Н. Н. БОГОЛЮБОВ
А. А. ЛОГУНОВ
И. Т. ТОДОРОВ

ОСНОВЫ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

530.1
Б 74
УДК 530.145

Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1969 г.

Монография посвящена систематическому изложению различных направлений аксиоматического подхода.

Первая глава имеет вспомогательный характер: она содержит необходимые для дальнейшего сведения из функционального анализа и теории обобщенных функций.

Во второй главе рассматривается пространство векторов состояния и формулируются те принципы релятивистской квантовой теории, которые не требуют введения локальных величин: принцип инвариантности относительно группы Пуанкаре и условие спектральности.

В третьей главе излагается уайтмановская формулировка теории локальных квантованных полей и даются примеры свободных и обобщенных свободных полей.

Четвертая глава включает обзор теории рассеяния Хаага — Рюеля, ее связь с теорией ЛСЦ, а также S-матричный подход БМП.

Пятая глава содержит некоторые применения развитого аппарата — теорему об общем виде инвариантных аналитических функций, TCP-теорему, теорему о связи спина со статистикой и т. д.

В конце некоторых глав помещены дополнения. Внутри всех глав даются упражнения, которые составляют неразрывную часть текста.

Рис. 2, библ. 425 назв.

Николай Николаевич Боголюбов
Анатолий Алексеевич Логунов
Иван Тодорович Тодоров

Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля

М., 1969 г., 424 стр. с илл.

Редактор *И. Г. Вирко*
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректор *Л. С. Сомова*

Сдано в набор 5/IV 1969 г. Подписано к печати 21/X 1969 г.
Бумага 60×90[1]/16. Физ. печ. л. 26,5. Условн. печ. л. 26,5.
Уч.-изд. л. 25,59 Тираж 5500 экз. Т-13286. Цена книги 1 р. 81 к.
Заказ № 116.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71 Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

2-3-2
12 153 30-69

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В конце 1960 года нами была задумана монография об общих принципах квантовой теории поля и их экспериментальных следствиях. В этой монографии должны были быть изложены в первую очередь новые сдвиги в теории дисперсионных соотношений, которые не были отражены в книге Боголюбова, Медведева и Поливанова [1]. В качестве введения мы хотели включить обзор по различным направлениям в аксиоматическом подходе, в котором нашли бы свое место не только формулировка Боголюбова, Медведева и Поливанова (БМП), основанная на аппарате вариационных производных от S-матрицы и на условии микропричинности, но также и полевая формулировка, связанная с именами Уайтмана, Хаага, Лемана, Симанзика, Циммермана и др. С течением времени задачи (а вместе с ними и объем) этого введения все больше расширялись*), пока в конце концов из него не получился настоящий том.

Тем временем вышли в свет (и были переведены на русский язык) две превосходные книги по общей теории квантованных полей, написанные теоретиками, внесшими фундаментальный вклад в полевое направление аксиоматического подхода [2, 3]. По сравнению с ними настоящая монография содержит еще S-матричную формулировку основных принципов теории и обсуждение связи разных формулнровок (гл. 4). Кроме того, здесь значительно больше внимания уделяется групповым аспектам теории: излагаются необходимые сведения вигнеровской теории унитарных представлений группы Пуанкаре, подробно рассматриваются дискретные преобразования полей, показана невозможность описать нарушенную симметрию зависящим от времени унитарным оператором в теории поля с невырожденным вакуумом.

Настоящий том имеет сугубо теоретический характер, что, естественно, сказывается и на стиле изложения. Нас, однако, не покидает надежда, что вслед за ним последует второй том, посвященный дисперсионным соотношениям, асимптотическим

---

*) Некоторый промежуточный этап работы нашел отражение в лекциях Федорова (1964).

равенствам между амплитудами и другим экспериментально проверяемым следствиям общих принципов квантовой теории поля (здесь же из такого рода приложений вошли лишь *TCP*-теорема и теорема о связи спина со статистикой).

Книга рассчитана на физиков-теоретиков и на математиков, интересующихся принципиальными вопросами квантовой теории поля. Хотя мы приложили усилия к тому, чтобы сделать изложение независимым от других источников, настоящую книгу нельзя рекомендовать для первоначального ознакомления с квантовой теорией. Кроме знакомства с обычным курсом квантовой механики, полезно иметь хотя бы общие представления о квантовой теории поля (например, в рамках первых трех глав монографии Боголюбова и Ширкова [4] или книги Хенли и Тирринга [5]).

Вспомогательный математический материал, выходящий за рамки программы первых двух лет обучения на физико-математических факультетах (сведения из функционального анализа, теории обобщенных функций, теории представлений групп), излагается, хотя и в схематичной форме, в тексте.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность В. С. Владимирову, М. Б. Менскому и А. И. Оксаку за ряд ценных замечаний, которые авторы учли при работе над рукописью, а также Л. Тодоровой за большую помощь в оформлении рукописи книги.

Авторы

Декабрь 1968 г.

ВВЕДЕНИЕ

Место аксиоматического подхода в квантовой теории поля

Весьма распространено мнение, что аксиоматика является чем-то вроде лоска, который наводится на данную область науки после ее фактического завершения. Это неправильно даже по отношению к чистой математике. Если принять, что аксиоматика арифметики и евклидовой геометрии в наше время явилась завершением этих областей (хотя она в то же время дала пищу для новой науки — математической логики, или метаматематики), то в современных разделах математики, таких как функциональный анализ, аксиоматика является основным методом, с нее эти разделы начинаются (хотя сама система аксиом модифицируется с развитием данной области). В теоретической же физике еще со времен Ньютона аксиоматический метод служил не только для систематизации уже полученных результатов, но и для получения новых.

Содержание аксиоматики постепенно менялось в сторону большей общности и абстрактности. Лагранжев метод, который теперь считается частным примером, был создан в прошлом веке на основе одного из наиболее общих физических принципов: принципа наименьшего действия. Аксиоматический подход в квантовой теории поля возник не только за счет непрерывного и естественного стремления к обобщениям, но прежде всего потому, что лагранжев подход и метод теории возмущений в релятивистской квантовой теории столкнулись с принципиальными трудностями. Серьезный анализ этих трудностей возможен лишь на основе изучения формализма стандартной квантовой теории поля, что выходит за рамки настоящей книги (см., например, [4] или [6]). Для читателей, знакомых с терминологией цитированных монографий, укажем только, что современная теория, основанная на лагранжевом формализме, дает лишь рецепт построения перенормированного ряда теории возмущений, соответствующего формальным уравнениям для взаимодействующих полей. При других (непертурбационных) подходах к этим уравнениям нет даже однозначного рецепта устранения возникающих расходимостей. Такая ситуация заведомо неудовлетворительна в случае сильных взаимодействий, где параметр разложения — константа связи g — больше единицы.

Первая попытка выйти за рамки лагранжева подхода восходит к Гайзенбергу (1943). Анализируя, что на самом деле измеряется в физике элементарных частиц, Гайзенберг приходит к выводу о том, что основной наблюдаемой является матрица рассеяния, и предлагает строить теорию прямо в терминах элементов S-матрицы, устраняя понятие поля, адиабатическую гипотезу выключения взаимодействия (лежащую в основе теории возмущений) и т. п. Оказалось, однако, что подход Гайзенберга слишком радикален. Полное изгнание локальных величин из теории лишает нас возможности рассматривать развитие системы в пространстве и времени, учитывать принцип причинности.

На практике столь общая постановка, включающая лишь условия лоренц-инвариантности и унитарности, не дает возможности получить нетривиальные, динамические предсказания об элементах S-матрицы. Поэтому дальнейшее развитие аксиоматического подхода в пятидесятых годах пошло по пути изучения локальных величин. При этом в начале выделились по крайней мере три разных направления. В подходе Уайтмана и др.*) основной величиной является гайзенбергово поле. Асимптотические условия, которые вначале были сформулированы Хаагом в виде независимой гипотезы, и матрица рассеяния возникают на более позднем этапе. В этом смысле подход Уайтмана наиболее традиционен. Работы в этом направлении отличаются, как правило, большой тщательностью математических формулировок и доказательств. Ближе к первоначальной программе Гайзенберга стоит подход Боголюбова, Медведева и Поливанова [1], в котором основной величиной является S-оператор, рассматриваемый как функционал от асимптотических (свободных) полей, а локальные токи и радиационные операторы определяются как вариационные производные от S-оператора по классическим добавкам к асимптотическим полям. Этот подход более непосредственно связан с наблюдаемыми величинами, и не случайно именно на этом пути впервые были установлены дисперсионные соотношения [1]. С другой стороны, установление соответствия с классической полевой трактовкой требует дополнительного исследования. Промежуточное место занимает подход Лемана, Симанзика и Циммермана (ЛСЦ). На первый взгляд этот подход примыкает к формулировке Уайт-

*) См. литературные указания к каждой главе.

мана, так как в формализме ЛСЦ с самого начала входит понятие гайзенбергова поля. На самом же деле ЛСЦ оперирует все время с упорядоченными (T-) произведениями гайзенберговых полей*), которые не имеют точного определения (их формальное определение включает произведение обобщенной операторной функции на разрывную θ-функцию) и поэтому должны считаться основными величинами теории. Но эти величины, как мы увидим, тесно связаны с радиационными операторами в подходе БМП. В шестидесятые годы были в большой степени выяснены связи между этими исторически независимо возникшими направлениями, хотя полного понимания их взаимоотношения еще не достигнуто. Вместе с этим в последние годы возникло новое аксиоматическое направление (связанное главным образом с именами Хаага, Араки и Кастлера), основанное на рассмотрении алгебр ограниченных операторов, соответствующих локальным наблюдаемым. О результатах этого направления еще рано судить, и мы касаемся его лишь в дополнении к пятой главе.

В широком фронте, по которому идет современная теория элементарных частиц, аксиоматический подход в нашем понимании занимает сравнительно небольшое место (в особенности, если судить по числу публикаций). Экспериментально проверяемых результатов в аксиоматическом подходе не очень много: это TCP-теорема, связь спина со статистикой, дисперсионные соотношения для ограниченного числа процессов, некоторые асимптотические соотношения для амплитуд рассеяния. Однако недолговечность феноменологических результатов теорий, основанных на ряде специальных допущений, приводит к возрастающему интересу к тем немногим результатам, которые выводятся лишь из основных принципов квантовой теории; эти принципы — релятивистская инвариантность, существование полной системы состояний с положительной энергией, микропричинность.

Основная проблема, из-за которой возник аксиоматический подход, — совместимы ли принципы релятивистской локальной квантовой теории поля с существованием нетривиальной матрицы рассеяния — до сих пор не решена. Пока еще нет ни примера, ни хотя бы доказательства существования нетривиальной теории, удовлетворяющей всем аксиомам. По существу, единственный имеющийся пример — это теория свободных полей (в которой S-матрица тождественно равна единице). Эта проблема связана также с практическим вопросом о нахождении

*) Мы отсылаем читателя, незнакомого с элементами квантовой теории поля и с употребляемой здесь терминологией, к четвертой главе этой книги (§ 2), где дано систематическое изложение теории ЛСЦ.

самосогласованного непертурбационного метода приближенного вычисления S-матричных элементов.

Настоящая монография посвящена систематическому изложению различных направлений аксиоматического подхода и их взаимосвязи.

План изложения

Первая глава имеет вспомогательный характер: она содержит необходимые для дальнейшего сведения из функционального анализа и теории обобщенных функций. Эта глава написана конспективно и, разумеется, не может заменить систематического изложения затрагиваемых вопросов: почти все результаты приведены без доказательств, далеко не все определения и утверждения сопровождаются наводящими соображениями.

Систематическое изложение начинается со второй главы. В ней рассматривается пространство векторов состояний и формулируются те принципы релятивистской квантовой теории, которые не требуют введения локальных величин: принцип инвариантности относительно группы Пуанкаре (т. е. неоднородной группы Лоренца) и условие спектральности (т. е. существование полной системы физических состояний с положительной энергией). В дополнении к этой главе приведены основные сведения из теории групп Ли.

В третьей главе излагается уайтмановская формулировка теории локальных квантованных полей. Почти одна треть этой главы посвящена примерам свободных и обобщенных свободных полей.

Четвертая глава включает обзор теории рассеяния Хаага — Рюеля, ее связь с теорией ЛСЦ, а также S-матричный подход БМП.

Пятая глава содержит некоторые применения развитого аппарата, в том числе теорему об общем виде инвариантных аналитических функций, TCP-теорему, теорему о связи спина со статистикой, а также некоторые отрицательные результаты относительно канонической формулировки квантовой теории поля (в первую очередь теорему Хаага). Эту главу можно при желании читать сразу после первого параграфа четвертой главы.

Каждая глава начинается кратким содержанием и кончается разделом литературных указаний. Список литературы разделен на две части. В первой из них помещены учебники и монографии: ссылки на этот список даются цифрами в квадратных скобках. Вторая часть этого списка содержит журнальные статьи, препринты и лекции на семинарах и школах. Ссылки на эту часть списка даются фамилией первого автора (если авторов больше, чем два) и годом, например, Гайзенберг (1943).

Многочисленные упражнения, напечатанные мелким шрифтом, составляют неразрывную часть текста. На них имеются ссылки в дальнейшем, и независимо от того, будут проверяться приведенные в упражнениях утверждения или нет, их необходимо читать. Часть доказательств и некоторые замечания математического характера также напечатаны мелким шрифтом. При первом чтении их можно опустить.

Формулы, теоремы, леммы и упражнения имеют тройную нумерацию: первая цифра относится к главе, вторая — к параграфу, а третья является порядковым номером.

По поводу часто встречаемых обозначений отметим, что все координаты 4-векторов у нас вещественны, и метрический тензор в пространстве Минковского определяется равенствами

$$g^{00} = -g^{kk} = 1,\ k = 1, 2, 3 \qquad (g^{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3).$$

Трехмерная (пространственная) часть 4-вектора p обозначается жирным шрифтом, так что $p = (p^0, \mathbf{p})$, $p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2$. Всюду принята система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

Что должен знать читатель?

Как упоминалось в предисловии, ознакомлению с дедуктивным изложением общей теории квантованных полей по данной книге должно предшествовать хотя бы общее знакомство с историческим развитием и основными идеями стандартной формулировки квантовой электродинамики и теории элементарных частиц. Первоначальная (до сих пор полностью не решенная) задача, стоящая перед аксиоматическим подходом, заключалась в том, чтобы отобрать и четко сформулировать заслуживающие доверия свойства формального аппарата, связанного с лагранжевым или гамильтоновым формализмом. Поэтому для критического восприятия данного изложения и для понимания индуктивного происхождения основных постулатов теории необходимо иметь представление об исходном материале, составляющем содержание «классической» квантовой теории поля. Сравнительно компактное и в то же время достаточно полное изложение основных сведений по квантовой теории поля, которые полезно знать, приступая к чтению настоящей книги, содержится в первых 25 параграфах монографии [4] (с небольшими исключениями мы придерживаемся тех же обозначений). Для первоначального ознакомления с физическими основами квантовой теории поля можно рекомендовать уже упомянутую книгу Хенли и Тирринга, в которой, в частности, рассматривается ряд поучительных моделей. Основные характеристики, систематика и простое описание взаимодействий элементарных частиц содержатся в монографии Нишиджимы [7] (для наших целей достаточно иметь наиболее общие представления о частицах, содержащиеся, например, в первой главе книги Маршака и Сударшана [8]). Любознательный читатель найдет энциклопедическое изложение основ квантовой теории поля и многочисленные ссылки на оригинальные работы в обширной монографии Швебера [6]. Последовательное изложение теории рассеяния, начиная с нерелятивистской квантовой механики и кончая квантовой теорией поля, можно найти в исчерпывающей монографии Гольдбергера и Ватсона [9].

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Обобщенными функциями называются линейные функционалы над пространством $\mathscr{S}$ быстро убывающих бесконечно гладких функций. Топология в пространстве $\mathscr{S}(R_n)$ определяется посредством счетной системы норм

$$p_\sigma(u) = \max_{\substack{|\alpha| \leqslant \sigma \\ |\beta| \leqslant \sigma}} \sup_{x \in R_n} |x^\alpha D^\beta u(x)|, \quad \sigma = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \quad D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1 + \ldots + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Пространство основных функций $\mathscr{S}$ и сопряженное к нему пространство обобщенных функций $\mathscr{S}^*$ обладают тем примечательным свойством, что при преобразовании Фурье они непрерывно отображаются на себя (см. дальше, лемма 1.3.1 и теорема 1.3.1). *Наряду с пространством $\mathscr{S}$ вводится также пространство $\mathscr{S}(G)$ функций из $\mathscr{S}$, обращающихся в нуль вне некоторой области G.*

Обобщенные функции можно дифференцировать произвольное число раз (не выходя при этом за пределы пространства $\mathscr{S}^*$). Простейшие примеры дифференциальных уравнений, в которых неизвестная функция — обобщенная, рассмотрены в пп. 3.3 и 3.4 этой главы.

Общий вид лоренц-инвариантной обобщенной функции в четырехмерном пространстве R_4, сосредоточенной в точке $x = 0$, задается формулой $\mathfrak{f} = P(\Box)\delta(x)$, где $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, P — произвольный полином, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, определяемая формулой (1.2.2). *В п. 3.5 этой главы дан общий вид всех лоренц-инвариантных обобщенных функций.*

Обобщенная функция $f_r(x)$ ($x \in R_4$) называется запаздывающей, если $f_r(x)=0$ при $x \leqslant 0$ (т. е. при $x^0<0$ или $x^2=x^{0^2}-\mathbf{x}^2<0$). Преобразование Фурье $\tilde{f}_r(p)$ запаздывающей функции является предельным значением аналитической функции $\tilde{f}_r(k)$, голоморфной в трубчатой области T^+ ($\operatorname{Im} k \in V^+$, $\operatorname{Re} k \in R_4$). В дополнении А сформулированы необходимые и достаточные условия на функцию $\tilde{f}_r(k)$, чтобы функция $f_r(x)$ была запаздывающей (теорема 1.А.2).

В пространстве $\mathscr{S}$ общий вид билинейных функционалов имеет форму, аналогичную форме билинейных функций в конечномерном пространстве (теорема о ядре). Дано общее определение некоторого класса пространств — ядерных пространств, в которых справедлива аналогичная теорема. Оснащенным гильбертовым пространством называется тройка пространств $\Omega \subset \mathscr{H} \subset \Omega^*$, где Ω — ядерное пространство, всюду плотно расположенное в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ (относительно сходимости, определяемой скалярным произведением в $\mathscr{H}$, которое предполагается непрерывным относительно топологии в Ω). В оснащенном гильбертовом пространстве теория линейных самосопряженных операторов приобретает простую и законченную форму. С применением этого понятия в квантовой теории мы познакомимся в гл. 2.

§ 1. Некоторые сведения из функционального анализа

1.1. Линейные нормированные пространства. К понятию линейного пространства мы приходим, рассматривая общие свойства элементарных алгебраических операций — сложение и умножение на число, с которыми мы встречаемся в обычной векторной алгебре. Линейным пространством называется множество элементов любой природы, для которых определены операции сложения и умножения на вещественное (или комплексное) число с выполнением обычных для этих действий законов. Элементами линейного пространства могут быть, например, векторы в n-мерном евклидовом пространстве или множество непрерывных (или интегрируемых) функций, заданных на некотором точечном множестве в конечномерном пространстве, или функционалы, заданные на некотором классе функций. Для абстрактной теории линейных пространств конкретная природа их элементов безразлична.

Приведем точные определения.

Совокупность Ω элементов u, v, w, ... называется линейным пространством, если выполнены следующие условия:

I. В Ω определено коммутативное и ассоциативное сложение. Это означает, что для каждых двух элементов u и v множества Ω однозначно определен третий элемент $u+v$, причем

Iа. $u+v=v+u$;

Iб. $u+(v+w)=(u+v)+w$;

Iв. При любых u и v существует элемент x, зависящий от u и v, такой, что $u+x=v$ (этот элемент обозначается как $v-u$).

Условие Iв эквивалентно одновременному выполнению следующих двух условий:

Iв. 1. Существует элемент $0\in\Omega$ такой, что для всех $u\in\Omega$

$$u+0=u;$$

Iв. 2. Для каждого $u\in\Omega$ существует «обратный» элемент $(-u)$ такой, что $u+(-u)=0$.

Упражнение 1.1.1. Доказать эквивалентность условия Iв совокупности условий Iв. 1 и Iв. 2.

II. В пространстве Ω определено умножение на числа λ, μ, ..., причем

IIа. $1\cdot u=u$; IIб. $\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u$ для любого $u\in\Omega$.

III. Операции сложения и умножения на число связаны законами дистрибутивности:

IIIа. $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$; IIIб. $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda u$.

Упражнение 1.1.2. Доказать, что из сформулированных аксиом следует: 1) $0\cdot u=0$; 2) $(-1)\cdot u=(-u)$.

Если в Ω определено умножение лишь на вещественные числа, то пространство Ω называется вещественным; если определено умножение на любые комплексные числа, то Ω называется комплексным пространством. В дальнейшем в этой книге мы будем иметь дело главным образом с комплексными линейными пространствами.

Вещественная функция $p(u)$, заданная в Ω, называется *нормой*, если выполнены следующие условия:

а) для любого числа λ $p(\lambda u)=|\lambda|p(u)$ (положительная однородность);

б) $p(u+v)\leqslant p(u)+p(v)$ (неравенство треугольника или выпуклость нормы);

в) если $p(u)=0$, то $u=0$ (обратное следует из а)).

Из условий а) и б) следует неотрицательность нормы:

$$0=p(u-u)\leqslant p(u)+p(-u)=2p(u).$$

Функции, удовлетворяющие лишь условиям а) и б) (но не удовлетворяющие в)), называются *полунормами*.

Если в Ω задана норма p, то можно определить расстояние между любыми двумя элементами u и $v \in \Omega$ как $p(u-v)$. Мы будем говорить, что последовательность $(u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ сходится к u, если расстояние между u_n и u стремится к нулю, когда $n \to \infty$, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} p(u_n-u)=0$. Определенная таким образом сходимость иногда называется *сходимостью по норме*, или *сильной сходимостью*. Линейное пространство Ω, в котором сходимость задана посредством нормы $p(u)$, называется нормированным пространством. Норма элемента u обозначается иногда через $\|u\|$.

Последовательность $\{u_n\}$ элементов нормированного пространства Ω называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n>N(\varepsilon)$ и $m>N(\varepsilon)$ $p(u_n-u_m)<\varepsilon$ (т. е. если $\lim\limits_{\min(m,\,n)\to\infty} p(u_n-u_m)=0$). Иногда фундаментальная последовательность называется последовательностью, сходящейся в себе, или последовательностью Коши. Нетрудно видеть, что если последовательность $\{u_n\}$ сходится к некоторому элементу $u \in \Omega$, то она фундаментальна. Обратное утверждение не всегда имеет место. Нормированное пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу того же пространства, называется *полным*. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством*. Справедлива теорема, согласно которой любое нормированное пространство может быть пополнено до банахова пространства (см. [10]).

Приведем несколько примеров линейных нормированных пространств.

1) Пространство Гильберта. Пусть в комплексном линейном пространстве $\mathscr{H}$ определено скалярное произведение. Другими словами, пусть любым двум элементам u и $v \in \mathscr{H}$ поставлено в соответствие комплексное число (u, v), причем выполняются условия:

а) если λ_1 и λ_2 — комплексные числа, а u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 — элементы $\mathscr{H}$, то

$$(u,\ \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2)=\lambda_1(u,\ v_1)+\lambda_2(u,\ v_2),$$

$$(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2,\ v)=\bar\lambda_1(u_1,\ v)+\bar\lambda_2(u_2,\ v),$$

где чертой обозначено комплексное сопряжение;

б) $(u, v)=\overline{(v, u)}$;

в) $(u, u)\geqslant 0$, причем если $(u, u)=0$, то $u=0$.

В пространстве со скалярным произведением можно определить норму «вектора» u равенством

$$\|u\|=\sqrt{(u,\ u)}. \tag{1.1.1}$$

Нетрудно убедиться, что определенная таким образом функция удовлетворяет всем требованиям а) — в), входящим в определение нормы. Полное пространство со скалярным произведением называется *пространством Гильберта*.

Примером пространства Гильберта является пространство всех комплексных функций $f(x)$ одного вещественного переменного x с интегрируемым квадратом модуля на интервале $[a, b]$. Это пространство обычно обозначается $\mathscr{L}_2([a, b])$. Скалярное произведение в нем определяется по формуле

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx. \tag{1.1.2}$$

Тривиальным примером вещественного гильбертова пространства является вещественное n-мерное евклидово пространство R_n. Скалярное произведение двух векторов x и y в этом пространстве определяется обычной формулой

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Пространство Гильберта $\mathscr{H}$ называется *сепарабельным*, если в нем существует счетная (полная) ортогональная и нормированная система векторов $e_1, \ldots, e_n, \ldots$; $(e_i e_j)=\delta_{ij}$. Пространство $\mathscr{L}_2([a, b])$ сепарабельно.

2) Другим примером линейного нормированного пространства является пространство $C([a, b])$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$p(u)=\sup_{x\in[a, b]} |u(x)|.$$

Упражнение 1.1.3. Показать, что а) сходимость по норме в пространстве $C([a, b])$ совпадает с равномерной сходимостью; б) пространство $C([a, b])$ полное.

3) В качестве следующего примера рассмотрим пространство $C(\rho, \sigma; n)$ комплекснозначных функций n вещественных переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$, имеющих непрерывные частные производные до порядка σ включительно и убывающих на бесконечности вместе со своими производными не медленнее $|x|^{-\rho}$. Другими словами, для функций из $C(\rho, \sigma; n)$ все произведения вида

$$x^{\alpha} D^{\beta} u(x), \qquad |\alpha|\leqslant\rho, \quad |\beta|\leqslant\sigma \tag{1.1.3}$$

ограничены.

Лемма 1.1.1. *Если Ω_1 и Ω_2 — нормированные пространства с нормами p_1 и p_2, причем $\Omega_2 \subset \Omega_1$ и при $u \in \Omega_2$ $p_1(u) \leqslant p_2(u)$, то для сопряженных пространств и их норм справедливы обратные включения и неравенства:* $\Omega_1^* \subset \Omega_2^*$ *и* $p_1^*(u) \geqslant p_2^*(u)$.

Упражнение 1.1.4. Доказать лемму 1.1.1.

Важную роль в теории сопряженных пространств играет теорема о продолжении линейного функционала.

Теорема Хана — Банаха. Пусть $\mathcal{U}$ — *нормированное пространство с нормой p и F_0 — линейный непрерывный функционал, заданный на произвольном подпространстве $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$. Тогда существует линейный функционал $F(u)$, заданный во всем пространстве, такой, что $F(u) = F_0(u)$ при $u \in \mathcal{U}_0$ и* $p^*(F) = p^*(F_0)$.

Доказательство этой теоремы и различные ее применения см. в [10], гл. IV, §§ 1 и 2.

Здесь укажем лишь на то, что из теоремы Хана — Банаха следует существование нетривиального (т. е. неисчезающего тождественно) линейного функционала в любом непустом нормированном пространстве. Достаточно задать произвольное (ненулевое) значение функционала F на некотором элементе $u \in \Omega$ и по сформулированной теореме функционал F может быть продолжен (как линейный и непрерывный функционал) на все пространство Ω.

1.3. Счетно-нормированные пространства и пространства, сопряженные к ним. Определение 1. Нормы $p_1(u)$ и $p_2(u)$, заданные в одном и том же линейном пространстве Ω, называются *согласованными*, если любая последовательность $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ $(u_n \in \Omega)$, фундаментальная по обеим нормам и по одной из них сходящаяся к нулю, по второй норме также сходится к нулю.

Упражнение 1.1.5. Пусть $\mathcal{C}^{(1)}[a, b]$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. Показать, что в этом пространстве нормы $p_1(u) = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |u(x)|$ и $p_2(u) = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{|u(x)| + |u'(x)|\}$ согласованы между собой, в то время как нормы $p_1(u)$ и $p_3(u) = |u'(a)| + \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |u(x)|$ не согласованы.

Определение 2. Пусть в линейном пространстве Ω задана возрастающая последовательность попарно согласованных норм

$$p_1(u) \leqslant p_2(u) \leqslant \ldots \leqslant p_\sigma(u) \leqslant \ldots \qquad (1.1.10)$$

Пространство Ω называется *счетно-нормированным* (с нормами $\{p_\sigma(u)\}$), если сходимость в нем определена следующим образом. Последовательность $\{u_\nu\} \in \Omega$ сходится к элементу $u \in \Omega$, если $\lim\limits_{\nu \to \infty} p_\sigma(u_\nu - u) = 0$ при любом σ.

Точнее, *топология* в счетно-нормированном пространстве Ω задается при помощи следующей системы окрестностей: окрестность любого элемента $u \in \Omega$ задается положительным числом ε и натуральным числом σ по формуле

$$U_{\sigma\varepsilon}(u) = \{v,\ p_\sigma(v - u) < \varepsilon\}. \tag{1.1.11}$$

(Формула (1.1.11) читается следующим образом: элемент v принадлежит окрестности $U_{\sigma\varepsilon}(u)$, если $p_\sigma(v-u) < \varepsilon$.) Если в пространстве Ω задана система окрестностей, то нетрудно определить, что такое фундаментальная или сходящаяся последовательность. Так, например, последовательность $\{u_\nu\} \in \Omega$ называется фундаментальной, если для любой окрестности нуля $U_{\sigma\varepsilon}(0)$ можно найти номер $N = N(\sigma, \varepsilon)$ такой, что при $\nu > N$ и $\mu > N$ $u_\nu - u_\mu \in U_{\sigma\varepsilon}(0)$ (см. более подробное изложение в [12], где дается общее определение топологии в линейном топологическом пространстве). Полное счетно-нормированное пространство называется иногда *пространством Фреше*.

Приведем несколько примеров счетно-нормированных пространств, играющих важную роль в теории обобщенных функций.

1) Пространство $\mathscr{D}(G)$. Пусть G — конечная область (т. е. ограниченное открытое связное множество) в n-мерном вещественном пространстве R_n. Обозначим, через $\mathscr{D}(G)$ множество бесконечно гладких функций в R_n (т. е. функций, имеющих непрерывные частные производные любого порядка), обращающихся в нуль вне области G. Определим в $\mathscr{D}(G)$ счетную систему норм q_σ по формуле

$$q_0(u) = p_{00}(u) = \sup_x |u(x)|, \ \ldots, \ q_\sigma(u) = p_{0\sigma}(u) = \\ = \max_{|\alpha| \leqslant \sigma} \sup_x |D^\alpha u(x)|, \ \ldots, \tag{1.1.12}$$

где символ $D^\alpha u(x)$ определен формулой (1.1.3).

Частным случаем пространства $\mathscr{D}(G)$ является пространство $\mathscr{D}(a)$ бесконечно гладких функций одной вещественной переменной x, обращающихся в нуль вне интервала $-a < x < a$ *).

Упражнение 1.1.6. Показать, что функция $u(x)$, определяемая равенствами

$$u_a(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{a^2}{x^2 - a^2} & \text{при } -a < x < a \ (a > 0), \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant a, \end{cases} \tag{1.1.13}$$

принадлежит пространству $\mathscr{D}(a)$.

---

*) Функции, исчезающие вне некоторой конечной области пространства, называются *финитными функциями*. Замыкание множества точек, на котором непрерывная функция $u(x) \neq 0$, называется *носителем* этой функции.

Норма в пространстве $\mathcal{C}(\rho, \sigma; n)$ определяется равенством

$$p_{\rho\sigma}(u) = \max_{\substack{|\alpha| \leqslant \rho \\ |\beta| \leqslant \sigma}} \sup_{x \in R_n} |x^\alpha D^\beta u(x)|. \tag{1.1.4}$$

Пространства $\mathcal{C}(\rho, \sigma; n)$ играют важную роль в теории обобщенных функций.

1.2. Линейные функционалы и сопряженные пространства. Числовая функция, определенная в линейном пространстве Ω, называется *функционалом.* Функционал $F(u)$ называется *линейным*, если для любых $u, v \in \Omega$ и любых чисел α и β

$$F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v). \tag{1.1.5}$$

Норма является примером нелинейного функционала. Интеграл в пространстве интегрируемых на некотором интервале функций есть линейный функционал. Функционал $F(u)$ *непрерывен*, если из сходимости последовательности $\{u_n\} \in \Omega$ к $u \in \Omega$ следует сходимость последовательности $F(u_n)$ к $F(u)$. Ясно, что такое определение непрерывности зависит от определения сходимости (или, как иногда говорят, от топологии) в пространстве Ω. В частности, если сходимость в пространстве Ω задана посредством нормы $p(u)$ (т. е. если Ω — нормированное пространство), то линейный функционал $F(u)$ непрерывен (или ограничен) в Ω, если существует такое положительное число C_F, что для всех $u \in \Omega$ имеет место неравенство

$$|F(u)| \leqslant C_F p(u). \tag{1.1.6}$$

Мы всегда будем иметь дело с непрерывными линейными функционалами и поэтому будем называть их для краткости просто линейными функционалами. Совокупность всех линейных функционалов в нормированном пространстве Ω в свою очередь является линейным пространством, которое называется пространством, сопряженным с Ω, и обозначается Ω^*. В Ω^* можно также определить норму по формуле

$$p^*(F) = \sup_{p(u) \leqslant 1} |F(u)|. \tag{1.1.7}$$

Другими словами, $p^*(F)$ есть наименьшая из констант C_F, для которой справедливо неравенство (1.1.6).

Пространство Ω^*, сопряженное с нормированным пространством Ω, со сходимостью, определенной нормой (1.1.7), является полным нормированным пространством, независимо от того, полно или нет исходное пространство Ω.

В следующем пункте мы познакомимся с пространствами Ω, имеющими другое определение сходимости, и с их сопряженными пространствами.

Рассмотрим несколько примеров сопряженных пространств.

1) Пространство $\mathscr{H}^*$, сопряженное с пространством Гильберта $\mathscr{H}$. Примером линейного функционала $F(u)$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, очевидно, может служить скалярное произведение на любом фиксированном элементе v:

$$F(u) = (v, u), \qquad v \in \mathscr{H}. \tag{1.1.8}$$

Можно показать, что функционалами типа (1.1.8) исчерпываются все линейные непрерывные функционалы (теорема Рисса). Таким образом, пространство $\mathscr{H}^*$ изоморфно пространству $\mathscr{H}$. При этом норма функционала F равна норме соответствующего ему элемента v (1.1.1): $\|F\|^* = \sqrt{(v, v)}$ (см., например, [10], гл. III, § 3).

По аналогии с (1.1.8) иногда будем записывать значение функционала в виде скалярного произведения

$$F(u) = (f, u),$$

хотя в общем случае f не будет принадлежать к пространству Ω.

2) Пространство $C^*([a, b])$, сопряженное к пространству $C([a, b])$, определенному в п. 1.1, состоит из функционалов вида интеграла Стильтьеса:

$$F(u) = \int_a^b u(x)\, d\varphi(x), \tag{1.1.9}$$

где $\varphi(x)$ — функция с ограниченным изменением (см. [10], гл. II, § 6 и гл. VI, § 3) (теорема Рисса). Норма функционала F равна полной вариации функции φ:

$$p^*(F) = V_a^b \varphi(x).$$

Функционал F называется *положительным*, если для любой неотрицательной функции $u(x) \in C([a, b])$ $F(u) \geqslant 0$. Ф. Риссу принадлежит также теорема о том, что любой положительный функционал в $C([a, b])$ представим в виде (1.1.9) с монотонно неубывающей функцией $\varphi(x)$. В дальнейшем мы будем пользоваться также многомерным обобщением теоремы Рисса, когда $d\varphi(x) = d\mu$, где μ — мера в многомерном пространстве (см., например, [11]).

Отметим следующее простое свойство сопряженных пространств.

2) Пространство $\mathscr{S}$ (или $\mathscr{S}(R_n)$) состоит из всех бесконечно гладких функций в n-мерном вещественном пространстве R_n, которые убывают вместе со всеми своими производными при $x \to \infty$ быстрее любой степени от $(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{-1/2}$ (другими словами, для этих функций все нормы (1.1.4) принимают конечные значения). Будем определять сходимость в $\mathscr{S}$ посредством счетной системы норм

$$p_\sigma(u)=p_{\sigma\sigma}(u)=\max_{\substack{|\alpha|\leqslant\sigma\\|\beta|\leqslant\sigma}}\sup_{x\in R_n}\left|x^\alpha D^\beta u(x)\right|,\quad \sigma=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{1.1.14}$$

Примером функции из $\mathscr{S}$ могут служить функции Эрмита — Чебышева и вообще все функции вида

$$P(x_1,\ \ldots,\ x_n)\exp\left(-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\ \ldots\ -\frac{x_n^2}{a_n^2}\right),$$

где P — произвольный полином.

Топология, задаваемая в $\mathscr{S}$ посредством системы норм (1.1.14), эквивалентна топологии, задаваемой более широкой совокупностью норм (1.1.4); другими словами, если $u_\nu(x)\to u(x)$ относительно одной из этих систем норм, то то же самое имеет место и относительно другой системы. Пространство $\mathscr{S}$ полно относительно заданной таким образом топологии.

Пространство $\mathscr{S}$ будет играть в дальнейшем основную роль.

3) Пространство $\mathscr{S}(G)$ определяется как совокупность тех функций из $\mathscr{S}$, которые обращаются в нуль вне (вообще говоря, неограниченной) области G. Сходимость в $\mathscr{S}(G)$ определяется той же системой норм (1.1.14).

Мы допускаем возможность $G=R_n$, так что пространство $\mathscr{S}$ является частным случаем пространства $\mathscr{S}(G)$. Пространство $\mathscr{D}(G)$ также является специальным случаем пространств типа $\mathscr{S}(G)$ для ограниченных областей.

Рассмотренные примеры счетно-нормированных пространств обладают следующим примечательным свойством. Из любого множества, ограниченного по норме $p_{\sigma+1}$, можно выбрать последовательность, фундаментальную по норме p_σ (см. [12], гл. I, § 6, п. 2). В силу этого свойства пространства $\mathscr{D}(G)$ и $\mathscr{S}$ *совершенны* (см. [12], гл. I, § 6), т. е. любое ограниченное множество в этих пространствах *компактно*. Совершенные счетно-нормированные пространства в некотором смысле более близки к конечномерным пространствам, чем обычные (бесконечномерные) нормированные пространства. Это видно из теоремы Рисса, утверждающей, что если в некотором нормированном пространстве все ограниченные множества компактны, то это пространство конечномерно (см. [10], гл. II, п. 2.9, теорема 2). Как мы уже убедились на примерах пространств $\mathscr{D}(G)$ и $\mathscr{S}$ в случае счетно-нормированных пространств теорема Рисса несправедлива. Отсюда уже ясно, что введение счетного числа норм существенно. В пространствах $\mathscr{D}(G)$ и $\mathscr{S}$ нельзя задать топологию, эквивалентную исходной, при помощи одной-единственной нормы ([12], гл. I, § 3).

Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{S}$ является теоретико-множественным пересечением пространств $\mathcal{C}(\rho, \sigma; n)$, определенных в п. 1.1. Удобно иногда представлять пространство $\mathcal{S}$ в виде пересечения другой последовательности пространств. Пусть $\mathcal{S}_\sigma$ — пространство, полученное из $\mathcal{S}$ *пополнением по норме* p_σ; другими словами, $\mathcal{S}_\sigma$ есть совокупность всех σ раз дифференцируемых функций $u(x)$, для которых существует последовательность функций $\{u_\nu(x)\} \in \mathcal{S}$ такая, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} p_\sigma(u-u_\nu)= =0$. Тогда в силу того, что для системы норм (1.1.14) имеют место неравенства (1.1.10),

$$\mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{S}_\sigma \supset \ldots \tag{1.1.15}$$

и $\mathcal{S}$ равно пересечению этих пространств

$$\mathcal{S} = \bigcap_{\sigma=0}^{\infty} \mathcal{S}_\sigma. \tag{1.1.16}$$

Отметим, что пространства $\mathcal{S}_\sigma$ не совпадают с пространствами $\mathcal{C}(\sigma, \sigma; n)$. Так, например, функция $u(x) \equiv 1$ принадлежит пространству $\mathcal{C}(0, 0; n)$, но не принадлежит $\mathcal{S}_0$, так как все функции из $\mathcal{S}_0$ исчезают на бесконечности. Нетрудно видеть, что всегда имеет место включение $\mathcal{S}_\sigma \subset \mathcal{C}(\sigma, \sigma; n)$.

Аналогично можно определить пространства $\mathcal{D}_\sigma(G)$ как пополнение пространства $\mathcal{D}(G)$ по норме q_σ. Вообще любое счетно нормированное пространство Ω может быть представлено как пересечение полных нормированных пространств Ω_σ, являющихся пополнениями пространства Ω относительно нормы p_σ.

Перейдем теперь к изучению линейных функционалов в счетно нормированных пространствах.

Линейный функционал $F(u)$ непрерывен в Ω, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такую окрестность нуля $U_{\sigma\delta}(0)$ (в этой окрестности для элементов u $p_\sigma(u)<\delta$), в которой $|F(u)|<\varepsilon$.

Мы видели (п. 1.2), что пространство, сопряженное с нормированным пространством, само является полным нормированным пространством. Однако пространство Ω^*, сопряженное со счетно-нормированным пространством Ω, имеет структуру, отличную от структуры пространства Ω. Строение пространства Ω^* может быть описано в этом случае следующим образом.

Если функционал $F(u)$ ограничен в окрестности нуля $p_\sigma(u) < \delta$, то этот функционал непрерывен относительно нормы $p_\sigma(u)$, т. е. имеет место неравенство (1.1.6):

$$|F(u)| \leqslant C p_\sigma(u). \tag{1.1.17}$$

Наименьшее σ, при котором имеет место неравенство типа (1.1.17), называется *порядком* функционала F. Мы видим, что любой функционал из Ω^* имеет конечный порядок. Совокупность всех линейных непрерывных функционалов порядка, не превосходящего σ, т. е. функционалов, непрерывных по норме пространства Ω_σ, образует в Ω^* подпространство Ω_σ^*, сопряженное к Ω_σ и, следовательно, представляющее собой полное нормированное пространство. В силу леммы 1.1.1 линейный функционал порядка σ принадлежит также пространствам $\Omega_{\sigma+1}^*$, $\Omega_{\sigma+2}^*$ и т. д. Мы получаем цепь включений

$$\Omega_1^* \subset \Omega_2^* \subset \ldots \subset \Omega^*, \tag{1.1.18}$$

причем пространство Ω^* является объединением полных нормированных пространств Ω_σ^*:

$$\Omega^* = \bigcup_{\sigma=1}^{\infty} \Omega_\sigma^*. \tag{1.1.19}$$

Определяя в Ω_σ^* норму по формуле (1.1.7), для любого функционала $F \in \Omega^*$ порядка σ мы получаем (снова используя лемму 1.1.1) систему неравенств

$$p_\sigma^*(F) \geqslant p_{\sigma+1}^*(F) \geqslant \ldots \tag{1.1.20}$$

Таким образом, если счетно-нормированное пространство Ω в некотором смысле уже нормированного (так как является пересечением бесконечного числа нормированных пространств), то пространство Ω^*, наоборот, шире нормированного (имеет более богатый запас элементов), так как является суммой бесконечного числа нормированных пространств.

Приведем несколько примеров.

1) Пространство $\mathscr{D}^*(a)$, сопряженное к счетно-нормированному пространству $\mathscr{D}(a)$ (стр. 23), состоит из функционалов вида

$$F(u) = \int_{-a}^{a} u^{(\sigma)}(x)\, d\mu(x), \tag{1.1.21}$$

где $\sigma=0, 1, 2, \ldots$, а $\mu(x)$ — функция с ограниченным изменением (см. [12], гл. I, § 4, п. 3).

2) Пространство $\mathscr{S}^*$ состоит из всех функционалов вида

$$F(u) = \int_{R_n} f(x)\, D^\alpha u(x)\, d^n x, \tag{1.1.22}$$

где D^α определяется формулой (1.1.3), а $f(x)$ — непрерывная функция полиномиального роста (см. [12], гл. II, § 4, пп. 2 и 3), счетно-нормированным пространствам тесно примыкают своим свойствам пространства, являющиеся их объединеи.

Рассмотрим возрастающую последовательность счетно-нормированных пространств $\Omega^{(1)} \subset \Omega^{(2)} \subset \ldots \subset \Omega^{(i)} \subset \ldots$ с согласинными топологиями: если $\{u_n\} \in \Omega^{(i)}$ $(n=1, 2, \ldots)$ и $i<k$, сходимость последовательности $\{u_n\}$ в $\Omega^{(i)}$ (к элементу u) валентна сходимости этой последовательности в простран $\Omega^{(k)}$ (к тому же самому пределу u).

Определение 3. Пространство $\Omega = \bigcup \Omega^{(i)}$ называется ининым пределом счетно-нормированных пространств $\Omega^{(i)}$, сходимость в Ω определяется следующим образом. Послетельность $\{u_n\}$ элементов Ω сходится тогда и только тогда, а существует индекс i_0 такой, что $\{u_n\} \in \Omega^{(i_0)}$ при всех 1, 2, ... и последовательность $\{u_n\}$ сходится в простран $\Omega^{(i_0)}$.

В качестве примера определим пространство $\mathscr{D}$ как мноо финитных бесконечно дифференцируемых функций n переных $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Последовательность функций $u_1, \ldots$ $u_k, \ldots$ называется сходящейся в $\mathscr{D}$, если все функции u_k щаются в нуль вне одной и той же конечной области G и последовательность $\{u_k\}$ сходится в $\mathscr{D}(G)$ относительно ной системы норм (1.1.12).

Упражнение 1.1.7. Показать, что пространство $\mathscr{D}$ является объединением счетно-нормированных пространств $\mathscr{D}(G_i)$, где G_i шар: $|x|= x_1^2 + \ldots + x_n^2 < i$ *).

В гл. 2 мы познакомимся с другим важным примером пространства, являющегося объединением счетно-нормированных пространств.

В пространстве Ω^*, сопряженном к счетно-нормированному пространству Ω, можно двумя разными способами ввести топологию и, соответственсходимость. *Сильная топология* в Ω^* определяется следующей системой ностей. Пусть A — произвольное ограниченное множество элементов u, ное неравенствами

$$p_1(u) \leqslant A_1, \ldots, p_\sigma(u) \leqslant A_\sigma, \ldots \tag{1.1.23}$$

ная окрестность нуля в Ω^* задается ограниченным множеством $A \subset \Omega$ положительным числом ε как совокупность всех $f \in \Omega^*$, для которых

$$\sup_{u \in A} |(f, u)| < \varepsilon. \tag{1.1.24}$$

Слабая топология в Ω^* определяется при помощи слабых окрестностей. *Слабая окрестность нуля* задается произвольной конечной совокупностью

*) Пространство $\mathscr{D}$ не является счетно-нормированным пространством.

$u_1, \ldots, u_m$ элементов пространства Ω и положительным числом ε как множество всех $f \in \Omega^*$, для которых

$$|(f, u_1)| < \varepsilon, \ldots, |(f, u_m)| < \varepsilon.$$

Важную роль играет следующая теорема, которая не имеет аналога в теории нормированных пространств.

Теорема. *В пространстве Ω^*, сопряженном к совершенному пространству Ω, сильная и слабая топологии совпадают и Ω^* полно относительно этой (единой) топологии.*

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы (см. [12], гл. I, § 5, п. 6).

В пространствах ткпа $\mathcal{S}^*(G)$, с которыми главным образом мы будем иметь дело в дальнейшем, сходимость может быть определена следующими двумя эквивалентными между собой способами:

1) $f_n \to f \in \mathcal{S}^*$, если для любого $u \in \mathcal{S}$ $(f_n, u) \to (f, u)$, или

2) $f_n \to f$, если существует такое целое неотрицательное число σ, что все $f_n \in \mathcal{S}^*_\sigma$, $f \in \mathcal{S}^*_\sigma$ и $p^*_\sigma(f_n - f) \to 0$.

Отметим, наконец, что объединение совершенных счетно-нормированных пространств является совершенным пространством, и для него остается в силе сформулированная выше теорема.

1.4. Теорема о ядре. Ядерные операторы и ядерные пространства. Сформулируем некоторое свойство пространств $\mathcal{S}$, которое существенно отличает их от гильбертова (и вообще от нормированного) пространства и которое в некоторой мере обусловливает тот факт, что пространства $\mathcal{S}(G)$ являются «хорошими», т. е. удобными для применений. К этому свойству можно прийти двумя эквивалентными путями: изучая общий вид билинейных (непрерывных) функционалов в $\mathcal{S}$ или рассматривая линейные операторы, которые переводят пространство $\mathcal{S}$ в сопряженное пространство $\mathcal{S}^*$.

Функционал $B(\varphi, \psi)$ называется *билинейным*, если он линеен относительно каждого из своих аргументов φ и ψ, когда другой аргумент фиксирован. Если φ и ψ являются в конечномерном пространстве тензорами ранга k и m соответственно: $\varphi = \left(\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}\right)$, $\psi = \left(\psi_{j_1 j_2 \ldots j_m}\right)$, то каждый билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ может быть представлен в виде

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_m} b_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_m} \varphi_{i_1 \ldots i_k} \psi_{j_1 \ldots j_m}, \tag{1.1.25}$$

где $b_{i_1 \ldots j_m}$ — тензор ранга $k+m$ в том же конечномерном пространстве. Эта простая и важная теорема не имеет аналога в гильбертовом пространстве. Поясним это на примере пространства $\mathcal{L}_2(R_k)$ функций k переменных с интегрируемым квадратом модуля. Аналогом формулы (1.1.25) в этом случае (при $k=m$) является представление

$$B(\varphi, \psi) = \int_{R_{2k}} \ldots \int dx_1 \ldots dx_k dy_1 \ldots dy_k \varphi(x_1, \ldots, x_k) \times \\ \times \psi(y_1, \ldots, y_k) K(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_k), \quad (1.1.26)$$

где ядро $K(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_k)$ имеет интегрируемый квадрат модуля в пространстве R_{2k}. На самом деле далеко не каждый билинейный функционал в $\mathscr{L}_2(R_k) \times \mathscr{L}_2(R_k)$ может быть представлен в форме (1.1.26). Например, простейший билинейный непрерывный функционал

$$L(\varphi, \psi) = \int_{R_k} \ldots \int dx_1 \ldots dx_k \varphi(x_1, \ldots, x_k) \psi(x_1, \ldots, x_k)$$

непредставим в виде (1.1.26) (с ядром K, являющимся обычной функцией с интегрируемым квадратом).

Наоборот, в пространствах $\mathscr{S}(G_n)$ аналог формулы (1.1.25) дает общий вид билинейного функционала. Говоря точнее, справедлива следующая теорема:

Теорема о ядре. *Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ принадлежит пространству $\mathscr{S}(G_k)$, а $\psi(y) = \psi(y_1, \ldots, y_m)$ — пространству $\mathscr{S}(G'_m)$, где G_k и G'_m — области в k- и m-мерном пространстве соответственно. Тогда любой билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$, непрерывный по каждому аргументу, может быть представлен в виде*

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi(x) \psi(y)), \quad (1.1.27)$$

где F — линейный функционал в пространстве функций $k+m$ переменных, заданных в произведении областей $G_k \times G'_m$ (по определению $(x, y) \in G_k \times G'_m$, если $x \in G_k$, $y \in G'_m$), т. е. $F \in \mathscr{S}^*(G_k \times G'_m)$. Функционал F определяется однозначно по B.

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы, отсылая читателя к имеющейся литературе (см., например, [13] или Шварц (1952)).

Формула (1.1.27) дает также общий вид линейного непрерывного оператора, отображающего $\mathscr{S}(G_k)$ в $\mathscr{S}^*(G'_m)$. Матричные элементы такого оператора имеют вид

$$(A\varphi, \psi) = (F, \varphi(x) \psi(y)). \quad (1.1.28)$$

Класс линейных топологических пространств, в которых имеет место теорема о ядре, играет важную роль в анализе. Такие пространства называются *ядерными*. Мы приведем здесь точное определение ядерного счетно-нормированного пространства.

Пусть $\Omega = \bigcap \Omega_n$ — счетно-нормированное пространство, являющееся пересечением убывающей последовательности полных нормированных пространств Ω_n. Пусть $n > m$ и пусть T_m^n — оператор, вкладывающий пространство Ω_n в Ω_m (оператор T_m^n сопоставляет каждому элементу φ из Ω_n тот же элемент φ, но рассматриваемый как элемент пространства Ω с другой нормой).

Определение 4. Счетно-нормированное пространство Ω называется ядерным, если для любого m найдется такое $n > m$, что оператор T_m^n имеет вид

$$T_m^n \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (F_k, \varphi) \psi_k, \tag{1.1.29}$$

где $\varphi \in \Omega_n$, $F_k \in \Omega_n^*$, $\psi_k \in \Omega_m$, и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_n^*(F_k) p_m(\psi_k) \tag{1.1.30}$$

сходится. (Операторы, обладающие таким свойством, тоже называются ядерными.)

Все конечномерные пространства будем считать по определению ядерными (как уже отмечалось, любой билинейный функционал в конечномерном пространстве представим в виде (1.1.25)).

Индуктивный предел ядерных пространств (см. определение 3) также является ядерным пространством.

Подробнее о свойствах ядерных пространств см. [13], Гротендик (1955) и [14]. Отметим, что ядерные пространства совершенны (см. п. 1.3) и поэтому сильная и слабая сходимости в ядерных пространствах и в пространствах, сопряженных к ним, совпадают. Кроме того, ядерное пространство сепарабельно (т. е. содержит всюду плотное счетное множество элементов).

Определение 5. Последовательность $\{a_n\}$ называется *быстро убывающей*, если при любом $m > 0$

$$\lim_{n \to \infty} n^m a_n = 0.$$

Пространство всех быстро убывающих последовательностей, в котором топология задается счетной системой норм

$$p_m(a) = \sup_n |n^m a_n|, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1.31}$$

будем обозначать $\mathfrak{s}$.

Упражнение 1.1.8. Показать, что пространство $\mathfrak{s}$ ядерно. (Указание: выбрать в качестве функционалов F_k в разложении (1.1.29) функционал $(F_k, a) = a_k$ и положить $\psi_k = e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (единица на k-м те). Показать, что $p_m(e_k) = k^m$, $\overset{*}{p}_n(F_k) = 1/k^n$, и вывести отсюда, что отображение T_m^{m+2} ядерно.)

Упражнение 1.1.9. Показать, что пространства $\mathcal{S}(R_n)$, $\mathcal{D}(G_i)$ и $\mathcal{D}$ (см. 1.3) ядерны (см., например, [13]).

1.5. Оснащенное гильбертово пространство. Мы уже видели в предыдущих пунктах, что счетно-нормированные пространства типа $\mathcal{S}(G)$ по своим свойствам ближе к конечномерным пространствам, и поэтому, по существу, проще, чем более привычное, освященное традицией, пространство Гильберта. В этом пункте мы увидим, что совместное рассмотрение пространства $\mathcal{S}^*$ и сопряженного к нему пространства $\mathcal{S}$ дает преимущество применительно к задачам анализа (а также к квантовой механике). В анализе (так же как и в квантовой механике) гильбертово пространство $\mathcal{H}$ обычно возникает в результате пополнения (относительно нормы, определяемой скалярным произведением) некоторого пространства Ω «достаточно хороших» функций (например, гладких и убывающих на бесконечности). Здесь мы хотим дать абстрактную формулировку этой знакомой по примерам ситуации в терминах внутренних свойств пространств Ω и $\mathcal{H}$ (безотносительно к природе их элементов). Вопрос о том, что значит «хорошее» пространство Ω, должен решаться, вообще говоря, в зависимости от задачи, с которой мы имеем дело. Для аксиоматического построения релятивистской квантовой теории (см. гл. 2—4), где мы рассматриваем произведения любого числа (неограниченных) операторных полей, целесообразно считать, что пространство Ω ядерно.

Итак, пусть в ядерном пространстве Ω определено скалярное произведение (т. е. положительно определенная эрмитова форма, см. п. 1.1) (u, v), непрерывное относительно сходимости в Ω. Можно показать, что пространство Ω не будет полным относительно сходимости по норме

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \tag{1.1.32}$$

т. е. найдется последовательность $\{u_n\} \subset \Omega$, для которой

$$\lim_{n, m \to \infty} \|u_n - u_m\| = 0$$

которая не стремится ни к какому элементу пространства Ω. Однако пространство Ω всегда может быть пополнено относительно новой сходимости, определяемой нормой (1.1.32), до гильбертова пространства $\mathcal{H}$, определенного однозначно, с точностью до изоморфизма. Как отмечалось выше (п. 1.2, пример 1) пространство $\mathcal{H}^*$ всех линейных функционалов в $\mathcal{H}$ изоморфно с самим пространством $\mathcal{H}$. С другой стороны, функционалы из $\mathcal{H}^*$ являются непрерывными линейными функционалами и в ядерном пространстве $\Omega \subset \mathscr{H}$ (в силу непрерывности скалярного произведения относительно топологии в Ω). Пространство Ω^* всех линейных функционалов в Ω шире, оно включает в себя гильбертово пространство $\mathscr{H}^* = \mathscr{H}$. Совокупность трех вложенных одно в другое пространств

$$\Omega \subset \mathscr{H} \subset \Omega^* \tag{1.1.33}$$

с описанными выше свойствами назовем *оснащенным гильбертовым пространством.*

Часто, имея дело с гильбертовым пространством $\mathscr{H}$, забывают о пространстве Ω, пополнением которого получено $\mathscr{H}$, а посему и об естественном расширении Ω^* пространства $\mathscr{H}$. Между тем именно одновременное рассмотрение тройки пространств (1.1.33) дает естественную основу как для построения общей теории линейных операторов, так и для правильной постановки некоторых задач квантовой теории поля.

1.6. Линейные операторы в оснащенном гильбертовом пространстве. Мы будем рассматривать здесь линейные операторы A, определенные на некотором линейном многообразии D_A гильбертова пространства $\mathscr{H}$, действие которых не выводит за пределы этого пространства:

$$u \in D_A \subset \mathscr{H} \Rightarrow Au \in \mathscr{H}. \tag{1.1.34}$$

Оператор A называется *ограниченным* (в D_A), если квадрат нормы

$$\|Au\|^2 = (Au,\ Au)$$

ограничен, когда $u \in D_A$ и $\|u\| \leqslant 1$. Верхняя грань $\|Au\|$, когда u пробегает пересечение D_A с единичной сферой, называется *нормой оператора* A и будет обозначаться $|A|$:

$$|A| = \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in D_A}} \|Au\|. \tag{1.1.35}$$

В случае же, если верхняя грань в правой части (1.1.35) равна бесконечности, оператор A называется *неограниченным.*

Любой ограниченный оператор A с областью определения $D_A \subset \mathscr{H}$ может быть распространен на все гильбертово пространство $\mathscr{H}$, оставаясь при этом линейным и ограниченным во всем $\mathscr{H}$ с той же нормой $|A|$ (см. [10], гл. IV, п. 1.1). Поэтому, без существенного ограничения общности, можно считать, что ограниченные операторы заданы всюду в $\mathscr{H}$, и не говорить об их области определения. Однако для неограниченных операторов, которые сплошь и рядом встречаются в квантовой теории, это уже не так. Для них указание области определения весьма существенно.

Для пояснения этого введем еще понятие о графике оператора.

График $\Gamma(A)$ оператора A есть множество всех пар $\{u, Au\}$, где $u \in D_A$, $Au \in \mathscr{H}$. Говорят, что оператор A *замкнут*, если его график есть замкнутое множество в $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Замкнутый оператор, определенный во всем пространстве $\mathscr{H}$, обязательно ограничен (это утверждение составляет содержание *теоремы о замкнутом графике*). Поскольку мы будем иметь дело, как правило, с замкнутыми неограниченными операторами (или по крайней мере с операторами, допускающими замыкание), из сформулированной теоремы ясно, что они не могут быть определены во всем пространстве $\mathscr{H}$. Самое большее, на что мы можем рассчитывать, это то, что область определения D_A замкнутого неограниченного оператора A всюду плотна в $\mathscr{H}$. Будем говорить, что оператор B является *расширением оператора* A (и писать $A \subset B$), если график $\Gamma(A)$ содержится в графике $\Gamma(B)$ $(\Gamma(A) \subset \Gamma(B))$, т. е. если $D_A \subset D_B$ и в области D_A $Au = Bu$.

Одна из причин важности гильбертова пространства для квантовой теории заключается в том, что наличие скалярного произведения позволяет ввести понятие эрмитова оператора, соответствующего наблюдаемым величинам, так же как и понятие унитарного оператора, при помощи которого описывается симметрия физической системы. Перейдем к определению этих понятий.

Рассмотрим билинейную форму (v, Au) $(u \in D_A,\ v \in \mathscr{H})$. Если при некотором v из $\mathscr{H}$

$$|(v, Au)| \leqslant C(v, A)\|u\| \quad \text{при всех} \quad u \in D(A), \tag{1.1.36}$$

где $C(v, A)$ — положительное число, не зависящее от u, то согласно теореме Рисса об общем виде линейных непрерывных функционалов в $\mathscr{H}$ (см. п. 1.2) существует такой элемент $v_1 \in \mathscr{H}$, что

$$(v, Au) = (v_1, u). \tag{1.1.37}$$

Если область D_A всюду плотна в $\mathscr{H}$, то вектор v_1 однозначно определяется по вектору v. На таких v определим (линейный) оператор A^*, называемый *эрмитово сопряженным* к оператору A, по формуле $A^*v = v_1$. Область определения оператора A^* состоит из всех векторов $v \in \mathscr{H}$, для которых выполнено (1.1.36).

Часто в физической литературе сопряженный оператор определяется равенством

$$(v, Au) = (A^*v, u), \tag{1.1.38}$$

которое является следствием последних двух формул, без указания областей определения A и A^*. Эта неточность допустима, если A — ограниченный оператор, поскольку, как уже указывалось, в этом случае можно считать, что $D_A=\mathscr{H}$, и, кроме того, нетрудно видеть, что условие (1.1.36) выполняется при всех $v\in\mathscr{H}$ (с $C(v, A)=\|v\|\ |A|$), так что сопряженный оператор A^* действительно существует и определен во всем $\mathscr{H}$.

В общем случае неограниченных операторов сопряженный оператор не всегда существует. Необходимое и достаточное условие существования у оператора A сопряженного оператора состоит в том, чтобы A имел замыкание в $\mathscr{H}$ (см. [15], гл. IV, п. 4.6). Это означает, что если $\{u_n\}$ — сходящаяся последовательность векторов из D_A, то последовательность $\{Au_n\}$ либо сходится, либо вообще не имеет точек сгущения в $\mathscr{H}$ (исключается возможность того, что две подпоследовательности последовательности $\{Au_n\}$ стремились к различным пределам в $\mathscr{H}$). В этом случае замыкание (т. е. наименьшее замкнутое расширение) оператора A равно A^{**}.

Оператор A называется *симметричным* (в физической литературе — *эрмитовым*), если $A\subset A^*$, т. е. если

$$(Au, v)=(u, Av) \quad \text{при} \quad u, v\in D_A. \tag{1.1.39}$$

Если $A=A^*$ (т. е. если к условию (1.1.39) добавить еще равенство областей определения D_A и D_{A^*}), то говорят, что оператор является *самосопряженным* (по термииологии фон Неймана — гипермаксимальным-симметричным).

Упражнение 1.1.10. Пусть $\mathscr{H}=\mathscr{L}_2$ ([0, 1]) есть множество функций с интегрируемым ивадратом модуля на отрезие [0, 1]. Пусть D—множество всех абсолютио непрерывных функций на этом отрезке (см. [10], гл. II, п. 6.3), производиые которых принадлежат $\mathscr{H}$, а сами фуиикции удовлетворяют условию периодичности $f(0)=f(1)$. Пусть D_0 — подмножество области D, состоящее из тех функций множества D, иоторые обращаются в иуль на граиице интервала: $f(0)=f(1)=0$. Показать, что оператор

$$P=-i\frac{d}{dx}$$

с областью определення D является самосопряжениым оператором, в то время как оператор P_0, задаваемый той же формулой, ио с областью определення D_0, лишь симметричен, но не самосопряжен. Найтн область определення D_0^* сопряжеиного оператора P_0^*. Убедиться непосредственно, что оператор P неограничен.

Оператор U, определенный во всем пространстве $\mathscr{H}$ и с областью значений, тоже совпадающей с $\mathscr{H}$, называется унитарным, если он сохраняет скалярное произведение:

$$(Uf, Ug)=(f, g). \tag{1.1.40}$$

Требование, чтобы область значений оператора U совпадала с $\mathscr{H}$, существенно. Если его не накладывать, то оператор U называется *изометричным*.

Упражнение 1.1.11. Показать, что норма любого изометричного оператора равна 1.

Изометричный оператор характеризуется равенством $U^*U=1$. Из этого равенства, вообще говоря, не следует, что $UU^*=1$. Если оба равенства имеют место, то оператор U унитарен.

Справедлива теорема о спектральном разложении унитарных и самосопряженных операторов (для симметричных операторов эта теорема не имеет места, см., например, [15], гл. VI). В большинстве математических руководств спектральная теория операторов излагается на языке, непривычном для физиков. Причина этого состоит в том, что самосопряженные операторы (даже если они ограничены) имеют, вообще говоря, не только дискретный, но и непрерывный спектр собственных значений, однако лишь собственные векторы дискретного спектра принадлежат гильбертову пространству $\mathscr{H}$. Если, однако, пользоваться оснащенным гильбертовым пространством, то можно сформулировать теорию в терминах, более близких физикам, причисляя «собственные векторы непрерывного спектра» расширению Ω^* гильбертова пространства $\mathscr{H}$.

Поясним сказанное на простейшем примере.

Рассмотрим оснащенное гильбертово пространство

$$\mathscr{S}(R)\subset\mathscr{L}_2(R)\subset\mathscr{S}^*(R), \tag{1.1.41}$$

где R — вещественная ось $-\infty<x<\infty$, а пространства $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{S}$ определены в пп. 1.1 и 1.3. Простейший самосопряженный дифференциальный оператор $P=-i\dfrac{d}{dx}$ (квантовомеханический оператор импульса), определенный для абсолютно непрерывных функций *) из $\mathscr{L}_2$, производная которых имеет интегрируемый квадрат модуля, не имеет ни одной собственной функции в $\mathscr{L}_2$. Действительно, то, что в книгах по квантовой механике обычно называется собственной функцией оператора P (соответствующей вещественному собственному значению p), а именно функция e^{ipx}, не принадлежит $\mathscr{L}_2(R)$, так как $|e^{ipx}|^2=1$ неинтегрируема на всей оси. Таким образом, теорема о существовании и полноте системы собственных векторов самосопряженного

*) Относительно определения и простейших свойств абсолютно непрерывных функций см., например, [10], гл. II, пп. 6.3 и 6.4. Грубо говоря, функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной, если она может быть представлена в виде неопределенного интеграла от локально суммируемой функции.

оператора неприменима в своей наиболее естественной форме даже к такому простому и часто встречающемуся оператору, как оператор дифференцирования P (эта теорема в своей простейшей форме применима лишь к операторам с дискретным спектром собственных значений). В то же время функции e^{ipx}, очевидно, принадлежат пространству линейных функционалов $\mathscr{S}^*$ и образуют полную систему функционалов в этом пространстве. Действительно, мы увидим в § 3, что любой функционал из $\mathscr{S}^*$ (и, тем более, любая функция из $\mathscr{L}_2$) разлагается в интеграл Фурье по «собственным функциям» e^{ipx} оператора P. В $\mathscr{L}_2$ это разложение сходится по норме. Таким образом, оператор дифференцирования P имеет полную систему собственных функций в оснащенном гильбертовом пространстве (1.1.41). Кроме того, оператор P непрерывен относительно топологии в $\mathscr{S}$ (хотя не является непрерывным относительно скалярного произведения в $\mathscr{L}_2$) и отображает это пространство в себя. Все эти «хорошие» свойства остаются справедливыми для широкого класса дифференциальных и интегральных операторов в тройке пространств (1.1.41).

Ситуация, проиллюстрированная на примере пространств (1.1.41), имеет место для произвольного оснащенного гильбертова пространства. Формулировке общей теоремы предпошлем следующие определения.

Определение 6. Пусть A — оператор, переводящий ядерное пространство Ω в себя. Обобщенным собственным вектором оператора A называется такой линейный функционал F из Ω^*, что для всех элементов φ из Ω имеет место равенство

$$F(A\varphi)=\lambda F(\varphi). \tag{1.1.42}$$

Определение 6, естественно, сохраняет свой смысл и тогда, когда Ω — произвольное линейное топологическое пространство.

Определение 7. Оператор U, переводящий пространство Ω в себя, называется унитарным оператором в оснащенном гильбертовом пространстве $\Omega\subset\mathscr{H}\subset\Omega^*$, если при любом φ, $\psi\in\mathscr{H}$

$$(U\varphi,\ U\psi)=(U^{-1}\varphi,\ U^{-1}\psi)=(\varphi,\ \psi). \tag{1.1.43}$$

Достаточно потребовать выполнения равенства (1.1.43) в Ω — в $\mathscr{H}$ оно получится тогда как следствие.

Оператор A, переводящий пространство Ω в себя, называется *самосопряженным* оператором в оснащенном гильбертовом пространстве (1.1.33), если для любых двух элементов φ и ψ из области определения D_A оператора A

$$(\varphi,\ A\psi)=(A\varphi,\ \psi) \tag{1.1.44}$$

и если, кроме того, из равенства $(\varphi, A\psi) = (\varphi_1, \psi)$, справедливого при фиксированных φ и φ_1 для всех ψ из D_A, следует, что $\varphi \in D_A$ (и, стало быть, $A\varphi = \varphi_1$).

Любой самосопряженный оператор A в оснащенном гильбертовом пространстве (1.1.33) может быть продолжен на все пространство Ω^* по формуле

$$(Af, \varphi) \equiv (f, A\varphi), \quad \varphi \in \Omega, \quad f \in \Omega^*. \tag{1.1.45}$$

Справедлива следующая теорема о полноте системы обобщенных собственных векторов унитарных и самосопряженных операторов в оснащенном гильбертовом пространстве.

Теорема 1.1.1. *Унитарный оператор в оснащенном гильбертовом пространстве обладает полной системой обобщенных собственных векторов, соответствующих собственным значениям λ, модуль которых равен единице.*

Самосопряженный оператор в оснащенном гильбертовом пространстве обладает полной системой обобщенных собственных векторов, соответствующих вещественным собственным значениям.

Доказательство этой теоремы можно найти в [13], гл. I, § 4.

Предположение о том, что рассматриваемые операторы переводят пространство Ω в себя, существенно для того, чтобы определение обобщенного собственного вектора (1.1.42) имело смысл. Возможно, однако, следующее, более общее определение.

Определение 8. Функционал $F \in \Omega^*$ называется обобщенным собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ, если равенство

$$F(\Phi(A)\varphi) = \Phi(\lambda) F(\varphi) \tag{1.1.46}$$

справедливо для любого φ из Ω и любой функция Φ от оператора A такой, что $\Phi(A)\varphi \in \Omega$.

Используя это определение, Кац (1960) доказал существование полной системы обобщенных собственных векторов у любого самосопряженного оператора.

При определении функции от самосопряженного (или унитарного) оператора, так же как и при доказательстве теоремы 1.1.1, используется следующая классическая теорема о спектральном разложении самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Теорема. *Каждому самосопряженному оператору A соответствует оператор спектрального разложения («разложения единицы») $E(\Delta)$ (Δ — интервал на вещественной оси λ) со следующими свойствами:* 1) $E(\Delta)$ — *самосопряженный оператор проектирования («спектральный проектор»), для которого* $E(\Delta_1) E(\Delta_2) = E(\Delta_1 \cap \Delta_2)$; 2) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E(\lambda) = 0$, *где* $E(\lambda) = E(-\infty, \lambda)$; 3) *если* $\Delta = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ *и* $\Delta_i \cap \Delta_k = \varnothing$ *при* $i \neq k$, *то* $E(\Delta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$; 4) *если* $f \in D_A$, *то*

$$Af = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) f, \tag{1.1.47}$$

Функция $\Phi(A)$ от самосопряженного оператора A определяется формулой

$$\Phi(A)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\,dE(\lambda). \tag{1.1.48}$$

В случае унитарного оператора U вместо (1.1.47) имеем

$$Uf=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda}\,dE(\lambda)\,f. \tag{1.1.49}$$

Возникает вопрос: если дано пространство Гильберта $\mathscr{H}$, можно ли всегда его «оснастить», т. е. указать ядерное пространство Ω, всюду плотно расположенное в $\mathscr{H}$ и такое, что скалярное произведение в $\mathscr{H}$ непрерывно относительно топологии в Ω (другими словами, найти такое пространство Ω, чтобы тройка $\Omega\subset\mathscr{H}\subset\Omega^*$ представляла собой оснащенное гильбертово пространство)? Покажем, что ответ на этот вопрос утвердителен в случае, когда гильбертово пространство $\mathscr{H}$ сепарабельно (причем пространство Ω можно выбирать разными способами). Пусть $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Тогда произвольный элемент $f\in\mathscr{H}$ имеет вид

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n, \tag{1.1.50}$$

где ряд $\sum_n|a_n|^2=(f,f)$ сходится (и обратно, если ряд $\sum_n|a_n|^2$ сходится, то $(f,f)\in\mathscr{H}$). Пусть $\mathfrak{s}$ — пространство быстро убывающих последовательностей (см. определение 5). Формула (1.1.50) задает изоморфизм ядерного пространства $\mathfrak{s}$ со всюду плотным множеством векторов в $\mathscr{H}$. Нетрудно показать, что скалярное произведение в Ω непрерывно относительно сходимости, определяемой счетной системой норм (1.1.31).

§ 2. Обобщенные функции и действия над ними

2.1. Определение обобщенных функций в терминах линейных функционалов. Как в физике, так и в самой математике давно чувствовалась ограниченность классического понятия функции, характеризуемого заданием функциональных значений при всевозможных значениях аргументов. Важные понятия классической физики, такие как плотность точечной массы или заряда, не укладывались в этом обычном понятии функции. В квантовой механике и в квантовой теории поля систематически стали использоваться такие «сингулярные» или «несобственные» функции, как $\delta(x)$ (дельта-функция Дирака), $D(x)$ и т. д., возникающие, в частности, в так называемых перестановочных соотношениях, которые играют основную роль в квантовой теории. В самой математике узость классического понятия функции чувствовалась, например, в попытках определить функцию Грина для уравнений гиперболического типа (в частности, для волнового уравнения), при нормировке собственных функций, соответствующих непрерывному спектру некоторого оператора, и в ряде других вопросов.

Физики обосновывали применение таких, противоречивых с точки зрения классического определения функции, понятий, как дельта-функция, двумя способами. Во-первых, говорилось, что сингулярные функции необходимо умножать на «хорошие» функции и задавать правила интегрирования таких произведений; тогда полученные выражения имеют смысл. Во-вторых, сингулярные функции представлялись в виде несобственных пределов последовательностей обычных гладких функций. Оба эти интуитивные обоснования применения сингулярных функций нашли в последнее двадцатилетие точное математическое выражение и могут служить исходным пунктом строгой теории обобщенных функций *).

Начнем с функционального определения обобщенной функции, являющегося математической формулировкой первого из упомянутых выше подходов. Это определение уже подготовлено изложением в § 1. Точное определение, соответствующее второму подходу, мы дадим в п. 2.2.

Определение 9. *Обобщенной функцией* называется любой линейный непрерывный функционал над счетно-нормированным пространством $\mathscr{S}$, определенным в п. 1.3, т. е. любой элемент пространства $\mathscr{S}^*$. Функции пространства $\mathscr{S}$ будем называть *основными функциями*.

Чтобы оправдать термин «обобщенная функция», покажем, что обычные интегрируемые функции являются частным случаем обобщенных функций. Действительно, каждая функция, которая возрастает на бесконечности не быстрее некоторого полинома и абсолютно интегрируема в любой конечной области пространства R_n, задает линейный непрерывный функционал F в пространстве $\mathscr{S}$ по формуле

$$F(u) = \int_{R_n} \bar{f}(x)\, u(x)\, dx \equiv (f, u), \tag{1.2.1}$$

*) Появление в физической литературе определений вроде «δ-функция равна нулю всюду, кроме точки $x=0$, а $\delta(0)=\infty$, причем так, что $\int \delta(x)\,dx=1$» после выхода в свет монографии Шварца [17] является анахронизмом, который может быть объяснен лишь силой привычки. Отметим, что с такой примитивной точки зрения производную δ-функции вообще нельзя понять.

где черта сверху означает комплексное сопряжение*). Функция f с описанными выше свойствами называется локально интегрируемой функцией степенного (или умеренного) роста. Мы будем отождествлять две локально интегрируемые функции, если их значения отличаются лишь на множестве лебеговой меры нуль (или, как говорят, если они совпадают почти всюду, см. [10], гл. II). В силу такого соглашения соответствие $f \to F$ взаимно однозначно, т. е. по значениям функционала $F(u)$ в пространстве $\mathscr{S}$ можно обратно восстановить функцию $f(x)$ (почти всюду). В дальнейшем мы будем отождествлять такого рода «регулярные» функционалы $F(u)$ с порождающей их функцией $f(x)$.

Однако далеко не каждый функционал из $\mathscr{S}^*$ может быть представлен в виде (1.2.1) с обычной (локально интегрируемой) функцией $f(x)$ под знаком интеграла. Простейшим примером функционала, непредставимого в виде (1.2.1), является дельта-функция:

$$(\delta, u) = u(0). \tag{1.2.2}$$

Действительно, допустим, что для некоторой локально интегрируемой функции $f(x)$ в R_1 и любой основной функции имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(u)\, u(x)\, dx = u(0).$$

В частности, выбирая $u(x) = u_a(x)$ (1.1.13), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\, u_a(x)\, dx = e^{-1}.$$

Но при $a \to 0$ интеграл слева стремится к нулю, что противоречит написанному равенству.

Тем не менее мы будем пользоваться символической записью (1.2.1) для обобщенных функций и тогда, когда $f(x)$ не является обычной (локально интегрируемой) функцией.

Очевидно, понятие обобщенной функции зависит от выбора исходного (линейного топологического) пространства основных функций. Мы могли бы, например, положить в основу пространство $\mathscr{D}(G)$ вместо $\mathscr{S}$. Шварц [17] определяет обобщенные функ-

---

*) Разумеется, мы могли бы взять за определение функционала F интеграл от самой функции $f(x)$ (вместо $\bar{f}(x)$). Удобство выбранного нами определения связано с тем, что скалярное произведение в правой части (1.2.1) в случае, когда f и u принадлежат одному и тому же пространству, положительно определено.

ции как непрерывные функционалы на пространстве $\mathscr{D}$ всех финитных бесконечных дифференцируемых функций ($\mathscr{D}$ является объединением пространств $\mathscr{D}(G)$, когда область G меняется, см. пример 1 в п. 1.3). Мы сохраним термин «обобщенная функция» для функционалов из $\mathscr{S}^*$, в то время как функционалы из $\mathscr{D}^*$ (в тех немногих случаях, когда нам придется иметь с ними дело) будем называть распределениями *). Легко видеть, что любая обобщенная функция является распределением, в то время как обратное неверно, т. е. имеет место включение $\mathscr{S}^* \subset \mathscr{D}^*$. Примером распределения, которое не является обобщенной функцией, в случае одной переменной может служить обычная функция e^x.

Определение обобщенных функций как линейных непрерывных функционалов над счетно-нормированным пространством (или над объединением счетно-нормированных пространств) специального вида позволяет определить непрерывную операцию дифференцирования обобщенных функций (см. п. 2.2). Выбор пространства $\mathscr{S}$ основных функций в настоящей книге связан прежде всего с тем, что пространства $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}^*$ переходят в себя при преобразовании Фурье (см. п. 3.1), что является естественным отражением симметрии x- и p-пространств в квантовой механике.

В отличие от обычных функций, которые задаются в каждой точке некоторого множества, обобщенные функции задаются в целом — как значения функционала над пространством основных функций. Они не имеют, вообще говоря, определенных значений в отдельных точках. Однако все же можно говорить о некоторых локальных свойствах обобщенных функций.

Будем говорить, что обобщенные функции f и g совпадают в области (или в открытом множестве) G, если для каждой основной функции $u(x)$ с носителем в G имеет место равенство $(f, u) = (g, u)$. В частности, будем говорить, что $f = 0$ в окрестности точки x_0, если для всех основных функций $u(x)$, исчезающих вне этой окрестности, $(f, u) = 0$. Таким образом, по определению, множество точек, на котором обобщенная функция f обращается в нуль, открыто. Дополнение этого множества до всего пространства R_n называется *носителем обобщенной функции* f. Будем употреблять как равнозначные выражения: «множество M есть носитель обобщенной функции f» или «f сосредоточена на множестве M».

---

*) По аналогии с французским distribution — распределение (термин Шварца). Шварц называет обобщенные функции (из $\mathscr{S}^*$) умеренными распределениями — distributions tempérées, а Гельфанд и Шилов [12, 18] называют их обобщенными функциями умеренного роста.

При изучении локальных свойств обобщенных функций, так же как и в других вопросах, важную роль играет понятие *разложения единицы*, соответствующее некоторому покрытию пространства открытыми ограниченными множествами U_1, U_2, ..., U_ν, ... Потребуем, чтобы каждая точка содержалась лишь в конечном числе множеств из последовательности $\{U_\nu\}$, — такое покрытие называется *локально конечным*. Последовательность бесконечно дифференцируемых функций $e_1(x)$, ..., $e_\nu(x)$, ... называется разложением единицы, соответствующим покрытию $\{U_\nu\}$, если выполняются следующие условия:

1) $0 \leqslant e_\nu(x) \leqslant 1$;
2) $\operatorname{supp} e_\nu \subset U_\nu$;
3) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} e_\nu(x) \equiv 1$.

Разложение единицы существует для любого локально конечного покрытия пространства R_n. Здесь мы лишь наметим способ его построения (детальное изложение этого вопроса имеется в [18], гл. I, добавление 1).

Всегда можно найти открытые области V_ν, которые тоже покрывают R_n и такие, что $\overline{V}_\nu \subset U_\nu$. Существует бесконечно дифференцируемая функция $h_\nu(x)$, удовлетворяющая условиям 1) и 2) и равная единице на $\overline{V}_\nu$. Сумма $h(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(x)$ содержит конечное число слагаемых, когда x пробегает компакт, поэтому она бесконечно дифференцируема; кроме того, $h(x) \geqslant 1$. Искомое разложение можно задать функциями

$$e_\nu(x) = \frac{h_\nu(x)}{h(x)}.$$

Мы встретимся с применением понятия разложения единицы в гл. 3, п. 2.3, при доказательстве теоремы 3.2.3.

2.2. Определение обобщенных функций как классов фундаментальных последовательностей. Перейдем теперь к другому определению обобщенных функций, которое является математической формулировкой интуитивного взгляда на обобщенные функции как на некоторого рода пределы последовательностей непрерывных функций. Это определение не использует аппарата функционального анализа и с этой точки зрения более элементарно, чем определение, данное в п. 2.1.

Мы будем рассматривать пространство обобщенных функций как расширение множества непрерывных функций (в духе канторова определения множества действительных чисел как расширения множества рациональных чисел).

Последовательность непрерывных функций $\{f_\nu(x)\}$ в n-мерном вещественном пространстве R_n назовем *фундаментальной*, если существуют последовательность непрерывных функций $\{F_\nu(x)\}$ и совокупность целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такие, что функции F_ν имеют непрерывные частные производные порядка α и выполняются следующие условия:

1) $D^\alpha F_\nu(x) = f_\nu(x)$ при $\nu = 1, 2, \ldots$, где D^α определено формулой (1.1.3);

2) последовательность $F_\nu(x)$ сходится к непрерывной функции $F(x)$, причем сходимость равномерна на каждом ограниченном множестве;

3) функции $F_\nu(x)$ ограничены одним и тем же полиномом, т. е. существуют независимые от ν постоянные $A>0$ и $k \geqslant 0$ такие, что при всех $\nu = 1, 2, \ldots$

$$|F_\nu(x)| \leqslant A\left[1 + (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^k\right]. \tag{1.2.3}$$

Будем говорить, что фундаментальные последовательности $\{f_\nu(x)\}$ и $\{g_\nu(x)\}$ эквивалентны (и писать $\{f_\nu\} \sim \{g_\nu\}$), если смешанная последовательность

$$f_1(x),\ g_1(x),\ f_2(x),\ g_2(x),\ \ldots$$

фундаментальна. Определенное таким образом соотношение эквивалентности разбивает множество фундаментальных последовательностей на *классы эквивалентности*. Последовательности $\{f_\nu(x)\}$ и $\{g_\nu(x)\}$ принадлежат одному и тому же классу эквивалентности тогда и только тогда, когда $\{f_\nu(x)\} \sim \{g_\nu(x)\}$. Для задания некоторого класса эквивалентности достаточно задать одну какую-нибудь фундаментальную последовательность этого класса. Классы эквивалентности фундаментальных последовательностей будем называть обобщенными функциями (в R_n). Каждая непрерывная функция $f(x)$ может рассматриваться как обобщенная функция, если отождествить ее с классом эквивалентности, в который входит последовательность

$$f(x),\ f(x),\ \ldots,\ f(x),\ \ldots$$

В множестве обобщенных функций естественно вводятся линейные операции — сложение и умножение на число.

Если фундаментальная последовательность $\{f_\nu\}$ определяет обобщенную функцию f, а λ — число, то, очевидно, последовательность $\{\lambda f_\nu\}$ тоже фундаментальна. Класс эквивалентности, определяемый этой последовательностью, мы будем называть произведением числа λ на обобщенную функцию f и обозначать λf.

Упражнение 1.2.1. Показать, что если $\{f_\nu\}$ и $\{g_\nu\}$ — фундаментальные последовательности, то последовательность $\{f_\nu + g_\nu\}$ тоже фундаментальна.

Класс, определяемый последовательностью $\{f_\nu + g_\nu\}$, зависит лишь от классов $f \ni \{f_\nu\}$ и $g \ni \{g_\nu\}$. Мы будем называть этот класс суммой обобщенных функций f и g и обозначать через $f+g$.

Приведем пример эквивалентных фундаментальных последовательностей функций одного переменного.

Упражнение 1.2.2. Показать, что последовательности

$$f_\nu(x)=\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\,e^{-\frac{\nu x^2}{2}},\quad g_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\nu}{\nu^2x^2+1},\quad h_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\nu x}{x}\qquad(1.2.4)$$

фундаментальны и эквивалентны друг другу.

На первый взгляд здесь и в п. 2.1 мы присвоили одно и то же название — обобщенная функция — объектам совершенно разной природы. Покажем, что на самом деле оба определения эквивалентны, точнее, что рассматриваемое здесь множество классов эквивалентности изоморфно пространству линейных функционалов $\mathcal{S}^*$.

Пусть $\{f_\nu(x)\}$ — фундаментальная последовательность и $F(x)$ — соответствующая ей (согласно условию 2 определения фундаментальной последовательности) непрерывная функция. Поставим в соответствие классу эквивалентности, которому принадлежит последовательность f_ν, функционал $(f,\ u)$ $(u\in\mathcal{S})$, определенный по формуле

$$(f,\ u)=(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{R_n}\bar{F}(x)D^\alpha u(x)\,d^nx,\qquad(|\alpha|=\alpha_1+\ \dots\ +\alpha_n).\qquad(1.2.5)$$

Упражнение 1.2.3. Показать, что определенный формулой (1.2.5) функционал (f,u) зависит лишь от класса эквивалентности последовательностей, но не зависит от специального выбора последовательности $\{f_\nu\}$, совокупности целых чисел α или от примитивных функций $\{F_\nu\}$.

Упражнение 1.2.4. Показать, что последовательности (1.2.4) определяют обобщенную функцию $\delta(x)$ в R_1.

Упражнение 1.2.5. Показать, что при определенном выше соответствии алгебраические операции сохраняются (например, сумме классов эквивалентности соответствует сумма соответствующих функционалов).

Мы уже отмечали, что произвольный функционал из $\mathcal{S}^*$ может быть представлен в виде (1.1.22) или, что то же самое, в виде (1.2.5). Чтобы завершить доказательство изоморфности пространства $\mathcal{S}^*$ с множеством обобщенных функций, определенных как классы эквивалентности фундаментальных последовательностей, нужно показать, что каждую непрерывную функцию полиномиального роста можно аппроксимировать гладкими функциями полиномиального роста, причем так, что выполняются условия 2) и 3) определения фундаментальной последовательности. Для этой цели воспользуемся последовательностью функций (см. (1.2.4))

$$\varphi_\nu(x)=\prod_{j=1}^{n}f_\nu(x_j)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\nu}{2}\left(x_1^2+\ \dots\ +x_n^2\right)}.\qquad(1.2.6)$$

Любую непрерывную функцию полиномиального роста можно аппроксимировать последовательностью функций $\{F_\nu(x)\}$, где

$$F_\nu(x)=\int_{R_n} F(\xi)\varphi_\nu(x-\xi)\,d^n\xi. \qquad (1.2.7)$$

Мы предоставляем читателю доказательство следующих утверждений:

1) при каждом ν $F_\nu(x)\in\mathcal{S}$, т. е. функции $F_\nu(x)$ бесконечно дифференцируемы;

2) $F_\nu(x)\to F(x)$ при $\nu\to\infty$, причем сходимость равномерна относительно x на каждом ограниченном множестве в R_n;

3) существуют постоянные $A>0$ и $k\geqslant 0$, которые зависят от $F(x)$, но не зависят от ν и такие, что имеет место неравенство (1.2.3).

В дальнейшем мы будем работать с функциональным определением обобщенных функций (п. 2.1), но будем использовать также конструкцию (1.2.7), позволяющую после дифференцирования по x приближать (в смысле сходимости в $\mathcal{S}^*$) любую обобщенную функцию основными функциями (т. е. функциями из $\mathcal{S}$).

2.3. Преобразование аргументов и дифференцирование обобщенных функций. Мы уже отмечали в § 1, что функционалы можно складывать между собой и умножать на числа, так что совокупность обобщенных функций образует линейное пространство. Покажем, что можно определить также преобразование аргументов и дифференцирование обобщенных функций и что эти функции можно дифференцировать произвольное число раз.

Пусть $y=\varphi(x)$, или, подробнее,

$$y_1=\varphi_1(x),\quad y_2=\varphi_2(x),\ \ldots,\ y_n=\varphi_n(x),\quad x=(x_1,\ \ldots,\ x_n), \qquad (1.2.8)$$

— взаимно однозначное преобразование пространства R_n на себя. Пусть, далее, функции $\varphi(x)$ имеют непрерывные частные производные всех порядков и

$$J(\varphi)=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (1.2.9)$$

Преобразование, обратное к (1.2.8), обозначим $x=\varphi^{-1}(y)$. Тогда, если $f(x)$ — обычная (локально интегрируемая) функция и

$u(x) \in \mathscr{D}$, то

$$(f(\varphi^{-1}(y)),\ u(y)) = \int_{R_n} \bar{f}(x)\, u(\varphi(x))\, |J(\varphi)|\, d^n x = \\ = (f(x),\ |J(\varphi)|\, u(\varphi(x))). \qquad (1.2.10)$$

В случае, когда $f(x)$ является распределением, правая часть (1.2.10) берется в качестве определения распределения $f(\varphi^{-1}(y))$. В дальнейшем мы будем иметь дело только с такими преобразованиями аргументов в распределениях, которые оставляют инвариантным подпространство $\mathscr{S}^*$, т. е. сопоставляют обобщенной функции $f(x)$ обобщенную функцию $f(\varphi^{-1}(y))$.

В частности, выбирая в качестве преобразования φ сдвиг по одной из переменных, например

$$y_1 = x_1 - \Delta x_1, \quad y_2 = x_2, \ \ldots, \ y_n = x_n,$$

при помощи (1.2.10) получаем (при $\Delta x_1 \neq 0$)

$$\left(\frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta x_1},\ u(x)\right) = \\ = -\left(f(x),\ \frac{u(x_1-\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)}{-\Delta x_1}\right). \qquad (1.2.11)$$

Пользуясь тем, что в силу непрерывности функционала f правая часть (1.2.11) стремится при $\Delta x_1 \to 0$ к пределу $-\left(f, \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$, мы по определению назовем этот предел частной производной обобщенной функции $f(x)$ по переменной x_1. В общем случае, таким образом, имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k},\ u\right) = -\left(f,\ \frac{\partial u}{\partial x_k}\right). \qquad (1.2.12)$$

Формулу (1.2.12) можно получить интегрированием по частям, если функция $f(x)$ имеет непрерывные и полиномиально ограниченные частные производные. Этот факт обычно принимается в качестве интуитивного обоснования определения (1.2.12). Приведенные выше рассуждения (основанные на формуле (1.2.11)) показывают, что это определение совпадает с обычным определением производной от функции.

Так как производная от обобщенной функции также является обобщенной функцией (из $\mathscr{S}^*$), ясно, что обобщенные функции бесконечно дифференцируемы (т. е. имеют частные производные любого порядка). Отметим также, что операция дифференцирования непрерывна в $\mathcal{S}^*$. Другими словами, если при любом $u \in \mathcal{S}$

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, u) = (f, u),$$

то для каждого $u \in \mathcal{S}$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, u\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, u\right). \tag{1.2.13}$$

Эти простые свойства операции дифференцирования в $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$ не имеют места в нормированных пространствах. Именно поэтому в основу теории обобщенных функций кладутся счетно-нормированные пространства.

Заметим далее, что для обобщенных функций безразличен порядок дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \tag{1.2.14}$$

так как такое равенство справедливо для основных функций.

Напомним, что (1.2.14), вообще говоря, не имеет места для производных от обычных функций, когда эти производные разрывны.

Рассмотрим несколько примеров обобщенных функций одного переменного, являющихся производными от обычных локально интегрируемых функций.

1) Производная от разрывной (локально интегрируемой) функции

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases} \tag{1.2.15}$$

равна $\delta(x)$. Действительно, в силу определения (1.2.12) и формулы (1.2.2)

$$\left(\frac{d\theta}{dx}, u\right) = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \frac{du}{dx}\, dx = -\int_{0}^{\infty} \frac{du}{dx}\, dx = u(0) = (\delta, u). \tag{1.2.16}$$

2) Функционал $\frac{d \ln|x|}{dx}$ совпадает с главным значением в смысле Коши от $\frac{1}{x}$; другими словами,

$$\left(\frac{d \ln|x|}{dx}, u(x)\right) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x}\, dx, \tag{1.2.17}$$

где $\mathscr{P}$ — знак главного значения интеграла. Действительно, в силу определения (1.2.12)

$$\left(\frac{d\ln|x|}{dx},\ u(x)\right)=-\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\,u'(x)\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{u(x)}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{u(x)}{x}\,dx\right\}=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{u(x)-u(-x)}{x}\,dx=\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x)}{x}\,dx\qquad\left(u'(x)\equiv\frac{du}{dx}\right).$$

Определенную таким образом обобщенную функцию $\frac{d\ln|x|}{dx}$ будем обозначать как $\frac{1}{x}$ $\left(\text{иногда ее обозначают как } \mathscr{P}\frac{1}{x}\right)$. Отметим, что обычная функция $\frac{1}{x}$ не является локально интегрируемой (в окрестности точки $x=0$) и поэтому она не тождественна обобщенной функции $\frac{1}{x}$. Эти две функции, однако, совпадают при $x\neq 0$.

Аналогично функцию $\frac{1}{x^2}$ определим как производную от обобщенной функции $-\frac{1}{x}$:

$$\left(\frac{1}{x^2},\ u(x)\right)=\left(\frac{1}{x},\ u'(x)\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{u'(x)-u'(-x)}{x}\,dx=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{u(x)+u(-x)-2u(0)}{x^2}\,dx.\qquad(1.2.18)$$

Вообще, положим по определению

$$\frac{1}{x^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\ln|x|,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,\qquad(1.2.19)$$

где производную нужно понимать в смысле определения дифференцирования в $\mathscr{S}^*$.

3) Обычная локально интегрируемая функция $\ln(x+i0)$ определяется равенством

$$\ln(x+i0)=\lim_{y\to+0}\ln(x+iy)=$$

$$=\ln|x|+i\lim_{y\to+0}\arg(x+iy)=\ln|x|+i\pi\theta(-x),\qquad(1.2.20)$$

где $\theta(x)$ определена формулой (1.2.15). Производную от обобщенной функции (1.2.20) будем обозначать $\frac{1}{x+i0}$. В силу (1.2.16), (1.2.19) и (1.2.20)

$$\frac{1}{x+i0} = \frac{d}{dx}\ln(x+i0) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \qquad (1.2.21)$$

Последовательным дифференцированием формулы (1.2.21) получаем

$$\frac{1}{(x+i0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\ln(x+i0) = \frac{1}{x^n} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}i\pi\delta^{(n-1)}(x). \qquad (1.2.22)$$

Аналогично дифференцированием функции $\ln(x-i0)$, комплексно сопряженной к функции $\ln(x+i0)$, получаем

$$\frac{1}{(x-i0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\ln(x+i0) = \frac{1}{x^n} + i\pi\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x). \qquad (1.2.23)$$

Производные от дельта-функции в правых частях равенств (1.2.22) и (1.2.23) определяются согласно (1.2.12) формулой

$$(\delta^{(n)}, u) = (-1)^n u^{(n)}(0). \qquad (1.2.24)$$

2.4. Умножение обобщенной функции на гладкую функцию. Проблема деления. Нами определялось множество обобщенных функций как линейное пространство, и поэтому не случайно аппарат обобщенных функций весьма удобен для рассмотрения линейных задач. Мы уже убедились в предыдущем пункте, что обобщенные функции бесконечно дифференцируемы и их смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования (что, вообще говоря, не имеет места для обычных функций). В следующем параграфе мы увидим, что к обобщенным функциям можно свободно применять преобразование Фурье. Иначе обстоит дело с нелинейной операцией произведения обобщенных функций.

Произведение не может быть определено естественным образом для любой пары обобщенных функций. Легко убедиться, что нельзя определить умножение, которое было бы ассоциативным. Действительно,

$$\frac{1}{x}(x\delta(x)) = \frac{1}{x}0 = 0 \neq \left(\frac{1}{x}x\right)\delta(x) = \delta(x). \qquad (1.2.25)$$

Тем не менее существует широкий класс функций, для которых можно естественным образом определить произведение с обобщенными функциями из $\mathscr{S}^*$. Этот класс определяется следующим образом.

Будем говорить, что функция $\varphi(x)$ является *мультипликатором* в пространстве основных функций $\mathcal{S}$, если из того, что $u(x)\in\mathcal{S}$, следует, что и $\varphi(x)u(x)\in\mathcal{S}$. Пространство всех мультипликаторов будем обозначать через Θ_M. Легко видеть, что для того, чтобы функция $\varphi(x)$ была мультипликатором, необходимо и достаточно, чтобы она была бесконечно дифференцируемой и вместе со своими производными возрастала на бесконечности не быстрее полинома.

Если $\varphi(x)$ — мультипликатор, то произведение $\varphi(x)$ на обобщенную функцию $f\in\mathcal{S}^*$ определяется по формуле

$$(\varphi(x)f,\ u(x))=(f,\ \bar{\varphi}(x)u(x)). \tag{1.2.26}$$

По определению будем считать произведение коммутативным: $\varphi f=f\varphi$.

Упражнение 1.2.6. Показать, что при определении (1.2.26) имеют место формулы (1.2.25). Проверить, что определенное таким образом произведение является ассоциативным и билинейным.

В некоторых случаях можно определить и произведение двух обобщенных функций. Теория таких «сингулярных» произведений менее естественна и более сложна, чем рассмотренный выше случай умножения обобщенной функции на мультипликатор. Мы рассмотрим в дополнении Б к этой главе несколько примеров сингулярных произведений, которые встречаются в квантовой теории поля.

Перейдем теперь к рассмотрению обратной задачи — задачи деления, т. е. к изучению уравнения

$$\varphi(x)f=g, \tag{1.2.27}$$

где $g\in\mathcal{S}^*$ и $\varphi(x)\in\Theta_M$ — заданные функции, а f — неизвестная обобщенная функция. В случае, когда функция $\varphi(x)\neq 0$ при всех x и не стремится слишком быстро к нулю при $x\to\infty$ (так что функция $\frac{1}{\varphi(x)}$ тоже является мультипликатором), уравнение (1.2.27) решается элементарно. Задача существенно усложняется, если функция $\varphi(x)$ где-то обращается в нуль. Мы ограничимся рассмотрением случая одного независимого переменного и предположим, что функция $\varphi(x)$, входящая в (1.2.27), имеет лишь дискретное множество нулей конечного порядка. При этих предположениях проблема деления в пространстве $\mathcal{S}^*(R_1)$ сводится, по существу, к решению простейшего уравнения вида (1.2.27), а именно

$$xf=g. \tag{1.2.28}$$

В силу определения (1.2.26) уравнение (1.2.28) может быть записано в виде

$$(g,\ u(x)) = (xf,\ u(x)) = (f,\ xu(x)),$$

где $u(x)$ — произвольная основная функция. Таким образом, если обобщенная функция f, удовлетворяющая уравнению (1.2.28), существует и

$$v(x) = xu_1(x), \qquad u_1(x) \in \mathscr{S}, \tag{1.2.29}$$

то

$$(f,\ v) = (g,\ u_1). \tag{1.2.30}$$

Итак, функционал f однозначно определен на подпространстве (пространства $\mathscr{S}$) функций $v(x)$, для которых $v(0)=0$. Для полного определения функционала f достаточно определить его действие на какую-нибудь функцию $u_0(x)$ из $\mathscr{S}$, такую, что $u_0(0)=1$ (в качестве $u_0(x)$ можно выбрать, например, функцию e^{-x^2}). Произвольная функция $u(x) \in \mathscr{S}$ может быть представлена в виде

$$u(x) = u(0)\,u_0(x) + v(x), \tag{1.2.31}$$

причем $v(0)=0$, так что функция $v(x)$ имеет вид (1.2.29). Применяя функционал f к обеим частям равенства (1.2.31) и учитывая (1.2.30), получим

$$(f,\ u(x)) = u(0)(f,\ u_0(x)) + (g,\ u_1(x)). \tag{1.2.32}$$

Все рассуждения были проведены до сих пор в предположении, что существует решение уравнения (1.2.28). Нетрудно убедиться непосредственно, что при любом выборе постоянной C линейный функционал

$$(f,\ u) = Cu(0) + (g,\ u_1(x)) \tag{1.2.33}$$

непрерывен в $\mathscr{S}$ и действительно удовлетворяет уравнению (1.2.28). Рассуждения, приведшие к формуле (1.2.32), показывают, что функционал (1.2.33) является общим решением уравнения (1.2.28) (любые два частных решения этого уравнения отличаются лишь значением постоянной C). Общее решение однородного уравнения

$$xf_0 = 0 \tag{1.2.34}$$

имеет вид

$$(f_0,\ u) = Cu(0), \quad \text{т. е.} \quad f_0 = C\delta(x). \tag{1.2.35}$$

После того как мы убедились, что уравнение (1.2.28) имеет решение, нетрудно показать, что и более общее уравнение

$$x^l f = g, \tag{1.2.36}$$

где $g \in \mathscr{S}^*$, а l — любое натуральное число, всегда имеет решение относительно f в $\mathscr{S}^*$. Произвол в этом решении определяется общим решением однородного уравнения

$$x^l f_0 = 0. \tag{1.2.37}$$

Упражнение 1.2.7. Доказать, что общее решение уравнения (1.2.37) имеет вид

$$f_0 = \sum_{\nu=0}^{l-1} \frac{C_\nu}{\nu!} \delta^{(\nu)}(x), \tag{1.2.38}$$

где C_ν — произвольные постоянные. (Указание: воспользоваться формулой

$$x^k \frac{1}{\nu!} \delta^{(\nu)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } k > \nu, \\ \dfrac{(-1)^k}{(\nu-k)!} \delta^{(\nu-k)}(x) & \text{при } k \leqslant \nu \end{cases} \tag{1.2.39}$$

и провести индукцию по l.)

Формулу (1.2.39) можно получить из правила Лейбница для дифференцирования произведения двух функций

$$\frac{d^n}{dx^n}[\varphi(x) f] = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \varphi^{(n-\nu)}(x) f^{(\nu)}(x), \qquad \varphi(x) \in \Theta_M,\ f \in \mathscr{S}^*.$$

Она является частным случаем более общей формулы

$$u(x)\delta^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{(\nu)} \binom{n}{\nu} u^{(\nu)}(0)\delta^{(n-\nu)}(x). \tag{1.2.40}$$

Результат упражнения 1.2.7 допускает следующее важное обобщение.

Теорема 1.2.1. *Пусть обобщенная функция $f(x)$ сосредоточена в начале координат (т. е. $f(x) = 0$ при $x \neq 0$). Тогда $f(x)$ является конечной линейной комбинацией δ-функции и ее производных $\delta^{(\nu)}(x)$. Это утверждение справедливо и для обобщенных функций нескольких переменных, так же как и для распределений из $\mathscr{D}^*(R_n)$.*

Доказательство этой теоремы основано на упражнении 1.2.7 и на том, что любая обобщенная функция имеет конечный порядок (см. [12], гл. II, п. 4.5).

Аналогичным образом в $\mathscr{S}^*$ можно делить на функцию $(x-a)^l$, где a — вещественное число, и вообще на произвольный полином.

Упражнение 1.2.8. Пусть $a_1, \ldots, a_r$ — вещественные корни полинома $P(x)$ (кроме них $P(x)$ может иметь, вообще говоря, и комплексные корни), а

l_i — кратность корня a_i. Показать, что общее решение однородного уравнения

$$P(x) f_0 = 0$$

имеет вид

$$f_0 = \sum_{l=1}^{r} \sum_{\nu_l=0}^{l_l-1} C_l^{\nu_l} \delta^{(\nu_l)}(x - a_l). \tag{1.2.41}$$

Полученные результаты обобщаются и на более широкий класс бесконечно гладких функций, имеющих на вещественной оси лишь нули конечной кратности. Например, общее решение уравнения

$$\sin x \cdot f = 0$$

имеет вид

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(x - n\pi),$$

где коэффициенты C_n могут возрастать при $|n| \to \infty$ не быстрее некоторой степени $|n|$, т. е. существуют положительные постоянные A и λ (не зависящие от n) такие, что

$$|C_n| \leqslant A \cdot (1 + |n|)^{\lambda}.$$

В остальном постоянные C_n произвольны.

Однако не каждое уравнение типа (1.2.27) имеет решение в $\mathcal{S}^*$ (даже если предположить, что мультипликатор $\varphi(x)$ обращается в нуль лишь в одной точке). Так, например, можно показать, что уравнение

$$e^{-\frac{1}{x^2}} f = 1$$

не имеет решения в классе обобщенных функций $\mathcal{S}^*$, так как функция $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ имеет нуль бесконечной кратности в точке $x = 0$ (существенно особой точке этой функции).

Результаты, полученные в задаче о делении в $\mathcal{S}^*(R_1)$, могут применяться также к некоторым специальным задачам о делении обобщенных функций нескольких переменных (хотя общая задача деления функционалов из $\mathcal{S}^*(R_n)$ на произвольный полином от n переменных гораздо сложнее).

В качестве примера определим в вещественном пространстве R_4 векторов $p = (p^0, p_1, p_2, p_3)$ скалярное произведение по формуле

$$pq = p^0 q^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 p_3 = p^0 q^0 - \mathbf{pq}.$$

Общее решение уравнения

$$(p^2 - m^2) f = 1 \tag{1.2.42}$$

имеет вид

$$f = \frac{1}{p^2 - m^2} + [\theta(p^0) f_1(\mathbf{p}) + \theta(-p^0) f_2(\mathbf{p})]\,\delta(p^2 - m^2), \tag{1.2.43}$$

где f_1 и f_2 — произвольные обобщенные функции из $\mathscr{S}^*(R_3)$, а обобщенные функции $\theta(\pm p^0) f_{1,2}\delta(p^2 - m^2)$ и $\frac{1}{p^2 - m^2}$ определяются следующим образом:

$$(\theta(p^0) f_1(\mathbf{p})\,\delta(p^2 - m^2),\ u(p)) =$$
$$= \int f_1(\mathbf{p}) \frac{u(\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \mathbf{p})}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} d^3\mathbf{p} = \left(f_1(\mathbf{p}), \frac{u(\omega, \mathbf{p})}{2\omega}\right), \tag{1.2.44а}$$

$$(\theta(-p^0) f_2(\mathbf{p})\,\delta(p^2 - m^2),\ u(p)) = \left(f_2(\mathbf{p}), \frac{u(-\omega, \mathbf{p})}{2\omega}\right), \tag{1.2.44б}$$

$$\left(\frac{1}{p^2 - m^2},\ u(p)\right) = \int\limits_{R_3} d^3\mathbf{p}\,\mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(p)}{p^{0^2} - \omega^2(\mathbf{p})}\,dp^0, \tag{1.2.45}$$

где $\omega = \omega(\mathbf{p}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$, $\mathscr{P}$ — знак главного значения интеграла в смысле Коши.

В дальнейшем мы часто будем встречаться с обобщенными функциями (1.2.44) и (1.2.45).

§ 3. Преобразование Фурье обобщенных функций и дифференциальные уравнения

3.1. Преобразование Фурье основных и обобщенных функций. Пусть в пространстве R_n задано, вообще говоря, индефинитное, скалярное произведение по формуле

$$xy = x_1 y_1 + \ldots + x_l y_l - x_{l+1} y_{l+1} - \ldots - x_n y_n. \tag{1.3.1}$$

Мы будем строить преобразование Фурье относительно этой билинейной формы *).

Лемма 1.3.1. *Преобразование Фурье основной функции* $\tilde{u}(x) \in \mathscr{S}$

$$u(p) = F\tilde{u}(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R_n} \tilde{u}(x) e^{ipx} d^n x, \tag{1.3.2}$$

---

*) Задавая скалярное произведение в R_n в форме (1.3.1), мы имеем в виду применение к псевдоевклидовым векторам или к совокупностям псевдоевклидовых векторов. Например, пусть R_8 — восьмимерное пространство, состоящее из пар векторов пространства Минковского: $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Обозначая $x_1 = \xi_0$, $x_2 = \eta_0$, $x_3 = \xi_1$, …, $x_8 = \eta_3$, мы убеждаемся, что в таком пространстве R_8 целесообразно ввести метрику (1.3.1) с $l = 2$.

где px задано формулой (1.3.1), *тоже является основной функцией* ($u(p) \in \mathcal{S}$). *Точнее, операция* (1.3.2) *задает взаимно однозначное и непрерывное отображение пространства $\mathcal{S}$ на себя.*

Действительно, функция $u(p)$ бесконечно дифференцируема в силу абсолютной сходимости интегралов

$$D^{\alpha}u(p) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R_n}(ix')^{\alpha}\,\tilde{u}(x)\,e^{ipx}d^nx, \tag{1.3.3}$$

где выражения D^{α} и $(ix')^{\alpha}$ определены формулой (1.1.3), а

$$x' = (x_1, \ldots, x_l, \quad -x_{l+1}, \ldots, -x_n). \tag{1.3.4}$$

Так как функция $(ix')^{\alpha}\tilde{u}(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}$ и, следовательно, бесконечно дифференцируема с абсолютно интегрируемыми и исчезающими на бесконечности производными, то нетрудно убедиться, интегрируя по частям в (1.3.3), что функции $D^{\alpha}u(p)$ убывают при $p \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени p. Итак, $u(p) \in \mathcal{S}$, т. е. при преобразовании Фурье пространство $\mathcal{S}$ переходит в себя.

Если $\tilde{u}_{\nu}(x) \to 0$ при $\nu \to \infty$ в топологии пространства $\mathcal{S}$, то то же самое справедливо и для фурье-образов $u_{\nu}(p)$. Таким образом, преобразование Фурье является непрерывной операцией в $\mathcal{S}$.

Преобразование, обратное к (1.3.2), задается формулой

$$\tilde{u}(x) = \tilde{F}\,u(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{R_n}u(p)\,e^{-ipx}d^np. \tag{1.3.5}$$

Оно обладает такими же свойствами, как и F. Поэтому преобразование Фурье осуществляет изоморфизм $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$.

Определим преобразование Фурье для обобщенной функции $\tilde{f}(x)$ как линейный функционал $f(p)$ над пространством образов Фурье основных функций $\tilde{u}(x)$ по формуле

$$(f(p),\ u(p)) = (\tilde{f}(x),\ \tilde{u}(x)), \tag{1.3.6}$$

где $u(p)$ связано с $\tilde{u}(x)$ формулой (1.3.2). Формулу (1.3.6) можно рассматривать также как определение обратного преобразования Фурье: если задана обобщенная функция $f(p)$, то ее прообраз Фурье $\tilde{f}(x)$ определяется равенством (1.3.6).

В силу леммы 1.3.1 преобразование Фурье $f(p)$ обобщенной функции $\tilde{f}(x)$ ($\tilde{f}(x) \in \mathcal{S}^*$) тоже является обобщенной функцией того же пространства $\mathcal{S}^*$. Обратно, каждая обобщенная функция $f(p) \in \mathcal{S}^*$ имеет прообраз Фурье $\tilde{f}(x) \in \mathcal{S}^*$. Таким образом, справедлива следующая теорема, соответствующая лемме 1.3.1.

Теорема 1.3.1. *Преобразование Фурье обобщенных функций, определенное формулой* (1.3.6), *является изоморфизмом пространства* $\mathcal{S}^*$ *на себя.*

Напомним, что изоморфизмом линейного топологического пространства Ω_1 на такое же пространство Ω_2 называется взаимно однозначное, взаимно непрерывное отображение Ω_1 на Ω_2, сохраняющее линейные операции.

Отметим, что лемма 1.3.1 и теорема 1.3.1 не справедливы для пространства финитных функций $\mathcal{D}$ и пространства распределений $\mathcal{D}^*$. Именно, чтобы обеспечить симметрию между x- и p-пространствами, выражаемую этими леммой и теоремой, было целесообразно определить обобщенные функции как функционалы над пространством $\mathcal{S}$. Этот выбор отражает требование симметрии координатного и импульсного представлений, играющей важную роль в квантовой теории. В гл. 4, п. 3.5 мы выявим также связь такого выбора с условием микропричинности.

В случае, когда обобщенная функция $\tilde{f}(x)$ совпадает с обычной функцией, имеющей преобразование Фурье $f(p)$ в классическом смысле (формула (1.3.2)), обобщенная функция $f(p)$, определяемая равенством (1.3.6), совпадает с этим преобразованием Фурье. В таком случае формула (1.3.6) выражает известное равенство Парсеваля:

$$\int_{R_n} \overline{\tilde{f}(x)}\, \tilde{u}(x)\, d^n x = \int_{R_n} \overline{f(p)}\, u(p)\, d^n p. \tag{1.3.7}$$

Приведем несколько примеров преобразований Фурье обобщенных функций *):

$$F\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \theta(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\omega + i0}; \tag{1.3.8}$$

$$\begin{gathered} F\delta(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R_n} \delta(x)\, e^{ipx} d^n x = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \\ \tilde{F}\left(\frac{e^{ipa}}{(2\pi)^{n/2}}\right) \equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} e^{i(a-x)p} d^n p = \delta(x-a). \end{gathered} \tag{1.3.9}$$

Первую формулу (1.3.9) легко можно получить, исходя из определения (1.3.6):

$$(F\delta,\ u(p)) = \tilde{u}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{Rn} u(p)\, d^n p.$$

*) Таблица часто встречаемых преобразований Фурье обобщенных функций приведена в [18], гл. II, § 2, п. 5.

Вторая формула (1.3.9) получается из первой как обратное преобразование Фурье, если $a=0$; при произвольном a она получается отсюда при помощи трансляции.

Пусть p и x — 4-векторы. Тогда

$$D^c(x)=\tilde{F}\left(\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{m^2-p^2-i0}\right)\equiv\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{-ipx}}{m^2-p^2-i0}d^4p=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\delta(\lambda)+\frac{im}{4\pi^2}\frac{\theta(-\lambda)}{\sqrt{-\lambda}}K_1(m\sqrt{-\lambda})-\frac{m}{8\pi}\frac{\theta(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left[J_1(m\sqrt{\lambda})-\right.$$
$$\left.-iN_1(m\sqrt{\lambda})\right], \qquad (1.3.10)$$

где

$$\lambda=x^{0^2}-x_1^2-x_2^2-x_3^2,$$
$$K_1(z)=-\frac{\pi}{2}H_1^{(1)}(iz)=\frac{\pi}{2}(J_1(iz)+iN_1(iz)) \qquad (1.3.11)$$

(J_1, N_1, $H_1^{(1)}$, K_1 — соответственно функции Бесселя, Неймана, Ганкеля и Кельвина).

Наметим вывод формулы (1.3.10). При помощи тождества

$$\frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon}=\frac{i}{4}\int_0^\infty e^{-i\frac{m^2-p^2-i\varepsilon}{4\alpha}}\frac{d\alpha}{\alpha^2} \qquad (1.3.12)$$

и известных формул для гауссовых квадратур можно представить обобщенную функцию $D^c(x)$ в виде предела (относительно сходимости в $\mathcal{S}^*$):

$$D^c(x)=\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\eta\to+0}f_\eta(\lambda),$$

где λ задано (1.3.11), а

$$f_\eta(\lambda)=\int_0^\infty\exp\left\{-\left[i\frac{m^2}{4\alpha}+(\eta+i\lambda)\alpha\right]\right\}d\alpha. \qquad (1.3.13)$$

Функционал $f(\lambda)=\lim\limits_{\eta\to+0}f_\eta(\lambda)$ задается разными выражениями на интервалах $\lambda<0$, $\lambda>0$ и в окрестности точки $\lambda=0$. В первых двух случаях взятие интеграла (1.3.13) непосредственно приводит к формуле (1.3.10) (см. [19], 3.324 и 8 421.2). Чтобы получить первое слагаемое в (1.3.10) (дельта-функцию), рассмотрим интеграл

$$\lim_{\eta\to+0}\int_{-a}^{a}f_\eta(\lambda)\,d\lambda=2\int_0^\infty e^{-\frac{im^2}{4\alpha}}\frac{\sin a\alpha}{\alpha}d\alpha.$$

После замены переменных $\beta=a\alpha$ устремим a к нулю. В результате получим

$$\lim_{a\to+0}\lim_{\eta\to+0}\int_{-a}^{a}f_\eta(\lambda)\,d\lambda=2\int_0^\infty\frac{\sin\beta}{\beta}d\beta=\pi.$$

С другой стороны, интегралы $\lim\limits_{\eta\to+0}\int\limits_{-a}^{a}\lambda^{\nu}f_{\eta}(\lambda)\,d\lambda$ при $\nu=1, 2, \ldots$ стремятся к нулю при $a\to 0$. Следовательно, в окрестности нуля $f(\lambda)$ ведет себя как $\pi\delta(\lambda)$. Таким образом, формула (1.3.10) доказана*).

Отметим еще, что для преобразования Фурье обобщенных функций сохраняется формула (1.3.3), справедливая для преобразования Фурье основных функций:

$$D^{\alpha}F\tilde{u}=F\left[(ix')^{\alpha}\tilde{u}\right], \tag{1.3.14}$$

$$F\left[D^{\alpha}\tilde{u}\right]=(-ip')^{\alpha}F\tilde{u}, \tag{1.3.15}$$

где x' и p' определяются формулой (1.3.4). Эти формулы полезны тем, что сводят решение дифференциальных уравнений (с постоянными коэффициентами), содержащих обобщенные функции, к проблеме деления, рассмотренной в п. 2.4.

3.2. Свертка обобщенных функций. В классическом анализе часто используется операция свертки двух функций $f(p)$ и $g(p)$, определяемая равенством

$$f(p)*g(p)=\int\limits_{R_n}f(p-q)\,g(q)\,d^nq=\int\limits_{R_n}f(q)\,g(p-q)\,d^nq. \tag{1.3.16}$$

В анализе обобщенных функций эта операция играет еще более важную роль.

Так же как и операция умножения, свертка определяется не для любых пар обобщенных функций. Легко определить свертку обобщенной функции f на основную функцию $u(p)$, пользуясь вторым равенством (1.3.16):

$$f*u(p)=(f(q),\ u(p-q))=\int\limits_{R_n}f(q)\,u(p-q)\,d^nq. \tag{1.3.17}$$

Первое равенство (1.3.17) является определением свертки как действия функционала $f(q)$ на основную функцию $u(p-q)$, рассматриваемую как функция от q при фиксированном p. Нетрудно убедиться, что свертка (1.3.17) является бесконечно дифференцируемой и полиномиально ограниченной (вместе со своими производными) функцией от p. Другими словами, если $f\in\mathscr{S}^*$, а $u\in\mathscr{S}$, то $f*u(p)\in\Theta_M$, т. е. свертка (1.3.17) является мультипликатором. Однако функция $f*u$, вообще говоря, не принадлежит пространству основных функций $\mathscr{S}$. Например,

*) Функция $D^c(x)$ играет важную роль в квантовой теории поля. Ее называют *причинной функцией Грина* или *функцией распространения* свободного скалярного поля массы m (см. [4], гл. 3).

если $f(q)$ является полиномом, то свертка (1.3.17) также является полиномом и, следовательно, возрастает, а не убывает при $p \to \infty$.

Будем говорить, что обобщенная функция $f(p)$ является *свертывателем* в $\mathscr{S}$, если для любого $u(p) \in \mathscr{S}$ свертка $f * u$ также принадлежит $\mathscr{S}$. *Пространство свертывателей* будем обозначать через Θ'_c.

Если f является свертывателем, то можно определить свертку f с произвольной обобщенной функцией $g \in \mathscr{S}^*$ по формуле

$$(f * g, u) = (f(p)\, g(q), u(p+q)) = \\ = (g(q), (f(p), u(p+q))) = (g(q), f(-q) * u(q)). \quad (1.3.18)$$

Приведем пример свертывателя. Обобщенная функция $D^\alpha \delta(x)$ при любом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ является свертывателем. В более общем случае: если обобщенная функция f имеет ограниченный носитель, то она является свертывателем.

Основные функции из $\mathscr{S}$ являются свертывателями. Справедлива следующая теорема (см. Гординг и Лион (1959), теорема 7.2.3, или [12], гл. III, § 3, п. 7):

Теорема 1.3.2. *Для того чтобы обобщенная функция $\varphi(p)$ была свертывателем, необходимо и достаточно, чтобы ее образ Фурье $\tilde{\varphi}(x)$ был мультипликатором. При этом для любого $g \in \mathscr{S}^*$*

$$\varphi * g(p) = (2\pi)^{n/2} F(\tilde{\varphi}(x)\, \tilde{g}(x)). \quad (1.3.19)$$

Пространство свертывателей Θ'_c состоит из быстроубывающих обобщенных функций. Другими словами, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.3.2. *Для того чтобы обобщенная функция f была свертывателем, необходимо и достаточно, чтобы при любом натуральном N можно было представить f в виде конечной суммы производных от непрерывных функций $F_{kN}(p)$, каждая из которых удовлетворяет неравенству*

$$|F_{kN}(p)| \leqslant \frac{C_{kN}}{[1+|p|^2]^N}, \qquad |p|^2 = p_1^2 + \ldots + p_n^2.$$

Эта лемма, доказательство которой мы здесь приводить не будем (см. [17], т. II, гл. 7, § 5, теорема 9), понадобится нам в гл. 4.

Существуют и другие достаточные условия на пару обобщенных функций f и g, чтобы для них была определена свертка *).

*) Общее определение свертки, включающее всевозможные известные случаи, приведено в книге В. С. Владимирова «Уравнения математической физики», «Наука», 1967, стр. 116.

Мы сформулируем еще один критерий такого рода, имеющий полезные приложения. Особенно просто формулируется этот критерий в случае функции одной переменной.

Если носители обобщенных функций $f(p)$ и $g(p)$ $(\in \mathcal{S}^*(R_1))$ ограничены с одной и той же стороны (например, если $f(p)=0$ при $p<p_1$, $g(p)=0$ при $p<p_2$), то функционал (1.3.18) существует и определяет свертку $f * g(p)$.

Для функций нескольких переменных мы сформулируем соответствующий критерий лишь в одном частном случае, с которым будем встречаться в дальнейшем.

Пусть R_4 — пространство Минковского. Назовем обобщенную функцию $f_r(x) \in \mathcal{S}^*(R_4)$ *запаздывающей*, если ее носитель сосредоточен в будущем световом конусе $\overline{V}^+$, т. е. если $f_r(x)=0$ при $x \lesssim 0$. Аналогично обобщенную функцию $f_a(x)$ будем называть *опережающей*, если ее носитель сосредоточен в прошедшем световом конусе $\overline{V}^-$.

Теорема 1.3.3. *Если $f_r(x)$ и $g_r(x)$ — запаздывающие функции, то существует свертка $f_r(x) * g_r(x)$, определенная формулой* (1.3.18), *которая тоже является запаздывающей (обобщенной) функцией.*

Аналогичное утверждение справедливо для опережающих функций.

Эта теорема является следствием теоремы 1.А.1, доказанной в дополнении А к настоящей главе и относящейся к преобразованию Фурье запаздывающих функций. Мы предоставляем читателю возможность непосредственно убедиться в ее справедливости.

Отметим, наконец, формулу дифференцирования свертки, следующую непосредственно из определения (1.3.18):

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg. \tag{1.3.20}$$

3.3. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями. Уравнения типа свертки. В этом пункте мы рассмотрим некоторые примеры линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, т. е. уравнений вида

$$P(-iD)f = \sum_{\alpha} a_\alpha (-i)^{|\alpha|} D^\alpha f(p) = g(p), \tag{1.3.21}$$

где P — произвольный полином, операторы D^α определены формулой (1.1.3), a_α — комплексные числа, $g(p)$ — заданная обобщенная функция, $f(p)$ — неизвестная обобщенная функция (множитель $-i$ поставлен для удобства). Уравнение (1.3.21) может рассматриваться как частный случай уравнения типа свертки

$$\varphi(p) * f(p) = g(p), \tag{1.3.22}$$

где $\varphi(p)$ — заданный свертыватель, а $g(p)$ и $f(p)$ — соответственно, заданная и искомая обобщенные функции. Действительно, полагая

$$\varphi(p) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (-i)^{|\alpha|} D^{\alpha} \delta(p), \tag{1.3.23}$$

мы убеждаемся, что в этом случае уравнение (1.3.22) переходит в (1.3.21).

Согласно теореме 1.3.2 уравнение (1.3.22) эквивалентно уравнению для преобразований Фурье

$$\tilde{\varphi}(x) \tilde{f}(x) = \tilde{g}(x). \tag{1.3.24}$$

Таким образом, для того чтобы найти общее решение уравнения (1.3.22) и, в частности, дифференциального уравнения (1.3.21), необходимо и достаточно решить соответствующую проблему деления (1.3.24) с неизвестной функцией $\tilde{f}(x)$.

Рассмотрим случай одного независимого переменного. Для этого случая мы изложили в п. 2.4 решение проблемы деления на полином, и поэтому нетрудно найти общее решение уравнения (1.3.21). Действительно, исходя из (1.3.24) и (1.3.23) (или пользуясь непосредственно (1.3.14)), мы видим, что в терминах преобразований Фурье уравнение (1.3.21) принимает вид

$$P(x) \tilde{f}(x) = \tilde{g}(x), \tag{1.3.25}$$

где P — полином, входящий в левую часть (1.3.21). В п. 2.4 мы убедились, что уравнение (1.3.25) всегда имеет решение, причем общее решение этого уравнения равно некоторому частному решению плюс функция вида (1.2.41).

Упражнение 1.3.1. Показать, что единственная обобщенная функция $f(p)$, производная которой равна нулю, есть постоянная $f=C$. (Указание: воспользоваться тем, что общее решение уравнения (1.2.34) имеет вид (1.2.35).)

Отметим, что в пространстве обобщенных функций $\mathcal{S}^*$ число независимых решений однородного уравнения

$$P\left(-i \frac{d}{dp}\right) f(p) = 0 \tag{1.3.26}$$

не только не увеличивается (по сравнению с числом решений этого же уравнения в классе гладких функций), но, вообще говоря, сужается. Действительно, если, например, полином $P(x)$ не имеет вещественных корней, то единственное решение уравнения (1.3.26) есть $f=0$, в то время как в классе всех бесконечно дифференцируемых функций уравнение (1.3.26) имеет N решений, где N — степень полинома $P(x)$. Этот факт обусловлен тем, что экспоненциально возрастающие обычные функции не являются обобщенными функциями из $\mathcal{S}^*$. Если мы хотим иметь дело со всеми решениями любого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, мы должны искать их в пространстве распределений $\mathcal{D}^*$.

Пример дифференциального уравнения в частных производных мы рассмотрим в следующем пункте.

3.4. Фундаментальное решение волнового уравнения. В этом пункте мы будем изучать обобщенные решения волнового уравнения в $n+1$-мерном пространстве R_{n+1}:

$$\square f(p) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial p_0^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial p_i^2}\right) f(p) = 0. \qquad (1.3.27)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n),\ |\boldsymbol{p}| = \sqrt{p_1^2 + \ldots + p_n^2} = \rho, \quad p^2 = p_0^2 - \rho^2; \\ &\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ |\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = r, \quad x^2 = x_0^2 - r^2; \end{aligned} \qquad (1.3.28)$$

$$xp = x_0 p_0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{p} = x_0 p_0 - x_1 p_1 - \ldots - x_n p_n$$

(векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{x}$ будем называть пространственной частью соответственно векторов p и x).

Для того чтобы решить уравнение (1.3.27) при произвольных начальных условиях, достаточно найти фундаментальное решение этого уравнения, которое мы определим как обобщенную функцию $D(p)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\square D(p) = 0, \qquad D(0, \boldsymbol{p}) = 0, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p_0}\right|_{p_0=0} = \delta(\boldsymbol{p}). \qquad (1.3.29)$$

Чтобы эти условия имели смысл, необходимо установить справедливость следующей леммы.

Лемма 1.3.3. *Если обобщенная функция $D(p) \in \mathcal{S}^*(R_{n+1})$ удовлетворяет волновому уравнению* (1.3.27), *то ее можно рассматривать как обобщенную функцию по переменной $\boldsymbol{p}$ (из $\mathcal{S}^*(R_n)$), зависящую от p_0 как от параметра.*

Упражнение 1.3.2. Доказать лемму 1.3.3. (Указание: пусть функции $\varphi_\nu(\boldsymbol{p})$, $\nu = 1, 2, \ldots$, заданы равенством (1.2.6). Показать, что тогда функции

$$D_\nu(p) = \int_{R_n} D(p_0, \boldsymbol{q})\, \varphi_\nu(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\, d^n q \qquad (1.3.30)$$

бесконечно гладки, если $D(p)$ удовлетворяет (1.3.27), и что $\lim_{\nu\to\infty} D_\nu(p) = D(p)$ как относительно сходимости в $\mathcal{S}^*(R_{n+1})$, так и относительно сходимости в $\mathcal{S}^*(R_n)$ при фиксированном p_0.)

Упражнение 1.3.3. Пусть обобщенная функция $f(p)$ удовлетворяет уравнению (1.3.27) и начальным условиям

$$f(0, \boldsymbol{p}) = f_0(\boldsymbol{p}), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial p_0}\right|_{p_0=0} = f_1(\boldsymbol{p}), \qquad (1.3.31)$$

где $f_0(p), f_1(p) \in \mathcal{S}^*(R_n)$. Показать, что при этих предположениях $f(p)$ имеет вид

$$f(p) = D(p_0, p) * f_1(p) + \frac{\partial D}{\partial p_0} * f_0(p) =$$
$$= \int D(p_0, p-q) f_1(q)\, d^n q + \frac{\partial}{\partial p_0} \int D(p_0, p-q) f_0(q)\, d^n q. \quad (1.3.32)$$

Перейдем теперь к отысканию фундаментального решения $D(p)$ (мы убедимся, что условия (1.3.29) определяют одну и только одну обобщенную функцию).

Следуя методу, использованному в п. 3.3 для нахождения решения обыкновенных дифференциальных уравнений, перейдем к преобразованию Фурье $\tilde{D}(x)$ функции $D(p)$. При этом равенства (1.3.29) приобретают вид

$$x^2 \tilde{D}(x) = (x_0 + r)(x_0 - r) \tilde{D}(x_0, \boldsymbol{x}) = 0, \quad (1.3.33)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{D}(x_0, \boldsymbol{x})\, dx_0 = 0, \quad (1.3.34\text{а})$$

$$i \int_{-\infty}^{\infty} x_0 \tilde{D}(x_0, \boldsymbol{x})\, dx_0 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (1.3.34\text{б})$$

Согласно результатам п. 2.4 (в частности, формула (1.2.43) при $m=0$) общее решение уравнения (1.3.33) имеет вид

$$\tilde{D}(x) = D_1(\boldsymbol{x}) \delta(x_0 - r) + D_2(\boldsymbol{x}) \delta(x_0 + r), \quad D_{1,2}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}^*(R_n).$$

Условие (1.3.34а) дает

$$D_1(\boldsymbol{x}) + D_2(\boldsymbol{x}) = 0,$$

а из второго условия (1.3.34б) получаем

$$ir(D_1(\boldsymbol{x}) - D_2(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Итак,

$$\tilde{D}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\delta(x_0 - r) - \delta(x_0 + r)}{2r} = \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \varepsilon(x_0) \delta(x^2), \quad (1.3.35)$$

где $\varepsilon(x_0)$ — знаковая функция. Отсюда для искомой функции $D(p)$ получаем

$$D(p) = \frac{-i}{(2\pi)^n} \int \varepsilon(x_0) \delta(x^2) e^{ipx} d^{n+1}x = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\sin p_0 r}{r} e^{-ip\boldsymbol{x}} d^n \boldsymbol{x}. \quad (1.3.36)$$

Явный вид функции $D(p)$ зависит от размерности пространства n.

Упражнение 1.3.4. Показать, что

$$D(p)=\begin{cases}\frac{1}{2}\varepsilon(p_0)\theta(p^2) & \text{при } n=1,\\ \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon(p_0)\theta(p^2)}{\sqrt{p^2}} & \text{при } n=2,\end{cases}\tag{1.3.37}$$

Для вычисления интеграла (1.3.36) при $n\geqslant 3$ удобно ввести сферические координаты (ось x_1 выбираем по направлению вектора p):

$$\begin{aligned}x_1&=r\cos\varphi_1,\\ x_2&=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\ &\dots\dots\dots\\ x_{n-1}&=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\\ x_n&=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}.\end{aligned}$$

Элемент объема в сферических координатах имеет вид

$$dx_1\dots dx_n=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\,dr\,d\varphi_1\dots d\varphi_{n-1},$$

а углы $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}$ изменяются в пределах

$$0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi,\ \dots,\ 0\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi.$$

Учитывая, что площадь поверхности единичной сферы в ν-мерном пространстве равна

$$\sigma_\nu=2\frac{\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)},\tag{1.3.38}$$

получим

$$D(p)=\frac{\sigma_{n-1}}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\frac{\sin p_0 r}{r}r^{n-1}\,dr\int_0^\pi e^{-i\rho r\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1.$$

С другой стороны (см., например, [32], ч. II, гл. V, п. 113, формула (198)),

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^\pi\sin^{2\nu}\theta\, e^{-iz\cos\theta}\,d\theta$$

и, следовательно,

$$D(p)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^\infty\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sin p_0 r\,J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r)\,dr.\tag{1.3.39}$$

Формула (1.3.39) приводит к выражениям разного типа в зависимости от четности или нечетности числа n.

Упражнение 1.3.5. Показать, что при нечетном n ($n=2\nu+3$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$)

$$D(p)=\frac{1}{2\pi^{\nu+1}}\varepsilon(p_0)\,\delta^{(\nu)}(p^2). \tag{1.3.40}$$

Упражнение 1.3.6. Показать, что при четном n ($n=2\nu+2$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$)

$$D(p)=\frac{\varepsilon(p_0)}{2\pi^{\nu+1}}\left(\frac{d}{dp^2}\right)^{\nu}\frac{\theta(p^2)}{\sqrt{p^2}}. \tag{1.3.41}$$

(Указание: воспользоваться формулами

$$J_{\nu+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^{\nu}\frac{\sin z}{z},$$

$$J_{\nu}(z)=(-1)^{\nu}z^{\nu}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^{\nu}J_0(z).$$

справедливыми при любом целом неотрицательном ν.)

Обобщенные функции типа (1.3.40) и (1.3.41) определяются следующим образом. Пусть $f_1(\lambda)$ — обобщенная функция из $\mathscr{S}^*(R_1)$, сосредоточенная на полупрямой $\lambda\geqslant 0$ (т. е. $f(\lambda)=0$ при $\lambda<0$). Тогда $f(p)=\varepsilon(p_0)f_1(p^2)$ является функционалом в пространстве $\mathscr{S}(R_4)$, определяемым формулой

$$(f(p),\ u(p))=(f_1(\lambda),\ a(\lambda)\,u_1(\lambda)), \tag{1.3.42}$$

где

$$u_1(\lambda)=\frac{\lambda}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[u\left(\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\xi,\ e\sqrt{\lambda}\operatorname{sh}\xi\right)-\right.$$
$$\left.-u\left(-\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\xi,\ e\sqrt{\lambda}\operatorname{sh}\xi\right)\right]\operatorname{sh}^2\xi\sin\theta\,d\xi\,d\theta\,d\varphi, \tag{1.3.43}$$
$$e=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta),$$

$a(\lambda)$ — любая бесконечно гладкая функция, причем $a(\lambda)=1$ при $\lambda\geqslant 0$, $a(\lambda)=0$ при $\lambda\leqslant -1$. В качестве $a(\lambda)$ можно выбрать, например,

$$a(\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } \lambda\leqslant -1,\\ \exp\left\{\dfrac{\exp\frac{1}{\lambda}}{-(1+\lambda)}\right\} & \text{при } -1<\lambda<0,\\ 1 & \text{при } \lambda\geqslant 0.\end{cases}$$

Упражнение 1.3.7. Показать, что функция $a(\lambda)u_1(\lambda)\in\mathscr{S}(R_1)$ и что функционал (1.3.42) не зависит от выбора функции $a(\lambda)$. При доказательстве второго утверждения использовать, что $f_1(\lambda)=0$ при $\lambda<0$.

3.5. Лоренц-инвариантные обобщенные функции. Лоренц-инвариантные обобщенные функции играют важную роль в релятивистской квантовой теории. Здесь мы рассмотрим инвариантные функции одного 4-вектора $p=(p^0, p^1, p^2, p^3)$. Общий случай функций от n таких векторов при некоторых дополнительных предположениях (кроме лоренц-инвариантности), отражающих аксиомы квантовой теории поля, будет рассмотрен в гл. 5.

Пусть Λ — произвольное собственное преобразование Лоренца (т. е. $\Lambda \in L_+^\uparrow$). Обобщенную функцию $f(p)$ будем называть лоренц-инвариантной, если

$$f(\Lambda p)=f(p), \tag{1.3.44}$$

где $f(\Lambda p)$ определена формулой (1.2.10), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$(f(\Lambda p),\ u(p))=(f(p),\ u(\Lambda^{-1}p)), \tag{1.3.45}$$

так как определитель матрицы Λ равен 1.

Пусть px — скалярное произведение в 4-мерном пространстве Минковского. Нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 1.3.4. *Обобщенная функция*

$$f(p)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int \tilde{f}(x)\,e^{ipx}d^4x$$

инвариантна относительно собственных преобразований Лоренца в $R_4(p)$ тогда и только тогда, когда ее прообраз Фурье $\tilde{f}(x)$ инвариантен относительно этих же преобразований в $R_4(x)$.

Упражнение 1.3.8. **Доказать лемму 1.3.4.**

С помощью леммы 1.3.4 легко найти общий вид инвариантной обобщенной функции, сосредоточенной в точке $p=0$. Для этого необходимо воспользоваться многомерным обобщением теоремы 1.2.1, согласно которому произвольная обобщенная функция, сосредоточенная в точке $p=0$, может быть записана в виде линейной комбинации δ-функции и ее производных

$$f(p)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant n_f} C_\alpha D^\alpha\delta(p), \tag{1.3.46}$$

где n_f — целое неотрицательное число, зависящее от f.

Упражнение 1.3.9. Показать, что, пользуясь формулой (1.3.46) и леммой 1.3.4, любую лоренц-инвариантную обобщенную функцию, сосредоточенную в точке $p=0$, можно представить в виде

$$P(\Box)\,\delta(p), \tag{1.3.47}$$

где P — произвольный полином, а $\Box$ — оператор, определенный формулой (1.3.27) при $n=3$.

Перейдем теперь к рассмотрению обобщенных функций общего вида, инвариантных относительно преобразований из ортохронной группы Лоренца. Пусть $f(p)$ — инвариантная обобщенная функция и пусть

$$\begin{aligned} f_1(p) &= \frac{1}{2}\left(f(p^0,\ \mathbf{p}) + f(-p^0,\ \mathbf{p})\right), \\ f_2(p) &= \frac{1}{2}\left(f(p^0,\ \mathbf{p}) - f(-p^0,\ \mathbf{p})\right). \end{aligned} \tag{1.3.48}$$

Ясно, что тогда для произвольного преобразования Лоренца Λ будем иметь

$$f_1(\Lambda p) = f_1(p), \qquad f_2(\Lambda p) = \varepsilon(\Lambda) f_2(p), \tag{1.3.49}$$

где $\varepsilon(\Lambda) = +1$, если Λ не обращает направление времени, и $\varepsilon(\Lambda) = -1$, если Λ обращает направление времени (т. е. координаты p^0).

Инвариантные функции, преобразующиеся при обращении времени как f_1, будем называть *четными* функциями. Их совокупность обозначим через $\mathscr{L}^+$. Функции типа f_2 будем называть *нечетными* и обозначать их совокупность через $\mathscr{L}^-$. Таким образом, множество инвариантных функций разбито на два класса $\mathscr{L}^+$ и $\mathscr{L}^-$ такие, что: 1) каждый из них состоит из собственных функций оператора обращения времени; 2) любая лоренц-инвариантная функция может быть разложена (однозначно) на сумму двух функций, принадлежащих этим классам (в нашем случае $f = f_1 + f_2$). Будем рассматривать классы $\mathscr{L}^+$ и $\mathscr{L}^-$ в отдельности.

Интуитивно кажется очевидным, что любая функция из $\mathscr{L}^+$ зависит лишь от скалярного квадрата вектора p

$$f(p) = f_1(p^2). \tag{1.3.50}$$

Однако, как мы видели раньше, в таком виде нельзя представить лоренц-инвариантные обобщенные функции, сосредоточенные в точке $p = 0$.

Заметим, однако, что функционал (δ, u) можно представить в виде предела (в $\mathscr{S}^*$) функционалов типа (1.3.50); действительно,

$$u(0) = (\delta,\ u) = -\lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu^2}{\pi^2} \int_{R_4} \sin \nu p^2 u(p)\, d^4p. \tag{1.3.51}$$

На самом деле любая обобщенная функция из $\mathscr{L}^+$ может, грубо говоря, быть представлена в виде суперпозиции функций вида (1.3.47) и (1.3.50).

Точная формулировка этого утверждения менее элементарна. Трудность связана с поведением функционала $f(p)$ в окрестности светового конуса $p^2=0$. Здесь мы лишь сформулируем соответствующие результаты, отсылая за доказательством к лекциям Гординга и Лиона (1959) *) и к статьям Метье (1954, 1955).

Пусть $\mathscr{H}$ — пространство всех комплексных функций одной вещественной переменной τ вида

$$h(\tau)=h_1(\tau)+h_2(\tau)\ln\frac{1}{|\tau|}, \tag{1.3.52}$$

где $h_1(\tau)\in\mathscr{S}$, $h_2(\tau)\in\mathscr{S}$ и $h_2(0)=0$. Определим операторы L_σ по формуле

$$L_\sigma h=\sum_{\nu=1}^{\sigma}(l_k,h)\frac{\tau^\nu}{\nu!}=\sum_{\nu=1}^{\sigma}h_2^{(\nu)}(0)\frac{\tau^\nu}{\nu!}\qquad(\sigma=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.3.53}$$

Определим, далее, в $\mathscr{H}$ счетную систему норм

$$\|p_\sigma(h)\|=p_\sigma\left(h(\tau)-\varphi_0(\tau)\,L_\sigma h\ln\frac{1}{|\tau|}\right)+\sum_{\nu=0}^{\sigma}\left|h_2^{(\nu)}(0)\right|, \tag{1.3.54}$$

где $p_\sigma(u)$ задано формулой (1.1.14), а $\varphi_0(\tau)$ — фиксированная функция из $\mathscr{D}$, равная единице в некоторой окрестности точки $\tau=0$ и нулю вне отрезка $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$. Таким образом, мы превращаем $\mathscr{H}$ в счетно-нормированное пространство. (Топология, порождаемая в $\mathscr{H}$ системой норм (1.3.54), не зависит от частного вида функции $\varphi_0(\tau)$.)

Любой линейный непрерывный функционал в $\mathscr{H}$ имеет вид

$$(F,\ h)=\left(f,\ h-\varphi_0L_nh\ln\frac{1}{|\tau|}\right)+\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu h_2^{(\nu)}(0), \tag{1.3.55}$$

где f — линейный непрерывный функционал в $\mathscr{S}_n$.

Любой основной функции $u(p)$ из $\mathscr{S}(R_4)$ можно поставить в соответствие некоторую функцию из $\mathscr{H}$ по формуле

$$h(\tau)\equiv(Mu)(\tau)=\int_{R_4}u(p)\,\delta(\tau-p^2)\,d^4p. \tag{1.3.56}$$

Приведем некоторое, не вполне строгое рассуждение, показывающее, что функции (1.3.56) могут быть представлены в виде (1.3.52). Действительно, вводя в интеграле (1.3.56) сферические координаты $p=\rho e$ и проводя интегрирование по p^0 и по углам (т. е. по компонентам единичного вектора e),

---

*) У Гординга и Лиона описан общий вид инвариантных распределений из $\mathscr{D}^*(R_4)$, однако все рассуждения без труда переносятся и на случай обобщенных функций из $\mathscr{S}^*(R_4)$.

получим

$$h(\tau)=(Mu)(\tau)=\iint \frac{u(\sqrt{\tau+\rho^2},\ \rho e)+u(-\sqrt{\tau+\rho^2},\ \rho e)}{2\sqrt{\tau+\rho^2}}\,\rho^2\,d\rho\,d\Omega_e=$$

$$=\int\limits_{\theta(-\tau)\sqrt{-\tau}}^{\infty}\frac{\varphi(\tau+\rho_1^2\rho^2)}{\sqrt{\tau+\rho^2}}\,\rho^2\,d\rho, \qquad (1.3.56а)$$

где θ — ступенчатая функция (1.2.15), а

$$\varphi(\omega^2,\ \rho^2)=\frac{1}{2}\int\left(u(\omega,\ \rho e)+u(-\omega,\ \rho e)\right)d\Omega_e$$

— бесконечно гладкая, быстро убывающая функция своих аргументов. Недифференцируемость по τ в $h(\tau)$ может возникнуть лишь благодаря особенности на нижнем пределе интегрирования по ρ, поскольку при больших ρ функция φ быстро убывает. При помощи замены переменных

$$x=\sqrt{\tau+\rho^2}-\rho \qquad \text{или} \qquad \rho=\frac{\tau-x^2}{2x}$$

можно при $\tau>0$ преобразовать окрестность нижнего предела интеграла (1.3.56а):

$$\int\limits_{A}^{\sqrt{\tau}}\varphi\left(\left(\frac{x^2+\tau}{2x}\right)^2,\ \left(\frac{\tau-x^2}{2x}\right)^2\right)\frac{(\tau-x^2)^2}{4x^3}\,dx, \qquad 0<A<\sqrt{\tau}.$$

При A достаточно близком к $\sqrt{\tau}$ можно заменить функцию φ ее значением на верхнем пределе $\varphi(\tau, 0)$. Мы предоставляем читателю убедиться, что в остающемся после этого элементарном интеграле единственный недифференцируемый по τ член пропорционален $\tau\ln\tau$. Вообще, общий член с особенностью при $\tau=0$ в интеграле от парциальной суммы ряда Тейлора функции φ вокруг точки $x=\sqrt{\tau}$ имеет вид $C\tau^n\ln\tau$, где n — натуральное число ($n\geqslant 1$).

Теперь класс четных обобщенных инвариантных функций $\mathscr{L}^+$ может быть описан следующим образом. Каждой обобщенной функции $f\in\mathscr{L}^+$ можно взаимно-однозначно поставить в соответствие функционал F в $\mathscr{H}$ вида (1.3.55) так, чтобы имела место формула

$$(f(p),\ u(p))=(F,\ Mu), \qquad (1.3.57)$$

где $(Mu)(\tau)$ определено формулой (1.3.56).

Итак, четные инвариантные обобщенные функции имеют вид

$$f(p)=M^*(F(\tau)),$$

где M^* — оператор, сопряженный к M:

$$(F(\tau),\ (Mu)(\tau))=((M^*F)(p),\ u(p)).$$

Упражнение 1.3.10 (см. Горже (1966)). Показать, что

$$M^*l_k=\frac{\pi}{4^{k-1}k!\,(k-1)!}\,\square^{k-1}\delta(x)$$

(здесь l_k — функционал над $\mathscr{H}$, определенный в (1.3.53)), Любая нечетная инвариантная функция из $\mathscr{L}^-$ может быть представлена, грубо говоря, в виде

$$f(p) = \varepsilon(p^0) f_1(p^2), \tag{1.3.58}$$

где $f_1(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, $\varepsilon(p^0)$ — знаковая функция.

Более точная формулировка этого утверждения проводится в терминах, аналогичных использованным выше для класса $\mathscr{L}^+$. Вместо (1.3.56) нужно использовать соотношение

$$M_1 u(\tau) = \int u(p)\, \varepsilon(p^0)\, \delta(\tau - p^2)\, d^4p, \tag{1.3.59}$$

отображающее множество $\mathscr{S}(V)$ на $\mathscr{S}(R^+)$. Здесь V — внутренность светового конуса $p^2 > 0$, R^+ — положительная полуось, $\mathscr{S}(G)$ определено в п. 1.3 (см. Гординг и Лион (1959)).

Результаты упрощаются для неотрицательных инвариантных обобщенных функций, с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем (см., например, гл. 3, п. 4.5, доказательство теоремы Челлена — Лемана).

Будем говорить, что обобщенная функция f неотрицательна, если при любом выборе неотрицательной основной функции

$$(f,\ u) \geqslant 0. \tag{1.3.60}$$

Согласно теореме Рисса (см. п. 1.2, пример 2)) любая неотрицательная обобщенная функция $f \in \mathscr{S}^*$ связана с некоторой неотрицательной мерой $\mu(p)$ полиномиального роста многомерным интегралом Стильтьеса

$$(f,\ u) = \int u(p)\, d\mu(p). \tag{1.3.61}$$

Меры представляют собой весьма частный случай обобщенных функций. Если $d\mu(p) = f(p)\, d^4p$, то $f(p)$ может содержать особенность типа δ-функции, но не может быть производной от δ-функций (и вообще не может содержать особенностей типа $D\delta(p)$, где D — дифференциальный оператор ненулевого порядка с постоянными коэффициентами). Это позволяет получить для инвариантных мер представление, более близкое к интуитивному.

Общий вид четной инвариантной неотрицательной меры из $\mathscr{S}^*$ таков:

$$d\mu(p) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p^2 - \tau)\, d\rho(\tau) + c\delta(p) \right\} d^4p, \tag{1.3.62}$$

где $\rho(\tau)$ — монотонно неубывающая функция полиномиального роста на вещественной оси, а $c \geqslant 0$. Общий вид нечетной инвариантной меры из $\mathscr{S}^*$ есть

$$d\mu(p) = \varepsilon(p^0) \int_0^\infty \delta(p^2 - \tau)\, d\sigma(\tau)\, d^4p, \tag{1.3.63}$$

где $\sigma(\tau)$ — функция с ограниченным изменением на любом конечном интервале $[0, A]$, причем вариация $V_0^A\sigma(\tau)$ полиномиально ограничена по A.

Упражнение 1.3.11. Доказать соотношения (1.3.62) и (1.3.63), пользуясь общим представлением (1.3.56)—(1.3.59).

Ряд примеров инвариантных обобщенных функций, часто встречающихся в физических приложениях, приведен в дополнении к гл. 3.

ДОПОЛНЕНИЯ

А. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

В п. 3.2 мы определили понятия запаздывающей и опережающей обобщенной функции. Здесь мы установим некоторые свойства этих функций и их фурье-образов, которые понадобятся нам в дальнейшем. Для определенности мы будем говорить о запаздывающих функциях. Соответствующие результаты для опережающих функций получаются заменой $x \to -x$.

Если $\tilde{f}(x)$ — запаздывающая обобщенная функция, т. е. если

$$\tilde{f}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \lesssim 0, \tag{1.A 1}$$

то для нее можно определить произведение с функцией e^{-qx} при $q \in V^+$ (т. е. при $q^0 > 0$, $q^2 > 0$), несмотря на то, что экспонента не является мультипликатором в $\mathscr{S}$. Действительно, пусть $\varphi_a(x)$ — бесконечно гладкая функция, равная нулю при $x^0 + a < |\boldsymbol{x}|$, равная единице при $x^0 + \frac{a}{2} > |\boldsymbol{x}|$ $(a > 0)$ и не превосходящая единицу при остальных p (мы предоставляем читателю построить пример функции с такими свойствами). Тогда функция $\varphi_a(x)e^{-qx}$ является мультипликатором, и произведение $e^{-qx}\tilde{f}(x)$ может быть определено формулой

$$(e^{-qx}\tilde{f}(x),\ \tilde{u}(x)) = (\tilde{f},\ e^{-qx}\varphi_a(x)\,\tilde{u}(x))\ ^*). \tag{1.A.2}$$

*) Произведение $e^{-qx}\tilde{f}$ можно определить не только для запаздывающих функций, но вообще для всех обобщенных функций, для которых существует предел от правой части (1.А.2) при $a \to \infty$ и при любом выборе функций $\varphi_a(x)$ с отмеченными выше свойствами. Например, функцию $e^{-x^{0^2}-\boldsymbol{x}^2}$, рассматриваемую как обобщенную функцию, очевидно, тоже можно умножать на e^{-qx}. Множество всех обобщенных функций $\tilde{f}$, для которых $e^{-qx}\tilde{f} \in \mathscr{S}^*$ при $q \in V^+$, будем обозначать через $\mathscr{S}^*_{V^+}$.

Упражнение I.А.1. Показать, пользуясь формулой (1А.1), что это определение не зависит от выбора функции $\varphi_a(x)$.

Следующая теорема характеризует все функции из $\overset{*}{\mathscr{S}}_{V^+}$ и, в частности, дает необходимые условия для того, чтобы обобщенная функция $\tilde{f}(x)$ была запаздывающей.

Теорема I.А.1. *Для того чтобы обобщенная функция $\tilde{f}(x)$ принадлежала классу $\overset{*}{\mathscr{S}}_{V^+}$, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье $\tilde{f}(p, q)$ функции $e^{-qx}\tilde{f}(x)$ обладало следующими свойствами:*

1) $\tilde{f}(p, q)=\tilde{f}(p+iq) \equiv \tilde{f}(k)$ — *аналитическая функция**) *от k в трубчатой области $T^+=R_4+iV^+$ ($k=p+iq \in T^+$ означает, что p — любое, а $q \in V^+$)*;

2) $\tilde{f}(p+iq)$ *как функция p принадлежит множеству мультипликаторов Θ_M, если $q \in V^+$, причем остается ограниченной в этом множестве, когда q пробегает произвольное компактное множество в V^+.*

Доказательство. а) *Условие необходимо*: если $\tilde{f}(x) \in \overset{*}{\mathscr{S}}_{V^+}$, то

$$\tilde{f}(p, q)=F(e^{-qx}\tilde{f}(x)) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{i(p+iq)x}\tilde{f}(x)\,d^4x \qquad (1.\text{А}.3)$$

удовлетворяет перечисленным в теореме свойствам.

Определим систему компактных в V^+ множеств $V^+(\delta, A)$, где $0<\delta<A$, следующим образом:

$$q \in V^+(\delta, A), \quad \text{если} \quad |q|+\delta<q^0<A, \qquad (1.\text{А}.4)$$

где $|q|=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$. Доказательство необходимости условия теоремы основывается на следующих двух леммах.

Лемма I.А.1. *Функция $\tilde{f}(p, q)$* (1А.3) *является обычной, бесконечно дифференцируемой функцией по p и q при $q \in V^+$. При любых δ и A ($0<\delta<A$) $\tilde{f}(p, q)$ ограничена по p вместе со своими производными* (по p) *равномерно относительно q, если $q \in V^+(\delta, A)$.*

Лемма I.А.2. *Функция $\tilde{f}(p, q)$* (I.А.3) *является аналитической функцией от $k=p+iq$ при всех $k \in T^+$.*

Доказательство леммы I.А.1.

1) Всегда можно найти конечное натуральное число n, зависящее от δ, и векторы $q_1, \ldots, q_n$, принадлежащие конусу V^+ (но, вообще говоря, не принадлежащие его подмножеству $V^+(\delta, A)$), таким образом, что любое $q \in V^+(\delta, A)$ может быть представлено в виде

$$q=\alpha_1 q_1+\ldots+\alpha_n q_n, \quad \alpha_\nu>0, \quad \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu=1. \qquad (1.\text{А}.5)$$

*) Аналитическая функция $\tilde{f}(k)$ называется *преобразованием Лапласа обобщенной функции $\tilde{f}(x)$.*

Действительно, так как $\delta>0$, то вокруг двумерной сферы $q^0=A+\delta$, $|\mathbf{q}|=A-\delta$ можно описать многогранник, лежащий в той же гиперплоскости $q^0=A+\delta$ и не выходящий за пределы сферы $|\mathbf{q}|=A$. Радиусы-векторы вершин этого многогранника вместе с вектором $(\delta, 0, 0, 0)$ образуют искомый базис $q_1, \ldots, q_n$.

2) Пусть векторы $q_1, q_2, \ldots, q_n$ выбраны согласно условию 1). Тогда при $q\in V^+(\delta, A)$ функция

$$\varphi_0(x)=\frac{e^{-qx}}{e^{-q_1x}+\ldots+e^{-q_nx}} \tag{1.A.6}$$

принадлежит пространству основных функций $\mathscr{S}$.

Действительно, функция $\varphi_0(x)$ бесконечно гладка. Покажем, что она экспоненциально убывает при $\|x\|\to\infty$, где

$$\|x\|=\sqrt{x^{0^2}+\mathbf{x}^2}. \tag{1.A.7}$$

Пусть x произвольно и натуральный индекс m выбран таким образом ($m=m(x)$), чтобы

$$q_mx=\min_{\nu=1,\ldots,n}(q_\nu x). \tag{1.A.8}$$

Тогда в силу (1.A.5)

$$0<\varphi_0(x)<e^{-qx+q_mx}=\prod_{\nu=1}^{n}e^{\alpha_\nu(q_m-q_n)x}.$$

С другой стороны, согласно (1.A.8) и в силу положительности α_ν

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(q_\nu-q_m)x\geqslant\eta\|x\|, \tag{1.A.9}$$

где $\eta>0$ и не зависит от x (или m). (Допуская противное, мы пришли бы к заключению, что существует ненулевой вектор x, ортогональный ко всем векторам $q_\nu-q_m$, что невозможно, так как любой вектор четырехмерного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $q_\nu-q_m$.) Следовательно,

$$0<\varphi_0(x)<e^{-\eta\|x\|}. \tag{1.A.10}$$

Аналогичные оценки справедливы и для производных от функции $\varphi_0(x)$. Итак, доказано, что $\varphi_0(x)\in\mathscr{S}$.

3) Так как $\tilde{f}(x)$ — запаздывающая функция и $q_\nu\in V^+$, то согласно (1.A.2) определены произведения $e^{-q_\nu x}\tilde{f}$ $(\in\mathscr{S}^*)$. С другой стороны,

$$e^{-qx}\tilde{f}(x)=\varphi_0(x)\sum_{\nu=1}^{n}e^{-q_\nu x}\tilde{f}(x),$$

и фурье-образ этой функции равен свертке фурье-образов двух сомножителей:

$$f(p,q)=f(k)\equiv F\left(e^{-qx}\tilde{f}(x)\right)=F\left(\sum_{\nu=1}^{n}e^{-q_\nu x}\tilde{f}(x)\right)*\psi_0(p), \tag{1.A.11}$$

причем

$$F\left(\sum_{\nu=1}^{n}e^{-q_\nu x}\tilde{f}(x)\right)\in\mathscr{S}^*,\quad\text{а}\quad\psi_0(p)\equiv F(\varphi_0(x))\in\mathscr{S}.$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{f}(p, q)$ бесконечно дифференцируема по p при любом фиксированном q из V^+ и ограничена вместе со всеми своими производными. Так как функции $\varphi_0(x, q)$ пробегают ограниченное множество в $\mathscr{S}$, когда $q \in V^+(\delta, A)$, то функция $\tilde{f}(p, q)$ и ее производные по p равномерно ограничены на каждом компакте. Лемма (I.A.1) доказана.

Доказательство леммы I.A.2 мы предоставляем читателю. (Указание: показать, что функция $\tilde{f}(p, q)$ дифференцируема не только по p, но и по q, и проверить, что ее производные удовлетворяют уравнениям Коши — Римана.) Этим заканчивается доказательство необходимости условия теоремы I.A.1.

б) *Условие достаточно*: если функция $\tilde{f}(k) = \tilde{f}(p+iq)$ аналитична и равномерно ограничена относительно p вместе со своими производными (когда q пробегает произвольное компактное множество в V^+), то $f(x) \in \overset{*}{\mathscr{S}}_{V^+}$.

Действительно, пусть

$$f_{(q)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ipx} \tilde{f}(p+iq)\, d^4p \qquad \text{(I.A.12)}$$

и пусть $g_{(q)}(x) = e^{qx} f_{(q)}(x)$. Легко проверить, что $g_{(q)}(x)$ не зависит от q $\left(\text{т. е. } \frac{\partial g_{(q)}(x)}{\partial q_a} = 0\right)$ и, значит, $g_{(q)}(x) = f(x)$. Следовательно,

$$f_{(q)}(x) = e^{-qx} f(x).$$

Теорема I.A.1 доказана.

Упражнение I.A.2. Показать, что свертка $f(x) * g(x)$ принадлежит пространству $\overset{*}{\mathscr{S}}_{V^+}$, если оба сомножителя f и g принадлежат этому пространству, причем имеет место равенство

$$F\left\{e^{-qx} \cdot (f * g)\right\} = F\left(e^{-qx} f(x)\right) F\left(e^{-qx} g(x)\right). \qquad \text{(I.A.13)}$$

Указание: воспользоваться легко проверяемым равенством

$$e^{-qx} f(x) * e^{-qx} g(x) = e^{-qx} \left(f(x) * g(x)\right)\ ^{*}). \qquad \text{(I.A.14)}$$

Для дальнейшего нам необходимо найти признак, по которому можно выделять запаздывающие обобщенные функции среди всех функций пространства $\overset{*}{\mathscr{S}}_{V^+}$. Такой критерий дает следующая теорема.

Теорема I.A.2 *Пусть* $f(x) \in \overset{*}{\mathscr{S}}_{V^+}$ *и* $\tilde{f}(k)$ — *ее преобразование Лапласа. Для того чтобы* $\operatorname{supp} f(x) \subset \bar{V}^+$, *необходимо и доста-*

---

*) Утверждение, содержащееся в упражнении I.A.2, может быть сформулировано еще следующим образом. Пространство $\overset{*}{\mathscr{S}}_{V^+}$ является *алгеброй* относительно свертки. (Алгеброй называется линейное пространство, в котором определено еще одно действие — «произведение» или «свертка».)

точно существование постоянных A, n, r *таких, что*

$$|\tilde{f}(p+iq)| \leqslant A\frac{(1+\|p+iq\|)^n}{(q^2)^r}, \quad p+iq \in R_4+iV^+. \quad (1.A.15)$$

Доказательство. *а) Необходимость.* Пусть $\operatorname{supp} f \subset \overline{V}^+$. Тогда функции $f(x)$ и $h_N(x) = \theta(x^0)\theta(x^2)(x^2)^{N-2}$ $(N=3, 4, \ldots)$ принадлежат сверточной алгебре запаздывающих функций (см. п. 3.2), и, следовательно, существует $f_N(x) = f(x) * h_N(x)$ с носителем в $\overline{V}^+$.

Покажем, что при достаточно большом N $f_N(x)$ — непрерывная, полиномнально ограниченная функция. Действительно, из результатов п. 1.3 следует, что $f(x)$ представима в виде $f(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} D^\alpha\mu_\alpha$, где μ_α — меры степенного роста. Возьмем бесконечно дифференцируемую функцию на прямой $\lambda(t)$ такую, что $\lambda(t)=0$ при $t<-1$ и $\lambda(t)=1$ при $t>-1/2$. Тогда $\lambda(x^0)\lambda(x^2)$ — мультипликатор в $\mathscr{S}^*$, равный единице в окрестности $\overline{V}^+$, поэтому $f(x) = \lambda(x^0)\lambda(x^2)\sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} D^\alpha\mu_\alpha$. Последнее равенство позволяет так переопределить меры степенного роста μ_α, что их носители будут принадлежать*) $\overline{V}^+_{(3)} = \{x\colon |\boldsymbol{x}| \leqslant x^0+3\}$:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} D^\alpha\mu'_\alpha, \qquad \operatorname{supp}\mu'_\alpha \subset \overline{V}^+_{(3)}.$$

Свойства носителей h_N и μ'_α обеспечивают существование свертки $h_N * \mu'_\alpha$; поскольку $h_N(x)$ $N-3$ раза непрерывно дифференцируема и μ'_α — мера, свертка записывается в виде интеграла

$$(h_N * \mu'_\alpha)(x) = \int h_N(x-y)\,d\mu'_\alpha(y),$$

причем интегрирование производится по ограниченному множеству, когда x пробегает компакт. Отсюда следует, что $h_N * \mu'_\alpha$ $N-3$ раза непрерывно дифференцируема и ее производные полиномиально ограничены. В таком случае при $N \geqslant \sigma+3$

$$f_N = f * h_N = h_N * \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} D^\alpha\mu'_\alpha = \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} D^\alpha(h_N * \mu'_\alpha)$$

непрерывна.

Итак, $f_N(x)$ — непрерывная, полиномиально ограниченная функция с носителем в $\overline{V}^+$. В таком случае для преобразования

---

*) Как показал В. С. Владимиров, можно усилить этот результат и выбрать меры μ_α с носителем в $\overline{V}^+$ (см. [24], стр. 35).

Лапласа $f_N(p+iq)$ функции $\tilde{f}_N(x)$ имеем оценку:

$$|f_N(p+iq)| = \frac{1}{(2\pi)^2}\left|\int \tilde{f}_N(x)\, e^{ipx-qx} d^4x\right| \leqslant$$
$$\leqslant A_1 \int\limits_{V^+} (1+x^0)^m e^{-qx} d^4x = A_1\left(1-\frac{\partial}{\partial q^0}\right)^m \int\limits_{V^+} e^{-qx}\, d^4x =$$
$$= A_1\left(1-\frac{\partial}{\partial q^0}\right)^m \frac{1}{(q^2)^2} \leqslant A_2 \frac{(1+\|q\|)^{2m}}{(q^2)^{m+2}}. \quad (1.A.16)$$

Обратимся теперь к преобразованию Лапласа для $\tilde{f}(x)$. Поскольку $(\square)^N \tilde{h}_N(x) = \frac{1}{\alpha_N}\delta(x)$ (α_N — некоторая постоянная), то

$$\tilde{f} = \tilde{f} * \delta = \alpha_N \tilde{f} * (\square)^N \tilde{h}_N = \alpha_N (\square)^N (\tilde{f} * \tilde{h}_N) = \alpha_N (\square)^N \tilde{f}_N$$

и, значит,

$$f(k) = \alpha_N(-k^2)^N f_N(k).$$

Из (1.A.16) следует теперь оценка (1.A.15).

б) *Достаточность*. Пусть выполнено неравенство (1.A.15). Возьмем натуральное $N \geqslant \frac{n+5}{2}$; определим функцию $f_N(k) = \frac{1}{\alpha_N(-k^2)^N} f(k)$, голоморфную в T^+. Поскольку $f(k)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.A.1, $f_N(k)$ также удовлетворяет им; следовательно, существует $\tilde{f}_N(x) \in \mathcal{S}^*_{V^+}$, для которой $f_N(k)$ есть преобразование Лапласа:

$$\tilde{f}_N(x) = e^{qx}\tilde{F} f(p+iq).$$

Заметим, что если a — фиксированный вектор в V^+ и $q \in Q_a = \{ta,\ t \geqslant 1\}$, то

$$|k^2|^2 = (p^2-q^2)^2 + 4(pq)^2 \geqslant C_1(a)\cdot(1+\|p+iq\|)^4;$$

в таком случае

$$|f_N(p+ita)| \leqslant C_2(a)\frac{(1+\|p+ita\|)^n}{(1+\|p+ita\|)^{2N}\cdot t^{2r}} \leqslant \frac{C_3(a)}{(1+\|p\|)^5}.$$

Следовательно, когда q пробегает луч Q_a, $f_N(p+iq)$ как функция p пробегает ограниченное множество в пространстве суммируемых функций. В таком случае ее преобразование Фурье — непрерывная функция, ограниченная равномерно по t:

$$|\tilde{F} f(p+iq)| \leqslant C(a);$$

следовательно,

$$|\tilde{f}_N(x)| \leqslant e^{tax} C(a).$$

Из последнего неравенства видно, что $\operatorname{supp} \tilde{f}_N \subset \bar{V}^+$. Действительно, если $x \notin \bar{V}^+$, то существует $a \in V^+$ такое, что $xa<0$; поскольку $t \geqslant 1$ произвольно, то $f_N(x)=0$.

Рассмотрим теперь обобщенную функцию $\tilde{g} = \alpha_N(\Box)^N \tilde{f}_N$. Очевидно, ее носитель также принадлежит $\bar{V}^+$. Преобразование Лапласа для $\tilde{g}$ равно $g(k) = \alpha_N(-k^2)^N f_N(k) = f(k)$. Следовательно, $\tilde{g} = \tilde{f}$. Теорема доказана.

Б. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ С СОВПАДАЮЩИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Как отмечалось (п. 2.4), в пространстве обобщенных функций нельзя определить однозначно билинейное ассоциативное произведение. Трудность возникает, когда оба сомножителя имеют сингулярность в одной и той же точке. Здесь мы рассмотрим некоторые классы обобщенных функций, внутри каждого из которых произведение может быть определено однозначно даже тогда, когда их особенности совпадают. Далее, мы рассмотрим пример умножения обобщенных функций, результат которого не определен однозначно на всем пространстве основных функций $\mathscr{S}$, а лишь на некотором подпространстве $\mathscr{S}_{(0)}$. Оба случая иллюстрируются на примерах квантовой теории поля.

Из сформулированной в п. 3.2 теоремы 1.3.3 вытекает, что в подпространстве $F\mathscr{S}^*_{ret}$ фурье-образов запаздывающих обобщенных функций можно определить произведение любых двух элементов, принадлежащее тому же подпространству. Иначе говоря, $F\mathscr{S}^*_{ret}$ является топологической алгеброй.

В качестве примера рассмотрим произведение двух отрицательно-частотных функций Паули — Иордана $D^{(-)}(x)$ (сводку сингулярных функций в квантовой теории поля см. в дополнении к гл. 3). Согласно (3.А.4) обе эти функции обладают особенностями на световом конусе $x^2=0$. Из их выражений в x-пространстве совершенно не очевидно, что их можно перемножить. Тем не менее произведение их может быть определено как преобразование Фурье от свертки

$$
\begin{aligned}
(\tilde{D}_M^{(-)} * \tilde{D}_m^{(-)})(p) &= \int \tilde{D}_M^{(-)}(q)\, \tilde{D}_m^{(-)}(p-q)\, d^4q = \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \theta(-q^0)\, \theta(q^0-p^0)\, \delta(q^2-M^2)\, \delta((p-q)^2-m^2)\, d^4q = \\
&= -\frac{\theta(-p^0)\, \theta(p^2-(M+m)^2)}{8\pi p^2} \{[p^2-(M+m)^2]\,[p^2-(M-m)^2]\}^{1/2} \quad (1.Б.1)
\end{aligned}
$$

(интегрирование, приводящее к последней формуле, проведено детально в гл. 4, формула (4.4.20)). Заметим, что функция (1.Б.1) является обычной непрерывной и ограниченной на бесконечности функцией. В этом примере ясно выступает причина существования свертки: интеграл (1.Б.1) на самом деле выражает объем некоторой конечной части гиперболоида $q^0 = \sqrt{M^2 + q^2}$ («фазовый объем»), так как ступенчатые θ-функции в этом интеграле ограничивают область интегрирования по q^0 с двух сторон.

Примером второго рода, когда произведение обобщенных функций не определено однозначно, может служить умножение причинных функций (см. дополнение к гл. 3) при совпадающих аргументах. Чтобы проиллюстрировать яснее подход к этому случаю, рассмотрим сначала простой одномерный пример произведения разрывной функции $\theta(t)$ на функцию Дирака $\delta(t)$. Очевидно, это произведение хорошо определено на подпространстве $\mathscr{S}_{(0)}$ пространства основных функций $\mathscr{S}$, состоящем из всех основных функций $v(t)$, обращающихся в нуль в начале координат. Для всех таких функций

$$(\theta(t)\delta(t),\ v(t)) = 0 \qquad (v(0) = 0). \tag{1.Б.2}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно аппроксимировать $\delta(t)$ последовательностью непрерывных функций $\delta_n(t)$. Тогда $\lim \int \theta(t)\delta_n(t)\,v(t)\,dt = 0$ при $v(0) = 0$ независимо от частного вида последовательности $\{\delta_n\}$. Мы определим, далее, $\theta(t)\delta(t)$ как произвольное продолжение функционала (1.Б.2) на все пространство $\mathscr{S}$. Рассуждения, проведенные в п. 2.4 при анализе проблемы деления, показывают, что общий вид этого продолженного функционала есть

$$\theta(t)\delta(t) = C\delta(t), \tag{1.Б.3}$$

где C — произвольная постоянная. Итак, произведение определено с точностью до одной произвольной константы. Отметим, что свертка преобразований Фурье функций θ и δ согласно (1.3.8) и (1.3.9) расходится

$$(\tilde\theta * \tilde\delta)(\omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' + i0} = \infty. \tag{1.Б.4}$$

Тем не менее к результату (1.Б.3) можно прийти, изучая свертку $\tilde\theta * \tilde\delta$. Для этого заметим, что функции $v(t)$ из подпространства $\mathscr{S}_{(0)}$, для которых справедливо равенство (1.Б.2), могут быть записаны в виде

$$v(t) = tu(t),$$

где $u(t)$ — произвольная функция из $\mathcal{S}$. Фурье-образ функции v равен

$$\tilde{v}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\tilde{u}(\omega), \qquad \tilde{u} \in \mathcal{S}. \tag{1.Б.5}$$

Свертка $(\tilde{\theta} * \tilde{\delta})(\omega)$, таким образом, определена как функционал над пространством $\tilde{\mathcal{S}}_{(0)}$ функций $\tilde{v}(\omega)$ вида (1.Б.5) и равна нулю на этом пространстве. Из определения производной обобщенной функции следует

$$\frac{d}{d\omega}(\tilde{\theta} * \tilde{\delta})(\omega) = 0,$$

так что

$$\tilde{\theta} * \tilde{\delta} = C.$$

Мы пришли к результату, эквивалентному (1.Б.3). Чтобы сделать это более аккуратно, оставаясь все время в ω-представлении, необходимо сначала «регуляризовать» функцию $\delta(t)$ (т. е. заменить ее δ-последовательностью непрерывных функций), чтобы не иметь дела с бессмысленными выражениями типа (1.Б.4), а затем показать, что производные от полученной последовательности сверток стремятся к нулю.

Этот пример подсказывает общий рецепт построения произведения двух обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$. Обе функции аппроксимируются (в смысле сходимости в $\mathcal{S}^*$) последовательностями непрерывных функций $f_n(x)$ и $g_n(x)$. Далее, рассматривается подпространство $\mathcal{S}_{(0)} \subset \mathcal{S}$ тех основных функций $v(x)$, для которых предел

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, g_n(x)\, v(x)\, dx \tag{1.Б.6}$$

существует и не зависит от специального выбора последовательностей $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$. На этом подпространстве произведение $f(x)g(x)$ равно, по определению, пределу (1.Б.6). Полученный линейный функционал продолжается произвольным образом до линейного непрерывного функционала на всем пространстве $\mathcal{S}$. Семейство полученных таким образом функционалов определяет произведение обобщенных функций fg.

Итак, произведение двух обобщенных функций не всегда является обобщенной функцией, а есть (вообще говоря, бесконечное) семейство обобщенных функций. Это определение становится обозримым и содержательным для таких пар обобщенных функций f и g, для которых семейство fg описывается при помощи небольшого конечного числа числовых параметров (как в рассмотренном выше примере произведения (1.Б.3)). Именно так обстоит дело с перемножением причинных функций *). Не останавливаясь здесь на общей теории таких произведений (см. по этому поводу Боголюбов и Парасюк (1957)), мы рассмотрим частный случай произведения

$$F(x)=D_m^c(x)\,S_M^c(x), \tag{1.Б.7}$$

соответствующего диаграмме собственной энергии спинорной частицы (нуклона) массы M, взаимодействующей с псевдоскалярным (или скалярным) мезоном массы m (см. [4], § 33 или [6], гл. 15, § 8). Здесь $D_m^c(x)$ дается формулами (3.А.9), а четырехрядная матрица S_M^c связана с D_M^c формулой (3.А.6).

Так как оба сомножителя в искомом произведении (1.Б.7) являются лоренц-инвариантными обобщенными функциями, мы постулируем, что семейство, определяющее произведение, тоже состоит из лоренц-инвариантных функций. Это требование несколько сужаёт произвол, имеющийся при определении произведения.

Так же как и в рассмотренном выше одномерном примере (1.Б.3), свертка фурье-образов функций D^c и S^c расходится при больших импульсах q. Мы покажем, что и в этом случае ее можно определить на некотором подпространстве пространства $\mathscr{S}(R_4)$. Согласно общему рецепту сначала регуляризуем функции D^c и S^c. В теории возмущений принято пользоваться регуляризацией Паули — Вилларса, которая сохраняет лоренц-инвариантность:

$$\begin{gathered}\operatorname{Reg}\left[D_m^c(x)\right]=f_n(x,\,m)=\\=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\left\{\frac{1}{m^2-p^2-i0}-\frac{1}{M_n^2-p^2-i0}\right\}e^{ipx}d^4p=D_m^c(x)-D_{M_n}^c(x),\end{gathered} \tag{1.Б.8}$$

$$\operatorname{Reg}\left[S_M^c(x)\right]=g_n(x,\,M)=\left(i\gamma^\mu\partial_\mu+M\right)f_n(x,\,M),$$

где $M_n\to\infty$ при $n\to\infty$, так что $f_n(x,\,m)\xrightarrow[n\to\infty]{}D_m^c(x)$ относительно топологии в $\mathscr{S}^*$ (γ^μ в последней формуле — матрицы Дирака).

Упражнение 1.Б.1. Показать, что последовательность сверток

$$(\tilde f_n * \tilde g_n)(p)$$

сходится на подпространстве $\mathscr{S}_{(c)}$ пространства $\mathscr{S}(R_4)$ функций

$$v(p)=\frac{\partial^2 u}{\partial p^\mu\,\partial p^\nu},\qquad u(p)\in\mathscr{S}(R_4).$$

*) Читателю, незнакомому с элементами квантовой теории поля, следует вернуться к приведенному ниже примеру после изучения гл. 2 и 3.

Результат этого упражнения позволяет определить всевозможные вторые частные производные $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial p^\mu \partial p^\nu}$ искомой свертки

$$\tilde{F}(p) = (\tilde{D}^c_m * \tilde{S}^c_M)(p) \tag{1.Б.9}$$

как пределы последовательностей производных $\frac{\partial^2}{\partial p^\mu \partial p^\nu}(\tilde{f}_n * \tilde{g}_n)$ относительно сходимости в $\mathcal{S}^*$.

Ясно, что сама инвариантная тензорная функция $F(p)$ определяется по своим вторым частным производным с точностью до аддитивного слагаемого

$$C_1 1 + C_2 \gamma^\mu p_\mu, \tag{1.Б.10}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. При вычислении двухточечной функции Грина по теории возмущений эти постоянные определяются из условий

$$\tilde{F}(p)\Big|_{p^2=M^2} = \frac{\partial \tilde{F}(p)}{\partial p^\mu}\Big|_{p^2=M^2} = 0 \tag{1.Б.11}$$

(ср. гл. 4, п. 4.2).

Описанная процедура определения свертки (1.Б.9) (и тем самым произведения (1.Б.7)) может быть заменена следующим более компактным рецептом, не требующим использования регуляризованных выражений (1.Б.8). Пишем формальное (расходящееся) выражение

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(M - \gamma^\mu q_\mu)\, d^4 q}{[m^2 - (p-q)^2 - i0]\,(M^2 - q^2 - i0)} \tag{1.Б.12}$$

и дифференцируем дважды (по p^μ и p^ν) под знаком интеграла. Полученный таким образом интеграл сходится и равен, по определению, $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial p^\mu \partial p^\nu}$. Отсюда, пользуясь условием инвариантности, получаем двухпараметрическое семейство сверток $\tilde{F}$, содержащих неопределенное аддитивное слагаемое (1.Б.10).

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. Для более полного ознакомления с линейными нормированными пространствами и пространствами, сопряженными к ним, мы рекомендуем читателю монографию [10]. Теория счетно-нормированных пространств изложена, например, в [12], [13]. Относительно классической теории операторов в гильбертовом пространстве см. [15] и [20]; наиболее полно эти вопросы изложены в энциклопедической монографии [11].

Теорема о ядре для пространств $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ доказана Шварцем (1952). Шварц (1953/54) ввел также понятие ядерного отображения. Общее определение ядерных пространств дано Гротендиком (1955) (см. также монографию

Пича [14]). Доступное изложение этих вопросов имеется в книге [13]. Понятие оснащенного гильбертова пространства, по существу, введено Гельфандом и Костюченко (1955) (см. также [13]). Теорема о существовании полной системы обобщенных собственных векторов естественно формулируется в терминах пары гильбертовых пространств вместо оснащенного гильбертова пространства (см. Кац (1960) и монографию Березанского [21]).

§ 2. Обобщенные функции как линейные функционалы над гладкими (финитными) функциями впервые ввел Соболев (1936). Шварц (1945) (см. также [17]), развивая идеи Соболева и привлекая общую теорию линейных топологических пространств, создал современную теорию распределений и обобщенных функций как функционалов над пространствами $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$. Эквивалентное определение обобщенных функций из $\mathcal{S}^*$ как функционалов над некоторым классом $\mathcal{C}(p, q; m)$ использовано Боголюбовым (см., например, [1], дополнение А). Различные определения обобщенных функций как классов фундаментальных последовательностей давались Микусинским [22] и Тагамлицким (1954—1956). Баргман (1967) находит интересный изоморфизм между пространством обобщенных функций $\mathcal{S}^*$ и некоторым пространством целых аналитических функций. Замечание о невозможности определить произведение двух произвольных обобщенных функций принадлежит Шварцу (1954). Относительно умножения причинных функций в квантовой теории поля см. Боголюбов и Парасюк (1957). Проблема деления в случае функций одной переменной решена Шварцем [17], а для функций нескольких переменных — Мальгранжем (1953), Эренпрейсом (1954) и Хермандером (1958). Систематическое современное изложение теории обобщенных функций и ее приложений находится в многотомной монография Гельфанда и др. [18, 12, 13, 23].

§ 3. Теория преобразования Фурье для основных и обобщенных функций (из $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$) и его приложений развита во втором томе монографии Шварца [17]. Общий вид лоренц-инвариантных обобщенных функций найден в работах Метье (1954) и (1955) (см. также Метье (1957), Гординг и Лион (1959); у Горже (1966) приведены таблицы инвариантных обобщенных функций и их преобразований Фурье).

Дополнение А. Теорема I.А.1 принадлежит Шварцу (1952) и Лиону (1952—1953) (см. также монографию [24]), доказательство теоремы I.А.2 основано на идеях Броса и др. (1967).

Дополнение Б. Теория многократных произведений причинных функций в квантовой теории поля разработана Боголюбовым и Парасюком (1957) (см. также Хепп (1966)).

ГЛАВА 2

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Различные формулировки основных постулатов квантовой теории поля содержат некоторую общую часть, по существу, одинаковую во всех подходах. Речь идет о свойствах амплитуд состояний, которые могут быть сформулированы до введения понятия поля и S-матрицы.

Пространство векторов состояний определяется (§ 1) *как оснащенное гильбертово пространство с положительно определенной метрикой. Таким образом, теории с индефинитной метрикой* (*в том числе и квантовая электродинамика*) *с самого начала не рассматриваются. В оснащенном гильбертовом пространстве* $\Omega \subset \mathscr{H} \subset \Omega^*$ *наряду с обычными нормируемыми состояниями из* $\mathscr{H}$ *входят обобщенные* (*ненормируемые*) *состояния из* Ω^*. *Для таких состояний можно определить лишь отношения средних значений физических величин* (п. 1.1). *Гильбертово пространство векторов состояний может быть оснащено различными способами, в зависимости от того, какую совокупность операторов мы собираемся рассматривать в нем. Рассмотрены конкретные примеры реализации оснащенного гильбертова пространства в квантовой механике с конечным числом степеней свободы* (п. 1.2) *и в релятивистской квантовой теории* (п. 3.2 и § 5).

Требование релятивистской инвариантности означает, что в пространстве $\mathscr{H}$ *реализуется «представление с точностью до фазового множителя» группы Пуанкаре, которое сохраняет модули скалярных произведений. Анализ Вигнера и Баргмана, схематично изложенный в* § 3, *показывает, что в* $\mathscr{H}$ *реализуется однозначное представление универсальной накрывающей* $\tilde{\mathfrak{P}}$ *группы Пуанкаре. Операторы представления антиунитарны, если преобразование Пуанкаре содержит отражение времени* (п. 3.3), *и унитарны в противном случае. Универсальная накрывающая* $\tilde{\mathfrak{P}}_0$ *собственной группы Пуанка-*

ре совпадает с множеством пар двухрядных матриц $(\underset{\sim}{a}, A)$, *где* $\underset{\sim}{a}$ — *эрмитова матрица* 2×2, *а* A — *комплексная унимодулярная матрица* (т. е. $\det A = 1$; *множество таких матриц обозначается через* $SL(2)$). *Закон композиции в* $\mathfrak{P}_0$ *определяется равенством* (2.2.19):

$$(\underset{\sim}{a}_1, A_1)(\underset{\sim}{a}_2, A_2) = (\underset{\sim}{a}_1 + A_1\underset{\sim}{a}_2 A_1^*, A_1A_2).$$

Связь группы $\mathfrak{P}_0$ *с группой Пуанкаре обнаруживается следующим образом. Каждому 4-вектору* $x = (x^0, \boldsymbol{x})$ *поставим в соответствие эрмитову двухрядную матрицу* $\underset{\sim}{x}$

$$\underset{\sim}{x} = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

Тогда преобразование матриц

$$\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}A^* + \underset{\sim}{a}$$

индуцирует собственное преобразование Пуанкаре вектора x (*явная связь между преобразованием Лоренца* Λ *и матрицы* A *дана формулой* (2.2.15); *см. также упражнение* 2.2.1).

Группа Пуанкаре десятипараметрична. Ее эрмитовы инфинитезимальные операторы («*генераторы*») *отождествляются с 4-импульсом системы* P^μ *и с тензором момента количества движения* $M^{\mu\nu}$. *С помощью псевдовектора Паули — Любанского — Баргмана*

$$w_\rho = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}P^\lambda M^{\mu\nu}$$

дается ковариантное определение спина (2.3.18). *Алгебра Ли группы Пуанкаре имеет два полиномиальных инварианта* (*оператора Казимира*):

$$P^2 = P^{0^2} - \boldsymbol{P}^2 \quad \text{и} \quad W = -w^2.$$

В зависимости от значений первого инварианта, который задает квадрат массы, существуют четыре типа унитарных (*бесконечномерных*) *представлений группы* $\mathfrak{P}_0$. *Вакуум преобразуется по единичному* (*тривиальному*) *представлению группы Пуанкаре. Постулат спектральности* (п. 3.2) *утверждает, что все остальные физические представления группы* $\mathfrak{P}_0$, *которые реализуются в* $\mathscr{H}$, *относятся к классу* $P^2>0$, $P^0>0$.

Детально рассмотрены спинорные представления групп $SL(2)$ *и* $\tilde{\mathfrak{P}}$ (§ 4). *Попутно излагаются необходимые сведения об алгебре* γ-*матриц и уравнении Дирака.*

§ 1. Пространство состояний

1.1. Оснащенное гильбертово пространство и обобщенные состояния. Как в нерелятивистской квантовой механике, так и в релятивистской квантовой теории состояние физической системы описывается единичным вектором Ψ в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве *) $\mathscr{H}$. Векторы, отличающиеся на постоянный («фазовый») множитель, описывают одно и то же состояние. Совокупность всех единичных векторов в $\mathscr{H}$, коллинеарных с заданным вектором Ψ, будем называть *единичным* (или *нормированным*) *лучом* в $\mathscr{H}$ и будем обозначать $\mathbf{\Psi}$.

Отметим, что состояния, которые математически отождествляются с единичными лучами, нельзя складывать: так называемый «принцип суперпозиции» имеет место лишь для векторов в $\mathscr{H}$.

Каждой измеряемой физической величине (наблюдаемой) a ставится в соответствие самосопряженный оператор A, причем, если наблюдаемой a соответствует оператор A, то наблюдаемой $f(a)$ соответствует оператор $f(A)$.

Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$, соответствующий физической величине a, и пусть единичный вектор Ψ входит в область определения D_A оператора A (так что $A\Psi \in \mathscr{H}$). Один из основных принципов квантовой теории гласит, что среднее значение $\bar{a}$ наблюдаемой a для физической системы, находящейся в состоянии $\mathbf{\Psi}$, дается формулой

$$\bar{a} = \bar{A} = (\Psi, A\Psi), \tag{2.1.1}$$

где $\Psi \in \mathbf{\Psi}$ (очевидно, величина $\bar{a}$ не зависит от выбора представителя Ψ единичного луча $\mathbf{\Psi}$).

Условие, заключающееся в том, что среднее значение (2.1.1) определено лишь для таких операторов A, для которых $\Psi \in D_A$, необходимо, так как в квантовой механике мы имеем дело, вообще говоря, с неограниченными операторами. Возможен другой подход (см., например, Яух и Пирон (1963)) — работать лишь с самосопряженными проекционными операторами Π, т. е. с ограниченными самосопряженными операторами в $\mathscr{H}$, удовлетворяющими тождеству $\Pi^2 = \Pi$ и, следовательно, имеющими только два собственных значения 0 и 1 (такие операторы

---

*) Отметим, что поскольку метрика в гильбертовом пространстве предполагается положительно определенной, то этим принципом уже отвергаются как обычная формулировка квантовой электродинамики, так и нелинейная теория Гайзенберга (см. например, сборник статей НКТП). В этой книге мы не будем рассматривать более общие схемы пространств с индефинитной метрикой (см. по этому поводу Уайтман и Гординг (1964)).

соответствуют физическим задачам, ответ на которые может быть только «да» или «нет»). В этом случае формула (2.1.1) имеет смысл для всех Ψ из $\mathscr{H}$ и ее можно истолковать также как вероятность утвердительного ответа на вопрос, соответствующий оператору ортогонального*) проектирования Π.

Если оператор A имеет дискретный спектр собственных значений $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, то вероятность того, что при измерении величины a в физической системе в состоянии Ψ получится значение a_n, равна

$$W_\Psi(a_n) = \| \Pi_n \Psi \|^2 = (\Pi_n \Psi, \Pi_n \Psi), \tag{2.1.2}$$

где Π_n — оператор ортогонального проектирования **) на подпространство $\mathscr{H}_n$, в котором оператор A имеет собственное значение a_n:

$$A = \sum_k a_k \Pi_k.$$

Упражнение 2.1.1. Показать, что для операторов с дискретным спектром собственных значений условия (2.1.1) и (2.1.2) эквивалентны (напомним, что $\bar{a} = \sum\limits_k a_k W_\Psi(a_k)$).

Условия (2.1.1) и (2.1.2) являются частным случаем следующего общего требования, справедливого для любого самосопряженного оператора A со спектральной функцией $E_A(x)$ (см. 1.1.47)). Вероятность нахождения физической величины a в интервале $\Delta = [\alpha_1, \alpha_2]$ для системы в состоянии Ψ равна

$$W_\Psi(a \in \Delta) = (\Psi, E_A(\Delta)\Psi). \tag{2.1.3}$$

Сформулированные выше основные принципы хорошо известны из любого курса квантовой механики. Но почти во всех книгах по квантовой механике эти «золотые правила» вслед за их формулировкой тут же нарушаются, как только заходит речь о плоских волнах или вообще о «собственных функциях» какого-либо оператора с непрерывным спектром. Дело в том, что в обычной постановке ряда квантовомеханических задач (например, задачи рассеяния) мы имеем дело с «состояниями», которые не описываются вектором в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Для «векторов», соответствующих таким несобственным состояниям, вообще говоря, не определено скалярное произведение и они не могут быть нормированы на единицу. Естественный выход из этого затруднения, при котором сохраняется в (разумной мере) формализм, принятый в физических работах по кван-

---

*) Оператор Π называется оператором ортогонального проектирования, если для любых Φ и Ψ из $\mathscr{H}$ $(\Pi\Psi, (1-\Pi)\Phi) = 0$. Легко видеть, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы оператор Π, удовлетворяющий условию $\Pi^2 = \Pi$, был оператором ортогонального проектирования, состоит в самосопряженности этого оператора.

**) Это значит, что если $\Psi_n \in \mathscr{H}_n$, то $\Pi_k \Psi_n = \delta_{kn} \Psi_n$.

товой механике, дает введение понятия оснащенного гильбертова пространства (см. гл. 1, п. 1.5).

Как отмечалось в гл. 1, данное гильбертово пространство $\mathscr{H}$ может быть оснащено разными способами, в зависимости от того, какое ядерное пространство Ω мы выделили в пространстве $\mathscr{H}$. Можно воспользоваться этой свободой и потребовать, чтобы пространство Ω оставалось инвариантным под действием данной системы операторов. Как правило, в квантовой теории мы имеем дело не со всеми возможными операторами в данном гильбертовом пространстве, а лишь с некоторым «полным» набором операторов и с их возможными произведениями и суммами в конечном числе (в математической терминологии — с некоторой алгеброй операторов). Мы будем требовать (когда это возможно), чтобы все операторы A данного набора были определены в пространстве Ω и чтобы из $\Phi \in \Omega$ следовало, что и $A\Phi \in \Omega$. Построение такого пространства Ω в квантовой теории поля дано в § 5 этой главы. Ниже (п. 2.2) рассматривается пример такого пространства в случае квантовой механики с конечным числом степеней свободы.

Итак, пусть дано оснащенное гильбертово пространство (1.1.33)

$$\Omega \subset \mathscr{H} \subset \Omega^{*}. \tag{2.1.4}$$

Будем говорить, что векторы пространства Ω описывают *регулярные состояния*, а векторы пространства Ω^* — *обобщенные состояния* (векторы пространства $\mathscr{H}$ будем по-прежнему называть просто состояниями).

Возникает вопрос: каков физический смысл обобщенных состояний, поскольку ясно, что для них мы не имеем права пользоваться формулами (2.1.1)—(2.1.3)? Чтобы придать физический смысл обобщенным состояниям, нам придется, во-первых, сузить класс наблюдаемых величин, а во-вторых, рассматривать не абсолютное значение вероятностей результатов различных измерений, а только их отношения.

Самосопряженный оператор A в оснащенном гильбертовом пространстве (2.1.4) (см. гл. 1, определение 7) будем называть *допустимой* наблюдаемой в обобщенном состоянии Φ, если A переводит Φ в регулярное состояние, т. е. если *) $A\Phi \in \Omega$. (Заметим, что оператор умножения на единицу не является допустимым по этому определению, если $\Phi \notin \mathscr{H}$.) Пусть A и B —

---

*) Если Ω — счетно-нормированное пространство $\Omega = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ и $\Phi \in \Omega_n^{*}$, то достаточно потребовать, чтобы $A\Phi \in \Omega_n$, тогда формула (2.1.5) тоже будет иметь смысл.

допустимые наблюдаемые в обобщенном состоянии Ф. Тогда основной постулат квантовой теории, выражаемый формулой (2.1.1), может быть обобщен следующим образом. Отношение средних значений физических величин a и b, которым соответствуют операторы A и B, равно

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}}=\frac{\bar{A}}{\bar{B}}=\frac{(\Phi, A\Phi)}{(\Phi, B\Phi)} \quad \text{при} \quad \Phi \in \Omega^*. \tag{2.1.5}$$

Скалярное произведение в правой части (2.1.5) следует понимать как значение функционала Ф на регулярном элементе $A\Phi$ (соответственно $B\Phi$).

Формула (2.1.5), очевидно, является следствием (2.1.1) в частном случае, когда Ф — обычное состояние ($\Phi \in \mathscr{H}$ и $B = 1$). При этом, если не предполагать, что вектор Ф нормирован, формулу (2.1.1) нужно записать в виде, аналогичном (2.1.5):

$$\bar{a}=\frac{(\Phi, A\Phi)}{(\Phi, \Phi)} \quad \text{при} \quad \Phi \in \mathscr{H}. \tag{2.1.6}$$

Формулу (2.1.6) можно интерпретировать так же, как и (2.1.5), т. е. как отношение средних значений оператора A и единичного оператора (при $\Phi \in \mathscr{H}$ единичный оператор допустим).

Аналогично можно обобщить формулу (2.1.2), если рассматриваемые операторы проектирования допустимы.

С физической точки зрения формулу (2.1.5) целесообразно применять в случае, когда операторы A и B коммутируют между собой, поскольку только тогда соответствующие физические величины a и b доступны одновременному измерению.

Мы видели, что и в случае обычных состояний $\Psi \in \mathscr{H}$ не все самосопряженные операторы в формуле (2.1.1) допустимы. Однако все ограниченные операторы, в частности все проекционные операторы (в том числе и единичный оператор), в этом случае были допустимыми. Для обобщенных состояний класс допустимых наблюдаемых еще больше сужается, однако и здесь, как мы убедимся в дальнейшем на примере, существуют операторы, которые допустимы для всех обобщенных состояний из Ω^*.

Вообще говоря, мы никаким образом не нормируем обобщенные состояния Ф. Два вектора Φ_1 и Φ_2 (из Ω^*), которые отличаются друг от друга на не равный нулю комплексный множитель, описывают одно и то же физическое состояние (отношение (2.1.5) не изменяется, если Ф заменить на $\lambda\Phi$, $\lambda \neq 0$). Однако иногда удобно (хотя и не обязательно) ввести некоторую нормировку для данной системы обобщенных состояний. Поясним это на примере.

Часто обобщенные состояния в квантовой теории возникают как обобщенные собственные векторы самосопряженного оператора с непрерывным спектром. Пусть A — такой оператор и пусть $f_\alpha \in \Omega^*$ — обобщенные собственные функции оператора A, соответствующие собственным значениям α. Тогда обычно для обобщенных состояний f_α пользуются нормировкой

$$(f_{\alpha'}, f_\alpha) = \delta(\alpha - \alpha'). \tag{2.1.7}$$

Это символическое равенство имеет следующий точный смысл. Согласно теореме 1.1.1 любой регулярный вектор $\Phi \in \Omega$ может быть разложен по обобщенным собственным векторам оператора A:

$$\Phi = \int \Phi(\alpha) f_\alpha \, d\alpha.$$

Равенство (2.1.7) означает, что значение функционала $f_{\alpha'}$ на векторе Φ задается формулой

$$(f_{\alpha'}, \Phi) = \Phi^{(\alpha')}.$$

Итак, первый постулат квантовой теории, описывающий связь между математическими объектами и наблюдаемыми, может быть сформулирован следующим образом.

I. *Состояния физической системы описываются нормированными лучами в оснащенном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с положительно определенной метрикой. Каждой измеряемой физической величине a ставится в соответствие самосопряженный оператор A таким образом, что если величине a соответствует оператор A, то величине $f(a)$ соответствует оператор $f(A)$. Вероятность получения при измерении значения физической величины a в интервале Δ для системы в состоянии Ψ дается формулой* (2.1.3) *и не зависит от выбора представителя $\Psi \in \boldsymbol{\Psi}$.*

Обобщенным состоянием называется луч в пространстве $\Omega^* \supset \mathscr{H}$. Если самосопряженные операторы A и A_0 таковы, что векторы $A\Psi$ и $A_0\Psi$ входят в область определения линейного функционала $\Psi \in \Omega^*$, то величина

$$M\left(\frac{A}{A_0}\right) = \frac{(\Psi, A\Psi)}{(\Psi, A_0\Psi)},$$

по определению, равна отношению средних значений физических величин, соответствующих операторам A и A_0, когда система находится в обобщенном состоянии Ψ.

1.2. Квантовая механика с f степенями свободы. Рассмотрим в качестве примера пространство векторов состояний в классической квантовой механике с f степенями свободы.

Как известно, система с f степенями свободы характеризуется в квантовой механике обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_f$ и сопряженными импульсами $p_1, \ldots, p_f$, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$[q_\mu, p_\nu] \equiv q_\mu p_\nu - p_\nu q_\mu = i\delta_{\mu\nu}; \quad [q_\mu, q_\nu] = [p_\mu, p_\nu] = 0, \quad (2.1.8)$$
$$\mu, \nu = 1, \ldots, f.$$

Пространство векторов состояний, в котором величины q и p реализуются в виде самосопряженных операторов, может быть построено следующим образом.

Введем вместо операторов q и p так называемые операторы рождения и уничтожения a^* и a:

$$a_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_\nu + ip_\nu), \qquad a^*_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_\nu - ip_\nu), \qquad (2.1.9)$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[a_\mu, a_\nu] = [a^*_\mu, a^*_\nu] = 0, \quad [a_\mu, a^*_\nu] = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, f. \quad (2.1.10)$$

Определим ортонормированный базис в искомом пространстве следующим образом:

$$\Phi_\nu = \frac{(a^*_1)^{\nu_1} \ldots (a^*_f)^{\nu_f}}{\sqrt{\nu_1! \ldots \nu_f!}} \Phi_0, \qquad (2.1.11)$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_f)$ — система неотрицательных чисел, а Φ_0, по определению, — единственный (с точностью до фазового множителя) нормированный вектор, удовлетворяющий уравнениям

$$a_\nu \Phi_0 = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, f. \qquad (2.1.12)$$

Из определения следует, что

$$a^*_i \Phi_{\nu_1 \ldots \nu_i \ldots \nu_f} = \sqrt{\nu_i + 1}\, \Phi_{\nu_1 \ldots \nu_i + 1 \ldots \nu_f},$$
$$a_i \Phi_{\nu_1 \ldots \nu_i \ldots \nu_f} = \begin{cases} \sqrt{\nu_i}\, \Phi_{\nu_1 \ldots \nu_i - 1 \ldots \nu_f} & \text{при } \nu_i > 0, \\ 0 & \text{при } \nu_i = 0. \end{cases} \qquad (2.1.13)$$

Из требования $(\Phi_0, \Phi_0) = 1$ и из перестановочных соотношений (2.1.10) следует, что векторы Φ_ν действительно образуют ортонормированную систему

$$(\Phi_\mu, \Phi_\nu) = \delta_{\mu_1 \nu_1} \ldots \delta_{\mu_f \nu_f}. \qquad (2.1.14)$$

Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ состоит из всех векторов вида

$$\Phi = \sum_\nu c_\nu \Phi_\nu, \qquad \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_f),$$

где c_ν — комплексные числа, для которых

$$\sum_\nu |c_\nu|^2 < \infty.$$

Базис (2.1.11) обычно называется *базисом Фока*, а само пространство $\mathscr{H}$ в этом случае — *пространством Фока*. Пространство Ω можно определить как максимальное ядерное подпространство пространства $\mathscr{H}$, для которого любой полином от операторов p и q (или a и a^*) является непрерывным оператором относительно ядерной топологии в Ω. Это означает, в частности, что

$$P(a_\mu, a_\nu^*)\Omega \subset \Omega, \tag{2.1.15}$$

где $P(a_\mu, a_\nu^*)$ — произвольный полином. Поэтому все нормы

$$\|\Phi\|_r^2 = (\Phi, h^r\Phi), \quad h = 1 + \sum_{l=1}^{f} a_l^* a_l, \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{2.1.16}$$

ограничены в Ω. С другой стороны, нетрудно видеть, что если задать в Ω топологию при помощи счетной системы норм (2.1.16), то любой полином $P(a_\mu, a_\nu^*)$ окажется непрерывным оператором в Ω. Поэтому пространство Ω, состоящее из всех векторов из $\mathscr{H}$, для которых нормы (2.1.16) конечны, и есть искомое максимальное ядерное подпространство пространства $\mathscr{H}$ с требуемыми свойствами.

Упражнение 2.1.2. а) Показать, что вектор $\Phi = \sum c_\nu \Phi_\nu$ принадлежит Ω тогда и только тогда, когда все суммы вида

$$\|c\|_r^2 = \sum_{\nu_1 \ldots \nu_f} (\nu_1 + \ldots + \nu_f + 1)^r |c_\nu|^2, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

ограничены. (Указание: показать, что $\|c\|_r^2 = \|\Phi\|_r^2$.)

б) Пространство $\mathscr{S}_f$ f-кратных последовательностей c, в котором сходимость определяется счетной системой норм $\|c\|_r$, назовем пространством *быстроубывающих f-кратных последовательностей*. Показать, что при $f=1$ это определение эквивалентно определению Б (гл. 1, п. 1.4). Показать, что пространство $\mathscr{S}_f$ (а значит, и изоморфное ему пространство Ω) ядерно.

в) Показать, что сопряженное пространство $\mathscr{S}_f^*$ (изоморфное пространству обобщенных состояний Ω^*) состоит из всех *последовательностей «умеренного роста»*, т. е. из всех f-кратных последовательностей, для которых ряд $\sum_\nu \frac{|c_\nu|^2}{(\nu_1 + \ldots + \nu_f + 1)^r}$ сходится при некотором неотрицательном r.

Оснащенное гильбертово пространство $\Omega \subset \mathscr{H} \subset \Omega^*$ может быть реализовано вполне эквивалентным образом и в виде пространства функций $\Phi(q)$. Для этой цели достаточно поставить в соответствие элементам базиса Φ_ν нормированные функции Эрмита

$$\Phi_\nu(q) = h_{\nu_1}(q_1) \ldots h_{\nu_f}(q_f), \tag{2.1.17}$$

$$h_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x), \tag{2.1.18}$$

где

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

— полиномы Эрмита. При этой реализации скалярное произведение задается формулой

$$(\Phi, \Psi) = \int \ldots \int \bar{\Phi}(q) \Psi(q) \, dq_1 \ldots dq_f.$$

Операторы p, a и a^* имеют вид

$$p_\nu = -i\frac{\partial}{\partial q_\nu}, \quad a_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_\nu + \frac{\partial}{\partial q_\nu}\right), \quad a_\nu^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_\nu - \frac{\partial}{\partial q_\nu}\right). \tag{2.1.19}$$

Можно показать *), что пространство Ω совпадает при этом с пространством $\mathscr{S}(R_f)$, а пространство Ω^* — с пространством $\mathscr{S}^*(R_f)$. Отметим, что пространство Ω автоматически получилось симметричным относительно преобразований Фурье в силу симметрии канонических переменных p и q (напомним, что при преобразовании Фурье функции $h_n(x)$ переходят в $i^n h_n(p)$). Разложение нормированных согласно (2.1.7) собственных функций оператора импульса имеет вид

$$\frac{1}{(2\pi)^{f/2}} e^{i(p_1 q_1 + \ldots + p_f q_f)} = \sum_\nu (i)^{\nu_1 + \ldots + \nu_f} \Phi_\nu(p) \Phi_\nu(q). \tag{2.1.20}$$

1.3. Прямые суммы гильбертовых пространств. Правила суперотбора. Было бы слишком жестким требованием считать, что любой вектор пространства $\mathscr{H}$ описывает физически реализуемое состояние и любой самосопряженный оператор соответствует некоторой наблюдаемой. В природе реализуются, например, состояния частицы (системы) лишь с определенным электрическим зарядом или барионным числом. Сумма векторов состояний протона и нейтрона не соответствует реализуемому на опыте состоянию (т. е. нельзя реализовать одночастичное состояние, которое с некоторой вероятностью W было бы про-

*) См. по этому поводу Кристенсен и др. (1965). Мы рекомендуем математически настроенному читателю самому восстановить это несложное доказательство.

тоном, а с вероятностью $1-W$ — нейтроном). Это — опытный факт. Нереализуемость других состояний можно предсказать теоретически. Это относится к суперпозиции состояний с целым и полуцелым спином*) $a\Phi+b\Psi$ (при $a, b\neq 0$). При повороте системы координат на угол 2π вокруг оси z, при котором физическая система переходит сама в себя, этот вектор переходит в неколлинеарный с ним вектор $a\Phi-b\Psi$, принадлежащий другому лучу. Более того, есть основания думать, что множество физически реализуемых векторов состояния незамкнуто. Действительно, энергия в квантовой теории всегда задается неограниченным оператором H (хотя бы потому, что энергия свободной частицы не ограничена сверху). Мы будем всегда считать, что H определен на всюду плотной в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ области D_H. Естественно считать, что физически реализуются состояния с конечной энергией, т. е. векторы из D_H. Пределы последовательностей таких векторов, выходящие из этой области и соответствующие бесконечной энергии, нереализуемы. Мы будем предполагать, что замкнутая линейная оболочка $\mathscr{L}(F)$ множества ненулевых физических векторов F совпадает со всем гильбертовым пространством $\mathscr{H}$. Будем считать, по определению, что оператор ортогонального проектирования Π_Ψ на физически реализуемый вектор Ψ соответствует наблюдаемой.

Мы покажем, что пространство $\mathscr{H}$ может быть разложено в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathscr{H}_\alpha$

$$\mathscr{H}=\bigoplus_\alpha \mathscr{H}_\alpha \tag{2.1.21}$$

со следующими свойствами. Каждое подпространство $\mathscr{H}_\alpha$ является замкнутой линейной оболочкой подмножества $F_\alpha=\mathscr{H}_\alpha\cap F$ множества физически реализуемых векторов, причем $\bigcup\limits_\alpha F_\alpha=F$. Нельзя разбить $\mathscr{H}_\alpha$ на прямую сумму непустых ортогональных подпространств $\mathscr{H}'_\alpha$ и $\mathscr{H}''_\alpha$ таким образом, чтобы физические векторы, содержащиеся в $\mathscr{H}'_\alpha$ и в $\mathscr{H}''_\alpha$, исчерпывали F_α, т. е. чтобы $(F\cap\mathscr{H}'_\alpha)\cup(F\cap\mathscr{H}''_\alpha)=F_\alpha$. Из сказанного следует, что если вектор Ψ имеет отличные от нуля проекции по крайней мере в двух разных подпространствах $\mathscr{H}_\alpha$, то он нереализуем физически. Оператор, имеющий отличные от нуля матричные

*) Понятие спина возникает естественным образом при классификации неприводимых представлений группы Пуанкаре (см. § 3 этой главы). Здесь для нас существенно лишь то, что при вращении на угол 2π вокруг некоторой оси спинор Ψ, соответствующий полуцелому спину, меняет знак, а тензор Φ с целым спином остается неизменным.

элементы между векторами различных подпространств $\mathscr{H}_\alpha$, не соответствует наблюдаемой. Мы покажем также, что разложение (2.1.21) определяется (взаимно однозначно) совокупностью операторов, коммутирующих со всеми наблюдаемыми; о таких операторах говорят, что они задают *правила суперотбора*. Подпространства $\mathscr{H}_\alpha$ с перечисленными свойствами называются *когерентными подпространствами*. Мы будем говорить также, что множество физических векторов F_0, которое непредставимо в виде теоретико-множественной суммы двух непустых взаимно ортогональных подмножеств, является *когерентным*.

Сформулированные утверждения вытекают из следующих двух лемм.

Лемма 2.1.1. *Для когерентности множества ненулевых векторов $M \subset \mathscr{H}$ необходимо и достаточно, чтобы любой ограниченный оператор в замкнутой линейной оболочке $\mathscr{L}(M)$, коммутирующий со всеми ортогональными проекторами $\Pi_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ на векторы $\Psi (\equiv |\Psi\rangle) \in M$, был кратным единичному оператору в $\mathscr{L}(M)$.*

Пользуясь терминологией, которая будет введена в дополнении А к гл. 5, эту лемму можно сформулировать также следующим образом: *Множество M когерентно тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана, порождаемая проекторами $\Pi_\Psi (\Psi \in M)$, неприводима в $\mathscr{L}(M)$.*

Доказательство. а) *Условие достаточно*: пусть условие леммы выполнено. Допустим тем не менее, что множество M некогерентно, т. е. существуют непустые взаимно ортогональные подмножества M_1 и M_2 такие, что $M_1 \cup M_2 = M$. Тогда проектор Π_1 на подпространство $\mathscr{L}(M_1)$, очевидно, коммутирует со всеми проекторами Π_Ψ и не кратен единичному оператору в $\mathscr{L}(M)$ (так как $1-\Pi_1$ проектирует на непустое множество $\mathscr{L}(M_2)$). Полученное противоречие доказывает достаточность условия леммы.

б) *Условие необходимо*: пусть оператор C коммутирует со всеми проекторами Π_Ψ на векторы Ψ из когерентного множества M. Покажем, что тогда оператор C кратен единичному оператору в $\mathscr{L}(M)$.

Поскольку C коммутирует с Π_Ψ, а Π_Ψ проектирует на одномерное подпространство, определяемое вектором Ψ, то Ψ должно являться собственным вектором оператора C (так же как и эрмитово сопряженного оператора C^*): $C\Psi = \lambda(\Psi)\Psi$ и $C^*\Psi = \overline{\lambda(\Psi)}\Psi$. На самом деле λ не зависит от Ψ. Допустим противное. Тогда можно разбить M на два непустых непересекающихся множества M_1 и M_2 таких, что $\lambda(\Psi) = \lambda_1$ при $\Psi \in M_1$ и

$\lambda(\Psi) \neq \lambda_1$ при $\Psi \in M_2$ ($M_1 \cup M_2 = M$). Покажем, что множества M_1 и M_2 ортогональны друг другу — в противоречии с предположенной когерентностью множества M. Действительно, если $\Psi_1 \in M_1$, а $\Psi_2 \in M_2$, то

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = [\lambda(\Psi_1) - \lambda(\Psi_2)]^{-1} \{\langle \overline{\lambda(\Psi_1)} \Psi_1 | \Psi_2 \rangle - \langle \Psi_1 | \lambda(\Psi_2) \Psi_2 \rangle\} =$$
$$= [\lambda(\Psi_1) - \lambda(\Psi_2)]^{-1} \{\langle C^* \Psi_1 | \Psi_2 \rangle - \langle \Psi_1 | C \Psi_2 \rangle\} = 0.$$

Итак, $\lambda(\Psi)$ равно константе λ и $C = \lambda 1$ в $\mathscr{L}(M)$. Лемма 2.1.1 доказана.

Лемма 2.1.2. *Пусть M — непустое множество ненулевых векторов гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Тогда его замкнутая линейная оболочка $\mathscr{L}(M)$ разбивается на прямую сумму ортогональных подпространств*

$$\mathscr{L}(M) = \bigoplus_{\alpha} \mathscr{L}_\alpha$$

таким образом, что каждое из множеств $M_\alpha = M \cap \mathscr{L}_\alpha$ когерентно.

Доказательство. Введем в множестве M отношение эквивалентности: $\Psi \sim \Phi$, если существует когерентное подмножество M_0 множества M такое, что $\Psi, \Phi \in M_0$. Рефлексивность ($\Psi \sim \Psi$) и симметричность ($\Psi \sim \Phi \Leftrightarrow \Phi \sim \Psi$) введенного отношения очевидны (отметим, что согласно данному определению любое множество, состоящее из одного вектора, когерентно). Докажем транзитивность отношения $\sim$. Пусть $\Phi \sim \Psi$ и $\Psi \sim X$. Тогда существуют когерентные подмножества M_1 и M_2 такие, что $\Phi, \Psi \in M_1$ и $\Psi, X \in M_2$. Покажем, что теоретико-множественная сумма $M_0 = M_1 \cup M_2$ является когерентным множеством. Действительно, предположим, что M_0 разбивается на два непересекающихся ортогональных подмножества M_0' и M_0''. Пусть $\Psi \in M_0'$. Множество M_1 является объединением непересекающихся взаимно ортогональных подмножеств $M_1 \cap M_0'$ и $M_1 \cap M_0''$. Так как первое из них не пусто ($M_1 \cap M_0' \ni \Psi$), то когерентность M_1 влечет за собой $M_1 \cap M_0'' = \varnothing$ ($\varnothing$ — символ пустого множества). Аналогично проверяется, что $M_2 \cap M_0'' = \varnothing$. Отсюда следует, что само множество M_0'' пусто: $M_0'' = M_0'' \cap M_0 = M_0'' \cap (M_1 \cup M_2) = \varnothing$. Итак, M_0 не допускает разбиения на непустые ортогональные подмножества. Значит, оно когерентно. Так как Φ и X принадлежат M_0, то в силу нашего определения они эквивалентны. Транзитивность отношения $\sim$ доказана.

Разобьем теперь множество M на классы эквивалентных элементов M_α. Множества M_α когерентны и взаимно ортогональны (действительно, из определения когерентного множества видно, что если $\Phi, \Psi \in M$ и $\langle\Phi|\Psi\rangle \neq 0$, то $\Phi \sim \Psi$, так как множество, состоящее из двух неортогональных элементов Φ и Ψ, когерентно). Отсюда следует, что

$$\mathscr{L}(M) = \bigoplus_\alpha \mathscr{L}(M_\alpha).$$

Лемма 2.1.2 доказана.

Если применить эту лемму к множеству физических векторов F, то в силу предположения, что $\mathscr{L}(F) = \mathscr{H}$, из нее следует справедливость разложения (2.1.21), в котором $\mathscr{H}_\alpha = \mathscr{L}(F_\alpha)$, а F_α — когерентные взаимно ортогональные множества физических векторов, теоретико-множественная сумма которых равна F. Если пространство $\mathscr{H}$ сепарабельно (что соответствует общепринятой формулировке квантовой теории поля, см. § 5 этой главы), то сумма (2.1.21) не более чем счетна. Обычно считается, что каждое когерентное множество физических векторов F_α является линейным многообразием. Это позволяет сформулировать принцип суперпозиции в квантовой теории. Для вывода (2.1.21) такое предположение не понадобилось.

Напомним, что согласно определению прямой суммы каждый вектор $\Psi \in \mathscr{H}$ однозначно разлагается на проекции $\Psi_\alpha \in \mathscr{H}_\alpha$, причем если

$$\Phi = \sum_\alpha \Phi_\alpha \quad \text{и} \quad \Psi = \sum_\alpha \Psi_\alpha,$$

то

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \sum_\alpha \langle\Phi_\alpha|\Psi_\alpha\rangle.$$

Оператор ортогонального проектирования на пространство $\mathscr{H}_\alpha$ обозначим через Π_α; по определению $\Pi_\alpha\Psi = \Psi_\alpha$.

Самосопряженный оператор A с плотной областью определения D_A в $\mathscr{H}$ называется *наблюдаемой*, если $D_A \cap F$ плотно в множестве физических векторов F и если A оставляет инвариантным любое из когерентных подпространств $\mathscr{H}_\alpha$. В частности, согласно этому определению любой проектор Π_Ψ на физически реализуемый вектор Ψ является наблюдаемой. Любая наблюдаемая A может быть представлена в клеточной форме

$$A = \sum_\alpha \Pi_\alpha A_\alpha \Pi_\alpha, \tag{2.1.22}$$

где A_α — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}_\alpha$.

Согласно лемме 2.1.1 множество наблюдаемых в любом когерентном подпространстве $\mathscr{H}_\alpha$ неприводимо, т. е. любой ограниченный оператор в $\mathscr{H}_\alpha$, коммутирующий со всеми наблюдаемыми A_α, кратен единичному оператору. Отсюда следует, что любой оператор C в $\mathcal{H}$, коммутирующий со всеми наблюдаемыми, является суперпозицией проекторов на когерентные подпространства:

$$C = \sum_{\alpha} c_\alpha \Pi_\alpha, \tag{2.1.23}$$

где c_α — комплексные числа. В частности, если числа c_α вещественны, оператор C является наблюдаемой. О наблюдаемых вида (2.1.23) говорят, что они задают правила суперотбора: каждое физически реализуемое состояние является собственным состоянием оператора C. Из представления (2.1.23) и из коммутативности проекторов Π_α на взаимно ортогональные подпространства следует коммутативность всех операторов (2.1.23) между собой или, как говорят, «коммутативность правил суперотбора». Заметим, что мы доказали эту коммутативность, не делая предположения о существовании полной системы коммутирующих наблюдаемых.

Коммутативность правил суперотбора была получена в предположении, что проекторы на физические состояния являются наблюдаемыми. Это предположение является естественным, поскольку (как мы постулировали в п. 1.1) все физические состояния соответствуют нормированным лучам в гильбертовом пространстве, а величина $(\Phi, \Pi_\Psi \Phi) = |(\Phi, \Psi)|^2$ имеет смысл вероятности перехода из состояния Φ в состояние Ψ.

§ 2. Релятивистская инвариантность квантовой теории

2.1. Группа Лоренца и группа Пуанкаре. Общая группа Лоренца определяется как совокупность всех вещественных линейных преобразований в пространстве четырехмерных векторов, которые оставляют инвариантной билинейную форму

$$xy = x^0 y^0 - \mathbf{x}\mathbf{y} = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu, \tag{2.2.1}$$

где метрический тензор $G = \{g_{\mu\nu}\}$ задается следующим образом:

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu \tag{2.2.2}$$

(по дважды встречающимся греческим индексам здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование от 0 до 3). Любое преобразование Лоренца $\Lambda \in L$ задается четырехрядной матрицей Λ_μ^ν с вещественными элементами по формуле

$$y^\mu = (\Lambda x)^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \tag{2.2.3}$$

Условие инвариантности формы (2.2.1) эквивалентно условию

$$\Lambda^\varkappa_\mu g_{\varkappa\lambda} \Lambda^\lambda_\nu = g_{\mu\nu} \tag{2.2.4}$$

или, в матричной форме,

$$\Lambda^T G \Lambda = G, \quad \text{т. е.} \quad \Lambda^{-1} = G \Lambda^T G, \tag{2.2.5}$$

где Λ^T — матрица, транспонированная к Λ: $(\Lambda^T)^\mu_\nu = \Lambda^\nu_\mu$. Если взять определитель обеих сторон равенства (2.2.5), получим, что

$$(\det \Lambda)^2 = 1, \quad \text{т. е.} \quad \det \Lambda = \pm 1. \tag{2.2.6}$$

Примером преобразования Лоренца с $\det \Lambda = 1$ может служить тождественное преобразование: $\Lambda = \mathbf{1}$ (единица группы), а также отражение четырех осей $\Lambda = -\mathbf{1}$. Примером несобственного преобразования является пространственное отражение $\Lambda = G$. Равенство (2.2.4) при $\mu = \nu = 0$ дает

$$\Lambda^{0\,2}_0 - \sum_{l=1}^{3} \Lambda^{l\,2}_0 = 1, \tag{2.2.7}$$

следовательно, существуют две возможные области изменения параметра Λ^0_0:

$$\Lambda^0_0 \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \Lambda^0_0 \leqslant -1.$$

Если $\Lambda^0_0 \geqslant 1$, то говорят, что преобразование Λ *ортохронно* (т. е. не содержит обращения времени); мы будем называть такое преобразование просто преобразованием Лоренца. При $\Lambda^0_0 \leqslant -1$ преобразование Λ неортохронно (содержит обращение времени).

Таким образом, группа Лоренца состоит из четырех связных компонент, которые обозначаются соответственно $L^\uparrow_+$ (если $\det \Lambda = 1$ и $\Lambda^0_0 \geqslant 1$); $L^\downarrow_+ (\det \Lambda = 1$ и $\Lambda^0_0 \leqslant -1)$; $L^\uparrow_- (\det \Lambda = -1$ и $\Lambda^0_0 \geqslant 1)$; $L^\downarrow_- (\det \Lambda = -1$ и $\Lambda^0_0 \leqslant -1)$.

Единица группы принадлежит компоненте $L^\uparrow_+$. Нетрудно проверить, что $L^\uparrow_+$ есть подгруппа группы L. Эту подгруппу, с которой чаще всего будем иметь дело, назовем *собственной группой Лоренца*. Подгруппы общей группы Лоренца образуют также следующие совокупности преобразований: $L_+ = L^\uparrow_+ \cup L^\downarrow_+$, $L^\uparrow = L^\uparrow_+ \cup L^\uparrow_-$ и $L^\uparrow_+ \cup L^\downarrow_-$. Отметим, что, хотя для последней из этих групп до сих пор не придумано свое обозначение, существует широкий круг физических явлений, инвариантных именно относительно преобразований этой группы, содержащей собственные преобразования Лоренца и обращение времени *).

---

*) Если справедлива *TCP*-теорема (см. гл. 5), то распад $K^0_2 \to 2\pi$ (Кристенсен и др. (1965)) противоречит инвариантности относительно обращения времени.

Особенно важную роль в релятивистской квантовой теории играет неоднородная группа Лоренца, состоящая из всех преобразований вида

$$x^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}+a^{\mu}, \tag{2.2.8}$$

где Λ^{μ}_{ν} — общее преобразование Лоренца, а a_{ν} — вещественный четырехмерный вектор трансляции. Следуя Вигнеру и Уайтману, мы будем называть ее *общей группой Пуанкаре* и обозначать через $\mathfrak{P}$. Группа Пуанкаре, так же как и группа Лоренца, состоит из четырех компонент, соответственно $\mathfrak{P}^{\uparrow}_{+}$, $\mathfrak{P}^{\uparrow}_{-}$, $\mathfrak{P}^{\downarrow}_{+}$ и $\mathfrak{P}^{\downarrow}_{-}$. Подгруппу $\mathfrak{P}^{\uparrow}_{+}$, для которой $\Lambda\in L^{\uparrow}_{+}$, будем называть *собственной группой Пуанкаре.*

2.2. Собственная группа Лоренца и группа двухрядных матриц с определителем 1. Собственная группа Лоренца $L^{\uparrow}_{+}$ локально изоморфна группе $SL(2)$ *) комплексных двухрядных матриц с определителем, равным единице. Точнее, мы покажем, что любой матрице A из $SL(2)$ соответствует однозначно определенное преобразование Лоренца $\Lambda(A)$ такое, что

$$\Lambda(A_1A_2)=\Lambda(A_1)\,\Lambda(A_2), \tag{2.2.9}$$

причем $\Lambda(A_1)=\Lambda(A_2)$ тогда и только тогда, когда $A_1=\pm A_2$. Иначе говоря, соответствие $\Lambda\leftrightarrow\pm A$ является двузначным представлением собственной группы Лоренца, называемым *спинорным представлением.* Оно играет фундаментальную роль в теории представлений группы Лоренца и будет существенно использоваться в дальнейшем.

Каждому четырехмерному вектору x поставим в соответствие эрмитову матрицу $\underset{\sim}{x}$ по формуле

$$\underset{\sim}{x}=x^{\alpha}\sigma_{\alpha}=x^0\sigma_0+x^1\sigma_1+x^2\sigma_2+x^3\sigma_3=\begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2\\ x^1+ix^2 & x^0-x^3\end{pmatrix}, \tag{2.2.10}$$

где σ_0 — единичная матрица, а σ_i — матрицы Паули:

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{2.2.11}$$

Легко видеть, что

$$\det\underset{\sim}{x}=x^2=x^{0^2}-\mathbf{x}^2. \tag{2.2.12}$$

---

*) Смысл обозначений таков: $L(2)$ означает линейная группа матриц второго порядка; S означает, что это — специальная группа, т. е. что матрицы унимодулярны (имеют определитель 1). В математической литературе используется обозначение $SL(2, C)$, явно указывающее, что мы имеем дело с комплексными матрицами (C — поле комплексных чисел).

Обратно, любой двухрядной эрмитовой матрице $\underset{\sim}{x}$ соответствует 4-вектор x с компонентами

$$x^{\mu} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_{\mu}\underset{\sim}{x}), \tag{2.2.13}$$

где $\operatorname{Tr} A$ — след (сумма диагональных элементов) матрицы A.

Преобразование

$$\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}A^{*}, \tag{2.2.14}$$

где A — любая двухрядная матрица с определителем 1 (т. е. $A \in SL(2)$), переводит эрмитову матрицу x в эрмитову матрицу x', причем в силу (2.2.12) длины векторов x и x' совпадают. Каждому преобразованию матриц (2.2.14) соответствует однозначно определенное собственное преобразование Лоренца $\Lambda = \Lambda(A)$; элементы матрицы $\Lambda(A)$ определяются по формуле

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_{\mu}A\sigma_{\nu}A^{*}). \tag{2.2.15}$$

Формула (2.2.15) дает нам искомое отображение группы $SL(2)$ на группу $L^{\uparrow}_{+}$.

Упражнение 2.2.1. а) Доказать (2.2.15), используя (2.2.13).

б) Показать, что любая унимодулярная матрица A может быть записана в виде

$$A = \sum_{\nu=0}^{3} a^{\nu}\sigma_{\nu} = \underset{\sim}{a},$$

где a — единичный вектор в комплексном пространстве Минковского:

$$a^2 \equiv a^{0^2} - \mathbf{a}^2 = 1.$$

Показать также, что если $A = \underset{\sim}{a}$, то $\Lambda(A)$ задается равенствами

$$\begin{aligned} \Lambda^0_0 &= a^0\bar{a}^0 + \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = |a^0|^2 + |\mathbf{a}|^2, \\ \Lambda^0_j &= \bar{a}^0 a^j + a^0\bar{a}^j + ie_{jkl}a^k\bar{a}^l = \Lambda^j_0, \\ \Lambda^j_k &= a\bar{a}\delta^j_k + 2\operatorname{Im}\bar{a}^0 a^l e_{jkl} + 2\operatorname{Re} a^j\bar{a}^k, \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

где латинские индексы $j, k, \ldots$ пробегают значения 1, 2, 3; e_{jkl} — полностью антисимметричный единичный тензор ($e_{123} = 1$).

(Указание: воспользоваться (2.2.15) и формулами для следов произведений матриц Паули:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\sigma_{\mu}\sigma_{\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3; \quad \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\sigma_j\sigma_k\sigma_l = ie_{jkl};$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\sigma_j\sigma_k\sigma_l\sigma_m = \delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jm}\delta_{lk} - \delta_{jl}\delta_{km} \qquad (j,\ k,\ l,\ m = 1,\ 2,\ 3).)$$

в) Найти обратную формулу, выражающую двухрядные матрицы $\pm A$ через четырехрядную матрицу Λ (Уайтман (1960б)).

г) Проверить справедливость соотношения (2.2.9).

д) Показать, что матрица Λ, определенная формулой (2.2.15), принадлежит группе $L_+^\uparrow$. Проверить, что $\Lambda_0^0 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} AA^* > 0$ и что $\det \Lambda = 1$.

Упражнение 2.2.2. а) Показать, что при рассматриваемом отображении $SL(2)$ на $L_+^\uparrow$ унитарным двухрядным матрицам V $(VV^* = 1)$ соответствуют трехмерные евклидовы вращения, а положительно (отрицательно) определенным эрмитовым матрицам H — частное преобразование Лоренца («гиперболический поворот») вида

$$\begin{aligned} y^0 &= x^0 \operatorname{ch}\alpha + (xn) \operatorname{sh}\alpha, \\ y &= x - (xn)\, n + [(xn) \operatorname{ch}\alpha + x^0 \operatorname{sh}\alpha]\, n, \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

где n — трехмерный единичный вектор. В частности, диагональной матрице

$$A = \begin{pmatrix} e^{\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha/2} \end{pmatrix}$$

соответствует гиперболическое вращение в плоскости (x^0, x^3):

$$\begin{aligned} y^0 &= x^0 \operatorname{ch}\alpha + x^3 \operatorname{sh}\alpha, \\ y^3 &= x^0 \operatorname{sh}\alpha + x^3 \operatorname{ch}\alpha. \end{aligned}$$

б) Показать, что любое собственное преобразование Лоренца может быть представлено как последовательное применение частного преобразования Лоренца вида (2.2.17) и трехмерного евклидова вращения.

(Указание: воспользоваться тем, что любая матрица A из $SL(2)$ может быть представлена в виде $A = VH$, где $H = \sqrt{A^*A}$ — положительно определенная матрица, а $V = A(A^*A)^{-1/2}$ — унитарная матрица.)

Будем говорить, что группа $\tilde{G}$ является *универсальной накрывающей* связной группы G, если $\tilde{G}$ — минимальная односвязная группа, гомоморфная *) G (см. [25], где доказывается в частности, что универсальная накрывающая данной группы определена этим условием однозначно). Можно показать, что группа $SL(2)$ односвязна и является универсальной накрывающей собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$. Все представления любой односвязной группы однозначны.

В следующих пунктах мы будем изучать представления группы $\mathfrak{P}$, состоящей из неоднородных преобразований двухрядных эрмитовых матриц $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{y}$, оставляющих инвариантным определитель их разности:

$$\det(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) = (x - y)^2.$$

*) Напомним определение этих терминов. Группа H *гомоморфна* группе G, если существует однозначное (хотя и не обязательно обратимое) соответствие $H \to G$ (отображение H на всю группу G), сохраняющее групповые операции: $f(h_1 h_2) = f(h_1) f(h_2)$. Множество $\tilde{G}$ называется *односвязным*, если любой замкнутый путь в $\tilde{G}$ можно стянуть непрерывной деформацией в точку, все время оставаясь в $\tilde{G}$.

Собственная спинорная группа $\mathfrak{P}_+^\uparrow \equiv \mathfrak{P}_0$ (максимальная связная подгруппа группы $\mathfrak{P}$) состоит из всевозможных пар $(\underset{\sim}{a}, A)$, где A — унимодулярная матрица ($A \in SL(2)$), а $\underset{\sim}{a}$ — двухрядная эрмитова матрица. Элемент $(\underset{\sim}{a}, A)$ группы $\mathfrak{P}_0$ действует на эрмитову матрицу $\underset{\sim}{x}$ по формуле

$$\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}A^* + \underset{\sim}{a}. \tag{2.2.18}$$

Отсюда нетрудно вывести закон группового умножения в $\mathfrak{P}_0$:

$$(\underset{\sim}{a}_1, A_1)(\underset{\sim}{a}_2, A_2) = (\underset{\sim}{a}_1 + A_1\underset{\sim}{a}_2A_1^*, A_1A_2). \tag{2.2.19}$$

Заметим, что если записать элемент (a, A) группы $\mathfrak{P}_0$ в виде четырехрядной матрицы

$$(\underset{\sim}{a}, A) = \begin{pmatrix} A & \underset{\sim}{a}A^{*-1} \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}, \tag{2.2.20}$$

то групповое умножение (2.2.19) переходит в обычное матричное умножение.

Соответствие

$$A \to A^{*-1}$$

является *внешним автоморфизмом* *) группы $SL(2)$ на себя, соответствующим пространственному отражению. Точнее, имеет место равенство

$$G\Lambda(A)\,G^{-1} = \Lambda(A^{*-1}),$$

где G — матрица метрического тензора (2.2.2). Мы предоставляем читателю убедиться в этом, пользуясь (2.2.16) и тем, что если $A = \underset{\sim}{a}$, то

$$A^{*-1} = \underset{\sim}{a}^{*-1} = \tilde{\tilde{a}}.$$

Мы предоставляем читателю также доказать, что если 4-векторы x и a связаны с эрмитовыми матрицами $\underset{\sim}{x}$ и $\underset{\sim}{a}$ согласно (2.2.10), то преобразование (2.2.18) эквивалентно собственному преобразованию Пуанкаре $x' = \Lambda x + a$.

Таким образом, группа $\mathfrak{P}_0$, которая, так же как и $SL(2)$, односвязна, является универсальной накрывающей собственной группы Пуанкаре $\mathfrak{P}_+^\uparrow$.

---

*) *Автоморфизмом* группы G называется отображение этой группы на себя, при котором сохраняется групповая операция. Автоморфизм называется *внутренним*, если он имеет вид $g \to g_0 g g_0^{-1}$, где $g_0 \in G$. Если же элемент g_0 с такими свойствами не существует, автоморфизм называется *внешним*.

В дальнейшем (гл. 5) мы будем иметь дело с группой $\mathscr{L}_+$ комплексных преобразований Лоренца с определителем $+1$, которые оставляют инвариантной билинейную форму (2.2.1), т. е. с группой комплексных четырехрядных матриц Λ с $\det \Lambda = 1$, удовлетворяющих соотношению (2.2.5). Рассмотренное двузначное представление группы $L_+^\uparrow$ обобщается следующим образом на комплексную группу $\mathscr{L}_+$.

Любому комплексному 4-вектору z ставится в соответствие двухрядная матрица $\underset{\sim}{z}$ по формуле (2.2.10). Преобразование (2.2.14) заменяется преобразованием более общего вида

$$\underset{\sim}{z}' = A\underset{\sim}{z}B^T, \tag{2.2.21}$$

где B^T — матрица, транспонированная к B,

$$\det A = \det B = 1.$$

Каждому преобразованию (2.2.21) соответствует комплексное преобразование Лоренца $\Lambda(A,\ B) \in \mathscr{L}_+$ по формуле

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_\mu A \sigma_\nu B^T). \tag{2.2.15a}$$

В частном случае, когда $B = \bar{A}$, (2.2.15a) переходит в (2.2.15).

2.3. Требование релятивистской инвариантности. Важную роль в квантовой теории играют два представления: представление Шредингера, в котором каждому моменту времени соответствует свое состояние системы (вектор состояния в этом представлении описывает результаты всевозможных опытов в данный момент), и представление Гайзенберга, в котором вся зависимость от времени перенесена на операторы, а векторы состояния не зависят от времени и описывают результаты всевозможных опытов во всей истории рассматриваемой системы.

Чтобы явно учитывать релятивистскую ковариантность теории, удобно пользоваться представлением Гайзенберга. В дальнейшем мы будем работать именно в этом представлении.

Как мы видели в п. 1.1, любое состояние системы описывается единичным лучом Ψ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ (в случае представления Шредингера мы должны были бы характеризовать состояние совокупностью лучей — один луч для каждого момента времени).

Инвариантность теории относительно собственных преобразований Пуанкаре означает неизменность средних значений (2.1.1) (или вероятностей (2.1.3)) при таких преобразованиях. Из требования инвариантности следует, что при любом преобразовании $\{a,\ \Lambda\} \in \mathfrak{P}_+^\uparrow$ единичные лучи Ψ могут изменяться лишь так, чтобы абсолютные значения их скалярных произведений оставались неизменными:

$$|(\boldsymbol{\Phi}_{\{a,\Lambda\}},\ \boldsymbol{\Psi}_{\{a,\Lambda\}})| = |(\boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{\Psi})|. \tag{2.2.22}$$

Модуль скалярного произведения двух единичных лучей $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\Psi}$ определяется как модуль скалярного произведения двух векторов: $\Phi \in \boldsymbol{\Phi}$ и $\Psi \in \boldsymbol{\Psi}$; нетрудно проверить, что это определение не зависит от выбора «представителей» Φ и Ψ лучей $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\Psi}$.

Чтобы перейти от преобразования лучей к преобразованию векторов Ψ, мы воспользуемся следующей теоремой (теорема Вигнера).

Теорема 2.2.1. *Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ — два пространства Гильберта и пусть $\boldsymbol{T}$ — отображение нормированных лучей $\mathscr{H}$ на множество нормированных лучей $\mathscr{H}'$, которое удовлетворяет условию*

$$|(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Psi})| = |(\boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{\Psi})|.$$

Тогда существует оператор T из $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}'$, определенный с точностью до фазового множителя, который порождает $\boldsymbol{T}$ и который 1) *аддитивен*: $T(\Psi_1+\Psi_2) = T\Psi_1 + T\Psi_2$; 2) *либо унитарен, т. е.* $(T\Phi, T\Psi) = (\Phi, \Psi)$, *либо антиунитарен*:

$$(T\Phi,\ T\Psi) = \overline{(\Phi,\ \Psi)} = (\Psi,\ \Phi) \tag{2.2.23}$$

(см. [26], дополнение к гл. 20 и Баргман (1964); здесь мы не будем воспроизводить доказательство этой теоремы).

Отметим, что всякое преобразование единичных лучей в $\mathscr{H}$ на себя с выполнением условия (2.2.22) однозначно определяет преобразование наблюдаемых $A \to A'$ из условия

$$(\Phi', A'\Phi') = (\Phi, A\Phi),$$

где Φ и Φ' — произвольные векторы из единичных лучей $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\Phi}'$ соответственно. Это приводит к следующему закону преобразования наблюдаемых:

$$A \to A' = TAT^{-1},$$

где T — оператор, даваемый теоремой 2.2.1.

Предполагая непрерывность функции $|(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}_{\{a,\Lambda\}})|$ в окрестности единицы группы ($a = 0$, $\Lambda = 1$), нетрудно заключить, что для собственной группы Пуанкаре оператор $T = U(a, \Lambda)$ обязательно унитарен.

Итак, мы видим, что физическое требование релятивистской инвариантности вероятностей приводит к тому, что в пространстве состояний осуществляется так называемое *проективное представление* группы $\mathfrak{P}$. Любому собственному преобразованию Пуанкаре $\{a, \Lambda\}$ ставится в соответствие нормированный луч унитарных операторов $U(a, \Lambda)$ (два унитарных оператора

U и U' принадлежат данному лучу $\mathbf{U}$ тогда и только тогда, когда они отличаются на комплексный множитель, равный по модулю единице), причем суперпозиции преобразований соответствует произведение операторных лучей:

$$\mathbf{U}(a_1, \Lambda_1)\mathbf{U}(a_2, \Lambda_2) = \mathbf{U}(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2), \qquad (2.2.24)$$

а единице группы $(e \equiv (0,1))$ соответствует единичный операторный луч, т. е. совокупность комплексных чисел, равных по модулю единице.

Один из основных результатов анализа Вигнера (1939) и Баргмана (1954) состоит в том, что любое проективное представление собственной группы Пуанкаре порождается обычным однозначным унитарным представлением *) группы $\mathfrak{P}_0$, определенной в предыдущем пункте. Другими словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.2. *Из каждого луча* $\mathbf{U}(a, \Lambda)$ *можно выбрать по одному представителю* $U(\underset{\sim}{a}, A) \in \mathbf{U}(a, \Lambda)$ *так, что имеют место соотношения*:

$$U(0, 1) = 1, \quad U(\underset{\sim}{a}_1, A_1)\,U(\underset{\sim}{a}_2, A_2) = U(\underset{\sim}{a}_1 + A_1\underset{\sim}{a}_2A_1^*, A_1A_2), \qquad (2.2.25)$$

где $\underset{\sim}{a}$ *определяется формулой* (2.2.10) (ср. (2.2.19)).

За доказательством этого утверждения мы отсылаем читателя к оригинальным статьям Вигнера (1939) и Баргмана (1954), а также к краткому обзору Ньютона в [27]. Здесь мы дадим лишь более развернутую формулировку теоремы Вигнера и Баргмана.

Если в каждом из лучей $\mathbf{U}(a, \Lambda)$ выбрать представитель $U(a, \Lambda)$, то мы получим в силу (2.2.24) представление (с точностью до множителя) собственной группы Пуанкаре $\mathfrak{P}_+^\uparrow$:

$$U(a_1, \Lambda_1)\,U(a_2, \Lambda_2) = \omega(a_1\Lambda_1;\ a_2\Lambda_2)\,U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2), \qquad (2.2.26)$$

где $|\omega| = 1$, т. е. (если для краткости обозначить $\{a, \Lambda\} = g$)

$$\omega(g_1, g_2) = \exp\{i\xi(g_1, g_2)\}. \qquad (2.2.27)$$

Вещественная функция $\xi(g_1, g_2)$ в силу (2.2.26) и ассоциативности умножения удовлетворяет равенствам

$$\xi(e, e) = 0, \quad \xi(g_1, g_2) + \xi(g_1g_2, g_3) = \xi(g_1, g_2g_3) + \xi(g_2, g_3).$$

Утверждение теоремы 2.2.2 сводится к тому, что можно сделать такой сдвиг фаз у всех операторов U:

$$U(g) \to e^{i\zeta(g)}U(g), \quad \xi(g_1, g_2) \to \xi(g_1, g_2) + \zeta(g_1) + \zeta(g_2) - \zeta(g_1g_2),$$

*) Основные понятия теории представлений даны в дополнении к настоящей главе.

чтобы новые операторы $U(a, \Lambda)$ зависели непрерывно от параметров группы, а преобразованный множитель $\omega(a_1, \Lambda_1; a_2, \Lambda_2) = \pm 1$. (Именно потому, что нельзя ограничиться лишь одним знаком у ω, проективное представление сводится к представлениям группы $\mathfrak{P}_0$, а не группы $\mathfrak{P}_+^\uparrow$.)

Теорема Баргмана и Вигнера показывает значение понятия универсальной накрывающей группы для исследования требования инвариантности квантовой теории. Заметим, однако, что в нерелятивистской квантовой механике, где вместо группы Пуанкаре мы имеем дело с группой Галилея, проективные представления группы Галилея не сводятся к однозначным представлениям ее накрывающей группы (см. Баргман (1954) и Леви-Леблон (1963)).

В результате мы приходим к следующей окончательной формулировке принципа релятивистской инвариантности квантовой теории, второго постулата нашей схемы.

II. *При собственном преобразовании Пуанкаре $\mathfrak{P}_+^\uparrow$ векторы состояния преобразуются по непрерывному унитарному представлению группы $\mathfrak{P}_0$.*

Кроме того, мы будем предполагать, что рассматриваемое представление $U(\underset{\sim}{a}, A)$ группы $\mathfrak{P}_0$ приводится правилами суперотбора. Другими словами, любое когерентное подпространство $\mathcal{H}_j$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ оставляется операторами $U(\underset{\sim}{a}, A)$ инвариантным.

Поведение векторов состояния при преобразованиях отражения пространства и времени будет рассмотрено в п. 3.4.

§ 3. Неприводимые представления группы Пуанкаре и принцип спектральности

3.1. Алгебра Ли группы Пуанкаре. Инвариантные операторы. Изучение всевозможных унитарных представлений группы $\mathfrak{P}_0$ сводится к классификации ее неприводимых представлений, так как любое унитарное представление этой группы может быть разложено в прямую сумму (или интеграл) неприводимых представлений.

Этот результат нетривиален, так как группа Пуанкаре не является компактной (она лишь локально компактна). Относительно современного состояния теории разложения произвольного унитарного представления локально компактной группы см. обзор Наймарка (1964).

Каждый элемент группы $\mathfrak{P}_0$ характеризуется десятью вещественными параметрами (четыре трансляции и шесть углов вращения) и, следовательно, десятью независимыми инфинитезимальными операторами. Генераторы трансляции будем обозначать через $-iP^0$, $+iP^1$, $+iP^2$, $+iP^3$, а генераторы вращения через $iM^{\mu\nu}=-iM^{\nu\mu}$, где P^μ и $M^{\mu\nu}$ (μ, $\nu=0$, 1, 2, 3) — эрмитовы операторы, удовлетворяющие следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned}&[P^\mu,\ P^\nu]=0,\ [M^{\lambda\mu},\ P^\nu]=i\left(g^{\mu\nu}P^\lambda-g^{\lambda\nu}P^\mu\right),\\&[M^{\mu\nu},\ M^{\rho\sigma}]=-i\left(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}-g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}+g^{\nu\sigma}M^{\rho\nu}-g^{\mu\sigma}M^{\rho\mu}\right).\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

Тем же самым перестановочным соотношениям удовлетворяют генераторы собственной группы Пуанкаре $\mathfrak{P}_+^\uparrow$, поскольку группы $\mathfrak{P}_+^\uparrow$ и $\mathfrak{P}_0$ локально изоморфны. Соотношения (2.3.1) справедливы и для нижних индексов.

Рассмотрим два примера реализации алгебры Ли групны Пуанкаре. Первый из них соответствует конечномерному, второй — бесконечномерному представлению группы.

В качестве первого примера возьмем четырехмерное представление (2.2.20) группы $\mathfrak{P}_0$.

Частному преобразованию Лоренца (2.2.17) соответствует положительно определенная матрица

$$H(\alpha,\ \boldsymbol{n})=\sigma_0\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}+(\boldsymbol{\sigma n})\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}=e^{\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{\sigma n}}\tag{2.3.2}$$

(ср. с упражнением 2.2.2). Если, в частности, взять в качестве $\boldsymbol{n}$ последовательно три координатных орта e_j ($j=1$, 2, 3), мы получим двухмерное спинорное представление генераторов специальных лоренцевых вращений $M_{0j}=N_j$:

$$\overset{(2)}{N}_j=i\left[\frac{d}{d\alpha}H(\alpha,\ e_j)\right]_{\alpha=0}=i\frac{1}{2}\sigma_j.\tag{2.3.2a}$$

Нетрудно видеть, что вращению на угол θ вокруг оси $\boldsymbol{n}$ соответствует унитарная матрица

$$U(\boldsymbol{n},\ \theta)=\sigma_0\cos\frac{\theta}{2}-i(\boldsymbol{\sigma n})\sin\frac{\theta}{2}=e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma n}}.\tag{2.3.3}$$

Генераторы этого преобразования $\frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}M^{kl}=M_j$ имеют вид

$$\overset{(2)}{M}_j=i\left[\frac{d}{d\theta}U(e_j,\ \theta)\right]_{\theta=0}=\frac{1}{2}\sigma_j.\tag{2.3.3a}$$

Упражнение 2.3.1. Пользуясь вышеприведенными формулами, показать, что генераторы четырехрядного представления (2.2.20) группы $\mathfrak{P}_0$ имеют вид

$$\begin{aligned}&\overset{(4)}{M}_j=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_j&0\\0&\sigma_j\end{pmatrix},\quad \overset{(4)}{N}_j=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_j&0\\0&-\sigma_j\end{pmatrix},\\&\overset{(4)}{P}_\mu=i\frac{\partial}{\partial a^\mu}\begin{pmatrix}1&\tilde{a}\\0&1\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}0&\sigma_\mu\\0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.3.4}$$

В качестве второго примера рассмотрим представление группы Пуанкаре, реализованное как группа преобразований аргументов в пространстве гладких функций от $x \in R_4$.

Заметим сначала, что если группа G действует как группа преобразований в пространстве X точек x, то всегда можно определить линейное представление группы G в пространстве функций в X формулой

$$(T_g f)(x) = f_g(x) = f(g^{-1}x).$$

Проверим, что при этом выполняется условие

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2}.$$

Действительно

$$(T_{g_1} T_{g_2}) f(x) = (T_{g_1} f_{g_2})(x) = f_{g_2}(g_1^{-1}x) = f(g_2^{-1} g_1^{-1} x) =$$
$$= f\left((g_1 g_2)^{-1} x\right) = (T_{g_1 g_2} f)(x).$$

Нетрудно убедиться, что в случае, если группа G некоммутативна, то закон $(S_g f)(x) = f(gx)$, в противоположность рассмотренному выше закону $T_g f$, не определяет представления группы G.

Вернемся к группе Пуанкаре, рассматриваемой как группа преобразований четырехмерного пространства. Для нее представление T_g имеет вид

$$(T_{(a\Lambda)} f)(x) = f\left(\Lambda^{-1}(x-a)\right).$$

Нетрудно видеть, что генераторы этого представления имеют вид

$$P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

$$M^{\mu\nu} = i\left(x^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu \tag{2.3.5}$$

$$(M^{0j} = N^j,\ M^{12} = M^3,\ \ldots).$$

Мы предоставляем читателю показать, пользуясь перестановочным соотношением

$$[x^\mu,\ P^\nu] = -ig^{\mu\nu},$$

что операторы $P^\mu = g^{\mu\nu} P_\nu$ и $M^{\mu\nu}$ (2.3.5) удовлетворяют перестановочным соотношениям (2.3.1).

Отметим еще раз, что, в то время как перестановочные соотношения (2.3.1) не зависят от выбора представления, явные выражения для генераторов естественно зависят от этого выбора; именно поэтому мы обозначаем выбор представления (сверху в скобках) в символах для инфинитезимальных операторов.

Следуя аналогии с нерелятивистской квантовой механикой и имея в виду классическую теорему Нетер (см., например, [4], гл. 1), мы, по определению, будем считать, что $P=(P^0, P^1, P^2, P^3)$ является оператором полного 4-импульса физической системы, а $\{M^{\mu\nu}\}$ — оператор четырехмерного момента количества движения.

Введем четырехмерный псевдовектор *)

$$w_\rho = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}P^\lambda M^{\mu\nu}, \tag{2.3.6}$$

где $\varepsilon_{\mu\rho\sigma\lambda}$ — полностью антисимметричный тензор ($\varepsilon_{\mu\rho\sigma\lambda}=1$, если $\mu\rho\sigma\lambda$ образуют четную перестановку чисел 0, 1, 2, 3; $\varepsilon_{\mu\rho\sigma\lambda}=-1$, если $\mu\rho\sigma\lambda$ образуют нечетную перестановку этих чисел; $\varepsilon_{\mu\rho\sigma\lambda}=0$, если хотя бы два из индексов совпадают). При помощи векторов $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ псевдовектор $\boldsymbol{w}$ записывается в виде

$$w_0 = \boldsymbol{PM} = P^j M^j, \qquad \boldsymbol{w} = P^0\boldsymbol{M} - \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{N}^{**}). \tag{2.3.7}$$

Важное свойство операторов w_μ состоит в том, что они коммутируют с оператором 4-импульса:

$$[w_\mu,\ P_\nu]=0. \tag{2.3.8}$$

Перестановочные соотношения операторов w_μ между собой и с операторами $M_{\mu\nu}$ определяются формулами:

$$\begin{gathered}[M_{\lambda\mu},\ w_\nu] = i\,(g_{\mu\nu}w_\lambda - g_{\lambda\nu}w_\mu),\\ [w_\mu,\ w_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}w^\rho P^\sigma = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}w_\rho P_\sigma g^{\rho\rho}g^{\sigma\sigma}.\end{gathered} \tag{2.3.9}$$

---

*) При отражении трех пространственных координат пространственная часть $\boldsymbol{w}$ псевдовектора w остается неизменной, а w_0 меняет знак. Вектор w иногда называется вектором Паули—Любанского—Баргмана, по имени авторов, которые ввели его в рассмотрение.

**) Операторы w_μ не входят в алгебру Ли группы Пуанкаре. Действительно, по определению, алгебра Ли является линейной оболочкой генераторов (с вещественными коэффициентами). *Произведением в алгебре Ли* называется не обычное произведение операторов, а их коммутатор. Для этого антисимметричного произведения не выполняется ассоциативный закон. Однако наряду с алгеброй Ли данной группы всегда целесообразно рассматривать бесконечномерную ассоциативную алгебру, состоящую из всевозможных полиномов от генераторов. Произведением в этой алгебре является обычное ассоциативное произведение операторов. Два полинома считаются равными, если они могут быть приведены друг к другу при помощи заданных перестановочных соотношений в алгебре Ли. Определенная таким образом ассоциативная алгебра называется *универсальной обертывающей алгеброй* данной алгебры Ли. Операторы w_μ, так же как и полиномиальные инварианты группы Пуанкаре, которые будут определены ниже, принадлежат обертывающей алгебре.

Соотношения (2.3.8) и (2.3.9) являются следствием лишь перестановочных соотношений (2.3.1) и не зависят от выбора представления *).

Упражнение 2.3.2. Пользуясь (2.3.7) и (2.3.8), показать, что

$$wP = g_{\mu\nu} w_\mu P_\nu = 0. \tag{2.3.10}$$

Существуют два (и только два) независимых полиномиальных инвариантных оператора, коммутирующих со всеми операторами представления:

$$P^2 = P^{0^2} - P^{1^2} - P^{2^2} - P^{3^2}, \tag{2.3.11}$$

и

$$W \equiv -w^2 = \frac{1}{2} g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} M^{\mu\nu} M^{\mu'\nu'} P^2 - g_{\mu\mu'} g_{\sigma\sigma'} g_{\nu\nu'} M^{\mu\sigma} M^{\nu\sigma'} P^{\mu'} P^{\nu'}. \tag{2.3.12}$$

Кроме того, при $P^2 \geqslant 0$ можно ввести еще дискретную инвариантную характеристику — знак энергии:

$$\varepsilon \equiv \varepsilon(P^0) \tag{2.3.13}$$

(если при $P^2 < 0$ положить, по определению, $\varepsilon = 0$, то можно при всех P написать $\varepsilon = \theta(P^2)\varepsilon(P^0)$; функции от самосопряженных операторов определяются, как обычно, сначала в представлении, в котором эти операторы диагональны, а затем и в любом другом представлении).

Часто удобно рассматривать комплексное расширение алгебры Ли однородной группы Лоренца. В нем вместо векторов $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ можно ввести коммутирующие между собой векторы

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M} + i\boldsymbol{N}), \qquad \boldsymbol{K} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M} - i\boldsymbol{N}),$$

которые удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[J_j, J_k] = i\varepsilon_{jkl} J_l, \quad [K_j, K_k] = i\varepsilon_{jkl} K_l, \quad [J_j, K_k] = 0.$$

Векторы $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{K}$ преобразуются по сопряженным друг другу трехмерным неприводимым представлениям собственной группы Лоренца. Чтобы выразить в терминах $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{K}$ 4-вектор w, введем матрицы, соответствующие трех- и четырехмерным векторам

$$J^\alpha_\beta = \left(\sum_{k=1}^{3} J^k \sigma_k\right)^\alpha_\beta, \quad K^{\dot\alpha}_{\dot\beta} = \left(\sum_{l=1}^{3} K^l \sigma_l\right)^{\dot\alpha}_{\dot\beta}, \quad P^{\alpha\dot\beta} = (P^\mu \sigma_\mu)^{\alpha\dot\beta}.$$

*) Из (2.3.8) и (2.3.9) видно, что пространство всевозможных линейных комбинаций компонент w_μ вектора инвариантно относительно группы Пуанкаре.

Тогда матрица

$$w^{\alpha\beta} = I^{\alpha}_{\tau}P^{\tau\beta} + K^{\beta}_{\tau}P^{\alpha\tau}$$

соответствует четырехмерному вектору w (2.3.6). Эта форма записи удобна для некоторых многомерных обобщений группы Пуанкаре (см. Кадышевский и Тодоров (1966)).

Упражнение 2.3.3. **Пользуясь перестановочными соотношениями, проверить инвариантность операторов P^2 и W. Доказать инвариантность ε.**

3.2. Классификация неприводимых представлений группы $\mathfrak{P}_0$. Принцип спектральности. В силу сказанного в предыдущем пункте операторы P^2, W и ε кратны единичному оператору в пространстве, в котором реализуется любое неприводимое представление группы Пуанкаре, и их значения в этом пространстве могут служить для нумерации неприводимых представлений.

В зависимости от значений инвариантов P^2 и ε представления группы $\mathfrak{P}_0$ могут быть разделены на следующие классы:

1. $P^2=m^2>0$.

1а. $\varepsilon=1$ (т. е. $P^0>0$). Соответствующие представления описывают трансформационные свойства реальных частиц с массой покоя m.

1б. $\varepsilon=-1$ (т. е. $P^0<0$). Эти представления комплексно сопряжены с представлениями класса 1а.

2. $P^2=0$, $P \not\equiv 0$.

2а. $\varepsilon=1$ ($P^0>0$). Соответствующие представления относятся к частицам с нулевой массой покоя (нейтрино и фотон).

2б. $\varepsilon=-1$ ($P^0<0$). Представления этого класса комплексно сопряжены с представлениями класса 2а.

3. $P^2=-m^2<0$ (т. е. вектор P пространственно подобен).

Согласно основным принципам релятивистской механики частицы с таким импульсом не могут реально существовать. Однако представления класса 3 могут играть роль при описании трансформационных свойств взаимодействующих полей.

4. $P=0$ (т. е. $p^0=p^1=p^2=p^3=0$). Все состояния с таким p трансляционно инвариантны. Все унитарные представления этого класса, кроме единичного ($U(\underset{\sim}{a}, A)=1$), бесконечномерны. Единичное представление соответствует состоянию, инвариантному относительно всех преобразований Пуанкаре. Будем считать, что это состояние соответствует пустому пространству, или *вакууму*.

Постулат спектральности, третий постулат нашей схемы, к формулировке которого мы переходим, исключает некоторые из перечисленных возможностей при описании трансформационных свойств векторов состояний. Мы дадим две неэквивалентные формулировки этого постулата. Первая, менее ограничительная, формулировка должна быть справедливой в любой физической теории; вторая — более жесткая — относится к теории сильно взаимодействующих частиц (π- и K-мезонов и барионов), называемых *адронами*.

III.а. *Спектр оператора энергии — импульса P_μ принадлежит замкнутому будущему световому конусу $\bar{V}^+$.*

Другими словами, представление группы $\mathfrak{P}_0$, которое осуществляется в пространстве векторов состояний $\mathscr{H}$, разлагается на неприводимые представления, входящие лишь в классы 1а. 2а и 4, определенные выше. Среди представлений класса 4 мы будем рассматривать лишь тривиальное (единичное) представление, которое соответствует вакууму.

• Эта слабая форма постулата спектральности будет достаточной для получения основных результатов гл. 5 (теорема Холла — Уайтмана и TCP-теорема). Однако при доказательстве свойства разбиения по пучкам (см. гл. 3, п. 2.3) и вообще при изложении теории рассеяния (гл. 4) нам понадобятся следующие дополнения к постулату IIIа, относящиеся к теории сильно взаимодействующих частиц.

III.б. *Точка $p=0$ является дискретным невырожденным собственным значением оператора P, т. е. существует единственное состояние Ψ_0 в пространстве $\mathscr{H}$, для которого $P\Psi_0=0$. Это состояние инвариантно также относительно преобразований Лоренца (из группы $SL(2)$); вообще $U(\underset{\sim}{a}, A)\Psi_0=\Psi_0$ при всех $\{a, A\}\in\mathfrak{P}_0$.*

Такое состояние Ψ_0 называется вакуумом. Вектор вакуума мы будем обозначать также символом $|0\rangle$.

III.в. *Существуют конечное число дискретных положительных собственных значений оператора масс $\sqrt{P^2}$ $(0<m_1<m_2\ldots)$, соответствующих состояниям с одной стабильной частицей, и непрерывный спектр этого оператора при $\sqrt{P^2}\geqslant 2m_1$.*

Непрерывный спектр оператора $\sqrt{P^2}$, вообще говоря, является кратным. В области n-частичных состояний при $n\geqslant 3$ его кратность бесконечна.

Часто постулат спектральности кратко формулируется следующим образом: в $\mathscr{H}$ *существует полная система физических состояний с положительной энергией.*

3.3. Описание представлений, соответствующих частицам с положительной массой. В силу постулата спектральности мы можем ограничиться рассмотрением представлений только класса 1а. Перейдем к схематичному описанию неприводимых представлений этого класса.

Определим сначала пространство, в котором действуют операторы представлений. Для этой цели выберем среди эрмитовых функций от генераторов группы полный набор коммутирующих операторов *). В этот набор всегда входят операторы Казимира $P^2=m^2$ и W группы Пуанкаре, которые коммутируют со всеми операторами представления. Наряду с ними удобно выбрать операторы импульса P^μ ($\mu=0, 1, 2, 3$) и третью проекцию спина

$$S_3=\frac{1}{m}\left(w_3-\frac{w_0P_3}{m+P_0}\right). \tag{2.3.14}$$

Нетрудно видеть, имея в виду (2.3.8), что операторы P_μ и S_3 коммутируют между собой. Они будут также коммутировать, если вместо S_3 мы возьмем любую линейную комбинацию компонент вектора w. Поэтому специальный выбор (2.3.14) при определении спина нуждается в пояснении.

В системе покоя R, в которой $\boldsymbol{P}_R=0$, $P_R^0=m$, $w_R^0=0$, вектор спина равен

$$\boldsymbol{S}_R=\frac{1}{m}\boldsymbol{w}_R. \tag{2.3.15}$$

Мы постулируем, что в произвольной системе вектор $\boldsymbol{S}$ является линейной комбинацией компонент вектора w с коэффициентами, зависящими лишь от 4-импульса P. При этом потребуем, чтобы $\boldsymbol{S}$ был трехмерным вектором, т. е. чтобы

$$[M_j,\ S_k]=i\varepsilon_{jkl}S_l \tag{2.3.16}$$

и чтобы имели место обычные перестановочные соотношения для оператора спина:

$$[S_j,\ S_k]=i\varepsilon_{jkl}S_l. \tag{2.3.17}$$

Покажем, что единственная аксиально векторная линейная комбинация операторов w_μ, удовлетворяющая условиям (2.3.16) и (2.3.17) и переходящая в системе покоя в вектор (2.3.15), имеет вид

$$S_j=\frac{1}{m}\left(w_j-\frac{w_0P_j}{m+P_0}\right)=\frac{1}{m}\left[P_0M_j-(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{N})_j-P_j\frac{\boldsymbol{PM}}{m+P_0}\right] \tag{2.3.18}$$

---

*) Говорят, что система коммутирующих эрмитовых операторов образует полный набор (в математической терминологии — максимальную абелеву совокупность), если их одновременные собственные значения определяют однозначно (с точностью до множителя) их общий собственный вектор (другими словами, если их совместный спектр простой). Наши требования менее жесткие, а именно: любой полином от генераторов представления, коммутирующий со всеми операторами полного набора П, является функцией этих операторов. Однако в пространстве векторов состояний могут действовать другие операторы (например, операторы электрического заряда или барионного числа), которые хотя и коммутируют с операторами системы П, тем не менее не являются функциями этих операторов.

(это значит, в частности, что существует третья компонента (2.3.14)).

Действительно, условие, что $\boldsymbol{S}$ является псевдовектором (это условие учитывает (2.3.16)), дает

$$S_j = \frac{a}{m}(w_j - bw_0 P_j), \tag{2.3.19}$$

где a и b являются функциями импульса P, инвариантными относительно группы трехмерных евклидовых вращений и, следовательно, зависящими лишь от P^0 и m (так как $\boldsymbol{P}^2 = P^{0^2} - m^2$). Здесь учтено, что $\boldsymbol{P}$ и w_0 меняют знак при пространственном отражении, а значит, их произведение остается неизменным. С другой стороны, таким же свойством обладал бы член типа $(\boldsymbol{wP})\boldsymbol{P}$, однако в силу (2.3.10) он равен $w_0 P^0 \boldsymbol{P}$ и, следовательно, не дает ничего нового. Чтобы определить коэффициенты a и b, подставим выражение (2.3.19) в (2.3.17). Сравнение левой и правой частей дает два уравнения для a и b:

$$a\left[P^0 - b\left(P^{0^2} - m^2\right)\right] = m, \qquad a(1 - bP^0) = mb.$$

Эта система имеет два решения: $a = 1$, $b = \frac{1}{m + P^0}$ и $a = -1$, $b = \frac{1}{P^0 - m}$. Второе из них отбрасывается условием (2.3.15). Таким образом, равенство (2.3.18) доказано.

Заметим, что комбинация (2.3.18) есть не что иное, как пространственные компоненты вектора w, предварительно трансформированного в систему покоя,

$$S_j = (\Lambda_p^{-1} w)_j,$$

где Λ_p — частное преобразование Лоренца, переводящее ось времени по вектору p:

$$\Lambda_p^{-1} p = (m,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Явный вид матрицы Λ_p^{-1} таков:

$$\begin{gathered}(\Lambda_p^{-1})^0_\mu = (\Lambda_p^{-1})^\mu_0 = \frac{p_\mu}{m} = g_{\mu\nu}\frac{p^\mu}{m}, \\ (\Lambda_p^{-1})^j_k = \delta^j_k + \frac{p^j p^k}{m(m + p^0)}.\end{gathered} \tag{2.3.20}$$

В силу (2.3.17) эрмитовы операторы S_j являются генераторами алгебры Ли группы вращения трехмерного евклидова пространства O_3^+ (или, что то же самое, алгебры Ли группы $SU(2)$ двухрядных унитарных матриц с определителем 1). Ее называют *малой группой* группы Пуанкаре, соответствующей данному неприводимому представлению*) группы $\mathfrak{P}_0$. Неприводимые представления группы $SU(2)$ хорошо изучены (см., например, [26]). Все они конечномерны и могут быть пронумерованы значением полного спина:

$$S^2 = j(j+1), \quad j = 0,\ 1/2,\ \ldots$$

Упражнение 2.3.4. Показать, что инвариант W (2.3.12) равен произведению S^2 и m^2:

$$W = m^2 S^2 = m^2 j(j+1). \tag{2.3.21}$$

Число j есть по определению полный момент количества движения системы (или спин частицы, если «система» состоит из одной частицы).

Мы реализуем неприводимое представление $[m,\ j,\ +]$ группы $\mathfrak{P}_0$ класса 1а в оснащенном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_{mj+}$ функций от собственных значений p^μ и ζ операторов P^μ и S_3. Переменная ζ принимает $2j+1$ значений:

$$\zeta = -j,\quad -j+1,\ \ldots,\ j-1,\ j, \tag{2.3.22}$$

4-вектор p^μ пробегает «верхний гиперболоид» V_m^+:

$$p^0 = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}. \tag{2.3.23}$$

Скалярное произведение в $\mathscr{H}_{mj+}$ определяется равенством

$$(\Phi,\ \Psi) = \sum_{\zeta=-j}^{j} \int_{V_m^+} \overline{\Phi(p,\ \zeta)}\, \Psi(p,\ \zeta) \frac{d^3p}{p^0}. \tag{2.3.24}$$

Упражнение 2.3.5. Показать, что выражение $p^{0^{-1}} d^3p$ задает инвариантную меру на V_m^+, т. е. если q и p связаны преобразованием Лоренца ($q^2 = p^2 = m^2$, $\varepsilon(q^0) = \varepsilon(p^0) = 1$), то

$$\frac{d^3p}{p^0} = \frac{d^3q}{q^0}.$$

---

*) На самом деле малая группа может быть определена во всех перечисленных выше четырех классах представлений, и ее тип зависит лишь от класса неприводимых представлений. Определение малой группы следующее: пусть Γ — спектр оператора P одного из представлений 1—4 группы Пуанкаре; малой группой точки $p \in \Gamma$ называется подгруппа B_p преобразований собственной группы Лоренца, оставляющих вектор p инвариантным. Для любых двух точек из Γ малые группы изоморфны, и этот факт существен для характеристики типа малых групп Так, для класса 1, как мы убедились, — это группа евклидовых вращений трехмерного пространства, для класса 2 — это группа движений евклидовой плоскости (включая трансляции), для класса 3 — группа псевдоевклидовых вращений трехмерного пространства (с сигнатурой $+--$) и (см. упражнение 2.3.7) для класса 4 — это вся группа Лоренца.

Пространство $\mathscr{H}_{mj+}$ можно «оснастить» обычным образом. В качестве плотного в $\mathscr{H}_{mj+}$ ядерного пространства удобно выбрать счетно-нормированное пространство Ω_{mj+}, состоящее из всех функций $\Phi(p, \zeta)$, которые при фиксированном ζ принадлежат $\mathscr{S}(V_m^+)$, т. е. бесконечно дифференцируемы и быстро убывают на гиперболоиде V_m^+.

Операторы P^μ (так же как и S_3) определены на Ω_{mj+} как умножение на p^μ и оставляют при таком определении это пространство инвариантным: если $\Phi \in \Omega_{mj+}$, то и $P^\mu\Phi \in \Omega_{mj+}$ или, в символической записи,

$$P^\mu\Omega_{mj+} \subset \Omega_{mj+} \qquad (S_3\Omega_{mj+} \subset \Omega_{mj+}). \tag{2.3.25}$$

Напротив, действие операторов импульса не определено для любого вектора самого пространства $\mathscr{H}_{mj+}$, так как из квадратичной интегрируемости функции $\Phi(p, \zeta)$ на V_m^+, вообще говоря, не следует квадратичная интегрируемость функции $P^\mu\Phi(p, \zeta)$. Собственные же функции оператора импульса, как и в нерелятивистской квантовой механике, являются обобщенными состояниями, принадлежащими сопряженному пространству $\overset{*}{\Omega}_{mj+}$.

В частном случае скалярных частиц ($j=0$) ядерное пространство Ω и сопряженное к нему пространство будут подробно рассмотрены в п. 5.1.

Унитарные операторы $U(\underset{\sim}{a}, A)$ представления группы $\mathfrak{P}_0$, в отличие от инфинитезимальных операторов P^μ и $M^{\mu\nu}$, определены во всем гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_{mj+}$. Особенно простой вид имеет представление подгруппы трансляций

$$(U(\underset{\sim}{a}, 1)\Psi)(p, \zeta) = e^{-ipa}\Psi(p, \zeta). \tag{2.3.26}$$

Чтобы построить представление $U(0, A)$ однородной группы, поступим следующим образом. Выделим на гиперболоиде (2.3.23) импульс в системе покоя

$$p_R = (m, 0) \tag{2.3.27}$$

(выбор именно этого вектора обусловлен лишь соображениями удобства). Представление малой группы $SU(2)_R$, оставляющей инвариантным этот вектор, зададим в точке $p = p_R$ равенством

$$(U(V)\Psi)(p_R, \zeta) = \sum_{\eta=-j}^{j} D^{(j)}_{\zeta\eta}(V)\Psi(p_R, \eta). \tag{2.3.28}$$

Здесь $V \in SU(2)$, т. е. V — двухрядная унитарная матрица, которая может быть записана в виде

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -\bar{v}_2 & \bar{v}_1 \end{pmatrix}, \qquad \det V = |v_1|^2 + |v_2|^2 = 1, \tag{2.3.29}$$

а $D^{(j)}_{\zeta\eta}(V)$ — матричные элементы неприводимого представления группы $SU(2)$, соответствующего спину j:

$$D^{(j)}_{\zeta\eta}(V)=\sqrt{\frac{(j+\eta)!\,(j-\eta)!}{(j+\zeta)!\,(j-\zeta)!}}\,v_1^{\eta+\zeta}v_2^{\eta-\zeta}P^{(\eta-\zeta,\ \eta+\zeta)}_{j-\eta}(v_1\bar v_1-v_2\bar v_2), \quad (2.3.30)$$

где $P^{(a,\ b)}_n(x)$ — полиномы Якоби:

$$P^{(a,\ b)}_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-a}(1+x)^{-b}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{a+n}(1+x)^{b+n}\right]$$

(см., например, [26], а также Йоос (1962)). Заметим, что если элементы $V_{\alpha\beta}$ матрицы (2.3.29) занумерованы индексами α, β, принимающими значения 1 и 2, то $D^{1/2}_{\zeta\eta}(V)=V_{3/2-\zeta,\ 3/2-\eta}$. Любая унимодулярная матрица $A\in SL(2)$ однозначно разлагается на произведение унитарной и положительно определенной матриц:

$$A=V_AH_A,\quad V_A=A\sqrt{A^{-1}A^{*-1}},\quad H_A=\sqrt{A^*A} \quad (2.3.31)$$

(согласно упражнению 2.2.2 V_A соответствует преобразованию вращения, а H_A — чистому преобразованию Лоренца). Представление преобразования (2.2.31) в точке $p=p_R$ имеет вид

$$(U(0,\ A)\Psi)(p_R,\ \zeta)=\sum_{\eta=-j}^{j}D^{(j)}_{\zeta\eta}(V_A)\Psi(\Lambda^{-1}(H_A)p_R,\ \eta), \quad (2.3.32)$$

где $\Lambda(H_A)$ — преобразование Лоренца, соответствующее, согласно (2.2.15), матрице H_A, V_A — унитарная матрица, определяемая из (2.3.31). Мы видим, что в точке p_R частное преобразование Лоренца действует лишь на аргумент p функции Ψ (заметим, что $\Lambda(A^{-1})p_R=\Lambda(H_A^{-1})p_R$). На спиновый индекс ζ действует нетривиальным образом только трехмерное вращение, оставляющее инвариантным вектор p_R.

Используя (2.3.32) и тот факт, что произведению матриц A соответствует произведение операторов U, можно найти действие $U(0,\ A)$ на Ψ в любой точке p. Для этого поступим следующим образом. Пусть Λ_p — частное преобразование Лоренца, переводящее вектор p_R (2.3.27) в заданный вектор p на гиперболоиде V_m^+:

$$\begin{aligned}(\Lambda_p x)^0&=\frac{p^0}{m}x^0+\frac{1}{m}\,px,\\ (\Lambda_p x)^j&=x^j+\frac{p^j}{m}\left(\frac{px}{p^0+m}+x^0\right).\end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Этому преобразованию соответствует однозначно и положительно определенная матрица H_p из $SL(2)$

$$H_p=\frac{m+\underset{\sim}{p}}{\sqrt{2m(p^0+m)}}=\frac{1}{\sqrt{2m(p^0+m)}}\begin{pmatrix} p^0+m+p^3 & p^1-ip^2 \\ p^1+ip^2 & p^0+m-p^3\end{pmatrix}, \tag{2.3.34}$$

такая, что

$$H_p \underset{\sim}{p}_R H_p=\underset{\sim}{p}. \tag{2.3.35}$$

Чтобы убедиться, что матрица (2.3.34) действительно удовлетворяет (2.3.35), достаточно заметить, что при $p^2=m^2$

$$\underset{\sim}{p}^2=2p^0\underset{\sim}{p}-m^2,$$

и, следовательно,

$$(m+\underset{\sim}{p})^2=2(p^0+m)\underset{\sim}{p}.$$

Любая матрица $A\in SL(2)$ может быть представлена в виде

$$A=H_pB, \tag{2.3.36}$$

где $H_p^2=\underset{\sim}{p}$ и $\det B=1$. В силу (2.3.31), (2.3.32) и (2.3.36) имеем

$$\begin{aligned}(U(0,\ A)\Psi)(p,\ \zeta)&=(U(0,\ H_p)U(0,\ B)\Psi)(p,\ \zeta)=\\ &=D^{(j)}_{\zeta\eta}(H_p)(U(0,\ B)\Psi)(\Lambda_p^{-1}p,\ \eta)=(U(0,\ B)\Psi)(p_R,\ \zeta)=\\ &=\sum_{\eta=j}^{j}D^{(j)}_{\zeta\eta}(V_B)\Psi(\Lambda^{-1}(B)\,p_R,\ \eta)=\\ &=\sum_{\eta=-j}^{j}D^{(j)}_{\zeta\eta}\left(H_p^{-1}A\sqrt{A^{-1}H_p^2A^{-1}}\right)\Psi(\Lambda^{-1}(A)\,p,\ \eta)\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

(матрица Λ_p^{-1} дается формулой (2.3.20)).

Упражнение 2.3.6. а) Показать, что матрица H_p (2.3.34) является «положительным» корнем матрицы $\frac{\underset{\sim}{p}}{m}$:

$$H_p=\sqrt{\frac{\underset{\sim}{p}}{m}},\qquad p\in V_m^+. \tag{2.3.38}$$

б) Пусть унимодулярная матрица $A=\underset{\sim}{a}$, где $a^{02}-a^2=1$ (см. упражнение 2.2.1). Показать, что

$$A^{-1}\equiv \underset{\sim}{a}^{-1}=\tilde{a}\equiv a\sigma_0-a\sigma. \tag{2.3.39}$$

в) Убедиться непосредственно, что матрица

$$V(A,\ p)=H_p^{-1}A\sqrt{A^{-1}H_p^2A^{*-1}}=\sqrt{\underset{\sim}{p}^{-1}}\,A\sqrt{A^{-1}\underset{\sim}{p}A^{*-1}}, \tag{2.3.40}$$

входящая в аргумент представления $D^{(j)}$ (2.3.37), унитарна.

г) Показать, что в рассматриваемом представлении операторы S_k (2.3.18) являются генераторами $D^{(j)}(V(A, p))$ (см. (2.3.3)):

$$S_k = -i\left[\frac{\partial}{\partial\theta} D^j\left(V\left(e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_k}, p\right)\right)\right]_{\theta=0}.$$

д) Показать, что инфинитезимальные операторы представления $[m, j, +]$ действуют на функции $\Psi(p, \xi)$ по формулам

$$\begin{aligned} P^\mu &= p^\mu, \\ M &= -ip\times\nabla_p + S, \\ N &= -ip^0\nabla_p - \frac{p\times S}{m+p^0}, \end{aligned} \tag{2.3.41}$$

где в силу (2.3.23)

$$\nabla_{p^j}\Psi(p, \xi) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial p^j} + \frac{\partial p^0}{\partial p^j}\frac{\partial}{\partial p^0}\right)\Psi = \left(\frac{\partial}{\partial p^j} + \frac{p^j}{p^0}\frac{\partial}{\partial p^0}\right)\Psi(p, \zeta).$$

Показать, что подстановка (2.3.18) в (2.3.41) превращает последние два равенства в тождества.

Полученные результаты могут быть резюмированы следующим образом.

Операторы $U(\underset{\sim}{a}, A)$ неприводимого унитарного представления $[m, j, +]$ группы $\mathfrak{P}_0$ действуют в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_{mj+}$ по формуле

$$(U(\underset{\sim}{a}, A)\Psi)(p, \zeta) = e^{-ipa}\sum_{\eta=-j}^{j} D^{(j)}_{\zeta\eta}(V(A, p))\,\Psi(\Lambda^{-1}(A)\,p, \eta), \tag{2.3.42}$$

где $D^{(j)}$ — матрица неприводимого представления (j) группы $SU(2)$ (2.3.30), а унитарная унимодулярная матрица $V(A, p)$ определена равенством (2.3.40).

Представления, соответствующие целым значениям j, являются однозначными представлениями собственной группы Пуанкаре $\mathfrak{P}_+^\uparrow$, в то время как представления с полуцелыми j суть двузначные представления этой группы. И те и другие являются обычными однозначными представлениями спинорной группы $\mathfrak{P}_0$. В дальнейшем (п. 4.3) мы познакомимся с другой формой представления группы $\mathfrak{P}_0$ в частном случае дираковских спиноров $(j = {}^1/_2)$.

Упражнение 2.3.7. а) Показать, что в случае 2а при $p^{(0)} = (1, 0, 0, 1)$ малая группа $L_{p^{(0)}}$ группы $\mathfrak{P}_0$ состоит из матриц вида

$$\underset{\sim}{\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}}z \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \qquad z = x + iy,$$

где θ имеет смысл угла вращения вокруг оси p^3. Показать, что группа $L_{p^{(0)}}$ гомоморфна группе движений (трансляций и вращений) евклидовой плоскости (см., например, Уайтман (1960б) или Вигнер (1962б)) которая порождается генераторами $M_1, -N_2 M_2, +N_1, M_3$.

б) Показать, что в случае 3 при $p^{(0)} = (0, 0, 0, m)$ малая группа $L_{p^{(0)}}$ гомоморфна группе Лоренца в трехмерном пространстве (с сигнатурой $+--$), порождаемой генераторами N_1, N_2 и M_3.

Полное гильбертово пространство $\mathscr{H}$ векторов состояний является прямой суммой (и интегралом) неприводимых инвариантных подпространств $\mathscr{H}_{mj+}$, каждое из которых взято с некоторой конечной или бесконечной кратностью $\nu = \nu(m^2, j)$. Если принять жесткую формулировку постулата спектральности (одновременное выполнение требований I и II), то

$$\mathscr{H} = \{c\Psi_0\} \oplus \int_{m_1^2}^{\oplus} d\rho(m^2) \sum_{j=0,\ \frac{1}{2};\ 1,\ \dots}^{\oplus} \nu(m^2, j)\, \mathscr{H}_{mj+}, \qquad (2.3.43)$$

где Ψ_0 — вектор вакуума, $\{c, \Psi_0\}$ — одномерное пространство векторов, коллинеарных с вакуумом, $\rho(m^2)$ — монотонно неубывающая функция. Более конкретная реализация пространства векторов состояний в некотором частном случае будет дана в § 5.

Как уже говорилось, когерентные подпространства пространства $\mathscr{H}$ являются суммами либо только по целым, либо только по полуцелым значениям j. Случай когерентных пространств тоже может быть охвачен формулой (2.3.43), если допустить нулевую кратность для некоторых подпространств.

3.4. Пространственное и временное отражения. Представления общей группы Пуанкаре. Наряду с непрерывными преобразованиями группы $\mathfrak{P}_0$ важную роль в квантовой теории играют дискретные преобразования пространственного и временного отражений *):

$$I_s x = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3), \qquad I_t x = (-x^0, x^1, x^2, x^3),$$
$$I_{st} x = I_s I_t x = (-x^0, -x^1, -x^2, -x^3). \qquad (2.3.44)$$

Операторы I действуют на матрицу $\underset{\sim}{x}$ (2.2.10) по формулам

$$\underset{\sim}{I_s x} = \varepsilon \tilde{x} \varepsilon^{-1} \equiv \tilde{x} = x^0\sigma_0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{\sigma},$$
$$\underset{\sim}{I_t x} = -\varepsilon \underset{\sim}{x} \varepsilon^{-1}, \quad \underset{\sim}{I_{st} x} = -\underset{\sim}{x}, \qquad (2.3.45)$$

*) Часто в литературе вместо I_s (индекс s происходит от английского слова space — пространство) и I_t используются обозначения P и T. Здесь мы приняли обозначения (2.3.44), поскольку символом P у нас обозначен оператор энергии — импульса.

где черта означает комплексное сопряжение, а

$$\varepsilon = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.46}$$

Мы, как и раньше, ищем всевозможные проективные представления общей группы Пуанкаре, т. е. такое соответствие между элементами g общей группы $\mathfrak{P}$ и унитарными или антиунитарными операторами U, при котором

$$U(g_1)\,U(g_2) = \omega(g_1,\ g_2)U(g_1g_2). \tag{2.3.47}$$

Теорема 2.3.1. *В релятивистской квантовой теории, в которой имеет место принцип спектральности, оператор $U(I_s)$ унитарен, а оператор $U(I_t)$ антиунитарен.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2.1 каждый из операторов $U(I_\lambda)$ ($\lambda = s,\ t,\ st$) либо унитарен, либо антиунитарен. Если оператор $U(I_\lambda)$ унитарен, то фазы у операторов $U(g)$ могут быть подобраны так, что

$$U^2(I_\lambda) = \omega(I_\lambda,\ I_\lambda) = 1,$$

а если $U(I_\lambda)$ антиунитарен, то

$$U^2(I_\lambda) = \pm 1. \tag{2.3.48}$$

Действительно, если в первом случае при некотором выборе фаз $U^2(I_\lambda) = e^{2i\alpha}$, то оператор $U_1(I_\lambda) = e^{-i\alpha}U(I_\lambda)$ будет обладать нужным свойством. Если же оператор $U(I_\lambda)$ антиунитарен, то фазовый сдвиг не меняет квадрата оператора, так как

$$(e^{i\beta}U(I_\lambda))^2 = e^{i\beta}U(I_\lambda)\,e^{i\beta}U(I_\lambda) = e^{i\beta}e^{-i\beta}\,U(I_\lambda)\,U(I_\lambda) = U^2(I_\lambda).$$

Однако в этом случае справедливо утверждение: если $U^2 = e^{i\alpha}$ (α вещественно, U антиунитарен), то $U^2 = \pm 1$ (т. е. $\alpha = 0,\ \pi$).

Упражнение 2.3.8. Доказать это утверждение. (Указание: любой антиунитарный оператор U может быть представлен в виде $U = VK$, где V — унитарный оператор, K — оператор комплексного сопряжения; отсюда можно получить, что $U^2 = V\overline{V}$, где черта означает комплексное сопряжение. Пользуясь тем, что оператор U^2 кратен единичному оператору, а также имея в виду тождество $V^T\overline{V} = 1$, показать, что $e^{-i\alpha} = \overline{V}V = V^T\overline{V}V\overline{V} = V\overline{V} = e^{i\alpha}$, т. е. $U^4 = e^{2i\alpha} = 1$.)

Упражнение 2.3.9. Пользуясь формулой (2.3.48), справедливой как для унитарных, так и для антиунитарных операторов, показать, что

$$U(I_\lambda)\,U(a,\ 1)\,U^{-1}(I_\lambda) = U(I_\lambda a,\ 1). \tag{2.3.49}$$

(При выводе (2.3.49) используется тот факт, что единственное одномерное унитарное представление группы Пуанкаре — единичное представление (Уайтман (1960б).)

Если считать (2.3.49) доказанным и принять во внимание, что

$$U(a,\ 1)=e^{-iPa}, \tag{2.3.50}$$

где P — инфинитезимальный оператор энергии — импульса, то нетрудно вывести соотношения

$$\left.\begin{aligned} &U(I_\lambda)P^\mu U^{-1}(I_\lambda)=I_\lambda P^\mu, && \text{если } U(I_\lambda) \text{ унитарен;}\\ &U(I_\lambda)P^\mu U^{-1}(I_\lambda)=-I_\lambda P^\mu, && \text{если } U(I_\lambda) \text{ антиунитарен.}\end{aligned}\right\} \tag{2.3.51}$$

С другой стороны, в силу постулата спектральности, знак энергии всегда положителен, поэтому первая возможность (2.3.51) должна осуществляться при $I_\lambda=I_s$, а вторая — при $I_\lambda=$ $=I_t$ или I_{st}. Теорема 2.3.1 доказана.

Фаза оператора $U(gI_\lambda)$, где $g\in\mathfrak{P}$, еще свободна, и мы выбираем ее так, чтобы выполнялось равенство

$$U(g)\,U(I_\lambda)=U(gI_\lambda);\quad g\in\mathfrak{P},\quad \lambda=s,\ t,\ st. \tag{2.3.52}$$

За счет выбора фаз у $U(I_t)$ и $U(I_{st})$ можно добиться того, чтобы

$$U(I_s)\,U(I_t)=U(I_{st}). \tag{2.3.53}$$

Кроме того, поскольку оператор $U(I_s)$ унитарен, можно, как мы уже отмечали, добиться выполнения равенства

$$U^2(I_s)=1. \tag{2.3.54}$$

Упражнение 2.3.10. Пользуясь (2.3.53) и (2.3.54), показать, что

$$\begin{aligned} &\omega(I_t,\ I_s)=\omega(I_t,\ I_t)\,\omega(I_{st},\ I_{st}),\\ &\omega(I_{st},\ I_t)=\omega(I_t,\ I_t),\\ &\omega(I_s,\ I_{st})=1,\\ &\omega(I_t,\ I_{st})=\omega(I_{st},\ I_{st}),\\ &\omega(I_{st},\ I_s)=\omega(I_t,\ I_t)\,\omega(I_{st},\ I_{st}).\end{aligned} \tag{2.3.55}$$

Проективные представления группы отражений характеризуются значениями $U^2(I_t)$ и $U^2(I_{ts})$. Существуют четыре комбинации этих значений, которые определяют тип представления: (1, 1), (1, —1), (—1, 1), (—1, —1).

§ 4. Четырехкомпонентные спиноры и уравнение Дирака

В этом параграфе мы рассмотрим в качестве примера низшее нетривиальное (неунитарное) представление группы $SL(2)$ и связанное с ним унитарное представление группы $\tilde{\mathfrak{P}}$. Они будут встречаться неоднократно в дальнейшем.

4.1. Спинорное представление группы $SL(2)$ и пространственное отражение. Низшее нетривиальное («базисное») представление группы $SL(2)$ двумерно. Величины, преобразующиеся по этому представлению, называются спинорами. Имеется два неэквивалентных двухрядных представления группы $SL(2)$ и, соответственно, два типа спиноров, которые мы будем обозначать ξ^{α} и $\chi_{\dot\alpha}$. Если спинор с верхним непунктирным индексом преобразуется при помощи матрицы A: $\xi'^{\alpha} = A^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta}$, то спинор с нижним пунктирным индексом будет преобразоваться посредством матрицы A^{*-1}: $\chi'_{\dot\alpha} = (A^{*-1})^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\chi_{\dot\beta}$. Будем считать, далее, что верхние пунктирные индексы преобразуются комплексно сопряженной матрицей $\bar{A}$, а нижние непунктирные индексы — «дуальной» матрицей $\hat{A} = A^{T^{-1}}$. Из этого следует, что «спин-тензор» $\underset{\sim}{x}$ (2.2.10), трансформирующийся по закону (2.2.14), является тензором типа $\underset{\sim}{x}^{\alpha\dot\beta}$.

Упражнение 2.4.1. Показать, что

$$A^{*-1} = \varepsilon\bar{A}\varepsilon^{-1}, \qquad \hat{A} = \varepsilon A\varepsilon^{-1}, \tag{2.4.1}$$

где $\varepsilon = i\sigma_2$ — двухрядная матрица (2.3.46), так что представления A и $\hat{A}$ ($\bar{A}$ и A^{*-1}) эквивалентны. Таким образом, антисимметричный тензор ε может служить для поднятия и опускания спинорных индексов. (Указание: воспользоваться равенством (2.3.39).)

Очевидно, что если спинор ξ преобразуется под действием матрицы A, то комплексно сопряженный спинор будет преобразовываться по комплексно сопряженному представлению $\bar{A}$, и, следовательно, по принятому соглашению, его компоненты будут нумероваться пунктирным индексом: $\xi^{\dot\alpha}$.

Определим теперь спинорное представление пространственного отражения I_s.

Согласно (2.3.45), при отражении трех пространственных осей спин-тензор $\underset{\sim}{x}^{\alpha\dot\beta}$ переходит в тензор

$$\tilde{x}_{\dot\alpha\beta} = (\varepsilon\underset{\sim}{x}\varepsilon^{-1})_{\dot\alpha\beta}.$$

Поэтому естественно считать, что при пространственном отражении спинор с верхним непунктирным индексом переходит в спинор с нижним пунктирным индексом и обратно. Чтобы записать трансформацию с таким свойством в виде линейного преобразования, необходимо удвоить размерность спинорного представления и ввести в рассмотрение четырехкомпонентный дираковский спинор (или «биспинор»)

$$v = \begin{pmatrix} \xi^{\alpha} \\ \chi_{\dot\alpha} \end{pmatrix}. \tag{2.4.2}$$

При собственных преобразованиях группы $SL(2)$ спинор v преобразуется по приводимому представлению

$$V(A)=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}. \tag{2.4.3}$$

Операцию пространственного отражения определим по формуле

$$V(I_s)\,v=\eta_s\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} v=\eta_s\begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \xi^\alpha \end{pmatrix}, \tag{2.4.4}$$

где η_s — фазовый множитель, подчиненный условию $\eta_s^4=1$ (так как двукратное отражение можно рассматривать либо как тождественное преобразование, либо как вращение на угол 2π, то $\eta_s^2=\pm 1$). Обычно выбирается $\eta_s^2=-1$ (см. упражнение 2.4.7, а также [6]).

4.2. Алгебра γ-матриц. Инвариантная запись биспинорного представления. Специальная форма биспинора (2.4.2) и соответствующая ему форма биспинорного представления (2.4.3) имеют место лишь при определенном выборе базиса в четырехмерном спинорном пространстве. Для того чтобы записать закон преобразования биспинора в произвольном базисе, удобно воспользоваться формализмом, связанным с γ-матрицами Дирака.

Напомним основные определения.

Каждому 4-вектору p в пространстве Минковского поставим в соответствие некоторый линейный оператор $\hat{p}$ в четырехмерном комплексном пространстве дираковских спиноров таким образом, чтобы имели место соотношения

$$\begin{gathered} \widehat{p+q}=\hat{p}+\hat{q}, \qquad \widehat{\alpha p}=\alpha\hat{p}, \\ \hat{p}\hat{q}+\hat{q}\hat{p}=2pq\mathbf{1}\equiv 2(p^0q^0-\mathbf{pq})\,\mathbf{1}, \end{gathered} \tag{2.4.5}$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица 4×4, α — число.

Пусть e_μ — ортонормированный базис в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве:

$$e_\mu e_\nu=g_{\mu\nu}, \quad \mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Каждый 4-вектор x может быть записан в виде линейной комбинации базисных векторов

$$p=p^\mu e_\mu.$$

В силу линейности соответствия $p\to\hat{p}$ оператор $\hat{p}$ может быть представлен в виде

$$\hat{p}=p^\mu\hat{e}_\mu\equiv p^\mu\gamma_\mu,$$

где γ_μ — некоторые стандартные матрицы 4×4, которые в силу (2.4.5) удовлетворяют перестановочным соотношениям *)

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \equiv \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \qquad (2.4.6)$$

($g_{\mu\nu}$ — метрический тензор в пространстве Минковского). Наряду с матрицами γ_μ мы будем часто пользоваться матрицами с верхними индексами

$$\gamma^\mu = g^{\mu\nu}\gamma_\nu,$$

которые удовлетворяют тому же соотношению антикоммутации (2.4.6). Имеют место равенства

$$\hat{p} = p^\mu\gamma_\mu = p_\mu\gamma^\mu = g_{\mu\nu}p^\mu\gamma^\nu. \qquad (2.4.7)$$

Из (2.4.6) следует, что все матрицы γ^μ (следовательно, и их произведения) унитарны. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать дополнительно, что матрица γ^0 эрмитова, а матрицы γ^j ($j=1, 2, 3$) антиэрмитовы:

$$\gamma^{\mu*} = g^{\mu\mu}\gamma^\mu.$$

Отметим, что, в то время как антикоммутационные соотношения (2.4.6) сохраняются при всех преобразованиях подобия (из $L(4, C)$), свойства антиэрмитовости γ-матриц сохраняются лишь при унитарных преобразованиях подобия $\gamma^\mu \to V\gamma^\mu V^*$ ($VV^* = 1$).

Важную роль в теории γ-матриц играет лемма Паули.

Лемма Паули. *Если γ_μ и γ'_μ — две системы матриц* 4×4, *удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям* (2.4.6), *то они связаны преобразованием подобия*

$$\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1},$$

где S — несингулярная четырехрядная матрица, определяемая матрицами γ_μ и γ'_μ однозначно с точностью до множителя.

Элементарное доказательство этой леммы изложено в обзоре Гуда (1955), а также в [6]. Мы его приводить не будем.

Всевозможные произведения γ-матриц (включая единичную матрицу) порождают алгебру с 16 линейно независимыми элементами. Среди них особую роль играет произведение всех четырех γ-матриц:

$$\gamma^5 = -\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \qquad (2.4.8)$$

Матрица γ^5 антиэрмитова и антикоммутирует с матрицами γ^μ:

$$[\gamma^5, \gamma^\mu]_+ = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3), \qquad (\gamma^5)^2 = -1. \qquad (2.4.9)$$

*) Иногда используется другое определение, при котором матрицы γ_μ эрмитовы, а антикоммутатор задается равенством $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ (см., например, [28] и [29]). Мы придерживаемся обозначений, принятых в монографиях [4] и [6].

Упражнение 2.4.2. Пользуясь перестановочными соотношениями (2.4.6) и существованием матрицы γ^5, удовлетворяющей (2.4.2), показать, что след произведения любого нечетного числа матриц γ^μ равен нулю, в то время как

$$\operatorname{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Для того чтобы действие оператора $\hat{p}$ не зависело от выбора базиса в спинорном пространстве *), необходимо, чтобы он вел себя при преобразованиях V этого базиса как смешанный тензор $\hat{p}^\alpha_\beta$ (α, $\beta = 1, 2, 3, 4$). Отсюда получаем следующую связь между биспинорным представлением $V(A)$ группы $SL(2)$ и четырехвекторным (лоренцевым) представлением $\Lambda(A)$ этой группы:

$$V(A)\hat{p}V^{-1}(A) = \Lambda\widehat{(A)p} = \gamma_\mu\Lambda(A)^\mu_\nu p^\nu.$$

Поскольку это равенство имеет место для произвольного p, то

$$V(A)\gamma_\nu V^{-1}(A) = \gamma_\mu\Lambda(A)^\mu_\nu, \tag{2.4.10}$$

или

$$V(A)\gamma^\nu V^{-1}(A) = \Lambda(A^{-1})^\nu_\mu\gamma^\mu. \tag{2.4.10a}$$

Упражнение 2.4.3. а) Показать, пользуясь лишь (2.4.6), что матрицы

$$s^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{2.4.11}$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям (2.3.3) для операторов момента $M^{\mu\nu}$.

б) Убедиться, что величины $s^{\mu\nu}$ являются инфинитезимальными операторами биспинорного представления $V(A)$ группы Лоренца **). (Указание: ввести в группе Лоренца бесконечно малые параметры ω^μ_ν по формуле $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$. Показать, пользуясь (2.4.10) и тождеством

$$[s^{\lambda\mu}, \gamma^\nu] = i(g^{\mu\nu}\gamma^\lambda - g^{\lambda\nu}\gamma^\mu), \tag{2.4.12}$$

что при этом $V(A) = 1 + \frac{i}{2}s^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$.)

Операторы m и n, являющиеся спинорным представлением операторов M и N (2.3.4), имеют вид

$$m = \frac{i}{2}\gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \qquad n = \frac{i}{2}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}. \tag{2.4.13}$$

Упражнение 2.4.4. Пусть $A = \underline{a} = a^0\sigma_0 + a^j\sigma_j$, где a — комплексный единичный вектор (см. упражнение 2.2.1). Показать, что в произвольном базисе

*) В терминологии Рашевского (1955) и (1958) такие операторы называются спин-аффинорами.

**) Оператор $s^{\mu\nu}$ называется собственным, или спиновым, моментом соответствующей частицы со спином $1/2$.

матрица биспинорного представления группы $SL(2)$ задается формулой

$$V(A) = \hat{a}\gamma^0 \frac{1+i\gamma^5}{2} + \hat{\tilde{a}}\gamma^0 \frac{1-\gamma^5}{2}, \qquad (2.4.14)$$

где $\hat{a}$ задается равенством (2.4.7). (Указание: пользуясь параметризацией (2.3.2), (2.3.3) матрицы $A = \underset{\sim}{a}$, показать, что генераторы представления (2.4.14) совпадают с матрицами $s^{\mu\nu}$ (2.4.11).)

Частный вид (2.4.3) спинорного представления $V(A)$ соответствует следующему выбору γ-матриц:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & g^{\mu\mu}\sigma_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = -i\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}. \qquad (2.4.15)$$

В этом базисе матрица $\hat{p}$ (2.4.7) приобретает вид

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & \underset{\sim}{p} \\ \tilde{p} & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3. Дискретные преобразования спиноров. Инвариантные билинейные формы. В этом пункте мы рассмотрим спинорное представление операций I_s и I_t и введем операцию зарядового сопряжения спиноров.

В терминах γ-матриц операция пространственного отражения задается линейным оператором $V(I_s)$ в спинорном пространстве

$$V(I_s) = \eta_s\gamma^0, \qquad (2.4.16)$$

который обладает свойством

$$V(I_s)\,\hat{p}V^{-1}(I_s) = p^0\gamma^0 + p^j\gamma^j = p_0\gamma^0 - p_j\gamma^j = \hat{p}'; \qquad (2.4.17)$$

η_s — некоторый множитель ($|\eta_s| = 1$, так как повторное применение операции отражения может приводить лишь к умножению на фазовый множитель).

Прежде чем перейти к операции отражения времени, введем в спинорном пространстве оператор C, при помощи которого можно задать антисимметричную инвариантную билинейную форму

$$vCu = -uCv = v^\alpha C_{\alpha\beta} u^\beta. \qquad (2.4.18)$$

Существование оператора C следует из того, что представления $V(A)$ и $V^{T^{-1}}(A)$ эквивалентны. В этом проще всего убедиться, пользуясь реализацией $V(A)$ (2.4.3) и равенством (2.4.1).

Обычно матрица C определяется равенством

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{T\mu} \qquad (2.4.19)$$

и нормировочным условием

$$C^2 = -1 \quad \text{или} \quad C^T = -C = C^{-1}. \tag{2.4.20}$$

В силу леммы Паули оператор C, удовлетворяющий (2.4.19), существует, поскольку матрицы $-\gamma^{T\mu}$ удовлетворяют тем же антикоммутационным соотношениям (2.4.6), что и γ^μ. Нормировочным условием (2.4.20) C определяется с точностью до знака. Антисимметрия матрицы C является на самом деле следствием (2.4.19).

Упражнение 2.4.5. Показать, что если оператор C удовлетворяет условию (2.4.19), то он задает преобразование эквивалентности между представлениями $V(A)$ и $V^{T^{-1}}(A)$:

$$V^{T^{-1}}(A) = CV(A)C^{-1}.$$

(Указание: показать, что из (2.4.19) и (2.4.11) вытекает

$$Cs^{\mu\nu}C^{-1} = -s^{T\mu\nu},$$

и воспользоваться тем, что если $s^{\mu\nu}$ — генераторы представления $V(A)$, то $-s^{T\mu\nu}$ — генераторы представления $V^{T^{-1}}(A)$.)

Из этого упражнения вытекает инвариантность формы (2.4.18) относительно собственных преобразований из $SL(2)$. При пространственном отражении форма (2.4.18) умножается на $-\eta_s^2$ и остается инвариантной лишь в том случае, если фазовый множитель $\eta_s = \pm i$.

Теперь мы в состоянии определить оператор $V(I_t)$ *физического обращения времени*. Для соответствия с теоремой 2.3.1 и вторым равенством (2.3.51) потребуем, чтобы он был антилинейным, не менял энергии и изменял знак трехмерного импульса. Отсюда, пользуясь (2.4.17), получаем

$$V(I_t)\hat{p}V(I_t)^{-1} = \bar{\hat{p}}^* = \hat{p}^T. \tag{2.4.21}$$

Пользуясь (2.4.19) и (2.4.9), нетрудно проверить, что этим свойством обладает антиунитарный оператор

$$V(I_t)u = i\eta_t\gamma^5 C\bar{u}, \tag{2.4.22}$$

где $\eta_t^4 = 1$.

Наряду с физическим отражением времени можно ввести геометрическое отражение нулевой оси. Спинорным представлением этой операции является унитарный оператор $V = \eta\gamma^0\gamma^5$. Мы не будем пользоваться этим понятием.

Определим теперь *дираково сопряжение* формулой

$$\tilde{u} = \gamma^0\bar{u}. \tag{2.4.23}$$

Упражнение 2.4.6. Показать, что: а) квадратичная форма $\tilde{u}u$ инвариантна относительно любых собственных и несобственных преобразований Лоренца; б) величина $\tilde{u}\gamma^5 u$ инвариантна относительно собственных преобразований группы $SL(2)$ и меняет знак при пространственном и временном отражениях; в) $\tilde{u}\gamma^\mu u$ преобразуется как 4-вектор, пространственные компоненты которого при отражениях меняют знак; г) $\tilde{u}\gamma^5\gamma^\mu u$ преобразуется как аксиальный 4-вектор, у которого при пространственном отражении лишь нулевая компонента меняет знак, а при отражении времени меняют знак три пространственные компоненты. (Указание: воспользоваться равенствами (2.4.11), (2.4.16), (2.4.22) и тождествами

$$(s^{\mu\nu})^* = \gamma^0 s^{\mu\nu}\gamma^0, \qquad [s^{\mu\nu}, \gamma^5] = 0.)$$

Отметим, что если вместо постоянного спинора u рассматривать классическое спинорное поле $\psi(x)$, то при любом преобразовании Лоренца $\Lambda = \Lambda(A)$ преобразуется соответствующим образом и аргумент ψ:

$$[U(A)\psi](x) = V(A)\psi(\Lambda^{-1}(A)x). \tag{2.4.24}$$

Мы увидим дальше, что можно так определить скалярное произведение в пространстве $\psi(x)$, чтобы бесконечномерное представление (2.4.24) было унитарным.

Введем еще понятие зарядового сопряжения, определяемого формулой

$$u^C = C\tilde{u}. \tag{2.4.25}$$

Смысл этого термина выяснится в дальнейшем, когда мы будем рассматривать пространство спинорных состояний (п. 5.3) и операторные спинорные поля (гл. 3, п. 4.3). Сейчас заметим только, что при помощи зарядово сопряженного спинора u^C преобразование отражения времени (2.4.22) может быть записано в виде

$$V(I_t)\,u = i\eta_t\gamma^0\gamma^5 u^C. \tag{2.4.26}$$

Упражнение 2.4.7. а) Показать, что при собственных преобразованиях Лоренца спинор u^C преобразуется по тому же самому представлению, что и u.

б) Показать, что при пространственном отражении

$$V(I_s)\,u^C = -\bar{\eta}_s\gamma^0 u^C, \tag{2.4.27}$$

так что закон преобразования (2.4.20) остается прежним, только если $\eta_s = -\bar{\eta}_s$, т. е. если η_s чисто мнимо.

в) Показать, что при отражении времени

$$V(I_t)\,u^C = \bar{\eta}_t\gamma^5\gamma^2\gamma^0\tilde{u}^C = i\bar{\eta}_t\gamma^0\gamma^5 u, \tag{2.4.28}$$

что совпадает по форме с (2.4.22) или (2.4.26) лишь в том случае, если фазовый множитель η_t вещественен ($\eta_t = \pm 1$). (Далее мы будем придерживаться именно этих соглашений относительно фазовых множителей.)

4.4. Различные реализации γ-матриц. Результаты двух предыдущих пунктов не зависят от явного вида γ-матриц. Однако иногда удобно пользоваться их конкретными реализациями. При этом, в зависимости от задачи, могут оказаться полезными различные представления.

Здесь мы рассмотрим два типа реализации γ-матриц.

К первому типу отнесем такие реализации, при которых матрицы γ^0, γ^1, γ^3 вещественны, а γ^2 чисто мнима. Отсюда и из поведения γ-матриц при эрмитовом сопряжении вытекает следующее простое соотношение между транспонированными матрицами:

$$\text{(I)} \qquad \gamma^{T\mu} = (-1)^\mu \gamma^\mu, \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{2.4.29}$$

Цифра (I) слева напоминает, что соотношение (2.4.29) не является общим свойством γ-матриц, а справедливо лишь для реализаций типа (I). В этом случае определяющее равенство (2.4.19) для оператора C приобретает вид

$$\text{(I)} \qquad C\gamma^\mu C^{-1} = (-1)^{\mu+1}\gamma^\mu \tag{2.4.19a}$$

Матрица C, удовлетворяющая (2.4.19а) и нормировочному условию (2.4.20), имеет вид

$$\text{(I)} \qquad C = i\gamma^0\gamma^2. \tag{2.4.30}$$

Нетрудно видеть, что она вещественна, антисимметрична и коммутирует с γ^5.

К реализациям типа (I) принадлежит базис (2.4.15), в котором биспинорное представление группы $SL(2)$ записывается в квазидиагональном виде (2.4.3) (квазидиагональность $V(A)$ имеет место в любом базисе, в котором матрица γ^5 диагональна).

Другой пример базиса типа (I) дает реализация Паули, в которой матрица γ^0 диагональна (соответствующие γ-матрицы мы будем снабжать индексом P):

$$\gamma_P^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_P^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_P^5 = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4.31}$$

Эта реализация удобна, например, когда необходимо разделить решения уравнения Дирака с положительной и отрицательной энергией (см. п. 4.5). Нетрудно видеть, что базисы (2.4.15) и (2.4.31) связаны между собой симметричным ортогональным преобразованием $\gamma_P^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$, где

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} = S^T = S^{-1}.$$

Полезно отметить, что как в базисе (2.4.15), так и в базисе (2.4.31) генераторы m_j (2.4.13) подгруппы $SU(2)$ имеют тот же вид, что и M_j в первой формуле (2.3.4).

Ко второму типу отнесем реализации, в которых все матрицы γ^μ чисто мнимы. Это так называемый *базис Майорана*. Достоинство базиса этого типа в том, что в нем генераторы $s^{\mu\nu}$ (2.4.11) биспинорного представления группы $SL(2)$ тоже чисто мнимы и, следовательно, матричные элементы представления $V(A)$, так же как и матрица γ^5, вещественны. Мы воспользуемся такой реализацией при обсуждении вопроса о связи спина со статистикой (гл. 5, § 3). В базисе Майорана матрица γ^0 антисимметрична, а матрицы γ^j симметричны:

$$\text{(II)} \qquad \gamma^{T\mu} = -g^{\mu\mu}\gamma^\mu = -\gamma^{*\mu}, \qquad (2.4.32)$$

что вместе с (2.4.19) дает

$$\text{(II)} \qquad C\gamma^\mu C^{-1} = g^{\mu\mu}\gamma^\mu = \gamma^{*\mu}. \qquad (2.4.19б)$$

Матрица C, удовлетворяющая этому условию и условию нормировки (2.4.20), имеет вид

$$\text{(II)} \qquad C = i\gamma^0. \qquad (2.4.33)$$

В этом базисе зарядовое сопряжение в силу (2.4.25) сводится к комплексному сопряжению.

Приведем пример базиса Майорана (мы будем снабжать γ-матрицы в этом базисе индексом M):

$$\begin{gathered}
\gamma_M^0 = i\gamma_P^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = i\gamma_P^0 = \begin{pmatrix} i\sigma_0 & 0 \\ 0 & -i\sigma_0 \end{pmatrix}, \\
\gamma_M^2 = \gamma_P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = -\gamma_P^5 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_0 \\ i\sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\gamma_M^5 = \gamma_P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \qquad (2.4.34)$$

Нетрудно видеть, что в согласии с леммой Паули базисы γ_P^μ и γ_M^μ связаны преобразованием подобия $\gamma_M^\mu = S\gamma_P^\mu S^{-1}$, где S — симметричная унитарная матрица

$$S = \frac{1 + i\gamma_P^2}{2} + i\,\frac{i\gamma_P^3\gamma_P^5 - \gamma_P^0\gamma_P^1}{2},$$

$$S^{-1} = S^* = \frac{1 + i\gamma_P^2}{2} - i\,\frac{\gamma_P^3\gamma_P^5 - \gamma_P^0\gamma_P^1}{2} = \bar{S}, \quad S^4 = 1.$$

В то время как перестановочные соотношения (2.4.6) вместе с условием (анти-) эрмитовости $\gamma^{*\mu}=g^{\mu\mu}\gamma^{\mu}$ инвариантны относительно всех унитарных преобразований подобия ($S\in U(4)$), каждый из классов (I) и (II) инвариантен лишь относительно преобразований подобия из вещественной ортогональной группы ($S\in O(4)$).

4.5. Уравнение Дирака. Простейшим инвариантным уравнением для четырехкомпонентного спинора является уравнение Дирака

$$\left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-m\right)\psi(x)=0 \tag{2.4.35}$$

или, в импульсном пространстве,

$$(\hat{p}-m)\,u(p)=0. \tag{2.4.36}$$

Упражнение 2.4.8. а) Показать, что уравнение Дирака инвариантно относительно произвольного преобразования Пуанкаре (включая отражения), если считать, что трансляции не действуют на спинорные индексы, т. е. что $U_a\psi(x)=\psi(x-a)$.

б) Показать, что если спинор $u(p)$ удовлетворяет (2.4.36), то дираково сопряженный спинор $\bar{u}(p)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{u}(p)\,(\hat{p}-m)\equiv(\hat{p}^{T}-m)\,\bar{u}(p)=0, \tag{2.4.37}$$

в то время как зарядово сопряженный спинор u^{C} удовлетворяет уравнению

$$(\hat{p}+m)\,u^{C}=0. \tag{2.4.38}$$

(Указание: воспользоваться равенством

$$\gamma^{0}\hat{p}\gamma^{0}=\hat{p}^{*}). \tag{2.4.39}$$

Уравнение (2.4.36) рассматривается обычно как уравнение на собственные значения энергии p^0. Возможные значения p^0 определяются из условия

$$\det(\hat{p}-m)\equiv(p^2-m^2)^2=0.$$

Это уравнение имеет два двойных корня:

$$p^0=\pm\,\omega,\quad \text{где}\quad \omega=\omega_p=\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}. \tag{2.4.40}$$

Для снятия вырождения потребуем, чтобы решение $u(p)$ уравнения Дирака было собственной функцией оператора третьей проекции спина S_3, который коммутирует с $\hat{p}$.

Оператор спина $\mathbf{S}$ определим из его выражения в системе покоя при помощи преобразования Лоренца:

$$S_0^j\equiv S^j_{\mathbf{p}=0}=m^j=\frac{i}{2}\,\gamma^5\gamma^0\gamma^j. \tag{2.4.41}$$

Теперь необходимо найти биспинорное представление V частного преобразования Лоренца, переводящее импульс покоящейся частицы $(m, 0)$ в произвольный импульс (ω, p), где $\omega = \sqrt{m^2+p^2}$.

Упражнение 2.4.9. Показать, что искомое представление задается эрмитовой матрицей

$$V = \hat{a}\gamma^0, \tag{2.4.42}$$

где единичный вещественный 4-вектор a имеет компоненты

$$a^0 = \frac{p^0+m}{\sqrt{2m(p^0+m)}}, \qquad a^j = \frac{p^j}{\sqrt{2m(p^0+m)}}. \tag{2.4.43}$$

(Указание: воспользоваться (2.4.14) и тем, что в силу определения V

$$\hat{p} = mV\gamma^0V^{-1} = mVV^*\gamma^0 \tag{2.4.44}$$

и что

$$\hat{a}\hat{a}^*\gamma^0 = ((a^0)^2 + a^2)\,\gamma^0 - 2a^0a^j\gamma^j \tag{2.4.45}$$

(ср. с упражнением 2.3.6).)

Пользуясь (2.4.42), находим следующее выражение для оператора спина:

$$S^j = VS_0^jV^{-1} = \hat{a}S_0^j\hat{a} = \left(a^{0^2}+a^2\right)m^j - 2a^0(a\times n)^j - 2a^j(am) =$$
$$= \frac{1}{m}\left\{p^0m^j - (p\times n)^j - \frac{p^j}{p^0+m}(pm)\right\} = \frac{1}{m}\left(w^j - \frac{w^0p^j}{p^0+m}\right) \tag{2.4.46}$$
$$(p^0 = \omega).$$

Здесь матрицы m^j и n^k задаются формулами (2.4.13), а w^μ связаны с m и n формулой (2.3.7). Заметим, что, как и следовало ожидать, правая часть последнего равенства (2.4.46) совпадает с выражением для оператора спина малой группы (2.3.18).

Аналогично для решений с отрицательной энергией представление V частного преобразования Лоренца, переводящее импульс $(-m, 0)$ в $(-\omega, p)$, задается антиэрмитовой матрицей

$$V = i\hat{a}\gamma^0\gamma^5, \tag{2.4.47}$$

где единичный чисто мнимый 4-вектор a вновь задается компонентами (2.4.43) с $p^0 = -\omega$. Сохраняет свой вид и выражение для оператора спина (2.4.46) с $p^0 = -\omega$.

Упражнение 2.4.10. Показать, что каждая из матриц S^j коммутирует с $\hat{p}$.

Пусть спинор u является собственным вектором третьей проекции спина S_3

$$S_3u(p) = \zeta u(p). \tag{2.4.48}$$

При заданных $p^0 = \pm\omega$ и $\zeta = +1/2$ система (2.4.36), (2.4.48) имеет, с точностью до постоянного множителя, единственное решение. Мы будем нормировать решения этой системы условием

$$\bar{u}u = \frac{\omega}{m}, \tag{2.4.49}$$

или, для произведения u с дираково сопряженным спинором $\tilde{u}$,

$$\tilde{u}u = \varepsilon(p^0) = \frac{p^0}{\omega}. \tag{2.4.50}$$

Четыре независимых решения системы (2.4.36), (2.4.48) обозначим $u^{r(\pm)}(p)$, где $r = 1, 2$; знак $(+)$ соответствует решению с положительной энергией $p^0 = \omega$, знак $(-)$ — решению с $p^0 = -\omega$; $\zeta = 1/2$ при $r = 1$ и $-1/2$ при $r = 2$. Так как спиноры $u^{r(\pm)}$ являются собственными векторами двух эрмитовых матриц — а именно, матрицы

$$H = m\gamma^0 + \boldsymbol{p}\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \tag{2.4.51}$$

и матрицы S_3 (2.4.46) — с разными парами собственных значений, то они ортогональны между собой:

$$\begin{gathered} \bar{u}^{r(\pm)}(\boldsymbol{p})\,u^{s(\pm)}(\boldsymbol{p}) = \frac{\omega}{m}\delta_{rs}, \\ \bar{u}^{r(+)}(\boldsymbol{p})\,u^{s(-)}(\boldsymbol{p}) = \bar{u}^{r(-)}(\boldsymbol{p})\,u^{s(+)}(\boldsymbol{p}) = 0. \end{gathered} \tag{2.4.52}$$

Соотношения ортонормированности имеют место также при суммировании по верхним индексам (по проекции спина и по знаку энергии):

$$\begin{gathered} \sum_{r=1}^{2}\left\{u_\alpha^{r(+)}(\boldsymbol{p})\,\bar{u}_\beta^{r(+)}(\boldsymbol{p}) + u_\alpha^{r(-)}(\boldsymbol{p})\,\bar{u}_\beta^{r(-)}(\boldsymbol{p})\right\} = \frac{\omega}{m}\delta_{\alpha\beta}, \\ \sum_{r=1}^{2}\left\{u_\alpha^{r(+)}(\boldsymbol{p})\,\tilde{u}_\beta^{r(+)}(\boldsymbol{p}) - u_\alpha^{r(-)}(-\boldsymbol{p})\,\tilde{u}_\beta^{r(-)}(-\boldsymbol{p})\right\} = \delta_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{2.4.53}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться также формулой суммирования

$$\sum_{r=1}^{2}\left\{u_\alpha^{r(+)}(\boldsymbol{p})\,\tilde{u}_\beta^{r(+)}(\boldsymbol{p}) + u_\alpha^{r(-)}(-\boldsymbol{p})\,\tilde{u}_\beta^{r(-)}(-\boldsymbol{p})\right\} = \left(\frac{\hat{p}}{m}\right)_{\alpha\beta}. \tag{2.4.54}$$

Вывод формул (2.4.53), (2.4.54) мы предоставляем читателю (см. [4]).

Приведем явный вид четырех решений уравнения Дирака в представлении (2.4.31), в котором γ^0 диагональна:

$$u^{r\,(+)}(p)=\frac{1}{\sqrt{2m(\omega+m)}}\begin{pmatrix}\omega+m & e_r\\ p\sigma & e_r\end{pmatrix},$$
$$u^{r\,(-)}(p)=\frac{1}{\sqrt{2m(\omega+m)}}\begin{pmatrix}-p\sigma & e_r\\ \omega+m & e_r\end{pmatrix}. \qquad (2.4.55)$$

Здесь

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Упражнение 2.4.11. а) Выписать явный вид спиноров $u^{r(\pm)}(p)$ в представлениях, в которых γ-матрицы имеют вид (2.4.15) и (2.4.34).

б) Показать, что независимо от выбора представления:

$$C\bar u^{1\,(+)}(p)=-u^{2\,(-)}(-p),\qquad C\bar u^{2\,(+)}(p)=u^{1\,(-)}(-p),$$
$$C\bar u^{1\,(-)}(p)=u^{2\,(+)}(-p),\qquad C\bar u^{2\,(-)}(p)=-u^{1\,(+)}(-p).$$

4.6. Спинорное представление группы Пуанкаре. Спинорное представление $U(\underset{\sim}{a}, A)$ группы Пуанкаре, в отличие от рассмотренного в п. 1 спинорного представления группы Лоренца, унитарно и бесконечномерно. Тем не менее между этими двумя представлениями имеется тесная связь. Формально отличие спинорного представления группы $\tilde{\mathfrak{P}}$ от соответствующего конечномерного представления группы $SL(2)$ состоит в том, что спиноры, на которые действует представление $U(a, A)$, являются функциями непрерывного векторного аргумента p и этот аргумент тоже преобразуется наряду со спинорным индексом.

Мы уже давали (п. 3.2) описание всех неприводимых представлений типа $[m, j, +]$ группы $\mathfrak{P}_0$, связывая его с соответствующими преобразованиями группы трехмерных вращений. Здесь мы дадим другую реализацию этого представления (в частном случае, когда $j=\frac{1}{2}$), связанную с биспинорным представлением $V(A)$ группы $SL(2)$, в которой преобразования индекса не зависят от векторного аргумента p. Эти две реализации соответствуют различным выборам базиса в пространстве $\mathcal{H}_{m\,1/2}$, в котором действуют операторы $U(\underset{\sim}{a}, A)$. В дальнейшем связь между двумя базисами будет выписана явно.

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}_{m\,1/2}$, состоящее из всех четырехкомпонентных спинорных функций $\Psi^r=\Psi^\alpha(p)$, заданных на гиперболоиде V_m^+, для которых сходится инвариантный интеграл

$$(\Psi, \Psi) = \int\limits_{V_m^+} \tilde{\Psi} \frac{1}{m} \hat{p} \Psi \frac{d^3 p}{p^0}. \tag{2.4.56}$$

Упражнение 2.4.12. Показать, что (2.4.56) определяет скалярное произведение, т. е. что если спинорная функция Ψ не равна тождественно нулю, то $(\Psi, \Psi) > 0$. (Указание: показать, что при $p \in V_m^+$, матрица $\gamma^0 \hat{p}$ положительно определена.)

Спинорное представление группы $\mathfrak{P}_0$ действует в $\mathscr{H}_{m\,1/2}$ по закону

$$[U(\underset{\sim}{a}, A) \Psi](p) = e^{-ipa} V(A) \Psi(\Lambda^{-1}(A) P), \tag{2.4.57}$$

где $V(A)$ — четырехрядная матрица (2.4.3) биспинорного представления группы

Упражнение 2.4.13. Показать, что преобразование (2.4.57) сохраняет скалярное произведение (2.4.56):

$$(U(\underset{\sim}{a}, A)\Phi, U(\underset{\sim}{a}, A)\Psi) = (\Phi, \Psi), \tag{2.4.58}$$

так что представление (2.4.57) унитарно. (Указание: воспользоваться равенством (2.4.15) и соотношением

$$V^*(A)\gamma^0 = \gamma^0 V^{-1}(A), \tag{2.4.59}$$

см. также упражнение 2.4.5.)

Генераторы представления (2.4.57) имеют вид

$$P^\mu = p^\mu, \quad M^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + s^{\mu\nu}; \qquad s^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \tag{2.4.60}$$

где $L^{\mu\nu}$ — орбитальный момент количества движения, определяемый равенствами:

$$L^{ij} = i\left(p^i \frac{\partial}{\partial p^j} - p^j \frac{\partial}{\partial p^i}\right), \qquad L^{0j} = -ip^0 \frac{\partial}{\partial p^j}$$

и

$$[L^{\mu\nu}, s^{\varkappa\lambda}] = 0.$$

Существенно отметить коммутативность орбитальной $(L^{\mu\nu})$ и спиновой $(s^{\mu\nu})$ частей момента количества движения, которая отличает данную реализацию представления от вигнеровской реализации (2.3.41) и делает полезной первую при описании локальных полей (см. гл. 3, § 4).

Представление (2.4.57) приводимо в $\mathscr{H}_{m\,1/2}$. Чтобы убедиться в этом, покажем, что оператор $\hat{p}$ коммутирует со всеми операторами представления, т. е. что

$$U^{-1}(\underset{\sim}{a}, A)\hat{P} U(\underset{\sim}{a}, A) = \hat{P}. \tag{2.4.61}$$

Для проверки (2.4.61) достаточно применить левую и правую части к произвольному вектору $\Psi \in \mathscr{H}_{m\,1/2}$ и воспользоваться равенствами (2.4.57) и (2.4.15), а также тем, что в силу (2.2.19)

$$U^{-1}(\underset{\sim}{a}, A) = U\left(-A^{-1}\underset{\sim}{a}A^{*-1}, A^{-1}\right).$$

Заметим, что, несмотря на то, что матрица $\hat{p}$ не эрмитова, оператор умножения на $\hat{p}$ в $\mathscr{H}_{m\,1/2}$ эрмитов относительно скалярного произведения (2.4.56), т. е.

$$(\Phi, \hat{p}\Psi) = (\hat{p}\Phi, \Psi). \tag{2.4.62}$$

Упражнение 2.4.14. Доказать утверждение (2.4.62), пользуясь тем, что матрица эрмитова относительно эрмитовой формы $\langle u, v\rangle = \tilde{u}v$.

Оператор $\hat{P}$ имеет два бесконечно вырожденных собственных значения в $\mathscr{H}_{m\,1/2}$: $+m$ и $-m$. Соответственно пространство $\mathscr{H}_{m\,1/2}$ распадается на два ортогональных подпространства $\mathscr{H}^{+}_{m\,1/2}$ и $\mathscr{H}^{-}_{m\,1/2}$, каждое из которых является собственным подпространством оператора $\hat{P}$ и инвариантно относительно преобразований (2.4.57). Операторы проектирования $\Pi^{\pm}_{m}$ на $\mathscr{H}^{\pm}_{m\,1/2}$ имеют вид

$$\Pi^{\pm}_{m} = \frac{m \pm \hat{P}}{2m}. \tag{2.4.63}$$

Упражнение. 2.4.15. а) Проверить, что операторы (2.4.63) действительно являются операторами ортогонального проектирования в $\mathscr{H}_{m\,1/2}$, т. е. что $(\Pi^{\pm}_{m})^2 = \Pi^{\pm}_{m}$ и $\Pi^{+}_{m}\Pi^{-}_{m} = 0$. б) Показать, что $\hat{P}\Pi^{\pm}_{m}\Psi = \pm m\Pi^{\pm}_{m}\Psi$.

Пространства $\mathscr{H}^{\pm}_{m\,1/2}$ являются уже неприводимыми подпространствами: в каждом из них представление (2.4.57) неприводимо. Пространство $\mathscr{H}^{+}_{m\,1/2}$ есть не что иное, как совокупность решений уравнения Дирака. В дальнейшем (п. 5.3 и гл. 3, п. 4.3) мы увидим, как с пространством $\mathscr{H}^{-}_{m\,1/2}$ можно связать античастицы. Заметим, что в пространствах $\mathscr{H}^{\pm}_{m\,1/2}$ скалярное произведение (2.4.56) принимает вид

$$(\Phi, \Psi) = \pm \int\limits_{V^{+}_{m}} \tilde{\Phi}\Psi \frac{d^3p}{p^0} \qquad (\Phi, \Psi \in \mathscr{H}^{\pm}_{m\,1/2}). \tag{2.4.64}$$

Заметим, что в одном неприводимом подпространстве группы $\mathfrak{P}_0$, например в $\mathscr{H}^{+}_{m\,1/2}$, как бы смешиваются два неприводимых подпространства группы $SL(2)$: 4-спинор $\Psi^{(+)}$, удовлетворяющий уравнению Дирака, включает в себя двухкомпонентные спиноры обоих типов — с непунктирным и пунктирным индексами. В $\mathcal{H}^{+}_{m\,1/2}$ можно задать независимый базис из двухкомпонентных функций от p, пользуясь положительно частотными решениями $u^{r\,(+)}(p)$ уравнения Дирака (п. 4.5). Базис $\Psi(p, \zeta)$ связан со спинорным базисом $\Psi^{(+)\alpha}(p)$ равенством

$$\begin{gathered}\Psi^{(+)\alpha}(p)=\Psi(p,\ 1/2)\,u^{1\,(+)\alpha}(p)+\Psi(p,\ -1/2)\,u^{2\,(+)\alpha}(p),\\ \Psi(p,\ \zeta)=\sum_{\alpha=1}^{4}\tilde{u}_{\alpha}^{\left(\frac{3}{2}-\zeta\right)(+)}(p)\,\Psi^{(+)\alpha}(p).\end{gathered}\tag{2.4.65}$$

(Здесь мы воспользовались свойствами ортонормированности (2.4.50) и (2.4.52) спиноров u.) Функции $\Psi(p, \zeta)$ задают базис, которым мы пользовались в п. 3.3 для описания любого представления $[m, j, +]$ группы $\mathfrak{P}_0$.

Посмотрим теперь, как действуют дискретные операции отражения I_s и I_t и зарядового сопряжения I_C в пространстве $\mathcal{H}_{m\,1/2}$. Оказывается, что это пространство инвариантно не только относительно собственных преобразований $\mathfrak{P}_0$, но также относительно преобразований пространственного и временного отражений.

Действительно, пространственному отражению соответствует унитарный оператор $V(I_s)$, который согласно (2.4.16) действует следующим образом:

$$(U(I_s)\,\Psi)(p^0,\ \boldsymbol{p})=\eta_s\gamma^0\Psi(p^0,\ -\boldsymbol{p}).\tag{2.4.66}$$

Нетрудно проверить, что если $\Psi(p^0, \boldsymbol{p})$ удовлетворяет уравнению Дирака (2.4.36), то и преобразованный спинор (2.4.66) удовлетворяет этому уравнению, так что $U(I_s)$ переводит каждое из пространств $\mathcal{H}^{\pm}_{m\,1/2}$ в себя. Напомним, что в случае спинорного представления однородной группы $SL(2)$ нам приходилось удваивать число измерений пространства, чтобы включить пространственное отражение. Для унитарного представления $[m, 1/2, +]$ группы $\mathfrak{P}_0$ неприводимое пространство спиноров $\mathcal{H}^{+}_{m\,1/2}$ одно и то же для собственной группы и для группы, включающей пространственное отражение.

Отражению времени I_t в силу (2.4.22) соответствует антиунитарный оператор

$$(U(I_t)\,\Psi)(p^0,\ \boldsymbol{p})=\eta_t\gamma^5\gamma^2\tilde{\Psi}(p^0,\ -\boldsymbol{p}).\tag{2.4.67}$$

Пользуясь (2.4.37), нетрудно видеть, что если $\Psi(p^0, \boldsymbol{p})$ удовлетворяет уравнению Дирака, то и преобразованный спинор (2.4.67) удовлетворяет этому уравнению. Таким образом, в каждом из пространств $\mathcal{H}^{\pm}_{m\,1/2}$ реализуется одно и то же неприводимое представление общей группы $\tilde{\mathfrak{P}}$, включающей как пространственное, так и временное отражения.

В противоположность операциям $U(I_s)$ и $U(I_t)$ антиунитарная операция зарядового сопряжения $U(I_C)$ (2.4.25) переводит пространство $\mathcal{H}^+_{m\,1/2}$ в $\mathcal{H}^-_{m\,1/2}$ и обратно. Действительно, если спинор $\Psi(p) \in \mathcal{H}^+_{m\,1/2}$, т. е. удовлетворяет уравнению Дирака (2.4.36), то в силу упражнения 2.4.8 зарядово сопряженный спинор $\Psi^C(p)$ удовлетворяет уравнению (2.4.38), т. е. принадлежит пространству $\mathcal{H}^-_{m\,1/2}$. Таким образом, если мы хотим, чтобы в пространстве спинорных векторов состояния реализовалось представление не только общей группы Пуанкаре, но и операции зарядового сопряжения, то мы должны рассматривать все пространство $\mathcal{H}_{m\,1/2}$, а не только какое-нибудь одно из неприводимых относительно $\tilde{\mathfrak{P}}$ подпространств $\mathcal{H}^\pm_{m\,1/2}$ (по поводу физической интерпретации операции $U(I_C)$ см. далее, п. 5.3).

§ 5. Примеры: пространства скалярных и спинорных частиц

5.1. Определение оснащенного гильбертова пространства скалярных нейтральных частиц без связанных состояний. Рассмотрим простейший пример теории бесспиновых нейтральных мезонов с массой m, которые не образуют связанных состояний. Векторы состояния в такой теории могут быть представлены в виде последовательности функций *)

$$\Psi = \{\Psi_0,\ \Psi_1(p_1),\ \Psi_2(p_1, p_2),\ \ldots,\ \Psi_n(p_1, \ldots, p_n),\ \ldots\}, \tag{2.5.1}$$

$\Psi_n(p_1, \ldots, p_n)$ определена на произведении гиперболоидов V^+_m:

$$V^{+(n)}_m = V^+_m \times V^+_m \times \ldots =$$
$$= \{(p_j) \mid p_j^2 \equiv p_j^{0^2} - \mathbf{p}_j^2 = m^2, \quad p_j^0 > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{2.5.2}$$

Вектор

$$\Psi_0 = \{\Psi_0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots\} \tag{2.5.3}$$

описывает вакуум; вектор

$$\Psi_n = \{0,\ \ldots,\ 0,\ \Psi_n(p_1, \ldots, p_n),\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots\}$$

описывает состояние с n частицами. Если считать мезоны тождественными между собой, то как частицы с целочисленным спином они должны подчиняться статистике Бозе — Эйнштейна, и (следовательно, функции $\Psi_n(p_1, \ldots, p_n)$ должны быть

*) Такое представление для векторов состояний в нерелятивистском случае введено Фоком (1932). Часто последовательность (2.5.1) записывается в виде столбца и называется *столбцом Фока*.

симметричными относительно любой перестановки аргументов:

$$\Psi_n(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_j, \ldots, p_n) = \\ = \Psi_n(p_{n_1}, \ldots, p_{n_i}, \ldots, p_{n_j}, \ldots, p_{n_n}). \qquad (2.5.4)$$

Требование, заключающееся в том, чтобы тождественные скалярные частицы подчинялись статистике Бозе (это требование ставится и в нерелятивистской теории), не является независимым от остальных постулатов релятивистской квантовой теории. Мы рассмотрим вопрос о связи спина со статистикой в гл. 4.

Скалярное произведение в пространстве $\mathscr{H}$ векторов Ψ задается формулой

$$(\Psi, \Phi) = \overline{\Psi}_0\Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{V_m^+} \frac{d^3p_1}{p_1^0} \ldots \int\limits_{V_m^+} \frac{d^3p_n}{p_n^0} \times \\ \times \overline{\Psi}(p_1, \ldots, p_n)\Phi(p_1, \ldots, p_n), \qquad (2.5.5)$$

где $p_i^0 = \sqrt{m^2 + p_i^2}$. Таким образом, пространство $\mathscr{H}$ является прямой суммой ортогональных гильбертовых пространств $\mathscr{H}_n$ n-частичных состояний ($n=0, 1, \ldots$).

Можно естественным образом оснастить пространство $\mathscr{H}$ по аналогии с тем, как было построено оснащенное гильбертово пространство в случае квантовой механики с конечным числом степеней свободы (п. 1.2).

Определим сначала ядерное пространство регулярных одночастичных состояний Ω_1 как максимальное ядерное подпространство пространства $\mathscr{H}_1$, в котором непрерывны операторы импульса и координаты частиц и любые полиномы от этих операторов.

Релятивистский оператор координаты имеет вид

$$q = \sqrt{p^0}\, i\nabla_p \frac{1}{\sqrt{p^0}} = i\nabla_p - \frac{i}{2}\frac{p}{m^2+p^2}, \qquad p^0 = \sqrt{m^2+p^2}. \qquad (2.5.6)$$

Этот оператор определяется из канонических перестановочных соотношений (2.1.8) и из условия эрмитовости.

Упражнение 2.5.1. Показать, что операторы q^j и p^j ($j=1, 2, 3$) действительно удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям (2.1.8) и что операторы q^j (2.5.6) в отличие от операторов $i\frac{\partial}{\partial p^j}$ эрмитовы относительно скалярного произведения в $\mathscr{H}_1$:

$$(\Phi_1, \Psi_1) = \int \overline{\Phi}_1(p)\Psi_1(p)\frac{d^3p}{p^0}. \qquad (2.5.7)$$

Определим канонический базис в $\mathscr{H}_1$ при помощи системы взаимно сопряженных операторов *)

$$b_j=\frac{1}{\sqrt{2}}(p^j-iq^j),\qquad b_j^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(p^j+iq^j),\qquad j=1,\,2,\,3,\tag{2.5.8}$$

по аналогии с п. 1.2. Пусть Φ_0 — нормированный вектор, удовлетворяющий равенствам

$$b_k\Phi_0=0,\qquad k=1,\,2,\,3.\tag{2.5.9}$$

В рассматриваемом импульсном представлении (в котором операторы p^k являются операторами умножения на независимую переменную)

$$\Phi_0(p)=\frac{(m^2+p^2)^{1/4}}{\pi^{3/4}}e^{-\frac{p^2}{2}}.\tag{2.5.10}$$

Ортонормированные базисные векторы в $\mathscr{H}_1$ определим формулой

$$\Phi_\nu\equiv\Phi_{\nu_1\nu_2\nu_3}=\frac{(b_1^*)^{\nu_1}(b_2^*)^{\nu_2}(b_3^*)^{\nu_3}}{\sqrt{\nu_1!\,\nu_2!\,\nu_3!}}\Phi_0,\qquad \nu_i=0,\,1,\,\ldots,\tag{2.5.11}$$

Упражнение 2.5.2. Найти выражения для базисных векторов Φ_ν в импульсном пространстве (см. п. 1.2).

Определим, как и в п. 1.2, ядерное пространство Ω_1 в качестве совокупности векторов Φ, для которых конечны все нормы $\|\Phi\|_r$, где

$$\|\Phi\|_r^2=(\Phi,\,h^r\Phi),\qquad r=0,\,1,\,2,\,\ldots,\tag{2.5.12}$$

$$h=b_1^*b_1+b_2^*b_2+b_3^*b_3+1.\tag{2.5.13}$$

Как отмечалось в п. 1.2, ограниченность норм эквивалентна быстрому убыванию 3-индексной последовательности коэффициентов c_ν разложения вектора по базису (2.5.11). Счетно-нормированное пространство Ω_1 (с нормами (2.5.12)) совпадает с пространством $\mathscr{S}(V_m^+)$ бесконечно гладких, быстро убывающих функций на гиперболоиде, или, что то же самое, с пространством $\mathscr{S}(R_3)$ функций $\Phi(p)=\Phi(p_1,p_2,p_3)$, определенным в гл. I, п. 1.3.

Имея пространство Ω_1, можно определить пространство Ω_n как *симметризованное тензорное произведение пространств* Ω_1:

$$\Omega_n=\operatorname{sym}\Omega_1^{\otimes n}.\tag{2.5.14}$$

Это означает следующее. Пространство Ω_n состоит из всех бесконечно гладких быстро убывающих функций n векторных аргументов $p_1,\,\ldots,\,p_n$, заданных на произведении гиперболоидов: $V_m^+\times\ldots\times V_m^+$, и симметричных относительно любой перестановки аргументов p. Топология в Ω_n задается при помощи счетной растущей системы норм

$$\|\Phi_n\|_r^2=(\Phi_n,\,(h_1^r+\ldots+h_n^r)\,\Phi_n),\qquad r=0,\,1,\,2,\,\ldots,\tag{2.5.15}$$

*) Не следует смешивать операторы b^* и b (2.5.8), действующие в пространстве одночастичных состояний $\mathscr{H}_1$, с «вторично квантованными» операторами рождения и уничтожения $a^*(p)$ и $a(p)$, которые меняют число частиц n.

где, как и в (2.5.13),

$$h_\varkappa = 1 + b_\varkappa^* b_\varkappa, \quad b_\varkappa = \frac{p_\varkappa - iq_\varkappa}{\sqrt{2}}, \quad \varkappa = 1, \ldots, n. \tag{2.5.16}$$

Название «тензорное произведение» (в данном случае «тензорная степень») связано с возможностью алгебраического построения пространства Ω_n. Рассмотрим множество $\mathcal{L}$ всевозможных конечных линейных комбинаций вида

$$\Phi_n = \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j \Phi_j^{(1)} \ldots \Phi_j^{(n)}, \quad \Psi_n = \sum_{l=1}^{N_2} \mu_l \Psi_l^{(1)} \ldots \Psi_l^{(n)},$$

где $\Phi_j^{(k)}, \Psi_l^{(k)} \in \Omega_1$. Определим в $\mathcal{L}$ скалярное произведение формулой

$$(\Phi_n, \Psi_n) = \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \lambda_j \mu_l \left(\Phi_j^{(1)}, \Psi_l^{(1)}\right) \ldots \left(\Phi_j^{(n)}, \Psi_l^{(n)}\right),$$

а нормы $\|\Phi_n\|_r$ — формулой (2.5.15). Тогда пространство $\Omega_1^{\otimes n}$ определяется как пополнение $\mathcal{L}$ относительно сходимости, определяемой счетной системой норм (2.5.15), в то время как $\mathcal{H}_1^{\otimes n}$ есть пополнение $\mathcal{L}$ относительно гильбертовой нормы $\|\Phi_n\|^2 = \|\Phi_n\|_0^2 = (\Phi_n, \Phi_n)$. Пространства Ω_n и $\mathcal{H}_n$ состоят из симметричных элементов пространств $\Omega_1^{\otimes n}$ и $\mathcal{H}_1^{\otimes n}$ соответственно. Оператор симметризации может быть определен в $\mathcal{L}$ по формуле

$$\operatorname{sym} \Phi_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \sum_{\pi} \Phi_j^{(\pi_1)} \ldots \Phi_j^{(\pi_n)},$$

где внутреннее суммирование ведется по всем $n!$ перестановкам π чисел $1, \ldots, n$. Далее оператор симметризации продолжается по непрерывности в $\mathcal{H}_1^{\otimes n}$.

Минимальное ядерное пространство Ω, содержащее все пространства Ω_n, определяется как точное объединение счетно-нормированных пространств (см. определение 3, гл. 1, п. 1.3): Ω состоит из всевозможных обрывающихся последовательностей

$$\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

где число n зависит от Φ, $\Phi_j \in \Omega_j$, а Ω_0 — комплексная плоскость. Последовательность векторов $\Phi^{(n)}$ сходится в Ω, если существует число N, не зависящее от n, такое, что $\Phi_k^{(n)} \equiv 0$ при $k > N$ и $\Phi_j^{(n)} \to \Phi_j$ относительно сходимости в Ω_j.

Наряду с пространством Ω можно рассматривать и более широкие пространства регулярных состояний, соответствующие, естественно, более узким пространствам обобщенных состояний. Определим максимальное (с определенной точки зрения) ядерное подпространство пространства $\mathcal{H}$. Оно, как мы увидим, является некоторым обобщением пространства $\mathcal{S}$ основных функций на случай бесконечного числа измерений, и мы будем обозначать его через $\mathcal{S}_\infty$.

Назовем оператор K, действующий в Ω, вторичным квантованием непрерывного оператора k, определенного в Ω_1, если

$$K\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} k^{(n)}\Psi_n(p_1, \ldots, p_n),$$

где

$$k^{(0)} = 0, \qquad k^{(1)} = k_1, \ldots, k^{(n)} = k_1 + \ldots + k_n,$$

а k_j — это оператор k, действующий на j-й аргумент функции Ψ_n.

При алгебраическом определении пространства Ω_n k_j определяется в $\mathscr{L}$ равенством

$$k_j\Phi_n = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \Phi_i^{(1)} \ldots \left(k\Phi_i^{(j)}\right) \ldots \Phi_i^{(n)}.$$

Упражнение 2.5.3. Показать, что вторичным квантованием единичного оператора в Ω_1 является оператор числа частиц N, определяемый равенством

$$N\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} n\Psi_n. \tag{2.5.17}$$

При определении пространства Ω_1 мы потребовали, чтобы все полиномы от операторов p и q (или, что то же самое, от операторов b и b^*) оставляли Ω_1 инвариантным *) и были непрерывными в Ω_1. Аналогично определим $\mathscr{S}_\infty$ как максимальное ядерное подпространство пространства $\mathscr{H}$, инвариантное относительно вторичных квантований всевозможных полиномов от операторов b и b^*.

Пространство $\mathscr{S}_\infty$ может быть определено как счетно-нормированное пространство при помощи системы норм $\|\Psi\|_r$, задаваемых равенствами

$$\|\Psi\|_0 = \|\Psi\| = \sqrt{(\Psi, \Psi)}, \qquad \|\Psi\|_r^2 = (\Psi, H^r\Psi), \qquad r = 1, 2, \ldots, \tag{2.5.18}$$

где H — вторичное квантование оператора h (2.5.13).

Если определить в $\mathscr{H}$ ортонормированный базис

$$\Phi_{n\nu} = \Phi_{n\nu^{(1)} \ldots \nu^{(n)}}, \qquad \nu^{(j)} = \left(\nu_1^{(j)}, \nu_2^{(j)}, \nu_3^{(j)}\right), \tag{2.5.19}$$

где $\Phi_{1\nu}$ определяются формулой (2.5.11), а $\Phi_{n\nu}$ являются нормированными симметризованными произведениями $\Phi_{1\nu}$, то

$$H \sum_{n,\nu} c_{n\nu}\Phi_{n\nu} = \sum_{n,\nu} \left(n + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{3} \nu_i^{(j)}\right) c_{n\nu}\Phi_{n\nu}. \tag{2.5.20}$$

Поэтому ограниченность норм (2.5.18) означает, что $c_{n\nu}$ образуют быстро убывающую бесконечнократную последовательность.

Среди обобщенных состояний важную роль играют состояния с определенными импульсами у всех частиц **). Этими

---

*) Напомним, что пространство Ω называется инвариантным относительно оператора A, если $A\Omega \subset \Omega$.

**) Эти состояния входят в пространство $\mathscr{S}_\infty^*$, а следовательно, и в пространство Ω^*, но они ненормируемы и поэтому не принадлежат пространству $\mathscr{H}$.

состояниями мы будем пользоваться в дальнейшем. Для них принято обозначение

$$|p_1, \ldots, p_n\rangle = \frac{\sqrt{p_1^0 \ldots p_n^0}}{\sqrt{n!}} \sum_{\{i\}} \delta(q_1 - p_{i_1}) \ldots \delta(q_n - p_{i_n}), \qquad (2.5.21)$$

где сумма распространена по всем $n!$ перестановкам $\{i\} = (i_1, \ldots, i_n)$ чисел $1, \ldots, n$, а $p_j^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_j^2}$. «Скалярное произведение» двух векторов типа (2.5.21) равно

$$\langle p_1' \ldots p_r' | p_1 \ldots p_n\rangle = \delta_{rn} \sum_{\{i\}} \delta(p_1 - p_{i_1}') \ldots \delta(p_n - p_{i_n}'). \qquad (2.5.22)$$

Упражнение 2.5.4. Показать, что обобщенная функция

$$p_1^0 \ldots p_n^0 \sum_{\{i\}} \delta(p_1 - p_{i_1}') \ldots \delta(p_n - p_{i_n}')$$

инвариантна относительно одновременного ортохронного преобразования Лоренца всех аргументов p_i и p_j'. (Указание: воспользоваться равенством (1.2.10) и тем, что $p_i^2 = p_j'^2 = m^2$, $p_i^0 > 0$, $p_j^{0'} > 0$.)

5.2. Представление группы Пуанкаре в пространстве $\mathscr{H}$. Разложение пространства $\mathscr{H}_2$ в прямую сумму неприводимых инвариантных пространств. Определим закон преобразования вектора состояния Ψ при собственном преобразовании Пуанкаре $\{a, \Lambda\}$ формулой

$$U(a, \Lambda)\Psi = \{\Psi_0, e^{-ip_1 a}\Psi_1(\Lambda^{-1}p_1), \ldots$$
$$\ldots, e^{-i(p_1 + \ldots + p_n)a}\Psi_n(\Lambda^{-1}p_1, \ldots, \Lambda^{-1}p_n), \ldots\}. \qquad (2.5.23)$$

Представление (2.5.23), очевидно, приводимо, так как, например, инвариантный оператор P^2 не является постоянным (кратным единичному оператору) в $\mathscr{H}$. Наметим способ разложения пространства $\mathscr{H}$ на неразложимые инвариантные подпространства и соответствующего разложения представления (2.5.23) на неприводимые представления.

Заметим сначала, что вакуумное подпространство $\mathscr{H}_0$ и подпространство одночастичных состояний $\mathscr{H}_1$ являются неприводимыми инвариантными подпространствами относительно представления группы Пуанкаре. В $\mathscr{H}_0$ реализуется тривиальное представление $U(a, \Lambda) \equiv 1$, а в $\mathscr{H}_1$ — неприводимое представление с массой m, положительной энергией и спином 0:

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_{m0+}. \qquad (2.5.24)$$

Подпространство двучастичных состояний $\mathscr{H}_2$ уже приводимо — оно не соответствует определенным значениям инвариантов P^2 и W (или j). Любой вектор из $\mathcal{H}_2$ может быть разложен по обобщенным состояниям с определенной массой $\sqrt{P^2}$ и моментом количества движения j.

Чтобы получить такое разложение, введем новые переменные p и q по формулам

$$p = p_1 + p_2, \qquad q = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p^2 - 4m^2}} \tag{2.5.25}$$

и положим

$$\Psi_2(p_1, p_2) = \Psi(p, q). \tag{2.5.26}$$

Упражнение 2.5.5. Показать, что условие $p_1^2 = p_2^2$ эквивалентно условию

$$pq = 0 \tag{2.5.27}$$

Упражнение 2.5.6. Убедиться, что симметрия функции $\Psi(p_1, p_2)$ относительно p_1 и p_2 эквивалентна четности функции $\Psi(p, q)$ относительно q.

Мы ищем разложение функции $\Psi(p, q)$ по собственным функциям $\delta(p^2 - \mu^2)$ оператора умножения на p^2 и по сферическим функциям относительно пространственноподобного единичного вектора q. Для этой цели мы перейдем сначала к системе центра масс, т. е. к системе, в которой ось времени направлена вдоль вектора p. Обозначим координаты вектора q в этой системе через (σ, e):

$$\begin{aligned} q^0 &= \frac{p^0}{\mu}\sigma + \frac{(\mathbf{pe})}{\mu}, \\ \mathbf{q} &= \mathbf{e} - (\mathbf{ep})\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2} + \frac{1}{\mu}\left((\mathbf{pe})\frac{p^0\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2} + \sigma\mathbf{p}\right), \\ \mu^2 &= p^2 = p^{0\,2} - \mathbf{p}^2. \end{aligned} \tag{2.5.28}$$

Упражнение 2.5.7. а) Проверить, что формулы (2.5.28) задают преобразование Лоренца от вектора q к вектору (σ, e), так что

$$q^2 = q^{0\,2} - \mathbf{q}^2 = \sigma^2 - e^2.$$

б) Показать, что при этом преобразовании вектор p переходит в вектор $(\mu, 0)$. Пользуясь (2.5.25), заключить отсюда, что

$$\sigma = 0, \qquad e^2 = 1. \tag{2.5.29}$$

Далее, мы разлагаем функцию

$$F(\mu, \mathbf{p}; e) = \Psi(p, q) = \Psi\left(p;\ \frac{\mathbf{pe}}{\mu},\ \mathbf{e} + \left(\frac{p_0}{\mu} - 1\right)\frac{\mathbf{ep}}{\mathbf{p}^2}\,\mathbf{p}\right) \tag{2.5.30}$$

по шаровым функциям $Y_{j\zeta}(e)$:

$$F(\mu, \mathbf{p}; e) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\zeta=-j}^{j} F_{j\zeta}(\mu, \mathbf{p})\, Y_{j\zeta}(e). \tag{2.5.31}$$

Если параметризовать вектор $\boldsymbol{e}$ по формуле

$$\boldsymbol{e}=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta),$$

то можно записать $Y_{j\zeta}(\boldsymbol{e})$ в обычной форме:

$$Y_{j\zeta}(\boldsymbol{e})\equiv Y_{j\zeta}(\theta,\ \varphi)=P_j^{\zeta}(\cos\theta)\,e^{i\zeta\varphi},\qquad -j\leqslant\zeta\leqslant j,$$

где $P_j^{\zeta}(x)$ — присоединенные функции Лежандра. Функции $Y_{j\zeta}$ ортогональны на единичной сфере, но не нормированы на единицу:

$$\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,\overline{Y}_{j'\zeta'}(\theta,\ \varphi)\,Y_{j\zeta}(\theta,\ \varphi)=\\ =\frac{(j+|\zeta|)!}{(j-|\zeta|)!}\,\frac{4\pi}{2j+1}\,\delta_{jj'}\delta_{\zeta\zeta'}.\qquad(2.5.32)$$

Упражнение 2.5.8. Пользуясь четностью функции $\Psi(p,q)$ относительно q, показать, что при нечетных j $(j=2l+1)$ $F_{j\zeta}(\mu,\ p)=0$.

Итак, искомое разложение имеет вид

$$\Psi_2(p_1,\ p_2)=\Psi(p,\ q)=\int_{4m^2}^{\infty}d\mu^2\sum_{l=0}^{\infty}\Psi_{\mu,\,2l}(p,\ e),\qquad(2.5.33)$$

где

$$\Psi_{\mu,\,2l}(p,\ e)=\delta(p^2-\mu^2)\,g_{2l}(\mu,\ p;\ e),\\ g_{2l}(\mu,\ p;\ e)=\sum_{\zeta=-2l}^{2l}G_{2l,\,\zeta}(\mu,\ p)\,Y_{2l,\,\zeta}(e),\qquad(2.5.34)$$

а $F_{j\zeta}$ может быть выражено обратно через $\Psi(p,\ q)$ формулой

$$F_{j\zeta}(\mu,\ p)=\frac{(j-|\zeta|)!}{(j+|\zeta|)!}\,\frac{2j+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta F(\mu,\ p;\ e)\,\overline{Y}_{j\zeta}(e).\qquad(2.5.35)$$

Функции $\Psi_{\mu,\,2l}$ принадлежат неприводимому подпространству $\mathcal{S}^{*}_{\mu j+}$ обобщенных функций, заданных как функционалы на произведении четырехмерного пространства с единичной сферой. Однако они ненормируемы и поэтому не принадлежат гильбертову пространству $\mathcal{H}_{\mu j+}$. Скалярное произведение двух функций из $\mathcal{H}_2$ выражается следующим образом через функции (2.5.34):

$$(\Phi_2, \Psi_2) = \int\int \overline{\Phi_2(p_1, p_2)}\, \Psi_2(p_1, p_2) \frac{d^3p_1}{p_1^0} \frac{d^3p_2}{p_2^0} =$$

$$= 4\int\int \overline{\Phi_2(p_1, p_2)}\, \Psi_2(p_1, p_2)\delta(p_1^2-m^2)\delta(p_2^2-m^2)\theta(p_1^0)\theta(p_2^0)\, d^4p_1\, d^4p_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\int \overline{\Phi(p, q)}\, \Psi(p, q)\delta(q^2+1)\delta(pq)\theta(p^0-2m)\sqrt{p^2-4m^2}\, d^4p\, d^4q =$$

$$= \int\limits_{2m}^{\infty} d\mu \sqrt{\mu^2-4m^2} \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{d^3p}{2\sqrt{\mu^2+p^2}} \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, \overline{g_{2l}(\mu, p; e)} \times$$

$$\times f_{2l}(\mu, p; e) = 2\pi \int\limits_{2m}^{\infty} d\mu \sqrt{\mu^2-4m^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{4l+1} \sum_{\zeta=-2l}^{2l} \frac{(2l+|\zeta|)!}{(2l-|\zeta|)!} \times$$

$$\times \int \frac{d^3p}{\sqrt{\mu^2+p^2}}\, \overline{G_{2l,\zeta}(\mu, p)}\, F_{2l,\zeta}(\mu, p). \qquad (2.5.36)$$

Полученный результат можно сформулировать еще следующим образом. Гильбертово пространство $\mathscr{H}_2$ разлагается на прямую сумму прямых интегралов гильбертовых пространств $\mathscr{H}_{\mu, 2l}$, которые состоят из векторных функций $F_{2l}(\mu, p) = \{F_{2l,\zeta}(\mu, p)\}$, $-2l \leqslant \zeta \leqslant 2l$:

$$\mathscr{H}_2 = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \int^{\oplus} d\mu \mathscr{H}_{\mu, 2l}. \qquad (2.5.37)$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathscr{H}_{\mu, 2l}$ задается формулой

$$(F_{2l}(\mu, p),\ G_{2l}(\mu, p))_{2l}^{\mu} =$$

$$= \sum_{\zeta=-2l}^{2l} \frac{(2l+|\zeta|)!}{(2l-|\zeta|)!} \int \frac{d^3p}{\sqrt{\mu^2+p^2}}\, \overline{F_{2l,\zeta}(\mu, p)}\, G_{2l,\zeta}(\mu, p). \qquad (2.5.38)$$

Скалярное произведение в $\mathscr{H}_2$ выражается через скалярные произведения в $\mathscr{H}_{\mu, 2l}$ формулой

$$(\Phi_2, \Psi_2) = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{4l+1} \int\limits_{2m}^{\infty} d\mu \sqrt{\mu^2-4m^2}\, (F_{2l}(\mu, p),\ G_{2l}(\mu, p))_{2l}^{\mu}, \qquad (2.5.39)$$

где функции $F_{2l,\zeta}$ и $G_{2l,\zeta}$ связаны с функциями Φ_2 и Ψ_2 формулами (2.5.33)—(2.5.35).

Разложение пространства $\mathscr{H}_2$ двух тождественных скалярных частиц на неприводимые инвариантные подпространства является частным случаем разложения прямого произведения двух неприводимых представлений на сумму неприводимых представлений группы $\tilde{\mathfrak{P}}$. Представление группы Пуанкаре в подпространстве $\mathscr{H}_{\mu,2l}$ уже неприводимо. Оно было детально изучено в п. 3.2. Мы не будем приводить здесь формулы разложения прямого произведения двух произвольных неприводимых представлений $[m_1, j_1]$ и $[m_2, j_2]$ на неприводимые представления, поскольку они выводятся совершенно аналогично рассмотренному частному случаю. Мы отсылаем интересующихся читателей к статьям Ю. М. Широкова (1958), Уайтмана и Барута (1959) и Уайтмана (1960б).

Аналогичным образом разлагается на неприводимые инвариантные пространства и пространство $\mathscr{H}_n$ при $n \geqslant 3$. При этом инвариант P^2 принимает значения $p^2 \geqslant (nm)^2$. Основное отличие этого случая от рассмотренного состоит в том, что каждое из неприводимых пространств $\mathscr{H}_{\mu j}$ входит в разложении пространства $\mathscr{H}_n$ в прямой интеграл (и сумму) с бесконечной кратностью: функции, аналогичные функциям $F_{j\xi}$ (2.5.35), зависят еще от одного или нескольких векторных аргументов. Выбор этих функций содержит при $n \geqslant 3$ произвол, связанный с зависимостью результата сложения моментов от порядка слагаемых. По поводу этих вопросов, рассмотрение которых нам не понадобится, мы снова отсылаем к имеющейся литературе (Уайтман (1960б), М. И. Широков (1961), Вик (1962)).

5.3. Пространство заряженных спинорных частиц. По аналогии с теорией скалярных частиц, изложенной в п. 5.1, гильбертово пространство $\mathscr{H}$ частиц со спином $1/2$ без связанных состояний будет строиться в виде прямой суммы гильбертовых пространств:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(1/2) = \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1(1/2) \oplus \ldots \oplus \mathscr{H}_n(1/2) \oplus \ldots, \quad (2.5.40)$$

где $\mathscr{H}_0$ — одномерное подпространство вакуума, а $\mathscr{H}_n$ — подпространство n-частичных состояний. В случае скалярного поля $\mathscr{H}_n$ при $n > 1$ определялось как симметризованная n-я степень от $\mathscr{H}_1$. Здесь мы определим $\mathscr{H}_n$ как *антисимметризованную* n-ю степень пространства $\mathscr{H}_1(1/2)$. Пространство же одночастичных состояний $\mathscr{H}_1$ мы отождествим с пространством $\mathscr{H}_{m\,1/2}$, рассмотренном в п. 4.3, в котором скалярный квадрат вектора задается формулой (2.4.56). Остановимся коротко на физической интерпретации пространства $\mathscr{H}_{m\,1/2}$.

Мы видели (п. 4.6), что пространство $\mathscr{H}_{m\,1/2}$ распадается на два ортогональных между собой подпространства $\mathscr{H}^{\pm}_{m\,1/2}$, инвариантных относительно общей группы Пуанкаре:

$$\begin{aligned} \Psi(p) &\in \mathscr{H}^{+}_{m\,1/2}, \quad \text{если} \quad \hat{p}\Psi(p) = m\Psi(p); \\ \Psi(p) &\in \mathscr{H}^{-}_{m\,1/2}, \quad \text{если} \quad \hat{p}\Psi(p) = -m\Psi(p). \end{aligned} \tag{2.5.41}$$

Мы будем считать, по определению, что векторы, принадлежащие пространству $\mathscr{H}^{+}_{m\,1/2}$, описывают состояния частиц с положительным зарядом, в то время как векторы из $\mathscr{H}^{-}_{m\,1/2}$ относятся к частице с отрицательным зарядом. (Для настоящего рассмотрения совершенно безразлично, какой природы этот заряд. Речь может идти об электрическом заряде, если рассматриваются одноэлектронные и однопозитронные состояния, или о барионном числе — в случае нейтрона и антинейтрона.) В силу правила суперотбора по заряду (п. 1.3) физически реализуемых состояний с ненулевыми проекциями одновременно и в $\mathscr{H}^{+}_{m\,1/2}$ и в $\mathscr{H}^{-}_{m\,1/2}$ не существует. Как отмечалось в конце п. 4.3, антиунитарный оператор (2.4.25) отображает взаимно однозначно пространство $\mathscr{H}^{+}_{m\,1/2}$ на $\mathscr{H}^{-}_{m\,1/2}$ и обратно, что оправдывает название «зарядовое сопряжение» для этого оператора.

Пространство $\mathscr{H}_{m\,1/2}$ может быть оснащено по общей схеме, изложенной в п. 3.2. Роль ядерного пространства, всюду плотно расположенного в $\mathscr{H}_{m\,1/2}$, играет пространство $\mathscr{S}_4(V^{+}_{m})$ четырехкомпонентных основных функций, определенных на гиперболоиде V^{+}_{m}. Все пространство $\mathscr{H}(^1/_2)$ можно затем оснастить по схеме, описанной в п. 5.1. Ядерное пространство обрывающихся последовательностей, которое всюду плотно в $\mathscr{H}(^1/_2)$, будем обозначать через $\Omega(^1/_2)$.

Пространство $\mathscr{H}_n$, как уже говорилось, определяется как антисимметризованная степень пространства $\mathscr{H}_1$:

$$\mathscr{H}_n = A\mathscr{H}^{\otimes n}_{m\,1/2}. \tag{2.5.42}$$

Другими словами, элементами $\mathscr{H}_n$ являются функции n пар аргументов (p_j, α_j), $p_j \in V^{+}_{m}$, $\alpha_j = 1, 2, 3, 4$, антисимметричные относительно перестановки любых двух пар:

$$\begin{aligned} \Psi_n \in \mathscr{H}_n \to \Psi_n(p_1\alpha_1, \ldots, p_i\alpha_i, \ldots, p_j\alpha_j, \ldots, p_n\alpha_n) = \\ = -\Psi_n(p_1\alpha_1, \ldots, p_j\alpha_j, \ldots, p_i\alpha_i, \ldots, p_n\alpha_n). \end{aligned} \tag{2.5.43}$$

В $\mathscr{H}_n$ можно выбрать базис, составленный из антисимметризованных произведений функций из $\mathscr{H}_1$ типа

$$\Psi_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \Psi^{\alpha_1}_1(p_1) \ldots \Psi^{\alpha_n}_1(p_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi^{\alpha_1}_n(p_l) \ldots \Psi^{\alpha_n}_n(p_n) \end{vmatrix}. \tag{2.5.44}$$

В силу правила суперотбора по заряду пространство $\mathscr{H}_n$ распадается на сумму $n+1$ ортогональных когерентных подпространств:

$$\mathscr{H}_n = \mathscr{H}_n^{(-n)} \oplus \mathscr{H}_n^{(-n+2)} \oplus \ldots \oplus \mathscr{H}_n^{(n-2)} \oplus \mathscr{H}_n^{(n)}, \qquad (2.5.45)$$

где $\mathscr{H}_n^{(k)}$ $\left(\frac{n-k}{2} - \text{целое число}\right)$ — подпространство n-частичных состояний с суммарным зарядом k.

Пользуясь в $\mathscr{H}_{m\,1/2}$ базисом $\Psi^{(e)}(p, \zeta)$ $(e = \pm)$, мы можем записать элементы $\mathscr{H}_n$ в виде

$$\Psi_n(p_1, \zeta_1, e_1; \ldots; p_n, \zeta_n, e_n) \qquad e_j = \pm e, \qquad (2.5.46)$$

где e — заряд частицы ($-e$ — заряд античастицы), а Ψ_n меняет знак при перестановке любых двух троек p_i, ζ_i, e_i и p_j, ζ_j, e_j. При этом разложению $\mathscr{H}_n$ (2.5.45) соответствует следующее разложение функции Ψ_n:

$$\Psi_n(p_j, \zeta_j, e_j) = \Psi_n(p_j, \zeta_j, e_j)\delta_{\Sigma e_j, ne} + \Psi_n(p_j, \zeta_j, e_j)\delta_{\Sigma e_j, (n-2)e} + \ldots, \qquad (2.5.47)$$

где δ_{kl} — символ Кронекера.

Чтобы записать скалярное произведение в $\mathscr{H}(1/2)$ в терминах функций (2.5.46), мы введем в $\mathscr{H}_{m\,1/2}$ спинорный базис $v_\zeta^{(e)}(p)$, связанный с базисом решений уравнения Дирака $u^{r\,(e)}(p)$ (п. 4.2) формулой

$$v_\zeta^{(e)}(p) = u^{\frac{3}{2} - e\zeta\,(e)}(ep) = 2\zeta C\tilde{u}^{\frac{3}{2} + e\zeta\,(-e)}(p) \qquad (2.5.48)$$

(относительно последнего равенства см. упражнение 2.4.11б). Спиноры $u_\zeta^{(e)}(p)$ являются собственными функциями операторов $\hat{p}$ $\left(\text{с } p^0 = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}\right)$ и S_3:

$$\hat{p}\, v_\zeta^{(e)}(p) = em v_\zeta^{(e)}(p), \qquad S_3 v_\zeta^{(e)}(p) = \zeta u_\zeta^{(e)}(p). \qquad (2.5.49)$$

В силу того, что операторы $\hat{p}$ и S_3 эрмитовы относительно индефинитного скалярного произведения $\langle u, v\rangle = \tilde{u}_\alpha v^\alpha$, их собственные функции $v_\zeta^{(e)}(p)$ ортогональны между собой при различных значениях e и ζ. Если к тому же считать, что $u^{r(\pm)}(p)$ нормированы условием (2.4.50), то можно написать

$$\tilde{v}_\zeta^{(e)}(p)\, v_{\zeta'}^{(e')}(p) = e\delta_{ee'}\delta_{\zeta\zeta'}. \qquad (2.5.50)$$

Определим теперь связь между $\Psi(p)$ и $\Psi(p, \zeta, e)$ формулой

$$\Psi^\alpha(p) = \sum_{\zeta, e} v_\zeta^{(e)\,\alpha}(p)\, \Psi(p, \zeta, e), \qquad (2.5.51)$$

являющейся обобщением (2.4.65). В силу (2.5.50) обратная формула имеет вид

$$\Psi(p, \zeta, e) = e\bar{v}_{\zeta}^{(e)}(p)\Psi(p) \equiv e\sum_{\alpha=1}^{4}\bar{v}_{\zeta\alpha}^{(e)}(p)\Psi^{\alpha}(p). \tag{2.5.52}$$

Из (2.5.51) и (2.4.56) можно определить скалярное произведение в $\mathscr{H}(1/2)$ в терминах функций (2.5.46):

$$(\Psi, \Phi) = \bar{\Psi}_0\Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\zeta_j, e_j}\int_{V_m^+}\ldots\int_{V_m^+}\overline{\Psi_n(p_1, \zeta_1, e_1; \ldots; p_n, \zeta_n, e_n)}\times$$

$$\times\Phi_n(p_1, \zeta_1, e_1; \ldots; p_n, \zeta_n, e_n)\frac{d^3p_1}{p_1^0}\ldots\frac{d^3p_n}{p_n^0}. \tag{2.5.53}$$

ДОПОЛНЕНИЕ

А. СВОДКА ОПРЕДЕЛЕНИЙ И РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРИИ ГРУПП ЛИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

А.1. Алгебраические и топологические свойства групп. Определение групп Ли. Исторически в первую очередь возникла теория конечных групп (т. е. групп с конечным числом элементов — типа группы перестановок — Галуа, Фробениус, Шур). Эта теория является чисто алгебраической, в ней не участвуют понятия сходимости и непрерывности. Поэтому и общее определение абстрактной группы отражает лишь алгебраические свойства групп: *множество G элементов g называется группой, если в нем определена ассоциативная операция, сопоставляющая каждой упорядоченной паре g_1, g_2 элементов G некоторый элемент $g_3 = f(g_1, g_2)$, и если относительно этой операции существует единица и обратный элемент.*

Групповая операция, вообще говоря, некоммутативна. Обычно она обозначается как произведение: $f(g_1, g_2) = g_1g_2$. Для *коммутативных* (или *абелевых*) групп, для которых функция f симметрична, групповой закон иногда обозначается как сложение: $f(g_1, g_2) = g_1 + g_2$, а единица группы называется нулем.

Подмножество G_0 группы G называется *подгруппой*, если G_0 является группой относительно той же самой операции f (или, как говорят математики, относительно сужения f на $G_0 \times G_0$). Всякая группа имеет две *тривиальные* (или *несобственные*) подгруппы: сама группа G и подгруппа, состоящая из одного единичного элемента. Подгруппа N группы G называется *инвариантной* подгруппой или *нормальным делителем*, если из $n \in N$ и $g \in G$ следует, что $gng^{-1} \in N$ (или, короче, если

$gNg^{-1} \subset N$). Группа называется *простой*, если она не содержит нетривиальной инвариантной подгруппы. Группа называется *полупростой*, если она не содержит собственной инвариантной абелевой подгруппы.

Приведем несколько примеров.

1) *Ортогональная и евклидова группы.* Пусть $O(n)$ — группа ортогональных преобразований в n-мерном пространстве. Квадратная вещественная матрица n-го порядка V принадлежит $O(n)$, если

$$VV^T = 1, \quad \text{т. е.} \quad V_{ik}V_{jk} = \delta_{ij} \tag{2.A.1}$$

(под k подразумевается суммирование от 1 до n; $i, j = 1, \ldots, n$, 1 — n-мерная единичная матрица). Каждая матрица из $O(n)$ имеет детерминант, равный ± 1, так как, если взять определитель с обеих сторон (2.A.1), получим

$$(\det V)^2 = 1. \tag{2.A.2}$$

Ортогональные матрицы V с определителем $+1$ образуют инвариантную подгруппу группы $O(n)$, которая обозначается через $SO(n)$. *Группа евклидовых движений* n-мерного пространства $E_n = O(n)T_n$ определяется как множество пар (a, V), где a — n-мерный вектор, $V \in O(n)$, а групповой закон определяется равенством

$$(a_1, V_1)(a_2, V_2) = (a_1 + V_1 a_2, V_1 V_2).$$

Группа вращений трехмерного пространства $SO(3)$ простая. Группа вращений четырехмерного пространства $SO(4) \sim \sim SO(3) \times SO(3)$ полупростая (но не простая). Любая собственная (т. е. не включающая отражений) ортогональная группа $SO(n)$ при $n \geqslant 5$ простая. Группа евклидовых движений не полупростая, так как подгруппа трансляций T_n является инвариантной абелевой подгруппой.

Множество C элементов группы G, коммутирующих со всеми элементами G, называется *центром* группы G. Нетрудно видеть, что центр любой группы является ее инвариантной абелевой подгруппой. Более того, центр стабилен относительно всех автоморфизмов группы G (т. е. относительно всех взаимно однозначных отображений группы G на себя, сохраняющих групповой закон). Подгруппа, обладающая таким свойством, называется *характеристической.*

2) *Группа унитарных унимодулярных матриц.* Группа $SU(n)$ определяется как группа комплексных унитарных матриц n-го порядка с определителем $+1$.

Упражнение 2.А.1. Показать, что центр группы $SU(n)$ есть циклическая группа Z_n с элементами z^k $(k=0, \ldots, n-1)$, где

$$z = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) 1.$$

Пусть N — нормальный делитель группы G. Определим *фактор-группу* $H=G/N$ как множество классов эквивалентности группы G. Два элемента g_1 и g_2 принадлежат одному и тому же классу h, если $g_1=g_2n$, где $n \in N$. Легко видеть, что g_1 эквивалентно g_2 (т. е. $g_1 \in h$ и $g_2 \in h$; мы будем в таком случае писать $g_1 \sim g_2$) тогда и только тогда, когда $g_1 = n'g_2$, $n' \in N$. Действительно, если $g_1=g_2n$, то $g_1=(g_2ng_2^{-1})g_2 \equiv n'g_2$, так как N — инвариантная подгруппа.

Упражнение 2.А.2. Показать, что множество классов H образует группу, если определить в нем произведение h_1h_2 как класс, содержащий одно из произведений g_1g_2, где $g_1 \in h_1$, $g_2 \in h_2$. Убедиться, что класс h_1h_2 не зависит от выбора представителей g_1 и g_2 классов h_1 и h_2.

Упражнение 2.А.3. Показать, что

$$SO(3) = SU(2)/Z_2. \tag{2.A.3}$$

Мы имеем дело в основном с группой Пуанкаре, которая является примером бесконечной группы, содержащей континуум различных элементов. Для таких групп естественно рассматривать алгебраическую групповую структуру в связи с геометрическими (точнее, топологическими) свойствами множества G — как локальными (близость двух элементов G), так и глобальными (связность группы).

Чтобы ввести понятие топологической группы, необходимо напомнить сначала определение топологического пространства, являющегося абстрактным множеством со сходимостью.

Множество $\mathcal{M}$ называется *топологическим пространством*, если в нем задана система подмножеств Σ, называемых *открытыми множествами*, или окрестностями, такая, что: 1) пересечение любых двух окрестностей является окрестностью; 2) сумма произвольного множества окрестностей есть окрестность; 3) все пространство является окрестностью ($\mathcal{M} \in \Sigma$). Имея в виду дальнейшие применения этого понятия, мы добавим к трем обязательным свойствам топологического пространства еще *аксиому отделимости*: 4) любые две точки в $\mathcal{M}$ имеют непересекающиеся окрестности. (Топологические пространства с выполненной аксиомой 4) называются *хаусдорфовыми*.)

Пользуясь понятием окрестности любой точки множества $\mathcal{M}$, мы можем определить обычным образом сходимость элементов множества $\mathcal{M}$ и непрерывность функций, заданных на $\mathcal{M}$.

Группа G является *топологической группой*, если множество G является топологическим пространством и если функция двух аргументов

$$F(g_1, g_2) = g_1 g_2^{-1}$$

непрерывна на $G \times G$ (отсюда следуют как частные случаи непрерывность произведения в G и непрерывность операции $g \to g^{-1}$).

Топологическая группа G называется *компактной* (в старой литературе — *бикомпактной*), если из любого покрытия множества G окрестностями из Σ можно выделить покрытие конечным числом окрестностей. В противном случае группа называется *некомпактной*.

Часто в литературе используется термин *локально компактная группа*. Группа G называется локально компактной, если существует окрестность любого ее элемента, замыкание которой компактно. Все группы Ли, с которыми мы будем иметь дело, локально компактны.

В зависимости от глобальных топологических свойств множества G группа G может быть *связной* (в частности, *односвязной*, если любой замкнутый контур в G может быть непрерывно деформирован в точку) и *несвязной* (см., например, [25]).

В качестве примера рассмотрим несвязную группу $O(3)$. Она состоит из двух связных множеств — подгруппы $SO(3)$ и множества ортогональных матриц с определителем -1. Группа $SO(3)$ двусвязна, ее универсальная накрывающая группа $SU(2)$ односвязна. Группа $SU(2)$ как топологическое пространство изоморфна единичной сфере S_3 в четырехмерном пространстве. Действительно, любая матрица $V \in SU(2)$ может быть записана в виде

$$V = v^0 \sigma_0 + i v^j \sigma_j,$$

где (v^0, v^j) — точка на вещественной единичной сфере:

$$\bar{v}^\mu = v^\mu, \qquad v^{0^2} + \sum_{j=1}^{3} v^{j^2} = 1.$$

Группа $SO(3)$ как топологическое пространство может быть определена как та же сфера S_3 с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Мы будем иметь дело со специальным классом топологических групп, для которых множество G является *многообразием*. Это означает, что топологическое пространство G локально изоморфно n-мерному евклидову пространству. Иными словами, существует достаточно малая окрестность любого элемента $g \in G$, которая может быть отображена взаимно однозначно и непрерывно во внутренние точки n-мерного евклидова шара. Координаты точки внутри этого шара будем называть *локальными координатами* группы. Топологическая группа, которая в то же время является многообразием, называется *группой Ли* (размерность евклидова пространства, входящая в определение многообразия, должна быть конечной, так что бесконечно параметрические группы не являются группами Ли).

Итак, каждый элемент группы Ли в фиксированной окрестности некоторого элемента g_0 может быть отождествлен с упорядоченным множеством n вещественных параметров $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$. Групповое умножение $\varphi\theta = \tau$ может быть записано в виде

$$\tau = \Phi(\varphi^1, \ldots, \varphi^n; \theta^1, \ldots, \theta^n). \qquad (2.A.4)$$

Из существования обратного элемента следует, что при фиксированном φ отображение $\theta \to \tau$, задаваемое (2.A.4), должно быть обратимым. Из ассоциативности умножения следует, что

$$\Phi(\Phi(\varphi; \theta), \tau) = \Phi(\varphi; \Phi(\theta, \tau)). \qquad (2.A.5)$$

Поскольку, по определению, G — топологическая группа, функции Φ должны быть непрерывными. Согласно теореме фон Неймана, Понтрягина и Монтгомери, решающей пятую проблему Гильберта, из существования непрерывных локальных координат следует существование дифференцируемых и даже аналитических координат (т. е. параметров, относительно которых функции (2.A.4) дифференцируемы или аналитичны; см. [25], гл. VII и цитированную там литературу). Именно это свойство оправдывает принятое выше определение группы Ли (в работах Ли дифференцируемость функций Φ предполагается с самого начала). Отметим, что любые две системы дифференцируемых (аналитических) локальных координат связаны между собой дифференцируемым (аналитичным) преобразованием.

А.2. Линейные представления групп. Множество A_x всех взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображений топологического пространства $\mathscr{X}$ на себя образует группу, если под произведением двух отображений понимать их последовательное применение. Если каждому элементу группы G поставлен в соответствие оператор $T_g \in A_x$ с сохранением группового закона

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}, \qquad T_e = 1, \qquad (2.A.6)$$

то говорят, что задано представление группы G. Представление называется *линейным*, если $\mathscr{X}$ — линейное пространство и если операторы T_g линейны.

Если $\mathscr{X}$ — n-мерное пространство, то будем говорить, что T_g — n-мерное представление группы G. В любом фиксированном базисе в пространстве $\mathscr{X}$ линейное конечномерное представление задается системой неособых матриц T_g, образующих группу относительно обычного матричного умножения. Если $\mathscr{X}$ — гильбертово пространство с элементами Φ, Ψ и если операторы T_g линейны и сохраняют скалярное произведение

$$(T_g\Psi,\ T_g\Phi) = (\Psi,\ \Phi), \tag{2.A.7}$$

то представление T_g называется *унитарным*.

Непрерывные группы исторически возникли именно как группы преобразования в некотором пространстве. Выделение понятия абстрактной группы и рассмотрение ее представления позволяют объединить воедино различные гомоморфные (или изоморфные) реализации одной и той же алгебраической структуры.

Рассмотрим, например, группу двухрядных унитарных матриц $SU(2)$ с определителем 1. Она действует как группа преобразований, сохраняющих положительную эрмитову форму в двухмерном комплексном пространстве. Собственная ортогональная группа $SO(3)$ определяется как группа однородных преобразований трехмерного вещественного пространства, сохраняющих евклидову длину. Несмотря на, казалось бы, существенное различие этих определений, вторая из этих групп трансформаций может рассматриваться как (однозначное) представление абстрактной группы $SU(2)$ (см. п. 2.2).

Если G — топологическая группа, то представление T_g предполагается *непрерывным*. Непрерывность представления определяется в терминах слабой сходимости. Пусть $\mathscr{X}$ — линейное топологическое пространство, в котором действуют операторы представления T_g, и пусть $\mathscr{X}^*$ — сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов в $\mathscr{X}$. Представление T_g называется слабо непрерывным, если числовая функция $(F,\ T_g\Psi)$ непрерывна при любом выборе вектора $\Psi \in \mathscr{X}$ и функционала $F \in \mathscr{X}^*$. В частности, унитарное представление U_g непрерывно, если при любом выборе векторов Ψ и Φ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, где действуют операторы U_g, скалярное произведение $(\Phi,\ T_g\Psi)$ непрерывно относительно g.

Два представления T и T', действующих в пространствах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$, называются *эквивалентными*, если существует обратимый оператор V из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{X}'$ такой, что при любом $g \in G$

$$VT_g = T'_gV \quad \text{или} \quad T'_g = VT_gV^{-1}. \tag{2.A.8}$$

Заметим, что первое из этих равенств связывает операторы, переводящие векторы из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{X}'$, в то время как второе связывает преобразованием подобия автоморфизмы пространства $\mathscr{X}'$.

При классификации неэквивалентных представлений данной группы G основную роль играет понятие неприводимого представления. Перейдем к соответствующим определениям.

Мы будем рассматривать здесь лишь замкнутые подпространства линейного топологического пространства $\mathscr{X}$. Если пространство $\mathscr{X}$ конечномерно, то любое линейное подпространство замкнуто. Если $\mathscr{X}$ бесконечномерно, то, как мы видели в гл. 1, существуют всюду плотные в $\mathscr{X}$ линейные многообразия, которые не совпадают с $\mathscr{X}$ и, следовательно, не замкнуты.

Подпространство $\mathscr{X}_0$ пространства $\mathscr{X}$ называется *инвариантным* относительно представления T_g, действующего в $\mathscr{X}$, если $T_g\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}_0$ при всех $g \in G$. Подпространство, состоящее лишь из нулевого элемента пространства $\mathscr{X}$, и подпространство, совпадающее со всем пространством $\mathscr{X}$, очевидно, всегда инвариантны. Их называют *тривиальными инвариантными* подпространствами. Подпространство $\mathscr{X}_1$ называется *инвариантным дополнением* нетривиального инвариантного подпространства $\mathscr{X}_0$, если оно инвариантно и если $\mathscr{X}$ может быть представлено в виде прямой суммы:

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}_0 \oplus \mathscr{X}_1.$$

Напомним, что линейное пространство $\mathscr{X}$ называется прямой суммой подпространств $\mathscr{X}_0$ и $\mathscr{X}_1$, если любой элемент $x \in \mathscr{X}$ может быть представлен в виде упорядоченной пары $x=(x_0, x_1)$, $x_0 \in \mathscr{X}_0$, $x_1 \in \mathscr{X}_1$ так, что $\lambda x + \mu y = (\lambda x_0 + \mu y_0, \lambda x_1 + \mu y_1)$.

Представление T_g, действующее в пространстве $\mathscr{X}$, *приводимо*, если $\mathscr{X}$ содержит нетривиальное инвариантное подпространство. В противном случае представление T_g называется *неприводимым*. Представление называется *вполне приводимым*, если оно приводимо и если всякое его нетривиальное инвариантное подпространство имеет инвариантное дополнение.

Приведем пример приводимого, но не вполне приводимого представления.

Рассмотрим двухмерное представление

$$T_{\zeta\varphi} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.A.9}$$

группы E_2 евклидовых движений комплексной плоскости z *).

*) Если точки комплексной плоскости представлять двухрядными столбцами со вторым элементом 1, то

$$T_{\zeta\varphi}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi}z + \zeta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Представление $T_{\zeta\varphi}$ действует в двухмерном комплексном пространстве C_2 столбцов $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Оно приводимо, так как множество векторов вида $\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$ образует инвариантное подпространство $\mathscr{X}_1$. Однако представление $T_{\zeta\varphi}$ не вполне приводимо, так как в C_2 нет второго инвариантного подпространства, которое явилось бы ортогональным дополнением $\mathscr{X}_1$ (так, пространство векторов $\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}$ неинвариантно относительно группы матриц вида (2.А.9)).

Если конечномерное представление T_g вполне приводимо, то оно может быть приведено не зависящим от g преобразованием подобия в форме блочной матрицы

$$T_g = \left(\begin{array}{c|c} A_g & 0 \\ \hline 0 & B_g \end{array} \right).$$

Всякое приводимое конечномерное представление может быть приведено к треугольной блочной форме:

$$T_g = \left(\begin{array}{c|c} A_g & C_g \\ \hline 0 & B_g \end{array} \right). \tag{2.А.10}$$

Если матрицы C_g не равны нулю, то представление T_g не вполне приводимо.

Ясно, что изучение вполне приводимых представлений сводится к изучению их неприводимых частей. Поэтому важно иметь критерий полной приводимости.

Упражнение 2.А.4. Показать, что если унитарное представление U_g, действующее в конечномерном пространстве $\mathscr{H}$, приводимо, то оно вполне приводимо*). (Указание: проверить утверждение, что если $\mathscr{M}$ — нетривиальное инвариантное подпространство, то его ортогональное дополнение $\mathscr{M}^{\perp}$ в $\mathscr{H}$ — тоже инвариантное подпространство и, следовательно, является инвариантным дополнением пространства $\mathscr{M}$.)

Критерий неприводимости представления дает следующая лемма.

Лемма Шура. I (конечномерный случай). *Пусть T_g и S_g — два конечномерных неприводимых представления группы G. Если существует матрица V такая, что*

$$VT_g = S_g V,$$

*) Аналогичное утверждение справедливо и для унитарно-антиунитарных представлений.

то либо $V=0$, либо матрица V неособая и представления S и T эквивалентны:

$$S_g = VT_gV^{-1}.$$

Если при этом $S_g = T_g$, так что V коммутирует со всеми операторами представления, то матрица V кратна единичной матрице: $V=\lambda 1$ (см., например, [30], лекция 3).

II (случай бесконечномерного представления в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$). *Пусть представление T_g в $\mathscr{H}$ является самосопряженным в том смысле, что для любого $g \in G$ существует некоторое $g' \in G$, такое, что $T_g^* = T_{g'}$ (в случае унитарного представления $g' = g^{-1}$). Такое представление T_g приводимо тогда и только тогда, когда любой ограниченный линейный оператор V, коммутирующий со всеми операторами представления, кратен единичному оператору.*

Пусть T_g и S_g — два самосопряженных неприводимых представления в $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно. Тогда, если V — замкнутый линейный оператор *) из $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_2$ такой, что $VT_g = S_gV$, то либо $V=0$, либо существует обратный оператор V^{-1} и представления S_g и T_g эквивалентны: $S_g = VT_gV^{-1}$ **).

Для представлений компактных групп справедливо следующее утверждение: *всякое непрерывное линейное представление компактной группы G ограниченными обратимыми операторами в гильбертовом пространстве эквивалентно унитарному представлению.*

Отметим, что сформулированные выше условия существенны: можно построить бесконечномерные представления даже простейших компактных групп $SU(n)$, которые не эквивалентны унитарному (см. Фишер и Рончка (1966)).

А.3. Алгебра Ли. Пусть G — группа Ли, параметризованная в окрестности единичного элемента e параметрами $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ таким образом, что

$$g(0, \ldots, 0) = e. \tag{2.A.11}$$

Мы будем выбирать локальные координаты не произвольно, а так, чтобы множество элементов G вида $g(0, \ldots, 0, \varphi^\alpha, 0, \ldots, 0)$ образовывало окрестность коммутативной однопараметрической подгруппы, причем параметр φ^α в такой подгруппе будет предполагаться аддитивным:

$$g(0, \ldots, \varphi^\alpha, \ldots, 0)\, g(0, \ldots, \psi^\alpha, \ldots, 0) = \\ = g(0, \ldots, \varphi^\alpha + \psi^\alpha, \ldots, 0). \tag{2.A.12}$$

---

*) Относительно определения замкнутого оператора см. гл. 1, п. 1.6.
**) Доказательство этого утверждения см. в [31], § 21.2.

Система аналитических координат с таким свойством всегда существует (см. [25], § 42). Такие координаты будем называть *каноническими*.

Операторы T_g произвольного представления группы G могут рассматриваться как функции параметров φ в данной окрестности единичного элемента:

$$T_g = T(\varphi^1, \ldots, \varphi^n). \tag{2.A.13}$$

Если представление T_g непрерывно и конечномерно, то можно показать, что матричные функции (2.A.13) дифференцируемы. В случае бесконечномерных представлений это, вообще говоря, не так. Но тогда существует плотное в пространстве $\mathscr{X}$ множество векторов D, для которых векторная функция $T(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)x$ дифференцируема (при $x \in D$) *). Во всех случаях мы определим *инфинитезимальные операторы* (или *генераторы*) представления T_g как производные от операторов (2.A.13) в нуле:

$$I_\alpha = \left[\frac{\partial T}{\partial \varphi^\alpha}\right]_{\varphi=0}, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{2.A.14}$$

Согласно сказанному, в случае бесконечномерного представления операторы (2.A.14) определены лишь в плотной области D. Всякая однопараметрическая подгруппа $g(0, \ldots, \varphi^\alpha, \ldots, 0)$ представляется экспонентой

$$T(0, \ldots, \varphi^\alpha, \ldots, 0) = e^{I_\alpha \varphi^\alpha}$$

(без суммирования по α). Более того, каждому элементу g группы G в достаточно малой окрестности единичного элемента можно поставить в соответствие однопараметрическое семейство степеней g^λ (λ вещественное), для которого операторы представления имеют вид экспоненты

$$T(g^\lambda) = e^{\lambda I_g}.$$

Для n-параметрической группы Ли любой инфинитезимальный оператор I_g является линейной комбинацией базисных генераторов I_α ($\alpha = 1, \ldots, n$). Линейной замене параметров φ^α соответствует линейное преобразование операторов I_α. Генераторы могут быть определены формулой (2.A.14) и при более общих неканонических параметризациях. Хотя при этом отдельные генераторы I_α могут измениться, пространство генераторов, т. е. n-мерное вещественное пространство, «натянутое» на базисные векторы I_α, останется неизменным. Отсюда следует, что в про-

*) См. [16], где это показано для случая группы Лоренца.

странстве генераторов можно ввести наряду с линейными операциями (сложение и умножение на число) еще операцию коммутирования. Чтобы прийти к ней, рассмотрим коммутатор двух операторов представления:

$$K_{(\alpha,\beta)} = e^{I_\alpha\varphi}e^{I_\beta\varphi}e^{-I_\alpha\varphi}e^{-I_\beta\varphi}. \tag{2.A.15}$$

С точностью до членов второго порядка по φ включительно

$$K_{(\alpha,\beta)} = 1 + [I_\alpha, I_\beta]\varphi^2 + O(\varphi^3), \tag{2.A.16}$$

где $[I_\alpha, I_\beta]$ — коммутатор:

$$[I, J] = IJ - JI. \tag{2.A.17}$$

Если положить $\varphi^2 = \lambda$, становится ясным, что инфинитезимальный оператор $\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} K_{(\alpha,\beta)}\right]_{\lambda=0}$ равен коммутатору $[I_\alpha, I_\beta]$. Следовательно, согласно сказанному,

$$[I_\alpha, I_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} I_\gamma \tag{2.A.18}$$

(как обычно, под γ подразумевается суммирование от 1 до n). Постоянные $C^\gamma_{\alpha\beta}$ преобразуются как тензор третьего ранга при линейных преобразованиях параметров группы φ. При заданной параметризации группы они не зависят от выбора представления T_g. В случае вещественных групп Ли (с которыми мы только и имеем дело) коэффициенты C вещественны.

Итак, генераторы I_α любого представления T_g данной группы Ли G порождают некоторую неассоциативную алгебру, называемую *алгеброй Ли* представления T_g. Если обозначать элементы этой алгебры через I, J, K, то произведение Ли характеризуется следующими двумя свойствами:

а) *антисимметрия*

$$[I, K] = -[K, I], \tag{2.A.19}$$

б) *тождество Якоби*

$$[[I, J], K] + [[J, K], I] + [[K, I], J] = 0. \tag{2.A.20}$$

Легко проверить, что если скобка $[I, J]$ есть коммутатор (2.A.17), то условия (2.A.19) и (2.A.20) удовлетворяются тождественно. Обратно, если задана абстрактная алгебра Ли, в которой неассоциативное произведение $[\,,]$ удовлетворяет условиям а) и б), то можно определить *универсальную обертывающую алгебру*, порождаемую всевозможными формальными ассоциативными произведениями («словами») $IJK\ldots$, связанными с произведением Ли $[\,,]$ по формуле (2.A.17). Каждое линейное представление исходной алгебры Ли является в то же время представлением универсальной обертывающей алгебры. Однако, в то время как равенства типа (2.А.18), в которые входят лишь операции алгебры Ли (т. е. коммутатор, сложение и умножение на вещественное число), не зависят от выбора представления, равенства между ассоциативными произведениями могут выполняться в одном представлении и не иметь места в другом. Можно ввести абстрактную алгебру Ли $\boldsymbol{G}$, соответствующую группе Ли G и характеризующуюся тензором *структурных постоянных* $C_{\alpha\beta}^{\nu}$, и рассматривать алгебру Ли любого представления T_g как представление этой абстрактной алгебры.

Множество элементов $\boldsymbol{I}$ алгебры Ли $\boldsymbol{G}$ называется *идеалом*, если $[\boldsymbol{G}, \boldsymbol{I}] \subset \boldsymbol{I}$ (т. е. если коммутатор любого элемента $\boldsymbol{I}$ с любым элементом $\boldsymbol{G}$ принадлежит $\boldsymbol{I}$). Очевидно, каждый идеал является подавно подалгеброй алгебры Ли. Подалгебра $\boldsymbol{I}$ алгебры $\boldsymbol{G}$ называется *коммутативной* или *абелевой*, если для любых двух ее элементов J и K $[J, K]=0$. Алгебра $\boldsymbol{G}$ называется *полупростой*, если она не содержит ненулевых абелевых идеалов. Алгебра $\boldsymbol{G}$ называется *простой*, если она не содержит никаких нетривиальных идеалов.

Упражнение 2.А.5. Показать, что если группа G полупростая, то ее алгебра Ли $\boldsymbol{G}$ тоже является полупростой.

Иногда группу Ли G называют полупростой, если ее алгебра Ли $\boldsymbol{G}$ полупростая, даже если сама группа содержит дискретную инвариантную абелеву подгруппу. Например, группа $SU(n)$ считается простой, хотя у нее есть нетривиальный центр, а именно циклическая группа Z_n из n элементов.

Всякая n-параметрическая группа Ли обладает n-мерным представлением, в котором матричные элементы генераторов алгебры Ли имеют вид

$$(I_\nu)_\beta^\alpha = C_{\beta\nu}^\alpha. \tag{2.А.21}$$

Упражнение 2.А.6. Проверить, что матрицы (2.А.21) удовлетворяют перестановочным соотношениям (2.А.18). (Указание: воспользоваться тождеством Якоби (2.А.20), из которого вытекает равенство

$$C_{\alpha\beta}^\sigma C_{\sigma\gamma}^\tau + C_{\beta\gamma}^\sigma C_{\sigma\alpha}^\tau + C_{\gamma\alpha}^\sigma C_{\sigma\beta}^\tau = 0, \tag{2.А.22}$$

и антисимметрией коэффициентов C.)

Представление (2.А.21) называется *присоединенным представлением алгебры Ли* $\boldsymbol{G}$.

Присоединенное представление группы $SU(2)$ трехмерно. Его генераторы при параметризации (2.3.3) выражаются через единичный антисимметричный тензор третьего ранга

$$(I_k)_l^i = \varepsilon_{ikl}.$$

Каждой алгебре Ли соответствует симметричный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$, определяемый равенством

$$g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} C^{\nu}_{\mu\alpha} C^{\mu}_{\nu\beta} = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} I_\alpha I_\beta, \tag{2.А.23}$$

где матрицы I_α взяты в присоединенном представлении, а $\operatorname{Tr} A$ означает, как обычно, след матрицы A.

Вещественный симметричный тензор $g_{\alpha\beta}$ может быть приведен к диагональному виду при помощи подходящей линейной трансформации. Более того, можно добиться, чтобы его диагональные элементы принимали не более трех значений:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta}, \qquad \{g_{\alpha\alpha}\} = \{N, 0, -N\}. \tag{2.А.24}$$

Согласно теореме Картана алгебра Ли G полупростая тогда и только тогда, когда метрический тензор (2.А.23) неособенный, т. е. когда $\det g \neq 0$. Ясно, что в этом случае нужно исключить собственное значение 0 из (2.А.24). Для полупростых алгебр существует матрица $g^{\alpha\beta}$, обратная к метрическому тензору, т. е. такая, что

$$g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{2.А.25}$$

При помощи тензора $g^{\alpha\beta}$ можно поднимать индексы, в частности, у вектора инфинитезимальных операторов I:

$$I^{\alpha} = g^{\alpha\beta} I_\beta.$$

Название «метрический тензор» применительно к тензору g оправдывается инвариантностью квадратичной формы

$$C_2(G) = g_{\alpha\beta} I^\alpha I^\beta = I_\alpha I^\alpha, \tag{2.А.26}$$

принадлежащей универсальной обертывающей алгебре. В терминах алгебры Ли инвариантность $C_2(G)$ выражается равенством

$$[C_2(G), I] = 0 \quad \text{при любом} \quad I \in G. \tag{2.А.27}$$

Полиномиальные инварианты алгебры Ли называются ее *операторами Казимира*.

Структурные постоянные и метрический тензор позволяют дать алгебраический критерий компактности группы (наряду с приведенным выше алгебраическим критерием полупростоты). Полупростая группа Ли компактна тогда и только тогда, когда ее метрический тензор положительно определен. Для компактности произвольной группы Ли необходимо, чтобы существовали такие координаты в группе, для которых тензор структурных постоянных был полностью антисимметричен (согласно

(2.A.19) тензор всегда антисимметричен относительно двух нижних индексов; поэтому условие компактности можно сформулировать как условие антисимметрии второго и третьего (верхнего) индексов.

Если представление T_g унитарно, то операторы I_α антиэрмитовы, так что их собственные значения чисто мнимы. Так как в квантовой теории физическим величинам соответствуют эрмитовы операторы, то в физической литературе принято вводить эрмитов базис в алгебре Ли:

$$L_\alpha = iI_\alpha. \tag{2.A.28}$$

Подставляя (2.A.28) в (2.A.18), находим

$$[L_\alpha, L_\beta] = iC^\gamma_{\alpha\beta}L_\gamma. \tag{2.A.29}$$

Упражнение 2.A.7. Исходя из представления (2.3.3а) генераторов группы вращений, определить ее структурные постоянные. Показать, что метрический тензор в этом случае есть единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$. Найти структурные постоянные и метрический тензор для группы Лоренца, исходя из параметризации (2.3.2), (2.3.3).

Упражнение 2.A.8. Пусть $SL(n, C)$ — группа всех комплексных матриц n-го порядка с определителем 1. Показать, что алгебра Ли этой матричной группы состоит из всех матриц n-го порядка со следом, равным нулю. (Указание: пользуясь возможностью привести любую матрицу H в треугольную жорданову форму (см., например, [32], ч. 2, Добавление), вывести предварительно равенство

$$\det e^H = e^{\operatorname{Tr} H}. \tag{2.A.30}$$

А.4. Основные теоремы Ли. Значение алгебры Ли и ее представлений связано с тем, что по алгебре Ли можно восстановить группу, а представления группы Ли однозначно определяются соответствующими представлениями алгебр. Эти утверждения составляют содержание трех теорем Ли, формулировку которых мы приведем в этом пункте. Собственно говоря, Ли изучал группы непрерывных (вообще говоря, нелинейных) преобразований координат в некотором конечномерном пространстве. Из его исследования вытекают непосредственно результаты, относящиеся к конечномерным представлениям групп. В случае бесконечномерных представлений связь между представлениями алгебры и представлениями группы сложнее: существуют представления алгебры, которые не интегрируются до представлений полной группы (примером могут служить представления алгебры Ли группы трехмерных вращений, соответствующих комплексным значениям полного момента l). Мы не будем здесь вдаваться в эти тонкости и сформулируем результаты для случая конечномерных представлений, начиная с изучения связи между группой Ли и соответствующей ей алгебры.

В предыдущем пункте мы определили алгебру Ли G данной группы G, исходя из произвольного линейного представления этой группы и абстрагируя те свойства инфинитезимальных операторов, которые не зависят от выбора представления. Здесь, по ходу дела, мы введем алгебру Ли, исходя непосредственно из группы G.

Пусть в окрестности единичного элемента группы Ли G введена каноническая параметризация (см. (2.А.11) и (2.А.12)). Функции Φ^α (2.А.4), определяющие закон композиции в рассматриваемой окрестности, помимо закона ассоциативности умножения (2.А.5) удовлетворяют условиям:

$$\Phi(\varphi;\ 0) = \varphi(0;\ \varphi) = \varphi, \tag{2.А.31}$$

$$\Phi(0, \ldots, \varphi^\alpha, \ldots, 0;\ 0, \ldots, \theta^\alpha, \ldots, 0) = (0, \ldots, \varphi^\alpha + \theta^\alpha, \ldots, 0). \tag{2.А.31а}$$

Из существования обратного элемента следует, что по крайней мере в достаточно малой окрестности начала координат

$$\det\left(\frac{\partial\Phi^\alpha(\varphi;\ \theta)}{\partial\theta^\beta}\right) \neq 0. \tag{2.А.32}$$

Первая теорема Ли обеспечивает возможность восстановить функции Φ^α по функциям

$$v^\alpha_\beta(\varphi) = \left[\frac{\partial\Phi^\alpha(\varphi;\ \theta)}{\partial\theta^\beta}\right]_{\theta=0}. \tag{2.А.33}$$

Согласно первому равенству (2.А.31) функции (2.А.33) удовлетворяют «начальному условию»

$$v^\alpha_\beta(0) = \delta^\alpha_\beta. \tag{2.А.34}$$

Теорема 2.А.1 (первая теорема Ли). I. *Функции* $\Phi^\alpha(\varphi;\theta)$ *удовлетворяют системе частных дифференциальных уравнений первого порядка по* θ *при фиксированном* φ:

$$\frac{\partial\Phi^\alpha(\varphi;\ \theta)}{\partial\theta^\beta}\, v^\beta_\gamma(\theta) = v^\alpha_\gamma(\Phi(\varphi;\ \theta)) \tag{2.А.35}$$

(*как обычно, по повторному индексу* β *подразумевается суммирование от* 1 *до* n). II. *Если при данных непрерывно дифференцируемых функциях* v^α_β, *удовлетворяющих* (2.А.34), *система* (2.А.35) *имеет решение, то оно определяется однозначно этой системой и начальными условиями* $\Phi^\alpha(\varphi;0) = \varphi^\alpha$ (см. (2.А.31)).

Доказательство. I. Уравнения (2.А.3) являются следствием ассоциативного закона (2.А.5). Действительно, если продифференцировать (2.А.5) по τ^γ и положить затем $\tau=0$, мы получим, пользуясь (2.А.33), уравнения (2.А.35). Из этого уравнения и начального условия (2.А.34) в свою очередь вытекает связь (2.А.33).

II. Система (2.А.35) с начальным условием (2.А.31) имеет не более одного решения, по крайней мере в окрестности точки $\theta=0$. Это следует из того, что при достаточно малых θ

$$\det\left(v^\alpha_\beta(\theta)\right)>0, \tag{2.A.36}$$

так как функции v^α_β непрерывны, а в силу (2.А.34) $\det\left(v^\alpha_\beta(0)\right)=1$. Поэтому матрица $\left(v^\alpha_\beta(\theta)\right)$ обратима. Обозначим обратную матрицу через $\left(u^\alpha_\beta(\theta)\right)$:

$$u^\alpha_\sigma(\theta)\, v^\sigma_\beta(\theta)=\delta^\alpha_\beta. \tag{2.A.37}$$

С ее помощью уравнение (2.А.35) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial\Phi^\alpha(\varphi;\ \theta)}{\partial\theta^\beta}=v^\alpha_\sigma(\Phi(\varphi;\ \theta))\, u^\sigma_\beta(\theta). \tag{2.A.38}$$

То, что уравнение (2.А.38) вместе с начальным условием (2.А.31) имеет не более одного решения Φ, следует из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть последовательно следующую цепочку дифференциальных уравнений (и начальных условий):

$$\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial\theta^1}(\varphi;\ \theta^1,\ 0,\ \ldots,\ 0)=v^\alpha_\sigma(\Phi(\varphi;\ \theta^1,\ 0,\ \ldots,\ 0))\, u^\sigma_1(\theta^1,\ \ldots,\ 0),$$

$$\Phi^\alpha(\varphi;\ 0)=\varphi^\alpha;$$

$$\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial\theta^2}(\varphi;\ \theta^1,\ \theta^2,\ \ldots,\ 0)=v^\alpha_\sigma(\Phi(\varphi;\ \theta^1,\ \theta^2,\ \ldots,\ 0))\, u^\sigma_2(\theta^1,\ \theta^2,\ \ldots,\ 0),$$

$$\Phi^\alpha(\varphi;\ \theta^1,\ \theta^2,\ 0,\ \ldots,\ 0)\big|_{\theta^2=0}=\Phi^\alpha(\varphi;\ \theta^1,\ 0,\ \ldots,\ 0);$$

. . . .

Начальное условие во втором уравнении определяется через (единственное!) решение первого уравнения и т. д. Теорема 2.А.1 доказана.

До сих пор мы предполагали, что система (2.А.35) или (2.А.38) имеет решение, и доказывали его единственность при определенных начальных условиях. Условие существования решения этой системы («условие интегрируемости») получается, как обычно, из равенства вторых смешанных производных.

Теорема 2.А.2 (вторая теорема Ли). *Для того чтобы система (2.А.35) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы функции $v^\alpha_\beta(\theta)$ удовлетворяли наряду с начальным условием*

(2.A.34), *системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial v^{\alpha}_{\beta}(\theta)}{\partial \theta^{\sigma}} v^{\sigma}_{\gamma} - \frac{\partial v^{\alpha}_{\gamma}}{\partial \theta^{\sigma}} v^{\sigma}_{\beta} = C^{\sigma}_{\gamma\beta} v^{\alpha}_{\sigma}, \tag{2.A.39}$$

где $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — численные постоянные, антисимметричные относительно нижних индексов.

Доказательство. Воспользуемся обозначением $\tau = \Phi(\varphi; \theta)$ (2.A.4). Из равенства

$$\frac{\partial^2 \Phi^{\alpha}(\varphi; \theta)}{\partial \theta^{\beta}\, \partial \theta^{\gamma}} = \frac{\partial^2 \Phi^{\alpha}(\varphi; \theta)}{\partial \theta^{\gamma}\, \partial \theta^{\beta}} \tag{2.A.40}$$

при помощи (2.A.38) получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta^{\gamma}} \left[v^{\alpha}_{\sigma}(\tau)\, u^{\sigma}_{\beta}(\theta) \right] = \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \left[v^{\alpha}_{\sigma}(\tau)\, u^{\sigma}_{\gamma}(\theta) \right].$$

Отсюда, замечая, что

$$\frac{\partial v^{\alpha}_{\sigma}(\tau)}{\partial \theta^{\gamma}} = \frac{\partial v^{\alpha}_{\sigma}(\tau)}{\partial \tau^{\rho}} \frac{\partial \tau^{\rho}}{\partial \theta^{\gamma}} = \frac{\partial v^{\alpha}_{\sigma}(\tau)}{\partial \tau^{\rho}} u^{\rho}_{\varkappa}(\tau)\, u^{\varkappa}_{\gamma}(\theta),$$

находим

$$\frac{\partial v^{\alpha}_{\sigma}(\tau)}{\partial \tau^{\rho}} v^{\rho}_{\varkappa}(\tau) \left[u^{\varkappa}_{\gamma}(\theta)\, u^{\sigma}_{\beta}(\theta) - u^{\varkappa}_{\beta}(\theta)\, u^{\sigma}_{\gamma}(\theta) \right] =$$

$$= v^{\alpha}_{\sigma}(\tau) \left(\frac{\partial u^{\sigma}_{\gamma}(\theta)}{\partial \theta^{\beta}} - \frac{\partial u^{\sigma}_{\beta}(\theta)}{\partial \theta^{\gamma}} \right).$$

Меняя немые индексы в левой части равенства и пользуясь тождеством (2.A.37), можно перевести все функции от τ в левую часть равенства, а все функции от θ — в правую:

$$\left[\frac{\partial v^{\alpha}_{\beta}(\tau)}{\partial \tau^{\rho}} v^{\rho}_{\gamma}(\tau) - \frac{\partial v^{\sigma}_{\gamma}(\tau)}{\partial \tau^{\rho}} v^{\rho}_{\beta}(\tau) \right] u^{\alpha}_{\sigma}(\tau) =$$

$$= \left[\frac{\partial u^{\alpha}_{\sigma}(\theta)}{\partial \theta^{\rho}} - \frac{\partial u^{\alpha}_{\rho}(\theta)}{\partial \theta^{\sigma}} \right] v^{\sigma}_{\gamma}(\theta)\, v^{\rho}_{\beta}(\theta). \tag{2.A.41}$$

Так как левая часть (2.A.41) не зависит от θ, а правая — не зависит от τ, то обе они должны равняться одной и той же константе $C^{\alpha}_{\gamma\beta}$, которая может быть определена из (2.A.41), например, при $\tau = 0$. Учитывая (2.A.34), получаем

$$C^{\alpha}_{\gamma\beta} = \left(\frac{\partial v^{\alpha}_{\beta}}{\partial \tau^{\gamma}} \right)_{\tau=0} - \left(\frac{\partial v^{\alpha}_{\gamma}}{\partial \tau^{\beta}} \right)_{\tau=0}. \tag{2.A.42}$$

Приравнивая (2.А.41) этим константам, мы получаем уравнение (2.А.39). Теорема 2.А.2 доказана.

Заметим, что в силу (2.А.39) дифференциальные операторы

$$X_\alpha = v_\alpha^\sigma(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi^\sigma} \tag{2.A.43}$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma. \tag{2.A.44}$$

Операторы X_α называются *инфинитезимальными операторами группы* G, а постоянные $C_{\alpha\beta}^\gamma$ — ее структурными постоянными.

Последняя (третья) теорема Ли дает условия на структурные постоянные, при которых система уравнений (2.А.39) разрешима. Вместе с первыми двумя теоремами третья теорема позволяет восстановить группу по ее структурным постоянным.

Теорема 2.А.3 (третья теорема Ли). *Для локальной разрешимости системы частных дифференциальных уравнений* (2.А.39) *необходимо и достаточно, чтобы структурные постоянные удовлетворяли условию антисимметрии*

$$C_{\alpha\beta}^\gamma = -C_{\beta\alpha}^\gamma \tag{2.A.45}$$

и тождеству Якоби (2.А.22). *При этих условиях по структурным постоянным можно построить группу.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы следует из (2.А.44) и из тождества Якоби для коммутатора (см. упражнение (2.А.6)). Достаточность этих условий следует из известных результатов теории дифференциальных уравнений в частных производных. Отсюда и из первых двух теорем Ли следует, что по структурным постоянным можно восстановить локальную группу Ли (т. е. окрестность единичного элемента группы). Построение группы Ли в целом менее элементарно (см. [25], § 59).

Определяемый равенством (2.А.42) тензор структурных постоянных $C_{\alpha\beta}^\gamma$ совпадает с тензором, входящим в перестановочные соотношения (2.А.18) генераторов произвольного представления группы G. Это позволяет доказать аналоги основных теорем Ли для линейных представлений. Мы ограничимся здесь их формулировкой.

1. Если два представления группы G действуют в одном и том же пространстве и имеют один и тот же набор инфинитезимальных операторов, то они совпадают.

2. Инфинитезимальные операторы I_α любого представления удовлетворяют перестановочным соотношениям (2.А.18), где $C_{\alpha\beta}^\gamma$ — числовой тензор, не зависящий от выбора представления.

3. Для того чтобы числовой тензор $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ был тензором структурных постоянных некоторой группы, необходимо и достаточно, чтобы он был антисимметричным и удовлетворял тождеству Якоби (2.A.22). Если конечномерные матрицы A_α $(\alpha=1, \ldots, n)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (2.A.18), где $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ — структурные постоянные группы G, то эти матрицы являются инфинитезимальными операторами некоторого представления группы G.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. Первое математически безупречное изложение принципов квантовой механики в терминах гильбертова пространства дано в классической монографии фон Неймана [33]. Различным применениям теории оснащенных гильбертовых пространств в квантовой теории посвящены работы Бема (см. обзорную лекцию Андерсена и др. (1966) и ссылки на более ранние работы, приведенные в ней), Гроссмана (1965) — (1967) и Кристенсена и др. (1965). Изложение в первом пункте следует лекциям Тодорова (1964). Правила суперотбора впервые рассматривались Виком и др. (1952) (см. также Хагедорн (1959)). Мы воспроизводим в п. 1.3 результаты Харатяна (1968) в форме, которую им придали Харатян и Оксак (1968).

§ 2. Материал первых двух пунктов довольно элементарен и популярен (см., например, [2] и [3], Уайтман (1960б) и Йоос (1962)). Формулировка принципа релятивистской инвариантности (п. 3) восходит к Вигнеру (1939) (см. также [26]). Полное доказательство теоремы 2.2.1 дано Баргманом (1964).

§ 3. Результаты этого параграфа получены Вигнером (1939) (см. также Вигнер (1962)). Абстрактная формулировка метода индуцированных представлений, которым фактически пользовался Вигнер, дана Маки (1952). Сформулированные в тексте результаты теории представлений группы вращений выводятся, например, в монографиях [26] и [34] (см. также превосходное изложение Баргмана (1962)). Обстоятельный обзор по унитарным представлениям группы Пуанкаре дан в цитированной выше статье Йооса (1962); см. также Ю. Широков (1957—1959), (1960а, б), лекции Уайтмана (1960б), Уайтман и Барут (1959), обзор Ньютона в [27], Гийо и Пети (1966), Муса и Стора (1964). Относительно физических применений представлений класса III (с $p^2<0$) см., например, Йоос (1964). Описание отражения времени антиунитарным оператором впервые дано Вигнером (см. [26]). Относительно нормальной формы антиунитарных операторов и их феноменологических свойств см. Вигнер (1960а, б). Свойства спектрального разложения операторов представления трансляций изучались Ульманом (1961).

§ 4. Стандартное изложение теории Дирака имеется в любой книге по релятивистской квантовой теории (см., например, [4] и [6]). Классическое изложение теории спиноров в n-мерном пространстве содержится в книге Картана [35] (см. также монографию Рашевского [36]). Изложение теории спиноров и алгебры γ-матриц в стиле современной математики дано в дополнении B к книге Кастлера [37]. Дискретные преобразования дираковых спиноров рассматриваются во многих монографиях (см., например, [28] и [29]). Хорошее изложение этих вопросов имеется также в серии работ Виноградской (1957) (1959), где, однако, используется определение γ-матриц, при котором $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = \delta^{\mu\nu}$. Уравнение Дирака и четырехкомпонентные спинорные функции рассматриваются, с точки зрения представления группы Пуанкаре, в обзоре Йооса (1962). Уравнения для высших спинов рассматриваются в работах Гординга (1944), Баргмана и Вигнера (1948), Гельфанда и Яглома (1948) (см. также [34] и [16], Хариш-Чандра (1947), Вайнберг (1964а, б), Парк и Джеле (1964) и книги Висконти [38] и Умедзавы [39]).

§ 5. Гильбертово пространство векторов состояния, рассмотренное в п. 1, введено Фоком в тридцатых годах — см. [40]. Относительно разложения прямого произведения неприводимых представлений группы Пуанкаре см. Чжоу Гуан Чжао и М. Широков (1958), М. Широков (1961), Джакоб и Вик (1959), Вик (1962), Ломонт (1960), Муса и Стора (1964) (и дополнительные ссылки, содержащиеся в этой статье), Боис и др. (1967).

Дополнение. Фундаментальным и доступным руководством по теории непрерывных групп является книга Понтрягина [25]. Содержательно и свежо написаны лекции Желобенко [30]; очень удачен меньший по объему обзор Гюрсея (1963). Доказательство трех теорем Ли см. в [41], а также в упомянутом обзоре Гюрсея. Из общих руководств, специально адресованных физикам, можно рекомендовать [42], [43] и [27]. Превосходные монографии [26], [34], и [16] посвящены представлениям группы вращений и группы Лоренца. [Применению унитарных групп к описанию симметрии элементарных частиц посвящена книга [44] (элементарное изложение этих применений см. в лекциях Боголюбова (1966)). Относительно леммы Шура в бесконечномерном случае см. [31].

ГЛАВА 3

ЛОКАЛЬНОЕ КВАНТОВАННОЕ ПОЛЕ И ФУНКЦИИ УАЙТМАНА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Локальное квантованное поле $\varphi_\alpha(x)$ определяется как обобщенная функция с операторными значениями. Другими словами, любой основной функции $f(x) \in \mathscr{S}(R_4)$ ставится в соответствие неограниченный оператор $\varphi_\tau(f)$ в пространстве векторов состояния $\mathscr{H}$. Предполагается, что все операторы $\varphi_\tau(f)$ (когда индекс τ и «пробная функция» f меняются) имеют общую плотную в $\mathscr{H}$ область определения Ω. Далее постулируется релятивистская ковариантность поля. Локальность поля означает, что

$$[\varphi_\tau(x),\ \varphi_{\tau'}(y)]_{\mp}=0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2<0,$$

где знак «—» (коммутатор) соответствует полю с целым спином, а знак «+» (антикоммутатор) — полю с полуцелым спином. Полнота теории отождествляется с цикличностью вакуума: постулируется, что полиномы от операторов $\varphi_\tau(f)$, действующие на вакуум, порождают всюду плотное множество векторов в $\mathscr{H}$. Необходимость определения квантованного поля как операторной обобщенной функции видна из того, что даже в простейшем примере свободного поля «оператор поля в точке» $\varphi(x)$ не определен ни для одного вектора пространства $\mathscr{H}$. С другой стороны, понятие операторной обобщенной функции $\varphi(f)$ достаточно естественно как с точки зрения описания процесса измерения, так и потому, что, например, в случае свободного поля оператор $\varphi(f)$, действуя на вакуум, порождает нормированное одночастичное состояние (волновой пакет).

В § 2 вводится основной аппарат уайтмановского аксиоматического подхода — функции Уайтмана. Функции Уайтмана w_n — это обобщенные функции, равные вакуумным средним от произведений операторных полей в разных точках. Все постулаты квантовой теории поля формулируются в терминах обобщенных функций.

В § 3 показано, что, обратно, если имеется функционал Уайтмана (или, что то же, набор всевозможных функций w_n, удовлетворяющий некоторым требованиям), то по нему можно восстановить всю теорию: оснащенное гильбертово пространство векторов состояний, представление группы Пуанкаре в нем и операторное поле $\varphi(f)$ — таким образом, чтобы наперед заданные функции w_n равнялись средним по вакууму от произведения полей φ.

В § 4 рассматриваются примеры свободных и обобщенных свободных полей. В п. 4.3 на примере свободных полей рассмотрено вторично квантованное представление дискретных операций пространственного и временного отражений P и T и зарядового сопряжения C. В п. 4.5 выведено интегральное представление Челлена — Лемана, которое, в частности, позволяет охарактеризовать обобщенные свободные поля.

В дополнении дана сводка сингулярных функций квантовой теории поля.

§ 1. Определение и свойства локального квантованного поля

1.1. Понятие релятивистского операторного поля. Схема, изложенная в предыдущей главе, слишком обща. В ней не конкретизируется закон изменения физических величин во времени, только указывается его групповой характер. В перечисленных до сих пор постулатах не нашло еще отражения наше представление о причинной зависимости между физическими явлениями. Чтобы сформулировать дальнейшие требования, которые в значительной мере сузят класс возможных теорий, мы введем в рассмотрение локальные (в пространственно-временном смысле) наблюдаемые. Основную роль в дальнейшем будет играть понятие релятивистского квантованного поля, имеющего хорошо известный классический аналог.

Мы определим квантованное поле как тензорную обобщенную функцию с операторными значениями. Такое определение больше соответствует реальной физической ситуации, чем более привычное понятие поля, заданного в каждой точке пространства — времени. Действительно, на опыте всегда измеряется напряженность поля не в математической точке x, а в некоторой конечной области пространства и в конечном промежутке времени. Такому реальному измерению соответствует значение поля как обобщенной операторнозначной функции для основной функции с носителем в заданной пространственно-временной области.

Поле является, вообще говоря, многокомпонентной, тензорной величиной $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, имеющей в релятивистской теории определенные трансформационные свойства при преобразованиях из собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$ (φ может быть скаляром, спинором, вектором и т. д.). Вместо того чтобы рассматривать «тензор» φ как набор из r обобщенных функций, заданных в пространстве $\mathcal{S}(R_4)$, удобно рассматривать φ как функционал, заданный в пространстве «векторных» основных функций $\vec{f}=(f_1(x), \ldots, f_r(x))$, где $f_j(x) \in \mathcal{S}(R_4)$. Это пространство будем обозначать через $\mathcal{S}_r(R_4)$. Оба рассмотрения, естественно, эквивалентны:

$$\varphi(\vec{f})=\sum_{j=1}^{r} \varphi_j(f_j).$$

Перейдем к точному определению релятивистского квантованного поля.

Пусть $A \rightarrow V(A)$ — конечномерное представление унимодулярной группы $SL(2)$ размерности r и пусть $\vec{f} \in \mathcal{S}_r(R_4)$. Неограниченный линейный оператор $\varphi(\vec{f})$ в пространстве векторов состояний $\mathcal{H}$, определенный при всех $\vec{f} \in \mathcal{S}_r(R_4)$, называется *квантованным полем*, если выполняются следующие условия (аксиомы для поля):

IV. 1) *Все операторы* $\varphi(\vec{f})$ *и* $\varphi^*(\vec{f})$ *имеют общую (не зависящую от* $\vec{f}$) *область определения* Ω, *являющуюся плотным в* $\mathcal{H}$ *линейным многообразием, удовлетворяющим условиям*

$$\Psi_0 \in \Omega, \quad \varphi(\vec{f})\,\Omega \subset \Omega, \quad \varphi^*(\vec{f})\,\Omega \subset \Omega \tag{3.1.1}$$

при всех $\vec{f} \in \mathcal{S}_r(R_4)$.

IV. 2) *Оператор* $\varphi(\vec{f})$ *линеен относительно* $\vec{f}$:

$$\varphi(\alpha\vec{f}+\beta\vec{g})=\alpha\varphi(\vec{f})+\beta\varphi(\vec{g}).$$

Это свойство операторного поля позволяет нам пользоваться символической записью

$$\varphi(\vec{f})=\sum_{j=1}^{r} \varphi_j(f_j)=\sum_{j=1}^{r} \int \varphi_j(x) f_j(x)\, d^4x \tag{3.1.2}$$

в том же самом смысле, как в теории обобщенных функций (хотя символ $\varphi_j(x)$ не соответствует никакому оператору в $\mathcal{H}$

даже в примере свободных полей, который будет рассмотрен в § 4 *)).

IV. 3) *Оператор* $\varphi(\vec{f})$ *удовлетворяет как функция* $\vec{f}$ *следующему условию слабой непрерывности: если векторы* Φ *и* Ψ *принадлежат* Ω, *то* $(\Phi, \varphi(\vec{f})\Psi)$ *является обобщенной функцией из* $\mathscr{S}^*_r(R_4)$.

Отметим, что последнее, на первый взгляд чисто формальное, требование имеет нетривиальные физические следствия. Оно обеспечивает (вместе с другими постулатами) полиномиальную ограниченность матричных элементов в импульсном пространстве и тем самым, по-видимому, исключает из рассмотрения класс так называемых неперенормируемых теорий. Подробнее мы обсудим этот вопрос в гл. 4, §§ 3—5.

В релятивистской теории должно выполняться еще следующее условие ковариантности поля.

V. *Пусть* $U(\underset{\sim}{a}, A)$ — *унитарное представление спинорной группы* $\mathfrak{P}_0$, *которое реализуется в пространстве* $\mathscr{H}$. *Тогда операторы* $U(\underset{\sim}{a}, A)$ *оставляют инвариантной общую область определения операторов поля* Ω

$$U(\underset{\sim}{a}, A)\Omega \subset \Omega, \tag{3.1.3}$$

и

$$\varphi(\vec{f}_{\{\underset{\sim}{a}, A\}}) = U(\underset{\sim}{a}, A)\varphi(\vec{f})U^{-1}(\underset{\sim}{a}, A), \tag{3.1.4}$$

где

$$(\vec{f}_{\{\underset{\sim}{a}, A\}}(x))_i = \sum_{j=1}^{r} V_{ij}(A^{-1})f_j(\Lambda^{-1}(x-a)), \tag{3.1.5}$$

$\Lambda(A)$ *задается формулой* (2.2.15), $V(A)$ — *рассматриваемое* r-*мерное представление группы* $SL(2)$.

Упражнение 3.1.1. Показать, что если поля $\varphi_j(x)$, определяемые формулой (3.1.2), имеют смысл, то требование V эквивалентно следующему закону преобразования этих полей при преобразованиях из $\mathfrak{P}_0$ **):

$$U(\underset{\sim}{a}, A)\,\varphi_l(x)\,U^{-1}(\underset{\sim}{a}, A) = \sum_{j=1}^{r} V^{-1}(A)_{lj}\,\varphi_j(\Lambda x + a). \tag{3.1.6}$$

Поле называется *скалярным*, если оно однокомпонентно ($r = 1$) и $V(A) \equiv 1$. *Тензорное поле*, преобразующееся по одно-

*) Ситуация, имеющая место в случае свободных полей, справедлива и в общем случае (см. § 4).

**) Отметим, что мыслима более общая формулировка принципа ковариантности поля, в которой не предполагается конечномерность представления $V(A)$ (см., например, обзорную статью Стоянова и Тодорова (1968)). В качестве примера можно привести так называемое билокальное поле $\psi(x, \xi)$, зависящее от пары четырехмерных векторов x и ξ. В литературе обсуждались также другие обобщения постулата релятивистской инвариантности (см. Инграхам (1962)).

значному представлению группы $L_+^\uparrow$ (например, скалярное или векторное поле), называется *нейтральным*, если его составляющие $\varphi_j(f)$ эрмитовы при вещественных f (смысл такого названия выяснится ниже, в п. 4.2, где мы покажем, как можно связать понятие электрического заряда с комплексным (скалярным) полем; см. также [45]). Поле называется *спинорным*, если матрица $V(A)$ в законе преобразования (3.1.5)—(3.1.6) задает спинорное (двузначное) представление группы Лоренца (см. определение в гл. 2, п. 4.1).

Спинорные поля (соответствующие двузначному представлению группы Пуанкаре) ненаблюдаемы; они осуществляют переход между двумя различными когерентными подпространствами пространства векторов состояний $\mathscr{H}'$. Действительно, как отмечалось в гл. 2, п. 1.3, однозначность или двузначность представлении $U(a, A)$ задает в $\mathscr{H}$ правила суперотбора. Всегда

$$U(a, -1) = \varepsilon U(a, 1), \tag{3.1.7}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, причем ε постоянно в данном когерентном подпространстве. Если φ — спинорное поле, то $\varphi(\vec{f}_{\{a,-1\}}) = -\varphi(\vec{f}_{\{a,1\}})$. Если допустить, что оператор $\varphi(\vec{f})$ не меняет значения ε, то мы при любом выборе ε ($\varepsilon^2 = 1$) получим

$$U(a, -1)\,\varphi(\vec{f})\,U^{-1}(a, -1) = U(a, 1)\,\varphi(\vec{f})\,U^{-1}(a, 1),$$

что противоречит (3.1.4) и условию, что поле φ спинорное. Следовательно, поле $\varphi(\vec{f})$ переводит когерентное подпространство с заданным ε в другое когерентное подпространство с $\varepsilon' = -\varepsilon$, так что

$$U(a, -1)\,\varphi(\vec{f})\,U^{-1}(a, -1) = -U(a, 1)\,\varphi(\vec{f})\,U^{-1}(a, 1).$$

Ненаблюдаемы и комплексные тензорные поля, которые осуществляют переход между когерентными подпространствами с разными зарядами.

1.2. Принцип локальности. Перейдем теперь к одному из самых существенных требований релятивистской локальной теории поля — к постулату локальной коммутативности. Физический смысл этого требования состоит в том, что измерения составляющих поля в двух пространственно-временных точках x и y, разделенных пространственноподобным интервалом, независимы (ни одно из этих измерений не может повлиять на результат другого). Это является отражением принципа релятивистской микропричинности. Строго говоря, подобное интуитивное обоснование требования локальной коммутативности имеет смысл, лишь если идет речь о наблюдаемых полях (и их комбинациях), т. е. об эрмитовых полях, преобразующихся по однозначному представлению группы Лоренца. Формулировка следующего постулата для произвольных полей (в том числе для комплексных и спинорных) представляет собой наиболее естественное обобщение этого частного случая.

VI. *Пусть носители вектор-функций $\vec{f}$ и $\vec{g}$ разделены пространственноподобным интервалом, т. е.*

$$\operatorname{supp} f_i(x)\cdot g_j(y)\subset\{(x-y)^2<0\};\qquad i,\ j=1,\ \ldots,\ r. \tag{3.1.8}$$

Тогда операторы $\varphi(\vec{f})$ и $\varphi(\vec{g})$, будучи примененными к векторам из Ω, либо коммутируют, либо антикоммутируют между собой:

$$[\varphi(\vec{f}),\ \varphi(\vec{g})]_{\mp}=[\varphi(\vec{f}),\ \varphi^*(\vec{g})]_{\mp}=0 \tag{3.1.9}$$

или, в символической форме,

$$[\varphi_j(x),\ \varphi_k(y)]_{\mp}=[\varphi_j(x),\ \varphi_k^*(y)]_{\mp}=0\quad \text{при}\quad (x-y)^2<0. \tag{3.1.10}$$

Мы увидим в дальнейшем (гл. 5, § 3), что при выполнении остальных требований знак «—» (коммутатор) соответствует тензорному бозонному полю, преобразующемуся по однозначному представлению группы Лоренца $L_+^\uparrow$; знак «+» (антикоммутатор) соответствует спинорному *фермионному* полю, преобразующемуся по двузначному представлению этой группы (теорема о связи спина со статистикой). Здесь же мы будем следовать этому правилу знаков, принимая его пока без доказательства.

Если предположить, что операторы $\varphi(\vec{f})$ имеют при вещественных f самосопряженные замыкания (это имело бы смысл лишь для нейтральных бозонных полей или для эрмитовых комбинаций спинорных полей), то можно было бы потребовать, чтобы их спектральные функции в разложении (1.1.40) коммутировали. Такое требование было бы, вообще говоря, более сильным, чем требование VI (см. Нельсон (1959)).

Относительно связи математического условия строгой локальной коммутативности и наблюдаемой независимости полей на сравнительно больших пространственноподобных расстояниях см. теорему 5.2.3 (гл. 5, § 2.2) и замечание после нее.

Попытки видоизменить (или обобщить) излагаемую здесь схему квантовой теории поля часто начинаются с отрицания именно постулата локальной коммутативности. Основная причина такой тенденции состоит в том, что этот постулат довольно сильно сужает класс допустимых теорий и существенно усложняет математическую задачу описания этого класса. Действительно, если бы мы хотели найти все операторные обобщенные функции, удовлетворяющие условию ковариантности (3.1.4), то мы имели бы дело с линейной задачей, являющейся обобщением некоторой полностью решенной математической задачи (см. Гординг (1944), И. М. Гельфанд и А. Яглом (1948), Макн (1952), Брюа (1956)). С другой стороны, до сих пор нет примера теории, удовлетворяющей всем постулатам (включая требование локальности) и приводящей к нетривиальной матрице рассеяния. Построение такого нетривиального примера является центральной проблемой аксиоматического подхода в релятивистской квантовой теории.

1.3. Требование полноты: цикличность вакуума и неприводимость поля. Далее мы потребуем, чтобы рассматриваемые нами поля (одно или несколько) образовывали полную систему операторов в пространстве векторов состояний. Этому требованию можно придать различные математические формулировки. Мы дадим формулировку, исходящую из интуитивного представления о том, что, действуя последовательно на вектор вакуума операторами поля, можно получить полную систему линейно независимых векторов в пространстве $\mathscr{H}$. Сначала введем некоторые вспомогательные понятия.

Прежде всего, если операторы $\varphi_j^\alpha(f)$ $(1 \leqslant j \leqslant r_\alpha \equiv \overline{\alpha})$ неэрмитовы (при вещественном f), то мы для удобства обозначений положим при любых комплексных α-мерных векторных функциях $\vec{f}$

$$\varphi^{-\alpha}(\vec{f}^*) = \varphi^{\alpha*}(\vec{f}), \tag{3.1.11}$$

где $(\vec{f}^*)_j(x) = \bar{f}_j(x)$. Далее, для сокращения обозначений пару индексов (α, j) будем обозначать через τ, так что

$$\varphi_j^\alpha(f) \equiv \varphi_\tau(f).$$

Лемма 3.1.1. *Произведение операторов*

$$\varphi_{\tau_1}(f_1) \ldots \varphi_{\tau_n}(f_n), \qquad f_j(x) \in \mathscr{S}(R_4),$$

где $\tau_\nu = (i_\nu, \alpha_\nu)$, $1 \leqslant i_\nu \leqslant \overline{\alpha}_\nu$, *однозначно определяет операторную обобщенную функцию в* $\mathscr{S}(R_{4n})$:

$$\begin{aligned} \varphi_{\boldsymbol{\tau}}(f) \equiv \varphi_{\tau_1 \ldots \tau_n}(f(x_1, \ldots, x_n)) = \\ = \int \varphi_{\tau_1}(x_1) \ldots \varphi_{\tau_n}(x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, d^4x \ldots d^4x_n \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

так, что *)

$$\varphi_{\boldsymbol{\tau}}(f(x_1) \ldots f_n(x_n)) = \varphi_{\tau_1}(f_1) \ldots \varphi_{\tau_n}(f_n).$$

Доказательство. Пусть Φ и Ψ — произвольные векторы из Ω. Рассмотрим полилинейный функционал

$$F_{\boldsymbol{\tau}}(f_1(x_1) f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)) = (\Phi, \varphi_{\tau_1}(f_1) \ldots \varphi_{\tau_n}(f_n) \Psi). \tag{3.1.13}$$

Этот функционал линеен и непрерывен по каждому из своих аргументов f_j при фиксированных остальных.

---

*) Здесь и в дальнейшем совокупность пар индексов $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ обозначается жирным $\boldsymbol{\tau}$.

Из теоремы о ядре (гл. 1, п. 1.4) следует, что функционал взаимно однозначно определяется обобщенной функцией $F(f) \in \mathcal{S}^*(R_{4n})$, причем $F(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)) = F_\tau(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Покажем теперь, что существует такой неограниченный оператор $\varphi_\tau(f)$, определенный в Ω, что

$$F(f) = (\Phi, \varphi_\tau(f)\Psi). \tag{3.1.14}$$

Для этого необходимо исследовать зависимость функционала $F(f)$ от векторов Φ и Ψ. Мы наметим лишь основной ход рассуждений, оставляя читателю восстановление деталей доказательства.

1. Пусть f_k — конечная линейная комбинация произведений основных функций из $\mathcal{S}(R_4)$:

$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant k} c_{k\nu} f_{1\nu_1}(x_1) \ldots f_{n\nu_n}(x_n). \tag{3.1.15}$$

Тогда оператор, удовлетворяющий (3.1.14), существует и определяется формулой

$$\varphi_\tau(f_k) = \sum_{\nu=1}^{k} c_{k\nu} \varphi_{\tau_1}(f_{1\nu}) \ldots \varphi_{\tau_n}(f_{n\nu_n}).$$

При фиксированных f_k и $\Psi \in \Omega$ оператор (3.1.14) определяет антилинейную непрерывную функцию от Φ:

$$\begin{gathered}
(\Phi_1 + \Phi_2, \varphi_\tau(f_k)\Psi) = (\Phi_1, \varphi_\tau(f_k)\Psi) + (\Phi_2, \varphi_\tau(f_k)\Psi), \\
(\lambda\Phi, \varphi_\tau(f_k)\Psi) = \bar{\lambda}(\Phi, \varphi_\tau(f_k)\Psi), \\
|(\Phi, \varphi_\tau(f_k)\Psi)| \leqslant \|\varphi_\tau(f_k)\Psi\| \cdot \|\Phi\|.
\end{gathered} \tag{3.1.16}$$

2. Плотность линейных комбинаций (3.1.15) в $\mathcal{S}(R_{4n})$ дает возможность представить значение функционала (3.1.14) на элементе $f \in \mathcal{S}(R_{4n})$ в виде

$$F(f) \equiv F(f;\ \Phi,\ \Psi) = \lim_{f_k \to f} (\Phi, \varphi_\tau(f_k)\Psi), \tag{3.1.17}$$

где f_k стремится к f относительно сходимости в $\mathcal{S}(R_{4n})$. Убедимся теперь в непрерывности $F(f;\ \Phi, \Psi)$, рассматриваемого как антилинейный функционал над $\Phi \in \mathcal{H}$. С этой целью перейдем в неравенстве (3.1.14) к пределу $f_k \to f_0$. Возможность предельного перехода обусловливается тем, что последовательность

$$\|\varphi_\tau(f_k)\Psi\|^2 = (\Psi, \varphi_\tau^*(f_k)\varphi_\tau(f_k)\Psi)$$

сходится в силу постулата IV. 3 и теоремы о ядре.

3. В силу теоремы Рисса (гл. 1, п. 1.2) любой антилинейный и непрерывный по $\Phi \in \mathscr{H}$ функционал $F(f;\ \Phi, \Psi)$ может быть представлен в виде

$$F(f;\ \Phi,\ \Psi) = (\Phi,\ \Psi_1(f)),$$

где $\Psi_1(f) \in \mathscr{H}$. Очевидно, $\Psi_1(f)$ является линейной функцией вектора Ψ:

$$\Psi_1(f) = \varphi_\tau(f)\Psi.$$

Лемма 3.1.1 доказана.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{A}$ всех «сглаженных» полиномов от полей φ_i^α, т. е. всех выражений вида

$$P(\varphi;\ f) = f_0 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_\nu \leqslant \overline{\alpha}_\nu} \varphi_{i_1 \ldots i_j}^{\alpha_1 \ldots \alpha_j}\left(f_{i_1 \ldots i_j}^{\alpha_1 \ldots \alpha_j}(x_1,\ \ldots,\ x_j)\right), \tag{3.1.18}$$

где операторы $\varphi_\tau(f)$ определены в доказанной выше лемме.

Очевидно, линейные комбинации и произведения полиномов из $\mathfrak{A}$ снова являются элементами множества $\mathfrak{A}$. Совокупиость с такими свойствами называется *алгеброй*. Все элементы алгебры $\mathfrak{A}$ являются, вообще говоря, неограниченными операторами, определенными в Ω.

Теперь мы можем сформулировать условие полноты теории.

VII. *Совокупность векторов вида*

$$P(\varphi;\ f)\Psi_0, \tag{3.1.19}$$

где Ψ_0 — вектор вакуума, а $P(\varphi;\ f) \in \mathfrak{A}$, всюду плотна в $\mathscr{H}$.

Это условие выражается еще словами, что вакуум является *циклическим* вектором относительно алгебры $\mathfrak{A}$ операторов поля.

Отметим, что Ω играет роль ядерного пространства в оснащенном гильбертовом пространстве векторов состояний. Условие ядерности Ω не будет дополнительным ограничением на теорию, если мы определим $\Omega = \Omega_1$ как совокупность векторов вида (3.1.19). Прн таком определении, очевидно, удовлетворяются условия (3.1.1) и (3.1.3). В силу постулата VII, Ω_1 является всюду плотным линейным многообразием в $\mathscr{H}$. Определим в Ω_1 сходимость к нулю следующим образом. Последовательность векторов $P_\nu(\varphi;\ f)\Psi_0$, где $P_\nu(\varphi;\ f) \in \mathfrak{A}$, стремится к нулю, если одновременно выполняются следующне два условия:

1. Существует не зависящее от ν положительное число N, такое, что степень полиномов $P_\nu(\varphi;\ f)$ типа (3.1.18) не превосходит N, так что

$$P_\nu(\varphi;\ f) = P(\varphi;\ f_\nu) = f_0 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_\nu=1}^{\overline{\alpha}_\nu} \varphi_{i_1 \ldots i_j}^{\alpha_1 \ldots \alpha_j}\left[(f_\nu)_{i_1 \ldots i_j}^{\alpha_1 \ldots \alpha_j}(x_1,\ \ldots,\ x_j)\right].$$

2. Последовательности функций $(f_\nu)_l^\alpha$ сходятся к нулю относительно сходимости в $\mathscr{S}$ (R_{4j}). Нетрудно показать, что пространство Ω_1 является полным ядерным пространством относительно такой топологии. Отметим, что определенное таким образом пространство Ω_1 — наименьшее ядерное пространство пространства $\mathscr{H}$, удовлетворяющее перечисленным выше условиям на Ω.

Другая формулировка условия полноты системы операторов поля $\varphi_\tau(f)$ связана с понятием неприводимости поля. Будем говорить, что операторы поля $\varphi(f)$ образуют *неприводимую систему*, если из того, что ограниченный оператор B слабо коммутирует со всеми φ_τ, т. е.

$$(\varphi_\tau^*(f)\Phi,\ B\Psi)=(\Phi,\ B\varphi_\tau(f)\Psi) \tag{3.1.20}$$

при всех $\tau=(i,\ \alpha)$, $1\leqslant i\leqslant \bar{\alpha}$, $\Phi,\ \Psi\in\Omega$, $f\in\mathscr{S}(R_4)$, следует, что B кратен единичному оператору. Полнота теории формулируется после этого как неприводимость системы полей $\varphi_\tau(f)$. Справедлива следующая теорема (Рюель (1962); Борхерс (1962)).

Теорема 3.1.1. *Если имеют место постулаты* I—VII (*включая единственность вакуума*), *то система полей* $\varphi_\tau(f)$ *неприводима.*

Доказательство. Пусть, действительно, ограниченный оператор B слабо коммутирует со всеми операторами $\varphi_\tau(f)$. Отсюда следует, что B слабо коммутирует и со всеми полиномами $P(\varphi;\ f)\in\mathfrak{A}$. Без ограничения общности можно предположить, что $B\Psi_0\neq 0$, так как если $B\Psi_0=0$, то и $BP(\varphi;f)\Psi_0=0$ и, значит, $B=0$, так как в силу постулата VII совокупность векторов вида (3.1.19) всюду плотна в $\mathscr{H}$. Пусть

$$\|B\Psi_0\|=\rho>0, \qquad (\Psi_0,\ B\Psi_0)=\alpha, \qquad |\alpha|\leqslant\rho.$$

Для любого $\varepsilon>0$ существует (в силу VII) такой полином $P(\varphi;f)$ вида (3.1.18), что

$$\|(B-P(\varphi;\ f))\Psi_0\|<\varepsilon$$

и, следовательно, в силу неравенства Коши

$$|(B\Psi_0,\ B\Psi_0)-(P(\varphi;\ f)\Psi_0, B\Psi_0)|<\rho\varepsilon.$$

Пусть $h(p)\in\Theta_M$ — функция, равная единице в окрестности спектра оператора энергии — импульса P и равная нулю вне некоторой окрестности этого спектра. Точнее, мы потребуем, чтобы $h(p)=h_0(p)+h_m(p)$; здесь $h_0(0)=1$, $h_0(p)=0$ вне некоторой окрестности начала, не содержащей точек области $p^2=\frac{1}{2}m^2>0$ (m — наименьшая масса в спектре оператора

$\sqrt{P^2}$ — см. постулат III.в), $h_m(p)=1$ при $p^0 \geqslant \sqrt{\frac{3}{4}m^2+p^2}$, $h_m(p)=0$ при $p^0 \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}m^2+p^2}$.

В силу постулата спектральности, благодаря которому $h(p)=1$ в окрестности спектра оператора импульса,

$$U^{-1}(\underset{\sim}{a},\,1)\frac{1}{(2\pi)^4}\int\int e^{ip(a'-a)}h(p)\,U(\underset{\sim}{a}',\,1)\,d^4a'd^4p=$$
$$=U^{-1}(\underset{\sim}{a},\,1)\frac{1}{(2\pi)^4}\int\int e^{ip(a'-a)}U(\underset{\sim}{a}',\,1)\,d^4a'd^4p=1.$$

Применяя этот оператор к вектору $P(\varphi;\,f)\Psi_0$, получим

$$P(\varphi;\,f)\Psi_0=P(\varphi;\,g)\Psi_0,$$

где

$$g_{\tau_1\ldots\tau_j}(x_1,\,\ldots,\,x_j)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int f_{\tau_1\ldots\tau_j}(x_1-\xi,\,\ldots,\,x_j-\xi)\,\tilde h(\xi)\,d^4\xi,$$

$\tilde h$ — фурье-образ функции $h(p)$. С другой стороны,

$$P^*(\varphi;\,g)\Psi_0=(\Psi_0,\,P^*(\varphi;\,g)\Psi_0)\Psi_0,$$

так как преобразование Фурье функции $\bar g_\tau(x_1,\,\ldots,\,x_j)$, равное $\bar f_\tau(-p_1,\,\ldots,\,-p_j)\tilde h(-(p_1+\,\ldots\,+p_j))$, обращается в нуль во всех точках спектра оператора полного 4-импульса P, за исключением точки $P=0$, соответствующей вакууму.

Пользуясь всем этим и условием перестановочности (3.1.20), получаем

$$\rho\varepsilon > |\rho^2-(P(\varphi;\,g)\Psi_0,\,B\Psi_0)|=|\rho^2-(\Psi_0,\,BP^*(\varphi,\,g)\Psi_0)|=$$
$$=|\rho^2-\alpha(\Psi_0,\,P^*(\varphi;\,g)\Psi_0)|.$$

С другой стороны, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(\Psi_0,\,P(\varphi;\,g)\Psi_0)=\alpha$ и, значит, $\alpha\bar\alpha=\rho^2$. Отсюда следует, что вакуум является собственным вектором оператора B с собственным значением α. Используя еще раз то, что оператор B перестановочен с полями, находим, что $B\Phi=\alpha\Phi$ для любого вектора Φ вида (3.1.19).

Отсюда в силу постулата VII следует, что $B=\alpha 1$ во всем $\mathscr{H}$. Теорема 3.1.1 доказана.

Отметим, что из постулата о цикличности вакуума относительно системы полей $\varphi(\vec f)$ (вместе с остальными постулатами) следует более сильное по форме утверждение.

Пусть O — любое открытое множество в R_4. Обозначим через $\mathfrak{A}(O)$ алгебру всех полиномов от $\varphi_\tau(\vec f)$, где носитель функции $f(x)$ содержится в O. Справедливо следующее утверждение (Рее и Шлидер (1961)).

Теорема 3.1.2. *Если выполняются аксиомы* I—VII, *то вакуум является циклическим вектором не только относительно всей алгебры* $\mathfrak{A}$, *но и относительно алгебры* $\mathfrak{A}(O)$ *для любого открытого множества* O.

Мы не будем приводить здесь доказательства этой теоремы.

Отметим, что такая теорема не справедлива относительно второго понятия полноты: если O — открытое множество, не совпадающее со всем пространством, то алгебра $\mathfrak{A}(O)$, вообще говоря, приводима.

Это дало основание Хаагу сформулировать следующее дополнительное требование, которое мы вслед за Хаагом и Шроером (1962) назовем постулатом *примитивной причинности* (ПП).

Пусть $O_t = O_t(\delta)$ — *полоса шириной* 2δ *между двумя пространственноподобными плоскостями, которая в некоторой лоренцевой системе может быть задана неравенствами*

$$t - \delta < x_0 < t + \delta.$$

Тогда алгебра $\mathfrak{A}(O_t)$ *неприводима.*

Постулат ПП означает, что знание полей во всем трехмерном пространстве и в сколь угодно малом интервале времени $(t-\delta,\ t+\delta)$ позволяет восстановить всю теорию, так как совокупность полей $\varphi(f)$, где носитель f принадлежит $O_t(\delta)$, уже неприводима. Это требование заведомо будет иметь место, если мы имеем дело с каноническим лагранжевым формализмом. Тогда гайзенберговы операторы поля удовлетворяют уравнениям движения, и, следовательно, задавая их (вместе с их производными в случае бозонных полей) на любой пространственноподобной поверхности, мы можем восстановить поля во всем пространстве — времени. В этом смысле требование ПП отражает общее условие причинности, сохраняющее свой смысл и в нерелятивистской теории (в отличие от постулата локальности VI). С другой стороны, формулировка постулата ПП гораздо более гибка, чем канонический лагранжев (или гамильтонов) формализм, математическая самосогласованность которого, как мы увидим в гл. 5 (теорема Хаага), вызывает сомнения. Действительно, в отличие от канонического формализма мы не требовали даже существования значений поля в фиксированный момент времени — для нас должны иметь смысл лишь значения $\varphi_\tau(f)$ при $f(x) \in \mathscr{S}(R_4)$.

Постулат ПП не зависит от требований I—VII. В этом можно убедиться на примере обобщенных свободных полей (см. ниже, п. 4.5) с медленно убывающей весовой функцией $\sigma(m^2)$ (Хааг и Шроер (1962)). Однако этот постулат не исключает всех обобщенных свободных полей; он справедлив в модели с быстро убывающей весовой функцией (Борхерс и др. (1963)).

В связи с этим Хааг и Свиека (1965) рассматривают более жесткие требования, исключающие обобщенные свободные поля и обеспечивающие интерпретацию квантовой теории поля в терминах частиц.

В дальнейшем мы не будем пользоваться постулатом ПП.

§ 2. Функции Уайтмана

2.1. Вакуумные средние от произведений операторов поля. Релятивистская инвариантность. Пусть поля $\varphi^\alpha(\vec{f})$, где $\vec{f} \in \mathscr{S}_{r_\alpha}(R_4)$, образуют полную систему полей в смысле постулата VII. Мы по-прежнему будем считать, что если оператор

$\varphi^{\alpha}(\vec{f})$ неэрмитов, то среди остальных полей находится эрмитово сопряженный к нему оператор $\varphi^{-\alpha}$, т. е. выполняется соглашение (3.1.11). Всевозможные вакуумные средние, называемые *функциями Уайтмана*

$$w_{\tau} = w_{\tau_1 \ldots \tau_n}(x_1, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv w^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\Psi_0,\ \varphi^{\alpha_1}_{i_1}(x_1) \ldots \varphi^{\alpha_n}_{i_n}(x_n)\,\Psi_0\right), \qquad (3.2.1)$$
$$\tau_j = (\alpha_j,\ i_j),$$

всегда существуют (в силу постулата IV) как обобщенные функции по каждому аргументу. Постулаты I—VII накладывают определенные условия на функции w. Основной результат Уайтмана (1956) состоит в том, что если взять систему обобщенных функций $w_{\tau_1 \ldots \tau_n}$, удовлетворяющих всем этим условиям, то существуют поля φ_{τ_j} такие, что функции w являются вакуумными средними от произведений этих полей. Другими словами, все содержание квантовой теории поля может быть переведено на язык свойств функций (3.2.1): зная эти функции, можно восстановить гильбертово пространство векторов состояний, унитарное представление спинорной группы Пуанкаре в нем и ковариантные операторные поля таким образом, чтобы выполнялись все постулаты I—VII.

В этом параграфе мы выведем свойства функций Уайтмана, вытекающие из постулатов I—VII. В § 3 мы покажем, как решается обратная задача — восстановление теории по заданным функциям w_{τ}.

В силу теоремы Шварца о ядре (гл. 1, п. 1.4) полилинейный функционал

$$w_{\tau_1 \ldots \tau_n}(f_1, \ldots, f_n) = (\Psi_0,\ \varphi_{\tau_1}(f_1), \ldots \Psi_0), \qquad f_j \in \mathscr{S}(R_4), \qquad (3.2.2)$$

взаимно однозначно определяется обобщенной функцией w_{τ} в $\mathscr{S}(R_{4n})$, которая может быть представлена символично формулой

$$w_{n\tau}(f) = \int \ldots \int w_{n\tau}(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, d^4x_1 \ldots d^4x_n, \qquad (3.2.3)$$

причем значения функционала (3.2.2) получаются в частном случае, когда $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$. Другими словами, вместо функционала (3.2.2) от n функций одного 4-векторного аргумента, можно рассматривать функционал от одной функции n аргументов.

Чтобы сформулировать в компактной форме условие релятивистской ковариантности для функций Уайтмана, удобно ввести пространство тензорных основных функций $\mathscr{S}_{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n}(R_{4n}) = \mathscr{S}_{\bar{\alpha}}(R_{4n})$, состоящее из всех тензоров вида $f = \{f_i\}$, где

$$f_i = f_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{S}(R_{4n}), \quad 1 \leqslant i_1 \leqslant \bar{\alpha}_1, \dots, 1 \leqslant i_n \leqslant \bar{\alpha}_n. \tag{3.2.4}$$

Здесь $\bar{\alpha}_\nu$ — размерность представления, по которому преобразуется поле $\varphi^{\alpha_\nu}(f)$.

Функции (3.2.3) могут быть представлены как обобщенные функции в этом пространстве:

$$w^{\alpha}(f) = \sum_{i_1=1}^{\bar{\alpha}_1} \dots \sum_{i_n=1}^{\bar{\alpha}_n} w_i^{\alpha}(f_i). \tag{3.2.5}$$

Отметим, что наше соглашение (3.1.11) относительно нумерации эрмитово сопряженных полей приводит к следующему условию для обобщенных функций (3.2.5):

$$\overline{w^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f)} = w^{-\alpha_n \dots -\alpha_1}(f^*), \tag{3.2.6}$$

где

$$(f^*)_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}_{i_n \dots i_1}(x_n, \dots, x_1). \tag{3.2.7}$$

В пространстве тензорных основных функций $\mathscr{S}_{\bar{\alpha}}(R_{4n})$ реализуется представление группы Пуанкаре

$$(f_{\{a,\,\Lambda\}})_i = \sum_{j_1=1}^{\bar{\alpha}_1} \dots \sum_{j_n=1}^{\bar{\alpha}_n} V^{\alpha_1}_{j_1 i_1}(A^{-1}) \dots$$

$$\dots V^{\alpha_n}_{j_n i_n}(A^{-1}) f_{j_1 \dots j_n}(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \dots, \Lambda^{-1}(x_n - a)), \tag{3.2.8}$$

где $\Lambda(A)$ задается (2.2.15), а $V^{\alpha_j}(A)$ есть $\bar{\alpha}_j$-мерное представление унимодулярной группы, соответствующее полю $\varphi^{\alpha_j}(\vec{f})$. Представление $V^{-\alpha_j}(A)$ комплексно сопряжено к представлению $V^{\alpha_j}(A)$.

Условие релятивистской инвариантности в терминах функций Уайтмана имеет вид

$$w^{\alpha}(f_{\{a,\,A\}}) = w^{\alpha}(f), \tag{3.2.9}$$

где $f_{\{a,\,A\}}$ задается (3.2.8).

Упражнение 3.2.1. а) Получить (3.2.9), используя инвариантность вакуума (постулат III. б) и ковариантность поля (постулат V).

б) Показать, что формула (3.2.9) может быть записана символически для функций (3.2.1) в виде

$$\sum_{j=1}^{\bar{a}} \left[V^{\alpha_1}(A)\right]^{-1}_{i_1 j_1} \ldots \left[V^{\alpha_n}(A)\right]^{-1}_{i_n j_n} w^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{j_1 \ldots j_n}(\Lambda x_1 + a, \ldots, \Lambda x_n + a) = \\ = w^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (3.2.10)$$

(ср. упражнение 3.1.1).

В частном случае теории одного скалярного эрмитова поля $\varphi(x)$ формула (3.2.10) приобретает вид

$$w_n(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\Psi_0) = \\ = w_n(\Lambda x_1 + a, \ldots, \Lambda x_n + a). \qquad (3.2.11)$$

Если применить равенство (3.2.10) для подгруппы трансляций $\{a, 1\}$ группы Пуанкаре, то получаем, что функции w^a_i трансляционно инвариантны:

$$w^a_i(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = w^a_i(x_1, \ldots, x_n). \qquad (3.2.12)$$

Следовательно, они зависят лишь от $n-1$ независимых разностей векторов x:

$$\xi_1 = x_1 - x_2, \ \ldots, \ \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n; \qquad (3.2.13)$$

$$w^a_i(x_1, \ldots, x_n) = F^a_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \qquad (3.2.14)$$

В функциональной форме равенство (3.2.14) может быть записано в виде

$$w^a(f) = F^a(g), \qquad (3.2.15)$$

где

$$g_{i_1, \ldots, i_n}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \frac{1}{n} \int f_{i_1, \ldots, i_n}(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1 + \ldots + x_n). \qquad (3.2.16)$$

Упражнение 3.2.2. а) Пользуясь (3.2.12) — (3.2.14) и (3.2.16), показать, что действительно

$$\int \ldots \int w^a_i(x_1, \ldots, x_n) f_i(x_1, \ldots, x_n) d^4x_1 \ldots d^4x_n = \\ = \int \ldots \int F^a_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) g_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) d^4\xi_1 \ldots d^4\xi_{n-1}.$$

б) Найти закон преобразования тензорных обобщенных функций F^α при однородных преобразованиях $\{0, A\}$ в функциональной и в символической (координатной) форме.

Для дальнейшего будет полезной следующая теорема.

Теорема однозначности функций Уайтмана. *Если число спинорных полей под знаком вакуумного среднего* (3.2.1) *нечетно, то это среднее равно тождественно нулю* *).

Доказательство. Если число спинорных полей, входящих в вектор

$$\Phi = \varphi_{\tau_1}(f_1) \ldots \varphi_{\tau_n}(f_n)\Psi_0,$$

нечетно, то для этого вектора

$$U(0, -1)\Phi = -\Phi.$$

С другой стороны, в силу инвариантности вакуума

$$U(0, -1)\Psi_0 = \Psi_0.$$

Таким образом, векторы Φ и Ψ_0 являются собственными векторами, соответствующими разным собственным значениям унитарного оператора $U(0, -1)$. Следовательно, они ортогональны и

$$w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(f_1 \ldots f_n) = (\Psi_0, \Phi) = 0.$$

Теорема доказана.

2.2. Следствии из постулатов спектральности, локальности и положительной определенности метрики. Перейдем к следствиям из постулата спектральности. Они формулируются проще всего в терминах фурье-образов обобщенных функций $F_\tau \equiv F_i^a$, которые существуют как обобщенные функции из $\mathscr{S}^*(R_{4n})$ (гл. I, п. 3.1).

Теорема 3.2.1. *Слабая формулировка* III.a *постулата спектральности накладывает следующее условие на носитель фурье-образа* F_τ *обобщенной функции* (3.2.14):

$$\tilde{F}_{n\tau}(p_1, \ldots, p_{n-1}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{2n-2}} \int \ldots \int \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n-1} p_j \xi_j \right\} \times$$
$$\times F_\tau(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\, d^4\xi_1 \ldots d^4\xi_{n-1},$$

$$\operatorname{supp} \tilde{F}_{n\tau}(p_1 \ldots p_{n-1}) \subset \{p_1 \in \overline{V}^+, \ldots, p_{n-1} \in \overline{V}^+\}. \quad (3.2.17)$$

---

*) Пользуясь законом преобразования (3.2.10), нетрудно заключить, что функции Уайтмана однозначны только в том случае, если они исчезают при нечетном числе спинорных полей. Действительно, согласно определению спинорного поля (см. п. 1.1) при преобразовании ($a=0$, $A=-1$) группы $\mathfrak{P}_0$ оно меняет знак:

$$U(0, -1)\varphi_\tau(f)U^{-1}(0, -1) = -\varphi_\tau(f),$$

в то время как тензорные поля не меняются при этом преобразовании. Таким образом, если под знаком вакуумного среднего входит нечетное число спинорных полей, то оно равно самому себе со знаком «—», что совместимо с однозначностью функции Уайтмана, лишь если она исчезает в этом случае. Это оправдывает название теоремы.

Доказательство. В силу постулата III. а для любого вектора $\Psi \in \mathscr{H}$, вектор

$$\int d^4 a e^{iap} U^{-1}(\underset{\sim}{a}, 1)\Psi = 0, \quad \text{если} \quad p \notin \overline{V}^+. \tag{3.2.18}$$

В этом можно убедиться, раскладывая Ψ по полной системе физических состояний $\Psi(p', \zeta)$, на которые оператор трансляции $U(-\underset{\sim}{a}, 1) = U^{-1}(\underset{\sim}{a}, 1)$ действует по формуле

$$U^{-1}(\underset{\sim}{a}, 1)\Psi(p', \zeta) = e^{-ip'a}\Psi(p', \zeta). \tag{3.2.19}$$

С другой стороны, так как

$$F_{n\tau}(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j + a, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{n-1}) = \\ = w_\tau(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1} - a, \ldots, x_n - a),$$

то преобразование Фурье F_τ по переменной ξ_j пропорционально интегралу

$$\int F_{n\tau}(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j + a, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{n-1}) e^{ip_j a} d^4 a = \\ = \left(\Psi_0, \varphi_{\tau_1}(x_1) \ldots \varphi_{\tau_j}(x_j) \int e^{ip_j a} d^4 a \varphi_{\tau_{j+1}}(x_{j+1} - a) \ldots \right. \\ \left. \ldots \varphi_{\tau_n}(x_n - a)\Psi_0\right) = \left(\Psi_0, \varphi_{\tau_1}(x_1) \ldots \right. \\ \left. \ldots \varphi_{\tau_j}(x_j) \int e^{ip_j a} d^4 a U^{-1}(\underset{\sim}{a}, 1)\varphi_{\tau_{j+1}}(x_{j+1}) \ldots \varphi_{\tau_n}(x_n)\Psi_0\right).$$

Применяя условие (3.2.18) к вектору

$$\Psi = \varphi_{\tau_{j+1}}(f_{j+1}) \ldots \varphi_{\tau_n}(f_n)\Psi_0,$$

мы получаем требуемый результат.

Если потребовать более жестких условий спектральности III.а—III.в, то мы получим уточнение условия (3.2.17): функция $F_{n\tau}(p_1, \ldots, p_{n-1})$ не равна нулю, лишь если каждый из ее аргументов принадлежит спектру оператора энергии — импульса P.

Отметим, что фурье-образ $\tilde{w}_\tau(k_1, \ldots, k_n)$ функции $w_{n\tau}$ связан с $F_{n\tau}(p_1, \ldots, p_n)$ формулой

$$\tilde{w}_{n\tau}(k_1, \ldots, k_n) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \ldots \int e^{i\sum_{j=1}^{n} k_j x_j} w_{n\tau}(x_1, \ldots, x_n) d^4 x_1 \ldots \\ \ldots d^4 x_n = (2\pi)^2 \delta(k_1 + \ldots + k_n) \tilde{F}_\tau(p_1, \ldots, p_{n-1}), \tag{3.2.20}$$

где

$$p_1 = k_1, \quad p_2 = k_1 + k_2, \ldots, p_{n-1} = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}. \tag{3.2.21}$$

Из (3.2.20) и (3.2.21) видно, что условию спектральности можно придать следующую функциональную форму. Пусть преобразование Фурье $\tilde{f}(k_1, \ldots, k_n)$ основной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ равно нулю в окрестности множества $k_1 \in \bar{V}^+, \ldots, k_1 + \ldots \ldots + k_{n-1} \in \bar{V}^+$, $k_1 + \ldots + k_n = 0$, тогда $w_{n\tau}(f) = 0$.

Важное следствие постулата спектральности составляет содержание следующей теоремы.

Теорема 3.2.2. *Обобщенная функция* $F_{n\tau}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ *является предельным значением аналитической функции* $F_{n\tau}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$, *голоморфной в произведении* T_{n-1}^- *трубчатых областей* $T^- = R_4 - iV^+$ (*т. е. при* $\zeta_j = \xi_j - i\eta_j$, $\xi_j \in R_4$, $\eta_j \in V^+$, $j = 1, \ldots, n-1$).

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы об аналитичности преобразования Лапласа $\tilde{f}_r(k)$ запаздывающей функции в будущей трубчатой области T^+ (см. дополнение к гл. 1). Замена будущей трубчатой области на прошедшую (T_n^-) в теореме 3.2.2 связана с тем, что в этой теореме мы имеем дело с обратным преобразованием Фурье, в то время как в теореме 1.А.1 — с прямым.

Условие локальности приводит к симметрии или антисимметрии относительно перестановки соседних аргументов у функции w_l^α, если они разделены пространственноподобным интервалом:

$$w_{\tau_1 \ldots \tau_j \tau_{j+1} \ldots \tau_n}(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = \\ = \sigma w_{\tau_1 \ldots \tau_{j+1} \tau_j \ldots \tau_n}(x_1, \ldots, x_{j+1}, x_j \ldots x_n) \quad (3.2.22)$$

при $(x_j - x_{j+1})^2 < 0$, где $\sigma = +1$, если поля φ_{τ_j} и $\varphi_{\tau_{j+1}}$ коммутируют, и -1, если они антикоммутируют при пространственном разделении аргументов.

В функциональной форме в силу (3.1.9) условие локальной коммутативности имеет вид

$$w^{\alpha_1 \ldots \alpha_j \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n}(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_j, \vec{f}_{j+1}, \ldots, \vec{f}_n) = \\ = w^{\alpha_1 \ldots \alpha_{j+1} \alpha_j \ldots \alpha_n}(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_{j+1}, \vec{f}_j, \ldots, \vec{f}_n),$$

если носители векторных функций $\vec{f}_j(x)$ и $\vec{f}_{j+1}(x)$ разделены пространственноподобным интервалом.

Условие положительной определенности метрики в пространстве векторов состояний $\mathscr{H}$ приводит к системе неравенств для функций Уайтмана, связывающих функции с различным числом аргументов. Для любого полинома от полей типа (3.1.18) имеем

$$0 \leqslant \| P(\varphi;\, f)\,\Psi_0\|^2 = (\Psi_0,\ [P(\varphi;\, f)]^*\, P(\varphi;\, f)\,\Psi_0),$$

где в силу (3.1.11) и (3.1.18)

$$[P(\varphi;\, f)]^* = \bar f_0 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{\bar\alpha_1} \ldots \sum_{i_j=1}^{\bar\alpha_j} \varphi_{i_j \ldots i_1}^{-\alpha_j \ldots -\alpha_1}(\bar f_{i_1 \ldots i_j}).$$

Из последних двух формул получаем

$$\sum_{k,\, l=0}^{n} \sum_{ij} \int \ldots \int w_{i_k \ldots i_1 j_1 \ldots j_l}^{-\alpha_k \ldots -\alpha_1 \alpha_1 \ldots \alpha_l}(x_k, \ldots, x_1, y_1, \ldots, y_l) \times$$
$$\times \bar f_{i_1 \ldots i_k}(x_1, \ldots, x_k)\, f_{j_1 \ldots j_l}(y_1, \ldots, y_l)\, d^4x_1 \ldots d^4x_k \times$$
$$\times d^4y_1 \ldots d^4y_l \geqslant 0. \qquad (3.2.23)$$

В частности, полагая $f_0 = f_{i_1 i_2}(x_1, x_2) = \ldots = f_{i_1 \ldots i_n} = 0$, из (3.2.13) получаем

$$\sum_{i,\, j=1}^{\bar\alpha} \int \int F_{i,\, j}^{-\alpha,\, \alpha}(x-y)\, \bar f_i(x)\, f_j(y)\, d^4x\, d^4y \geqslant 0. \qquad (3.2.24)$$

Необходимое и достаточное условие для выполнения (3.2.24) при любом выборе $f_j \in \mathcal{S}(R_4)$ состоит в положительной определенности матрицы $\tilde F^{-\alpha,\, \alpha}(p)$, составленной из фурье-образов обобщенных функций $F_{i,\, j}^{-\alpha,\, \alpha}(\xi)$. Действительно, при переходе к преобразованиям Фурье неравенство (3.2.24) приобретает вид

$$\sum_{i,\, j=1}^{\bar\alpha} \int \tilde F_{i,\, j}^{-\alpha,\, \alpha}(p)\, \bar{\tilde f}_i(p)\, \tilde f_j(p)\, d^4p \geqslant 0. \qquad (3.2.25)$$

Отсюда в силу произвольности функций $\tilde f_i(p)$ следует наше утверждение *).

Одновременное использование условий лоренц-инвариантности и спектральности наряду с (3.2.25) дает возможность получить простое интегральное представление для двухточечной функции Уайтмана w_2.

Рассмотрим для простоты случай скалярного эрмитова поля. В этом случае $\tilde F_2(p)$ — неотрицательная лоренц-инвариантная обобщенная функция, сосредоточенная в силу условия

*) Это утверждение составляет содержание теоремы Бохнера — Шварца (см., например, [13]).

спектральности и теоремы 3.2.1 в будущем световом конусе. Общий вид таких функций, согласно гл. 1, п. 3.5, таков:

$$\tilde{F}_2(p) = a\delta(p) + \theta(p^0)\int_0^\infty \delta(p^2-\lambda)\,d\sigma(\lambda), \tag{3.2.26}$$

где $a \geqslant 0$, а $\sigma(\lambda)$ — монотонно неубывающая функция не выше степенного роста. (В общем случае тензорного поля необходимо умножить (3.2.26) на положительно определенную (при $p \in V_+$) матрицу $B_{ij}(p)$, полиномиально зависящую от компонент импульса p (ср. гл. 5).)

Сильная форма постулата спектральности III.в (т. е. условие существования наименьшей положительной массы μ) приводит к тому, что нижний предел интегрирования в (3.2.26) положителен. Константа a выражается через среднее по вакууму w_1 от поля $\varphi(x)$: $a = (2\pi w_1)^2$.

Представление (3.2.26) называется *представлением Челлена — Лемана* для двухточечной функции Уайтмана (ср. далее с формулой (3.4.96)).

Итак, в случае двухточечной функции удается полностью учесть условие положительной определенности (3.2.23). Другое по простоте следствие из (3.2.23) получается, если положить $f_0 = f_{i_1}(x_1) = f_{i_1 i_2 i_3}(x_1, x_2, x_3) = \ldots = 0$. В частном случае, когда имеется лишь одно скалярное эрмитово поле, получаем неравенство

$$\int\int\int \bar{f}(x_2, x_1) f(x_3, x_4) F_4(x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4) \prod_{i=1}^{4} d^4x_i \geqslant 0. \tag{3.2.27}$$

Описание класса обобщенных функций F_4, удовлетворяющих (3.2.27), является до сих пор нерешенной математической задачей (она была поставлена Уайтманом (1956)).

Перечисленные до сих пор свойства функций Уайтмана, являющиеся следствиями условий релятивистской инвариантности, спектральности, локальности и положительной определенности метрики, вместе с нормировочным условием

$$w_0 \equiv (\Psi_0, \Psi_0) = 1,$$

выделяют выпуклое множество в пространстве последовательностей

$$W \equiv \{w_0, w_{\tau_1}(x_1), w_{\tau_1\tau_2}(x_1, x_2), \ldots\}.$$

Действительно, легко проверить, что если $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ — две последовательности функций Уайтмана, удовлетворяющие всем перечисленным условиям, а $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то последовательность

$\alpha W^{(1)} + (1-\alpha) W^{(2)}$ тоже удовлетворяет этим требованиям. Поэтому мы говорим, что эти условия определяют линейные свойства уайтмановых функций. Отметим, что из всех линейных условий лишь условие положительной определенности связывает между собой функции w с различным числом аргументов.

2.3. Условие единственности вакуума. Асимптотическое разбиение на пучки. Условие обращения в нуль функций $\widetilde{F}^{\alpha}(p_1, \ldots, p_{n-1})$, когда хотя бы один из аргументов p_j не принадлежит спектру оператора энергии — импульса P (теорема 3.2.1), не исчерпывает содержания жесткой формулировки постулатов спектральности III.а—III.в. В нем не отражено условие единственности вакуума (т. е. невырожденности состояния с нулевой энергией). Оказывается, что это требование накладывает нелинейные ограничения на функции Уайтмана. В частности, из него вытекает, что

$$\lim_{\rho\to\infty} w_{\tau_1 \ldots \tau_n}(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}+\rho a, \ldots, x_n+\rho a) =$$
$$= w_{\tau_1 \ldots \tau_j}(x_1, \ldots, x_j)\, w_{\tau_{j+1} \ldots \tau_n}(x_{j+1}, \ldots, x_n), \quad (3.2.28)$$

где a — произвольный пространственноподобный вектор, а предел понимается в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций $\mathcal{S}^*(R_{4n})$ (т. е. нужно сначала проинтегрировать обе части равенства (3.2.28) с основной функцией $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}(R_{4n})$ и лишь затем перейти к пределу $\rho \to \infty$).

Равенство (3.2.28) имеет простой физический смысл: если пучки частиц $(1, \ldots, j)$ и $(j+1, \ldots, n)$ раздвинуть на большое расстояние друг от друга, то они не будут взаимодействовать между собой. Поэтому оно носит название *свойства разбиения на пучки.*

Условие (3.2.28) является следствием более общего утверждения, к формулировке которого мы переходим.

Прежде всего введем полезное понятие *усеченных вакуумных средних* $w^T_{n\tau}$. Они определяются исключением вклада вакуумного промежуточного состояния в функцию Уайтмана. Для усеченных функций следствия полного постулата спектральности формулируются проще.

Пусть ρ_k — совокупность всех разбиений отрезка натурального ряда $1, \ldots, n$ на k непустых и непересекающихся подмножеств $I_1, \ldots, I_k$.

Пусть, далее, в каждом подмножестве I_j натуральные числа $(i_{j1}, \ldots, i_{j\beta_j})$ упорядочены по возрастанию $(i_{j1} < i_{j2} < \ldots)$. Каждому разбиению $\{I_j\} \in \rho_k$ соответствует перестановка $\pi = \pi(\{I_j\})$: $\{(1, \ldots, n) \to (i_{11} \ldots i_{1\beta_1}, i_{21} \ldots i_{2\beta_2}, \ldots, i_{k1}, \ldots, i_{k\beta_k})\}$, где $(i_{j1}, \ldots, i_{j\beta_j}) \equiv I_j$, $\sum\limits_{j=1}^{k} \beta_j = n$. Усеченные вакуумные средние $w^T_{n\tau}$ определяются рекуррентной формулой

$$w_{n\tau}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{I_j\} \in \rho_k} \sigma(\pi) \prod_{j=1}^{k} w^T_{\beta_j \tau_j}\left(x_{i_{j1}}, \ldots, x_{i_{j\beta_j}}\right), \tag{3.2.29}$$

где $\sigma(\pi) = +1$, если при перестановке π, соответствующей разбиению $\{I_j\}$, переставляются четное число раз спинорные (антикоммутирующие) поля, и $\sigma(\pi) = -1$ в противном случае. Кроме того, будем считать, по определению, что $w^T_0 = w_0 = 1$. Аналогично (3.2.14) можно ввести функции $F^T_{n\tau}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = w^T_{n\tau}(x_1, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим для пояснения простейший пример: скалярное нейтральное поле $\varphi(x)$ со средним значением по вакууму, равным нулю:

$$w_1(x) = (\Psi_0, \varphi(x)\Psi_0) = 0 \tag{3.2.30}$$

(отметим, что в силу трансляционной инвариантности $w_1(x) = w_1(0) = \text{const}$, так что предположение (3.2.30) всегда может быть реализовано, если из поля φ вычесть некоторую постоянную). В этом случае определение (3.2.29) дает

$$\begin{gathered}
w_1 = w_1^T = 0, \quad w_2(x_1, x_2) = w_2^T(x_1, x_2), \quad w_3(x_1, x_2, x_3) = \\
= w_3^T(x_1, x_2, x_3), \quad w_4^T(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\
= w_4(x_1, x_2, x_3, x_4) - w_2(x_1, x_2)\, w_2(x_3, x_4) - w_2(x_1, x_3)\, w_2(x_2, x_4) - \\
- w_2(x_1, x_4)\, w_2(x_2, x_3), \ldots
\end{gathered}$$

Заметим, что в лагранжевой теории возмущений усеченные средние являются суммами связных диаграмм Фейнмана.

Упражнение 3.2.3. Показать, что преобразования Фурье $\tilde{F}^T_{n\tau}(p_1, \ldots, p_{n-1})$ функций $F^T_{n\tau}$ обращаются в нуль, если хотя бы один из аргументов p_j не принадлежит множеству G^+_m, ограниченному верхним гиперболоидом V^+_m:

$$G^+_m = \{p,\ p^0 \geqslant \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}\},$$

где m — наименьшая положительная масса, входящая в условие спектральности.

Понятие усеченного среднего может быть обобщено следующим образом. Согласно лемме 3.1.1 (формула (3.1.12)) произведение

$$\varphi_{n\tau}(\vec{x}) = \varphi_{\tau_1}(x_1) \ldots \varphi_{\tau_n}(x_n) \tag{3.2.31}$$

определено как обобщенная функция в $\mathcal{S}(R_{4n})$ с операторными значениями. Определим транслированный оператор $\varphi_{n\tau}(\vec{x}+a)$ формулой

$$\varphi_{n\tau}(\vec{x}+a) = U(\underset{\sim}{a},\ 1)\,\varphi_{n\tau}(\vec{x})\,U^{-1}(\underset{\sim}{a},\ 1). \tag{3.2.32}$$

Назовем оператор $\varphi_{n\tau}$ бозе- или ферми-оператором, если в произведении (3.2.31) содержится соответственно четное или нечетное число спинорных (антикоммутирующих) полей. Для «пучков полей» $\varphi_{i\tau}(\vec{x}_i)$ можно определить вакуумные средние

$$\left(\Psi_0,\ \varphi_{i_1\tau_1}\left(\vec{x}_{i_1}\right) \ldots \varphi_{i_n\tau_n}\left(\vec{x}_{i_n}\right) \Psi_0\right)$$

и усеченные средние

$$\left(\Psi_0,\ \varphi_{i_1\tau_1}\left(\vec{x}_{i_1}\right) \ldots \varphi_{i_n\tau_n}\left(\vec{x}_{i_n}\right) \Psi_0\right)^T,$$

которые определяются рекуррентно по обычным средним теми же формулами, которыми функции w^T определялись через w. Здесь $\vec{x}_{i_j}$ — совокупность i_j 4-векторов $\left(x_{i_j1}, \ldots, x_{i_ji_j}\right)$.

Чтобы сформулировать основное свойство обобщенных усеченных средних, введем функции

$$F^u_{n\tau}(a) = \int \left(\Psi_0,\ \varphi_{i_1}(\vec{x}_{i_1}+a_1) \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \varphi_{i_n}\left(\vec{x}_{i_n}+a_n\right)\Psi_0\right)^T u\left(\vec{x}_{i_1}, \ldots, \vec{x}_{i_n}\right) d^{4i_1}\vec{x}_{i_1} \ldots d^{4i_n}\vec{x}_{i_n}, \tag{3.2.33}$$

где $u \in \mathcal{S}(R_{4n})$, а $a_j = (0, \boldsymbol{a}_j)$. В силу трансляционной инвариантности функция $F^u_{n\tau}(a)$ зависит лишь от $n-1$ независимых разностей векторов $\boldsymbol{a}_j$. Справедлива следующая теорема (Рюэль (1962)).

Теорема 3.2.3. *Функции $F^u_{n\tau}(a)$, так же как и их производные по a^0_j (при $a^0_j = 0$), рассматриваемые как функции от $n-1$ независимых разностей векторов $\boldsymbol{a}_j$, принадлежат пространству основных функций $\mathcal{S}(R_{3(n-1)})$. Другими словами, они бесконечно дифференцируемы и убывают на бесконечности быстрее любой отрицательной степени от* $\sum_{j=1}^{n-1}(\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_{j+1})^2$.

В частности, если имеются два пучка скалярных полей

$$\varphi_j(\vec{x}_j) = \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j), \qquad \varphi_{n-j}(\vec{x}_{n-j}) = \varphi(x_{j+1}) \ldots \varphi(x_n),$$

то теорема 3.2.3 дает уточнение соотношения (3.2.28):

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^l \int \{(\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j)\varphi(x_{j+1}+\rho a) \ldots \varphi(x_n+\rho a)\Psi_0) - \\ -(\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j)\Psi_0)(\Psi_0, \varphi(x_{j+1}) \ldots \varphi(x_n)\Psi_0)\} \times \\ \times u(x_1, \ldots, x_n)\, d^4x_1 \ldots d^4x_n = 0 \tag{3.2.34}$$

при всех $l \geqslant 0$ и $a^2 < 0$.

Заметим, что именно убывание функции $F^u_{n\tau}(a)$ является нетривиальным пунктом в теореме 3.2.3. Бесконечная дифференцируемость функций (3.2.33) очевидна. Видно также, что производные от функций (3.2.33) снова имеют такой же вид, поэтому из убывания функций $F^u_{n\tau}(a)$ при любом u следует и убывание их производных.

Чтобы не загромождать идею доказательства теоремы 3.2.3 техническими деталями, мы докажем здесь лишь ее частный случай (3.2.34). Восстановление полного доказательства мы предоставляем читателю (см. оригинальную работу Рюеля, а также лекции Уайтмана (1962)).

Введем обозначение

$$(\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\Psi_0) - (\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j)\Psi_0)(\Psi_0, \varphi(x_{j+1}) \ldots \\ \ldots \varphi(x_n)\Psi_0) = T(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{n-1}) \equiv T(\xi, \vec{\xi}), \tag{3.2.35}$$

где

$$\xi_i = x_i - x_{i+1}, \quad \xi = x_1 - x_{j+1}, \quad \vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{3.2.36}$$

Переходя к преобразованиям Фурье, можно записать интеграл в левой части (3.2.34) в виде

$$F_u(a) = \int \ldots \int T(\xi - a, \vec{\xi})\, u_1(\xi, \vec{\xi})\, d\vec{\xi}\, d\xi = \\ = \int \ldots \int \tilde{T}(p, \vec{p})\, \tilde{u}_1(p, \vec{p})\, e^{ipa}\, d\vec{p}\, dp, \tag{3.2.37}$$

где

$$d\vec{p} = d^4p_1 \ldots d^4p_{j-1} d^4p_{j+1} \ldots d^4p_{n-1},$$

$$u_1(\xi, \vec{\xi}) = \int u(x_1, \ldots, x_n)\, d^4x_n. \tag{3.2.38}$$

$$\tilde{T}(p, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{2n-2}} \int \exp\left\{ i \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n-1} p_k\xi_k + ip\xi \right\} T(\xi, \vec{\xi})\, d\vec{\xi}\, d\xi,$$

$$\tilde{u}_1(p, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{2n-2}} \int \exp\left\{ -i \sum_{k\neq j} p_k\xi_k - ip\xi \right\} u_1(\xi, \vec{\xi})\, d\vec{\xi}\, d\xi.$$

Упражнение 3.2.4. Показать, что функция $F_u(a)$ (3.2.37) принадлежит пространству мультипликаторов Θ_M, т. е. что она бесконечно дифференцируема и полиномиально ограничена относительно a. (Указание: воспользоваться тем, что T является производной от некоторой непрерывной полиномиально ограниченной функции, в то время как $u_1 \in \mathcal{S}(R_{4(n-1)})$, и сделать замену переменных интегрирования $\xi' = \xi - a$ в первом равенстве (3.2.37).)

В силу постулата спектральности (см. упражнение 3.2.3) обобщенная функция $\tilde{T}(p, \vec{p})$ равна нулю, если p не принадлежит $\overline{G}^+_m$. Поэтому, если $h(p)$ — мультипликатор в $\mathcal{S}$ со свойствами

$$h(p) = \begin{cases} 1 & \text{в некоторой окрестности } \overline{G}^+_{m}, \\ 0 & \text{при } p \notin V^+ \end{cases} \tag{3.2.39}$$

и

$$\tilde{v}(p, \vec{p}) = h(p)\, \tilde{u}_1(p, \vec{p}),$$

то

$$F_v(a) = F_u(a). \tag{3.2.40}$$

Рассмотрим, далее, функцию

$$T_1(\xi, \vec{\xi}) = (\Psi_0, \varphi(x_{j+1}) \ldots \varphi(x_n)\, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j)\, \Psi_0) - \\ - (\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j)\, \Psi_0)\, (\Psi_0, \varphi(x_{j+1}) \ldots \varphi(x_n)\, \Psi_0), \tag{3.2.41}$$

где ξ по-прежнему выражаются через x формулами (3.2.36), и функцию

$$F^1_u(a) = \int \int T_1(\xi - a, \vec{\xi})\, u_1(\xi, \vec{\xi})\, d\vec{\xi}\, d\xi = \\ = \int \int \tilde{T}_1(p, \vec{p})\, \tilde{u}(p, \vec{p})\, e^{ipa}\, d\vec{p}\, dp, \tag{3.2.42}$$

где $u_1(\xi, \vec{\xi})$ связано с $u(x_1, \ldots, x_n)$ равенством (3.2.38).

Из условия спектральности следует, что

$$\tilde{T}_1(p, \vec{p}) = 0, \qquad \text{если} \qquad p \notin \overline{G}^-_m$$

(т. е. если $p^0 > -\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$). Поэтому, если бесконечно дифференцируемая функция $h(p)$ удовлетворяет (3.2.39), то $h(p)\, \tilde{T}_1(p, \vec{p}) = 0$, и, следовательно, полагая вновь $\tilde{v} = h(p)\, \tilde{u}_1$, получим

$$F^1_v(a) = 0. \tag{3.2.43}$$

Из (3.2.40) и (3.2.43) следует, что

$$F_u(a) = F_v(a) = F_v(a) - F^1_v(a). \tag{3.2.44}$$

Теперь мы покажем, что разность, стоящая в правой части (3.2.44), является быстро убывающей функцией от пространственноподобного вектора $a = (0, \vec{a})$ при любом выборе основной функции v, т. е.

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho^l \left[F_v(\rho a) - F^1_v(\rho a) \right] = 0 \tag{3.2.45}$$

при всех $l \geqslant 0$, причем стремление к нулю в (3.2.45) равномерно по вектору a из трехмерного шара радиуса 1:

$$a^2 = -a^2 = 1. \tag{3.2.46}$$

В силу (3.2.44) из (3.2.45) следует (3.2.34). Тем самым доказательство теоремы 3.2.3 в рассматриваемом частном случае сводится к доказательству соотношения (3.2.45).

Согласно п. 1.3 гл. 1 любая обобщенная функция из $\mathscr{S}^*(R_{4n})$ может быть представлена как частная производная (достаточно высокого порядка) от некоторой непрерывной, полиномиально ограниченной функции g. Поэтому мы можем написать

$$T(\xi, \vec{\xi}) - T_1(\xi, \vec{\xi}) = Dg(\xi, \vec{\xi}), \tag{3.2.47}$$

где D — дифференциальный одночлен

$$D = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \xi_0^{\beta_0} \ldots \partial \xi_{n-1\,3}^{\beta_{n-1\,3}}}.$$

Таким образом,

$$F_v(\rho a) - F_v^1(\rho a) = \int g(\xi - \rho a, \vec{\xi}) D^* v(\xi, \vec{\xi})\, d\xi\, d\vec{\xi}, \tag{3.2.48}$$

где $D^* = (-1)^{|\beta|} D$. Пусть, далее, $e_\nu(\xi, \vec{\xi})$ — разложение единицы в $\mathscr{S}(R_{4(n-1)})$ (см. гл. 1, п. 2.1) со следующими свойствами. Введем обозначение

$$\|(\xi, \vec{\xi})\|^2 = \sum_{\alpha=0}^{3} \left[(\xi^\alpha)^2 + \sum_{i \neq j} (\xi_i^\alpha)^2\right] = \|\xi\|^2 + \|\vec{\xi}\|^2. \tag{3.2.49}$$

Будем предполагать, что $e_\nu(\xi, \vec{\xi}) = 0$, если $\|(\xi, \vec{\xi})\| \geqslant \nu + 1$ или $\|(\xi, \vec{\xi})\| \leqslant \nu - 1$. Тогда

$$F_v(\rho, a) - F_v^1(\rho a) = \sum_{\nu \geqslant \rho\lambda - 1} \int g(\xi - \rho a, \vec{\xi})\, v_\nu(\xi, \vec{\xi})\, d\xi\, d\vec{\xi}, \tag{3.2.50}$$

где

$$\lambda = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{n}}, \quad v_\nu(\xi, \vec{\xi}) = e_\nu(\xi, \vec{\xi}) D^* v(\xi, \vec{\xi}). \tag{3.2.51}$$

Действительно, в силу локальной коммутативности, если каждый из векторов $x_1, \ldots, x_j$ расположен пространственноподобно относительно векторов $x_{j+1} + \rho a, \ldots, x_n + \rho a$, то $T(\xi + \rho a, \vec{\xi}) = T_1(\xi + \rho a, \vec{\xi})$. Это заведомо будет так, если $\max\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \\ 1 < k \leqslant n}} (x_i - x_k - \rho a)^2 < 0$. Но

$$x_i - x_k = -\xi_i + \ldots - \xi_{j-1} + \xi_{j+1} + \ldots + \xi_{k-1} + \xi,$$

поэтому

$$(x_i - x_k - \rho a)^2 \leqslant n \|(\xi, \vec{\xi})\|^2 + 2\rho\sqrt{n} \|(\xi, \vec{\xi})\| - \rho^2.$$

Отсюда следует, что $g(\xi, \vec{\xi})$ в (3.2.47) можно выбрать так, что

$$g(\xi - \rho a, \vec{\xi}) = 0 \quad \text{при} \quad \|(\xi, \vec{\xi})\| < \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{2} - 1)\rho \tag{3.2.52}$$

(это единственный пункт в доказательстве теоремы 3.2.3, где используется локальная коммутативность полей φ).

С другой стороны, по построению $v_\nu(\xi, \vec{\xi}) = 0$, если $\|(\xi, \vec{\xi})\| > \nu + 1$. Поэтому произведение gv_ν в интеграле (3.2.50) может давать вклад лишь при $\lambda\rho \leqslant \nu + 1$, откуда и получается нижний предел для суммационного индекса ν в (3.2.50).

Так как $Dv(\xi, \vec{\xi}) \in \mathscr{S}(R_{4(n-1)})$, то последовательность чисел

$$\max_{\xi, \vec{\xi}} |v_\nu(\xi, \vec{\xi})| = b_\nu$$

убывает быстрее любой степени $1/\nu$. В то же время

$$\|g(\xi, \vec{\xi})\| \leqslant C(1 + \|(\xi, \vec{\xi})\|^2)^{N/2},$$

так что

$$\left|F_{v_\nu}(\rho a) - F^{\mathrm{I}}_{v_\nu}(\rho a)\right| < C\gamma_{\nu+1} b_\nu \max_{\|(\xi, \vec{\xi})\| \leqslant \nu+1} (1 + \|\xi - \rho a\|^2 + \|\xi\|^2)^{N/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\gamma_{\nu+1} b_\nu [1 + 2(\nu + 1)^2]^{N/2} [1 + 2\rho^2]^{N/2},$$

где константа $\gamma_{\nu+1}$ не превосходит объема сферы радиуса $\nu + 1$ в $4(n-1)$-мерном пространстве (т. е. величины порядка $(\nu+1)^{4(n-1)}$). Здесь также использовано неравенство

$$1 + \|x + a\|^2 \leqslant (1 + 2\|x\|^2)(1 + 2\|a\|^2).$$

Из свойств b_ν следует, что коэффициенты

$$C_\nu = C\gamma_{\nu+1} [1 + 2(\nu + 1)^2]^{N/2} b_\nu$$

убывают быстрее любой степени $1/\nu$. Поэтому и правая часть в неравенстве

$$\left|F_v(\rho a) - F^{\mathrm{I}}_v(\rho a)\right| < (1 + 2\rho^2)^{N/2} \sum_{\nu \geqslant \rho\lambda - 1} C_\nu$$

убывает быстрее любой степени $1/\rho$. Равенство (3.2.45), а тем самым и рассматриваемый частный случай теоремы 3.2.3 доказаны *).

Теорема 3.2.3 содержит существенную информацию относительно функций Уайтмана и находит многочисленные применения.

---

*) При сделанном предположении о существовании наименьшей положительной массы m можно показать, что на самом деле усеченные средние убывают экспоненциально при пространственном удалении аргументов, причем показатель экспоненты зависит от m. Это соответствует тому, что в теории, в которой рассматриваются только частицы с положительными массами, все силы — короткодействующие $\left(\text{типа потенциала Юкавы } \frac{e^{-\mu r}}{r}\right)$. В случае, когда в теории имеются частицы с нулевой массой, стремление к нулю может происходить как $1/\rho^2$, что соответствует силе в законе Кулона (см. Араки и др. (1962)). Заметим еще, что при доказательстве теоремы свойство локальной коммутативности использовалось несущественно (достаточно было предположить лишь асимптотическое исчезание коммутатора). Это позволяет обобщить теорему Рюеля и на некоторые нелокальные теории (см., например, Хоружий (1967)).

С одним из них мы познакомимся при изучении асимптотических условий Хаага — Рюеля (гл. 4).

Здесь в качестве примера применения теоремы 3.2.3 мы докажем следующее утверждение (оно является также следствием теоремы однозначности функций Уайтмана (п. 2.1), если постулировать, что спинорные поля антикоммутируют при пространственноподобном разделении аргументов).

Если в произведении полей $\varphi_{n\tau}(\vec{x})$ (3.2.31) содержится нечетное число локальных антикоммутирующих (фермионных) полей, то вакуумное среднее $(\Psi_0, \varphi_{n\tau}(\vec{x})\Psi_0)$ равно тождественно нулю.

Действительно, пусть $u(\vec{x})$ — произвольная финитная основная функция из $\mathscr{D}(R_{4n})$. Тогда в силу (3.2.34)

$$\lim_{a^2\to-\infty}(\Psi_0,\ \varphi_{n\tau}(u)\,U(\underset{\sim}{a},\ 1)\,\varphi_{n\tau}(u)\,U^{-1}(\underset{\sim}{a},\ 1)\,\Psi_0) = \\ = |(\Psi_0,\ \varphi_{n\tau}(u)\,\Psi_0)|^2. \qquad (3.2.53)$$

С другой стороны, при достаточно больших пространственноподобных a оператор $U(a,\ 1)\varphi_{n\tau}(u)U^{-1}(a,\ 1)$ антикоммутирует с оператором $\varphi_{n\tau}(u)$ (мы предоставляем читателю убедиться в этом, пользуясь предположением, что в произведение $\varphi_{n\tau}$ входит нечетное число антикоммутирующих полей и что функция $u(x)$ финитна).

Поэтому при достаточно больших $-a^2$

$$(\Psi_0,\ \varphi_{n\tau}(u)\,U(\underset{\sim}{a},\ 1)\,\varphi_{n\tau}(u)\,U^{-1}(\underset{\sim}{a},\ 1)\,\Psi_0) = \\ = -(\Psi_0,\ U(\underset{\sim}{a},\ 1)\,\varphi_{n\tau}(u)\,U^{-1}(\underset{\sim}{a},\ 1)\,\varphi_{n\tau}(u)\,\Psi_0) \to \\ \xrightarrow[a^2\to-\infty]{} -|(\Psi_0,\ \varphi_{n\tau}(u)\,\Psi_0)|^2.$$

Отсюда и из (3.2.53) следует, что $(\Psi_0,\ \varphi_{n\tau}(u)\Psi_0)=0$, что и требовалось доказать.

Мы видели (теорема 3.1.1), что из жесткой формулировки постулата спектральности, включающей предположение об единственности вакуума, и из требования полноты теории VII вытекает неприводимость алгебры операторов поля. Отсюда же следует неразложимость последовательности функций Уайтмана

$$W = \{1,\ w_{\tau_1}(x_1),\ \ldots,\ w_{\tau_1\ldots\tau_n}(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots\}.$$

Если $W=\alpha W^{(1)}+(1-\alpha)W^{(2)}$, где $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ удовлетворяют всем линейным условиям, накладываемым на функции Уайтмана (п. 2.2), $0<\alpha<1$ и вакуум — единственное инвариантное состояние, то

$$W^{(1)} = W^{(2)} = W.$$

3.4. Несуществование релятивистского квантованного поля, заданного в точке. Как отмечалось выше, определение поля как *обобщенной* операторнозначной функции возникло не от простого стремления к общности, а потому, что постулаты I—VII исключают возможность, чтобы поле $\varphi(x)$, не сводящееся к оператору умножения на константу, само (без предварительного сглаживания по x) было оператором в гильбертовом пространстве и в область определения этого оператора входил бы вакуум. Мы дадим точные формулировки результатов.

Первый такой результат был получен Уайтманом (1964а).

Теорема Уайтмана. *Пусть $B(x)$ — поле неограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть в $\mathcal{H}$ реализуется унитарное представление $U(a)$ группы четырехмерных трансляций, причем спектр генераторов P^μ этого представления лежит в будущем конусе, и существует единственное трансляционно инвариантное состояние — вакуум Ψ_0. Пусть, далее, поля $B(x)$ и $B^*(x)$ локально коммутативны и трансляционно ковариантны:*

$$U(a)B(x)U^{-1}(a)=B(x+a).$$

Тогда $B(x)\Psi_0=c\Psi_0$, где c — комплексная константа.

Если предположить дополнительно, что вакуум является циклическим вектором относительно поля B, то из сформулированной теоремы следует, что $B(x)\equiv c$. Другими словами, если справедливы требования трансляционной инвариантности, спектральности, локальности и полноты, то поле $B(x)$ (в точке) не может иметь смысла оператора в гильбертовом пространстве, отличного от числовой константы.

Мы приведем здесь доказательство утверждения, аналогичного теореме Уайтмана, в котором вместо условия локальности используется ковариантность полей относительно группы Пуанкаре (Визимирски (1966)).

Теорема 3.2.4. *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ реализуется непрерывное унитарное представление группы Пуанкаре $U(a, \Lambda)$, относительно которого существует единственный (с точностью до множителя) инвариантный вектор Ψ_0 (вакуум). Пусть, далее, $B(x)$ — комплексное скалярное поле*

$$U(a,\ \Lambda)B(x)U^{-1}(a,\ \Lambda)=B(\Lambda x+a), \tag{3.2.54}$$

определенное в каждой точке как неограниченный оператор в $\mathcal{H}$, в область определения которого входит вакуум. При этих предположениях

$$B(x)\Psi_0=c\Psi_0, \tag{3.2.55}$$

где c — комплексное число.

Доказательство. Рассмотрим двухточечную функцию Уайтмана

$$F(x-y)=(\Psi_0,\ B^*(x)\,B(y)\,\Psi_0). \tag{3.2.56}$$

Как мы видели в п. 3.1, функция $F(x)$ инвариантна относительно однородных преобразований Лоренца. Из сделанных выше предположений следует, что она, кроме того, непрерывна. Действительно, $F(x)$ может быть записана в виде

$$F(x)=(B(x)\,\Psi_0,\ B(0)\,\Psi_0)=(U(x,\ 1)\,B(0)\,\Psi_0,\ B(0)\,\Psi_0), \tag{3.2.57}$$

а матричный элемент (3.2.57) является непрерывной функцией x в силу непрерывности представления $U(a,\ \Lambda)$. Обратим внимание, что именно в этом пункте существенно используется условие, что само несглаженное поле $B(x)$ является оператором в $\mathscr{H}$, так что $B(0)\,\Psi_0\in\mathscr{H}$.

С другой стороны, в силу положительности метрики в гильбертовом пространстве, согласно (3.2.25)

$$F(x)=\int e^{ipx}\,d\mu(p), \tag{3.2.58}$$

где $d\mu(p)$ — неотрицательная инвариантная мера. Далее, из ограниченности функции F в нуле, которая является следствием ее непрерывности, следует, что мера μ всего пространства Минковского R_4 конечна:

$$F(0)=\int d\mu(p)=\mu(R_4)<\infty. \tag{3.2.59}$$

Теперь мы найдем общий вид конечной инвариантной меры.

Лемма 3.2.1. *Каждая конечная лоренц-инвариантная мера имеет вид*

$$d\mu(p)=a\delta(p)\,d^4p,\qquad a\geqslant 0. \tag{3.2.60}$$

Доказательство леммы. Покажем, что мера μ сосредоточена в начале координат. Допустим противное. Пусть $0\neq p_{(0)}\in\operatorname{supp}\mu$. Тогда, в силу положительности меры, для любого открытого множества O, содержащего $p_{(0)}$,

$$\mu(O)>0. \tag{3.2.61}$$

Далее, поскольку $p_{(0)}\neq 0$, множество точек p, которые можно получить из $p_{(0)}$ преобразованием Лоренца, образует неограниченную поверхность: $p^2=p^2_{(0)}$, $\left[\varepsilon(p^0)-\varepsilon(p^0_{(0)})\right]\theta(p^2_{(0)})=0$. Если выбрать в качестве $O\ni p_{(0)}$ ограниченное множество, не содержащее начало координат, то тогда, очевидно, можно найти такую последовательность преобразований Лоренца Λ_n, чтобы пересечение любых двух множеств $\Lambda_n O$ и $\Lambda_m O$ при $n\neq m$ было пустым.

В силу аддитивности и инвариантности меры

$$\mu(R_4) \geqslant \mu\left(\sum_{k=1}^{n} \Lambda_k O\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\Lambda_k O) = n\mu(O). \qquad (3.2.62)$$

Так как в силу (3.2.61) правая часть (3.2.62) неограниченно возрастает, то при достаточно больших n мы придем к противоречию с конечностью меры (3.2.59). Итак, доказано, что носитель меры $d\mu(p)$ состоит из одной точки $p=0$.

Упражнение 3.2.5. Показать, что единственная неотрицательная обобщенная функция, сосредоточенная в начале координат, есть $a\delta(p)$, где $a \geqslant 0$.

Результат упражнения 3.2.5 позволяет завершить доказательство леммы 3.2.1 *).

Продолжим доказательство теоремы 3.2.4.

В силу (3.2.58) и (3.2.60)

$$F(x) \equiv (B(x)\Psi_0,\ B(0)\Psi_0) = F(0) = a. \qquad (3.2.63)$$

Положим

$$B(0)\Psi_0 = \Phi \qquad (3.2.64)$$

и запишем $U(x,\ 1)\Phi$ в виде линейной комбинации ортогональных векторов с одинаковой нормой

$$U(x,\ 1)\Phi = \alpha\Phi + \beta\Phi^{\perp}, \qquad (3.2.65)$$

где $(\Phi,\ \Phi^{\perp}) = 0$, $(\Phi,\ \Phi) = (\Phi^{\perp},\ \Phi^{\perp})$.

Тогда (3.2.63) дает

$$(\Phi,\ \Phi) = (U(x,\ 1)\Phi,\ \Phi) = \alpha(\Phi,\ \Phi). \qquad (3.2.66)$$

С другой стороны, из унитарности оператора $U(x,\ 1)$ следует, что $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Отсюда и из (3.2.66) находим, что $\alpha = 1$, $\beta = 0$, т. е. $U(x,\ 1)\Phi = \Phi$, или

$$B(x)\Psi_0 = B(0)\Psi_0. \qquad (3.2.67)$$

Упражнение 3.2.6. Пользуясь (3.2.64) и (3.2.67), показать, что вектор Φ инвариантен относительно любого преобразования Пуанкаре

$$U(a,\ \Lambda)\Phi = \Phi. \qquad (3.2.68)$$

Согласно предположению теоремы любой инвариантный вектор коллинеарен вакуумному вектору, так что

$$\Phi = B(0)\Psi_0 = B(x)\Psi_0 = c\Psi_0. \qquad (3.2.69)$$

---

*) Лемму 3.2.1 нетрудно также получить из представлений (1.3.62) — (1.3.63).

Итак, (3.2.55) действительно имеет место. Теорема 3.2.4 доказана.

Очевидно, что если вакуум цикличен относительно поля $B(x)$, из доказанной теоремы следует, что $B(x) = c$ и $\mathscr{H}$ одномерно.

§ 3. Восстановление теории по функционалу Уайтмана

3.1. Функционал Уайтмана и его свойства в теории скалярного поля. Теперь мы сформулируем результаты предыдущего параграфа в несколько более абстрактных терминах. Это позволит записать в компактном виде свойства функций Уайтмана и даст возможность затем (в п. 3.2) провести простое и изящное доказательство основной теоремы Уайтмана о построении гильбертова пространства и операторов поля по заданным вакуумным средним. При этом для простоты мы ограничимся случаем одного скалярного нейтрального поля $\varphi(x)$.

Пусть Ω_0 — линейное пространство обрывающихся последовательностей основных функций

$$f = \{f_0, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots\}, \tag{3.3.1}$$

где f_0 — комплексное число, а $f_n \in \mathscr{S}(R_{4n})$, причем с некоторого (зависящего от f) номера $N(f)$ при $n > N(f)$ все $f_n \equiv 0$. Сложение и умножение на комплексное число в Ω_0 определяются почленно:

$$\lambda f + \mu g = \{\lambda f_0 + \mu g_0, \lambda f_1(x_1) + \mu g_1(x_1), \ldots\}.$$

Введем в Ω_0 топологию следующим образом. Будем говорить, что последовательность $f^{(\nu)}$ элементов Ω_0 стремится к нулю, если:

1) найдется положительное число N, не зависящее от ν, такое, что при $n > N$ $f_n^{(\nu)} \equiv 0$ при всех ν;

2) $f_m^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_m) \to 0$ относительно сходимости в пространстве $\mathscr{S}(R_{4m})$ (при $m = 0$ последовательность комплексных чисел $f_0^{(\nu)}$ стремится к нулю в обычном смысле).

Упражнение 3.3.1. Пользуясь свойствами ядерных пространств, перечисленных в гл. 1, п. 1.4, показать, что Ω_0 является полным ядерным пространством.

Определим в Ω_0 некоммутативное произведение по формуле

$$f \times g = \Big\{ f_0 g_0, f_0 g_1(x_1) + f_1(x_1) g_0, \ldots$$
$$\ldots, \sum_{k=0}^{n} f_k(x_1, \ldots, x_k) g_{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots \Big\}. \tag{3.3.2}$$

(Произведение (3.3.2) действительно некоммутативно: уже в третьем члене при $0 \neq f_1(x) \neq g_1(x) \neq 0$, $f_1(x_1)g_1(x_2) \neq f_1(x_2)g_1(x_1)$.) Нетрудно проверить, что определенное таким образом произведение ассоциативно и дистрибутивно (по отношению к сложению) и осуществляет непрерывное отображение пространства пар $\Omega_0 \times \Omega_0$ на Ω_0 относительно заданной сходимости.

Единицей относительно произведения (3.3.2) является последовательность

$$I = (1, 0, \ldots, 0, \ldots). \tag{3.3.3}$$

Действительно, легко видеть, что

$$I \times f = f \times I = f. \tag{3.3.4}$$

Определим, далее, для элементов Ω_0 антилинейную операцию сопряжения $f \to f^+$ формулой

$$f^+ = \{\bar{f}_0, \bar{f}_1(x_1), \bar{f}_2(x_2, x_1), \ldots, \bar{f}_n(x_n, \ldots, x_1), \ldots\}. \tag{3.3.5}$$

Очевидно, $(f+g)^+ = f^+ + g^+$, $(\lambda f)^+ = \bar{\lambda} f^+$, $(f^+)^+ = f$ (операция, обладающая этими свойствами, называется *инволюцией*).

Упражнение 3.3.2. Показать, что

$$(f \times g)^+ = g^+ \times f^+. \tag{3.3.6}$$

Резюмируя, можно сказать, что Ω_0 является *ядерной алгеброй с инволюцией и единицей.*

В алгебре Ω_0 можно определить преобразование Фурье по формуле

$$Ff = \tilde{f} = \{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1(k_1), \ldots, \tilde{f}_n(k_1, \ldots, k_n), \ldots\}, \tag{3.3.7}$$

где

$$\tilde{f}_n(k_1, \ldots, k_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \ldots \int f_n(x_1, \ldots, x_n) e^{-i(k_1x_1 + \ldots + k_nx_n)} d^4x_1 \ldots d^4x_n. \tag{3.3.8}$$

(Заметим, что преобразование Фурье основных функций (3.3.8) определяется с обратным знаком в экспоненте по сравнению с преобразованием Фурье функций Уайтмана (3.2.17).)

Так как при преобразовании Фурье пространство $\mathscr{S}(R_n)$ отображается на себя, то из того, что $f \in \Omega_0$, следует, что $Ff \in \Omega_0$.

Все «линейные» свойства функций Уайтмана могут быть резюмированы следующим образом.

Определение. Нормированный функционал $W \in \Omega_0^*$ называется *функционалом Уайтмана*, если он инвариантен и мультипликативно-положителен и если в правый идеал

$$\mathcal{I} = \{f;\ W(f \times f^+) = 0\} \tag{3.3.18}$$

входят идеалы $\mathcal{I}_{sp}$ и $\mathcal{I}_{l.c}$.

Упражнение 3.3.8. Убедиться, что если W — функционал Уайтмана, то функции Уайтмана w_n, порождаемые им согласно (3.3.14), удовлетворяют всем линейным условиям (п. 3.2), и обратно, если $w_n(f_n)$ удовлетворяют линейным условиям, то функционал $W(f)$ является функционалом Уайтмана.

На наш взгляд компактность и внутренняя простота формулировки теории Уайтмана в терминах алгебры Ω_0 и функционала W вполне оправдывают использование сравнительно абстрактной терминологии, с которой мы имели дело в этом пункте.

Условие единственности вакуума может быть сформулировано следующим образом в терминах функционала Уайтмана.

Теорема 3.3.1. *Физической теории с единственным вакуумом соответствует неразложимый функционал Уайтмана W. Другими словами, если*

$$W = \alpha W^{(1)} + (1-\alpha) W^{(2)}, \tag{3.3.19}$$

где $0 < \alpha < 1$, а $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ — функционалы Уайтмана, то $W^{(1)} = W^{(2)} = W$.

Наоборот, теория с вырожденным вакуумом приводима, и ее функционал Уайтмана разлагается на неразложимые функционалы Уайтмана. (Борхерс (1962), Рее и Шлидер (1962), Морэн (1963а, б).)

Мы не будем приводить здесь доказательство теоремы 3.3.1. Доказательство последнего утверждения этой теоремы мы изложим в следующем пункте, доказывая теорему 3.3.2.

Упражнение 3.3.9. Показать, что если мультипликативно-положительный функционал W разложен по формуле (3.3.19) на мультипликативно-положительные функционалы $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$, то $\mathcal{I}_W \subset \mathcal{I}_{W^{(1)}} \cap \mathcal{I}_{W^{(2)}}$, где $\mathcal{I}_W$ — правые идеалы (3.3.18).

В терминах функционала Уайтмана свойство разбиения на пучки (3.2.34) (в теории с единственным вакуумом) может быть записано в виде

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho^l [W(f \times g\{\rho a,\ 1\}) - W(f)\, W(g)] = 0 \tag{3.3.20}$$

при любом $l \geqslant 0$ и $a^2 < 0$.

Связь между (3.3.20) и теоремой 3.3.1 частично иллюстрируется следующей задачей.

Упражнение 3.3.10. Пусть функционал W разложен по формуле (3.3.19) и как W, так и $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$, удовлетворяют условию разбиения на пучки (3.3.20). Показать, что это возможно лишь при $W^{(1)}=W^{(2)}=W$.

3.2. Восстановление оснащенного гильбертова пространства и операторов поля по функционалу Уайтмана. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.3.2. *Пусть в алгебре* Ω_0 *задан функционал Уайтмана* $W(f)$. *Тогда существует* (*и определено однозначно с точностью до унитарной эквивалентности*) *сепарабельное оснащенное гильбертово пространство* $\Omega\subset\mathscr{H}\subset\Omega^*$, *унитарное представление* $U(a,\Lambda)$ *группы Пуанкаре в нем, удовлетворяющее условию спектральности* III.a, *и локальное операторное поле* $\varphi(f)$, *удовлетворяющее постулатам* IV—VII, *такое, что*

$$W(f)=(\Psi_0,\ P(\varphi;\ f)\Psi_0), \tag{3.3.21}$$

где Ψ_0 — *нормированный инвариантный вектор* ($U(a,\Lambda)\Psi_0=\Psi_0$), *а* $P(\varphi;\ f)$ *задается формулой* (3.1.18), *которая в случае скалярного поля* $\varphi(f)$ *принимает вид*

$$P(\varphi;\ f)=f_0+\sum_{j=1}^{N(f)}\varphi_j(f_j(x_1,\ \ldots,\ x_j)). \tag{3.3.22}$$

Если к тому же функционал Уайтмана W *неразложим, то инвариантное состояние* Ψ_0 (*вакуум*) *единственно.*

Доказательство. Мы определим пространство $\mathscr{H}$ по следующей схеме. Сначала построим ядерное пространство Ω с заданным в нем непрерывным скалярным произведением (Φ,Ψ) и определим в нем действие операторов $U(a,\Lambda)$ и $\varphi(f)$. Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ будет определено затем как пополнение Ω по норме $\|\Psi\|=\sqrt{(\Psi,\ \Psi)}$; унитарные операторы $U(a,\Lambda)$, определенные первоначально в Ω, продолжаются по непрерывности во всем $\mathscr{H}$.

Элементы пространства Ω мы определим как *классы эквивалентности* *) в алгебре Ω_0. Два элемента f и g мы будем

*) Понятие класса эквивалентности (употребляется также термин *класс смежности*) встречается в математике часто. Так, вещественные числа определяются по Кантору как классы эквивалентности в множестве фундаментальных последовательностей рациональных чисел; суммируемые по Лебегу функции представляют собой классы «равных почти всюду» измеримых функций. С применением понятия класса эквивалентности к определению обобщенных функций мы познакомились в гл. I, п. 2.2.

причислять к одному и тому же классу $\Psi=\Psi_{[f]}=\Psi_{[g]}$ тогда и только тогда, когда

$$f-g\in\mathcal{J},\tag{3.3.23}$$

где $\mathcal{J}$ — правый идеал (3.3.18). В множестве классов эквивалентности Ω можно естественным образом ввести операции сложения и умножения на комплексное число, порождаемые соответствующими операциями в алгебре Ω_0:

$$\Psi_{[f]}+\Psi_{[g]}\equiv\Psi_{[f+g]},\qquad \lambda\Psi_{[f]}\equiv\Psi_{[\lambda f]}.\tag{3.3.24}$$

Упражнение 3.3.11. Показать, что классы эквивалентности $\Psi_{[f+g]}$ и $\Psi_{[\lambda f]}$ не зависят от выбора представителей f и g классов $\Psi_{[f]}$ и $\Psi_{[g]}$, что оправдывает определение (3.3.24).

Пространство Ω классов эквивалентности называется *фактор-пространством* пространства Ω_0 по подпространству $\mathcal{J}$ и обозначается

$$\Omega=\Omega_0/\mathcal{J}.\tag{3.3.25}$$

Согласно общей теореме пространство Ω ядерно относительно топологии, порождаемой топологией в Ω_0, так как Ω_0 ядерно, а $\mathcal{J}$ — замкнутое подпространство (см. Морэн (1963а)).

Определим в Ω скалярное произведение по формуле

$$(\Psi_{[f]},\ \Psi_{[g]})=W(g\times f^+).\tag{3.3.26}$$

Пользуясь определением идеала $\mathcal{J}$ и неравенством Коши (3.3.12), нетрудно видеть, что если $g_0\in\mathcal{J}$ и $f_0\in\mathcal{J}$, то

$$W((g+g_0)\times(f^++f_0^+))=W(g\times f^+),$$

так что скалярное произведение (3.3.26) не зависит от специального выбора представителей f и g классов смежности $\Psi_{[f]}$ и $\Psi_{[g]}$. Положительность скалярного произведения следует из мультипликативной положительности функционала Уайтмана. Линейность по второму аргументу и эрмитовость скалярного произведения очевидны.

Представление группы Пуанкаре в Ω определяется формулой

$$U(a,\ \Lambda)\Psi_{[f]}=\Psi_{[f(a,\Lambda)]}.\tag{3.3.27}$$

Это определение не зависит от специального выбора f из класса $\Psi_{[f]}$, так как в силу инвариантности функционала Уайтмана идеал $\mathcal{J}$ (3.3.18) тоже инвариантен: если $f\in\mathcal{J}$, то и $f_{(a,\Lambda)}\in\mathcal{J}$. Легко видеть, что

$$U(-\Lambda^{-1}a,\ \Lambda^{-1})U(a,\ \Lambda)=U(a,\ \Lambda)U(-\Lambda^{-1}a,\ \Lambda^{-1})=1$$

(т. е. для каждого $U(a, \Lambda)$ существует обратный оператор $U^{-1}(a, \Lambda) = U(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})$) и что в силу инварнантности

$$(U(a, \Lambda)\Psi_{[f]}, U(a, \Lambda)\Psi_{[g]}) = (\Psi_{[f]}, \Psi_{[g]}). \qquad (3.3.28)$$

Следовательно, оператор $U(a, \Lambda)$ унитарен и поэтому может быть продолжен в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, являющемся пополнением пространства Ω по норме $\sqrt{(\Psi, \Psi)}$.

Вакуум Ψ_0 определяется классом эквивалентности, в который входит единица алгебры Ω_0:

$$\Psi_0 = \Psi_{[I]} \qquad (I = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)). \qquad (3.3.29)$$

Очевидно, вектор Ψ_0 инвариантен и $(\Psi_0, \Psi_0) = 1$. Действие операторных полиномов $P(\varphi; f)$ (и, в частности, если $f = (0, f(x), 0, \ldots, 0, \ldots)$ — действие оператора поля $\varphi(f)$) определим в Ω формулой

$$P(\varphi; f)\Psi_{[g]} = \Psi_{[g \times f]}. \qquad (3.3.30)$$

Из того, что $\mathscr{I}$ — правый идеал, непосредственно следует, что действие оператора $P(\varphi; f)$ на вектор $\Psi_{[g]}$ не зависит от специального выбора представителя g класса $\Psi_{[g]}$.

Отметим, однако, что это не относится к аргументу f оператора $P(\varphi; f)$: операторы поля являются функциями элементов алгебры Ω_0, а не пространства классов Ω (если $\mathscr{I}$ был бы двусторонним идеалом, класс $\Psi_{[g \times f]}$ не зависел бы от представителя f класса $\Psi_{[f]}$).

Упражнение 3.3.12. Проверить, что при данном определении пространства $\mathscr{H}$ представления группы Пуанкаре $U(a, \Lambda)$ и операторов поля $\varphi(f)$ удовлетворяются все постулаты I—VII (со слабым условием спектральности IIIa) и что имеет место (3.3.21).

Таким образом, мы решили вопрос о существовании пространства $\mathscr{H}$, в котором реализуется представление $U(a, \Lambda)$ и действуют операторы $\varphi(f)$. Покажем теперь, что пространство $\mathscr{H}$ (с циклическим вакуумом) определяется функционалом Уайтмана W однозначно, с точностью до унитарной эквивалентности.

Действительно, пусть существуют два гильбертовых пространства $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, в которых реализуются представления группы Пуанкаре $U_1(a, \Lambda)$ и $U_2(a, \Lambda)$, имеются инвариантные векторы Ψ_{10} и Ψ_{20} и действуют операторы поля $\varphi_1(f)$ и $\varphi_2(f)$ таким образом, что

$$(\Psi_{10}, P(\varphi_1; f)\Psi_{10}) = (\Psi_{20}, P(\varphi_2; f)\Psi_{20}) = W(f) \qquad (3.3.31)$$

для любого $f \in \Omega_0$. Пусть Ω_1 и Ω_2 — пространства векторов вида $P(\varphi_i; f)\Psi_0$ $(i = 1, 2)$. Определим оператор V, действующий из

Ω_1 в Ω_2, следующим образом:

$$V\Psi_{10}=\Psi_{20}, \qquad VP(\varphi_1;\ f)\Psi_{10}=P(\varphi_2;\ f)\Psi_{20}. \tag{3.3.32}$$

В силу (3.3.31) оператор V сохраняет скалярное произведение. Пользуясь тем, что пространство Ω_i плотно в $\mathscr{H}_i$ $(i=1,2)$, нетрудно показать, что оператор V продолжается по непрерывности до унитарного оператора, отображающего взаимно однозначно $\mathscr{H}_1$ на все $\mathscr{H}_2$; при этом

$$\varphi_2(f)=V\varphi_1(f)V^{-1}, \qquad U_2(a,\ \Lambda)=VU_1(a,\ \Lambda)V^{-1}.$$

Таким образом, теории, связанные с гильбертовыми пространствами $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ и с соответствующими наборами операторов, унитарно эквивалентны.

Для завершения доказательства теоремы 3.3.2 осталось доказать вторую часть теоремы 3.3.1, т. е. показать, что при выполнении остальных условий из неразложимости функционала Уайтмана следует единственность вакуума.

Доказательство этого утверждения проведем от противного. Допустим, что функционал W неразложим и, тем не менее, подпространство инвариантных векторов в $\mathscr{H}$ по крайней мере двумерно.

Докажем сначала утверждение, обратное теореме 3.1.1.

Лемма 3.3.1. *Если вакуум не единствен, то алгебра операторов поля $\mathfrak{A}$ приводима.* (Борхерс (1962)).

Доказательство. Допустим противное. Для каждого инвариантного состояния Ψ_0 (вакуума) можно найти антиунитарный оператор Θ такой, что

$$\begin{gathered}\Theta\Psi_0=\Psi_0,\\ \Theta\varphi(x)\Psi_0=\varphi(-x)\Psi_0,\\ \Theta\varphi(x_1)\varphi(x_2)\Psi_0=\varphi(-x_1)\varphi(-x_2)\Psi_0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (\Theta(\alpha\Psi+\beta\Phi)=\bar{\alpha}\Theta\Psi+\bar{\beta}\Theta\Phi).\end{gathered} \tag{3.3.33}$$

(Оператор Θ называется TCP-оператором. Мы встретимся с ним в гл. 5, где будет доказана TCP-теорема.)

Если пространство инвариантных векторов имеет более одного измерения, то в силу тождества $\Theta^2=1$ можно так выбрать ортонормированный базис инвариантных векторов, чтобы для всех имело место равенство $\Theta\Psi_{i0}=\Psi_{i0}$. Выберем, далее, ненулевые комплексные числа α и β со свойствами

$$|\alpha|^2+|\beta|^2=1, \qquad \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\neq\frac{\beta}{\bar{\beta}},$$

и определим

$$\Psi_{\alpha\beta}=\alpha\Psi_{10}+\beta\Psi_{20}.$$

Заметим, что если алгебра $\mathfrak{A}$ неприводима, то любой вектор Ψ, принадлежащий Ω (общей области определения операторов $P(\varphi;f)$), цикличен. Действительно, если совокупность Ω_1 векторов $P(\varphi;f)\Psi$ (когда f меняется) не всюду плотна в Ω (и, значит, в $\mathscr{H}$), т. е. если замыкание $\bar{\Omega}_1$ — истинное подпространство $\mathcal{H}$, то оператор проектирования в $\overline{\Omega}_1$, Π_1 будет коммутировать со всеми $P(\varphi; f)$, что противоречит неприводимости алгебры $\mathfrak{A}$. Итак, вектор $\Psi_{\alpha\beta}$ тоже является циклическим, и, следовательно, для него существует свой антиунитарный оператор $\Theta_{\alpha\beta}$ со свойствами (3.3.33). В силу нашего выбора чисел α и β вектор

$$\Theta\Theta_{\alpha\beta}\Psi_{\alpha\beta} = \Theta\,(\alpha\Psi_{10} + \beta\Psi_{20}) = \bar{\alpha}\Psi_{10} + \bar{\beta}\Psi_{20}$$

неколлинеарен с вектором $\Psi_{\alpha\beta}$. Следовательно, унитарный оператор $\Theta\Theta_{\alpha\beta}$ не кратен единичному. С другой стороны, нетрудно проверить, что

$$\Theta\Theta_{\alpha\beta}\varphi(x)\,\Theta_{\alpha\beta}^{-1}\Theta^{-1} = \varphi(x),$$

т. е. что $\Theta\Theta_{\alpha\beta}$ коммутирует со всеми $P(\varphi; f)$. Таким образом мы пришли к противоречию с предположением о неприводимости алгебры $\mathfrak{A}$. Лемма 3.3.1 доказана.

Итак, алгебра операторов поля $\mathfrak{A}$ приводима. Нетрудно проверить, что совокупность всех ограниченных операторов, слабо коммутирующих со всеми операторами из $\mathfrak{A}$, тоже образует алгебру. Мы будем обозначать эту алгебру через $\mathfrak{A}'$ и называть *коммутантом* алгебры $\mathfrak{A}$. Говоря, что $\mathfrak{A}'$ является алгеброй, мы имеем в виду, что линейная комбинация и произведение операторов из $\mathfrak{A}'$ снова принадлежат $\mathfrak{A}'$.

Упражнение 3.3.13. Показать, что если $B \in \mathfrak{A}'$, т. е. если (в силу (3.1.20)) для любых Φ и Ψ из Ω

$$(P(\varphi;\ f)^*\,\Phi,\ B\Psi) = (\Phi,\ BP(\varphi;\ f)\,\Psi), \tag{3.3.34}$$

то и $B^* \in \mathfrak{A}'$.

Из упражнения 3.3.13 следует, что если алгебра $\mathfrak{A}'$ нетривиальна (т. е. не состоит лишь из элементов, кратных единичному оператору), то она содержит и нетривиальный самосопряженный оператор ($B + B^*$ или $i(B^* - B)$). Нетрудно показать, что существует и нетривиальный положительный оператор $B \in \mathfrak{A}'$, с нормой, не превышающей единицу; другими словами, существует оператор $B \in \mathfrak{A}'$ такой, что для любого $\Psi \in \mathcal{H}$

$$0 \leqslant (\Psi,\ B\Psi) \leqslant (\Psi,\ \Psi)\ ^*). \tag{3.3.35}$$

Лемма 3.3.2. *Если $B \in \mathfrak{A}'$, то B коммутирует и со всеми операторами представления группы Пуанкаре $U(a,\ \Lambda)$.*

Доказательство. Из ковариантности поля (и ковариантности вакуума) следует, что если $B \in \mathfrak{A}'$, то и

$$B(y) = U(y,\ 1)\,BU^{-1}(y,\ 1) \in \mathfrak{A}'. \tag{3.3.36}$$

*) Чтобы найти положительный оператор $B \in \mathfrak{A}'$, достаточно, имея какой-либо оператор $b \in \mathfrak{A}'$, определить B как b^*b; умножая это произведение-оператор на достаточно малое положительное число, мы удовлетворим условию (3.3.35).)

Из формулы (3.3.34), переходя к фурье-образам, находим

$$(\Psi_0,\ \tilde{B}(q)\tilde{\varphi}(k_1)\ \ldots\ \tilde{\varphi}(k_n)\Psi_0)=(\tilde{\varphi}^*(k_n)\ \ldots\ \tilde{\varphi}^*(k_1)\Psi_0,\ \tilde{B}(q)\Psi_0). \tag{3.3.37}$$

В силу условия спектральности левая часть равенства (3.3.37) отлична от нуля лишь при $q\in\overline{V}^-$ (q из замкнутого прошедшего светового конуса), в то время как правая часть этого равенства не равна нулю при $q\in\overline{V}^+$, так как $\tilde{\varphi}^*(k)=\tilde{\varphi}(-k)$. В силу цикличности вакуума это возможно, лишь если $\tilde{B}(q)\sim\delta(q)$. (Здесь мы пользуемся тем, что в силу (3.3.30) $\|B(y)\|=\|B\|$ не может расти вместе с y, поэтому $\tilde{B}(q)$ не может содержать производные от $\delta(q)$.) Итак, $B(y)=B(0)=B$, т. е. B коммутирует со всеми операторами трансляции $U(y,\ 1)$. Следовательно, вектор $B\Psi_0$, так же как и Ψ_0, инвариантен относительно трансляций и, значит, описывает состояние с нулевым 4-импульсом. Согласно нашим предположениям, такое состояние инвариантно также относительно всех однородных преобразований Лоренца *) (т. е. оно является новым вакуумом). Отсюда следует, что

$$U(0,\ \Lambda)BU^{-1}(0,\ \Lambda)P(\varphi;\ f)\Psi_0=U(0,\ \Lambda)BP(\varphi;\ f_{\{0,\ \Lambda^{-1}\}})\Psi_0=$$
$$=U(0,\ \Lambda)P(\varphi;\ f_{\{0,\ \Lambda^{-1}\}})B\Psi_0=P(\varphi;\ f)B\Psi_0=BP(\varphi;\ f)\Psi_0.$$

Следовательно, в силу цикличности вакуума Ψ_0 оператор B коммутирует и с $U(0,\ \Lambda)$. Лемма 3.3.2 доказана.

Итак, существует нетривиальный положительный оператор B, удовлетворяющий (3.3.35) и коммутирующий с операторами $P(\varphi;\ f)$ и $U(a,\ \Lambda)$. Нетрудно показать, что

$$0<\alpha\equiv(\Psi_0,\ B\Psi_0)<1. \tag{3.3.38}$$

Действительно, в силу (3.3.35) $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Если $\alpha=0$, то $\sqrt{B}\Psi_0=0$, а значит, и $B\Psi_0=0$; отсюда и из коммутативности B и $P(\varphi;\ f)$ следует, что $B=0$. Если же $\alpha=1$, то $B\Psi_0=\Psi_0$, а так как $B\in\mathfrak{A}'$, то $B=1$. Но мы предположили, что оператор B не кратен единичному оператору, что доказывает (3.3.38). Такими же свойствами обладает и оператор $1-B$.

Положим

$$\begin{aligned}\alpha W^{(1)}(f)&=(\Psi_0,\ P(\varphi;\ f)B\Psi_0),\\ (1-\alpha)W^{(2)}(f)&=(\Psi_0,\ P(\varphi;\ f)(1-B)\Psi_0).\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Упражнение 3.3.14. Пользуясь свойствами оператора B и леммой 3.3.2 показать, что $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ являются неравными между собой функционалами Уайтмана.

---

*) Доказательство этого утверждения на основе свойств функционала Уайтмана дано Борхерсом (1962) (теорема 3).

Очевидно, исходный функционал Уайтмана

$$W(f) \equiv (\Psi_0, P(\varphi; f)\Psi_0) = \alpha W^{(1)}(f) + (1-\alpha) W^{(2)}(f).$$

Итак, мы пришли к противоречию с предположением о неразложимости функционала Уайтмана, что показывает несовместимость этого предположения с существованием более одного (линейно независимого) вакуума.

Теорема 3.3.1 доказана полностью *).

§ 4. Примеры: свободные и обобщенные свободные поля

Как уже отмечалось, до сих пор нет ни одного нетривиального примера локальной теории взаимодействующих полей, который удовлетворял бы всем аксиомам I—VII. Поэтому в этом параграфе мы ограничимся кратким рассмотрением лишь нескольких примеров невзаимодействующих полей. Эти примеры показывают математическую непротиворечивость аксиом и дают возможность судить об их независимости.

4.1. Свободное скалярное нейтральное поле с массой. Будем говорить, что скалярное нейтральное (т. е. эрмитово) поле $\varphi(f)$ является свободным полем с массой m, если оно удовлетворяет уравнению

$$\varphi(Kf) = 0, \qquad K = \square + m^2, \tag{3.4.1}$$

для всех $f \in \mathcal{S}(R_4)$ и перестановочному соотношению

$$\varphi(f)\varphi(g) - \varphi(g)\varphi(f) \equiv [\varphi(f), \varphi(g)] =$$
$$= \frac{1}{i}\int\int f(x) D(x-y) g(y)\, d^4x d^4y, \tag{3.4.2}$$

где $D(x)$ — перестановочная функция Паули — Иордана:

$$D(x) \equiv D_m(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int \varepsilon(p^0)\delta(p^2-m^2)e^{ipx}d^4p =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{V_m^+} \sin p^0x^0 e^{-ipx}\frac{d^3p}{p^0}. \tag{3.4.3}$$

---

*) Формулы (3.3.39) дают нам пример функционала ($\alpha W^{(1)}(f)$, например), *подчиненного* данному мультипликативно-положительному функционалу $W(f)$ (это означает, что $0 \leqslant \alpha W^{(1)}(f \times f^+) \leqslant W(f \times f^+)$ при любом $f \in \Omega_0$). В случае нормированных циклических алгебр известно (см. [31], § 19, теорема 1), что (3.3.39) дает общий вид мультипликативно-положительного функционала, подчиненного данному. Представляет интерес математическая задача об обобщении этого утверждения на рассматриваемый случай (когда исходная алгебра $\mathfrak{A}$ не нормирована, но ядерна).

Уравнение (3.4.1) есть не что иное, как уравнение Клейна — Гордона для поля; в символичной форме оно имеет вид

$$K\varphi(x) \equiv (\Box + m^2)\varphi(x) = 0. \tag{3.4.4}$$

Операторы $\varphi(f)$, удовлетворяющие уравнению (3.4.1) и перестановочным соотношениям (3.4.2), действительно существуют и определены в ядерном пространстве Ω (и даже в максимальном ядерном пространстве $\mathcal{S}_\infty$), содержащемся в гильбертовом пространстве векторов состояний $\mathcal{H}$ и описанном в гл. 2, п. 5.1. Действие оператора $\varphi(f)$ на вектор

$$\Phi = (\Phi_0, \ldots, \Phi_n(p_1, \ldots, p_n), \ldots) \in \Omega$$

определяется формулой

$$(\varphi(f)\Phi)_n(p_1, \ldots, p_n) =$$
$$= \sqrt{\pi}\Big[\sqrt{n+1}\int \tilde{f}(p)\,\Phi_{n+1}(p, p_1, \ldots, p_n)\frac{d^3p}{p^0} +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\tilde{f}(-p_j)\,\Phi_{n-1}(p_1, \ldots, \widehat{p}_j, \ldots, p_n)\Big], \tag{3.4.5}$$

где преобразование Фурье $\tilde{f}$ основной функции $f(x)$ определяется формулой (3.3.8), а знак $\widehat{\ }$ над аргументом p_j означает, что этот аргумент должен быть опущен.

В частности, если $\Phi = \Psi_0 = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$, то

$$\varphi(f)\Psi_0 = \sqrt{\pi}(0, \tilde{f}(-p_1), 0, \ldots). \tag{3.4.6}$$

Обозначим через D_f совокупность тех векторов $\Phi \in \mathcal{H}$, для которых $\varphi(f)\Phi \in \mathcal{H}$. Очевидно, $\Phi \in D_f$ тогда и только тогда, когда ряд $\|\varphi(f)\Phi\|^2$, определяемый согласно (2.5.5) и (3.4.5), сходится.

Упражнение 3.4.1. а) Показать, что операторы $\varphi(f)$, определенные формулой (3.4.5), удовлетворяют уравнению (3.4.1) и перестановочным соотношениям (3.4.2).

б) Показать, что если пробная функция $f(x)$ вещественна, то оператор $\varphi(f)$ из D_f в $\mathcal{H}$ не только симметричен, но и самосопряжен.

Приведем некоторый интуитивный «вывод» формулы (3.4.5), при котором попутно вводятся играющие фундаментальную роль операторы рождения и уничтожения частиц.

Фурье-образ $\tilde{\varphi}(p)$ общего решения $\varphi(x)$ уравнения (3.4.4) пропорционален $\delta(p^2 - m^2)$:

$$\tilde{\varphi}(p) = \sqrt{2\pi}\,\chi(p)\,\delta(p^2 - m^2). \tag{3.4.7}$$

Интегрированием по p^0 получаем *)

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \chi(p)\,\delta(p^2-m^2)\,e^{-ipx}\,d^4p=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{V_m^+}[a(p)\,e^{-ipx}+a^*(p)\,e^{ipx}]\frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}}, \qquad (3.4.8)$$

где

$$a(p)=\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\chi(\omega_p,\ p),\ a^*(p)=\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\chi(-\omega_p,\ -p), \qquad (3.4.9)$$

$$(p^0=\omega_p=\sqrt{m^2+p^2}).$$

Упражнение 3.4.2. Показать, что перестановочные соотношения (3.4.2) эквивалентны следующим перестановочным соотношениям для операторных обобщенных функций:

$$[a(p),\ a(q)]=0, \qquad [a(p),\ a^*(q)]=\delta(p-q). \qquad (3.4.10)$$

Указание: перестановочные соотношения (3.4.10) могут быть получены из (3.4.2) по следующей схеме. Функция $D(x)=D(t,x)$ (3.4.3) является фундаментальным решением уравнения Клейна — Гордона:

$$KD(x)=0, \qquad D(0,\ x)=0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t}D(t,\ x)\right]_{t=0}=\delta(x).$$

Поэтому, полагая $\frac{\partial\varphi(t,\ x)}{\partial t}=\dot\varphi(t,\ x)$, для φ и $\dot\varphi$ (при равных временах) получим из (3.4.2) канонические перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned}&[\varphi(t,\ x),\ \varphi(t,\ y)]=[\dot\varphi(t,\ x),\ \dot\varphi(t,\ y)]=0,\\ &[\dot\varphi(t,\ x),\ \varphi(t,\ y)]=\frac{1}{i}\delta(x-y).\end{aligned} \qquad (3.4.11)$$

Переходя в (3.4.11) к фурье-образам, можно получить (3.4.10) **).

Если ввести сглаженные операторы

$$a(u)=\int a(p)\,u(p)\frac{d^3p}{\sqrt{p^0}}, \qquad u(p)\in\mathscr{S}(R_3), \qquad (3.4.12)$$

*) Следуя традиции, мы вводим нековариантные операторы рождения и уничтожения a^* и a, которые удовлетворяют простым перестановочным соотношениям (3.4.10). Ковариантные частотные операторы $\tilde\varphi^{\mp}(p)=\chi(\pm p)$ $(p^0=\omega_p)$ удовлетворяют ковариантному перестановочному соотношению

$$[\tilde\varphi^-(p),\ \tilde\varphi^+(q)]=2\omega_p\delta(p-q). \qquad (3.4.10a)$$

**) Тот факт, что из перестановочных соотношений при равных временах (3.4.11) вытекают перестановочные соотношения (3.4.10) и (3.4.2), показывает, что правила коммутации в различные моменты времени следуют из перестановочных соотношений на плоскости $x^0=t$ и из уравнения движения (3.4.1).

то перестановочные соотношения (3.4.10) примут вид

$$[a(u),\ a(v)]=0,\quad [a(u),\ a^*(v)]=(\bar{u},\ v)=\int u(p)\,v(p)\frac{d^3p}{p^0}. \tag{3.4.13}$$

Нормировочный множитель $\frac{1}{\sqrt{p^0}}$ под знаком интеграла в (3.4.12) выбран таким образом, чтобы (u, v) в (3.4.13) было инвариантным скалярным произведением в пространстве функций на V_m^+. Операторы $a(u)$ и $a^*(u)$ связаны с операторами $\varphi(f)$ соотношением

$$\varphi(f)=\sqrt{\pi}\,(a^*(\tilde{f}_-)+a(\tilde{f}_+)), \tag{3.4.14}$$

где

$$\tilde{f}_\pm(p)=\tilde{f}(\pm p),\qquad p^0=\omega_p. \tag{3.4.15}$$

Операторы a^* и a играют роль операторов рождения и уничтожения частиц (ср. гл. 2, п. 1.2). Они действуют на произвольный вектор $\Phi\in\Omega$ по формулам

$$(a^*(u)\Phi)_n(p_1,\ \ldots,\ p_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}u(p_j)\,\Phi_{n-1}(p_1,\ \ldots,\ \widehat{p}_j,\ \ldots,\ p_n), \tag{3.4.16}$$

$$(a(u)\Phi)_n(p_1,\ \ldots,\ p_n)=\sqrt{n+1}\int\limits_{V_m^+}u(p)\,\Phi_{n+1}(p,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)\frac{d^3p}{p^0}. \tag{3.4.17}$$

Нетрудно видеть, что

$$(a(u)\,a^*(v)\Phi)_n(p_1,\ \ldots,\ p_n)=\int\limits_{V_m^+}u(p)\,v(p)\frac{d^3p}{p^0}\,\Phi_n(p_1,\ \ldots,\ p_n)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}v(p_j)\int\limits_{V_m^+}u(p)\,\Phi_n(p,\ p_1,\ \ldots,\ \widehat{p}_j,\ \ldots,\ p_n)\frac{d^3p}{p^0}, \tag{3.4.18}$$

$$(a^*(v)\,a(u)\Phi)_n(p_1,\ \ldots,\ p_n)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}v(p_j)\int\limits_{V_m^+}u(p)\,\Phi_n(p,\ p_1,\ \ldots,\ \widehat{p}_j,\ \ldots,\ p_n)\frac{d^3p}{p^0},$$

так что при этом определении удовлетворяются перестановочные соотношения (3.4.13). Очевидно, операторы $a^*(u)$ (3.4.16) увеличивают число частиц (номер n каждого элемента столбца

Φ), а операторы $a(u)$ уменьшают это число, что оправдывает названия операторов рождения и уничтожения частиц. В частности, при $\Phi=\Psi_0$

$$a^*(u)\Psi_0=(0,\ u(p),\ 0,\ \ldots),\qquad a(u)\Psi_0=0. \tag{3.4.19}$$

Пользуясь формулами (3.4.14)—(3.4.17), мы приходим к (3.4.5).

Отметим двоякую роль, которую играет функция $u(p)$ в первом равенстве (3.4.19): u в левой части — это основная функция, сглаживающая обобщенную операторную функцию $a^{(*)}(p)$; в правой части $u(p)$ выступает как компонента вектора состояния — волновая функция одночастичного состояния.

Операторы в точке $\varphi(x)$, $a(p)$ и $a^*(p)$ могут быть определены как операторы из Ω в Ω^* — они порождают обобщенные состояния. Правила для их применения можно получить из (3.4.5) и (3.4.16)—(3.4.17), замечая, что

$$\varphi(x)=\int\varphi(\xi)\,\delta(x-\xi)\,d^4\xi=\varphi(\delta(x-\xi)),$$

$$a^{(*)}(p)=\int\delta(p-q)\sqrt{p^0}\,a^{(*)}(q)\,\frac{d^3q}{\sqrt{q^0}}=\sqrt{p^0}\,a^{(*)}(\delta(p-q)).$$

Из (3.4.6) и (3.4.19) получаем одночастичные состояния с определенной координатой и импульсом:

$$\begin{aligned}\varphi(x)\Psi_0&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}(0,\ e^{iqx},\ 0,\ \ldots),\\ a^*(p)\Psi_0&=\left(0,\ \sqrt{p^0}\,\delta(p-q),\ 0,\ \ldots\right).\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с обобщенными многочастичными состояниями (2.5.21), которые следующим образом выражаются через операторы a^*:

$$\begin{aligned}|0\rangle&\equiv\Psi_0,\\ |p_1,\ \ldots,\ p_n\rangle&=a^*(p_1)\ldots a^*(p_n)|0\rangle=\\ &=\frac{\sqrt{p_1^0\ldots p_n^0}}{\sqrt{n!}}\sum_{\{i\}}\delta(p_1-q_{i_1})\ldots\delta(p_n-q_{i_n}),\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

где сумма распространена по всем перестановкам $\{i\}=(i_1,\ldots,i_n)$ чисел $(1,\ldots,n)$.

Любое n-частичное состояние может быть представлено как суперпозиция состояний (3.4.21):

$$\Phi(p_1,\ \ldots,\ p_n)=\frac{1}{\sqrt{n!}}\int\Phi(q_1,\ \ldots,\ q_n)|\,p_1\ldots p_n\rangle\frac{dq_1\ldots dq_n}{\sqrt{q_1^0\ldots q_n^0}}.$$

Оператор числа частиц (2.5.17) выражается следующим образом при помощи операторов рождения и уничтожения

$$N = \int a^*(p)\, a(p)\, d^3p. \tag{3.4.22}$$

Для доказательства (3.4.22) заметим, что согласно (3.4.18) оператор «плотности числа частиц» $a^*(p)a(p)$ действует как оператор из Ω в Ω^* по формуле

$$(a^*(p)\, a(p)\, \Phi)_n(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} \delta(p - p_j)\, \Phi_n(p_1, \ldots, p_n).$$

Отсюда интегрированием по p мы убеждаемся, что оператор (3.4.22) действует по формуле (2.5.17). Произведение операторов рождения и уничтожения, в котором все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения, называется *нормальным*.

Отметим, что, в противоположность нормальному произведению $a^*(p)a(p)$, произведение $a(p)a^*(p)$ не определено ни для одного вектора из $\mathscr{H}$. Это следует из того, что первый член в правой части первого равенства (3.4.18) стремится к $\delta(0)\Phi_n = \infty$, когда u и v стремятся к $\sqrt{p^0}\,\delta(p-q)$.

После того как мы определили оператор плотности числа частиц, нетрудно ввести и другие динамические переменные. Например, оператор суммарного четырехмерного импульса имеет вид

$$P^\mu = \int a^*(p)\, a(p)\, p^\mu\, d^3p. \tag{3.4.23}$$

Упражнение 3.4.3. а) Показать, что функции Уайтмана в рассматриваемой теории свободного эрмитова поля имеют вид

$$\begin{gathered} w_{2n+1}(x_1, \ldots, x_{2n+1}) \equiv 0, \quad w_2(x_1, x_2) = F_2(x_1 - x_2) = \frac{1}{i} D_m^{(-)}(x_1 - x_2), \\ w_{2n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i,\, j)} \prod_{\nu=1}^{n} w_2(x_{i_\nu}, x_{j_\nu}), \end{gathered} \tag{3.4.24}$$

где сумма распространена по всем разбиениям индексов $1, \ldots, 2n$ на n различных пар $(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)$, где $i_\nu < j_\nu$, а $D_m^{(-)}$ — отрицательно-частотная функция Паули — Иордана

$$\begin{aligned} D_m^{(\pm)}(x) &= \frac{\mp i}{(2\pi)^3} \int e^{ipx}\, \theta(\pm p^0)\, \delta(p^2 - m^2)\, d^4p = \\ &= \frac{\varepsilon(x_0)}{4\pi}\, \delta(x^2) \mp \frac{mi}{8\pi\sqrt{x^2}} \left[N_1\left(m\sqrt{x^2}\right) \mp i\varepsilon(x^0)\, J_1\left(m\sqrt{x^2}\right)\right] \pm \\ &\quad \pm \frac{mi\theta(-x^2)}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} K_1\left(m\sqrt{-x^2}\right). \end{aligned} \tag{3.4.25}$$

(Указание: ввести операторы рождения и уничтожения в x-пространстве по формуле

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{V_m^+} a^{(\pm)}(p)\, e^{\pm ipx} \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}}, \tag{3.4.26}$$

где использованы обозначения $a(p) = a^{(-)}(p)$, $a^*(p) = a^{(+)}(p)$. Пользуясь тем, что $\varphi^{(-)}(x)\Psi_0 = 0$, а $(\varphi^{(+)}(x))^* = \varphi^{(-)}(x)$, показать, что

$$w_2(x_1, x_2) = (\Psi_0, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\Psi_0) =$$
$$= \left(\Psi_0, \varphi^{(-)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2)\Psi_0\right) = \left[\varphi^{(-)}(x_1), \varphi^{(+)}(x_2)\right], \tag{3.4.27}$$

и отсюда получить явное выражение для w_2.)

б) Доказать равенство (3.4.23) для w_{2n} при помощи индукции по n, имея в виду формулы

$$[\varphi^{(-)}(x), \varphi(y)] = [\varphi(x), \varphi^{(+)}(y)] = [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)] = \frac{1}{i} D^{(-)}(x-y)$$

и рекуррентное соотношение

$$w_{2n+2}(x_1, \ldots, x_{2n+2}) = \sum_{j=1}^{2n+1} w_2(x_j, x_{2n+2})\, w_{2n}(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{2n+1}),$$

где (как и раньше) знак $\widehat{\ }$ над аргументом x_j означает, что этот аргумент должен быть опущен.

Упражнение 3.4.4. Найти аналитические выражения для $F_{2n}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{2n-1})$ при комплексных ζ из прошедшей трубчатой области T^- (см. п. 2.2, теорема 3.2.2).

Упражнение 3.4.5. Показать, что для свободных полей при $n > 2$ усеченные средние w_n^T равны нулю.

Упражнение 3.4.6. а) Описать идеал $\mathscr{I}$ (3.3.18) в рассматриваемом здесь случае свободного поля.

б) Найти соответствие между фактор-пространством $\Omega = \Omega_0/\mathscr{I}$ и пространством Ω обрывающихся последовательностей симметричных функций, определенных на произведении гиперболоидов $V_m^{+(n)}$ (см. гл. 2, п. 5.1) *).

4.2. Заряженное скалярное поле. Заряженное поле, в отличие от нейтрального, описывается неэрмитовыми операторами $\varphi(x)$. Свободное комплексное скалярное поле φ определяется как операторная обобщенная функция $\varphi(f)$, удовлетворяющая уравнению Клейна — Гордона (3.4.1) (как и эрмитово поле) и перестановочным соотношениям:

$$[\varphi(f), \varphi(g)] = [\varphi^*(f), \varphi^*(g)] = 0,$$
$$[\varphi^*(f), \varphi(g)] = [\varphi(f), \varphi^*(g)] = \frac{1}{i} \int \int f(x)\, D(x-y)\, g(y)\, d^4x\, d^4y. \tag{3.4.29}$$

---

*) Отметим, что идеал $\mathscr{I}$ (3.3.18) содержит двусторонний идеал $\mathscr{I}_K$ с базисными функциями

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = K_{x_j} g_n(x_1, \ldots, x_n), \tag{3.4.28}$$

где $g_n \in \mathscr{S}(R^{4n})$, а K_{x_j} — оператор Клейна — Гордона по переменной x_j.

Любое комплексное поле $\varphi(x)$ может, естественно, быть разложено на вещественную и мнимую части:

$$\sqrt{2}\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x), \qquad \sqrt{2}\varphi^*(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x),$$

где поля φ_1 и φ_2 эрмитовы. Нетрудно видеть, что перестановочные соотношения (3.4.29) будут выполняться автоматически, если каждое из полей φ_α ($\alpha = 1, 2$) удовлетворяет перестановочным соотношениям (3.4.2) с одной и той же массой m, а

$$[\varphi_1(x), \ \varphi_2(y)] = 0.$$

Таким образом, комплексное свободное поле сводится к комбинации двух независимых эрмитовых полей. Однако разложение на вещественную и мнимую части не имеет никакого физического смысла в единственно интересном случае, когда теория инвариантна относительно фазовых (градиентных) преобразований

$$\varphi(x) \to e^{i\lambda}\varphi(x), \qquad \varphi^*(x) \to e^{-i\lambda}\varphi^*(x). \tag{3.4.30}$$

В терминах функций Уайтмана такая инвариантность означает, что вакуумные средние, в которых число полей φ и φ^* неодинаково, должны обращаться в нуль.

Только при наличии симметрии (3.4.30) с полем φ можно связать сохраняющийся электрический заряд.

Пространство одночастичных состояний $\mathscr{H}_1$ в этом случае состоит из функций $\Phi(p, e)$, заданных на гиперболоиде V_m^+ и зависящих еще от дискретного индекса e — знака заряда, принимающего два значения «+» и «—». По определению, функции с разными зарядами $\Phi(p, +)$, $\Psi(p, -)$ ортогональны друг другу. Сумма функций с разными знаками заряда не является физически реализуемым состоянием (заряд задает правило отбора, см. гл. 1, п. 1.3), так что пространство $\mathscr{H}_1$ разбивается на прямую сумму когерентных подпространств: $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_{1+} \oplus \mathscr{H}_{1-}$.

Пространство n-частичных состояний $\mathscr{H}_n$ определяется обычным образом (см. гл. 2, п. 5.1) как симметризованное тензорное произведение n пространств $\mathscr{H}_1$. Оператор φ^*, по определению, увеличивает заряд системы, а φ — уменьшает его.

В частности,

$$\varphi(f)\Psi_0 = \sqrt{\pi}(0, \ \tilde{f}(-p_1)\delta_{e,-1}, \ 0, \ \ldots),$$
$$\varphi^*(f)\Psi_0 = \sqrt{\pi}(0, \ \tilde{f}(-p_1)\delta_{e,+1}, \ 0, \ \ldots).$$

Упражнение 3.4.7. а) Определить, в согласии с (3.4.1) и (3.4.29), действия операторов $\varphi(f)$ и $\varphi^*(f)$ на векторы состояний

$$\Phi = (\Phi_0, \ \Phi_1(p, e), \ \ldots, \ \Phi_n(p_1, e_1; \ p_2, e_2; \ \ldots; \ p_n, e_n), \ \ldots).$$

где $e_j = \pm 1$, $p_j \in V_m^+$, а Φ_n симметрична относительно перестановки аргументов (p_j, e_j).

б) Найти оператор электрического заряда.

Указание: ввести операторы рождения и уничтожения частиц положительного $(a^{*(+)}, a^{(+)})$ и отрицательного $(a^{*(-)}, a^{(-)})$ заряда, которые связаны с полем $\varphi(x)$ формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \{a^{(+)}(p)\, e^{-ipx} + a^{*(-)}(p)\, e^{ipx}\} \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}}. \tag{3.4.31}$$

Упражнение 3.4.8. Найти функции Уайтмана для заряженного поля. Обратить внимание, что функции, в которые входит неодинаковое число полей φ и φ^*, исчезают *).

4.3. Свободное спинорное поле. Свободное спинорное поле с массой m является спинорной операторной обобщенной функцией $\psi(x) = \{\psi^\alpha(x)\}$, удовлетворяющей уравнению Дирака (2.4.35) и следующим перестановочным соотношениям при равных временах:

$$\begin{aligned} &[\psi^\alpha(t, \mathbf{x}),\ \psi^\beta(t, \mathbf{y})]_+ = [\psi^{*\alpha}(t, \mathbf{x}),\ \psi^{*\beta}(t, \mathbf{y})]_+ = 0, \\ &[\psi^\alpha(t, \mathbf{x}),\ \psi^{*\beta}(t, \mathbf{y})]_+ = \delta^{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

(здесь, как и в (3.1.9), знак $[\ ,\ ]_+$ означает антикоммутатор).

Этим перестановочным соотношениям можно придать релятивистски ковариантную форму, аналогичную формуле (3.4.2) в случае скалярного поля.

Для этой цели запишем общее решение уравнения Дирака в виде интеграла Фурье **) (ср. с (3.4.31)):

$$\begin{aligned} \psi(x) = \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{\omega_p}} \sum_{\zeta=-1/2}^{1/2} \{b_\zeta^{(+)}(p)\, v_\zeta^{(+)}(p)\, e^{-ipx} &+ \\ + b_\zeta^{*(-)}(p)\, v_\zeta^{(-)}(p)\, e^{ipx}\}&, \end{aligned} \tag{3.4.33}$$

$$\bar\psi(x) = \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{\omega_p}} \sum_\zeta \{b_\zeta^{*(+)}(p)\, \bar v_\zeta^{(+)}(p)\, e^{ipx} + b_\zeta^{(-)}(p)\, \bar v_\zeta^{(-)}(p)\, e^{-ipx}\},$$

---

*) Это свойство выражает закон сохранения электрического заряда и является следствием инвариантности теории свободного заряженного поля относительно преобразований (3.4.30). Оно должно сохраняться и в теории взаимодействующего заряженного поля.

**) Следуя традиции, мы рассматриваем здесь лишь комплексное спинорное поле. Можно ввести также истинно нейтральное спинорное поле, в котором $b^{(+)} = b^{(-)}$ (поле Майорана, св. Майорана (1937)). В базисе Майорана (2.4.32) поле Майорана эрмитово. Несмотря на это, оно ненаблюдаемо, поскольку преобразуется по двузначному представлению группы Пуанкаре.

где $v_\zeta^{(\pm)}(p)$ — четырехкомпонентные спиноры с определенной проекцией спина $\zeta = \pm\frac{1}{2}$, удовлетворяющие уравнениям

$$(\hat{p} \mp m)\, v_\zeta^{(\pm)}(p) = 0 \quad \text{при} \quad p^0 = \omega_p. \tag{3.4.34}$$

Упражнение 3.4.9. Показать, пользуясь (3.4.34), что функция ψ (3.4.33) действительно удовлетворяет уравнению Дирака (2.4.35).

Заметим, что спиноры $v_\zeta^{(\pm)}(p)$ связаны со спинорами $u^{r\,(\pm)}(p)$, с которыми мы имели дело в гл. 2, п. 4.2, по формуле (2.5.48). Они удовлетворяют условию ортонормированности (2.5.50). Соотношения (2.4.52) и правила суммирования по проекции спина (2.4.53) и (2.4.54) для спиноров (2.5.48) приобретают вид

$$\bar{v}_\eta^{(\pm)}(p)\, v_\zeta^{(\pm)}(p) = \frac{\omega}{m}\,\delta_{\eta\zeta}, \qquad \bar{v}_\eta^{(+)}(p)\, v_\zeta^{(-)}(-p) = 0; \tag{3.4.35}$$

$$2\sum_\zeta v_\zeta^{(\pm)\,\alpha}(p)\, \tilde{v}_{\zeta\beta}^{(\pm)}(p) = \left(\frac{\hat{p}}{m}\right)_\beta^\alpha \pm \delta_\beta^\alpha. \tag{3.4.36}$$

Обратим внимание на связь представления (3.4.33) с разложением (2.5.51) (роль волновых функций $\Psi(p, \zeta, e)$ играют операторы $b_\zeta^{(e)}(p)$).

Из одновременных перестановочных соотношений (3.4.32) вытекают следующие перестановочные соотношения для операторных обобщенных функций $b_\zeta^{(\pm)}(p)$ и для их эрмитово сопряженных функций:

$$\begin{gathered}
\left[b_\eta^{(\pm)}(p),\ b_\zeta^{(\pm)}(q)\right]_+ = \left[b_\eta^{(\mp)}(p),\ b_\zeta^{(\pm)}(q)\right]_+ = \\
= \left[b_\eta^{*(\pm)}(p),\ b_\zeta^{*(\pm)}(q)\right]_+ = 0, \\
\left[b_\eta^{*(\pm)}(p),\ b_\zeta^{(\mp)}(q)\right]_+ = 0,\ \left[b_\eta^{*(\pm)}(p),\ b_\zeta^{(\pm)}(q)\right]_+ = \delta_{\eta\zeta}\delta(p-q).
\end{gathered} \tag{3.4.37}$$

Чтобы получить (3.4.37), найдем обратное (трехмерное) преобразование Фурье к (3.4.33) при $t=0$ и воспользуемся соотношениями (2.5.50); например, для $b_\zeta^{(+)}$ получаем

$$b_\zeta^{(+)}(p) = \tilde{v}_\zeta^{(+)}(p)\,\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \psi(0, \boldsymbol{x})\, e^{ipx} d^3\boldsymbol{x}. \tag{3.4.38}$$

Отсюда и из (3.4.32) перестановочные соотношения (3.4.37) вытекают непосредственно.

Правила коммутации (3.4.37) позволяют, со своей стороны, получить ковариантные перестановочные соотношения для операторных полей $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$:

$$[\psi^\alpha(x),\ \psi^\beta(y)]_+ = [\tilde{\psi}_\alpha(x),\ \tilde{\psi}_\beta(y)]_+ = 0,$$
$$[\psi^\alpha(x),\ \tilde{\psi}_\beta(y)]_+ = \frac{1}{i} S^\alpha_\beta(x-y), \qquad (3.4.39)$$

где

$$S(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{V_m^+} \frac{d^3p}{2\omega}\left[e^{-ipx}(\hat{p}+m) + e^{ipx}(\hat{p}-m)\right] =$$
$$= \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\varepsilon(p^0)\,\delta(p^2-m^2)(\hat{p}-m)\,e^{ipx} \qquad (3.4.40)$$

(при получении (3.4.39)—(3.4.40) мы воспользовались равенством (3.4.36)).

Покажем, что действительно существуют операторные функции, действующие в пространстве $\mathscr{H}(^1/_2)$ (гл. 2, п. 5.3), которые удовлетворяют перестановочным соотношениям (3.4.37) или (3.4.39).

Операторы $b_\zeta^{(\pm)}(p)$ и их эрмитово сопряженные могут быть определены как операторы из $\Omega(^1/_2)$ в $\Omega^*(^1/_2)$ по аналогии с операторами $a^{(\pm)}(p)$ скалярного заряженного поля, исходя из того, что оператор $\psi^*(x)$ увеличивает, а $\psi(x)$ — уменьшает заряд системы на единицу. Оператор $b_\zeta^{(+)}(p)$ будет интерпретироваться как оператор уничтожения частицы, а оператор $b_\zeta^{*(-)}(p)$ — как оператор рождения античастицы. Аналогично, оператор $b_\zeta^{*(+)}(p)$ «рождает» частицу, а $b_\zeta^{(-)}(p)$ «уничтожает» античастицу.

В соответствии с этой интерпретацией будем иметь

$$b_\zeta^{(+)}(p)\,|0\rangle = b_\zeta^{(-)}(p)\,|0\rangle = 0,$$
$$b_\zeta^{*(+)}(p)\,|0\rangle = |\,p,\ \zeta,\ e\rangle, \qquad (3.4.41)$$
$$b_\zeta^{*(-)}(p)\,|0\rangle = |\,p,\ \zeta,\ -e\rangle,$$

где $|\,p,\ \zeta,\ e\rangle \in \Omega^*_{m\,1/2}$ — обобщенное одночастичное состояние с импульсом $p=(\omega_p,\ \mathbf{p})$ с третьей проекцией спина ζ и зарядом $e=\pm$ (e — это заряд частицы: $e=-1$ для электрона, $e=+1$ для протона). Операторы

$$b_\zeta^{(e)}(f) = \int b_\zeta^e(p)\,f(p)\,\frac{d^3p}{\sqrt{p^0}} \qquad (3.4.42)$$

и операторы, им сопряженные в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}(^1/_2)$, действуют следующим образом (ср. с формулами

(3.4.16) и (3.4.17)):

$$\begin{gathered}(b_\zeta^{(e)}(f)\Phi)_n(p_1\zeta_1e_1;\ \ldots;\ p_n\zeta_ne_n)=\\ =\sqrt{n+1}\int\limits_{V_m^+} f(p)\,\Phi_{n+1}(p\zeta e;\ p_1\zeta_1e_1;\ \ldots;\ p_n\zeta_ne_n)\frac{d^3p}{p^0},\\ \left(b_\zeta^{*(e)}(f)\Phi\right)_n(p_1\zeta_1e_1;\ \ldots;\ p_n\zeta_ne_n)=\\ =\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\Phi_{n-1}(p_1\zeta_1e_1;\ \ldots;\ \widehat{p_j\zeta_je_j};\ \ldots;\ p_n\zeta_ne_n)\times\\ \times f(p_j)\,\delta_{\zeta\zeta_j}\delta_{ee_j}.\end{gathered}\tag{3.4.43}$$

Упражнение 3.4.10. Показать, что операторы (3.4.43) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{gathered}\left[b_\zeta^{(e)}(f),\ b_{\zeta'}^{(e')}(g)\right]_+=\left[b_\zeta^{*(e)}(f),\ b_{\zeta'}^{*(e')}(g)\right]_+=0,\\ \left[b_\zeta^{(e)}(f)\ b_{\zeta'}^{*(e')}(\bar g)\right]_+=(g,\ f)\,\delta_{\zeta\zeta'}\delta_{ee'}=\delta_{\zeta\zeta'}\delta_{ee'}\int\limits_{V_m^+}\bar g(p)\,f(p)\frac{d^3p}{p^0},\end{gathered}\tag{3.4.44}$$

вытекающим из (3.4.42) и (3.4.37). (Указание: исходя из (3.4.43), получить аналоги формул (3.4.18).)

Если $f(p)\in\mathscr{S}(R_3)$, то операторы (3.4.43) переводят пространство $\Omega(^1/_2)$ в себя и непрерывны относительно топологии ядерного пространства. Замечательно другое: в противоположность бозевскому случаю операторы (3.4.43) являются ограниченными операторами, определенными во всем гильбертовом пространстве фермионов $\mathscr{H}(1/2)$. Для доказательства этого утверждения достаточно потребовать, чтобы сглаживающая функция $f(p)$ имела интегрируемый квадрат с весом ω_p^{-1} во всем трехмерном пространстве, т. е. чтобы $(f,\ f)<\infty$, где $(f,\ f)$ определяется формулой (3.4.44) (не обязательно требовать дифференцируемости или быстрого убывания этой функции, т. е. ее принадлежности к $\mathscr{S}(R_3)$).

Действительно, в силу (3.4.44)

$$\begin{gathered}\|b_\zeta^{(e)}(f)\Phi\|^2+\|b_\zeta^{*(e)}(f)\Phi\|^2=\\ =(b_\zeta^{(e)}(f)\Phi,\ b_\zeta^{(e)}(f)\Phi)+\left(b_\zeta^{*(e)}(f)\Phi,\ b_\zeta^{*(e)}(f)\Phi\right)=\\ =\left(\Phi,\ \left[b_\zeta^{*(e)}(f),\ b_\zeta^{(e)}(f)\right]_+\Phi\right)=\int\limits_{V_m^+}|f(p)|^2\frac{d^3p}{p^0}(\Phi,\ \Phi).\end{gathered}\tag{3.4.45}$$

Следовательно, оба оператора $b_\zeta^{(e)}(f)$ и $(b_\zeta^{(e)}(f))^*$ ограничены по норме, коль скоро $f(p) \in \mathscr{L}_2(V_m^+)$. Отсюда следует ограниченность по норме и оператора $\psi(\vec{g}) = \psi^\alpha(g_\alpha)$, так как

$$\psi(\vec{g}) = \sqrt{\pi m} \sum_{\zeta=-1/2}^{1/2} \left(b_\zeta^{(+)}(f_\zeta^+) + b_\zeta^{*(-)}(f_\zeta^-) \right), \tag{3.4.46}$$

где

$$f_\zeta^\pm(p) = v_\zeta^{\alpha(\pm)}(p)\, \tilde{g}_\alpha(\mp p), \qquad p^0 = \omega_p. \tag{3.4.47}$$

Оператор плотности числа спинорных частиц определяется формулой

$$\left(b_\zeta^{*(e)}(p)\, b_\zeta^{(e)}(p)\, \Phi\right)_n (p_1\zeta_1 e_1; \ldots; p_n\zeta_n e_n) =$$
$$= \Phi_n(p_1\zeta_1 e_1; \ldots; p_n\zeta_n e_n) \sum_{j=1}^n \delta(p - p_j)\, \delta_{\zeta\zeta_j} \delta_{ee_j}. \tag{3.4.48}$$

Отсюда находим следующие выражения для операторов числа частиц N, электрического заряда Q, третьей проекции спина S_3 и 4-импульса фермионов P^μ:

$$N = \sum_{e=\pm} \sum_{\zeta=-1/2}^{1/2} \int b_\zeta^{*(e)}(p)\, b_\zeta^{(e)}(p)\, d^3p, \tag{3.4.49}$$

$$Q = \sum_{e=\pm} e \sum_{\zeta=-1/2}^{1/2} \int b_\zeta^{*(e)}(p)\, b_\zeta^{(e)}(p)\, d^3p, \tag{3.4.50}$$

$$S_3 = \sum_{e=\pm} \sum_{\zeta} \int b_\zeta^{*(e)}(p)\, b_\zeta^{(e)}(p)\, d^3p, \tag{3.4.51}$$

$$P^\mu = \sum_{e=\pm} \sum_{\zeta} \int p^\mu b_\zeta^{*(e)}(p)\, b_\zeta^{(e)}(p)\, d^3p. \tag{3.4.52}$$

Вакуумные средние от произведений спинорных полей ψ и $\tilde{\psi}$ равны нулю, если число полей ψ не совпадает с числом дираково сопряженных полей $\tilde{\psi}$. Отличные от нуля двухточечные функции Уайтмана свободного спинорного поля имеют вид

$$\begin{aligned} w_{\psi\tilde{\psi}}(x_1, x_2) &= \langle 0 | \psi(x_1)\, \tilde{\psi}(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{i} S_m^{(-)}(x_1 - x_2), \\ w_{\tilde{\psi}\psi}(x_1, x_2) &= \langle 0 | \tilde{\psi}(x_1)\, \psi(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{i} S_m^{(+)}(x_2 - x_1), \end{aligned} \tag{3.4.53}$$

где

$$S^{(\pm)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int\limits_{V_m^+} (\hat{p} \mp m) e^{\pm ipx} \frac{d^3p}{2p^0} =$$

$$= \frac{\pm i}{(2\pi)^3} \int\limits_{V_m^+} (\hat{p} - m) \theta(\pm p^0) e^{ipx} \delta(p^2 - m^2) d^4p = (i\hat{\partial} + m) D_m^{(\pm)}(x). \tag{3.4.54}$$

Частотные функции скалярного поля $D_m^{(\pm)}(x)$ определены формулой (3.4.25). Высшие функции Уайтмана выражаются в виде суммы произведений двухточечных функций по аналогии с формулой (3.4.24) для скалярного случая. Например,

$$\begin{aligned} &w_{\psi\psi\bar{\psi}\bar{\psi}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0 | \psi(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \bar{\psi}(x_4) | 0 \rangle = \\ &\qquad = w_{\psi\bar{\psi}}(x_1, x_4) w_{\psi\bar{\psi}}(x_2, x_3) - w_{\psi\bar{\psi}}(x_1, x_3) w_{\psi\bar{\psi}}(x_2, x_4), \\ &w_{\psi\bar{\psi}\psi\bar{\psi}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = w_{\psi\bar{\psi}}(x_1, x_2) w_{\psi\bar{\psi}}(x_3, x_4) + \\ &\qquad\qquad + w_{\psi\bar{\psi}}(x_1, x_4) w_{\psi\bar{\psi}}(x_2, x_3) \end{aligned} \tag{3.4.55}$$

и т. д.

4.4. Вторично квантованное представление дискретных операций *P*, *T* и *C*. Рассмотрим поведение квантованного спинорного поля при отражениях пространства и времени и при зарядовом сопряжении. Отметим, что, хотя смысл этих преобразований будет выясняться на примере свободного поля, полученные формулы будут справедливыми и в общем случае.

В соответствии с анализом, проведенным в гл. 2, п. 4.1, и с общим определением ковариантного операторного поля (п. 1.1) мы определим следующим образом операции I_s (или P), I_t (или T) и I_C (или C) для спиноров. Пространственному отражению I_s, действующему на 4-вектор x по закону $I_s(x^0, \boldsymbol{x}) = (x^0, -\boldsymbol{x})$, поставим в соответствие унитарный оператор $U(I_s)$ такой, что

$$\begin{aligned} &U(I_s) \psi(x) U^{-1}(I_s) = \eta_s \gamma^0 \psi(I_s x), \\ &U(I_s) \bar{\psi}(x) U^{-1}(I_s) = \bar{\eta}_s \gamma^0 \bar{\psi}(I_s x), \qquad (|\eta_s| = 1). \end{aligned} \tag{3.4.56}$$

Отражению времени I_t поставим в соответствие антиунитарный оператор $U(I_t)$ такой, что

$$\begin{aligned} &U(I_t) \psi(x) U^{-1}(I_t) = \eta_t \gamma^5 C^{-1} \psi(I_t x), \\ &U(I_t) \bar{\psi}(x) U^{-1}(I_t) = -\bar{\eta}_t \bar{\psi}(I_t x) \gamma^5 C = -\bar{\eta}_t \gamma^5 C^{-1} \bar{\psi}, (|\eta_t| = 1). \end{aligned} \tag{3.4.57}$$

Зарядовое сопряжение спинора определим как унитарный оператор $U(I_C)$ такой, что

$$U(I_C)\psi(x)U^{-1}(I_C)=\eta_C C\tilde{\psi}(x)\equiv\eta_C\psi^C(x),$$
$$U(I_C)\tilde{\psi}(x)U^{-1}(I_C)=\bar{\eta}_C C^{-1}\psi(x)=-\bar{\eta}_C C\psi(x)\equiv\bar{\eta}_C\psi^C(x), \quad |\eta_C|=1. \qquad (3.4.58)$$

Отметим, что, несмотря на внешнее сходство формул (3.4.56)—(3.4.58) с формулами для дискретных преобразований волновых функций (гл. 2, п. 4.3), «вторично квантованные» операторы $U(I_s)$, $U(I_t)$ и $U(I_C)$ имеют иной смысл. Они являются операторами в пространстве Фока и не коммутируют с операторами рождения и уничтожения $b^{*(\pm)}(p)$ и $b^{(\pm)}(p)$, в то время как числовые множители (в том числе и спинорные компоненты $v^{(\pm)}(p)$) коммутируют с унитарными операторами $U(I_s)$ и $U(I_C)$, а при перестановке с антиунитарным оператором $U(I_t)$ заменяются на комплексно сопряженные.

Из (3.4.56)—(3.4.58) находим трансформационные свойства операторов уничтожения при дискретных преобразованиях:

$$U(I_s)\,b_\zeta^{(+)}(p)\,U^{-1}(I_s)=\eta_s b_\zeta^{(+)}(-p),$$
$$U(I_s)\,b_\zeta^{(-)}(p)\,U^{-1}(I_s)=-\bar{\eta}_s b_\zeta^{(-)}(-p); \qquad (3.4.59)$$

$$U(I_t)\,b_\zeta^{(+)}(p)\,U^{-1}(I_t)=\eta_t i(-1)^{\frac{1}{2}-\zeta}\,b_{-\zeta}^{(+)}(-p),$$
$$U(I_t)\,b_\zeta^{(-)}(p)\,U^{-1}(I_t)=-\bar{\eta}_t i(-1)^{\frac{1}{2}-\zeta}\,b_{-\zeta}^{(-)}(-p); \qquad (3.4.60)$$

$$U(I_C)\,b_\zeta^{(+)}(p)\,U^{-1}(I_C)=\eta_C b_\zeta^{(-)}(p),$$
$$U(I_C)\,b_\zeta^{(-)}(p)\,U^{-1}(I_C)=\bar{\eta}_C b_\zeta^{(+)}(p). \qquad (3.4.61)$$

Чтобы вывести отсюда трансформационные свойства операторов рождения, заметим, что как для унитарного, так и для антиунитарного оператора U и для произвольного оператора b $(UbU^{-1})^*=Ub^*U^{-1}$.

Упражнение 3.4.11. Пользуясь разложением Фурье (3.4.33) операторного поля $\psi(x)$, доказать эквивалентность формул (3.4.59) — (3.4.61) с формулами (3.4.56) — (3.4.58).

Указание: установить предварительно следующие тождества для спиноров, удовлетворяющих уравнению Дирака:

$$\gamma^0 v_\zeta^{(\pm)}(-p)=\pm v_\zeta^{(\pm)}(p), \qquad (3.4.62)$$

$$\gamma^5 C^{-1} v_\zeta^{(\pm)}(-p)=\pm i(-1)^{\frac{1}{2}+\zeta}\,v_\zeta^{(\pm)}(p), \qquad (3.4.63)$$

$$C\tilde{v}_\zeta^{(\pm)}(p)\equiv v_\zeta^{C(\pm)}(p)=(-1)^{\frac{1}{2}+\zeta}\,v_\zeta^{(\mp)}(p), \qquad (3.4.64)$$

а затем воспользоваться антиунитарностью оператора $U(I_t)$ и унитарностью операторов $U(I_s)$ и $U(I_C)$. При выводе формул (3.4.62) — (3.4.64) удобно проверить их сначала в представлении (2.4.31), в котором матрица γ^0 диагональна. В этом представлении спиноры v имеют вид (ср. (2.4.55))

$$\begin{gathered}
v_\zeta^{(+)}(p)=\frac{1}{N}\begin{pmatrix}\omega+m & e_\zeta\\ p\sigma & e_\zeta\end{pmatrix},\qquad \bar v_\zeta^{(+)}(p)=\frac{1}{N}\begin{pmatrix}\omega+m & e_\zeta\\ -\overline{p\sigma} & e_\zeta\end{pmatrix},\\
v_\zeta^{(-)}(p)=\frac{1}{N}\begin{pmatrix}p\sigma & e_{-\zeta}\\ \omega+m & e_{-\zeta}\end{pmatrix},\qquad \bar v_\zeta^{(-)}(p)=\frac{1}{N}\begin{pmatrix}\overline{p\sigma} & e_{-\zeta}\\ -\omega-m & e_{-\zeta}\end{pmatrix},\\
N^2=2m(\omega+m),\quad e_{1/2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad e_{-1/2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.
\end{gathered}\tag{3.4.65}$$

Затем нетрудно убедиться непосредственно, что формулы (3.4.62) — (3.4.64) не зависят от выбора представления.

Сделаем несколько замечаний по поводу законов дискретных преобразований. В то время как оператор зарядового сопряжения спинора (2.4.25) антиунитарен, «вторично квантованный» оператор $U(I_C)$ (3.4.58), (3.4.61) унитарен. Унитарность оператора $U(I_C)$, определенного из (3.4.61), может быть получена как следствие из требования инвариантности перестановочных соотношений (3.4.39) относительно зарядового сопряжения. При проверке инвариантности перестановочных соотношений используется равенство

$$C^{-1}S(x-y)\,C=-S^T(y-x),\tag{3.4.66}$$

доказательство которого мы предоставляем читателю.

Наоборот, чтобы сохранить инвариантность перестановочных соотношений относительно отражения времени, необходимо потребовать, чтобы оператор $U(I_t)$, определенный из (3.4.60), был антиунитарным, что приводит к (3.4.57). Мы уже познакомились в гл. 2, п. 3.3 с иным, более общим обоснованием антиунитарности оператора $U(I_t)$ (исходя из требования положительности энергии физических состояний). Из (3.4.59) и (3.4.60) мы видим, что, в то время как пространственное отражение приводит лишь к изменению знака трехмерного импульса частицы, при отражении времени меняется знак как у импульса p, так и у проекции спина ζ. Произведение всех трех операторов $U(I_s)$, $U(I_C)$, $U(I_t)$ (так называемый TPC-оператор) приводит, со своей стороны, к замене частицы на античастицу с тем же импульсом и противоположным спином.

Из свойств преобразования спинорных полей легко найти при дискретных трансформациях поведение билинейных комбинаций типа $\bar\psi O\psi$, которые имеют непосредственный физический смысл. Например, оператор электрического тока задается в виде нормального произведения

$$j_\mu(x) = -e\colon \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\colon. \tag{3.4.67}$$

(Напомним, см. [4], что *нормальное произведение спинорных полей* определяется таким образом, что все операторы рождения в произведении стоят слева от всех операторов уничтожения, а необходимые перестановки выполняются так, как будто все *антикоммутаторы* равны нулю.)

Упражнение 3.4.12. Показать, что

$$U(I_C)\,j_\mu(x)\,U^{-1}(I_C) = -j_\mu(x), \tag{3.4.68}$$

$$U(I_t)\,j_\mu(x)\,U^{-1}(I_t) = g_{\mu\mu}j_\mu(I_t x), \tag{3.4.69}$$

$$U(I_s)\,j_\mu(x)\,U^{-1}(I_s) = g_{\mu\mu}j_\mu(I_s x). \tag{3.4.70}$$

До сих пор мы рассматривали дискретные преобразования несколько формально, задавая лишь законы преобразования квантованных полей. Возникает вопрос: существуют ли действительно операторы $U(I_s)$, $U(I_C)$ и $U(I_t)$, удовлетворяющие соотношениям (3.4.56)—(3.4.58), в какой мере они определяются этими соотношениями и как они действуют на векторы состояния?

Если удовлетворяется условие полноты VII (п. 1.3), то нетрудно сконструировать операторы U, удовлетворяющие еще добавочному условию инвариантности вакуума:

$$U(I_s)\Psi_0 = U(I_t)\Psi_0 = U(I_C)\Psi_0 = \Psi_0. \tag{3.4.71}$$

Действительно, в силу VII любой вектор в $\mathscr{H}$ может быть аппроксимирован линейной комбинацией векторов вида

$$\Phi_n = \int \ldots \int \psi^{\lambda_1}(x_1) \ldots \psi^{\lambda_n}(x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, d^4x_1 \ldots d^4x_n \Psi_0,$$

где $\lambda_j = \pm 1$, $\psi^{+1}(x) \equiv \psi(x)$, $\psi^{-1}(x) \equiv \bar{\psi}(x)$. Действие операторов U на вектор Φ_n задается в силу (3.4.71) формулой

$$U\Phi_n = \int \ldots \int f'(x_1, \ldots, x_n)\, U\psi^{\lambda_1}(x_1)\, U^{-1} \ldots$$
$$\ldots U\psi^{\lambda_n}(x_n)\, U^{-1} d^4x_1 \ldots d^4x_n \Psi_0,$$

где $f' = f$ для $U(I_s)$ и $U(I_C)$ и $f' = \bar{f}$ для $U(I_t)$.

Операторы U, определенные таким образом на всюду плотном множестве Ω, могут быть продолжены по непрерывности во всем пространстве $\mathscr{H}$ и являются унитарными (антиунитарными) операторами.

Приведенное рассуждение показывает также, что при дополнительном условии (3.4.71) операторы U определяются однозначно законами преобразования полей. Возникает вопрос, в какой мере требование (3.4.71) независимо от остальных, или, другими словами, какой произвол остается при определении операторов U, если предполагать лишь, что имеет место (3.4.56)—(3.4.58). Оказывается, что в этом случае каждый из операторов определен с точностью до фазового множителя. Убедимся в этом на примере оператора $U(I_s)$.

Прежде всего, используя (3.4.56) и (3.1.6), находим

$$\left[\psi^{\lambda}(x),\ U(I_s)\,U(\underset{\sim}{a},\ A)\,U^{-1}(I_s)\,U^{-1}\left(\underset{\sim}{I_s a},\ I_s A I_s^{-1}\right)\right]=0, \tag{3.4.72}$$

где

$$\underset{\sim}{I_s a}=\tilde{a}=\varepsilon\tilde{a}\varepsilon^{-1},\quad I_s A I_s^{-1}\equiv\varepsilon\bar{A}\varepsilon^{-1}=A^{*-1}\quad (\lambda=\pm 1,\ A\in SL(2)). \tag{3.4.73}$$

Отсюда в силу неприводимости поля (теорема 3.1.1) следует, что

$$U(I_s)\,U(\underset{\sim}{a},\ A)\,U^{-1}(I_s)\,U^{-1}\left(\underset{\sim}{I_s a},\ I_s A I_s^{-1}\right)=\omega 1, \tag{3.4.74}$$

где $|\omega|=1$. Умножая справа (3.4.74) на $U\left(\underset{\sim}{I_s a},\ I_s^{-1} A I_s\right)U(I_s)$ и применяя обе стороны полученного равенства к вакууму, находим

$$U\left(\underset{\sim}{I_s a},\ I_s A I_s^{-1}\right)U(I_s)\,\Psi_0=\omega^{-1}U(I_s)\,\Psi_0. \tag{3.4.75}$$

Формула (3.4.75) показывает, что вектор $U(I_s)\Psi_0$ инвариантен относительно собственной группы Пуанкаре. Однако согласно принципу спектральности (гл. 2, п. 3.2) вакуум есть единственное инвариантное состояние. Поэтому

$$U(I_s)\,\Psi_0=e^{i\alpha}\Psi_0. \tag{3.4.76}$$

Подставляя этот результат в (3.4.75), мы убеждаемся, что $\omega=1$, т. е., таким образом,

$$U(I_s)\,U(\underset{\sim}{a},\ A)\,U^{-1}(I_s)=U\left(\underset{\sim}{I_s a},\ I_s A I_s^{-1}\right). \tag{3.4.77}$$

Зная действие оператора $U(I_s)$ на вакуум (формула (3.4.76)) и пользуясь (3.4.56), находим, как и выше, действие $U(I_s)$ на все векторы Ω, а затем по непрерывности продолжаем его на все гильбертово пространство $\mathscr{H}$.

Полученные результаты могут быть обобщены следующей теоремой.

Теорема 3.4.1. *Пусть в теории спинорного поля (с единственным циклическим вакуумом Ψ_0) имеется унитарный опера-*

тор $U(I_s)$, удовлетворяющий (3.4.56). Тогда оператор $U(I_s)$ определен с точностью до фазового множителя $e^{i\alpha}$, причем его действие на вакуум определяется формулой (3.4.76). Далее, если $(\underset{\sim}{a}, A) \in \mathfrak{P}_0$, а автоморфизм $(\underset{\sim}{a}, A) \to (\widetilde{I_s a}, I_s A I_s^{-1})$ этой группы задан формулой (3.4.73), то имеет место (3.4.77). Если оператор $U(I_s)$ удовлетворяет добавочному условию (3.4.71), то он определен однозначно.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать выполненным условие инвариантности вакуума (3.4.71).

Упражнение 3.4.13. а) Пользуясь (3.4.59) — (3.4.61) и (3.4.71), показать, что если спинорное поле неприводимо, то

$$U^2(I_C) = U^4(I_t) = [U(I_C)\,U(I_s)]^4 = [U(I_t)\,U(I_s)]^4 = 1. \tag{3.4.78}$$

б) Показать, что для того, чтобы $U(I_C)$ коммутировало с $U(I_s)$, необходимо и достаточно, чтобы η_s было чисто мнимым, так что

$$\eta_s^2 = -1. \tag{3.4.79}$$

При этом наряду с условием

$$[U(I_C),\ U(I_s)] = 0 \tag{3.4.80}$$

выполняется и равенство

$$U^4(I_s) = 1. \tag{3.4.81}$$

в) Показать, что для того, чтобы $U(I_C)$ коммутировало с $U(I_t)$, необходимо и достаточно, чтобы произведение $\eta_C\eta_t$ было вещественным, так что

$$\eta_t^2\eta_C^2 = 1. \tag{3.4.82}$$

Тогда к тождествам (3.4.78) добавляется еще равенство

$$[U(I_C)\,U(I_t)]^2 = 1. \tag{3.4.83}$$

Если операторы $U(I_s)$, $U(I_t)$ и $U(I_C)$ должны интерпретироваться как физические преобразования P, T и C, то их квадраты и квадраты любого их произведения должны быть кратными единичному оператору в любом когерентном подпространстве, поскольку двукратное применение любого из этих преобразований эквивалентно тождественному преобразованию. Вообще говоря, это требование приводит к новым правилам суперотбора (см. гл. 2, п. 1.3). Однако при выборе фазовых множителей согласно (3.4.79) и (3.4.82) это не так. Действительно, нетрудно видеть, что в этом случае

$$(U(I_C)\,U(I_s))^2 = U^2(I_s) = \begin{cases} 1 & \text{для состояний с целым полным спином,} \\ -1 & \text{для состояний с полуцелым спином.} \end{cases} \tag{3.4.84}$$

С другой стороны, всегда

$$U^2(I_C)=1,\ [U(I_t)U(I_s)]^2=(U(I_t)U(C))^2=$$
$$=[U(I_C)U(I_s)U(I_t)]^2=U^2(I_t)=\begin{cases}1 & \text{для состояний с целым спином,}\\ -1 & \text{для состояний с полуцелым спином.}\end{cases} \qquad (3.4.85)$$

В дальнейшем мы будем придерживаться именно этого соглашения при выборе фазовых множителей. Заметим, что дальнейшее уточнение этих множителей не является необходимым, так как различным выборам фаз, удовлетворяющим (3.4.79) и (3.4.82), соответствует одна и та же физическая теория.

Например, теория, в которой $\eta_s=i$, не отличается от теории $\eta_s'=-i$. Это следует из того, что в данном случае существует оператор $R=U(\underset{\sim}{a}=0,\ A=-1)$, соответствующий вращению на угол 2π вокруг третьей оси, кратный единичному оператору как в подпространстве состояний с целым спином (где $R=1$), так и в подпространстве состояний с полуцелым спином (где $R=-1$) и такой, что $U'(I_s)=RU(I_s)$. (Оператор R принадлежит центру группы $\tilde{\mathfrak{P}}$, т. е. коммутирует со всеми операторами этой группы.) Однако отношение коэффициентов η_s для двух разных спинорных полей является наблюдаемой величиной и называется *относительной четностью* спиноров. В силу (3.4.56) и (3.4.79) относительная четность дираковых сопряженных спиноров Ψ и $\tilde{\Psi}$ равна всегда -1.

Более детальное рассмотрение этого вопроса находится в монографии [2], §§ 3—5.

Заметим, что класс операторов U, определяемых соотношениями (3.4.56)—(3.4.58), не исчерпывает всех представлений дискретных операций I_s, I_t и I_C в случае системы спинорных полей. Так, для системы двух спинорных полей можно найти неприводимое представление этих трех операций в пространстве, в котором эти два спинора объединены в один восьмикомпонентный спинор, что соответствует, в частности, изотопической симметрии (см., например, Огиевецкий и Чжоу Гуан Чжао (1949), а также Ли и Вик (1966)).

4.5. Обобщенные свободные поля. Представление Челлена—Лемана. Две характерные черты свободного поля особенно упрощают его изучение. Во-первых, коммутатор свободного бозонного поля $[\varphi(x), \varphi(y)]$ есть число (т. е. он кратен единичному оператору в пространстве Фока); во-вторых, он зависит лишь от разности аргументов x и y. Спрашивается, нельзя ли построить физически нетривиальную теорию, в которой сохранялось бы по крайней мере одно из этих свойств? Ответ на этот вопрос отрицателен. Оказывается, что если потребовать, чтобы коммутатор поля (например, скалярного) был кратен единичному оператору, без предположения, что это поле удовлетворяет какому бы то ни было уравнению, то можно показать, что оно, по сути дела, является суперпозицией свободных полей. Это дает основание назвать такое поле *обобщенным свободным полем* (Гринберг (1961)). Причина физической тривиальности обобщенного свободного поля кроется в том, что его двойной коммутатор тождественно равен нулю. Тем не менее изучение обобщенных свободных полей представляет некоторый теоретический интерес хотя бы потому, что дает указание на то, чего нужно избегать при поисках нетривиальной теории.

Прежде всего, можно убедиться, что упомянутые выше два характерных свойства свободного поля эквивалентны между собой.

Упражнение 3.4.14. Показать, что коммутатор обобщенного свободного поля $\varphi(x)$, который, по определению, является числовой функцией $C(x, y)$, зависит лишь от разности аргументов x и y, если поле φ трансляционно-инвариантно.

Обратное утверждение несколько менее тривиально.

Теорема 3.4.2. *Если локальное поле* $\varphi(x)$ *неприводимо и*

$$[\varphi(x),\ \varphi(y)] = B(x-y), \tag{3.4.86}$$

то оператор $B(x)$ *кратен единичному, т. е.* $\varphi(x)$ — *обобщенное свободное поле.*

Доказательство. Пусть точка z пространственноподобно расположена относительно x и y. Тогда в силу тождества Якоби

$$[\varphi(z),\ [\varphi(x),\ \varphi(y)]] + [\varphi(x),\ [\varphi(y),\ \varphi(z)]] + \\ + [\varphi(y),\ [\varphi(z),\ \varphi(x)]] = 0 \tag{3.4.87}$$

и локальности поля φ находим

$$[\varphi(z),\ B(x-y)] = 0. \tag{3.4.88}$$

Покажем, что на самом деле равенство (3.4.88) справедливо при любом расположении точек x, y и z. Действительно, выбирая пространственноподобный вектор a достаточно большим по абсолютной величине, можно добиться, чтобы векторы $x+a-z$ и $y+a-z$ были пространственноподобными, какими бы ни были фиксированные векторы x, y и z. В силу того, что B зависит лишь от разности $x-y$, равенство (3.4.88) справедливо и в этом случае. Остается воспользоваться неприводимостью поля φ (см. п. 1.3), чтобы заключить отсюда, что оператор $B(x-y)$

кратен единичному и, значит, $\varphi(x)$ — обобщенное свободное поле. Теорема доказана.

Итак, коммутатор скалярного обобщенного свободного поля может быть записан в виде

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \frac{1}{i}\Delta(x-y) \tag{3.4.89}$$

(множитель — i введен для удобства — ср. (3.4.2)). Из (3.4.89) непосредственно следует, что обобщенная функция $\Delta(x)$ нечетна: $\Delta(x) = -\Delta(x)$. Посмотрим, какие условия на эту функцию накладывают требования лоренц-инвариантности и положительной определенности метрики в пространстве векторов состояния.

Упражнение 3.4.15. Показать, что из релятивистской инвариантности обобщенного свободного поля следует его локальность. Указание: из нечетности и лоренц-инвариантности функции Δ вывести, что

$$\Delta(x-y) = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0. \tag{3.4.90}$$

Совершенно аналогично из нечетности и инвариантности фурье-образа $\tilde{\Delta}(p)$ функции $\Delta(x)$ следует, что

$$\tilde{\Delta}(p) = 0 \quad \text{при} \quad p^2 < 0. \tag{3.4.91}$$

Условие (3.4.91) следует еще и из требования спектральности, которое, таким образом, тоже не является полностью независимым требованием по отношению к обобщенному свободному полю.

Функция $\Delta(x-y)$ просто связана со второй функцией Уайтмана $w_2(x, y) = F_2(x-y)$:

$$\frac{1}{i}\Delta(x-y) = (\Psi_0, [\varphi(x), \varphi(y)]\Psi_0) = F_2(x-y) - F_2(y-x). \tag{3.4.92}$$

Согласно п. 2.2 (формула (3.2.25)) из положительности метрики в пространстве векторов состояния следует, что преобразование Фурье $\tilde{F}_2(p)$ функции $F_2(x)$ является неотрицательной обобщенной функцией. Отсюда следует, что

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varepsilon(p^0)\, e^{-ipx}\, d\mu(p), \tag{3.4.93}$$

где $\mu(p)$ — положительная (четная) инвариантная мера умеренного роста, сосредоточенная внутри светового конуса. Согласно гл. 1, п. 3.5

$$d\mu(p) = \int\limits_{\lambda=0}^{\infty} \delta(p^2-\lambda)\, d\sigma(\lambda)\, d^4p, \tag{3.4.94}$$

где $\sigma(\lambda)$ — монотонно неубывающая функция умеренного роста. Подставляя (3.4.94) в (3.4.93), получим

$$\Delta(x) = \int_0^\infty D_{\sqrt{\lambda}}(x)\, d\sigma(\lambda), \tag{3.4.95}$$

где $D_{\sqrt{\lambda}}(x)$ — перестановочная функция Паули — Иордана (3.4.3). Формула (3.4.95) называется *представлением Челлена — Лемана* для вакуумного среднего от коммутатора полей. Из вывода ясно, что это представление справедливо в любой теории, в которой выполняются требования релятивистской инвариантности и положительной определенности метрики в пространстве векторов состояний. Отличие рассматриваемого здесь случая обобщенных свободных полей состоит в том, что для них, в силу (3.4.89), представление (3.4.95) имеет место для самого коммутатора, а не только для его среднего по вакууму.

Упражнение 3.4.16. Показать при тех же предположениях, при которых было получено представление Челлена — Лемана (3.4.95), что справедливо аналогичное представление для функции Уайтмана w_2:

$$w_2(x, y) = w_1^2 + \frac{1}{i}\int_0^\infty D_m^{(-)}(x-y)\, d\rho(m^2), \tag{3.4.96}$$

где $D_m^{(-)}(x)$ задается формулой (3.4.25). (Указание: взять преобразование Фурье от (3.2.26).)

Пространство векторов состояний в теории скалярного обобщенного свободного поля может быть реализовано по аналогии с пространством Фока для нейтральных мезонов с фиксированной массой (гл. 2, п 5.1). Отличие происходит из-за того, что в пространстве одночастичных состояний $\mathscr{H}_1$ скалярное произведение задается не формулой (2.5.7), а более общей формулой

$$(\Phi_1, \Psi_1) = \int \Phi_1(p)\,\Psi_1(p)\, d\mu(p)\,\theta(p^0) =$$

$$= \int_{\lambda=0}^\infty d\sigma(\lambda) \int_{V_{\sqrt{\lambda}}^+} \Phi_1(p)\,\Psi_1(p) \frac{d^3p}{2\sqrt{\lambda+p^2}}. \tag{3.4.97}$$

Вообще говоря, в инвариантную меру $d\mu(p)$ наряду с интегралом (3.4.94) необходимо включить еще слагаемое вида $\delta(p)\,d^4p$ (см. (3.2.26)). От этого члена можно во всяком случае освободиться, если потребовать, чтобы вакуумное среднее от одного свободного поля исчезало:

$$w_1 = (\Psi_0,\ \varphi(x)\Psi_0) = 0. \tag{3.4.98}$$

Имея пространство $\mathscr{H}_1$, мы можем определить (гл. 2, п. 5.1) пространство $\mathscr{H}_n$ n-частичных состояний как симметризованную n-ю степень пространства $\mathscr{H}_1$. Действие обобщенного свободного поля $\varphi(f)$ определяется тогда формулой (ср. (3.4.5))

$$(\varphi(f)\Psi)_n(p_1, \ldots, p_n) = \sqrt{\pi}\left\{\sqrt{n+1}\int d\mu(p)\tilde{f}(p)\Psi_{n+1}(p, p_1, \ldots, p_n) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\tilde{f}(-p_j)\Psi_{n-1}(p_1, \ldots, \widehat{p}_j, \ldots, p_n)\right\}. \tag{3.4.99}$$

Упражнение 3.4.17. а) Показать, что поле (3.4.99) удовлетворяет перестановочному соотношению (3.4.89).

б) Разложить, пользуясь (3.4.94), обобщенное свободное поле (3.4.99) в интеграл по полям с определенной массой $\sqrt{\lambda}$ (Лихт (1963), Уайтман (1964б)).

Из (3.4.99) и (3.4.94) видно, что фурье-образ $\tilde{\varphi}(p)$ обобщенного свободного поля φ исчезает при пространственноподобных импульсах. Оказывается, что это свойство характерно для обобщенного свободного поля. А именно, справедлива следующая теорема (Гринберг (1962)):

Теорема 3.4.3. *Пусть $\varphi(x)$ — скалярное локальное поле, относительно которого вакуум цикличен. Тогда, если фурье-образ $\tilde{\varphi}(p)$ поля равен нулю в некотором открытом множестве пространственноподобных p, то φ является обобщенным свободным полем. Аналогичный результат справедлив, если спектральная мера $d\sigma(p)$, входящая в представление Челлена — Лемана, равна нулю при p^2, большем некоторого M^2.*

Для доказательства этой теоремы необходимо воспользоваться представлением Иоста — Лемана — Дайсона (см. Иост и Леман (1957) и Дайсон (1958б)) или методами аналитического расширения (см., например, [24]). Мы его приводить не будем.

Отметим в заключение, что к обобщенным свободным полям сводятся и более общие, на первый взгляд, поля, коммутатор которых выражается линейно по операторам поля («поля типа Ли»):

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \frac{1}{i}\Delta(x-y) + \frac{1}{i}\int b\left(x-y,\ \frac{x+y}{2} - z\right)\varphi(z)\,d^4z. \tag{3.4.100}$$

Мы не будем останавливаться на этих полях, отсылая читателя к лекциям Уайтмана (1964б) и к статье Робинсона (1964).

ДОПОЛНЕНИЕ

А. СВОДКА ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА И ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться сингулярными перестановочными функциями свободных полей, с которыми мы имели дело в этой главе. Поэтому, для удобства читателя, мы приведем здесь сводку этих функций вместе с основными их свойствами*).

1) Функции скалярного поля.

Перестановочная функция Паули — Иордана $D(x)=D_m(x)$:

$$(\Box+m^2)D(x)=0,\qquad D(0,\boldsymbol{x})=0,\qquad \frac{\partial D}{\partial t}(0,\boldsymbol{x})=\delta(\boldsymbol{x}),\tag{3.A.1}$$

$$\begin{aligned}D(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int\varepsilon(p^0)\,\delta(p^2-m^2)\,e^{ipx}\,d^4p=\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sin\omega_p x^0 e^{-ipx}\frac{d^3p}{\omega_p}=\\&=\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\,\delta(x^2)-\frac{m}{4\pi\sqrt{x^2}}\varepsilon(x^0)\,\theta(x^2)\,J_1\left(m\sqrt{x^2}\right),\end{aligned}\tag{3.A.2}$$

$$[\varphi(x),\ \varphi(y)]=\frac{1}{i}D(x-y).\tag{3.A.3}$$

Частотные функции Паули — Иордана $D^{(\pm)}(x)=D_m^{(\pm)}(x)$ *и четная инвариантная функция* $D^{(1)}(x)$:

$$\begin{aligned}D^{(\pm)}(x)&=\frac{\pm 1}{(2\pi)^3 i}\int e^{ipx}\theta(\pm p^0)\,\delta(p^2-m^2)\,d^4p=\\&=\frac{1}{4\pi}\varepsilon(x^0)\,\delta(x^2)\mp\frac{mi}{8\pi\sqrt{x^2}}\theta(x^2)\left[N_1\left(m\sqrt{x^2}\right)\mp i\varepsilon(x^0)\,J_1\left(m\sqrt{x^2}\right)\right]\pm\\&\pm\frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-x^2}}\theta(-x^2)\,K_1\left(m\sqrt{-x^2}\right);\end{aligned}\tag{3.A.4}$$

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle=\frac{1}{i}D^{(-)}(x-y);\tag{3.A.5}$$

$$(\Box+m^2)D^{(\pm)}(x)=0,\qquad D^{(+)}(x)+D^{(-)}(x)=D(x);\tag{3.A.6}$$

$$D^{(1)}(x)=i\left(D^{(+)}(x)-D^{(-)}(x)\right)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\delta(p^2-m^2)\,e^{ipx}\,d^4p.\tag{3.A.7}$$

---

*) Эта сводка заимствована из монографии [4].

Причинная функция Грина $D^c(x) = D^c_m(x)$:

$$(\Box + m^2)\, D^c(x) = \delta(x), \tag{3.A.8}$$

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ipx}}{m^2 - p^2 - i0}\, d^4p = \\ = \frac{1}{4\pi}\,\delta(x^2) - \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}}\,\theta(x^2)\left[J_1\left(m\sqrt{x^2}\right) - iN_1\left(m\sqrt{x^2}\right)\right] + \\ + \frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-x^2}}\,\theta(-x^2)\,K_1\left(m\sqrt{-x^2}\right); \tag{3.A.9}$$

$$\langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle = \frac{1}{i}\, D^c(x-y). \tag{3.A.10}$$

Запаздывающая и опережающая функции Грина D^{ret} *и* D^{adv}:

$$(\Box + m^2)\, D^{ret}(x) = (\Box + m^2)\, D^{adv}(x) = \delta(x), \tag{3.A.11}$$

$$D^{ret}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0, \qquad D^{adv}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^0 > 0, \tag{3.A.12}$$

$$D^{\substack{ret\\adv}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ipx}}{m^2 - p^2 \pm i\varepsilon p^0}\, d^4p = \\ = \frac{1}{2\pi}\,\theta(\pm x^0)\left\{\delta(x^2) - \theta(x^2)\, J_1\left(m\sqrt{x^2}\right)\right\}; \tag{3.A.13}$$

$$\begin{gathered} D^{\substack{ret\\adv}}(x) = D^c(x) \pm D^{(\pm)}(x), \\ D^{ret}(x) - D^{adv}(x) = D(x). \end{gathered} \tag{3.A.14}$$

Здесь всюду J_1 — функции Бесселя

$$\begin{gathered} J_1(z) = \frac{z}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \qquad N_1(z) = 2J_1(z)\ln\frac{z}{2} - \frac{2}{z}, \\ K_1(z) = -\frac{\pi}{2}\left(J_1(iz) + iN_1(iz)\right). \end{gathered} \tag{3.A.15}$$

2) Функции спинорного поля.

Функции спинорного поля $S^Z_{\alpha\beta}(x)$, где $Z = \text{ret}, adv, \pm, c$, получаются из соответствующих функций скалярного поля по формуле

$$S^Z_{\alpha\beta}(x) = (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta}\, D^Z(x). \tag{3.A.16}$$

Функции $S^Z_{\alpha\beta}$ являются соответственно решениями или функциями Грина уравнения Дирака.

3) Связь с обозначениями Швингера и Швебера см. [6].

Использованные обозначения	Обозначения Швингера
$D(x)$	$-\Delta(x)$
$D^{(\mp)}(x)$	$-\Delta^{(\pm)}(x)$
$D^{(i)}(x)$	$\Delta^{(1)}(x)$
$D^{c}(x)$	$\Delta_{+}(x)$ или $\Delta_{F}(x)$

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Содержание этой главы во многом перекрывается с превосходными монографиями [2] и [3], написанными творцами квантовополевого аксиоматического подхода.

§ 1. Излагаемый здесь подход к понятию локального квантованного поля принадлежит главным образом Уайтману. Основной публикацией по этому вопросу является статья Уайтмана и Гординга (1964), которая на самом деле соответствует работе, начатой в 1952 г. и частично изложенной в статьях и лекциях Уайтмана и др. (см., в частности, Уайтман (1957), и [3]). Выявление физического смысла требования локальности восходит к Бору и Розенфельду (1933) и (1950). Обсуждение независимости аксиом см. у Хаага и Шроера (1962). Теорема 3.1.1 о неприводимости системы полей $\varphi_\tau(f)$ принадлежит Рюелю (1962) и Борхерсу (1962). Доказательство теоремы 3.1.2 о полноте системы полей $\varphi_\tau(f)$, где $\operatorname{supp} f \subset O$, см. в оригинальной работе Рее и Шлидера (1961), а также в монографиях [2] и [3]. Вопрос о локализации в квантовой теории поля рассматривается во многих работах, из которых мы упомянем статью Лихта (1963). Не вдаваясь в обсуждение многочисленных попыток выйти за рамки локальной теории, мы отметим, что некоторые из них связаны с более общей формулировкой постулата релятивистской инвариантности (см., например, Инграхам (1962), Блохинцев и Колеров (1964) и доклады в сборнике [Дубна 67]). Относительно понятия почти локального поля и его применения см. Стритер (1964).

§ 2. Формулировка квантовой теории поля в терминах вакуумных средних от произведений операторов поля дана Уайтманом (1956). Аналогичная формулировка имеется в работе Шмидта и Баумана (1956), в которой, однако, игнорируется то, что сглаженные операторы поля не ограничены и что поэтому следует говорить об их общей области определения Ω и о ее свойствах. Систематический обзор результатов до 1960 г. содержится в статье Араки (1961а). Роль условия единственности вакуума и его связь со свойством разложения на пучки указаны в статье Хеппа и др. (1961); см. также Борхерс (1962) и Рее и Шлидер (1962). Вопрос о существовании и роли вакуумного состояния обсуждается у Борхерса и др. (1963) и (1965б). Теорема о разложении на пучки доказана в разных вариантах в работах Араки (1960а), Иоста и Хеппа (1962), Рюеля (1962) (которой мы следовали) и Араки и др. (1962), где имеется подробное обсуждение случая отсутствия массовой щели (т. е. наличия частиц нулевой массы). Доказательство несуществования локального трансляционно инвариантного поля, заданного в точке, дано Уайтманом (1964а). Доказанная в п. 2.4 теорема о несуществовании в теории с единственным вакуумом пуанкаре-инвариантного поля в точке принадлежит Визимирски (1966).

§ 3. Теорема о восстановлении квантовой теории поля по вакуумным средним от произведений полей доказана Уайтманом (1956) и Шмидтом и Бауманом (1956). Наше изложение следует более поздним работам Ульмана

(1962) и Борхерса (1962) (относительно дальнейшего развития изложенных вопросов см. Борхерс и др. (1963) и Борхерс (1965а, б). Некоторое математическое обобщение постановки Борхерса содержится в работах Морэна (1963а, б).

§ 4. Стандартное изложение теории свободных полей имеется в любом учебнике квантовой теории поля (см., в частности, [4] и [6]). Математически строгая формулировка этой теории дана в монографии Фридрихса [46], в статье Рашевского (1958), в которой специально рассматривается случай квантовой электродинамики, и в монографии Кастлера [37]. Компактное изложение результатов этого параграфа с точки зрения лагранжева формализма содержится во второй главе монографии Иоста [3]. Теория полей с высшими спинами затрагивается в монографиях [38] и [39]. Преобразование спиноров при дискретных преобразованиях специально рассматривается в книге [28]. Общее рассмотрение мультипликативных симметрий в аксиоматической квантовой теории поля см. в статье Пруговечки (1964). Подробное изучение значения фаз в законах преобразования полей относительно инверсий см. у Файнберга и Вайнберга (1959). Математическое рассмотрение связи зарядового сопряжения и других дискретных симметрий с градиентными преобразованиями, соответствующими сохранению барионного и лептонного зарядов (на основе теории расширения групп), см. у Мишеля (1962). Обобщенные свободные поля введены Гринбергом (1961), см. также лекции Уайтмана (1962). Спектральное представление функции Грина получено в общем случае Камефучи и Умэдзава (1951), Челленом (1952) и Леманом (1954) (см. также Челлен (1960) и (1968) и Штейнман (1963б)). Представление Челлена — Лемана находит ряд важных применений. В качестве примера укажем на то, что суммирование некоторых диаграмм Фейнмана под знаком спектрального представления позволяет избежать появления нефизических особенностей в функциях Грина (см. Боголюбов и др. (1959)). Интегралы по массе от свободных полей рассматривались Лихтом (1963). Относительно «полей типа Ли» см. Уайтман (1964б) и Робинсон (1964) и цитированную там литературу. Условия на носитель поля в p-пространстве, при которых это поле является обобщенным свободным, впервые сформулированы Дел'Антонио (1961а). Теорема 3.4.3 доказана Гринбергом (1962) и Робинсоном (1962). При ее доказательстве используется представление Иоста — Лемана — Дайсона (Иост и Леман (1957), Дайсон (1958а и б)), полное доказательство которого дано в монографии [24].

ГЛАВА 4

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ И ТЕОРИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ S-МАТРИЦЫ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Первый параграф посвящен доказательству следующих двух теорем Хаага — Рюеля.

Пусть $\varphi(x)$ *— скалярное гайзенбергово поле, для которого вторая функция Уайтмана допускает представление Челлена — Лемана вида*

$$(\Psi_0,\ \varphi(x)\,\varphi(y)\,\Psi_0)=\frac{1}{i}\,D_m^{(-)}(x-y)+\frac{1}{i}\int\limits_{4m^2}^{\infty}D_{\sqrt{\lambda}}^{(-)}(x-y)\,d\rho(\lambda).$$

Определим, далее, оператор $A(f,\ t)$ *формулой*

$$A(f,\ t)=i\int\limits_{x^0=t}f(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0}A(x)\,d^3\boldsymbol{x}\equiv$$

$$\equiv i\int\limits_{x^0=t}\left\{f(x)\,\frac{\partial A(x)}{\partial x^0}-\frac{\partial f(x)}{\partial x^0}\,f(x)\right\}d^3\boldsymbol{x},$$

где $f(x)$ *— гладкое решение уравнения Клейна — Гордона* $(\Box+m^2)f(x)=0$, а $\tilde{A}(p)=h(p^2)\,\tilde{\varphi}(p)$. Здесь $h(\lambda)$ *— финитная основная функция,* $h(m^2)=1$ и $h(p^2)=0$ при $|p^2-m^2|>m^2$. *Тогда векторные функции времени*

$$\Phi(t)=A(f_1,\ t)\ \ldots\ A(f_n,\ t)\,\Psi_0$$

стремятся к определенным, не зависящим от системы отсчета пределам $\Phi^{\substack{out\\in}}(f_1,\ \ldots,\ f_n)$ *при* $t\to\pm\infty$ *(теорема 4.1.1). Существуют свободные скалярные поля* $\varphi^{ex}(x)$ *массы* m, $ex=in,\ out$ *такие, что если*

$$\varphi^{ex}(f)=i\int\limits_{x^0=t}f(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\varphi^{ex}(x)\,d^3\boldsymbol{x},$$

где $f(x)$ *— отрицательно-частотное гладкое решение* *уравнения Клейна — Гордона с массой m, то $\varphi^{ex}(f)\Phi^{ex}(f_1, \ldots, f_n) = \Phi^{ex}(f, f_1, \ldots, f_n)$ (теорема 4.1.2). Постулируется* (п. 1.5), *что система асимптотических состояний Φ^{in} (так же, как Φ^{out}) полна.*

Если оператор $\varphi(f, t)$, где f — отрицательно-частотное нормированное решение уравнения $(\Box + m^2) f(x) = 0$, связан с гайзенберговым полем $\varphi(x)$ формулой типа (4.1.11), *то асимптотическое условие Лемана — Симанзика — Циммермана (ЛСЦ) имеет вид*

$$\lim_{t \to \pm\infty} (\Phi, \varphi(f, t)\Psi) = \left(\Phi, \varphi^{\substack{out \\ in}}(f)\Psi\right).$$

Если определить гайзенбергов ток $j(x)$ равенством

$$j(x) = (\Box + m^2)\varphi(x),$$

то имеют место уравнения Янга — Фельдмана

$$\varphi(x) = \varphi^{in}(x) + \int D_m^{ret}(x - y)\, j(y)\, d^4y = \varphi^{out}(x) + \\ + \int D_m^{adv}(x - y)\, j(y)\, d^4y.$$

Редукционная формула ЛСЦ для матричных элементов оператора рассеяния S имеет вид

$$\langle g_1 \ldots g_r^{out} | f_1 \ldots f_l^{in}\rangle = \langle g_1 \ldots g_r^{out} | S | f_1 \ldots f_l^{out}\rangle = \\ = i^{r+l} \int G^c(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_l)\, \bar{g}_1(x_1) \ldots \\ \ldots \bar{g}_r(x_r) f_1(y_1) \ldots f_l(y_l)\, d^4x_1 \ldots d^4y_l,$$

где причинная функция Грина G^c выражается через T-произведение гайзенберговых полей:

$$G^c(x_1, \ldots, x_n) = K_{x_1} \ldots K_{x_n} \langle 0 | T\{\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\} | 0\rangle,$$

$$K_x \equiv \Box_x + m^2.$$

В § 2 намечены основные этапы доказательства Хеппа этих утверждений для расходящихся пучков частиц (т. е. для состояний, в которых волновые пакеты отдельных частиц в пространстве скоростей не перекрываются).

В § 3 основные принципы локальной теории сформулированы в виде требований на вариационные производные S-оператора, рассматриваемого как функционал от асимптотических полей φ^{out}.

Связь с теорией ЛСЦ выявляется (п. 3.4) *на основе отождествления гайзенбергова тока, соответствующего полю* $\varphi(x)$, *с оператором*

$$j(x) = i\frac{\delta S}{\delta\varphi^{out}(x)}S^*.$$

Условие микропричинности: $\frac{\delta j(x)}{\delta\varphi(y)} = 0$ *при* $y < x$ *и при* $(y-x)^2 < 0$, *где* $\varphi(y) \equiv \varphi^{out}(y)$, *приводит к определенным аналитическим свойствам функций Грина вне массовой поверхности* (п. 3.7). *Для* 32 *четырехточечных функций написаны условия совпадения в импульсном пространстве, следующие из принципа спектральности, и рассмотрены следствия из четырехчленных тождеств Штейнмана.*

Из условия микропричинности вытекает равенство

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\,\delta\varphi(y)} = \\ = i\Lambda(x, y) + \theta_{xy}\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} + \theta_{yx}\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)},$$

где $\theta_{xy} = \theta(x^0 - y^0)$ — *ступенчатая функция, а* $\Lambda(x, y)$ — *квазилокальный оператор, отличный от нуля лишь при* $x = y$. *В* § 4 *дается итерационное решение этого уравнения в предположении, что*

$$\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} g^n\Lambda_n, \qquad S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(ig)^n S_n,$$

$$S_1 = \int\int :\Lambda_1(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y):\,d^4x\,d^4y$$

и что квазилокальные операторы $\Lambda_n(x, y)$ *при* $n \geqslant 2$ *определяются из условия минимальной степени роста матричных элементов в импульсном пространстве. Замечается* (п. 4.2), *что при этом возникают расходимости, связанные с умножением* θ*-функции на обобщенную функцию, сингулярную при* $x = y$. *Чтобы избежать этих трудностей, исходное уравнение записывается в другой форме, в которой функция* θ_{xy} *заменяется некоторым оператором* Θ_{xy} *с проекционными свойствами. Итерационное решение полученного модифицированного уравнения приводит к перенормированному ряду теории возмущений, причем на каждом этапе вычисления встречаются лишь определенные конечные выражения. Это* *иллюстрируется в п. 4.4 на примере теории с лагранжианом взаимодействия* $\mathcal{L} = g \int : \psi^2(x)\varphi(x): d^4x$, *где* ψ *и* φ — *скалярные поля с положительными массами, во втором порядке теории возмущений.*

§ 1. Теория рассеяния Хаага — Рюеля

1.1. Вводные замечания. Как уже отмечалось во введении, исторически аксиоматический подход в квантовой теории поля возник в сороковых годах как направление, которое ставило перед собой цель оперировать с самого начала с матрицей рассеяния, дающей вероятности нахождения асимптотически свободных частиц при $t \to \infty$ после их взаимодействия в конечных моментах времени. Между тем до сих пор понятие частицы фигурировало у нас лишь при рассмотрении релятивистских пространств Фока (гл. 2, § 5 — до введения понятия поля) и в тривиальном примере теории свободных полей (гл. 3, § 4). Спрашивается, как ввести понятие частицы в рамках аксиоматической теории гайзенберговых (взаимодействующих) полей?

Интуитивный ответ на этот вопрос состоит в том, что при $x^0 = t \to \pm\infty$ гайзенбергово поле $\varphi(x)$ должно действовать на векторы состояния как свободное поле, — в частности, действуя на вакуум, оно должно порождать одночастичное состояние с определенной массой. Долгое время было неясно, какова должна быть точная формулировка этого интуитивного представления и совместны ли асимптотические условия (при $t \to \pm\infty$) с остальными постулатами Уайтмана и в какой мере они являются независимыми требованиями. Исследование этих вопросов, предпринятое в работах Хаага (1957, 1958, 1959) (см. также статью Бренига и Хаага (1959)), нашло удовлетворительное завершение в превосходной работе Рюеля (1962).

В настоящем параграфе мы изложим некоторый упрощенный вариант теории Хаага — Рюеля, данный Йостом [3] и Хеппом (1963б). Изменения в рассуждениях, которые необходимо произвести в общем случае, лишь намечены в п. 5.

1.2. Асимптотические условия Хаага — Рюеля. Формулировка результатов. Рассмотрим для простоты случай одного скалярного нейтрального поля $\varphi(x)$ и предположим, что пространство векторов состояний $\mathcal{H}$ совпадает с пространством, описанным в гл. 2, п. 5.1. На самом деле для нас будет существенным лишь то, что оператор квадрата 4-импульса P^2 имеет изолированное собственное значение $p^2 = m^2$ и что в подпространстве одночастичных состояний $\mathcal{H}_1$ реализуется неприводимое представление группы Пуанкаре со спином нуль.

Потребуем, далее, чтобы поле φ имело отличные от нуля матричные элементы между вакуумом и $\mathscr{H}_1$. Точнее, если Π_1 — оператор ортогонального проектирования на $\mathscr{H}_1$, то мы потребуем выполнения нормировочного условия

$$(\Psi_0,\ \varphi(x)\Pi_1\varphi(y)\Psi_0) = -iD_m^{(-)}(x-y), \tag{4.1.1}$$

где $D_m^{(-)}(x)$ — отрицательно-частотная функция Паули — Иордана (3.4.25). По-другому это означает, что представление Челлена — Лемана (3.4.96) для двухточечной функции Уайтмана поля $\varphi(x)$ имеет вид

$$(\Psi_0,\ \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \frac{1}{i}D_m^{(-)}(x-y) + \frac{1}{i}\int_{4m^2}^{\infty} D_{\sqrt{\lambda}}^{(-)}(x-y)\,d\rho(\lambda) \tag{4.1.2}$$

(для нас существенно лишь то, что предел интегрирования в (4.1.2) больше m^2). Определим «почти локальное поле» $A(x)$ как преобразование Фурье от поля

$$\tilde{A}(p) = h(p^2)\tilde{\varphi}(p), \tag{4.1.3}$$

где $h(\lambda)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция со свойствами

$$h(m^2) = 1, \qquad h(p^2) = 0 \quad \text{при} \quad |p^2 - m^2| > m^2 \tag{4.1.4}$$

(на самом деле важно только то, что $h(p^2) = 0$ в области непрерывного спектра $p^2 \geqslant 4m^2$). Поле $A(x)$ удовлетворяет условиям релятивистской инвариантности и спектральности; кроме того, $A(f)\Psi_0 \in \mathscr{H}_1$ и

$$(\Psi_0,\ A(x)A(y)\Psi_0) = \frac{1}{i}D_m^{(-)}(x-y). \tag{4.1.5}$$

Покажем, что поле $A(x)$ обладает гладкостью по переменной $x^0 = t$, если его усреднить по трем пространственным координатам (этим свойством обладают также свободные поля). Другими словами, если $u(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{S}(R_3)$, то

$$A_u(t) = \int_{R_3} A(t,\ \boldsymbol{x})\,u(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x} \tag{4.1.6}$$

— оператор, определенный в плотном множестве Ω, в котором заданы поля $\varphi(f)$. Если $\Phi \in \Omega$, то вектор $A_u(t)\Phi$ тоже принадлежит множеству Ω и бесконечно дифференцируем относительно t.

Это утверждение следует из того, что

$$A_u(t) = \int f(x^0 - t,\ \boldsymbol{x})\,\varphi(x)\,d^4x, \tag{4.1.7}$$

где функция $f(x)$ задается равенством

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int \tilde{u}(p)\, h(p^2)\, e^{ipx}\, d^4p. \qquad (4.1.8)$$

Действительно, если учесть условие $\tilde{u}(p)\, h(p^2) \in \mathscr{S}(R_4(p))$, то из (4.1.8) заключаем, что при фиксированном t функция $f(x^0 - t,\ x) \in \mathscr{S}(R_4(x))$ и что она бесконечно дифференцируема по t.

Назовем решение уравнения Клейна — Гордона

$$(\Box + m^2) f(x) = 0 \qquad (4.1.9)$$

гладким, если оно удовлетворяет начальным условиям с бесконечно гладкими, быстро убывающими функциями от $\boldsymbol{x}$, т. е. если

$$f(0,\ \boldsymbol{x}) \in \mathscr{S}(R_3) \quad \text{и} \quad \dot{f}(0, \boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^0}(0,\ \boldsymbol{x}) \in \mathscr{S}(R_3).$$

Нетрудно видеть, что из этого определения следует представление $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \theta(p^0)\, \delta(p^2 - m^2)\, [e^{-ipx} g_+(p) + e^{ipx} g_-(p)]\, d^4p, \qquad (4.1.10)$$

где $g_\pm(p) \in \mathscr{S}(R_3)$. Для этого достаточно заметить, что

$$g_+(p) + g_-(p) = \frac{2\omega}{(2\pi)^{3/2}} \int f(0,\ \boldsymbol{x})\, e^{-ipx}\, d^3\boldsymbol{x},\quad g_+(p) - g_-(p) = \frac{2i}{(2\pi)^{3/2}} \int \dot{f}(0,\ \boldsymbol{x})\, e^{-ipx}\, d^3\boldsymbol{x}.$$

Из вышесказанного следует, что если $f(x)$ — гладкое решение уравнения Клейна — Гордона, то оператор

$$A(f,\ t) = i \int\limits_{x^0 = t} f(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} A(x)\, d^3\boldsymbol{x} \equiv i \int\limits_{x^0 = t} \left\{ f(x) \frac{\partial A(x)}{\partial x^0} - \frac{\partial f(x)}{\partial x^0} A(x) \right\} d^3\boldsymbol{x} \qquad (4.1.11)$$

определен на плотном множестве Ω.

Основной результат Хаага — Рюеля составляет содержание следующей теоремы.

Теорема 4.1.1. *Пусть*

$$\Phi(t) = A(f_1,\ t)\, A(f_2,\ t) \ldots A(f_n,\ t)\, \Psi_0. \qquad (4.1.12)$$

Тогда существуют пределы Φ^{out} и Φ^{in} при $t \to \pm\infty$ относительно сильной сходимости в $\mathscr{H}$:

$$\lim_{t \to -\infty} \| \Phi(t) - \Phi^{in} \| = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} \| \Phi(t) - \Phi^{out} \| = 0. \qquad (4.1.13)$$

Эти пределы не зависят (в рамках собственной группы Лоренца) от специального выбора системы координат, при котором определены операторы (4.1.11).

Заметим, что произведение операторов A при одинаковых временах в правой части (4.1.12) имеет смысл, поскольку, как было показано выше, $A(f, t)\,\Omega \subset \Omega$.

Обозначения *in* и *out* происходят от английских слов *incoming* (входящий, падающий) и *outgoing* (выходящий). Символ *ex* будет обозначать *in* или *out*. Гильбертовы пространства, натянутые на векторы Φ^{in} или Φ^{out}, будут обозначаться соответственно через $\mathscr{H}_{in}$ и $\mathscr{H}_{out}$ (точнее, $\mathscr{H}_{ex}$ является замыканием относительно сходимости по норме пространства линейных комбинаций векторов Φ^{ex}, включая вакуум). Мы будем записывать пределы векторов (4.1.12) при $t \to \pm\infty$ также в виде $\Phi^{ex}(f_1, \ldots, f_n)$, явно указывая на зависимость Φ от сглаживающих функций $f_1, \ldots, f_n$. Линейные комбинации этих векторов образуют ядерное пространство Ω_{ex}, в котором определены некоторые асимптотические поля φ^{ex}. При этом состояния Φ^{ex} могут рассматриваться как состояния, порожденные из вакуума последовательным применением операторов полей φ^{ex} (свободных полей с массой m). Это обстоятельство находит выражение в следующей теореме.

Теорема 4.1.2. *Определим линейный оператор* $\varphi^{ex}(f)$, *задавая его действие на базисные векторы* $\Phi^{ex}(f_1, \ldots, f_n)$ *формулой*

$$\varphi^{ex}(f)\,\Phi^{ex}(f_1, \ldots, f_n) = \Phi^{ex}(f, f_1, \ldots, f_n). \tag{4.1.14}$$

Тогда операторы $\varphi^{ex}(f)$ $(ex = in,\ out)$ *определяются эрмитовыми свободными скалярными полями* $\varphi^{ex}(x)$ *с массой* m (см. гл. 3, п. 4.1) *формулой*

$$\varphi^{ex}(f) = i \int\limits_{x^0=t} f(x)\,\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi^{ex}(x)\,d^3x, \tag{4.1.15}$$

где $f(x)$ — *отрицательно-частотное решение уравнения Клейна — Гордона (с массой* m*), причем*

$$U(a, \Lambda)\,\varphi^{ex}(x)\,U^{-1}(a, \Lambda) = \varphi^{ex}(\Lambda x + a). \tag{4.1.16}$$

Доказательства теорем 4.1.1 и 4.1.2 основываются на одной лемме относительно гладких решений уравнения Клейна — Гордона, которая будет сформулирована и доказана в следующем пункте, и на теореме 3.2.3 об асимптотическом разбиении на пучки. Мы изложим эти доказательства в п. 4. Здесь же мы ограничимся некоторыми замечаниями и пояснениями к формулировкам обеих теорем.

1. Поскольку $f(x)$ и $\varphi^{ex}(x)$ удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона (4.1.9) ($f(x)$ — по предположению, а для $\varphi^{ex}(x)$ это будет доказано), то интеграл (4.1.15) не зависит от t. Действительно, в силу (4.1.10) и (3.4.8), $\varphi^{ex}(f)$ может быть приведено к явно не зависящему от времени виду:

$$\varphi^{ex}(f) = \int \left[g_-(p)\, a^{ex}(p) - g_+(p)\, a^{*ex}(p)\right] \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} \tag{4.1.17}$$

$$\left(\omega_p = \sqrt{m^2 + p^2}\right).$$

(Мы напоминаем, что преобразования Фурье для основных функций $f(x)$ и для операторов поля $\varphi^{ex}(x)$ определяются с противоположным знаком у экспоненты.) Заметим, что именно независимость $\varphi^{ex}(f)$ от t делает удобным сглаживание вида (4.1.11) при формулировке асимптотических условий.

2. Из определения $A(x)$ следует, что векторная обобщенная функция

$$\Phi(x) = A(x)\,\Psi_0 \tag{4.1.18}$$

удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона.

Упражнение 4.1.1. Доказать это утверждение, пользуясь (4.1.5). (Указание: показать, что при любом выборе основной функции $u(x) \in \mathcal{S}(R_4)$ скалярный квадрат вектора

$$\Phi = \int \left[(\Box + m^2)\, u(x)\right] A(x)\, \Psi_0\, d^4x$$

равен нулю.

3. Имея в виду вышеупомянутые теоремы, естественно назвать $\Phi^{ex}(f_1, \ldots, f_n)$ вектором состояния n асимптотически свободных частиц.

Из второго замечания следует, что если f — гладкое решение уравнения Клейна — Гордона, то вектор

$$\Phi(f, t) = i \int\limits_{x^0 = t} f(x)\, \overleftrightarrow{\partial}_0\, A(x)\, d^3x\, \Psi_0 \tag{4.1.19}$$

на самом деле не зависит от времени:

$$\frac{d\Phi(f, t)}{dt} = 0. \tag{4.1.20}$$

Это свойство выражает *стабильность одночастичных состояний.*

1.3. Свойства гладких решений уравнения Клейна — Гордона. Рассмотрим для простоты отрицательно-частотное гладкое решение уравнения Клейна — Гордона *) (которому соответствует первый член в правой части (4.1.10))

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left[\frac{e^{-i\omega_p x^0}}{2\omega_p}g(p)\right]e^{ipx}\,d^3p, \tag{4.1.21}$$

$$\omega_p=\sqrt{m^2+p^2}.$$

Как и выше, $g(p)\in\mathcal{S}(R_3)$. Все результаты настоящего пункта справедливы на самом деле для любого гладкого решения, т. е. для любой суммы гладких положительно- и отрицательно-частотных решений. (Заметим, что любое положительно-частотное решение уравнения Клейна — Гордона комплексно сопряжено некоторому отрицательно-частотному решению.)

Функция в квадратных скобках в интеграле (4.1.21) аналитична по t, а рассматриваемая как функция от p, она (так же, как и ее производные по t) принадлежит пространству основных функций $\mathcal{S}(R_3)$. Отсюда следует, что ее преобразование Фурье $f(x)=f(t, x)$ бесконечно дифференцируемо и вместе со своими производными по t принадлежит, как функция от x, пространству $\mathcal{S}(R_3)$. В дальнейшем нас будет интересовать поведение функции $f(t,x)$ при больших $|t|$. Целью настоящего пункта является доказательство следующей леммы.

Лемма 4.1.1. *Пусть $f(t, x)$ — гладкое решение уравнения Клейна — Гордона. Тогда существует постоянная B, зависящая от f, такая, что*

$$|t|^{3/2}\sup_x|f(t, x)|<B, \tag{4.1.22}$$

$$\int|f(t, x)|\,d^3x<B\left(1+|t|^{3/2}\right), \tag{4.1.23}$$

$$\sqrt{t}\,\sup_x|x|\,|f(t, x)|<B. \tag{4.1.24}$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение леммы для специального положительно-частотного решения уравнения (4.1.9):

$$F(x)=\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{e^{-ipx}}{(1+p^0)^3}\,\delta(p^2-m^2)\,\theta(p^0)\,d^4p. \tag{4.1.25}$$

---

*) Заметим, что в литературе нет единства в том, какие функции называть положительно- и какие — отрицательно-частотными. В монографии Иоста [3] функция (4.1.21) называется положительно-частотным решением уравнения Клейна — Гордона. Мы придерживаемся терминологии, принятой в [4].

В силу тождества

$$2(1+p^0)^{-3} = \int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha(1+p^0)}\, d\alpha$$

интеграл (4.1.25) может быть преобразован к виду

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^2\, d\alpha \int e^{-ip^0(t-i\alpha)+i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\theta(p^0)\,\delta(p^2-m^2)\, d^4p =$$

$$= -i(2\pi)^{3/2} \int_0^\infty D_m^{(-)}(t-i\alpha,\ \boldsymbol{x})\, e^{-\alpha}\alpha^2\, d\alpha \qquad (x=(t,\ \boldsymbol{x})).$$

Подставляя для отрицательно-частотной функции Паули — Иордана выражение (3.A.4), находим

$$F(x) = \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 e^{-\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2+(\alpha+ix^0)^2}} K_1\left(m\sqrt{\boldsymbol{x}^2+(\alpha+ix^0)^2}\right) d\alpha \qquad (4.1.26)$$

$$\left(\operatorname{Re}\sqrt{\boldsymbol{x}^2+(\alpha+ix^0)^2}>0\right).$$

Теперь, пользуясь асимптотическими оценками для функции Макдональда (см., например, [49], т. 2, 7.4.1)

$$\lim_{z\to 0} zK_1(z) = 1, \qquad z^{1/2}e^zK_1(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \qquad (\text{при } |z|\to\infty),$$

находим

$$|K_1(z)| < A\left(\frac{1}{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}\right)e^{-\operatorname{Re} z}. \qquad (4.1.27)$$

С другой стороны,

$$\zeta \equiv \sqrt{\boldsymbol{x}^2+(\alpha+ix^0)^2} \equiv \sqrt{u+iv} = \left[\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}\right]^{1/2} + i\left[\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}\right]^{1/2}$$

и, следовательно,

$$|\zeta|^{-2} \leqslant 4\left|\frac{\eta}{v}\right|^2, \qquad (4.1.28)$$

где

$$\eta = \left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}-|u|}{2}\right)^{1/2} \geqslant 0. \qquad (4.1.29)$$

Действительно, неравенство (4.1.28) эквивалентно неравенству

$$1 \leqslant 2\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{v^2}\left(\sqrt{u^2+v^2}-|u|\right) = \frac{2\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}+|u|},$$

которое выполняется тождественно.

Подставляя в полученные неравенства

$$v = 2\alpha t, \qquad u = x^2 - t^2 + \alpha^2,$$

при $z = m\zeta$ находим

$$|D^{(-)}(t - i\alpha, x)| < A_1 \frac{\sqrt{\frac{\eta}{|t|}} + \sqrt{\alpha}}{\alpha^2} \eta^{3/2} e^{-m\eta} |t|^{-3/2}. \tag{4.1.30}$$

Поскольку $\eta \geqslant 0$, то при $|t| > 1$ функция $\left(\sqrt{\frac{\eta}{|t|}} + \sqrt{\alpha}\right)\eta^{3/2}e^{-m\eta}$ мажорируется $A_2(1 + \sqrt{\alpha})$; подставляя (4.1.30) в (4.1.26), получаем

$$|F(x)| < B|t|^{-3/2} \int_0^\infty e^{-\alpha}(1 + \sqrt{\alpha})\, d\alpha = B_1 |t|^{-3/2}. \tag{4.1.31}$$

Оценим, далее, интеграл

$$\int |D^{(-)}(t - i\alpha, x)|\, d^3x =$$

$$= \int\limits_{r^2 \geqslant 2t^2} |D^{(-)}(t - i\alpha, x)|\, d^3x + \int\limits_{r^2 \leqslant 2t^2} |D^{(-)}(t - i\alpha, x)|\, d^3x \equiv I_1 + I_2.$$

Второй интеграл не превосходит произведения максимума подынтегральной функции на объем интегрирования, т. е. в силу (4.1.30)

$$I_2 \equiv \int\limits_{r^2 \leqslant 2t^2} |D^{(-)}(t - i\alpha, x)|\, d^3x \leqslant C_1 \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{\alpha^2} |t|^{3/2}.$$

При оценке I_1 мы воспользуемся экспоненциальным убыванием подынтегральной функции. Это дает

$$I_1 \leqslant C_2 \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{(t^2 + \alpha^2)^{3/4}}.$$

Таким образом,

$$I_1 + I_2 \leqslant C \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{\alpha^2} |t|^{3/2}.$$

Интегрируя это неравенство по α от 0 до ∞ с весом $\alpha^2 e^{-\alpha}$, мы получаем, что

$$\int |F(x)|\, d^3x \leqslant D|t|^{3/2}. \tag{4.1.32}$$

Таким образом, неравенства (4.1.22) и (4.1.23) доказаны для функции F. При помощи приведенных оценок легко доказывается для этой специальной функции и неравенство (4.1.24).

Чтобы перейти теперь к общему случаю, заметим, что произвольное гладкое отрицательно-частотное решение типа (4.1.21) уравнения Клейна — Гордона может быть записано в виде

$$f(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta(p^2 - m^2)\,\theta(p^0)\, e^{-ipx} g(p)\, d^4p =$$
$$= \int F(t, x - \xi)\, h(\xi)\, d^3\xi, \quad (4.1.33)$$

где

$$h(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{(1+\omega_p)^3}{2} g(p)\, e^{ip\xi}\, d^3p \in \mathcal{S}(R_3). \quad (4.1.34)$$

Неравенства (4.1.22)—(4.1.24) для $f(t, x)$ легко получаются теперь из соответствующих оценок для $F(t, x)$. При этом лишь константы в правых частях этих неравенств умножаются на конечную положительную величину

$$\int\limits_{R_3} |h(\xi)|\, d^3\xi < \infty.$$

Лемма 4.1.1 доказана.

Упражнение 4.1.2. Показать, что если четырехмерный вектор n пространственноподобен или изотропен, то функция $f(\lambda n)$ (4.1.21), рассматриваемая как функция вещественного параметра λ, принадлежит пространству $\mathcal{S}(R_1)$. В частности,

$$|\lambda^k f(\lambda n)| < C_k(f, n) \quad \text{при} \quad n^2 \leqslant 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad (4.1.35)$$

или, иначе, при $r \equiv |x| \geqslant |t|$

$$|f(t, x)| \leqslant \frac{C_k(f)}{(1+r)^k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Несколько замечаний. 1. Неравенство (4.1.35) на самом деле справедливо и для времениподобных n, если только прямая λn $(-\infty < \lambda < \infty)$ не пересекает носитель функции $\theta(p^0) \times \times \delta(p^2 - m^2) g(p)$ (Хепп (1965а)).

2. Функция $f_\Lambda(x) = f(\Lambda^{-1}x)$, где Λ — произвольное преобразование Лоренца, удовлетворяет вместе с $f(x)$ всем условиям леммы 4.1.1, и, следовательно, для нее тоже имеют место оценки (4.1.22)—(4.1.24). Более того, если преобразования Λ пробегают любую компактную окрестность единичного элемента группы Лоренца, то упомянутые оценки выполняются равномерно в этой окрестности (с константами B, не зависящими от Λ) (Стритер (1967)).

3. Так как производные от гладкого решения уравнения Клейна — Гордона снова являются гладкими решениями этого уравнения, то лемма 4.1.1 остается справедливой и для них.

1.4. Доказательство теорем 4.1.1 и 4.1.2. Доказательство теоремы 4.1.1 (первая часть). Чтобы доказать сильную сходимость последовательности векторов (4.1.12) при $t \to \pm\infty$, достаточно установить, что норма от производной $\frac{d\Phi(t)}{dt}$ интегрируема на бесконечной оси. Действительно, если это так, то при $t_1 < t_2$

$$\|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\| dt \to 0 \qquad (4.1.36)$$

$$\text{при} \quad t_1 \to +\infty \quad \text{или} \quad t_2 \to -\infty.$$

Докажем (4.1.36). Для этого разложим $\left\| \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\|^2$ в сумму произведений усеченных вакуумных средних (см. гл. 3, п. 2.3). Каждый множитель в любом члене этого разложения имеет вид

$$I_k(t) = \int_{x_i^0 = t} \ldots \int f'_{i_1}(x_1) \ldots f'_{i_k}(x_k) (\Psi_0, A'(x_1) \ldots$$
$$\ldots A'(x_k) \Psi_0)^T d^3x_1 \ldots d^3x_k, \qquad (4.1.37)$$

где функции f_i являются гладкими решениями уравнения Клейна — Гордона, а штрихи у f_i и A означают возможное дифференцирование по времени. Поскольку вакуумное среднее от поля A равно нулю, то можно считать, что $k \geqslant 2$. Если для всех множителей в данном члене $k = 2$, то такой член равен нулю в силу свойства стабильности одночастичных состояний (4.1.20). Таким образом, остается рассмотреть поведение функции $I_k(t)$ при $k \geqslant 3$.

Согласно теореме 3.2.3, если $u(x_1, \ldots, x_k) \in \mathscr{S}(R_{3k})$, то

$$F(a_1, \ldots, a_k) =$$
$$= \int u(x_1 - a_1, \ldots, x_k - a_k)(\Psi_0, A'(t, x_1) \ldots$$
$$\ldots A'(t, x_k) \Psi_0)^T d^3x_1 \ldots d^3x_k \qquad (4.1.38)$$

является основной функцией из $\mathscr{S}(R_{3(k-1)})$ относительно разностей аргументов $a_1 - a_2, \ldots, a_{k-1} - a_k$. Таким образом, усеченное вакуумное среднее

$$T(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) = (\Psi_0, A'(t, x_1) \ldots A'(t, x_k) \Psi_0)^T, \quad \xi_j = x_j - x_{j+1}, \qquad (4.1.39)$$

является свертывателем в $\mathscr{S}(R_{3(k-1)})$ (см. гл. 1, п. 3.2), и, следовательно, в силу леммы 1.3.2 оно является конечной суммой производных непрерывных функций, не превосходящих по абсолютной величине

$$c\prod_{l=1}^{k}(1+|\xi_l|^2)^{-2}.$$

Отсюда следует, что

$$|I_k(t)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{N}c_\nu\int|f_1''(t,\ x_1)|\,d^3x_1\prod_{l=2}^{k}\sup_{x_l}|f_l''(t,\ x_l)|\left[\int\frac{d^3\xi}{(1+|\xi|^2)^2}\right]^{k-1},\tag{4.1.40}$$

где двойные штрихи означают возможные дифференцирования по пространственно-временным аргументам. Применяя, далее, неравенства (4.1.22) и (4.1.23), находим

$$|I_k(t)|<c|t|^{-\frac{3}{2}(k-2)}.\tag{4.1.41}$$

Поскольку в разложение $\left\|\frac{d\Phi}{dt}\right\|^2$ по I_k входит по крайней мере либо одно I_k с $k\geqslant 4$, либо пара I_k с $k\geqslant 3$, то из (4.1.41) следует, что

$$\left\|\frac{d\Phi(t)}{dt}\right\|\leqslant B|t|^{-\frac{3}{2}}.\tag{4.1.42}$$

Отсюда следует (4.1.36). Тем самым первая часть теоремы 4.1.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.1.1 (вторая часть). Теперь покажем, что пределы Φ^{ex} не зависят от специальной лоренцевой системы, в которой определены векторы (4.1.12).

Пусть $\Lambda\in L_+^\uparrow$. Действие Λ на оператор $A(f,\ t)$ (4.1.11) определяется формулой

$$A(f,\ t)\to A_\Lambda(f,\ t)=i\int\limits_{x^0=t}f(\Lambda^{-1}x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0A(\Lambda^{-1}x)\,d^3x.\tag{4.1.43}$$

Нашей целью будет показать, что если $\Phi(t)$ определяется формулой (4.1.12), а

$$\Phi_\Lambda(t)=A_\Lambda(f_1,\ t)\ \dots\ A_\Lambda(f_n,\ t)\Psi_0,\tag{4.1.44}$$

то

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|\Phi_\Lambda(t)-\Phi(t)\|=0.\tag{4.1.45}$$

Для доказательства мы снова разложим квадрат нормы

$$\|\Phi_\Lambda(t)-\Phi(t)\|^2\tag{4.1.46}$$

по усеченным вакуумным средним. Поскольку все встречающиеся выражения гладко зависят от Λ, достаточно доказать инвариантность асимптотических пределов относительно инфинитезимальных преобразований Лоренца. Инвариантность относительно трехмерных вращений тривиальна. Поэтому мы ограничимся рассмотрением действия на $A(f, t)$ инфинитезимального преобразования Лоренца

$$\Lambda^{\varepsilon} = 1 - \varepsilon\left(x^j\partial_0 - x^0\partial_j\right). \tag{4.1.47}$$

Это равносильно рассмотрению вместо квадрата разности (4.1.46) нормы производной

$$\|N_j\Phi_{\Lambda(\alpha)}\|^2 = \left\|\frac{\partial\Phi_{\Lambda(\alpha)}}{\partial\alpha_j}\right\|^2 \tag{4.1.46a}$$

(использована та же параметризация группы Лоренца, что и в гл. 2, п. 3.1).

Упражнение 4.1.3. Показать, что в первом порядке по ε

$$dA(f, t) = i\varepsilon \int\limits_{x^0=t} x^j f(x)\left(\Box + m^2\right)A(x)\,d^3x. \tag{4.1.48}$$

(Указание: воспользоваться тем, что функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона.)

В силу того, что вектор (4.1.18) удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (см. упражнение 4.1.1), из (4.1.48) вытекает, что

$$\frac{dA(f, t)}{dt}\Psi_0 = 0. \tag{4.1.49}$$

Следовательно, при разложении (4.1.46) по усеченным вакуумным средним $I_k(t)$ (4.1.37) снова можно ограничиться случаем $k \geqslant 3$. Все такие члены убывают при больших $|t|$ по крайней мере как $|t|^{-1/2}$. Можно показать, пользуясь замечанием 2 к лемме 4.1.1, что стремление к нулю производной (4.1.46а) равномерно относительно параметров группы, если они меняются в ограниченной области (Стритер (1967)). Отсюда следует равенство (4.1.45). Тем самым теорема 4.1.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.1.2. Разложим скалярное произведение

$$\left(A(f_1, t)\ldots A(f_n, t)\Psi_0,\ A(g_1, t)\ldots A(g_k, t)\Psi_0\right) \tag{4.1.50}$$

по усеченным вакуумным средним. Согласно оценкам, использованным выше, при $|t| \to \infty$ исчезают все члены, кроме тех, которые являются произведениями только квадратичных по A усеченных средних. С другой стороны, согласно (4.1.5), эти оставшиеся члены совпадают со скалярными произведениями в теории свободного скалярного нейтрального поля. Отсюда следует, что оператор $\varphi^{ex}(f)$, определяемый равенством (4.1.14), действительно допускает представление (4.1.15). Трансформационные свойства (4.1.16) поля $\varphi^{ex}(f)$ при преобразовании Пуанкаре следуют из доказательства второй части теоремы 4.1.1. Теорема 4.1.2 доказана.

1.5. Требование асимптотической полноты. Возможные обобщения. В предыдущем рассмотрении мы использовали, кроме общих постулатов, еще несколько специальных предположений, от которых можно освободиться. Речь идет о связанных между собой предположениях о том, что поле $\varphi(x)$ скалярно и эрмитово, что пространство Фока $\mathscr{H}$ имеет структуру пространства свободных скалярных нейтральных частиц и, наконец, что имеет место формула (4.1.1) (т. е. что поле $\varphi(x)$ непосредственно связано с одночастичными состояниями).

В общем случае, рассмотренном Рюелем (1962), сделано предположение, что в разложении пространства $\mathscr{H}$ в прямой интеграл Стильтьеса по неприводимым представлениям группы Пуанкаре входит подпространство $\mathscr{H}_{ms}$, соответствующее дискретному представлению с массой m и спином s. Далее, требуется существование полинома $P(\varphi_\nu; f)$ типа (3.1.18), для которого $P(\varphi_\nu; f)\Psi_0 \in \mathscr{H}_{ms}$. Существование такого полинома следует из требования цикличности вакуума (постулат VII, гл. 3, п. 1.3), если m^2 является изолированным собственным значением оператора P^2. Если же гиперболоид одночастичных состояний лежит в непрерывном спектре P^2, то существование полинома $P(\varphi_\nu, f)$ может быть обеспечено правилами отбора (например, однонуклонное состояние находится в непрерывном спектре, соответствующем двухмезонным (и вообще многомезонным) состояниям, но оно выделяется тем, что у него барионное число $B=1$). Имея полиномы P, мы определим почти локальное поле A формулой

$$A(x) = U(x, 1)\, P(\varphi_\nu, f)\, U^{-1}(x, 1). \tag{4.1.51}$$

После этого асимптотические состояния строятся, как и выше (пп. 2—4), при помощи операторов (4.1.51). Такая конструкция соответствует так называемым составным моделям. Например, скалярная (или псевдоскалярная) частица может быть порождена как связанное состояние системы двух спинорных полей.

Чтобы обеспечить полноправную интерпретацию теорем в терминах частиц, мы должны добавить к сформулированным в гл. 3 постулатам I—VII еще следующее *требование асимптотической полноты.*

VIII. *Гильбертово пространство $\mathscr{H}_{in}$ (асимптотических состояний при $t \to -\infty$) совпадает со всем пространством векторов состояний $\mathscr{H}$.*

Из этого постулата и из TCP-теоремы, которая будет доказана в следующей главе (гл. 5, § 2), следует, что и $\mathscr{H}_{out}$ совпадает с $\mathscr{H}$, так что

$$\mathscr{H}_{in} = \mathscr{H} = \mathscr{H}_{out}. \tag{4.1.52}$$

Кроме того, операторы $\varphi^{in}(x)$ и $\varphi^{out}(x)$, которые действуют, таким образом, в одном и том же пространстве Гильберта, унитарно эквивалентны. Существует унитарный оператор S, однозначно определяемый условиями

$$\varphi^{out}(x) = S^{-1}\varphi^{in}(x)\, S \tag{4.1.53}$$

и

$$S\Psi_0 = \Psi_0. \tag{4.1.54}$$

Оператор S называется *оператором рассеяния*. Он дает вероятности перехода между входящими (*in*-) и выходящими (*out*-) состояниями. Ковариантность асимптотических полей (4.1.16) вместе с требованием полноты VIII и с условием стабильности вакуума (4.1.54) приводит к инвариантности оператора S относительно преобразований Пуанкаре:

$$U(a, \Lambda)\, S U^{-1}(a, \Lambda) = S. \tag{4.1.55}$$

Требование VIII является независимым от остальных постулатов, сформулированных в гл. 3. В этом можно убедиться на примере обобщенного свободного поля (гл. 3, п. 4.5).

Упражнение 4.1.4. Показать, что если

$$i[\varphi(x), \varphi(y)] = \int_a^\infty D_\lambda(x-y)\,\rho(\lambda)\,d\lambda, \tag{4.1.56}$$

где $\rho(\lambda)$ — непрерывная неотрицательная функция, убывающая на бесконечности, то пространства $\mathscr{H}_{ex}$ совпадают с вакуумным вектором.

Вопрос о том, какие дополнительные условия локального характера необходимо наложить, чтобы имел место постулат VIII (другими словами, чтобы имела место возможность полной интерпретации теории поля в терминах частиц), обсуждается в работе Хаага и Свиека (1965).

§ 2. Асимптотические условия Лемана — Симанзика — Циммермана и причинные функции Грина

2.1. Вводные замечания. Еще на заре развития аксиоматического подхода к квантовой теории поля Леман, Симанзик и Циммерман (1955) (ЛСЦ) сформулировали асимптотическое условие в терминах слабой сходимости в гильбертовом пространстве векторов состояний для операторов

$$\varphi(f,\ t) = i \int\limits_{x^0=t} f(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0\varphi(x)\,d^3x, \tag{4.2.1}$$

где $f(x)$ — отрицательно-частотное решение уравнения Клейна — Гордона, нормированное условием

$$i \int\limits_{x^0=t} f(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 f(x)\,d^3x = 1. \tag{4.2.2}$$

(Мы вновь ограничиваемся для простоты случаем одного скалярного поля массы m.) Другими словами, постулируется, что

$$\lim_{t\to\pm\infty}(\Phi,\ \varphi(f,\ t)\Psi) = \left(\Phi,\ \varphi^{\overset{in}{out}}(f,\ \tau)\Psi\right), \tag{4.2.3}$$

причем, как уже отмечалось, $\varphi^{ex}(f,\ \tau) \equiv \varphi^{ex}(f)$ на самом деле не зависит от τ, так как $\varphi^{ex}(x)$ удовлетворяет уравнению для свободных полей

$$K_x\varphi^{ex}(x) \equiv (\Box + m^2)\varphi^{ex}(x) = 0, \tag{4.2.4}$$
$$ex = in,\ out.$$

Если положить

$$K_x\varphi(x) = j(x), \tag{4.2.5}$$

где, по определению, $j(x)$ — *гайзенбергов ток* *), то формально связь между гайзенберговым полем $\varphi(x)$ и асимптотическими полями $\varphi^{ex}(x)$ дается уравнениями

$$\varphi(x) = \varphi^{in}(x) + \int D^{ret}(x-y)\,j(y)\,d^4y = \\ = \varphi^{out}(x) + \int D^{adv}(x-y)\,j(y)\,d^4y, \tag{4.2.6}$$

где D^{ret} и D^{adv} — запаздывающая и опережающая функции Грина, определенные в дополнении к гл. 3.

Вычитая уравнения, мы находим связь между асимптотическими полями

$$\varphi^{out}(x) = \varphi^{in}(x) + \int D(x-y)\,j(y)\,d^4y, \tag{4.2.7}$$

где $D(x)$ — перестановочная функция Паули — Иордана (3.4.3). Уравнения (4.2.6) — (4.2.7) называются уравнениями Янга —

*) Это название ведет свое происхождение от электродинамики, где векторный потенциал A_μ удовлетворяет уравнению $\Box A_\mu(x) = j_\mu(x)$, $j_\mu(x)$ — сохраняющийся электромагнитный ток.

Фельдмана (естественно, их можно рассматривать как замкнутые уравнения для поля $\varphi(x)$ только в том случае, если ток $j(x)$ задан независимо, например в виде полинома от полей φ).

Далее, Леман — Симанзик — Циммерман нашли замечательную редукционную формулу, подсказанную теорией возмущений и позволяющую выразить матричные элементы оператора рассеяния S через вакуумные средние упорядоченных T-произведений гайзенберговых полей. Для векторов из Ω_{ex}

$$\Phi^{ex}(f_1, \ldots, f_n) = |f_1 \ldots f_n^{ex}\rangle$$

редукционная формула ЛСЦ имеет вид

$$\langle g_1 \ldots g_r^{out} | f_1 \ldots f_l^{in}\rangle = \langle g_1 \ldots g_r^{out} | S | f_1 \ldots f_l^{out}\rangle =$$
$$= i^{r+l} \int \ldots \int G^c(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_l)\, \bar{g}_1(x_1) \ldots \bar{g}_r(x_r) f_1(y_1) \ldots$$
$$\ldots f_l(y_l)\, d^4x_1 \ldots d^4x_r\, d^4y_1 \ldots d^4y_l, \quad (4.2.8)$$

где G^c — так называемая *причинная функция Грина*,

$$G^c(x_1, \ldots, x_n) = K_{x_1} \ldots K_{x_n} \langle 0 | T\{\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\} | 0\rangle, \quad (4.2.9)$$

а T-произведение *) операторов при несовпадающих аргументах определяется формулой

$$T\{\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\} = \sum_{\{i_1 \ldots i_n\}} \theta(x^0_{i_1} - x^0_{i_2}) \ldots \theta(x^0_{i_{n-1}} - x^0_{i_n}) \times$$
$$\times \varphi(x_{i_1}) \ldots \varphi(x_{i_n}) \quad (4.2.10)$$

(сумма распространяется по всем перестановкам $i_1, \ldots, i_n$ чисел $1, \ldots, n$).

Спрашивается, можно ли доказать эту редукционную формулу в рамках теории Уайтмана? Трудность возникает еще при попытке придать точный смысл формулам (4.2.6) — (4.2.10). Например, в правой части (4.2.10) содержатся произведения операторной обобщенной функции на разрывную θ-функцию, которые, вообще говоря, не определены (с такого рода произведениями связаны «ультрафиолетовые расходимости» в теории возмущений, см. п. 4.2). Мы изложим здесь частичное решение этого вопроса, принадлежащее Хеппу (1965а, б).

Мы покажем, что на некотором плотном множестве векторов пространства $\mathscr{H}_{ex}$ справедливы асимптотическое условие ЛСЦ и уравнения Янга — Фельдмана. Упомянутое множество

*) Другими словами, упорядоченное по времени, или *хронологическое*, произведение операторных полей (см., например, [4], § 18.4). Заметим, что в силу постулата о локальной коммутативности произведения (4.2.10) не зависит от выбора системы отсчета.

векторов описывает состояния с расходящимися пучками частиц, или, другими словами, состояния, в которых волновые пакеты отдельных частиц в пространстве скоростей не перекрываются. Доказательство основано на том, что такие состояния могут быть точнее аппроксимированы состояниями, порожденными из вакуума полиномами полей, соответствующих одночастичным возбуждениям. Асимптотическое условие в x-пространстве, которое представляет собой свойство сходимости на бесконечности регуляризованных функций Грина по отношению переменной, сопряженной с $p^0-\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$, обеспечивает регулярность этих функций в p-пространстве в окрестности массовой поверхности $p^0=\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$. Следовательно, переход на массовую поверхность законен, по крайней мере для импульсных конфигураций, описывающих расходящиеся пучки частиц. Это дает возможность обосновать редукционную формулу ЛСЦ для амплитуды рассеяния.

2.2. Асимптотические условия и уравнения Янга — Фельдмана. Для простоты мы вновь будем рассматривать случай одного скалярного нейтрального поля $\varphi(x)$ массы m, удовлетворяющего требованиям п. 1.2, в частности представлению Челлена — Лемана (4.1.2). Введем снова сглаженный оператор типа (4.1.11), который может быть записан в виде

$$A(f,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \tilde{f}(p)\,\tilde{\varphi}(p)\,e^{i(\omega-p^0)t}\,d^4p, \qquad (4.2.11)$$

где $\tilde{f}(p)$ является основной функцией ($f\in\mathcal{S}$), исчезающей вне некоторой окрестности гиперболоида $p^0=\omega$ (можно считать (ср. с (4.1.4)), что носитель функции $\tilde{f}(p)$ содержится в области

$$G_m=\{p\in R_4,\ 0<p^0<\sqrt{\mathbf{p}^2+4m^2}\}, \qquad (4.2.12)$$

и тем самым обеспечивается исчезание $\tilde{f}(p)$ в области непрерывного спектра в уравнении Челлена — Лемана).

Упражнение 4.2.1. Показать, что формула (4.2.11) является частным случаем (4.1.11), в котором $g_+(p)=0$, а

$$\tilde{f}(p)=-(\omega+p^0)\,h(p^2)\,g_-(p). \qquad (4.2.13)$$

Как уже отмечалось (см. п. 1.2) $A(f,\ t)$ является неограниченным оператором в $\mathcal{H}$, в область определения которого входит плотное ядерное пространство Ω. Кроме того, в силу постулата спектральности при $\tilde{f}\in\mathcal{S}(G_m)$

$$A(f,\ t)|0\rangle=0, \qquad (4.2.14)$$

в то время как в силу (4.1.5) и (4.1.20)

$$A^*(f,\ t)|0\rangle=|f\rangle, \qquad (4.2.15)$$

где

$$\tilde{f}(p)=\tilde{f}^*(\omega,\ p)\in\mathcal{S}(R_3). \tag{4.2.16}$$

В силу теоремы Хаага — Рюеля пределы

$$\lim_{t\to\pm\infty}\prod_{j=1}^{n}A^*(f_j,\ t)|0\rangle=|f_1,\ \ldots,\ f_n^{ex}\rangle \tag{4.2.17}$$

существуют в сильной топологии в $\mathcal{H}$ и задают базис в пространстве асимптотических состояний $\mathcal{H}_{ex}$.

Теперь мы исследуем скорость стремления к пределу в (4.2.17) в предположении, что носители $\tilde{f}_j$ попарно не пересекаются в пространстве скоростей, т. е. если при $p_i\in\operatorname{supp}\tilde{f}_i$

$$\frac{1}{\omega_i}p_i\neq\frac{1}{\omega_j}p_j \quad \text{при} \quad i\neq j. \tag{4.2.18}$$

Будем называть множество функций $\{f_j\}$ $(\tilde{f}_j\in\mathcal{S}(R_3))$ *неперекрывающимся*, если для всех $p_j\in\operatorname{supp}\tilde{f}_j$ имеет место (4.2.18).

Мы покажем, что вследствие короткодействия сил в локальной квантовой теории поля, в которой наименьшая масса m положительна, неперекрывающиеся асимптотические состояния $|f_1,\ \ldots,\ f_n^{ex}\rangle$ могут быть быстро аппроксимированы почти локализуемыми состояниями

$$\prod_{j=1}^{n}A^*(f_j,\ t)|0\rangle. \tag{4.2.19}$$

Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2.1. *Для множества неперекрывающихся функций* $\{\tilde{f}_1,\ \ldots,\ \tilde{f}_n\}$, *где* $\tilde{f}_j\in\mathcal{S}(G_m)$, *имеют место неравенства*

$$\left\|\frac{d}{dt}\prod_{j=1}^{n}A^*(f_j,\ t)|0\rangle\right\|<C_N(1+|t|)^{-N}, \tag{4.2.20}$$

где $C_N<\infty$ *при всех* N*).

Мы приведем здесь лишь идею доказательства теоремы 4.2.1, оставляя детали читателю.

Разлагаем квадрат левой части (4.2.20) в сумму произведений усеченных вакуумных средних. Так как в силу (4.2.14) и (4.2.15)

$$A(f_j,\ t)|0\rangle=\frac{d}{dt}A^*(f_j,\ t)|0\rangle=0,$$

*) Напомним, что при $N=3/2$ неравенство типа (4.2.20) было доказано без предположения о неперекрывании (см. (4.1.42)).

то все одноточечные функции и все произведения, содержащие одни только двухточечные функции в этом разложении, равны нулю. Поэтому доказательство теоремы 4.2.1 сводится к проверке неравенства

$$\left| t^N \left\langle 0 \left| \prod_{\nu=1}^{j} A'(f_{i_\nu}, t) \prod_{\mu=j+1}^{k} A'^*(f_{i_\mu}, t) \right| 0 \right\rangle^T \right| < C_N < \infty \quad (4.2.21)$$

при любом $N > 0$ и $k \geqslant 3$ (C_N не зависит от t); штрих у полей A означает возможное дифференцирование по t. При доказательстве (4.2.21) используется теорема 3.2.3 и условие неперекрывания волновых пакетов $\tilde{f}_i$ в пространстве скоростей. В силу условия $k \geqslant 3$ по крайней мере одно из неравенств $j \geqslant 2$ или $k - j \geqslant 2$ имеет место. Оба случая рассматриваются идентично.

Мы остановимся лишь на первом из них ($j \geqslant 2$). Пользуясь трансляционной инвариантностью, можно записать левую часть (4.2.21) в виде

$$\left| t^N \int \ldots \int \prod_{\nu=1}^{j} d^4p_\nu \tilde{f}_{i_\nu}(p_\nu) e^{i(\omega_\nu - p_\nu^0)t} \prod_{\mu=j+1}^{k} d^4p_\mu \tilde{f}^*(-p_\mu) e^{-i(\omega_\mu + p_\mu^0)t} \times \right.$$
$$\left. \times \tilde{\omega}^T(p_1, \ldots, p_k) \right| = \left| t^N \int \ldots \int \prod_{i=2}^{k} d^3p_i \chi(p_2, \ldots, p_k) e^{i\Omega(p_2, \ldots, p_k)t} \right|, \quad (4.2.22)$$

где

$$\chi(p_2, \ldots, p_k) =$$
$$= \int d^4p_1 \tilde{f}_{i_1}(p_1) \prod_{\nu=2}^{j} dp_\nu^0 \tilde{f}_{i_\nu}(p_\nu) \prod_{\mu=j+1}^{k} dp_\mu^0 \tilde{f}_{i_\mu}^*(-p_\mu) \tilde{\omega}^T(p_1, \ldots, p_k) \quad (4.2.23)$$

(через $\tilde{f}_i^*$ обозначена функция, комплексно сопряженная к $\tilde{f}_i$),

$$\Omega(p_2, \ldots, p_k) = \left[m^2 + \left(\sum_{i=2}^{k} p_i \right)^2 \right]^{1/2} + \sum_{\nu=2}^{j} \omega_\nu - \sum_{\mu=j+1}^{k} \omega_\mu, \quad (4.2.24)$$
$$\omega_\lambda = \sqrt{m^2 + p_\lambda^2}.$$

В подынтегральные выражения в (4.2.22) и (4.2.23) может входить еще множитель $\omega_i - p_i^0$, соответствующий дифференцированию по t. При получении (4.2.22) мы воспользовались эрмитовостью поля $\varphi(x)$, из которой следует, что $\tilde{\varphi}^*(p) = \tilde{\varphi}(-p)$. Согласно (4.2.23) χ является основной функцией: $\chi \in \mathscr{S}(R_{3(k-1)})$. Интегрирование по p_1 проводится в явном виде, поскольку усеченная функция Уайтмана $\tilde{w}^T(p_1, \ldots, p_k)$ пропорциональна четырехмерной δ-функции $\delta(p_1 + \ldots + p_k)$, что приводит к выражению (4.2.24) для Ω. Далее, поскольку $\tilde{f}_i$ и $\tilde{f}_l$ не перекрываются, то в точках где $\chi \neq 0$,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p_2} = \left[m^2 + \left(\sum_{i=2}^{k} p_i\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=2}^{k} p_i + \omega_2^{-1} p_2 = \omega_2^{-1} p_2 - \omega_1^{-1} p_1 \neq 0. \quad (4.2.25)$$

Из (4.2.25) следует, что можно найти такое разбиение единицы $\{\alpha_i\}$, $i = 1, 2, 3$, т. е. такие три бесконечно гладкие ограниченные функции $\alpha_i(p)$ $\left(\text{с суммой } \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \equiv 1\right)$, что $\dfrac{\partial\Omega}{\partial p_2^i} \neq 0$ при $p_2 \in \operatorname{supp} \chi(p_2, \ldots, p_k)\, \alpha_i(p_2)$. Тогда замена переменных $\Omega \leftrightarrow p_2^i$ регулярна в области, где $\chi\alpha_i \neq 0$; следовательно,

$$\int \prod_{\nu} dp_\nu \chi(p_2, \ldots, p_k)\, \alpha_i(p_2)\, e^{i\Omega(p_2, \ldots, p_k)t} \in \mathcal{S}(R_1(\Omega))$$

при $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует (4.2.21) и тем самым теорема 4.2.1.

Разумеется, доказательство теоремы 4.2.1 остается в силе при замене произведения $\tilde{f}_1(p_1) \ldots \tilde{f}_n(p_n)$ одной функцией $\tilde{f}(p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{S}((G_m)^n)$, если только при $(p_1, \ldots, p_n) \in \operatorname{supp} \tilde{f}$ имеет место условие неперекрывания (4.2.18) *).

Обозначим через Ω_0^{ex} множество неперекрывающихся векторов $\Phi^{ex}(f)$, где $\tilde{f}(p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{S}((G_m)^n)$, а $\tilde{f}$ — симметризованная функция

$$\tilde{f}(p_1, \ldots, p_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\{i_1 \ldots i_n\}} \tilde{f}(\omega_{i_1} p_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n} p_{i_n}). \quad (4.2.26)$$

Это множество всюду плотно в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{ex}$, так как множество функций типа (4.2.26) с непрекрывающимися скоростями всюду плотно в пространстве всех

---

*) Из теоремы 4.2.1 следует, что при неперекрывающихся скоростях предел Хаага — Рюеля (4.2.17) достигается быстрее любой степени $|t|^{-1}$, независимо от числа измерений пространственной части пространства Минковского (ср. с доказательством леммы 4.1.1, которое не переносится непосредственно на случай одномерного пространства). В частности, в мире с одним и двумя пространственными измерениями тоже можно развивать разумную теорию столкновений. Это замечание имеет значение при изучении двухмерных моделей квантовой теории поля (см., например, Тирринг (1958)).

симметричных функций $\tilde{f}(p_1, \ldots, p_n)$ с квадратом нормы

$$\int \prod_{i=1}^{n} d^4p_i\delta_+(p_i)|\tilde{f}(p_1, \ldots, p_n)|^2 < \infty, \tag{4.2.27}$$

где

$$\delta_+(p) = \theta(p^0)\delta(p^2 - m^2). \tag{4.2.28}$$

В Ω_0^{ex} определены все сглаженные полиномы от операторов поля (исходной областью определения для которых служило ядерное пространство Ω), а вместе с тем и асимптотические операторы $a^{*ex}(\tilde{f})$ типа (4.1.15) ($a^{(*)ex}$ означает либо a^{ex} либо a^{*ex}).

Теперь мы в состоянии вывести асимптотические условия ЛСЦ.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $\Phi^{ex} \in \Omega_0^{ex}$ *и* $\tilde{f}_i \in \mathcal{S}(G_m)$; *тогда*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left\| \prod_{i=1}^{n} A^{(*)}(f_i, t)\Phi^{ex} - a^{(*)ex}(\tilde{f}_i)\Phi^{ex}\right\| = 0, \tag{4.2.29}$$

где, как и выше, звездочка в скобках означает возможное эрмитово сопряжение.

Если $\Phi^{ex} \in \Omega_0^{ex}$, $\Psi^{ex} \in \mathcal{H}_{ex}$, *a* $\tilde{f}_i \in \mathcal{S}(G_m)$, $\tilde{g}_i \in \mathcal{S}(R_4(p))$, *то*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(\Psi^{ex}, \prod_{i=1}^{k} A(g_i, t)\prod_{j=1}^{n} A^*(f_j, t)\Phi^{ex}\right) = \\ = \left(\Psi^{ex}, \prod_{i=1}^{k} a^{ex}(\hat{g}_i)\prod_{j=1}^{n} a^{*ex}(\tilde{f}_j)\Phi^{ex}\right). \tag{4.2.30}$$

Доказательство. Аппроксимируем вектор

$$\prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j, t)\Phi^{ex}(\tilde{f})$$

векторами типа

$$\prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j, t)\Phi(f, t).$$

Пользуясь теоремой 4.2.1 и тем, что произведение $\Pi A^{(*)}(f_j, t)$ есть операторная обобщенная функция умеренного роста, находим

$$\left\|\prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j, t)\frac{d}{ds}\Phi(f, s)\right\| \leqslant d_K(1+|s|)^{-K}(1+|t|)^L, \tag{4.2.31}$$

где L фиксировано, а $d_K < \infty$ для любого K. Отсюда следует, что, например,

$$\left\| \prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j,\ t)\,\Phi^{out}(f) - \prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j,\ t)\,\Phi(f,\ t) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t}^{\infty} ds \left\| \prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j,\ t)\,\frac{d}{ds}\,\Phi(f,\ s) \right\| < C_N(1+|t|)^{-N}. \quad (4.2.32)$$

Соотношения (4.2.29) и (4.2.30) следуют отсюда и из (4.1.14).

В заключение покажем, что формально написанные в п. 1 уравнения Янга — Фельдмана (4.2.6) тоже могут быть осмыслены как равенства в пространстве Ω_0^{ex}.

Любая основная функция $\tilde{f}(p) \in \mathscr{S}(R_4)$ может быть представлена в виде суммы трех слагаемых

$$\tilde{f}(p) = \tilde{f}_1(p) + \tilde{f}_2(p) + \tilde{f}_3(p),$$

обладающих свойствами $(\tilde{f}_i(p) \in \mathscr{S}(R_4))$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} \tilde{f}_1 \subset \{|p^2 - m^2| < m^2,\ p^0 > 0\},\\ &\operatorname{supp} \tilde{f}_2 \subset \{|p^2 - m^2| < m^2,\ p^0 < 0\},\\ &\operatorname{supp} \tilde{f}_3 \subset \left\{ |p^2 - m^2| > \frac{m^2}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

При $\Psi^{in} \in \Omega_0^{in}$ бесконечно гладкая вектор-функция

$$F_1(s) = \sqrt{2\pi}\,\frac{d}{ds}\,A^*(f_1,\ s)\,\Psi^{in}$$

удовлетворяет в силу (4.1.42) условию

$$\| F_1(s) \| < c_1(1+|s|)^{-3/2}$$

в интервале $-\infty < s \leqslant 0$. Следовательно, интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon s} F_1(s)\,ds$$

равномерно сходится при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 > 0)$ и в силу теоремы 4.2.1

$$\sqrt{2\pi}\,(\varphi^*(f_1)\,\Psi^{in} - \varphi^{*in}(f_1)\,\Psi^{in}) = \int_{-\infty}^{0} F_1(s)ds = \lim_{\varepsilon \searrow +0} \int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon s} F_1(s)\,ds =$$
$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{0} dsi \int d^4p \tilde{f}_1^*(p)\,e^{is(p^0-\omega-i\varepsilon)}(p^0-\omega)\,\tilde{\varphi}(-p)\,\Psi^{in} =$$
$$= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int d^4p \frac{\tilde{f}_1^*(p)\,\tilde{j}(-p)}{(p^0+\omega)(p^0-\omega-i\varepsilon)}\,\Psi^{in}. \quad (4.2.34)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $p^0+\omega>m>0$ при $p\in\operatorname{supp}\tilde f_1$,

$$\tilde j(p)=(m^2-p^2)\tilde\varphi(p) \tag{4.2.35}$$

и, кроме того, что при $\varepsilon>0$

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{\tilde f^*(p)\,e^{is(p^0-\omega-i\varepsilon)}}{(p^0+\omega)(p^0-\omega-i\varepsilon)}=0. \tag{4.2.36}$$

Аналогично

$$\varphi^*(f_2)\Psi^{in}-\varphi^{*in}(f_2)\Psi^{in}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\searrow+0}\int d^4p\frac{\tilde f_2^*(p)\,\tilde j(-p)}{(p^0+\omega-i\varepsilon)(p^0-\omega)}\Psi^{in}. \tag{4.2.37}$$

Так как массовая поверхность не пересекается с носителем функции $\tilde f_3$, то $\varphi^{in}(f_3)\Psi^{in}=0$ и

$$\varphi^*(f_3)\Psi^{in}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d^4p\frac{\tilde j(-p)}{p^2-m^2}\Psi^{in}. \tag{4.2.38}$$

Таким образом, мы получаем, что при $\Psi^{ex}\in\Omega_0^{ex}$ имеет место равенство векторных обобщенных функций

$$\varphi(x)\Psi^{\substack{in\\out}}=\varphi^{\substack{in\\out}}\Psi^{\substack{in\\out}}+\int d^4y\,D^{\substack{ret\\adv}}(x-y)\,j(y)\,\Psi^{\substack{in\\out}} \tag{4.2.39}$$

(при получении (4.2.39) из (4.2.34)—(4.2.38) мы воспользовались эрмитовостью поля $\varphi(x)$).

Это и есть точный смысл уравнений Янга — Фельдмана.

2.3. Редукционная формула. Перейдем теперь к редукционной формуле, обсуждавшейся во введении (п. 2.1). Мы обойдем нетривиальный вопрос о существовании функции Грина в уайтмановской формулировке *), пользуясь сглаженными θ-функциями. Будет показано, что амплитуды рассеяния на массовой поверхности не зависят от сглаживания.

Пусть χ — неотрицательная финитная основная функция из $\mathscr{D}(R_{n-1})$, удовлетворяющая условиям симметрии

$$\chi(s_{i_1}-s_{i_2},\ \ldots,\ s_{i_{n-1}}-s_{i_n})=\chi(s_1-s_2,\ \ldots,\ s_{n-1}-s_n) \tag{4.2.40}$$

для любой перестановки $(i_1,\ \ldots,\ i_n)$ чисел $1,\ \ldots,\ n$ и нормированная условием

$$\int\ldots\int dt_1\ldots dt_{n-1}\chi(t_1,\ \ldots,\ t_{n-1})=1. \tag{4.2.41}$$

*) См. по этому поводу Штейнман (1963а).

Определим сглаженное произведение θ-функций формулой

$$\theta_\chi(x_1^0 - x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0 - x_n^0) = \int d(s_1 - s_2) \ldots d(s_{n-1} - s_n)\, \chi(s_1 - s_2, \ldots$$
$$\ldots, s_{n-1} - s_n)\, \theta(x_1 - x_2 - s_1 + s_2) \ldots \theta(x_{n-1} - x_n - s_{n-1} + s_n). \quad (4.2.42)$$

Заметим, что θ_χ является бесконечно гладкой функцией со значениями между 0 и 1, которая переходит в обычное произведение θ-функций, если

$$\chi(s_1 - s_2, \ldots, s_{n-1} - s_n) \to \delta(s_1 - s_2) \ldots \delta(s_{n-1} - s_n). \quad (4.2.43)$$

Сглаженное (T-) (ср. (4.2.10)), запаздывающее (R-) и опережающее (A-) произведения полей определяются формулами:

$$T_\chi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\{i_1, \ldots, i_n\}} \theta_\chi\left(x_{i_1}^0 - x_{i_2}^0, \ldots, x_{i_{n-1}}^0 - x_{i_n}^0\right) \varphi\left(x_{i_1}\right) \ldots \varphi\left(x_{i_n}\right), \quad (4.2.44)$$

$$R_\chi(x_1; x_2, \ldots, x_n) = i^{n-1} \sum_{\{i_2, \ldots, i_n\}} \theta_\chi\left(x_1^0 - x_{i_2}^0, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, x_{i_{n-1}}^0 - x_{i_n}^0\right) \left[\ldots\left[\varphi(x_1), \varphi\left(x_{i_2}\right)\right], \ldots, \varphi\left(x_{i_n}\right)\right], \quad (4.2.45а)$$

$$A_\chi(x_1; x_2, \ldots, x_n) = i^{n-1} \sum_{\{i_2, \ldots, i_n\}} \theta_\chi\left(x_{i_n}^0 - x_{i_{n-1}}^0, \ldots, x_{i_2}^0 - x_1^0\right) \left[\ldots\left[\varphi(x_1), \varphi\left(x_{i_2}\right)\right], \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \varphi\left(x_{i_n}\right)\right], \quad (4.2.45б)$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\{i_1, \ldots, i_n\}$ (соответственно $\{i_2, \ldots, i_n\}$) чисел $1, 2, \ldots, n$ (соответственно $2, 3, \ldots, n$). В терминах этих операторов сглаженные функции Грина — причинная $\left(G_\chi^c\right.$, ср. (4.2.9)$\left.\right)$, запаздывающая $\left(G_\chi^{ret}\right)$ и опережающая $\left(G_\chi^{adv}\right)$ — определяются переходом к вакуумным средним и применением по каждой переменной оператора Клейна — Гордона.

Упражнение 4.2.2. Пусть $T_\chi(x_1, \ldots, x_n)$ — сглаженное T-произведение (4.2.44), а $T_\chi(x_2, \ldots, x_n)$ определяется формулой типа (4.2.44), в которой поле $\varphi(x_1)$ отсутствует, симметризация проводится лишь по переменным $x_2, \ldots, x_n$, а $\theta\left(x_1^0 - x_2^0 - s_1 + s_2\right)$ в (4.2.42) заменено единицей. Показать, что если 4-вектор Γ направлен в будущий световой конус и его длина достаточно велика, то

$$T_\chi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} T_\chi(x_2, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1) & \text{при } x_i - x_1 > \Gamma, \\ \varphi(x_1)\, T_\chi(x_2, \ldots, x_n) & \text{при } x_1 - x_i > \Gamma, \end{cases} \quad (4.2.46)$$
$$2 \leqslant i \leqslant n.$$

Упражнение 4.2.3. Показать, пользуясь предыдущим упражнением, что при $\Phi^{out} \in \Omega_0^{out}$, $\Psi^{in} \in \Omega_0^{in}$ справедливо тождество

$$\begin{aligned}(a^{out}(p_1)\,\Phi^{out}, \tilde{T}_\chi(-p_2, \ldots, -p_n)\,\Psi^{in}) - \\ -(\Phi^{out}, \tilde{T}_\chi(-p_2, \ldots, -p_n)\,a^{*in}(p_1)\,\Psi^{in}) = \\ = i\sqrt{2\pi}\lim_{p_1^0 \to \omega_1}\left[\left(p_1^2 - m^2\right)\left(\Phi^{out}, \tilde{T}_\chi\left(-p_1, \ldots, -p_n\right)\Psi^{in}\right)\right],\end{aligned} \quad (4.2.47)$$

где матричные элементы рассматриваются как обобщенные функции из $\mathcal{S}^*(G_m \times R_{4(n-1)})$ (область G_m задается (4.2.12)) (Хепп (1965а)).

Упражнение 4.2.4. Пусть

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \delta_+(p)\,f(p)\,e^{-ipx}\,d^4p, \quad (4.2.48)$$

где $f(p) \in \mathcal{S}(R_3)$. Показать, что если Φ^{ex}, $\Psi^{ex} \in \Omega_0^{ex}$, то справедливы редукционные формулы:

$$\begin{aligned}(\Phi^{out}, \{a^{out}(f)\,T_\chi(x_2, \ldots, x_n) - T_\chi(x_2, \ldots, x_n)\,a^{in}(f)\}\,\Psi^{in}) = \\ = -i\int d^4x_1 f(x_1)\,(\Phi^{out}, K_1 T_\chi(x_1, \ldots, x_n)\,\Psi^{in}),\end{aligned} \quad (4.2.49)$$

$$\begin{aligned}(\Phi^{in}, [R_\chi(x_0; x_1, \ldots, x_{n-1}), a^{*in}(f)]\,\Psi^{in}) = \\ = \int d^4x_n f(x_n)\,(\Phi^{in}, K_n R_\chi(x_0; x_1, \ldots, x_n)\,\Psi^{in}),\end{aligned} \quad (4.2.50)$$

$$\begin{aligned}(\Phi^{out}, [A_\chi(x_0; x_1, \ldots, x_{n-1}), a^{*out}(f)]\,\Psi^{out}) = \\ = \int d^4x_n f(x_n)\,(\Phi^{out}, K_n A_\chi(x_0; x_1, \ldots, x_n)\,\Psi^{out}).\end{aligned} \quad (4.2.51)$$

Основной результат настоящего пункта может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 4.2.3. *Если $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, то справедливо следующее соотношение между амплитудой перехода $n-k$ частиц в k частиц и вакуумным средним от сглаженного T-произведения n полей:*

$$\begin{aligned}\langle p_1 \ldots p_k^{out} | p_{k+1} \ldots p_n^{in}\rangle = \\ = (-i\sqrt{2\pi})^n\left[\prod_{j=1}^n (p_j^2 - m^2)\langle 0|\tilde{T}_\chi(p_1, \ldots, p_k, \right. \\ \left. -p_{k+1}, \ldots, -p_n)|0\rangle\right]_{p_i^0 = \omega_i}.\end{aligned} \quad (4.2.52)$$

Экстраполированная вне массовой поверхности, зависящая от χ функция

$$\begin{aligned}\int \ldots \int \prod_{j=1}^n d^3p_j f_j(p_j)\,(p_j^2 - m^2) \times \\ \times \langle 0|\tilde{T}_\chi(p_1, \ldots, p_k, -p_{k+1}, \ldots, -p_n)|0\rangle\end{aligned} \quad (4.2.53)$$

является бесконечно гладкой в окрестности массовой поверхности ($p_j^0 = \omega_j$), *если носители основных функций* $\tilde{f}_l$ *не перекрываются в пространстве скоростей* (*т. е. если в области интегрирования в* (4.2.53) $\omega_j^{-1}p_j \neq \omega_l^{-1}p_l$ *при* $l \neq j$).

Если определено вакуумное среднее от обычного несглаженного T-*произведения* (4.2.10), *для которого*

$$\langle 0|T(x_1, \ldots, x_n)|0\rangle = \langle 0|\varphi(x_{i_1}) \ldots \varphi(x_{i_n})|0\rangle \qquad (4.2.54)$$

при

$$x_{i_1}^0 > x_{i_2}^0 > \ldots > x_{i_n}^0,$$

то формула (4.2.52) *остается в силе и при замене* T_χ *на* T (*т. е.* χ *на* δ — см. (4.2.43)).

Эта теорема является следствием результатов, сформулированных в упражнениях 4.2.3 и 4.2.4, и следующей леммы.

Лемма 4.2.1. *Обобщенная функция*

$$\prod_{j=k+1}^{l}(p_j^2 - m^2)\langle p_1 \ldots p_k^{out}|\tilde{T}_\chi(\pm p_{k+1}, \ldots, \pm p_l)|p_{l+1} \ldots p_n^{in}\rangle \tag{4.2.55}$$

является бесконечно дифференцируемой функцией относительно переменных $p_{k+1}^0 - \omega_{k+1}, \ldots, p_l^0 - \omega_l$ *в окрестности начала координат, если ее проинтегрировать по* $p_1, \ldots, p_n$ *с основной функцией* $\tilde{f} \in \mathscr{S}(R_{3n})$, *обращающейся в нуль при совпадении некоторой пары переменных* $\omega_i^{-1}p_i$.

Здесь мы приведем лишь схему доказательства леммы 4.2.1. Детали могут быть найдены в оригинальной работе Хеппа (1965а).

Пусть $\{\tilde{f}_j\} \subset \mathscr{S}(G_m)$ — неперекрывающаяся совокупность основных функций и пусть

$$f_j(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \tilde{f}_j(p)\, e^{i(p^0-\omega)t} e^{ipx}\, d^4p, \qquad (4.2.56)$$

$$\dot{f}_j(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} f_j(x, t), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда утверждается, что интеграл

$$I(t_{k+1}, \ldots, t_l) =$$

$$= \int \langle f_1 \ldots f_k^{out}|T_\chi(x_{k+1}, \ldots, x_l)|f_{l+1} \ldots f_n^{in}\rangle \prod_{j=k+1}^{l} f_j^{(*)}(x_j, t_j)\, d^4x_j \tag{4.2.57}$$

является основной функцией из $\mathscr{S}(R_{l-k})$ по переменным $t_{k+1}, \ldots, t_l$. Поскольку все производные по t_j от бесконечно дифференцируемых функций (4.2.57) вновь имеют вид (4.2.57), то достаточно показать, что при любом выборе положительных чисел $N_{k+1}, \ldots, N_l$

$$\sup_{t_{k+1} \ldots t_l} \left| I(t_{k+1}, \ldots, t_l)\, t_{k+1}^{N_{k+1}} \ldots t_l^{N_l} \right| < \infty. \tag{4.2.58}$$

Чтобы доказать (4.2.58), необходимо воспользоваться рассуждениями, при помощи которых доказывается замечание 1 к лемме 4.1.1.

Пусть $C_\eta(\tilde{f}_j, t)$ есть множество точек $x = t\omega^{-1}p$, для которого по крайней мере одно (p^0, p) содержится в η-окрестности $\operatorname{supp} \tilde{f}_j$ ($\eta > 0$ фиксировано). Тогда справедливы оценки:

$$|f_j(x, t)| < C_{MN}\,[1 + (x^0 - t)^2]^{-\frac{M}{2}}\,(1 + x^2 + t^2)^{-\frac{N}{2}}$$

при

$$x \notin C_\eta(\tilde{f}_j, t); \tag{4.2.59}$$

$$|f_j(x, t)| < C_M\,[1 + (x_0 - t)^2]^{-\frac{M}{2}}\,[1 + x^2 + t^2]^{-\frac{3}{4}}$$

при

$$x \in C_\eta(\tilde{f}_j, t);$$

положительные числа C_{MN} и C_M могут зависеть от η (но не от x и t).

Мы видим, что $f_j(x, t)$ вместе со всеми своими производными при фиксированном t быстро убывает с расстоянием от своего «существенного носителя»

$$S_\eta(\tilde{f}_j, t) = \{x\colon\ x^0 = t,\ \ x \in C_\eta(\tilde{f}_j, t)\}.$$

Для неперекрывающихся $\tilde{f}_{k+1}, \ldots, \tilde{f}_l$ все $S_\eta(\tilde{f}_j, 1 \pm \eta)$ попарно пространственно разделены для достаточно малых η. Отсюда следует, что расстояние между носителями $S_\eta(\tilde{f}_j, (1+\eta_j)t)$ растет пропорционально первой степени t при $|\eta_j| < \eta$. Это позволяет представить T_χ-произведение в (4.2.57) в виде суммы интегралов обычных произведений полей $\varphi(x_j)$ и доказать (4.2.58) при помощи теоремы 4.2.2.

Физически интересны реакции, в которых две частицы переходят в n частиц. В этом случае амплитуда рассеяния может быть получена переходом на массовую поверхность в опережающих обобщенных функциях при неперекрывающихся скоростях. Возможность такого перехода обусловлена следующей теоремой.

Теорема 4.2.4. *Если $\omega_i^{-1}p_i \neq \omega_j^{-1}p_j$ при $i \neq j$, то справедливо тождество*

$$i(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \langle p_3 \ldots p_n^{out} | p_1 p_2^{in} \rangle =$$
$$= \lim_{p_j^0 \to \omega_j} \left[\prod_{j=1}^{n} (p_j^2 - m^2) \langle 0 | \tilde{A}_\chi(-p_1;\ -p_2, p_3, \ldots, p_n) | 0 \rangle \right]. \tag{4.2.60}$$

Экстраполированное вне массовой поверхности выражение

$$\prod_{j=1}^{n}(p_j^2-m^2)\langle 0|\tilde{A}_\chi(-p_1;\ -p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_n)|0\rangle$$

бесконечно дифференцируемо по $p_j^0-\omega_j$ в окрестности нуля (после интегрирования по $p_1, \ldots, p_n$ с неперекрывающейся основной функцией).

При доказательстве этой теоремы используется то же самое рассуждение, которое привело нас к лемме 4.2.1. Спектральные условия для реакции $2\to n-2$ исключают те члены разложения $\langle 0|\tilde{A}_\chi(-p_1;\ -p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_n)|0\rangle$ по вакуумным средним от обычных произведений, для которых не было доказано асимптотическое условие ЛСЦ (речь идет о членах со структурой $A^*(f_j,\ t)P(\varphi)|0\rangle$, где P — полином от сглаженных полей; неизвестно, сходятся ли эти члены при $t\to\pm\infty$). Заметим, что подобные спектральные условия не имеют места в общем случае реакции $k\to n$. Поэтому пока нельзя сказать ничего относительно структуры особенностей у вакуумных средних

$$\langle 0|\tilde{R}_\chi(\pm p_1,\ \ldots,\ \pm p_n)|0\rangle \text{ и у } \langle 0|\tilde{A}_\chi(\pm p_1,\ \ldots,\ \pm p_n)|0\rangle$$

в окрестности массовой поверхности $p_j^0=\omega_j$.

Отметим в заключение, что мы не исчерпали результатов, полученных в настоящее время в теории рассеяния Хаага — Рюеля. Упомянем в этой связи доказательство Хеппа дисперсионных соотношений для амплитуды упругого рассеяния мезона на мезоне в схеме Уайтмана *), а также исследование Хеппом (1965 г) одночастичных особенностей S-матрицы в этом подходе.

§ 3. S-матричная формулировка основных требований локальной теории

3.1. Вводные замечания. В двух последних параграфах мы видели, что в рамках уайтмановского подхода в квантовой теории поля можно ввести асимптотические состояния из произвольного числа невзаимодействующих частиц и что при выполнении требования VIII асимптотической полноты состояния при $t\to-\infty$ (*in*-состояния) могут быть получены из состояний при $t\to+\infty$ (*out*-состояния) под действием унитарного оператора S (см. (4.1.53) и (4.1.54)). Более того, было показано, что матричные элементы оператора S, или, что то же самое, амплитуды

*) Общий вывод дисперсионных соотношений на основе формализма радиационных операторов дан в [1]. Мы предполагаем вернуться к этому вопросу во втором томе.

перехода между *in*- и *out*-состояниями, могут быть получены предельным переходом на массовую поверхность от сглаженных причинных функций Грина (по крайней мере если скорости асимптотических частиц не перекрываются). На самом деле речь, конечно, не идет о практическом вычислении элементов S-матрицы, поскольку сами сглаженные функции Грина, так же как и функции Уайтмана, через которые они выражаются, неизвестны. Из постулатов I—VII мы были в состоянии вывести (в гл. 3) лишь некоторые общие свойства вакуумных средних от произведений полей; из этих свойств необходимо извлечь информацию о поведении элементов S-матрицы. Нетрудно сформулировать основные свойства причинных функций Грина, если они определяются при помощи обычных (не сглаженных!) T-произведений типа (4.2.10). Но, исходя из требований I—VIII, мы сталкиваемся с трудным вопросом о существовании этих функций. С другой стороны, сглаженные функции Грина, которые всегда существуют в уайтмановском подходе, не обладают столь простыми свойствами и, пользуясь ими, значительно труднее получить необходимую информацию об элементах матрицы рассеяния (хотя, как показали результаты Хеппа, частично изложенные в предыдущем параграфе, это не является невозможным).

Здесь мы встанем на другую точку зрения, соответствующую историческому развитию этого вопроса. Мы исследуем свойства причинных, запаздывающих и опережающих функций Грина в предположении, что они существуют, не заботясь на данном этапе о строгом обосновании этого предположения в рамках уайтмановского подхода.

Как уже отмечалось в начале предыдущего параграфа, по этому пути пошли Леман, Симанзик и Циммерман (1955) и (1957). Независимо, примерно в это же время, Боголюбов и его сотрудники (см. Боголюбов (1955), [4], [1]) развили, по сути дела, эквивалентный метод непосредственного исследования свойств элементов S-матрицы, экстраполированных вне массовой поверхности, без обращения к понятию гайзенбергова поля (в полном соответствии с первоначальной программой Гайзенберга (1943)). В основе метода Боголюбова, Медведева и Поливанова (БМП) лежат аппарат вариационных производных S-матрицы по асимптотически свободным полям и условие микропричинности, которое просто формулируется в терминах этих вариационных производных. Понятие гайзенбергова поля фактически заменяется всюду оператором тока, определяемым через первую вариационную производную S-оператора. В последнее время точка зрения, согласно которой токи играют основную роль в теории, получила дальнейшую поддержку и развитие в так называемой алгебре токов.

В этом параграфе мы изложим основы метода БМП, указывая при этом на его связь с формализмом ЛСЦ.

В п. 7 мы сформулируем общую задачу об аналитических свойствах функций Грина, связанных с амплитудой рассеяния. Эти свойства следуют из принципа микропричинности и из спектральных условий.

3.2. Асимптотические состояния и матрица рассеяния — общие свойства. Будем рассматривать в качестве базиса в пространстве векторов состояний асимптотические состояния одного типа: для определенности будем работать с *out*-состояниями и с соответствующими *out*-полями (т. е. с асимптотическими векторами и операторами при $t \to +\infty$). Поскольку *out*-поля будут единственными полями, с которыми мы будем иметь дело в этом параграфе, то в дальнейшем для упрощения записи мы всюду будем опускать индекс *out*.

Рассмотрим общий случай системы фермионов с асимптотическими полями $\psi_\lambda(x)$ и бозонов с полями $\varphi_\rho(x)$ (индексы λ и ρ обозначают сорт частицы; для частицы со спином $1/2$ поле ψ_λ имеет еще спинорный индекс α, принимающий четыре значения).

Поля φ и ψ обладают всеми свойствами свободных полей. В частности, когда бозоны имеют спин 0, а фермион — спин $1/2$, поля φ и ψ связаны с операторами рождения и уничтожения $a^*(p)$ и $b_\zeta^{(*)(\pm)}(p)$ формулами типа (3.4.8) и (3.4.33), причем имеют место перестановочные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} [\varphi_\rho(x),\ a^*_\sigma(p)] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta_{\rho\sigma}\,\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\omega}},\\ [a_\sigma(p),\ \varphi_\rho(x)] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta_{\rho\sigma}\,\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\omega}}, \end{aligned}\right\}\quad (\omega \equiv \omega_p = \sqrt{m^2+p^2}); \tag{4.3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\psi_\lambda(x),\ b^{(+)}_{\lambda'\zeta}(p)\right]_+ = \left[\psi_\lambda(x),\ b^{*(-)}_{\lambda'\zeta}(p)\right]_+ =\\ &\qquad = \left[\bar\psi_\lambda(x),\ b^{*(+)}_{\lambda'\zeta}(p)\right]_+ = \left[\bar\psi_\lambda(x),\ b^{(-)}_{\lambda'\zeta}(p)\right]_+ = 0,\\ &\left[\psi_\lambda(x),\ b^{*(+)}_{\lambda'\zeta}(p)\right]_+ = \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta_{\lambda\lambda'}v^{(+)}_{\lambda\zeta}(p)\,\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{\omega}},\\ &\left[\psi_\lambda(x),\ b^{(-)}_{\lambda'\zeta}(p)\right]_+ = \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta_{\lambda\lambda'}v^{(-)}_{\lambda\zeta}(p)\,\frac{e^{ipx}}{\sqrt{\omega}},\\ &\left[\bar\psi_\lambda(x),\ b^{*(-)}_{\lambda'}(p)\right]_+ = \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta_{\lambda\lambda'}\tilde v^{(-)}_{\lambda\zeta}(p)\,\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{\omega}},\\ &\left[\bar\psi_\lambda(x),\ b^{(+)}_{\lambda'}(p)\right]_+ = \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta_{\lambda\lambda'}\tilde v^{(+)}_{\lambda\zeta}(p)\,\frac{e^{ipx}}{\sqrt{\omega}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.2}$$

Предположим теперь, что оператор рассеяния S является функционалом от полей $\bar{\psi}_\lambda$, $\psi_{\lambda'}$ и φ_ρ, который может быть записан в виде ряда по нормальным произведениям:

$$S=\sum_{\substack{\lambda,\lambda',\rho\\ k,n}}\int\ldots\int S_{\lambda_1\ldots\lambda_k;\,\lambda'_1\ldots\lambda'_k;\,\rho_1\ldots\rho_n}\times$$
$$\times(x_1,\ldots,x_k;\,x'_1,\ldots,x'_k;\,y_1,\ldots,y_n){:}\,\bar{\psi}_{\lambda_1}(x_1)\ldots$$
$$\ldots\bar{\psi}_{\lambda_k}(x_k)\psi_{\lambda'_1}(x'_1)\ldots\psi_{\lambda'_k}(x'_k)\varphi_{\rho_1}(y_1)\ldots\varphi_{\rho_n}(y_n){:}\,d^4x_1\ldots d^4y_n\equiv$$
$$\equiv\sum_\nu\int\ldots\int S_\nu(x_1\alpha_1,\ldots,x_\nu\alpha_\nu){:}\,\chi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\chi_{\alpha_\nu}(x_\nu){:}\,d^4x\ldots d^4x_\nu,\tag{4.3.3}$$

где $S_\nu\equiv S_{\lambda_1\ldots\rho_n}$ — числовые (вообще говоря, обобщенные) функции, а χ_α — общее обозначение для спинорных полей $\bar{\psi}_\lambda$ и $\psi_{\lambda'}$ и для бозонных полей φ_ρ.

Напомним, что нормальное произведение операторов свободных полей $\bar{\psi}$, ψ и φ определяется как произведение, в котором все операторы рождения $b^{*(\pm)}_{\lambda\zeta}$ и a^*_ρ стоят слева от всех операторов уничтожения $b^{(\pm)}_{\lambda\zeta}$ и a_ρ. Из определения следует, что под знаком нормального произведения бозонные поля коммутируют между собой и с фермионными полями, а фермионные поля антикоммутируют между собой. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что числовые функции $S_{\lambda_1\ldots\rho_n}$ симметричны относительно аргументов $y_j\rho_j$ и антисимметричны по $x_k\lambda_k$ и $x'_l\lambda'_l$.

Теперь мы хотим сформулировать все требования локальной теории в терминах оператора S и асимптотических обобщенных векторов состояний

$$|\,p_1\alpha_1\ldots p_F\alpha_F;\,q_1\rho_1\ldots q_n\rho_n\rangle=$$
$$=b^{*(\varepsilon_1)}_{\lambda_1\zeta_1}(p_1)\ldots b^{*(\varepsilon_F)}_{\lambda_F\zeta_F}(p_F)\,a^*_{\rho_1}(q_1)\ldots a^*_{\rho_n}(q_n)|0\rangle,\tag{4.3.4}$$

где $\alpha_i=\{\lambda_i,\zeta_i,\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i=\pm$ (ср. с (3.4.21) и (3.4.41)).

Перечислим сначала *общие свойства* S-матрицы, для формулировки которых не требуется выход за массовую поверхность.

1) *В оснащенном гильбертовом пространстве* $\Omega\subset\mathcal{H}\subset\Omega^*$ *асимптотических состояний реализуется унитарное представление* $U(g)$ *некоторой группы* G, *включающей в качестве подгруппы собственную спинорную группу Пуанкаре* $\mathfrak{P}_0$ *и группу гра-*

...иентных преобразований первого рода для фермионных полей:

$$\psi_\lambda(x) \to e^{i\alpha}\psi_\lambda(x), \quad \tilde{\psi}_\lambda(x) = e^{-i\alpha}\tilde{\psi}_\lambda(x), \quad \alpha = \text{const}. \qquad (4.3.5)$$

Действие группы Пуанкаре на векторы состояния описано в гл. 2, п. 5.2. Мы напомним лишь действие оператора трансляции на обобщенные состояния (4.3.4)

$$U(a)|p_1\alpha_1 \ldots p_F\alpha_F;\ q_1\rho_1 \ldots q_n\rho_n\rangle =$$
$$= \exp\left\{i\left(\sum_{j=1}^{F} p_j + \sum_{k=1}^{n} q_k\right)a\right\}|p_1\alpha_1 \ldots q_n\rho_n\rangle, \qquad (4.3.6)$$
$$p_j^0 = \sqrt{M_j^2 + \mathbf{p}_j^2}, \qquad q_k^0 = \sqrt{m_k^2 + \mathbf{q}_k^2},$$

где M_j — массы фермионов, m_k — массы бозонов. В соответствии с представлением о пространственно разделенных, невзаимодействующих асимптотических частицах, энергия и импульс $\nu+n$-частичного состояния складываются из 4-импульсов отдельных частиц.

Согласно (4.1.16) поля $\chi_\alpha(x)$ при трансляции преобразуются по формуле

$$\chi_\alpha(x+a) = U(a)\chi_\alpha(x)U^{-1}(a). \qquad (4.3.6a)$$

При градиентных преобразованиях (4.3.5) векторы состояния умножаются на фазовый множитель, зависящий от разности числа фермионов и числа антифермионов:

$$U(e^{i\alpha})|p_1\alpha_1 \ldots q_n\rho_n\rangle = e^{-i\alpha\sum\limits_{j=1}^{F}\varepsilon_j}|p_1\alpha_1 \ldots q_n\rho_n\rangle. \qquad (4.3.7)$$

В теории сильных взаимодействий принято считать, что группа G содержит еще дискретные преобразования P, C и T и группу изотопического спина *).

Будем предполагать, что оператор S инвариантен относительно всех преобразований $U(g)$:

$$U(g)SU^{-1}(g) = S \qquad (4.3.8)$$

(при $g \in \mathfrak{P}_0$ (4.3.8) совпадает с соотношением (4.1.55), выведенным в подходе Уайтмана).

Отметим, что инвариантность относительно градиентных преобразований (4.3.5), (4.3.7) уже заложена в записи (4.3.3), где число полей ψ_λ в каждом слагаемом равно числу полей $\tilde{\psi}_\lambda$.

*) Группа изотопического спина — это группа $SU(2)$, действующая на индексы λ и ρ, которые указывают вид частицы (см., например, [8] или Боголюбов (1966)). В этом томе мы не будем рассматривать изотопическую симметрию.

В случае, когда рассматриваются только адронные*) поля, эта инвариантность выражает закон сохранения барионного числа. Для лептонных полей она отражает закон сохранения лептонного заряда. В общем случае условие (4.3.8), включающее градиентную и лоренцевскую инвариантность, приводит к тому, что S-матричные элементы преобразуются по однозначному представлению собственной группы Пуанкаре $\mathfrak{P}_+^\uparrow$.

2) В записи (4.3.6) представления преобразований трансляции уже содержится *постулат спектральности.* Вместе с *требованием полноты системы асимптотических состояний,* которое кладется в основу всего S-матричного подхода (см. постулат VIII, п. 1.5), условие спектральности может быть сформулировано в форме, тождественной с условием III (гл. 2, п. 3.2). Сильная форма постулата спектральности, относящаяся к теории адронов, может быть сформулирована следующим образом: *существует единственное нормируемое G-инвариантное состояние — вакуум* $|0\rangle$, *и совокупность обобщенных физических состояний типа* (4.3.4) (*с положительными массами и энергиями*), *которая вместе с вакуумом образует полную систему в* Ω^* (*и, следовательно, в* $\mathscr{H}$). Эта практическая формулировка постулата спектральности часто используется при разложении матричного элемента произведения двух операторов A и B по полной системе промежуточных состояний, которое несколько символично записывается в виде

$$\langle\alpha|AB|\beta\rangle = \langle\alpha|A|0\rangle\langle 0|B|\beta\rangle + \sum_n \int d^3k\, \langle\alpha|A|nk\rangle\langle nk|B|\beta\rangle, \tag{4.3.9}$$

где k — суммарный трехмерный импульс промежуточного состояния, а n — совокупность всех остальных (дискретных и непрерывных) квантовых чисел, которые вместе с k полностью характеризуют промежуточное состояние.

3) *Вакуум и одночастичные состояния являются стабильными:*

$$S|0\rangle = |0\rangle, \qquad S|1\rangle = |1\rangle, \tag{4.3.10}$$

где $|1\rangle$ — произвольное состояние одной физической частицы (ср. со свойством (4.1.20) в теории Хаага — Рюеля).

4) Вероятность перехода между нормируемыми состояниями $|\Phi\rangle$ и $|\Psi\rangle$ дается выражением $|\langle\Phi|S|\Psi\rangle|^2$. Для того чтобы суммарная вероятность перехода из состояния $|\Psi\rangle$ в любое

*) *Адронами* называются сильно взаимодействующие частицы: барионы (т. е. нуклоны и гипероны) и π- и K-мезоны. В эту схему нельзя, строго говоря, включить адронные резонансы (например, векторные мезоны), поскольку они сильно нестабильны и не имеют соответствующих асимптотических полей.

другое состояние равнялась 1, необходимо потребовать, чтобы S-оператор был *унитарным*:

$$SS^* = S^*S = 1. \tag{4.3.11}$$

3.3. Вариационные производные S-оператора и принцип микропричинности. Определим вариационную производную по полю $\varphi_\rho(x)$ от функционального ряда (4.3.3) формулой

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} = \sum_{\substack{\{\lambda, \lambda', \rho\}\\ k, n}} \sum_{j=1}^{n} \delta_{\rho\rho_j} \int \dots \int S_{\lambda_1 \dots \lambda_k \lambda'_1 \dots \lambda'_k \rho_1 \dots \rho_n} \times$$
$$\times (x_1, \dots, x_k;\ x'_1, \dots, x'_k;\ y_1, \dots, y_j = x, \dots, y_n) \times$$
$$\times : \prod_{l=1}^{k} \prod_{\substack{i=1\\ i \neq j}}^{n} \left\{ \bar\psi_{\lambda_l}(x_l)\, \psi_{\lambda'_l}(x'_l)\, \varphi_{\rho_i}(y_i) \right\} : d^4x_1 \dots \widehat{d^4y_j} \dots d^4y_n. \tag{4.3.12}$$

Вариационные производные по спинорным полям определяются формулами:

$$\frac{\delta S}{\delta\bar\psi_\lambda(x)} = \sum_{\substack{\{\lambda, \lambda', \rho\}\\ k, n}} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \delta_{\lambda\lambda'_l} \int \dots \int S_{\lambda_1 \dots \lambda_k \lambda'_1 \dots \lambda'_k \rho_1 \dots \rho_n} \times$$
$$\times (x_1 \dots x_k;\ x'_1, \dots, x'_l = x, \dots, x'_k;\ y_1, \dots, y_n) \times$$
$$\times : \prod_{r=1}^{k} \prod_{\substack{i=1\\ i \neq l}}^{k} \prod_{j=1}^{n} \bar\psi_{\lambda_r}(x_r)\, \psi_{\lambda'_i}(x'_i)\, \varphi_{\rho_j}(y_j) : d^4x_1 \dots \widehat{d^4x'_l} \dots d^4y_n, \tag{4.3.13}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\psi_\lambda(x)} = \sum_{\substack{\{\lambda, \lambda', \rho\}\\ k, n}} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} \delta_{\lambda\lambda_l} \int \dots \int S_{\lambda_1 \dots \lambda_k \lambda'_1 \dots \lambda'_k \rho_1 \dots \rho_n} \times$$
$$\times (x_1, \dots, x_l = x, \dots, x_k;\ x'_1 \dots x'_k;\ y_1 \dots y_n) \times$$
$$\times : \prod_{\substack{i=1\\ i \neq l}}^{k} \prod_{r=1}^{k} \prod_{j=1}^{n} \bar\psi_{\lambda_i}(x_i)\, \psi_{\lambda'_r}(x'_r)\, \varphi_{\rho_j}(y_j) : d^4x_1 \dots \widehat{d^4x_l} \dots d^4y_n \tag{4.3.14}$$

(дуга над дифференциалом в формулах (4.3.12)—(4.3.14) означает, что этот дифференциал нужно опустить).

Здесь мы предполагаем, что под знаком нормального произведения в (4.3.12)—(4.3.14), так же как и в (4.3.2), сначала стоят все поля $\bar{\psi}_\lambda$, а затем идут поля ψ_λ, (в противном случае пришлось бы, возможно, изменить знак соответствующего члена).

Эти определения вариационных производных соответствуют тому, что бозонные поля получают «классические» приращения, коммутирующие со всеми полями, в то время как фермионные поля получают приращения, строго антикоммутирующие под знаком нормального произведения с фермионными полями. Кроме того, мы условились приращения полей ψ_λ выводить справа в нормальном произведении, а приращения $\tilde{\varphi}_\lambda$ писать слева (иногда говорят, что (4.3.13) определяет *правую производную* по ψ_λ, а (4.3.14) — *левую производную* по $\tilde{\varphi}_\lambda$; см. [4], § 47.1). При данном определении вариационные производные по бозонным полям перестановочны, а левые (правые) производные по спинорным полям антиперестановочны:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_{\rho'}(y)} &= \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(y)\,\delta\varphi_\rho(x)}, \\ \frac{\delta^2 S}{\delta\psi_\lambda(x)\,\delta\psi_{\lambda'}(y)} &= -\frac{\delta^2 S}{\delta\psi_{\lambda'}(y)\,\delta\psi_\lambda(x)}, \\ \frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}_\lambda(x)\,\delta\bar{\psi}_{\lambda'}(y)} &= -\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}_{\lambda'}(y)\,\delta\bar{\psi}_\lambda(x)}, \\ \frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}_\lambda(x)\,\delta\psi_{\lambda'}(y)} &= \frac{\delta^2 S}{\delta\psi_{\lambda'}(y)\,\delta\bar{\psi}_\lambda(x)}. \end{aligned} \qquad (4.3.15)$$

Вариационные производные возникают естественно при рассмотрении матричных элементов

$$\langle p_1\alpha_1 \ldots p_F\alpha_F;\ q_1\rho_1 \ldots q_n\rho_n \,|\, S \,|\, p'_1\alpha'_1 \ldots p'_{F'}\alpha'_{F'};\ q'_1\rho'_1 \ldots q'_{n'}\rho'_{n'}\rangle =$$
$$= \langle 0 | b^{(\varepsilon_1)}_{\lambda_1\zeta_1}(p_1) \ldots a_{\rho_n}(q_n)\, S\, \overset{*}{b}{}^{(\varepsilon'_1)}_{\lambda'_1\zeta'_1}(p'_1) \ldots a^*_{\rho'_{n'}}(q'_{n'}) | 0\rangle. \qquad (4.3.16)$$

Коммутаторы операторов рождения и уничтожения с S-оператором, которые получаются при перенесении операторов рождения налево, а операторов уничтожения направо, имеют вид

$$[S,\ a^*_\rho(q)] = \int \frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} [\varphi_\rho(x),\ a^*_\rho(q)]\, d^4x = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2\omega_q}}\, d^4x, \qquad (4.3.17)$$

$$
\begin{aligned}
&[a_\rho(q),\ S] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(x)} \frac{e^{iqx}}{\sqrt{2\omega_q}}\, d^4x;\\
&\left[S,\ b^{*(+)}_{\lambda\zeta}(p)\right] = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\,\omega_p}} \int \frac{\delta S}{\delta \varphi_\lambda(x)}\, v^{(+)}_{\lambda\zeta}(p)\, e^{-ipx}\, d^4x,\\
&\left[S,\ b^{*(-)}_{\lambda\zeta}(p)\right] = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\,\omega_p}} \int \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}_\lambda(x)}\, \bar{v}^{(-)}_{\lambda\zeta}(p)\, e^{-ipx}\, d^4x, \qquad (4.3.18)\\
&\left[b^{(+)}_{\lambda\zeta}(p),\ S\right] = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\,\omega_p}} \int \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}_\lambda(x)}\, \bar{v}^{(+)}_{\lambda\zeta}(p)\, e^{ipx}\, d^4x,\\
&\left[b^{(-)}_{\lambda\zeta}(p),\ S\right] = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\,\omega_p}} \int \frac{\delta S}{\delta \psi_\lambda(x)}\, v^{(-)}_{\lambda\zeta}(p)\, e^{ipx}\, d^4x.
\end{aligned}
$$

Упражнение 4.3.1. Вывести (4.3.17) и (4.3.18), пользуясь разложением S-оператора (4.3.3) и перестановочными соотношениями (4.3.1), (4.3.2). (При выводе формул (4.3.18) необходимо воспользоваться тем, что общее число спинорных полей в каждом члене разложения (4.3.3) четно. Отметим, что в (4.3.18) *коммутаторы* операторов $b^{(*)}$ с S выражаются через *антикоммутаторы* этих операторов с полями Ψ.)

Теперь мы подошли к весьма существенному вопросу принципиального характера.

Хотя мы определили вариационные производные от S-матрицы и вывели формально соотношения (4.3.17) и (4.3.18), как будто бы без экстраполяции вне массовой поверхности (более того, мы использовали, что φ_ρ и ψ_λ удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям для свободных полей с фиксированной массой), однако при ближайшем рассмотрении нетрудно убедиться, что само понятие вариационной производной с необходимостью требует выхода за массовую поверхность.

Дело в том, что, зная интегралы (4.4.3) от полей φ_ρ и ψ_λ, удовлетворяющих «свободным уравнениям» (или, другими словами, зная S-матричные элементы между всевозможными физическими асимптотическими состояниями), мы не можем однозначно восстановить коэффициентные функции $S_{\lambda_1 \ldots \rho_n}(x_1, \ldots, y_n)$, при помощи которых определяются вариационные производные. Действительно, если $(\Box_{y_n} + m^2)\varphi_{\rho_n}(y_n) = 0$, то при добавлении к $S_{\lambda_1 \ldots \rho_n}$ функции вида $(\Box_{y_n} + m^2) \times \times K(x_1 \ldots y_n)$, где K убывает достаточно быстро, когда y_n стремится к бесконечности, интеграл, входящий в (4.3.3), не изменится (поскольку интегрированием по частям клейниан можно перебросить на поле φ_{ρ_n}).

Итак, чтобы определить вариационные производные (4.3.12)—(4.3.14), нам необходимо экстраполировать матрицу рассеяния вне массовой поверхности. Ясно, что подобная экстраполяция в высшей степени неоднозначна. Произвол можно несколько сузить, если потребовать, чтобы экстраполированный S-оператор по-прежнему удовлетворял условиям инвариантности и унитарности и чтобы вакуум и физические (неэкстраполированные!) одночастичные состояния оставались стабильными под его действием. В частности, дифференцируя условие унитарности (4.3.11), будем иметь

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(x)} S^* = -S \frac{\delta S^*}{\delta \varphi_\rho(x)}. \tag{4.3.19}$$

Дальнейшее значительное сужение произвола в продолжении S-матрицы за массовую поверхность мы получим при наложении перечисленных ниже *локальных свойств* S-матрицы, которые на самом деле содержат и дополнительную информацию относительно матричных элементов на массовой поверхности.

1) Прежде всего мы потребуем, чтобы *перестановочные соотношения* (4.3.17) *и* (4.3.18), которые были выведены с использованием канонических перестановочных соотношений для свободных полей, *имели место и для экстраполированной S-матрицы, когда больше не предполагается, что поля φ_ρ и ψ_λ*, входящие в разложение (4.3.3), *удовлетворяют свободным уравнениям.*

Это позволит нам свести произвольный S-матричный элемент (4.3.16) к вакуумному среднему от *радиационного оператора* типа

$$H_n(x_1\alpha_1, \ldots, x_n\alpha_n) = \frac{\delta^n S}{\delta\chi_{\alpha_1}(x_1) \ldots \delta\chi_{\alpha_n}(x_n)} S^*, \tag{4.3.20}$$

где χ_{α_j}, как и в (4.3.3), одно из полей $\bar{\psi}_\lambda$, ψ_λ, или φ_ρ. Возможность умножения вариационной производной на S^* под знаком вакуумного среднего обусловлена стабильностью вакуума (4.3.10). Удобство использоваиия радиационных операторов типа (4.3.20) станет ясным в дальнейшем.

Упражнение 4.3.2. Показать, что коэффициентные функции S_ν в (4.3.3) выражаются через радиационные операторы (4.3.20) по формуле

$$S_{\lambda_1 \ldots \lambda_k \lambda'_1 \ldots \lambda'_k \rho_1 \ldots \rho_n}(x_1, \ldots, x_k; x'_1, \ldots, x'_k; y_1, \ldots, y_n) =$$
$$= \frac{1}{k!^2 n!} \langle 0 | H_{2k+n}(x_1\lambda_1, \ldots, x_k\lambda_k; x'_1\lambda'_1 \ldots x'_k\lambda'_k; y_1\rho_1 \ldots y_n\rho_n) | 0 \rangle. \tag{4.3.21}$$

Радиационные операторы по определению симметричны относительно перестановки «бозонных аргументов» $y_j\rho_j$ и антисимметричны относительно перестановки «фермионных аргументов» $x_i\lambda_i$ (или $x'_i\lambda'_i$) между собой. В дальнейшем мы будем употреблять термин «радиационные операторы» также для обозначения выражений более общего вида, являющихся произведениями вариационных производных от S и S^*, например выражения типа $\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} H_\nu(x_1, \ldots, x_\nu)$.

2) Естественно считать, что радиационные операторы являются обобщенными операторными функциями. В частности, мы потребуем, чтобы *вакуумные средние от операторов* (4.3.20) *принадлежали пространству* $\mathcal{S}^*(R_{4n})$, *т. е. были обобщенными функциями умеренного роста.*

В п. 5 данного параграфа мы обсудим физические следствия из этого, на первый взгляд, чисто формального требования и рассмотрим возможные обобщения условия 2) и их связь с условием микропричинности.

3) *Условие микропричинности.* Определим операторы бозонного и фермионного токов через радиационные операторы первого порядка равенствами:

$$
\begin{aligned}
j_\rho(x) &= i\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}\,S^*,\\
J_\lambda(x) &= -i\,\frac{\delta S}{\delta\bar\psi_\lambda(x)}\,S^*, \qquad\qquad (4.3.22)\\
\tilde J_\lambda(x) &= i\,\frac{\delta S}{\delta\psi_\lambda(x)}\,S^*.
\end{aligned}
$$

Происхождение этого названия можно найти в лагранжевой форме квантовой электродинамики. Лагранжиан взаимодействия в этом случае пишется в виде

$$\mathcal{L}(x) = -:j^\mu(x)\,A_\mu(x):,$$

где

$$j^\mu(x) = -e:\bar\psi(x)\,\gamma^\mu\psi(x): = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)}. \qquad (4.3.23)$$

Положив, как обычно, $S = T\left\{\exp\left(i\int\mathcal{L}(x)\,d^4x\right)\right\}$, нетрудно убедиться, что в первом порядке теории возмущений (по константе связи e) радиационный оператор

$$i\,\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)}\,S^*$$

совпадает с электромагнитным током (4.3.23).

Нетрудно видеть, пользуясь следствием (4.3.19) условия унитарности, что если бозонное поле $\varphi_\rho(x)$ эрмитово, то ток j_ρ тоже эрмитов.

Пусть $H(x)$ — какой-нибудь из токов (4.3.22), а $\chi(y)$, как и выше, — одно из полей $\bar\psi_\lambda$, ψ_λ, или φ_ρ. Тогда *условие* *микропричинности* записывается в виде

$$\frac{\delta H(x)}{\delta\chi(y)}=0 \quad \text{при} \quad y \lesssim x. \tag{4.3.24}$$

(Напомним, что $y \lesssim x$ означает, что точка y предшествует или пространственноподобна точке x: либо $(x-y)^2 \geqslant 0$ и $x^0 > y^0$, либо $(x-y)^2 < 0$.)

Это условие является обобщением лагранжевой формулировки квантовой теории поля: в обычной теории с локальным лагранжианом оно выполняется автоматически.

Упражнение 4.3.3. Пусть $\mathscr{L}(x)$ — локальная функция от асимптотических полей $\chi_\alpha(x)$ (т. е. зависит только от поведения этих полей в точке x), причем сохраняет свой смысл и в случае, если $\chi_\alpha(x)$ не удовлетворяют свободным уравнениям. Пусть, далее, S-оператор определяется хронологической экспонентой

$$S=T\left[\exp\{i\mathscr{L}(x)\,d^4x\}\right]. \tag{4.3.25}$$

(Мы допускаем, что $\mathscr{L}(x)$ и S имеют смысл.) Показать, что тогда условие причинности (4.3.24) выполняется автоматически. Другими словами, в этом случае справедливо тождество

$$\frac{\delta}{\delta\chi_\beta(y)}\left\{\frac{\delta S}{\delta\chi_\alpha(x)}S^*\right\}=0 \quad \text{при} \quad y\lesssim x. \tag{4.3.26}$$

Тот факт, что выражение S-оператора в виде T-экспоненты от локального лагранжиана действительно отражает наше интуитивное представление о причинности, подробно обсуждается в монографии [4], и мы не будем здесь останавливаться на нем. Вместо этого мы приведем формулы, дающие соответствие с формулировкой ЛСЦ, которые поясняют наши требования с другой точки зрения.

3.4. Связь с теорией ЛСЦ. Искомое соответствие получается, если отождествить токи (4.3.22) с токами типа (4.2.5). В частности, для бозонных полей и токов имеем

$$j_\rho(x)=i\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho^{out}(x)}S^*=(\Box+m^2)\boldsymbol{\varphi}_\rho(x) \tag{4.3.27}$$

(во избежание недоразумения, здесь мы восстановили индекс *out* у асимптотического поля, а для обозначения гайзенбергова поля $\boldsymbol{\varphi}_\rho$ воспользовались полужирным шрифтом).

Мы покажем, что, по крайней мере формально (игнорируя нетривиальные вопросы существования произведения разрывной θ-функции на операторные обобщенные функции и т. п.), из требований, наложенных на S-матрицу и ее вариационные производные, вытекают локальные свойства гайзенберговых полей $\boldsymbol{\varphi}_\rho$, которые связаны с токами j_ρ уравнениями Янга — Фельдмана (4.2.6), и обратно, постулаты ЛСЦ (включая уравнения (4.2.6)) вместе с (4.3.27) приводят к таким следствиям для матричных элементов токов на массовой поверхности, которые обусловливают возможность микропричинной экстраполяции S-матрицы. Для простоты мы будем проводить рассуждения лишь для случая системы бозонных полей.

Начнем с установления некоторых тождеств между радиационными операторами второго порядка в подходе БМП, из которых, в частности, будет следовать локальная коммутативность токов (4.3.22).

Дифференцируя по $\varphi_\sigma(y) \equiv \varphi_\sigma^{out}(y)$ равенство

$$j_\rho(x) = i \frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(x)} S^*$$

и пользуясь (4.3.11) и (4.3.19), получаем

$$\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta \varphi_\sigma(y)} = i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_\sigma(y)\, \delta \varphi_\rho(x)} S^* + i \frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(x)} S^* S \frac{\delta S^*}{\delta \varphi_\sigma(y)} =$$

$$= i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_\sigma(y)\, \delta \varphi_\rho(x)} S^* + i j_\rho(x) j_\sigma(y); \qquad (4.3.28а)$$

аналогично

$$\frac{\delta j_\sigma(y)}{\delta \varphi_\rho(x)} = i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_\rho(x)\, \delta \varphi_\sigma(y)} S^* + i j_\sigma(y) j_\rho(x). \qquad (4.3.28б)$$

Вычитая (4.3.28б) из (4.3.28а) и пользуясь перестановочностью вариационных производных по бозонным полям, находим

$$\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta \varphi_\sigma(y)} - \frac{\delta j_\sigma(y)}{\delta \varphi_\rho(x)} = i [j_\rho(x),\ j_\sigma(y)]. \qquad (4.3.29)$$

Отсюда и из условия причинности следует, что операторы токов коммутируют для пространственноподобных интервалов. Далее, если применить условие причинности (4.3.26) непосредственно к (4.3.28) при $x \neq y$, находим связь второй вариационной производной с T-произведением токов

$$H_2(x\rho,\ y\sigma) \equiv \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_\rho(x)\, \delta \varphi_\sigma(y)} S^* = -T(j_\rho(x) j_\sigma(y)).$$

Отсюда следует, что при всех x и y

$$H_2(x\rho,\ y\sigma) = -T(j_\rho(x) j_\sigma(y)) - i\Lambda_{\rho\sigma}(x,\ y), \qquad (4.3.30)$$

где $\Lambda_{\rho\sigma}$ — *квазилокальный оператор*:

$$\Lambda_{\rho\sigma}(x,\ y) \equiv \Lambda_{\sigma\rho}(y,\ x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq y. \qquad (4.3.31)$$

Упражнение 4.3.4. Показать, что если поля φ_ρ эрмитовы, то и квазилокальный оператор $\Lambda_{\rho\sigma}$ эрмитов. (Указание: взять вариационную производную $\frac{\delta}{\delta\varphi_\sigma(y)}$ от (4.3.19) и сравнить полученное тождество с (4.3.30) и с эрмитово сопряженным равенством.)

Если расписать T-произведение согласно (4.2.10):

$$T\left(j_\rho(x)\, j_\sigma(y)\right) = \theta_{xy} j_\rho(x)\, j_\sigma(y) + \theta_{yx} j_\sigma(y)\, j_\rho(x), \tag{4.3.32}$$

где $\theta_{xy} \equiv \theta(x^0 - y^0)$, то подстановка (4.3.30) в (4.3.28) даст

$$\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)} = i\theta_{yx}\left[j_\rho(x),\ j_\sigma(y)\right] + \Lambda_{\rho\sigma}(x,\ y). \tag{4.3.33}$$

Теперь мы переходим к установлению эквивалентности локальных свойств в формулировках ЛСЦ и БМП (заметим, что общие свойства инвариантности, унитарности и пр. фактически тождественны в обеих формулировках).

Пусть справедливы постулаты БМП. Мы уже показали, что из условия микропричинности следует локальная коммутативность токов. Теперь, пользуясь определением поля φ_ρ из уравнения Янга — Фельдмана (4.2.6)

$$\varphi_\rho(x) = \varphi_\rho^{out}(x) + \int D_{m_\rho}^{adv}(x-y)\, j_\rho(y)\, d^4y \tag{4.3.34}$$

и локальными постулатами БМП, мы покажем, что

$$\left[\varphi_\rho(x),\ j_\sigma(y)\right] = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0. \tag{4.3.35}$$

Прежде всего заметим, что из разложения S-матрицы по асимптотическим полям (4.3.3) и из перестановочных соотношений для свободных полей $\varphi_\rho^{out}(x)$ (3.4.2) вытекает равенство

$$\left[\varphi_\rho^{out}(x),\ j_\sigma(y)\right] = -i\int D_{m_\rho}(x-x')\,\frac{\delta j_\sigma(y)}{\delta\varphi_\rho^{out}(x')}\, d^4x'. \tag{4.3.36}$$

Пользуясь (4.3.33), (4.3.36) и равенством

$$D_m(x) = D_m^{ret}(x) - D_m^{adv}(x), \tag{4.3.37}$$

получаем

$$\begin{aligned}\left[\varphi_\rho(x),\ j_\sigma(y)\right] &= \\ &= \int \left\{D_{m_\rho}^{ret}(x-x')\,\theta_{x'y} - D_{m_\rho}^{adv}(x-x')\,\theta_{yx'}\right\}\left[j_\rho(x'),\ j_\sigma(y)\right] d^4x' - \\ &\quad - i\int D_{m_\rho}(x-x')\,\Lambda_{\rho\sigma}(x',\ y)\, d^4x'.\end{aligned} \tag{4.3.38}$$

В силу свойств запаздывающих и опережающих функций член с D^{ret} в правой части (4.3.38) отличен от нуля лишь при $x > y$, в то время как член с D^{adv} не исчезает только при $y < x$. Слевательно, два первых члена в (4.3.38) обращаются в нуль при пространственноподобных $x-y$. Последний член в правой части тоже исчезает в силу свойства квазилокальности (4.3.31), так как перестановочная функция Паули — Иордана $D_m(x-y)$ обращается в нуль для пространственноподобных аргументов. Таким образом, свойство локальной коммутативности (4.3.35) установлено.

Аналогично, при помощи несколько более длинных выкладок, доказывается, что

$$[\varphi_\rho(x),\ \varphi_\sigma(y)]=0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2<0. \tag{4.3.39}$$

Итак, локальные свойства в теории ЛСЦ являются следствием постулатов ВМП и определения гайзенбергова поля (4.3.34).

Пусть теперь дано условие локальной коммутативности (4.3.39), ток j_ρ определен как клейниан от поля φ_ρ (см. (4.3.27)), а асимптотическое условие задано в виде уравнения Янга — Фельдмана (4.3.34). Предположим, далее, что ток j_ρ выражается через вариационную производную от S-матрицы (4.3.22), где унитарная S-матрица задана в виде функционального ряда типа (4.3.3) от асимптотических полей φ_σ^{out}, так что коммутатор out-поля с током опять дается равенством (4.3.36). Покажем, что при этих предположениях можно так распорядиться свободой при экстраполяции S-матрицы вне массовой поверхности, чтобы выполнялось условие микропричинности (4.3.24).

Для этого сначала вновь представим вариационную производную $\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)}$ в виде (4.3.33), рассматривая на этот раз $\Lambda_{\rho\sigma}(x,\ y)$ как произвольный оператор, свойства которого подлежат определению. Нашей целью будет показать, что из локальной коммутативности поля с током (4.3.35), являющейся следствием (4.3.39) и (4.3.27), следует квазилокальность оператора $\Lambda_{\rho\sigma}$ (т. е. условие (4.3.31)) на массовой поверхности. Ясно, что тогда оператор $\Lambda_{\rho\sigma}$ может быть продолжен как квазилокальный оператор и вне массовой поверхности, что вместе с (4.3.33) обеспечит выполнение условия микропричинности.

В силу равенства (4.3.38), которое имеет место в общем случае, условие (4.3.35) может быть записано в виде

$$\int D_{m_\rho}(x-x')\,\Lambda_{\rho\sigma}(x',\ y)\,d^4x'=0 \quad \text{при} \quad x\sim y. \tag{4.3.40}$$

Как уже отмечалось выше, условие (4.3.40) удовлетворяется, если $\Lambda_{\rho\sigma}$ — квазилокальный оператор. Нам необходимо установить менее тривиальную связь в обратную сторону: из формулы (4.3.40) вывести некоторые свойства типа квазилокальности оператора $\Lambda_{\rho\sigma}$. Прежде всего, мы воспользуемся условием трансляционной инвариантности теории, из которой следует, что

$$\Lambda_{\rho\sigma}(x, y) = e^{iPy}\Lambda_{\rho\sigma}(x-y, 0)\, e^{-iPy}, \qquad (4.3.41)$$

где P — оператор энергии импульса.

Матричный элемент от (4.3.41) между двумя произвольными состояниями с импульсами p' и p может быть записан в виде

$$\langle p'|\Lambda_{\rho\sigma}(x, y)|p\rangle = e^{i(p'-p)y}\lambda(x-y), \qquad (4.3.42)$$

где

$$\lambda(x) = \langle p'|\Lambda_{\rho\sigma}(x, 0)|p\rangle \qquad (4.3.43)$$

(естественно, что λ, кроме как от x, зависит еще от p, p', ρ и σ; поскольку сейчас эта зависимость не будет интересовать нас, мы не будем загромождать обозначения этими аргументами).

Взяв матричный элемент между состояниями $\langle p'|$ и $|p\rangle$ от равенства (4.3.40) и учитывая (4.3.42), (4.3.43), получаем

$$f(x-y) \equiv \int D_m(x-x')\,\lambda(x'-y)\, d^4x' = 0 \quad \text{при} \quad x \sim y.$$

В силу (3.4.3) фурье-образ функции $f(x)$ сосредоточен на гиперболоиде $k^2 = m^2$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \varepsilon(k^0)\,\delta(k^2-m^2)\,\tilde{\lambda}(k)\, e^{ikx} d^4k, \qquad (4.3.44)$$

где

$$\tilde{\lambda}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \lambda(y)\, e^{-iky} d^4y.$$

Дальнейшее рассуждение основано на следующей лемме.

Лемма 4.3.1. *Пусть обобщенная функция $f(x)$ из $\mathscr{S}^*(R_4)$, допускающая представление* (4.3.44), *исчезает при пространственноподобных x. Тогда функция $\tilde{\lambda}(k)$, определенная из* (4.3.44) *на гиперболоиде $k^2 = m^2$, является полиномом от k на этом гиперболоиде.*

Доказательство. Если провести интегрирование по k^0, можно записать (4.3.44) в виде трехмерного преобразования Фурье *)

$$f(x) = \frac{1}{4\pi i}\int \left(\tilde{\lambda}(\omega_k, \mathbf{k})\, e^{i\omega_k x^0} - \tilde{\lambda}(-\omega_k, \mathbf{k})\, e^{-i\omega_k x^0}\right) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{d^3k}{\omega_k},$$

$$\omega_k = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}.$$

*) Заметим, что поскольку обобщенная функция $f \in \mathscr{S}^*(R_4)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, то ее можно рассматривать как обобщенную функцию от $\mathbf{x}$, причем $\int f(x)\, u(\mathbf{x})\, d^3\mathbf{x}$ при $u(\mathbf{x}) \in \mathscr{S}(R_3)$ является обычной дифференцируемой функцией от x^0.

Отсюда, при помощи обратного преобразования Фурье, находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\tilde\lambda(\omega_k,\ k)-\tilde\lambda(-\omega_k,\ k)] &= \frac{i}{(2\pi)^2}\,\omega_k\int f(0,\ x)\,e^{ikx}d^3x,\\ \frac{1}{2}[\tilde\lambda(\omega_k,\ k)+\tilde\lambda(-\omega_k,\ k)] &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int \dot f(0,\ x)\,e^{ikx}d^3x,\end{aligned}\qquad(4.3.45)$$

где

$$\dot f(x)\equiv\frac{\partial f(x)}{\partial x^0}.$$

Из обращения в нуль $f(x)$ при пространственноподобных аргументах следует, что функции $f(0,x)$ и $\dot f(0,x)$ сосредоточены в начале координат. Следовательно, в силу теоремы 1.2.1 (гл. 1, п. 2.4) они являются конечными линейными комбинациями $\delta(x)$ и ее производных. Отсюда и из (4.3.45) следует утверждение леммы 4.3.1.

Из этой леммы следует, что если бозонный импульс, соответствующий индексу ρ, лежит на массовой оболочке, то оператор $\Lambda_{\rho\sigma}(x,\ y)$ может считаться квазилокальным, поскольку при $k^2=m_\rho^2$

$$\int e^{ikx}\langle p'|\Lambda_{\rho\sigma}(x,\ y)|p\rangle\,d^4x=P_{\rho\sigma}(k)\,e^{i(p'-p)y},$$

а преобразование Фурье полинома есть линейная комбинация δ-функции и ее производных.

В частности, в коммутаторе

$$[j_\rho(x),\ a_\sigma^{out}(k)]=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{e^{iky}}{\sqrt{2\omega_k}}\,\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)}\,d^4y$$

при подстановке вариационной производной тока (4.3.33), с учетом условия симметрии $\Lambda_{\rho\sigma}$, можно считать этот оператор квазилокальным.

Таким образом, поведение операторной обобщенной функции $\Lambda_{\rho\sigma}$ на массовой поверхности позволяет определить ее всюду в виде квазилокального оператора и тем самым обеспечить выполнение условия микропричинности.

Подчеркнем, что наличием квазилокальных членов типа $\Lambda_{\rho\sigma}$ нельзя пренебречь в S-матричном аксиоматическом подходе. Без них нельзя получить соответствия с теорией возмущений в обычном лагранжевом формализме (см., например, Медведев и Поливанов (1961)).

Отметим, наконец, что гайзенбергово поле $\varphi(x)$ может быть выражено в терминах S-оператора и асимптотических полей не только при помощи уравнения Янга — Фельдмана, но также и формулой

$$\varphi(x) = T_W(\varphi^{out}(x) S) S^*, \tag{4.3.46}$$

где T_W — так называемое T-произведение Вика, которое определяется следующим образом. Оператор S предполагается разложенным по нормальным произведениям *out*-полей, после чего произведение $T_W(\varphi^{out}(x)S)$ определяется в соответствии с теоремой Вика о разложении T-произведения по нормальным произведениям (см., например, [4], гл. III). Напомним, что T_W-произведение для свободного скалярного поля совпадает с обычным хронологическим произведением и в простейшем случае двух сомножителей дается формулой

$$T_W(\varphi(x)\varphi(y)) = T(\varphi(x)\varphi(y)) = :\varphi(x)\varphi(y): + \frac{1}{i} D^c(x-y),$$

где D^c — причинная функция Грина (3.A.9). В общем случае, однако, T_W-произведение не совпадает с обычным хронологическим произведением (называемым иногда T-произведением Дайсона). Причина в том, что операция T_W перестановочна с дифференцированием по аргументам полей, в то время как для операции T это не так (см. более детальное обсуждение этого вопроса у Медведева и Поливанова (1964)). Равенство (4.3.46) может быть формально получено, если мы игнорируем различие между T- и T_W-произведениями и воспользуемся формализмом половинной S-матрицы (см., например, [6], гл. 17, § 4).

3.5. О выборе класса обобщенных функций, совместимом с локальными свойствами. Всюду до сих пор мы считали, что встречающиеся в теории сингулярные функции (например, функции Уайтмана, вакуумные средние от радиационных операторов и т. д.) являются обобщенными функциями умеренного роста, т. е. принадлежат пространству $\mathcal{S}^*$. Мы исходили при этом из того, что в $\mathcal{S}^*$ содержится достаточно большой запас функций (в частности δ-функция и все ее производные, все обычные полиномиально ограниченные функции и т. д.). Факт отсутствия в этом классе функций с экспоненциальным ростом на бесконечности находится в соответствии с тем, что в классической квантовой механике быстро возрастающие решения уравнения Шредингера считаются физически недопустимыми.

Однако необходимо отдавать себе отчет в том, что предположение о классе обобщенных функций является независимой гипотезой, которая имеет нетривиальные физические следствия. Важным следствием этой гипотезы является полиномиальная ограниченность S-матричных элементов в импульсном пространстве.

Известно, что в теории возмущений с неперенормируемым лагранжианом S-матричные элементы в любом порядке теории возмущений ведут себя при больших p как полином, степень которого неограниченно возрастает вместе с порядком приближения. Имеются также соображения, что в теории векторного поля с массой при некотором выборе калибровки функция Грина не ограничена полиномом. Если рассматривать это обстоятельство как указание на то, что полные S-матричные элементы в неперенормируемой теории возрастают при больших импульсах быстрее любого полинома, то это будет означать, что неперенормируемые теории исключаются выбором класса обобщенных функций (т. е. требованием 2 п. 3).

Мы покажем, однако, что рост обобщенной функции в p-пространстве не может быть произвольным, если мы хотим сохранить локальные свойства в x-пространстве, в частности, принцип микропричинности.

Чтобы не загромождать суть дела лишними выкладками, мы будем говорить в дальнейшем о функциях одного переменного $f(t)$. Функция $f(t)$ обобщенная, т. е. является линейным функционалом над некоторым, пока неопределенным пространством Ω основных функций $u(t)$. Пространство Ω должно иметь достаточно богатый запас основных функций с тем, чтобы можно было говорить о локальных свойствах функции f, в частности, чтобы имело смысл, например, утверждение, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (такого рода утверждение входит в формулировку принципа микропричинности). В том, что это не всегда так и что возможность говорить о локальных свойствах функции $f(t)$ связана с допустимым ростом ее фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$, можно убедиться на следующем примере.

Пусть пространство $\overset{*}{\Omega}_a$ функций $\tilde{f}(\omega)$ содержит наряду с обобщенными функциями из $\mathcal{S}^*$ все обычные функции, которые ведут себя на бесконечности как $e^{b\omega}$, где $|b| < a$ ($a > 0$ фиксировано). Пространство $\overset{*}{\Omega}_a$ может рассматриваться как пространство линейных функционалов над счетно-нормированным пространством Ω бесконечно дифференцируемых функций $u(\omega)$ с нормами:

$$p_n(u) = \max_{k \leqslant n} \sup_{\omega} \left| e^{a|\omega|} \frac{d^k u(\omega)}{d\omega^k} \right|, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.3.47}$$

Нетрудно убедиться, что $D \subset \Omega_a \subset \mathcal{S}$.

Из ограниченности норм (4.3.47) следует, что преобразования Фурье $\tilde{u}(t)$ функций из Ω_a аналитичны в полосе

$$-a < \operatorname{Im} t < a \tag{4.3.48}$$

и убывают на бесконечности внутри этой полосы быстрее любой отрицательной степени $|t|$. Обозначим это пространство фурье-образов через $\tilde{\Omega}_a$. В $\tilde{\Omega}_a$ нельзя определить обычным образом локальные свойства обобщенных функций, поскольку в нем не содержатся финитные функции. Более того, для обобщенных функций $f \in \tilde{\Omega}_a^*$ вообще не имеет смысла говорить, что на данном интервале они совпадают с некоторой обычной функцией $\varphi(t)$, в частности, теряет смысл утверждение типа $f=0$ при $t<0$.

Дело в том, что для линейных функционалов над $\tilde{\Omega}_a$ нет естественного определения носителя, так как в $\tilde{\Omega}_\alpha$ нет ненулевых финитных основных функций.

В качестве примера рассмотрим ряд

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}\delta^{(n)}(t) \tag{4.3.49}$$

при

$$0<b<a.$$

Этот ряд сходится в пространстве Ω_a^*, так как ряд

$$(f,\ u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{(n)}(0)}{n!}(-b)^n=u(-b) \tag{4.3.50}$$

является рядом Тейлора для аналитической функции $u(t)$ внутри ее области аналитичности $(b<a)$.

Далее, несмотря на то, что каждый член ряда (4.3.49) сосредоточен в нуле (и, в частности, исчезает вдоль отрицательной полуоси t), носителем его суммы согласно (4.3.50) может считаться точка $-b$ (равно как и точки любого замкнутого контура C_b, окружающего точку $-b$ и лежащего внутри полосы (4.3.48), поскольку в силу формулы Коши $u(-b)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_b}\frac{u(z)}{z+b}dz$).

С другой стороны, как уже отмечалось в гл. 1, ряд (4.3.49) (или (4.3.50)) расходится относительно сходимости в $\mathcal{S}^*$ в соответствии с тем, что обобщенные функции из $\mathcal{S}^*$ обладают определенными локальными свойствами.

Спрашивается, каков наиболее широкий класс обобщенных функций, в котором все еще можно говорить о локальных свойствах?

В терминах преобразований Фурье ответ на этот вопрос может быть сформулирован, грубо говоря, следующим образом: Фурье-образы $\tilde{f}(\omega)$ «локализуемых» функций $f(t)$ должны возрастать медленнее любой экспоненты. Заметим, что именно существование плотного множества финитных функций среди основных функций в x-пространстве обеспечивает возможность обычного определения локальных свойств обобщенных функций. Мы уже убедились на рассмотренном выше примере пространств Ω_a^*, что если $\tilde{f}(\omega)$ может возрастать экспоненциально, то нельзя определить однозначно локальные свойства $f(t)$. Ниже мы коротко изложим результаты Джафе (1967), которые показывают, что упомянутый выше более слабый рост уже допускает формулировку локальных свойств.

Начнем с определения класса основных функций в импульсном пространстве.

Рассмотрим семейство счетно-нормированных пространств $\mathscr{S}(g)$ бесконечно гладких функций в $R_4(p)$ с нормами

$$N_n(g;\ u) = \sup_{\substack{p\in R_4\\ k\leqslant 2n}} \{g(n\,|p|^2)\,(1+|p|^2)^n\,|D^k u(p)|\}, \tag{4.3.51}$$

где D^k — дифференциальный одночлен порядка k:

$$D^k = \frac{\partial^{k_0+k_1+k_2+k_3}}{\partial p_0^{k_0}\,\partial p_1^{k_1}\,\partial p_2^{k_2}\,\partial p_3^{k_3}},$$

$|p|^2$ — квадрат евклидовой нормы: $|p|^2=(p^0)^2+p^2$, а $g(z)$ — целая функция с неотрицательными производными на неотрицательной вещественной полуоси:

$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu, \qquad c_\nu \geqslant 0. \tag{4.3.52}$$

Различным выборам функции $g(z)$ соответствуют разные счетно-нормированные пространства рассматриваемого семейства.

Этот класс пространств достаточно широк в том смысле, что он охватывает основные функции различной степени убывания при $|p|\to\infty$ (а стало быть, и различного поведения обобщенных функций при больших $|p|$). Так, при $g(z)=1$ пространство $\mathscr{S}(g)$ переходит в пространство основных функций $\mathscr{S}(R_4)$, определенное в гл. 1, § 2. Если $g(z)$ — целая функция порядка 1/2, т. е. если $g(|p|^2)$ ведет себя при больших $|p|^2$ как $e^{b|p|}$ $(b>0)$, то все функции из $\mathscr{S}(g)$ убывают на бесконечности быстрее любой экспоненты $e^{-nb|p|}$ и, следовательно, среди обобщенных функций из $\mathscr{S}^*(g)$ находятся все линейные экспоненты. Джафе (1967) нашел необходимое и достаточное условие на функцию $g(z)$ типа (4.3.52), при котором в пространстве $\tilde{\mathscr{S}}(g)$ преобразований Фурье основных функций из $\mathscr{S}(g)$ содержались финитные функции координат. Оказывается, что для этого необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл *)

$$\int_1^\infty \frac{\ln g(w^2)}{w^2}\,dw < \infty. \tag{4.3.53}$$

Из того, что топология в $\mathscr{S}(g)$ определяется системой норм (4.3.51), следует, что обобщенные функции $f(p)$ из $\mathscr{S}^*(g)$ могут возрастать не быстрее, чем $g(n|p|^2)|p|^{2n}$ с некоторым фиксированным n. Другими словами, если при достаточно больших $|p|$ обобщенная функция f совпадает с обычной непрерывной функцией $f(p)$, то найдутся такие n и $c_f > 0$, что

$$|f(p)| < c_f g(n|p|^2)(1+|p|^2)^n. \tag{4.3.54}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим три пространства $\mathscr{S}(g)$, характеризуемых функциями $g(w^2)$, ведущими на бесконечности соответственно, как $\exp w$, $\exp\frac{w}{\ln w}$ и $\exp\frac{w}{\ln w(\ln\ln w)^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$; только третье из этих пространств пригодно для формулировки локальных свойств, так как только в этом случае удовлетворяется условие (4.3.53).

В заключение отметим, что постановка задачи у Джафе не является наиболее общей. Можно попытаться определить локальные свойства обобщенных функций (в частности, определить понятие носителя обобщенной функции), и не имея в своем распоряжении финитных основных функций (например, в духе работы Мартино (1963)). Возникает гипотеза, что при такой общей постановке можно прийти к классу обобщенных функций, удовлетворяющих более слабым ограничениям, чем (4.3.53)—(4.3.54), а именно, к функциям, возрастающим на бесконечности не быстрее любой линейной экспоненты:

$$|f(p)| \leqslant c_\varepsilon e^{\varepsilon|p|} \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0$$

(ср. Мейман (1964) и Хоружий (1967)).

В этом пункте мы рассматривали вопрос: как можно ослабить ограничения на допустимый класс обобщенных функций, если принимать во внимание лишь требование локальности теории? Как было отмечено, такое расширение класса обобщенных функций, по-видимому, необходимо, если мы хотим включить в нашу схему неперенормируемые теории. С другой стороны, нам кажется, что требование быстрого убывания основных функций во времениподобных направлениях слишком жестко. Оно не удовлетворяется, например, гладкими решениями уравнения Клейна — Гордона и затрудняет доказательство существования граничных значений S-матричных элементов на массовой поверхности. Вообще выбор «оптимального» класса основных и обобщенных функций даже в случае перенормируемых теорий не может считаться окончательным: он, по всей вероятности, будет уточняться при дальнейшем развитии теории.

*) Доказательство просто следует из классической теоремы о квазианалитических функциях (см., например, [47], гл. I).

3.6. Запаздывающие и опережающие радиационные операторы. При рассмотрении локальных свойств матрицы рассеяния радиационных операторов в п. 3 мы рассматривали оператор S как функцию от *out*-полей. Вследствие этого в условии причинности (4.3.26) будущий световой конус играет выделенную роль. Если бы вместо *out*-полей мы пользовались бы *in*-полями и определили бы ток j_ρ равенством

$$j_\rho(x) = iS^* \frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho^{in}(x)}, \tag{4.3.55}$$

то условие причинности (4.3.24) приобрело бы вид

$$\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta \varphi_\sigma^{in}(y)} = 0 \quad \text{при} \quad x \lesssim y$$

(неравенство между x и y заменено на обратное). Между тем при изучении матричных элементов рассеяния существенно, что они могут рассматриваться одновременно как предельные значения преобразования Фурье запаздывающей функции Грина (сосредоточенной в будущем конусе по переменной $x - y$) и опережающей функции Грина (сосредоточенной в прошедшем конусе, см. определения в гл. 1, п. 3.2).

Мы покажем, что для параллельного рассмотрения свойств запаздывания и опережения нет надобности одновременно вводить *in*- и *out*-поля.

Для этой цели необходимо ввести наряду с вариационным дифференцированием $\frac{\delta}{\delta\varphi_\rho} \equiv \frac{\delta}{\delta\varphi_\rho^{out}}$ еще вторую операцию типа дифференцирования

$$D_{\varphi_\rho(x)} A = S\left[\frac{\delta}{\delta\varphi_\rho(x)}(S^* A S)\right] S^* \tag{4.3.56}$$

(здесь и в дальнейшем будем опускать индекс «*out*» у поля).

В абстрактной алгебре $\mathfrak{A}$ с элементами $a, b, \ldots$ дифференцированием называется любая линейная операция D, удовлетворяющая правилу дифференцирования произведения

$$D(ab) = Da \cdot b + a \cdot Db. \tag{4.3.57}$$

Нетрудно проверить, что не только вариационное дифференцирование $\frac{\delta}{\delta\varphi_\rho}$, но и операция D_{φ_ρ} (4.3.56) удовлетворяют условию (4.3.57). Это оправдывает название «дифференцирование» для операции D_{φ_ρ}.

Эта операция позволяет естественным образом ввести опережающие функции. На самом деле она равнозначна дифференцированию по *in*-полям. Действительно, ток $j_\rho(x)$

выражается с помощью дифференцирования формулой, тождественной (4.3.55):

$$j_\rho(x) \equiv i\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^* = iS^* D_{\varphi_\rho(x)}S. \qquad (4.3.58)$$

Для доказательства достаточно подставить (4.3.56) (при $A=S$) в (4.3.58) и воспользоваться условием унитарности (4.3.11).

Далее, вторичное применение операции D дает

$$D_{\varphi_\sigma(y)}j_\rho(x) = \frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)} + i\,[j_\sigma(y),\ j_\rho(x)] = \frac{\delta j_\sigma(y)}{\delta\varphi_\rho(x)}. \qquad (4.3.59)$$

Второе равенство (4.3.59) справедливо в силу тождества (4.3.29). Из (4.3.59) видно, что при замене $\frac{\delta}{\delta\varphi_\rho} \to D_{\varphi_\rho}$ знак неравенства между аргументами в условии причинности обращается.

Последовательно применяя дифференцирование (4.3.56) и пользуясь условием унитарности, находим

$$D^2_{\varphi_{\rho_1}(x_1)\,\varphi_{\rho_2}(x_2)}A \equiv D_{\varphi_{\rho_1}(x_1)}\left(D_{\varphi_{\rho_2}(x_2)}A\right) = S\frac{\delta^2(S^*AS)}{\delta\varphi_{\rho_1}(x_1)\,\delta\varphi_{\rho_2}(x_2)}S^*. \qquad (4.3.60)$$

Отсюда и из коммутативности операции вариационного дифференцирования $\frac{\delta}{\delta\varphi_{\rho_1}}$ и $\frac{\delta}{\delta\varphi_{\rho_2}}$ следует коммутативность операций D_{φ_ρ}. Это позволяет записать условие микропричинности в следующей общей форме:

$$\frac{\delta^n j_\rho(x)}{\delta\varphi_{\rho_1}(x_1)\ldots\delta\varphi_{\rho_n}(x_n)} = 0 \qquad (4.3.61)$$

при выполнении хотя бы одного из неравенств $x_j \lesssim x$, $j = 1, \ldots, n$; и

$$D^n_{\varphi_{\rho_1}(x_1)\cdots\varphi_{\rho_n}(x_n)}\,j_\rho(x) = 0 \qquad (4.3.62)$$

при выполнении хотя бы одного из неравенств $x_j \gtrsim x$, $j = 1, \ldots, n$.

3.7. Четырехточечные функции Грина. Примитивные области аналитичности. Перейдем к важнейшему примеру четырехточечной функции Грина, ограничиваясь, для простоты, бозонным случаем:

$$(2\pi)^4 G^c(p_1, p_2, p_3, p_4)\,\delta(p_1+p_2+p_3+p_4) =$$
$$= i\int\ldots\int\langle 0\,|\,H_4(x_1\rho_1,\ x_2\rho_2,\ x_3\rho_3,\ x_4\rho_4)\,|\,0\rangle \times$$
$$\times\, e^{i(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4)}\prod_{j=1}^{4} d^4x_j, \qquad (4.3.63)$$

где H_4 — радиационный оператор четвертого порядка, определяемый формулой (4.3.20) при $n=4$.

Упражнение 4.3.5. Показать, что в силу условия трансляционной инвариантности (см. (4.3.6) — (4.3.6а)) правая часть (4.3.63) тоже содержит четырехмерную δ-функцию $\delta(p_1+p_2+p_3+p_4)$.

Функция G^c, определяемая равенством (4.3.63), называется четырехточечной *причинной функцией Грина.*

Обратим внимание, что в (4.3.63) импульсы p_j, вообще говоря, не лежат на массовой поверхности. Причинная функция Грина связана с амплитудами рассеяния шести процессов. Первые три из этих амплитуд имеют вид

$$\langle p_1\rho_1, p_2\rho_2 | T | -p_3\rho_3, -p_4\rho_4\rangle, \quad p_j^2=m_j^2, \quad p_1^0, p_2^0>0, \quad p_3^0, p_4^0<0; \tag{4.3.64а}$$

$$\langle p_1\rho_1, p_3\rho_3 | T | -p_2\rho_2, -p_4\rho_4\rangle, \quad p_1^0, p_3^0>0, \quad p_2^0, p_4^0<0; \tag{4.3.64б}$$

$$\langle p_1\rho_1, p_4\rho_4 | T | -p_2\rho_2, -p_3\rho_3\rangle, \quad p_1^0, p_4^0>0, \quad p_2^0, p_3^0<0, \tag{4.3.64в}$$

а три остальные амплитуды получаются из (4.3.64) заменой местами начального и конечного состояний. В этих формулах

$$T = i(S-1). \tag{4.3.65}$$

Например, амплитуда (4.3.64а) выражается следующим образом через G^c:

$$\langle p_1\rho_1, p_2\rho_2 | T | -p_3\rho_3, -p_4\rho_4\rangle =$$

$$= \frac{\delta(p_1+p_2+p_3+p_4)}{(4\pi)^2\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}} G^c(p_1\rho_1, \ldots, p_4\rho_4). \tag{4.3.66}$$

Не выписанные явно амплитуды обратных процессов фактически совпадают с рассматриваемыми амплитудами в силу TCP-инвариантности (см. гл. 5; напомним, что поля φ_ρ эрмитовы, так что мы имеем дело с амплитудами рассеяния нейтральных бозонов).

Исходя из амплитуд (4.3.64) и из амплитуд обратных процессов, можно ввести 32 разные запаздывающие, опережающие и смешанные функции Грина, каждая из которых совпадает с G^c в некоторой области. Выявление этих связей полезно с той точки зрения, что преобразования Фурье запаздывающих и опережающих функций имеют простые аналитические свойства (см. дополнение к гл. I, теорема 1.А.1). Причинная функция Грина G^c будет в итоге определена как единая аналитическая функция от комплексных импульсов k_j, удовлетворяющих закону сохранения

$$k_1+k_2+k_3+k_4=0, \tag{4.3.67}$$

а амплитуды реальных процессов рассеяния будут выступать как различные предельные значения этой аналитической функции.

Итак, мы переходим к определению полной системы запаздывающих и опережающих функций Грина для четырехточечной функции.

Пусть j, k, l, n — произвольная перестановка чисел 1, 2, 3, 4. Введем сокращенные обозначения

$$\delta_k \equiv \frac{\delta}{\delta\varphi_{\rho_k}(x_k)}, \qquad D_k \equiv D_{\varphi_{\rho_k}(x_k)}, \qquad j_k \equiv j_{\rho_k}(x_k). \tag{4.3.68}$$

Существуют четыре «чисто запаздывающие» функции R_n и четыре опережающие функции A_n, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} R_n &= R_n(x_n;\ x_j,\ x_k,\ x_l) = \langle 0\,|\,\delta_j\delta_k\delta_l j_n\,|\,0\rangle, \\ A_n &= A_n(x_n;\ x_j,\ x_k,\ x_l) = \langle 0\,|\,D_jD_kD_l j_n\,|\,0\rangle, \\ &\quad n=1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned} \tag{4.3.69}$$

В силу коммутативности операций δ_j между собой и D_k между собой функции R_n и A_n не зависят от перестановки j, k, l. Далее, определим запаздывающие и опережающие функции смешанного типа:

$$\begin{aligned} R_{nj}(x_j,\ x_k,\ x_l,\ x_n) &= \langle 0\,|\,D_j\delta_k\delta_l j_n\,|\,0\rangle = \\ &= \langle 0\,|\,i\,[j_j,\ \delta_k\delta_l j_n] + \delta_j\delta_k\delta_l j_n\,|\,0\rangle = \\ &= \langle 0\,|\,\delta_k\delta_l\delta_n j_j + i\,\{[j_n,\ \delta_k\delta_l j_j] + [\delta_k j_n,\ \delta_l j_j] + [\delta_l j_n,\ \delta_k j_j]\}\,|\,0\rangle; \end{aligned} \tag{4.3.70}$$

$$\begin{aligned} A_{nj}(x_j,\ x_k,\ x_l,\ x_n) &= \langle 0\,|\,\delta_j D_k D_l j_n\,|\,0\rangle = \\ &= \langle 0\,|\,i\,\{[\delta_j j_k,\ \delta_n j_l] + [j_k,\ \delta_j\delta_n j_l]\} + \delta_j\delta_k\delta_n j_l\,|\,0\rangle = \\ &= \langle 0\,|\,i\,\{[\delta_j j_l,\ \delta_n j_k] + [j_l,\ \delta_j\delta_n j_k]\} + \delta_j\delta_l\delta_n j_k\,|\,0\rangle, \\ &\quad n,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \quad (n\neq j). \end{aligned} \tag{4.3.71}$$

Из определения видно, что функции R_{nj} и A_{nj} не зависят от порядка аргументов k и l, так что мы имеем 24 различные функции с двумя индексами.

Из общего условия микропричинности (4.3.61), (4.3.62) следует, что функции R_j обращаются в нуль, если хотя бы один из аргументов x_k, x_l или x_n не находится в будущем конусе вершиной в x_j, A_j исчезает, если хотя бы один из векторов x_k, x_l, x_n не находится в прошедшем конусе с вершиной в x_j. Другими словами, носители этих обобщенных функций содержатся в конусах $\bar{V}_j^{\pm}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} R_j \subset \bar{V}_j^{+} \equiv \{x \mid x_k - x_j \in \bar{V}_+,\ x_l - x_j \in \bar{V}_+,\ x_n - x_j \in \bar{V}_+\},\\ \operatorname{supp} A_j \subset \bar{V}_j^{-} \equiv \{x \mid x_j - x_k \in \bar{V}_+,\ x_j - x_l \in \bar{V}_+,\ x_j - x_n \in \bar{V}_+\}.\end{aligned} \tag{4.3.72а}$$

Упражнение 4.3.6. Показать, что: а) R_{nj} исчезает, если либо хотя бы одна из точек x_k или x_l не расположена в будущем конусе с вершиной в x_n, либо обе эти точки лежат вне будущего конуса с вершиной в точке x_j; б) A_{nj} равно нулю, если либо $x_k \gtrsim x_n$ или $x_l \gtrsim x_n$, либо $x_j \lesssim x_k$ и $x_j \lesssim x_l$. Другими словами,

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} R_{nj} \subset \bar{V}_{kln} \cup \bar{V}_{lkn},\\ \operatorname{supp} A_{nj} \subset \bar{V}_{njk} \cup \bar{V}_{njl},\end{aligned} \tag{4.3.72б}$$

где

$$V_{njk} = \{x \mid x_n - x_k \in V_+,\ x_n - x_l \in V_+,\ x_j - x_k \in V_+\}. \tag{4.3.73}$$

Из этих свойств носителей функций R и A вытекают, в силу теоремы 1.А.1, определенные аналитические свойства их преобразований Фурье G^R и G^A, определяемых формулой типа (4.3.63):

$$(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)\, G^Z(k) = \\ = \int \ldots \int Z(x)\, e^{i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4)} \prod_{l=1}^{4} d^4x_l, \tag{4.3.74}$$

где

$$Z = R,\ A;\quad x = (x_j,\ x_k,\ x_l,\ x_n),\quad k = (k_j,\ k_k,\ k_l,\ k_n).$$

Функция $G^{R_n}(k_j, k_k, k_l, k_n)$ аналитична в «будущей» трубчатой области

$$T^+(n) = \{k = p + iq \in \mathscr{K} \mid q_a \in V_+,\ a = j,\ k,\ l\}, \tag{4.3.75}$$

где $\mathscr{K}$ — двенадцатимерное комплексное пространство векторов $(k_1, \ldots, k_4)$, удовлетворяющих закону сохранения (4.3.67); функция же G^{A_n} аналитична в противоположной («прошедшей») трубчатой области $T^-(n)$.

Покажем, что функция $G^{R_{nj}}$ аналитична по крайней мере в трубчатой области

$$T'(nj) = \{k \in \mathscr{K} \mid q_j \in V_-,\ q_k + q_j \in V_+,\ q_l + q_j \in V_+\}. \tag{4.3.76}$$

Для доказательства заметим, что в $\mathscr{H}$

$$\dot{G}^{R_{nj}}(k_j, k_k, k_l) = \\ = \int \ldots \int R_{nj}(x_j, x_k, x_l, 0)\, e^{i(k_jx_j+k_kx_k+k_lx_l)}\, d^4x_j\, d^4x_k\, d^4x_l. \quad (4.3.77)$$

Функция (4.3.77) заведомо аналитична в области, где

$$\operatorname{Im}(k_jx_j+k_kx_k+k_lx_l) \equiv q_jx_j+q_kx_k+q_lx_l > 0 \quad (4.3.78)$$

при всех $(x_j, x_k, x_l) \in \operatorname{supp} R_{nj}(x_j, x_k, x_l, 0)$, за исключением начала координат.

Чтобы убедиться, что (4.3.78) действительно имеет место в области $T^+(nj)$ (4.3.76), достаточно заметить в силу (4.3.72б) и (4.3.73), что в этой области справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &q_jx_j + q_kx_k + q_lx_l \geqslant (q_k + q_j)\,x_j + q_lx_l, \text{ если } x_k - x_j \in \overline{V}_+, \\ &q_jx_j + q_kx_k + q_lx_l \geqslant (q_j + q_l)\,x_l + q_kx_k, \text{ если } x_l - x_j \in \overline{V}_+. \end{aligned} \quad (4.3.79)$$

Аналогично устанавливается аналитичность $G^{A_{nj}}$ в противоположной трубчатой области

$$T^-(nj) = \{k \in \mathscr{H} \mid q_j \in V_+,\ q_j + q_k \in V_-,\ q_l + q_j \in V_-\}. \quad (4.3.80)$$

Заметим, что описанные здесь примитивные области аналитичности $T^{\pm}(n)$ и $T^{\pm}(nj)$ различных функций Грина являются конусами. Другими словами, если $k = (k_1, k_2, k_3, k_4) \in T^{\pm}$ и λ — положительное число, то и $\lambda k \in T^{\pm}$.

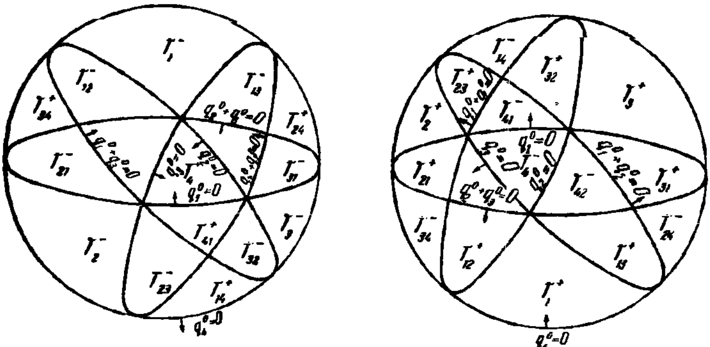
Поэтому, чтобы представить себе наглядно различные области аналитичности, достаточно изобразить их пересечения с некоторой фиксированной сферой с центром в начале координат. Далее, области $T^{\pm}$ цилиндричны по отношению к вещественной части импульсов. Это видно из того, что в определение $T^{\pm}$ (4.3.75), (4.3.76) и (4.3.80) входят условия лишь на $\operatorname{Im} k_a = q_a$, в то время как вещественные части импульсов $\operatorname{Re} k_a = p_a$ остаются произвольными. Таким образом, важно представление о трубчатых областях $T^{\pm}$ в пространстве мнимых частей векторов k. Мы изобразим для наглядности различные области аналитичности в трехмерном пространстве $Q^{(0)}$ нулевых компонент векторов q:

$$Q^{(0)} \equiv \left\{ \{q_a^0\} \,\middle|\, q_1^0 + q_2^0 + q_3^0 + q_4^0 = 0 \right\}. \quad (4.3.81)$$

Согласно сказанному, достаточно рассмотреть пересечение единичной сферы

$$\sum_{a=1}^{4} (q_a^0)^2 = 1 \quad (4.3.82)$$

гиперплоскостью $Q^{(0)}$. Проекции областей $T^{\pm}$ на полученную сферу изображены на рисунке.



а) Полушарие $q_4^0<0$ б) Полушарие $q_4^0>0$

Мы видим, что вся сфера покрывается различными областями аналитичности (и их границами). Этих областей ровно 32 — по 16 на каждом полушарии. Это обстоятельство является указанием на то, что выбранная нами система функций Грина (4.3.69)—(4.3.71) полна.

3.8. Принцип спектральности и области совпадения четырехточечных функций Грина в импульсном пространстве. В этом пункте мы выведем как следствие из постулата спектральности (см. условие 2) п. 3.2) условие совпадения функций $G^z(p)$ в различных областях вещественного пространства импульсов.

Предварительно мы укажем условия обращения в нуль матричных элементов токов.

Будем предполагать, что вакуумные средние от токов исчезают:

$$\langle 0 \mid j(x) \mid 0 \rangle = 0. \tag{4.3.83}$$

Если ток j (или, что то же, связанное с ним поле φ) несет квантовые числа, отличные от квантовых чисел вакуума (например, если j является псевдоскаляром, как π-мезон, или носителем ненулевой странности, как K-мезон), то условие (4.3.83) выполняется автоматически *). (Во всяком случае, в силу трансляционной инвариантности матричный элемент

*) Все известные элементарные частицы обладают такими квантовыми числами. Лишь для некоторых короткоживущих резонансов все квантовые числа совпадают с вакуумными. Но резонансам все равно нельзя приписывать асимптотических полей φ, а следовательно, и локальных токов j, определяемых равенством типа (4.3.22).

$\langle 0|j(x)|0\rangle = \langle 0|j(0)|0\rangle$ равен константе и выполнения (4.3.83) можно добиться вычитанием этой константы из тока j).

Докажем следующую лемму.

Лемма 4.3.2. *Матричный элемент тока между вакуумом и стабильным одночастичным состоянием равен нулю.*

Доказательство. Пусть, действительно, $|k\alpha\rangle$ — стабильное одночастичное состояние, в то время как $a_\rho(p)$ — оператор уничтожения, связанный с полем $\varphi_\rho(x)$. В силу условия стабильности (4.3.10) и равенства (4.3.17)

$$0 = \frac{\sqrt{2\omega_p}}{(2\pi)^{5/2}} \langle 0|[a_\rho(p),\ S]|k\alpha\rangle =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \langle 0|j_\rho(x)|k\alpha\rangle e^{ipx}\, d^4x = \delta(p-k)\langle 0|j_\rho(0)|k\alpha\rangle.$$

Отсюда интегрированием по p получаем

$$\langle 0|j_\rho(0)|k\alpha\rangle = 0, \quad \text{если} \quad S|k\alpha\rangle = |k\alpha\rangle, \tag{4.3.84}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Из условия спектральности и из доказанной леммы следует, что для любого оператора A и для произвольных состояний $|i\rangle$ и $|f\rangle$ справедливы равенства

$$\int \langle f|Aj_\rho(x)|0\rangle e^{ipx}\, d^4x =$$
$$= \int \langle 0|j_\rho(x) A|i\rangle e^{ipx}\, d^4x = 0 \quad \text{при} \quad p^2 < M_\rho^2, \tag{4.3.85}$$

где M_ρ — порог низшего многочастичного состояния, в которое может перейти бозон ρ. Чтобы доказать это утверждение, достаточно вставить между током j_ρ и оператором A полную систему промежуточных состояний и принять во внимание (4.3.83) и (4.3.84). Для псевдоскалярных мезонов, с которыми мы имеем дело в природе, M_ρ — порог трехбозонного состояния (если учесть, что нуклон-антинуклонное состояние имеет более высокую массу).

Заметим, что вне массовой поверхности условие стабильности неприменимо. Если допустить противное, положив

$$\langle 0|a_\rho(p) S = \langle 0|a_\rho(p) \quad \text{при} \quad p^2 \neq m_\rho^2,$$

мы пришли бы к заключению, что равенство (4.3.84) справедливо для любого (а не только одночастичного) состояния $|k\alpha\rangle$, что означало бы $j_\rho(x)|0\rangle = 0$. Отсюда в силу локальности тока и теоремы Федербуша — Джонсона (см. гл. 5) мы получили бы $j_\rho(x) \equiv 0$, что верно лишь в тривиальной теории свободных полей. По той же причине не исчезает тождественно и запаздывающая двухточечная функция Грина

$$G^{ret}_{\rho\alpha}(k) = \int \langle 0 \,|\, \frac{\delta j_\rho(0)}{\delta\varphi_\alpha(x)} \,|\, 0\rangle\, e^{ikx} d^4x, \tag{4.3.86}$$

которая возникает как продолжение матричного элемента (4.3.84) вне массовой оболочки.

Упражнение 4.3.7. Пользуясь равенством (4.3.33) и учитывая (4.3.31), показать, что из представления Челлена — Лемана для вакуумного среднего от причинного коммутатора (3.4.95) можно получить представление Челлена—Лемана для запаздывающей функции Грина в предположении, что $\int\limits_{M^2}^{\infty} \lambda^{-1} d\sigma(\lambda) < \infty$:

$$G^{ret}_{\rho\alpha}(k) = P_1(k) + P_2(k) \lim_{\varepsilon \searrow +0} \int\limits_{M^2_{\rho\alpha}}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{k^2 - \lambda + i\varepsilon k^0}, \tag{4.3.87}$$

где P_1 и P_2 — полиномы *). (Указание: воспользоваться теоремой, заключающейся в том, что фурье-образ произведения есть свертка фурье-образов сомножителей, и применить ее к произведению $\theta(x^0)$ на вакуумное среднее от коммутатора $[j_\rho(0), j_\alpha(x)]$, приняв во внимание (3.4.94).)

Перейдем теперь к определению областей совпадения функций G^Z. Покажем, что имеют место следующие равенства (p вещественно):

$$\left.\begin{aligned} G^{A_n}(p) &= G^{A_{nj}}(p), \\ G^{R_n}(p) &= G^{R_{nj}}(p) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad p_j^2 < M_j^2, \tag{4.3.89}$$

$$G^{R_{nj}}(p) = G^{A_{kl}}(p) \quad \text{при} \quad (p_j + p_l)^2 = (p_n + p_k)^2 < M_{jl}^2, \tag{4.3.90}$$

где M_j и M_{jl} — положительные числа, равные пороговым массам низших многочастичных состояний, в которые может перейти частица j или пара jl соответственно; $\{j, n, k, l\}$ — перестановка чисел 1, 2, 3, 4.

Равенства (4.3.89) устанавливаются одинаковым образом. Докажем для примера второе из них.

В силу (4.3.69), (4.3.70) и (4.3.74)

$$G^{R_n}(p) - G^{R_{nj}}(p) =$$
$$= \int \ldots \int \langle 0 \,|\, (\delta_j - D_j)\, \delta_k \delta_l j_n(0) \,|\, 0\rangle\, e^{i(p_j x_j + p_k x_k + p_l x_l)}\, d^4x_j\, d^4x_k\, d^4x_l =$$
$$= i \int \ldots \int \langle 0 \,|\, [\delta_k \delta_l j_n(0),\ j_j(x_j)] \,|\, 0\rangle\, e^{i(p_j x_j + p_k x_k + p_l x_l)}\, d^4x_j\, d^4x_k\, d^4x_l. \tag{4.3.91}$$

*) В случае скалярных полей (и токов) полиномы $P_1(k)$ и $P_2(k)$ зависят только от k^2. В силу леммы 4.3.1

$$G^{ret}_{\rho\alpha}(k)\Big|_{k^2 = m^2} = 0. \tag{4.3.88}$$

Последнее равенство (4.3.91) является следствием тождества

$$\delta_\rho A - D_\rho A = i\,[A,\ j_\rho(x_\rho)], \tag{4.3.92}$$

частный случай которого есть (4.3.59).

Применяя к (4.3.91) следствие (4.3.85) леммы 4.3.2, мы получаем второе равенство (4.3.89).

Чтобы доказать (4.3.90), рассмотрим разность

$$G^{R_{nj}}(p) - G^{A_{kl}}(p) =$$
$$= i\int \ldots \int \langle 0 \,|\left[\frac{\delta j_n(0)}{\delta\varphi_k(x_k)},\ \frac{\delta j_j(x_j)}{\delta\varphi_l(x_l)}\right]|\, 0\rangle\, e^{i(p_jx_j+p_kx_k+p_lx_l)}\, d^4x_j\, d^4x_k\, d^4x_l \tag{4.3.93}$$

и покажем, что она обращается в нуль при $(p_j+p_l)^2 < M_{jl}^2$.

Для этого разложим вакуумное среднее от коммутатора по полной системе промежуточных состояний и заметим, что члены, в которых промежуточное состояние есть вакуум, взаимно уничтожаются. Далее, в силу условия спектральности, при $q \neq 0$ и при $(p_j+p_l)^2 < M_{jl}^2$

$$\int \ldots \int \langle 0 \,|\, \frac{\delta j_j(x_j)}{\delta\varphi_l(x_l)}\,|\, q\rangle\, e^{i(p_jx_j+p_lx_l)}\, d^4x_j\, d^4x_l =$$
$$= (2\pi)^4\,\delta(p_j+p_l-q)\int \langle 0\,|\, \frac{\delta j_j(0)}{\delta\varphi_l(x)}\,|\, q\rangle\, e^{ip_lx}\, d^4x = 0, \tag{4.3.94}$$

где M_{jl} — порог наинизшего состояния (после вакуума) с теми же квантовыми числами, что и двухбозонное состояние jl.

3.9. Тождества Штейнмана. Не все 24 функции R_{nj} и A_{kl} (4.3.70), (4.3.71) независимы. Между ними имеют место шесть тождеств, найденных Штейнманом (1960).

Действительно, каждой неупорядоченной паре jn соответствует тождество, справедливое при всех вещественных x,

$$R_{nj} + R_{jn} = A_{kl} + A_{lk}, \tag{4.3.95}$$

где $n,\ j,\ k,\ l$ — перестановка чисел 1, 2, 3, 4.

Упражнение 4.3.8. Проверить справедливость (4.3.95). Указание: воспользоваться последним равенством (4.3.71) для A_{kl} и предпоследним из этой цепочки равенств для A_{lk} и получить

$$R_{nj} + R_{jn} = A_{kl} + A_{lk} =$$
$$= \langle 0\,|\, i\,\{[j_j,\ \delta_k\delta_l j_n] + [j_n,\ \delta_k\delta_l j_j]\} + \delta_k\delta_l\,(\delta_j j_n + \delta_n j_j)\,|\, 0\rangle. \tag{4.3.96}$$

Таким образом, 24 функции R_{nj} и A_{kl} группируются в шесть четверок, называемых *квартетами Штейнмана*, для каждого из которых имеет место тождество (4.3.95).

Отметим, что в один квартет объединяются функции, соответствующие четырем соседним областям на рисунке (стр. 299), причем каждый такой квартет областей ограничен отрезками $q_1^0=0$, $q_2^0=0$, $q_3^0=0$ и $q_4^0=0$, а внутренние линии, разделяющие квартет (nj) на четыре области, задаются уравнениями $q_j^0+q_k^0=0=q_n^0+q_l^0$ и $q_j^0+q_l^0=0=q_n^0+q_k^0$.

Можно удовлетворить тождествам Штейнмана, вводя 24 обобщенные функции f_{kln}, каждая из которых сосредоточена в своем конусе $\overline{V}_{kln}$ (4.3.73):

$$\operatorname{supp} f_{kln}\subset\overline{V}_{kln}=\{x\mid x_k-x_n\in\overline{V}_+,\ x_k-x_j\in\overline{V}_+,\ x_l-x_n\in\overline{V}_+\}. \tag{4.3.97}$$

Равенства (4.3.95) будут удовлетворяться автоматически, если

$$R_{nj}=f_{kln}+f_{lkn}, \tag{4.3.98а}$$

$$A_{kl}=f_{kln}+f_{klj}. \tag{4.3.98б}$$

Покажем, что обобщенные функции f_{kln} с носителем (4.3.97), удовлетворяющие (4.3.98), действительно существуют (хотя не определяются однозначно этими условиями).

Для этого определим при $k<l$

$$f_{kln}=\theta_{ln}A_{kl}, \tag{4.3.99}$$

где

$$\theta_{ln}\equiv\theta\left(x_l^0-x_n^0\right)\theta\left(\left(x_l-x_n\right)^2\right). \tag{4.3.100}$$

Поскольку A_{kl} — обобщенная функция, а функция θ_{ln} разрывна, то произведение (4.3.99) определено, вообще говоря, неоднозначно. Для нас важно, что существует хотя бы одно произведение типа (4.3.99), для которого имеет место (4.3.98б). Это последнее условие обеспечивается тем, что в силу (4.3.72б) и (4.3.73)

$$(\theta_{ln}+\theta_{lj})A_{kl}=A_{kl}. \tag{4.3.101}$$

Положим, далее,

$$f_{lkn}=R_{nj}-f_{kln}\qquad(k<l). \tag{4.3.102}$$

Упражнение 4.3.9. Пользуясь тождеством (4.3.95), показать, что в силу (4.3.99) и (4.3.102)

$$A_{lk}=f_{lkn}+f_{lkj}. \tag{4.3.103}$$

Остается показать, что функция f_{lkn} (при $k<l$) сосредоточена в $\overline{V}_{lkn}$.

Из определения (4.3.102) и из (4.3.72) ясно, что при $k<l$

$$\operatorname{supp} f_{lkn}\subset\overline{V}_{lkn}\cup\overline{V}_{kln}. \tag{4.3.104}$$

Покажем, что на самом деле

$$f_{lkn}=0 \quad \text{в} \quad C\overline{V}_{lkn}, \tag{4.3.105}$$

где $C\overline{V}$ — дополнение множества $\overline{V}$ до всего двенадцатимерного пространства разностей $x_j - x_k$.

Для этой цели воспользуемся тождеством

$$C\overline{V}_{lkn}=C(\overline{V}_{lkn}\cup\overline{V}_{kln})\cup C(\overline{V}_{lkn}\cup\overline{V}_{klj}\cup\overline{V}_{lkj}). \tag{4.3.106}$$

Упражнение 4.3.10. Установить справедливость (4.3.106). (Указание: принять во внимание, что $C(A\cup B)=CA\cap CB$.)

В силу (4.3.104) f_{lkn} исчезает в первом из двух множеств в правой части (4.3.106). Чтобы установить (4.3.105), остается доказать, что

$$f_{lkn}=0 \quad \text{в} \quad C(\overline{V}_{lkn}\cup\overline{V}_{lkj}\cup\overline{V}_{klj}). \tag{4.3.107}$$

Заметим сначала, что в этой области $A_{lk}=R_{jn}=0$. Действительно, согласно (4.3.72)

$$C(\overline{V}_{lkn}\cup\overline{V}_{lkj}\cup\overline{V}_{klj})=C(\operatorname{supp}R_{jn})\cup C(\operatorname{supp}A_{lk}). \tag{4.3.108}$$

Отсюда и из тождества Штейнмана (4.3.95) вытекает, что в области (4.3.108) $A_{kl}=R_{nj}$. С другой стороны,

$$A_{kl}=f_{kln} \quad \text{в} \quad C\overline{V}_{klj}\supset C(\overline{V}_{lkn}\cup\overline{V}_{lkj}\cup\overline{V}_{klj}).$$

Но тогда из (4.3.102) следует (4.3.107). Таким образом, равенство (4.3.105) установлено.

§ 4. Получение перенормированного ряда теории возмущений из основных принципов

4.1. Вводные замечания. Каждое из равенств (4.3.29), (4.3.30) и (4.3.33) может рассматриваться как уравнение для оператора рассеяния. Задавая квазилокальные операторы $\Lambda_{\rho\sigma}$, а через них и первый член разложения S-оператора по степеням некоторого параметра g, мы можем получить из этих уравнений весь ряд теории возмущений. Некоторая неоднозначность, которая возникает при этом, снимается, если задать некие «минимальные» степени роста S-матричных элементов в импульсном пространстве.

Изложим здесь основную идею такого построения. В качестве исходного уравнения возьмем (4.3.30). Умножая обе стороны (4.3.30) справа на S и пользуясь (4.3.32), получаем

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_\sigma(y)}=$$
$$=ig\Lambda(\rho x,\sigma y)+\theta_{xy}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}+\theta_{yx}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}, \tag{4.4.1}$$

где

$$\theta_{xy} = \theta(x^0 - y^0), \quad g\Lambda(\rho x, \sigma y) = -\Lambda_{\rho\sigma}(x, y)\,S.$$

Если теперь искать S в виде ряда по степеням g (считая, что при $g=0$ $S(g) \equiv 1$)

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (ig)^n S_n, \tag{4.4.2}$$

то (4.4.1) приводит к системе рекуррентных соотношений для коэффициентов S_n. Первое из них имеет вид

$$\frac{\delta^2 S_1}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_\sigma(y)} = \Lambda(\rho x, \sigma y). \tag{4.4.3}$$

Оно подсказывает, что квазилокальный оператор Λ следует рассматривать как вторую вариационную производную от некоторого локального «лагранжиана»

$$L = \int \sum_{n, \rho_j} L_{\rho_1 \ldots \rho_n} : \varphi_{\rho_1}(x) \ldots \varphi_{\rho_n}(x) : d^4x \tag{4.4.4}$$

(среди полей φ_ρ могут входить, в частности, производные данного поля φ).

В силу (4.3.1)

$$\frac{\delta\varphi_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)} = \delta_{\rho\sigma}\delta(x-y). \tag{4.4.5}$$

Отсюда следует, что оператор

$$\Lambda(\rho x, \sigma y) = \frac{\delta^2 L}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_\sigma(y)} \tag{4.4.6}$$

квазилокален и, кроме того, система уравнений (4.4.3) удовлетворяет условию интегрируемости ($\Lambda(\rho x, \sigma y) = \Lambda(\sigma y, \rho x)$).

Общее решение (4.4.3) имеет вид

$$S_1 = \int\int \Lambda(\rho x, \sigma y) : \varphi_\rho(x)\varphi_\sigma(y) : d^4x\,d^4y + \sum_\rho \int C_\rho(x)\,\varphi_\rho(x)\,d^4x + A,$$

где A — константа, а C_ρ — числовые функции (мы предполагаем, что поля $\varphi_\rho(x)$ образуют полную систему операторов в том смысле, что любой оператор, встречающийся в нашем рассмотрении, является рядом по нормальным произведениям от этих полей). Потребуем, чтобы при всех g имели место равенства

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = 1, \quad \langle 1 | S | 0 \rangle = 0, \tag{4.4.7}$$

где $\langle 1 |$ — произвольное одночастичное состояние. Заметим, что на массовой поверхности при g, равном его физическому значению, (4.4.7) является следствием условия стабильности (4.3.10).

Из (4.4.7) следует, что при $n \geqslant 1$

$$\langle 0 | S_n | 0\rangle = \langle 1 | S_n | 0\rangle = 0. \tag{4.4.8}$$

Отсюда при $n=1$ получаем, что $A = C_\rho(x) = 0$ и

$$S_1 = L. \tag{4.4.9}$$

Сравнивая теперь коэффициенты перед g^2 в (4.4.1) и вновь учитывая (4.4.8), получаем

$$S_2 = \int \left(\theta_{xy} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\rho(x)} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\sigma(y)} + \theta_{yx} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\sigma(y)} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\rho(x)}\right) \times \\ \times : \varphi_\rho(x)\varphi_\sigma(y) : d^4x\, d^4y. \tag{4.4.10}$$

Ясно, что этот процесс итераций может быть продолжен; при этом каждое S_n определяется посредством интегралов от S_k при $k \leqslant n-1$.

Упражнение 4.4.1. Показать, что «хронологическая экспонента»

$$S = T\left(e^{igL}\right) \tag{4.4.11}$$

формально удовлетворяет системе уравнений в вариационных производных (4.4.1) и дополнительным условиям (4.4.7), если квазилокальный оператор Λ имеет вид (4.4.6), а L — локальный лагранжиан типа (4.4.4). Убедиться, что оператор (4.4.11) является тем единственным решением этих уравнений, к которому мы приходим при описанной выше итерационной процедуре.

Таким образом, мы видим, что обычная теория возмущений включается, по крайней мере формально, в S-матричный аксиоматический подход. Более того, ряд теории возмущений получается из уравнений (4.4.1), (4.4.6) и из дополнительного условия (4.4.7) практически однозначно. Однако при таком прямолинейном подходе естественно возникают и все известные трудности теорий возмущений: уже во втором порядке по g вакуумное среднее от второй вариационной производной S-оператора (4.4.1), строго говоря, не определено (его преобразование Фурье расходится). Корень трудности кроется в самом уравнении (4.4.1): как мы неоднократно отмечали, произведение θ-функции на обобщенную операторную функцию (в данном случае на $\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} S^* \frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}$), вообще говоря, не определено.

Возникает вопрос, можно ли придать уравнению (4.4.1) четкий математический смысл, чтобы по крайней мере в конечных порядках теории возмущений не возникало бессмысленных выражений? Ответ на этот вопрос утвердительный, в чем можно убедиться разными способами. Здесь мы изложим способ, предложенный Пю и др. (Пю (1963, 1965, 1966), Рорлих (1964), Рорлих и Вилнер (1966), Чень (1967)). Идея состоит в замене в уравнении (4.4.1) θ-функции неким интегральным проекционным оператором, действие которого на перестановочные функции, возникающие в теории возмущений, определено однозначно. Таким образом удается получить перенормированный ряд теории возмущений, работая на каждом шагу с конечными выражениями. Вопрос о сходимости этого ряда здесь, как и в обычном лагранжевом подходе, остается открытым *).

Мы будем вести рассмотрение на примере юкавского взаимодействия двух скалярных полей $\psi(x)$ и $\varphi(x)$. Лагранжиан взаимодействия такой теории имеет вид

$$gL = g\int :\psi^2(x)\varphi(x): d^4x. \tag{4.4.12}$$

При этом мы ограничимся детальным рассмотрением лишь второго порядка теории возмущений.

Отметим, что в следующих главах мы вновь будем исходить лишь из общих принципов квантовой теории поля и не будем пользоваться рядом теории возмущений. Рассмотрение этого ряда здесь преследует лишь цель установить соответствие между аксиоматическим подходом к S-матрице и обычным лагранжевым формализмом. Кроме того, такое рассмотрение дает нам более ощутимое представление о реальном содержании излагаемой схемы. Например, уже на этом интуитивном уровне, при помощи приведенного выше формального вывода формулы (4.4.11), мы убедились в действительной необходимости введения с самого начала квазилокальных операторов типа $\Lambda(\rho x, \sigma y)$: если $\Lambda = 0$, то мы получили бы $S \equiv 1$. Заметим, что в этом отношении уравнение (4.4.1), (4.4.6) не является наиболее общим. Вместо $g\Lambda(\rho x, \sigma y)$ можно ввести ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^n \Lambda_n(\rho x, \sigma y). \tag{4.4.13}$$

Другими словами, новые квазилокальные операторы могут появляться не только в первом порядке теории возмущений, но и в высших порядках. Возникающие при этом неоднозначности могут быть устранены введением подходящих граничных условий для функций Грина в импульсном пространстве. Такое обобщение квазилокального члена в уравнении (4.4.1) нам понадобится в п. 4.4.

---

*) В моделях с формфактором имеются примеры как сходящегося ряда теории возмущений с конечным радиусом сходимости — Франк (1962), так и расходящегося ряда — Джафе (1965) (см. также Райс (1962), где есть ссылки на более ранние работы по поводу сходимости (или расходимости) ряда теории возмущений).

4.2. Природа расходимостей в собственной энергии во втором порядке теории возмущений. Здесь мы рассмотрим двухточечную причинную функцию Грина G^c для полей ψ, соответствующую лагранжиану (4.4.12), во втором порядке теории возмущений:

$$(2\pi)^4 iG^c_{(2)}(p)\,\delta(p+q) = \int\int \langle 0|\frac{\delta^2 S_2}{\delta\psi(x)\,\delta\psi(y)}|0\rangle\, e^{i(px+qy)}\, d^4x\, d^4y, \tag{4.4.14}$$

исходя из представления (4.4.10) с обычными θ-функциями. Мы покажем, что расходимости в интеграле (4.4.10) действительно обусловлены тем, что разрывные θ-функции умножаются на обобщенные функции, и найдем обычным путем регуляризованное выражение для $G^c_{(2)}(p)$. В следующих пунктах мы покажем, что тот же самый окончательный результат может быть получен при подходящей замене θ-функций в уравнении (4.4.1) интегральными операторами, причем после такой замены не будет возникать расходимостей ни на каком этапе вычислений.

Из (4.4.1), (4.4.9) и (4.4.12) следует, что

$$\frac{\delta^2 S_2}{\delta\psi(x)\,\delta\psi(y)} = \theta_{xy}\colon \psi(x)\,\varphi(x)\colon\colon \psi(y)\,\varphi(y)\colon + \\ + \theta_{yx}\colon \psi(y)\,\varphi(y)\colon\colon \psi(x)\,\varphi(x)\colon. \tag{4.4.15}$$

Мы предполагаем, что поля ψ и φ коммутируют между собой и обладают свойствами свободных скалярных полей с массой M и m соответственно:

$$(\Box + M^2)\,\psi(x) = (\Box + m^2)\,\varphi(x) = 0. \tag{4.4.16}$$

Пользуясь этим, нетрудно преобразовать (4.4.14) к виду

$$G^c_{(2)}(p) = \\ = -i\int \left[\theta(x^0)\, D^{(-)}_M(x)\, D^{(-)}_m(x) + \theta(-x^0)\, D^{(-)}_M(-x)\, D^{(-)}_m(-x)\right] e^{ipx}\, d^4x, \tag{4.4.17}$$

где функции $D^{(-)}$ определены формулой (3.A.4). При вычислении интеграла (4.4.17) воспользуемся тем, что преобразование Фурье произведения есть свертка преобразований Фурье сомножителей.

Определим сначала образ Фурье произведения $D^{(-)}_M(x)\, D^{(-)}_m(x)$. Покажем, что, несмотря на то, что каждый из сомножителей сингулярен при $x^2=0$, это произведение и его преобразование Фурье существуют как обобщенные функции из $\mathscr{S}^*$. Это является отражением общего факта, что всегда существует свертка двух обобщенных функций с носителем в одном и том же конусе.

В силу (3.А.4) имеем

$$F_{Mm}(k) \equiv -\int D_M^{(-)}(x)\, D_m^{(-)}(x)\, e^{ikx}\, d^4x =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int \theta(-p^0)\,\delta(p^2-M^2)\,\theta(-q^0)\,\delta(q^2-m^2)\,\delta(p+q+k)\, d^4p\, d^4q. \tag{4.4.18}$$

Упражнение 4.4.2. Показать, что функции $F_{Mn}(k)$ (4.4.18) равна нулю вне области $k^0 \geqslant \sqrt{(M+m)^2+k^2}$, так что

$$F_{Mm}(k) = \theta(k^0)\,\theta(k^2-(M+m)^2)\,F_{Mm}(k). \tag{4.4.19}$$

(Указание: воспользоваться тем, что 4-вектор k в формуле (4.4.18) есть сумма векторов $-p$ и $-q$, лежащих на гиперболоидах V_M^+ и V_m^+ соответственно).

Чтобы вычислить $F_{Mm}(k)$ (4.4.18), снимем интегрирование по p за счёт четырехмерной δ-функции $\delta(p+q+k)$ и, выбирая ось q^0 вдоль времениподобного вектора k, введем новые переменные q^2, ω и $\boldsymbol{n}$:

$$q^0 = -\omega, \quad \boldsymbol{q} = \sqrt{\omega^2-q^2}\,\boldsymbol{n},$$

где $\boldsymbol{n}^2 = 1$. После интегрирования по q^2 и по углам, определяющим трехмерный единичный вектор $\boldsymbol{n}$, получим

$$F_{Mm}(k) = \frac{\theta(k^0)\,\theta(k^2-(M+m)^2)}{2\pi}\int_m^{k^0}\sqrt{\omega^2-m^2}\,\times$$

$$\times\,\delta\left(k^2+m^2-M^2-2\sqrt{k^2}\,\omega\right)d\omega =$$

$$= \frac{1}{8\pi k^2}\,\theta(k^0)\,\theta(k^2-(M+m)^2)\,\sqrt{[k^2-(M+m)^2]\,[k^2-(M-m)^2]}. \tag{4.4.20}$$

Принимая во внимание, что

$$i\theta(x^0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iEx^0}}{E-i0}\,dE,$$

для функции Грина (4.4.17) получим

$$(2\pi)^6\, G^c_{(2)}(p) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE\int d^4k\int d^4x\,\frac{e^{ipx}}{E-i0}\,F_{Mm}(k)\left(e^{i(Ex^0-kx)}+e^{-i(Ex^0-kx)}\right). \tag{4.4.21}$$

Заметим далее, что в силу (4.4.20)

$$F_{Mm}(k) = [1 + \varepsilon(k^0)]\,\theta(k^2 - (M+m)^2)\,F(k^2), \tag{4.4.22}$$

где

$$F(z) = \frac{\sqrt{[z-(M+m)^2][z-(M-m)^2]}}{16\pi z}. \tag{4.4.23}$$

Чтобы проинтегрировать (4.4.21), воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4.4.1. *Если* $F_1(k^2) = 0$ *при* $k^2 < 0$, *то*

$$\frac{1}{(2\pi)^5}\int \dots \int \frac{\varepsilon(k^0)F_1(k^2) + F_2(k^2)}{E - i0}\, e^{ipx} 2\cos(Ex^0 - kx)\, dE\, d^4k\, d^4x =$$

$$= iF_2(p^2) + \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{F_1(\lambda)}{\lambda - p^2}\, d\lambda, \tag{4.4.24}$$

где $\mathcal{P}$ *— знак главного значения интеграла.*

Доказательство. Разложим косинус по формуле

$$2\cos(Ex^0 - kx) = e^{i(Ex^0-kx)} + e^{-i(Ex^0-kx)}$$

и, разбивая левую часть (4.4.24) на два интеграла, сделаем во втором из них замену $k \to -k$, $E \to -E$. Воспользовавшись тем, что

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{E-i0} - \frac{1}{E+i0}\right) = i\delta(E),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E-i0} + \frac{1}{E+i0}\right) = \mathcal{P}\frac{1}{E},$$

и полагая $k^2 = \lambda$, мы без труда приходим к (4.4.24).

Применяя эту лемму к формуле (4.4.21), мы получаем равенство

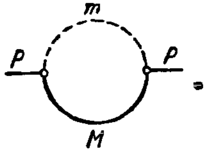
$$G^c_{(2)}(p) = i\theta\left(p^2 - (M+m)^2\right) F\left(p^2\right) + \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{(M+m)^2}^\infty \frac{F(\lambda)}{\lambda - p^2}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{(M+m)^2}^\infty \frac{F(\lambda)}{\lambda - p^2 - i0}\, d\lambda, \tag{4.4.25}$$

где $F(z)$ дается выражением (4.4.23).

Как и следовало ожидать, полученный интеграл (точнее, его вещественная часть) расходится логарифмически на бесконечности. Поскольку преобразование Фурье $F_{Mm}(k)$ произведения $D^{(-)}$-функций является, согласно (4.4.20), обычной (непрерывной, ограниченной) функцией, то ясно, что трудность возникает именно при умножении произведения $D^{(-)}_M(x)\,D^{(-)}_m(x)$ на $\theta\left(x^0\right)$.

В стандартной теории возмущений расходимость в интеграле (4.4.25) устраняется вычитанием из подынтегральной функции ее значения в точке $p^2=M^2$, так как функция $G^c_{(2)}(p)$ соответствует диаграмме собственной энергии *), внешним линиям которой сопоставлена частица с массой M.



Регуляризованное выражение для функции Грина равно

$$G^c_{(2)\,r}(p)=\frac{p^2-M^2}{\pi}\int\limits_{(M+m)^2}^{\infty}\frac{F(\lambda)\,d\lambda}{(\lambda-M^2)(\lambda-p^2-i0)}. \tag{4.4.26}$$

4.3. Регуляризованная форма основного уравнения (4.4.1). В предыдущем пункте мы убедились, что расходимости в итерационном решении уравнения (4.4.1) возникают из-за линейных членов типа

$$\theta_{xy}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}. \tag{4.4.27}$$

Сейчас мы покажем, что уравнение (4.4.1) останется в силе, если члены типа (4.4.27) заменить на

$$\Theta_{\rho x,\,\sigma y}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}\right)\equiv$$
$$\equiv(\Box_x+m_\rho^2)(\Box_y+m_\sigma^2)\,\theta_{xy}\int\int D^{adv}_{m_\rho}(x-\xi)\,D^{ret}_{m_\sigma}(y-\eta)\times$$
$$\times\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(\xi)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(\eta)}\,d^4\xi\,d^4\eta, \tag{4.4.28}$$

где D^{ret} и D^{adv} — запаздывающая и опережающая функции Грина (3.А.13). В следующем пункте мы увидим, что такая замена дает возможность получить регуляризованное выражение для функции Грина, работая на каждом шагу с конечными величинами.

Начнем с перечисления основных свойств оператора $\Theta_{\rho x,\,\sigma y}$.

*) Правила Фейнмана в обычной теории возмущений изложены, например, в [4] и в [6]. Регуляризованное выражение для диаграммы, изображенной на рисунке (со скалярными линиями), дается в фейнмановском α-представлении монографии [50].

Упражнение 4.4.3. Показать, что имеет место тождество

$$\Theta_{\rho x, \sigma y}(\theta_{xy} F(x, y)) = \Theta_{\rho x, \sigma y}(F(x, y)), \tag{4.4.29}$$

или, что то же самое,

$$\Theta_{\rho x, \sigma y}(\theta_{yx} F(x, y)) = 0. \tag{4.4.29a}$$

(Указание: воспользоваться тем, что в силу (3.А.13) носители обобщенных функций D^{ret} и D^{adv} находятся в будущем и прошедшем конусе соответственно:

$$\begin{aligned} D^{adv}(x-\xi) &= \theta_{\xi x} d((x-\xi)^2), \\ D^{ret}(y-\eta) &= \theta_{y\eta} d((y-\eta)^2), \end{aligned} \tag{4.4.30}$$

где $d(\lambda) = \delta(\lambda) - \theta(\lambda)\dfrac{m}{2\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}) = 0$ при $\lambda < 0$.)

Упражнение 4.4.4. Показать, что $\Theta_{\rho x, \sigma y}$ имеет свойство проекционного оператора

$$\Theta^2_{\rho x, \sigma y} = \Theta_{\rho x, \sigma y} \tag{4.4.31}$$

и что

$$\Theta_{\rho x, \sigma y}\Theta_{\sigma y, \rho x} = 0, \tag{4.4.32}$$

если применять его к не слишком сингулярной обобщенной функции $F(x, y)$ (достаточно потребовать, чтобы при $x=y$ $F(x, y)$ имела особенность не выше первой производной от $\delta(x-y)$). Указание: воспользоваться тем, что в силу (3.А.11)

$$(\Box + m_\rho^2) D^{adv}_{m_\rho}(x) = (\Box + m_\sigma^2) D^{ret}_{m_\sigma}(x) = \delta(x)$$

и что при умножении θ на локально интегрируемую функцию справедливы равенства:

$$\theta^2_{xy} = \theta_{xy}, \quad \theta_{xy}\theta_{yx} = 0. \tag{4.4.33}$$

Допустим теперь, что равенство (4.4.1) имеет смысл, и применим к обеим его частям проекционный оператор *)

$$\Pi = \Theta_{\rho x, \sigma y} + \Theta_{\sigma y, \rho x}. \tag{4.4.34}$$

В результате, пользуясь равенствами (4.4.29), получим

$$\Pi \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_\sigma(y)} = ig\Pi\Lambda(\rho x, \sigma y) + \Theta_{\rho x, \sigma y}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} S^* \frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}\right) + \\ + \Theta_{\sigma y, \rho x}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)} S^* \frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}\right). \tag{4.4.35}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.4.2. *Любая обобщенная функция вида*

$$F(x, y) = \sum_{n_1+n_2 \leqslant 3} \frac{\partial^{n_1+n_2}}{(\partial x^0)^{n_1}(\partial y^0)^{n_2}} \left[\delta(x^0 - y^0) f_{n_1 n_2}(x, y)\right], \tag{4.4.36}$$

---

*) Можно показать, что даже применительно к тем обобщенным функциям $F(x, y)$, для которых равенства (4.4.31) и (4.4.32) не имеют места, равенство $\Pi^2 = \Pi$ справедливо (см. Пю (1963) и Чень (1967)).

где $f_{n_1n_2}(x, y)$ — *произвольные функции без особенностей при* $x^0=y^0$, *удовлетворяет уравнениям*

$$\Theta_{\rho x,\,\sigma y}F(x,\ y)=\Theta_{\sigma y,\,\rho x}F(x,\ y)=\Pi F(x,\ y)=0. \tag{4.4.37}$$

Доказательство. Чтобы убедиться, что функция (4.4.36) действительно удовлетворяет уравнению (4.4.37), подставим (4.4.36) и (4.4.30) в (4.4.28) и интегрированием по частям перебросим дифференцирование по ξ^0 и η^0 на функции D^{ret} и D^{adv}. Получаемые при этом члены, содержащие не более одного дифференцирования по θ-функциям, входящим в (4.4.30), исчезают в силу (4.4.33). Наиболее сингулярные члены, как нетрудно видеть, содержат множители типа $\theta_{xy}\dfrac{\partial}{\partial x^0}D^{adv}(x^0-y^0,\ x'_m)$, которые тоже обращаются в нуль в силу тождеств

$$\begin{gathered}\theta(x^0)\frac{\partial}{\partial x^0}D^{adv}(x)=\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\theta(x^0)D^{adv}(x)\right\}-\delta(x^0)D^{adv}(x),\\ \theta(x^0)D^{adv}(x)=0,\ \delta(x^0)D^{adv}(x)=\delta(x^0)\delta(x^2)=0,\end{gathered} \tag{4.4.38}$$

так как $\delta(-x^2)=\delta(x^2)=2\pi\sqrt{x^2}\,\delta(x)=0$.

Мы предоставляем читателю убедиться, что при $n_1+n_2=4$ в левой части (4.4.37) возникают неопределенные выражения типа $\theta_{xy}\delta(x^0-y^0)$ (мы уже убедились, что с произведениями такого типа связано появление расходимостей в теории возмущений).

В доказанной лемме проявляется регуляризованный характер операторов Θ. В то время как функцию θ_{xy} нельзя умножить на обобщенную функцию, имеющую δ-функционную сингулярность при $x^0=y^0$, оператор Θ может быть применен уже к $\delta(x^0-y^0)$ и к ее производным не выше третьего порядка. Следует, однако, отметить, что переход от θ_{xy} к оператору $\Theta_{\rho x,\,\sigma y}$ нельзя рассматривать как некую универсальную регуляризацию θ-функций хотя бы потому, что свертки, входящие в интегралы типа (4.4.28), не всегда существуют. Эта «регуляризация» приспособлена лишь к рассматриваемой задаче, и для нее она действительно удобна и эффективна, в чем мы убедимся в следующем пункте (не случайно оператор $\Theta_{\rho x,\,\sigma y}$ зависит от масс m_ρ и m_σ).

Из леммы 4.4.2 следует, что если квазилокальный оператор Λ не содержит производных от $\delta(x^0-y^0)$ выше третьей, то член $\Pi\Lambda$ в уравнении (4.4.35) исчезает. В рассмотренной выше модели с лагранжианом (4.4.12) оператор

$$\Lambda_{\psi\psi}(x,\ y)=\varphi(x)\delta(x-y), \tag{4.4.39}$$

очевидно, удовлетворяет этому условию, так что

$$\Pi\Lambda_{\varphi\varphi}(x,\ y)=0. \tag{4.4.40}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие квазилокальные операторы, для которых имеет место (4.4.40). Чтобы разрешить уравнение (4.4.35) относительно второй вариационной производной от S-оператора, мы заметим, что в силу (4.4.31) и (4.4.32)

$$\Pi\Theta_{\rho x,\,\sigma y}=\Theta_{\rho x,\,\sigma y},\quad \Pi\Theta_{\sigma y,\,\rho x}=\Theta_{\sigma y,\,\rho x}. \tag{4.4.41}$$

Это дает

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_\sigma(y)}=ig\Lambda(\rho x,\ \sigma y)+\Lambda'(x,\ y)+$$
$$+\Theta_{\rho x,\,\sigma y}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}+\Theta_{\sigma y,\,\rho x}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}, \tag{4.4.42}$$

где $\Lambda'(x,\ y)$ — произвольное решение однородного уравнения

$$\Pi\Lambda'(x,\ y)=0. \tag{4.4.43}$$

Для этого решения будем предполагать, что оно содержит лишь члены более высокого порядка по g (начиная с g^2). Этот член будет определяться из условия обеспечения минимальной степени роста S-матричных элементов в импульсном пространстве. Свобода в выборе Λ' определяется квазилокальным по временам членом типа (4.4.36) (см. Пю (1963)). Требование релятивистской инвариантности теории в каждом порядке по степеням g позволяет определить коэффициенты разложения $\Lambda'^{(n)}$ с точностью до оператора, квазилокального по всем координатам (а не только по времени).

Уравнение (4.4.42) будет исходным пунктом для нахождения регуляризованного ряда теории возмущений для S-матрицы. Оно было получено формально из уравнения (4.4.1). Однако, по-видимому, лишь уравнение (4.4.42) имеет четкий смысл, в то время как уравнение (4.4.1) приводит, по крайней мере в теории возмущения, к бессмысленным расходящимся интегралам. Мы могли бы непосредственно прийти к (4.4.42), исходя из условия причинности (4.3.26), аналогично тому как в п. 3.4 мы пришли к уравнению (4.3.30). Мы выбрали здесь менее последовательный с логической точки зрения «исторический» способ изложения, поскольку он позволил нам показать, почему приходится переходить к сравнительно более громоздкому уравнению (4.4.42), вместо того чтобы работать с «простым и естественным» уравнением (4.4.1).

Заметим, что из вышеизложенного, в частности из условия (4.4.40), видно, что замена $\theta\to\Theta$ приводит к хорошим результатам, лишь если квазилокальный оператор не имеет слишком высокой сингулярности при $x=y$. Однако это ограничение не имеет принципиального характера. Можно регуляризовать теорию с произвольной наперед заданной сингулярностью у $\Lambda(x, y)$. Для этого достаточно ввести вместо Θ оператор

$$\Theta^{(n)}_{\rho x,\, \sigma y}(F(x, y)) =$$
$$= (\Box_x + m_\rho^2)^n (\Box_y + m_\sigma^2)^n \theta_{xy} \int D^{adv}_{m_\rho}(x-\xi_1) D^{adv}_{m_\rho}(\xi_1-\xi_2) \ldots$$
$$\ldots D^{adv}_{m_\rho}(\xi_{n-1}-\xi_n) D^{ret}_{m_\sigma}(y-\eta_1) D^{ret}_{m_\sigma}(\eta_1-\eta_2) \ldots$$
$$\ldots D^{ret}_{m_\sigma}(\eta_{n-1}-\eta_n) F(\xi_n, \eta_n)\, d^4\xi_1 \ldots d^4\xi_n\, d^4\eta_1 \ldots d^4\eta_n \qquad (4.4.44)$$

с достаточно большим индексом n (см. Чень (1967)). Заметим, что при $n=1$ мы получаем оператор Θ как частный случай.

Для рассмотрения модели взаимодействия скалярных полей без производных (и вообще при изучении так называемых перенормируемых теорий (см. [4])) переход к $n > 1$ не понадобится.

4.4. Итерационное решение уравнения (4.4.42) в случае взаимодействия двух скалярных полей. Рассмотрим снова, на этот раз исходя из уравнения (4.4.42), причинную функцию Грина G^c ψ-поля во втором порядке теории возмущений (см. (4.4.14)). Мы покажем, что если потребовать возрастания $G^c_{(2)}(p)$ при $p^2 \to \infty$ не быстрее $\ln p^2$, то при этом получится регуляризованное выражение (4.4.26), (4.4.23), причем на всех этапах вычисления мы будем иметь дело с вполне определенными конечными выражениями.

Сравнение коэффициентов при g^2 в (4.4.42) в случае, когда Λ дается формулой (4.4.39), а $\Lambda' = g^2\Lambda_2(x, y) + g^3\Lambda_3 + \ldots$, приводит к замене в (4.4.15) θ_{xy} на $\Theta_{Mx,\, My}$, где индекс M у оператора Θ указывает, что нужно брать операторы Клейна — Гордона с массой M, соответствующей полю ψ в формуле (4.4.28). После этого подстановка (4.4.42) в (4.4.14) дает

$$G^c_{(2)}(p)\delta(p+q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \ldots \int \Lambda_2^{(0)}(x, y)\, e^{i(px+qy)}\, d^4x\, d^4y -$$
$$- \frac{i}{(2\pi)^4} \int \ldots \int e^{i(px+qy)} (\Box_x + M^2)(\Box_y + M^2) \times$$
$$\times \{\theta_{xy} D^{adv}_M(x-\xi) D^{ret}_M(y-\eta) D^{(-)}_M(\xi-\eta) D^{(-)}_m(\xi-\eta) +$$
$$+ \theta_{yx} D^{adv}_M(y-\eta) D^{ret}_M(x-\xi) D^{(-)}_M(\eta-\xi) D^{(-)}_m(\eta-\xi)\}\, d^4\xi\, d^4\eta\, d^4x\, d^4y, \qquad (4.4.45)$$

где

$$\Lambda_2^{(0)}(x, y) = \langle 0 | \Lambda_2(x, y) | 0 \rangle = K(x)\delta(x-y), \qquad (4.4.46)$$

а K — линейный дифференциальный оператор по x.

Пользуясь (4.4.18) и (4.4.22), для первого интеграла по ξ и η получаем

$$I(x-y) \equiv -\int \dots \int D_M^{adv}(x-\xi)\, D_M^{ret}(y-\eta) \times \\ \times D_M^{(-)}(\xi-\eta)\, D_m^{(-)}(\xi-\eta)\, d^4\xi\, d^4\eta = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(y-x)}(1+\varepsilon(k^0))\,\frac{\theta(k^2-(M+m)^2)}{(M^2-k^2)^2}\,F(k^2)\,d^4k, \qquad (4.4.47)$$

где $F(z)$ дается выражением (4.4.23).

Далее, пользуясь леммой 4.4.1 и формулой (4.4.25), находим

$$i(\theta_{xy}I(x-y)+\theta_{yx}I(y-x)) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^5}\int \dots \int \frac{2\cos[k(y-x)+E(x^0-y^0)]}{E-i0}(1+\varepsilon(k^0)) \times \\ \times \frac{\theta(k^2-(M+m)^2)}{(M^2-k^2)^2}\,F(k^2)\,d^4k\,dE = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ik(x-y)}\mathcal{F}(k^2)\,d^4k, \qquad (4.4.48)$$

где

$$\mathcal{F}(k^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} \frac{F(\lambda)\,d\lambda}{(M^2-\lambda)^2(\lambda-p^2-i0)}. \qquad (4.4.49)$$

Подставляя это выражение в (4.4.45), получим

$$G^c_{(2)}(p)\,\delta(p+q) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^8}\int \dots \int e^{i[px+qy-k(x-y)]}(M^2-k^2)^2\,\mathcal{F}(k^2)\,d^4x\,d^4y\,d^4k + \\ + \frac{1}{(2\pi)^4}\int K(x)\,e^{i(p+q)x}\,d^4x = \\ = (M^2-p^2)^2\,\mathcal{F}(p^2)\,\delta(p+q) + \frac{1}{(2\pi)^4}\int K(x)\,e^{i(p+q)x}\,d^4x. \qquad (4.4.50)$$

Первый член в правой части (4.4.50) возрастает при $p^2 \to \infty$ как p^2. Чтобы компенсировать это возрастание, мы должны выбрать

$$K = -C(M, m)(M^2+\Box_x), \qquad (4.4.51)$$

где

$$C(M, m) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} \frac{F(\lambda)}{(M^2-\lambda)^2}\,d\lambda. \qquad (4.4.52)$$

Второй член в (4.4.50) примет тогда вид

$$C(M, m)(p^2-M^2)\,\delta(p+q).$$

Окончательно для $G^c_{(2)}$ получим

$$G^c_{(2)}(p) = \frac{M^2-p^2}{\pi} \int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} \frac{M^2-p^2-(\lambda-p^2)}{\lambda-p^2-i0} \frac{F(\lambda)}{(M^2-\lambda)^2}\, d\lambda =$$

$$= \frac{M^2-p^2}{\pi} \int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} \frac{F(\lambda)\, d\lambda}{(M^2-\lambda)(\lambda-p^2-i0)}, \quad (4.4.53)$$

что действительно совпадает с регуляризованным выражением (4.4.26).

Приведенный расчет показывает, что операторная Θ-функция, определяемая формулой (4.4.28), дает слишком быструю сходимость интегралов теории возмущений в рассматриваемой теории с квазилокальным членом первого порядка по g (4.4.39). Вследствие этого мы для функции Грина получили линейный рост по p^2, который пришлось компенсировать квазилокальным членом второго порядка по g типа $(\Box + M^2)\delta(x-y)$. Спрашивается, можно ли ввести более экономную регуляризацию θ-функции с тем, чтобы в разобранном примере не возникало необходимости во втором квазилокальном члене? Ответ на этот вопрос утвердительный. Определим в рассматриваемом частном случае вместо (4.4.28) оператор Θ^M_{xy} формулой

$$\Theta^M_{xy}\left(\frac{\delta S}{\delta\psi(x)} S^* \frac{\delta S}{\delta\psi(y)}\right) =$$

$$= (\Box_x + M^2)\, \theta_{xy} \int D^{adv}_M(x-\xi) \frac{\delta S}{\delta\psi(\xi)} S^* \frac{\delta S}{\delta\psi(y)}\, d^4\xi. \quad (4.4.54)$$

На первый взгляд такое определение несимметрично относительно аргументов x и y. На самом деле для того класса функций, с которым мы имеем дело, это не так.

Упражнение 4.4.5. Пусть преобразование Фурье $\tilde{F}(k)$ функции $F(x)$ исчезает на гиперболоиде $k^2 = M^2$ (если $\tilde{F}(k)$ является обычной гладкой функцией в окрестности этого гиперболоида, то достаточно потребовать, чтобы она имела нуль первого порядка на нем). Показать, что тогда

$$(\Box_x + M^2)\, \theta_{xy} \int D^{adv}_M(x-\xi)\, F(\xi-y)\, d^4\xi =$$

$$= (\Box_y + M^2)\, \theta_{xy} \int D^{ret}_M(y-\eta)\, F(x-\eta)\, d^4\eta. \quad (4.4.55)$$

(Указание: перейти к преобразованиям Фурье функций, стоящих под знаком интеграла, и воспользоваться правилом дифференцирования произведения.)

Упражнение 4.4.6. Показать, что итерационное решение уравнения

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\psi(x)\,\delta\psi(y)} = ig\delta(x, y) + \Theta^M_{xy}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} S^* \frac{\delta S}{\delta\psi(y)}\right) + \Theta^M_{yx}\left(\frac{\delta S}{\delta\psi(y)} S^* \frac{\delta S}{\delta\psi(x)}\right) \qquad (4.4.56)$$

приводит во втором порядке теории возмущений к перенормированной функции Грина (4.4.53).

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. Основные результаты этого параграфа получены в фундаментальной работе Рюеля (1962), в которой были доказаны некоторые предположения Хаага (1957), (1958), (1959) и получили строгую математическую основу его идеи (см. также обзорную статью Бренига и Хаага (1959)). Воспроизведенное в тексте упрощенное изложение для случая одного скалярного поля, непосредственно связанного с асимптотическим полем, принадлежит Йосту [3] и Хеппу (1963б). Доказательство леммы 4.1.1 (п. 1.3) принадлежит Йосту (1966). Первоначальное доказательство Рюеля второй части теоремы 4.4.1 (о независимости асимптотических состояний от системы отсчета) было дополнено Стритером (1967).

§ 2. Как отмечалось во введении, подход Лемана, Симанзика и Циммермана (1955) и (1957) возник сначала как независимое направление наряду с подходами Уайтмана и Боголюбова. Родственные идеи развиваются в работах Нишиджимы (1957), (1958), (1960). Играющие важную роль в этом подходе формулы (4.2.6) впервые были написаны Янгом и Фельдманом (1950) и Челленом (1950), которые получили их интегрированием гайзенберговых уравнений движения. Вакуумные средние от T-произведений гайзенберговых полей изучались Циммерманом (1954). Связь T-произведений и запаздывающих функций с функциями Уайтмана обсуждается у Штейнмана (1960) и (1963а, б). Связь асимптотического условия и редукционной формулы ЛСЦ с формулировкой Уайтмана была изучена Хеппом (1965а, б, в), результаты которого конспективно изложены во втором и третьем пунктах этого параграфа. Хеппом (1964а) было доказано также свойство разбиения на пучки S-матрицы при пространственноподобных разделениях аргументов. Мы не касались вопроса о связанных состояниях в рассматриваемой схеме. Этому вопросу посвящены работы Нишиджимы (1958), Баумана (1958) и Циммермана (1958). Циммерман показал, что любое связанное состояние со спином нуль может быть описано скалярным локальным полем. Другой вопрос, незатронутый в нашем изложении, касается связи между перестановочными соотношениями гайзенберговых полей и перестановок соответствующих асимптотических полей. В работах Циммермана (1958), Кашлуна (1959), (1960) и Редмонда и Урецкого (1960) показано, что если гайзенбергово поле $\varphi(x)$ удовлетворяет каноническим одновременным перестановочным соотношениям (с $\delta(x-y)$) в правой части), то поля $\varphi^{\mathrm{in}}(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям для свободного поля.

§ 3. S-матричный подход к релятивистской квантовой теории, предложенный Гайзенбергом (1943), был в некотором смысле предшественником или даже родоначальником аксиоматического подхода. Этот подход позволил, однако, получить определенные соотношения между S-матричными элементами лишь после введения в теорию вариационных производных по классическим полям (Боголюбов (1952) и обзор Боголюбова (1958)), в терминах которых удалось сформулировать условие микропричинности (Боголюбов (1955), Боголюбов и Ширков (1955) и [4]; до этого условие причинности обсуждалось в работах Штюкельберга и Ривье (1950) и Штюкельберга (1951), но не получило там окончательной формулировки; см. также [48]). Совместное использование свойств причинности и спектральности позволило доказать дисперсионные соотношения для упругого пион-нуклонного рассеяния (Боголюбов (1956), [1]). Дальнейшее развитие дисперсионный подход получил в работах Медведева и Поливанова (1961), (1964), (1967а, б), Медведева (1961), Медведева и др. (1967а—д). Его связь с теорией ЛСЦ обсуждалась Файнбергом (1961), Сухановым (1965), (1966) и Медведевым и др. (1967а, в, д); в последних работах рассматривается также незатронутый в тексте вопрос о допустимом числе производных в квазилокальных операторах, при которых постулаты БМП эквивалентны постулатам ЛСЦ (о числе допустимых производных в теории ЛСЦ см. также Пю (1963)). Вопрос о том, в какой мере можно восстановить теорию, зная матричные элементы тока, обсуждается в теории свободных полей Лангерхолком и Шроером (1967) (см. также Араки и др. (1961)). Относительно выбора класса обобщенных функций, совместного с условием микропричинности, см. Мейман (1964), Логунов и др. (1964) и (1966), Джафе (1967), Хоружий (1967), Ефимов (1968). Анализ в работе Хоружего основан на понятии носителя аналитического функционала, введенного Гельфандом и Шиловым (1953) и Мартино (1963) (см. также Кимелсен (1966)). Операция D_φ, которой мы пользуемся в пп. 3.6 и 3.7, вводится там впервые. Аналитические свойства четырехточечной функции Грина, определяемой 32 предельными значениями запаздывающих и опережающих функций, изучались в формулировке ЛСЦ Бросом и др. (1964) (см. также лекции Броса (1965)). Относительно методов теории аналитических функций нескольких комплексных переменных, которые используются при этом анализе, см. [24] и Уайтман (1960в). Четырехчленные тождества между запаздывающими и опережающими функциями Грина были обнаружены Штейнманом (1960). Компактная формулировка для этих тождеств в случае n-точечной функции Грина дана Рюелем (1961).

§ 4. Регуляризованная форма основных уравнений, выражающих условия причинности и унитарности, принадлежит Пю (1963), (1965), (1966), Рорлиху (1964) и Рорлиху и Вилнеру (1966) (см. также работы Ченя и др. (1966) и (1967), Рорлиха и Рея (1966) и Рея (1967), где этот формализм развивается дальше). Другие подходы, приводящие к уравнениям для функций Грина без расходимостей, позволяющим, в частности, воспроизвести перенормированный ряд теории возмущений, имеются в работах Нишиджимы (1960), Мураскина и Нишиджимы (1961), Симанзика (1960), (1963), (1966), Фрида (1962), Файнберга (1964). Ни в одной из упомянутых работ не исследовалась, однако, сходимость этого ряда. Более того, в работе Джафе (1965) рассматривается нерелятивистская модель с обрезанным лагранжианом взаимодействия $\lambda\varphi^4$ (с конечным числом степеней свободы). В этой модели существование решения при положительной константе связи λ следует из общей теории эллиптических уравнений; в то же время ряд теории возмущений расходится (см. также Джафе и Пауерс (1967), где рассматривается переход к бесконечному объему в этой модели). Как отмечалось во введении, вопрос о существовании нетривиального решения «аксиоматических уравнений» до сих пор остается открытым. Поэтому много внимания уделяется построению моделей, в которых выполняется лишь часть общих принципов квантовой теории поля: нерелятивистских и двумерных моделей, теорий с обрезанием (см. наряду с упомянутой выше работой Джафе еще Нельсон (1963) и (1964), а также лекции и обзоры Уайтмана (1964б) и (1967) и доклад Хеппа (1967)).

ГЛАВА 5

СЛЕДСТВИЯ ИЗ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ: *TCP*, СПИН И СТАТИСТИКА, ТЕОРЕМА ХААГА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Мы уже убедились в гл. 1, *что общий вид лоренц-инвариантных обобщенных функций достаточно сложен. Однако функции Уайтмана, наряду с условием лоренц-инвариантности, обладают свойством аналитичности в прошедшей трубчатой области* T_n^- *(в силу условия спектральности). Аналогично преобразования Фурье запаздывающих функций Грина, рассматриваемых в гл.* 4, *аналитичны в будущей трубчатой области* T_n^+. *Для функций, аналитических в трубчатой области, справедлива теорема Баргмана — Холла — Уайтмана* (п. 1.3), *согласно которой из инвариантности таких функций относительно собственных вещественных преобразований Лоренца следует их инвариантность также относительно собственной комплексной группы Лоренца. Эта теорема позволяет, в частности, показать, что лоренц-инварантные функции, голоморфные в трубчатой области, аналитичны на самом деле в более широкой области, а именно в так называемой расширенной трубчатой области* $\mathcal{T}_n$. *Вещественные точки* $\mathcal{T}_n$

$$\xi_1 = x_1 - x_2, \ \ldots, \ \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n$$

определяются условием $\left(\sum \lambda_j \xi_j\right)^2 < 0$ *при любом выборе неотрицательных чисел* λ_j, *не равных одновременно нулю* (п. 1.4).

Если функция, аналитическая в трубчатой области, инвариантна относительно полной группы Лоренца, включающей пространственные отражения, то внутри области голоморфности она является функцией лишь скалярных произведений своих аргументов (п. 1.5).

Отражение всех четырех осей является элементом собственной комплексной группы Лоренца. Это позволяет доказать (п. 2.3), *что из теоремы Баргмана — Холла — Уайтмана и из условия слабой локальной коммутативности* (п. 2.2) *вытекает TCP-инвариантность теории, для которой постулирована лишь инвариантность относительно собственной группы Пуанкаре и условие спек-*

тральности. Антиунитарный ТСР-оператор находит применение при изучении классов эквивалентности локальных полей (*классов Борхерса*, п. 2.4). *Значение понятия класса Борхерса обусловлено тем, что двум полям одного и того же класса соответствует одна и та же матрица рассеяния* (п. 2.5).

Те же методы (*в первую очередь теорема Баргмана — Холла — Уайтмана*) *позволяют установить связь спина со статистикой* (§ 3). *Пусть дано, что поле либо локально коммутирует, либо локально антикоммутирует с собой. Тогда оно должно локально коммутировать, если преобразуется по конечномерному представлению группы Лоренца, соответствующему целому спину, и локально антикоммутировать с собой, если оно соответствует конечномерному представлению с полуцелым спином* (п. 3.2). *Если в системе полей между различными полями имеются аномальные перестановочные соотношения* (*локальная коммутативность между разными фермионными полями или локальная антикоммутативность между разными бозонными полями или между бозонным и фермионным полем*), *то функции Уайтмана такой теории обладают некоторой дополнительной симметрией. Теория с такой симметрией приводится преобразованием Клейна* (п. 3.3) *к теории с нормальными перестановочными соотношениями между всеми полями.* (*Преобразование Клейна является неунитарным преобразованием, сохраняющим функции Уайтмана.*) *В п.* 3.4 *даны понятие о парастатистике и схема доказательства теоремы о связи спина с парастатистикой.*

Теоремы об аналитических лоренц-инвариантных функциях применяются также при анализе обычной гамильтоновой формулировки квантовой теории поля. С их помощью доказывается теорема Хаага о том, что если поле $\varphi(t, x)$ *связано зависящим от времени унитарным преобразованием со свободным полем, то оно само является свободным* (п. 4.2). *Теорема Хаага показывает, что если гамильтонова формулировка квантовой теории поля вообще имеет смысл, то необходимо пользоваться неэквивалентными «странными» представлениями канонических перестановочных соотношений в разные моменты времени* (п. 4.3).

Такими же методами, что и теорема Хаага, доказывается невозможность описать «нарушенную симметрию» (*например, пространственное отражение*) *зависящим от времени унитарным оператором* (п. 4,4).

§ 1. Лоренц-ковариантные функции, аналитические в трубчатой области

1.1. Вводные замечания. Мы видели (теорема 3.2.2), что в силу условия спектральности обобщенные функции Уайтмана $w_r(x_1, \ldots, x_n)$ являются предельными значениями обычных функций от разностей $\xi_k = x_k - x_{k+1}$, аналитических в прошедшей трубчатой области $T_{n-1}^{-}(\operatorname{Im}\zeta_k \in V^{-})$. Аналогично в силу условия микропричинности фурье-образы запаздывающих n-частичных функций Грина аналитичны в будущей трубчатой области T_{n-1}^{+} (гл. 4, п. 3.7). С другой стороны, и те и другие функции *ковариантны*, т. е. преобразуются по некоторому конечномерному представлению группы Лоренца (в частности, в теории скалярных полей они инвариантны). Оказывается, что сочетание свойств аналитичности и ковариантности дает возможность получить дополнительную информацию относительно обоих свойств. Так, из аналитичности в T_n^{+} и ковариантности относительно собственной группы Лоренца $L_{+}^{\uparrow}$ следует ковариантность относительно комплексных преобразований Лоренца из $\mathscr{L}_{+}$ и аналитичность в более широкой области $\mathcal{T}_n$ (расширенная трубчатая область, полученная из T_n^{+} применением всевозможных преобразований из $\mathscr{L}_{+}$). Эта теорема, принадлежащая Баргману, Холлу и Уайтману, лежит в основе вывода TCP-теоремы и теоремы о связи спина со статистикой, с которыми мы познакомимся в § 2. Доказательство теоремы Баргмана — Холла — Уайтмана будет приведено в п. 1.3. Предварительно, в п. 1.2 мы познакомимся с некоторыми свойствами комплексной группы Лоренца.

В п. 1.4 дается описание вещественных точек расширенной трубчатой области (*точек Иоста*).

В п. 1.5 дана схема доказательства теоремы Холла и Уайтмана о том, что любая функция, инвариантная относительно ортохронных преобразований Лоренца и аналитическая в трубчатой области $T_n^{\pm}$, зависит лишь от скалярных произведений своих векторных аргументов.

1.2. Нормальная форма комплексных преобразований Лоренца. Группа $\mathscr{L}$ комплексных преобразований Лоренца определяется как совокупность линейных однородных преобразований в комплексном четырехмерном пространстве C_4, сохраняющих билинейную форму

$$zw = z^0 w^0 - z^j w^j = g_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu} \qquad (5.1.1)$$

(по повторному индексу j здесь и в дальнейшем в этом пункте подразумевается суммирование от 1 до 3).

Другими словами, $\mathscr{L}$ — это группа четырехрядных матриц Λ с комплексными элементами, удовлетворяющими условию псевдоортогональности (2.2.5)

$$\Lambda^T G \Lambda = G, \tag{5.1.2}$$

где G — метрический тензор в пространстве Минковского.

Заметим, что комплексная группа Лоренца изоморфна комплексной ортогональной группе $O(4, C)$. Действительно, если ввести новые координаты $z'^0 = z^0$, $z'^j = iz^j$ (поскольку z^μ — комплексные числа, то новые координаты равноправны старым), то знак «—» в (5.1.1) заменится на знак «+» и, соответственно, метрический тензор $G = (g_{\mu\nu})$ в пространстве Минковского заменится на единичный тензор $\delta_{\mu\nu}$. Мы, однако, будем пользоваться базисом, в котором справедливы равенства (5.1.1) и (5.1.2), поскольку в таком базисе переход к вещественному пространству Минковского и, соответственно, к вещественной группе Лоренца выглядит более естественно.

Если взять определитель от обеих частей равенства (5.1.2), то получим (как и при вещественных преобразованиях Лоренца) при $\Lambda \in \mathscr{L}$

$$(\det \Lambda)^2 = 1. \tag{5.1.3}$$

Таким образом, комплексная группа Лоренца распадается на две компоненты: $\mathscr{L}_+ (\det \Lambda = 1)$ и $\mathscr{L}_- (\det \Lambda = -1)$. В отличие от вещественного случая компонента $\mathscr{L}_+$ уже является связной подгруппой группы $\mathscr{L}$. Дело в том, что изменение знака всех четырех координат может быть достигнуто непрерывным вращением в комплексном пространстве C_4. Действительно, матрица

$$\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & i\sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ i\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.1.4}$$

принадлежит группе $\mathscr{L}_+$ и непрерывно зависит от параметра α, причем

$$\Lambda(0) = 1, \quad \Lambda(\pi) = -1. \tag{5.1.5}$$

Мы уже отмечали (гл. 2, п. 2.2), что группа $\mathscr{L}_+$ гомоморфна комплексной спинорной группе Лоренца $SL(2) \otimes SL(2)$, элементами которой являются пары комплексных двухрядных унимодулярных матриц (A, B) $(\det A = \det B = 1)$. Элементы матрицы $\Lambda \in \mathscr{L}_+$ выражаются посредством A и B формулой (2.2.15a)

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_\mu A \sigma_\nu B^T). \tag{5.1.6}$$

В дальнейшем нам понадобится регулярная параметризация окрестности единичного элемента группы $SL(2) \otimes SL(2)$ (соответственно $\mathscr{L}_+$) со следующими свойствами:

1) Когда Λ пробегает окрестность единичного элемента группы $\mathscr{L}_+$, параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ пробегают некоторую окрестность начала координат шестимерного комплексного пространства.

2) Подмножеству вещественных собственных преобразований Лоренца $(\Lambda \in L^\uparrow_+)$ соответствуют вещественные параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$.

3) Матричные элементы любого конечномерного представления комплексной группы Лоренца (в частности, Λ^μ_ν) являются аналитическими функциями параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$.

В качестве примера регулярной параметризации группы $SL(2) \otimes SL(2)$ можно взять параметризацию Кели (см. [26]):

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\sigma_0 - \frac{1}{2}(\alpha_j + i\beta_j)\sigma_j}{\sigma_0 + \frac{1}{2}(\alpha_j + i\beta_j)\sigma_j}, \\ B &= \frac{\sigma_0 - \frac{1}{2}(\alpha_j - i\beta_j)\bar{\sigma}_j}{\sigma_0 + \frac{1}{2}(\alpha_j - i\beta_j)\bar{\sigma}_j}, \end{aligned}\right\} \tag{5.1.7}$$

где $\bar{\sigma}_j = (-1)^{j+1}\sigma_j$, а α_j и β_j — комплексные параметры, подчиненные условию

$$\sum_{j=1}^{3}(|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2) < 2 \tag{5.1.8}$$

(мы для удобства положили $\alpha_{3+j} = \beta_j$, $j = 1, 2, 3$).

Упражнение 5.1.1. Показать, что при всех α и β, при которых матрицы, стоящие в знаменателях (5.1.7), неособые (в частности, когда α и β подчинены условию (5.1.8)), справедливо равенство

$$\det A = \det B = 1. \tag{5.1.9}$$

(Указание: воспользоваться равенством $A = \underset{\sim}{a}$, где $\underset{\sim}{a} = a^\mu\sigma_\mu$, а

$$a^0 = \frac{1 + \frac{1}{4}(\alpha_j + i\beta_j)^2}{1 - \frac{1}{4}(\alpha_j + i\beta_j)^2}, \qquad a^k = -\frac{(\alpha_k + i\beta_k)}{1 - \frac{1}{4}(\alpha_j + i\beta_j)^2}$$

(здесь, как и выше, по повторному индексу j подразумевается суммирование от 1 до 3).)

Упражнение 5.1.2. Показать, что преобразованию двухрядных матриц

$$\underset{\sim}{z}' = A\underset{\sim}{z}B^T, \tag{5.1.10}$$

где A и B заданы формулой (5.1.7), а $\underset{\sim}{z}=z^\mu\sigma_\mu$, соответствует собственное комплексное преобразование Лоренца

$$\Lambda = \frac{1-R}{1+R}. \tag{5.1.11}$$

Здесь 1 — четырехрядная единичная матрица, а

$$R_{\mu\nu} = \alpha_j(\delta_{\mu j}\delta_{\nu 0} + \delta_{\nu j}\delta_{\mu 0}) + \varepsilon_{0j\mu\nu}\beta_j \tag{5.1.12}$$

(матрица R может быть представлена в виде $R=G\tilde{R}$, где $\tilde{R}$ — антисимметричная матрица $\tilde{R}^T=-\tilde{R}$, а G — метрический тензор в пространстве Минковского). (Указание: непосредственно проверить, что когда

$$\det(1+R) = 1-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta)^2 \neq 0 \tag{5.1.13}$$

(это заведомо имеет место при достаточно малых $|\alpha|$ и $|\beta|$), преобразование (5.1.11) принадлежит комплексной группе Лоренца $\mathcal{L}_+$. Убедиться далее, что все производные $\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\alpha_j}$ и $\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\beta_k}$ в точке $\alpha=\beta=0$ совпадают с производными от матрицы (5.1.6).)

Чтобы исследовать специфические свойства комплексных преобразований Лоренца, удобно рассматривать два таких преобразования как несущественно различные, если они связаны вещественным преобразованием из $L_+^\uparrow$. Точнее, будем говорить, что комплексные преобразования Лоренца Λ_1 и Λ_2 *эквивалентны*, если существуют два вещественных собственных преобразования Лоренца L_1 и L_2 таких, что

$$\Lambda_1 = L_1\Lambda_2L_2, \qquad (L_1,\ L_2 \in L_+^\uparrow). \tag{5.1.14}$$

Соответственно пары $(A_i,\ B_i) \in SL(2)\otimes SL(2)$ $(i=1,\ 2)$ будут считаться *эквивалентными*, если

$$A_1 = CA_2D, \qquad B_1 = \bar{C}B_2\bar{D}, \tag{5.1.15}$$

где $C,\ D \in SL(2)$. Действительно, если имеет место (5.1.15), то

$$A_1\underset{\sim}{z}B_1 = CA_2D\underset{\sim}{z}D^*B_2^TC^*. \tag{5.1.16}$$

Теорема 5.1.1. *Любое преобразование $(A,\ B)\in SL(2)\otimes SL(2)$ эквивалентно одной из следующих двух нормальных форм:*

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}, \qquad B = \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.1.17}$$

где a — любое комплексное число, или

$$A_{\pm}=\begin{pmatrix}\pm 1 & 1\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix},\quad B=\sigma_0. \tag{5.1.18}$$

Доказательство. Выбирая в (5.1.15) $D=\overline{B}_2^{-1}C^{-1}$, мы получим ($B\equiv B_1=\sigma_0$)

$$A\equiv A_1=CA_2\overline{B}_2^{-1}C^{-1}.$$

Но согласно известной теореме из линейной алгебры (см., например, добавление ко второй части [32]) любая двухрядная матрица с определителем 1 может быть приведена преобразованием подобия к одной из двух канонических форм Жордана (5.1.17) или (5.1.18).

Упражнение 5.1.3. Найти четырехрядные матрицы, соответствующие нормальным формам (5.1.17) и (5.1.18).

1.3. Теорема Баргмана — Холла — Уайтмана. Мы переходим к основному результату настоящего параграфа *).

Теорема 5.1.2. *Пусть тензорная функция f_α n комплексных 4-векторов $z_1, \ldots, z_n$ преобразуется при преобразовании аргументов по некоторому конечномерному представлению $V(\Lambda)$ собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$*

$$f_\alpha(\Lambda z_1, \ldots, \Lambda z_n)=\sum_\beta V(\Lambda)_{\alpha\beta}f_\beta(z_1, \ldots, z_n) \tag{5.1.19}$$

и аналитична в будущей трубчатой области

$$T_n^+=\{z_j=x_j+iy_j;\ y_j\in V^+,\ x_j\in R_4,\ j=1, \ldots, n\}.$$

Тогда функция f_α допускает однозначное аналитическое продолжение в расширенную трубчатую область

$$\mathcal{T}_n=\bigcup_{\Lambda\in\mathcal{L}_+}\Lambda T_n^+, \tag{5.1.20}$$

которое преобразуется по формуле (5.1.19) *при любом комплексном преобразовании Лоренца с определителем* 1 (*т. е. при любом $\Lambda\in\mathcal{L}_+$*).

Прежде чем доказать теорему, сделаем несколько замечаний.

1) Требование, чтобы тензор f_α преобразовывался по однозначному представлению собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$, а не по произвольному представлению спинорной группы $SL(2)$, не

*) Теорема 5.1.2 впервые опубликована в работе Холла и Уайтмана (1957).

является на самом деле ограничением общности. Действительно, любое конечномерное неприводимое представление $\left(\frac{j}{2}, \frac{k}{2}\right)$ группы $SL(2)$ (где j и k — целые неотрицательные числа) задается в пространстве тензоров

$$\xi^{\alpha_1 \dots \alpha_j \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_k} \quad (\alpha_l, \dot{\beta}_l = 1, 2),$$

симметричных относительно пунктирных и непунктирных индексов в отдельности, формулой (см. гл. 2, п. 4.1)

$$[V(A)\xi]^{\alpha_1 \dots \alpha_j \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_k} = A^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \dots A^{\alpha_j}_{\alpha'_j} \bar{A}^{\dot{\beta}_1}_{\dot{\beta}'_1} \dots \bar{A}^{\dot{\beta}_k}_{\dot{\beta}'_k} \xi^{\alpha'_1 \dots \alpha'_j \dot{\beta}'_1 \dots \dot{\beta}'_k}. \quad (5.1.21)$$

Если число $j+k$ четное, то мы имеем дело с *тензорным* представлением спинорной группы, которое является однозначным представлением группы $L_+^{\uparrow}$, поскольку в таком случае, как видно из (5.1.21), $V(-A) = V(A)$. Условие ковариантности функции $f^{\alpha_1 \dots \alpha_j \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_k}(z_1, \dots, z_n)$ относительно группы $SL(2)$ имеет вид

$$[V(A) f]^{\alpha_1 \dots \alpha_j \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_k}(z_1, \dots, z_n) = f^{\alpha_1 \dots \dot{\beta}_k}(\Lambda(A) z_1, \dots, \Lambda(A) z_n), \quad (5.1.22)$$

где $V(A)$ определяется формулой (5.1.21), а $\Lambda(A)$ — равенством (2.2.15). Теперь, так как $\Lambda(-1) = 1$, а $V(-1) = (-1)^{j+k}$, то (5.1.22) при $A = -1$ дает

$$(-1)^{j+k} f^{\alpha_1 \dots \dot{\beta}_k}(z_1, \dots, z_n) = f^{\alpha_1 \dots \dot{\beta}_k}(z_1, \dots, z_n). \quad (5.1.23)$$

Следовательно, если $j+k$ нечетное, $f \equiv 0$ (так как по предположению f — однозначная функция своих аргументов). Таким образом, достаточно рассмотреть представления, в разложении которых на неприводимые входят лишь четные $j+k$, т. е. однозначные представления группы $L_+^{\uparrow}$.

2) Теорема 5.1.2 остается справедливой, если заменить будущую трубчатую область T_n^+ на прошедшую $T_n^- = \{z_j = x_j + iy_j;\ y_j \in V\}$. Расширенная трубчатая область $\mathcal{T}_n$ (5.1.20) может быть представлена также в виде

$$\mathcal{T}_n = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{L}_+} \Lambda T_n^-. \quad (5.1.24)$$

Правые части (5.1.20) и (5.1.24) совпадают, поскольку, как отмечалось в п. 1.2, группа $\mathcal{L}_+$ содержит отражение всех четырех осей, которое переводит T_n^+ в T_n^- и обратно.

3) Если предположить, что функции $f_\alpha(z)$ преобразуются по некоторому представлению ортохронной группы Лоренца $L^{\uparrow}$

(включающей пространственное отражение), то можно доказать, что они ковариантны также относительно всей комплексной группы $\mathscr{L}$.

Доказательство теоремы 5.1.2. Фиксируем точку z внутри данной условием теоремы области аналитичности T_n^+ и рассмотрим зависимость функции $f_\alpha(\Lambda z) \equiv f_\alpha(\Lambda z_1, \ldots, \Lambda z_n) = F_\alpha(\Lambda)$, удовлетворяющей (5.1.19), от регулярных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ преобразования Λ, принадлежащего окрестности единичного элемента группы $\mathscr{L}_+$ (см. (5.1.7) и (5.1.11)). Как левая, так и правая части равенства (5.1.19) имеют смысл и являются аналитическими функциями параметров λ в достаточно малой комплексной окрестности начала координат. При вещественных λ эти функции совпадают, следовательно, они совпадают во всей комплексной окрестности (это следует из того, что коэффициенты степенного ряда голоморфной функции могут быть получены дифференцированием вдоль вещественных осей). Далее, правая часть (5.1.19) имеет смысл и тогда, когда $\Lambda z = (\Lambda z_1, \ldots, \Lambda z_n) \notin T_n^+$, определяя, таким образом, аналитическое продолжение функций f_α в точках расширенной трубчатой области $\mathcal{T}_n$. Чтобы закончить доказательство теоремы, необходимо показать, во-первых, что полученное аналитическое продолжение однозначно и, во-вторых, что из найденных выше локальных свойств (в окрестности единичного элемента группы $\mathscr{L}_+$) следуют аналитичность функций $F_\alpha(\lambda)$ и справедливость (5.1.19) при произвольном $\Lambda \in \mathscr{L}_+$.

Покажем сначала, что для доказательства однозначности аналитического продолжения функции $f_\alpha(z)$ в расширенной трубчатой области достаточно показать, что если точка $z \in T_n^+$ и комплексное преобразование Лоренца $\Lambda \in \mathscr{L}_+$ таковы, что и Λz принадлежат первоначальной области определения T_n^+, то равенство (5.1.19) все еще имеет место (это равенство постулируется условием теоремы лишь для вещественных $\Lambda \in L_+^\uparrow$).

Действительно, допустим, что для некоторого $z \in \mathcal{T}_n$ существуют два комплексных преобразования Лоренца Λ_1 и Λ_2 (из $\mathscr{L}_+$), переводящих соответственно точки $z_{(1)}$ и $z_{(2)}$ из T_n^+ в z и таких, что

$$f_\alpha(\Lambda_1 z_{(1)}) \neq f_\alpha(\Lambda_2 z_{(2)}). \tag{5.1.25}$$

Но $f_\alpha(\Lambda_i z_{(i)})$ ($i = 1, 2$) определяется правой частью (5.1.19)

$$f_\alpha(\Lambda_i z_{(i)}) \equiv \sum_\beta V(\Lambda_i)_{\alpha\beta} f_\beta(z_{(i)}), \qquad i = 1, 2.$$

Применяя к обеим частям неравенства (5.1.25)

$$V(\Lambda_2^{-1}) = V^{-1}(\Lambda_2)$$

и пользуясь тем, что $z_{(2)} = \Lambda_2^{-1}\Lambda_1 z_{(1)}$, находим, что неравенство

$$f_\alpha\left(\Lambda_2^{-1}\Lambda_1 z_{(1)}\right) \neq \sum_\beta V\left(\Lambda_2^{-1}\Lambda_1\right)_{\alpha\beta} f_\beta\left(z_{(1)}\right)$$

противоречит сделанному допущению (так как $z_{(1)}$ и $\Lambda_2^{-1}\Lambda_1 z_{(1)} = z_{(2)}$ принадлежат T_n^+).

Итак, нам достаточно доказать, что формула (5.1.19) справедлива для тех комплексных преобразований Лоренца, которые не выводят z из T_n^+.

Чтобы установить это, заметим сначала, что при любом Λ множество $T_n^+ \cap \Lambda T_n^+$ выпукло (следовательно, и связно), так как является пересечением двух выпуклых множеств. Поэтому достаточно доказать (5.1.19) в окрестности какой-нибудь одной точки z. Далее, если (5.1.19) имеет место для некоторого преобразования Λ_0, то оно имеет место и в достаточно малой окрестности Λ_0. Для этого достаточно ввести локальные координаты в окрестности Λ_0 посредством $\Lambda_1 = \Lambda_0\Lambda(\alpha, \beta)$, где $\Lambda(\alpha, \beta)$ дается равенствами (5.1.11)—(5.1.12), и повторить рассуждения, приведенные выше для окрестности единичного элемента $\mathscr{L}_+$. Чтобы завершить доказательство теоремы, остается показать, что любое комплексное преобразование Λ, для которого при какомлибо z из T_n^+ $\Lambda z \in T_n^+$, можно связать непрерывной кривой $\Lambda = \Lambda(t)$ с единичным преобразованием таким образом, чтобы $\Lambda(t) z \in T_n^+$, $\Lambda(0) = 1$, $\Lambda(1) = \Lambda$.

Действительно, в таком случае можно связать Λ с единицей группы конечной системой окрестностей, для каждой из которых применимы вышеприведенные рассуждения. Наличие такой связывающей кривой в пространстве преобразований составляет содержание следующей леммы.

Лемма 5.1.1. *Множество B преобразований Лоренца Λ из $\mathscr{L}_+$, для которых пересечение $\Lambda T_n^+ \cap T_n^+$ не пусто, связно.*

Доказательство. Из инвариантности T_n^+ относительно собственных преобразований Лоренца (из $L_+^\uparrow$) следует, что если $\Lambda \in B$, а L_1, $L_2 \in L_+^\uparrow$, то и $L_1 \Lambda L_2 \in B$. Таким образом, B является множеством классов эквивалентности элементов $\mathscr{L}_+$ относительно $L_+^\uparrow$. Поэтому достаточно показать, что лемма 5.1.1 справедлива для нормальных форм, определяемых теоремой 5.1.1. Случай знака «—» в формуле (5.1.18) надо сразу отбросить, так как преобразование

$$\underset{\sim}{z} \to \underset{\sim}{z}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{z} = \begin{pmatrix} -z^0 - z^3 + z^1 + iz^2 & -z_1 + iz_2 + z^0 - z^3 \\ -z^1 - iz^2 & -z^0 + z^3 \end{pmatrix}$$

выводит из T^+ все векторы, принадлежавшие будущей трубчатой области. Напротив, преобразование (5.1.18) со знаком «+» принадлежит множеству B, поскольку оно оставляет в T_n^+, например, точку

$$z_1 = \ldots = z_n = (i, 0, 0, 0). \tag{5.1.26}$$

Это преобразование можно, с другой стороны, связать непрерывно с единичным преобразованием при помощи кривой в B

$$A_+(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{5.1.27}$$

Действительно, нетрудно видеть, что при преобразованиях (5.1.27) точка (5.1.26) не выходит из T_n^+.

Упражнение 5.1.4. Показать, что преобразование $(A(\alpha), 1)$ типа (5.1.17) принадлежит множеству B, если $|\mathrm{Im}\,\alpha| < \pi$. (Указание: проверить, что при фиксированном $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $|\alpha_2| < \pi$ вектор $z_1 = (i, 0, 0, \sin\alpha_2 - \theta(|\alpha_2| - \pi/2)\operatorname{ctg}\alpha_2)$ остается в будущей трубчатой области T^+ при преобразовании $\underset{\sim}{z}' = A(\alpha)\underset{\sim}{z}$, в то время как при $\alpha_2 = \pm\pi$ любой вектор из T^+ выводится из этой области таким преобразованием.)

Из утверждения, содержащегося в упражнении 5.1.4, следует, что если $(A(\alpha), 1) \in B$, то и $(A(t\alpha), 1) \in B$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Тем самым лемма 5.1.1, а с ней и теорема 5.1.2 доказаны.

Теоремы типа 5.1.2 доказаны теперь для гораздо более общих областей аналитичности (см. Минковски и др. (1964)).

1.4. Вещественные точки расширенной трубчатой области. Из определения трубчатых областей $T_n^\pm$ очевидно, что они не содержат ни одной вещественной точки. Поэтому особенно интересно, что расширенная трубчатая область $\mathcal{T}_n$ при всех n содержит вещественные точки. В частности, отсюда следует, что функции Уайтмана w, которые определялись первоначально как обобщенные функции, суть не только предельные значения голоморфных функций (аналитических в прошедшей трубчатой области), но сами являются аналитическими функциями в некоторой вещественной области изменения пространственно-временных аргументов.

Разъясним это сначала в специальном случае, когда $n = 1$. Поскольку, по определению, любое комплексное преобразование Лоренца сохраняет скалярный квадрат 4-вектора z, то возможные значения z^2, когда $z \in \mathcal{T}_1$, совпадают с возможными значениями z^2, когда $z \in T^\pm$.

Упражнение 5.1.5. Показать, что если $z \in T_n^+$ и z^2 вещественно, то $z^2 < 0$. (Указание: обратить внимание на то, что если вещественные векторы x и y ортогональны между собой и вектор y времениподобен, то вектор x пространственноподобен.)

Из этого упражнения следует, что если расширенная трубчатая область $\mathcal{T}_1$ содержит вещественные точки, то они могут быть лишь пространственноподобными. С другой стороны, нетрудно видеть, что любой вещественный пространственноподобный вектор ξ принадлежит расширенной трубчатой области $\mathcal{T}_1$. Действительно, за счет выбора вещественной системы отсчета любой пространственноподобный вектор ξ может быть приведен к виду $\xi=(0, 0, 0, a)$, где $a > 0$. Но этот вектор связан с вектором $\zeta=(ia, 0, 0, 0)$ из будущей трубчатой области комплексным преобразованием Лоренца из $\mathscr{L}_+$ $\xi=\Lambda\zeta$, где

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1.28}$$

В общем случае произвольного n Йост (1957) дал следующую характеристику вещественных точек расширенной трубчатой области.

Теорема 5.1.3. *Для того чтобы вещественная точка* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *принадлежала расширенной трубчатой области* $\mathcal{T}_n$, *необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе неотрицательных чисел* λ_j, *не равных одновременно нулю, вектор*

$$\rho=\lambda_1\xi_1+\ldots+\lambda_n\xi_n \tag{5.1.29}$$

был пространственноподобным *).

Доказательство. а) *Условие необходимо.* Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{T}_n$. По определению $\mathcal{T}_n$ существует точка будущей трубчатой области $(z_1, \ldots, z_n) \in T_n^+$ такая, что $\xi_j=\Lambda z_j$ $(j=1, \ldots, n)$, где $\Lambda \in \mathscr{L}_+$. Тогда при любом выборе неотрицательных чисел λ_j, не равных одновременно нулю, комплексный вектор

$$z=x+iy=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_j \in T^+$$

и

$$z^2=x^2-y^2+2ixy=\rho^2,$$

т. е. $xy=0$. Отсюда и из упражнения 5.1.5 следует, что $\rho^2 < 0$, т. е. что вектор (5.1.29) пространственноподобен.

---

*) Множество векторов вида (5.1.29) при фиксированных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и при всех $\lambda_j \geqslant 0$, $\Sigma\lambda_i > 0$ образует *выпуклый конус* в четырехмерном пространстве, натянутый на векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Мы будем обозначать этот конус через $K(\xi) \equiv K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

б) *Условие достаточно.* Пусть дано, что $\rho^2 < 0$ при всех $\rho \in K(\xi)$. Поскольку единственная общая точка замыканий конусов $K(\xi)$ и $V^{\pm}$ есть начало координат:

$$\bar{K}(\xi) \cap \bar{V}^+ = \bar{K}(\xi) \cap V^- = \{0\},$$

то существуют касательная плоскость $\alpha x = 0$ к будущему конусу V^+, отделяющая V^+ от K и V^-, и плоскость $\beta x = 0$, касательная к V^- и отделяющая V^- от K и V^+. Из определения следует, что $\alpha^2 = \beta^2 = 0$; выберем $\alpha^0 > 0$, $\beta^0 < 0$, тогда

$$\begin{aligned} &\alpha x > 0 \quad \text{для} \quad x \in V^+, \\ &\alpha x < 0 \quad \text{для} \quad x \in K \quad \text{и} \quad x \in V^-; \end{aligned} \tag{5.1.30}$$

$$\begin{aligned} &\beta x > 0 \quad \text{для} \quad x \in V^-, \\ &\beta x < 0 \quad \text{для} \quad x \in V^+ \quad \text{и} \quad x \in K. \end{aligned} \tag{5.1.31}$$

Поскольку изотропные векторы α и β находятся в разных половинах светового конуса и неколлинеарны, то $\alpha\beta < 0$. Не ограничивая общности, введем нормировочное условие $\alpha\beta = -2$. Тогда за счет выбора системы координат можно добиться, чтобы

$$\alpha = (1, 0, 0, 1), \qquad \beta = (-1, 0, 0, 1).$$

В этой системе, поскольку в силу (5.1.30) и (5.1.31) $\alpha\rho < 0$ и $\beta\rho < 0$, при $\rho \in K(\xi)$ имеем $|\rho^0| < \rho^3$ и, следовательно, $\xi_j^3 > |\xi_j^0|$. Тогда, полагая $z_j^0 = i\xi_j^3$, $z_j^3 = -i\xi_j^0$, $z_j^1 = z_j^2 = 0$, получаем $z_j \in T^+$ и $\xi_j = \Lambda z_j$, где Λ дается равенством (5.1.28). Теорема 5.1.3 доказана.

Вещественные точки расширенной трубчатой области принято называть *точками Йоста.* Их совокупность будем обозначать через J.

1.5. Общий вид лоренц-инвариантных функций, аналитических в трубчатой области. Мы уже подчеркивали, что распространенное представление о том, что любая лоренц-инвариантная функция зависит лишь от скалярных произведений своих векторных аргументов, неприменимо к произвольным обобщенным инвариантным функциям, общий вид которых достаточно сложен (см. гл. 1, п. 3.5). Тем более интересно, что аналитические инвариантные функции действительно зависят лишь от скалярных произведений. В случае функций, аналитических в трубчатой области, это утверждение составляет содержание следующей нетривиальной теоремы Холла — Уайтмана (1957).

Теорема 5.1.4. *Пусть функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ аналитична в будущей трубчатой области T_n^+ и инвариантна относительно ортохронных преобразований Лоренца:*

$$f(\Lambda z_1, \ldots, \Lambda z_n) = f(z_1, \ldots, z_n) \quad \text{при} \quad \Lambda \in L^\uparrow. \tag{5.1.32}$$

Тогда f является функцией лишь скалярных произведений

$$z_{jk} = (z_j z_k), \tag{5.1.33}$$

аналитической на многообразии M_n, в котором изменяются скалярные произведения, когда $(z_1, \ldots, z_n)$ изменяются в T_n^+.

Несколько замечаний перед доказательством теоремы.

1) Так же как и в случае теоремы 5.1.2, теорема 5.1.4 остается справедливой, если заменить будущую трубчатую область T_n^+ на прошедшую. В частности, область M_n в пространстве скалярных произведений z_{jk} остается той же самой:

$$M_n(T_n^+) = M_n(T_n^-) = M_n(\mathcal{T}_n). \tag{5.1.34}$$

2) Для справедливости теоремы существенно (по крайней мере при $n \geqslant 4$), что предполагается инвариантность относительно ортохронной группы Лоренца, включающей пространственные отражения. Действительно, если бы мы предположили инвариантность только относительно собственной группы $L_+^\uparrow$, то при $n \geqslant 4$ мы должны были бы учитывать псевдоскаляры вида

$$\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \begin{vmatrix} z_{i_1}^0 & \ldots & z_{i_1}^3 \\ \cdot & \cdot \;\; \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \;\; \cdot & \cdot \\ z_{i_4}^0 & \ldots & z_{i_4}^3 \end{vmatrix} \qquad i_1 < i_2 < i_3 < i_4, \tag{5.1.35}$$

которые являются полиномами от компонент векторов z_i, но не могут быть выражены как функции скалярных произведений. Однако если включить всевозможные определители (5.1.35) в совокупность инвариантов (вместе со скалярными произведениями), то можно доказать, что функция, аналитическая в T_n^+ и инвариантная относительно $L_+^\uparrow$, является аналитической функцией всевозможных инвариантов (см. Хепп (1963а, б)).

3) При $n \geqslant 4$ не все инварианты, о которых шла речь в предыдущем замечании, независимы. Действительно, поскольку функция f зависит от $4n$ комплексных компонент векторов $z_1, \ldots, z_n$, а группа Лоренца $\mathcal{L}_+$ (относительно которой f инвариантна в силу теоремы 5.1.2) имеет шесть комплексных параметров, то размерность многообразия независимых инвариантных переменных должна быть, вообще говоря, $4n - 6$ (это

верно на самом деле при $n \geqslant 3$, т. е., грубо говоря, при наличии трех и более векторов, так как за счет выбора системы координат можно аннулировать шесть компонент векторов). С другой стороны, имеется $\frac{n(n+1)}{2}$ одних только скалярных произведений из n векторов, что превосходит число независимых компонент уже при $n \geqslant 5$. Нетрудно получить полную систему полиномиальных тождеств между скалярными произведениями, пользуясь тем, что ранг матрицы скалярных произведений z_{jk} не превосходит 4. Это следует из того, что матрицы $z_{j_1 \dots j_l k_1 \dots k_l}$ с определителями

$$d_{i_1 \dots i_l k_1 \dots k_l} = \begin{vmatrix} z_{i_1 k_1} & \dots & z_{i_1 k_l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{i_l k_1} & \dots & z_{i_l k_l} \end{vmatrix} \equiv \det z_{i_1 \dots i_l k_1 \dots k_l} \tag{5.1.36}$$

могут быть получены как произведения прямоугольных матриц ранга, не превосходящего 4,

$$z_{j_1 \dots k_l} = \begin{pmatrix} z^0_{i_1} & z^1_{i_1} & \dots & z^3_{i_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z^0_{i_l} & z^1_{i_l} & \dots & z^3_{i_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0_{k_1} & \dots & z^0_{k_l} \\ -z^1_{k_1} & \dots & -z^1_{k_l} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ -z^3_{k_1} & \dots & -z^3_{k_l} \end{pmatrix} \tag{5.1.37}$$

и, следовательно, к ним можно применить теорему об определителе произведения прямоугольных матриц (см. [32], ч. 1, гл. 1, § 1.7). Итак, при $n > 4$ все миноры ранга $l > 4$ матрицы (z_{jk}) равны нулю. Не все полученные таким образом полиномиальные тождества между скалярными произведениями независимы, но они образуют полную систему. Со своей стороны, псевдоскаляры (5.1.35) связаны с определителями (5.1.36) тождествами вида

$$\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Delta_{k_1 k_2 k_3 k_4} + d_{i_1 i_2 i_3 i_4 k_1 k_2 k_3 k_4} = 0. \tag{5.1.38}$$

Число независимых инвариантов при $n = 1, 2, 3$ равно, соответственно, 1, 3, 6.

4) Теорема 5.1.4 допускает различные обобщения. Так, результаты Хеппа (1963а, б) дают возможность разложить любую тензорную лоренц-ковариантную аналитическую функцию на конечную линейную комбинацию тензорных полиномов с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями инвариантов, построенных из аргументов исходной функции.

Здесь мы перечислим лишь основные моменты доказательства теоремы 5.1.4, отсылая за деталями к превосходной оригинальной работе Холла и Уайтмана (1957).

Схема доказательства теоремы 5.1.4. В силу теоремы 5.1.2 (см. замечание 3) после формулировки этой теоремы) функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы 5.1.4, допускает аналитическое продолжение в расширенной трубчатой области $\mathcal{T}_n$, причем условие инвариантности (5.1.32) сохраняет свою силу при любых комплексных преобразованиях Лоренца ($\Lambda \in \mathscr{L}$).

Пусть, далее, дана пара точек $z_1, \ldots, z_n$ и $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ в $4n$-мерном пространстве таких, что

$$z_{jk} \equiv z_j z_k = \zeta_j \zeta_k \quad \text{при} \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{5.1.39}$$

Если матрица (z_{jk}) имеет ранг 3 или 4, или если эта матрица несингулярна (при $n \leqslant 2$), то существует комплексное преобразование Лоренца Λ такое, что

$$\Lambda z_j = \zeta_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.1.40}$$

Если ранг этой матрицы равен 2 (или 1), когда $n > 2$ (или $n > 1$ соответственно), то связь между z и ζ, вообще говоря, сложнее:

$$\Lambda z_j = \zeta_j + \alpha_j \omega, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5.1.41}$$

где α_j — комплексные числа, а ω — изотропный 4-вектор, ортогональный ко всем Λz_j и ζ_j. Для точек $(z_{ik}) \in M_n$, для которых из (5.1.39) следует (5.1.40), очевидно, вытекает однозначность f как функции скалярных произведений. Это же удается доказать при помощи некоторого дополнительного исследования и для тех исключительных точек, где приходится пользоваться формулой (5.1.41).

Итак, f является однозначной функцией на всем многообразии M_n скалярных произведений векторов $(z_1, \ldots, z_n) \in T_n^+$, которое может рассматриваться как алгебраическое многообразие в пространстве всех комплексных симметричных матриц порядка n. Оказывается, что это многообразие является открытым подмножеством множества всех комплексных симметричных матриц, ранг которых меньше или равен 4. Следовательно, оно имеет комплексную размерность 1 при $n=1$, 3 при $n=2$ и $4n-6$ при $n \geqslant 3$ (ср. с замечанием 3)).

Чтобы из непрерывности (и аналитичности) функции $f(z_1, \ldots, z_n)$ в $\mathcal{T}_n$ сделать вывод о непрерывности (и аналитичности) функции

$$F((z_{jk})) = f(z_1, \ldots, z_n) \tag{5.1.42}$$

на M_n, необходимо исследовать связь между окрестностями векторов $z=(z_1, \ldots, z_n)$ и окрестностями соответствующих матриц (z_{jk}). Эта связь довольно проста в тех точках M_n, в которых ранг матрицы (z_{jk}) равен 3 или 4. Однако в точках, где этот ранг равен 2 или 1 (а n, соответственно, больше 2 или 1), задача становится более трудной, так как в пространстве векторов z структура множества точек, которые отображаются в одну заданную точку многообразия M_n, гораздо сложнее. Тем не менее оказывается, что требуемая связь окрестностей существует во всех точках.

При $n \leqslant 4$ аналитичность является обычным понятием, так как тогда M_n есть открытое множество в комплексном евклидовом пространстве размерностью $\frac{n(n+1)}{2}$. Однако при $n \geqslant 5$ M_n является открытым множеством на $4n-6$-мерном многообразии, и понятие аналитичности требует некоторого разъяснения. Касательное пространство к многообразию M_n (при $n \geqslant 5$) в точке Z, для которой ранг матрицы $Z=(z_{jk})$ равен 4, имеет размерность $4n-6$. Каждая, достаточно малая окрестность точки Z в M_n может быть поставлена во взаимно однозначное и аналитическое соответствие с некоторой окрестностью в касательном пространстве. Вблизи таких точек функция F (5.1.42) может рассматриваться как заданная в открытой области $4n-6$-мерного евклидова пространства, и аналитичность снова определяется хорошо известным способом. Трудность начинается в особых точках многообразия M_n ($n \geqslant 5$), где ранг матрицы Z меньше 4. Для таких точек касательное векторное пространство имеет размерность $\frac{n(n+1)}{2}$, и их окрестность не является локально евклидовой.

В качестве примера многообразия с особой точкой можно привести любой двойной конус (например, световой конус). Никакая окрестность вершины конуса не гомеоморфна евклидову шару. Нужно, однако, иметь в виду, что рассматриваемый здесь случай значительно сложнее, так как особые точки в M_n возникают лишь при $n \geqslant 5$ и в простейшем случае $n=5$ касательное пространство имеет вещественную размерность $5 \cdot 6=30$, а само многообразие особых точек имеет 14 вещественных измерений.

Понятие аналитичности может быть обобщено для таких особых точек разными способами. В данном случае доказывается аналитичность во всех точках многообразия M_n для $n \leqslant 4$, аналитичность в неособых точках при $n \geqslant 5$ и непрерывность и ограниченность в особых точках при $n \geqslant 5$. Именно в этом смысле и нужно понимать слова «аналитична на M_n» в формулировке теоремы.

Для доказательства аналитичности на M_n сначала выводятся дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет функция f вследствие лоренц-инвариантности. Эти уравнения имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n}\left(z_{j\mu}\frac{\partial f}{\partial z_j^{\nu}}-z_{j\nu}\frac{\partial f}{\partial z_j^{\mu}}\right)=0. \tag{5.1.43}$$

Далее показывается, что в окрестности каждой точки M_n, в которой скалярные произведения образуют полную систему решений уравнений (5.1.43), F является аналитической функцией скалярных произведений. Затем устанавливается, что в каждой точке, в которой ранг матрицы (z_{jk}) равен максимально возможному, скалярные произведения действительно образуют полную систему решений системы (5.1.43). Наконец, при помощи известной теоремы об устранимых особенностях (см., например, [51], гл. 8, § 9, теорема 5) доказывается, что функция F аналитична и в тех точках многообразия M_n (при $n\leqslant 4$), в которых ранг матрицы (z_{jk}) меньше n.

Упражнение 5.1.6. Показать, что при $n=2$ совокупность точек Иоста отображается в область

$$\begin{gathered} z_1<0,\quad z_2<0,\quad z_3<0,\\ z_1^2+z_2^2+z_3^2<2\left(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3\right)\end{gathered} \tag{5.1.44}$$

пространства трех вещественных переменных

$$z_1=\zeta_1^2,\qquad z_2=\zeta_2^2,\qquad z_3=(\zeta_1+\zeta_2)^2. \tag{5.1.45}$$

1.6. Общий вид ковариантных амплитуд упругого рассеяния. Обобщение теоремы 5.1.4, о котором говорилось в замечании 4) после ее формулировки, находит много практических применений к амплитудам рассеяния.

Теоремы 5.1.2 и 5.1.4 применимы к амплитудам двухчастичного рассеяния, так как согласно анализу, проведенному в гл. 4, п. 3.7, эти амплитуды связаны с запаздывающими функциями Грина, преобразования Лапласа которых аналитичны в будущей трубчатой области.

Рассмотрим в качестве первого примера инвариантную амплитуду рассеяния бесспиновой частицы на частице со спином $^1/_2$ (например, амплитуду упругого рассеяния π^+-мезона на протоне). Матричный элемент, соответствующий процессу такого типа, имеет вид

$$\tilde v_{\zeta_2}(p_2)\,T\left(p_2q_2;\ p_1q_1\right)v_{\zeta_1}(p_1), \tag{5.1.46}$$

где p_1 и p_2 — начальный и конечный импульсы фермиона (с массой M), а q_1 и q_2 — соответствующие импульсы бозона с массой m:

$$p_1+q_1=p_2+q_2,\qquad p_1^2=p_2^2=M^2,\qquad q_1^2=q_2^2=m^2, \tag{5.1.47}$$

$$\hat p_1 v_\zeta(p_1)=Mv_\zeta(p_1),\qquad \tilde v_\zeta(p_2)\,\hat p_2=M\tilde v_\zeta(p_2) \tag{5.1.48}$$

(поскольку мы имеем дело с фиксированным упругим процессом, мы опускаем знак заряда у спинора v_ζ).

Инвариантная амплитуда T является, таким образом, четырехрядной матрицей. Если предположить, что амплитуда инвариантна относительно преобразований из полной группы Лоренца, включающей пространственные отражения (что имеет место в теории сильных и электромагнитных взаимодействий), то, принимая во внимание трансформационные свойства γ-матриц, мы приходим к следующему общему виду для T:

$$T = A\mathbf{1} + B\hat{q}, \tag{5.1.49}$$

где $q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$, а $\mathbf{1}$ — единичная четырехрядная матрица. Здесь мы воспользовались тем, что на массовой поверхности, в силу (5.1.47) и (5.1.48), матрицы $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ и $\hat{q}_1 - \hat{q}_2 = \hat{p}_2 - \hat{p}_1$ кратны единичной матрице и что имеет место тождество (2.4.5), согласно которому $\hat{q}^2 = q^2\mathbf{1}$.

Если бы мы потребовали инвариантности лишь относительно собственных преобразований Лоренца, то к (5.1.49) пришлось бы добавить еще два члена:

$$C\gamma^5 + Di\gamma^5\hat{q}. \tag{5.1.50}$$

Наличие в амплитуде одновременно членов (5.1.49) и (5.1.50) соответствует *несохранению четности.* Если четность сохраняется, но мы имеем дело с неупругим процессом, в котором относительная четность фермионов в начальном и конечном состояниях отрицательна, то T будет иметь вид (5.1.50).

Из обобщенной теоремы Холла — Уайтмана следует, что функции A и B в (5.1.49) будут зависеть лишь от скалярных произведений импульсов реакции. Принимая во внимание (5.1.47), можно написать

$$T(p_2, q_2; p_1, q_1) = A(s, t) + B(s, t)\,\hat{q}, \tag{5.1.51}$$

где s и t — переменные Мандельстама (Мандельстам (1958)):

$$s = (p_1 + q_1)^2 = (p_2 + q_2)^2, \qquad t = (p_1 - p_2)^2 = (q_1 - q_2)^2. \tag{5.1.52}$$

Упражнение 5.1.7. Найти общий вид инвариантной амплитуды рассеяния протона на протоне при предположении, что четность сохраняется.

§ 2. *TCP*-инвариантность локальной теории и классы эквивалентности Борхерса

2.1. *TCP*-преобразование функций Уайтмана. Мы будем придерживаться следующего плана изложения. Сначала мы предположим, что теория допускает дискретные симметрии T, C и P типа тех, которые мы детально рассмотрели в гл. 3, п. 4.4

для свободного спинорного поля. В этом случае мы определим TCP-оператор Θ как антиунитарный оператор, равный произведению представлений операций T, C и P в пространстве векторов состояний:

$$\Theta = U(I_t)\, U(I_C)\, U(I_s). \tag{5.2.1}$$

Зная действие операторов U и Θ, мы можем найти условия которые нужно наложить на функции Уайтмана для того, чтобы теория была T-, C-, P- или Θ-инвариантна. Основной результат этого параграфа состоит в том, что, хотя каждая из симметрий T, C и P накладывает некие новые ограничения на функции Уайтмана, сохранение их произведения Θ является следствием основных требований локальной квантовой теории поля и не накладывает никаких новых ограничений. Поэтому можно представить себе теорию, в которой существует TCP-симметрия, но которая не инвариантна в отдельности относительно T, C и P. (Более того, имеются экспериментальные основания считать, что такая ситуация имеет место в действительности, если учитывать все типы взаимодействий элементарных частиц; см. по этому поводу, например, обзоры Ли (1965) и (1966), Арбузова и Филиппова (1966), Окуня (1966) и монографию [55], в которых можно найти ссылки на более ранние оригинальные работы.) В этом случае рассуждения настоящего пункта следует рассматривать в качестве наводящих соображений и полученный результат для действия оператора Θ надо принять в качестве постулата.

Мы будем исходить из свойств преобразований полей со спином $^1/_2$, поскольку в терминах сумм произведений этих полей можно выразить операторы с произвольными трансформационными свойствами.

Пользуясь формулами (5.2.1) и (3.4.56), (3.4.57), (3.4.58), находим

$$\begin{aligned} \Theta\psi(x)\Theta^{-1} &= \eta\gamma^5\psi^*(-x) = \eta\gamma^5\gamma^0\bar{\psi}(-x), \\ \Theta\bar{\psi}(x)\Theta^{-1} &= \bar{\eta}\gamma^5\gamma^0\psi(-x), \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

где

$$\eta = \overline{\eta_t\eta_C\eta_s} \qquad (\eta^4 = 1).$$

Рассмотрим теперь трансформационные свойства билинейных комбинаций вида

$$\Lambda(O, x) = \bar{\psi}(x)\, O\varphi(x) \tag{5.2.3}$$

при TCP-преобразовании. Здесь φ и $\bar{\psi}$ — строго антикоммутирующие спинорные поля, а четырехрядная матрица O может равняться одной из следующих комбинаций γ-матриц:

$$1,\ \gamma^5,\ \gamma^\mu,\ i\gamma^\mu\gamma^5,\ \frac{i}{2}[\gamma^\mu,\ \gamma^\nu]. \tag{5.2.4}$$

Множители i в матрицах (5.2.4) выбраны таким образом, чтобы имело место тождество

$$\gamma^0 O^* \gamma^0 = O, \tag{5.2.5}$$

т. е. чтобы матрица $\gamma^0 O$ была эрмитовой. Заметим, что совокупность матриц (5.2.4), удовлетворяющих условию (5.2.5), порождает алгебру Ли группы $U(2,\ 2)$ преобразований, сохраняющих эрмитову форму $\tilde{\varphi}\psi$. Мы намеренно взяли разные поля $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в (5.2.3) с тем, чтобы иметь возможность рассматривать трансформационные свойства произвольных комплексных (а не только эрмитовых) тензорных полей. Пользуясь (5.2.2), (5.2.5) и антиунитарностью и антикоммутативностью полей ψ и φ, получаем

$$\Theta\tilde{\psi}(x)\, O\varphi(x)\, \Theta^{-1} = \tilde{\varphi}(-x)\, O'\psi(-x), \tag{5.2.6}$$

где

$$\begin{gathered} O' \equiv \gamma^5 O (\gamma^5)^{-1} = -\gamma^5 O \gamma^5 = \varepsilon(O)\, O, \\ \varepsilon(1) = \varepsilon(\gamma^5) = \varepsilon\left(\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\ \gamma^\nu]\right) = 1, \quad \varepsilon(\gamma^\mu) = \varepsilon(i\gamma^\mu\gamma^5) = -1. \end{gathered} \tag{5.2.7}$$

С другой стороны, пользуясь еще раз равенством (5.2.5), находим

$$\Lambda^*(O,\ x) = \tilde{\varphi}(x)\, O\psi(x). \tag{5.2.8}$$

Сравнение (5.2.6) и (5.2.8) дает

$$\Theta\Lambda(O,\ x)\,\Theta^{-1} = \varepsilon(O)\,\Lambda^*(O,\ -x), \tag{5.2.9}$$

где $\varepsilon(O)$ равно $+1$ для скаляра, псевдоскаляра и антисимметричного тензора и -1 — для вектора и аксиального вектора. Рассмотрим в качестве примера $V - A$ ток

$$J^\mu(x) = \tilde{\psi}(x)\,\gamma^\mu(1 + i\gamma^5)\,\varphi(x), \tag{5.2.10}$$

встречающийся в теории слабых взаимодействий (см., например, [29] или Ли (1965)). При пространственном отражении в силу (3.4.56)

$$U(I_s)\, J^\mu(x)\, U^{-1}(I_s) = \tilde{\psi}(I_s x)\, g^{\mu\mu}\gamma^\mu(1 - i\gamma^5)\,\varphi(I_s x). \tag{5.2.11}$$

Правая часть этого равенства вследствие изменения знака перед $i\gamma^5$ не выражается линейно через компоненты тока J^μ (и их эрмитово сопряженные величины). Наоборот, при TCP-преобразовании согласно (5.2.9) имеем

$$\Theta J^\mu(x)\,\Theta^{-1} = -J^{*\mu}(-x). \tag{5.2.12}$$

Упражнение 5.2.1. Показать, что при CP-преобразовании слабый ток (5.2.10) выражается через эрмитово сопряженный ток по формуле

$$U(CP)\, J^{\mu}(x^0, x)\, U^{-1}(CP) = d^{\mu\mu} J^{*\mu}(x^0, -x). \tag{5.2.13}$$

Закон преобразования (5.2.9) легко обобщается на произвольные тензоры (или псевдотензорные) поля:

$$\Theta \Lambda_{\mu_1 \ldots \mu_n}(x)\, \Theta^{-1} = (-1)^n \Lambda^{*}_{\mu_1 \ldots \mu_n}(-x). \tag{5.2.14}$$

Добавление спинорного индекса приводит, согласно (5.2.2), к добавочному умножению на $\eta\gamma^5$.

Развитый таким образом формализм относится к полям, преобразующимся по *вещественным представлениям* группы Лоренца, т. е. либо по неприводимым представлениям $D(j, j)$, либо по приводимым представлениям $D(j_1, j_2) + D(j_2, j_1)$ при $j_1 \neq j_2$ (и те и другие являются неприводимыми спинорными представлениями группы $L^{\uparrow}$, включающей пространственные отражения).

Чтобы записать единообразно закон преобразования произвольного (спинорного или тензорного) поля, можно перейти к двухкомпонентному формализму в представлении, в котором матрица γ^5 диагональна (см. (2.4.15)) *). В этом представлении, полагая

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi^{\alpha} \\ \chi_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{5.2.15}$$

можно привести равенство (5.2.2) к виду

$$\begin{gathered} \Theta \begin{pmatrix} \xi^{\alpha}(x) \\ \chi_{\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix} \Theta^{-1} = i\eta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\xi^{\alpha}(-x))^{*} \\ (\chi_{\dot{\alpha}}(-x))^{*} \end{pmatrix}, \\ \Theta \begin{pmatrix} \chi^{*}_{\alpha}(x) \\ \xi^{*\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix} \Theta^{-1} = i\bar{\eta} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{\alpha}(-x) \\ \xi^{\dot{\alpha}}(-x) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{5.2.16}$$

Полагая

$$\begin{gathered} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_n \beta_1 \ldots \beta_n}(x) = \Lambda^{\mu_1 \ldots \mu_n}(x) \left(\sigma_{\mu_1}\right)^{\alpha_1 \beta_1} \ldots \left(\sigma_{\mu_n}\right)^{\alpha_n \beta_n}, \\ \chi_{\dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n \beta_1 \ldots \beta_n}(x) = \Lambda_{\mu_1 \ldots \mu_n}(x) \left(\sigma_{\mu_1}\right)_{\dot{\alpha}_1 \beta_1} \ldots \left(\sigma_{\mu_n}\right)_{\dot{\alpha}_n \beta_n}, \end{gathered} \tag{5.2.17}$$

мы находим TCP-преобразование для смешанных тензоров с одинаковым числом пунктирных и непунктирных индексов. Комбинируя полученный результат с (5.2.16), нетрудно найти закон

*) При этом, в принципе, можно выйти за рамки вещественных представлений группы $SL(2)$, хотя в дальнейшем мы снова вернемся к этому важнейшему с практической точки зрения случаю (см. § 3).

преобразования произвольного «спин-тензора»:

$$\Theta\begin{pmatrix}\xi^{(\alpha)(\beta)}(x)\\ \chi_{(\dot\alpha)(\dot\beta)}(x)\end{pmatrix}\Theta^{-1}=\eta^j\bar\eta^k\begin{pmatrix}\varepsilon_{jk}\xi^{*(\alpha)(\beta)}(-x)\\ \bar\varepsilon_{jk}\chi^*_{(\dot\alpha)(\dot\beta)}(-x)\end{pmatrix}, \tag{5.2.18}$$

где

$$(\alpha)=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_j),\qquad (\beta)=(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_k),$$

$$\varepsilon_{jk}=\frac{1}{2}[(-1)^j+(-1)^k+((-1)^j-(-1)^k)i]=(-1)^j\times$$

$$\times\begin{pmatrix}i,\ \text{если } j+k \text{ нечетное},\\ 1,\ \text{если } j+k \text{ четное}\end{pmatrix}. \tag{5.2.19}$$

Из (5.2.18) и (5.2.19) следует, что если Θ является симметрией теории, в частности, если вакуум инвариантен:

$$\Theta\Psi_0=\Psi_0, \tag{5.2.20}$$

то вакуумные средние от полей $\xi_1^{(\alpha_1)(\beta_1)},\ \ldots,\ \xi_n^{(\alpha_n)(\beta_n)}$ удовлетворяют (в силу антиунитарности Θ) соотношению

$$\left(\Psi_0,\ \xi_1^{(\alpha_1)(\beta_1)}(x_1)\ldots\xi_n^{(\alpha_n)(\beta_n)}(x_n)\Psi_0\right)=$$

$$=\eta^{J-K}i^F(-1)^J\left(\Psi_0,\ \xi_1^{*(\alpha_1)(\beta_1)}(-x_1)\ldots\xi_n^{*(\alpha_n)(\beta_n)}(-x_n)\Psi_0\right)=$$

$$=\eta^{J-K}i^F(-1)^J\left(\Psi_0,\ \xi_n^{(\alpha_n)(\beta_n)}(-x_n)\ldots\xi_1^{(\alpha_1)(\beta_1)}(-x_1)\Psi_0\right), \tag{5.2.21}$$

где J — суммарное число непунктирных индексов, K — суммарное число пунктирных индексов, F — суммарное число спинорных (фермионных) полей.

Если предположить, что с совокупностью спинорных полей связан некоторый закон сохранения заряда (например, закон сохранения барионного или лептонного числа), то наряду с каждым спинорным полем в вакуумное среднее (5.2.21) будет входить и некоторое поле, преобразующееся по сопряженному представлению, так что тогда будем иметь $J=K$ и множитель, содержащий η в (5.2.21), исчезнет. В этом случае фазовый множитель η вообще несуществен, и мы будем его опускать.

Условие (5.2.21) является не только необходимым, но и достаточным для существования *TCP*-симметрии. Другими словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2.1. *Пусть для функции Уайтмана полей $\xi^{(\alpha_r)(\beta_r)}(x)$ ((α_r) и (β_r) — совокупности индексов) справедливо равенство*

$$w_{(\alpha_1)(\beta_1)\ldots(\alpha_n)(\beta_n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)=$$

$$=i^F(-1)^J w_{(\alpha_n)(\beta_n)\ldots(\alpha_1)(\beta_1)}(-x_n,\ \ldots,\ -x_1), \tag{5.2.22}$$

где J — полное число непунктирных индексов, а F — число полей с полуцелым спином, входящих в w. Тогда существует единственный (с точностью до множителя, который может быть фиксирован условием (5.2.20)) антиунитарный оператор Θ в $\mathscr{H}$ такой, что для любого поля

$$\Theta\xi^{\alpha_1 \dots \alpha_j \dot\beta_1 \dots \dot\beta_k}(x)\Theta^{-1} = \varepsilon_{jk}\xi^{*\alpha_1 \dots \beta_k}(-x), \tag{5.2.23}$$

где, как и в (5.2.19), $\varepsilon_{jk} = (-1)^j i^{F(j,k)}$, $F(j, k) = \frac{1-(-1)^{j+k}}{2}$. *Оператор Θ связан с представлением $U(\underset{\sim}{a}, A)$ группы $\mathfrak{P}_0$ тождеством*)*

$$\Theta U(\underset{\sim}{a}, A)\Theta^{-1} = U(-\underset{\sim}{a}, A). \tag{5.2.24}$$

Упражнение 5.2.2. Доказать теорему 5.2.1. (Указание: следовать рассуждениям, которыми мы пользовались при доказательстве теоремы 3.4.1.)

2.2. Аналитичность в симметризованной трубчатой области и слабая локальная коммутативность. Теорема Баргмана — Холла — Уайтмана, доказанная в п. 3.1, применима (как уже отмечалось в п. 1.1) к функциям Уайтмана

$$w_{\tau_1 \dots \tau_n}(x_1, \dots, x_n) = F_\tau(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}).$$

Как было показано в гл. 3, п. 2.2, из условия спектральности следует, что функции F_τ являются предельными значениями функций F, аналитических в прошедшей трубчатой области T^-_{n-1} (теорема 3.2.2). Из теоремы 5.1.2 следует, что эти функции допускают аналитическое продолжение в расширенную трубчатую область $\mathcal{T}_{n-1}$. Таким образом, обобщенные функции Уайтмана могут рассматриваться как предельные значения (в смысле топологии в $\mathcal{S}^*$) аналитических функций n комплексных переменных

$$w_{\tau_1 \dots \tau_n}(z_1, \dots, z_n), \tag{5.2.26}$$

регулярных в области

$$G_n = \{z_1, \dots, z_n \mid (z_1 - z_2, \dots, z_{n-1} - z_n) \in \mathcal{T}_{n-1}\} \tag{5.2.27}$$

и ковариантных относительно преобразований из собственной комплексной группы Пуанкаре $\mathfrak{P}_+(C)$. Согласно теореме 5.1.3, в область аналитичности функций w входят вещественные точки $(r_1, \dots, r_n)$, для которых

$$(\rho_1 = r_1 - r_2, \dots, \rho_{n-1} = r_{n-1} - r_n) \in J. \tag{5.2.28}$$

---

*) Напомним, что

$$I_{st} A I_{st}^{-1} = A. \tag{5.2.25}$$

Все вещественные точки аналитичности функций w (которые впредь мы будем называть *r-точками*) полностью пространственноподобны:

$$(r_k - r_l)^2 = (\rho_k + \rho_{k+1} + \ldots + \rho_{l-1})^2 < 0.$$

Нетрудно видеть, что принцип локальной коммутативности позволяет расширить область аналитичности G_n.

Действительно, пусть π — произвольная перестановка индексов $1, \ldots, n$ ($\pi(1, \ldots, n) = (i_1, \ldots, i_n)$). Тогда для полностью пространственно-подобных r-точек имеем

$$w_{\tau_1 \ldots \tau_n}(r_1, \ldots, r_n) = (-1)^m w_{\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_n}}(r_{i_1}, \ldots, r_{i_n}), \qquad (5.2.29)$$

где m — число перестановок антикоммутирующих полей, необходимое для перехода от последовательности индексов $(1, 2, \ldots, n)$ к последовательности $(i_1, \ldots, i_n)$. Функция $(-1)^m w_{\pi\tau}(z_{i_1} \ldots z_{i_n})$ аналитична в области

$$\pi G_n \{z_1, \ldots, z_n | (z_{i_1} - z_{i_2}, \ldots, z_{i_{n-1}} - z_{i_n}) \in \mathcal{T}_{n-1}\}, \qquad (5.2.30)$$

вообще говоря, отличной от G_n. С другой стороны, в вещественных точках аналитичности функции w_τ и $(-1)^m w_{\pi\tau}$ совпадают в силу (5.2.29). Отсюда следует, что функция w_τ допускает аналитическое продолжение в симметризованной области

$$G_n^s = \bigcup_\pi \pi G_n \equiv \{z_1, \ldots, z_n | (z_1 - z_2, \ldots, z_{n-1} - z_n) \in \mathcal{T}_{n-1}^s\}, \qquad (5.2.31)$$

где теоретико-множественная сумма $\bigcup$ распространяется на все перестановки индексов $1, \ldots, n$.

Особенно просто выражаются локальные свойства в терминах аналитических функций Уайтмана для одного скалярного эрмитова поля φ. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2.2. а) *Функции Уайтмана $w_n(z_1, \ldots, z_n)$ локального поля φ аналитичны в области G_n^s* (5.2.31) *и симметричны относительно любой перестановки переменных $z_1, \ldots, z_n$.* б) *Обратно, из симметрии аналитических функций Уайтмана w_n следует выполнение условия локальной коммутативности.*

Доказательство. Справедливость а) следует из вышеприведенных рассуждений. Докажем утверждение б).

Пусть функция

$$w_n(z_1, \ldots, z_n) = F(z_1 - z_2, \ldots, z_{n-1} - z_n)$$

аналитична в G_n и симметрична (тогда она аналитична также и в G_n^s). Нам нужно показать, что при вещественных значениях аргументов предельные значения w_n аналитической функции $\mathscr{W}_n$ удовлетворяют условию

$$w_n(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = w_n(x_1, \ldots, x_{k+1}, x_k, \ldots, x_n)$$
$$\text{при} \quad (x_k - x_{k+1})^2 < 0. \tag{5.2.32}$$

Заметим сначала, что перестановка z_k и z_{k+1} эквивалентна следующей замене в пространстве переменных $\zeta_j = z_j - z_{j+1}$:

$$\zeta_{k-1} \to \zeta_{k-1} + \zeta_k, \quad \zeta_k \to -\zeta_k, \quad \zeta_{k+1} \to \zeta_k + \zeta_{k+1}.$$

Таким образом, в области аналитичности $\mathcal{T}_{n-1}$ функции F имеем

$$F(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}, \zeta_k, \zeta_{k+1}, \zeta_{n-1}) =$$
$$= F(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1} + \zeta_k, -\zeta_k, \zeta_k + \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n).$$

Это равенство остается в силе, если $\zeta_l \in T^-$ при $l \neq k$, а вектор $\zeta_k = \xi_k$ веществен и пространственноподобен $(\xi_k^2 < 0)$. Действительно, все точки такого вида принадлежат расширенной трубчатой области $\mathcal{T}_{n-1}$, поскольку для каждой такой точки существует преобразование $\Lambda \in \mathscr{L}_+$, переводящее ее в T_{n-1}^-. На самом деле, выбирая систему отсчета так, чтобы $\xi_k = (0, a > 0, 0, 0)$, мы можем положить

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\varphi & i\sin\varphi & 0 & 0 \\ i\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и при достаточно малом φ показать, что

$$\Lambda(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}, \xi_k, \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_{n-1}) \in T_{n-1}.$$

Таким образом, мы получаем

$$F(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}, \xi_k, \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_{n-1}) =$$
$$= F(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1} + \xi_k, -\xi_k, \zeta_{k+1} + \xi_k, \ldots, \zeta_{n-1}). \tag{5.2.33}$$

Но при $\operatorname{Im} \zeta_l \to -0$ левая и правая части равенства (5.2.33) стремятся, соответственно, к левой и правой частям (5.2.32). Таким образом, равенство (5.2.32), а с ним и теорема 5.2.2 доказаны.

В качестве применения полученного результата докажем теорему о глобальной природе свойства локальной коммутативности.

Теорема 5.2.3. *Пусть скалярное поле $\varphi(x)$ удовлетворяет всем аксиомам, кроме постулата локальной коммутативности,* *вместо которого выполняется более слабое требование* $[\varphi(x), \varphi(y)]=0$, *когда* x *изменяется в некоторой (произвольно малой) окрестности нуля, а* y — *в окрестности заданного пространственноподобного вектора* a. *Тогда для поля* $\varphi(x)$ *справедливо свойство локальной коммутативности* *).

Прежде чем доказывать теорему, сделаем одно замечание. Мы уже говорили о том, что постулат локальной коммутативности является одним из самых ограничительных принципов квантовой теории поля. Могло бы возникнуть сомнение относительно экспериментальной обоснованности этого постулата: мы не имеем особых оснований считать, что измерение компоненты эрмитова поля в некоторой точке не влияет на значение компонент этого поля в другой точке, отстоящей от первой на пространственноподобный интервал порядка 10^{-16} *см* (или еще меньше). Однако сформулированная теорема позволяет *доказать* свойство локальной коммутативности, если сделать на первый взгляд более слабое допущение, что поля коммутируют лишь при достаточно больших пространственных разделениях. Из нее следует, что если в нелокальной теории справедливы остальные требования релятивистской квантовой теории, то, грубо говоря, коммутатор полей должен быть всюду отличным от нуля. Поэтому неудивительно, что при попытках ввести «нелокальность в малом» вводится одновременно некоторая анизотропия вакуума или, что то же, нарушение принятой здесь жесткой формулировки условия релятивистской инвариантности (см. Инграхам (1962), Блохинцев и Колеров (1964) и доклады в сборнике (Дубна 67)).

Доказательство теоремы 5.2.3. Рассмотрим вещественную точку аналитичности $(r_1^l, \ldots, r_n^l)$, где $r_k^l = (k-l)a$

---

*) В работах В. С. Владимирова ([24], стр. 337; см. также более раннюю работу (1960)) и Д. Я. Петрины (1961) доказан такой результат:

Из трансляционной инвариантности, из неотрицательности оператора энергии — импульса и из условия

$$[A(x), B(y)]=0 \quad \text{при} \quad -l_1^2<(x-y)^2<-l^2$$

следует обычная локальная коммутативность:

$$[A(x), B(y)]=0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2<0.$$

Этот результат наиболее сильный, так как он не предполагает ковариантности относительно группы Лоренца $L_+^\uparrow$ и следует из теоремы о C-выпуклых оболочках из теории функций многих комплексных переменных, доказанной впервые В. С. Владимировым в упомянутых выше работах.

$(l=1, \ldots, n-1)$. Тогда, согласно предположению теоремы, в некоторой окрестности этой точки выполняется равенство

$$w_n(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n) = w_n(x_1, \ldots, x_{l+1}, x_l, \ldots, x_n).$$

Отсюда следует такое же равенство для всех комплексных точек аналитичности функций w. Из-за произвольности l это приводит к полной симметрии функции w_n, а в силу теоремы 5.2.2 — к локальности поля φ. Теорема 5.2.3 доказана.

Мы видели, что полная симметрия функций Уайтмана выражает нетривиальным образом локальность, положенную в основу теории поля. Вместе с тем, однако, она ставит новые, до сих пор нерешенные проблемы.

Чтобы сформулировать их, мы напомним следующий основной факт теории функций нескольких комплексных переменных (см. [24]). В отличие от случая одного комплексного переменного не каждая область в многомерном комплексном пространстве является естественной (максимальной) областью аналитичности некоторой функции. Поэтому важную роль играет понятие *области голоморфности*: это — область, являющаяся естественной областью аналитичности хотя бы для одной функции. Если данная область G не есть область голоморфности, то любая функция, аналитическая в G, аналитична и в некоторой более широкой области. *Оболочкой голоморфности* $H(G)$ области G называется максимальная область, содержащая G, в которую продолжается любая функция, голомофная в G. Если область G не совпадает с $H(G)$, то говорят, что G допускает *аналитическое расширение*. Полезный критерий того, что данная область G является областью голоморфности, содержится в следующем утверждении: чтобы область G была областью голоморфности, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки ее границы ∂G можно было бы определить такую функцию $f(z)$, голоморфную в G, которая имела бы особенность в данной точке границы (см. [24], гл. III, § 16.7).

Оказывается, что как трубчатые области $T_n^{\pm}$, так и расширенная трубчатая область $\mathcal{T}_n$ являются областями голоморфности, в то время как симметризованная трубчатая область $\mathcal{T}_n^s$ при $n \geqslant 2$ областью голоморфности не является.

Упражнение 5.2.3. Показать, что прошедшая трубчатая область T^- и расширенная трубчатая область $\mathcal{T}_1$ являются областями голоморфности. (Указание: для доказательства первой части утверждения проверить, что для любой наперед заданной точки $z=x+iy$ границы ∂T^- области $T^-(y^0 \leqslant 0,\ y^2=0)$ функция

$$f_z(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

голоморфна в T^- и имеет полюс при $\zeta = z$, и воспользоваться сформулированным выше критерием. Чтобы доказать, что и расширенная трубчатая область $\mathcal{T}_1$ является областью голоморфности, показать сначала, что $\mathcal{T}_1$ есть совокупность тех векторов ζ, для которых скалярный квадрат ζ^2 пробегает всю комплексную плоскость, за исключением положительной вещественной полуоси. Далее установить, что для каждой точки границы области $\mathcal{T}_1$ при некотором неотрицательном a функция

$$f_a(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2 - a}, \qquad a \geqslant 0,$$

голоморфная в $\mathcal{T}_1$, имеет особенность в этой точке.)

В случае $n=1$ симметризованная трубчатая область $\mathcal{T}_1^s$ совпадает с расширенной трубчатой областью $\mathcal{T}_1$. При $n=2$ это уже не так. Оболочка голоморфности области $\mathcal{T}_2^s$ найдена в работе Челлена и Уайтмана (1958). Случай $n=2$ рассмотрен также Челленом и Толлом (1960), случаи $n=3$ и $n=4$ — в работах Манохаран (1962) и Мёллер (1962). В общем случае оболочка голоморфности симметризованной трубчатой области $\mathcal{T}_n^s$ не найдена.

Упражнение 5.2.4. Показать, что единственная нетривиальная перестановка переменных $z_1, \ldots, z_n$, которая не приводит к действительному расширению области $\mathcal{T}_{n-1}$ $\{\zeta_j=z_j-z_{j+1},\ j=1, \ldots, n-1\}$, это перестановка

$$(z_1, \ldots, z_n) \to (z_n, \ldots, z_1). \tag{5.2.34}$$

Указание: воспользоваться тем, что расширенная трубчатая область $\mathcal{T}_{n-1}$ симметрична относительно переменных ζ_j, инвариантна относительно одновременного изменения знака у всех ζ_j и что при замене (5.2.34) переменные ζ трансформируются по правилу

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) \to (-\zeta_{n-1}, \ldots, -\zeta_1). \tag{5.2.35}$$

Будем говорить, что в теории одного скалярного поля $\varphi(x)$ выполняется *условие слабой локальной коммутативности* (СЛК), если

$$w_n(x_1, \ldots, x_n) = w_n(x_n, \ldots, x_1) \tag{5.2.36}$$

для всех точек Иоста. Мы видим, что требование СЛК приводит лишь к симметрии (5.2.34) (или (5.2.35)) для аналитических продолжений функций Уайтмана, не приводящей к расширению их области аналитичности.

В случае системы полей с произвольным спином $\varphi_{\alpha_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_n}$ условие СЛК приобретает вид: в точках Иоста

$$\left(\Psi_0, \varphi_{\alpha_1}(x_1) \ldots \varphi_{\alpha_n}(x_n)\Psi_0\right) = i^F\left(\Psi_0, \varphi_{\alpha_n}(x_n) \ldots \varphi_{\alpha_1}(x_1)\Psi_0\right), \tag{5.2.37}$$

где F — всегда четное число полей с полуцелым спином.

Упражнение 5.2.5. Показать, что условие (5.2.37) является следствием локальной антикоммутативности спинорных полей и локальной коммутативности тензорных полей, предположив, что тензорные и спинорные поля локально коммутируют друг с другом. (Обратное неверно: условие СЛК существенно слабее требования локальности.)

2.3. *ТСР*-теорема. Докажем следующую теорему.

Теорема 5.2.4. *Если для полей* $\varphi_{(\alpha)(\beta)}(x)$ *выполняются условия релятивистской инвариантности и спектральности, то требование слабой локальной коммутативности* (5.2.37) *эквивалентно условию ТСР-инвариантности* (5.2.22).

Доказательство. Чтобы не загромождать простую идею доказательства выписыванием многочисленных индексов, мы приведем здесь рассуждения лишь для случая одного скалярного эрмитова поля. Общий случай системы спинорных и тензорных полей не содержит принципиально новых моментов, и мы предоставляем читателям самим рассмотреть его (см. [2]).

Пусть в точках Иоста выполнено условие СЛК (5.2.36). Поскольку функция Уайтмана $F_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ аналитична в точках Иоста и множество J содержит $n-1$-мерную вещественную область, то равенство (5.2.36) остается в силе во всей области аналитичности этой функции. Пользуясь эквивалентностью (5.2.34) и (5.2.35), получаем

$$F_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = F_n(-\zeta_{n-1}, \ldots, -\zeta_1).$$

Применяя к правой части последнего равенства теорему 5.1.2, согласно которой функция F_n инвариантна относительно связной компоненты комплексной группы Лоренца $\mathscr{L}_+$, содержащей отражения всех четырех осей $I_{st}\zeta = -\zeta$, получаем

$$F_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = F_n(\zeta_{n-1}, \ldots, \zeta_1). \qquad (5.2.38)$$

С другой стороны, если $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) \in T^-_{n-1}$, то и $(\zeta_{n-1}, \ldots, \zeta_1) \in T^-_{n-1}$. Поэтому, совершая в обеих частях (5.2.38) предельный переход $\operatorname{Im} \zeta_j \to -0$, получим условие TCP-инвариантности (ср. (5.2.22))

$$w_n(x_1, \ldots, x_n) = w_n(-x_n, \ldots, -x_1) \qquad (5.2.39)$$

для всех вещественных $x_1, \ldots, x_n$.

Обратно, если имеет место равенство (5.2.39), то аналитическим продолжением получается (5.2.38). Отсюда, применяя теорему 5.1.2, легко показать справедливость (5.2.36) в точках Иоста. Теорема 5.2.4 доказана.

Заметим, что при выводе (5.2.37) (упражнение 5.2.5) мы пользовались наличием нормальной связи между спином и коммутацией или антикоммутацией полей при пространственноподобном разделении аргументов. В следующем параграфе мы увидим, что справедливость TCP-теоремы на самом деле не зависит от такого рода дополнительных предположений.

Поскольку слабая локальность является следствием обычной локальности, то в локальной теории поля из инвариантности относительно непрерывной группы Пуанкаре (и из спектральности) следует инвариантность относительно дискретного преобразования TCP. С другой стороны, тот факт, что TCP-теорема была на самом деле доказана при более слабом предположении о СЛК, весьма существен. Как уже отмечалось, условие локальности настолько сильно ограничивает класс возможных теорий, что до сих пор нет примера теории, удовлетворяющей всем аксиомам и приводящей к нетривиальной S-матрице. Если заменить условие локальной коммутативности (ЛК) условием СЛК, то это уже не так. Иост (1963) доказал, что любая TCP-инвариантная S-матрица может быть, по крайней мере формально, интерполирована слабо локальными полями.

Теперь перейдем к практически важному вопросу об ограничениях на матрицу рассеяния, вытекающих из TCP-теоремы, в частности, к разъяснению понятия «TCP-инвариантная матрица рассеяния».

Рассмотрим сначала в качестве примера теорию заряженного скалярного поля $\varphi(x)$. Согласно (5.2.23), TCP-оператор действует на поле φ по формуле

$$\Theta\varphi(x)\Theta^{-1} = \overset{*}{\varphi}(-x). \tag{5.2.23a}$$

Очевидно, такому же закону преобразования должен подчиняться и гайзенбергов ток $j(x) = (\Box - m^2)\varphi(x)$. Отметим, что токи в локальной теории удовлетворяют всем требованиям, накладываемым на локальные поля, за возможным исключением условия полноты (цикличности вакуума).

Упражнение 5.2.6. Пользуясь (5.2.23a) и уравнениями Янга — Фельдмана (4.2.6), показать, что

$$\Theta\varphi^{in}(x)\Theta^{-1} = \varphi^{*out}(-x), \qquad \Theta\varphi^{out}(x)\Theta^{-1} = \varphi^{*in}(-x). \tag{5.2.40}$$

Найти действие операторов $U(I_s)$, $U(I_t)$ и $U(I_C)$ по отдельности. (Указание: принять во внимание, что $\overline{D^{ret}}(-x) = D^{ret}(-x) = D^{adv}(x)$.)

Из (5.2.40) видно, что Θ не является TCP-оператором для полей φ^{ex} (кроме тривиального случая, когда $\varphi^{in} = \varphi^{out} = \varphi$). Однако в силу TCP-теоремы для свободных полей φ^{out} существует свой антиунитарный оператор Θ_{out} такой, что

$$\Theta_{out}\varphi^{out}(x)\Theta_{out}^{-1} = \varphi^{*out}(-x)$$

и

$$\Theta_{out}\Psi_0 = \Psi_0.$$

Применяя Θ_{out} к (5.2.40), получаем

$$\varphi^{out}(x) = \Theta_{out}^{-1}\Theta\varphi^{in}(x)\Theta^{-1}\Theta_{out}.$$

Сравнивая это равенство с (4.1.53), находим, что оператор рассеяния равен

$$S = \Theta^{-1}\Theta_{out}. \tag{5.2.41}$$

Унитарность S-оператора является прямым следствием антиунитарности операторов Θ и Θ_{out}.

Упражнение 5.2.7. Пользуясь (5.2.40) и преобразованием Фурье свободного заряженного поля (3.4.31) и учитывая антиунитарность оператора Θ, показать, что имеют место равенства

$$\Theta a_{in}^{(\pm)}(p)\,\Theta^{-1}=a_{out}^{(\mp)}(p), \tag{5.2.42а}$$

$$\Theta \overset{*}{a}{}_{in}^{(\pm)}(p)\,\Theta^{-1}=\overset{*}{a}{}_{out}^{(\mp)}(p) \tag{5.2.42б}$$

и аналогичные равенства с заменой $in \longleftrightarrow out$ *).

Из равенств (5.2.42) следует, что при TCP-преобразовании in-состояния частиц переходят в out-состояния античастиц с тем же импульсом и обратно.

В случае спинорных полей (и частиц) изменяет знак еще и проекция спина. В этом можно убедиться, исходя из связи (5.2.24), (5.2.25) между представлением спинорной группы Пуанкаре $U(\underset{\sim}{a}, A)$ и оператором Θ. Действительно, из (5.2.24) следует, что если S_3 является оператором третьей проекции спина, то

$$e^{iS_3\alpha}=\Theta e^{iS_3\alpha}\Theta^{-1}=e^{-i\Theta S_3\Theta^{-1}\alpha},$$

так что

$$\Theta S_3\Theta^{-1}=-S_3. \tag{5.2.44}$$

(Для орбитальной части момента $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ свойство (5.2.44) следует непосредственно из того, что при преобразовании I_{st} (или TCP) $\boldsymbol{r}$ меняет знак, а $\boldsymbol{p}$ остается неизменным.)

В частности, для дираковых спиноров в соответствии с (5.2.2) и (3.4.59)—(3.4.61) получаем

$$\Theta b_{\zeta}^{in(\pm)}(p)\,\Theta^{-1}=\eta_{\pm}b_{-\zeta}^{out(\mp)}(p), \tag{5.2.45}$$

где $\eta=\eta(\zeta, e)$ — фазовый множитель ($\eta^4=1$). Равенство (5.2.45) может быть получено из (5.2.2), если учесть, что для спиноров v (3.4.65) справедливо тождество

$$i\gamma^5 v_{\zeta}^{(-)}(p)=v_{-\zeta}^{(+)}(p). \tag{5.2.46}$$

Переходя от полей φ^{ex} к асимптотическим состояниям, легко видеть, что из TCP-симметрии вытекает следующее тождество

*) Равенство (5.2.42б) является на самом деле следствием равенства (5.2.42а) и тождества

$$(\Theta A\Theta^{-1})^{*}=\Theta A^{*}\Theta^{-1}, \tag{5.2.43}$$

справедливого для произвольного оператора A и для любого антиунитарного оператора Θ. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что для любых векторов Φ и Ψ, входящих в область определения операторов $A\Theta^{-1}$ и $A^{*}\Theta^{-1}$, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\Psi,\ \Theta A\Theta^{-1}\Phi)=\overline{(\Theta^{-1}\Psi,\ A\Theta^{-1}\Phi)}=\overline{(A^{*}\Theta^{-1}\Psi,\ \Theta^{-1}\Phi)}=(\Theta A^{*}\Theta^{-1}\Psi,\ \Phi).$$

между элементами матрицы рассеяния:

$$\langle p_1'\zeta_1'e_1', \ldots, p_k'\zeta_k'e_k'^{out} | p_1\zeta_1e_1, \ldots, p_n\zeta_ne_n^{in}\rangle =$$
$$= \eta'\langle p_1, -\zeta_1, -e_1; \ldots; p_n, -\zeta_n, -e_n^{out} | p_1', -\zeta_1', -e_1'; \ldots$$
$$\ldots; p_k', -\zeta_k', -e_k'^{in}\rangle, \qquad (5.2.47)$$

где p_j, ζ_j, e_j — импульс, проекция спина и заряд j-й частицы, а η' — фазовый множитель, равный произведению фазовых множителей $\eta(\zeta, e)$. В более привычных обозначениях, пользуясь лишь *out*-состояниями и опуская индекс *out*, можно записать (5.2.47) в виде

$$\langle p_1'\zeta_1'e_1', \ldots, p_k'\zeta_k'e_k' | S | p_1\zeta_1e_1, \ldots, p_n\zeta_ne_n\rangle =$$
$$= \eta'\langle p_1, -\zeta_1, -e_1; \ldots; p_n, -\zeta_n, -e_n | S | p_1', -\zeta_1', -e_1'; \ldots$$
$$\ldots; p_k', -\zeta_k', -e_k'\rangle. \qquad (5.2.47\text{a})$$

Упражнение 5.2.8. а) Получить соотношения TCP-инвариантности типа (5.2.47) в общем случае, исходя из (5.2.23).

б) В случае скалярного заряженного поля получить (5.2.47) при помощи (5.2.22) и редукционной формулы ЛСЦ (4.2.8).

В частности, из TCP-инвариантности теории следует строгое равенство масс и времен жизни частиц и античастиц. Это равенство проверено на опыте (с наибольшей точностью подтверждено равенство масс K^0- и $\bar{K}^0$-мезонов) *).

В заключение мы рассмотрим простой пример, показывающий, насколько требование слабой локальной коммутативности действительно слабее требования локальной коммутативности.

Пусть $\varphi(x)$ — свободное эрмитово скалярное поле с массой m (3.4.8), для которого, однако, операторы $a(p)$ и $(a^*(p)$ удовлетворяют вместо перестановочных соотношений (3.4.10) соотношениям антикоммутации:

$$[a(p), a(q)]_+ = 0, \qquad [a(p), a^*(q)]_+ = \delta(p-q). \qquad (5.2.48)$$

Тогда поле $\varphi(x)$ не локально: не только коммутатор, но и антикоммутатор

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_+ = D^{(1)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{V_m^+} \frac{\cos p(x-y)}{p^0}\,d^3p \qquad (5.2.49)$$

*) См. детальное обсуждение этих вопросов в работе Ли и др. (1957) и в докладе Ли (1965).

отличны от нуля для пространственноподобных интервалов. Тем не менее существует антиунитарный оператор Θ со свойствами

$$\Theta\Psi_0 = \Psi_0, \quad \Theta\varphi(x)\Theta^{-1} = \varphi(-x), \quad \Theta^2 = 1, \tag{5.2.50}$$

который оставляет инвариантными уравнение Клейна — Гордона и перестановочные соотношения (5.2.49) (в силу вещественности и четности функции $D^{(1)}$). Следовательно, согласно теореме 5.2.4 вакуумные средние произведения полей удовлетворяют условию слабой локальной коммутативности.

Упражнение 5.2.9. Проверить условие СЛК для двухточечной функции Уайтмана скалярного поля, исходя непосредственно из представлений (3.4.92):

$$(\Psi_0, [\varphi(x), \varphi(y)]\Psi_0) = \frac{1}{i}\Delta(x-y). \tag{5.2.51}$$

(Напомним, что перестановочная функция $\Delta(x)$, будучи нечетной лоренц-инвариантной функцией, исчезает при пространственноподобных аргументах.)

2.4. Классы эквивалентности Борхерса. Теорема 5.1.2. и TCP-теорема нашли ннтересное и неожиданное применение при изучении классов локальных между собой полей (Борхерс (1960)). Теория Борхерса пролила свет на важный вопрос о том, какой произвол имеется при определении «интерполирующих» гайзенберговых полей, соответствующих данной матрице рассеяния (хотя полностью этот вопрос не решеи; см. следующий пункт).

Первый замечательный факт, обнаруженный Борхерсом, — это транзитивность свойств локальной коммутативности (ЛК) и слабой локальной коммутативности (СЛК), которая позволяет разбить совокупность неприводимых систем полей, действующих в одном и том же пространстве Гильберта, на классы эквивалентности.

Для простоты при систематическом изложении результатов Борхерса мы будем предполагать, что все поля, с которыми будем иметь дело, скалярны и эрмитовы.

Теорема 5.2.5. *Пусть $\varphi(x)$ — слабо локальное поле, для которого вакуум является циклическим вектором, а $\psi(x)$ — другое поле, преобразующееся по тому же представлению $U(\underset{\sim}{a}, \Lambda)$ группы $\mathfrak{P}_+^\uparrow$ и имеющее ту же область определения $\tilde{\Omega}$, что и $\varphi(x)$.*

Пусть, далее, равенство

$$(\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_j)\psi(x)\varphi(x_{j+1})\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) =$$
$$= (\Psi_0, \varphi(x_n)\ldots\varphi(x_{j+1})\psi(x)\varphi(x_j)\ldots\varphi(x_1)\Psi_0) \tag{5.2.52}$$

выполняется в точках Иоста

$$(x_1 - x_2, \ldots, x_j - x, x - x_{j+1}, \ldots, x_{n-1} - x_n) \in J_n$$

для всех j и n. Тогда у полей φ и ψ имеется общий TCP-оператор, поэтому: а) *поле $\psi(x)$ слабо локально и* б) *поля $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ взаимно слабо локальны* *).

Доказательство. К левой части равенства (5.2.52) можно применить теорему Баргмана — Холла — Уайтмана 5.1.2. Используя инвариантность аналитически продолженных функций Уайтмана относительно комплексной группы Лоренца, мы заключаем, как и при доказательстве TCP-теоремы (см. (5.2.40)), что из (5.2.52) следует равенство

$$(\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_j)\psi(x)\varphi(x_{j+1})\ldots\varphi(x_n)\Psi_0)=$$
$$=(\Psi_0, \varphi(-x_n)\ldots\varphi(-x_{j+1})\psi(-x)\varphi(-x_j)\ldots\varphi(-x_1)\Psi_0) \quad (5.2.53)$$

для всех $x, x_1, \ldots, x_n$.

Пусть Θ — TCP-оператор для поля φ и пусть

$$\begin{aligned}\Phi&=\varphi(f_j)\ldots\varphi(f_1)\Psi_0,\\ \Psi&=\varphi(f_{j+1})\ldots\varphi(f_n)\Psi_0\end{aligned} \quad (5.2.54)$$

— регулярные состояния $(f_k(x)\in\mathcal{S}(R_4))$. Тогда в силу (5.2.53)

$$(\Phi, \psi(x)\Psi)=(\Theta\Psi, \psi(-x)\Theta\Phi). \quad (5.2.55)$$

С другой стороны, в силу антиунитарности Θ и эрмитовости ψ для любых Φ и Ψ из Ω имеем

$$(\Phi, \psi(x)\Psi)=\overline{(\Psi, \psi(x)\Phi)}=(\Theta\Psi, \Theta\psi(x)\Theta^{-1}\Theta\Phi). \quad (5.2.56)$$

Сравнивая (5.2.55) и (5.2.56), находим, что при применении операторов ψ к векторам из Ω справедливо равенство

$$\Theta\psi(x)\Theta^{-1}=\psi(-x). \quad (5.2.57)$$

Итак, существует TCP-оператор для поля ψ (отсюда в силу TCP-теоремы следует заключение а) теоремы) и этот оператор совпадает с TCP-оператором для поля φ (откуда следует заключение б) теоремы). Теорема 5.2.5 доказана.

Следствие. Свойство взаимной слабой локальной коммутативности транзитивно в следующем смысле. Пусть поле φ — слабо локальное поле с циклическим вакуумом, а для каждого из полей ψ_1 и ψ_2 удовлетворяется условие (5.2.52) теоремы 5.2.5. Тогда поле ψ_1 взаимно слабо локально с ψ_2. Действительно, в силу доказанной теоремы поля φ, ψ_1 и ψ_2 имеют общий TCP-оператор и, следовательно, в силу теоремы 5.2.4 они взаимно слабо локальны.

---

*) Поля φ и ψ называются *взаимно слабо локальными*, если вакуумное среднее от произведения любого числа полей ψ и полей φ удовлетворяет условию СЛК.

Итак, для данного слабо локального поля $\varphi(x)$, для которого вакуум цикличен, можно образовать *класс Борхерса взаимно слабо локальных полей*, включающий φ *). В один класс входят все поля с одним и тем же TCP-оператором и одинаковой областью определения.

Теорема 5.2.6. *Пусть поля $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ взаимно слабо локальны и пусть, по крайней мере для одного из них, вакуум цикличен. Пусть, далее, существуют и равны между собой асимптотические in-поля (при $t \to -\infty$):*

$$\varphi_1^{in}(x)=\varphi_2^{in}(x). \tag{5.2.58}$$

Тогда совпадают и асимптотические out-поля:

$$\varphi_1^{out}(x)=\varphi_2^{out}(x) \tag{5.2.59}$$

(так что S-матрица для поля φ_1 совпадает с S-матрицей для поля φ_2).

Доказательство. Поскольку в силу теоремы 5.2.5 поля φ_1 и φ_2 имеют общий TCP-оператор, то утверждение теоремы является непосредственным следствием равенства (5.2.41).

Для взаимно локальных полей предположение о существовании асимптотических in-полей является излишним. Оно является следствием теоремы Хаага — Рюеля (теорем 4.1.1 и 4.1.2).

Покажем, что для взаимно локальных полей сохраняется условие транзитивности, которое было установлено как следствие теоремы 5.2.5 для взаимно слабо локальных полей.

Теорема 5.2.7. *Пусть поля ψ_1 и ψ_2 имеют общую область определения Ω и соответствуют одному и тому же представлению $U(a, \Lambda)$ группы $\mathfrak{P}_+^\uparrow$. Пусть, далее, поле φ локально и вакуум для него является циклическим вектором, в то время как поля ψ_1 и ψ_2 взаимно локальны с φ:*

$$[\varphi(x),\ \psi_1(y)]=0=[\varphi(x),\ \psi_2(y)] \quad \text{при} \quad (x-y)^2<0.$$

Тогда поля ψ_1 и ψ_2 взаимно локальны:

$$[\psi_1(x),\ \psi_2(y)]=0 \quad \textit{при} \quad (x-y)^2<0.$$

Доказательство. Поля φ, ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют всем условиям, при которых было выведено следствие теоремы 5.2.5, поэтому они взаимно слабо локальны. Отсюда и из локальности

---

*) Заметим, что класс Борхерса не является классом эквивалентности в математическом смысле, поскольку не все элементы класса равноправны: от поля $\varphi(x)$ требуется условие полноты VII, в то время как от других полей, слабо локальных относительно φ, это условие не требуется.

φ следует, что в точках Иоста $(x_1 - x_2, \ldots, x_j - y, y - z, z - x_{j+1}, \ldots, x_{n-1} - x_n) \in J_{n+1}$

$$\begin{aligned}(\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j) \psi_1(y) \psi_2(z) \varphi(x_{j+1}) \ldots \varphi(x_n) \Psi_0) =\\ = (\Psi_0, \varphi(x_n) \ldots \varphi(x_{j+1}) \psi_2(z) \psi_1(y) \varphi(x_j) \ldots \varphi(x_1) \Psi_0) =\\ = (\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j) \psi_2(z) \psi_1(y) \varphi(x_{j+1}) \ldots \varphi(x_n) \Psi_0). \qquad (5.2.60)\end{aligned}$$

Упражнение 5.2.10. Вывести из (5.2.60) равенство

$$(\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j) [\psi_1(y), \psi_2(z)] \varphi(x_{j+1}) \ldots \varphi(x_n) \Psi_0) = 0 \qquad (5.2.61)$$

при любых $x_1, \ldots, x_n$ и $(y-z)^2 < 0$.

(Указание: воспользоваться рассуждениями, с помощью которых мы доказали вторую часть теоремы 5.2.2.)

Из (5.2.61) и из условия полноты для поля φ следует, что

$$[\psi_1(y), \psi_2(z)] = 0 \quad \text{при} \quad (y-z)^2 < 0.$$

Теорема 5.2.7 доказана.

Следствие. При предположениях теоремы, если ψ взаимно локально с φ, то ψ само локально (положить $\psi_1 = \psi_2$).

2.5. Примеры применения. Задача описания совокупности всех полей с заданной S-матрицей. Примеры взаимно локальных полей дают поля (и токи), связанные линейным дифференциальным оператором. В частности, если поле $\varphi(x)$ локально, то ток

$$j(x) = (\Box + m^2) \varphi(x) \qquad (5.2.62)$$

локально коммутирует с ним и, следовательно, сам является локальным полем того же класса Борхерса, что и поле φ.

Упражнение 5.2.11. Показать, что если локальному полю $\varphi(x)$ соответствует (при $t \to -\infty$) асимптотическое поле $\varphi^{in}(x)$ массы m, то полю

$$\psi(x) = \varphi(x) + j(x) \equiv \varphi(x) + (\Box + m^2) \varphi(x) \qquad (5.2.63)$$

соответствует тоже асимптотическое поле при $t \to -\infty$ и та же S-матрица.

Класс Борхерса свободного эрмитова скалярного поля описан Эпштейном (1963). Чтобы сформулировать этот результат, введем следующее определение.

Полиномом Вика от свободного поля $\varphi(x)$ называется произвольная линейная комбинация нормальных произведений полей $\varphi(x)$ и их производных, взятых в одной и той же точке x. Нормальное произведение производных от поля φ может быть задано либо условием, чтобы операторы рождения стояли слева от операторов уничтожения (ср. определение, данное после формулы (3.4.67)), либо формулами:

$$:D^\alpha\varphi(x)\,D^\beta\varphi(x): = \lim_{\substack{x_1\to x\\ x_2\to x\\ (x_1\neq x_2)}} \{D^\alpha\varphi(x_1)\,D^\beta\varphi(x_2) - \\ -(\Psi_0,\ D^\alpha\varphi(x_1)\,D^\beta\varphi(x_2)\,\Psi_0)\},$$

$$:D^\alpha\varphi(x)\,D^\beta\varphi(x)\,D^\gamma\varphi(x): = \\ = \lim_{x_i\to x}\{D^\alpha\varphi(x_1)\,D^\beta\varphi(x_2)\,D^\gamma\varphi(x_3) - (\Psi_0,\ D^\alpha\varphi(x_1)\,D^\beta\varphi(x_2)\,\Psi_0)\,D^\gamma\varphi(x_3) - \\ -(\Psi_0,\ D^\alpha\varphi(x_1)\,D^\gamma\varphi(x_3)\,\Psi_0)\,D^\beta\varphi(x_2) - \\ -(\Psi_0,\ D^\beta\varphi(x_2)\,D^\gamma\varphi(x_3)\,\Psi_0)\,D^\alpha\varphi(x_1)\} \tag{5.2.64}$$

и т. д. (дифференциальный оператор D^β определен формулой (1.1.3)).

При свертывании индексов нормальные произведения от производных скалярного поля могут вновь образовывать скалярные поля, например:

$$\psi(x) = \varphi(x) + g^{\mu\nu}:\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\nu}: . \tag{5.2.65}$$

Упражнение 5.2.12. Показать, что если $\varphi(x)$ — свободное поле массы m, то для поля (5.2.65) справедливо условие асимптотической полноты, причем

$$\psi^{in}(x) = \psi^{out}(x) = \varphi(x). \tag{5.2.66}$$

Указание: воспользоваться тем, что в силу известной леммы Римана из теории интеграла Фурье (см. [56], т. III, гл. XIX, п. 717) для абсолютно интегрируемых $F(p,\ q)$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int\int F(p,\ q)\exp\{it(\sqrt{m^2+p^2}+\sqrt{m^2+q^2}-\sqrt{m^2+(p+q)^2})\}\,d^3p\,d^3q = 0. \tag{5.2.67}$$

Нетрудно видеть, что любой полином Вика от свободного поля $\varphi(x)$ локален относительно этого поля и, следовательно, принадлежит тому же классу Борхерса. В частности, любому такому полю соответствует тривиальная S-матрица.

Упражнение 5.2.13. Показать, что если $j(x) = P(\varphi(x))$ — инвариантный полином Вика от свободного скалярного поля $\varphi(x)$, для которого вакуум является циклическим вектором, то уравнению

$$(\Box + m^2)\,\psi(x) = j(x), \tag{5.2.68}$$

или, в эквивалентной форме

$$\psi(x) = \psi^{in}(x) + \int D^{ret}(x-y)\,j(y)\,d^4y, \tag{5.2.69}$$

не может удовлетворять локальное поле (см. Араки и др. (1961)). (Указание: пользуясь транзитивностью свойства взаимной локальной коммутативности, показать, что свободное поле $\varphi(x)$ и искомое решение $\psi(x)$ принадлежат одному и тому же классу Борхерса. Отсюда вывести, что $\psi^{in}(x)$ и

$\varphi^{in}(x) \equiv \varphi(x)$ совпадают с точностью до знака. Пользуясь (5.2.69), прийти к противоречию с локальностью $\psi(x)$.)

Упомянутый выше результат Эпштейна заключается в том, что полиномы Вика от свободного поля $\varphi(x)$ исчерпывают класс Борхерса для этого поля.

Заметим, что два свободных поля с разными массами, по определению, не принадлежат одному и тому же классу Борхерса (так как ни для одного из полей не выполнено условие цикличности вакуума). Точно так же обобщенные свободные поля, рассмотренные в гл. 3, п. 4.5, выходят за рамки класса Борхерса данного свободного поля.

Если ограничиться совокупностью локальных полей, преобразующихся по одному и тому же представлению группы Пуанкаре, то и тогда класс Борхерса не исчерпывает совокупности всех полей с заданной S-матрицей. Действительно, если $\varphi(x)$ — нейтральное скалярное поле, а V — произвольное унитарное преобразование, коммутирующее с представлением $U(a, \Lambda)$ группы $\mathfrak{P}_+^\uparrow$ и с S-матрицей, то поле

$$\psi(x) = V\varphi(x)V^{-1}, \qquad (5.2.70)$$

вообще говоря, не локально относительно φ, хотя и ему соответствует тот же S-оператор. Существует до сих пор недоказанная (и неопровергнутая) гипотеза, что все теории с данным представлением U группы Пуанкаре и с данной S-матрицей могут быть получены из теорий, соответствующих одному классу Борхерса, преобразованием подобия типа (5.2.70).

Проведенный анализ показывает, что данной S-матрице может соответствовать довольно широкий класс интерполирующих гайзенберговых полей. Поэтому, с точки зрения теории рассеяния, очевидно, более экономным и цельным является чисто S-матричный подход, развитый в гл. 4, § 3. Другим, более абстрактным подходом, инвариантным относительно выбора поля внутри данного класса эквивалентности, является теория Хаага — Араки локальных алгебр ограниченных операторов, с которой мы вкратце познакомимся в дополнении к настоящей главе.

§ 3. Связь спина со статистикой

3.1. Вводные замечания. Локальная коммутативность или антикоммутативность полей определяет свойства симметрии векторов состояния и асимптотически свободных частиц. Локально коммутирующим (бозе-) полям соответствуют состояния, симметричные относительно перестановки частиц; антикоммутирующим (ферми-) полям соответствуют антисимметричные векторы состояния. Но тип симметрии вектора состояния (или волновой функции) определяет, как известно из квантовой механики, тип статистики, которой подчиняется данная физическая система. Полностью симметричной волновой функции соответствует статистика Бозе — Эйнштейна, полностью антисимметричной функции — статистика Ферми — Дирака.

Поэтому, допуская некоторую общепринятую вольность языка, мы будем отождествлять связь спина с локальной коммутативностью (или антикоммутативностью) со *связью спина со статистикой*.

В точности так же как наряду с полной симметрией и с полной антисимметрией существует ряд промежуточных типов симметрий (соответствующих различным схемам Юнга — см. [43], гл. 7), так и наряду со статистиками Бозе и Ферми теоретически возможны промежуточные, так называемые *парастатистики* (см., например, Мессиа и Гринберг (1964) и Гринберг и Мессиа (1965)). Понятию *параполя* и обсуждению TCP-теоремы и теоремы о связи спина с парастатистикой для паралокальных полей посвящен п. 3.4.

До этого в п. 3.2 и 3.3 мы будем исходить из предположения, что поля, с которыми мы имеем дело, либо бозонные (коммутативны), либо фермионные (антикоммутативны)*). Другими словами, мы потребуем, чтобы постулат локальности формулировался следующим образом для полей ψ_k с компонентами ψ_k^α:

$$\psi_k^\alpha(x)\,\psi_l^\beta(y) = \sigma_{kl}\psi_l^\beta(y)\,\psi_k^\alpha(x) \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0, \tag{5.3.1}$$

где σ_{kl} не зависит от α и β и равно либо $+1$, либо -1. Так же как и раньше (гл. 3, п. 1.2), равенство (5.3.1) необходимо понимать следующим образом: после сглаживания с финитными основными функциями, носители которых пространственно разделены, оно должно удовлетворяться, если применить операторы в левой и в правой частях его к векторам из общей области определения всех полей Ω.

Будем говорить, что система полей ψ_k обладает *нормальной связью* спина со статистикой, если тензорные поля, т. е. поля с целым спином, преобразующиеся по однозначному представлению группы $L_+^\uparrow$, локально коммутируют между собой и со спинорными полями, в то время как спинорные поля, т. е. поля с полуцелым спином, преобразующиеся по двузначному пред-

*) Заметим, что таким же образом формулировался постулат VI в гл. 3, п. 1.2. Однако впоследствии мы часто пользовались дополнительной гипотезой о нормальной связи спина со статистикой, которая здесь будет обосновываться.

ставлению группы Лоренца, локально антикоммутируют. Теорема о спине и статистике утверждает, что для одного поля $\psi^\alpha(x)$, удовлетворяющего (5.3.1), всегда реализуется нормальная связь спина со статистикой. Доказательству этой теоремы посвящен п. 3.2. Что касается системы полей, то между разными полями могут быть реализованы и аномальные перестановочные соотношения.

Оказывается, однако, что любая теория с такими аномальными перестановками эквивалентна некоторой теории с нормальной связью спина со статистикой, обладающей определенной дополнительной симметрией (п. 3.3).

С несколько иной точки зрения можно проиллюстрировать механизм возникновения связи между спином и статистикой на примере свободных полей со спином 0 и 1/2.

Если нам дано, что операторы рождения и уничтожения частиц с определенным импульсом и проекцией спина либо коммутируют, либо антикоммутируют:

$$[a(p),\ a(q)]_\varepsilon = 0, \qquad [a(p),\ a^*(q)]_\varepsilon = \delta(p-q);$$
$$\left[b_s^{(e)}(p),\ b_{s'}^{(e')}(q)\right]_{\varepsilon'} = 0, \qquad \left[b_s^{(e)}(p),\ b_{s'}^{*(e')}(q)\right]_{\varepsilon'} = \delta_{ss'}\delta_{ee'}\delta(p-q),$$

где ε, $\varepsilon' = \pm$, а остальные обозначения те же, что в гл. 3, § 4, то из условия, что сами поля $\varphi(x)$ и $\psi^\alpha(x)$ при этом должны либо локально коммутировать, либо антикоммутировать:

$$[\varphi(x),\ \varphi(y)]_\varepsilon = \left[\psi^\alpha(x),\ \varphi^{*\beta}(y)\right]_{\varepsilon'} = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0,$$

вытекает, что $\varepsilon = -$, $\varepsilon' = +$. Мы предоставляем читателю самому убедиться в этом, пользуясь тем, что перестановочная функция Паули — Иордана $D_m(x)$ исчезает при $x^2 < 0$, в то время как четное инвариантное решение уравнения Клейна — Гордона $D^{(1)}(x)$ (3.А.9) не обладает этим свойством.

Для дальнейшего рассмотрения удобно (хотя и необязательно) считать, что все поля ψ_k преобразуются по неприводимым конечномерным вещественным представлениям спинорной группы Лоренца $SL(2)$. Как уже отмечалось в п. 2.1, любое вещественное неприводимое представление группы $SL(2)$ имеет вид либо $D(j, j)$, либо

$$D(j_1, j_2) + D(j_2, j_1) \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2, \tag{5.3.2}$$

где j — целые или полуцелые числа (см. гл. 2, п. 4.1). Матрицы $V^\alpha_\beta(A)$ каждого из этих представлений при подходящем выборе базиса вещественны. Чтобы убедиться в этом, заметим, что каждое из представлений (5.3.2) может быть получено при разложении прямого произведения биспинорных представлений

$$D\left(\frac{1}{2},\ 0\right)+D\left(0,\ \frac{1}{2}\right). \tag{5.3.3}$$

Что касается самого представления (5.3.3), то, как мы видели в гл. 2, п. 4.4, в базисе Майорана, в котором матрицы γ^μ чисто мнимы, матрицы представления $V(A)$ вещественны. Отметим, что только в таком базисе имеет инвариантный смысл понятие эрмитова сопряжения поля (в нем, согласно (2.4.33) и (3.4.58), эрмитово сопряжение совпадает с зарядовым сопряжением).

Вместо (5.3.1) можно было рассмотреть более общий класс «локальных теорий», в котором

$$\psi_k^\alpha(x)\,\psi_l^\beta(y)=M_{kl\gamma\delta}^{\alpha\beta}\psi_l^\delta(y)\,\psi_k^\gamma(x)\qquad\text{при}\qquad(x-y)^2<0. \tag{5.3.4}$$

Чтобы двукратное применение (5.3.4) не накладывало дополнительных ограничений на поля ψ_k, естественно потребовать, чтобы при любых k и l $M_{kl}^2=1$ или, подробнее,

$$M_{kl\gamma\delta}^{\alpha\beta}M_{kl\beta'\alpha'}^{\delta\gamma}=\delta_{\alpha'}^{\alpha}\delta_{\beta'}^{\beta}. \tag{5.3.5}$$

Далее, чтобы соотношение (5.3.4) было лоренц-ковариантно, необходимо потребовать, чтобы матрица M_{kl} коммутировала с матрицами представления спинорной группы $V_k(A)\otimes V_l(A)$, по которому преобразуется левая часть (5.3.4):

$$V_k(A)\otimes V_l(A)\,M_{kl}=M_{kl}V_k(A)\otimes V_l(A). \tag{5.3.6}$$

Очевидно, условия (5.3.5) и (5.3.6) удовлетворяются автоматически в частном случае (5.3.1), когда

$$M_{kl\gamma\delta}^{\alpha\beta}=\sigma_{kl}\delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta. \tag{5.3.7}$$

Покажем, что если матрица M_{kl} диагональна в базисе (5.3.4) (с диагональными элементами ± 1), то она имеет вид (5.3.7), т. е. кратна единичной матрице.

Пусть $I_{kl\gamma\delta}^{\alpha\beta}=\delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta$. Очевидно, при сделанном предположении матрицы

$$\frac{1}{2}\left(I_{kl}\pm M_{kl}\right)=\Pi_\pm$$

определяют диагональные проекторы, коммутирующие со всеми матрицами представления $V_k\otimes V_l$. Если ни одна из них не равна нулю, то представление $V_k\otimes V_l$ приведено: все матрицы этого представлении имеют блочный вид. Следовательно, существует по крайней мере один матричный элемент (α_0 β_0, $\gamma_0\delta_0$), который тождественно равен нулю:

$$V_k(A)_{\gamma_0}^{\alpha_0}\,V_l(A)_{\delta_0}^{\beta_0}=0\ \text{при всех}\ A\in SL(2). \tag{5.3.8}$$

Поскольку, с другой стороны матричные элементы $V_j(A)_\beta^\alpha$ являются вещественными аналитическими функциями на группе $SL(2)$, то по крайней мере один из сомножителей в (5.3.8) должен исчезать тождественно. Предположим, что $V_k(A)_{\gamma_0}^{\alpha_0}\equiv 0$. Пусть R_{γ_0} — одномерное подпространство векторов, у которых лишь составляющая γ_0 не исчезает. Тогда линейные комбинации векторов вида $V_k(A)f$, где $A\in SL(2)$, $f\in R_{V_0}$, образуют нетривиальное инвариантное подпространство векторов (с нулевой α_0-компонентой). Итак, мы приходим к выводу, что представление V_k приводимо над полем вещественных чисел, что противоречит сделанному предположению.

3.2. Невозможность аномальных перестановочных соотношений в теории одного поля. Начнем с некоторого вспомогательного утверждения, которое неоднократно будет использоваться в дальнейшем.

Лемма 5.3.1. *Если*

$$\psi(x)\Psi_0=0, \tag{5.3.9}$$

где $\psi(x)$ — локальное поле (или его составляющая, если поле не скалярное), то $\psi(x)\equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим вакуумное среднее w_n от произвольного произведения полей, содержащее $\psi(x)$ в качестве сомножителя.

Во всех точках Иоста $(x_1-x_2, \ldots, x_j-x, x-x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}-x_n)\in J_n$

$$(\Psi_0, \varphi_1(x_1)\ldots\varphi_j(x_j)\psi(x)\varphi_{j+1}(x_{j+1})\ldots\varphi(x_n)\Psi_0)=$$
$$=\pm(\Psi_0, \varphi_1(x_1)\ldots\varphi_n(x_n)\psi(x)\Psi_0)=0$$

в силу (5.3.9). Поскольку точки Иоста являются вещественными точками аналитичности функций Уайтмана, то отсюда следует, что аналитическое продолжение всевозможных вакуумных средних, содержащих $\psi(x)$ (а значит, и сами эти средние), исчезает тождественно. Выбирая в качестве $\{\varphi_j\}$ полную систему полей, заключаем, что действительно $\psi(x)\equiv 0$. Лемма доказана.

Прежде чем перейти к вопросу о связи спина со статистикой, покажем, что перестановочные соотношения данного поля φ с другим полем ψ и с его эрмитово сопряженным ψ^* связаны между собой.

Теорема 5.3.1. *Если $\varphi(x)\neq 0$, то из перестановочных соотношений*

$$\varphi(x)\psi(y)=\sigma\psi(y)\varphi(x),\qquad \varphi(x)\psi^*(y)=-\sigma\psi^*(y)\varphi(x) \tag{5.3.10}$$

при $(x-y)^2<0$ $(\sigma^2=1)$ следует, что $\psi(x)\equiv 0$.

Доказательство. Для любых основных функций f и g справедливо соотношение

$$(\Psi_0, \varphi^*(f)\psi^*(g)\psi(g)\varphi(f)\Psi_0)=\|\psi(g)\varphi(f)\Psi_0\|^2\geqslant 0. \tag{5.3.11}$$

Если носители функций f и g разделены пространственноподобным интервалом, то из (5.3.10) следует, что

$$(\Psi_0, \varphi^*(f)\psi^*(g)\psi(g)\varphi(f)\Psi_0)=-(\Psi_0, \psi^*(g)\psi(g)\varphi^*(f)\varphi(f)\Psi_0). \tag{5.3.12}$$

В силу теоремы о разложении на пучки (теорема 3.2.3), если функции f и g имеют компактные носители, а $g_\lambda(x)=g(x-\lambda a)$, где $a^2=-1$, $\lambda>0$, то

$$-\lim_{\lambda\to\infty}(\Psi_0,\ \psi^*(g_\lambda)\psi(g_\lambda)\varphi^*(f)\varphi(f)\Psi_0)=$$
$$=-\|\psi(g)\Psi_0\|^2\|\varphi(f)\Psi_0\|^2\leqslant 0. \qquad (5.3.13)$$

Из сравнения (5.3.11) и (5.3.13) следует, что на самом деле предел (5.3.13) исчезает. Отсюда в силу леммы 5.3.1 и предположения о неравенстве $\varphi(x)\neq 0$, заключаем, что $\psi(x)=0$. Теорема доказана.

В частности, из этой теоремы следует, что не существует неисчезающего поля $\varphi(x)$, для которого

$$\varphi(x)\varphi(y)=\sigma\varphi(y)\varphi(x), \qquad \varphi(x)\varphi^*(y)=-\sigma\varphi^*(y)\varphi(x).$$

Другими словами, если локальное поле φ локально (анти-) коммутативно, то оно локально (анти-) коммутативно и относительно φ^*.

Заметим, что теорема 5.3.1 позволяет из локальности системы комплексных полей $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$ сделать заключение о локальности вещественной и мнимой частей поля ψ. Кроме того, в силу этой теоремы условие локальности (5.3.1) инвариантно относительно группы фазовых преобразований (3.4.30).

Перейдем теперь к основному результату настоящего пункта — теореме о спине и статистике, запрещающей аномальные перестановочные соотношения для одного поля.

Теорема 5.3.2. *Пусть $\psi(x)$ — комплексное поле, преобразующееся по произвольному неприводимому представлению $D\left(\frac{j}{2},\frac{k}{2}\right)$ группы $SL(2)$. Тогда если*

$$\psi_\alpha(x)\psi_\alpha^*(y)=-(-1)^{j+k}\psi_\alpha^*(y)\psi_\alpha(x) \quad \text{при} \quad (x-y)^2<0, \qquad (5.3.14)$$

то $\psi_\alpha(x)\equiv 0$ *).

Доказательство. Поскольку всюду мы будем иметь дело с одной и той же компонентой α, то индекс α можно опустить. Рассмотрим пару функций Уайтмана

$$F_1(x-y)=(\Psi_0,\ \psi(x)\psi^*(y)\Psi_0) \qquad (5.3.15а)$$

*) Если поле $\psi(x)$ преобразуется по представлению $D\left(\frac{j}{2},\frac{k}{2}\right)$, то $\psi^*(x)$ преобразуется по сопряженному представлению $D\left(\frac{k}{2},\frac{j}{2}\right)$, так что совокупность полей ψ и ψ^* преобразуется по вещественному представлению $D\left(\frac{j}{2},\frac{k}{2}\right)+D\left(\frac{k}{2},\frac{j}{2}\right)$.

и

$$F_2(x-y) = (\Psi_0,\ \psi^*(x)\psi(y)\Psi_0). \tag{5.3.15б}$$

Согласно (5.3.14) при $\xi^2 < 0$

$$F_1(\xi) + (-1)^{j+k} F_2(-\xi) = 0. \tag{5.3.16}$$

Аналитическим продолжением равенство (5.3.16) распространяется на расширенную трубчатую область $\mathcal{T}_1$.

Далее, из ковариантности аналитических функций Уайтмана относительно комплексной группы Лоренца, включающей отражение пространства и времени PT (теорема 5.1.2), следует, что

$$F_2(-\zeta) = (-1)^{j+k} F_2(\zeta). \tag{5.3.17}$$

Знак в (5.3.17) получается из условия теоремы, что функция F_2 преобразуется по аналитическому продолжению представления $D(k, j) \otimes D(j, k)$ группы Лоренца. Напомним, что в комплексной спинорной группе Лоренца $SL(2) \otimes SL(2)$ преобразованию отражения четырех осей соответствует согласно (5.1.6) преобразование $(A, B) = (-\sigma_0, \sigma_0)$.

Из (5.3.16) и (5.3.17) следует, что

$$F_1(\zeta) + F_2(\zeta) = 0. \tag{5.3.18}$$

Выполняя в (5.3.18) предельный переход $\operatorname{Im}\zeta \to -0$ к вещественным x и y, находим

$$(\Psi_0,\ \psi(x)\psi^*(y)\Psi_0) + (\Psi_0,\ \psi^*(x)\psi(y)\Psi_0) = 0. \tag{5.3.19}$$

Умножая обе стороны (5.3.19) на основную функцию $\bar{f}(x) f(y)$ и интегрируя, получим

$$\|\psi^*(f)\Psi_0\|^2 + \|\psi(f)\Psi_0\|^2 = 0. \tag{5.3.20}$$

Отсюда в силу леммы 5.3.1 следует, что $\psi(x) = 0$. Теорема 5.3.2 доказана.

Согласно этой теореме локальное поле с целым спином (в частности, скалярное поле) должно подчиняться статистике Бозе (т. е. коммутировать при пространственноподобных интервалах), а поле с полуцелым спином должно подчиняться статистике Ферми (т. е. локально антикоммутировать).

3.3. Спин и статистика в случае системы полей. Преобразование Клейна. Как уже отмечалось, в случае системы полей возможна аномальная связь спина со статистикой. Однако при этом, пользуясь правилами суперотбора и новыми правилами симметрии для функций Уайтмана, вытекающими из аномальных перестановочных соотношений, можно ввести новые поля, для которых связь спина со статистикой будет нормальной.

Доказательство этого утверждения в общем случае несколько громоздко (главным образом из-за комбинаторных усложнений), поэтому мы ограничимся рассмотрением нескольких примеров *).

1) В качестве первого примера аномальных перестановочных соотношений рассмотрим систему, состоящую из скалярного поля φ и дираковского спинора ψ, которые антикоммутируют между собой на пространственноподобных интервалах:

$$[\varphi(x),\ \psi(y)]_+ = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0. \tag{5.3.21}$$

Пространство векторов состояний в этой теории (как и в любой теории со спинорными частицами) может быть представлено в виде прямой суммы

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2, \tag{5.3.22}$$

где $\mathscr{H}_1$ — подпространство векторов с целым спином, а $\mathscr{H}_2$ — подпространство векторов с полуцелым спином. Как уже отмечалось в гл. 2, п. 1.3, разбиению (5.3.22) соответствует правило суперотбора (в данном случае вытекающее из однозначности физического состояния), так что нет физически реализуемого состояния с ненулевыми проекциями в обоих подпространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$.

В соответствии с разбиением (5.3.22) плотная область определения всех операторов поля Ω тоже разбивается на сумму $\Omega_1 + \Omega_2$: $(\Omega_1 \subset \mathscr{H}_1,\ \Omega_2 \subset \mathscr{H}_2)$. Определим новые операторы φ' и ψ' равенствами

$$\begin{gathered} \psi'(x) \equiv \psi(x), \\ \varphi'(x)\,\Psi_1 = \varphi(x)\,\Psi_1, \qquad \varphi'(x)\,\Psi_2 = -\,\varphi(x)\,\Psi_2, \end{gathered} \tag{5.3.23}$$

где $\Psi_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2$. Нетрудно убедиться, что все функции Уайтмана от полей φ и ψ совпадают с функциями Уайтмана, в которых φ заменено на φ', а ψ — на ψ'.

Упражнение 5.3.1. Показать, что поля φ' и ψ' удовлетворяют нормальным перестановочным соотношениям, т. е. коммутируют между собой на пространственноподобных интервалах.

Преобразование (5.3.23) называется *преобразованием Клейна* (применительно к данному примеру). Его можно рассматривать просто как некоторую замену переменных (полей), через которые выражаются наблюдаемые. Обратим внимание, что преобразование Клейна не является унитарным преобразованием вида $\varphi' = V\varphi V^{-1}$, поскольку оно не сохраняет перестановочных соотношений.

*) Детальное изложение общего случая содержится в монографиях [2] и [3].

Специфической особенностью рассмотренного примера является то обстоятельство, что в нем аномальные перестановочные соотношения не приводят к новому соотношению симметрии (или правилу суперотбора). В следующих примерах это обстоятельство отсутствует.

2) Пусть $\varphi(x)$ — эрмитово скалярное поле, а $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — спинорные эрмитовы поля (поля Майорана). Предположим, что имеют место нормальные перестановочные соотношения

$$[\psi_1(x),\ \psi_2(y)]_+ = 0 = [\varphi(x),\ \psi_2(y)]_- \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0 \tag{5.3.24}$$

и в то же время аномальное соотношение

$$[\varphi(x),\ \psi_1(y)]_+ = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0. \tag{5.3.25}$$

Покажем, что при этих предположениях некоторые вакуумные средние обращаются в нуль. Для этой цели воспользуемся следующим вспомогательным утверждением (ср. с примером применения теоремы 3.2.3 (гл. 3, п. 2.3)).

Лемма 5.3.2. *Пусть $M(x_1, \ldots, x_j)$ и $N(y_1, \ldots, y_k)$ — два одночлена (т. е. произведения компонент полей), антикоммутирующих в множествах точек (x) и (y), которые разделены пространственноподобными интервалами. Тогда либо $(\Psi_0, M\Psi_0) = 0$, либо $(\Psi_0, N\Psi_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть a — достаточно большой по абсолютной величине пространственноподобный вектор. Тогда в силу предположения леммы

$$(\Psi_0,\ M(x_1, \ldots, x_j) N(y_1 + a, \ldots, y_k + a)\Psi_0) + \\ + (\Psi_0,\ N(y_1 + a, \ldots, y_k + a) M(x_1, \ldots, x_j)\Psi_0) = 0.$$

Предел этого равенства при $a^2 \to -\infty$ в силу теоремы о разложении на пучки (теорема 3.2.3) имеет вид

$$(\Psi_0,\ M\Psi_0)(\Psi_0,\ N\Psi_0) + (\Psi_0,\ N\Psi_0)(\Psi_0,\ M\Psi_0) = 0. \tag{5.3.26}$$

Отсюда утверждение леммы 5.3.2 следует непосредственно.

Возвращаясь к нашему примеру, предположим, что для некоторого целого n

$$(\Psi_0,\ \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_{2n+1})) \neq 0. \tag{5.3.27}$$

Положим

$$M = \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_{2n+1}),$$
$$N = N_{jkl} = \varphi(y_1) \ldots \varphi(y_j)\psi_1(y_{j+1}) \ldots \psi_1(y_{j+2k+1}) \times \\ \times \psi_2(y_{j+2k+2}) \ldots \psi_2(y_{j+2k+2l}). \tag{5.3.28}$$

В силу (5.3.24) и (5.3.25) одночлены M и N антикоммутируют при пространственноподобном разделении аргументов. Следовательно, к ним можно применить лемму 5.3.2, которая в силу предположения (5.3.27) дает

$$(\Psi_0, N_{jkl}(y_1, \ldots, y_{j+2k+2l})\Psi_0) = 0, \quad j, k, l-1 = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.3.29}$$

С другой стороны, в силу однозначности функций Уайтмана (см. гл. 3, п. 2.1) вакуумные средние от нечетного числа спинорных полей ψ_1 и ψ_2 (и произвольного числа скалярных полей φ) тоже исчезают. Вместе с (5.3.29) это приводит к тому, что вся теория инвариантна относительно группы из четырех преобразований вида

$$(\psi_1, \psi_2) \to (\sigma_1\psi_1, \sigma_2\psi_2), \qquad \sigma_1, \sigma_2 = +, -. \tag{5.3.30}$$

Эта симметрия приводит к закону сохранения, который называют *четно-нечетным правилом* (четности числа частиц типа ψ_1 и типа ψ_2 сохраняются).

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ расщепляется на сумму четырех ортогональных подпространств $\mathcal{H}_{\sigma_1\sigma_2}$, натянутых на векторы

$$\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j)\psi_1(x_{j+1}) \ldots \psi_1(x_{j+k})\psi_2(x_{j+k+1}) \ldots \psi_2(x_{j+k+l})\Psi_0 \tag{5.3.31}$$

с определенной четностью k и l:

$$\mathcal{H}_{++} \text{ при } k = 2k_1, \quad l = 2l_1; \qquad \mathcal{H}_{+-} \text{ при } k = 2k_1, \quad l = 2l_1 + 1;$$
$$\mathcal{H}_{-+} \text{ при } k = 2k_1 + 1, \quad l = 2l_1; \qquad \mathcal{H}_{--} \text{ при } k = 2k_1 + 1, \quad l = 2l_1 + 1.$$

Ортогональность этих подпространств обеспечивается равенством (5.3.29) и однозначностью функций Уайтмана.

Определим теперь *преобразование Клейна* для этого случая как преобразование, оставляющее ψ_1 и ψ_2 неизменными и заменяющее поле φ на φ', равное φ в $\mathcal{H}_{+\sigma_2}$ и $-\varphi$ в $\mathcal{H}_{-\sigma_2}$.

Упражнение 5.3.2. Показать, что определенные таким образом поля φ', ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют нормальным перестановочным соотношениям.

Отметим, что из двух эквивалентных описаний теории, соответствующей примеру 2), второе (с полями φ', ψ_1, ψ_2) кажется более естественным, поскольку в случае первоначального набора (φ, ψ_1, ψ_2) эрмитовы операторы $\varphi(x)$ и $\psi_1(y)\psi_2(z) + \psi_2(z)\psi_1(y)$ не коммутируют даже на больших пространственноподобных интервалах, в то время как для набора φ', ψ_1, ψ_2 они локально коммутируют.

3) Может быть, простейшим является пример двух локально антикоммутирующих эрмитовых скалярных полей $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, для которых
$$(\Psi_0,\ \varphi(x)\psi(y)\Psi_0) \neq 0. \tag{5.3.32}$$

Упражнение 5.3.3. Пользуясь леммой 5.3.2, показать, что все вакуумные средние, содержащие нечетное число полей, исчезают, а преобразование Клейна в этом случае имеет вид $\psi'=\psi$ и $\varphi'=\sigma\varphi$, где $\sigma=+1$ для векторов, полученных из вакуума действием четного числа сглаженных полей, $\sigma=-1$ для векторов, полученных из вакуума действием нечетного числа полей.

Последний пример поучителен тем, что в нем преобразование Клейна переводит эрмитово поле в неэрмитово. Действительно, в силу эрмитовости поля
$$(\Psi_0,\ \varphi(x)\psi(y)\Psi_0) = (\varphi(x)\Psi_0,\ \psi(y)\Psi_0).$$
Но тогда из определения полей φ' и ψ' следует, что
$$\begin{aligned}(\Psi_0,\ \varphi'(x)\psi'(y)\Psi_0) &= -(\Psi_0,\ \varphi(x)\psi(y)\Psi_0) = \\ &= -(\varphi(x)\Psi_0,\ \psi(y)\Psi_0) = -(\varphi'(x)\Psi_0,\ \psi'(y)\Psi_0),\end{aligned} \tag{5.3.33}$$
т. е. поле φ' неэрмитово.

В заключение отметим, что TCP-инвариантность теории с аномальными перестановочными соотношениями между полями следует из TCP-инвариантности теории с нормальными перестановочными соотношениями между преобразованными полями φ_k', хотя закон TCP-преобразования для полей φ_k при этом не совпадает с (5.2.23), поскольку, как мы убедились в третьем примере, при преобразовании Клейна свойство эрмитовости не сохраняется.

3.4. Парастатистики. Как уже отмечалось в п. 3.1, гипотеза о полной симметрии или полной антисимметрии вектора состояния системы одинаковых частиц является более сильным предположением, чем гипотеза о физической тождественности частиц.

Теоретически возможны и другие типы симметрий и, соответственно, другие *парастатистики*. В квантовой теории свободных полей, со своей стороны, возможны перестановочные соотношения третьего порядка относительно компонент поля, определяющие *параполя*, вместо обычных канонических перестановочных соотношений второго порядка для бозонных и фермионных полей. Цель настоящего пункта — познакомить читателя в общих чертах с теорией параполей, которая не так давно привлекла внимание физиков в связи с гипотезой о кварках (см. Гринберг (1964), Говорков (1966а, б)), и сформулировать условие паралокальности, которое обеспечивает справедливость *TCP*-теоремы и обобщение теоремы о связи спина со статистикой для параполей.

Мы предпошлем изложению три замечания.

1) Связь между теорией параполей, с которой мы вкратце познакомимся в разделе А, и обобщенной статистикой не столь очевидна, как в случае статистики Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака (см. по этому поводу Галиндо и Индурен (1963) и Гринберг (1965)).

2) Как показал анализ Гринберга и Мессиа (1965), по-видимому, ни одна из известных частиц не является парачастицей (см., однако, обсуждение вывода правил отбора для параполей в работе Фешбаха и Томляновича (1967)).

3) Результаты, относящиеся к парастатистикам, не имеют столь завершенного характера, как приведенное в предыдущих пунктах рассмотрение связи спина со статистикой, основанное на предположении, что единственными допустимыми статистиками являются статистики Бозе и Ферми.

А. *Свободные параполя и паракоммутационные соотношения Грина.* Здесь нам будет удобнее иметь дело с ортонормированным дискретным базисом в пространстве векторов состояния Фока. Пусть, в частности, одночастичные состояния нумеруются индексом ν (ν может быть совокупностью квантовых чисел, см., например, (2.5.11)). Введем операторы рождения a_ν^* состояния $|\nu\rangle$ из вакуума и сопряженные к ним операторы уничтожения a_ν. Как в случае статистики Бозе, так и в случае статистики Ферми можно ввести оператор числа частиц в состоянии ν формулой

$$n_\nu = a_\nu^* a_\nu = \frac{1}{2}(a_\nu^* a_\nu - \sigma a_\nu a_\nu^* + \sigma), \qquad (5.3.34)$$

где $\sigma = -1$ для бозе-частиц и $\sigma = 1$ для ферми-частиц. Перестановки n_ν с операторами рождения и уничтожения не зависят от типа статистики, т. е. от того, коммутируют или антикоммутируют между собой операторы a; в обоих случаях они имеют вид

$$[n_\mu, a_\nu^*] = \delta_{\mu\nu} a_\nu^*, \qquad [a_\nu, n_\mu] = \delta_{\mu\nu} a_\nu. \qquad (5.3.35)$$

Естественно потребовать сохранения этих соотношений и в теории свободных полей, соответствующей обобщенной статистике (*парабозе* или *параферми*). При этом в случае необычной статистики второе равенство (5.3.34) больше не имеет места и в качестве n_ν целесообразно взять (анти-) симметризованное выражение типа правой части (5.3.34). Следуя Грину (1953), мы постулируем более жесткую систему перестановочных соотношений, из которой следует (5.3.35) *)

$$[a_\lambda^* a_\mu - \sigma a_\mu a_\lambda^*,\ a_\nu]_- = -2\delta_{\lambda\nu} a_\mu, \tag{5.3.36а}$$

$$[a_\lambda a_\mu - \sigma a_\mu a_\lambda,\ a_\nu]_- = 0, \tag{5.3.36б}$$

где σ имеет тот же смысл, что и в (5.3.34).

Упражнение 5.3.4. Показать, что из (5.3.36) вытекает соотношение

$$[a_\lambda a_\mu - \sigma a_\mu a_\lambda,\ a_\nu^*] = 2(\delta_{\mu\nu} a_\lambda - \sigma\delta_{\lambda\nu} a_\mu). \tag{5.3.37}$$

(Указание: воспользоваться тождеством Якоби

$$[[A, B]_\varepsilon, C]_- + [[C, A]_\varepsilon, B]_- + [[B, C]_\varepsilon, A]_- = 0, \tag{5.3.38}$$

где $[A, B]_\varepsilon = AB + \varepsilon BA$, $\varepsilon = \pm$.)

Из (5.3.36)—(5.3.38) вытекает еще одна серия перестановочных соотношений такого типа (так же как и соотношения, получаемые из них эрмитовым сопряжением).

Ясно, что если определить число частиц в состоянии ν равенством

$$n_\nu = \frac{1}{2}[a_\nu^*,\ a_\nu]_{-\sigma} + C_\sigma = \frac{1}{2}(a_\nu^* a_\nu - \sigma a_\nu a_\nu^*) + C_\sigma \tag{5.3.39}$$

(константа C_σ будет определяться условием $n_\nu|0\rangle = 0$), то перестановочные соотношения (5.3.35) получаются как частный случай из (5.3.36).

Для каждого знака σ существует счетное множество неэквивалентных полей, удовлетворяющих (5.3.36) и нумеруемых натуральным числом p. При заданном p операторы a_ν задаются так называемым *анзатцем Грина*:

$$a_\nu = \sum_{\alpha=1}^{p} b_\nu^{(\alpha)}, \tag{5.3.40}$$

где при данном α поля $b_\nu^{(\alpha)}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[b_\mu^{(\alpha)},\ b_\nu^{*(\alpha)}]_\sigma = \delta_{\mu\nu}, \qquad [b_\mu^{(\alpha)},\ b_\nu^{(\alpha)}]_\sigma = 0 \tag{5.3.41}$$

и перестановочным соотношениям противоположного типа

$$[b_\mu^{(\alpha)},\ b_\nu^{*(\beta)}]_{-\sigma} = [b_\mu^{(\alpha)},\ b_\nu^{(\beta)}]_{-\sigma} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta). \tag{5.3.42}$$

---

*) Как показал Бялыницки-Бируля (1963), соотношения (5.3.36) получаются из обычного выражения для гамильтониана свободного поля через оператор числа частиц: $H = \sum_\nu \bar{\omega}_\nu n_\nu$, где $\bar{\omega}_\nu$ — среднее значение энергии в состоянии $|\nu\rangle$, если потребовать инвариантности относительно унитарных преобразований соотношений (5.3.35).

Чтобы выделить однозначное (с точностью до унитарной эквивалентности) представление операторов a_ν в пространстве Фока, потребуем, чтобы все $b_\nu^{(\alpha)}$ уничтожали вектор вакуума:

$$b_\nu^{(\alpha)}|0\rangle = 0 \text{ при всех } \nu \text{ и } \alpha. \tag{5.3.43}$$

Пространство Гильберта $\mathscr{H}_\sigma^{(p)}$, в котором действуют операторы $\overset{*(\alpha)}{b_\nu}$, определяется обычным образом как замыкание множества векторов вида $P(b^*)|0\rangle$, где P — произвольный полином от операторов рождения $\overset{*\alpha}{b_\nu}$. В силу (5.3.40), в пространстве $\mathscr{H}_\sigma^{(p)}$ можно реализовать представление алгебры исходных операторов a_ν и $\overset{*}{a}_\nu$, в котором наряду с перестановочными соотношениями (5.3.36) будут удовлетворяться условия

$$a_\nu|0\rangle = 0 \tag{5.3.44}$$

и

$$a_\mu \overset{*}{a}_\nu |0\rangle = p\delta_{\mu\nu}|0\rangle. \tag{5.3.45}$$

Упражнение 5.3.5. Показать, что в представлении, в котором имеют место (5.3.44) и (5.3.45), оператор числа частиц (5.3.39) приобретает вид

$$n_\nu = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{a}_\nu a_\nu - \sigma a_\nu \overset{*}{a}_\nu + \sigma p\right) \tag{5.3.46}$$

$\left(\text{т. е. константа } C_\sigma, \text{ определяемая условием } n_\nu|0\rangle = 0, \text{ равна } \frac{1}{2}\sigma p\right)$.

Нетрудно видеть, что представление алгебры операторов $\overset{*}{a}_\nu$ в пространстве $\mathscr{H}_\sigma^{(p)}$ приводимо.

Это положение имеет место даже для конечномерного случая (т. е. когда индекс ν пробегает конечное число значений) и может быть проиллюстрировано на простом примере *алгебры Дэффина — Кеммера*. В этом примере $p=2$ и множество возможных значений ν тоже равно двум. Мы приведем матричную реализацию алгебры Дэффина — Кеммера. Положим

$$b_1^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\left(i\gamma_1^{(\alpha)} - \gamma_2^{(\alpha)}\right), \quad b_2^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\left(\gamma_0^{(\alpha)} - \gamma_3^{(\alpha)}\right), \quad \alpha = 1, 2. \tag{5.3.47}$$

По определению

$$\left[\gamma_\mu^{(1)}, \gamma_\nu^{(2)}\right] = 0, \qquad \mu, \nu = 0, \ldots, 3. \tag{5.3.48}$$

Упражнение 5.3.6. Показать, что матрицы

$$a_j = b_j^{(1)} + b_j^{(2)} \tag{5.3.49}$$

и эрмитово сопряженные к ним матрицы $\overset{*}{a}_j$ удовлетворяют перестановочным соотношениям для параферми-полей (т. е. соотношениям (5.3.36) с $\sigma = +$).

Чтобы привести тройные перестановки к стандартным соотношениям Дэффина — Кеммера (см., например, [39], гл. 5, § 2), мы определим матрицы β_μ формулами

$$\beta_0 = \frac{1}{2}(a_2 + a_2^*),\quad \beta_1 = \frac{1}{2i}(a_1 + a_1^*),\quad \beta_2 = \frac{1}{2}(a_1^* - a_1),\quad \beta_3 = \frac{1}{2}(a_2^* - a_2). \tag{5.3.50}$$

Упражнение 5.3.7. Показать, что

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = g_{\lambda\nu}\beta_\mu + g_{\mu\nu}\beta_\lambda. \tag{5.3.51 *)}$$

Нетрудно проверить непосредственно (см. [39], гл. 5, § 2), что представление (5.3.49), (5.3.52) перестановочных соотношений (5.3.36) или (5.3.51) приводимо. Это представление шестнадцатимерно. Действительно, чтобы удовлетворить (5.3.48), необходимо определить $\gamma_\mu^{(\alpha)}$ как кронекеровские произведения

$$\gamma_\mu^{(1)} = \gamma_\mu \otimes 1,\qquad \gamma_\mu^{(2)} = 1 \otimes \gamma_\mu. \tag{5.3.53}$$

Оно разлагается на три неприводимых представления: одно десятимерное, одно пятимерное и одно одномерное (тривиальное). Отметим, что, исключая тривиальное представление, лишь десятимерное представление обладает единственным вакуумом, удовлетворяющим условию

$$a_1 |0\rangle = a_2 |0\rangle = 0.$$

Этот факт имеет общий характер: в пространстве $\mathscr{B}_\sigma^{(p)}$ содержится одно и только одно нетривиальное подпространство $\mathscr{H}_\sigma^{(p)}$, инвариантное относительно алгебры операторов a_ν, a_ν^*, в котором имеется единственный вектор вакуума, удовлетворяющий (5.3.44).

Упражнение 5.3.8. Показать, что ненормированный базис в пространстве $\mathscr{H}^{(2)}$ десятимерного представления алгебры Дэффина — Кеммера может быть задан (без введения операторов $b_j^{(\alpha)}$) формулами:

$$|0\rangle,\ a_j^*|0\rangle,\ a_j^* a_k^*|0\rangle,\ a_1^{*2} a_2^*|0\rangle = -a_2^* a_1^{*2}|0\rangle,$$
$$a_1^* a_2^{*2}|0\rangle = -a_2^{*2} a_1^*|0\rangle,\ a_1^{*2} a_2^{*2}|0\rangle,\qquad j, k = 1, 2.$$

---

*) Если принять во внимание, что

$$\beta_\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu^{(1)} + \gamma_\mu^{(2)}\right), \tag{5.3.52}$$

то к (5.3.51) можно прийти непосредственно из (2.4.6) и (5.3.48).

(Указание: воспользоваться тем, что в случае парастатистики с $p=2$ перестановочные соотношения (5.3.36) могут быть заменены более простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} a_\lambda \overset{*}{a}_\mu a_\nu + \sigma a_\nu \overset{*}{a}_\mu a_\lambda &= 2(\delta_{\lambda\mu} a_\nu + \sigma\delta_{\mu\nu} a_\lambda), \\ \overset{*}{a}_\lambda a_\mu a_\nu + \sigma a_\nu a_\mu \overset{*}{a}_\lambda &= 2\sigma\delta_{\lambda\mu} a_\nu, \\ a_\lambda a_\mu a_\nu + \sigma a_\nu a_\mu a_\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{5.3.54}$$

Гринберг и Мессиа (1965) показали, что все неприводимые представления перестановочных соотношений (5.3.36) в пространстве с единственным циклическим вакуумом, для которого имеет место (5.3.44), удовлетворяют также соотношению (5.3.45) с некоторым целым положительным p и определяются с точностью до унитарной эквивалентности равенствами (5.3.44), (5.3.45). Каждое такое представление включается в приводимое представление в пространстве $\mathscr{B}_\sigma^{(p)}$, задаваемое анзатцем Грина (5.3.40). В частности, при $p=1$ получаются обычные статистики Бозе и Ферми.

Б. *TCP-теорема и теорема о связи спина с парастатистикой для паралокальных полей.* Чтобы сформулировать свойство локальности параполей, мы воспользуемся следующим обобщением анзатца Грина (5.3.40). Мы (вслед за Дел'Антонио и др. (1962)) определим взаимодействующее паралокальное поле $A(x)$ как сумму полей

$$A(x) = \sum_{\alpha=1}^{p} B^{(\alpha)}(x), \tag{5.3.55}$$

где $B^{(\alpha)}$ удовлетворяют условиям локальности аномального типа:

$$[B^{(\alpha)}(x),\ B^{(\alpha)}(y)]_\sigma \equiv B^{(\alpha)}(x)\,B^{(\alpha)}(y) + \sigma B^{(\alpha)}(y)\,B^{(\alpha)}(x) = 0$$
$$\text{при}\quad (x-y)^2 < 0, \tag{5.3.56}$$
$$(1-\delta_{\alpha\beta})\,[B^{(\alpha)}(x),\ B^{(\beta)}(y)]_{-\sigma} = 0 \tag{5.3.57}$$

(ср. с (5.3.41), (5.3.42)). Из этого определения и из анализа системы полей с аномальными перестановочными соотношениями (п. 3) непосредственно следует справедливость TCP-теоремы для параполей.

Заметим в связи с этим определением, что требованиями (5.3.55)—(5.3.57) мы накладываем некоторое ограничение на вспомогательные поля $B^{(\alpha)}$ в расширенном пространстве $\mathscr{B}_\sigma^{(p)}$, а не в физическом пространстве векторов состояния $\mathscr{H}_\sigma^{(p)}$, в котором действует параполе A. Особенно сильным является ограничение (5.3.57), которое эквивалентно предположению об отсутствии взаимодействия между разными полями $B^{(\alpha)}$. Кроме того, напомним, что только для свободных полей доказано, что анзатц Грина исчерпывает все представления паракоммутационных соотношений *). Более того, введение в самом определении параполя A системы полей $B^{(\alpha)}$ фактически сводит параполя к системе обычных (бозе- или ферми-) полей с определенной внутренней симметрией (см. Говорков (1966а, б)). Все это обусловливает несколько предварительный характер данного рассмотрения TCP-теоремы и теоремы о связи спина с парастатистикой для параполей.

Упражнение 5.3.9. Показать, что из (5.3.55)—(5.3.57) следуют локальные паракоммутационные сотношения для параполя A

$$[[A(x),\ A(y)]_{-\sigma},\ A(z)]=0, \tag{5.3.58}$$

если одновременно

$$(x-z)^2<0 \quad \text{и} \quad (y-z)^2<0.$$

При исследовании функций Уайтмана для «компонентных полей» $B^{(\alpha)}(x)$ полезна следующая лемма.

Лемма о факторизации. *Вакуумное среднее от произведений полей $B^{(\alpha)}(x)$ равно произведению вакуумных средних, в каждое из которых входят поля B одного сорта α.*

Мы не будем приводить доказательство этой леммы, а только проиллюстрируем ее на частном случае парабозе-полей двух сортов $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$.

Упражнение 5.3.10. Показать, что

$$\langle 0|B^{(1)}(x_1)B^{(1)}(x_2)B^{(1)}(x_3)B^{(2)}(x_4)B^{(2)}(x_5)B^{(2)}(x_6)|0\rangle=$$

$$=\langle 0|B^{(1)}(x_1)B^{(1)}(x_2)B^{(1)}(x_2)|0\rangle\langle 0|B^{(2)}(x_4)B^{(2)}(x_5)B^{(2)}(x_6)|0\rangle=0. \tag{5.3.59}$$

(Указание: воспользоваться формулой (5.3.57) и условием спектральности (см. Дел'Антонно и др. (1962)).)

Заметим, что вакуумное среднее в левой части (5.3.59) удовлетворяет условию типа слабой локальной коммутативности с противоположным знаком. Но оно, согласно упражнению 5.3.10, обращается в нуль, что справедливо для всех вакуумных средних, для которых не выполняется автоматически нормальное условие СЛК (с правильным знаком!). Это позволяет доказать, что поле $A(x)$ удовлетворяет условию СЛК и, значит, к нему можно применить непосредственно TCP-теорему 5.2.4.

Чтобы установить связь спина с парастатистикой, достаточно заметить, что для того, чтобы поле A обладало определенными трансформационными свойствами (т. е. определенным спином), все поля $B^{(\alpha)}$ должны обладать теми же трансформационными свойствами. Применяя к полям $B^{(\alpha)}$ результаты п. 3.2,

*) Только в случае свободных параполей доказана и эквивалентность локальности и паралокальности (см. Араки и др. (1966)).

мы заключаем, что если параполе A обладает целым спином, то оно подчиняется парастатистике Бозе, если же оно обладает полуцелым спином, то должно подчиняться парастатистике Ферми (мы предполагаем, что возможен выбор лишь между этими двумя парастатистиками с фиксированным p).

§ 4. Перестановочные соотношения при равных временах. Некоторые отрицательные результаты

4.1. Вводные замечания. Аксиоматический подход к квантовой теории поля позволяет, как отмечалось во введении, взглянуть с новой точки зрения на трудности канонической (гамильтоновой) формулировки релятивистской квантовой теории.

В п. 4.2 мы покажем, что часто используемое в обычной формулировке квантовополевой теории возмущений так называемое «представление взаимодействия», строго говоря, не существует (теорема Хаага). В п. 4.3 будет обсуждаться смысл этой теоремы и возможные применения, в первую очередь использование неэквивалентных представлений канонических перестановочных соотношений.

Доказательство теоремы Хаага (так же как и результаты двух предыдущих параграфов) существенно использует теорему Баргмана — Холла — Уайтмана (теорему 5.1.2). Те же методы используются и при доказательстве некоторого отрицательного результата относительно описания «неточной симметрии» при помощи зависящего от времени унитарного оператора (п. 4.4).

4.2. Теорема Хаага и ее обобщения. Наиболее существенное предположение в гамильтоновой (или лагранжевой) формулировке квантовой теории поля, которое делается в дополнение к изложенным в предыдущих главах постулатам релятивистской квантовой теории, состоит в том, что определенный смысл приписывается полям в фиксированный момент времени. В то время как в гл. 3, § 1 мы постулировали, что сглаженные по всем четырем координатам поля $\varphi(f)$ имеют смысл неограниченных операторов в пространстве векторов состояний $\mathscr{H}$, в гамильтоновом подходе мы должны потребовать, чтобы поля, сглаженные лишь по трем пространственным координатам

$$\varphi(f,\ t)=\int_{R_3}\varphi(t,\ x)f(x)\,d^3x\qquad (f\in\mathscr{S}(R_3)),\tag{5.4.1}$$

имели смысл операторов в $\mathscr{H}$. Более того, мы будем предполагать, что система полей $\varphi_\alpha(f,\ t)$ в фиксированный момент времени t неприводима (в смысле определения, данного в гл. 3, п. 1.3; см. (3.1.20)). При этом мы включаем в систему наряду с каждым полем $\varphi(f, t)$ сопряженный к нему «импульс», обозначаемый обычно $\pi(f, t)$ (в случае свободного скалярного поля $\pi(x)$ есть не что иное, как производная по времени поля φ). Мы не будем выписывать здесь стандартных канонических перестановочных соотношений при равных временах (см. п. 4.3), поскольку при дальнейшем рассмотрении они не будет использоваться.

В гамильтоновой схеме квантовой теории поля (см., например, [45]) считается, что операторы φ и π в разные моменты времени связаны унитарным преобразованием. В частности, предполагается, что асимптотические свободные *in*- и *out*-поля связаны с взаимодействующими гайзенберговыми полями тоже унитарным преобразованием. Теорема Хаага показывает, что если к этой привычной схеме добавить требование релятивистской инвариантности, то она становится тривиальной: теория оказывается эквивалентной теории свободных полей.

Теорема Хаага естественным образом распадается на две части. В первой предполагается лишь инвариантность относительно трехмерных евклидовых движений. Эта часть относится как к релятивистской, так и к нерелятивистской теории и не содержит никаких неожиданных результатов. Во второй части существенно используется предположение релятивистской инвариантности и устанавливается основной результат, о котором шла речь выше.

Теорема 5.4.1. *Пусть $\varphi_{1\alpha}(f, t)$ и $\varphi_{2\alpha}(f, t)$ ($f \in \mathscr{S}(R_3)$) — два неприводимых набора операторов поля в момент времени t, определенных соответственно в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Предположим, далее, что в $\mathscr{H}_j$ ($j=1, 2$) реализуются унитарные представления $U_j(a, R)$ группы E_3 евклидовых движений трехмерного пространства, при которых поля $\varphi_{j\alpha}$ преобразуются ковариантно:*

$$U_j(a, R)\varphi_{j\alpha}(t, x)\, U_j^{-1}(a, R) = T(R^{-1})_\alpha^\beta\, \varphi_{j\beta}(t, Rx + a), \qquad (5.4.2)$$

где $T(R^{-1})$ — матричное представление группы трехмерных вращений), $j=1, 2$. Пусть, наконец, существует унитарное преобразование V, связывающее в момент времени t поля $\varphi_{1\alpha}$ и $\varphi_{2\alpha}$:*

$$\varphi_{2\alpha}(f, t) = V\varphi_{1\alpha}(f, t)\, V^{-1}. \qquad (5.4.3)$$

---

*) Мы допускаем также двузначные представления группы $SO(3)$, т. е. представления группы $SU(2)$ (см. гл. 2, § 2). Поэтому точнее было бы говорить, что $U_j(a, R)$ являются унитарными представлениями универсальной накрывающей группы E_3.

Тогда представления U_1 и U_2 группы евклидовых движений эквивалентны:

$$U_2(a, R) = VU_1(a, R)V^{-1}. \tag{5.4.4}$$

Если предположить еще, что в каждом из пространств $\mathscr{H}_j$ существует единственное инвариантное относительно евклидовых движений (нормированное) состояние Ψ_{0j}:

$$U_j(a, R)\Psi_{0j} = \Psi_{0j}, \quad j = 1, 2, \tag{5.4.5}$$

то

$$c\Psi_{02} = V\Psi_{01}, \tag{5.4.6}$$

где c — комплексное число, равное по модулю 1.

Доказательству теоремы предпошлем одно замечание. Может показаться, что требование единственности состояний Ψ_{0j}, инвариантных относительно трехмерных движений, слишком жестко, так как все состояния с нулевым трехмерным импульсом (например, состояние покоящейся частицы) инвариантны относительно E_3. Однако мы знаем, что состояние с 4-импульсом $p = (m, 0, 0, 0)$ $(m > 0)$ ненормируемо (оно является обобщенным состоянием). Можно показать, что ненормируема и любая суперпозиция таких состояний с положительной массой. Поэтому, например, в пространстве Фока, описанном в гл. 2, § 5, действительно существует единственное нормированное состояние, инвариантное относительно трехмерных трансляций, — это состояние вакуума.

Доказательство теоремы 5.4.1. В силу (5.4.2) и (5.4.3) оператор

$$U_1^{-1}(a, R)V^{-1}U_2(a, R)V$$

коммутирует со всеми операторами $\varphi_{\alpha 1}(t, x)$. Следовательно, вследствие предположения о неприводимости системы полей $\varphi_{1\alpha}$ он кратен единичному оператору, т. е.

$$U_2(a, R) = \omega(a, R)VU_1(a, R)V^{-1},$$

где $\omega(a, R)$ — комплексное число. Нетрудно видеть, что $\omega(a, R)$ задает одномерное (непрерывное) унитарное представление евклидовой группы *), следовательно, $\omega(a, R) \equiv 1$. Таким образом, равенство (5.4.4) доказано.

Далее, если предположить, что существует инвариантное состояние Ψ_{01}

$$U_1(a, R)\Psi_{01} = \Psi_{01},$$

*) Унитарные представления группы E_3 описываются таким же образом, как и представления группы Пуанкаре (гл. 2, § 3). Нетрудно показать, что единственным одномерным представлением является единичное представление.

то из (5.4.4) следует, что

$$U_2(a, R)V\Psi_{01}=V\Psi_{01}.$$

Отсюда и из предположения о единственности инвариантного состояния в $\mathscr{H}_2$ следует (5.4.6). Теорема доказана.

В нерелятивистской квантовой теории оператор $V(t)$ практически всегда существует. Различные зависимости его от времени характеризуют разные физические теории. В релятивистской теории такое положение уже не имеет места. Это следует из второй (самой существенной) части теоремы Хаага. Мы докажем ее в несколько обобщенной формулировке, принадлежащей Уайтману и Холлу. При этом мы ограничимся для простоты случаем скалярного нейтрального поля.

Теорема 5.4.2 (обобщенная теорема Хаага). *Пусть даны два скалярных нейтральных поля φ_1 и φ_2, действующих, соответственно, в пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, причем выполнены все предположения теоремы* 5.4.1. *Пусть, кроме того, обе теории инвариантны относительно собственной группы Пуанкаре $\mathfrak{P}_+^\uparrow$:*

$$U_j(a, \Lambda)\varphi_j(x)U_j^{-1}(a, \Lambda)=\varphi_j(\Lambda x+a), \tag{5.4.7}$$

$$U_j(a, \Lambda)\Psi_{0j}=\Psi_{0j}, \quad j=1, 2. \tag{5.4.8*)}$$

Предположим, далее, что имеет место постулат спектральности (т. е. что в $\mathscr{H}_j$ нет состояний с отрицательной энергией). При этих предположениях первые четыре функции Уайтмана совпадают в обеих теориях. Если, кроме того, $\varphi_1(x)$ — свободное поле массы m, то $\varphi_2(x)$ — тоже свободное поле (той же массы) и обе теории полностью совпадают.

Доказательство. Из (5.4.3) и (5.4.6) следует, что все функции Уайтмана в обеих рассматриваемых теориях совпадают при равных временах:

$$(\Psi_{01}, \varphi_1(t, \boldsymbol{x}_1)\ldots\varphi_1(t, \boldsymbol{x}_n)\Psi_{01})=(\Psi_{02}, \varphi_2(t, \boldsymbol{x}_1)\ldots\varphi_2(t, \boldsymbol{x}_n)\Psi_{02}). \tag{5.4.9}$$

Покажем, далее, что при $n\leqslant 4$ точки с равными временными компонентами и точки, полученные из них собственными (вещественными) преобразованиями Лоренца, образуют вещественную окрестность в области аналитичности функций Уайтмана $F_\alpha(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ $(\alpha=1, 2;\ \zeta_j=\xi_j+i\eta_j,\ \xi_j=x_j-x_{j+1})$. При $n=1$ функция Уайтмана равна константе, и проблема тривиальна. При $n=2$ необходимое и достаточное условие для того, чтобы при помощи собственного преобразования Лоренца можно

*) Заметим, что мы не предполагаем ковариантности сопряженных импульсов $\pi_j(x)$.

было сделать равной нулю нулевую компоненту 4-вектора $\xi_1 = x_1 - x_2$, состоит в пространственноподобности этого вектора

$$\xi_1^2 < 0. \tag{5.4.10}$$

Но, как мы знаем, векторы такого вида исчерпывают множество точек Иоста J_1 (вещественных точек аналитичности двухточечной функции). При $n=3$ любые два пространственноподобных вектора ξ_1 и ξ_2 могут быть перенесены на плоскость равных времен $\xi_1^0 = \xi_2^0 = 0$ с помощью собственного преобразования Лоренца, если двумерная плоскость, которая натягивается на них, состоит только из пространственноподобных векторов (либо если ξ_1 и ξ_2 коллинеарны). Критерием того, что при любом выборе вещественных чисел α и β (не равных одновременно нулю) вектор $\alpha\xi_1 + \beta\xi_2$ пространственноподобен, являются неравенства

$$|(\xi_1\xi_2)| < \sqrt{\xi_1^2\xi_2^2}, \quad \xi_1^2 < 0, \quad \xi_2^2 < 0, \tag{5.4.11}$$

которые выделяют открытую область в множестве точек Иоста J_2. Наконец, в случае $n=4$ любые три пространственноподобных вектора ξ_1, ξ_2, ξ_3 могут быть переведены в плоскость равных времен $\xi_1^0 = \xi_2^0 = \xi_3^0 = 0$ с помощью собственного преобразования Лоренца, если линейное пространство, которое натягивается на них, состоит только из пространственноподобных векторов. Критерием этого является отрицательная определенность матрицы скалярных произведений $(\xi_i\xi_j)$

$$\xi_j^2 < 0, \quad |(\xi_i\xi_j)| < \sqrt{\xi_i^2\xi_j^2}, \quad \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & \xi_3^2 \end{vmatrix} < 0, \tag{5.4.12}$$

$$i \neq j = 1, 2, 3,$$

что снова выделяет открытое множество точек Иоста J_3.

Упражнение 5.4.1. Показать, что при $n \geqslant 5$ множество точек, которые можно привести преобразованием Лоренца на плоскость равных времен $\xi_1^0 = \ldots = \xi_{n-1}^0 = 0$, уже не образует полной вещественной окрестности в множестве точек Иоста J_{n-1}. Убедиться, в частности, что при $n=5$ число независимых скалярных произведений, образованных из векторов в J_4, равно десяти, в то время как число независимых скалярных произведений из векторов в плоскости равных времен равно трем.

Из доказанного следует, что при $n \leqslant 4$ аналитические продолжения функций Уайтмана в двух рассматриваемых теориях совпадают тождественно, а значит, совпадают и их предельные значения при вещественных аргументах.

Чтобы завершить доказательство теоремы 5.4.2, остается доказать следующую лемму.

Лемма 5.4.1. *Если $\varphi(x)$ — эрмитово скалярное локальное поле, для которого вакуум цикличен, и если двухточечная функция Уайтмана для φ совпадает с двухточечной функцией свободного поля*:

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \frac{1}{i} D_m^-(x-y), \qquad m > 0 \tag{5.4.13}$$

(см. (3.4.24) и (3.4.25)), *то $\varphi(x)$ — свободное поле массы m.* Действительно, если лемма 5.4.1 справедлива, то ее можно применить к полю φ_2 из теоремы 5.4.2 (поле φ_2 удовлетворяет всем условиям леммы; в частности, оно локально потому, что его коммутатор при равных временах совпадает с коммутатором свободного поля φ_1, и потому, что оно релятивистски ковариантно).

Доказательство леммы 5.4.1. Введем «ток»

$$j(x) = (\Box + m^2)\varphi(x).$$

Поскольку $(\Box + m^2) D_m^-(x) = 0$, то из (5.4.13) следует

$$(\Psi_0, j(x) j(y) \Psi_0) = 0. \tag{5.4.14}$$

Умножая (5.4.14) на $\bar{f}(x) f(y)$ и интегрируя, получаем

$$\| j(f)\Psi_0 \| = 0.$$

Отсюда и из леммы 5.3.1 (примененной к $\psi(x) = j(x)$) вытекает, что $j(x) = 0$. Итак, поле $\varphi(x)$ удовлетворяет «свободному» уравнению Клейна — Гордона:

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0. \tag{5.4.15}$$

Остается доказать, что поле φ удовлетворяет и перестановочным соотношениям для свободных полей.

Пользуясь тем, что в силу (5.4.15) фурье-образ $\tilde{\varphi}(p)$ поля φ сосредоточен на двухполостном гиперболоиде $p^2 = m^2$ (так как $(p^2 - m^2)\tilde{\varphi}(p) = 0$), мы можем разбить поле $\varphi(x)$, подобно свободному полю, на положительно- и отрицательно-частотные части

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int\limits_{V_m^+} \tilde{\varphi}^{\pm}(p) e^{\pm ipx} \frac{d^3p}{p_0}. \tag{5.4.16}$$

Из постулата спектральности следует, что отрицательно-частотная часть поля, связанная с отрицательной энергией, должна уничтожать вектор вакуума:

$$\varphi^{(-)}(x)\Psi_0 = 0. \tag{5.4.17}$$

Рассмотрим, далее, состояние

$$\varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(+)}(y)\,\Psi_0. \tag{5.4.18}$$

Любой импульс в этом состоянии представляет собой сумму вектора p_+, принадлежащего будущему гиперболоиду с массой $m\left(p_+^2=m^2,\ p_+^0>0\right)$, и вектора p_-, принадлежащего прошедшему гиперболоиду с той же массой. Поэтому такой импульс либо пространственноподобен, либо равен нулю. Отсюда и из постулата спектральности (запрещающего существование состояний с пространственноподобными импульсами и утверждающего единственность вакуума) вытекает, что вектор (5.4.18) коллинеарен с вектором вакуума Ψ_0. С другой стороны, из (5.4.17) и (5.4.13) следует, что

$$\left(\Psi_0,\ \varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(+)}(y)\,\Psi_0\right)=\left(\Psi_0,\ \varphi(x)\,\varphi(y)\,\Psi_0\right)=\frac{1}{i}D_m^{(-)}(x-y). \tag{5.4.19}$$

Таким образом,

$$\varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(+)}(y)\,\Psi_0=\left[\varphi^{(-)}(x),\ \varphi^{(+)}(y)\right]\Psi_0=\frac{1}{i}D_m^{(-)}(x-y)\,\Psi_0. \tag{5.4.20}$$

Отсюда и из тривиального равенства

$$\left[\varphi^{(-)}(x),\ \varphi^{(-)}(y)\right]\Psi_0=0$$

получаем

$$\left[\varphi(x),\ \varphi(y)\right]\Psi_0=\frac{1}{i}D_m(x-y)\,\Psi_0+\left[\varphi^{+}(x),\ \varphi^{+}(y)\right]\Psi_0, \tag{5.4.21}$$

где $D_m(x)$ — перестановочная функция Паули — Иордана (см. дополнение к гл. 3):

$$D_m(x)=D_m^{(-)}(x)-D_m^{(-)}(-x)=D_m^{(-)}(x)+D_m^{(+)}(x).$$

Упражнение 5.4.2. Показать, пользуясь постулатами спектральности и локальной коммутативности, что при любом выборе вектора Ψ из области определения поля φ имеет место равенство

$$\left(\Psi,\ \left[\varphi^{(+)}(x),\ \varphi^{(+)}(y)\right]\Psi_0\right)=0. \tag{5.4.22}$$

Указание: из (5.4.21) следует, что функция в левой части (5.4.22) исчезает в области $(x-y)^2<0$; из (5.4.16) следует, что она допускает аналитическое продолжение в трубчатую область

$$x\in T^+\equiv R_4+iV^+,\quad y\in T^+.$$

Очевидно, что (5.4.22) эквивалентно равенству

$$\left\{\left[\varphi(x),\ \varphi(y)\right]-\frac{1}{i}D_m(x-y)\right\}\Psi_0=0. \tag{5.4.23}$$

Упражнение 5.4.3. Пользуясь рассуждениями, с помощью которых была доказана лемма 5.3.1, показать, что из (5.4.23) вытекает операторное равенство

$$[\varphi(x),\ \varphi(y)] = \frac{1}{i} D_m(x-y), \tag{5.4.24}$$

т. е. поле φ удовлетворяет перестановочным соотношениям для свободного поля.

Лемма 5.4.1, а вместе с ней и теорема 5.4.2 доказаны.

4.3. Неэквивалентные представления канонических перестановочных соотношений. Возможное истолкование теоремы Хаага. Выводы из теоремы Хаага весьма удручающи. Она означает, что представление взаимодействия, которое кладется в основу теории возмущений, на самом деле не существует. Здесь следует иметь в виду, что утверждается отсутствие хорошо определенного оператора V в пространстве векторов состояний $\mathscr{H}$, связывающего свободное поле со взаимодействующим полем согласно (5.4.3). Разумеется, что наличие формальных выражений, осуществляющих (опять-таки формально) связь (5.4.3), которые при реальных расчетах приводят к бессмысленным расходящимся интегралам *), не может служить контрпримером к теореме Хаага. Чтобы указать на возможный выход из этого затруднения, мы проанализируем вкратце канонический лагранжев подход в квантовой теории поля.

Каноническая схема квантования исходит из классического лагранжиана $\mathscr{L}$, который является функцией от полей $\varphi_\alpha(x)$ и их первых производных:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(\varphi_\alpha(x),\ \frac{\partial\varphi_\alpha(x)}{\partial x^\nu}\right).$$

«Сопряженный импульс» к полю φ_α в момент времени t определяется формулой

$$\pi_\alpha(t,\ x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{\partial\varphi_\alpha(t,x)}{\partial t}}. \tag{5.4.25}$$

Например, для свободного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\!:\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}: - m^2\!:\ \varphi^2:\right)$$

имеем

$$\pi(t,\ x) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t},$$

*) С такой ситуацией мы встречаемся в теории возмущений в квантовой теории поля (см., например, [4]). Следует, однако, отметить, что даже отсутствие расходимостей в отдельных членах ряда теории возмущений еще не обеспечило бы существования оператора V, для которого необходимо было бы иметь сходимость всего ряда для «половинной» S-матрицы.

для свободного спинорного поля с лагранжианом

$$\mathscr{L} = i\colon \tilde{\psi}(x)\gamma^\mu \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\colon - m\colon \tilde{\psi}(x)\psi(x)\colon$$

«импульс», сопряженный к полю ψ, есть

$$\pi_\psi(x) = i\tilde{\psi}(x)\gamma^0 = i\psi^*(x)$$

Постулируется, что сопряженные поля φ_α и π_α (точнее, сглаженные поля $\varphi_\alpha(f, t)$ типа (5.4.1)) являются базисными элементами некоторой алгебры, определяемой (в случае бозе-полей) каноническими перестановочными соотношениями:

$$\begin{aligned} &[\varphi_\alpha(t, \boldsymbol{x}), \varphi_\beta(t, \boldsymbol{y})] = [\pi_\alpha(t, \boldsymbol{x}), \pi_\beta(t, \boldsymbol{y})] = 0, \\ &[\varphi_\alpha(t, \boldsymbol{x}), \pi_\beta(t, \boldsymbol{y})] = i\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{5.4.26}$$

Таким образом, квантовая теория поля формулируется как квантовая механика системы с бесконечным числом степеней свободы ($\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ выступают здесь как номер обобщенной координаты и обобщенного импульса). Удобно иметь дело также со счетным базисом (вместо континуального). Для этой цели достаточно ввести полную ортонормированную систему функций $h_\nu(\boldsymbol{x})$ в трехмерном пространстве, например функций Эрмита $N_\nu e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2} H_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\boldsymbol{x})$, и определить «координаты» и «импульсы» поля формулами

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \int \varphi_\alpha(t, \boldsymbol{x}) \bar{h}_\nu(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}, \\ P_n(t) &= \int \pi_\alpha(t, \boldsymbol{x}) h_\nu(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{5.4.27}$$

где n — составной дискретный индекс: $n = (\alpha, \nu) = (\alpha, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Упражнение 5.4.4. Пользуясь ортонормированностью системы функций h_ν, показать, что перестановочные соотношения (5.4.26) в терминах Q_n и P_n принимают вид

$$\begin{aligned} &[Q_n(t), Q_{n'}(t)] = [P_n(t), P_{n'}(t)] = 0, \\ &[Q_n(t), P_{n'}(t)] = i\delta_{nn'} \end{aligned} \tag{5.4.28}$$

(напоминаем, что индекс n принимает счетное (бесконечное) множество значений).

Далее, мы реализуем абстрактную алгебру элементов Q_n и P_n, удовлетворяющих (5.4.28), как некоторую алгебру неограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ (в пространстве векторов состояний). В случае системы с конечным числом степеней свободы любые два неприводимых представления перестановочных соотношений (5.4.28), реализованных самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, унитарно эквивалентны (фон Нейман (1931)) *). В частности, всегда существует унитарный оператор $V(t_2, t_1)$, связывающий операторы P_n и Q_n в разные моменты времени:

$$\begin{gathered} Q_n(t_2) = V(t_2, t_1)\, Q_n(t_1)\, V^{-1}(t_2, t_1), \\ P_n(t_2) = V(t_2, t_1)\, P_n(t_1)\, V^{-1}(t_2, t_1) \\ (n = 1, \ldots, N < \infty). \end{gathered} \tag{5.4.29}$$

Для систем с бесконечным числом степеней свободы это не так. Более того, линейные канонические преобразования (т. е. преобразования переменных P_n и Q_n, сохраняющие вид перестановочных соотношений (5.4.28)), вообще говоря, не соответствуют преобразованию унитарной эквивалентности типа (5.4.29). В этом можно убедиться на примере простейшего линейного преобразования

$$Q_n' = \frac{1}{a_n} Q_n, \qquad P_n' = a_n P_n, \qquad a_n = e^{\alpha_n} > 0. \tag{5.4.30}$$

Упражнение 5.4.5. Показать, что в случае системы с конечным числом степеней свободы $n \leqslant N$, штрихованные и нештрихованные переменные в (5.4.30) связаны унитарным преобразованием

$$\begin{gathered} X_n' = V_N X_n V_N^{-1}, \\ X = Q,\ P,\ V_N = e^{i \sum\limits_{n=1}^{N} (P_n Q_n + Q_n P_n)\, \alpha_n}. \end{gathered} \tag{5.4.31}$$

Убедиться, что оператор V_∞ существует лишь в том случае, если последовательность вещественных чисел α_n достаточно быстро стремится к нулю, в то

---

*) Точнее это утверждение может быть сформулировано следующим образом. Заменим соотношения (5.4.28) соотношениями между унитарными операторами

$$u(\alpha) = e^{i \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n Q_n}, \qquad v(\alpha) = e^{i \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n P_n}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Предположим, что операторы u и v непрерывны относительно вещественных параметров α и удовлетворяют соотношениям

$$u(\alpha)\, u(\beta) = u(\alpha + \beta), \quad v(\alpha)\, v(\beta) = v(\alpha + \beta), \quad u(\alpha)\, v(\beta) = e^{i \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n \beta_n} v(\beta)\, u(\alpha) \tag{5.4.28а}$$

(форма Вейля перестановочных соотношений).

В отличие от операторов P_n и Q_n операторы $u(\alpha)$ и $v(\alpha)$ ограничены и, значит, определены во всем гильбертовом пространстве. Тогда теорема фон Неймана может быть сформулирована следующим образом: неприводимый набор операторов $u(\alpha)$ и $v(\alpha)$, удовлетворяющих «перестановочным соотношениям» (5.4.28а), определен однозначно, с точностью до унитарной эквивалентности.

время как формулы (5.4.30) определяют некоторое каноническое преобразование при любом выборе a_n.

Среди бесконечного множества неэквивалентных представлений канонических перестановочных соотношений в теории свободных полей (гл. 3, § 4) выделяется фоковское представление (гл. 2, § 5) при помощи дополнительного требования, что в этом представлении имеется единственное нормированное инвариантное состояние Ψ_0, которое уничтожается под действием отрицательно-частотных операторов:

$$a(p)\Psi_0 = \frac{\tilde{\varphi}^{(-)}(p)}{\sqrt{\omega_p}}\Psi_0 = 0, \tag{5.4.32}$$

т. е. требованием существования вакуума. Фоковское представление определено однозначно (с точностью до унитарной эквивалентности). Все остальные представления канонических перестановочных соотношений, в которых нет «состояния без частиц», называются «странными». Можно было бы предположить (и неявно это часто предполагается), что и в теории взаимодействующих полей можно выделить представление Фока с некоторым «физическим» вакуумом, который необходимо сохраняется во времени. На самом деле теорема Хаага показывает, что это не так, что в любой конечный момент времени мы должны пользоваться «странными» представлениями перестановочных соотношений (в которых, грубо говоря, в каждом состоянии содержится бесконечное множество частиц). Более того, из этой теоремы вытекает, что если канонические перестановочные соотношения в фиксированный момент времени вообще имеют смысл, то разные (неэквивалентные) «странные» представления этих соотношений должны реализоваться в разные моменты времени.

Несоответствие представления взаимодействия в стандартной теории (с локальным гамильтонианом) и общих требований квантовой теории заключается также и в следующем. Оператор сдвига по времени P^0 всегда должен обращать в нуль вектор вакуума. Однако, если представить P^0 в виде интеграла от локальной функции Гамильтона, соответствующей нетривиальному взаимодействию, то это будет не так, в связи с чем в стандартном подходе и говорят о математическом (свободном) и физическом вакууме. Но согласно теореме Хаага эти два вакуума не связаны унитарным преобразованием эквивалентности (обстоятельство, которое, как и вышеприведенные соображения, иллюстрируется на простых нерелятивистских моделях — см., например, Уайтман (1964б)).

Отметим, наконец, что наряду с необходимостью учета неэквивалентных представлений канонических перестановочных соотношений надо иметь в виду возможность более сингулярного характера самих перестановочных соотношений. Уже для свободного комплексного векторного поля $V^{\mu}(x)$, для которого перестановочные соотношения имеют вид (см. [4], § 11.3)

$$[V^{\mu}(x),\ V^{*\nu}(y)] = \frac{1}{i}\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x_{\mu}\partial x_{\nu}}\right) D_m(x-y); \qquad (5.4.33)$$

учитывая, что «импульс», сопряженный к $V^{\mu}(x)$, есть $\frac{\partial V^{*\mu}}{\partial t}$, вместо (5.4.26) имеем

$$\left[V^{\mu}(x),\ \frac{\partial V^{\mu}(y)}{\partial t}\right]_{x^0=y^0} = \frac{1}{im^2}\Delta\delta(x-y), \qquad (5.4.34)$$

где Δ — оператор Лапласа. Не исключена возможность, что коммутатор взаимодействующих полей настолько сингулярен, что его необходимо сглаживать по всем четырем координатам, а нельзя рассматривать в фиксированный момент времени лишь как обобщенную функцию трех пространственных координат.

4.4. О невозможности описать «нарушенную симметрию» зависящим от времени унитарным оператором. В теории сильных взаимодействий часто рассматриваются симметрии, которые нарушаются электромагнитными или слабыми взаимодействиями. Сюда относятся дискретные симметрии P, C и T, с которыми мы познакомились на примере свободных полей (гл. 3, п. 4.4), а также изотопическая симметрия, рассмотрение которой выходит за рамки настоящего тома. Фабри и др. (1967) показали, что такую приближенную симметрию нельзя описывать зависящим от времени унитарным оператором. Мы приведем здесь точную формулировку и доказательство этого результата в частном случае операции пространственного отражения I_s. Читатель увидит, что метод рассуждения тот же, что и при доказательстве теоремы Хаага.

Теорема 5.4.3. *Пусть в каждый момент времени t существует унитарный оператор $U_t(I_s)$ такой, что*

$$U_t(I_s)\varphi^{\alpha}(x)U_t^{-1}(I_s) = V^{\alpha}_{t\beta}\left(I_s^{-1}\right)\varphi^{\beta}(x^0,\ -x) \equiv \varphi^{\alpha}_s(x) \qquad (5.4.35)$$

и

$$U_t(I_s)\,U(0,\ a;\ 1)\,U_t^{-1}(I_s) = U(0,\ -a;\ 1), \qquad (5.4.36)$$

где $U(a,\ \Lambda)$ — представление группы Пуанкаре в рассматриваемой теории. Тогда в теории с единственным трансляционно-инвариантным вакуумом первые четыре функции Уайтмана инвариантны относительно пространственного отражения *).

*) Из этой теоремы следует, что если пространственная четность нарушается хотя бы для одной из первых четырех функций Уайтмана (другими словами, для функции Грина, вершиной части или амплитуды двухчастичного рассеяния), то она не может быть представлена в каждый момент времени унитарным оператором.

Доказательство. Из (5.4.36) и из трансляционной инвариантности вакуума вытекает, что состояние $U_t(I_s)\Psi_0$ трансляционно-инвариантно. Далее, в силу гипотезы о единственности трансляционно-инвариантного состояния

$$U_t(I_s)\Psi_0 = C(t)\Psi_0, \qquad |C(t)| = 1. \tag{5.4.37}$$

Отсюда следует, что при равных временах аргументов все функции Уайтмана от полей $\varphi^\alpha(x)$ совпадают с функциями Уайтмана от пространственно отраженных полей $\varphi_s^\alpha(x)$ (5.4.35). Кроме того, из (5.4.35) и из закона преобразования полей при собственных преобразованиях Пуанкаре (3.1.6) следует, что

$$U_s(a, \Lambda)\varphi_s^\alpha(x)U_s^{-1}(a, \Lambda) = V_\beta^\alpha(\Lambda^{-1})\varphi_s^\beta(\Lambda x + a) \tag{5.4.38}$$

и

$$U_s(a, \Lambda)\Psi_0 = \Psi_0,$$

где

$$U_s(a, \Lambda) = U\left(I_s a, I_s \Lambda I_s^{-1}\right). \tag{5.4.39}$$

Поэтому в равенстве одновременных функций Уайтмана можно перейти к произвольной системе координат. Отсюда тождество первых четырех функций Уайтмана следует так же, как и при доказательстве теоремы 5.4.2. Тем самым теорема 5.4.3 доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ

А. ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ТЕРМИНАХ АЛГЕБР ЛОКАЛЬНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ

А.1. Вводные замечания. В настоящем дополнении мы сжато изложим основные идеи алгебраического подхода в квантовой теории поля, получившего развитие в течение последних лет главным образом в работах Хаага и Араки.

Мы видели, что сглаженные операторы поля $\varphi(f)$ ивляютси неограниченными операторами в гильбертовом пространстве векторов состояния $\mathscr{H}$. Их действие определено не дли любого вектора из $\mathscr{H}$, а лишь на некотором всюду плотном множестве; поэтому нам пришлось ввести предположение о существовании всюду плотной области определении Ω, общей для всех операторов $\varphi(f)$ (когда пробнаи функции f меняется). Идея Хаага состоит в замене понятия поля понятием локальной наблюдаемой, которой соответствует ограниченный оператор в $\mathscr{H}$. При этом можно использовать хорошо развитую математическую теорию нормированных алгебр (и колец).

Достоинством этого подхода является инвариантность алгебраической формулировки квантовой теории относительно выбора поля внутри данного класса Борхерса. Чтобы придать этим словам точный смысл, необходимо установить соответствие между теорией Хаага — Араки и теорией локальных полей. Однако, как мы увидим, однозначную связь удается установить лишь в случае, когда поле $\varphi(f)$ допускает единственное самосопряженное расширение. Строго говоря, вопрос эквивалентности двух формулировок релятивистской квантовой теории до сих пор полностью не решен.

В п. А.2 мы приведем основные понятия теории нормированных алгебр с инволюцией, которые понадобятся в дальнейшем. Детальное изложение этих вопросов читатель найдет в книгах [31] (где используется несколько иная терминология) и [52]. Краткие обзоры по алгебрам фон Неймана и по алгебрам типа C^* можно найти в статье Генена и Мисра (1963) и в дополнении к статье Хаага и Кастлера (1964).

Пункт А.3 посвящен формулировке квантовой механики в терминах абстрактных алгебр C^*. В п. А.4 приведены постулаты релятивистской локальной квантовой теории в терминах алгебр фон Неймана ограниченных операторов в гильбертовом пространстве векторов состояния. Последний, пятый, пункт посвящен схематическому обзору результатов, полученных в новом подходе.

А.2. Алгебры с инволюцией и их реализации при помощи ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Сначала напомним основные определения.

Алгеброй будем называть линейное пространство над полем комплексных чисел (см. гл. 1, п. 1.1), в котором определена билинейная операция произведения. Другими словами, множество $\mathfrak{A}$ элементов A, B, ... называется алгеброй, если в нем определены коммутативное и ассоциативное сложение и умножение на комплексное число α так, что выполнены условия I—III (гл. 1, п. 1.1), и если вдобавок задано произведение любых двух элементов AB, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) B &= \alpha_1 (A_1 B) + \alpha_2 (A_2 B),\\ A(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) &= \beta_1 (AB_1) + \beta_2 (AB_2).\end{aligned} \tag{5.A.1}$$

Здесь мы будем рассматривать *ассоциативные алгебры*, для которых предполагается еще, что

$$A(BC) = (AB)C. \tag{5.A.2}$$

Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ является *алгеброй с инволюцией* (или алгеброй со звездочкой), если каждому элементу $A \in \mathfrak{A}$ поставлен в соответствие *сопряженный* элемент A^* таким образом, чтобы выполнялись условия

$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \quad (A+B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^* A^*, \tag{5.A.3}$$

$$(A^*)^* = A. \tag{5.A.4}$$

Алгебра со звездочкой $\mathfrak{A}$ называется нормированной, если в ней определена норма $|A|$, удовлетворяющая условиям Ia — в гл. 1, п. 1.1 и условиям

$$|AB| \leqslant |A| \cdot |B|, \quad |A^*| = |A|. \tag{5.A.5}$$

Мы потребуем наряду с этим выполнения равенства

$$|A^* A| = |A|^2. \tag{5.A.6}$$

Будем предполагать также, что в алгебре имеется единичный элемент I такой, что $IA = AI = A$ (при всех $A \in \mathfrak{A}$); нетрудно показать, что существует только один элемент, удовлетворяющий этому условию, и что $I^* = I$, $|I| = 1$.

Инволютивная нормированная алгебра $\mathfrak{A}$ называется *алгеброй типа* C^* (или просто C^*-*алгеброй*), если она удовлетворяет условию (5.A.6) и полна относительно сходимости по норме *), т. е. если любая последовательность Коши $\{A_n\}$ элементов $\mathfrak{A}$, для которой

$$\lim_{n,\, k \to \infty} |A_n - A_k| = 0,$$

определяет предельный элемент $A \in \mathfrak{A}$ такой, что

$$\lim_{n \to \infty} |A_n - A| = 0.$$

Каждая C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ является, в частности, пространством Банаха (см. определение в гл. 1, п. 1.1). Следовательно, можно рассматривать множество всех линейных непрерывных функционалов в $\mathfrak{A}$, которые тоже образуют некоторое банахово пространство. Соответственно в $\mathfrak{A}$ можно ввести слабую сходимость, полагая, что $A_n \to A$, если $F(A_n) \to F(A)$ для любого линейного непрерывного функционала F. Нормированная алгебра со звездочкой, полная относительно определенной таким образом слабой сходимости, автоматически полна относительно сходимости по норме. Обратное утверждение неверно.

Типичным примером нормированной алгебры со звездочкой является любая алгебра ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, в которой наряду с каждым оператором A содержится эрмитово сопряженный оператор A^*.

---

*) Наймарк [31] называет алгебру типа C^* *банаховым* (или *полным*) *вполне регулярным симметрическим кольцом*.

В такой реализации инволюция в алгебре совпадает с эрмитовым сопряжением, а норма определяется равенством (1.1.35). Условия (5.А.5) и (5.А.6) при этом удовлетворяются автоматически.

Априори можно ввести много неэквивалентных типов сходимости в алгебре $\mathfrak{B}$ всех ограниченных операторов в $\mathscr{H}$. Мы приведем для примера три таких типа, каждый из которых влечет за собой предыдущий.

а) *Слабая сходимость*: $A_n \rightharpoonup A$ (читается: A_n слабо сходится к A), если для любых Φ и Ψ из $\mathscr{H}$

$$(\Phi,\ A_n\Psi) \to (\Phi,\ A\Psi). \tag{5.A.7}$$

б) *Сильная сходимость*: $A_n \to A$ (A_n сильио сходится к A), если для любого Ψ из $\mathscr{H}$

$$\|(A_n - A)\Psi\| \to 0. \tag{5.A.8}$$

в) *Сходимость по норме* (равиомерная сходимость): $A_n \rightrightarrows A$ (A_n равномерно сходится к A), если

$$|A_n - A| \to 0. \tag{5.A.9}$$

Очевидно, из (5.А.9) вытекает (5.А.8), а яз (5.А.8) следует (5.А.7). Наоборот, из полноты алгебры относительно (5.А.7) вытекает ее полнота относительио (5.А.8), а отсюда следует полнота относительно (5.А.9).

Если алгебра ограниченных операторов полна относительности сходимости по иорме (5.А.9), то она является реализацией алгебры C^*. Если она полиа относительио слабой сходимости (5.А.7), она называется *алгеброй фон Неймана*. Очевидно, класс алгебр C^* шире класса алгебр фон Неймана.

В дальиейшем (при формулировке свойства локальной коммутативности) иам понадобится понятие коммутанта. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — некоторая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$. *Коммутантом* алгебры $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{A}$ называется множество $\mathfrak{A}_1'$ тех элемеитов $\mathfrak{A}$, которые коммутируют со всеми элементами $\mathfrak{A}_1$. В силу ассоциативности умножения коммутант является алгеброй. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра с сопряжением (т. е. с инволюцией) и $\mathfrak{A}_1$ замкнута относительно этого сопряжения, то в силу (5.А.3) и коммутант $\mathfrak{A}_1'$ замкнут относительно сопряжения (т. е. из $A \in \mathfrak{A}_1'$ следует, что и $A^* \in \mathfrak{A}_1'$). В случае конкретных алгебр ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ в качестве объемлющей алгебры, относительно которой определяется коммутант, берется обычно алгебра $\mathfrak{B}$ всех ограниченных операторов в $\mathscr{H}$. Алгебры фон Неймана характеризуются тем, что совпадают со своим повторным коммутантом: $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$.

При изучении и классификации алгебр фон Неймана важную роль играет понятие фактора, которое может рассматриваться как неточный аналог неприводимого представления. Алгебра $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ называется *фактором*, если ее центр $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ содержит лишь элементы, кратные единице, т. е. если $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \{\alpha I\}$. Произвольная алгебра фон Неймана может быть представлена в виде некоторой обобщенной суммы факторов.

Самосопряженные элементы алгебры фон Неймана (и функции от них) определяются своими спектральными разложениями (1.1.47) (соответственно (1.1.48)) в терминах системы проекционных операторов $E(\lambda)$. Классификация факторов основывается на существовании (и единственности с точностью до множителя) некоторой характеристической аддитивной функции проекторов, которая может рассматриваться как обобщение понятия размерности. Точные результаты могут быть сформулированы в виде следующих двух теорем (см. [31], § 36).

Теорема 5.А.1. *Существует функция $D(E)$, определенная на всех операторах проектирования E, принадлежащих данному фактору F и обладающая следующими свойствами:*

1) $D(E) \geqslant 0$, *причем* $D(E)=0$ *только при* $E=0$.

2) *Если операторы E_1 и E_2 эквивалентны относительно фактора F, т. е. если существует элемент $S \in F$ такой, что $E_2 = SE_1S^{-1}$, то $D(E_1)=D(E_2)$.*

3) *Если $E_1E_2=0$, то $D(E_1+E_2)=D(E_1)+D(E_2)$.*

Функция $D(E)$ определяется из условий 1)—3) (при заданном факторе F) однозначно, с точностью до постоянного положительного множителя).*

Теорема 5.А.2. *Область значений относительной размерности может быть сведена при подходящем выборе нормировки к одному из следующих множеств:*

(I_n) *совокупность целых чисел k из интервала*

$$0 \leqslant k \leqslant n;$$

(I_∞) *совокупность неотрицательных целых чисел, включая* ∞;
(II_1) *интервал* $[0, 1]$;
(II_∞) *интервал* $[0, \infty]$;
(III) *числа* 0 *и* ∞.

В зависимости от того, какое из этих множеств пробегает функция $D(E)$, говорят о факторах типа I_n, I_∞, II_l, II_∞ и III. Есть примеры факторов любого из этих классов. В алгебраической формулировке квантовой теории приходится иметь дело с наименее привычным (и наименее изученным) классом факторов типа III.

А.3. Алгебраическая формулировка квантовой механики. Пусть дана некоторая алгебра $\mathfrak{A}$ типа C^*. Будем говорить, что линейный функционал F, определенный в $\mathfrak{A}$, *положителен*, если

$$F(A^*A) \geqslant 0 \text{ при всех } A \in \mathfrak{A} \qquad (5.А.10)$$

(в гл. 3, п. 3.1 мы называли функционалы такого рода над некоторой специальной топологической алгеброй мультипликативно-положительными).

Перечислим некоторые простые свойства положительных функционалов в C^*-алгебрах с единицей (см. [31], § 10 и [52], § 24).

*) Функцию $D(E)$ называют *относительной размерностью*.

1) Всякий положительный функционал принимает вещественные значения на самосопряженных элементах алгебры.

2) Если F — положительный функционал, то

$$|F(A^*B)|^2 \leqslant F(A^*A) \cdot F(B^*B). \tag{5.A.11}$$

3) Каждый положительный функционал непрерывен и его норма равна $F(I)$.

Положительный функционал F называется ***неразложимым***, если он не может быть представлен в виде суммы неколлинеарных положительных функционалов, т. е. если из равенства $F(A)=F_1(A)+F_2(A)$, где F_1 и F_2 — положительные функционалы, вытекает, что $F_1(A)=\lambda F(A)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Теперь можно сформулировать основные принципы квантовой механики следующим образом.

Каждой физической системе ставится в соответствие некоторая C^*-алгебра так, чтобы наблюдаемым соответствовали самосопряженные элементы алгебры, а состояниям системы (вообще говоря, смешанным) соответствовали положительные функционалы, нормированные условием $F(I)=1$. Состояние называется *чистым*, если соответствующий ему положительный функционал неразложим. Значение функционала $F(A)$ для самосопряженных элементов алгебры отождествляется со средним значением физической величины A в состоянии F.

Если наша C^*-алгебра реализована в терминах ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, то данная выше абстрактно-алгебраическая формулировка квантовой механики сводится, по существу, к обычной формулировке, данной в гл. 2, § 1. В частности, неразложимые нормированные положительные функционалы $F(A)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с нормированными лучами Φ пространства $\mathscr{H}$, так что

$$F(A)=(\Phi,\ A\Phi). \tag{5.A.12}$$

Матрице плотности смешанного состояния соответствует положительный оператор B с конечным следом. Среднее значение $F(A)$ в этом случае задается равенством

$$F(A)=\mathrm{Tr}(BA). \tag{5.A.13}$$

Единственное отличие от формулировки, приведенной в гл. 2, § 1, состоит в том, что здесь мы рассматриваем в качестве наблюдаемых лишь *ограниченные* самосопряженные операторы (так что, например, операторы координаты и импульса не входят в класс наблюдаемых). С теоретической точки зрения это отличие не является существенным, поскольку любой (в том числе неограниченный) самосопряженный оператор характеризуется своим спектральным разложением по операторам проектирования (которые ограничены).

Возникает, однако, следующий вопрос. Данная абстрактная C^*-алгебра может быть реализована разными унитарно-неэквивалентными способами в терминах ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Спрашивается: следует ли сопоставлять физической системе абстрактную C^*-алгебру — или некоторую ее конкретную реализацию в терминах ограниченных операторов? Ответ на этот вопрос должен быть получен из физических соображений: если можно отличить экспериментально две неэквивалентные алгебры ограниченных операторов, являющиеся точными представлениями *) одной и той же абстрактной C^*-алгебры, то физические системы должны описываться конкретными алгебрами ограниченных операторов (заданными с точностью до унитарной эквивалентности). В противном случае физическим системам можно сопоставлять абстрактные C^*-алгебры, хотя, разумеется, не запрещается использовать и их конкретные реализации (точно так же, как унитарная эквивалентность координатного и импульсного представлений в классической квантовой механике не запрещает использование каждого из этих представлений).

Для решения поставленного вопроса мы пользуемся критерием физической эквивалентности двух представлений R_1 и R_2 алгебры $\mathfrak{A}$ типа C^*, данным Хаагом и Кастлером (1964). Этот критерий учитывает, что любой эксперимент состоит из конечного числа измерений и что каждое измерение содержит некоторую погрешность (в принципе сколь угодно малую, но не нулевую).

Представления R_1 и R_2 алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ *физически эквивалентны*, если при любом выборе конечного числа наблюдаемых $A_1, \ldots, A_n$ из $\mathfrak{A}$, положительного оператора с конечным следом B_1 (в $\mathscr{H}_1$) и числа $\varepsilon > 0$ существует такой положительный оператор с конечным следом B_2 (в $\mathscr{H}_2$), что

$$|\mathrm{Tr}(B_1\mathrm{R}_1(A_k)) - \mathrm{Tr}(B_2\mathrm{R}_2(A_k))| < \varepsilon, \quad k=1, \ldots, n. \quad (5.\mathrm{A}.14)$$

Это понятие физической эквивалентности совпадает с математическим понятием *слабой эквивалентности* представлений (Фел (1960)). Согласно результатам Фела представления $\mathrm{R}_1(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{R}_2(\mathfrak{A})$ слабо эквивалентны тогда и только тогда, когда ядра этих представлений совпадают (т. е. когда одно и то же

*) Представление абстрактной алгебры $\mathfrak{A}$ называется *точным*, если его *ядро* (т. е. множество элементов, которые представлены нулем) состоит только из нулевого элемента алгебры $\mathfrak{A}$.

множество в абстрактной алгебре $\mathfrak{A}$ отображается на нулевой оператор в $\mathscr{H}_1$ и в $\mathscr{H}_2$). В частности, любые точные представления алгебры $\mathfrak{A}$ типа C^* слабо (физически) эквивалентны.

Это доказывает, что физические системы соответствуют именно абстрактным C^*-алгебрам (см. более детальное обсуждение этого вопроса у Кастлера (1963)).

А.4. Формулировка квантовой теории поля в терминах алгебр ограниченных операторов. Основная идея Хаага при алгебраической формулировке квантовой теории поля состоит в том, что поскольку любое физическое измерение производится в конечной области пространства — времени, то вся теория должна формулироваться в терминах локальных наблюдаемых, которые порождают некоторую алгебру. Несмотря на кажущуюся естественность этой идеи, она настолько необычна с точки зрения общепринятого формализма квантовой теории поля, что ее до сих пор не удается провести в чистом виде. Дело в том, что операторы представления группы Пуанкаре, а также их генераторы, например энергия и импульс (или их спектральные проекторы), не являются локальными наблюдаемыми. То же самое относится к такому понятию, как суммарный электрический заряд системы, и вообще ко всем наблюдаемым, чьи собственные значения выделяют когерентные подпространства в правилах суперотбора. Ниже мы будем придерживаться комбинированного подхода, исходящего из конкретного представления C^*-алгебры в гильбертовом пространстве и включающего, помимо локальных наблюдаемых, также и глобальные величины, такие, как энергия — импульс, суперотборные операторы и т. п. В частности, поэтому мы будем формулировать теорию в терминах конкретных алгебр фон Неймана, состоящих из ограниченных операторов, действующих в пространстве векторов состояния, несмотря на то, что, как было выяснено в предыдущем пункте, физические системы находятся во взаимно однозначном соответствии с абстрактными C^*-алгебрами.

Приступим к точной формулировке теории Хаага — Араки. Прежде всего, мы оставляем неизменными первые три аксиомы релятивистской квантовой теории, которые были сформулированы и подробно обсуждались в гл. 2. Другими словами, будем предполагать, что чистые состояния физической системы описываются лучами в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и что в $\mathscr{H}$ реализуется унитарное представление накрывающей группы Пуанкаре $\mathfrak{P}_0$, которое приводится правилами суперотбора и для которого имеет место принцип спектральности.

Далее, понятие релятивистского квантованного поля заменяется понятием локальной алгебры.

Каждой ограниченной области O в пространстве — времени ставится в соответствие алгебра фон Неймана $\mathrm{R}(O)$ таким образом, что выполняются условия:

1) Если $O_1 \subset O_2$, то $\mathrm{R}(O_1) \subset \mathrm{R}(O_2)$ (*изотония*).

2) *Ковариантность* относительно группы Пуанкаре:

$$U(\underset{\sim}{a}, A)\mathrm{R}(O)U^{-1}(\underset{\sim}{a}, A) = \mathrm{R}(\Lambda(A)O + a), \tag{5.A.15}$$

где $\Lambda O + a$ — область, полученная поточечным преобразованием Пуанкаре (a, Λ) области O.

3) *Локальная коммутативность*: если области O_1 и O_2 расположены пространственноподобно друг относительно друга (т. е. если каждая точка O_2 разделена пространственноподобным интервалом от любой точки O_1), то $\mathrm{R}(O_1)$ и $\mathrm{R}(O_2)$ коммутируют между собой. Если обозначить через O' совокупность всех точек, расположенных пространственноподобно относительно O, то постулат локальной коммутативности может быть записан в виде

$$O_2 \subset O_1' \Rightarrow \mathrm{R}(O_1) \subset \mathrm{R}'(O_2), \tag{5.A.16}$$

где $\mathrm{R}'(O_2)$ — коммутант алгебры $\mathrm{R}(O_2)$.

4) Если в теории имеются правила суперотбора, которым соответствует разложение гильбертова пространства (2.1.21), то объединение алгебр

$$\bigcup_O \mathrm{R}(O) \tag{5.A.17}$$

оставляет инвариантным каждое из когерентных подпространств $\mathscr{H}_j$. В каждом когерентном подпространстве алгебра (5.A.17) неприводима. Это означает, что коммутант алгебры (5.A.17) совпадает с алгеброй фон Неймана, порожденной проекторами на когерентные пространства $\mathscr{H}_j$.

Алгебра (5.A.17) не замкнута. Ее пополнение (замыкание) относительно сходимости по норме будем обозначать через $\bar{\mathrm{R}}$. Операторы алгебры $\bar{\mathrm{R}}$ типа C^* будем называть квазилокальными операторами *). Замыкание $\bar{\mathrm{R}}$ относительно слабой сходимости приводит к алгебре фон Неймана R_w, которая уже содержит глобальные наблюдаемые. Если не настаивать на рассмотрении лишь алгебр локальных наблюдаемых, а допускать произвольные (в том числе и глобальные) величины, то можно поставить в соответствие алгебру фон Неймана любому

*) По терминологии Араки и Хаага (1967) $\bar{\mathrm{R}}$ содержит квазилокальные операторы нулевого порядка. Операторы из теоретико-множественной суммы (5.A.17) называются локальными.

открытому множеству в пространстве — времени (не требуя его ограниченности). Для этого заметим сначала, что любое открытое множество O может быть представлено в виде теоретико-множественной суммы бесконечного числа ограниченных областей O_α, и сделаем следующее добавочное предположение:

5) Пусть $O=\bigcup_\alpha O_\alpha=\bigcup_\beta \tilde{O}_\beta$ — два произвольных разложения открытого множества O в сумму ограниченных областей. Тогда потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$V_\alpha \mathrm{R}(O_\alpha)=V_\beta \mathrm{R}(\tilde{O}_\beta), \tag{5.A.18}$$

где $V_\alpha(\mathrm{R}(O_\alpha))$ — алгебра фон Неймана, порождаемая элементами всех $\mathrm{R}(O_\alpha)$. Из этого предположения, в частности, следует, что если открытое множество O само ограничено, то алгебра фон Неймана (5.A.18) совпадает с $\mathrm{R}(O)$.

Предположение 5) позволяет нам определить алгебру фон Неймана для произвольного открытого множества $\bigcup O_\alpha$, где O_α — ограниченные области, формулой

$$\mathrm{R}(\bigcup O_\alpha)=V_\alpha \mathrm{R}(O_\alpha). \tag{5.A.19}$$

Заметим, что в принятой нами формулировке глобальные наблюдаемые в какой-то мере определяются через локальные.

Принцип примитивной причинности Хаага (см. гл. 3, п. 1.3) также находит естественную формулировку в терминах алгебр фон Неймана. Чтобы сформулировать его, введем понятие *причинной тени* области O. Будем говорить, что точка x принадлежит причинной тени области O, если всякий времениподобный или изотропный луч, исходящий из x и направленный в прошлое, пересекает область O. Условие причинности (по Хаагу) формулируется тогда следующим образом:

6) Если область O_2 находится в причинной тени области O_1, то $\mathrm{R}(O_2)\subset \mathrm{R}(O_1)$.

Наряду с понятием причинной тени удобно ввести также понятие об обратной (или отраженной по времени) причинной тени, заменяя в приведенном выше определении лучи, направленные в прошлое, на лучи, направленные в будущее. Сумму прямой и обратной причинных теней области O будем называть *причинной оболочкой* области O и обозначать O^c. В случае, когда теория TCP-инвариантна, из требования 6) следует, что если O_2 содержится в причинной оболочке O_1, то $\mathrm{R}(O_2)\subset\mathrm{R}(O_1)$. Комбинируя этот результат с требованием 1), находим, что алгебра фон Неймана, соответствующая произвольной области O, совпадает с алгеброй фон Неймана, соответствующей ее причинной оболочке:

$$\mathrm{R}(O)=\mathrm{R}(O^c). \tag{5.A.20}$$

Единственный известный пример системы локальных алгебр фон Неймана связан с теорией свободного скалярного нейтрального поля (см. Араки (1963б) и (1964а, б), Кадисон (1963) и Дел'Антонио (1967)). Существенно, что при любом выборе вещественной основной функции $f(x)$ симметричный оператор свободного поля $\varphi(f)$ имеет самосопряженное замыкание (т. е. $\varphi^*(f)=\varphi^{**}(f)$; о таких операторах говорят, что они в существенном — самосопряженные; см., например, [20], гл. X, § 8). Следовательно, оператор $\varphi(f)$ (точнее, его замыкание) обладает однозначно определенным спектральным разложением типа (1.1.47). Спектральные проекторы $E_{\varphi(f)}(\Delta)$, когда основная функция $f(x)$ пробегает пространство $D(O)$ (см. гл. 1, п. 1.3), порождают некоторую алгебру фон Неймана $\mathrm{R}(O)$. Полученная система зависящих от O алгебр фон Неймана удовлетворяет всем условиям 1)—6) и обладает наряду с ними следующими замечательными свойствами 7), 8), справедливыми, однако, для областей O специального вида: O есть причинная оболочка ограниченного (относительно) открытого множества B на некоторой пространственноподобной гиперплоскости, причем (двумерная) граница области B кусочно-гладкая:

7) Если $\mathring{O}'$ — внутренние точки множества O', определенного в требовании 3), то

$$\mathrm{R}(\mathring{O}')=\mathrm{R}(O)'.$$

Это свойство может рассматриваться как более сильная формулировка постулата локальной коммутативности.

8) Алгебра фон Неймана свободного поля для открытого множества O является фактором:

$$\mathrm{R}(O)\cap\mathrm{R}(O')'=\{\alpha I\}. \qquad (5.\mathrm{A}.21)$$

Более того, это — фактор класса III по классификации п. А.2 (Араки (1964б)).

Относительная сложность описания свободных полей в терминах локальных алгебр не должна нас обескураживать. Мы должны учесть, что данная в цитированных работах Араки система алгебр фон Неймана соответствует не одному свободному полю, а всему классу эквивалентности Борхерса свободного поля.

Неясно, можно ли требовать выполнения условий 7) и 8) в общем случае или эти свойства специфичны для свободного поля? Имеется недоказанная гипотеза, что равенство (5.А.21) применительно к сужению на когерентные пространства является в общем случае следствием остальных аксиом.

А.5. Обзор результатов. Мы перечислим без доказательств (но с указанием источников) некоторые результаты, относящиеся к формулировке релятивистской квантовой теории в терминах локальных алгебр фон Неймана и к ее связи с квантовой теорией поля.

1. *Условия совпадения и несовпадения алгебр* $\mathrm{R}(O)$. Пусть спектральное разложение унитарного оператора трансляции $U(a)=U(a, 1)$ имеет вид

$$U(a)=\int e^{ipx}\,dE(p). \tag{5.A.22}$$

В силу постулата спектральности $dE(p)$ отлично от нуля лишь в замыкании будущего конуса $\overline{V}^+$. Будем говорить, что вектор $\Phi\in\mathscr{H}$ обладает *компактной энергией*, если векторная функция $dE(p)\Phi$ имеет компактный носитель в $R_4(p)$ (для этого достаточно, в силу условия спектральности, предположить, что $dE(p)\Phi=0$ при достаточно больших p^0). Для векторов с компактной энергией вектор-функция $U(a, 1)\Phi$ допускают аналитическое продолжение по a во все четырехмерное комплексное пространство C_4. Будем говорить, что вектор Φ является *тотализатором* для алгебры R в пространстве $\mathscr{H}$, если из $(\chi, B\Phi)=0$ при всех $B\in\mathrm{R}$ следует, что $\chi=0$. Вектор Φ называется *сепаратором* для алгебры R, если из $B\in\mathrm{R}$ и $B\Phi=0$ вытекает $B=0$. Для того чтобы вектор Φ был сепаратором для R, необходимо и достаточно, чтобы он был тотализатором для коммутанта R' (см. [52], стр. 6). Следующее вспомогательное утверждение, которое представляет и самостоятельный интерес, принадлежит Рее и Шлидеру (1961) (см. также Уайтман (1964а)).

Лемма 5.А.1. *Пусть Φ — вектор с компактной энергией, принадлежащий когерентному пространству $\mathscr{H}_j$. Тогда он является одновременно тотализатором и сепаратором в $\mathscr{H}_j$ относительно каждой алгебры* $\mathrm{R}(O)$.

Для дальнейшего нам понадобится понятие *пространственноподобной оболочки* $\langle O\rangle$ области O. Пусть пространственно-временные точки x и y таковы, что $x-y\in V^+$; определим двойной конус $C_{x,y}$ как открытое множество точек z, для которых

$$x-z\in V^+, \qquad z-y\in V^+.$$

Тогда $\langle O\rangle$ определяется как объединение двойных конусов $C_{x,y}$ для пар $x, y\in O$ таких, что $x-y\in V^+$ и отрезок $\alpha x+(1-\alpha)y$, $0<\alpha<1$, содержится в O. Борхерс (1961) показал, что

$$\mathrm{R}(O)=\mathrm{R}(\langle O\rangle). \tag{5.A.23}$$

Существуют, однако, и такие пары областей, для которых можно заранее утверждать, что соответствующие им алгебры R не совпадают (см., например, Уайтман (1964а)).

Теорема 5.А.3. *Если $O_1 \subset O$ и евклидово расстояние между границами областей O_1 и O положительно, то* $\mathrm{R}(O_1)$ *является истинной частью алгебры* $\mathrm{R}(O)$.

Этот результат вместе с леммой 5.А.1 позволяет установить (Кадисон (1963), Генен и Мисра (1963); см. также обзор Уайтмана (1964а)), что алгебра $\mathrm{R}(O)$ не содержит фактора конечного типа (т. е. типа I_n или II_1 классификации п. А.2). Отсюда, в частности, следует, что ни одна из алгебр $\mathrm{R}(O)$ не может быть коммутативной (абелевой).

II. *Связь с квантовой теорией поля.* Пусть задана теория скалярного эрмитова поля, удовлетворяющего аксиомам гл. 3. Для того чтобы такому полю можно было однозначно поставить в соответствие систему алгебр фон Неймана, достаточно, чтобы при любом выборе вещественной основной функции $f(x)$ оператор $\varphi(f)$ был (как и в случае свободного поля) в существенном самосопряженный, т. е. чтобы имело место равенство

$$\varphi^*(f) = \varphi^{**}(f) \quad \text{при} \quad f(x) = \bar{f}(x). \tag{5.A.24}$$

Поэтому возникает вопрос о нахождении условий, при которых это равенство имеет место. Впервые достаточное условие для существования самосопряженного замыкания у полевых операторов было сформулировано в работе Борхерса и Циммермана (1964). Это условие основывается на работе Нельсона (1959) и состоит в дополнительном требовании, чтобы вакуум был *аналитическим вектором* для всех операторов $\varphi(f)$; другими словами, требуется, чтобы при любом выборе финитной основной функции $f(x)$ степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \| (\varphi(f))^n \Psi_0 \| \cdot z^n$$

имел отличный от нуля радиус сходимости в комплексной плоскости z. Это равносильно требованию, чтобы

$$\| [\varphi(f)]^n \Psi_0 \| \leqslant C_f^n n! \quad \text{при любой} \quad f(x) \in D(\mathrm{R}_4), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.A.25}$$

Необходимое и достаточное условие самосопряженности в существенном операторов $\varphi(f)$ приведено в работах Гачка (1966а, б) и Березанского (1966). Оно состоит в *квазианалитичности* вектора Ψ_0 относительно поля $\varphi(f)$ (по поводу квазианалитических векторов см. Нусбаум (1965)). Это значит, что последовательность

$$\| [\varphi(f)]^n \Psi_0 \| = \rho_n$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\rho_n}} = \infty. \tag{5.A.26}$$

В силу формулы Стирлинга и расходимости гармонического ряда условие (5.A.26) заведомо выполняется, если удовлетворяется условие аналитичности вектора Ψ_0 (5.A.25). Но условие (5.A.26) может иметь место и в случае, когда (5.A.25) нарушается, например при

$$\rho_n = (n \ln n)^n.$$

Свободное скалярное поле φ удовлетворяет условию (5.A.25), но уже полином Вика $:\varphi^3(x):$ от этого поля не удовлетворяет даже более слабому условию (5.A.26). Тем не менее «полю» $:\varphi^3(x):$ можно соотнести систему алгебр фон Неймана, пользуясь соответствием между неограниченными и ограниченными операторами, изученным Стоуном (1951—1952). Однако пока неясно, будут ли полученные таким образом алгебры фон Неймана удовлетворять аксиомам, сформулированным в предыдущем разделе.

Чтобы подойти к обратной проблеме — к восстановлению релятивистского поля, исходя из данной системы алгебр фон Неймана, мы введем вспомогательное понятие *поля Хаага — Араки.* А именно, каждому оператору $A \in \mathrm{R}(O)$, где O — ограниченное множество, мы поставим в соответствие поле Хаага — Араки, определенное формулой

$$A(x) = U(x) A U^{-1}(x), \quad (A(0) \equiv A), \tag{5.A.27}$$

где $U(x)$ — оператор трансляции (5.A.22). Поле $A(x)$ трансляционно-ковариантно;

$$U(a) A(x) U^{-1}(a) = A(x+a), \tag{5.A.28}$$

но оно нековариантно относительно преобразований из однородной группы Лоренца и нелокально (мы уже убедились — гл. 3, п. 2.4, — что не существует релятивистского квантованного поля, определенного в каждой точке как оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$). Однако

$$[A(x), A(y)] = 0,$$

если области $O + x$ и $O + y$ расположены пространственноподобно относительно друг друга. Можно было бы подумать, что мы придем к локальному оператору в пределе, когда диаметр области O стремится к нулю. Однако в соответствии с результатами гл. 3, п. 2.4, в когерентном подпространстве, содержащем вектор вакуума,

$$\bigcap_{O \ni x} \mathrm{R}(O) = \{\alpha 1\} \tag{5.A.29}$$

(Уайтман (1964а)), т. е. мы приходим в этом пределе к тривиальному оператору умножения на константу.

Более перспективной кажется возможность исходить из сглаженных операторов

$$A_n(f) = \int f(x)\, U(x)\, A_n U^{-1}(x)\, d^4x, \tag{5.A.30}$$

где $A_n \in \mathrm{R}(O_n)$, а O_n — последовательность областей, сжимающихся в точку. Однако в настоящее время неясно, можно ли выбрать последовательность операторов A_n таким образом, чтобы обобщенные операторные функции $A_n(f)$ стремились к нетривиальному пределу с нужными свойствами.

III. *Теория рассеяния в терминах локальных алгебр.* Для рассмотрения теории рассеяния Араки и Хаагу (1967) пришлось прежде всего несколько расширить совокупность локальных операторов, включая в нее операторы, осуществляющие переходы между разными когерентными подпространствами. Введение таких операторов удобно, если мы хотим рассмотреть рассеяние фермионных или заряженных частиц. В частности, при таком расширении часть операторов должна быть фермионного типа (т. е. для них в требовании 3) предыдущего пункта коммутативность должна замениться антикоммутативностью). Это необходимо для конструирования векторов состояния с определенной конфигурацией падающих (или вылетающих) частиц. Таким путем удается получить достаточно удобную формулу для сечения рассеяния в рассматриваемом подходе.

В то же время авторы показывают, что принципиально теорию можно сформулировать в терминах одних только наблюдаемых (без использования операторов Ферми или операторов, изменяющих заряд). Однако такая формулировка была бы слишком громоздкой и практически неудовлетворительной.

Несколько иная формулировка теории рассеяния содержится в работе Эпштейна (1967), в которой автор показывает, что сделанные им предположения (при формулировке теории столкновений) достаточны, чтобы доказать TCP-инвариантность S-матрицы. Среди дополнительных предположений следует отметить гипотезу о структуре одночастичных состояний, запрещающую вырождение массы по спину.

Отметим, наконец, что из сделанных предположений 1)—6) в п. А.4 в принципе нельзя вывести теорему о связи спина со статистикой. Причина состоит в том, что можно построить бесконечнокомпонентное свободное спинорное поле, которое преобразуется по унитарному (бесконечномерному) представлению группы Лоренца и квантуется коммутаторами (вместо антикоммутаторов).

С таким полем можно связать систему алгебр локальных наблюдаемых, удовлетворяющую всем требованиям предыдущего пункта (см. Стритер (1967) и Стоянов и Тодоров (1968), где имеются ссылки на предыдущие публикации по этому вопросу). Все дело в том, что в аксиомах для локальных алгебр ограниченных операторов нигде не находит отражения требование о конечномерности представления $V(A)$, по которому должно преобразовываться квантованное поле согласно постулату V гл. 3 (см. (3.1.6)).

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. Теорема об общем виде лоренц-инвариантных голоморфных функций, аналитических в трубчатой области T_n^+, доказана в работе Холла и Уайтмана (1957). В этой работе в качестве основной леммы впервые опубликовано доказательство Баргмана теоремы 5.1.2 для случая инвариантных функций. Обобщение этой теоремы на произвольные ковариантные функции, преобразующиеся по конечномерному представлению группы Лоренца, дано Уайтманом (1960а) и Йостом (1961). Совокупность вещественных точек расширенной трубчатой области определена Йостом (1957). Полное описание расширенной трубчатой области содержится в обстоятельной работе Уайтмана (1960а). Различные обобщения теоремы Холла — Уайтмана об общем виде инвариантных обобщенных функций содержатся в работах Хеппа (1963а), (1964б). Некоторое обобщение теоремы (5.1.2) содержится в работе Минковского и др. (1964). Теорема (в некотором смысле обратная к теореме 5.1.2) о том, что любая функция, аналитическая в трубчатой области и в некоторой окрестности точек Йоста, в то же время аналитична в расширенной трубчатой области и преобразуется по конечномерному представлению группы Лоренца, доказана Боголюбовым и Владимировым (1958) для случая функций одного 4-вектора и обобщена на функции n аргументов Бросом и др. (1967).

§ 2. В стандартной лагранжевой квантовой теории поля TCP-теорема возникла в тесной связи с проблемой спина и статистики: Швингер (1951), Людерс (1954), (1957) и (1961), Паули (1955) (см. также историю вопроса в статье Йоста (1959) и в книге [2] (библиография к гл. 4)). Доказательство TCP-теоремы в уайтмановском аксиоматическом подходе принадлежит Йосту (1957). Связь между TCP-инвариантностью и слабой локальной коммутативностью обсуждалась далее Дайсоном (1958а). Доказательство теоремы о глобальной природе локальной коммутативности, данное Йостом и Штейнманом, опубликовано в статье Уайтмана (1960а) (см. также Петрина (1961)). Недавно в этом направлении был получен более сильный результат. Полмайер (1967) доказал, что если матричные элементы от коммутатора стремятся к нулю на пространственноподобной бесконечности быстрее, чем $e^{-\varepsilon r^2}$, то имеет место строгая локальность. Относительно возможной экспериментальной проверки TCP-инвариантности см. Ли и др. (1957), М. Цироков (1962), Биленький (1966), Гурден (1967), а также книгу [55]. Любопытный физический пример с пропагаторной матрицей $K^{\circ}\overline{K}^{\circ}$, показывающий, что следствия TCP-инвариантности в этом случае являются на самом деле следствиями лоренц-инвариантности, рассмотрен Липшутцем (1966). Классы эквивалентности локальных полей введены Борхерсом (1960) (см. также лекции Уайтмана (1962) и работы Акария (1962) и Араки (1963а)). Примеры взаимно локальных полей с одной и той же S-матрицей приведены у Камефучи и др. (1961) (и в других цитированных там работах). Класс Борхерса свободного поля описан в работе Эпштейна (1963) и Лагерхолка к Шроера (1965). Условия другого типа, при которых S-матрица тривиальна, даны Бардакси и Сударшаном (1961), Гринбергом и Лихтом (1963) и Акария (1963). Они показывают, что не может быть нетривиальной S-матрицы, допускающей лишь конечное число неупругих процессов.

§ 3. Для свободных полей с произвольным спином теорема о связи спина со статистикой была доказана Фирцем (1939) и Паули (1940). Доказательства, основанные на общих постулатах, приведены в работах Людерса и Зумино (1958), Бургоин (1958) и Дел'Антонио (1961б). Связь теоремы о спине и статистике со свойством разбиения на пучки обсуждается у Фруасара и Тейлора (1967). Перестановочные соотношения между разными полями обсуждались в рамках обычной теории Людерсом, Зумино (1958), а в рамках аксиоматического подхода Араки (1961б). Преобразование Клейна, использованное в этих работах, применялось Клейном (1938) в другом контексте. Квантовая теория свободных параполей была развита Грином (1953) (еще раньше парабозе-осцилляторы рассматривались Вигнером (1950)). В дальнейшем парастатистики исследовались Волковым (1959) и (1960), Черниковым (1962), Камефучи и др. (1962), (1963), Галиндо и Индуреном (1963), Мессиа и Гринбергом (1964), Гринбергом и Мессиа (1965) (см. обзоры Гринберга (1965) и Говоркова (1966а), где имеются дополнительные ссылки, а также недавнюю работу Фешбаха и Томляновича (1967)). Аксиоматический подход к парастатистикам и связь спина с парастатистикой обсуждались Дел'Антонио и др. (1962). Эквивалентность локальности и паралокальности для свободных параполей доказана Араки и др. (1966). Гипотеза, что кварки могут подчиняться парастатистике, рассматривалась Гринбергом (1964) и Говорковым (1966б).

§ 4. Относительно канонической гамильтоновой формулировки квантовой теории поля см. [45] и Араки (1960б). Теорема Хаага (1955) изложена здесь в обобщенной формулировке Холла и Уайтмана (1957). Доказательство леммы 5.4.1 дано Федербушем и Джонсоном (1960) и Йостом (1961) (другое рассмотрение имеется у Гринберга (1959), см. также Гачок (1961)). Обзор по неэквивалентным представлениям канонических перестановочных соотношений дан Лопушаньским (1965), где приведены ссылки на оригинальные публикации (см. также [53], [13], гл. 4, § 5, Вайдлих (1963) и Астахов к др. (1967)). Линейное каноническое преобразование (5.4.30), которое перепутывает операторы рождения и уничтожения, применялось Боголюбовым в теории сверхпроводимости (см. [54]) и Хаагом (1962)). Физическое истолкование теоремы Хаага обсуждается в лекциях Уайтмана (1967), где имеются также дополнительные ссылки, и в книге [2]. Теорема о невозможности описания «нарушенной симметрии» зависящим от времени унитарным оператором доказана Фабри и др. (1967).

Дополнение А. Формулировка квантовой теории поля в терминах алгебр ограниченных операторов (алгебр фон Неймана), принадлежит Хаагу (1957), (1958) и Араки (1961/62) (см. также Хааг и Шроер (1962) и обзорную статью Уайтмана (1964а)). Алгебра фон Неймана, соответствующая свободному скалярному полю, была исследована Араки (1963б), (1964а, б), Кадисоном (1963), Кастлером (1965), Дел'Антонио (1967). Формулировка локальной квантовой теории в терминах абстрактных алгебр C принадлежит

Хаагу и Кастлеру (1964) (см. также Кастлер (1963) и обзор Робинзона (1965а)). Алгебраическое условие положительности энергии в этом подходе дано Доплихером (1965). Относительно разложения инвариантных состояний в алгебраическом подходе по экстремальным инвариантным состояниям см. Рюель (1966). Условия существенной самосопряженности полевых операторов, при которых можно установить соответствие с локальными алгебрами фон Неймана, приводились Борхерсом и Циммерманом (1964), Гачком (1966а, б) и Березанским (1966). Теория рассеяния в алгебраическом подходе изучалась Араки и Хаагом (1967). TCP-теорема в локальной теории, сформулированной в терминах алгебр фон Неймана, доказана Эпштейном (1967). Пример нарушения теоремы о связи спина со статистикой в алгебраической формулировке, основанный на рассмотрении бесконечнокомпонентных полей, дан Стритером (1967). В этом примере масса бесконечно вырождена по спину и нарушает условие компактности, предложенное Хаагом и Свиека (1965).

Относительно математической теории алгебр C^* и алгебр фон Неймана см. монографии [31] и [52].

ЛИТЕРАТУРА

I. Учебники и монографии

1. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., Физматгиз, 1958.
2. Р. Стритер, А. Вайтман, PCT, спин и статистика и все такое, М., «Наука», 1966.
3. R. Jost, The general theory of quantized fields, Providence, Rhode Island, American Math. Soc., 1965 (см. русский перевод: Р. Йост, «Основы теории квантованных полей», М., Мир, 1967, где имеется дополнение К. Хеппа).
4. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., Гостехиздат, 1957.
5. Э. Хенли, В. Тирринг, Элементарная квантовая теория поля, М., ИЛ, 1963.
6. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., ИЛ, 1963.
7. К. Нишиджима, Фундаментальные частицы, М., «Мир», 1965.
8. Р. Маршак, Э. Сударшан, Введение в физику элементарных частиц, ИЛ, 1962.
9. М. Л. Гольдбергер, К. М. Ватсон, Теория столкновений, М., «Мир», 1967.
10. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.
11. Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы, Общая теория, М., ИЛ, 1962; Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, М., «Мир», 1966.
12. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Пространства основных и обобщенных функций (Обобщенные функции, вып. 2), М., Физматгиз, 1958.
13. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства (Обобщенные функции, вып. 4), М., Физматгиз, 1961.
14. А. Пич, Ядерные локально выпуклые пространства, М., «Мир», 1967.
15. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1966.
16. М. А. Наймарк, Линейные представления группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.
17. L. Schwartz, Théorie des distributions, v. I—II, Paris, Hermann, 1957, 1959.
18. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними (Обобщенные функции, вып. 1), М., Физматгиз, 1958.
19. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.
20. К. Морен, Методы гильбертова пространства, М., «Мир», 1965.
21. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, «Наукова думка», 1965.

22. А. Микусиинский и Р. Сикорский, Элементариая теории обобщенных функций, I и II, М., ИЛ, 1959 и 1963.
23. И. М. Гельфаид, М. И. Граев и Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ией вопросы теории представлений (Обобщенные функции, вып. 5), М., Физматгиз, 1962.
24. В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексиых переменных, М., «Наука», 1964.
25. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М., Гостехиздат, 1954.
26. Е. Вигиер, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, М., ИЛ, 1961.
27. Т. Kahan, Théorie des groupes en physique classique et quantique, t. I. Structures mathématiques et fondaments quantiques, Paris, Dunod, 1960.
28. П. Мэтьюс, Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц, М., ИЛ, 1959.
29. Л. Б. Окунь, Слабое взаимодействие элементарных частиц, М., Физматгиз, 1963.
30. Д. П. Желобенко, Лекции по теории групп Ли, Дубиа, ОИЯИ, 1965.
31. М. А. Наймарк, Нормированные кольца, М., «Наука», 1968.
32. В. И. Смириов, Курс высшей математики, т. III, ч. 1 и 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
33. И. фои Нейман, Математические основы кваитовой механики, М., «Наука», 1964.
34. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращения и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.
35. Э. Картан, Теория спиноров, М., ИЛ, 1947.
36. П. К. Рашевский, Римаиова геометрия и тензорный анализ, М., «Наука», 1967.
37. D. Kastler, Introduction à l'électrodynamique quantique, Paris, Dunod, 1961.
38. A. Visconti, Théorie quantique des champs (Tomes I et II), Paris, Gauthier — Villars, 1960.
39. Х. Умэдзава, Квантовая теория поля, М., ИЛ, 1958.
40. В. А. Фок, Работы по квантовой теории поля, Л., Изд. ЛГУ, 1957.
41. Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразоваиий, М., ИЛ, 1947.
42. Г. Я. Любарский, Теория групп и ее примеиеиие в физике, М., Гостехиздат, 1957.
43. М. Хамермеш, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, М., «Мир», 1966.
44. Нгуен ван Хьеу, Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц, М., Атомиздат, 1967.
45. Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М.—Л., Гостехиздат, 1947.
46. K. Friedrichs, Mathematical aspects of quantum theory of fields, New York, Interscience, 1953.
47. Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964.
48. J. Hilgevoord, Dispersion relations and causal description. An introduction to dispersion relations in field theory, Amsterdam, North-Holland, 1960.
49. Г. Бейтмеи, А. Эрдейи, Высшие трансцендеитиые функции, М., «Наука», 1966.
50. И. Т. Тодоров, Аналитические свойства диаграмм Фейнмана в квантовой теории поля, София, Изд-во Болгарской Академии наук, 1966.
51. С. Бохнер и Т. Мартин, Функции многих комплексиых переменных, М., ИЛ, 1951.

52. J. Dixmier, Les C*-Algèbres et leurs représentations, Paris, Gauthier—Villars, 1964.
53. Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования, М., «Наука», 1965.
54. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости, М., Изд-во АН СССР, 1958.
55. P. K. Kabir, The CP puzzle. Strange decays of the neutral kaon, London, New York, Academic Press, 1969.
56. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., «Наука», 1966.

II. Статьи и лекции на семинарах и школах

Используемые сокращения:

Анализ — Proceedings of a Conference on the Theory and Applications of Analysis in Function Space held at Endicott House in Dedham., Massachusetts, June 1963. Edited by W. T. Martin and I. Segal, Cambridge, Massachusetts, M. I. T. Press, 1964.

Болдер — Lectures in Theoretical Physics, Vol. VII-A Lorentz Group. Lectures delivered at the Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder, 1964, Edited by W. E. Brittin and A. O. Barut. Boulder, The University of Colorado Press, 1965.

Брандайс — Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, 1965, Vol. 1, Axiomatic field theory, New York — London — Paris, Gordon and Breach, 1966.

Дубна 64 — Международная зимняя школа теоретической физики при Объединенном институте ядерных исследований, тт. I—III, Дубна, ОИЯИ, 1964.

Дубна 67 — Труды международного совещания по нелокальной квантовой теории поля, Дубна, ОИЯИ, 1968.

Стамбул — Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, Lectures of the Istanbul Summer School of Theoretical Physics, 1962. Edited by F. Gürsey, New York — London, Gordon and Breach, 1964.

Кайаниело — Lectures on Field Theory and Many — Body Problem. Edited by E. R. Caianiello, New York — London, Academic Press, 1961.

Карпач — Axiomatic Approach to the Quantum Field Theorie and the Many — Body Problem, 5-th Annual Winter School for Theoretical Physics in Karpacz, February 18 — March 2, 1968. University of Wroclaw, Wroclaw, 1968.

Лезуш — Relations de dispersion et particules élémentaires École d'Été de Physique Théorique. Les Houches. Paris, Hermann, 1960.

Лилль — Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs, Lille (1957); Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1959.

НКТП — Нелинейная квантовая теория поля. Сборник статей под редакцией Д. Д. Иваненко, М., ИЛ, 1959.

Триест 62 — Theoretical Physics, Lectures at Trieste Seminar, 1962, Vienna, IAEA, 1963.

Триест 65 — High Energy Physics and Elementary Particles, Lectures at Trieste Seminar, 1965, Vienna, IAEA, 1965.

Ялта — Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Международная школа по теоретической физике, Ялта, 1966, Киев, «Наукова думка», 1967.

Акария (1962) (Acharya R.), Some Borchers-type theorems in quantum field theory, Nuovo Cim. **23**, 580.

Акария (1963) (Acharya R.), Some consequences of «minimal» analyticity and unitarity in field theory, Nuovo Cim. **27**, 1151.

Акс (1965) (Aks S. O.), Proof that scattering implies production in quantum field theory, J. Math. Phys. 6, 516.

Андерсен и др. (1966) (Andersen C. M., A. Böhm and A. M. Bouncristiani), Rigged Hilbert space and mathematical description of physical systems, Lectures delivered at the Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder, 1966.

Араки (1960а) (Araki H.), On asymptotic behaviour of vacuum expectation values at large space-like separation, Ann. Phys. 11, 260.

Араки (1960б) (Araki H.), Hamiltonian formalism and canonical commutation relations in quantum field theory, J. Math. Phys. 1, 492.

Араки (1961а) (Araki H.), Wightman functions, retarded functions and their analytic continuations, Suppl. Prog. Theor. Phys. 18, 83.

Араки (1961б) (Araki H.), On the connection of spin and commutation relations between different fields, J. Math. Phys. 2, 267.

Араки (1961/62) (Araki H.), Einführung in die axiomatische Quantenfeldtheorie, I, II, Lecture notes, ETH, Zürich.

Араки (1963а) (Araki H.), A generalization of Borchers theorem, Helv. Phys. Acta 36, 132.

Араки (1963б) (Araki H.), A lattice of von Neumann algebras associated with the quantum theory of a free Bose field, J. Math. Phys. 4, 1343.

Араки (1964а) (Araki H.), Von Neumann algebras of local observables for free scalar field, J. Math. Phys. 5, 1.

Араки (1964б) (Araki H.), Type of von Neumann algebra associated with free field, Prog. Theor. Phys. 32, 956.

Араки и др. (1966) (Araki H., O. W. Greenberg and J. S. Toll), Equivalence of locality and paralocality in free parafield theory, Phys. Rev. 142, 1017.

Араки и Хааг (1967) (Araki H. and R. Haag), Collision cross sections in terms of local observables, Commun. math. Phys. 4, 77.

Араки и др. (1961) (Araki H., R. Haag and B. Schroer), The determination of local or almost local field from given current, Nuovo Cim. 19, 90.

Араки и др. (1962) (Araki H., K. Hepp and D. Ruelle), On the asymptotic behaviour of Wightman functions in space-like directions, Helv. Phys. Acta 35, 164.

Арбузов Б. А. и А. Т. Филиппов (1966), О возможном механизме несохранения CP [Ялта], 597—609.

Астахов А. В., О. И. Завьялов, А. Д. Суханов (1967), Проблемы неэквивалентных представлений канонических перестановочных соотношений в квантовой теории поля. Препринт ИТФ-67-39, Киев.

Баргман (1954) (Bargmann V.), On unitary ray representations of continuous groups, Ann. of Math. 59, 1.

Баргман (1962) (Bargmann V.), On the representations of the rotation group, Rev. Mod. Phys. 34, 829.

Баргман (1964) (Bargmann V.), Note on Wigner's theorem on symmetry operations, J. Math. Phys. 5, 862.

Баргман (1967) (Bargmann V.), On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part II. A family of related function spaces. Application to distribution theory, Commun. Pure Appl. Math. 20, 1.

Баргман и Вигнер (1948) (Bargmann V. and E. P. Wigner), Group theoretical discussion of relativistic equations, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 34, 211.

Бардакси и Сударшан (1961) (Bardakci K. and E. C. G Sudarshan), Local fields with terminating expansions, Nuovo Cim. 21, 722.

Бардакси и Шроер (1966) (Bardakci K. and B. Schroer), Local approximation in renormalizable and nonrenormalizable theories, I and II, J. Math. Phys. 7, 10 and 16.
Бауман (1958) (Baumann K.), Retardierte Produkte und Bindungszustände, Zs. f. Phys. 152, 448.
Березанский Ю. М. (1966), О самосопряженности полевых операторов и интегральных представлениях функционалов типа Уайтмана, УМЖ 18, № 3, 3.
Биленький С. (1966), О возможном методе проверки CPT-инвариантности в $\bar{p}$-p-рассеянии, Письма ЖЭТФ 3, 118.
Блохинцев Д. И. и Г. И. Колеров (1964), A causality and dispersion relations, Nuovo Cim. 34, 163.
Боголюбов Н. Н. (1952), Уравнения в вариациях квантовой теории поля, ДАН СССР, 82, 217.
Боголюбов Н. Н. (1955), Условие причнинности в квантовой теории поля (Доклад на сессии Отделения физико-математических наук АН СССР 14, IV, 1954), Известия АН СССР, сер. физическая 19, 237.
Боголюбов Н. Н. (1956), Доклад на международном конгрессе по теоретической физике в Сиатле (сентябрь 1956, не опубликовано).
Боголюбов Н. Н. (1958). Über die Verwendung von Variationsableitungen bei Problemen der statistischen Physik und der Quantentheorie der Felder, Fortschr. Phys. 6, 426.
Боголюбов Н. Н. (1966), Теория симметрии элементарных частнц [Ялта], 5—112.
Боголюбов Н. Н. и В. С. Владимиров (1958), Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций, Научные доклады высшей школы, № 3, 26 (см. также № 2 (1959) 179).
Боголюбов и др. (1959) (Боголюбов Н. Н., А. А. Логунов и Д. В. Ширков), Метод дисперсионных соотношений и теория возмущений, ЖЭТФ 37, 805.
Боголюбов Н. Н. и О. А. Парасюк (1957) (Bogoliubov N. N. und O. A. Parasiuk), Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder, Acta Mathematica 97, 227.
Боголюбов Н. Н. и Д. В. Ширков (1955), Вопросы квантовой теории поля, УФН 55, 149.
Бойс и др. (1967) (Boyce J. F., R. Delbourgo, A. Salam and J. Strathdee), Partial wave analysis (part I) Trieste, Preprint IC/67/9.
Бор и Розенфельд (1933) (Bohr N. and L. Rosenfeld), Zur Frage der Messbarkeit der electromagnetischen Feldgrössen, Dan. Mat. Fys. Medd. 12, № 8.
Бор и Розенфельд (1950) (Bohr N. and L. Rosenfeld); Field and charge measurements in quantum electrodynamics, Phys. Rev. 78, 794.
Борхерс (1960) (Borchers H. J.), Über die Mannigfaltigkeit der interpolierenden Felder zu einer kausalen S-Martrix, Nuovo Cim. 15, 784.
Борхерс (1961) (Borchers H. J.). Über die Vollstandigkeit Lorentz—invarianter Felder zu einer zeitartigen Röhre, Nuovo Cim. 19, 787.
Борхерс (1962) (Borchers H. J.), On structure of the algebra of field operators, Nuovo Cim. 24, 214.
Борхерс (1965а) (Borchers H. J.), On the structure of the algebra of field operators, Commun. math. Phys. 1, 49.
Борхерс (1965б) (Borchers H. J.), On the vacuum state in quantum field theory, Commun. math. Phys. 1, 57.
Борхерс (1966) (Borchers H. J.), Energy and momentum as observables in quantum field theory, Commun. math. Phys. 2, 49.
Борхерс и др. (1963) (Borchers H. J., R. Haag and B. Schroer), The vacuum state in quantum field theory, Nuovo Cim. 29, 148.

Борхерс и Циммерман (1964) (Borchers H. J. and W. Zimmermann), On the self-adjointness of field operators, Nuovo Cim. **31**, 1047.
Брениг и Хааг (1959) (Brenig W. and R. Haag), Allgemeine Quantentheorie der Stossprozesse, Fortschr. Phys. **7**, 183.
Брос (1965) (Bros J.), Axiomatic field theory [Триест], 85—120.
Брос и др. (1964) (Bros J., H. Epstein and V. Glaser), Some rigorous analyticity properties of the four-point function in momentum space, Nuovo Cim. **31**, 1265.
Брос и др. (1967) (Bros J., H. Epstein and V. Glaser), On the connection between analyticity and Lorentz covariance of Wightman functions, Commun. math. Phys. **6**, 77.
Брюа (1956) (Bruhat F.), Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. de France **89**, 97.
Бургоин (1958) (Burgoyne N.), On the connection of spin with statistics, Nuovo Cim. **8**, 607.
Бялыницки-Бируля (1963) (Bialynicki-Birula J.), Elementary particles and generalized statistics, Nucl. Phys. **49**, 605.
Вайдлих (1963) (Weidlich W.), On the inequivalent representations of canonical commutation relations in quantum field theory, Nuovo Cim. **30**, 803.
Вайнберг (1964а) (Weinberg S.), Feynman rules for any spin, Phys. Rev. **133B**, 1318.
Вайнберг (1964б) (Weinberg S.), Feynman rules for any spin, II. Massless particles, Phys. Rev. **134B**, 882.
Вигнер (1939) (Wigner E. P.), On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, Ann. of Math. **40**, 149.
Вигнер (1950) (Wigner E. P.), Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations? Phys. Rev. **77**, 711.
Вигнер (1956) (Wigner E. P.), Relativistic invariance in quantum mechanics, Nuovo Cim. **3**, 517.
Вигнер (1960а) (Wigner E. P.), Normal form of antiunitary operators, J. Math. Phys. **1**, 409.
Вигнер (1960б) (Wigner E. P.), Phenomenological distinction between unitary and antiunitary symmetry operators, J. Math. Phys. **1**, 414.
Вигнер (1962а) (Wigner E. P.), Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group including reflections [Стамбул], 37—80.
Вигнер (1962б) (Wigner E. P.), Invariant quantum mechanical equations of motion [Триест 62], 59—82.
Визимирски (1966) (Wizimírski Z.), On the existence of the field of operators in the axiomatic quantum field theory, Bull. de l'Acad. Polon. Sci., Série des sciences math. astr. et phys. **14**, 91.
Вик (1962) (Wick G. C.), Angular momentum states for three relativistic particles, Ann. Phys. **18**, 65.
Вик (1966) (Wick G. C.), Discrete symmetries problems [Ялта], 227—236.
Вик и др. (1952) (Wick G. C., A. S. Wightman and E. P. Wigner), The intrinsic parity of elementary particles, Phys. Rev. **88**, 101.
Виноградски (1957) (Winogradzki J.), Spineurs du second rang à composantes invariantes et formalisme spinoriel incluant les parities. J. Phys. Rad. **18**, 387.
Виноградски (1958) (Winogradzki J.), La représentation spinorielle du groupe de Lorentz général, Cahiers de Physique **12**, 261.
Виноградски (1959) (Winogradzki J.), Sur la conjugaison de charge et deux transformations analogues, Comptes rendus, Paris **248**, 1480.
Владимиров В. С. (1960), О построении оболочек голоморфности для областей специального вида, ДАН СССР, **134**, 251.
Волков Д. В. (1959), О квантовании полей с полуцелым спином, ЖЭТФ **36**, 1560.

Волков Д. В. (1960), S-матрица в обобщенном методе квантования, ЖЭТФ 38, 518.

Гайзенберг (1943) (Heisenberg W.), Die «Beobachtbaren Grossen» in der Theorie der Elementarteilchen, Zs. f. Phys. **120**, 513.

Галиндо и Индурен (1963) (Galindo A. and F. J. Yndurain), On parastatistics, Nuovo Cim. **30**, 1040.

Гачок В. П. (1961), Одно обобщение теоремы Хаара, УМЖ **13**, 22.

Гачок В. П. (1965), О проблеме моментов в квантовой теории поля, ДАН СССР **165**, 506.

Гачок В. П. (1966а) (Gachok V. P.), Quasi-analytic functionals and self-adjointness of field operators, Nuovo Cim. **45**, 158.

Гачок В. П. (1966б) (Gachok V. P.), A description of all self-adjoint extensions of the field operators, Препринт ИТФ-66-5, Киев.

Гельфанд И. М. и А. Г. Костюченко (1955), О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов, ДАН СССР **103**, 349.

Гельфанд И. М. и Г. Е. Шилов (1953), Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, УМН 8, № 6, 3.

Гельфанд И. М. и А. М. Яглом (1948), Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца, ЖЭТФ **18**, 703.

Генен (1966а) (Guenin M.), On the interaction picture, Commun. math. Phys. **3**, 120.

Генен (1966б) (Guenin M.), Lectures in Theoretical Physics, vol. IX-A. Lectures delivered at the Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder, 1966. Edited by A. O. Barut, W. E. Brittin and M. Guenin, Boulder, The University of Colorado Press.

Генен (1968) (Guenin M.), Practical use of algebraic concepts in quantum field theory [Карпач].

Генен и Мисра (1963) (Guenin M. and Misra B.), On the von Neumann algebras generated by field operators, Nuovo Cim. **30**, 1272.

Гийо и Пети (1966) (Guillot J. C. et J. L. Petit), Nouvelles formes des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré I, II, Helv. Phys. Acta **39**, 281 et 308.

Глазер и др. (1957) (Glaser V., H. Lehmann and W. Zimmermann), Field operators and retarded functions, Nuovo Cim. **6**, 1122.

Говорков А. Б. (1966а), Замечание о пара- и суперстатистиках [Ялта], 770—777.

Говорков А. Б. (1966б), Note on the parastatistics, Preprint JINR E2-3003, Dubna.

Говорков А. Б. (1967), О возможности параполевого представления внутренних степеней свободы типа изоспина и странности, Препринт ОИЯИ Р4-3602, Дубна.

Гординг (1944) (Gårding L.), On a class of linear transformations connected with group representations, Medd. Lunds. Mat. Sem. **6**.

Гординг и Лион (1959) (Gårding L. and Lions J. L.), Functional Analysis, Suppl. Nuovo Cim. **14**, 9.

Горже (1966) (Gorgé V.), Lorentz-invariant distributions, Syracuse University, Preprint SU-66-03.

Граверт и др. (1959) (Grawert G., G. Lüders and H. Rollnik), The TCP theorem and its applications, Fortschr. Phys. **7**, 291 (см. русский перевод в УФН **71** (1960), 289).

Грин (1953) (Green H. S.), A generalized method of field quantization, Phys. Rev. **90**, 270.

Гринберг (1959) (Greenberg O. W.), Haag's theorem and closed operators, Phys. Rev. 115, 606.

Гринберг (1961) (Greenberg O. W.), Generalized free fields and models of local field theory, Ann. of Phys. 16, 158.

Гринберг (1962) (Greenberg O. W.), Heisenberg fields which vanish on domains of momentum space, J. Math. Phys. 3, 859.

Гринберг (1964) (Greenberg O. W.), Coupling of internal and space-time symmetries, Phys. Rev. 135B, 1447.

Гринберг (1965) (Greenberg O. W.), Parafield theory, Report at the Conference on Mathematical Physics held at Endicott House in Dedham, Massachusetts.

Гринберг и Лихт (1963) (Greenberg O. W. and A. L. Licht), Quantum field-theory model whose truncated vacuum expectation values vanish beyond some order, J. Math. Phys. 4, 613

Гринберг и Мессиа (1965) (Greenberg O. W. and A. M. L. Messiah), Selection rules parafields and the absence of paraparticles in nature, Phys. Rev. 138B, 1155.

Гроссман (1965) (Grossmann A.), Hilbert space of type S., J. Math. Phys. 6, 54.

Гроссман (1966) (Grossmann A.), Elementary properties of nested Hilbert spaces, Commun. math. Phys. 21, 1.

Гроссман (1967) (Grossman A.), Fields at a point, Commun. math. Phys. 4, 203.

Гротендик (1955) (Grothendick A.), Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs of the American math. Society, № 16.

Гуд (1955) (Good R. H., Jr.), Properties of the Dirac matrices, Rev. Mod. Phys. 27, 187.

Гурден (1967) (Gourdin M.), TCP invariance, time-reversal invariance, and K-meson decay, Lectures given at III[d] Tokyo Summer Institute, September 1967, Preprint ORSAY.

Гюрсей (1963), Гюршн Ф., Введенне в теорию групп, В сб. «Теория групп и элементарные частицы» под ред. Д. Д. Иваненко, М., «Мир», 1967, 25—113.
(F. Gürsey, «Relativity, Groups and Topology», N. 4—L., De Witt, 1964).

Дайсон (1958a) (Dyson F. J.), On the connection of weak local commutativity and regularity of Wightman functions, Phys. Rev. 110, 579.

Дайсон (1958б) (Dyson F. J.), Integral representations of causal commutators, Phys. Rev. 110, 1460.

Дел' Антонио (1967) (Dell' Antonio G. F.), Support of a field in p-space, J. Math. Phys. 2, 759.

Дел' Антонио (1961б) (Dell' Antonio G. F.), On the connection between spin and statistics, Ann. of Phys. 16, 153.

Дел' Антонио (1967) (Dell' Antonio G. F.), Structure of the algebras of some free systems, Instituto di Fisica Teorica, Università di Napoli, Preprint.

Дел' Антонио и др. (1962) (Dell' Antonio G. F., O. W. Greenberg and E. C. G. Sudarshan), Parastatistics: axiomatic formulation connection with spin and statistics and TCP theorem for a general field theory, [Стамбул], 403—407.

Джакоб и Вик (1959) (Jacob M. and G. C. Wick), On the general theory of collisions for particles with spin, Ann. Phys. 7, 404.

Джафе (1965) (Jaffe A.), On the approximation of quantum field theories, J. Math. Phys. 6, 1172.

Джафе (1967) (Jaffe A.), High energy behaviour in quantum field theory, I. Strictly localizable fields Phys, Rev. 158, 1454.

Джафе и Пауерс (1967) (Jaffe A. and R. Powers), Infinite volume limit of a $\lambda\varphi^4$ field theory, University of Pennsylvania, Preprint.

Доплихер (1965) (Doplicher S.), An algebraic spectrum condition, Commun. math. Phys. **1**, 1.

Ефимов (1968) (Efimov G. V.), On a class of relativistic invariant distributions, Commun. math. Phys. **7**, 138.

Инграхам (1962) (Ingraham R. L.), Relativistic invariance and the tacit uniqueness postulate in quantum field theory, Nuovo Cim. **26**, 328.

Йосс (1962) (Joos H.), Zur Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe als Grundlage quantenmechanischer Kinematik, Fortschr. Phys. **10**, 65.

Йосс (1964) (Joos H.), Complex angular momentum and the representations of the Poincaré group with space-like momentum [Болдер], 132—138.

Иордан и Сударшан (1962) (Jordan Th. F. and E. C. G. Sudarshan), Reduction of operator rings and the irreducibility axiom in quantum field theory, J. Math. Phys. **3**, 587.

Иост (1957) (Jost R.), Eine Bemerkung zum CTP-Theorem, Helv. Phys. Acta **30**, 409.

Иост (1959) (Jost R.), Принцип Паули и группа Лоренца, В сб. «Теоретическая физика 20 века», М., ИЛ, 1962, 128—161.

Иост (1960) (Jost R.), Die Normalform einer komplexen Lorentztransformation, Helv. Phys. Acta **33**, 773.

Иост (1961) (Jost R.), Properties of Wightman functions [Кайаниело], 127—145.

Иост (1963) (Jost R.), TCP-Invarianz der Streumatrix und interpolierende Felder, Helv. Phys. Acta **36**, 77.

Иост (1966) (Jost R.), Über das zeitliche Verhalten von glatten Lösungen der Klein-Gordon Gleichung, Helv. Phys. Acta **39**, 21.

Иост и Леман (1957) (Jost R. and H. Lehmann), Integral representation of causal commutators, Nuovo Cim. **5**, 1598.

Иост и Хепп (1962) (Jost R. and K. Hepp), Über die Matrixelemente des Translationsoperators, Helv. Phys. Acta **35**, 34.

Кадисон (1963) (Kadison R.), Types of von Neumann algebras in quantum field theory, J. Math. Phys. **4**, 1511.

Кадышевский В. Г. и Тодоров И. Т. (1966), Группа симметрии $ISL(6)$; представления и инварианты. Ядерная физика **3**, 135.

Камефучи и Умэдзава (1951) (Kamefuchi S. and H. Umezawa), The vacuum in quantum electrodynamics, Prog. Theor. Phys. **6**, 543.

Камефучи и Такахаши (1962) (Kamefuchi S. and Y. Takahashi), A generalization of field quantization and statistics, Nucl. Phys. **36**, 177.

Камефучи и Стратди (1963) (Kamefuchi S. and J. Strathdee), A generalization of field quantization and statistics (II), Interacting fields, Nucl. Phys. **42**, 166.

Камефучи и др. (1961) (Kamefuchi S., L. O'Raifeartaigh, A. Salam), Change of variables and equivalence theorems in quantum field theories, Nucl. Phys. **28**, 529.

Кастлер (1963) (Kastler D.), A C*-algebra approach to field theory [Анализ], 179—191.

Кастлер (1965) (Kastler D.), The C*-algebras of a free boson field, I. Discussion of the basic facts, Commun. math. Phys. **1**, 14.

Кац Г. И. (1960), Обобщенные элементы гильбертова пространства, УМЖ **12**, 13.

Кашлуи (1959) (Kaschluhn F.), On the asymptotic and causality conditions in quantum field theory, Nuovo Cim. **12**, 541.

Кашлун (1960) (Kaschluhn F.), On the asymptotic and causality conditions in quantum field theory, II. Nuovo Cim. 17, 609.

Кимелсен (1966) (Kimelsen C. O.), On unique supports of analytic functionals, Ark. f. Mat. 6, 307.

Клейн (1938) (Klein O.), Quelques remarques sur le traitement spproximstif du problème des électrons dans im réseau cristallin par la mécanique quantique, J. Phys. Rad. 9, 1.

Кристенсен и др. (1965) (Kristensen P., L. Mejlbo and E. T. Poulsen), Tempered distributions in infinitely many dimensions, I. Canonical field operators, Commun. msth. Phys. 1, 175.

Лангерхолк и Шроер (1965) (Langerholc J. and B. Schroer), On the structure of the von Neumann algebras generated by local functions of the free Bose field, Commun. math. Phys. 1, 215.

Лангерхолк и Шроер (1967) (Langerholc J. and B. Schroer), Can current operators determine a complete theory? Commun. math. Phys. 4, 123.

Ласнер и Ульман (1967) (Lassner G. and A. Uhlmann), Faithful representations of algebras of test functions, Preprint JINR E-2-3583, Dubna.

Леви-Леблон (1963) (Levy-Leblond J. M.), Galilei group and nonrelativistic quantum mechanics, J. Math. Phys. 4, 776.

Леман (1954) (Lehmann H.), Properties of propagation functions and renormalization constants of quantized fields, Nuovo Cim. 11, 342.

Леман и др. (1955) (Lehmann H., K. Symanzik and W. Zimmermann), Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien, Nuovo Cim. 1, 205.

Леман и др. (1957) (Lehmann H., K. Symanzik and W. Zimmermsnn), The formulation of quantized field theories, II, Nuovo Cim. 6, 319.

Ли (1965) (Lee T. D.), Weak interactions and questions of C, P, T-noninvariances. В сб.: Oxford International Conference on Elementary Particles, September 1965, Proceedings. Rutherford High Energy Laboratory, 1966, 225.

Ли (1966) (Lee T. D.), Time reversal symmetry, Physikertagung, 1966, München Dtsch. und Österr. Phys. Ges. Plenarvortr., Teil 2, Stuttgart, 1967, 243—261.

Ли и др. (1957) (Lee T. D., R. Oehme and C. N. Yang), Remarks on possible noninvsriance under time reverssl and chsrge conjugation. Phys. Rev. 106, 340 (см. перевод в сб. «Новые свойства симметрии элеменатарных частиц», ИЛ, 1957).

Ли и Вик (1966) (Lee T. D. and G. C. Wick), Space inversion, time reversal and discrete simmetries in local field theories, Phys. Rev. 148, 1520.

Лион (1952—1953) (Lions J. L.), Supports dans la transformation de Laplace, J. Analyse Math. 2, 369.

Липшутц (1966) (Lipshutz N. R.), Invariance principles and the $K^0-\overline{K^0}$ propagator matrix, Phys. Rev. 144, 1300.

Лихт (1963) (Licht A. L.), Strict localization, J. Math. Phys. 4, 1443.

Лихт и Тол (1961) (Licht A. I. and J. S. Toll), Two-point function and generalized free fields, Nuovo Cim. 21, 346.

Логунов А. А. и Нгуен ван Хьеу (1964), Общие принципы квантовой теории поля и их экспериментальные следствия [Дубна 64], т. II, 38—65.

Логунов А. А., Нгуен ван Хьеу и И. Т. Тодоров (1966), Асимптотические соотношения между амплитудами рассеяния в локальной теории поля, УФН 88, 51.

Ломонт (1960) (Lomont J. S.), Decomposition of direct products of representations of the inhomogeneous Lorentz group, J. Math. Phys. 1, 237.

Лопушаньский (1965) (Lopuszanski J. T.). On the unitary inequivalent representations in the quantum field theory and the many body problem, Acta Phys. Hung. **19**, 29.

Людерс (1954) (Lüders G.), On the equivalence of invariance under time reversal and under particle-antiparticle conjugation for relativistic field theories, Dan. Mat. Fys. Medd. **28**, 5.

Людерс (1957) (Lüders G.), Proof of the TCP theorem, Ann. Phys. **2**, 1.

Людерс (1961) (Lüders G.), TCP theorem and related problem [Кайаниело], 1—26.

Людерс и Зумино (1958) (Lüders G. and B. Zumino), Connection between spin and statistics, Phys. Rev. **110**, 1450.

Майорана (1937) (Majorana E.), Nuovo Cim. **14**, 171.

Маки (1952) (Mackey G. W.), Induced representations of locally compact groups I, Ann. of Math. **55**, 101.

Мальгранж (1953) (Malgrange B.), Equations aux dérivées partielles à coefficients constants, I. Solution élémentaire, Comptes rendus, Paris **237**, 1620.

Мандельстам (1958) (Mandelstam S.), Determination of pion-nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. General theory, Phys. Rev. **112**, 1344 (см. русский перевод в сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий, Двойные дисперсионные соотношения», М., ИЛ, 1960).

Манохаран (1962) (Manoharan A. C.), The primitive domain of holomorphy for the 4 and 5 point Wightman functions, J. Math. Phys. **3**, 853.

Мартино (1963) (Martineau A.), Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier — Borel, J. d'Analyse Math. **11**, 1.

Мартэн (1966) (Martin A.), Inability of field theory to exploit the full unitarity condition, Geneva, Preprint TH. 727.

Медведев Б. В. (1961), О функциональном разложении матрицы рассеяния по нормальным произведениям асимптотических полей, ЖЭТФ **40**, 826.

Медведев Б. В. и М. К. Поливанов (1961), Степени роста матричных элементов в аксиоматическом методе, ЖЭТФ **41**, 1130.

Медведев Б. В. и М. К. Поливанов (1964), К аксиоматическому построению матрицы рассеяния [Дубна 64], т. I, 77—139.

Медведев Б. В. и М. К. Поливанов (1967а), О формулировке адиабатической гипотезы в аксиоматической теории поля, Препринт ИТФ-67-24, Киев.

Медведев Б. В. и М. К. Поливанов (1967б), Модель взаимодействия с производными, допускающая точное решение, Препринт ИТФ-67-25, Киев.

Медведев Б. В., М. К. Поливанов и А. Д. Суханов (1967а), Перенормировка поля в аксиоматической квантовой теории, Препринт ИТФ-67-28, Киев.

Медведев Б. В., М. К. Поливанов и А. Д. Суханов (1967б), Модель взаимодействия с производными. Проблема унитарности и нормальная форма решения, Препринт ИТФ-67-26, Киев.

Медведев Б. В., М. К. Поливанов и А. Д. Суханов (1967в), Проблемы динамического аппарата квантовой теории поля в аксиоматическом методе, Препринт ИТФ-67-27, Киев.

Медведев Б. В., М. К. Поливанов и А. Д. Суханов (1967г), Спектральные представления и перенормировка поля, Препринт ИТФ-67-29, Киев.

Медведев Б. В., М. К. Поливанов и А. Д. Суханов (1967д), Условие причинности и соотношение между аксиоматиками Боголюбова и Лемана — Шиманчика — Циммермана, Препринт ИТФ-67-38, Киев.

Симанзик (1966) (Symanzik K.), Euclidean quantum field theory, I. Equations for a scalar model, J. Math. Phys. 7, 510.

Соболев С. Л. (1936), Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Матем. сб. № 1 (43), 39.

Стоун (1951—1952) (Stone M. H.), On unbounded operators in Hilbert space, J. Indian Math. Soc. 15, 155.

Стоянов Д. Ц. и И. Т. Тодоров (1968) (Stoyanov D. Tz. and I. T. Todorov), Majorana representations of the Lorentz group and infinite-component fields, J. Math. Phys. 9, 2146.

Стритер (1964) (Streater R. F.), Almost local field theories of the S-matrix, Phys. Rev. 136B, 1748.

Стритер (1967) (Streater R. F.), Uniqueness of the Haag-Ruelle scattering states, J. Math. Phys. 8, 1685.

Суханов А. Д. (1965), Уравнение движения для «половинной» S-матрицы и его следствия, ЖЭТФ 49, 1812.

Суханов А. Д. (1966), «Квазилокальные» гайзенберговы операторы и проблема перенормируемости в квантовой теории поля, ЖЭТФ 51, 1195.

Тагамлицкий Я. (1954—1956), Дополнение конусов и приложение к задаче обобщения функций, I, II, III. Гос. Соф. унив., физ.-мат. фак. 49, кн. I (1954—1955), ч. I, 24, ч. II, 41; 50 кн. I (1955—1956), ч. 1, 135.

Тирринг (1958) (Thirring W.), On interacting spinor fields in one dimension, Nuovo Cim. 9, 1007.

Тодоров И. (1964), Аксиоматический подход в квантовой теории поля [Дубна 64], 5—76 (см. также немецкий перевод в Fortschr. Phys. 13 (1965) 649); см. еще Todorov I., On some recent achievements in the axiomatic approach to quantum field theory, Acta Phys. Hung. 19 (1965), 199.

Уайтман (1956) (Wightman A. S.), Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, Phys. Rev. 101, 860.

Уайтман (1957) (Wightman A. S.), Quelques problèmes mathématiques de la théorie quantique relativiste [Лилль], 1—38.

Уайтман и Барут (1959) (Wightman A. S.), Relativistic invariance and quantum mechanics, Notes by A. Barut, Nuovo Cim. Suppl. 14, 81.

Уайтман (1960а) (Wightman A. S.), Quantum field theory and analytic functions of several complex variables, J. Indian Math. Soc. 24, 625.

Уайтман (1960б) (Wightman A. S.), L'invariance dans la mécanique quantique relativiste [Лезуш], 159—226.

Уайтман (1960в) (Wightman A. S.), Analytic functions of several complex variables [Лезуш], 227—315.

Уайтман (1962) (Wightman A. S.), Recent achievements of axiomatic field theory, Lecture at Trieste Seminar., [Триест 62], 11—58.

Уайтман (1964а) (Wightman A. S.), La théorie quantique locale et la théorie quantique des champs, Ann. Inst. Henri Poincaré, Sér. A 1, 403.

Уайтман (1964б) (Wightman A. S.), Introduction to some aspects of relativistic dynamics of quantum fields, Lectures at Cargese, Corsica (см. русский перевод «Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей», М., «Наука», 1968).

Уайтман (1967) (Wightman A. S.), Progress in the foundations of quantum field theory, Proceedings of the International Theoretical Physics, Conference on «Particles and Fields» (Rochester, 1967).

Уайтман и Гординг (1964) (Wightman A. S. and L. Gording), Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum field theory, Ark. f. Fys. 28, 129.

Ульман (1961) (Uhlmann A.), Spectral integral for the representation of the space-time translation group in relativistic quantum theory, Ann. Phys. **13**, 453.

Ульман (1962) (Uhlmann A.), Über die Definition der Quantenfelder nach Wightman and Haag, Wiss. Zeits. Karl Marx-Univ. **11**, 213.

Фабри и др. (1967) (Farbi E., L. E. Picasso, F. Stroochi), Broken symmetries in quantum field theory, Nuovo Cim. **48A**, 376.

Файнберг В. Я. (1961), Об условиях причинности в квантовой теории поля, ЖЭТФ **40**, 1758.

Файнберг В. Я. (1964), Уравнения квантовой теории поля в аксиоматическом подходе [Дубна 64], т. I, 140—170.

Файнберг и Вайнберг (1959) (Feinberg G. and S. Weinberg), On the phase factors in inversion, Nuovo Cim. **14**, 571.

Федербуш и Джонсон (1960) (Federbush P. G., K. A. Johnson), The Uniqueness of the two-point function, Phys. Rev. **120**, 1926.

Фел (1960) (Fell J. M. G.), The dual spaces of C^*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **94**, 365.

Фешбах и Томлянович (1967) (Feshbach H. and N. Tomljanovich), Selection rules for parafields, Mass. Inst. of Technology, Cambridge, Massachusetts.

Фирц (1939) (Fierz M.), Über die relativistische Theorie kraftfreier Teilchen mit beliebigen Spin, Helv. Phys. Acta **12**, 13.

Фирц и Паули (1939) (Fierz M. and W. Pauli), On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field, Proc. Roy. Soc. **A173**, 211.

Фишер и Роичка (1966) (Fischer J. and R. Rączka), Infinite-dimensional irreducible representations of Lie algebras of compact unitary groups, Trieste, preprint IC/66/101.

Фок (1932) (Fock V.), Konfigurationsraum und zweite Quantelung, Zs. f. Phys. **75**, 622 (см. также русский перевод в сб. В. А. Фок, работы по квантовой теории поля, Л., Изд. ЛГУ, 1957, 25—51).

фон Нейман (1931) (von Neumann J.), Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, Math Ann. **104**, 570.

Франк (1962) (Frank W M.), Convergence of perturbation expansions in cutoff meson theories, J. Math. Phys. **3**, 936.

Фрид (1962) (Fried H. M.), Axiomatic perturbation theory for retarded functions, J. Math. Phys. **3**, 1107.

Фруасар и Тейлор (1967) (Froissart M. and J. R. Taylor), Cluster decomposition and the spin and statistics, Phys. Rev. **153**, 600.

Хааг (1955) (Haag R.), On quantum field theories, Dan. Mat. Fys. Medd. **29**, № 12, 55.

Хааг (1957) (Haag R.), Discussion des «axiomes» et des propriétés asymptotiques d'une théorie des champs locales avec patricules composées [Лилль], 151—162 (см. русский перевод в сб. «Математика» **6**:**4** (1962), 134).

Хааг (1958) (Haag R.), Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions, Phys. Rev. **112**, 669.

Хааг (1959) (Haag R.), The framework of quantum field theory, Nuovo Cim Suppl. **14**, 131.

Хааг (1962) (Haag R.), The mathematical structure of the Bardeen — Cooper — Schrieffer model, Nuovo Cim. **25**. 287.

Хааг (1963) (Haag R.), Remarks on the mathematical structure of quantum field theory [Анализ], 192—196.

Хааг и Кастлер (1964) (Haag R. and D. Kastler), An algebraic approach to quantum field theory, J. Math. Phys. **5**, 848.

Хааг и Свиека (1965) (Haag R. and J. A. Swieca), When does a quantum field theory describe particles? Commun. math. Phys. **1**, 308.

Хааг и Шроер (1962) (Haag R. and B. Schroer), Postulates of quantum field theory, J. Math. Phys. 3, 248.

Хагедорн (1959) (Hagedorn R.), Note on symmetry operators in quantum mechanics, Nuovo Cim. Suppl. **12**, 73.

Харатян С. Г. (1968), Коммутативность правил суперотбора и полный набор наблюдаемых, ДАН СССР, **180**, 564.

Харатян С. Г. и Оксак А. И. (1968) (Kharatian S. G. and A. I. Oksak). On the hypothesis of commutative superselection rules, Preprint JINR, E2-3799, Dubna.

Хариш-Чандра (1947) (Harish-Chandra), On relativistic wave equations, Phys. Rev. **71**, 793.

Хепп и др. (1961) (Hepp K., R. Jost, D. Ruelle and O. Steinmann), Necessary condition on Wightman functions, Helv. Phys. Acta 34, 542.

Хепп (1963а) (Hepp K.), Lorentz-kovariante analytische Funktionen, Helv. Phys. Acta **36**, 355.

Хепп (1963б) (Hepp K.), On the asymptotic condition in a local relativistic quantum field theory, Acta Phys. Austrica **17**, 85.

Хепп (1964а) (Hepp K.), Spatial cluster decomposition properties of the S-matrix, Helv. Phys. Acta 37, 659.

Хепп (1964б) (Hepp K.), Lorentz invariant analytic S-matrix amplitudes, Helv. Phys. Acta 37, 55.

Хепп (1965а) (Hepp K.), On the connection between the LSZ and Wightman quantum field theory, Commun. math. Phys. **1**, 95.

Хепп (1965б) (Hepp K.), On the connection between Wightman and LSZ quantum field theory [Брандайс], 135—246.

Хепп (1965в) (Hepp K.), One-particle singularities of the S-matrix in quantum field theory, J. Math. Phys. **6**, 1762.

Хепп (1966) (Hepp K.), Proof of the Bogoliubov — Parasiuk theorem on renormalization, Commun. Math. Phys. **2**, 301.

Хепп (1967) (Hepp K.), Fundamental theoretical questions, Report at the Heidelberg Conference on Elementary Particles.

Хермандер (1958) (Hörmander L.), On the division of distributions by polinomials, Arkiv mat. **3**, 555 (см. русский перевод в сб. «Математика» 3 : 5 (1959), 117).

Холл и Уайтман (1957) (Hall D. and A. S. Wightman), A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory, Dan. Mat. Fys. Medd. **31**, № 5.

Хоружий С. С. (1967), К построению аксиоматической теории неперенормируемых взаимодействий, I. Неперенормируемые поля как аналитические функционалы, Препринт Р2-3085, II. Существование матрицы рассеяния, Препринт Р2-3086, Дубна.

Циммерман (1954) (Zimmerman W.), Über den Zusammenhang von Bethe-Salpetergleichung und Tamm-Dancoffmethode, Nuovo Cim. Suppl. **11**, 43.

Циммерман (1958) (Zimmermann W.), On the bound state problem in quantum field theory, Nuovo Cim. **10**, 597.

Челлен (1950) (Källén G.), Formal integration of the equations of quantum theory in the Heisenberg representation, Arkiv f. Phys. **2**, 371.

Челлен (1952) (Källén G.), On the defintition of renormalization constants in quantum electrodynamics, Helv. Phys. Acta 25, 417.

Челлен (1960) (Källén G.), Properties of the vacuum expectation values of field operators [Лезуш], 387—454.

Челлен (1968) (Källén G.), Gradient terms in commutators of currents and fields [Karpacz].

Челлен и Толл (1960) (Källén G. and J. Toll), Integral representations for the vacuum expectation of three scalar local fields, Helv. Phys. Acta **33**, 753.

Челлен и Уайтман (1958) (Källén G. and A. S. Wightman), The analytic properties of the vacuum expectation value of a product of three scalar local fields, Mat. fys. Skr. Kgl. Danske Wid. Selskab. **1**, № 6.

Чень (1967) (Chen T. W., F. Rohrlich and M. Wilner), Role of causality in quantum field theory and the dynamical postulate, J. Math. Phys. **7**, 1365.

Чень (1967) (Chen T. W.), Asymptotic quantum field theory, Ann. Phys. **42**, 476.

Черников Н. А. (1962) (Chernikov N. A.), The Fock representation of the Duffin — Kemmer algebra, Acta Phys. Polon. **21**, 51.

Чжоу Гуан Чжао и М. И. Широков (1958), Релятивисткая теория реакций с поляризованными частицами, ЖЭТФ **34**, 1230.

Шварц (1945) (Schwartz L.), Généralization de la motion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques, Annales de l'Université de Grenoble **21**, 57.

Шварц (1952) (Schwartz L.), Théorie des noyaux, Proceedings of the international congress of mathematicians **1**, 220 (см. русский перевод в сб. «Математика» 3 : 3 (1959), 69—79).

Шварц (1953/54) (Schwartz L.), Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Séminaire de l'Institut Henri Poincaré.

Шварц (1954) (Schwartz L.), Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions, Comptes Rendus, Paris, **239**, 847.

Швингер (1951) (Schwinger J.), On the theory of quantized fields, I, Phys. Rev. **82**, 914 (см. русский перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», М., ИЛ, 1954, 115).

Широков М. И. (1961), Релятивистская общая теория реакций типа $a+b \to c+d+e\ldots$, ЖЭТФ **40**, 1387.

Широков М. И. (1962), Проверка PC и PCT-инвариантностей в процессах распада, УФН **78**, 471.

Широков Ю. М. (1957—1959), Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики, I. Общие свойства неоднородной группы Лоренца, ЖЭТФ **33** (1957), 861; II. Классификация неприводимых представлений неоднородной группы Лоренца, ЖЭТФ **33** (1957), 1196; III. Неприводимые представления классов P_0 и O_0 и не вполне приводимые представления неоднородной группы Лоренца, ЖЭТФ **33** (1957), 1208; IV. Пространственные отражения в квантовой теории, ЖЭТФ **34** (1958), 717; V. Неприводимые представления неоднородной группы Лоренца, включающие отражения в пространстве и во времени, ЖЭТФ **36** (1959), 879.

Широков Ю. М. (1960а) (Shirokov Yu. M.), Space and time reflections in relativistic theory, Nuclear Phys. **15**, 1.

Широков Ю. М. (1960б) (Shirokov Yu. M.), Types of symmetry of elementary particles, Nuclear Phys. **15**, 13.

Шмидт и Бауман (1956) (Schmidt W. und K. Baumann), Quantentheorie der Felder als Distributionstheorie, Nuovo Cim. **4**, 860.

Штейнман (1960) (Steinmann O.), Über den Zusammenhang zwischen Wightmanfunktionen und retardierten Kommutatoren, I und II, Helv. Phys. Acta **33**, 257 und 347.

Штейнман (1963а) (Steinmann O.), Zur Definition der retardierten und zeitgeordneten Produkte, Helv. Phys. Acta **36**, 90.

Штейнман (1963б) (Steinmann O.), Structure of the two point functions, J. Math. Phys. **4**, 583.

Штюкельберг и Ривье (1950) (Stueckelberg E. C. G. et D. Rivier), Causalité et structure de la Matrice S, Helv. Phys. Acta **23**, 215.
Штюкельберг (1951) (Stueckelberg E. C. G.), Relativistic quantum theory for finite time intervals, Phys. Rev. **81**, 130.
Штюкельберг и Петерман (1953) (Stueckelberg E. C. G. et A. Petermann), La normalization des constantes dans la théorie des quanta, Helv. Phys. Acta **26**, 499.
Эпштейн (1963) (Epstein H.), On the Borchers class of a free field, Nuovo Cim. **27**, 886.
Эпштейн (1967) (Epstein H.), CTP invariance of the S-matrix in a theory of local observables, J. Math. Phys. **8**, 750.
Эренпрейс (1954) (Ehrenpreis L.), Division by a polynomial of derivation, Amer. J. Math. **76**, 883.
Янг и Фельдман (1950) (Yang C. N. and D. Feldman), The S-matrix in the Heisenberg representation, Phys. Rev. **79**, 972.
Яух и Пирон (1963) (Jauch J. M. and C. Piron), Can hidden variables be excluded in quantum mechanics?, Helv. Phys. Acta **36**, 827.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ*)

*) Этот указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. В указатель включены термины и понятия, непосредственно не отраженные в оглавлении