **79**, 167 (1950); **80**, 567 (1950); **81**, 829 (1951).
3. H. Fröhlich. Proc. Roy. Soc., **A223**, 296 (1954).
4. M. R. Schafroth. Phys. Rev., **96**, 1442 (1954); M. R. Schafroth, S. T. Butler, J. M. Blatt. Helv. Phys. Acta, **30**, 93 (1957).
5. L. N. Cooper. Phys. Rev., **104**, 1189 (1956); J. Bardeen, L. N. Cooper a. J. R. Schrieffer. Phys. Rev., **106**, 162, (1957); Phys. Rev., **108**, 1175 (1957).
6. Н. Н. Боголюбов. ЖЭТФ, **34**, 58 (1958); Nuovo Cim., **7**, 794 (1958).
7. Н. Н. Боголюбов. Journ. of Phys., **9**, 23 (1947); Вестн. МГУ, № 7, 43 (1947).
8. K. A. Brueckner a. K. Sawada. Phys. Rev., **106**, 1117, 1128 (1957).
9. N. M. Hugenholtz. Physica, **23**, 481 (1957).
10. Н. Н. Боголюбов. Доклады Высшей школы, № 1, 1958.
- 11\*. D. Pines. Phys. Rev., **109**, 280 (1958).
12. С. В. Тябликов и В. В. Толмачев. ЖЭТФ, 1958 (в печати).
- 13\*. M. Gell-Mann a. K. A. Brueckner. Phys. Rev., **106**, 364 (1957); K. Sawada. Phys. Rev., **106**, 372 (1957); A. Sawada, K. Brueckner, N. Fukuda. R. Brout. Phys. Rev., **108**, 507 (1957); R. Brout. Phys. Rev., **108**, 515 (1957).
14. Н. Н. Боголюбов. ЖЭТФ, **34**, 73 (1958).
15. Н. Н. Боголюбов. Лекции по квантовой статистике. Киев, 1947.
- 16\*. J. Goldstone. Proc. Roy. Soc., **A239**, 267 (1957).
17. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
18. J. Bardeen a. D. Pines. Phys. Rev., **99**, 1141 (1955).
19. В. В. Толмачев, С. В. Тябликов. ЖЭТФ, **34**, 66 (1958).
20. Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников. Докл. АН СССР, **117**, 788 (1957).
21. Н. Н. Боголюбов. Докл. АН СССР, **119**, 52 (1958).
22. И. А. Квасников, В. В. Толмачев. Докл. АН СССР (в печати).
23. Н. Н. Боголюбов. Докл. АН СССР, **119**, 244 (1958).
24. В. А. Фок. Zs. f. Phys., **61**, 126 (1930).
- 25\*. J. G. Valatin. Nuovo Cim., **7**, 843 (1958).

\* Авторы благодарны М. Гелл-Манну, К. Брукнеру, К. Савада, Дж. Голдстоуну, Д. Пайнсу и Дж. Валатину за присылку препринтов.

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

§ 1. Введение . . . . .	3
1. 1. Очерк состояния теории сверхпроводимости . . . . .	3
1. 2. Краткое изложение микроскопической теории сверхтекучести . . . . .	5
§ 2. Сверхпроводимость в модели Фрелиха . . . . .	10
2. 1. Принцип компенсации «опасных» диаграмм . . . . .	10
2. 2. Анализ уравнения компенсации . . . . .	15
2. 3. Основное состояние и однофермионные возбуждения . . . . .	17
§ 3. Ренормированная теория сверхпроводимости в модели Фрелиха . . . . .	20
3. 1. Уравнения компенсации и перенормировки . . . . .	21
3. 2. Упрощение выведенных соотношений . . . . .	23
3. 3. Разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний . . . . .	26
3. 4. Свойство сверхпроводимости . . . . .	28
§ 4. Спектр коллективных возбуждений сверхпроводящего состояния . . . . .	31
4. 1. Метод приближенного вторичного квантования в применении к системе с кулоновским взаимодействием . . . . .	31
4. 2. Коллективные возбуждения в модели Фрелиха . . . . .	34
4. 3. Решение секулярных уравнений. Продольные возбуждения . . . . .	38
4. 4. Решение секулярных уравнений. Поперечные возбуждения . . . . .	45
§ 5. Учет кулоновского взаимодействия между электронами . . . . .	51
5. 1. Постановка задачи . . . . .	51
5. 2. Условия компенсации и перенормировки . . . . .	52
5. 3. Переход к «зависящей от времени» формулировке . . . . .	55
5. 4. Окончательная форма уравнения компенсации электронных диаграмм . . . . .	58
5. 5. Энергия основного состояния и энергия однофермионного возбуждения . . . . .	62
5. 6. Преобразование ядра $Q(k, k')$ . . . . .	65
5. 7. Определение $\lambda$ , $\mu$ и $\tilde{\omega}$ . . . . .	74
5. 8. Связь с модельной задачей . . . . .	75
§ 6. Качественное описание эффектов кулоновского взаимодействия . . . . .	78
6. 1. Приближенное определение ренормированных $\tilde{\omega}$ и $\tilde{g}$ . . . . .	78
6. 2. Обсуждение свойств величин $Q_c$ и $Q_{ph}$ . . . . .	82
6. 3. Общие свойства основного уравнения компенсации . . . . .	84



§ 7. Ферми-системы со слабым взаимодействием . . . . .	89
7.1. Формулировка теории Бардина—Купера—Шриффера . . . . .	89
7.2. Уравнение компенсации . . . . .	92
7.3. Коллективные возбуждения. Влияние кулоновского взаимодействия . . . . .	99
§ 8. Заключение . . . . .	105
8.1. Термодинамика и электродинамика сверхпроводящего состояния . . . . .	105
8.2. Качественная картина явления сверхпроводимости . . . . .	112
<b>Приложения</b>	
I. К вопросу об условии сверхтекучести в теории ядерной материи . . . . .	115
II. Об одном вариационном принципе в задаче многих тел . . . . .	122
<b>Литература</b> . . . . .	126

*Николай Николаевич Боголюбов,  
Владимир Вениаминович Толмачев,  
Дмитрий Васильевич Ширков*

### Новый метод в теории сверхпроводимости

\*  
*Утверждено к печати Математическим институтом им. В. А. Стеклова*  
\*

Редактор издательства *К. П. Гуров*  
Технический редактор *Т. П. Поленова*

---

РИСО № 33—13В. Слано в набор 22/IV 1958 г. Подп. в печать 9/VI 1958 г.  
Формат бум. 60×92<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ. л. 8. Уч.-изд. лист. 5,9. Тираж 5000. Изд. № 3230.  
Тип. зак. 630. Т-06317

*Цена 5 р. 60 к.*

Издательство Академии наук СССР. Москва, Подсосенский пер., д. 21

---

1-я типография Издательства АН СССР. Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12