

Н. Н. БОГОЛЮБОВ, Д. В. ШИРКОВ

# КВАНТОВЫЕ ПОЛЯ

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия для студентов  
физических специальностей высших учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1980

**БОГОЛЮБОВ Н. Н., ШИРКОВ Д. В.** Квантовые поля, учебное пособие. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

В последние годы курс релятивистских квантовых полей, являющихся основой квантовой теории материи, занял прочное место в программе физических факультетов университетов.

Предлагаемая книга задумана как учебное пособие, предназначенное для студентов, впервые изучающих предмет, План книги следует первой половине известной монографии тех же авторов «Введение в теорию квантованных полей» и содержит линейное изложение теории квантовых полей, начиная от свободных классических полей и кончая техникой устранения расходимостей в теории возмущений.

Изложение значительно упрощено по сравнению с упомянутой монографией. Материал каждого параграфа примерно соответствует полтора часовой лекции, а полное содержание книги — годовому курсу. Вынесенный в Дополнения технический материал и наборы задач и упражнений, помещенные в конце книги в виде семи заданий, предназначены для семинарских занятий.

## ОГЛАВЛЕНИЕ\*)

Предисловие . . . . .	8
<b>Некоторые обозначения . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Частицы и поля . . . . .	11
1.1. Частицы и их основные свойства (11). 1.2. Законы сохранения (12). 1.3. Соответствие частица $\leftrightarrow$ поле (13). 1.4. Представления группы Лоренца (14).	
<b>Глава I. Свободные классические поля . . . . .</b>	<b>17</b>
§ 2. Динамические инварианты полей . . . . .	17
2.1. Лагранжиан (17). 2.2. Динамические инварианты. Энергия-импульс (19). 2.3. Теорема Нётер (20). 2.4. Момент количества движения и спин (21). 2.5. Вектор тока и заряд (23).	
§ 3. Простейшие поля . . . . .	24
3.1. Скалярное поле (24). 3.2. Импульсное представление (25). 3.3. Векторное поле (28). 3.4. Локальный репер (31).	
§ 4. Электромагнитное поле . . . . .	32
4.1. Потенциал электромагнитного поля (32). 4.2. Калибровочная инвариантность и условие Лоренца (33). 4.3. Обобщенный лагранжиан (35). 4.4. Диагональная калибровка (37). 4.5. Переход к локальному реперу (39).	
§ 5. Поле Дирака . . . . .	40
5.1. Уравнение Дирака и матрицы Дирака (40). 5.2. Лагранжев формализм (43). 5.3. Импульсное представление (44). 5.4. Разложения по спиновым состояниям (45). 5.5. Динамические инварианты (46).	
<b>Глава II. Квантование свободных полей . . . . .</b>	<b>49</b>
§ 6. Квантование полей . . . . .	49
6.1. Сущность процедуры квантования полей (49). 6.2. Корпускулярная трактовка представления чисел заполнения (50). 6.3. Каноническое квантование (53). 6.4. Представление Шредингера и Гейзенберга (55). 6.5. <i>Релятивистская схема квантования полей</i> (56).	

---

\*) Курсивом отмечены разделы, которые могут быть опущены при первом чтении — см; по этому поводу Методические указания на стр. 314.

§ 7.	Перестановочные соотношения . . . . .	58
	7.1. Физический смысл частотных компонент (58). 7.2. Амплитуда вакуума и фоковское представление (60). 7.3. Типы перестановочных соотношений (61). 7.4. Квантование по Ферми — Дираку и Бозе — Эйнштейну (64). 7.5. Связь спина со статистикой. Теорема Паули (66).	
§ 8.	Поля с целым спином . . . . .	67
	8.1. Скалярное поле (67). 8.2. Запись динамических переменных через нормальные произведения (67). 8.3. Комплексное векторное поле (70). 8.4. Электромагнитное поле — трудности квантования (72). 8.5. Электромагнитное поле — квантование по Гупта — Блейлеру (73).	
§ 9.	Спинорные поля . . . . .	75
	9.1. Квантование поля Дирака (75). 9.2. Спинорное поле с массой нуль (77). 9.3. Зарядовое сопряжение (81). 9.4. СРТ-теорема (83).	
<b>Глава III. Взаимодействующие поля . . . . .</b>		<b>85</b>
§ 10.	Взаимодействие полей . . . . .	85
	10.1. Взаимодействие частиц (85). 10.2. Лагранжианы взаимодействия (89). 10.3. Электромагнитное поле как калибровочное (92).	
§ 11.	Неабелевы калибровочные поля . . . . .	94
	11.1. Поле Янга — Миллса (94). 11.2. Калибровочное взаимодействие полей (96). 11.3. Спонтанное нарушение симметрии (98). 11.4. Массивное поле Янга — Миллса (101).	
§ 12.	Квантовые системы со взаимодействием . . . . .	103
	12.1. Постановка задачи (103). 12.2. Иллюстрация (105). 12.3. Гамильтонов подход (106). 12.4. Диагонализация модельных гамильтонианов (108). 12.5. Эффекты взаимодействия (111).	
§ 13.	Модель тяжелого нуклона . . . . .	112
	13.1. Формулировка модели (112). 13.2. Решение в однонуклонном секторе (113). 13.3. Свойства однонуклонного решения (116). 13.4. Переход к локальному пределу (117).	
<b>Глава IV. Матрица рассеяния . . . . .</b>		<b>119</b>
§ 14.	Матрица рассеяния . . . . .	119
	14.1. Теория возмущений (119). 14.2. Представление взаимодействия (121). 14.3. Матрица рассеяния (123). 14.4. Хронологические произведения (125). 14.5. Хронологическая экспонента (126).	
§ 15.	Общие свойства S-матрицы . . . . .	127
	15.1. Матрица рассеяния как функционал (127). 15.2. Релятивистская ковариантность и унитарность (129). 15.3. Условие причинности (131). 15.4. Дифференциальное условие причинности (132).	
§ 16.	Аксиоматическая S-матрица . . . . .	134
	16.1. Разложение по степеням взаимодействия (134). 16.2. Условия на $S_n$ (134). 16.3. Определение явного вида $S_2$ и $S_3$ (136). 16.4. Общий вид $S(g)$ (137).	
§ 17.	Теоремы Вика . . . . .	138
	17.1. Приведение к нормальной форме (138). 17.2. Первая теорема Вика (139). 17.3. Хронологические спаривания (141). 17.4. Вторая теорема Вика (143). 17.5. Третья теорема Вика (143).	



Глава V. Диаграммы и правила Фейнмана . . . . .	145
§ 18. Функция Грина свободных полей . . . . .	145
18.1. Функция Грина скалярного поля (145). 18.2. Причинная функция Грина (147). 18.3. Особенности на световом конусе (148).	
§ 19. Диаграммы Фейнмана . . . . .	150
19.1. Коэффициентные функции (150). 19.2. Графическое изображение $S_n$ (151). 19.3. Спинорная электродинамика (153). 19.4. <i>Поле Янга—Миллса</i> (156).	
§ 20. Правила Фейнмана в $p$ -представлении . . . . .	159
20.1. Переход к импульсному представлению (159). 20.2. Правила Фейнмана для матричных элементов (161). 20.3. Иллюстрация для модели $\phi^4$ (162). 20.4. Спинорная электродинамика (164).	
§ 21. Вероятности переходов . . . . .	168
21.1. Общая структура матричных элементов (168). 21.2. Нормировка амплитуды состояния (169). 21.3. Общая формула для вероятности перехода (171). 21.4. Рассеяние двух частиц (173). 21.5. Двухчастичный распад (175)	
Глава VI. Вычисление интегралов и расходимости . . . . .	176
§ 22. Техника вычисления интегралов . . . . .	176
22.1. Интегралы по виртуальным импульсам (176). 22.2. Альфа-представление и гауссовы квадратуры (177). 22.3. Фейнмановская параметризация (180). 22.4. Ультрафиолетовые расходимости (181).	
§ 23. Вспомогательные регуляризации . . . . .	182
23.1. Необходимость регуляризации (182). 23.2. Регуляризация Паули—Вилларса (183). 23.3. <i>Размерная регуляризация</i> (185). 23.4. <i>Регуляризация обрезанием</i> (187).	
§ 24. Однопетлевые диаграммы . . . . .	188
24.1. Скалярная «рыба» (188). 24.2. Собственные энергии фотона и электрона (190). 24.3. Треугольные вершинные диаграммы (192). 24.4. Ультрафиолетовые расходимости в высших порядках (195).	
§ 25. Выделение расходимостей . . . . .	196
25.1. Структура однопетлевых расходимостей (196). 25.2. Вклад в $S$ -матрицу (197). 25.3. Контрчлены и перенормировки (200). 25.4. <i>Расходимости и обобщенные функции</i> (202).	
Глава VII. Устранение расходимостей . . . . .	204
§ 26. Общая структура расходимостей . . . . .	204
26.1. Расходимости высших порядков (204). 26.2. Связь с контрчленами и перенормировки (206). 26.3. Степень расходимости диаграмм (208). 26.4. Свойство перенормируемости (210).	
§ 27. Полные функции Грина . . . . .	212
27.1. Пропагаторы физических полей (212). 27.2. Высшие функции Грина (215). 27.3. Сильносвязные многохвостки (вертексы) (217). 27.4. <i>Редукционные формулы</i> (218).	
§ 28. Процедура перенормировок . . . . .	219
28.1. Перенормировка вкладов в функции Грина (219). 28.2. Теорема о перенормируемости (222). 28.3. Рецепт вычи-	

	тания на массовой поверхности (224). 28.4. Неоднозначность перенормировки вертекса (225).	
§ 29.	<i>Перенормировки в спинорной электродинамике</i> . . . . .	226
	29.1. Условие градиентной инвариантности (226). 29.2. Градиентное преобразование фотонного пропагатора (227). 29.3. Пропагатор фотона с радиационными поправками (228). 29.4. Полный пропагатор электрона (231). 29.5. Вершинная часть и тождество Уорда (233).	
Глава VIII. Описание реальных взаимодействий . . . . .		236
§ 30.	Электромагнитные взаимодействия . . . . .	236
	30.1. Спинорная электродинамика (236). 30.2. Аномальный магнитный момент электрона (238). 30.3. Пределы спинорной электродинамики (241).	
§ 31.	Слабые взаимодействия . . . . .	242
	31.1. Взаимодействия Ферми (242). 31.2. Структура слабого тока (244). 31.3. Неперенормируемость и ультрафиолетовое поведение (245). 31.4. Гипотеза промежуточного бозона (246).	
§ 32.	<i>Модель Вайнберга—Салама</i> . . . . .	247
	32.1. Основные свойства (247). 32.2. Структура бозонного сектора (248). 32.3. Фермионный сектор (250). 32.4. Лагранжиан и квантование (252). 32.5. Физическое содержание и экспериментальный статус (253).	
§ 33.	Общая картина . . . . .	254
	33.1. Сильные взаимодействия (254). 33.2. Ограничения метода теории возмущений (255). 33.3. Другие методы квантовой теории поля (257). 33.4. Заключение (260).	
Дополнение I. Изотопический формализм . . . . .		261
	1. Дублет нуклонов (261). 2. Триплет пионов (262).	
Дополнение II. Матрицы Дирака и уравнение Дирака . . . . .		264
	1. Матрицы Дирака (264). 2. Уравнение Дирака (266). 3. Трансформационные свойства (267). 4. Нерелятивистский предел (269).	
Дополнение III. Непрерывные группы . . . . .		271
	1. Общие определения (271). 2. Группы Ли (272). 3. Представления групп Ли (275). 4. Генераторы и алгебра Ли (277).	
Дополнение IV. Операторные преобразования . . . . .		279
	1. Линейные непрерывные преобразования (279). 2. «Распутывание» экспонент (282). 3. Коммутаторы с оператором плотности числа частиц $n(\mathbf{k})$ (283).	
Дополнение V. Сводка сингулярных функций . . . . .		283
	1. Вспомогательные сингулярные функции (283). 2. Функции скалярного поля (284). 3. Функции электромагнитного, векторного и спинорного полей (285).	
Дополнение VI. Формулы импульсного интегрирования . . . . .		286
	1. Альфа-представление (286). 2. Фейнмановская параметризация (287). 3. Размерная регуляризация (288). 4. Регуляризация обрезанием (289). 5. Простейшие однопетлевые квадратуры (290).	
Дополнение VII. Кинематические соотношения для вершин . . . . .		291
	1. Тройная вершина (291), 2. Четверная вершина (292).	

Дополнение VIII. Правила Фейнмана для полей Янга—Миллса . . .	294
1. Свободное поле группы $SU(2)$ (294). 2. Взаимодействие калибровочного поля с полями материи (297). 3. Массивное поле Янга—Миллса (298).	
Задание «Сентябрь» к главе I. . . . .	301
Задание «Октябрь» к главе II. . . . .	304
Задание «Ноябрь» к главе III. . . . .	306
Задание «Декабрь» к главе IV. . . . .	308
Задание «Февраль» к главе V. . . . .	309
Задание «Март» к главе VI. . . . .	311
Задание «Апрель» к главе VII. . . . .	312
Методические указания . . . . .	314
Литература. . . . .	315
Предметный указатель. . . . .	316

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основная цель книги состоит в том, чтобы дать студенту физического факультета университета минимальный материал по основам современной квантовой теории поля.

Она может оказаться достаточной как для теоретиков, специализирующихся по физике ядра, квантовой статистике и других областях, использующих квантовополевые методы и опирающихся на квантовые представления, так и для экспериментаторов в области ядерной физики и физики высоких энергий. Для последней категории читателей эта книга должна быть дополнена курсом физики частиц и их взаимодействий. В то же время ее можно рекомендовать для первого чтения лицам, намеревающимся работать в области квантовой теории поля и теории элементарных взаимодействий.

Изложение построено таким образом, что оно соответствует годовому курсу. Наш собственный опыт говорит о крайней желательности параллельных семинарских занятий. С этой целью часть технического материала вынесена в конец книги в виде Дополнений. Там же помещены наборы упражнений и задач, собранные в Задания к главам основного текста.

Авторы признательны редактору книги Д. А. Славнову, рецензентам М. А. Брауну, Л. В. Прохорову, К. А. Тер-Мартirosяну, а также Б. М. Барбашову, Б. В. Медведеву, А. А. Славнову и Н. М. Шумейко за ценные замечания по рукописи книги.

г. Дубна, ноябрь 1979

*Авторы*

## НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Все компоненты 4-векторов условимся выбирать действительными. 4-вектор  $a = (a^0, \mathbf{a})$ , состоящий из нулевой компоненты  $a^0$  и пространственного вектора  $\mathbf{a}$ , будем согласно традиции называть контравариантным 4-вектором и обозначать его компоненты верхними индексами

$$a^\nu = (a^0, a^1, a^2, a^3).$$

Произведение двух векторов  $a$  и  $b$  определим так:

$$ab = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3.$$

Его удобно записать в виде

$$ab = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3),$$

где  $g_{\mu\nu}$  — диагональный метрический тензор,

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \quad g_{00} = 1; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,$$

отличающийся знаком от известного тензора Минковского. Переход от контравариантных  $a^\nu$  к ковариантным  $a_\mu$  компонентам (опускание индекса) достигается с помощью метрического тензора:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \quad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu},$$

т. е.

$$a_0 = a^0, \quad a_k = -a^k \quad (k = 1, 2, 3), \quad a_\nu = (a^0, -\mathbf{a}).$$

Здесь и ниже мы всегда будем подразумевать суммирование по дважды повторяющимся индексам, опуская знак суммы. Индексы суммирования по трем пространственным компонентам обозначаются латинскими буквами, взятыми из середины алфавита:

$$ab = a_n b_n = a^k b^k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

а по всем четырем компонентам (0, 1, 2, 3) — греческими:

$$ab = a^\nu b_\nu = a_\mu b^\mu = \sum_{\mu, \nu} g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu.$$

Иногда в целях упрощения записи громоздких выражений будем оба греческих индекса помещать внизу или наверху, т. е.

$$A_\nu B_\nu \equiv A^\mu B^\mu \equiv AB = A_\nu B^\nu,$$

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Таким образом, наличие двух одинаковых греческих индексов в различных множителях *всегда* подразумевает ковариантное суммирование независимо от расположения этих индексов.

Индексы, относящиеся к группам внутренних симметрий (например, изотопические индексы), обозначаются, как правило, латинскими буквами, взятыми из начала алфавита ( $a, b, \dots$ ).

Символом  $\hat{a}$  обозначена свертка компонент 4-вектора  $a^\nu$  с матрицами Дирака

$$\hat{a} = a^\nu \gamma_\nu = a_\nu \gamma^\nu.$$

Для производных по ковариантным и контравариантным компонентам часто используются сокращенные обозначения

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu} = \partial^\nu u = u^{;\nu}, \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial x^\nu} = \partial_\nu \varphi_a = \varphi_{a;\nu}.$$

При этом разумеется

$$\varphi_a^{;\mu} = g^{\mu\nu} \varphi_{a;\nu}.$$

Оператор д'Аламбера

$$\square = \Delta - \partial_0^2$$

представим как

$$\square = -\partial^\nu \partial_\nu.$$

По всей книге используется так называемая *рациональная система единиц*, в которой скорость света и постоянная Планка равны единице, т. е.  $c = \hbar = 1$ . В этой системе энергия и импульс имеют размерность массы или обратной длины, а время  $x_0 = t$  — размерность длины

$$[E] = [p] = m = l^{-1}, \quad [x_0] = [x] = l = m^{-1}.$$

Формулы четырехмерного преобразования Фурье, как правило, записываются в виде

$$f(x) \sim \int e^{-ipx} \tilde{f}(p) dp, \quad \tilde{f}(p) \sim \int e^{ipx} f(x) dx.$$

Знак показателя экспоненты выбран из соображений соответствия его первого слагаемого квантомеханической формуле

$$f(x^0, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) \sim \int e^{-iEt} \tilde{f}(E, \mathbf{x}) dE.$$

Трехмерное преобразование Фурье соответственно имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) \sim \int e^{ipx} \tilde{\varphi}(p) dp, \quad \tilde{\varphi}(p) \sim \int e^{-ipx} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Исключение составляют формулы для положительно-частотных частей функций поля и положительно-частотных частей функций Грина. Нормировочные множители фурье-преобразований (степени  $2\pi$ ) в различных местах книги выбираются по-разному.

Внутри каждого параграфа употребляется одинарная нумерация формул: (1), (2), (3), ..., которая непосредственно используется для ссылок на формулы внутри данного параграфа. Двойная нумерация (8.21), (D11.6) и т. д. сигнализирует об отсылке к формуле другого параграфа. При этом первый символ указывает номер параграфа или Дополнения (§ 8, Дополнение II), а второй — порядковый номер формулы в нем.

Признаком библиографической ссылки является год, стоящий после фамилии автора. Например, «Медведев (1977)» обозначает ссылку на книгу Б. В. Медведева, опубликованную в 1977 г., полное библиографическое наименование которой приведено в списке цитированной литературы в конце книги. Исключение из этой системы сделано для третьего издания нашей книги «Введение в теорию квантованных полей», которое упоминается как «Введение».

## § 1. Частицы и поля

**1.1. Частицы и их основные свойства.** Квантовая теория поля представляет собой физическую теорию элементарных частиц и их взаимодействий. Она опирается на связи между релятивистскими частицами и квантовыми полями, возникающими при квантовании классических полей. Свойства квантовых полей находятся в тесном соответствии со свойствами частиц. Поэтому прежде всего мы перечислим основные характеристики частиц.

Важным атрибутом релятивистской частицы является ее масса покоя  $m$ . Известное соотношение теории относительности связывает массу  $m$  с энергией частицы  $E$  и ее импульсом  $p$ :

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4.$$

В рациональной системе единиц это соотношение принимает вид

$$E^2 - p^2 = m^2.$$

В этой системе массу можно измерять в энергетической шкале. Для массы электрона  $m_e$  имеем \*)  $m_e = 9,109534(47) \cdot 10^{-28} \text{ г} = 0,5110034(14) \text{ МэВ}$ . Масса протона  $m_p = 938,2796(27) \text{ МэВ} \approx 0,94 \text{ ГэВ}$  и т. д.

Второй существенной характеристикой частицы является ее спин (т. е. собственный механический момент). В соответствии с общими теоремами квантовой механики спин частиц оказывается квантованным — его абсолютные значения являются целыми кратными половины постоянной Планка

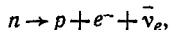
$$\hbar = h/2\pi = 1,0545887(57) \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} = 6,582173(17) \cdot 10^{-22} \text{ МэВ}.$$

Поэтому в употребляемой нами рациональной системе единиц спины электрона и протона оказываются равными половине, а спин фотона ( $\gamma$ -кванта) — единице:

$$s_e = s_p = 1/2, \quad s_\gamma = 1.$$

Третье кардинальное свойство частиц — наличие электрического заряда, значения которого также являются квантованными. Заряды всех наблюдаемых \*\*) частиц кратны так называемому «элементарному заряду»  $e = 4,803242(14) \times 10^{-10} \text{ ед. СГС} = 1,6021892(46) \cdot 10^{-19} \text{ кулона}$ , равному заряду электрона. В отличие от спина, квантовая природа которого совершенно ясна, дискретность электрического заряда представляет собой волнующую загадку.

Наконец, важной характеристикой частицы является ее время жизни  $\tau$ . Дело в том, что лишь немногие из частиц в свободном состоянии живут практически бесконечно долго (т. е. являются абсолютно стабильными). К ним относятся электрон  $e^-$ , протон  $p$ , фотон и нейтрино  $\nu$  \*\*\*), а также их античастицы — позитрон  $e^+$ , антипротон  $\bar{p}$  и антинейтрино  $\bar{\nu}$ . Все остальные частицы нестабильны и по экспоненциальному закону  $\exp(-t/\tau)$  самопроизвольно распадаются на другие частицы. Коэффициент  $\tau$  и называется временем жизни. Например, для нейтрона, распадающегося по схеме ( $\beta$ -распад)

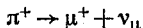


\*) Здесь и ниже мы приводим новейшие данные. Цифры в скобках показывают неопределенность в одну стандартную ошибку, выраженную в единицах последнего знака основного числа, т. е.  $0,5110034(14) = 0,5110034 \pm 0,0000014$ .

\*\*) Электрические заряды кварков (гипотетических составляющих адрона) считаются равными простым дробям ( $\pm 1/3$ ,  $\pm 2/3$ ) от  $e$ . Однако в свободном состоянии кварки не наблюдались.

\*\*\*) Существуют по крайней мере три разновидности нейтрино: электронное нейтрино  $\nu_e$ , мюонное нейтрино  $\nu_\mu$  и недавно открытое  $\tau$ -нейтрино  $\nu_\tau$ .

время жизни оказывается равным  $\tau_{\pi^+} = 918(14) \text{ с} \approx 15,3 \text{ мин}$ . Заряженный пи-мезон  $\pi^+$  распадается на мюон и нейтрино:



со временем жизни  $\tau_{\pi^+} = 2,6030(23) \cdot 10^{-8} \text{ с}$ . и т. д.

Нестабильность частиц представляет собой проявление важнейшего свойства микромира — свойства *взаимопревращаемости* частиц, являющегося следствием их взаимодействий. Взаимодействия частиц распадаются на четыре класса: сильные, электромагнитные, слабые и гравитационные. Мы не будем сейчас останавливаться подробно на свойствах взаимодействий (которые обсуждаются ниже — в § 10). Отметим лишь, что взаимодействия частиц приводят к тому, что частицы и их совокупности, как правило, переходят в другие частицы и их совокупности, если такие переходы не запрещены какими-либо законами сохранения (энергии, импульса, момента количества движения, электрического заряда, барионного заряда, странности и некоторыми другими).

Отсутствие каких-либо переходов, разрешенных известными законами сохранения, воспринимается как указание на существование нового, еще не известного, закона сохранения.

**1.2. Законы сохранения.** Вообще говоря, законы сохранения являются следствием тех или иных симметрий, которые отражают свойство ненаблюдаемости некоторых характеристик физических объектов. Хорошо известно, что закон сохранения энергии в консервативных системах представляет собой проявление симметрии относительно непрерывной операции сдвига времени. Инвариантность относительно сдвига времени в свою очередь эквивалентна ненаблюдаемости абсолютного времени. Другую цепочку подобного рода образуют закон сохранения четности, инвариантность относительно зеркального отражения и условность понятий «правого» и «левого» (т. е. ненаблюдаемость «абсолютно правого» и «абсолютно левого»).

Большая часть законов сохранения связана с непрерывными симметриями и может быть получена из последних с помощью теоремы Нётер (см. ниже § 2.3). Среди них следует выделить законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения, которые являются следствиями симметрии физических объектов в пространстве-времени. Подобная симметрия обусловлена такими глубокими и общими свойствами, как ненаблюдаемость абсолютного времени и абсолютных пространственных координат (симметрия относительно преобразований сдвига), изотропия пространства и эквивалентность систем координат, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями (симметрия относительно пространственных и лоренцевых поворотов). Соответствующие законы сохранения являются весьма общими, характерны для всех частиц, выполняются во всех переходах.

В пределах точности современного эксперимента столь же универсальными являются законы сохранения электрического заряда и барионного числа. Этим законам сохранения также можно сопоставить уже упоминавшиеся симметрии относительно фазовых преобразований непрерывного вида. Однако последние не имеют под собой наглядной физической основы и не связаны со структурой пространства — времени. Подобного рода симметрии называются *внутренними симметриями*.

К классу внутренних симметрий относятся изотопическая симметрия, а также некоторые другие (например, так называемая унитарная симметрия). Большинство внутренних симметрий и связанных с ними сохраняющихся величин носит приближенный характер. За только что упоминавшимися двумя исключениями (электрический заряд и барионное число), соответствующие законы сохранения выполняются в одних взаимодействиях и нарушаются в других.

Изотопическая инвариантность (закон сохранения изотопического спина 1) выполняется в сильных взаимодействиях и нарушается в электромагнитных и слабых



Закон сохранения четности (точнее — пространственной четности), связанный с симметрией волновой функции относительно операции отражения пространственных осей, выполняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях и нарушается в слабых. Аналогично ведут себя законы сохранения странности, а также нового квантового числа — очарования, лежащие вместе с изотопической инвариантностью в основе унитарной симметрии. Эти свойства подытожены в табл. 1.

Таблица 1. Свойства симметрии взаимодействия и сохраняющиеся физические величины

Физические величины	Типы взаимодействий		
	сильные	электромагнитные	слабые
Электрический заряд	+	+	+
Барнионное число	+	+	+
Четность	+	+	+
Изоспин	+	—	—
Странность	+	+	—

(+) = сохраняется; (—) = не сохраняется.

Мы не обсуждаем здесь свойств гравитационного взаимодействия из-за его чрезвычайно малой интенсивности. Для иллюстрации отметим, что сила гравитационного притяжения двух протонов примерно в  $10^{37}$  раз меньше силы их электростатического отталкивания.

1.3. **Соответствие частица ↔ поле.** Поле представляет собой физическую систему с бесконечным числом степеней свободы. Понятие поля естественно возникает при попытке отказа от представления о мгновенном действии частиц друг на друга на расстоянии (ньютоновское *actio in distans*) — представления, противоречащего специальной теории относительности (см. Медведев (1977), ч. II, § 6, а также Вигнер (1971), с. 12). Считая, что пространство между частицами заполнено полем, мы возлагаем на поле функцию передачи возмущения с конечной скоростью от одной частицы к другой. Таким образом, введение классического поля в физику диктуется соображениями релятивистской инвариантности. В теории частиц центральную роль играют релятивистские квантовые поля.

**Квантованное волновое поле** — фундаментальная физическая концепция, в рамках которой формулируется динамика частиц и их взаимодействия. Она позволяет описывать различные состояния системы многих частиц единым физическим объектом в обычном пространстве-времени — квантованном поле. Квантованное поле возникает путем квантования классического поля, в результате которого полевая функция приобретает операторный характер и выражается через операторы рождения и уничтожения частиц. Тем самым появляется возможность описывать важнейшее свойство мира элементарных частиц — процесс их взаимного превращения.

Давно и хорошо известным примером классического поля является электромагнитное поле, отвечающее за взаимодействия электрически заряженных частиц. Классическое описание, базирующееся на уравнениях Максвелла, приводит к чисто волновым представлениям об электромагнетизме. Методически иногда оказывается удобным рассматривать непрерывную систему — поле в виде предела дискретной механической системы с числом степеней свободы  $N$ ,

стремящимся к бесконечности. Каждой степени свободы соответствует осциллятор поля.

Описание корпускулярных свойств света достигается в результате процедуры квантования, в ходе которой полю сопоставляются дискретные кванты энергии, соответствующие различным возможным энергетическим состояниям осцилляторов поля. Кванты электромагнитного поля — фотоны — имеют нулевую массу покоя, не имеют электрического заряда и обладают спином, равным единице. Последний факт соответствует поляризационным свойствам классического поля и находит свое отражение в том, что электромагнитное поле является многокомпонентным и описывается набором полевых функций — компонентами напряженностей электрического и магнитного полей или компонентами потенциала  $A_\nu$ .

Свойства полевых функций, отвечающих другим частицам, также отражают спиновые, зарядовые и прочие дискретные характеристики соответствующих частиц. После квантования кванты поля обычно отождествляются с частицами.

Реальному миру взаимодействующих частиц ставится в соответствие система связанных уравнений для различных полей. После квантования выражения, отвечающие за связь этих уравнений (лагранжиан или гамильтониан взаимодействия — см. ниже § 10), описывают элементарные акты взаимодействия различных частиц. Наглядную интерпретацию такие выражения получают в правилах соответствия Фейнмана (см. ниже §§ 19, 20).

Мы отложим рассмотрение аппарата взаимодействия частиц и полей и займемся вначале изучением свойств свободных полей и их квантованием.

**1.4. Представление группы Лоренца.** Рассмотрим законы преобразований полевых функций при релятивистских преобразованиях координат. Напомним некоторые определения.

Полная (иначе — общая ортохронная) группа Лоренца состоит из однородных линейных преобразований четырех координат  $x^\nu$ , которые оставляют инвариантными квадратичную форму

$$x^2 = x_\nu x^\nu = (x^0)^2 - x^2$$

и не меняют направления времени  $x^0$ . Эта группа включает обычные пространственные повороты, лоренцевы «повороты» в плоскостях  $x^0x^1$ ,  $x^0x^2$ ,  $x^0x^3$  (т. е. преобразования к системе координат, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью), отражения пространственных осей и все произведения таких преобразований. Если добавить еще отражение оси времени, то мы получим общую группу Лоренца.

В физике большую роль играет группа, составленная из преобразований полной группы Лоренца и преобразований трансляции по всем четырем осям. Она называется неоднородной группой Лоренца (или полной группой Пуанкаре). Инвариантность относительно этой группы мы будем называть релятивистской инвариантностью, в отличие от лоренц-инвариантности, соответствующей группе Лоренца.

В дальнейшем нас будут интересовать законы преобразования полевых функций при преобразованиях координат из полной группы Пуанкаре

$$x \rightarrow x' = P(\omega; x), \quad (1)$$

где  $\omega = (L, a)$  обозначает совокупность параметров, описывающих трансляции ( $a$ ) и повороты ( $L$ ), причем

$$x'_\nu = L_{\nu\mu} x^\mu + a_\nu, \quad L_{\nu\sigma} g^{\sigma\rho} L_{\mu\rho} = g^{\nu\mu}. \quad (2)$$

Полевая функция  $u(x)$  представляет собой одну (однокомпонентная функция) или несколько (многокомпонентная функция) функций четырех координат  $x^\nu$ , заданных в каждой системе отсчета. При этом переходе от системы отсчета  $x$  к системе  $x'$ , связанной с  $x$  преобразованием (2), сопоставляется однородное линейное преобразование компонент полевых функций

$$u(x) \rightarrow u'(x') = \Lambda(\omega) u(x), \quad (3)$$

где  $\Lambda$  — матрица преобразования, целиком определяемая матрицей  $L$  лоренцева преобразования (2), т. е. зависящая от тех же параметров, что и  $L$ .

Подчеркнем, что преобразование (3) не сводится к замене аргументов  $x$  на  $x'$ , так как описывает преобразование системы координат, а не операцию перемещения из одной точки пространства в другую.

Каждому лоренцеву преобразованию  $L$  соответствует матрица  $\Lambda_L$ , причём единичному элементу группы  $L$  соответствует единичная матрица  $\Lambda = 1$ , а произведению двух элементов  $L_1$  и  $L_2$  группы Лоренца соответствует произведение

$$\Lambda_{L_1 L_2} = \Lambda_{L_1} \Lambda_{L_2}.$$

Система матриц с такими свойствами в теории групп называется линейным представлением группы. Матрицы конечного ранга  $\Lambda$  образуют конечномерное представление группы Лоренца. Ранг представления определяется размерностью матриц, т. е. числом компонент  $u$ .

Поэтому возможные типы волновых функций и их законы преобразования могут быть получены исследованием конечномерных (неприводимых) представлений группы Лоренца. Подобное исследование составляет особый раздел теории представлений групп, результат которого сводится к следующему. Конечномерные представления группы Лоренца могут быть однозначными или двузначными, т. е. соответствие  $L \rightarrow \Lambda_L$  может быть однозначным или двузначным. Важность для физики двузначных представлений обусловлено тем, что полевые функции, вообще говоря, не являются непосредственно наблюдаемыми (в частности, поля, преобразующиеся по двузначным представлениям, всегда входят в наблюдаемые величины в билинейных комбинациях). Неоднозначность оператора  $\Lambda_L$  должна быть все же такова, чтобы наблюдаемые величины трансформировались вполне однозначно при любом лоренцевом преобразовании  $L$ . Кроме того, необходимо, чтобы операторы  $\Lambda_L$  были непрерывными функциями параметров преобразования  $L$ , т. е. чтобы бесконечно малому преобразованию системы отсчета соответствовало бесконечно малое преобразование функций поля. Совокупность указанных требований приводит к тому, что представления группы Лоренца распадаются на две категории. Первая категория характеризуется однозначностью соответствия  $L \rightarrow \Lambda_L$  и содержит однозначные так называемые *тензорные* и *псевдотензорные* \*) представления. Функции поля, преобразующиеся по тензорным представлениям, называются *тензорами* (псевдотензорами) и в некоторых случаях могут быть наблюдаемы непосредственно (электромагнитное поле). Во втором случае это соответствие оказывается: двузначным:  $L \rightarrow \pm \Lambda_L$ .

Закон преобразования (псевдо) тензора  $N$ -го ранга  $T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N}$  при непрерывных преобразованиях координат имеет вид

$$T^{\nu_1 \dots \nu_N}(x') = \frac{\partial x'_{\nu_1}}{\partial x_{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'_{\nu_N}}{\partial x_{\mu_N}} T^{\mu_1 \dots \mu_N}(x), \quad (4)$$

или, в обозначениях (2),

$$T^{\nu_1 \dots \nu_N}(x') = L^{\nu_1}_{\mu_1} \dots L^{\nu_N}_{\mu_N} T^{\mu_1 \dots \mu_N}(x).$$

Двузначные представления называются *спинорными*, а соответствующие величины — *спинорами*. Закон преобразования спинорных величин имеет более сложную структуру и для простейших спиноров приведен в Дополнении II. Отметим лишь, что вытекающий из (4) закон преобразования тензорных величин

$$u(x) \rightarrow u'(x') = u(x) \quad (5)$$

\*) Различие между тензорами и псевдотензорами связано с преобразованиями отражения пространственных осей и рассматривается в конце параграфа.

при преобразовании трансляции

$$x'^{\nu} = x^{\nu} + a^{\nu}$$

является справедливым также и для спиноров.

Приведем теперь простейшие тензорные представления и соответствующие им величины. Тензор нулевого ранга, при любых непрерывных преобразованиях трансформирующийся по закону (5), является инвариантом и называется скаляром (псевдоскаляром).

Тензор первого ранга, преобразующийся при поворотах координат по закону

$$u'^{\nu}(x') = L_{\mu}^{\nu} u^{\mu}(x) = L^{\nu\mu} u_{\mu}(x), \quad (6)$$

называется контравариантным вектором (псевдовектором). Связанный с ним ковариантный вектор

$$u_{\nu}(x) = g_{\nu\mu} u^{\mu}(x).$$

преобразуется по закону

$$u'_{\nu}(x') = L^{\mu}_{\nu} u_{\mu}(x). \quad (7)$$

Могут быть выписаны без труда соответствующие формулы для тензоров различной вариантности второго и более высоких рангов.

Рассмотрим теперь преобразование пространственной инверсии  $P$ , т. е. отражения всех трех пространственных осей:

$$x \rightarrow x' = Px, \quad x'_0 = x_0, \quad x' = -x. \quad (8)$$

Законы преобразования полевых функций формулами (4) не определяются и должны быть сформулированы отдельно. В силу тождественности двукратного преобразования ( $P^2 = 1$ ), вытекающей из однозначности тензорных представлений, эти законы для компонент тензоров  $T^{\dots}(x)$  могут иметь лишь две формы:

$$PT(x) = T'(x') = T'(Px) = \pm T(x).$$

Тензор нулевого ранга, не меняющий знака при инверсии,

$$Pu(x) = +u(x) \quad (9)$$

называется скаляром. Во втором случае соответствующая величина, удовлетворяющая соотношению

$$Pu(x) = -u(x), \quad (10)$$

именуется псевдоскаляром.

Если тензор первого ранга при преобразовании  $P$  меняет знак своих пространственных компонент и не меняет знак временной:

$$PV^{\mu}(x) = V_{\mu}(x),$$

т. е.

$$PV^0(x) = V^0(x), \quad PV(x) = -V(x), \quad (11)$$

то он называется вектором. Если же пространственные компоненты не меняют знак, а меняет лишь временная:

$$PV^{\mu}(x) = -V_{\mu}(x),$$

т. е.

$$PV^0(x) = -V^0(x), \quad PV(x) = V(x), \quad (12)$$

то он является псевдовектором (аксиальным вектором). Вообще можно описать закон преобразования псевдотензоров формулой (4), умноженной на детерминант преобразования координат. Соотношения (9), (10) и им подобные определяют также важное свойство *четности* полевых функций и соответствующих им частиц. Это свойство играет существенную роль (см. ниже § 10.2) при установлении возможных форм взаимодействия различных полей.

## Глава I. СВОБОДНЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

### § 2. Динамические инварианты полей

**2.1. Лагранжиан.** В этом параграфе мы изложим формализм, позволяющий получать на общей основе как уравнения движения, так и сохраняющиеся во времени величины, соответствующие свойствам инвариантности относительно тех или иных непрерывных преобразований. Такой формализм в механике систем с конечным числом степеней свободы основывается на функции Лагранжа и называется лагранжевым формализмом.

Функция Лагранжа  $L$  является функцией времени, зависит от динамических переменных системы и в механике записывается в виде суммы по всем материальным точкам системы. В случае непрерывной системы типа волнового поля эта сумма заменяется пространственным интегралом от плотности функции Лагранжа  $\mathcal{L}$ :

$$L(x^0) = \int dx \mathcal{L}(x^0, \mathbf{x}).$$

Эта последняя

$$\mathcal{L}(x^0, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(\mathbf{x})$$

и называется *лагранжианом*.

Исходным пунктом лагранжева формализма является действие системы  $\mathcal{A}$ , представляющее интеграл по времени от  $L$ :

$$\mathcal{A} = \int dt L(t) = \int dx^0 dx \mathcal{L}(x^0, \mathbf{x}) = \int dx \mathcal{L}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Отсюда видно, что функция Лагранжа  $L(t)$  в теории полей оказывается промежуточной и основную роль играет лагранжиан  $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ .

Уравнения движения могут быть получены с помощью принципа наименьшего действия, который гласит, что реальное движение происходит таким образом, что действие  $\mathcal{A}$  оказывается экстремальным, т. е. его вариация обращается в нуль. Из условия

$$\delta \mathcal{A} = 0,$$

полагая, что вариации функций поля  $\delta u_i$  исчезают на границе объема интегрирования, с помощью интегриации по частям получаем уравнения Лагранжа — Эйлера

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta u_a(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a(x)} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\nu}} = 0. \quad (2)$$

Перечислим кратко основные требования, налагаемые на лагранжиан в квантовой теории поля.

Лагранжиан, во-первых, является функцией только динамических переменных, т. е. компонент полевых функций  $u_a(x)$  и их производных. Явной зависимости от координат  $x$  он не содержит, поскольку такая зависимость нарушает релятивистскую инвариантность. При этом локальность теории обеспечивается тем, что значение лагранжиана  $\mathcal{L}$  в точке  $x$  определяется значениями  $u_a(x)$  и конечного числа частных производных, взятых в той же самой точке  $x$ . Такой лагранжиан называется *локальным*. Наличие, например, интегральных зависимостей приводит к нелокальному случаю.

Для того чтобы получить дифференциальные уравнения порядка не выше второго, лагранжиан считают функцией компонент поля  $u$  и их *первых* производных

$$\mathcal{L}(x) = \Phi(u_a(x), u_{a;\nu}(x)). \quad (3)$$

Отметим еще, что поскольку физические свойства системы определяются действием  $\mathcal{A}$ , в выражение для которого лагранжиан входит под знаком интеграла, то соответствие  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}$  не является взаимно однозначным. Лагранжианы, отличающиеся друг от друга полной 4-дивергенцией (от некоторого 4-вектора)

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \partial_\nu F^\nu(x), \quad (4)$$

оказываются физически эквивалентными.

В самом деле, интеграл (1) от  $F^\nu_\nu$  с помощью теоремы Гаусса — Остроградского сводится к поверхностному интегралу от  $F^\nu$  по трехмерной границе четырехмерного объема интегрирования. Принимая еще во внимание, что вариации функций поля  $\delta u$  исчезают на этой границе, получаем, что член  $F^\nu_\nu$  не дает вклада в физические величины.

Важными требованиями, предъявляемыми к свойствам лагранжиана, являются его вещественность (в квантовом случае — эрмитовость) и релятивистская инвариантность.

Вещественность лагранжиана приводит к вещественности (эрмитовости) динамических инвариантов: энергии, импульса, тока и т. п. и в конечном счете к унитарности  $S$ -матрицы.

Релятивистская инвариантность лагранжиана

$$\mathcal{L}'(x') = \Phi(u'_a(x'), u'_{a;\nu}(x')) = \Phi(u_a(x), u_{a;\nu}(x)) = \mathcal{L}(x) \quad (5)$$

означает, что  $\mathcal{L}$  ведет себя как (псевдо)скаляр при преобразованиях Пуанкаре. Поскольку бесконечно малый элемент объема 4-интегрирования в (1)  $dx = dx^0 dx$  также является инвариантом то мы получаем, что значение действия не меняется при преобразованиях из группы Пуанкаре. Поэтому скалярность лагранжиана обеспечивает инвариантность действия.

**2.2. Динамические инварианты. Энергия-импульс.** Это последнее свойство оказывается важным для получения так называемых динамических инвариантов, т. е. величин, сохраняющихся во времени. К динамическим инвариантам относятся энергия, импульс, момент количества движения, а также некоторые другие величины, сохраняющиеся в силу соответствующей инвариантности действия (или лагранжиана), как, например, электрический заряд.

В качестве примера рассмотрим 4-вектор энергии-импульса  $P^\nu$ . Он может быть представлен в виде пространственного интеграла

$$P^\nu = \int dx T^{\nu 0}(x^0, \mathbf{x}) \quad (6)$$

от соответствующих компонент тензора энергии-импульса, который выражается через лагранжиан соотношением

$$T^{\nu\mu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha;\mu}} u_{\alpha;\nu}(x) - g^{\nu\mu} \mathcal{L}(x). \quad (7)$$

Независимость интегралов (6) от времени  $x^0$  является следствием того, что тензор  $T^{\nu\mu}$  удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (8)$$

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим интеграл

$$\int dx \frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial x^\mu}.$$

Преобразуя его к поверхностному интегралу по теореме Гаусса — Остроградского,

$$\int dx \frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial x^\mu} = \int_{\sigma} d\sigma_\mu T^{\nu\mu}(x), \quad (9)$$

где  $\sigma$  — поверхность, ограничивающая объем интегрирования, а  $d\sigma_\mu$  — элемент поверхности, нормальный к оси  $x^\mu$ , допустим, что объем интегрирования неограниченно расширяется в пространственноподобных направлениях и ограничен по времени двумя трехмерными плоскостями  $\sigma_1(x^0 = t_1)$  и  $\sigma_2(x^0 = t_2)$ . Предполагая еще, что на бесконечно удаленных в пространственноподобных направлениях точках поля  $u_\alpha$ , их производные и компоненты тензора

энергии-импульса равны нулю, получим из (8) и (9)

$$\int_{\sigma_1} dx T^{\nu 0}(x) - \int_{\sigma_2} dx T^{\nu 0}(x) = \int dx T^{\nu 0}(t_1, x) - \int dx T^{\nu 0}(t_2, x) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что уравнение непрерывности (8) является следствием уравнений движения. Рассмотрим дивергенцию от правой части (7):

$$\partial_\mu T^{\nu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\mu}} \right) u_a^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\mu}} \partial_\mu (u_a^\nu) - \partial^\nu \mathcal{L}.$$

Используя уравнения движения (2) и меняя порядок дифференцирований у второй производной, получим

$$\partial_\mu T^{\nu\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} \frac{\partial u_a}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\mu}} \frac{\partial u_{a;\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Подведем теперь некоторые итоги. Мы установили, что каждая из четырех величин  $P^\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3$ ) сохраняется во времени благодаря тому, что соответствующая пространственная плотность  $T^{\nu 0}$  является нулевой компонентой «4-вектора»  $\theta^\mu(\nu) \equiv T^{\nu\mu}$ , удовлетворяющего уравнению непрерывности (8). Последнее вытекает из уравнений Лагранжа—Эйлера, а также того факта, что лагранжиан  $\mathcal{L}$  зависит от координат  $x$  только через функции поля  $u_a$  и их первые производные  $u_{a;\nu}$ , вследствие чего

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} u_a^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\mu}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{\partial u_a}{\partial x^\mu} \right).$$

Как можно показать, сохранение проекции «4-вектора»  $P^\nu$  на  $\nu$ -ю ось является следствием ковариантности лагранжиана (и равенства нулю соответствующей вариации действия) относительно трансляции вдоль оси  $x^\nu$ .

**2.3. Теорема Нётер.** Это утверждение является частным случаем так называемой теоремы Нётер, которую можно сформулировать следующим образом.

Пусть имеет место некоторое непрерывное преобразование координат и одновременно функций поля, зависящее от  $s$  параметров  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ):

$$x_\nu \rightarrow x'_\nu = f_\nu(x; \omega), \quad (10)$$

$$u_a(x) \rightarrow u'_a(x') = U_a(u_b(x); \omega) \quad (11)$$

— и обращающее в нуль вариацию действия  $\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x) dx$ :

$$\delta \mathcal{A} = 0.$$

Тогда существует  $s$  динамических инвариантов  $C_k$  (т. е. сохраняющихся во времени функций от полевых функций и



их производных), которые представимы в виде пространственных интегралов

$$C_k = \int dx \theta_{(k)}^0(x) \quad (12)$$

от нулевых компонент некоторых «4-векторов»

$$\theta_{(k)}^v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;v}} (u_{a;\mu} X_k^\mu - \Psi_{a;k}) - X_k^v \mathcal{L}(x), \quad (13)$$

причем

$$X_k^\mu = \left. \frac{\partial f^\mu(x; \omega)}{\partial \omega_k} \right|_{\omega=0}, \quad \Psi_{a;k} = \left. \frac{\partial u_a}{\partial \omega_k} \right|_{\omega=0}. \quad (14)$$

Мы не будем приводить здесь доказательства этой теоремы, отослав интересующегося читателя к § 2.1 Введения.

Отметим прежде всего, что приведенные выше выражения (6), (7) являются частными случаями общих выражений (12), (13), соответствующих

$$X_k^v = \delta_k^v, \quad \Psi_{a;k} = 0. \quad (15)$$

Значения (15) соответствуют преобразованиям

$$\begin{aligned} x'_v &= x_v + \omega_v, \\ u'_a(x') &= u_a(x), \end{aligned}$$

т. е. преобразованиям трансляции всех четырех координат.

Последняя формула является законом преобразования функций поля при преобразованиях трансляции. Как видно, он одинаков для функций поля различной тензорной размерности. Подставляя значения (15) в общую формулу (13), получаем выражение (7) для тензора энергии-импульса. С помощью (12) приходим к формуле (6) для сохраняющегося во времени 4-вектора энергии-импульса  $P^v$ .

**2.4. Момент количества движения и спин.** Получим теперь динамические инварианты, соответствующие 4-мерным лоренцевым вращениям системы координат. Как следует из (14), достаточно рассматривать только их инфинитезимальную форму, которая имеет вид

$$x'_v = x_v + x^\mu \delta L_{\mu\nu}, \quad (16)$$

где  $\delta L_{\mu\nu}$  — бесконечно малые параметры поворотов. Благодаря антисимметричности величин  $\delta L_{\mu\nu}$  в качестве независимых параметров могут быть выбраны шесть из них:

$$\delta \omega_{(\mu\nu)} = \delta L_{\mu\nu} \quad \text{при } \mu < \nu, \quad (17)$$

представляющих собой бесконечно малые углы вращения в плоскости  $x_\mu x_\nu$ . Таким образом, индекс  $k$  из формул (12)—(15) представляется двойным индексом  $(\mu\nu)$ .

Представляя вариацию  $\delta x$  в виде

$$\delta x_\nu = X_\nu^k \delta \omega_k = \sum_{\rho < \sigma} X_\nu^{(\rho\sigma)} \delta \omega_{(\rho\sigma)}, \quad (18)$$

получим с помощью (16), (17)

$$\delta x_\nu = x^\mu \delta L_{\nu\mu} = \sum_{\rho < \sigma} (x^\sigma \delta_\nu^\rho - x^\rho \delta_\nu^\sigma) \delta \omega_{(\rho\sigma)},$$

т. е.

$$X_\nu^{(\rho\sigma)} = x^\sigma \delta_\nu^\rho - x^\rho \delta_\nu^\sigma. \quad (19)$$

Бесконечно малую вариацию функций поля  $u'_a(x') = u_a(x) + \delta u_a(x)$ , представим в виде

$$\delta u_a(x) = \sum_{b, \rho < \sigma} A_a^{b(\rho\sigma)} u_b(x) \delta \omega_{(\rho\sigma)}. \quad (20)$$

В соответствии с (1.5) и (1.6) для скалярного поля

$$A_{\dots} = 0$$

и для векторного поля

$$A_\mu^{\nu(\rho\sigma)} = \delta_\mu^\rho g^{\nu\sigma} - \delta_\mu^\sigma g^{\nu\rho}, \quad \rho < \sigma.$$

Поэтому для векторного поля

$$\Psi_V^{(\rho\sigma)} = A_V^{\mu(\rho\sigma)} u_\mu(x) = u^\sigma(x) \delta_\nu^\rho - u^\rho(x) \delta_\nu^\sigma. \quad (21)$$

Подставляя (21) и (19) в (13), получаем тензор момента количества движения

$$M^{\tau(\rho\sigma)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\nu;\tau}} (u_{\nu;\rho} x^\sigma - u_{\nu;\sigma} x^\rho) + \mathcal{L} (x^\rho g^{\sigma\tau} - x^\sigma g^{\rho\tau}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\nu;\tau}} A_V^{\mu(\rho\sigma)} u_\mu(x). \quad (22)$$

Сравнивая первые два члена в правой части с (7), видим, что их можно представить в виде

$$x^\sigma T^{\rho\tau} - x^\rho T^{\sigma\tau} = M_0^{\tau(\rho\sigma)}. \quad (23)$$

Это выражение соответствует связи между тензорами момента и энергии-импульса в механике точки. Поэтому величину (23) следует отождествить с орбитальным моментом волнового поля. В случае однокомпонентного (скалярного, псевдоскалярного) поля весь момент сводится к орбитальному.

Для многокомпонентных полей последнее слагаемое в правой части (22) отлично от нуля. Оно характеризует поляризационные свойства поля и соответствует спиновому моменту поля.

Итак,

$$M^{\tau(\rho\sigma)} = M_0^{\tau(\rho\sigma)} + S^{\tau(\rho\sigma)},$$

где

$$S^{\tau(\rho\sigma)} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\tau}} A_a^{\rho\sigma} u_b(x). \quad (24)$$

Для векторного поля с помощью (21) получаем

$$S^{(\rho\sigma)} = \int dx S^0{}^{(\rho\sigma)} = \int dx \left\{ u^\rho(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\sigma} - u^\sigma(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\rho} \right\}. \quad (25)$$

Здесь символом  $\dot{u}$  обозначена частная производная по времени от  $u$ . Тройка величин  $S^{(23)}$ ,  $S^{(31)}$ ,  $S^{(12)}$  представляет собой компоненты пространственного псевдовектора — вектора спина

$$S^n = \epsilon^{nmp} S^{(mp)} \quad (n, m, p = 1, 2, 3). \quad (26)$$

**2.5. Вектор тока и заряд.** Наконец, в случае комплексных полей, которые соответствуют частицам с зарядом (в простейших случаях этот заряд — электрический), лагранжиан оказывается инвариантным по отношению к фазовому преобразованию полевых функций (градиентному преобразованию первого рода), не затрагивающему координат.

Поясним суть дела на примере системы, описываемой одним комплексным полем. В силу свойства вещественности лагранжиан, равно как и динамические величины, может зависеть от комплексного поля лишь через квадратичные формы вида  $u_a^* u_b$ , где  $u_a$  и  $u_a^*$  — взаимно комплексно-сопряженные функции или их производные. Отсюда непосредственно вытекает, что комплексные волновые функции  $u$  могут быть умножены на произвольный унитарный фазовый множитель вида  $\exp(i\alpha)$ , что не приводит к изменению квадратичной формы  $u u^*$ , а тем самым и к каким-либо наблюдаемым эффектам.

Рассматривая  $u$  и  $u^*$  как линейно независимые функции, можем поэтому записать градиентное преобразование первого рода в виде

$$u_a \rightarrow u'_a = e^{i\alpha} u_a, \quad u_b^* \rightarrow u_b'^* = e^{-i\alpha} u_b^*. \quad (27)$$

Полагая  $\alpha$  бесконечно малой величиной, находим

$$u \rightarrow u + i\alpha u, \quad u^* \rightarrow u^* - i\alpha u^*.$$

Согласно (14) отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \Psi_a &= i u_a && \text{для всех } u_a, \\ \Psi_b &= -i u_b^* && \text{для всех } u_b^*, \end{aligned}$$

а также, что  $X=0$ . Подставляя эти соотношения в (13), приходим к выражению, имеющему тензорную размерность вектора:

$$J^\nu(x) = i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a; \nu}^*} u_a^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{b; \nu}} u_b \right). \quad (28)$$

Этот 4-вектор подчиняется уравнению непрерывности

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \quad (29)$$

и потому обычно отождествляется с 4-вектором *тока*. Пространственный интеграл от его нулевой компоненты

$$Q = \int J^0(x) dx = i \int dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a; 0}^*} u_a^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{b; 0}} u_b \right) \quad (30)$$

не зависит от времени и представляет собой сохраняющуюся характеристику поля. Она отождествляется с *зарядом*. При этом интеграл движения  $Q$  может описывать как электрический заряд, так и другие сохраняющиеся характеристики, такие, как барионный заряд, странность, очарование и т. п.

Как видно, системы с подобными интегралами движения описываются комплексными (в общем случае — многокомпонентными) полями. Отметим еще, что преобразования только что рассмотренного типа ( $\Psi \neq 0$ ,  $X=0$ ), не затрагивающие координат, называются преобразованиями *внутренних симметрий*. Важными для физики примерами внутренних симметрий являются изотопическая симметрия и унитарная симметрия. Соответствующие им преобразования также могут быть изучены с помощью теоремы Нётер, что приводит к понятию сохраняющихся векторов изотопического и унитарного спинов.

### § 3. Простейшие поля

**3.1. Скалярное поле.** Наиболее простым является вещественное скалярное поле  $\varphi(x)$ , описывающее бесспиновые частицы одного сорта. Свободный лагранжиан этого поля выбирается следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varphi;_\nu(x) \varphi;^\nu(x) - \frac{m^2}{2} \varphi^2(x), \quad (1)$$

с тем, чтобы полученное из него уравнение движения (2.2) оказалось уравнением Клейна — Гордона

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi;_\nu} = -m^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\nu \partial x_\nu} = (\square - m^2) \varphi(x) = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$\square = -\partial_\nu \partial^\nu = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

— оператор д'Аламбера.

С помощью (2.7) получаем из (1) тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu}(x) = \varphi^{;\nu}(x) \varphi^{;\mu}(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3)$$

Тензор момента количества движения можно получить теперь отсюда, используя соотношение (2.23). Спиновый момент равен нулю.

Подставляя в (3) явный вид лагранжиана (1), получаем плотность энергии

$$T^{00} = (1/2) [\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2] \quad (4)$$

и плотность вектора импульса

$$T^{0k} = -\dot{\varphi}^{;0} \varphi^{;k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

**3.2. Импульсное представление.** В теории частиц весьма употребительным является импульсное представление. Оно, во-первых, более адекватно обычной физической постановке задачи, когда частицы характеризуются своими энергиями и импульсами (а не пространственно-временными координатами). Во-вторых, динамические переменные в этом представлении принимают более компактную и наглядную структуру.

Итак, представим функцию поля  $\varphi(x)$  в виде четырехмерного интеграла Фурье:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-2} \int dk e^{ikx} \tilde{\varphi}(k), \quad dk = dk_0 dk$$

Условие вещественности  $\tilde{\varphi}^*(x) = \varphi(x)$  дает

$$\tilde{\varphi}^*(k) = \tilde{\varphi}(-k).$$

Согласно (2) фурье-амплитуда  $\tilde{\varphi}$  удовлетворяет уравнению

$$(k^2 - m^2) \tilde{\varphi}(k) = 0$$

и потому представима в виде

$$\tilde{\varphi}(k) = \sqrt{2\pi} \delta(k^2 - m^2) \varphi(k).$$

Дельта-функция устанавливает связь

$$(k_0)^2 - k^2 = m^2 \quad (5)$$

между частотой  $k_0$ , волновым вектором  $k$  и параметром  $m$ . Как будет показано ниже, частоту  $k_0$  следует отождествить с энергией, а волновой вектор — с вектором импульса, вследствие чего связь (5) оказывается известным соотношением из релятивистской механики частицы, в котором  $m$  представляет массу.

Разложение Фурье принимает вид

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dk \delta(k^2 - m^2) e^{ikx} \bar{\varphi}(k).$$

Из-за наличия под знаком интеграла  $\delta$ -функции интеграция происходит не по всему 4-мерному  $k$ -пространству, а лишь по двум полам трехмерного гиперboloида

$$k^0 = \pm \sqrt{k^2 + m^2},$$

одна из которых целиком лежит внутри верхнего светового конуса, а другая — внутри нижнего. Замечая еще, что указанные полы гиперboloидов по отдельности являются лоренц-инвариантными, мы приходим к следующему релятивистски инвариантному разбиению полевой функции на два слагаемых:

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x), \quad (6)$$

где

$$\varphi^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dk e^{\pm ikx} \delta(k^2 - m^2) \bar{\varphi}^\pm(k). \quad (7)$$

Здесь

$$\bar{\varphi}^\pm(k) = \theta(k_0) \varphi(\pm k),$$

а  $\theta$  — известная разрывная функция:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Функции  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$  мы будем в дальнейшем именовать соответственно положительно-частотной и отрицательно-частотной частями функции  $\varphi(x)$ . Как видно, при этом знак частотности связывается со знаком произведения  $kx$  (точнее, со знаком «временного» члена  $k^0 x^0 = x^0 \sqrt{k^2 + m^2}$  в подынтегральной экспоненте). В связи с этим заметим, что в современной литературе иногда принимают обратный порядок обозначений, связывая «частотность» со знаком формы  $k_\mu x_\mu = kx + k_4 x_4 = -kx$ . Подобные обозначения ассоциируются с привычной записью квантовомеханической волновой функции, которая пропорциональна  $\exp(-iEx_0)$ , где  $E$  — энергия.

Наш выбор обозначений связан с тем, что выражения типа  $\varphi^+$  в квантовой теории соответствуют рождению частиц поля, а выражения типа  $\varphi^-$  — их уничтожению. Поэтому в принятой нами системе обозначений знаки (+) и (−) символизируют физический смысл соответствующих квантовых операторов.

Как будет показано ниже, произведенное разбиение оказывается также весьма удобным при записи динамических величин в импульсном представлении, поскольку последние выражаются в виде билинейных форм по  $\varphi^+(k)$  и  $\varphi^-(k)$ .

Заметим, кроме того, что в соответствии с (7) правила комплексного сопряжения для  $\varphi^\pm(\mathbf{k})$  имеют вид

$$(\varphi^\pm(\mathbf{k}))^* = \varphi^\mp(\mathbf{k}).$$

Выполняя в (7) интеграцию по  $k_0$ , получаем

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm i\mathbf{k}x} \varphi^\pm(\mathbf{k}). \quad (8)$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi^\pm(\mathbf{k}) = \frac{\varphi^\pm(k_0, \mathbf{k})}{\sqrt{2k_0}}, \quad k_0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}.$$

Подставляя (6) и (8) в (4), получим

$$\begin{aligned} P^0 &= \int T^{00} d\mathbf{x} = (1/2) \int [(\partial_\nu \varphi(x))^2 + m^2 \varphi^2(x)] d\mathbf{x} = \\ &= (1/2) \int d\mathbf{x} \{ \partial_\nu \varphi^+ \partial_\nu \varphi^+ + 2 \partial_\nu \varphi^+ \partial_\nu \varphi^- + \partial_\nu \varphi^- \partial_\nu \varphi^- + \\ &\quad + m^2 [\varphi^+(x) \varphi^+(x) + 2\varphi^+(x) \varphi^-(x) + \varphi^-(x) \varphi^-(x)] \}. \end{aligned}$$

Отметим, что *все суммирования по  $\nu$  в этом выражении нековариантные*. Нетрудно показать, что слагаемые, содержащие произведения функций  $\varphi^\pm$  одинаковой частотности, не дают вклада в динамический инвариант  $P^0$ . Так, например,

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} [(\partial_\nu \varphi^+(x))^2 + m^2 (\varphi^+(x))^2] &= \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}'}{2\sqrt{k_0 k'_0}} \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^+(\mathbf{k}') e^{i(k_0 + k'_0)x_0} (m^2 - k_\nu k'_\nu) \int d\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')x} &= \\ = \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^+(-\mathbf{k}) e^{2ik_0 x_0} (m^2 - k_0^2 - \mathbf{k}^2), \end{aligned}$$

а так как  $m^2 - k_0^2 + \mathbf{k}^2 = 0$ , получаем

$$\int d\mathbf{x} [(\partial_\nu \varphi^+(x))^2 + m^2 (\varphi^+(x))^2] = 0.$$

Подобное соотношение имеет место и для квадратичной формы по  $\varphi^-$ . Поэтому

$$P^0 = \int d\mathbf{x} \partial_\nu \varphi^+(x) \partial_\nu \varphi^-(x) + m^2 \varphi^+(x) \varphi^-(x).$$

Подставляя в это выражение формулу (8), с помощью аналогичных выкладок находим теперь

$$P^0 = \int d\mathbf{k} k^0 \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}).$$

Соответствующее выражение для вектора импульса имеет вид

$$P^n = \int T^{0n} d\mathbf{x} = \int d\mathbf{k} k^n \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}), \quad n = 1, 2, 3.$$

Объединяя эти выражения, запишем их в форме, справедливой также и в том случае, если бы в процессе всех выкладок функции  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$  считать взаимно некоммутируемыми (т. е. не менять их порядка):

$$P^{\nu} = \frac{1}{2} \int dk k^{\nu} [\varphi^+(k) \varphi^-(k) + \varphi^-(k) \varphi^+(k)]. \quad (9)$$

Теперь виден смысл нормировочных множителей, введенных в (8). Произведения

$$n(k) = \varphi^+(k) \varphi^-(k) = |\varphi^+(k)|^2$$

выступают как средние плотности числа незаряженных, бесспиновых частиц массы  $m$ , обладающих импульсом  $k$  и энергией  $\sqrt{m^2 + k^2}$ . После квантования эти произведения превращаются в операторы, имеющие целочисленные собственные значения.

Практически важным является поле, соответствующее пи-мезонам (пионам). Это поле является псевдоскалярным. Тройка пионов  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ , отличающихся друг от друга лишь электрическим зарядом, равным  $0 \pm 1$ , образует изотопический триплет. Этому отвечает трехкомпонентная полевая функция  $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ , составляющие которой образуют вектор в трехмерном изотопическом пространстве.

Свободный лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\Phi_{,\nu} \Phi^{,\nu}) - \frac{m^2}{2} (\Phi \Phi) \quad (10)$$

и представляет собой сумму выражений лагранжианов для каждой из компонент изотопического вектора. Поэтому динамические величины, отвечающие преобразованиям группы Пуанкаре, представляются суммами выражений, полученных в §§ 3.1 и 3.2 для каждой из изотопических компонент.

Новая сохраняющаяся величина соответствует преобразованиям вращения в изотопическом пространстве и называется *вектором изотопического спина*.

**3.3. Векторное поле.** В качестве следующего примера рассмотрим векторное поле, используемое для описания частиц со спином 1. Это поле  $U_{\nu}$  состоит из четырех ( $\nu=0, 1, 2, 3$ ) компонент, которые образуют ковариантный 4-вектор, т. е. при лоренцевых поворотах (2.16) преобразуются по закону

$$U_{\mu}(x) \rightarrow U'_{\mu}(x') = U_{\mu}(x) + \delta U_{\mu}(x); \quad \delta U_{\mu} = \delta \Omega_{\mu\nu} U^{\nu}(x).$$

Лагранжиан векторного поля может быть сконструирован различными способами. Дело в том, что простейшее обобщение лагранжиана (1) в виде ковариантной суммы по компонентам

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} U_{\mu;\nu} U^{\mu;\nu} + \frac{m^2}{2} U_{\mu} U^{\mu} \quad (11)$$



не является единственно возможным лоренц-инвариантным выражением. К нему может быть прибавлен член, пропорциональный

$$U_{\mu;\nu}U^{\nu;\mu}, \quad (12)$$

который в силу (2.4) эквивалентен выражению

$$U_{\mu}^{\mu}U_{\nu}^{\nu} = (\partial U / \partial x)^2.$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно установить, что разность выписанных выражений представима в виде 4-дивергенции  $\partial_{\nu}F^{\nu}$ .

Лагранжиан (11) «хорош» тем, что все динамические величины для него являются ковариантными суммами (по  $\mu$ ) соответствующих выражений из (1) для однокомпонентного поля. Однако поскольку член, связанный с компонентой  $U_0$ , входит в такие суммы со знаком минус, его вклад в энергию оказывается отрицательным. Для разрешения этой трудности на компоненты  $U_{\mu}$  налагают инвариантное дополнительное условие

$$\partial^{\mu}U_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} U_{\mu}(x) \equiv (\partial U) = 0. \quad (13)$$

Это условие уменьшает количество линейно независимых компонент с четырех до трех и, как будет показано ниже, обеспечивает положительную определенность энергии векторного поля. Оставшиеся три независимые компоненты соответствуют трем возможным значениям проекции спина на заданную ось (1, 0, -1), т. е. описывают частицы со спином единица. Наложение дополнительного условия эквивалентно исключению частицы со спином нуль, приводящей в этой формулировке к отрицательной энергии.

Условие (13) совместно с уравнениями движения. Более того, путем надлежащей модификации лагранжиана (11) (добавлением члена вида (12))

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} U_{\nu}U^{\nu},$$

где

$$H_{\mu\nu} = \partial_{\mu}U_{\nu} - \partial_{\nu}U_{\mu}, \quad (14)$$

оно может быть получено как следствие уравнений движения

$$\partial_{\nu}H^{\nu\mu} - m^2U^{\mu} = (\square - m^2)U^{\mu} + \partial^{\mu}\partial_{\nu}U^{\nu} = 0. \quad (15)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Прока*. Дифференцируя их по  $x^{\mu}$ , после элементарных преобразований получаем дополнительное условие (13). Таким образом, уравнения Прока эквивалентны совокупности уравнений Клейна—Гордона и условию (13).

Динамические величины, соответствующие аналогичному лагранжиану комплексного векторного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \dot{H}_{\mu\nu}^* H^{\mu\nu} + m^2 \dot{U}_\nu U^\nu, \quad (16)$$

имеют вид:

тензор энергии-импульса —

$$T_{\mu\nu} = \dot{H}_{\mu\sigma}^* U_{;\nu}^\sigma + \dot{U}_{;\nu}^\sigma H_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (17a)$$

вектор тока —

$$J_\nu = i (\dot{U}^\sigma H_{\sigma\nu} - \dot{H}_{\sigma\nu}^* U^\sigma), \quad (17b)$$

тензор спинового момента —

$$S^{\nu(\mu\sigma)} = \dot{U}^\mu H^{\sigma\nu} - \dot{H}^{\mu\nu} U^\sigma + \dot{H}^{\sigma\nu} U^\mu - \dot{U}^\sigma H^{\mu\nu}. \quad (17b)$$

Для дальнейших вычислений следует разложить потенциалы на положительно- и отрицательно-частотные части и перейти к 3-мерному импульсному представлению:

$$U_\nu^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm ikx} U_\nu^\pm(k) \quad (18)$$

(и аналогично для  $\dot{U}^\pm$ ).

Подставляя разложения (18) в нулевые ( $\nu=0$ ) компоненты выражений (17) и выполняя интегрирование по  $d\mathbf{x}$ , получаем динамические величины:

$$P_\nu = - \int dk k_\nu [\dot{U}_\mu^-(k) U^{+\mu}(k) + \dot{U}_\mu^+(k) U^{-\mu}(k)], \quad (19)$$

$$Q = \int dk [\dot{U}_\mu^-(k) U^{+\mu}(k) - \dot{U}_\mu^+(k) U^{-\mu}(k)], \quad (20)$$

$$S = i \int dk \{ [\dot{U}^+(k) \times U^-(k)] - [\dot{U}^-(k) \times U^+(k)] \}. \quad (21)$$

Принимая во внимание следующие из определений (18) условия комплексного сопряжения

$$(U_\nu^\pm(k))^* = \dot{U}_\nu^\mp(k),$$

видим, что вклад в правую часть (19), отвечающий  $\mu=0$ , оказывается отрицательным, а энергия  $P_0$  — знаконеопределенной.

Как упоминалось выше, указанная трудность снимается при наложении дополнительных условий, которые в импульсном представлении (18) принимают вид

$$k^\nu U_\nu^\pm(k) = 0, \quad k^\nu \dot{U}_\nu^\pm(k) = 0. \quad (22)$$

В силу этих условий компоненты  $U_\nu$  не являются более независимыми. Выражая с их помощью компоненты  $U_0^\pm$  через

остальные:

$$U_0^\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{k_0} k_n U_n^\pm(\mathbf{k}), \quad \dot{U}_0^\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{k_0} k_n \dot{U}_n^\pm(\mathbf{k}) \quad (n=1, 2, 3),$$

получаем для квадратичной формы, входящей под знак интеграла в (19), следующее выражение, зависящее лишь от «пространственных» компонент потенциала:

$$- \dot{U}_\nu^{\pm} U^{\pm, \nu} = \dot{U}^{\pm}(\mathbf{k}) U^{\mp}(\mathbf{k}) - \frac{1}{k_0^2} (\mathbf{k} \dot{U}^{\pm}(\mathbf{k})) (\mathbf{k} U^{\mp}(\mathbf{k})). \quad (23)$$

**3.4. Локальный репер.** Это выражение диагонализуется линейной подстановкой:

$$U(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_1 a_1(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_2 a_2(\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \frac{k_0}{m} a_3(\mathbf{k}). \quad (24)$$

Здесь  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  суть единичные векторы, ортогональные волновому вектору  $\mathbf{k}$  и друг другу:

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \quad (i, j=1, 2, 3),$$

т. е. орты поперечной поляризации. Подстановка (24) представляет собой разложение векторного потенциала на продольную и поперечную составляющие по отношению к импульсу, т. е. переход к локальному реперу в импульсном пространстве. С помощью (24) получаем

$$- \dot{U}_\nu^{\pm}(\mathbf{k}) U^{\mp, \nu}(\mathbf{k}) = \dot{a}_n^{\pm}(\mathbf{k}) a_n^{\mp}(\mathbf{k}). \quad (25)$$

Внося это выражение в (19) и (20), приходим к диагональным выражениям для энергии-импульса и заряда, причем в новых переменных энергия оказывается явным образом положительно определенной:

$$P_\nu = \int d\mathbf{k} k_\nu \left[ \dot{a}_n^+(\mathbf{k}) a_n^-(\mathbf{k}) + \dot{a}_n^-(\mathbf{k}) a_n^+(\mathbf{k}) \right],$$

$$Q = \int d\mathbf{k} \left[ \dot{a}_n^+(\mathbf{k}) a_n^-(\mathbf{k}) - \dot{a}_n^-(\mathbf{k}) a_n^+(\mathbf{k}) \right].$$

Однако выражение для вклада в проекцию спина на направление вектора импульса

$$\Delta S_3 \sim i \left( \dot{a}_1^+(\mathbf{k}) a_2^-(\mathbf{k}) - \dot{a}_2^+(\mathbf{k}) a_1^-(\mathbf{k}) + \dot{a}_2^-(\mathbf{k}) a_1^+(\mathbf{k}) - \dot{a}_1^-(\mathbf{k}) a_2^+(\mathbf{k}) \right) \quad (26)$$

оказывается недиагональным.

Линейная подстановка

$$a_1^\pm = \frac{b_1^\pm + b_2^\pm}{\sqrt{2}}, \quad a_2^\pm = \frac{b_1^\pm - b_2^\pm}{i\sqrt{2}}, \quad a_3^\pm = b_3^\pm \quad (27)$$

(то же для сопряженных амплитуд  $\dot{a}_n^{\pm}$ ) диагонализирует это выра-

жение, не нарушая диагонального вида  $P_v$  и  $Q$ :

$$P_v = \int dk k_v \left[ b_n^*(\mathbf{k}) b_n^-(\mathbf{k}) + b_n^*(\mathbf{k}) b_n^+(\mathbf{k}) \right], \quad (28)$$

$$Q = \int dk \left[ b_n^*(\mathbf{k}) b_n^-(\mathbf{k}) - b_n^*(\mathbf{k}) b_n^+(\mathbf{k}) \right], \quad (29)$$

$$\Delta S_3 \sim \left[ b_1^*(\mathbf{k}) b_1^-(\mathbf{k}) - b_1^* b_1^+ + b_2^* b_2^+ - b_2^* b_2^- \right]. \quad (30)$$

Отсюда видно, что квадратичные комбинации амплитуд  $b^\pm$  и  $b^{\mp}$  могут рассматриваться как плотности среднего числа частиц, обладающих определенными значениями энергии, импульса, заряда и проекции спина на направление движения. При этом, например, величина  $b_2^*(\mathbf{k}) b_2^+(\mathbf{k})$  представляет плотность числа частиц с импульсом  $\mathbf{k}$ , энергией  $k_0$ , зарядом  $-1$  и проекцией спина на ось движения, равной  $+1$ ; соответственно  $b_2^*(\mathbf{k}) b_2^-(\mathbf{k})$  является плотностью числа частиц с импульсом  $\mathbf{k}$ , энергией  $k_0$ , зарядом  $-1$  и нулевой проекцией спина и т. д. Как мы убедимся ниже, в связи с этим после квантования амплитуда  $b_2^*(\mathbf{k})$  описывает рождение частицы с энергией  $k_0$ , импульсом  $\mathbf{k}$ , зарядом  $+1$ , проекцией спина  $+1$ , амплитуда  $b_2^-(\mathbf{k})$  описывает ее уничтожение и т. д.

Поэтому в соответствии с (24) и (27) амплитуды  $a_{1,2}$  отвечают линейно поляризованным, а  $b_{1,2}$  — поляризованным по кругу колебаниям.

Таким образом, комплексное векторное поле описывает положительно и отрицательно заряженные частицы с массой  $m \neq 0$  и тремя возможными значениями проекции вектора спина на направление движения, равными  $1, 0, -1$ .

## § 4. Электромагнитное поле

4.1. Потенциал электромагнитного поля. Свободное электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{H}}, & \text{rot } \mathbf{H} &= \dot{\mathbf{E}}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 0, & \text{div } \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

Для более симметричного описания электромагнитного поля вводится действительный ковариантный 4-вектор электромагнитного потенциала  $A_v = (A_0, -\mathbf{A})$  так, чтобы

$$\mathbf{E} = -\text{grad } A_0 - \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Компоненты «четырёхмерного ротора» потенциала  $A$  образуют известный антисимметричный тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1)$$

компоненты которого связаны с компонентами векторов напряженности электрического и магнитного полей соотношениями

$$E^n = -F_{n0}, \quad H^m = \frac{1}{2} \varepsilon_{mnp} F_{np} \quad (n, m, p = 1, 2, 3) \quad (2)$$

Эту связь удобно изобразить в следующем наглядном виде:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & H^3 & -H^2 \\ E^2 & -H^3 & 0 & H^1 \\ E^3 & H^2 & -H^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения Максвелла эквивалентны следующим уравнениям для компонент тензора  $F$ :

$$\left. \begin{aligned} \partial^\nu F_{\nu\mu} &= 0, \\ \partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Переходя в этих уравнениях от  $F$  к потенциалу  $A$ , убеждаемся, что вторая четверка уравнений (3) является следствием определения (1) и не приводит к какому-либо уравнению для  $A$ , а первая четверка дает

$$\square A_\nu + \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0 \quad (4)$$

— аналог уравнений Прока (3.15).

Отсюда видно, что формулировка уравнений электромагнитного поля в терминах потенциала  $A_\nu$  действительно проста, симметрична и явно ковариантна.

**4.2. Калибровочная инвариантность и условие Лоренца.** Процедура введения 4-потенциала  $A_\nu$  неоднозначна. Не составляет труда убедиться, что наблюдаемые величины  $E$ ,  $H$ ,  $F_{\mu\nu}$ , а также уравнения Максвелла, инвариантны относительно так называемого градиентного преобразования второго рода потенциала  $A_\nu$ :

$$A_\nu(x) \rightarrow A'_\nu(x) = A_\nu(x) + \partial_\nu f(x), \quad (5)$$

которое часто называют *калибровочным*.

Таким образом, потенциал  $A$ , который не является наблюдаемой величиной, оказывается неоднозначным. Входящая в правую часть (5) функция  $f$  произвольна. На нее обычно накладывают условие гладкости.

Подобная неоднозначность означает, что динамическое описание электромагнитного поля в терминах  $A$  содержит нефизическую степень свободы, обычно ассоциируемую со значением 4-дивергенции

$$\partial^\nu A_\nu(x) \equiv \partial A(x) = \chi(x),$$

для которой мы ввели специальное обозначение. Требование обращения в нуль этой величины

$$\partial A(x) = 0 \quad (6)$$

известно в теории электромагнитного поля как *условие Лоренца*. Поскольку, соблюдая явную релятивистскую ковариантность, при квантовании (см. ниже § 8.5) удовлетворить условию Лоренца как операторному соотношению не представляется возможным, нам окажется полезным изучить степень свободы, выражаемую наличием произвольной скалярной функции  $\chi(x)$  и обсудить ее физический смысл.

Для этого, во-первых, отвлечемся на время от свободного электромагнитного поля и допустим, что потенциал  $A_\nu(x)$  не удовлетворяет уравнению (4). Можно считать, что он описывает некоторое поле, порождаемое какими-либо внешними источниками и, например, удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\square A_\nu(x) + \partial_\nu(\partial A(x)) = J_\nu(x),$$

где  $J_\nu$  — ток источников.

Во-вторых, перейдем к импульсному представлению

$$A_\nu(x) = \int dk e^{ikx} A_\nu(k),$$

причем будем использовать один и тот же символ  $A$ , как для функций, так и для фурье-образов. В этом представлении операции дифференцирования по конфигурационным переменным (и им обратные операции) являются алгебраическими. Калибровочное преобразование (5) принимает вид

$$A'_\nu(k) = A_\nu(k) + k_\nu \bar{f}(k), \quad (7)$$

причем функция  $\bar{f}(k)$  отличается мнимой единицей от фурье-образа функции  $f(x)$ .

Введем проекционные операторы

$$P_{\mu\nu}^{\text{tr}}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad P_{\mu\nu}^{\text{long}}(k) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (8)$$

Отметим, что операция  $(k^2)^{-1}$  в  $x$ -представлении является интегральной и записывается в виде

$$\frac{1}{k^2} A_\nu \sim \int G(x-y) A_\nu(y) dy,$$

где  $G$  — функция Грина для уравнения д'Аламбера, определенная соотношением

$$\square G(x) = -\delta(x). \quad (9)$$

Функции Грина для уравнений свободных полей рассматриваются ниже в § 18. Там показано, что для однозначного определения решения уравнения (9) следует учесть граничные условия. В данном месте это обстоятельство не является существенным, и нам окажется вполне достаточным того, что функция  $G$  удовлетворяет уравнению (9). Разложим теперь 4-потенциал  $A$  на

поперечную и продольную составляющие, используя проекционные операторы (8):

$$A_v = A_v^{\text{tr}} + A_v^1, \quad A_v^{\text{tr}} = P_{\nu\mu}^{\text{tr}} A^\mu, \quad A_v^1 = P_{\nu\mu}^{\text{long}} A^\mu. \quad (10)$$

Эти составляющие удовлетворяют соотношениям

$$k^\nu A_\nu^{\text{tr}}(k) = 0, \quad k^\nu A_\nu^1(k) = kA(k). \quad (11)$$

Здесь удобно ввести специальное обозначение

$$kA(k) = \xi(k)$$

для величины, которая с точностью до мнимой единицы совпадает с фурье-образом функции  $\chi(x)$ .

Из формул (10) и (11) следует, что продольная составляющая электромагнитного поля определяется функцией  $\xi$ . Действительно,

$$A_\nu^1(k) = \frac{k_\nu}{k^2} \xi(k).$$

При калибровочном преобразовании (7) последняя преобразуется по формуле

$$\xi'(k) = \xi(k) + k^2 \bar{f}(k).$$

В то же время поперечная составляющая  $A^{\text{tr}}$  не испытывает изменений при преобразовании (7). Не составляет труда убедиться также, что калибровочно-инвариантный тензор  $F$  от  $A^1$  (от  $\xi$ ) не зависит. Очевидно поэтому, что степень свободы, описываемая скалярной функцией  $\xi(k)$ , несет в себе весь произвол, связанный с неоднозначностью 4-потенциала  $A$ , и является нефизической.

**4.3. Обобщенный лагранжиан.** Уравнения движения (4) могут быть получены с помощью вариационного принципа из лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{tr}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (12)$$

представляющего собой запись в терминах  $F$  известного выражения  $(1/2)(E^2 - H^2)$ . Нижний индекс «tr» отмечает, что лагранжиан (12) калибровочно-инвариантен и не содержит зависимости от продольных составляющих  $A^1$ .

Отметим, что дифференциальный оператор уравнения движения (4)

$$K_{\mu\nu}^{\text{tr}} = \partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \partial^2,$$

пропорциональный поперечному проекционному оператору  $P^{\text{tr}}$ , не имеет обратного, что затрудняет решение соответствующего неоднородного уравнения движения. Поперечный лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{tr}}$  также обладает некоторой спецификой с точки зрения гамильтонова формализма. Напомним, что в гамильтоновой формулировке

важную роль играют канонические импульсы, определяемые как производные лагранжиана по скоростям  $v_i = \dot{q}_i$ , т. е. по временным производным координат системы  $q_i$ . В случае системы с бесконечным числом степеней свободы — поля — в качестве обобщенных координат выбирают полевые функции  $\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\dot{x})$ . Поэтому обобщенные канонические импульсы классического поля определяются следующим образом:

$$\pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i(x)}.$$

Гамильтонов формализм представляет собой базу так называемого канонического квантования, которое изложено ниже в § 6. Отсылая читателя к этому параграфу за более подробным изложением гамильтонова формализма для полей, вернемся к лагранжиану (12).

Выбирая за обобщенные координаты компоненты 4-потенциала  $A_\nu$ , убеждаемся элементарной выкладкой, что обобщенные импульсы, отвечающие нулевой компоненте  $A_0$ , оказываются равными нулю:

$$\pi_0(x) = F_{00} = 0.$$

Иными словами, лагранжиан  $\mathcal{L}_{tr}$  не содержит зависимости от «скорости»  $A_0$ . Лагранжианы, обладающие подобными свойствами, иногда называются вырожденными или *сингулярными*. Они соответствуют системам со *связями*. Для описания систем со связями используется введенная Дираком (1968) обобщенная гамильтонова динамика. В нашем случае переход к обобщенной динамике эквивалентен следующей модификации лагранжиана:

$$\mathcal{L}_{tr} \rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a}{2} (\partial A)^2, \quad (13)$$

где  $a$  — некоторый численный коэффициент.

Этот лагранжиан приводит к следующим уравнениям движения:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} + a \partial_\mu (\partial A) = \square A_\mu + (1+a) \partial_\mu (\partial A) = 0, \quad (14)$$

из которых в частности следует, что продольная составляющая электромагнитного поля удовлетворяет уравнению д'Аламбера

$$\square \partial^\nu A_\nu(x) = \square \chi(x) = 0. \quad (15)$$

Отметим, что это свойство продольной составляющей сохраняется также и в случае, когда электромагнитное поле взаимодействует с другими полями, т. е. когда в правой части уравнений движения (14) стоят компоненты внешнего тока  $J_\nu$ , удовлетворяющие уравнению непрерывности  $\partial^\nu J_\nu = 0$ . Таким образом, продольная степень свободы  $\chi(x)$  не взаимодействует ни с поперечными составляющими  $A^{tr}$ , ни с другими полями.



Как видно, лагранжиан (13) и уравнения (14), вообще говоря, уже не являются инвариантными относительно преобразования (5). Таким образом, можно сказать, что введение в лагранжиан члена  $\sim (\partial A)^2$  фиксирует калибровку. В то же время выражения (13), (14) не меняются при специализированном калибровочном преобразовании

$$A'_\nu(x) = A_\nu(x) + \partial_\nu f_0(x), \quad (16)$$

калибровочная функция которого подчиняется уравнению д'Аламбера

$$\square f_0(x) = 0. \quad (17)$$

Введение в лагранжиан фиксирующего калибровку члена приводит также к тому, что оператор уравнения движения

$$K_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \square + (1+a) \partial_\mu \partial_\nu \rightarrow g_{\mu\nu} k^2 - (1+a) k_\mu k_\nu = \\ = k^2 P_{\mu\nu}^{\text{tr}}(k) + a k^2 P_{\mu\nu}^1(k)$$

перестает быть сингулярным, т. е. обладает обратным

$$K_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{k^2} P_{\mu\nu}^{\text{tr}}(k) + \frac{d_1}{k^2} P_{\mu\nu}^1(k), \quad d_1 = \frac{1}{a}. \quad (18)$$

**4.4. Диагональная калибровка.** Если фиксирующий калибровку коэффициент  $d_1$  равен единице, то мы приходим к диагональным выражениям для  $K$  и  $K^{-1}$ :

$$d_1 = 1: K_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} k^2, \quad K_{\mu\nu}^{-1} = g_{\mu\nu} (k^2)^{-1}.$$

Такая калибровка называется диагональной. В этой калибровке лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{diag}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial A)^2$$

путем интегрирования по частям может быть преобразован к виду

$$\mathcal{L}_{\text{diag}} = -\frac{1}{2} \partial^\nu A_\mu(x) \partial_\nu A^\mu(x), \quad (19)$$

представляющему ковариантную сумму лагранжианов для каждой из компонент  $A_\mu$  по отдельности.

Лагранжиан (19) приводит к уравнениям движения

$$\square A_\mu(x) = 0 \quad (20)$$

в форме уравнений д'Аламбера. Этот лагранжиан окажется наиболее удобным для квантования. По физическому содержанию (наблюдаемые поля  $E$ ,  $H$ ) лагранжиан (19), так же как и более общее выражение (13), эквивалентен исходному «поперечному» лагранжиану (12).

Отметим еще, что уравнения движения (20) и лагранжиан (19), представляя собой частный случай общих соотношений (13) и (14), являются инвариантными относительно преобразования (16). В любой фиксированной системе отсчета функцию  $f_0$  этого преобразования можно выбрать таким образом, чтобы нулевая компонента потенциала  $A_0$ , удовлетворяющая свободному уравнению (20), обратилась в нуль. Условие Лоренца принимает при этом вид

$$\operatorname{div} A = 0. \quad (21)$$

Соответствующая калибровка называется *кулоновской*.

В импульсном представлении уравнение (21) выглядит следующим образом:

$$kA(k) = 0.$$

Как видно, в кулоновской калибровке электромагнитное поле удовлетворяет условию поперечности в обычном (трехмерном) смысле. Таким образом, несмотря на то, что электромагнитное поле описывается 4-компонентным потенциалом, физический смысл имеют лишь две линейно независимые компоненты, ортогональные волновому вектору  $k$ . Фактическое сведение 4-компонентного поля к двухкомпонентному, происходящее вследствие градиентной инвариантности, тесно связано с равенством нулю массы покоя частиц поля — фотонов. Именно в силу этого важного свойства в уравнениях поля содержатся лишь производные от  $A_\nu$  и возникает свойство калибровочной инвариантности электромагнитного поля.

Из лагранжиана (19) стандартным приемом получаем: тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = -A_\sigma^\mu A^{\sigma;\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L};$$

пространственные плотности 4-вектора  $P^\nu$

$$T^{00} = -\frac{1}{2} (\dot{A}^\nu \dot{A}_\nu + \partial_n A^\nu \partial_n A_\nu), \quad T^{0k} = \dot{A}_\nu \partial^k A^\nu;$$

тензор спинового момента

$$S^{\tau(\nu\mu)} = A^\mu A^\nu{}_{;\tau} - A^\nu A^\mu{}_{;\tau};$$

пространственную плотность вектора спина

$$S = [A(x) \times \dot{A}(x)].$$

Условие Лоренца (6) следует наложить дополнительно к лагранжу формализму.

Для вычисления динамических инвариантов произведем разбиение на частотные слагаемые и введем импульсное представ-

ление для свободного поля

$$A_{\nu}^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm ikx} A_{\nu}^{\pm}(k). \quad (22)$$

**4.5. Переход к локальному реперу.** Для проведения диагонализации в импульсном представлении (22) необходимо разложить поле по составляющим, связанным с локальным репером. Из-за равенства нулю массы покоя ( $m=0$ ) преобразование (3.24) должно быть модифицировано. Представим  $A(k)$  в виде суммы поперечных, продольной и временной составляющих

$$A_{\nu}^{\pm}(k) = e_{\nu}^1 a_1^{\pm}(k) + e_{\nu}^2 a_2^{\pm}(k) + e_{\nu}^3 a_3^{\pm}(k) + e_{\nu}^0 a_0^{\pm}(k). \quad (23)$$

Здесь  $e^1(k)$  и  $e^2(k)$  — чисто пространственные поперечные орты, подобные введенным в (3.24),  $e^3 = k/|k|$  — продольный орт, причем

$$e_i^i = 0, \quad e^i e^j = \delta_{ij}, \quad [e^i \times e^j] = e^k \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

$a^0$  — единичный временной 4-вектор:  $e_{\nu}^0 = \delta_{\nu 0}$ . Легко проверить, что преобразование (23) оставляет диагональной основную квадратичную форму

$$A_{\nu}^{+}(k) A_{\nu}^{-}(k) = g^{\sigma\rho} a_{\sigma}^{+}(k) a_{\rho}^{-}(k). \quad (24)$$

Внося разложение (23) в условие Лоренца, записанное по отдельности для положительно- и отрицательно-частотных компонент, получим два соотношения

$$|k| a_3^{\pm}(k) - k_0 a_0^{\pm}(k) = 0.$$

Замечая, что, ввиду равенства нулю массы  $m$ ,  $|k| = k_0$ ; находим отсюда

$$a_3^{\pm}(k) a_3^{\mp}(k) = a_0^{\pm}(k) a_0^{\mp}(k). \quad (25)$$

Смысл полученного соотношения (25) состоит в том, что в силу условия Лоренца плотности средних чисел «продольных» фотонов  $a_3^{\pm} a_3^{\mp}$  и «временных» фотонов  $a_0^{\pm} a_0^{\mp}$  равны друг другу. Поскольку их вклады в правую часть (24) противоположны по знаку, можно поэтому сказать, что «продольные» и «временные» фотоны как бы «компенсируют» друг друга. Подставляя (25) в (24), получаем

$$-A_{\nu}^{+}(k) A_{\nu}^{-}(k) = a_1^{\pm}(k) a_1^{\mp}(k) + a_2^{\pm}(k) a_2^{\mp}(k).$$

Вычисляя далее 4-вектор энергии-импульса

$$P^{\nu} = \sum_{s=1,2} \int dk k^{\nu} a_s^{\pm}(k) a_s^{\mp}(k),$$

находим, что в рассматриваемом случае, как и для векторного поля, энергия оказывается положительно определенной лишь в силу условия Лоренца.

Определяя затем вектор спина

$$S = i \int dk [A^+(k) \times A^-(k)] = i \int dk \varepsilon_{abc} e^a a_b^+(k) a_c^-(k),$$

находим его проекцию на направление волнового вектора в виде

$$\Delta S_3 \sim i [a_1^+(k) a_2^-(k) - a_2^+(k) a_1^-(k)].$$

Вводя новые амплитуды  $b_1$  и  $b_2$ , как в § 3, получаем для  $P_\nu$  и  $S_3$  «диагональные» выражения

$$P_\nu = \int dk k_\nu [b_1^+(k) b_1^-(k) + b_2^+(k) b_2^-(k)], \quad (26)$$

$$\Delta S_3 \sim [b_1^+(k) b_1^-(k) - b_2^+(k) b_2^-(k)], \quad (27)$$

из которых непосредственно вытекает, что произведения

$$n_s(k) = b_s^+(k) b_s^-(k) \quad (s = 1, 2) \quad (28)$$

могут рассматриваться как плотности средних чисел частиц с массой нуль, импульсом  $k$ , энергией  $|k|$ , обладающих проекцией спинового момента на направление волнового вектора  $k$ , равной  $+1$  ( $s=1$ ) и  $-1$  ( $s=2$ ). Фактически мы имеем дело с фотонами.

Таким образом, переход к импульсному представлению позволяет наглядно убедиться, что электромагнитное поле описывает поперечные фотоны с двумя возможными значениями проекции спина на направление движения.

## § 5. Поле Дирака

**5.1. Уравнение Дирака и матрицы Дирака.** Спинорными полями обычно называют поля, преобразующиеся по спинорным представлениям группы Пуанкаре. Эти поля после квантования описывают частицы с полуцелым спином ( $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ). Простейшим из спинорных полей является поле спина  $1/2$ . Такое поле для частиц с отличной от нуля массой покоя было введено Дираком для описания электронов. Оно описывает также мюоны, нуклоны (протоны и нейтроны) и некоторые гипероны. Это поле мы и будем далее называть *полем Дирака*. Соответствующие уравнения, следуя Дираку, получим путем «факторизации» оператора Клейна — Гордона:

$$\square - m^2 = P_\nu P^\nu - m^2,$$

где для удобства записи использованы обычные квантовомеханические обозначения

$$P_\nu = i \frac{\partial}{\partial x^\nu} = i \partial_\nu.$$

Оператор  $\square - m^2$  является квадратичным относительно производных  $\partial_\nu$  и, как легко убедиться, не может быть представлен

в виде произведения двух линейных по  $P_\nu$  сомножителей с численными коэффициентами. В самом деле, если по аналогии с формулой разбиения на множители разности двух квадратов попытаться записать его в виде

$$\square - m^2 = (P + m)(P - m),$$

где  $P$  — некоторая линейная комбинация операторов  $P_\nu$  с коэффициентами  $\gamma^\nu$ :

$$P = P_\nu \gamma^\nu,$$

то для этого необходимо потребовать, чтобы выполнялось соотношение

$$P_\nu P^\nu = (P_\mu \gamma^\mu)^2,$$

раскрывая правую часть которого, найдем условие, определяющее коэффициенты  $\gamma$ :

$$\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Ввиду того, что, согласно этому условию величины  $\gamma^\nu$  с различными индексами антикоммутируют, они не являются числами и могут быть выбраны в виде *матриц*.

С помощью этих величин оператор Клейна — Гордона может быть представлен в виде произведения двух коммутирующих матричных операторов:

$$\square - m^2 = (i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m),$$

и, для того чтобы функция поля подчинялась уравнению Клейна — Гордона

$$(\square - m^2)\psi = 0,$$

мы можем потребовать, чтобы она удовлетворяла одному из уравнений первого порядка

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi(x) = 0 \quad \text{или} \quad (i\gamma^\nu \partial_\nu + m)\psi(x) = 0.$$

В соответствии с традицией мы выберем в качестве уравнения движения для спинорного поля первое из этих уравнений

$$(i\hat{d} - m)\psi(x) = 0, \quad \hat{d} \equiv \gamma^\nu \partial_\nu. \quad (2)$$

Уравнение (2) разумеется является менее общим, нежели уравнение Клейна — Гордона. Можно ожидать поэтому, что оно содержит более детальную информацию. Как известно, такое положение действительно имеет место, поскольку с помощью уравнения (2) Дираку впервые удалось описать спин электрона, равный  $1/2$ . Уравнение (2) называется *уравнением Дирака*, а матрицы  $\gamma^\nu$ , определяемые соотношениями (1), — *матрицами Дирака*.

Благодаря матричному характеру дифференциального оператора уравнения Дирака функция поля  $\psi$  оказывается многокомпонентной. Как показано в Дополнении II, в простейшем случае поле Дирака  $\psi$  представляет собой 4-компонентный спинор, часто изображаемый в виде столбца

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix},$$

который для экономии места мы будем также записывать следующим образом:  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ .

Таким образом, одно матричное уравнение (2) содержит четверку уравнений

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - mI)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4).$$

Четыре величины  $\gamma^\nu$  представляют собой квадратные матрицы четвертого ранга с матричными элементами  $\gamma_{\alpha\beta}^\nu$ , а  $I$  — единичную диагональную матрицу ( $I_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ), символ которой мы будем часто опускать. Основные свойства матриц Дирака определяются (анти)коммутационным соотношением (1) и подробно изложены в Дополнении II. Из (1) в частности вытекает, что матрицы Дирака могут быть выбраны унитарными:

$$\gamma^\nu \gamma^{\nu\dagger} = \gamma^{\nu\dagger} \gamma^\nu = I, \quad (\text{нет суммирования по } \nu),$$

если условия эрмитова сопряжения наложить в виде

$$\gamma^{\nu\dagger} = g_{\nu\mu} \gamma^\mu \equiv \gamma_\nu. \quad (3)$$

Как видно, операция опускания (и поднятия) лоренцева индекса у матриц Дирака выполняется по обычным правилам. Эрмитово сопряженный спинор  $\bar{\psi}$  представляет собой 4-компонентную строку  $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3, \bar{\psi}_4)$ , элементы которой получаются из компонент  $\psi_\alpha$  комплексным сопряжением. Умножая этот спинор справа на матрицу  $\gamma^0$ , получаем так называемый дираковски сопряженный (далее — просто сопряженный) спинор

$$\bar{\psi}(x) = \psi^*(x) \gamma^0.$$

С учетом (3) можно показать (см. Дополнение II), что сопряженный спинор  $\bar{\psi}$  удовлетворяет уравнению

$$i\partial_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu + m\bar{\psi}(x) = 0. \quad (4)$$

Напомним еще, что каждая из компонент спинора  $\psi(x)$  удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно подействовать на уравнение Дирака (2)

слева оператором  $i\hat{d} + m$  и воспользоваться коммутационным соотношением (1).

Отметим, что, согласно принятому обычаю, произведение  $\bar{\psi}0\psi$ , где  $0$  — некоторая матрица, подразумевает суммирование по спинорным индексам

$$\bar{\psi}0\psi = \bar{\psi}_\alpha 0_{\alpha\beta} \psi_\beta$$

и обозначает число, тогда как выражение вида  $\psi\bar{\psi}$  является матрицей

$$\psi\bar{\psi} = A, \quad A_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \bar{\psi}_\beta.$$

**5.2. Лагранжев формализм.** Уравнение Дирака (2) и ему сопряженное уравнение (4) могут быть получены из лагранжиана

$$\mathcal{L} = (i/2) [\bar{\psi}(x) \gamma^\nu \partial_\nu \psi - \partial_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x)] - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (5)$$

с помощью вариационного принципа. Особенность этого лагранжиана состоит в том, что он обращается в нуль, если входящие в него  $\bar{\psi}$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнениям движения.

Используя теорему Нётер, получим отсюда тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = (i/2) [\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial^\nu \psi(x) - \partial^\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)] \quad (6)$$

и вектор тока

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x). \quad (7)$$

При выводе выражения (6) были использованы уравнения движения.

Для вычисления тензора спина заметим, что после выполнения суммирования по спинорным индексам формула (2.24) принимает вид

$$S^{\tau(\mu\nu)} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{;\tau}} A^{\psi(\mu\nu)} \psi(x) - \bar{\psi}(x) A^{\bar{\psi}(\mu\nu)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{;\tau}},$$

причем входящие в нее инфинитезимальные генераторы  $A^\psi$ ,  $A^{\bar{\psi}}$  с помощью формул бесконечно малых преобразований Лоренца

$$\psi'(x') = \left(1 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \varphi\right) \psi(x), \quad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \left(1 + \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \varphi\right),$$

следующих из формул (ДП.16, 18, 20), определяются в виде (см. Упражнение С29)

$$A^{\psi(\mu\nu)} = - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu}, \quad A^{\bar{\psi}(\mu\nu)} = \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu},$$

где  $\sigma^{\mu\nu}$  — так называемый матричный тензор спина (см. формулу (ДП.2)). Поэтому

$$S^{\tau(\mu\nu)} = (1/4) \bar{\psi}(x) (\gamma^\tau \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \gamma^\tau) \psi(x). \quad (8)$$

**5.3. Импульсное представление.** С учетом того, что компоненты дираковского спинора  $\psi_\alpha(x)$  удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, импульсное представление запишем в виде

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dp e^{ipx} \delta(p^2 - m^2) \tilde{\psi}(p),$$

причем амплитуда  $\tilde{\psi}$  удовлетворяет уравнению Дирака в импульсном представлении

$$(\hat{p} + m) \tilde{\psi}(p) |_{p^2 = m^2} = 0.$$

(Напомним, что в наших обозначениях  $\hat{p} = \gamma^\nu p_\nu$ .)

Разлагая, как обычно, функцию поля на частотные составляющие  $\psi = \psi^+ + \psi^-$  и интегрируя явно по  $p_0$ , определим формулы трехмерного импульсного представления в виде

$$\psi^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{p} \psi^\pm(\mathbf{p}) \exp(\pm i p x). \quad (9)$$

Здесь под знаком интеграла (и далее везде в этом параграфе)

$$p_0 = + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Спиноры  $\psi^\pm(\mathbf{p})$  удовлетворяют матричным уравнениям

$$(m \pm \hat{p}) \psi^\pm(\mathbf{p}) = 0. \quad (10)$$

Соответствующие уравнения для сопряженных спиноров будут

$$\bar{\psi}^\pm(\mathbf{p}) (m \mp \hat{p}) = 0. \quad (11)$$

Явный вид компонент  $\psi_\alpha^\pm$  и  $\bar{\psi}_\beta^\pm$  зависит от представления дираковских матриц  $\gamma$  и может быть определен следующим образом. В силу ковариантности уравнения (10) его можно рассматривать в какой-либо фиксированной системе отсчета, имея в виду, что переход к любой другой системе может быть всегда осуществлен с помощью приведенных в Дополнении II преобразований. Выбирая в качестве таковой систему, в которой  $\mathbf{p} = 0$ , находим из (10)

$$(\gamma^0 \pm I) \psi^\pm(0) = 0.$$

Отсюда в стандартном представлении (ДII.5) получаем

$$\psi_\alpha^-(0) = c_1 \delta_{1\alpha} + c_2 \delta_{2\alpha}, \quad \psi_\beta^+(0) = c_3 \delta_{3\beta} + c_4 \delta_{4\beta}. \quad (12)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  — спинорные индексы, а  $\delta_{\alpha\beta}$  — символы Кронекера.

Решение для произвольного  $\mathbf{p}$ , отличного от нуля, может быть получено из (12) соответствующим лоренцевым преобразованием.

Уравнения, которым удовлетворяют  $\psi^+$  и  $\psi^-$ , могут быть также представлены в форме

$$(\pm \gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + m) \psi^\pm(\pm \mathbf{p}) = 0,$$



в которой они отличаются друг от друга лишь знаком при  $\rho_0$ . Каждое из них, как только что установлено, обладает двумя линейно независимыми решениями. Отсюда следует, что уравнение Дирака для каждого заданного значения 4-вектора  $p$  (знак компоненты  $\rho_0$  фиксирован!) обладает лишь двумя линейно независимыми решениями.

Соответственно этому сопряженный спинор  $\bar{\psi}$  при фиксированном знаке  $\rho_0$  также обладает двумя линейно независимыми решениями. Из комплексности рассматриваемых решений уравнения Дирака вытекает, что они описывают частицы, отличающиеся зарядом (точнее, частицы и античастицы). Наличие двух линейно независимых решений означает, что указанные частицы могут находиться в двух различных состояниях, отличающихся, как будет показано ниже, знаком проекции спина на направление движения.

**5.4. Разложения по спиновым состояниям.** Обозначая нормированные (соотношения нормировки см. ниже — (16)) линейно независимые решения для  $\rho_0 > 0$ , т. е. для первого из уравнений (10), через  $v^{s,+}(p)$ , а для  $\rho_0 < 0$ , т. е. для второго из уравнений (10), через  $v^{s,-}(p)$  ( $s=1, 2$ ), запишем разложения функций  $\psi^\pm(p)$  по спиновым состояниям в виде

$$\psi_\alpha^\pm(p) = \sum_{s=1, 2} a_s^\pm(p) v_\alpha^{s,\pm}(p) = a_s^\pm(p) v_\alpha^{s,\pm}(p). \quad (13)$$

Соответственно для сопряженного спинора

$$\bar{\psi}^\pm(p) = \bar{a}_s^\pm(p) \bar{v}^{s,\pm}(p) \equiv \bar{a}_s^\pm(p) v^{s,\pm}(p) \gamma^0. \quad (14)$$

Так как  $\bar{\psi}^+$  и  $\bar{\psi}^-$  представляют собой положительно- и отрицательно-частотные части функции  $\bar{\psi}$ , условия эрмитова сопряжения для нормированных спиноров  $v$  имеют следующий вид:

$$(v^{s,\pm}(p))^* = v^{s,\mp}(p). \quad (15)$$

Поэтому условия ортонормированности спиноров  $v$  можно записать в форме

$$v^{s,\pm}(p) v^{r,\mp}(p) \equiv \sum_{\alpha=1, 2, 3, 4} v_\alpha^{s,\pm}(p) v_\alpha^{r,\mp}(p) = \delta^{sr}. \quad (16)$$

Путем чисто алгебраических преобразований из (15) и (16) и уравнений Дирака можно получить ряд соотношений для квадратичных форм спиноров  $v$  и  $\bar{v} = v\gamma^0$ , важнейшими из которых являются:

условие ортонормированности для дираковски сопряженных спиноров

$$\bar{v}^{s,\pm}(p) v^{r,\mp}(p) = \pm \frac{m}{\rho_0} \delta^{sr}; \quad (17)$$

условие взаимной ортогональности спиноров  $v$  с аргументами, отличающимися знаками,

$$v^{s*} \pm (\mathbf{p}) v^{r*} \pm (-\mathbf{p}) = 0; \quad (18)$$

соотношения ( $l, n = 1, 2, 3$ )

$$\left. \begin{aligned} v^{s*} \pm (\mathbf{p}) (p^n \gamma^l - p^l \gamma^n - m \gamma^n \gamma^m) v^{r*} \pm (-\mathbf{p}) = 0, \\ \sum_n p_n v^{s*} \pm (\mathbf{p}) (\gamma^n \gamma^l - \gamma^l \gamma^n) v^{r*} \mp (-\mathbf{p}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и, наконец, формулы суммирования по спиновому индексу

$$v_{\alpha}^{s*} \pm (\mathbf{p}) \bar{v}_{\beta}^{s*} \mp (\mathbf{p}) = \frac{(\hat{p} \mp m)_{\alpha\beta}}{2p_0}. \quad (20)$$

**5.5. Динамические инварианты.** Подставляя (9), (13), (14) в (6) и интегрируя  $T^{0\nu}$  по  $dx$  с учетом условий ортонормированности (16), получаем 4-вектор энергии-импульса

$$P_{\nu} = \int dk k_{\nu} [a_s^+ (\mathbf{k}) a_s^- (\mathbf{k}) - a_s^- (\mathbf{k}) a_s^+ (\mathbf{k})]. \quad (21)$$

Принимая во внимание, что, согласно использованным определениям, законы комплексного сопряжения амплитуд импульсного представления имеют вид  $(a^{\pm})^* = \bar{a}^{\mp}$ , убеждаемся, что следующее из (21) выражение для энергии

$$P_0 = \int dk k_0 [a_s^+ (\mathbf{k}) a_s^- (\mathbf{k}) - a_s^- (\mathbf{k}) a_s^+ (\mathbf{k})] \quad (22)$$

не является положительно определенным. Положительная определенность энергии спинорного поля достигается лишь в квантовой теории квантованием по Ферми — Дираку.

Переходя к вычислению вектора спина, отметим, что в стандартном представлении (ДП.5) компоненты тензора спина  $\sigma^{\mu\nu}$  могут быть выражены через матрицы  $\alpha_i$  и  $\sigma_j$  следующим образом:

$$\sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma^{00} & \sigma^{01} & \sigma^{02} & \sigma^{03} \\ \sigma^{10} & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{20} & \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{30} & \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha_1 & i\alpha_2 & i\alpha_3 \\ -i\alpha_1 & 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 \\ -i\alpha_2 & -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 \\ -i\alpha_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Поэтому, полагая в (8)  $\tau = 0$  и  $\mu, \nu = 1, 2, 3$ , убеждаемся, что пространственная плотность вектора спина выражается через матричный вектор  $\sigma$ :

$$S = (1/2) \int \psi^* (x) \sigma \psi (x) dx. \quad (24)$$

В противоположность спинам векторного и электромагнитного полей вектор спина (24) поля Дирака не сохраняется во времени (что связано с отсутствием симметрии у тензора энергии-импульса).

Однако в том случае, когда функции поля  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  не зависят от некоторых из координат  $x^0, x^1, \dots$ , можно добиться выполнения уравнения непрерывности для отдельных компонент тензора  $S$ , а следовательно, сохранения во времени соответствующих интегралов. Так, полагая  $\partial/\partial x_1 = \partial/\partial x_2 = 0$ , получим

$$\partial_\nu S^\nu(12) = 0,$$

откуда следует, что проекция вектора спина на ось  $x^2$

$$S_3 = \int dx S^0(12)$$

сохраняется во времени. В импульсном представлении эта картина соответствует сохранению проекции вектора спина на направление движения.

Переходя в (24) к трехмерному импульсному представлению и выполняя интегрирование по трехмерному конфигурационному пространству, получаем

$$\Delta S \sim (1/2) \{ \psi^+(k) \sigma \psi^-(k) + \psi^-(k) \sigma \psi^+(k) + e^{2ik_0 x_0} \psi^+(k) \sigma \psi^+(k) + e^{-2ik_0 x_0} \psi^-(k) \sigma \psi^-(k) \}.$$

Ограничиваясь рассмотрением компоненты  $S_3$ , воспользуемся первым из соотношений (19), которое представим в форме

$$v^\pm(k) \sigma v^\pm(-k) = \frac{i}{m} v^\pm(k) [k \times \gamma] v^\pm(-k).$$

В силу этого соотношения в системе отсчета, где  $k_1 = k_2 = 0$ , зависящие от времени члены в  $S_3$  исчезают, и мы приходим к выражению

$$\Delta S_3 \sim (1/2) [a_s^+(k) a_r^-(k) v^s, + (k) \sigma_3 v^r, - (k) + a_s^-(k) a_r^+(k) v^s, - (k) \sigma_3 v^r, + (k)], \quad (25)$$

для дальнейшей конкретизации которого удобно перейти к какому-либо частному представлению матриц Дирака. В стандартном представлении матрица  $\sigma_3$  диагональна

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}.$$

Выбирая при этом нормированные спиноры в системе  $k_1 = k_2 = 0$

В виде

$$\left. \begin{aligned} v^{1,-} &= N^{-1} \left( 1, 0, \frac{k_3}{k_0+m}, 0 \right)^T, \\ v^{2,-} &= N^{-1} \left( 0, 1, 0, \frac{-k_3}{k_0+m} \right)^T, \\ v^{1,+} &= N^{-1} \left( \frac{k_3}{k_0+m}, 0, 1, 0 \right)^T, \\ v^{2,+} &= N^{-1} \left( 0, \frac{-k_3}{k_0+m}, 0, 1 \right)^T, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где  $N$  — нормировочный множитель, равный

$$N = \left[ 1 + \left( \frac{k_3}{k_0+m} \right)^2 \right]^{1/2} = \left( \frac{2k_0}{k_0+m} \right)^{1/2},$$

находим, что выражение (25) принимает форму

$$\Delta S_3 \sim (1/2) [a_1^+ a_1^- - a_2^+ a_2^- + a_1^- a_1^+ - a_2^- a_2^+]. \quad (27)$$

Сравнивая выражения для энергии-импульса (21), проекции вектора спина (27) и непосредственно вытекающего из (7) выражения для заряда

$$Q = \int \psi^*(x) \psi(x) dx = \int dk [a_s^+(k) a_s^-(k) + a_s^-(k) a_s^+(k)], \quad (28)$$

находим, что поле Дирака соответствует заряженным частицам с возможными значениями проекции спина на заданную ось, равными  $\pm 1/2$ . Более детальная классификация возможных значений энергии-импульса, заряда и проекции спина будет проведена после квантования (§ 9), где она получит полное и однозначное обоснование.

## Глава II. КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ

### § 6. Квантование полей

**6.1. Сущность процедуры квантования полей.** Квантование волновых полей — процедура, по сути своей аналогичная квантованию в нерелятивистской квантовой механике. Специфика состоит в том, что, в отличие от физических систем с конечным числом степеней свободы, обычно рассматриваемых в квантовой механике, волновые поля соответствуют системам с бесконечным числом степеней свободы. Такую систему можно рассматривать как предел системы с большим числом степеней свободы  $N$  при  $N \rightarrow \infty$ . В обычной квантовой механике подобный пример дает система, состоящая из большого числа частиц. Частным случаем такого типа является система  $N$  осцилляторов.

Важным техническим аспектом процедуры квантования полей является *представление чисел заполнения* (или, как его часто называют, — представление вторичного квантования \*). Это представление наиболее просто вводится на примере квантовомеханического осциллятора и широко используется при рассмотрении систем из большого числа тождественных частиц. Отсылая читателя за техническими деталями к стандартным курсам квантовой механики (см., например, Давыдов (1973), § 33; Мессиа (1978), гл. XII; Елютин, Кривченков (1976), гл. III, § 12; Медведев, (1977), ч. III, § 10), напомним здесь лишь логику основных рассуждений.

Гамильтониан одномерного осциллятора с единичной массой запишем в виде

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2). \quad (1)$$

Волновые функции  $\psi_n$  различных состояний осциллятора удов-

---

\*) Термин «вторичный» как бы подразумевает наличие первичного квантования. На самом деле квантование проводится только один раз и этот термин оказывается дезориентирующим. Мы будем, по возможности, избегать его.

летворяют уравнению

$$H\psi_n = E_n\psi_n, \quad E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

и могут быть получены одна из другой с помощью некоторых операторов  $a$  и  $a^+$ :

$$a^+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}, \quad a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}, \quad (2)$$

обычно реализуемых с помощью комбинации операторов дифференцирования и умножения на координату в переменных  $p$  и (или)  $q$  (здесь положено  $\hbar = 1$ ), т. е.

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( \check{q} + \frac{i\check{p}}{\omega} \right), \quad a^+ = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( \check{q} - \frac{i\check{p}}{\omega} \right),$$

причем  $\check{p} = -i\partial/\partial q$ ,  $\check{q} = q$  в координатном представлении и  $\check{p} = p$ ,  $\check{q} = i\partial/\partial p$  — в импульсном. (Здесь крышка сверху « $\check{\phantom{x}}$ » обозначает оператор.) Оператор  $a^+$  повышает индекс состояния на единицу (а энергию на  $\hbar\omega$ ) и называется *повышающим*. Оператор  $a$  соответственно — *понижающим*. Основное состояние удовлетворяет соотношению

$$a\psi_0 = 0. \quad (3)$$

Числовые множители  $\sqrt{n+1}$ ,  $\sqrt{n}$  вводятся в (2) из соображений нормировки состояний (см. ниже формулу (6)).

Из формул (2) вытекает, что состояния  $\psi_n$  являются собственными функциями произведений  $a^+a$  и  $aa^+$  с собственными значениями  $n+1$  и  $n$ . Поэтому можно написать

$$a^+a = \check{n} + 1, \quad aa^+ = \check{n}, \quad \check{n}\psi_n = n\psi_n,$$

а также

$$\left. \begin{aligned} [a, a^+] &= a^+a - aa^+ = 1, \\ [a, a] &= [a^+, a^+] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Оператор  $\check{n}$  уместно назвать оператором индекса состояния. Гамильтониан может быть теперь представлен в виде

$$H = \omega(\check{n} + 1/2) = \frac{\omega}{2}(a^+a + aa^+). \quad (5)$$

**6.2. Корпускулярная трактовка представления чисел заполнения.** Переход к представлению чисел заполнения заключается в том, что вместо того, чтобы задавать  $\psi$ -функцию как функцию от координат (координатное представление) или как функцию от импульсов (импульсное представление), состояние системы харак-

теризуют числом заполнения  $n$  — номером возбужденного состояния.

Факт линейной зависимости гамильтониана (5) от оператора числа заполнения  $\hat{n}$  в осцилляторной задаче является основой ее корпускулярной трактовки.

Условимся для этого представлять себе осциллятор, находящийся в возбужденном состоянии  $\psi_n$  ( $n \geq 1$ ), как совокупность  $n$  квантов возбуждения, каждый из которых имеет энергию  $\omega$  (т. е.  $\hbar\omega$ ). Эквидистантность уровней, т. е. факт линейной зависимости энергии от числа  $n$ , приводит к важному свойству неразличимости квантов возбуждения. В такой трактовке операторы повышения и понижения номера возбужденного состояния  $a$  и  $a^\dagger$  приобретают смысл операторов рождения и уничтожения квантов возбуждения. Индекс  $n$  равен теперь числу квантов возбуждения в состоянии  $\psi_n$ , а оператор  $\hat{n}$  становится оператором числа квантов.

Состояние  $\psi_n$ , содержащее  $n$  квантов (частиц) может быть получено из основного состояния  $\psi_0$ , не содержащего частиц (которое вследствие этого уместно назвать вакуумным состоянием),  $n$ -кратным применением оператора рождения

$$\psi_n = \frac{a^\dagger{}^n}{\sqrt{n!}} \psi_0. \quad (6)$$

Числовой множитель  $(n!)^{-1/2}$  в этой формуле возникает в соответствии с первой из формул (2) и обеспечивает равенство норм состояний  $\psi_n$  с различными  $n$ .

Соотношения (2)–(6) представляют собой формулировку квантово-механической задачи об осцилляторе на языке представления чисел заполнения (или фоковского представления). Особо подчеркнем, что частицы соответствуют не самому осциллятору, а квантам его возбуждения. Частицы «возникли» в результате обычного квантования.

Для перехода к случаю многих степеней свободы  $N > 1$  вводится набор  $N$  осцилляторов с различными частотами  $\omega_k$ . Индекс  $k$  пробегает  $N$  значений  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ . Гамильтониан представляется суммой

$$H = \sum_k H_k = \sum_k \omega_k (a_k^\dagger a_k + 1/2).$$

Операторы  $a_k^\dagger, a_l$  удовлетворяют коммутационным соотношениям (4) при совпадающих индексах  $k=l$  и коммутируют друг с другом при  $k \neq l$ , т. е.

$$[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}, \quad [a_k, a_l] = [a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0.$$

Произвольное состояние системы характеризуется здесь набором чисел заполнения  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_N$ . Состояние

$$\Psi(\dots n_k \dots) = \prod_{1 \leq k \leq N} \left\{ \frac{(a_k^+)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} \right\} \Psi_0 \quad (7)$$

содержит  $n_1$  частиц 1-го сорта с энергией  $\omega_1$ ,  $n_2$  частиц 2-го сорта с энергией  $\omega_2$  и т. д.

Покажем теперь, что вещественная скалярная функция поля  $u(x)$ , удовлетворяющая уравнению Клейна — Гордона,

$$(\square - m^2) u(x) = 0$$

может быть представлена в виде совокупности осцилляторов. Для этого, во-первых, перейдем от неограниченного конфигурационного пространства к «большому кубу» с объемом  $V = L^3$  и наложим на решения уравнения условия периодичности:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x_1 + L, x_2, x_3) = \\ &= u(t, x_1, x_2 + L, x_3) = u(t, x_1, x_2, x_3 + L). \end{aligned}$$

Представляя  $u$  в виде суммы Фурье

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{k_1, k_2, k_3} \left( \frac{2\pi}{V\omega_k} \right)^{1/2} \{ a(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \bar{a}(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \},$$

получим уравнение движения для амплитуды  $a(t, \mathbf{k})$ :

$$\ddot{a}(t, \mathbf{k}) + \omega_k^2 a(t, \mathbf{k}) = 0,$$

где  $\omega_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$ . Это уравнение есть не что иное, как уравнение для осциллятора. Таким образом, амплитуда  $a(t, \mathbf{k})$  есть амплитуда осциллятора с частотой  $\omega_k = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ .

Условие периодичности в  $x$ -пространстве приводит к дискретности допустимых значений импульсов:

$$\mathbf{k}(n_1, n_2, n_3) = \left\{ \frac{2\pi}{L} n_1, \frac{2\pi}{L} n_2, \frac{2\pi}{L} n_3 \right\}.$$

Каждому  $\mathbf{k}(n)$  отвечает осциллятор с энергией

$$\omega(n) = \left\{ m^2 + \frac{4\pi^2}{L^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \right\}^{1/2}.$$

Таким образом, релятивистскому полю, удовлетворяющему уравнению Клейна — Гордона, может быть сопоставлен гамильтониан осцилляторного типа, в котором осцилляторы перенумерованы тремя целыми числами  $n_1, n_2, n_3$ .

Переход к реальному бесконечному конфигурационному пространству ( $L \rightarrow \infty$ ) приводит к непрерывному импульсному



пространству. При этом все суммы заменяются на интегралы по правилу

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d\mathbf{k},$$

а символ Кронекера — на дельта-функции

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

С учетом изменения нормировки операторов

$$a_{\mathbf{k}} \rightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{3/2} a(\mathbf{k})$$

получаем перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), \overset{+}{a}(\mathbf{q})] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \\ [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{q})] &= [\overset{+}{a}(\mathbf{k}), \overset{+}{a}(\mathbf{q})] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Формула (7) в непрерывном случае сохраняет свой вид. Соответствующие состояния содержат кванты со строго фиксированными импульсами. Волновые функции этих состояний в конфигурационном представлении отвечают плоским волнам. Поэтому подобные состояния не имеют конечной нормы (см. задание ОЗ).

Отметим еще, что в результате квантования (8) полевая функция  $u(x) = u(t, \mathbf{x})$ , удовлетворяющая уравнению Клейна—Гордона, оказывается представленной в виде трехмерного импульсного интеграла от линейной формы по операторам  $a(\mathbf{k})$ ,  $\overset{+}{a}(\mathbf{k})$  и, таким образом, сама становится оператором.

**6.3. Каноническое квантование.** Изложенная выше операторная формулировка квантовомеханической задачи об осцилляторе может быть также довольно просто получена из классической задачи об осцилляторе, изложенной с помощью канонического формализма классической механики.

В каноническом формализме основными переменными являются координаты  $q$  и сопряженные им импульсы

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial t}).$$

Гамильтониан осциллятора в переменных  $q$ ,  $p$  имеет вид (1). Уравнения движения для динамической переменной  $A$ , являющейся функцией от  $q$ ,  $p$  и явно не зависящей от времени, записываются в виде

$$\frac{dA(q, p)}{dt} = \{A, H\}, \quad (9)$$

где фигурными скобками обозначена классическая скобка Пуассона

$$\{a, b\} \equiv \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial b}{\partial q}. \quad (10)$$

Поэтому, в частности,

$$\{q, p\} = 1 \quad (11)$$

и

$$\dot{q} = \{q, H\} = p, \quad \dot{p} = \{p, H\} = -\omega^2 q.$$

Из последних формул, представляющих собой канонические уравнения движения, следует, что решения могут быть разложены на положительно- и отрицательно-частотные части:

$$q(t) = \frac{a^{(+)}(t) + a^{(-)}(t)}{\sqrt{2\omega}}, \quad p(t) = i \sqrt{\frac{\omega}{2}} [a^{(+)}(t) - a^{(-)}(t)], \quad (12)$$

причем

$$a^{(\pm)}(t) = \pm i\omega a^{(\pm)}(t), \quad a^{(\pm)}(t) = a^{(\pm)}(0) \exp(\pm i\omega t).$$

Используя соотношения, обратные к (12), а также (11), получаем

$$\{a^{(-)}(t), a^{(+)}(t)\} = -i. \quad (13)$$

Подставляя (12) в гамильтониан (1), находим

$$H = (1/2) [a^{(+)}(t) a^{(-)}(t) + a^{(-)}(t) a^{(+)}(t)] = (1/2) (a^+ a^- + a^- a^+).$$

Здесь мы сохранили порядок сомножителей, следующий из (1) (эта предосторожность окажется полезной в дальнейшем при переходе к квантовому случаю), а также ввели более компактные обозначения

$$a^{(-)} \equiv a, \quad a^{(+)} \equiv a^+.$$

Процедура квантования теперь может быть выполнена с помощью следующего постулата канонического квантования:

Будем считать, что динамические переменные типа  $q, p, a, a^+$ , так же как и функции от них (например, гамильтониан  $H$ ), суть операторы, действующие на  $\psi$ -функцию состояния.

Законы взаимных перестановок этих операторов устанавливаются по следующему «правилу соответствия»: в формулах канонического формализма типа (9), (11), (13) классическая скобка Пуассона (10) заменяется на квантовую скобку Пуассона, определенную соотношением

$$\{a, b\}_{\text{квант}} = \frac{1}{i} [a, b] = \frac{1}{i} (ab - ba),$$

т. е.

$$\{a, b\}_{\text{кл}} \rightarrow \frac{1}{i} [a, b]. \quad (14)$$

Поэтому в квантовом случае уравнение движения (9) для операторной величины  $A$  принимает вид

$$i \frac{dA}{dt} = [A, H], \quad (15)$$

а формулы (11), (13) превращаются в коммутационные соотношения:

$$[q, p] = i; \quad [a, a^\dagger] = 1. \quad (16)$$

С учетом последнего коммутатора гамильтониан  $H$  может быть записан в виде (5). Таким образом, мы убеждаемся, что вышеприведенный постулат канонического квантования для осциллятора совершенно эквивалентен обычной формулировке квантования, изложенной в § 6.1. Будучи применен к физическому полю, он может рассматриваться как основа квантования полей. При этом мы сразу получаем квантовую формулировку в представлении чисел заполнения.

Для дальнейшего обсуждения взаимосвязей между различными формулировками квантования систем с большим числом степеней свободы следует напомнить некоторые элементарные сведения из теории представлений квантовой механики.

**6.4. Представления Шредингера и Гейзенберга.** Наиболее распространенным в квантовой механике является представление Шредингера. В этом представлении эволюция системы во времени описывается с помощью зависящей от времени волновой функции  $\psi(t)$ , удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H \psi(t).$$

Здесь  $H$  — оператор Гамильтона, соответствующий полной энергии системы и не зависящий от времени для консервативных систем. В представлении Шредингера динамические переменные характеризуются операторами  $B$ , не зависящими от времени явно. Их средние значения

$$\overline{B}_t = \psi^*(t) B \psi(t) \quad (17)$$

могут, однако, зависеть от времени через волновые функции  $\psi(t)$ .

В выражении (17) временная эволюция среднего значения динамической переменной  $B$  обусловлена  $\psi(t)$ . Можно перенести ее непосредственно на оператор  $B$ . С этой целью формально проинтегрируем уравнение Шредингера. Получим

$$\psi(t) = U(t) \psi, \quad (18)$$

где

$$U(t) = e^{-iHt}. \quad (19)$$

С помощью (18) правую часть (17) представим в виде

$${}^* \bar{\psi}(t) B \psi(t) = {}^* \bar{\psi} \hat{U}^*(t) B U(t) \psi = {}^* \bar{\psi} B_H(t) \psi,$$

причем

$$B_H(t) = \hat{U}^*(t) B U(t) = e^{iHt} B e^{-iHt}. \quad (20)$$

Таким образом, среднее значение  $\bar{B}_t$  представлено как среднее по функциям  $\psi$ , не зависящим от времени, от оператора (20), явно зависящего от времени. Мы пришли здесь к представлению Гайзенберга, в котором зависимость от времени перешла с волновой функции на оператор. Дифференцируя (20) по  $t$ , получаем уравнение движения

$$i \frac{dB_H(t)}{dt} = [B_H(t), H]. \quad (21)$$

Отметим, что мы получили два различных способа описания эволюции системы во времени. Для перехода от момента 0 к моменту  $t$  следует либо преобразовать волновую функцию  $\psi$  по формуле (18), либо преобразовать оператор  $B$  по формуле (20).

Сравнивая (21) с (15) заключаем, что схема канонического квантования, описанная в § 6.2, приводит к гейзенбергову представлению для квантованных волновых полей.

В каноническом формализме время играет выделенную роль. Поэтому может сложиться впечатление, что при использовании этого приема в теории волновых полей релятивистская инвариантность последних оказывается под угрозой. В действительности этого не происходит, и в результате канонического квантования полей мы получаем выражения, обладающие надлежащей инвариантностью. Существует, однако, еще одна схема квантования, в которой релятивистская инвариантность сохраняется на всех промежуточных этапах. Эта схема основана на теории представлений, точнее на требованиях соответствия законов преобразования квантованных и классических полей при преобразованиях полей и координатных систем отсчета.

Эту схему, восходящую к работам Швингера конца 40-х годов, мы назовем *релятивистской схемой* и кратко изложим ее основные моменты. (Более полное изложение содержится, например, в § 9 Введения.)

**6.5. Релятивистская схема квантования полей.** В результате квантования полевые функции приобретают операторный смысл и линейно выражаются через *операторы рождения* и операторы *уничтожения* частиц, между которыми устанавливаются надлежащие перестановочные соотношения. Эти операторы действуют на общую для всех полей волновую функцию  $\Phi$ .

В соответствии с обычной квантовой механикой волновая функция  $\Phi$  полностью характеризует физическое состояние системы,

описываемой квантованными волновыми полями. Подобно обычной  $\psi$ -функции величина  $\Phi$  может рассматриваться как вектор в некотором линейном пространстве. Ввиду этого функцию  $\Phi$  называют *амплитудой* (или *вектором*) *состояния*.

Как и в квантовой механике, не все векторы  $\Phi$  обладают конечными нормами (например, соответствующие плоским волнам). Однако нормы реальных физических состояний всегда могут быть выбраны конечными. Средние значения динамических величин и вероятности перехода выражаются через квадратичные формы от  $\Phi$ .

Рассмотрим теперь трансформационные свойства векторов  $\Phi$  при преобразованиях координат и полевых функций, введенных в §§ 1, 2 (см. формулы (1.1), (1.3), (2.10)):

$$x \rightarrow x' = P(\omega; x) \quad u(x) \rightarrow u'(x') = \Lambda(\omega) u(x).$$

Подобным преобразованиям соответствует некоторое преобразование вектора состояния, которое вследствие принципа суперпозиции должно быть линейным:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U(\omega) \Phi \quad (22)$$

и благодаря сохранению нормы унитарным:

$$U^*(\omega) U(\omega) = 1. \quad (23)$$

В простейшем случае преобразования трансляции  $u'(x) = u(x - \omega)$  оператор  $U$  имеет вид

$$U(\omega) = \exp(iP_\mu \omega^\mu). \quad (24)$$

Экспоненциальный характер зависимости от параметров  $\omega$  следует из группового характера преобразования. В силу условия унитарности (23) операторы сдвига должны быть эрмитовыми:  $P_\mu^\dagger = P_\mu$ . Отметим, что формула (24) в частном случае  $\omega_\nu = -\delta_{\nu 0} t$  соответствует формуле (19). Оператор  $P_\mu$ , таким образом, является оператором 4-импульса. Аналогом формулы (20) для операторной полевой функции будет

$$u'(x) = u(x - \omega) = U^{-1}(\omega) u(x) U(\omega). \quad (25)$$

При бесконечно малых  $\omega$  преобразование амплитуды состояния

$$\Phi' = (1 + iP\omega) \Phi$$

по виду совпадает с бесконечно малым преобразованием полевой функции

$$u'(x) = (1 + ip\omega) u(x). \quad (26)$$

Если считать, что  $u$  — обычная волновая функция, то коэффициенты  $p_\nu$  могут рассматриваться как квантовомеханические операторы 4-импульса:

$$p_\nu = i\partial_\nu = i\partial/\partial x^\nu.$$

Подчеркнем, что  $p_\nu$  — это генератор сдвига (оператор импульса) в пространстве полевых функций  $u(x)$ , а  $P_\nu$  — генератор сдвига в пространстве векторов состояний  $\Phi$ , т. е. в представлении чисел заполнения или представлении вторичного квантования. (Именно такое соответствие и послужило в свое время причиной появления термина «вторичный».)

Выписанные формулы можно обобщить на случай общих преобразований из группы Пуанкаре  $x' = Lx + a$ :

$$U = \exp i \left( P_\nu a^\nu + \frac{1}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right), \quad \Phi' = \left( 1 + iP a + \frac{i}{2} M \omega \right) \Phi, \quad (27)$$

$$u'(x) = \left( 1 + i p a + \frac{i}{2} m \omega \right) u(x), \quad m_{\mu\nu} = i (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu). \quad (28)$$

Здесь  $m_{\mu\nu}$  — генераторы 4-мерных поворотов.

Исходя из соображений соответствия, мы будем поэтому интерпретировать  $P$  и  $M$  в (27) как операторы 4-вектора энергии-импульса и тензора момента количества движения соответственно.

Аналогично этому при градиентных преобразованиях функций поля:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi, \quad \psi^* \rightarrow \psi'^* = e^{-i\alpha} \psi^* \quad (29)$$

унитарный оператор преобразования

$$\Phi' = U_\alpha \Phi$$

имеет экспоненциальную структуру

$$U_\alpha = \exp (i\alpha Q), \quad (30)$$

в которой эрмитов оператор  $Q$  следует интерпретировать как оператор заряда. В качестве основного постулата квантования волновых полей мы примем, что эрмитовы операторы 4-вектора энергии-импульса  $P$ , тензора момента количества движения  $M$ , заряда  $Q$  и т. п., являющиеся генераторами бесконечно малых преобразований векторов состояний (см. формулы (27) и (30)), выражаются через операторные функции полей теми же соотношениями типа (2.6, 7, 22, 30), что и в классической теории полей, разумеется с установлением при этом надлежащего порядка операторного умножения. Этот постулат является дальнейшим применением принципа соответствия и определяет закон трансформации вторично квантованных амплитуд состояния.

## § 7. Перестановочные соотношения

**7.1. Физический смысл частотных компонент.** Рассмотрим соотношение (6.25) для случая бесконечно малого преобразования трансляции. Подставляя в него разложения по степеням  $\omega_\mu$  и удерживая линейные члены, получим

$$i \frac{\partial u(x)}{\partial x^\mu} = [u(x), P_\mu] \quad (1)$$

— четверку уравнений, обобщающих уравнение движения (6.21). Эти уравнения оказываются очень удобными для анализа частотных составляющих функций поля в импульсном представлении. Подставляя в (1) трехмерные импульсные разложения Фурье типа (3.8), (4.13), (5.9), получаем алгебраические операторные уравнения

$$k_{\mu} u^{\pm}(\mathbf{k}) = \mp [u^{\pm}(\mathbf{k}), P_{\mu}]. \quad (2)$$

Введем теперь состояние с определенным значением  $p_{\nu}$  4-вектора энергии-импульса, описываемое амплитудой  $\Phi_p$ :

$$P_{\nu} \Phi_p = p_{\nu} \Phi_p. \quad (3)$$

Умножая первое из уравнений (2) справа на  $\Phi_p$ , получаем с учетом (3)

$$P_{\nu} u^{+}(\mathbf{k}) \Phi_p = (p_{\nu} + k_{\nu}) u^{+}(\mathbf{k}) \Phi_p.$$

Из второго тем же способом находим

$$P_{\nu} u^{-}(\mathbf{k}) \Phi_p = (p_{\nu} - k_{\nu}) u^{-}(\mathbf{k}) \Phi_p,$$

причем в обоих случаях  $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0$ .

Из полученных соотношений вытекает, что выражение  $u^{+}(\mathbf{k}) \Phi_p$  либо равно нулю, либо представляет амплитуду состояния с энергией-импульсом  $p + k$ , а  $u^{-}(\mathbf{k}) \Phi_p$  есть амплитуда состояния с энергией-импульсом  $p - k$  (либо нуль). Поскольку при этом выполняется соотношение  $k^2 = m^2$ , то следует считать, что оператор  $u^{+}(\mathbf{k})$  описывает рождение частицы с массой  $m$  и 4-импульсом  $k$ , а оператор  $u^{-}(\mathbf{k})$  соответствует уничтожению такой же частицы.

Подчеркнем, что это свойство частотных частей операторов поля является совершенно общим, справедливым для полей любой тензорной размерности, как вещественных, так и комплексных, и не зависит от конкретного вида реализации перестановочных соотношений (т. е. справедливо как при квантовании по Бозе — Эйнштейну, так и при квантовании по Ферми — Дираку — см. ниже § 7.4).

Отметим еще, что, отправляясь от соотношения типа (6.25), для градиентных преобразований (6.29), (6.30)

$$e^{i\alpha} u = U^{-1}(\alpha) u U(\alpha), \quad e^{-i\alpha} \dot{u} = U^{-1}(\alpha) \dot{u} U(\alpha)$$

получим, приравнявая коэффициенты при членах, линейных по  $\alpha$ :

$$u(x) = [u(x), Q] \quad \dot{u}(x) = -[\dot{u}(x), Q]. \quad (4)$$

Уравнения (4) дополняют формулы (2). Из них, в частности, следует, что операторы  $u$  (а также и частотные составляющие  $u^{\pm}$ ) являются «понижающими» по отношению к заряду системы (т. е.

собственному значению оператора заряда  $Q$ ). Сопряженные операторы  $u$ ,  $u^\pm$  повышают собственное значение на единицу. Мы предоставляем читателю самостоятельно провести соответствующие выкладки.

Таким образом, в случае комплексного поля оператор  $u^+$  рождает частицу с зарядом  $+1$ , оператор  $u^-$  уничтожает частицу с зарядом  $-1$  и т. д.

**7.2. Амплитуда вакуума и фоковское представление.** Теперь можно естественным способом определить состояние вакуума и установить правила построения амплитуд, соответствующих состояниям с определенным числом различных частиц.

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из нескольких невзаимодействующих квантованных полей, характеризуемых операторными функциями  $u_1(x), \dots, u_n(x)$ . Для удобства записи включим в эту последовательность также и соответствующие сопряженные функции в тех случаях, когда  $u_i^*$  отличаются от  $u_i$ .

Определим *амплитуду состояния вакуума*  $\Phi_0$  для данной динамической системы. Так как в вакууме отсутствуют частицы, то импульс вакуума равен нулю, а энергия вакуума минимальна (ее также можно положить равной нулю). Поскольку отрицательно-частотные операторы  $u^-$  уменьшают энергию, а энергия вакуумного состояния  $\Phi_0$  минимальна, то следует положить

$$u_i^-(x) \Phi_0 = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

при всех  $x$ . Аналогичная аргументация приводит к соотношению

$$\Phi_0^* u_i^+(x) = 0.$$

Переходя к импульсному представлению, получаем соответственно

$$u_i^-(k) \Phi_0 = 0. \quad (6)$$

Соотношение (6) и сопряженное ему  $\Phi_0^* u_i^+(k) = 0$  вместе с условием нормировки

$$\Phi_0^* \Phi_0 = 1 \quad (7)$$

можно считать определением вакуума свободных полей.

Амплитуда любого состояния рассматриваемой динамической системы может быть теперь представлена с помощью введенной выше амплитуды вакуума и операторов рождения соответствующих частиц. Так, амплитуда состояния, содержащего  $s$  частиц  $j_1, \dots, j_s$  сортов (некоторые из индексов  $j$  могут совпадать), представится выражением вида

$$\int F_s^{(j_1, \dots, j_s)}(k_1, \dots, k_s) u_{j_1}^+(k_1) \dots u_{j_s}^+(k_s) dk_1 \dots dk_s \Phi_0.$$



Входящие в него функции  $F_s^{(\dots j \dots)}$  имеют смысл обычных квантовомеханических волновых функций системы  $s$  частиц в импульсном представлении. Амплитуда состояния, в котором присутствует точно  $s$  частиц с заданными характеристиками  $j_1, \dots, j_s$ , полностью описывается одной такой функцией.

В общем случае, когда число частиц не фиксировано, амплитуда состояния характеризуется цепочкой функций  $F_s$  с различными значениями индекса  $s$ . Суммируя по дискретным индексам  $j_1, \dots, j_s$  и по  $s$ , запишем

$$\Phi = \sum_{(j, s \geq 0)} \int F_s^{(\dots j \dots)} (\dots \mathbf{k} \dots) u_{j_1}^{\dagger}(\mathbf{k}_1) \dots u_{j_s}^{\dagger}(\mathbf{k}_s) d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_s \Phi_0. \quad (8)$$

Мы получили здесь *фоковское представление* амплитуды состояния. Переходя к координатному представлению с помощью соотношений

$$F_s(\dots \mathbf{k} \dots) = \frac{1}{(2\pi)^{3s/2}} \int e^{i \sum_j \mathbf{k}_j \mathbf{x}_j} \varphi_s(\dots \mathbf{x} \dots) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s,$$

$$u^{\dagger}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} u^{\dagger}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad u(0, \mathbf{x}) = u(\mathbf{x})|_{x^0=0},$$

получаем вместо (8) следующее выражение для амплитуды состояния:

$$\Phi = \sum_{(j, s \geq 0)} \int \varphi_s(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s) \prod_{1 \leq \nu \leq s} \{u_{j_{\nu}}^{\dagger}(0, \mathbf{x}_{\nu}) d\mathbf{x}_{\nu}\} \Phi_0. \quad (9)$$

Входящие сюда функции  $\varphi_s$  в нерелятивистском случае имеют смысл обычных волновых функций в конфигурационном пространстве.

Как видно, временная зависимость из  $\Phi$  выпала; это совершенно естественно, так как в выбранном нами представлении амплитуда состояния при отсутствии взаимодействия оказывается постоянной.

**7.3. Типы перестановочных соотношений.** Перейдем к установлению перестановочных соотношений между операторными волновыми функциями. В классической теории свободных полей с квадратичным лагранжианом при введении канонического формализма полевые функции линейно выражаются через взаимно сопряженные обобщенные координаты и импульсы. Классические скобки Пуассона функций поля  $\{u(x), u(y)\}$  оказываются при этом некоторыми функциями от  $x$  и  $y$  (точнее, от разности  $x - y$ ), не зависящими от  $u$ . Поэтому, исходя из принципа соответствия, в квантовой теории свободных полей часто принимают, что закон перестановки операторных полевых функций имеет вид

$$\{u_a(x), u_b(y)\}_- \equiv [u_a(x), u_b(y)] = \\ = u_a(x) u_b(y) - u_b(y) u_a(x) = \Delta_{ab}(x - y). \quad (10B)$$

Это коммутационное соотношение однако оказывается слишком жестким и не охватывает ряд физически важных случаев. Поэтому в качестве альтернативы к (10Б) полагают, что

$$\{u_a(x), u_b(y)\}_+ \equiv u_a(x) u_b(y) + u_b(y) u_a(x) = \Delta_{ab}(x-y), \quad (10\Phi)$$

т. е. считают, что  $c$ -числом является не коммутатор, а антикоммутатор двух полевых операторов.

Антикоммутируемость полевых операторов, выражаемая перестановочным соотношением (10Ф) приводит к тому, что коммутаторы динамических величин, являющихся билинейными формами полевых операторов, выражаются через перестановочные функции  $\Delta$ . В этом смысле и следует понимать принцип соответствия для второго случая.

Кванты полей, удовлетворяющих соотношениям (10Б), подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна. Соответствующие частицы называются *бозонами*. Кванты полей, удовлетворяющих (10Ф), подчиняются статистике Ферми—Дирака, а соответствующие частицы называются *фермионами*.

Точный вид перестановочных функций  $\Delta$  для любого поля определяется уравнениями (1), (4) и структурой оператора энергии данного поля. Однако независимо от конкретного вида перестановочных соотношений можно показать, что перестановочная функция свободных полей зависит лишь от разности  $x-y$ , т. е.

$$\{u_a(x), u_b(y)\} = \Delta_{ab}(x-y). \quad (11)$$

Для того чтобы установить это, рассмотрим коммутационные соотношения (10) в импульсном представлении. Вследствие линейности формул фурие-преобразования коммутаторы или антикоммутаторы частотных составляющих в импульсном представлении  $u^\pm(k)$  также должны быть  $c$ -числами. Покажем прежде всего, что операторы одинаковой частотности должны строго коммутировать или антикоммутировать:

$$\{u_a^\pm(k), u_b^\pm(q)\} = 0. \quad (12)$$

Здесь, как и в (11), символ  $\{\dots, \dots\}$  обозначает либо коммутатор, либо антикоммутатор.

Рассмотрим амплитуду состояния  $\Phi_p$  с определенным значением 4-импульса, удовлетворяющую уравнению (3). Действуя на нее операторами  $u_a^\pm(k)$  и  $u_b^\pm(q)$  в различной последовательности, получаем новые амплитуды

$$\Phi_1 = u_a^\pm(k) u_b^\pm(q) \Phi_p, \quad \Phi_2 = u_b^\pm(q) u_a^\pm(k) \Phi_p,$$

которые, в соответствии с ранее установленным, удовлетворяют уравнениям

$$P_0 \Phi_{1,2} = (p_0 + k_0 + q_0) \Phi_{1,2}.$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим

$$P_0 (\Phi_1 \pm \Phi_2) = P_0 \{u_a^+ (\mathbf{k}), u_b^+ (\mathbf{q})\} \Phi_p = (p_0 + k_0 + q_0) \{u_a^+, u_b^+\} \Phi_p.$$

Если теперь допустить, что  $\{u_a^+, u_b^+\}$  есть  $c$ -число, отличное от нуля, то, сокращая на него, получим

$$P_0 \Phi_p = (p_0 + k_0 + q_0) \Phi_p,$$

т. е. приходим к противоречию с исходным уравнением (3). Тем самым доказано (12). Точно таким же образом можно доказать, что

$$\{u_a^\pm (\mathbf{k}), u_b^\mp (\mathbf{q})\} = 0 \text{ при } \mathbf{k} \neq \mathbf{q}. \quad (13)$$

Соотношения (12), (13) имеют простой физический смысл. Они соответствуют тому, что акты рождения частиц любого поля не интерферируют между собой, как не влияют друг на друга акты уничтожения частиц, а также акты рождения и уничтожения частиц с различными импульсами.

Если теперь положить, что в общем случае вместо нуля в правой части (13) стоит  $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ , то в координатном представлении мы получим соотношения (11). Отметим, что эта формула отражает трансляционную инвариантность перестановочных соотношений. Вполне естественно, что для ее доказательства были использованы свойства оператора 4-вектора энергии-импульса, являющегося генератором преобразований сдвига.

Не составляет труда показать, что в случае комплексных полей, помимо (12), всегда равны нулю также коммутаторы (антикоммутаторы) операторов, относящихся к частицам разных зарядов, т. е.

$$\{u^+, u^-\} = \{u^{*+}, u^{*-}\} = 0. \quad (14)$$

Для этого следует рассмотреть амплитуду состояния  $\Phi_q$  с определенным значением заряда и провести рассуждения, подобные приведенным выше для доказательства (12). Мы предоставляем это читателю.

Физический смысл соотношений (14) заключается во взаимной независимости актов рождения и уничтожения частиц с различными зарядами.

Таким образом, установлено, что для любого (комплексного) поля отличными от нуля могут быть лишь  $c$ -числа  $\{u_{\alpha}^- (\mathbf{p}), u_{\alpha}^{*+} (\mathbf{p})\}$  и  $\{u_{\alpha}^{*+} (\mathbf{p}), u_{\alpha}^- (\mathbf{p})\}$ , т. е. (анти)коммутаторы операторов рождения и уничтожения, относящихся к частицам с одинаковым 4-вектором энергии-импульса и одинаковым зарядом. Соответствующие выражения в координатном представлении являются трансляционно инвариантными:

$$\{u^\pm (x), u^{*\pm} (y)\} = \Delta^\pm (x - y),$$

а их сумма дает полную перестановочную функцию

$$\{u(x), \dot{u}^*(y)\} = \Delta^+(x-y) + \Delta^-(x-y) = \Delta(x-y).$$

Для определения перестановочных функций следует обратиться к явному виду оператора 4-вектора энергии-импульса и использовать уравнения (1) и (4).

**7.4. Квантование по Ферми — Дираку и Бозе — Эйнштейну.** Для установления конкретного вида перестановочных соотношений воспользуемся теперь уравнениями (1), (2), причем оператор энергии-импульса запишем в виде

$$P_v = \sum_s \int dq q_v [a_s^*(q) a_s^-(q) \pm \dot{a}_s^*(q) a_s^+(q)]. \quad (15)$$

В соответствии с классическими выражениями (3.9), (3.28), (4.26) и (5.21) мы выразили его через независимые амплитуды  $a^\pm$ ,  $\dot{a}^\pm$ , связанные с  $u^\pm$ ,  $\dot{u}^\pm$  линейными соотношениями вида

$$u_a^\pm(\mathbf{k}) = \sum_s v_a^{s, \pm}(\mathbf{k}) a_s^\pm(\mathbf{k}),$$

причем коэффициенты  $v^\pm$  являются  $c$ -числами.

Ввиду некоммутуруемости операторов  $a^\pm$ ,  $\dot{a}^\pm$  их порядок в (15) соответствует порядку функций  $u$  и  $\dot{u}$  в лагранжианах. Напомним, что операторы  $a^\pm$  и  $\dot{a}^\pm$  связаны условиями комплексного (теперь эрмитового) сопряжения

$$(a^\pm(\mathbf{k}))^* = \dot{a}^{\mp}(\mathbf{k}).$$

Верхний знак перед вторым членом в правой части (15) относится к полям с целым спином (скалярное, векторное, электромагнитное), нижний — к полям с полуцелым спином (спинорное).

Для вывода перестановочных соотношений заметим прежде всего, что коммутаторы операторов  $a^\pm$  с билинейными комбинациями  $\dot{a}^\pm(q) a^\mp(q)$ , входящими в правую часть (15), могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} [a^\pm(\mathbf{k}), \dot{a}^+(q) a^-(q)] &= \\ &= \{a^\pm(\mathbf{k}), \dot{a}^+(q)\} a^-(q) - \dot{a}^+(q) \{a^-(q), a^\pm(\mathbf{k})\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь, как уже говорилось, символом  $\{a, b\}$  обозначен *либо* коммутатор, *либо* антикоммутатор операторов  $a$  и  $b$ , причем необходимо пользоваться одним и тем же определением одновременно в первом и во втором члене правой части.

Аналогично этому

$$\begin{aligned} [a^\pm(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^-(q) a^+(q)] &= \\ &= \{a^\pm(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^-(q)\} a^+(q) - \overset{*}{a}^-(q) \{a^+(q), a^\pm(\mathbf{k})\}. \end{aligned} \quad (17)$$

На основании (12) и (14) имеем

$$\begin{aligned} [a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^+(q) a^-(q)] &= [a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^-(q) a^+(q)] = 0, \\ [a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^+(q) a^-(q)] &= \{a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^+(q)\} a^-(q), \\ [a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^-(q) a^+(q)] &= \{a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^-(q)\} a^+(q). \end{aligned}$$

Подставляя (15) в (2), получаем теперь

$$\begin{aligned} k_\nu a_a^-(\mathbf{k}) &= \int dq q_\nu \sum_b \{a_a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}_b^+(q)\} a_b^-(q), \\ \mp k_\nu a_a^+(\mathbf{k}) &= \int dq q_\nu \sum_b \{a_a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}_b^-(q)\} a_b^+(q), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\{a_a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}_b^+(q)\} = \delta_{ab} \delta(\mathbf{k} - q), \quad (18)$$

$$\{a_a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}_b^-(q)\} = \mp \delta_{ab} \delta(\mathbf{k} - q), \quad (19)$$

причем явно указанная неопределенность в знаке ( $\pm$ ) следует формуле (15). Таким образом, для поля каждого типа мы получили два варианта перестановочных соотношений. Требование симметрии этих соотношений относительно замены заряда, точнее, замены частиц на античастицы

$$a_a^\pm(\mathbf{k}) \leftrightarrow \overset{*}{a}_a^\pm(\mathbf{k}) \quad (20)$$

однозначно определяет рецепт квантования в каждом случае. Симметрия (20) отражает тот факт, что выбор между «основной» функцией поля  $u$  и ее комплексно-сопряженной  $\overset{*}{u}$  есть вопрос соглашения, и противоположный выбор  $\omega = \overset{*}{u}$ ,  $\overset{*}{\omega} = u$  приводит лишь к замене «основных» частиц на античастицы. Такая замена сказывается на операторе заряда, который не инвариантен относительно (20), но не должна сказаться на уравнении движения (1) и выражении для 4-вектора энергии-импульса. Условия симметрии относительно (20) также обеспечивают правильный переход от комплексного к действительному полю:  $\overset{*}{u}(x) = u(x)$ ,  $\overset{*}{a}^\pm(\mathbf{k}) = a^\pm(\mathbf{k})$ .

Отметим, что преобразование вида (20) называется зарядовым сопряжением, а соответствующая симметрия — зарядовой симметрией (см. ниже § 9.3). Если теперь взять верхний знак в правой части формулы (19) (что соответствует полям с целым спином), то симметрия формул (18), (19) относительно преобразования (20)

приведет к тому, что символ  $\{a, b\}$  должен пониматься как коммутатор. В противном случае (нижний знак правой части формулы (19), спинорное поле) симметрия обеспечивается условием

$$\{a, b\} = \{a, b\}_+.$$

Таким образом, мы получили, что поля с целым спином квантуются по Бозе — Эйнштейну:

$$[a_{\bar{a}}(\mathbf{k}), a_b^*(\mathbf{q})] = [a_{\bar{a}}^*(\mathbf{k}), a_b^+(\mathbf{q})] = \delta_{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad (21)$$

а с полуцелым спином — по Ферми — Дираку:

$$\{a_{\bar{a}}(\mathbf{k}), a_b^*(\mathbf{q})\}_+ = \{a_{\bar{a}}^*(\mathbf{k}), a_b^+(\mathbf{q})\}_+ = \delta_{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (22)$$

Заметим здесь, что перестановочные соотношения фиксируют нормировку операторных полевых функций.

**7.5. Связь спина со статистикой. Теорема Паули.** Полученные результаты представляют собой частный случай фундаментальной *теоремы Паули*, устанавливающей связь трансформационных свойств поля и способа его квантования (связь спина со статистикой):

Поля, описывающие частицы с целым спином, квантуются по Бозе — Эйнштейну; поля, описывающие частицы с полуцелым спином, квантуются по Ферми — Дираку.

Теорема Паули применима к полям с произвольным (сколь угодно высоким) спином.

В нашем доказательстве мы использовали симметрию относительно зарядового сопряжения. Однако возможны и другие пути рассуждений. Нарушение связи спина со статистикой, устанавливаемой теоремой Паули, приводит к ряду глубоких противоречий.

Так, если вместо (20) использовать свойство положительности метрики в гильбертовом пространстве

$$\Phi^* \hat{A} A \Phi = \Phi^* |A|^2 \Phi > 0,$$

то можно прийти к формулам (18), (19) только лишь из условия (17) (см. задание 08).

В то же время квантование поля с целым спином по Ферми — Дираку приводит к противоречию со свойствами коммутаторов в пространстве-времени (см. задание 09).

Хорошо известная апелляция к отрицательному знаку второго члена в операторном выражении для энергии спинорного поля (5.22) приводит к невозможности квантования этого поля по Бозе — Эйнштейну.

## § 8. Поля с целым спином

8.1. Скалярное поле. В этом параграфе мы изложим квантовую теорию скалярного, векторного и электромагнитного полей.

В соответствии с результатами § 7.4 коммутационные соотношения для скалярного поля в импульсном представлении имеют вид:

а) для действительного поля

$$[\varphi^-(\mathbf{k}), \varphi^+(\mathbf{q})] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad [\varphi^\pm(\mathbf{k}), \varphi^\pm(\mathbf{q})] = 0; \quad (1)$$

б) для комплексного поля

$$[\overset{*}{\varphi}^-(\mathbf{k}), \varphi^+(\mathbf{q})] = [\varphi^-(\mathbf{k}), \overset{*}{\varphi}^+(\mathbf{q})] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (2)$$

(все остальные коммутаторы равны нулю).

Переходя к координатному представлению, получаем в правых частях вместо дельта-функций

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} \frac{dq}{\sqrt{2q_0}} e^{i(qy - kx)} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} e^{ik(y-x)} = \frac{1}{i} D^-(x-y), \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} e^{ik(x-y)} &= \frac{1}{i} D^-(y-x) = iD^+(x-y) \end{aligned}$$

— частотные части так называемой перестановочной функции Паули — Йордана

$$D(x) = D^+(x) + D^-(x) = i(2\pi)^{-3} \int e^{-ikx} \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk. \quad (3)$$

Ограничиваясь действительным полем, запишем коммутационные соотношения для функций поля в координатном представлении:

$$\begin{aligned} [\varphi^-(x), \varphi^+(y)] &= -iD^-(x-y), \\ [\varphi^+(x), \varphi^-(y)] &= -iD^+(x-y), \\ [\varphi(x), \varphi(y)] &= -iD(x-y). \end{aligned} \quad (4)$$

Явный вид функций  $D^\pm$  и  $D$  приведен в Дополнении V.

Отметим здесь важное свойство функции  $D(x)$ . Она равна нулю вне светового конуса — см. ниже (18.17). Поэтому

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0. \quad (5)$$

Это свойство называется свойством *локальной коммутативности* и отражает причинную независимость событий, разделенных пространственноподобными интервалами.

Прежде чем записать лагранжиан и динамические переменные для квантового случая, дадим некоторые полезные определения.

8.2. Запись динамических переменных через нормальные произведения. Введем понятие оператора, записанного в нормальной форме, и понятие нормального произведения операторов.

*Нормальной формой* оператора называется такая форма, в каждом слагаемом которой все операторы рождения  $u^+$  стоят слева от всех операторов уничтожения  $u^-$ .

Нетрудно видеть, что нормальная форма операторов является наиболее удобной с точки зрения вычислений. Действительно, при вычислении матричного элемента  $\Phi^* A \Phi$  какого-либо оператора  $A$  в нормальной форме необходимо лишь коммутировать входящие в  $A$  операторы  $u^-$  со всеми  $a^+$  из амплитуды состояния  $\Phi$  и  $u^+$  из  $A$  со всеми  $a^-$  из  $\Phi^*$  до тех пор, пока один из  $u^-$  не подействует на  $\Phi_0$  или один из  $u^+$  — на  $\Phi_0^*$ , что даст нуль.

Рассмотрим пример: запишем в нормальной форме произведение двух бозе-операторов  $u^*(x)$  и  $u(y)$ . Имеем последовательно

$$\begin{aligned} u^*(x) u(y) &= u^{*+}(x) u^+(y) + u^{*-}(x) u^-(y) + u^{*+}(x) u^-(y) + u^{*-}(x) u^+(y) = \\ &= u^{*+}(x) u^+(y) + u^{*+}(x) u^-(y) + u^+(y) u^{*-}(x) + u^-(y) u^{*-}(x) - i\Delta^-(x-y). \end{aligned}$$

Очевидно, что в более общем случае, приводя к нормальной форме произведение некоторого количества операторных полевых функций  $u$ , мы получим сумму произведений компонент  $u^+$ ,  $u^-$  и перестановочных  $\Delta^-$ -функций. Общий рецепт такого приведения рассмотрен нами ниже (§ 17) и составляет содержание первой теоремы Вика. Все выражение в целом можно условно считать «полиномом» по степеням  $\Delta^-$ -функций. Нулевой член этого полинома, т. е. сумма членов, вообще не содержащих  $\Delta^-$ -функций, называется *нормальным произведением* исходных операторных полевых функций. Нормальное произведение можно также определить как произведение, приведенное к нормальной форме, причем в процессе приведения все перестановочные функции считаются равными нулю.

Нормальное произведение операторов  $u_1, u_2, \dots, u_n$  обозначается символом  $:u_1 u_2 \dots u_n:$ . Результат последней выкладки можно записать в виде

$$u^*(x) u(y) = :u^*(x) u(y): - i\Delta^-(x-y).$$

Условимся теперь все динамические переменные, квадратично зависящие от операторов с одинаковыми аргументами (такие, как лагранжиан, энергия-импульс, ток и т. д.), записывать *по определению* в форме нормального произведения. Например, лагранжиан комплексного скалярного поля будем писать в виде

$$\mathcal{L} = : \Phi; \sqrt{\Phi}^* \Phi : - m^2 : \Phi \Phi :. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что отсюда в силу определения амплитуды вакуума  $\Phi_0$

$$\Phi^-(x) \Phi_0 = \Phi^-(x) \Phi_0 = 0$$



и ему сопряженного соотношения

$$\overset{*}{\Phi}_0 \varphi^+(x) = \overset{*}{\Phi}_0 \overset{*}{\Phi}^+(x) = 0$$

следует равенство нулю вакуумных средних всех динамических величин. Тем самым мы автоматически исключаем все псевдофизические величины типа энергии вакуума, заряда вакуума и т. д.

Очевидно также, что все законы сохранения, установленные в классической теории, остаются верными и для квантовых выражений, записанных в нормальной форме, поскольку использованные в доказательстве теоремы Нётер алгебраические тождества не нарушаются.

Основные динамические величины комплексного скалярного поля запишем теперь в виде

$$T_{\mu\nu} = :(\overset{*}{\Phi};_{\mu}\varphi;_{\nu} + \overset{*}{\Phi};_{\nu}\varphi;_{\mu}) : - g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (7)$$

$$P^{\nu} = \int d\mathbf{k} k^{\nu} [\overset{*}{\Phi}^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^+(\mathbf{k}) \overset{*}{\Phi}^-(\mathbf{k})], \quad (8)$$

$$Q = \int d\mathbf{k} [\overset{*}{\Phi}^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^+(\mathbf{k}) \overset{*}{\Phi}^-(\mathbf{k})]. \quad (9)$$

Из структуры операторов  $P^{\nu}$ ,  $Q$  вытекает, что  $\overset{*}{\Phi}^+(\mathbf{k})$  есть оператор рождения частицы с энергией-импульсом  $k$  и зарядом  $+1$ ,  $\varphi^-(\mathbf{k})$  — оператор уничтожения той же частицы;  $\varphi^+(\mathbf{k})$  — оператор рождения частицы с энергией-импульсом  $k$  и зарядом  $-1$ ;  $\overset{*}{\Phi}^-(\mathbf{k})$  — оператор уничтожения той же частицы.

Заметим, что рассуждениями § 7, установившими смысл частотных частей функции поля  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$ , не была определена их нормировка. Эта нормировка может теперь быть установлена с помощью выражения (8) для 4-вектора энергии-импульса. Вводя в рассмотрение амплитуду состояния, содержащего одну скалярную частицу с ненормированной функцией распределения по импульсам  $c(\mathbf{k})$

$$\Phi_1 = \int c(\mathbf{k}) \varphi^+(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \Phi_0, \quad (10)$$

вычислим среднее значение оператора  $P^{\nu}$  (8) по этому состоянию. Выполняя коммутации операторов, получаем

$$\langle P^{\nu} \rangle_1 = \overset{*}{\Phi}_1 P^{\nu} \Phi_1 / \overset{*}{\Phi}_1 \Phi_1 = \int c^*(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}) k^{\nu} d\mathbf{k} / \int |c(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}.$$

Переход к состоянию с фиксированным значением 4-импульса может быть выполнен путем локализации функции  $c(\mathbf{k})$  в малой окрестности значения  $k = K$  (например, предельным переходом  $c(\mathbf{k}) \rightarrow \delta(\mathbf{k} - K)$ ). При этом  $k^{\nu} \rightarrow K^{\nu}$ , и мы получаем

$$\langle P^{\nu} \rangle_1 \rightarrow K^{\nu}.$$

Таким образом, среднее значение оператора  $P^{\nu}$  по состоянию с фиксированным значением 4-импульса  $K^{\nu}$  в точности равно  $K^{\nu}$ ,

и, следовательно, нормировка операторов  $\varphi^\pm(\mathbf{k})$ ,  $\varphi^{\pm*}(\mathbf{k})$ , установленная коммутационными соотношениями (1), (2), соответствует нормировке выражений типа (8), (9) для динамических величин.

**8.3. Комплексное векторное поле.** Для установления правил квантования 4-потенциала векторного поля заметим, что механическое обобщение на этот случай правил квантования скалярного поля, т. е. независимое квантование каждой компоненты потенциала  $U_\nu$  по образцу скалярного поля, оказывается невозможным, поскольку такая процедура не обеспечивает положительности среднего значения энергии и оказывается несовместной с дополнительным условием (3.13). Схема квантования поэтому должна быть связана с дополнительным условием, которое, как мы убедились в § 3, автоматически обеспечивает положительность  $P^0$ . Там было, в частности, показано, что в результате перехода от  $U_\nu$  к продольным и поперечным составляющим по формулам (3.24), (3.27) 4-вектор энергии-импульса может быть выражен через три линейно независимые амплитуды  $b_a(\mathbf{k})$  следующим образом:

$$P^\nu = \int d\mathbf{k} k^\nu [b_a^+(\mathbf{k}) b_a^-(\mathbf{k}) + b_a^-(\mathbf{k}) b_a^+(\mathbf{k})] \quad (3.28)$$

При такой записи классического, 4-импульса учтено дополнительное условие (3.13) и обеспечена положительность неквантованного  $P^0$ . Ясно также, что непосредственное квантование по Бозе—Эйнштейну трех независимых амплитуд  $b_a$  ( $a=1, 2, 3$ ) приводит к положительной определенности среднего значения оператора энергии.

Ввиду этого операторы  $b_a$  мы подчиним следующим перестановочным соотношениям:

$$[b_a^-(\mathbf{k}), b_b^+(q)]_- = [b_a^*(\mathbf{k}), b_b^+(q)] = \delta_{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (11)$$

(все остальные коммутаторы равны нулю).

Аналогичные коммутационные соотношения имеют место для операторов  $a_a^+$ ,  $a_b^+$ .

Выражения для заряда и третьей проекции спина соответственно формулам (3.29), (3.30) будут

$$Q = \int d\mathbf{k} [b_a^+(\mathbf{k}) b_a^-(\mathbf{k}) - b_a^-(\mathbf{k}) b_a^+(\mathbf{k})], \quad (12)$$

$$\Delta S_3 \sim [b_1^+(\mathbf{k}) b_1^-(\mathbf{k}) - b_2^+(\mathbf{k}) b_2^-(\mathbf{k}) - b_1^-(\mathbf{k}) b_1^*(\mathbf{k}) + b_2^-(\mathbf{k}) b_2^*(\mathbf{k})]. \quad (13)$$

Вычисляя затем соответствующие средние, убеждаемся, что  $b_1^+(\mathbf{k})$  и  $b_1^-(\mathbf{k})$  суть соответственно операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом  $\mathbf{k}$ , зарядом  $+1$  и проекцией спина на ось движения  $+1$ ;  $b_2^+(\mathbf{k})$ ,  $b_2^-(\mathbf{k})$  — операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом  $\mathbf{k}$ , зарядом  $+1$  и проекцией спина,  $-1$ ;

$b_3^+(\mathbf{k})$  и  $b_3^-(\mathbf{k})$  — операторы для частицы с импульсом  $\mathbf{k}$ , зарядом  $+1$  и нулевой проекцией спина. Смысл операторов  $b_a^+$  и  $b_a^*$  можно получить отсюда, применяя следующее правило:

переход от  $b_a^\pm$  к  $b_a^{*\pm}$  соответствует изменению знака заряда и знака проекции спина.

Мы видим теперь, что комплексное векторное поле описывает заряженные частицы с массой  $m$  и тремя возможными значениями проекции спина  $(1, 0, -1)$  на заданную ось. Говоря иначе, кванты этого поля являются заряженными мезонами со спином 1 (их называют также векторными мезонами).

Амплитуды  $a_c$  также имеют простой смысл. Так, амплитуды  $a_3$  соответствуют частицам с нулевой проекцией спина на направление движения, а  $a_1$  и  $a_2$  описывают смеси состояний с проекциями спина 1 и  $-1$ , соответствующие линейным поляризациям.

Выпишем еще перестановочные соотношения для четырех независимых амплитуд  $U_\nu$ . С помощью (3.24) без труда находим перестановки трех амплитуд  $U_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ):

$$[U_n^*(\mathbf{k}), U_m^+(q)] = [U_n^-(\mathbf{k}), U_m^*(q)] = \delta(\mathbf{k} - q) \left[ \delta_{nm} + \frac{k_n k_m}{m^2} \right].$$

Используя связь  $k_0 U_0 + k_n U_n = 0$ , определяем затем коммутаторы, содержащие  $U_0$ :

$$\begin{aligned} [U_0^*(\mathbf{k}), U_n^+(q)] &= [U_0^-(\mathbf{k}), U_n^*(q)] = -\frac{k_0 k_n}{m^2} \delta(\mathbf{k} - q), \\ [U_0^*(\mathbf{k}), U_0^+(q)] &= [U_0^-(\mathbf{k}), U_0^*(q)] = \left( \frac{k_0^2}{m^2} - 1 \right) \delta(\mathbf{k} - q). \end{aligned}$$

Объединяя эти выражения, получаем формулу

$$[U_\nu^*(\mathbf{k}), U_\mu^+(q)] = [U_\nu^-(\mathbf{k}), U_\mu^*(q)] = \left( \frac{k_\nu k_\mu}{m^2} - g_{\nu\mu} \right) \delta(\mathbf{k} - q), \quad (14)$$

которая является релятивистски симметричной и совместной с дополнительными условиями (3.22). Переходя к координатному представлению, находим

$$\begin{aligned} [U_\nu^*(x), U_\mu^+(y)] &= [U_\nu^-(x), U_\mu^*(y)] = \left( g_{\nu\mu} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \right) iD^-(x - y), \\ [U_\nu^*(x), U_\mu(y)] &= \left( g_{\nu\mu} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \right) iD(x - y). \end{aligned} \quad (15)$$

Не представляет труда проверить, что полученные перестановочные соотношения являются совместными как с уравнениями поля, так и с дополнительными условиями. Так, действуя на обе стороны (15) оператором Клейна — Гордона  $\square_x - m^2$ , приходим к тождеству  $0 = 0$ , так как в соответствии с (3)

$$(\square - m^2) D(x) = 0.$$

**8.4. Электромагнитное поле — трудности квантования.** При квантовании электромагнитного поля необходимо одновременно удовлетворить требованиям положительности плотности энергии, дополнительному условию Лоренца и условию поперечности. Вся формулировка должна при этом обладать свойством релятивистской ковариантности.

Сходное положение мы имели при квантовании векторного мезонного поля. Отличие состоит в том, что векторные мезоны могут находиться в трех спиновых состояниях, а фотоны из-за поперечности — лишь в двух, так как, в противоположность мезонам, масса покоя фотонов равна нулю. Первое обстоятельство приводит к тому, что компоненты потенциала электромагнитного поля в еще большей степени, нежели у векторного поля, содержат в себе «лишние» переменные, ибо имеются четыре компоненты, а состояний, в которых могут находиться реальные фотоны, только два.

Второе отличие ( $m=0$ ) делает невозможным применение к электромагнитному полю процедуры, использованной при квантовании векторного поля. Действительно, уже квантование гипотетического векторного поля с исчезающе малой массой, т. е. поля, отличающегося от электромагнитного поля отсутствием градиентного преобразования и потому трехкомпонентного, вызывает значительные затруднения. При подобном квантовании мы получаем бессмысленные выражения, во-первых, при диагонализации энергии-импульса подстановкой (3.24), а во-вторых, при установлении перестановочных соотношений для компонент потенциала  $A_\nu$  (14), (15) из-за присутствия исчезающе малой массы в знаменателях указанных выражений.

Поэтому квантование электромагнитного поля проводится следующим образом. Компоненты векторного потенциала считаем независимыми величинами, отказавшись тем самым от условия Лоренца в операторной форме. Тогда по общему рецепту квантования, исходя из структуры 4-вектора энергии-импульса, выраженного через продольную, поперечные и временную компоненты  $a_\mu(k)$

$$P^\nu = \int d\mathbf{k} k^\nu (-a_\mu^+(k) a_\mu^-(k)), \quad (16)$$

приходим к перестановочным соотношениям

$$[a_\nu^-(k), a_\mu^+(q)] = -g_{\nu\mu} \delta(k - q). \quad (17)$$

Квантование (17) позволяет рассматривать операторы  $a_\nu^\pm$  как операторы рождения и уничтожения четырех независимых сортов фотонов: двух поперечных, «продольных» и «временных». Однако при таком квантовании возникает следующая трудность. Компонента  $a_0$  удовлетворяет соотношению

$$[a_0^-(k), a_0^+(q)] = -\delta(k - q),$$

сравнивая которое с (7.19), видим, что операторы рождения и уничтожения «временных» фотонов как бы поменялись местами, что обязано отрицательному знаку члена  $a_0^+ a_0^-$  в выражении (16).

Такое коммутационное соотношение несовместимо с предположением о положительной определенности метрики в гильбертовом пространстве состояний (см. задание O12).

Указанная трудность может быть ликвидирована формальным приемом (метод Гупта — Блейлера), основанном на том обстоятельстве, что эта трудность целиком обусловлена «временными» фотонами, которые в действительности не существуют, а их возникновение в промежуточных рассуждениях связано с переходом от наблюдаемых величин (векторов  $E$  и  $H$ ) к ненаблюдаемому 4-потенциалу  $A_\nu$ , произведенным для придания теории релятивистской симметрии и ковариантности.

**8.5. Электромагнитное поле — квантование по Гупта — Блейлеру.** Отсылая читателя за подробностями к специальной литературе (Введение, § 12.2; Ахиезер, Берестецкий (1969), § 5.2), приведем сейчас лишь основную идею метода Гупта — Блейлера и окончательные формулы.

Центральную роль здесь играет условие Лоренца. При квантовании (17) подразумевалось, что компоненты потенциала  $A_\nu$  независимы, поэтому накладывать условие Лоренца как условие на операторы нельзя. Легко убедиться, что наложить условие Лоренца на допустимые состояния

$$\partial A(x) \Phi = 0 \quad (\partial A \equiv \partial^\nu A_\nu)$$

также невозможно, ибо такое условие противоречит, например, определению вакуума. В самом деле, полагая  $\Phi = \Phi_0$ , имеем

$$\partial A(x) \Phi_0 = \partial A^+(x) \Phi_0 = 0.$$

Умножая слева на  $A_\mu^-(y)$ , получаем

$$\begin{aligned} A_\mu^-(y) \partial^\nu A_\nu^+(x) \Phi_0 &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} (A_\mu^-(y) A_\nu^+(x)) \Phi_0 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} [A_\mu^+(x) A_\nu^-(y) - i g_{\mu\nu} D_0^+(x-y)] \Phi_0 = -i \partial_\nu D_0^+(x-y) \Phi_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Здесь  $D_0^+$  — перестановочная функция частотных компонент электромагнитного поля, т. е. положительно-частотная часть перестановочной функции  $D_0$ , введенной ниже в (22).

Поэтому квантовое условие Лоренца сформулируем как условие на допустимые состояния:

$$\partial A^-(x) \Phi = \frac{\partial A_\nu^-(x)}{\partial x_\nu} \Phi = 0, \quad \Phi^* (\partial A^+) = 0. \quad (18)$$

Ослабленное условие (18) обеспечивает выполнение условия Лоренца для средних значений

$$\langle \partial A \rangle = \Phi \partial A(x) \Phi = 0,$$

что вполне достаточно для соответствия с классическим полем.

Как отмечалось в § 4, скалярная функция  $\chi(x) = \partial A(x)$  в рассматриваемой здесь диагональной калибровке удовлетворяет свободному уравнению (4.15) даже при наличии взаимодействия с источниками. Поэтому ослабленное условие Лоренца (18) сохраняет свою форму и при включении взаимодействия квантового электромагнитного поля с сохраняющимся током заряженных частиц.

Переходя к импульсному представлению, в переменных локального репера и с учетом того, что  $k_0 = |\mathbf{k}|$ , получаем вместо (18)

$$F^-(\mathbf{k}) \Phi = 0, \quad \Phi F^+(\mathbf{k}) = 0, \quad (19)$$

где

$$F^\pm(\mathbf{k}) = a_0^\pm(\mathbf{k}) - a_3^\pm(\mathbf{k}).$$

Отсюда следует, что в допустимые состояния комбинация  $a_3^+ a_3^- - a_0^+ a_0^-$  вклада не дает:

$$\langle a_3^+ a_3^- - a_0^+ a_0^- \rangle = \Phi (a_3^+ - a_0^+) a_3^- \Phi = 0,$$

вследствие чего суммарный вклад в энергию и импульс допустимых состояний от продольных и временных псевдофотонов равен нулю.

Нетрудно убедиться, что совместные с условиями (18), (19) допустимые состояния имеют следующую структуру:

$$\Phi = \Phi_{tr}^0 + \sum_n c_n \prod_{1 \leq m \leq n} [a_3^+(k_m) - a_0^+(k_m)] \Phi_{tr}^n, \quad (20)$$

где  $\Phi_{tr}^0$ ,  $\Phi_{tr}^n$  — амплитуды реальных фотонных состояний, не содержащие псевдофотонов.

Покажем теперь, что в разложении по локальному реперу (4.23) оказываются существенными лишь поперечные составляющие

$$A_v^{tr}(\mathbf{k}) = e_v^1(\mathbf{k}) a_1(\mathbf{k}) + e_v^2(\mathbf{k}) a_2(\mathbf{k}).$$

Представим правую часть (4.23) в виде

$$\begin{aligned} A_v^-(\mathbf{k}) &= A_v^{tr,-}(\mathbf{k}) + \left( \frac{k_v}{|\mathbf{k}|} - \delta_{v0} \right) a_3^-(\mathbf{k}) + \delta_{v0} a_0^-(\mathbf{k}) = \\ &= A_v^{tr,-}(\mathbf{k}) + k_v \Lambda(\mathbf{k}) + \delta_{v0} F^-(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Здесь член  $k_v \Lambda = k_v a_3^-(\mathbf{k}) / |\mathbf{k}|$  имеет структуру 4-градиента и может быть исключен градиентным преобразованием, а  $F^-(\mathbf{k}) \Phi = 0$

согласно (19). Поэтому

$$A_{\nu}^{-}(k) \Phi = A_{\nu}^{\text{tr}, -}(k) \Phi,$$

и, следовательно,

$$\overset{*}{\Phi} A_{\nu} \Phi = \overset{*}{\Phi} A_{\nu}^{\text{tr}} \Phi.$$

Можно показать, что справедливо более общее утверждение

$$\overset{*}{\Phi} K(A) \Phi = \overset{*}{\Phi} K(A^{\text{tr}}) \Phi = \overset{*}{\Phi}_{\text{tr}} K(A^{\text{tr}}) \Phi_{\text{tr}}^{\circ}, \quad (21)$$

где  $K(A)$  — оператор, полиномиально зависящий от  $A$ , а  $\Phi_{\text{tr}}^{\circ}$  введено в (20).

Итак, согласно (21), среднее по допустимым состояниям от произвольного потенциала  $A$  равно среднему от поперечного потенциала  $A^{\text{tr}}$  по реальным физическим состояниям.

Отметим еще, что последовательное проведение этой программы требует введения индефинитной метрики в той части гильбертова подпространства допустимых состояний, которая содержит временные псевдодотоны. Мы не имеем возможности останавливаться на этом более подробно.

Приведем в заключение сводку формул для квантованного электромагнитного поля в лоренцевой калибровке:

коммутатор полевых функций

$$[A_{\nu}(x), A_{\mu}(y)] = ig_{\nu\mu} D_0(x-y), \quad (22)$$

причем

$$D_0(x) = D(x)|_{m=0} = -i(2\pi)^{-3} \int e^{ikx} \delta(k^2) \varepsilon(k^0) dk; \quad (23)$$

уравнения поля

$$\square A_{\nu} = 0; \quad (24)$$

условие Лоренца на допустимые состояния

$$\left( \frac{\partial A^{-}(x)}{\partial x} \right) \Phi = 0; \quad (25)$$

среднее значение 4-импульса по допустимым состояниям

$$\langle P_{\nu} \rangle = \left\langle \int dk k_{\nu} \sum_{\sigma=1,2} a_{\sigma}^{\dagger}(k) a_{\sigma}^{-}(k) \right\rangle. \quad (26)$$

## § 9. Спинорные поля

9.1. Квантование поля Дирака. Из структуры 4-вектора энергии-импульса спинорного поля

$$P^{\nu} = \int dk k^{\nu} [a_s^{\dagger}(k) a_s^{-}(k) - a_s^{-}(k) a_s^{\dagger}(k)] \quad (5.21)$$

видно, что квантованию могут быть подвергнуты независимые амплитуды  $a_s$  ( $s = 1, 2$ ).

Как уже указывалось, требование положительности среднего значения оператора энергии  $P^0$  приводит к тому, что спинорное поле должно быть проквантовано по Ферми — Дираку. Поэтому фурье-амплитуды спинорного поля  $a_s(\mathbf{k})$  следует считать операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям Ферми — Дирака:

$$[a_s^*(\mathbf{k}), a_r^+(\mathbf{q})]_+ = [a_s^-(\mathbf{k}), a_r^-(\mathbf{q})]_+ = \delta_{sr} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (1)$$

(все остальные антикоммутаторы равны нулю).

Перестановочные соотношения для операторов  $\psi(x)$  получим отсюда с помощью следующих из (5.9), (5.13) и (5.14) формул фурие-преобразований

$$\psi^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k} e^{\pm i k x} a_s^\pm(\mathbf{k}) v^{s, \pm}(\mathbf{k}), \quad (2)$$

$$\bar{\psi}^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k} e^{\pm i k x} a_s^\pm(\mathbf{k}) \bar{v}^{s, \pm}(\mathbf{k}) \quad (3)$$

и формул суммирования по спиновому индексу (5.20).

Имеем

$$\begin{aligned} [\psi_\alpha^-(x), \bar{\psi}_\beta^+(y)]_+ &= (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(y-x)} \sum_\sigma v_\alpha^{\sigma, -}(\mathbf{k}) \bar{v}_\beta^{\sigma, +}(\mathbf{k}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(y-x)} \frac{(\hat{\mathbf{k}} + m)_{\alpha\beta}}{2k_0} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} (\hat{\mathbf{k}} + m)_{\alpha\beta} \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) e^{i\mathbf{k}(y-x)} = \\ &= (i\gamma^\nu \partial/\partial x^\nu + m)_{\alpha\beta} \frac{1}{i} D^-(x-y). \end{aligned}$$

Аналогично этому можно показать, что

$$[\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)]_+ = (i\hat{\partial}_x + m) (1/i) D^+(x-y).$$

Вводя обозначения

$$S_{\alpha\beta}^\pm(x) = (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} D^\pm(x), \quad S = S^+ + S^-,$$

получаем

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)] = \frac{1}{i} S(x-y), \quad (4)$$

где

$$S(x) = (i\hat{\partial} + m) D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}x} \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k^0) (\hat{\mathbf{k}} + m) d\mathbf{k}. \quad (5)$$

Перестановочные соотношения совместны с уравнениями поля, так как

$$(i\hat{\partial} - m) S(x) = (\square - m^2) D(x) = 0.$$

Записывая лагранжиан с помощью нормального произведения:

$$\mathcal{L} = (i/2) : [\bar{\psi}(x) \gamma^\nu \partial_\nu \psi - (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\nu \psi(x)]: - m \bar{\psi} \psi, \quad (6)$$



получаем тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = (i/2) : \left[ \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma^\mu \psi \right] :, \quad (7)$$

тензор плотности спина

$$S^{\lambda(\mu\nu)} = \frac{1}{4} : \bar{\psi} \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} \psi : + \frac{1}{4} : \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \gamma^\lambda \psi : \quad (8)$$

и вектор тока

$$J^\nu(x) = : \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x) :. \quad (9)$$

В результате перехода к импульсному представлению по формулам (2), (3) соответствующие интегралы движения, согласно (5.21) и (5.27), (5.28), примут вид:

4-вектор энергии-импульса

$$P^\nu = \int d\mathbf{k} k^\nu [a_s^+(\mathbf{k}) a_s^-(\mathbf{k}) + a_s^+(\mathbf{k}) a_s^-(\mathbf{k})], \quad (10)$$

заряд

$$Q = \int d\mathbf{k} [a_s^+(\mathbf{k}) a_s^-(\mathbf{k}) - a_s^+(\mathbf{k}) a_s^-(\mathbf{k})], \quad (11)$$

проекция спина на направление движения

$$\Delta S_3 \sim (1/2) [a_1^+(\mathbf{k}) a_1^-(\mathbf{k}) - a_2^+ a_2^- - a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^-]. \quad (12)$$

Из выражений (10) — (12) вытекает, что операторы  $a_s^+(\mathbf{k})$  и  $a_s^-(\mathbf{k})$  суть соответственно операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом  $\mathbf{k}$ , энергией  $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ , зарядом  $+1$  и проекцией спина на направление  $\mathbf{k}$ , равной  $1/2$  ( $s=1$ ) или  $-1/2$  ( $s=2$ ). Операторы  $a_s^+(\mathbf{k})$  и  $a_s^-(\mathbf{k})$  соответствуют частицам, отличающимся от только что описанных знаком заряда ( $-1$ ) и знаком проекции спина (т. е.  $1/2$  ( $s=2$ ) и  $-1/2$  ( $s=1$ )).

**9.2. Спинорное поле с массой нуль.** Особый интерес представляет спинорное поле с массой нуль, соответствующее нейтрино. Полагая в уравнении Дирака  $m=0$ , имеем

$$i\gamma^\nu \partial_\nu \psi(x) = 0.$$

Это уравнение распадается на два независимых двухкомпонентных уравнения. Для того чтобы показать это, воспользуемся тем, что в отсутствие массового члена оператор уравнения Дирака антикоммутирует с матрицей  $\gamma_5$ .

Вводя проекционные операторы

$$P_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2},$$

получаем

$$P_\pm \hat{\partial} \psi = P_\pm \gamma^\nu \partial_\nu \psi = \gamma^\nu P_\mp \partial_\nu \psi,$$

т. е. два отдельных уравнения для  $\psi_{\pm} = P_{\pm}\psi$

$$i\hat{\partial}\psi_{+} = 0, \quad i\hat{\partial}\psi_{-} = 0. \quad (13)$$

В стандартном представлении

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 \mp \psi_3 \\ \psi_2 \mp \psi_4 \\ \mp \psi_1 + \psi_3 \\ \mp \psi_2 + \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждая из функций  $\psi_{+}$ ,  $\psi_{-}$  содержит лишь по две независимые компоненты и в «расщепленном» виде

$$\psi_{+} = \begin{pmatrix} \varphi_{(+)} \\ -\varphi_{(+)} \end{pmatrix}, \quad \psi_{-} = \begin{pmatrix} \varphi_{(-)} \\ \varphi_{(-)} \end{pmatrix}$$

может быть выражена через двухкомпонентные спиноры

$$\varphi_{(+)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 - \psi_3 \\ \psi_2 - \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{(-)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_3 \\ \psi_2 + \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Используя «расщепленную» запись (ДП.7) для матриц Дирака, получим вместо (13)

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^0} \pm \sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \varphi_{(\pm)}(x) = 0. \quad (14)$$

Уравнения такого вида впервые были предложены Вейлем. Для того чтобы уяснить физический смысл двухкомпонентных функций  $\varphi_{\alpha} [\alpha = (+), (-)]$ , перейдем к импульсному представлению:

$$\varphi_{\alpha} = \varphi_{\alpha}^{+} + \varphi_{\alpha}^{-}, \quad \varphi_{\alpha}^{\pm}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{p} \tilde{\varphi}_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{p}) e^{\pm i\mathbf{p}\mathbf{x}}.$$

Уравнения Вейля принимают вид

$$(\rho_0 \mp \sigma \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{(\pm)}(\mathbf{p}) = 0. \quad (15)$$

Как было установлено в § 5.3 (см. (5.24)), матричный вектор  $\sigma$  описывает спин фермиона. Из уравнений (15) следует (см. также задание 016), что спин нейтрино может быть направлен либо по направлению спина, либо наоборот. Поэтому каждая из 4-компонентных импульсных амплитуд  $\psi_{\pm}$  содержит лишь одно спиновое состояние.

Значение проекции спина фермиона на направление его импульса  $(\sigma \mathbf{p})/|\mathbf{p}|$  называют *спиральностью*. Экспериментально установлено, что у нейтрино спин направлен антипараллельно импульсу, т. е. спиральность нейтрино равна  $-1/2$  (что справедливо как для электронного, так и для мюонного нейтрино). Как будет показано ниже, функция  $\psi_{-}$  описывает частицы с отрицательной спиральностью, а  $\psi_{+}$  — с положительной.

Поэтому оператор поля для нейтрино определим следующим образом:

$$v(x) = P_- \psi(x).$$

Он удовлетворяет безмассовому уравнению Дирака

$$i\hat{\partial}v(x) = 0$$

и дополнительному условию

$$P_+ v(x) = \frac{1+\gamma_5}{2} v(x) = 0. \quad (16)$$

Соответствующая сопряженная функция  $\bar{v} = v^* \gamma^0$  удовлетворяет сопряженному уравнению

$$i\partial_\mu \bar{v}(x) \gamma^\mu = 0$$

и дополнительному условию

$$\bar{v}(x) P_- = \bar{v}(x) \frac{1-\gamma_5}{2} = 0.$$

Лагранжиан квантованного свободного нейтринного поля записывается в виде

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} :[\bar{v}(x) \gamma^\mu v_{;\mu}(x) - \bar{v}_{;\mu}(x) \gamma^\mu v(x)]:. \quad (17)$$

Выражения для тензора энергии-импульса и тензора плотности спина в координатном представлении получаются из формул (7), (8) подстановкой  $v(x)$  вместо  $\psi(x)$ . В импульсном представлении формула для  $P^\mu$  получается из (10) опусканием суммирования по спиновому индексу:

$$P^\mu = \int d\mathbf{p} p^\mu [a^+(\mathbf{p}) a^-(\mathbf{p}) + a^+(\mathbf{p}) a^-(\mathbf{p})]. \quad (18)$$

Отдельно рассмотрим спин нейтринного поля. Для этого будем исходить из выражения вида (5.25) для плотности вектора спина

$$(\frac{1}{2}) : \{ a^+(\mathbf{p}) a^-(\mathbf{p}) v^+(\mathbf{p}) \sigma_3 v^-(\mathbf{p}) + a^-(\mathbf{p}) a^+(\mathbf{p}) v^-(\mathbf{p}) \sigma_3 v^+(\mathbf{p}) \} :, \quad (19)$$

справедливого в системе отсчета  $p_1 = p_2 = 0$ , т. е. когда ось  $x_3$  направлена по импульсу. В этой системе нормированные спиноры, удовлетворяющие уравнениям

$$\hat{p} v^\pm(\mathbf{p}) = v^\pm(\mathbf{p}) \hat{p} = 0$$

и дополнительным условиям

$$(1 + \gamma^5) v^\pm(\mathbf{p}) = v^\pm(\mathbf{p}) (1 + \gamma^5) = 0,$$

могут быть выбраны в виде (имеется в виду стандартное представление матриц Дирака)

$$v^+(\mathbf{p}) = (2)^{-1/2} \begin{pmatrix} \omega(\mathbf{p}) \\ \omega(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \equiv v(\mathbf{p}), \quad v^-(\mathbf{p}) = (2)^{-1/2} \begin{pmatrix} \omega^*(\mathbf{p}) \\ \omega^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

здесь  $\omega(\mathbf{p})$  — двухкомпонентные спиноры, удовлетворяющие уравнению Вейля (15)

$$(\rho_0 + \sigma_3 \rho_3) \omega(\mathbf{p}) = 0,$$

имеют вид

$$\omega(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выше мы учли, что для безмассового нейтрино  $\rho_0 = \rho_3$ . Очевидно также, что

$$\omega^*(\mathbf{p}) = (0, 1),$$

поэтому

$$v^\pm(\mathbf{p}) \sigma_3 v^\mp(\mathbf{p}) = 1.$$

Подставляя этот результат в (19), находим

$$\Delta S_3 \sim -\frac{1}{2} a^+(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} a^+(\mathbf{p}) a^*(\mathbf{p}). \quad (20)$$

Первый член этого выражения соответствует левовинтовому нейтрино с отрицательной спиральностью, а второй — правовинтовому антинейтрино. Спиральность антинейтрино равна  $+1$ .

Выражение (20) соответствует формуле (12) при  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = a$ . Если бы вместо функции  $v = \psi_-$  мы рассмотрели функцию  $\psi_+$ , то получили бы аналог формулы (12) при  $a_2 = 0$ , описывающий частицы с положительной спиральностью и античастицы с отрицательной спиральностью.

Отметим, что при рассмотрении процессов слабых взаимодействий, в которых участвуют левовинтовые нейтрино, иногда используют следующее представление матриц Дирака ( $n = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma_0 = \Gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, & \Gamma^n &= -\Gamma_n = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ -\sigma_n & 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_5 = \Gamma^5 &= \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = -i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3 = i\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Мы использовали здесь *расщепленную* запись через  $2 \times 2$  матрицы  $I$ ,  $0$  и матрицы Паули (см. Дополнение II).

В этом представлении проекционные операторы  $P_\pm$  диагональны, вследствие чего спинор с отрицательной спиральностью имеет более простой вид

$$v(x) = P_- \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Представление (21) уместно назвать *спиральным* представлением матриц Дирака. Со стандартным представлением (ДII.5), (ДII.7)

оно связано преобразованием

$$\Gamma = 0^{-1}\gamma_0, \quad 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**9.3. Зарядовое сопряжение.** Как нетрудно убедиться из формул § 2, для комплексных полей с целым спином, описывающих заряженные частицы; преобразование

$$\begin{aligned} \varphi_a(x) &\rightarrow \varphi'_a(x) = \overset{*}{\Phi}_a(x), \\ \overset{*}{\Phi}_a(x) &\rightarrow \overset{*}{\Phi}'_a(x) = \varphi_a(x) \end{aligned} \quad (22)$$

к новым функциям поля  $\varphi'$ ,  $\overset{*}{\Phi}'$  сохраняет выражения для всех динамических величин, кроме тока и заряда, неизменными, а у  $J_\nu$  и  $Q$  меняет знак. Поэтому такое преобразование называют преобразованием сопряжения заряда или *зарядовым сопряжением*.

Зарядовое сопряжение спинорного поля сложнее преобразования (22) из-за матричного характера (многокомпонентности) спинорных волновых функций; это есть матричное преобразование следующего вида:

$$\psi'(x) = C\bar{\psi}(x)^T, \quad \bar{\psi}' = \psi^T C^{-1} = (C^{-1}\psi)^T, \quad (23)$$

для совместности которого нужно потребовать, чтобы

$$\overset{T}{C}\gamma_0\overset{\dagger}{C}\gamma_0 = 1. \quad (24)$$

Преобразование, обратное (23), есть соответственно

$$\psi(x) = C\bar{\psi}'(x)^T, \quad \bar{\psi} = \psi'^T C^{-1} = (C^{-1}\psi')^T.$$

Мы видим, таким образом, что определенное по (23) зарядовое сопряжение, кроме очевидного свойства тождественности двукратного преобразования, обладает еще свойством зеркальной симметрии, т. е. совпадает по форме с обратным.

Конкретный вид матриц  $C$  определим, потребовав, чтобы лагранжиан свободного поля, а следовательно, и 4-вектор энергии-импульса не меняли своего вида, а 4-вектор тока менял бы знак, т. е. чтобы имели место соотношения

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}(\psi'), \quad T(\psi) = T(\psi'), \quad J_\nu(\psi) = -J_\nu(\psi').$$

Для этого оказывается достаточным (см. задание О17) потребовать, чтобы выполнялись два соотношения

$$:\bar{\psi}_1(x)\gamma_\nu\psi_2(x): = -:\bar{\psi}'_2(x)\gamma_\nu\psi'_1(x): \quad (25)$$

и

$$:\bar{\psi}(x)\psi(x): = :\bar{\psi}'(x)\psi'(x):, \quad (26)$$

причем  $\bar{\psi}_1$  и  $\bar{\psi}_2$  равны либо самой  $\bar{\psi}$ , либо ее производным  $\partial_\mu\bar{\psi}$  и преобразуются по формулам (23).

Итак, рассмотрим ограничения, налагаемые на матрицу  $C$  условиями (25) и (26). Подставляя (23) в (25), имеем

$$:\bar{\psi}_1(x) \gamma_\nu \psi_2(x): = :\psi'_1(x) \bar{C}^{-1} \gamma_\nu C \psi'_2(x):.$$

Учитывая антикоммутиративность квантованных спиноров  $\psi'$  и  $\bar{\psi}'$ , получаем отсюда соотношение

$$:\bar{\psi}_1 \gamma_\nu \psi_2: = -:\bar{\psi}'_2 \overset{\tau}{C} \gamma_\nu \overset{\tau}{C}^{-1} \psi'_1:.$$

сравнивая которое с (25), находим первое условие, налагаемое на матрицу  $C$ :

$$\overset{\tau}{C} \gamma_\nu \overset{\tau}{C}^{-1} = \gamma_\nu$$

или, в транспонированной форме,

$$\overset{\tau}{C}^{-1} \gamma_\nu \overset{\tau}{C} = \gamma_\nu. \quad (27)$$

Аналогичным образом, подставляя (23) в (26), имеем

$$:\bar{\psi} \psi: = :\psi' \overset{\tau}{C}^{-1} \overset{\tau}{C} \bar{\psi}': = -:\bar{\psi}' \overset{\tau}{C} \overset{\tau}{C}^{-1} \psi':,$$

откуда находим второе условие для матрицы  $C$ :  $\overset{\tau}{C} \overset{\tau}{C}^{-1} = -1$ , т. е.

$$\overset{\tau}{C} = -C. \quad (28)$$

Используя (28), можно записать (27) в виде

$$C^{-1} \gamma^\nu C = -\gamma^\nu. \quad (29)$$

Как нетрудно показать (см. задание O17), из формул (28), (29) и (24) вытекает унитарность матрицы зарядового сопряжения

$$C \overset{\dagger}{C} = 1. \quad (30)$$

Формулы (29) и (30) позволяют определить явный вид матрицы  $C$  в любом фиксированном представлении матриц Дирака. Мы предлагаем читателю убедиться самостоятельно, что, как в стандартном представлении (ДII.5), так и в спиральном представлении (21) матрица  $C$  равна произведению «нулевой» и «второй» матриц Дирака, т. е.

$$C_{\text{станд}} = \gamma^0 \gamma^2 = \alpha_2, \quad C_{\text{спир}} = \Gamma^0 \Gamma^2.$$

Отметим, что в общем случае при переходе от одного представления матриц Дирака  $\gamma$  к какому-либо иному  $\tilde{\gamma}$

$$\gamma^\nu = O \tilde{\gamma}^\nu O^{-1}$$

новую матрицу зарядового сопряжения  $\tilde{C}$  получим по формуле

$$C = O\tilde{C}O^T,$$

где  $O$  матрица, транспонированная по отношению к  $O$ .

Физический смысл операции зарядового сопряжения  $C$  заключается в замене частицы на античастицу. Поэтому, например, инвариантность относительно операции  $C$  (имеющая место для сильных и электромагнитных взаимодействий) приводит к тому, что если осуществляется некоторый процесс  $\Pi$  (представляющий собой произвольную комбинацию сильных и электромагнитных взаимодействий), то возможен и происходит с той же вероятностью процесс  $C\Pi$ , отличающийся от  $\Pi$  заменой всех частиц на античастицы.

**9.4. CPT-теорема.** Заключая рассмотрение квантованных свободных полей, упомянем одно из важнейших утверждений локальной квантовой теории поля — так называемую *CPT*-теорему, формулирующую свойство инвариантности относительно трех дискретных преобразований:

- зарядового сопряжения  $C$ ,
- пространственного отражения  $P$ ,
- обращения оси времени  $T$ .

Кроме операции  $C$ , рассмотренной на предыдущих страницах, мы сталкивались ранее с операцией  $P$  отражения всех трех пространственных осей координат (см. § 1 и Дополнение II). Третья операция — обращение (или отражение) оси времени — имеет вид

$$x \rightarrow x', \quad x'_0 = -x_0, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}.$$

В отличие от непрерывных преобразований, входящих в группу Пуанкаре, операции  $P$  и  $T$  не отвечают каким-либо реальным движениям физической системы. Они, однако, подобно операции  $C$ , связывают друг с другом различные физические процессы.

Мы вернемся к этому вопросу в конце раздела, а пока рассмотрим эти преобразования формально. Возьмем простой пример комплексного скалярного поля, описываемого операторами

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x), \quad \tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}^+(x) + \tilde{\varphi}^-(x).$$

Операции  $P$  и  $T$  меняют знак аргумента в координатном представлении. Например,

$$PT\varphi^\pm(x) = PT\varphi^\pm(x_0, \mathbf{x}) = P\varphi^\pm(-x_0, \mathbf{x}) = \varphi^\pm(-x_0, -\mathbf{x}) = \varphi^\pm(-x),$$

тогда как операция  $C$  меняет частицы на античастицы:

$$C\varphi^\pm(x) = \tilde{\varphi}^\pm(x), \quad C\tilde{\varphi}^\pm(x) = \varphi^\pm(x).$$

Поэтому

$$CPT\varphi^\pm(x) = \overset{*}{\varphi}^\pm(-x), \quad CPT\overset{*}{\varphi}^\pm(x) = \varphi^\pm(-x).$$

Подобно тому как преобразованиям группы Лоренца  $L$  ставятся в соответствие унитарные операторы  $U_L$ , преобразующие операторы полей и векторы состояний (см., например, (6.25)), преобразованиям  $C$ ,  $P$ ,  $T$  в квантовом случае также сопоставляются операторы  $U_C$ ,  $U_P$ ,  $U_T$ . Например, для комплексного скалярного поля

$$\varphi_C(x) = U_C^{-1}\varphi(x)U_C = \overset{*}{\varphi}(x),$$

$$\varphi_P(x) = U_P^{-1}\varphi(x)U_P = \varphi(x_0, -\mathbf{x})$$

и т. д.

$CPT$ -теорема утверждает\*), что локальный лагранжиан системы квантовых полей, построенный по «нормальным правилам», оказывается инвариантным:

$$\mathcal{L}_{CPT}(x') = U_C^{-1}U_P^{-1}U_T^{-1}\mathcal{L}(x')U_TU_PU_C = \mathcal{L}(x), \quad x' = -x$$

относительно одновременного применения всех трех операций.

«Нормальные правила» включают правила квантования полей в соответствии с теоремой Паули и выбор констант связи в соответствии с условием эрмитовости лагранжиана.

Обсудим теперь физические следствия  $CPT$ -теоремы.

Операция  $C$  заменяет частицы на античастицы. Операция  $P$  меняет направления в 3-мерном пространстве, т. е. изменяет все 3-векторы (импульсы, компоненты электрического поля и т. п.) на обратные. Операция  $T$  меняет начальные состояния на конечные и наоборот; изменяются также направления импульсов и спинов. Поэтому из  $CPT$ -теоремы вытекает равенство квадратов матричных элементов процесса  $\Pi$  и  $CPT\Pi$ , причем процесс  $CPT\Pi$  получается из  $\Pi$  заменой всех частиц на античастицы, всех спинов на обратные и перестановкой начальных и конечных состояний. В частности, из  $CPT$ -теоремы следуют равенства масс и времен жизни, а также отличие лишь в знаке магнитных моментов частиц и античастиц.

---

\*) Более точную формулировку в терминах современной аксиоматической теории поля читатель может найти в книге Боголюбова, Логунова, Тодорова (1969), гл. 5.



## Глава III. ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ

### § 10. Взаимодействие полей

**10.1. Взаимодействие частиц.** Важнейшей физической чертой микрочастиц является их способность к взаимодействию и взаимопревращению. По современным представлениям все многообразие различных видов и форм взаимодействия материи сводится к четырем типам *элементарных* (или *фундаментальных*) *взаимодействий* между частицами:

- 1) гравитация,
- 2) электромагнетизм,
- 3) слабые взаимодействия,
- 4) сильные взаимодействия.

Гравитационное взаимодействие является универсальным. Оно присуще всем видам материи, всем микрочастицам.

В электромагнитных взаимодействиях непосредственно участвуют электрически заряженные частицы.

Как гравитационное, так и электромагнитное взаимодействия являются *дальнодействующими*. Их интенсивность слабо убывает на больших расстояниях ( $\sim r^{-1}$ ), вследствие чего именно эти взаимодействия играют определяющую роль в макрофизике.

В то же время, как уже отмечалось в § 1, в микромире гравитационное взаимодействие гораздо слабее электромагнитного. Ввиду этого мы его учитывать не будем.

Рассмотрим сначала *электромагнитные взаимодействия*. Хорошо известно, что кулоновское взаимодействие двух заряженных частиц, представляющее собой действие на расстоянии (*action in distans*), есть результат взаимодействия каждой из частиц с электромагнитным полем. В результате квантования последнее описывается своими квантами — фотонами, а *элементарный акт* взаимодействия заряженной частицы  $Q$  с электромагнитным полем выступает как акт испускания или поглощения этой частицей  $\gamma$ -кванта:

$$Q \rightarrow Q + \gamma \quad \text{или} \quad Q + \gamma \rightarrow Q. \quad (1)$$

Совокупность таких двух взаимно обратных процессов условимся обозначать двойной стрелкой или картинкой-диаграммой

$$Q \longleftrightarrow Q + \gamma, \quad Q \begin{array}{c} \nearrow Q \\ \searrow \text{wavy} \end{array} . \quad (2)$$

На последней сплошные линии соответствуют заряженной частице  $Q$ , а волнистая — гамма-кванту. Кулоновское взаимодействие двух частиц  $Q_1$  и  $Q_2$  отвечает диаграмме

$$\begin{array}{c} Q_1 \nearrow \\ \searrow \\ \text{wavy} \\ \nearrow \\ \searrow \\ Q_2 \end{array} \quad Q_1, Q_2 \longrightarrow Q_1, Q_2, \quad (3)$$

описывающей обмен  $\gamma$ -квантом между частицами  $Q_1$  и  $Q_2$ . На подобных диаграммах условимся считать, что время «течет» в горизонтальном направлении слева направо.

Диаграмма, описывающая процесс аннигиляции или рождения пары будет тогда выглядеть так:

$$Q + \bar{Q} \longleftrightarrow \gamma, \quad \begin{array}{c} \bar{Q} \nearrow \\ \searrow \\ \text{wavy} \\ \nearrow \\ Q \end{array} . \quad (4)$$

При таком «переносе» в противоположную часть соотношения (2) частицу  $Q$  следует заменить на античастицу  $\bar{Q}$ .

Если мы теперь развернем рисунок (3) на  $90^\circ$  по часовой стрелке, то получим

$$Q_2 + \bar{Q}_2 \longleftrightarrow Q_1 + \bar{Q}_1, \quad \begin{array}{c} Q_2 \nearrow \\ \searrow \\ \text{wavy} \\ \nearrow \\ \bar{Q}_2 \end{array} \begin{array}{c} \bar{Q}_1 \nearrow \\ \searrow \\ \text{wavy} \\ \nearrow \\ Q_1 \end{array} . \quad (5)$$

— диаграмму, описывающую процесс превращения пары  $(Q_2, \bar{Q}_2)$  в пару  $(Q_1, \bar{Q}_1)$  путем однофотонной аннигиляции.

Как мы увидим ниже (см. § 10.3), элементарному электромагнитному взаимодействию (2), (4) отвечает член в лагранжиане, имеющий вид

$$\mathcal{L}(x) \sim e A_\mu(x) J_Q^\mu(x), \quad (6)$$

где  $A_\mu$  — потенциал электромагнитного поля, а  $J_Q^\mu$  — ток поля

частиц  $Q$ . Например, для электрон-позитронов

$$\mathcal{L}(x) = e A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x). \quad (7)$$

Типичным примером слабого взаимодействия является  $\beta$ -распад нейтрона

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (8)$$

который мы изобразим графически в «более симметричном» виде:

$$\begin{array}{l} n + \nu_e \longleftrightarrow p + e^- \\ \text{или} \\ n + \bar{\nu} \longleftrightarrow e^- + \bar{\nu}_e \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow n \\ \searrow p \\ \swarrow \nu_e \\ \nwarrow e \end{array} \quad (9)$$

Как правило, элементарные процессы слабого взаимодействия имеют четырех-фермионную структуру, подобную (9). В качестве второго примера приведем процесс распада мюона ( $\mu \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ ), который соответствует взаимодействию

$$\begin{array}{l} \mu + \nu_e \longleftrightarrow e^- + \nu_\mu \\ \text{или} \\ \mu + \bar{\nu}_\mu \longleftrightarrow e^- + \bar{\nu}_e \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \mu \\ \searrow e \\ \swarrow \nu_e \\ \nwarrow \nu_\mu \end{array} \quad (10)$$

Слабые взаимодействия, описывающие процессы типа (9), (10), в лагранжиане представлены членами, имеющими структуру (ток  $\times$  ток):

$$\mathcal{L} \sim G J_{\text{сл}}^\nu(x) \bar{J}_{\text{сл}}^\nu(x), \quad (11)$$

где

$$J_{\text{сл}}^\nu(x) = \bar{p}(x) O_{\nu p}(x) + \bar{\nu}_e(x) O_{\nu e}(x) + \bar{\nu}_\mu(x) O_{\nu \mu}(x) + \dots \quad (12)$$

— слабый ток,  $O_\nu$  — некоторые матрицы,  $G$  — постоянная Ферми, а операторные полевые функции обозначены теми же символами, что и соответствующие им частицы. Численное значение постоянной Ферми может быть выражено соотношением, содержащим мировые константы  $c$ ,  $\hbar$  и квадрат массы. Выбирая для этой цели массу нуклона  $M$ , имеем

$$\frac{G}{\hbar c} \cdot \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \cong 1,0 \cdot 10^{-5}. \quad (13)$$

Отличная от нуля размерность постоянной Ферми в системе  $\hbar = c = 1$  ( $[G] = m^{-2}$ ) практически означает, что интенсивность слабого взаимодействия существенно зависит от энергии. При энергиях в с. ц. м. порядка 1 ГэВ (т. е. порядка массы нуклона) интенсивность описывается числовым соотношением (13). Однако

в области энергий  $10^2 - 10^3$  ГэВ она возрастает до величин порядка 1, и взаимодействие Ферми перестает быть слабым.

*Сильные взаимодействия* охватывают большую группу частиц, которые обладают относительно большой массой ( $\geq m_\pi$ ) и называются собирательным термином — *адроны*. Эти взаимодействия являются короткодействующими

$$F_{\text{сил}} \sim \exp(-r/r_{\text{яд}});$$

они проявляются лишь на малых расстояниях, характеризующихся радиусом действия ядерных сил

$$r_{\text{яд}} \simeq \frac{\hbar}{m_\pi c} \simeq 1,4f = 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (14)$$

близким к комptonовской длине пи-мезона.

Сильные взаимодействия отвечают за ядерные силы, связывающие протоны и нейтроны в атомных ядрах. Они называются сильными, так как в микромире приводят к большим количественным эффектам. В то же время на малых расстояниях (при  $r < r_{\text{яд}}$ ) они велики по абсолютной величине и существенно превосходят электромагнитные взаимодействия. Поясним эту мысль.

Существуют разные способы сравнения интенсивности различных взаимодействий. Один из них основан на сравнении энергетических эффектов. Так, электромагнитные взаимодействия могут быть охарактеризованы энергией связи  $\epsilon$ -электрона в атоме водорода:  $E_{\text{э,д}} \simeq 10$  эВ.

Сильные взаимодействия ответственны за энергию связи нуклонов в ядре:  $E_{\text{яд}} \simeq 10$  МэВ =  $10^6 E_{\text{э,д}}$ .

Второй способ заключается в сопоставлении числовых безразмерных характеристик, описывающих интенсивности различных взаимодействий.

Лагранжиан электромагнитного взаимодействия поля Дирака с электромагнитным полем (7) содержит заряд электрона  $e$ , который является мерой интенсивности взаимодействия. Кулоновское взаимодействие двух заряженных частиц пропорционально  $e^2$  и может быть охарактеризовано безразмерной комбинацией

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \quad (15)$$

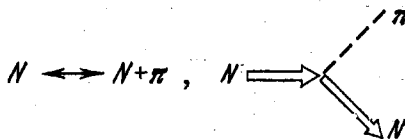
— так называемой *постоянной тонкой структуры*. Эта же самая величина (точнее говоря,  $\alpha/\pi \simeq 1/430$ ) выступает в качестве параметра разложения в электродинамической теории возмущений. Поэтому принято считать, что электромагнитные взаимодействия имеют порядок  $10^{-2} - 10^{-3}$ . Именно такой порядок имеют относи-

тельные расщепления масс внутри изотопических мультиплетов:

$$\frac{M_n - M_p}{M_p} \simeq \frac{939,55 - 938,26}{938,26} \simeq 1,38 \cdot 10^{-3},$$

$$\frac{m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0}}{m_{\pi^0}} \simeq \frac{139,57 - 134,96}{136,96} \simeq 3,4 \cdot 10^{-2},$$

которые принято относить к электромагнитным эффектам. В то же время часто полагают, что юкавскому взаимодействию пионов и нуклонов

$$N \leftrightarrow N + \pi, \quad N \rightarrow N + \pi \quad (16)$$


соответствует член в лагранжиане

$$\mathcal{L}(x) = g \bar{\Psi}(x) \gamma^5 \tau \Psi(x) \pi(x), \quad (17)$$

интенсивность которого характеризуется константой связи сильного взаимодействия  $g$ . Численное значение безразмерной комбинации, аналогичной постоянной тонкой структуры  $\alpha$ , оказывается равным

$$\frac{g^2}{4\pi\hbar c} \simeq 14,7, \quad (18)$$

т. е. не является малым по сравнению с единицей. По этой причине теория возмущений не может быть использована в моделях ядерных взаимодействий, основанных на лагранжианах подобного типа.

**10.2. Лагранжианы взаимодействия.** При изучении системы связанных полей, описывающей процессы взаимодействия соответствующих частиц, исходя из полного лагранжиана системы, который обычно представляют в виде суммы

$$\mathcal{L}_{\text{полн}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}}$$

свободного лагранжиана  $\mathcal{L}_0$  (являющегося суммой лагранжианов, входящих в систему свободных полей) и лагранжиана взаимодействия  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ . Примеры  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  были представлены выше формулами (7), (11), (17).

Сейчас мы сформулируем некоторые общие свойства, которыми должны обладать лагранжианы взаимодействия полей.

Лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  должен, во-первых, представлять локальную эрмитову лоренц-инвариантную конструкцию полевых функций различных полей и их производных. Кроме того,  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  должен отражать свойства симметрии и дискретные законы сохранения, присущие данному механизму взаимодействия.

Ограничиваясь простейшими полиномиальными (точнее, полилинейными) формами, получаем, например, что взаимодействие скалярного поля  $\varphi$  со спинорным полем  $\psi$  при сохранении четности может быть построено по типу скаляр  $\times$  скаляр:  $\bar{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x)$  или по типу вектор  $\times$  вектор:  $\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)\varphi_\nu(x)$ .

Аналогично этому простейшая форма взаимодействия псевдоскалярного изовекторного поля пионов  $\pi(x)$  с полем нуклонов  $\Psi(x)$ , описываемая формулой (17), имеет вид псевдоскаляр  $\times$  псевдоскаляр в конфигурационном пространстве и одновременно структуру изовектор  $\times$  изовектор в изотопическом пространстве. Альтернативная форма, построенная по типу (псевдовектор  $\times$  псевдовектор)  $\times$  (изовектор  $\times$  изовектор), имеет вид

$$\bar{\Psi}(x)\gamma^\nu\gamma^5\tau\Psi(x)\pi_\nu(x) \quad (19)$$

и представляет собой так называемый «псевдовекторный» вариант юкавского взаимодействия. Отметим здесь, что изотопическая симметрия представляет собой пример нарушенной симметрии — она имеет место лишь в сильных взаимодействиях. Подобно этому симметрия относительно пространственных отражений имеет место в сильных и электромагнитных взаимодействиях. Слабые взаимодействия не сохраняют пространственную четность. Слабый ток представляет собой линейную комбинацию вектора и псевдовектора.

В то же время такие свойства, как законы сохранения электрического и барионного зарядов выполняются во всех известных взаимодействиях. Наряду с лоренц-инвариантностью они считаются абсолютными.

В соответствии с законом сохранения электрического заряда лагранжиан должен быть инвариантным относительно фазового преобразования комплексно-сопряженных функций поля, описывающих заряженные частицы:

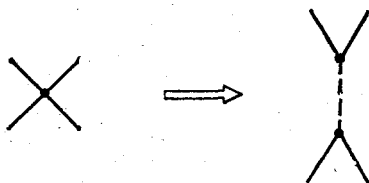
$$\varphi \rightarrow e^{i\alpha}\varphi, \quad \varphi^* \rightarrow e^{-i\alpha}\varphi^*, \quad (20)$$

а также функций всех других полей, несущих данный заряд.

Аналогичные ограничения налагают законы сохранения барионного заряда, странности и т. д.

При введении взаимодействия полей обычно исходят из соображений соответствия с наблюдаемыми на опыте процессами. Такой способ рассуждений, разумеется, не имеет достаточно глубокого теоретического обоснования и может приводить к ошибкам. Открытым, в частности, остается вопрос о существовании промежуточного векторного бозона, с помощью которого можно представить 4-фермионное взаимодействие Ферми (11) как следствие трилинейного взаимодействия  $J_{\text{ст}}^\mu(x)B_\mu(x)$ , где  $B_\mu$  — некоторое векторное поле, т. е., подобно переходу от формулы (3)

к формуле (2), расщепить 4-фермионный узел, изображенный в (9), (10), и представить его в виде



В квантовой теории поля важную роль играют простые модели, содержащие небольшое число квантованных полей, связанных простыми по форме взаимодействиями.

Ниже мы часто будем обращаться к модели скалярного действительного поля с четверным взаимодействием, полный лагранжиан которой имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2(x) - h \Phi^4(x). \quad (21)$$

При этом последнее слагаемое, содержащее константу связи  $h$ , будем рассматривать как лагранжиан взаимодействия и называть модель (21) моделью  $\Phi^4$ . В лагранжиане (21) поле  $\Phi$  можно считать как скаляром, так и псевдоскаляром. Поэтому модель  $\Phi^4$  близка к модели пион-пионного взаимодействия, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi(x) \partial^\mu \Phi(x) - \frac{m^2}{2} \Phi(x) \Phi(x) - h (\Phi\Phi)^2, \quad (22)$$

где  $\Phi$  — введенный в (3.10) изовектор. Член взаимодействия  $h(\Phi\Phi)^2$  описывает одновременно несколько процессов:

$$\begin{aligned} \pi^\pm + \pi^\pm &\rightarrow \pi^\pm + \pi^\pm \\ \pi^+ + \pi^- &\leftrightarrow \pi^0 + \pi^0 \\ \pi^0 + \pi^0 &\rightarrow \pi^0 + \pi^0 \end{aligned} \quad (23)$$

Как уже было отмечено выше, никакого серьезного основания считать взаимодействия (23) фундаментальными у нас нет. В кварк-глюонной модели сильных взаимодействий (см. ниже § 33), например, пион-пионные взаимодействия (23), как и пион-нуклонное взаимодействие (16), (17), оказываются производными от более фундаментального кварк-глюонного взаимодействия. Однако кварковая модель адронов содержит серьезные трудности и еще далека от завершения.

При таком общем неудовлетворительном состоянии вопроса о структуре взаимодействий полей имеются, однако, довольно глубокие соображения, позволяющие установить общую струк-

туру электромагнитных взаимодействий, которые мы сейчас изложим.

**10.3. Электромагнитное поле как калибровочное.** Отправным моментом является своеобразное выделение электромагнитного поля, его противопоставление остальным полям, которые будем ниже называть *полями материи*.

Полевые функции электрически заряженных полей материи  $u$  подобно квантовомеханической  $\psi$ -функции не являются наблюдаемыми и в физические динамические величины входят через билинейные формы по  $u$  и  $u^*$ . (В противоположность этому напряженности электромагнитного поля непосредственно измеряемы.) Вследствие этого функции полей материи определены с точностью до фазового множителя. Выше (§§ 2.5 и 6.5) этот произвол позволил ввести калибровочное преобразование вида (20) с фазой  $\alpha$ , не зависящей от координат, и в конечном счете получить выражения для оператора заряда.

Потребуем теперь, чтобы теория оставалась инвариантной и в случае, когда параметр калибровочного преобразования зависит от  $x$ :

$$u(x) \rightarrow u'(x) = e^{i\alpha(x)}u(x), \quad u^*(x) \rightarrow u'^*(x) = e^{-i\alpha(x)}u^*(x), \quad (24)$$

т. е. чтобы относительная фаза  $\alpha(x) - \alpha(x')$  в двух различных точках пространства-времени  $x$  и  $x'$  была совершенно произвольна. *Локальное фазовое преобразование* (24) соответствует предположению о том, что произвол в выборе фазового множителя у волновой функции поля материи может иметь локальный характер.

Не составляет труда убедиться, что лагранжианы рассмотренных комплексных полей [см., например, (3.16), (5.5)] не инвариантны относительно (24) в силу того, что градиенты полей, кроме фазового множителя, получают аддитивную добавку, пропорциональную градиенту функции  $\alpha(x)$ .

Инвариантность можно восстановить, если ввести дополнительное векторное поле  $A_\nu$ , преобразующееся одновременно с (24) по закону

$$A_\nu(x) \rightarrow A'_\nu(x) = A_\nu(x) + f_{;\nu}(x). \quad (25)$$

При этом следует заменить все производные  $\partial_\nu u$ ,  $\partial_\nu u^*$  в лагранжиане на операторы

$$\begin{aligned} D_\nu(A) u &\equiv (\partial_\nu - ie A_\nu(x)) u(x), \\ \bar{D}_\nu(A) u^* &\equiv (\partial_\nu + ie A_\nu(x)) u^*(x), \end{aligned} \quad (26)$$

зависящие от  $A$ . Выражения (26) называются *удлиненными или ковариантными производными*.



При выполнении условия  $\alpha(x) = ef(x)$  ковариантные производные при одновременном преобразовании (24), (25) преобразуются подобно (24), т. е. меняют фазу:

$$\begin{aligned} D_\nu(A') u'(x) &= e^{ief(x)} D_\nu(A) u(x), \\ \overset{*}{D}_\nu(A') \overset{*}{u}'(x) &= e^{-ief(x)} \overset{*}{D}_\nu(A) \overset{*}{u}(x). \end{aligned} \quad (27)$$

Кроме замены обычных производных на ковариантные, в лагранжиан следует ввести также лагранжиан  $\mathcal{L}_0$  свободного поля  $A_\nu$ :

$$\mathcal{L}(u, \overset{*}{u}, du, \overset{*}{d}u) \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}(u, \overset{*}{u}, D(A)u, \overset{*}{D}(A)\overset{*}{u}) + \mathcal{L}_0(A), \quad (28)$$

который в свою очередь должен быть инвариантным относительно (25). Его следует выбрать в виде (4.12)

$$\mathcal{L}_0(A) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (29)$$

причем

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.1)$$

и поле  $A_\nu$  с необходимостью оказывается безмассовым. Константа  $e$ , входящая в (26) и (27), может быть отождествлена с электрическим зарядом, а векторное поле  $A_\nu$  — с электромагнитным полем. Таким образом, электромагнитное поле, введенное через ковариантные производные  $D, \overset{*}{D}$ , выступает как *компенсирующее* поле. Поля, компенсирующие изменение калибровки полей материи, называют также *калибровочными полями*. В силу абелевого (перестановочного) характера группы, образованной преобразованиями (25), электромагнитное поле является калибровочным абелевым полем.

Переход в свободном лагранжиане от обычных производных к ковариантным по правилу (28), (26) приводит к появлению взаимодействия исходного поля  $u$  с электромагнитным полем  $A$ .

Взаимодействие, введенное с помощью ковариантных производных (или, как иногда говорят, с помощью «удлинения» производных), называют также *минимальным электромагнитным взаимодействием*.

В случае спинорных полей, когда  $\mathcal{L}_0$  линейно по производным, минимальное электромагнитное взаимодействие линейно по полю  $A$  и имеет вид (7).

Для полей с целым спином в обычной формулировке минимальное взаимодействие содержит квадратичные члены. Так, лагранжиану комплексного скалярного поля соответствует

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = ie \left[ \overset{*}{u}(x) u_{,\nu}(x) - \overset{*}{u}_{,\nu}(x) u(x) \right] A^\nu(x) + e^2 \overset{*}{u}(x) u(x) A^\nu(x) A_\nu(x). \quad (30)$$

Таким образом, мы убедились, что электромагнитное поле обеспечивает инвариантность полного лагранжиана относительно локальных фазовых преобразований, являющихся обобщениями «глобальных» фазовых преобразований, приводящих к сохранению электрического заряда. Такая точка зрения устанавливает связи между свойствами полей в пространстве-времени и так называемыми внутренними симметриями. Важнейшим примером внутренней симметрии, непосредственно обобщающим зарядовую симметрию, является изотопическая симметрия.

Требование инвариантности относительно локально фазовых изотопических преобразований приводит к необходимости введения нового компенсирующего векторного поля — поля Янга — Миллса.

## § 11. Неабелевы калибровочные поля

**11.1. Поле Янга — Миллса.** Требование инвариантности относительно локальных фазовых преобразований непрерывной группы симметрии приводит к появлению компенсирующего векторного поля. Впервые подобное поле для неабелевой группы изотопических преобразований было введено Янгом и Миллсом в 1953 г. Впоследствии неабелевы калибровочные поля получили название полей Янга — Миллса. В современной физике такие поля находят широкое применение в моделях слабых и сильных взаимодействий (см. §§ 32, 33). В этих моделях используются калибровочные группы достаточно высоких рангов. Для облегчения изложения здесь мы ограничимся самой простой неабелевой группой — группой  $SU(2)$  (обозначения и терминология теории непрерывных групп объясняются в Дополнении III), которую условно будем называть «изотопической», не вкладывая в этот термин определенного физического содержания.

Пусть многокомпонентная полевая функция  $\varphi_a$  ( $a = 1, \dots, A$ ) преобразуется по некоторому неприводимому представлению калибровочной группы  $G$  (т. е. образует изотопический мультиплет). Инфинитезимальное преобразование

$$\varphi_a \rightarrow \varphi'_a = \varphi_a + ig\alpha_k (T_k)_{ab} \varphi_b \quad (k = 1, \dots, K) \quad (1)$$

содержит  $K$  независимых действительных бесконечно малых параметров  $\alpha_k$ , из которых для удобства дальнейшего изложения вынесен конечный общий множитель  $g$ . Число  $K$  называется размерностью группы  $G$ . В случае (10.24) оно равно 1. Для рассматриваемой сейчас группы  $SU(2)$   $K = 3$ ; для группы унитарных преобразований  $SU(3)$   $K = 8$  и т. д. Эрмитовы генераторы  $T_k$  являются матрицами представления, к которому принадлежит мультиплет  $\varphi_a$ . Для изодублета ( $A = 2$ ) они пропорциональны матрицам Паули  $\tau_k$  (ср. формулу (Д1.5)), для изотриплета ( $A = 3$ )

матрицы  $T$  могут быть выражены через единичный антисимметричный тензор  $\varepsilon$  (см. (ДІ. 13)):

$$T_k = t_k, \quad (t_k)_{ab} = t_{kab} = -i\varepsilon_{kab} \quad (2)$$

и т. д.

Полезно отметить, что коммутаторы матриц  $T$  произвольного представления имеют универсальный вид

$$[T_k, T_l] = -(t_n)_{kl} T_n = i\varepsilon_{kl n} T_n \quad (3)$$

и содержат матричные элементы матриц  $t$  так называемого присоединенного представления в качестве структурных констант. Размерность этого представления равна размерности группы — в данном случае трем.

Формула (1) с параметрами  $\alpha_k$ , не зависящими от координат, аналогична формуле (2.27) и описывает так называемое глобальное калибровочное преобразование. Переходя к локальному преобразованию типа (10.24), т. е. считая, что параметры  $\alpha$  зависят от  $x$

$$\alpha_k \rightarrow \alpha_k(x),$$

по аналогии с электродинамикой заменим обычные производные от  $\varphi$  на ковариантные

$$\partial_\nu \varphi_a \rightarrow (D_\nu(B)\varphi)_a = \partial_\nu \varphi_a - igB_\nu^k(x)(T_k)_{ab}\varphi_b, \quad (4)$$

содержащие новое компенсирующее векторное поле  $B_\nu$ . Это поле, в отличие от электромагнитного поля  $A_\nu$ , имеет групповые (верхние) индексы и преобразуется по более сложному закону

$$B_\nu^a \rightarrow (B_\nu^a)' = B_\nu^a + ig\alpha_b(x)t_{bac}B_\nu^c + \partial_\nu \alpha_a(x), \quad (5)$$

который, кроме «градиентного удлинения»  $\partial_\nu \alpha$ , содержит еще изотопическое вращение. Генераторы этого вращения  $\varepsilon\alpha = i\alpha$  являются матрицами присоединенного представления.

Заметим, что наличие калибровочного произвола приводит здесь к тому, что, как и в электродинамике (см. § 4.3), из четырех компонент векторного потенциала  $B_\nu$  лишь две «трехмерно поперечные» компоненты отвечают физическим степеням свободы.

С помощью формул (3) теперь можно показать, что ковариантная производная  $D_\nu \varphi$  при калибровочных преобразованиях (1), (5) преобразуется подобно  $\varphi$ :

$$[D_\nu(B')\varphi']_a = [D_\nu(B)\varphi]_a + ig\alpha_k(x)(T^k)_{ab}[D_\nu(B)\varphi]_b. \quad (6)$$

Аналогом электромагнитного тензора напряженности  $F_{\mu\nu}$  оказывается тензор

$$F_{\mu\nu}^k = \partial_\mu B_\nu^k - \partial_\nu B_\mu^k + ig t_{kl n} B_\mu^l B_\nu^n. \quad (7)$$

Для группы  $SU(2)$  с помощью (2) получаем также

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + g[B_\mu \times B_\nu]. \quad (8)$$

Тензор  $F$  преобразуется по присоединенному представлению калибровочной группы

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow (F_{\mu\nu}^a)' = F_{\mu\nu}^a + ig\alpha_k(x) (t_k)_{ab} F_{\mu\nu}^b(x). \quad (9)$$

Инвариантный лагранжиан свободного поля Янга — Миллса имеет вид

$$\mathcal{L}_{YM}(B) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (10)$$

близкий к лагранжиану электромагнитного поля. Однако, в отличие от выражения (10.29), в котором каждый из сомножителей  $F_{\mu\nu}$  калибровочно инвариантен, в данном случае инвариантно лишь все выражение (10) в целом.

Лагранжиан (10) подобно поперечному лагранжиану электродинамики (4.12), (10.29) является вырожденным. Поэтому при квантовании его необходимо модифицировать. Вытекающие из него уравнения движения

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g\epsilon^{abc} B_\mu^b F_{\mu\nu}^c = 0 \quad (11)$$

нелинейны и содержат «самодействие».

Если бы мы попытались квантовать поле Янга — Миллса с помощью метода Гупта — Блейлера, изменив лагранжиан по рецепту (4.13)

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{\alpha}{2} (\partial A)^2,$$

то, как можно показать, продольная функция

$$\chi^a(x) = \partial B^a(x)$$

в этом случае удовлетворяла бы не свободному уравнению д'Аламбера, а нелинейному уравнению

$$\square \chi^a(x) + g\epsilon^{abc} B_\nu^b(x) \partial^\nu \chi^c(x) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, продольная степень свободы не «отщепляется» от поперечных. Отсюда следует, что в процессе временной эволюции «физические состояния», для которых справедливо (в среднем) условие Лоренца  $\langle \chi \rangle = 0$ , могут перейти в состояния, содержащие отличную от нуля продольную составляющую. Поэтому метод Гупта — Блейлера нуждается в обобщении, которое будет описано в § 19.4.

**11.2. Калибровочное взаимодействие полей.** Как было показано в § 10.3, требование инвариантности лагранжиана полей материи относительно локальных фазовых преобразований (10.24) приво-

дит к необходимости введения компенсирующего электромагнитного поля  $A_\mu$ , взаимодействие с которым всех электрически заряженных полей материи описывается единственной константой  $e$ . Преобразование (10.24) отвечает абелевой группе первого ранга  $U(1)$ .

В более сложных случаях, когда в качестве калибровочной выступает некоторая простая неабелева группа  $G$ , условие инвариантности лагранжиана также приводит к «единообразному» взаимодействию полей материи с калибровочным полем  $B_\nu$ . Таким путем образуется некоторая совокупность полей материи (с различными спинами, электрическими зарядами и т. п.), связанных универсальным образом с полем  $B_\nu$ . Члены взаимодействия, возникающие при удлинении производных полей материи по правилу (4), содержат ту же самую безразмерную константу связи  $g$ , что и нелинейные составляющие поля Янга — Миллса (см. формулы (7), (8)).

Процедура построения калибровочной модели взаимодействующих полей состоит из следующих этапов:

1) Выбираем (простую) калибровочную группу  $G$  и фиксируем набор полей материи  $u_{(1)}, \dots, u_{(n)}$ , преобразующихся по различным (но определенным) представлениям этой группы и описываемых свободным лагранжианом

$$\mathcal{L}_0(u, \partial u) = \sum_i \mathcal{L}_0^i(u_{(i)}, \partial_\nu u_{(i)}). \quad (13)$$

2) Вводим компенсирующее векторное поле  $B_\nu$ , отвечающее присоединенному представлению группы  $G$ , и образуем полный лагранжиан системы (поля материи  $u_{(1)}, \dots, u_{(n)}$  + поле Янга — Миллса  $B_\nu$ ) по рецепту

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(u, \partial u) &\rightarrow \mathcal{L}(u, B), \\ \mathcal{L}(u, B) &= \mathcal{L}_0(u, D(B)u) + \mathcal{L}_{YM}(B). \end{aligned} \quad (14)$$

В первом члене правой части производные каждого из полей  $u_{(i)}$  удлинены по правилу (4) с одной и той же константой  $g$ , которая также входит в  $\mathcal{L}_{YM}$ . Поэтому лагранжиан  $\mathcal{L}(u, B)$ , описывающий систему взаимодействующих  $n+1$  полей, в случае простой группы содержит всего лишь одну константу связи. Этот лагранжиан инвариантен относительно одновременного калибровочного преобразования (1), (5) всех входящих в него полей.

Как отмечалось в конце § 11.1, свободное калибровочное векторное поле с необходимостью является безмассовым. Это обстоятельство существенно ограничивает возможности использования калибровочных моделей взаимодействия полей, поскольку в реальном мире единственным безмассовым векторным полем является электромагнитное поле  $A_\nu$ , отвечающее абелевой калибровочной группе.

Оказывается, однако, что существует нетривиальный способ введения массы в калибровочное поле, *взаимодействующее* с некоторым скалярным полем материи. Этот способ основан на так называемом механизме спонтанного (самопроизвольного) нарушения симметрии, к рассмотрению которого мы сейчас перейдем.

**11.3. Спонтанное нарушение симметрии.** В различных главах физики, начиная с классической механики, известны примеры систем, демонстрирующих самопроизвольное нарушение симметрии. Речь идет о такой системе, которая описывается выражениями (лагранжиан, гамильтониан, уравнения движения), обладающими некоторой симметрией, в то время как реальное физическое состояние системы, отвечающее частному решению уравнений движения, этой симметрией не обладает. Подобное положение

возникает тогда, когда нижнее симметричное состояние не доставляет системе абсолютный минимум энергии и является неустойчивым. Реальной причиной нарушения симметрии оказывается сколь угодно малое несимметричное возмущение.

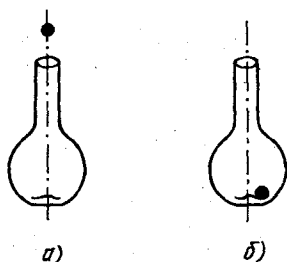


Рис. 11.1. Механическая система, демонстрирующая спонтанное нарушение симметрии. а) Начальное состояние; б) конечное состояние.

Простой пример дает механическая система, состоящая из пустого сосуда с выпуклым дном и маленького шарика. Сосуд, представляющий собой тело вращения, поставим строго вертикально (относительно поля тяжести Земли) и точно по оси бросим в него сверху шарик (рис. 11.1, а). Достигнув дна, шарик не удержится на центральной выпуклости и скатится на периферию (рис. 11.1, б). Конечное состояние

не обладает симметрией вращения. Другой пример подобного типа являет изотропный ферромагнетик, выделенное направление вектора намагниченности которого нарушает симметрию относительно пространственных вращений.

Обратимся теперь к скалярному классическому полю  $\varphi(x)$ , характеризующему лагранжианом

$$\mathcal{L} = T(\partial\varphi) - V(\varphi), \quad (15)$$

в котором  $T$  — кинетическая часть, зависящая лишь от компонент градиента, а  $V$  — потенциальная функция.

Для обычного свободного скалярного поля, рассмотренного в § 3,  $V(\varphi)$  представляется параболой второго порядка  $m^2\varphi^2/2$ , изображенной на рис. 11.2. Минимуму потенциальной функции отвечает нулевое решение, а квантование свободного скалярного поля, проведенное в § 8, — квантованию малых колебаний около положения равновесия при  $\varphi = 0$ .

Лагранжиан (15) обладает симметрией относительно «преобразования отражения»  $\varphi \rightarrow -\varphi$  и нижнее состояние  $\varphi = 0$  симметрично и устойчиво. Введение в  $V(\varphi)$  положительных членов вида  $+\varphi^4$  (ср. (10.21), (10.22)), описывающих самодействие поля, не меняет этих свойств.

Для того чтобы получить спонтанное нарушение симметрии отражения, допустим, что зависимость  $V$  от  $\varphi$  имеет вид четной функции с двумя симметричными минимумами, изображенной на рис. 11.3. Подобную зависимость можно описать двучленом

$$V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2} \varphi^2 + \frac{h^2}{4} \varphi^4.$$

Это выражение содержит квадратичный по  $\varphi$  член с «отрицательным квадратом массы», что может вызвать ассоциацию с гипотетическими частицами — тахионами, движущимися быстрее света.

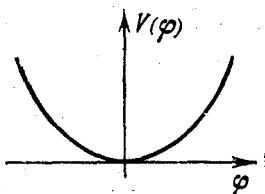


Рис. 11.2. Потенциальная функция свободного скалярного поля.

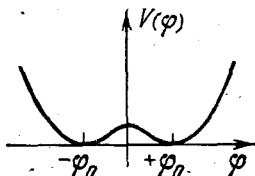


Рис. 11.3. Потенциальная функция модели скалярного поля, содержащей спонтанное нарушение симметрии.

Нам, однако, существенно то, что благодаря отрицательному знаку первого слагаемого точка  $\varphi = 0$  не является минимумом, а положения устойчивого равновесия располагаются в двух точках

$$\varphi = \pm \varphi_0, \quad \varphi_0 = \mu/h.$$

Оба нижних состояния имеют одинаковую энергию

$$V(\pm \varphi_0) = V_0 = -\mu^4/4h^2,$$

вследствие чего соответствующая квантовая система обладает двукратно вырожденным вакуумным состоянием.

Теперь следует выбрать одно из нижних состояний, например  $+\varphi_0$ , и операцией сдвига на константу перейти к новой функции поля:

$$\varphi(x) \rightarrow u(x) = \varphi(x) - \varphi_0,$$

что окажется удобным для изучения малых отклонений от  $\varphi_0$ . Получаем этим путем

$$V(\varphi) = V(\varphi_0 + u) = V_0 + \mu^2 u^2 + \mu h u^3 + (h^2/4) u^4.$$

Отвлекаясь от постоянной  $V_0$ , сдвигающей лишь шкалу энергии, видим, что положительный второй член в правой части отвечает массе квантов малых колебаний, равной  $m = \mu \sqrt{2}$ , а третье и четвертое слагаемые, дающие нелинейные вклады в уравнения движения, при малых  $\hbar$  могут рассматриваться как возмущение, соответствующее самодействию поля.

Заметим здесь, что преобразование поля вида

$$\varphi(x) = \text{const} + u(x)$$

впервые было введено в квантовую физику одним из авторов при построении микроскопической теории сверхтекучести в 1946 г. (см. Боголюбов (1979), с. 115—131), а метод изучения квантовых систем со спонтанно нарушенной симметрией, известный как метод квазисредних, — в 1960—61 гг. (см. Боголюбов (1979), с. 193—269).

Достаточно простое, но физически содержательное обобщение возникает при переходе от однокомпонентного (синглетного) поля  $\varphi$  к изотопическому мультиплету  $\varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_A)$  и потенциалу

$$V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}(\varphi\varphi) + \frac{\hbar^2}{4}(\varphi\varphi)^2, \quad \varphi\varphi = \sum_a \varphi_a^2. \quad (16)$$

Дискретная симметрия отражения заменяется на непрерывную симметрию изотопических вращений, подобную симметрии пространственного вращения вокруг вертикальной оси в приведенной иллюстрации из механики.

Минимум потенциальной энергии теперь отвечает соотношению

$$\varphi\varphi = \varphi_0^2 = \mu^2/\hbar^2, \quad (17)$$

определяющему  $(n-1)$ -мерное многообразие в  $n$ -мерном изотопическом пространстве. Необходимо произвести сдвиг функции поля  $\varphi$  на постоянный вектор  $\varphi_0$ , удовлетворяющий условию (17). Не теряя общности, выберем этот вектор в виде

$$\varphi_0 = (\varphi_0, 0, \dots, 0), \quad \varphi_0 = +\mu/\hbar.$$

Полагая затем

$$\varphi(x) = \varphi_0 + u(x), \quad (18)$$

получим для  $V$  выражение

$$V(\varphi_0 + u(x)) = V_0 + \mu^2 u_1^2 + \mu\hbar u_1(uu) + \frac{\hbar^2}{4}(uu)^2,$$

не содержащее членов квадратичных по  $u_2, u_3, \dots, u_n$ . В то же время структура  $V$  относительно новой переменной  $u_1$  аналогична однокомпонентному случаю.

Таким образом, в результате спонтанного нарушения симметрии, выражаемого сдвигом (18), сдвинутая компонента  $u_1$  «приобретает» свободную массу  $m_1 = \mu \sqrt{2}$ , а остальные компоненты



$u_2, u_3, \dots, u_n$  отвечают безмассовым степеням свободы ( $m_2 = m_3 = \dots = m_n = 0$ ).

Последнее свойство является неперенным атрибутом спонтанного нарушения *непрерывной* симметрии, так как каждая из безмассовых степеней свободы отвечает бесконечнократному вырождению вакуумного состояния, которое в нашем случае описывается соотношением (17). В механическом примере безмассовая степень свободы относится к виртуальному перемещению шарика в конечном состоянии (рис. 11.1, б) по кольцеобразному углублению дна сосуда.

Сформулированное выше предложение об обязательном появлении безмассовых скалярных мезонов при спонтанном нарушении непрерывной симметрии в квантовой теории поля известно под названием *теоремы Голдстоуна*, а безмассовые частицы называются голдстоуновскими бозонами. Теорема Голдстоуна является релятивистским аналогом теоремы о дальнодействии в квантовой статистике (см. Боголюбов (1979), с. 193—269, особенно гл. II).

**11.4. Массивное поле Янга — Миллса.** Подчеркнем, что спонтанное нарушение симметрии является нарушением симметрии решения, а не симметрии лагранжиана. Исходный лагранжиан (14), (16) не меняется при преобразовании сдвига на константу (18), которое представляет лишь переход к новым независимым переменным. Это обстоятельство удается использовать для того, чтобы ввести массу неабелева калибровочного поля, не нарушив калибровочную симметрию лагранжиана. Такое массивное поле не может быть свободным. Оно должно взаимодействовать со скалярным полем, служащим инструментом спонтанного нарушения симметрии.

Пусть неабелево калибровочное поле Янга — Миллса  $\mathbf{B}$  взаимодействует со скалярным полем  $\mathbf{u}$ , преобразующимся по триплетному представлению группы  $SU(2)$ . Предположим, что поле  $\mathbf{u}$  подчиняется нелинейным уравнениям, отвечающим лагранжиану типа (15), (16):

$$\mathcal{L}_0(\mathbf{u}, \partial\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \partial_\nu \mathbf{u} \partial^\nu \mathbf{u} + \frac{\mu^2}{2} \mathbf{u}\mathbf{u} - \frac{h^2}{4} (\mathbf{u}\mathbf{u})^2.$$

Полный лагранжиан системы полей  $\mathbf{u} + \mathbf{B}$  на основании (14) будет

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{B}) = \mathcal{L}_0(\mathbf{u}, D(\mathbf{B})\mathbf{u}) + \mathcal{L}_{YM}(\mathbf{B}), \quad (19)$$

где ковариантная производная  $D(\mathbf{B})\mathbf{u}$  определена согласно (4). Используя эту формулу, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{B}) = & (1/2) (\partial_\nu \mathbf{u} + g[\mathbf{B}_\nu \times \mathbf{u}]) (\partial^\nu \mathbf{u} + g[\mathbf{B}^\nu \times \mathbf{u}]) + \\ & + \frac{\mu^2}{2} \mathbf{u}\mathbf{u} - \frac{h^2}{4} (\mathbf{u}\mathbf{u})^2 + \mathcal{L}_{YM}(\mathbf{B}). \quad (20) \end{aligned}$$

Рассмотрим члены, содержащие оба поля:  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{B}$ . После небольших упрощений их можно представить следующим образом:

$$(g^2/2) \{ (\mathbf{B}_\nu \mathbf{u}) (\mathbf{B}^\nu \mathbf{u}) - (\mathbf{u}\mathbf{u}) (\mathbf{B}_\nu \mathbf{B}^\nu) \} + g [(\partial_\nu \mathbf{u} \times \mathbf{u}) \mathbf{B}^\nu]. \quad (21)$$

Выполним теперь операцию сдвига на константу для скалярного поля

$$u(x) = u_0 + v(x), \quad (22)$$

причем изовектор  $u_0$  направим вдоль третьей оси:

$$u_0^a = \varphi_0 \delta_{a3}.$$

Получаем из (21) члены, квадратичные по полю Янга — Миллса и не содержащие нового скалярного поля  $v$ :

$$-(g^2 \varphi_0^2 / 2) (g^{\mu\nu} B_\mu^3 B_\nu^3 - B_\nu B^\nu) = + \frac{M^2}{2} g^{\mu\nu} (B_\mu^1 B_\nu^1 + B_\mu^2 B_\nu^2), \quad (23)$$

которые следует рассматривать как массовые члены компонент  $B^1$ ,  $B^2$  поля Янга — Миллса. Таким образом, эти две компоненты приобретают массу  $M = g\varphi_0$ . Компонента  $B^3$  осталась безмассовой.

Форма (21) после сдвига скалярного поля включает также квадратичные члены, содержащие как векторное, так и новые скалярные поля:

$$-M (B_\mu^1 \partial^\mu v^2 - B_\mu^2 \partial^\mu v^1) \quad (24)$$

Наличие таких «перекрестных» квадратичных слагаемых, вообще говоря, затрудняет интерпретацию безмассовых компонент скалярного поля  $v_1$  и  $v_2$  (см. по этому поводу ниже в § 12.2). Однако в данном случае имеется одно важное обстоятельство, приводящее к существенному упрощению. Можно устранить перекрестные члены путем калибровочного преобразования специального вида, фиксируя калибровку таким образом, чтобы выполнялись условия

$$v'_1(x) = v'_2(x) = 0, \quad \partial^\nu B_\nu^3(x) = 0. \quad (25)$$

В результате мы получим лагранжиан, зависящий лишь от одного скалярного поля  $v'_3 = v$  и векторного триплета  $B' = (B'_1, B'_2, B'_3)$ :

$$\mathcal{L}(u, B) = \mathcal{L}(v, B'). \quad (26)$$

Входящие в него две компоненты векторного поля  $B'_1, B'_2$ , согласно (22), имеют равные массы

$$M_1 = M_2 = M = g\varphi_0 = gm/h, \quad (27)$$

компонента  $B'_3$  осталась безмассовой, а скалярный бозон  $v$  обладает массой

$$m = \sqrt{2}\mu. \quad (28)$$

Таким образом, вместо исходного изотриплета безмассовых векторных полей и триплета скалярных полей с отрицательным квадратом массы мы получили дублет массивных векторных полей, одно безмассовое векторное поле и один скалярный мезон с массой. Безмассовые голдстоуновские мезоны исчезли в результате калибровочного преобразования. Этот процесс превращения без-

массового калибровочного поля в массивное с одновременной «аннигиляцией» голдстоуновских мезонов называется *эффектом* (или механизмом) *Хиггса*. Выживающий массивный скалярный мезон именуется хиггсовым бозоном, а его поле (в данном случае  $\dot{v}_3 = v$ ) — полем Хиггса.

Нетрудно проверить, что механизм Хиггса не изменяет число частиц всей системы в целом. Напомним для этого, что безмассовое 4-векторное поле (например, электромагнитное) в результате квантования описывает две частицы. Мы будем говорить для краткости, что оно имеет две физические степени свободы. Массивное векторное поле имеет три степени свободы, как это следует из § 8.3.

Поэтому исходный лагранжиан (20) содержит  $3 \times 2 = 6$  степеней свободы трех безмассовых векторных полей и  $3 \times 1 = 3$  степени свободы трех скалярных полей. Итого  $6 + 3 = 9$  степеней свободы. Конечный лагранжиан  $\mathcal{L}(v_3, B)$  имеет  $2 \times 3 = 6$  степеней свободы двух массивных векторных полей,  $1 \times 2 = 2$  степени свободы безмассовой векторной компоненты  $B^3$  и  $1 \times 1 = 1$  — одну компоненту хиггсова поля  $v_3$ . Итого  $6 + 2 + 1 = 9$  степеней свободы.

Отметим еще, что если несколько усложнить рассмотренную модель и вместо триплета скалярных полей взять квадруплет (2-компонентный изоспинор комплексных скалярных полей), то мы получим систему с 10 степенями свободы. В результате преобразования вида (22) возникает три голдстоуновских бозона и все три компоненты поля Янга — Миллса приобретают массу. Три безмассовых бозона затем будут поглощены калибровочным преобразованием. В итоге мы получим три массивных векторных поля и один хиггсов бозон.

Таким образом, механизм Хиггса позволяет придать массу всем компонентам калибровочного векторного поля. Однако обязательным атрибутом модели, содержащей массивное поле Янга — Миллса, является хиггсов бозон. Механизм Хиггса используется при построении единых моделей слабого и электромагнитного («электрослабого») взаимодействия (см. ниже § 32).

## § 12. Квантовые системы со взаимодействием

**12.1. Постановка задачи.** При рассмотрении взаимодействия квантованных полей можно исходить из полного лагранжиана системы полей

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_i, du_j) = F(u_i, \nabla u_j, \dot{u}_k).$$

С помощью теоремы Нётер получаем по формулам § 2 тензор энергии-импульса и полную энергию (гамильтониан)

$$H = H(u, \nabla u, \dot{u}). \quad (1)$$

Ввиду того, что решения уравнений движения (в отличие от предыдущего) нам, как правило, неизвестны, использование 4-мерных преобразований Фурье для функций поля оказывается нецелесообразным. Вместо этого можем записать:

$$u(x) = u^+ + u^-, \quad u^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{\mp i k x} a^\pm(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (2)$$

Следует отметить, что, в отличие от свободного поля, разделение на положительно- и отрицательно-частотные части здесь может оказаться релятивистски неинвариантным, и что величины  $a^\pm$  не обязательно имеют смысл операторов рождения и уничтожения реальных частиц.

Тем не менее ниже мы будем предполагать, что амплитуды  $a^\pm$  могут быть представлены линейной комбинацией положительных временных экспонент

$$a^+(\mathbf{k}, t) = \sum_{\alpha} e^{i\omega_{\alpha}(\mathbf{k})t} a_{\alpha}^+(\mathbf{k}) \quad (3)$$

и потому являются операторами рождения, а амплитуды  $a^-$  — операторами уничтожения. Гамильтониан  $H$  может быть теперь выражен через амплитуды  $a^\pm$  и их производные по времени. Ввиду того, что  $H$  не зависит от времени, можно положить  $t=0$  и перейти к амплитудам

$$a^\pm(\mathbf{k}) = a^\pm(\mathbf{k}, 0), \quad \dot{a}^\pm(\mathbf{k}) = \dot{a}^\pm(\mathbf{k}, 0). \quad (4)$$

Для установления перестановочных соотношений теперь можно воспользоваться каноническим квантованием и получить квантовые уравнения движения в представлении Гейзенберга

$$i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = [u, H], \quad (5)$$

а также одновременные коммутационные соотношения типа  $[q, p]$

$$\left[ u(x, 0), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}(y, t)} \Big|_{t=0} \right] = i\delta(x - y). \quad (6)$$

Подставляя (2) и (1) в (5), мы приходим к довольно сложным нелинейным операторным соотношениям для амплитуд  $a^\pm(\mathbf{k}, t)$ . Решение этих соотношений эквивалентно решению уравнений движения.

С другой стороны, используя (6) и переходя к амплитудам (4), мы получим коммутационные соотношения вида

$$[a^-(\mathbf{k}), \dot{a}^+(q)] = \delta(\mathbf{k} - q). \quad (7)$$

Совокупность уравнения Шредингера, выражений для гамильтониана  $H$  (и других динамических величин), записанных через не зависящие от времени операторы (4),\* и коммутационных соотношений (7) представляет собой формулировку задачи в представлении Шредингера.

Переход от одновременных коммутационных соотношений (7) к разновременным, т. е. конструктивный переход от представления Шредингера к представлению Гайзенберга, требует знания вида временной зависимости операторов  $\alpha^\pm$  (т. е. явного вида формул (3)), что в свою очередь эквивалентно решению уравнений движения. Таким образом, хотя канонические перестановочные соотношения формально и решают задачу квантования системы взаимодействующих полей, фактически они оказываются бедными по физическому содержанию, так как совершенно не отражают динамики.

**12.2. Иллюстрация.** Этот тезис может быть проиллюстрирован следующей решаемой моделью:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\varphi_1, m_1) + \mathcal{L}_0(\varphi_2, m_2) + g\varphi_1\varphi_2, \quad (8)$$

где

$$\mathcal{L}_0(\varphi, m) = (1/2)[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2].$$

Лагранжиан (8) может быть диагонализирован путем подстановки

$$\varphi_1 = \cos\alpha \cdot u_1 + \sin\alpha \cdot u_2, \quad \varphi_2 = \cos\alpha \cdot u_2 - \sin\alpha \cdot u_1,$$

где

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 + 4g^2} - (m_1^2 - m_2^2)}{2g}\right).$$

Здесь подразумевается, что  $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2 > 0$ , а выбор знака корня соответствует тому, что при  $g \rightarrow 0$   $u_1 \rightarrow \varphi_1$  и  $u_2 \rightarrow \varphi_2$ .

В результате преобразования имеем

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(u_1, \mu_1) + \mathcal{L}_0(u_2, \mu_2),$$

причем новые массы могут быть представлены в виде

$$\mu_1^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{\Delta\mu^2}{2}, \quad \mu_2^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \frac{\Delta\mu^2}{2},$$

$$\Delta\mu^2 = \frac{(\Delta m^2)^2 + 4g^2}{g} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = [(\Delta m^2)^2 + 4g^2]^{1/2} > 0.$$

Проводя квантование новых свободных полей

$$[u_k(x), u_j(y)] = -i\delta_{ki} D_k(x-y)$$

и возвращаясь к исходным, получаем

$$\begin{aligned} i[\varphi_1(x), \varphi_1(y)] &= \cos^2\alpha \cdot D_1(x-y) + \sin^2\alpha \cdot D_2(x-y), \\ i[\varphi_2(x), \varphi_2(y)] &= \cos^2\alpha \cdot D_2(x-y) + \sin^2\alpha \cdot D_1(x-y), \\ i[\varphi_1(x), \varphi_2(y)] &= \sin\alpha \cos\alpha \cdot \{D_2(x-y) - D_1(x-y)\} \end{aligned} \quad (9)$$

— разновременные коммутационные соотношения, полностью отражающие динамику задачи. Дифференцируя их по  $x^0$  и полагая

затем  $x^0 = y^0 = t$ , можем получить канонические перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [\varphi_1(t, \mathbf{x}), \phi_k(t, \mathbf{y})] &= i\delta_{kl}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\varphi_1(t, \mathbf{x}), \varphi_k(t, \mathbf{y})] &= [\phi_1(t, \mathbf{x}), \phi_k(t, \mathbf{y})] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

которые не содержат динамической информации, связанной со взаимодействием полей  $\varphi_1, \varphi_2$ .

Очевидно, что диагонализация лагранжиана (подобная проведенной) одновременно приводит к явному решению уравнений движения. Однако в реалистических моделях такое решение оказывается, как правило, невозможным.

Вместо него используют метод теории возмущений — разлагают искомое решение в ряд по степеням малого параметра, за который принимают константу связи. Исходное нулевое приближение тем самым сводится к системе свободных уравнений, решения которых нам уже известны и представляются суперпозициями плоских волн. Такой подход является основным в современной квантовой теории поля. Он формулируется в виде ковариантной теории возмущений и органически связан с известными диаграммами Фейнмана. Его изложению посвящены следующие главы.

В методических целях представляется целесообразным рассмотреть задачу взаимодействия квантовых систем с бесконечным числом степеней свободы в нерелятивистском приближении, исходя из уравнения Шредингера в представлении чисел заполнения. Такое рассмотрение позволит нам достаточно простым путем ввести такие понятия, как перенормировка массы и волновой функции, связанные с представлением об «облачении» частиц, обусловленному эффектами квантового взаимодействия, а также понять физическую природу ультрафиолетовых расходимостей локальной квантовой теории поля.

**12.3. Гамильтонов подход.** Пусть имеется система  $N$  тождественных частиц (бозонов или фермионов), связанных силами парного взаимодействия. В представлении вторичного квантования такая система описывается гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= \int \omega(\mathbf{q}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) a(\mathbf{q}) d\mathbf{q} + \\ &+ \frac{1}{2} \int \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_2) V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) a(\mathbf{p}_1) a(\mathbf{p}_2) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $a, \hat{a}^\dagger$  — бозе- или ферми-операторы с заданными перестановочными соотношениями

$$[a(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})]_{\pm} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), [a, a] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0. \quad (12)$$

Мы получили здесь, разумеется, формулировку квантовой задачи взаимодействия в представлении Шредингера.

Проекция оператора  $H$  на одночастичное состояние  $\Phi_1(\mathbf{k}) = a^+(\mathbf{k})\Phi_0$  будет

$$H\Phi_1(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})\Phi_1(\mathbf{k}),$$

вследствие чего  $\omega(\mathbf{k})$  представляет энергию частицы с импульсом  $\mathbf{k}$ . Проектируя затем  $H$  на  $N$ -частичное состояние, убеждаемся, что  $V$  представляет собой энергию парного взаимодействия двух частиц с соответствующими импульсами (см., например, Блохинцев (1976), § 118, Боголюбов (1970), т. 2, с. 330–350).

Формулы типа (11), (12) «хороши» тем, что они описывают систему  $N$  частиц при произвольном, но фиксированном числе  $N$  и явно от этого числа не зависят. Это свойство позволяет сделать важное обобщение и отказаться от условия  $N = \text{const}$ . Для этого достаточно так изменить функцию  $H(a, a^+)$ , чтобы она перестала коммутировать с оператором полного числа частиц

$$\check{N} = \int a^+(q)a(q) dq$$

или в случае, если система состоит из наборов, отличных друг от друга, но тождественных внутри каждого набора частиц, с операторами частиц соответствующих сортов  $N_i$ .

В качестве примера приведем так называемый гамильтониан Фрѐлиха

$$H_{\text{Fr}} = \sum_s \int E(\mathbf{k}) a_s^+(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) d\mathbf{k} + \int \omega(q) b(q) b(q) dq + H_1, \quad (13)$$

где

$$H_1 = \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' dq V_{\text{Fr}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', q) a_s^+(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') [b^+(q) + b(-q)],$$

$$V_{\text{Fr}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', q) = \delta(\mathbf{k} + q - \mathbf{k}') \frac{g}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega(q)}{\pi}}.$$

Здесь  $a^+$ ,  $a$  — ферми-операторы электронов,  $s = \pm 1/2$  — спиновый индекс, по которому подразумевается суммирование,  $b^+$ ,  $b$  — бозе-операторы фононов,  $E$  и  $\omega$  энергии электрона и фонона,  $g$  — константа связи в нормировке, принятой в теории сверхпроводимости.

Этот гамильтониан соответствует системе электронов в металле, взаимодействующих с колебаниями кристаллической ионной решетки. Член  $H_1$  описывает процесс возбуждения электронами колебаний кристаллической решетки — процесс рождения кванта этих колебаний — фонона, равно как и обратный процесс — процесс поглощения фонона электроном. В соответствии с этим гамильтониан  $H_{\text{Fr}}$  коммутирует с оператором полного числа электронов и не коммутирует с оператором полного числа фононов.

В такой, как мы ее называем, *гамильтоновой постановке* задача ставится следующим образом: найти собственные векторы

состояний гамильтониана  $H$  и отыскать его собственные значения, соответствующие этим собственным векторам.

Если наряду с гамильтонианом  $H$  заданы операторы других динамических величин  $A(a, \overset{+}{a}, \dots)$ , то знание собственных векторов позволит получить соответствующие средние значения. Важной величиной такого типа является импульс системы. Заметим в этой связи, что введенные в этом разделе аргументы  $k, q, p \dots$  операторов  $a$  и  $\overset{+}{a}$  пока не имеют физического смысла и отождествлялись с импульсами частиц чисто формально. Однако они приобретают смысл импульсов, если определить оператор импульса системы. Так для модели Фрелиха

$$P_n = \int p_n \overset{+}{a}_s(p) a_s(p) dp + \int k_n b(k) b(k) dk \quad (n = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Теперь нетрудно проверить, что

$$P_n \overset{+}{a}(p) \Phi_0 = p_n \overset{+}{a}(p) \Phi_0, \quad P_n \overset{+}{b}(k) \Phi_0 = k_n \overset{+}{b}(k) \Phi_0$$

и вообще

$$P_n \left[ \prod_i \overset{+}{a}(p^i) \prod_i \overset{+}{b}(k^i) \Phi_0 \right] = \left[ \sum_i p_n^i + \sum_i k_n^i \right] \left[ \prod_i \overset{+}{a}(p^i) \prod_i \overset{+}{b}(k^i) \Phi_0 \right],$$

если

$$P_n \Phi_0 = 0.$$

Аналогичным образом в надлежащих случаях можно ввести операторы электрического заряда, спина и т. д.

**12.4. Диагонализация модельных гамильтонианов.** Процесс решения задачи в гамильтоновой постановке сводится к диагонализации гамильтониана путем унитарного операторного преобразования. Простой, точно решаемый пример дает гамильтониан так называемой задачи «статического источника»

$$H = \int \omega(k) \overset{+}{b}(k) b(k) dk + \int [g(k) \overset{+}{b}(k) + g^*(k) b(k)] \omega(k) dk. \quad (15)$$

Здесь  $b, \overset{+}{b}$  — бозе-операторы, а  $g(k), g^*(k)$  —  $c$ -числовые функции, характеризующие источник поля  $b$ -частиц и являющиеся фурье-образами соответствующих пространственных распределений.

Задача состоит в определении собственных функций и собственных значений уравнения Шредингера

$$H\Phi(q) = E(q)\Phi(q).$$

Формальная операция «сдвига» переменных

$$b(k) \rightarrow B(k) = b(k) + g(k), \quad \overset{+}{b}(k) \rightarrow \overset{+}{B}(k) = \overset{+}{b}(k) + g^*(k)$$



приводит гамильтониан (15) к диагональному виду

$$H = \int \omega(\mathbf{k}) \hat{B}(\mathbf{k}) B(\mathbf{k}) d\mathbf{k} - \int \omega(\mathbf{k}) |g(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}.$$

Поэтому задача сводится к отысканию унитарного оператора, осуществляющего преобразование  $b \rightarrow B$ , т. е.

$$U^{-1}(g) b(\mathbf{k}) U(g) = B(\mathbf{k}), \quad U^{-1}(g) \hat{b}(\mathbf{k}) U(g) = \hat{B}(\mathbf{k}).$$

С помощью стандартной техники (см. Дополнение IV) получаем

$$U(g) = \exp \int d\mathbf{k} [g(\mathbf{k}) \hat{b}(\mathbf{k}) - g^*(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})]. \quad (16)$$

Для отыскания собственных функций гамильтониана  $H$  заметим, что в терминах операторов  $B, \hat{B}$  они имеют очевидную форму

$$\Psi_N = \hat{B}(\mathbf{k}_1) \dots \hat{B}(\mathbf{k}_N) \Psi_0, \quad (17)$$

причем  $\Psi_0$  — вакуум  $B$ -поля:

$$B(\mathbf{k}) \Psi_0 = 0. \quad (18)$$

Собственные значения, соответствующие (17), будут

$$H \Psi_N = E_N \Psi_N, \quad E_N = \omega(\mathbf{k}_1) + \dots + \omega(\mathbf{k}_N).$$

Для того чтобы выразить состояние  $\Psi_N$  через собственные векторы поля  $b$ , подставим в уравнения (17) и (18) формулы (16). Умножая еще слева на  $U$ , получаем

$$\Phi_N = U(g) \Psi_N = \hat{b}(\mathbf{k}_1) \dots \hat{b}(\mathbf{k}_N) \Phi_0,$$

причем состояние

$$\Phi_0 = U(g) \Psi_0 \quad (19)$$

на основании (18) удовлетворяет условию  $b\Phi_0 = 0$  и, очевидно, является вакуумом  $b$ -поля.

Рассмотрим подробнее структуру нового вакуумного вектора  $\Psi_0 = U^{-1}(g) \Phi_0$ . С этой целью приведем оператор  $U^{-1}$  к нормальному виду (см. (DIV.10))

$$U^{-1}(g) = Z^{1/2} \exp \left( - \int d\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \hat{b}(\mathbf{k}) \right) \exp \left( \int d\mathbf{q} g^*(\mathbf{q}) b(\mathbf{q}) \right),$$

где

$$Z = \exp \left( - \int |g(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \right).$$

Таким образом, новый вакуум

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= Z^{1/2} \exp \left( - \int d\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \hat{b}(\mathbf{k}) \right) \Phi_0 = \\ &= Z^{1/2} \left\{ \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \int \dots \int d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n g(\mathbf{k}_1) \dots g(\mathbf{k}_n) \hat{b}(\mathbf{k}_1) \dots \hat{b}(\mathbf{k}_n) \right\} \Phi_0 \end{aligned} \quad (20)$$

является суперпозицией бесконечного числа собственных состояний гамильтониана  $H_0 = \int \omega(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ .

Приведем еще без выкладок (см., впрочем, задание Н13) решение задачи с билинейным взаимодействием двух бозе-полей

$$H = \sum_{r=1,2} \int \omega(\mathbf{k}) \overset{\dagger}{b}_r(\mathbf{k}) b_r(\mathbf{k}) d\mathbf{k} + \int g(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{k}) [b_1(\mathbf{k}) b_2(\mathbf{k}) + b_2(\mathbf{k}) b_1(\mathbf{k})] d\mathbf{k}. \quad (21)$$

Диагонализация достигается преобразованием

$$B_1(\mathbf{k}) = U^{-1}(g) b_1(\mathbf{k}) U(g) = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_1(\mathbf{k}) - b_2(\mathbf{k})],$$

$$B_2(\mathbf{k}) = U^{-1}(g) b_2(\mathbf{k}) U(g) = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_1(\mathbf{k}) + b_2(\mathbf{k})],$$

причем

$$U(g) = \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{k} [\overset{\dagger}{b}_2(\mathbf{k}) b_1(\mathbf{k}) - \overset{\dagger}{b}_1(\mathbf{k}) b_2(\mathbf{k})] \right\}. \quad (22)$$

В результате получаем диагональное выражение для гамильтониана

$$H = \sum_r \int \Omega_r(\mathbf{k}, g) \overset{\dagger}{B}_r(\mathbf{k}) B_r(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (23)$$

где

$$\Omega_{1,2}(\mathbf{k}, g) = \omega(\mathbf{k}) (1 \mp g(\mathbf{k})).$$

Собственные значения имеют вид

$$H\Psi(n, m) = E(n, m) \Psi(n, m),$$

$$E(n, m) = \sum_{1 \leq i \leq n} \Omega_1(k_i) + \sum_{1 \leq j \leq m} \Omega_2(k_j),$$

$$\Psi(n, m) = B_1^+(\mathbf{k}_1) \dots B_1^+(\mathbf{k}_n) B_2^+(\mathbf{q}_1) \dots B_2^+(\mathbf{q}_m) \Psi_0,$$

а вакуум полей  $B$  совпадает с вакуумом полей  $b$

$$b_v \Psi_0 = B_v \Psi_0 = 0.$$

Наконец, рассмотрим модельный гамильтониан, возникающий в задаче о сверхтекучести:

$$H = \int d\mathbf{k} \{ \omega(\mathbf{k}) \overset{\dagger}{b}(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) + g(\mathbf{k}) [b(\mathbf{k}) b(-\mathbf{k}) + \overset{\dagger}{b}(\mathbf{k}) \overset{\dagger}{b}(-\mathbf{k})] \}. \quad (24)$$

Этот гамильтониан диагонализуется унитарным преобразованием

$$B(\mathbf{k}) = \text{ch } \alpha(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) + \text{sh } \alpha(\mathbf{k}) \overset{\dagger}{b}(-\mathbf{k}) = U^{-1}(\alpha) b(\mathbf{k}) U(\alpha),$$

$$\overset{\dagger}{B}(\mathbf{k}) = \text{ch } \alpha(\mathbf{k}) \overset{\dagger}{b}(\mathbf{k}) + \text{sh } \alpha(\mathbf{k}) b(-\mathbf{k}) = U^{-1}(\alpha) \overset{\dagger}{b}(\mathbf{k}) U(\alpha),$$

причем (ср. (Д.IV.5.6))

$$\ln U(\alpha) = \int dk \alpha(\mathbf{k}) [b^\dagger(\mathbf{k}) b^\dagger(-\mathbf{k}) - b(\mathbf{k}) b(-\mathbf{k})], \quad (25)$$

а  $\alpha(\mathbf{k})$  находится из соотношения

$$2g(\mathbf{k}) \operatorname{th} \alpha(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) - \sqrt{\omega^2(\mathbf{k}) - g^2(\mathbf{k})}. \quad (26)$$

Основное состояние гамильтониана (24) определяется выражением

$$\Psi_0(\alpha) = U^{-1}(\alpha) \Phi_0,$$

где  $\Phi_0$  — вакуум поля  $b$ . Приводя с помощью формулы (Д.IV.12) оператор  $U^{-1}(\alpha)$  к нормальному виду, получаем

$$\Psi_0(\alpha) = Z^{1/2} \exp \left\{ - \int \operatorname{th} \alpha(\mathbf{k}) b^\dagger(\mathbf{k}) b^\dagger(-\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right\} \Phi_0, \quad (27)$$

где

$$Z = \exp \left( 2 \int d\mathbf{k} \ln \operatorname{ch} \alpha(\mathbf{k}) \right).$$

Формула (27) содержит когерентную суперпозицию коррелированных пар квантов первоначального поля  $b$  с противоположными импульсами, т. е. таких пар, суммарный импульс которых равен нулю.

**12.5. Эффекты взаимодействия.** Рассмотренные в предыдущем разделе решаемые модели имеют в основном методическое значение. Правда, модель (21), аналогичная полевой модели (8), имеет отношение к проблеме смешивания  $K^0$ -мезонов (см., например, Липкин (1977), гл. 7; Фейнман (1978), § 10), а гамильтонova модель с линейным взаимодействием (15), как указывалось, родственна задаче фермион-бозонного взаимодействия юкавского типа и ее решение будет использовано ниже в § 13 при анализе однонуклонного сектора модели статического нуклона.

Здесь для нас основная ценность этих моделей заключается в том, что полученные выше решения позволяют понять в основных чертах физическую структуру эффектов взаимодействия.

Наиболее важным из них является переход к новым координатам, к новой системе квантов возбуждения, описываемых преобразованными операторами  $B, \bar{B}$ . В более реалистических моделях точная диагонализация оказывается невозможной, однако, как правило, ключом к приближенному решению является правильный выбор той, наиболее физически важной части взаимодействия, которая поддается диагонализации. Остальная часть взаимодействия учитывается по теории возмущений.

Как мы убедились, в результате взаимодействия появляются новые состояния, являющиеся (см. формулу (20)) бесконечными суперпозициями состояний исходного гамильтониана  $H_0$ . Таким

образом, от системы векторов  $\Psi_N$  свободного гамильтониана  $H_0$  мы переходим к системе векторов  $\Phi_N$  полного гамильтониана  $H$ .

Иногда удается установить однозначное соответствие  $\Psi_N \leftrightarrow \Phi_N$ , и тогда имеет смысл говорить о том, что взаимодействие «одевает» исходное «голое» состояние и превращает его в «одетое» или «физическое» состояние  $\Phi_N$ . Процесс такого одевания меняет энергию кванта (в релятивистском случае — массу), а также может приводить к изменению нормы и, как мы увидим ниже, к изменению константы взаимодействия, т. е. к эффекту экранировки.

Мы хотим напомнить здесь читателю, что эффект изменения массы частицы под влиянием взаимодействия известен, например, из квантовомеханической задачи движения электрона в кристалле (см. Блохинцев (1976), § 55; Давыдов (1973), § 128), а экранировка заряда, внесенного в среду, имеет место в классической электродинамике.

Подобные эффекты изменения масс, констант связи и норм состояний называются в квантовой теории *эффектами перенормировок*. Характерная особенность перенормировок в квантовой теории поля связана с их сингулярным характером, обусловленным локальностью взаимодействия. Разбираемая ниже модель статического нуклона нелокальна, и при обсуждении эффектов перенормировки мы рассмотрим переход к локальному пределу.

### § 13. Модель тяжелого нуклона

**13.1. Формулировка модели.** Рассмотрим задачу взаимодействия юкавского типа между бесспиновыми легкими бозонами (мезонами) и тяжелыми фермионами (нуклонами). Фермионы будем считать настолько тяжелыми, что их энергия не зависит от импульса (равна массе), а также пренебрежем возможностью переориентации их спина (что оправдано при достаточно малых импульсах).

Вводя для мезонов бозе-операторы  $b(\mathbf{k})$ ,  $b^\dagger(\mathbf{k})$ , а для нуклонов ферми-операторы  $a(\mathbf{p})$ ,  $a^\dagger(\mathbf{p})$ , запишем гамильтониан системы в виде

$$H = H_0 + H_1, \quad (1)$$

где

$$H_0 = M \int d\mathbf{p} a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}), \quad (2)$$

$$H_1 = \int d\mathbf{p} \int d\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{p} + \mathbf{k}) a(\mathbf{p}) [b(\mathbf{k}) + b^\dagger(-\mathbf{k})]. \quad (3)$$

Здесь предполагается, что исходный лагранжиан мезон-нуклонного взаимодействия нелокален:

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = -g \psi^\dagger(x) \psi(x) \int dy F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(y) \quad (y_0 = x_0),$$

а формфактор  $F$  зависит лишь от модуля радиуса-вектора, причем его фурье-образ связан с введенной в (3) функцией  $g(k)$  соотношением

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} F(x) dx = gf(k) = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega^3(k)} g(k), \quad k = |k|. \quad (4)$$

Локальному пределу  $F(x) = \delta^3(x)$  отвечают предельные выражения

$$g(k) = \frac{g}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega^3(k)}}, \quad f(k) = 1. \quad (5)$$

Гамильтониан (1) записан в шредингеровском представлении. Операторы  $a$ ,  $\hat{a}^+$  удовлетворяют фермиевским перестановочным соотношениям, а  $b$ ,  $\hat{b}^+$  — бозевским. Член  $H_1$  описывает рождение и уничтожение мезонов на нуклонах. Число нуклонов остается неизменным. В отличие от обычного выражения типа  $\psi\psi^*$  (см. § 10.2),  $H_1$  не содержит слагаемых вида  $\hat{a}\hat{a}^+$  и  $\hat{a}\hat{a}$ , ответственных за рождение и аннигиляцию нуклонных пар. Поэтому нелокальность не ограничивается функцией «размазки»  $f \neq 1$ , а имеет более глубокий характер. (Подробнее это обстоятельство рассмотрено ниже в § 15.3.) Если, однако, считать нуклоны очень тяжелыми, т. е.  $M \gg \omega(k)$  для всех физически существенных импульсов, то реальные процессы рождения и аннигиляции пар невозможны, а виртуальными эффектами этого вида мы условимся пренебрегать, не вдаваясь в обсуждение законности такого приближения. В этом смысле мы и будем ниже понимать формулу (5) как определение локального предела.

Отметим еще, что в соответствии с вышесказанным гамильтониан (1) коммутирует с оператором полного числа нуклонов  $N_n$ , а также с оператором полного импульса

$$P_n = \int p_n dp \hat{a}^+(p) a(p) + \int k_n dk b(k) b(k) \quad (n = 1, 2, 3) \quad (6)$$

и не коммутирует с оператором полного числа мезонов.

**13.2. Решение в однострунном секторе.** Модель статического нуклона допускает точное решение в так называемом однострунном секторе гильбертова пространства, состоящем из векторов  $\Psi$ , удовлетворяющих соотношению

$$N_n \Psi = \Psi.$$

Такие состояния с фиксированным полным импульсом, равным  $p$ , могут быть записаны в виде

$$\Psi_p = \int dq \hat{a}^+(p-q) \Phi(q), \quad (7)$$

где  $\Phi(q)$  — вектор состояния, не содержащего нуклонов (и содержащего произвольное число мезонов), который имеет следующую

щую структуру:

$$\Phi(q) = F_b(q) \Phi_0. \quad (8)$$

Здесь  $\Phi_0$  — амплитуда вакуума, а  $F_b$  — некоторый функционал от операторов рождения мезонов  $\dagger b$  с фиксированным полным импульсом  $q$ .

Чтобы получить уравнения для мезонной амплитуды  $\Phi$ , вычислим проекцию коммутатора  $[a(0), H]$  на состояние  $\Psi_p$ . Имеем

$$\begin{aligned} [a(0), H_0] \Psi_p &= \left\{ M + \int dk \omega(k) \dagger b(k) b(k) \right\} \Phi(p), \\ [a(0), H_1] \Psi_p &= \int dk \tilde{B}(k) \Phi(p+k), \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\tilde{B}(k) \doteq g(k) \omega(k) [b(k) + \dagger b(-k)].$$

Таким образом, в одноуклонном секторе задача свелась к отысканию решения уравнения

$$(M + W) \Phi(p) + \int dk \tilde{B}(k) \Phi(p+k) = E \Phi(p), \quad (9)$$

где

$$W = \int dk \omega(k) \dagger b(k) b(k)$$

— оператор энергии мезонов.

Для решения этого уравнения воспользуемся формулой (DIV.15). Полагая в ней

$$n(k) = \dagger b(k) b(k), \quad \lambda_{\pm}(k) = \pm g(k) e^{\mp ikx}, \quad \lambda^2 = -g^2(k),$$

получим

$$[n(k), e^{A(x)}] = - \left\{ g(k) [b(k) + \dagger b(-k)] e^{ikx} + g^2(k) \right\} e^{A(x)}, \quad (10)$$

где

$$A(x) = \int dq e^{iqx} g(q) [b(q) - \dagger b(-q)]$$

— антиэрмитов оператор.

Проверим, что решение уравнения (9) может быть записано в виде

$$\Phi^{(0)}(p) = T(p; b, \dagger b) \Phi_0, \quad (11)$$

где  $\Phi_0$  — амплитуда мезонного вакуума, причем оператор  $T$  имеет следующую структуру:

$$T(p; b, \dagger b) = c \int dx e^{ipx} e^{A(x)}. \quad (12)$$

Коммутируя  $T$  с оператором энергии мезонов  $W$ , находим с помощью (10)

$$[T(\mathbf{p}), W] = \int d\mathbf{k} \tilde{B}(\mathbf{k}) T(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + \Delta M \cdot T(\mathbf{p}), \quad (13)$$

где

$$\Delta M = \int \omega(k) g^2(k) d\mathbf{k} = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{f^2(k)}{2\omega^2(k)}. \quad (14)$$

Принимая во внимание, что  $\Phi_0 = 0$ , получаем из (13)

$$W\Phi^{(0)}(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{k} \tilde{B}(\mathbf{k}) \Phi^{(0)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + \Delta M\Phi^{(0)}(\mathbf{p}) = 0.$$

Сравнивая это соотношение с (9), убеждаемся, что формулы (11), (12) действительно дают решение уравнения (9) при условии

$$E = E^{(0)} = M - \Delta M.$$

Таким образом, выражение (14) представляет поправку к массе нуклона за счет взаимодействия с мезонным полем.

Набор формул (7), (11), (12) дает нам явное выражение для «одетого» однонуклонного состояния  $\Psi_p^{(0)}$ . Для его полной конкретизации следует определить константу  $c$  в уравнении (12), что удобно сделать, исходя из условия нормировки

$$\Phi^{(0)*}(\mathbf{p}) \Phi^{(0)}(\mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

Подставляя в это условие представления (7) и (11), находим

$$\int \langle 0 | \tilde{T}^*(\mathbf{p} + \mathbf{q}) T(\mathbf{q}) | 0 \rangle d\mathbf{q} = \delta(\mathbf{p}).$$

Используя формулу (12), с учетом антиэрмитовости оператора  $A$  получаем в итоге интегрирования по  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ :

$$\begin{aligned} |c|^2 \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{y} - i(\mathbf{q} + \mathbf{p})\mathbf{x}} \langle 0 | e^{A(\mathbf{y}) - A(\mathbf{x})} | 0 \rangle = \\ = (2\pi)^3 |c|^2 \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} = (2\pi)^6 |c|^2 \delta(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Поэтому можно положить  $c = (2\pi)^{-3}$ .

Приведем еще оператор  $T$  к нормальной форме для того, чтобы записать правую часть формулы (11) в виде (8). Используя для этой цели формулу Хаусдорфа (см. (DIV.10)), запишем:

$$e^{A(\mathbf{x})} = e^{A_+(\mathbf{x})} e^{A_-(\mathbf{x})} e^{-L/2},$$

где

$$A_{\pm}(\mathbf{x}) = \mp \int d\mathbf{k} g(\mathbf{k}) b^{\pm}(\mathbf{k}) e^{\mp i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

и

$$L = [A_+(\mathbf{x}), A_-(\mathbf{x})] = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega^3(k)} f^2(k).$$

Собирая результаты, представим «одетое» однонуклонное состояние в виде (7)

$$\Psi_p^{(0)} = \frac{Z^{1/2}}{(2\pi)^3} \int dx e^{A(x)} \int dq e^{iqx} a^+(p-q) \Phi_0, \quad (15)$$

где

$$Z = e^{-L}, \quad (16)$$

а амплитуда  $\Psi_p^{(0)}$  удовлетворяет уравнению

$$H\Psi_p^{(0)} = (M - \Delta M) \Psi_p^{(0)} \quad (17)$$

и условию нормировки

$$\Psi_p^{(0)\dagger} \Psi_p^{(0)} = 1. \quad (18)$$

**13.3. Свойства однонуклонного решения.** Формула (15) представляет состояние физического нуклона  $\Psi_p^{(0)}$  через бесконечную суперпозицию состояний, содержащих один голый нуклон и произвольное число мезонов.

Разлагая в ряд входящую в правую часть этой формулы операторную экспоненту, получаем после интегрирования по  $x$

$$\Psi_p^{(0)} = Z^{1/2} \left\{ a^+(p) - \int dq g(q) b^+(q) a^+(p-q) + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^2}{2!} \int dq_1 \int dq_2 g(q_1) g(q_2) b(q_1) b(q_2) a^+(p-q_1-q_2) + \dots \right\} \Phi_0. \quad (19)$$

При этом амплитуда вероятности того, что физический нуклон с импульсом  $p$  находится в состоянии голого нуклона, равна  $Z^{1/2}$ , амплитуда вероятности того, что он «состоит» из голого нуклона с импульсом  $p-q$  и мезона с импульсом  $q$ , равна  $Z^{1/2}g(q)$  и т. д.

Важно отметить, что амплитуды высших слагаемых факторизованы относительно импульсов мезонов. Бесконечные суперпозиции бозонных состояний такого типа известны под названием *когерентных состояний*. Такие состояния  $\Phi_{\text{ког}}$  можно определить операторным соотношением

$$b(0) \Phi_{\text{ког}} = \beta \Phi_{\text{ког}}, \quad (20)$$

где  $\beta$  —  $c$ -число. Иными словами, когерентные состояния являются собственными состояниями оператора уничтожения. Это свойство имеет место как в импульсном, так и в координатном представлении. Физически важным является следующее из (20) свойство факторизуемости так называемых корреляционных функций поля  $b$ . Именно это свойство и позволяет связать  $\Phi_{\text{ког}}$  с явлением оптической когерентности (см., например, Клаудер, Сударшан (1970), гл. 7).

Нетрудно показать, что амплитуда  $\Psi_p^{(0)}$  описывает нижнее состояние в однонуклонном секторе. Заметим для этого, что дей-



ствии оператора уничтожения на эту амплитуду дает

$$b(\mathbf{k}) \Psi_{\rho}^{(0)} = -g(\mathbf{k}) \Psi_{\rho-\mathbf{k}}^{(0)}, \quad (21)$$

что при  $\mathbf{k}=0$  переходит в (20). Отсюда видно, что амплитуда  $\Psi_{\rho}^{(0)}$  удовлетворяет условию

$$B(0) \Psi_{\rho}^{(0)} \equiv (b(0) + g(0)) \Psi_{\rho}^{(0)} = 0$$

(здесь мы воспользовались обозначением из § 12.4). Таким образом, оператор уничтожения «одетого» кванта поля  $b$  действительно аннигилирует амплитуду  $\Psi_{\rho}^{(0)}$ . Верхний индекс (0) теперь приобретает ясный смысл.

Представляет интерес построить бозе-возбуждения состояния  $\Psi_{\rho}^{(1)}$ . Простейшее из этих состояний отвечает системе мезон + нуклон. Ищем такое состояние  $\Psi_{\rho}^{(1)}(\mathbf{k})$  с полным импульсом  $\rho + \mathbf{k}$  в виде

$$\dagger \check{b}(\mathbf{k}) \Psi_{\rho}^{(0)} + c(\mathbf{k}) \Psi_{\rho+\mathbf{k}}^{(0)}.$$

Не составляет большого труда убедиться (см. задание Н17), что это выражение при  $c(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k})$  является собственным вектором гамильтониана, т. е.

$$H \Psi_{\rho}^{(1)}(\mathbf{k}) = (M - \Delta M + \omega(\mathbf{k})) \Psi_{\rho}^{(1)}(\mathbf{k}), \quad (22)$$

где

$$\Psi_{\rho}^{(1)}(\mathbf{k}) = \dagger \check{b}(\mathbf{k}) \Psi_{\rho}^{(0)} + g(\mathbf{k}) \Psi_{\rho+\mathbf{k}}^{(0)}. \quad (23)$$

Любопытно отметить, что роль оператора рождения физического мезона здесь играет выражение

$$\check{B}^+(\mathbf{k}) = \dagger \check{b}(\mathbf{k}) + g(\mathbf{k}) \check{I}_{\mathbf{k}}, \quad (24)$$

где  $\check{I}_{\mathbf{k}}$  — оператор, увеличивающий импульс на  $\mathbf{k}$ , т. е. определенный соотношением

$$\check{I}_{\mathbf{k}} \Psi_{\rho} = \Psi_{\rho+\mathbf{k}}.$$

Видно также, что формула (20) может быть переписана в виде

$$\check{B}(\mathbf{k}) \Psi_{\rho}^{(0)} = 0, \quad (25)$$

где

$$\check{B}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k}) + g(\mathbf{k}) \check{I}_{-\mathbf{k}}. \quad (26)$$

Заметим еще, что из того установленного выше факта, что выражение (23), описывающее физическое состояние мезон + нуклон, является собственным вектором гамильтониана, непосредственно следует отсутствие рассеяния мезона на нуклоне в рассматриваемой модели.

**13.4. Переход к локальному пределу.** Рассмотрим свойства полученного решения при переходе к локальному пределу (5). Этот

предел оказывается сингулярным. Для того чтобы изучить структуру возникающих сингулярностей, введем вспомогательный параметр  $\Lambda$ , характеризующий «степень размазывания» формфактора  $f(k)$ . С этой целью определим формфактор следующим образом:

$$f(k) = e^{-k^2/2\Lambda^2}; \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (27)$$

Параметр  $\Lambda$  играет роль импульса обрезания в импульсном представлении. В координатном представлении длина  $r_\Lambda = \hbar/\Lambda$  характеризует область нелокальности нуклона. Для перехода к локальному пределу следует устремить  $\Lambda$  к  $\infty$ . Для дальнейшего обсуждения нам потребуются два интеграла

$$\Delta M = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{f^2(k)}{2\omega^2(k)} = \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2 + \mu^2} e^{-k^2/\Lambda^2}$$

и

$$L = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{f^2(k)}{2\omega^3(k)} = \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(k^2 + \mu^2)^{3/2}} e^{-k^2/\Lambda^2},$$

в которых мы использовали релятивистское выражение энергии мезонов с массой  $\mu$ . В пределе  $\Lambda \gg \mu$  получаем

$$\Delta M \simeq \frac{g^2}{4\pi^2} \Lambda, \quad L \simeq \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}. \quad (28)$$

Таким образом, в локальном пределе оба интеграла расходятся. Интеграл  $\Delta M$ , который, согласно (17), дает полевой вклад в массу нуклона, расходится линейно по  $\Lambda$ , т. е. обратно пропорционален «размеру» нуклона  $r_\Lambda$ . Второй интеграл, согласно (15), входит в норму «одетого» состояния. На основании (19) заключаем, что вероятность того, что «одетый» нуклон находится в голом состоянии в локальном пределе, равна

$$\omega_0 = Z = e^{-L} \simeq \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^{-g^2/4\pi^2},$$

т. е. стремится к нулю степенным образом. Вероятность состояния, содержащего «голый» нуклон плюс один мезон

$$\omega_1 = Z \int d\mathbf{q} g^2(q) = ZL = \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{g^2/4\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2},$$

также стремится к нулю степенным образом и т. д.

Таким образом, в локальном пределе связи между «голой» и «одетой» массами, а также между собственными функциями свободного и полного гамильтонианов становятся сингулярными.

## Глава IV. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

### § 14. Матрица рассеяния

**14.1. Теория возмущений.** При рассмотрении задачи взаимодействия в квантовой механике исходят из уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H \psi(t),$$

в которой полный гамильтониан системы  $H$  представляют в виде суммы гамильтониана свободного движения  $H_0$  и гамильтониана взаимодействия  $H_1$ :

$$H = H_0 + H_1. \quad (1)$$

Поскольку, как правило, получить точное решение уравнения Шредингера оказывается невозможным, обычно используют метод теории возмущений. При этом в исходном приближении пренебрегают членом взаимодействия, получая точно решаемую задачу

$$i \frac{\partial \psi_0(t)}{\partial t} = H_0 \psi_0(t). \quad (2)$$

В теории квантованных полей, как и в нерелятивистской квантовой механике, точные решения удается получить лишь в ряде довольно простых моделей. Поэтому здесь также обычно прибегают к теории возмущений, основанной на исходном приближении невзаимодействующих частиц. При этом приходится вводить в рассмотрение соответствующие идеализированные свободные поля и рассматривать взаимодействие как некоторый дополнительный фактор, мало изменяющий свойства динамической системы, фактор, который может «включаться» и «выключаться». На первый взгляд такая постановка вопроса как будто не вызывает особых возражений. Действительно, элементарные частицы интенсивно взаимодействуют лишь при достаточном их сближении (в процессах столкновений). Поэтому кажется естественным, что на больших расстояниях взаимодействие между полями несущественно, и в определенном приближении можно

пренебречь им и рассматривать реальные частицы как свободные. Однако (как, например, хорошо известно из классической электродинамики) даже свободные частицы взаимодействуют с создаваемыми ими полями. В квантовом случае это приводит к возмущению нижнего (вакуумного) состояния — ср., например, задачу статического источника в § 12.4. Иногда говорят, что частицы взаимодействуют с вакуумом (свободных полей), как со своего рода физической средой, в которой эти частицы движутся. Несмотря на возможную слабость взаимодействия, благодаря малости размеров частиц эффекты взаимодействия оказываются большими (в пределе точечных частиц — бесконечными).

Поэтому использование концепции «голых» (т. е. невзаимодействующих даже с вакуумом) частиц оказывается неудовлетворительным, и представляется весьма желательным с самого начала иметь дело с реальными взаимодействующими частицами, не вводя искусственного представления о фиктивных свободных полях. Такая программа в известной степени реализуется в так называемом аксиоматическом построении теории квантованных полей.

Однако конструктивное проведение ее наталкивается на серьезные трудности математического характера. Дело заключается в том, что единственным достаточно разработанным методом изучения взаимодействующих квантовых полей является сейчас лишь метод теории возмущений. Этот метод исходит из приближения невзаимодействующих полей, описываемых линейными уравнениями. Все нелинейные вклады (соответственно в лагранжиане — кубичные, трилинейные и т. д.), в том числе члены, описывающие взаимодействия между полями и нелинейные эффекты самодействия (см. §§ 10.2, 19.4), здесь рассматриваются как малые возмущения. Константы взаимодействий (иначе — константы связи), содержащиеся в этих членах, считаются малыми параметрами, по возрастающим степеням которых и строится теория возмущений. Здесь следует подчеркнуть, что обращение к теории возмущений молчаливо предполагает возможность использования разложений в ряд по степеням константы (или констант) взаимодействия. Такое предположение фактически содержит две гипотезы:

а) Существование предела слабой связи у физически содержательных решений уравнений квантовой теории поля. Решения, обладающие таким пределом, назовем адиабатическими.

б) Аналитичность или достаточно слабую неаналитичность в окрестности нуля по константе связи у адиабатического решения.

Использование этих гипотез исторически основывается на квантовой электродинамике, т. е. модели квантовой теории поля, описывающей взаимодействие электрически заряженных частиц с электромагнитным полем. В этой модели константой связи является электрический заряд  $e$ , а параметр разложения теории

возмущений пропорционален постоянной тонкой структуры, которая в принятой здесь системе единиц имеет вид  $\alpha = e^2/4\pi$ .

Фактический параметр разложения имеет порядок  $10^{-3}$  [ $\sim \alpha/\pi$  — см., например, (30.5)]. Поэтому высшие члены теории возмущений в квантовой электродинамике являются численно весьма малыми поправками к основным выражениям, получаемым из первых исчезающих порядков теории возмущений.

Такие выражения, вычисленные еще в конце 20-х годов, оказались очень близкими к экспериментальным значениям, вследствие чего возможность использования разложений теории возмущений в квантовой электродинамике не вызывала сомнений.

Таким образом, гипотеза а) в квантовой электродинамике всегда представлялась вполне естественной. Благодаря этому она фактически принималась справедливой и для других взаимодействий. Справедливость гипотезы б) в квантовой электродинамике не подвергалась сомнению по тем же соображениям.

С современной точки зрения правдоподобность гипотез а) и б) в сильных взаимодействиях не является бесспорной. Эти гипотезы противоречат некоторым обнаруженным в последние годы решаемым квантовополевым моделям.

Тем не менее наша дальнейшая программа заключается в том, чтобы построить аппарат квантовополевой теории возмущений для вычисления матричных элементов и вероятностей переходов. Как мы убедимся позднее, этот аппарат прекрасно работает в квантовой электродинамике (см. ниже § 30) и, по-видимому, оправдывает себя в области слабых взаимодействий (§§ 31, 32).

**14.2. Представление взаимодействия.** При отсутствии взаимодействия система квантовых полей описывается аналогом уравнения (2) для амплитуды состояния  $\Psi$ :

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H_0 \Psi(t). \quad (3)$$

Выполняя формальную квадратуру, получаем

$$\Psi(t) = e^{-iH_0 t} \Phi. \quad (4)$$

Постоянная амплитуда  $\Phi$  была введена в § 6. В случае взаимодействия выражение (4) уже не будет удовлетворять уравнению движения

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = (H_0 + H_1) \Psi(t). \quad (5)$$

Однако мы можем обобщить его, полагая, что  $\Phi$  зависит от времени:

$$\Psi(t) = e^{-iH_0 t} \Phi(t). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t} \Phi(t). \quad (7)$$

Обсудим смысл полученного уравнения. Плотность  $\mathcal{H}(x)$  гамильтониана взаимодействия

$$H_1 = \int \mathcal{H}(x) dx,$$

(в видах экономии места мы опускаем нижний индекс 1 под знаком интеграла), входящего в правые части (5) и (7), обычно является полиномиальной функцией от операторов полей в представлении Шредингера:

$$\mathcal{H}(x) = \prod_{\alpha} u_{\alpha}(x) = \prod_{\alpha} u_{\alpha}(x)|_{x^0=0}.$$

Но, согласно (6.20),

$$e^{iH_0 t} \mathcal{H}(x) e^{-iH_0 t} = \prod_{\alpha} e^{iH_0 t} u_{\alpha}(0, x) e^{-iH_0 t} = \prod_{\alpha} u_{\alpha}(x),$$

где  $u_{\alpha}(x)$  — операторы поля в гайзенберговском представлении относительно гамильтониана свободного движения. Поэтому действие оператора  $e^{iH_0 t} \dots e^{-iH_0 t}$  сводится к замене операторных функций свободных полей шредингеровского представления  $u(x) = u(0, x)$  на операторные функции свободных полей в гайзенберговском представлении  $u(t, x) = u(x)$ .

Для новой амплитуды состояния  $\Phi(t)$ , согласно (7), имеем теперь

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H(t) \Phi(t), \quad (8)$$

причем пространственная плотность  $\mathcal{H}(x)$  оператора

$$H(t) = \int \mathcal{H}(x) dx \quad (9)$$

зависит от свободных полей в гайзенберговском представлении. Такое представление уравнения Шредингера называется *представлением взаимодействия* (иногда представлением Дирака).

Приводя к этому представлению среднее от динамического оператора  $B$

$$\bar{B}_t = \Psi^*(t) B \Psi(t) = \Phi^*(t) e^{iH_0 t} B e^{-iH_0 t} \Phi(t),$$

видим, что оно может быть записано в виде среднего по амплитудам  $\Phi(t)$  представления взаимодействия от выражения

$$e^{iH_0 t} B e^{-iH_0 t} = B_{\text{вз}}(t), \quad (10)$$

которое естественно считать представлением взаимодействия для динамической переменной  $B$ .

Выполненное ранее преобразование для гамильтониана взаимодействия можно записать в виде

$$e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t} = H_{\text{вз}}(t) = H(t). \quad (11)$$

Поэтому в представлении взаимодействия операторы динамических величин следует рассматривать как функции от операторов поля  $u(x)$  в представлении Гайзенберга для свободных полей.

**14.3. Матрица рассеяния.** Заметим, что уже с помощью (8) мы можем ввести в рассмотрение очень важную характеристику системы — так называемую *матрицу рассеяния*, или  $S$ -матрицу. Пусть мы изучаем процесс, в начале и в конце которого имеются лишь далеко отстоящие друг от друга частицы, которые можно считать свободными. Чтобы вычислить амплитуду вероятности для происходящих в этом процессе рассеяний и взаимных превращений частиц, рассмотрим положение, при котором взаимодействие  $H_1(t)$  адиабатически включается в бесконечно удаленном прошлом и адиабатически выключается в бесконечно удаленном будущем. Обозначая амплитуду начального состояния через  $\Phi(-\infty)$ , а амплитуду конечного состояния через  $\Phi(\infty)$ , свяжем их соотношением

$$\Phi(\infty) = S\Phi(-\infty), \quad (12)$$

в котором оператор  $S$  называется оператором рассеяния. Ясно, что оператор  $S$  можно задать совокупностью его матричных элементов (амплитуд переходов)

$$S_{\alpha\beta} = \langle \beta | S | \alpha \rangle,$$

где  $|\alpha\rangle$  — некоторое начальное состояние, характеризуемое совокупностью квантовых чисел  $\{\alpha\} = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ , представляющих как дискретные, так и непрерывные наборы значений, а  $|\beta\rangle$  — соответствующее конечное состояние. Квадрат модуля  $|S_{\beta\alpha}|^2$  определяет вероятность перехода из  $|\alpha\rangle$  в  $|\beta\rangle$ .

Таким образом, оператор  $S$  условно можно представить в виде матрицы бесконечного ранга, составленной из элементов  $S_{\beta\alpha}$ . Его обычно называют *матрицей рассеяния*.

Чтобы получить явное выражение для оператора  $S$ , вернемся к уравнению Шредингера в представлении взаимодействия и построим его решение в виде разложения по степеням взаимодействия  $H_1$ , отправляясь от исходного приближения, которое выберем как функцию  $\Phi(t_0)$  начального состояния в некоторый «исходный» момент  $t = t_0$ . Получим

$$\Phi(t) = S(t, t_0) \Phi(t_0), \quad (13)$$

причем

$$\begin{aligned} S(t, t_0) = & 1 - i \int_{t_0}^t H(t') dt' + (-i)^2 \int_{t_0}^t H(t') dt' \int_{t_0}^{t'} H(t'') dt'' + \dots \\ & \dots + (-i)^n \int_{t_0}^t H(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H(t_2) dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_n) dt_n + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Члены полученного разложения допускают весьма любопытную перестройку. Продемонстрируем ее на примере третьего

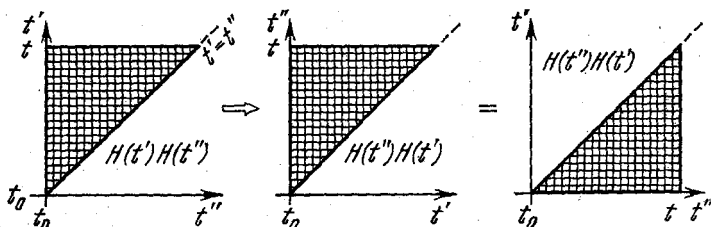


Рис. 14.1. Преобразование области интегрирования при изменении порядка интегрирования во втором порядке теории возмущений для матрицы рассеяния [см. формулу (14)].

члена правой части. Меняя обозначения переменных интегрирования  $t' \leftrightarrow t''$  и порядок интегрирования, получаем (рис. 14.1)

$$\int_{t_0}^t H(t') dt' \int_{t_0}^{t'} H(t'') dt'' = \int_{t_0}^t dt'' \int_{t''}^t dt' H(t'') H(t').$$

Представляя затем исходное выражение в виде полусуммы исходного и преобразованного, находим

$$\int_{t_0}^t H(t') dt' \int_{t_0}^{t'} H(t'') dt'' = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \left\{ \int_{t_0}^{t'} dt'' H(t') H(t'') + \int_{t'}^t dt'' H(t'') H(t') \right\}.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, может быть записано в более компактной форме

$$\{ \dots \} = \int_{t_0}^t dt'' T \{ H(t') H(t'') \}$$

с помощью нового символа

$$T \{ H(t') H(t'') \} \equiv \begin{cases} H(t') H(t'') & t' > t'', \\ H(t'') H(t') & t'' > t' \end{cases} \quad (15)$$

— символа хронологического (или упорядоченного по времени) произведения. Общий  $n$ -й член правой части в (14) может быть преобразован к виду

$$\frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T \{ H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n) \},$$

где символ  $T \{ H(t_1) \dots H(t_n) \}$  для любого взаимного расположения временных аргументов равен произведению гамильтонианов



в порядке невозрастания аргументов слева направо:

$$T \{ H(t_1) \dots H(t_n) \} = H(t_\alpha) H(t_\beta) \dots H(t_\sigma) H(t_\rho),$$

$$t_\alpha \geq t_\beta \geq \dots \geq t_\sigma \geq t_\rho. \quad (16)$$

Представляя каждый член правой части (14) с помощью  $T$ -произведения и вынося символ  $T$  из-под знаков интегрирования, получаем

$$S(t_1, t_0) = T \left\{ 1 + \frac{1}{i} \int_{t_0}^{t_1} H(t) dt + \dots + \frac{1}{i^n n!} \left[ \int_{t_0}^{t_1} H(t) dt \right]^n + \dots \right\} =$$

$$= T \left\{ \exp \left[ \frac{1}{i} \int_{t_0}^{t_1} H(t) dt \right] \right\} = T \left\{ \exp \left[ \frac{1}{i} \int_{t_0}^{t_1} dt \int dx H(t, x) \right] \right\} \quad (17)$$

— так называемую *хронологическую экспоненту*.

**14.4. Хронологические произведения.** Выражение (17) содержит хронологические произведения  $H(t, x) = \dot{H}(x)$ . Такие произведения операторных выражений, зависящих от точек 4-мерного пространства-времени, являются непосредственными обобщениями определений (16). Мы, однако, пойдем по другому пути и отправимся от  $T$ -произведения локальных операторных функций поля.

Определим хронологическое произведение  $n$  операторов поля  $u_1(x_1), u_2(x_2), \dots, u_n(x_n)$  как произведение этих операторов в порядке, соответствующем неубыванию временных аргументов слева направо, с учетом общего знака, который может меняться в случае, если часть операторов квантована по Ферми — Дираку. Здесь необходимо сделать важное уточнение. Временная последовательность двух точек  $x_i, x_j$  не является релятивистски инвариантным понятием в случае их пространственного подобия ( $x_i \sim x_j$ ). Поэтому новое определение будет лоренц-инвариантным лишь для операторов, (анти)коммутирующих вне светового конуса:

$$u_i(x_i) u_j(x_j) = \eta u_j(x_j) u_i(x_i), \quad x_i \sim x_j, \quad \eta = \pm 1 \quad (18)$$

Такие операторы назовем локальными операторами полей. Очевидно, в частности, что частотные части операторов  $u^\pm$  не являются локальными. Имеем по определению для локальных операторов поля  $u_1, \dots, u_n$ :

$$T(u_1(x_1) u_2(x_2) \dots u_n(x_n)) = \eta u_{i_1}(x_{i_1}) \dots u_{i_n}(x_{i_n}),$$

$$x_{i_1} \geq x_{i_2} \geq \dots \geq x_{i_n}. \quad (19)$$

Здесь символ  $x \geq y$  обозначает, что точка  $x$  лежит в верхнем световом конусе точки  $y$  или пространственноподобна ей, а  $\eta = (-1)^p$ , где  $p$  — четность перестановки ферми-операторов при переходе от порядка  $(1, 2, \dots, n)$  к порядку  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ .

Теперь можно ввести хронологическое произведение локальных операторных выражений  $A_1(x_1) \dots A_n(x_n)$

$$T(A_1(x_1) \dots A_n(x_n)) = \eta A_{i_1}(x_{i_2}) \dots A_{i_n}(x_{i_n}),$$

$$x_{i_1} \gtrsim x_{i_2} \gtrsim \dots \gtrsim x_{i_n}. \quad (20)$$

Операторным локальным выражением  $A_u(x)$  относительно поля  $u(x)$  будем называть операторное выражение, зависящее от полевой операторной функции  $u(x)$  и ее производных, взятых в целом ( $u = u^+ + u^-$ ) в точке  $x$  и (анти)коммутирующее с оператором поля при пространственноподобном разделении аргументов

$$\{A_u(x), u(y)\}_{\pm} = 0, \quad x \sim y.$$

Такие операторы обычно сводятся к нормальным произведениям операторных функций  $u(x)$ . Они обладают свойством взаимной локальной (анти)коммутивности:

$$A_i(x) A_j(y) = \eta A_j(y) A_i(x), \quad x \sim y, \quad (21)$$

вследствие чего определение (20) является непротиворечивым.

Здесь, правда, следует сделать одну существенную оговорку. Дело в том, что (анти)коммутаторы типа (21) обычно имеют сингулярность при  $x = y$ . Поэтому хронологические произведения (19), (20) оказываются неопределенными при совпадении двух и более аргументов ( $x_1, \dots, x_n$ ). Этой неопределенностью можно распорядиться по-разному — см. ниже § 16.

В дальнейшем операторы  $A(x)$ , содержащие четное число операторов Ферми, будем называть локальными бозе-операторами или просто локальными, а операторные выражения, содержащие нечетное число ферми-операторов, — локальными операторами Ферми.

Примерами локальных операторных выражений являются лагранжиан  $\mathcal{L}(x)$ , тензор энергии-импульса, 4-вектор тока.

**14.5. Хронологическая экспонента.** Возвращаясь к матрице рассеяния (12), видим, что для получения  $S$  из оператора  $S(t_1, t_0)$  следует устремить  $t_1$  к  $+\infty$ , а  $t_0$  к  $-\infty$ . С учетом того, что для моделей, не содержащих производных от функций в лагранжиане взаимодействия, гамильтониан отличается от функции Лагранжа лишь знаком, т. е.

$$H(t) = -L(t) = -\int \mathcal{L}(x) dx,$$

получаем

$$S = S(\infty, -\infty) = T \exp\left(i \int dx \mathcal{L}(x)\right) = T e^{i\mathcal{A}}. \quad (22)$$

Здесь  $\mathcal{A}$  — часть действия системы, содержащая взаимодействие, т. е. действие взаимодействия.

Здесь уместно сделать предупреждение. При рассмотрении выражений, подобных стоящим в правой части (22), может воз-

никнуть искушение вынести не зависящий от времени явно фактор типа  $\mathcal{L}$  из-под знака  $T$ -произведения. Нужно помнить, что, согласно введенным определениям (ср. (17)), всегда следует представить такой фактор в виде интеграла от локального операторного выражения и внести символ  $T$  под знак интеграла. Например, второй член разложения (22) будет

$$T(\mathcal{L}^2) \equiv \int dx \int dy T(\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)). \quad (23)$$

Отметим ещё, что хотя мы получили  $T$ -экспоненту от лагранжиана (22) с помощью уравнения Шредингера и  $T$ -экспоненты от гамильтониана (17), выражение (22) оказывается справедливым и тогда, когда лагранжиан взаимодействия содержит производные от функций поля. В этом случае оказывается, что можно определить  $S$ -матрицу в виде (22), исходя из ряда общих требований — таких, как причинность, унитарность, релятивистская инвариантность и принцип соответствия (см. ниже § 15). В то же время ввести оператор гамильтона  $H$  оказывается затруднительным (подробности см. во Введении, гл. VII). Поэтому в дальнейшем мы будем использовать выражение (22) без соответствующих оговорок.

## § 15. Общие свойства $S$ -матрицы

**15.1. Матрица рассеяния как функционал.** Как отмечалось в § 14, можно, следуя первоначальной идее Гайзенберга, ввести  $S$ -матрицу (соответствующую бесконечно большому интервалу времени  $t_1 = \infty$ ,  $t_0 = -\infty$ ) непосредственно, не обращаясь к уравнению Шредингера, гамильтониану и оператору  $S(t_1, t_0)$  для конечных  $t_1$  и  $t_0$ . Вместо этих свойств и понятий для конкретизации формы  $S$ -матрицы используются явно сформулированные физические условия:

- а) причинности,
- б) унитарности,
- в) релятивистской ковариантности,
- г) принцип соответствия,

которые принимаются в качестве исходных аксиом. Такой способ построения  $S$ -матрицы, восходящий к работам Штюкельберга и Боголюбова начала 50-х годов, принято называть *аксиоматическим* (см. Введение, §§ 20, 52, а также книгу Боголюбова, Логунова, Тодорова (1969)). В § 16 мы обсудим содержание и формулировку аксиом и получим выражение для  $S$ -матрицы, аналогичное (14.22) с соответствующими комментариями.

При этом нам окажется необходимым определить  $S$ -матрицу как *функционал* от некоторых вспомогательных классических функций. Дело в том, что обычная матрица рассеяния, описываемая выражением (14.22) и соответствующая взаимодействию квантовых волновых полей во всем пространстве-времени, не зависит

от каких-либо обычных функций, и потому ее матричные элементы не содержат никаких функциональных зависимостей. Введение в лагранжиан взаимодействия какой-либо некантованной функции превращает  $S$ -матрицу и ее матричные элементы в функционалы. Вычисляя функциональные производные этих функционалов, можно ввести в рассмотрение пространственно-временные свойства различных величин, входящих в теорию (например, условие причинности). При этом «классические поля» играют роль вспомогательных переменных в промежуточных рассуждениях и обычно исключаются из окончательных выражений соответствующим предельным процессом.

Подобное вспомогательное классическое поле можно ввести, например, в виде заданного внешнего поля  $u_{\text{ext}}(x)$  или заданного внешнего тока каких-либо частиц  $J_{\text{ext}}(x)$ . Так, при изучении поведения заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле в лагранжиан взаимодействия вводят внешний некантованный электромагнитный потенциал:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}(A_{\text{ext}}) = e : \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x) (A_\nu(x) + A_\nu^{\text{ext}}(x)) :. \quad (1)$$

Матрица рассеяния оказывается тогда функционалом

$$S \rightarrow S(A_{\text{ext}}).$$

Менее физически наглядный, но более удобный технически способ состоит в процедуре введения в лагранжиан взаимодействия классического функционального аргумента в виде «функции области взаимодействия»  $g(x)$ . Эта функция позволяет формализовать операции «включения» и «выключения» взаимодействия. Чтобы математически описать эту операцию, введем функцию  $g(x)$  со значениями в интервале  $[0, 1]$ , характеризующую интенсивность включения взаимодействия. В областях, где  $g(x) = 0$ , взаимодействие отсутствует, там где  $g = 1$ , оно включено полностью, а при  $0 < g < 1$  — лишь частично. Заменяя действительный лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}$  произведением  $\mathcal{L}(x)g(x)$ , мы придем к взаимодействию, «включенному с интенсивностью  $g(x)$ ».

Пусть теперь  $g$  отлична от нуля лишь в некоторой конечной пространственно-временной области. В этом случае в достаточно отдаленных прошлом и будущем поля являются свободными, и потому начальное и конечное состояния динамической системы можно характеризовать обычными постоянными амплитудами состояния, введенными в гл. II. Эти две величины  $\Phi(-\infty)$  и  $\Phi(\infty)$  будут связаны некоторым оператором  $S$ , преобразующим  $\Phi(-\infty)$  в  $\Phi(\infty)$  и зависящим от поведения функции  $g$ . Фиксируя амплитуду начального состояния  $\Phi(-\infty) = \Phi$ , мы можем рассматривать конечную амплитуду как функционал от  $g$ :

$$\Phi(\infty) = \Phi(g) = S(g)\Phi. \quad (2)$$

Согласно этому определению  $S(g)$  естественно интерпретировать как матрицу рассеяния для случая взаимодействия, включенного с интенсивностью  $g$ . Реальный случай, когда взаимодействие включено полностью во всем пространстве-времени, должен в данной схеме рассматриваться с помощью предельного перехода, при котором область, где  $g=1$ , неограниченно расширяется и в пределе охватывает все пространство-время. При этом обычная матрица рассеяния  $S$  может быть определена в виде

$$S = S(1). \quad (3)$$

Нам придется часто пользоваться понятием функциональной производной, являющимся естественным обобщением понятия частной производной. Как известно, частная производная некоторой функции  $n$  переменных  $z_1, \dots, z_n$  может быть определена как коэффициент при  $dz_i$  в сумме

$$df = \sum_i R_i dz_i, \quad (*)$$

представляющей дифференциал этой функции.

Пусть теперь мы имеем некоторый функционал  $I(u)$ , вариация которого  $\delta I(u)$ , определяемая как главная часть приращения  $I(u + \delta u) - I(u)$ , может быть представлена интегралом вида

$$\delta I(u) = \int_G R(x, u) \delta u dx.$$

Здесь  $R$  является функционалом  $u$ , зависящим от положения точки  $x$  в области  $G$ , подобно тому как в сумме (\*)  $R_i$  был функцией  $z_1, \dots, z_n$ , зависящей от индекса  $i$ . Тогда, по аналогии с вышеприведенным определением частной производной, введем понятие функциональной производной функционала  $I(u)$  по  $u$  в точке  $x$ , определив ее соотношением

$$\frac{\delta I(u)}{\delta u(x)} = R(x, u).$$

Таким же образом можно ввести и функциональные производные высших порядков, причем легко видеть, что функциональные производные обладают основными свойствами обычных производных.

**15.2. Релятивистская ковариантность и унитарность.** Сформулируем теперь ряд основных физических условий, которым должна удовлетворять матрица  $S$ . Важным физическим требованием, как всегда, является условие *релятивистской ковариантности*. Для его явной формулировки рассмотрим преобразование  $P$  из неоднородной группы Лоренца, т. е. группы Пуанкаре

$$x \rightarrow x' = Px. \quad (4)$$

При отсутствии взаимодействия закон преобразования амплитуды состояния, соответствующий преобразованию (4), согласно (6.22) имел вид

$$\Phi' = U_P \Phi. \quad (5)$$

Теперь же, когда  $\Phi = \Phi(g)$ , необходимо учесть также, что преобразованию (4) подвергается сама функция  $g(x)$ , которую можно рассматривать как некоторое «классическое скалярное поле»; так как область взаимодействия, описываемая функцией  $g$ , при преобразовании (4) остается неизменной, то переход в аргументе  $g$  к новым координатам дает

$$g(x) \rightarrow P g(x) = g(P^{-1}x). \quad (6)$$

Поэтому закон преобразования амплитуды  $\Phi(g)$  имеет вид

$$\Phi(g) \rightarrow \Phi'(Pg) = U_P \Phi(g). \quad (7)$$

Из соображений релятивистской ковариантности нужно потребовать, чтобы закон преобразования (2) от начальной амплитуды к конечной не зависел от системы отсчета, т. е. чтобы

$$\Phi'(g) = S(g) \Phi'.$$

Внося сюда (5) и (7) со сдвинутым ( $Pg \rightarrow g$ ) аргументом, находим, с учетом (2),

$$U_P S(P^{-1}g) \Phi = S(g) U_P \Phi.$$

Ввиду произвольности амплитуды начального состояния  $\Phi$  это выражение можно записать в операторной форме:

$$U_P S(P^{-1}g) = S(g) U_P$$

или, сдвигая аргументы на  $P$ , умножая справа на  $U_P^{-1}$  и учитывая унитарность  $U_P$ :

$$S(Pg) = U_P S(g) U_P^{-1} = U_P S(g) U_P^\dagger. \quad (8)$$

Эта формула и выражает условие ковариантности оператора  $S(g)$ .

Сформулируем теперь другое общее обязательное требование — требование сохранения нормы волновых функций. Применительно к данному случаю мы должны потребовать

$$\Phi^\dagger(g) \Phi(g) = \Phi^\dagger \Phi,$$

откуда, при условии обратимости оператора  $S$ , вытекает, что

$$\hat{S}^\dagger(g) S(g) = S(g) \hat{S}^\dagger(g) = 1, \quad (9)$$

т. е. оператор  $S(g)$  должен быть унитарным.

В соответствии со сказанным в § 14 полученное соотношение можно также записать в виде

$$\sum_{\gamma} S_{\beta\gamma}(g) \hat{S}_{\gamma\alpha}^{\dagger}(g) = I_{\beta\alpha}, \quad (9')$$

причем символ  $\sum_{\gamma}$  обозначает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным квантовым числам, характеризующим состояние  $|\gamma\rangle$ , а символ  $I_{\beta\alpha}$  равен произведению соответствующих символов Кронекера и  $\delta$ -функций Дирака.

**15.3. Условие причинности.** Следует обеспечить еще выполнение условия причинности, т. е. позаботиться о том, чтобы изменение закона взаимодействия в какой-либо пространственно-временной области могло оказать влияние на эволюцию системы лишь в последующие моменты времени.

Чтобы сформулировать условие причинности в явном виде, рассмотрим сначала случай, когда область  $G$  пространства-времени, в которой функция  $g$  отлична от нуля, распадается на две отдельные подобласти  $G_1$  и  $G_2$  такие, что все точки одной из них ( $G_1$ ) лежат в прошлом относительно некоторого момента времени  $t = \tau$ , а все точки другой ( $G_2$ ) — в будущем относительно  $t = \tau$  (рис. 15.1). Функция  $g$  при этом может быть представлена в виде суммы двух функций

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x), \quad (10)$$

одна из которых  $g_1$  отлична от нуля лишь в  $G_1$ , а вторая  $g_2$  — лишь в  $G_2$ .

В момент времени  $\tau$  можно определить состояние, характеризующееся амплитудой  $\Phi_{\tau}$ , которая по соображениям причинности не должна зависеть от взаимодействия в области  $G_2$  и может быть поэтому представлена в виде

$$\Phi_{\tau} = S(g_1) \Phi, \quad (11)$$

где  $S(g_1)$  — матрица рассеяния для случая, когда взаимодействие включено с интенсивностью  $g_1$ . Конечное состояние  $\Phi(g)$  может быть получено из  $\Phi_{\tau}$  с помощью оператора  $S(g_2)$ , описывающего взаимодействие в области  $G_2$ :

$$\Phi(g) = S(g_2) \Phi_{\tau}. \quad (12)$$

Сравнивая (10) — (12) с (2), находим, что

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2) S(g_1) \quad \text{при} \quad G_2 > G_1. \quad (13)$$

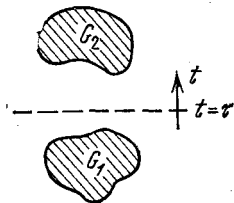


Рис. 15.1. Иллюстрация взаимного расположения областей взаимодействия к формуле (13).

(Неравенство  $G_2 > G_1$  обозначает, что все точки области  $G_2$  расположены по времени позже всех точек области  $G_1$ .) Соотношение (13) является формулировкой принципа причинности для случая  $G_2 > G_1$ .

Отметим здесь, что если, кроме того,  $G_1 \sim G_2$ , т. е. все точки области  $G_1$  пространственноподобны всем точкам области  $G_2$  (рис. 15.2), то временной порядок областей может быть изменен соответствующим преобразованием Лоренца. Поэтому

$$S(g_1)S(g_2) = S(g_2)S(g_1) \quad \text{при } G_1 \sim G_2. \quad (14)$$

Формулы (13), (14) представляют формулировки условия причинности, записанные для оператора  $S(g)$  в целом. Для теоретических приложений оказывается более эффективной дифференциальная формулировка условия причинности.

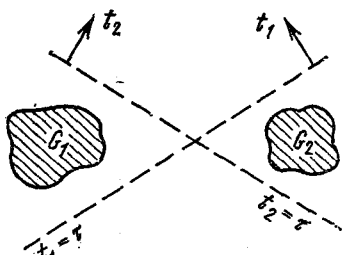


Рис. 15.2. Взаимное расположение областей взаимодействия в случае, соответствующем формуле (14).

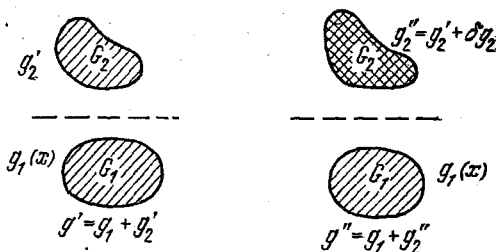


Рис. 15.3. Иллюстрация к выбору дифференциального условия причинности (16).

**15.4. Дифференциальное условие причинности.** Для того чтобы получить его рассмотрим два случая, которые отличаются друг от друга видом взаимодействия в области  $G_2$  и описываются одной и той же функцией в  $G_1$  (рис. 15.3), именно

$$g'(x) = g_2'(x) + g_1(x), \quad g''(x) = g_2''(x) + g_1(x).$$

Составляя выражение  $S(g'') \overset{\dagger}{S}(g')$ , убеждаемся, что оно не зависит от поведения функций  $g''$  и  $g'$  в области  $G_1$ . В самом деле, так как, согласно (13),

$$\overset{\dagger}{S}(g_1 + g_2) = \overset{\dagger}{S}(g_1) \overset{\dagger}{S}(g_2) \quad \text{при } G_2 > G_1,$$

то с учетом свойства унитарности матрицы  $S(g_1)$  получаем

$$S(g'') \overset{\dagger}{S}(g') = S(g_2'') S(g_1) \overset{\dagger}{S}(g_1) \overset{\dagger}{S}(g_2') = S(g_2'') \overset{\dagger}{S}(g_2').$$

Таким образом, произведение  $S(g'') \overset{\dagger}{S}(g')$  действительно не зависит от поведения функции  $g$  в области  $G_1$ . Это происходит



потому, что содержащаяся в  $S(g'')$  зависимость от состояния системы до момента времени  $t$  уничтожается соответствующей частью оператора  $\hat{S}^\dagger(g)$ . Поэтому и в более общем случае мы примем следующую формулировку условия причинности:

Если имеются две функции  $g''(x)$  и  $g'(x)$ , совпадающие при  $x^0$ , меньшем некоторого  $t$ , то произведение  $S(g'')\hat{S}^\dagger(g')$  не должно зависеть от одновременного изменения функций  $g'$  и  $g''$  на одну и ту же величину в области  $x^0 < t$ .

Сформулируем теперь условие причинности в дифференциальной форме. Если положить  $g'(y) = g(y)$  и  $g''(y) = g(y) + \delta g(y)$ , где  $\delta g(y)$  — бесконечно малая вариация функции  $g$ , отличная от нуля лишь при  $y^0 > t$ , то матрица  $S(g'')$  может быть представлена в виде

$$S(g'') = S(g) + \delta S(g),$$

причем

$$\delta S(g) = \int_{y^0 > t} \frac{\delta S}{\delta g(y)} \delta g(y) dy.$$

Теперь видно, что произведение

$$S(g'')\hat{S}^\dagger(g') = S(g)\hat{S}^\dagger(g) + \delta S(g)\hat{S}^\dagger(g) = 1 + \delta S(g)\hat{S}^\dagger(g)$$

не зависит от поведения функции  $g$  при  $x^0 < t < y^0$ .

Переходя к вариационной производной, мы можем поэтому сформулировать условие причинности как условие независимости выражения

$$H(y; g) = i \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \hat{S}^\dagger(g) \quad (15)$$

от поведения функции  $g(x)$  в точке  $x$  при  $x < y$ . По соображениям ковариантности отсюда также следует, что оператор (15) не может зависеть от поведения функции  $g(x)$  и при  $x \sim y$ .

Условие причинности, очевидно, можно записать в виде

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left( \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \hat{S}^\dagger(g) \right) = 0 \quad \text{при } x \lesssim y. \quad (16)$$

Это соотношение представляет собой формулировку принципа причинности в дифференциальной форме.

Мы имеем, таким образом, условия релятивистской ковариантности, унитарности и причинности, которые в совокупности представляют достаточное основание для построения S-матрицы.

## § 16. Аксиоматическая $S$ -матрица

**16.1. Разложение по степеням взаимодействия.** Теперь мы поставим задачу построения оператора  $S(g)$ , удовлетворяющего условиям ковариантности (15.8), унитарности (15.9) и причинности (15.16). При этом мы полностью отвлечемся от рассуждений § 14 и полученной там на основе уравнения Шредингера формулы (14.22).

Будем искать оператор  $S(g)$  в виде формального функционального ряда по степеням  $g$ :

$$S(g) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

в котором  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  являются операторными выражениями, зависящими от полных функций поля  $u(x_1), \dots, u(x_n)$  и их частных производных в целом, а не от частотных составляющих  $u^\pm$  по отдельности, причем фермиевские операторы поля входят в  $S_n$  лишь в четных комбинациях.

Операторные выражения такого типа будем называть полилокальными. Для двух полилокальных операторов  $A(x_1, \dots, x_n)$ ,  $B(y_1, \dots, y_m)$  имеет место следующее свойство:

$$[A(x_1, \dots, x_n), B(y_1, \dots, y_m)] = 0,$$

когда все  $x_i$  пространственноподобны каждому  $y_j$ .

В нашем случае условие

$$[S_n(x_1, \dots, x_n), S_m(y_1, \dots, y_m)] = 0 \quad (x_i \sim y_j) \quad (2)$$

имеет важный физический смысл. Если две функции  $g_1$  и  $g_2$  локализованы в таких пространственно-временных областях, что любая точка одной области пространственноподобна всем точкам другой области, то  $S(g_1)$  будет коммутировать с  $S(g_2)$ . Этим, в сущности, выражается тот факт (также являющийся проявлением принципа причинности), что сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света.

Возвращаясь к выражению (1), видим, что без ограничения общности  $S_n$  можно считать симметричными функциями своих аргументов  $x_1, \dots, x_n$ , так как весовые функции  $g(x_1), \dots, g(x_n)$  входят симметричным образом.

**16.2. Условия на  $S_n$ .** Для определения конкретного вида функций  $S_n$  следует подставить разложение (1) в условия (15.8), (15.9), (15.16). Условие ковариантности приводит к линейному условию

$$U_P S_n(x_1, \dots, x_n) \dot{U}_P^\dagger = S_n(Px_1, \dots, Px_n), \quad (3)$$

тогда как условие унитарности дает нелинейные соотношения

$$S_n(x_1, \dots, x_n) + \overset{\dagger}{S}_n(x_1, \dots, x_n) + \\ + \sum_k P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) S_k(x_1, \dots, x_k) \times \\ \times \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\overset{\dagger}{S}_n$  — эрмитово сопряженный оператор к  $S_n$ , а символ  $P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$  обозначает сумму по всем  $n!/k!(n-k)!$  разбиениям совокупности точек  $x_1, \dots, x_n$  на две совокупности  $k$  и  $n-k$  точек. При этом перестановки внутри каждой из совокупностей не учитываются, так как функции  $S_k$  симметричны по своим аргументам. Например,

$$P(x_1, x_2 | x_3) S_2(x_1, x_2) S_1(x_3) = S_2(x_1, x_2) S_1(x_3) + \\ + S_2(x_1, x_3) S_1(x_2) + S_2(x_2, x_3) S_1(x_1).$$

Результат использования условия причинности имеет вид

$$H_n(y; x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (5)$$

если хотя бы для одного  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )  $y \gtrsim x_j$ .

Здесь  $H_n$  — коэффициенты разложения оператора (15.15)

$$H(y; g) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int H_n(y; x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (6)$$

связанные с  $S_n$  нелинейными соотношениями

$$H_n(y; x_1, \dots, x_n) = i \sum_{0 \leq k \leq n} P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) \times \\ \times S_{k+1}(y; x_1, \dots, x_k) \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (7)$$

Условия (2) и (3) фиксируют общие свойства локальной коммутативности и ковариантности операторных функций  $S_n$ , а нелинейные условия (4) и (5) могут рассматриваться как рекуррентные соотношения, что позволяет получить схему последовательного определения функций  $S_n$  через «предыдущие»  $S_k$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ).

Рассмотрим в качестве исходной величину  $S_1(x)$ . Из условия унитарности (4) получаем, что

$$S_1(x) = i\mathcal{L}(x), \quad (8)$$

где  $\mathcal{L}$  — эрмитов оператор. Формула (3) при  $n=1$  дает условие ковариантности для  $\mathcal{L}$ , а формула (2) при  $n=m=1$  приводит к условию локальной коммутативности для  $\mathcal{L}$ :

$$[\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)] = 0 \quad (x \sim y). \quad (9)$$

Условие локальной коммутативности является частным случаем условия (2). Оно налагает существенные ограничения на

структуру оператора  $\mathcal{L}(x)$ . В аксиоматическом построении этот оператор играет роль лагранжиана взаимодействия. В силу условия (9)  $\mathcal{L}(x)$  должен зависеть от четного числа ферми-полей, причем каждое из полей должно входить в  $\mathcal{L}(x)$  в целом, а не своими отдельными частотными слагаемыми. Подобные операторные конструкции, зависящие от полей в точке  $x$ , в § 14.3 мы назвали локальными. Условие локальной коммутативности, таким образом, приводит к требованию локальности лагранжиана взаимодействия.

16.3. **Определение явного вида  $S_2$  и  $S_3$ .** Для определения  $S_2$  запишем условие причинности (5) при  $n=1$ :

$$S_2(x, y) + S_1(x) \dot{S}_1^\dagger(y) = S_2(x, y) + \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) = 0.$$

Таким образом,

$$S_2(x, y) = -\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \text{ при } x \gtrsim y.$$

В силу симметрии  $S_2$  имеем также

$$S_2(x, y) = -\mathcal{L}(y) \mathcal{L}(x) \text{ при } y \gtrsim x.$$

Области определений двух последних формул перекрываются при  $x \sim y$ . Требование их совместности приводит нас к условию локальной коммутативности (9). В то же время эти соотношения определяют  $S_2$  всюду, кроме точки  $x=y$ . Имеем

$$S_2(x, y) = i^2 T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y)).$$

Как видно, поведение  $S_2$  при совпадающих аргументах не определяется рекуррентными соотношениями. Поэтому можно написать

$$S_2(x, y) = i^2 T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y)) + i\Lambda_2(x, y). \quad (10)$$

Введенный здесь оператор  $\Lambda_2$  по определению обладает свойством

$$\Lambda_2(x, y) = 0 \text{ при } x \neq y \quad (11)$$

и потому называется *квазилокальным*. В более общем случае квазилокальный оператор, зависящий от  $n$  аргументов, определяется условием

$$\Lambda_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ всюду, за исключением точки} \\ x_1 = x_2 = \dots = x_n. \quad (12)$$

Подставляя (10) в условие унитарности (15.9), получаем, что оператор  $i\Lambda_2$  должен быть антиэрмитов, а  $\Lambda_2$  соответственно эрмитов:

$$\Lambda_2^\dagger(x, y) = \Lambda_2(x, y).$$

Таким образом, использованные аксиомы позволяют определить оператор  $S_2$  через оператор первого порядка  $S_1$  с точностью до квазилокального антиэрмитова оператора  $i\Lambda_2$ .

Как можно показать (см. Введение, § 21), такая ситуация оказывается типичной и для высших  $S_n$  ( $n \geq 3$ ). Так, например,

$$S_3(x, y, z) = i^3 T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(z)) + \\ + i^2 T(\mathcal{L}(x) \Lambda_2(y, z)) + i^2 T(\mathcal{L}(y) \Lambda_2(x, z)) + \\ + i^2 T(\mathcal{L}(z) \Lambda_2(x, y)) + i \Lambda_3(x, y, z), \quad (13)$$

где  $\Lambda_3$  — эрмитов квазилокальный оператор.

16.4. **Общий вид  $S(g)$ .** В общем случае  $S_n$  выражается суммой, состоящей из слагаемых трех различных типов. Это, во-первых,  $T$ -произведение от  $\mathcal{L}(x_1), \dots, \mathcal{L}(x_n)$ , затем сумма различных  $T$ -произведений от  $\mathcal{L}(x_j)$  и квазилокальных операторов  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}$  и, наконец, «новый» квазилокальный оператор  $\Lambda_n$ :

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2) \dots \mathcal{L}(x_n)) + \\ + \prod_T \{\mathcal{L}, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1}\} + i \Lambda_n(x_1, \dots, x_n), \quad (14)$$

Сравнивая формулы (8), (10), (13), (14) с разложением  $T$ -экспоненты, полученной ранее в § 14, видим, что выражение

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)),$$

соответствующее

$$S(g) = T \left[ \exp \left( i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx \right) \right], \quad (15)$$

и в пределе  $g \rightarrow 1$  — формуле (14.22), в которой оператор  $\mathcal{L}$  есть лагранжиан взаимодействия, является допустимым в смысле удовлетворения всем наложенным на  $S_n$  условиям. Оно, однако, *не является самым общим*. Для того чтобы получить выражения для  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , необходимо, кроме локального оператора  $\mathcal{L}(x)$ , задать цепочку квазилокальных операторов  $\Lambda_2(x_1, x_2), \dots, \Lambda_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Мы пришли к несколько странным на первый взгляд результатам. Для полного определения матрицы  $S(g)$  задания лагранжиана взаимодействия оказывается недостаточным, и необходимо задать еще бесконечную цепочку квазилокальных операторов  $\Lambda_n$ . Однако можно показать, что выражение для  $S(g)$  при  $\Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ , отличных от нуля, может быть приведено к виду

$$T \left( \exp \left( i \int \mathcal{L}(x; g) dx \right) \right), \quad (16)$$

в котором «лагранжиан»  $\mathcal{L}(x; g)$  определяется соотношением

$$\mathcal{L}(x; g) = \mathcal{L}(x) g(x) + \\ + \sum_{v \geq 1} \frac{1}{(v+1)!} \int \Lambda_{v+1}(x, x_1, \dots, x_v) g(x) g(x_1) \dots g(x_v) dx_1 \dots dx_v. \quad (17)$$

В силу квазилокального характера функций  $\Lambda_v$  все интегрирования здесь снимаются и  $\mathcal{L}(x; g)$  фактически зависит от функций поля

$u(x)$  в точке  $x$ , являясь поэтому локальным оператором. Кроме операторов поля  $u$  выражение  $\mathcal{L}(x; g)$  зависит также от функций  $g(x)$ , которые можно рассматривать как «классическое» поле. Следовательно, выражение (16) удовлетворяет всем наложенным на  $S(g)$  условиям и может рассматриваться как выражение для матрицы рассеяния. Разлагая (16) в ряд по степеням  $g$ , мы получим выражения (14) для  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющие всем необходимым условиям.

Переходя к физическому пределу  $g=1$ , получаем

$$S = S(1) = T \left( \exp \left( i \int \mathcal{L}(x; 1) dx \right) \right), \quad (18)$$

где

$$\mathcal{L}(x, 1) = \mathcal{L}(x) + \sum_v \frac{1}{(v+1)!} \int \Lambda_{v+1}(x, x_1, \dots, x_v) dx_1 \dots dx_v. \quad (19)$$

Следовательно, реальная матрица рассеяния  $S(1)$  полностью характеризуется лагранжианом взаимодействия системы  $\mathcal{L}(x; 1)$ , который в теории возмущений иногда представляется в виде ряда.

## § 17. Теоремы Вика

**17.1. Приведение к нормальной форме.** Прежде чем приступить к вычислению матричных элементов от  $S$ -матрицы, следует ознакомиться с рядом свойств алгебраического характера, которыми обладают операторные выражения, построенные из квантовых свободных полей.

Ввиду очевидного удобства нормальной формы представления операторных выражений для последующего вычисления матричных элементов приобретает важность вопрос о соответствующей методике приведения к нормальной форме.

В первую очередь мы рассмотрим технику приведения для обычных произведений (первая теорема Вика), а затем для хронологических произведений (вторая теорема Вика), встречающихся в матрице рассеяния.

Ясно, что для приведения к нормальной форме операторных выражений, полиномиально зависящих от полевых операторов, достаточно уметь приводить произведения типа  $A_1(x_1) \dots A_n(x_n)$ , в которых  $A(x)$  будут «линейными операторами», т. е. линейными комбинациями соответствующих  $u^+(x)$ ,  $u^-(x)$ .

В каждом данном случае непосредственное преобразование такого произведения не представляет принципиальных затруднений. Для этого совершенно достаточно последовательно перемещать  $u^+$  налево, а  $u^-$  направо и при каждой «передвижке» использовать перестановочные соотношения. Тем не менее ввиду большого числа получающихся при этом членов уже при сравнительно малых  $n$  целесообразно иметь рецептуру для возможно

более автоматического выполнения операции приведения к нормальной форме.

Такая рецептура вытекает из одной важной теоремы, установленной Виком, к формулировке которой мы сейчас и перейдем.

**17.2. Первая теорема Вика.** Пусть мы имеем произведение двух линейных операторов  $A(x)B(y)$ . В этом случае для приведения к нормальной форме, очевидно, достаточно одна передвижка операторов  $u^-(x)$ ,  $u^+(y)$ , и потому в результате получатся члены с «правильным порядком» следования положительно- и отрицательно-частотных частей волновых функций и вклад от перестановочных функций, уже не включающий операторных выражений.

Таким образом, рассматриваемое произведение может отличаться от нормального произведения  $:A(x)B(y):$  лишь на  $s$ -выражение (ср. выкладку в § 8.2), которое будем называть *спариванием* и обозначать с помощью скобок снизу:

$$A(x)B(y) = :A(x)B(y): + \underline{A(x)B(y)}. \quad (1)$$

Поскольку вакуумное среднее от нормального произведения всегда равно нулю, мы можем также определить спаривание как вакуумное среднее от обычного произведения:

$$\underline{A(x)B(y)} = \langle A(x)B(y) \rangle_0. \quad (2)$$

Рассмотрим в качестве примера вещественное скалярное поле. Исходя из перестановочных соотношений для частотных частей

$$\varphi^-(x)\varphi^+(y) - \varphi^+(y)\varphi^-(x) = -iD^-(x-y),$$

получим

$$\varphi(x)\varphi(y) = :\varphi(x)\varphi(y): - iD^-(x-y). \quad (3)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \underline{\varphi(x)\varphi(y)} &= \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle_0 = \underline{\varphi^-(x)\varphi^+(y)} = -iD^-(x-y), \\ \underline{\varphi^+(x)\varphi^-(y)} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично для случая электромагнитного поля найдем

$$\underline{A_\nu(x)A_\mu(y)} = \langle A_\nu(x)A_\mu(y) \rangle_0 = ig_{\nu\mu}D_0^-(x-y). \quad (5)$$

Рассмотрим еще поле фермионов, для которого

$$\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta^+(y) = -\bar{\psi}_\beta^+(y)\psi_\alpha^-(x) - iS_{\alpha\beta}^-(x-y), \quad (6)$$

и потому

$$\underline{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = -iS_{\alpha\beta}^-(x-y), \quad (7)$$

а также

$$\underline{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = -iS_{\beta\alpha}^+(y-x) \quad (8)$$

и

$$\underline{\psi(x)} \underline{\psi(y)} = \overline{\psi(x)} \overline{\psi(y)} = 0. \quad (9)$$

Для того чтобы сформулировать теорему Вика, нам понадобится также понятие *нормального произведения со спариванием*, которое мы определим следующим образом:

$$\begin{aligned} :A_1(x_1) A_2(x_2) \dots A_j(x_j) \dots A_i(x_i) \dots A_n(x_n): & \equiv \\ \equiv \eta \underline{A_j(x_j)} A_i(x_i) : A_1(x_1) \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_n : & , \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\eta = (-1)^p$ , а  $p$  — четность ферми-перестановок при переходе от порядка  $1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n$  к порядку  $j, i, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ .

Совершенно аналогично определим и нормальное произведение с любым числом спариваний. Именно, выражение

$$: \underline{A_1(x_1) A_2(x_2) A_3(x_3) \dots A_k(x_k) \dots A_{n-1}(x_{n-1}) A_n(x_n)} :$$

будем считать равным произведению всех имеющихся спариваний на нормальное произведение операторов, оставшихся неспаренными, и на число  $\eta = (-1)^p$ , т. е. выражению

$$\eta \underline{A_1 A_k} \underline{A_2 A_{n-1}} : A_3 \dots A_{k-1} A_{k+1} A_{n-2} \dots A_n :$$

где  $p$  — четность перестановок, которым подвергаются ферми-операторы в процессе вынесения спариваний за знак нормального произведения.

Так, например,

$$\begin{aligned} : \underline{\overline{\psi}_\alpha(x) \overline{\psi}_\beta(y) \psi_\gamma(z) \psi_\delta(t)} : & = - \overline{\psi}_\alpha(x) \psi_\gamma(z) \overline{\psi}_\beta(y) \psi_\delta(t) = \\ & = S_{\gamma\alpha}^+(z-x) S_{\delta\beta}^+(t-y). \end{aligned}$$

Из этого определения вытекает сразу же, что нормальное произведение со спариваниями обладает свойством линейности по отношению к своим сомножителям и что при их перестановке под знаком такого произведения оно умножается на  $\eta = (-1)^p$  где  $p$  — четность перестановок ферми-операторов.

Мы можем теперь дать простую формулировку первой теоремы Вика. Согласно этой теореме

обычное произведение линейных операторов равняется сумме всех соответствующих нормальных произведений со всевозможными спариваниями, включая нормальное произведение без спариваний:

$$\begin{aligned} A_1 \dots A_n = :A_1 \dots A_n: & + \sum_{i \neq j} :A_1 \dots \underline{A_i \dots A_j} \dots A_n: + \\ & + \sum_{i, j, k, l} :A_1 \dots \underline{A_i \dots A_j \dots A_k \dots A_l} \dots A_n: + \dots \end{aligned} \quad (11)$$



Нетрудно видеть, что эта теорема приложима и к случаю, когда некоторые из сомножителей входят со знаками нормальных произведений

$$A_1 \dots A_\nu : A_{\nu+1} \dots A_\mu : \dots A_k \dots : A_\rho \dots A_n :$$

В этом случае она формулируется точно так же, как и для «чистого» произведения  $A_1 \dots A_n$ , с тем очевидным отличием, что теперь не надо принимать во внимание спариваний между множителями, принадлежащими к одному и тому же нормальному произведению. Например, не должны учитываться спаривания между  $A_{\nu+1}, \dots, A_\mu$ , спаривания между  $A_\rho, \dots, A_n$  и т. д.

**17.3. Хронологические спаривания.** При вычислении матричных элементов матрицы рассеяния нам придется иметь дело с хронологическими произведениями лагранжианов. Для этого нам потребуется выражать  $T$ -произведения локальных операторных выражений через нормальные произведения соответствующих операторов свободных полей.

Рецепт процедуры приведения хронологических произведений дает теорема Вика для  $T$ -произведений, являющаяся аналогом теоремы Вика для обычных произведений. Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, введем важное понятие хронологического спаривания операторов.

Рассмотрим с этой целью формулу (14.19) для случая двух операторов поля:

$$T(u_1(x) u_2(y)) = \begin{cases} u_1(x) u_2(y), & x^0 > y^0, \\ \eta u_2(y) u_1(x), & y^0 > x^0. \end{cases}$$

Правая часть в соответствии с определением обычного спаривания (1) может быть преобразована к виду

$$T(u_1(x) u_2(y)) = \begin{cases} :u_1(x) u_2(y): + \overline{u_1(x) u_2(y)}, & x^0 > y^0, \\ :u_1(x) u_2(y): + \eta \overline{u_2(y) u_1(x)}, & y^0 > x^0. \end{cases} \quad (12)$$

Отсюда видно, что в любом случае  $T(u_1(x) u_2(y))$  отличается от  $:u_1(x) u_2(y):$  на  $c$ -число, которое мы назовем *хронологическим спариванием* операторов  $u_1$  и  $u_2$ , т. е. по определению

$$T(u_1(x) u_2(y)) = :u_1(x) u_2(y): + \overline{u_1(x) u_2(y)} \quad (13)$$

и

$$\overline{u_1(x) u_2(y)} = \begin{cases} \overline{u_1(x) u_2(y)}, & x^0 > y^0, \\ \eta \overline{u_2(y) u_1(x)}, & y^0 > x^0. \end{cases} \quad (14)$$

Отметим прежде всего важную особенность хронологического спаривания. Под знаком хронологического спаривания можно изменять порядок сомножителей, точно так же, как и под знаком

нормального произведения:

$$\overline{u_1(x) u_2(y)} = \overline{u_2(y) u_1(x)},$$

что непосредственно следует из (14).

Определим хронологические спаривания для операторов основных волновых полей. Заметим для этого, что, вычисляя вакуумное среднее от (13) с учетом основного свойства нормального произведения и нормированности амплитуды вакуума, мы получим

$$\langle T(u_1(x) u_2(y)) \rangle_0 = \overline{u_1(x) u_2(y)}. \quad (15)$$

Таким образом, хронологическое спаривание двух операторов равно вакуумному среднему от  $T$ -произведения этих операторов. Имеем в частных случаях:

для скалярного поля

$$\overline{i\varphi(x) \varphi(y)} = i \langle T\varphi(x) \varphi(y) \rangle_0 = \theta(x^0 - y^0) D^-(x - y) - \theta(y^0 - x^0) D^+(x - y), \quad (16)$$

для электромагнитного поля

$$\overline{iA_\nu(x) \bar{A}_\mu(y)} = i \langle T A_\nu(x) A_\mu(y) \rangle_0 = -g_{\nu\mu} \theta(x^0 - y^0) D_0^-(x - y) + g_{\nu\mu} \theta(y^0 - x^0) D_0^+(x - y); \quad (17)$$

для спинорного

$$\overline{i\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)} = i \langle T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle_0 = \theta(x^0 - y^0) S_{\alpha\beta}^-(x - y) - \theta(y^0 - x^0) S_{\alpha\beta}^+(x - y) \quad (18)$$

и т. д. (определение функции  $\theta$  см. (ДV. 3)).

Как будет установлено ниже в § 18.2, правые части этих соотношений являются решениями соответствующих неоднородных уравнений поля, т. е. представляют собой функции Грина.

Отметим сейчас, что эти правые части соотношений типа (14) были определены лишь для  $x^0 > y^0$  и  $x^0 < y^0$ . Из установленного выше свойства ковариантности  $T$ -произведений вытекает теперь, что они определены всюду, кроме случая  $x = y$ . Правила же интеграции этих выражений в бесконечно малой окрестности точки  $x = y$  можно фиксировать произвольно. Так, например, можно добавить к правой части каждого из них любую коэффициентную функцию квазилокального оператора  $P(\partial_x) \delta(x - y)$ , где  $P(\partial_x)$  — какой-либо полином по  $\partial_x = \partial/\partial x$ . Эта необходимость дополнительного определения спаривания в бесконечно малой окрестности точки  $x = y$  является частным следствием произвола, содержащегося в  $T$ -произведении. В самом деле,  $T$ -произведения заданы формальным определением (14.20) и (12) лишь при несовпадающих значениях своих аргументов.

**17.4. Вторая теорема Вика.** Эта теорема для хронологических произведений состоит в утверждении, что  $T$ -произведение  $n$  линейных операторов равно сумме их

нормальных произведений со всеми возможными хронологическими спариваниями (включая член без спариваний).

Доказательство сводится практически к доказательству теоремы Вика для обычных произведений. В самом деле, согласно определению (14.20)  $T$ -произведение всегда равно некоторому обычному произведению

$$T(A_1(x_1) \dots A_n(x_n)) = \eta A_{j_1}(x_{j_1}) \dots A_{j_n}(x_{j_n}).$$

Применяя к этому произведению первую теорему Вика, видим, что оно равно сумме нормальных произведений операторов  $A_{j_1}, \dots, A_{j_n}$  со всеми возможными обычными спариваниями. Но так как порядок следования  $A_{j_1}, \dots, A_{j_n}$  является хронологически правильным, то обычные спаривания совпадают с хронологическими, т. е. данное  $T$ -произведение равно умноженной на  $\eta$  сумме нормальных произведений операторов  $A_{j_1}, \dots, A_{j_n}$  со всеми возможными хронологическими спариваниями.

Как уже отмечалось, под знаком хронологического спаривания, как и под знаком нормального произведения, операторы можно переставлять (с учетом изменения знака). Тем самым под знаком нормальных произведений со всевозможными хронологическими спариваниями можно восстановить нормальный порядок сомножителей  $1, 2, \dots$ , опустив одновременно множитель  $\eta$ . Теорема доказана.

Введем теперь в рассмотрение  $T$ -произведение нескольких нормальных произведений линейных операторов поля:

$$T(:A_1(x) A_2(x) \dots A_n(x): \dots :D_1(z) \dots D_m(z):). \quad (19)$$

Именно такие  $T$ -произведения встречаются при раскрытии  $T$ -произведений локальных операторов, так как по определению локальный оператор  $\mathcal{L}(x)$  представляется линейной комбинацией членов типа  $:A_1(x) A_2(x) \dots A_n(x):$ .

Для  $T$ -произведений вида (19) формулировка второй теоремы Вика имеет лишь ту особенность, что не должны учитываться хронологические спаривания операторов, входящих в одно и то же нормальное произведение.

**17.5. Третья теорема Вика.** В приложениях оказывается полезным предложение, утверждающее, что

вакуумное ожидание от хронологического произведения  $n + 1$  линейных операторов  $A, B_1, \dots, B_n$  равно сумме  $n$  вакуумных ожиданий тех же хронологических произведений со всеми

возможными спариваниями одного из этих операторов (например,  $A$ ) со всеми остальными, т. е.

$$\langle TAB_1 \dots B_n \rangle_0 = \sum_i \langle \overline{TAB_1 \dots B_i} \dots B_n \rangle_0. \quad (20)$$

Это предложение можно назвать *теоремой Вика для вакуумных ожиданий* или третьей теоремой Вика.

Обратим внимание на то, что в правой части (20), в отличие от двух первых теорем Вика, не содержится выражений с числом спариваний, большим единицы.

Тем не менее справедливость (20) непосредственно вытекает из второй теоремы Вика. Ввиду исчезновения вакуумного ожидания нормального произведения любого, отличного от нуля числа неспаренных операторов, левая часть (20) равна сумме всех возможных вариантов «полных взаимных спариваний» внутри произведения операторов

$$AB_1 \dots B_n, \quad (21)$$

т. е. спариваний, где спарены друг с другом все операторы. Совершенно аналогично любой из членов суммы в правой части (20), например первый, может быть представлен в виде

$$\overline{AB_1} \langle TB_2 B_3 \dots B_n \rangle_0$$

и равен произведению спаривания  $\overline{AB_1}$  на сумму всех возможных полных спариваний операторов  $B_2, \dots, B_n$ .

Выполняя суммирование по  $i$  в правой части (20), получаем сумму всех возможных полных спариваний операторов (21). Тем самым третья теорема Вика доказана.

## Глава V. ДИАГРАММЫ И ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА

### § 18. Функция Грина свободных полей

В конце предыдущей главы было установлено, что операторные слагаемые  $S$ -матрицы с помощью второй теоремы Вика сводятся к нормальным произведениям с хронологическими спариваниями. Как можно показать, эти последние являются функциями Грина свободных полей.

**18.1. Функция Грина скалярного поля.** Покажем прежде всего, что хронологическое спаривание операторов скалярного поля выражается через функцию Грина специального вида уравнения скалярного поля.

Функцию Грина скалярного поля  $G$  определим как решение неоднородного уравнения Клейна — Гордона

$$(\square_x - m^2) G(x) = -\delta(x). \quad (1)$$

Здесь и ниже знак перед  $\delta$ -функцией в правой части уравнений для функций Грина для определенности будем полагать равным знаку перед массовым членом в левой части.

С помощью фурье-преобразования получаем для  $G$  следующее формальное выражение:

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2} dk. \quad (2)$$

Это выражение является неопределенным, поскольку не заданы правила обхода полюсов  $k^2 = m^2$ . Неопределенность отражает тот факт, что полное решение уравнения (1) представляется в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и решений  $D^+$  и  $D^-$  однородного уравнения, взятых с произвольными коэффициентами. Задание правил обхода двух полюсов при  $k^2 = m^2$  или наложение на  $G$  граничных условий однозначно определяет эти коэффициенты.

Покажем это для запаздывающей функции Грина, удовлетворяющей граничному условию

$$D^{\text{ret}}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0. \quad (3)$$

Чтобы представить ее в виде, близком к (2), заметим, что при умножении этой функции на  $\exp(-\varepsilon x^0)$ , где  $\varepsilon > 0$ , в силу (3) она не приобретает каких-либо дополнительных особенностей:

$$D^{\text{ret}}(x) e^{-\varepsilon x^0} = G_\varepsilon(x),$$

вследствие чего ее можно представить как предел

$$D^{\text{ret}}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(x). \quad (4)$$

Согласно определению функция  $G_\varepsilon$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \Delta - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \right)^2 - m^2 \right\} G_\varepsilon(x) = -\delta(x)$$

и потому в импульсном представлении в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  принимает вид

$$\frac{1}{m^2 - (k^0 + i\varepsilon)^2 + k^2} \rightarrow \frac{1}{m^2 - k^2 - 2i\varepsilon k^0}.$$

Таким образом, в соответствии с (4) запаздывающая функция Грина может быть представлена следующим образом:

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - 2i\varepsilon k^0} dk. \quad (5)$$



Рис. 18.1. Путь интегрирования в комплексной плоскости переменной  $k^0$  для функции  $D^{\text{ret}}$ .

Не составляет труда убедиться, что выражение (5) удовлетворяет условию (3). Для этого достаточно выполнить в явном виде интегрирование по переменной  $k^0$  с помощью теории вычетов. Бесконечно малая добавка в знаменателе указывает, что оба полюса в комплексной плоскости переменной  $k^0$  должны быть обойдены сверху (рис. 18.1).

Поэтому при  $x^0 < 0$ , когда контур интегрирования может быть замкнут в верхней полуплоскости полукругом большого радиуса, внутри него не оказывается полюсов, и мы получаем нуль. При  $x^0 > 0$  контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости. Вычисляя вычеты, находим в этом случае

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int \frac{e^{ik_0 x^0} - e^{-ik_0 x^0}}{2k_0} \Big|_{k_0 = \sqrt{k^2 + m^2}} e^{-ikx} dk = D(x).$$

Поэтому

$$D^{\text{ret}}(x) = \theta(x^0) D(x). \quad (6)$$

Аналогичным образом можно показать, что опережающая функция Грина, определяемая условием

$$D^{\text{adv}}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^0 > 0,$$

и удовлетворяющая уравнению (1), имеет вид

$$D^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikh} dk}{m^2 - k^2 + 2iek^0} = -\theta(-x^0) D(x). \quad (7)$$

**18.2. Причинная функция Грина**  $D^c$  в квантовой теории поля играет исключительно важную роль. Она отвечает правой части (17.16), при  $x^0 > y^0$  пропорциональна  $D^-(x-y)$ , а при  $x^0 < y^0$  — функции  $D^+(x-y)$ .

Не составляет труда убедиться, что эта правая часть может быть представлена в виде разности

$$\theta(x^0) D^-(x) - \theta(-x^0) D^+(x) = D^{\text{ret}}(x) - D^+(x)$$

решения неоднородного уравнения  $D^{\text{ret}}$  и однородного уравнения  $D^+$  и, следовательно, удовлетворяет тому же уравнению (1), что и  $D^{\text{ret}}$ .

Положим поэтому

$$D^c(x) = \theta(x^0) D^-(x) - \theta(-x^0) D^+(x). \quad (8)$$

Чтобы получить для причинной функции Грина  $D^c$  выражение в импульсном представлении, заметим, что разность  $D^{\text{ret}} - D^+$  может быть в этом представлении записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2 - k^2 - 2iek^0} + 2\pi i \theta(-k^0) \delta(k^2 - m^2) &= \\ &= \frac{\mathcal{P}}{m^2 - k^2} + i\pi \delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon}, \end{aligned}$$

что дает

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikh}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} dk \quad (9)$$

(здесь  $\mathcal{P}$  — символ главного значения — см. (DV.6) — (DV.8)).

Поскольку перестановочные функции электромагнитного, спинорного и векторного полей могут быть получены из функции Паули — Йордана с помощью дифференциальных соотношений, то причинные функции этих полей выражаются через  $D^c(x)$  теми же самыми соотношениями:

$$\begin{aligned} D_0^c(x) &= D^c(x)|_{m=0}, \quad S_{\alpha\beta}^c(x) = (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} D^c(x), \\ D_{\mu\nu}^c(x) &= \left( g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) D^c(x), \end{aligned} \quad (10)$$

причем, например,

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^c(x) &= \theta(x^0) S^-(x) - \theta(-x^0) S^+(x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(m + \hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} e^{-ipx} dp. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь мы можем вернуться к вопросу о доопределении хронологических сшиваний в точке  $x=y$ . Условимся считать, что

если при  $x \neq y$  хронологическое спаривание совпадает с некоторой причинной функцией Грина, то оно совпадает с этой функцией и в бесконечно малой окрестности точки  $x = y$ . Иными словами: для скалярного поля

$$\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = \langle T\varphi(x)\varphi(y) \rangle_0 = \frac{1}{i} D^c(x-y), \quad (12)$$

для электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \overline{A_\nu(x)A_\mu(y)} &= \langle TA_\nu(x)A_\mu(y) \rangle_0 = \\ &= i g_{\nu\mu} D_0^c(x-y) = \frac{g_{\nu\mu}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} dk, \end{aligned} \quad (13)$$

для векторного поля

$$\begin{aligned} \overline{U_\nu(x)U_\mu(y)} &= \langle TU_\nu(x)U_\mu(y) \rangle_0 = i D_{\nu\mu}^c(x-y) = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{g_{\nu\mu} - k_\nu k_\mu / m^2}{m^2 - k^2 - i\epsilon} e^{ik(x-y)} dk, \end{aligned} \quad (14)$$

для спинорного поля

$$\begin{aligned} \overline{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} &= \langle T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \rangle_0 = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^c(x-y) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{(m + \hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)} dp. \end{aligned} \quad (15)$$

**18.3. Особенности на световом конусе.** Полученные функции Грина, равно как и перестановочные функции соответствующих полей, могут быть выражены в явном виде через цилиндрические функции и сингулярные (обобщенные) функции типа  $\delta(x^2)$ ,  $\theta(x^0)$  и т. д.

Опуская соответствующие выкладки, приведем выражения для функций скалярного поля.

Перестановочная функция Паули — Йордана —

$$D(x) = \frac{\epsilon(x^0)\delta(\lambda)}{2\pi} - \frac{m}{4\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)\epsilon(x^0)J_1(m\sqrt{\lambda}). \quad (16)$$

Здесь  $\lambda = x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2$ , а  $\epsilon$  и  $\theta$  — известные разрывные функции. Из формулы (16) непосредственно вытекает важнейшее свойство перестановочной функции — она равна нулю вне светового конуса:

$$D(x) = 0, \quad x^2 < 0. \quad (17)$$

Частотные части  $D$ -функции имеют вид

$$\begin{aligned} D^\pm(x) &= \frac{\epsilon(x^0)\delta(\lambda)}{4\pi} - \frac{m\theta(\lambda)}{8\pi\sqrt{\lambda}} [ \epsilon(x^0)J_1(m\sqrt{\lambda}) \pm \\ &\pm iN_1(m\sqrt{\lambda}) ] \mp \frac{\theta(-\lambda)mi}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}} K_1(m\sqrt{-\lambda}). \end{aligned} \quad (18)$$



Здесь  $J_1$ ,  $N_1$  и  $K_1$  — функции Бесселя, Неймана и Ханкеля от мнимого аргумента. В окрестности нуля они имеют следующие разложения:

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} + O(z^5), \\ \frac{\pi}{2} N_1(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left( \ln \frac{z}{2} + 1 \right) + O(z^3), \\ K_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left( \ln \frac{z}{2} + 1 \right) + O(z^3). \end{aligned}$$

Причинная функция Грина —

$$D^c(x) = \frac{mi}{4\pi^2} \frac{K_1(m\sqrt{-\lambda+i\delta})}{\sqrt{-\lambda+i\delta}}, \quad (19)$$

причем

$$\sqrt{-\lambda+i\delta} = i\sqrt{\lambda} \quad \text{при } \lambda > 0.$$

Запаздывающая функция Грина —

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{\theta(x^0)\delta(\lambda)}{2\pi} - \frac{m\theta(x^0)\theta(\lambda)}{4\pi\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}). \quad (20)$$

Из приведенных формул следует, что в  $x$ -представлении все особенности функций  $D$ ,  $D^\pm$ ,  $D^c$  и  $D^{\text{ret}}$  сосредоточены только в окрестности светового конуса. Например:

$$D(x) \simeq \frac{\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)}{2\pi} - \frac{m^2\varepsilon(x^0)\theta(\lambda)}{8\pi} + O(\lambda), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D^c(x) \simeq \frac{\delta(\lambda)}{4\pi} + \frac{1}{4\pi^2 i \lambda} - \frac{m^2}{16\pi} \theta(\lambda) + \\ + \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} + O(|\lambda|^{1/2} \ln |\lambda|). \end{aligned} \quad (22)$$

Полученные выражения имеют особенности четырех типов: полюс  $1/\lambda$ ,  $\ln|\lambda|$ ,  $\delta(\lambda)$  и скачок  $\theta(\lambda)$ . Множители  $\varepsilon(x^0)$  и  $\theta(x^0)$  в отдельных слагаемых не создают дополнительных особенностей вне светового конуса благодаря тому, что стоят вместе с  $\delta(\lambda)$  или  $\theta(\lambda)$ . Они проявляются лишь в начале координат.

Имея в виду дальнейшие нужды, отметим, что функции скалярного и векторного полей обладают структурой

$$D_{\text{скал, вект}}(x) = m^2 F \left( m^2 \lambda, \frac{x^0}{|x^0|} \right), \quad (23)$$

а функции спинорного поля

$$S_{\text{спин}}(x) = m^3 \tilde{F} \left( m^2 \lambda, \frac{x^0}{|x^0|} \right). \quad (24)$$

В силу этого, например, особенности типа  $\delta(\lambda)$  и  $\lambda^{-1}$  в (23) сопровождаются множителями, не зависящими от массы  $m$ , а особенности  $\ln|\lambda|$  и  $\theta(\lambda)$  — содержащими  $m^2$ .

Таким образом, перестановочные и причинные функции квантовых полей представляют собой сингулярные функции, содержащие сильные особенности на световом конусе.

С математической точки зрения такие функции принадлежат к классу несобственных, или *обобщенных* функций. В отличие от обычных функций, обобщенные функции определяются не путем установления соответствия между значениями функции и значениями ее аргумента, а заданием правил интеграции произведений их с достаточно регулярными функциями. Например,  $\delta$ -функция характеризуется правилом интеграции ее произведения с непрерывными функциями, производные  $\delta$ -функции — правилами интеграции их с соответственно дифференцируемыми функциями и т. п.

Иначе говоря, несобственная функция определяется заданием соответствующего линейного функционала в подходящем «линейном пространстве» достаточно регулярных функций. Не имея возможности вдаваться в сколько-нибудь подробное обсуждение свойств обобщенных функций (см. с этой целью Введение, гл. III и книгу Владимирова (1976)) отметим лишь проблему умножения обобщенных функций друг на друга. Дело в том, что обобщенная функция задается установлением правил ее интеграции лишь с достаточно регулярными функциями, а из таких правил рецептура интеграции произведения нескольких обобщенных функций непосредственно не вытекает.

## § 19. Диаграммы Фейнмана

**19.1. Коэффициентные функции.** Обсудим математическую природу коэффициентных функций матрицы рассеяния, т. е. функций, стоящих множителями при нормальных произведениях операторов. Эти функции очевидным образом входят в матричные элементы  $S$ -матрицы, которые мы рассмотрим в следующем параграфе. Они могут быть получены с помощью второй теоремы Вика и записаны в виде

$$K(x_1, \dots, x_n) = \prod_{r, s} D_{\alpha\beta}^c(x_r - x_s), \quad (1)$$

где  $x_r$  и  $x_s$  пробегает множество значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . (Имеется в виду коэффициентная функция для  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ .) Как было установлено в § 18, сомножители правой части (1) являются обобщенными функциями.

Проблема умножения сингулярных причинных функций Грина является главной трудностью квантовой теории поля. Эта трудность, именуемая проблемой ультрафиолетовых расходимостей,

на два десятилетия затормозила развитие теории частиц и была преодолена в конце 40-х годов созданием теории перенормировок. Мы вернемся к этому вопросу в следующей главе, а пока будем иметь в виду, что выражения вида (1), как правило, определены чисто формально.

Обратимся теперь к разработке удобной рецептуры получения отдельных слагаемых в суммах, составляющих операторные выражения  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ . Такие слагаемые представляются произведением коэффициентной функции вида (1) на нормальное произведение оставшихся неспаренными операторов:

$$K(x_1, \dots, x_n): \dots u_k(x_k) \dots u_j(x_j) \dots \quad (2)$$

Построение конкретной функции  $K$ , соответствующей данному порядку спаривания операторов, может быть выполнено с помощью диаграмм и правил Фейнмана.

**19.2. Графическое изображение  $S_n$ .** В соответствии со второй теоремой Вика операторные функции  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  представляются суммой членов, каждый из которых является произведением некоторого числа спариваний операторных функций поля на нормальное произведение оставшихся неспаренными операторов свободных полей.

Каждому такому члену может быть поставлено в соответствие графическое изображение, составленное по очень простым правилам. Это изображение, именуемое *диаграммой Фейнмана*, содержит, во-первых,  $n$  точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — вершин диаграммы, описывающих аргументы оператора  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ . Каждому из спариваний соответствует линия, соединяющая соответствующие вершины:

$$\overline{u_i(x_i) u_j(x_j)} \sim \begin{array}{c} \bullet \text{-----} \bullet \\ x_i \qquad \qquad x_j \end{array} \cdot$$

Каждому неспаренному оператору ставится в соответствие линия, выходящая из данной вершины и идущая к краю диаграммы (линия со свободным концом):

$$: \dots u_k(x_k) \dots : \sim \begin{array}{c} \bullet \text{-----} \\ x_k \end{array} \cdot$$

Численные и матричные множители из лагранжиана  $\mathcal{L}(x_i)$  приписываются соответствующей вершине.

Очевидно, что в результате каждая вершина с топологической точки зрения будет характеризоваться полным набором выходящих из (или, если угодно, входящих в) нее линий, каждая из которых соответствует одному из операторов, стоящих в данном лагранжиане взаимодействия.

Так, для лагранжиана взаимодействия спинорной электродинамики имеем

$$e: \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x) A_\nu(x) : \sim \begin{array}{c} \text{---} \psi(x) \text{---} \\ \text{---} \bar{\psi}(x) \text{---} \\ \text{---} A_\nu(x) \text{---} \end{array} \quad (3)$$

Для того чтобы отличать различные поля, операторам электромагнитного поля ставится в соответствие волнистая линия, а операторам поля Дирака — сплошная. При этом спинору  $\psi(x)$  отвечает линия, входящая в точку  $x$ , а сопряженному спинору  $\bar{\psi}(x)$  — выходящая. Спинорные линии таким образом (в отличие от электромагнитных) являются направленными.

Графический элемент (3) представляет собой как бы наглядное изображение акта испускания (или поглощения) фотона электроном (или позитроном).

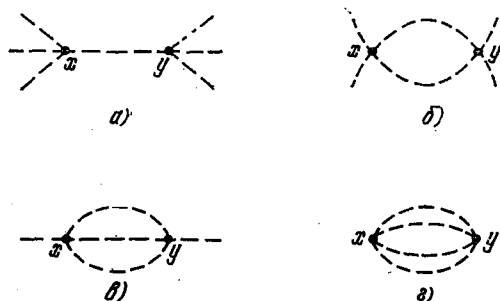


Рис. 19.1. Диаграммы второго порядка в модели  $\varphi^4$ .

Более простой пример дает модель скалярного поля с четверным взаимодействием  $\hbar\varphi^4$ . Такому лагранжиану взаимодействия отвечает вершина с четырьмя одинаковыми линиями:

$$\hbar: \varphi^4(x) : \sim \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} x \quad (4)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим член  $S_2$  для этой модели:

$$S_2(x, y) = i^2 \hbar^2 T \{ : \varphi^4(x) : : \varphi^4(y) : \} = i^2 \hbar^2 : \varphi^4(x) \varphi^4(y) : + \\ + 16i^2 \hbar^2 \overline{\varphi(x) \varphi(y)} : \varphi^3(x) \varphi^3(y) : + 72i^2 \hbar^2 [\overline{\varphi(x) \varphi(y)}]^2 : \varphi^2(x) \varphi^2(y) : + \\ + 96i^2 \hbar^2 \overline{[\varphi(x) \varphi(y)]^3} : \varphi(x) \varphi(y) : + 24i^2 \hbar^2 [\overline{\varphi(x) \varphi(y)}]^4.$$

Соответствующие диаграммы изображены на рис. 19.1. В более общем случае  $n > 2$  мы получим набор диаграмм с  $n$  вершинами, содержащих различные комбинации внутренних и внешних линий.

Внешние линии диаграмм имеют простой смысл. Так, диаграмма рис. 19.1, б содержит четыре свободные (внешние) линии, что отвечает как раз четырем неспаренным операторам, стоящим под знаком нормального произведения. Соответствующие слагаемые  $S$ -матрицы дают вклад в матричный элемент переходов  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 2$ . Поэтому внешние линии можно считать наглядным изображением движения начальных и конечных частиц.

Внутренние линии соответствуют виртуальным частицам.

**19.3. Спинорная электродинамика.** Более сложные случаи описывают взаимодействия различных полей, обладающих матричной структурой. Обратимся к спинорной электродинамике — см. (3). В этом случае операторное выражение  $S_n$  будет иметь следующий вид:

$$K_{\dots\nu\dots}(x_1, \dots, x_n) \dots \bar{\psi}(x_k) \dots A^\nu(x_l) \dots \psi(x_m) \dots \dots \quad (5)$$

Как видно отсюда,  $S$ -матрица переводит состояние  $|\alpha\rangle$  с данным фиксированным набором квантов электромагнитного и спинорного полей в состояния с другими наборами. Обращаясь к формуле (8.21), видим, что если начальное состояние  $|\alpha\rangle$  является физическим, т. е. временные и продольные кванты в нем либо отсутствуют, либо входят в определенных комбинациях, соответствующих формуле (8.20), то и конечные состояния  $|\beta\rangle$  будут физическими.

Отсюда, в частности, вытекает, что соотношения типа условия унитарности (15.9') можно писать в виде

$$\sum_{\tilde{\gamma}} S_{\beta\tilde{\gamma}} \tilde{S}_{\tilde{\gamma}\alpha}^\dagger = I_{\beta\alpha},$$

где суммирование в левой части распространяется на состояния, содержащие лишь физические составляющие электромагнитного поля. Напомним, что причина этого свойства связана с тем, что, как подчеркивалось в § 4.3, продольная степень свободы  $\chi(x)$  не связана ни с поперечными  $A^{\text{tr}}$ , ни с другими полями (в данном случае с полем  $\psi, \bar{\psi}$ ).

Коэффициентная функция  $K_{\dots\nu\dots}(\dots x \dots)$  из формулы (5) является произведением хронологических спариваний двух типов, которые условимся изображать различными графическими символами

$$\overbrace{A_\nu(x) A_\mu(y)} \sim \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} x \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ y \end{array}, \quad (6)$$

$$\overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} \sim \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} x \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ y \end{array}. \quad (7)$$

Стрелка в изображении второго спаривания помещена для того, чтобы различать между собой выражения  $\overline{\psi(x)}\overline{\psi(y)}$  и  $\overline{\psi(y)}\overline{\psi(x)}$ .

Для неспаренных операторов, стоящих под знаком нормального произведения, положим

$$\begin{aligned} A_\nu(x) &\sim x \cdot \text{wavy line} \text{ pointing right}, \\ \psi(y) &\sim y \cdot \text{arrow pointing left}, \\ \overline{\psi}(z) &\sim z \cdot \text{arrow pointing right}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, в каждой вершине будут встречаться одна фотонная линия и две спинорные (причем одна из них «входящая», а другая «выходящая»). Здесь следует еще вспомнить о матрице Дирака, стоящей в каждом из  $\mathcal{L}(x)$ . Условимся эту матрицу, а также константу связи  $e$  ставить в соответствие с вершиной, подобно тому, как это изображено в (3):

$$e\gamma^\nu \sim \text{wavy line} \text{ meeting two arrows at vertex } x. \quad (9)$$

Соотношения (6)—(9) образуют полный набор правил соответствия для построения диаграмм Фейнмана в спинорной электродинамике. Эти правила установлены так, что диаграмма, соответствующая одному из слагаемых в  $S_n$ , содержит  $n$  вершин и некоторое количество внутренних и внешних фотонных и электронных линий. При этом в каждый узел входит и выходит одна электронная линия. Таким образом, электронные линии всей диаграммы непрерывны в узлах и образуют либо замкнутые фигуры, либо незамкнутые ломаные линии, начинающиеся и оканчивающиеся на краях диаграммы. Цепочке аргументов спариваний

$$\overline{\psi}(x)\overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y)\overline{\psi}(y)\overline{\psi}(z)\dots\overline{\psi}(u)\overline{\psi}(v)\psi(v)$$

соответствует последовательность узлов отдельных электронных линий диаграммы, а парам свободных операторов  $\overline{\psi}(x_f)\psi(x_i)$  под знаком нормального произведения — начало ( $x_i$ ) и конец ( $x_f$ ) отдельных незамкнутых электронных линий.

В качестве примера рассмотрим один из членов второго порядка, входящий в выражение для  $S_2(x, y)$ :

$$\begin{aligned} i^2 e^2 \overline{\psi}(x) \hat{A}(x) \overline{\psi}(x) \overline{\psi}(y) \hat{A}(y) \psi(y) &= \\ &= e^2 \text{Sp} \{ i S^c(y-x) \hat{A}(x) i S^c(x-y) \hat{A}(y) \} = \\ &= -e^2 \text{Sp} \{ S^c(y-x) \hat{A}(x) S^c(x-y) \hat{A}(y) \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя правила соответствия, получаем диаграмму Фейнмана — так называемую диаграмму «собственной энергии фотона», изображенную на рис. 19.2.

Во втором примере рассмотрим один из членов третьего порядка, входящий в  $S_3(x, y, z)$ :

$$(ie)^3 : \overline{\psi}(x) \hat{A}(x) \overline{\psi}(x) \overline{\psi}(y) \hat{A}(y) \overline{\psi}(y) \overline{\psi}(z) \hat{A}(z) \psi(z) : = \\ = -e^3 D_0^c(x-z) : \overline{\psi}(x) \gamma^{\nu} S^c(x-y) \hat{A}(y) S^c(y-z) \gamma_{\nu} \psi(z) :. \quad (11)$$

Правила соответствия в этом случае приводит нас к диаграмме, изображенной на рис. 19.3.

Из рассмотрения этих простейших диаграмм видно, что движение по направлению электронной линии в точности соответствует порядку матричных элементов справа налево в надлежащем члене  $S$ -матрицы. Например, в



Рис. 19.2. Диаграмма собственной энергии фотона в спинорной электродинамике.

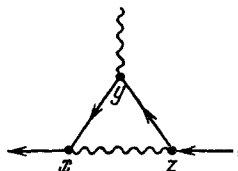


Рис. 19.3. Вершинная диаграмма третьего порядка в спинорной электродинамике.

случае диаграммы, изображенной на рис. 19.3, получаем тот же порядок некоммутирующих матричных множителей

$$:\overline{\psi}(x) \gamma^{\nu} S^c(x-y) \hat{A}(y) S^c(y-z) \gamma_{\nu} \psi(z):,$$

что и в (11).

Отметим еще, что в случае наличия ферми-полей необходимо тщательно следить за знаками. Согласно определению спаривание  $\overline{\psi}(x) \psi(y)$  отличается знаком от стандартного спаривания  $\overline{\psi}(y) \overline{\psi}(x)$ , входящего в правила соответствия:

$$\overline{\psi}(x) \psi(y) = -\overline{\psi}(y) \overline{\psi}(x).$$

Эта смена знака существенна в диаграммах, содержащих замкнутые электронные циклы. Так, например, по правилам соответствия диаграмма рис. 19.2 соответствует выражению

$$(ie)^2 \overline{\psi}(x) \overline{\psi}(y) \overline{\psi}(y) \overline{\psi}(x),$$

которое отличается знаком от (10). Ясно также, что и в более общем случае такое отличие в знаке будет иметь место для любой группы спариваний, соответствующей каждому из замкнутых циклов диаграммы, независимо от порядка этих циклов. Отсюда

вытекает, что выражение, полученное по правилам соответствия, должно быть дополнительно умножено на

$$\eta = (-1)^c,$$

где  $c$  — число замкнутых фермионных циклов в данной диаграмме. Это замечание назовем *правилом знаков*.

**19.4. Поле Янга — Миллса.** Большой интерес представляют квантовополевые модели, содержащие неабелевы калибровочные поля и описывающие их взаимодействие с полями материи. Подобно абелеву случаю — электродинамике — такие модели оказываются весьма экономными с точки зрения структуры членов взаимодействия и в простейших случаях содержат всего одну константу связи  $g$ . Эта константа входит также в лагранжиан «чистого» (т. е. не взаимодействующего с другими полями) поля Янга — Миллса

$$\mathcal{L}_{YM}(B) = \mathcal{L}_0(B) + \mathcal{L}_1(g, B),$$

который наряду с квадратичной формой  $\mathcal{L}_0$  содержит кубические и четверные члены:

$$\mathcal{L}_1(g, B) = 2gF_{\mu\nu}[B_\mu \times B_\nu] + g^2([B_\mu \times B_\nu])^2. \quad (12)$$

(Здесь и ниже для определенности рассматривается калибровочное поле группы  $SU(2)$ .) По аналогии с рассмотренным выше примером нелинейного скалярного поля (4) возникает стремление проквантовать поле Янга — Миллса в линейном приближении ( $\mathcal{L}_{YM} \rightarrow \mathcal{L}_0$ ), а затем учесть тройные и четверные составляющие из  $\mathcal{L}_1$  с помощью теории возмущений по степеням константы  $g$ .

При этом выражение  $\mathcal{L}_0$  можно было бы выбрать в виде суммы «по компонентам»:

$$\mathcal{L}_0(B) = \sum_a \mathcal{L}_0(B^a) \quad (13)$$

квадратичных невырожденных форм, аналогичных лагранжиану электромагнитного поля в форме (4.13) или (4.19). Однако, как отмечалось в § 11.1, продольная компонента поля Янга — Миллса, в отличие от электромагнитного поля, не отщепляется от поперечных. Вследствие этого матрица рассеяния оказывается неунитарной в пространстве физических состояний. Конкретно это проявляется в следующем. Левая часть условия унитарности (15.9') содержит суммирование

$$(S\tilde{S})_{\alpha\beta}^{\dagger} = \sum_{\gamma} S_{\alpha\gamma} \tilde{S}_{\gamma\beta}^{\dagger} = \sum_{\tilde{\gamma}} S_{\alpha\tilde{\gamma}} \tilde{S}_{\tilde{\gamma}\beta}^{\dagger} + \sum_x S_{\alpha x} \tilde{S}_{x\beta}^{\dagger} \quad (14)$$

по промежуточным состояниям  $|\gamma\rangle$ , среди которых, помимо трехмерноперепоперечных состояний  $|\tilde{\gamma}\rangle$ , отвечающих безмассовым поперечным квантам поля Янга — Миллса (эти состояния  $|\tilde{\gamma}\rangle$  ниже



и называются физическими), содержатся состояния  $|\chi\rangle$ , в которых присутствует скалярная составляющая  $\chi(x)$ . В теории Янга — Миллса, в отличие от электродинамики, из-за того, что функция  $\chi(x)$  удовлетворяет уравнению (11.12) и, таким образом, взаимодействует с поперечными составляющими, матричные элементы

$$S_{\chi\alpha} = \langle \chi | S | \alpha \rangle,$$

где  $|\alpha\rangle$  — физические состояния, оказываются отличными от нуля. Поэтому, для того чтобы обеспечить унитарность в пространстве физических состояний, следует модифицировать операторы

$$S_n \rightarrow \tilde{S}_n$$

так, чтобы они удовлетворяли соотношениям (16.4), в правой части которых матричное умножение подразумевает свертку лишь по физическим состояниям  $|\tilde{\gamma}\rangle$ :

$$\tilde{S}_n + \tilde{S}_n^\dagger + \sum_k P(\dots) \tilde{S}_k \tilde{S}_{n-k}^\dagger = 0,$$

$$(\tilde{S}_k \tilde{S}_{n-k}^\dagger)_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\tilde{\gamma}} (\tilde{S}_k)_{\alpha\tilde{\gamma}} (\tilde{S}_{n-k}^\dagger)_{\tilde{\gamma}\beta}.$$

Результативно это сводится к тому, что во всех выкладках, содержащих суммирование по промежуточным состояниям  $|\tilde{\gamma}\rangle$  необходимо вычесть из суммы вклад от состояний, содержащих скалярные кванты поля Янга — Миллса:

$$\sum_{\tilde{\gamma}} \rightarrow \sum_{\tilde{\gamma}} - \sum_{\chi} = \sum_{\tilde{\gamma}}. \quad (15)$$

Строгое доказательство описываемой процедуры было получено в ходе квантования поля Янга — Миллса с помощью представления функционального интеграла (см., например, гл. III книги Славнова, Фаддеева (1978)).

Мы приведем сейчас элементы диаграммной техники теории возмущений по степеням константы взаимодействия  $g$  для свободного поля Янга — Миллса.

В дополнение к элементам, отвечающим полю Янга — Миллса: внутренним линиям

$$\overbrace{B_{\nu}^a(x) B_{\mu}^b(y)} \rightsquigarrow \text{wavy line between } x \text{ and } y, \quad (16)$$

внешним линиям

$$B_{\nu}^a(x) \rightsquigarrow \text{wavy line starting at } x, \quad (17)$$

тройным вершинам

$$g F_{\mu\nu} [B_\mu \times B_\nu]$$



(18)

и четверным вершинам

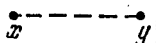
$$g^2 ([B_\nu \times B_\mu])^2$$



(19)

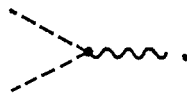
следует добавить элементы, соответствующие вычитаемым продольным составляющим. Эти составляющие описываются скалярным безмассовым изовекторным полем  $\xi^a$  и на диаграммах Фейнмана изображаются в виде внутренних линий поля  $\xi$ :

$$\overline{\xi^a(x)} \xi^b(x)$$



и тройных вершин, связывающих скалярное поле  $\xi$  с полем Янга — Миллса,

$$g \xi(x) [B_\nu \times \partial_\nu \xi]$$



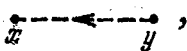
Вспомогательное скалярное поле  $\xi$  часто называют полем «духов Фаддеева — Попова».

Выписанные элементы удобно отнести к эффективному лагранжиану

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a}{2} (\partial B_\nu)^2 - \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + g \xi [B_\nu \times \partial^\nu \xi] \quad (20)$$

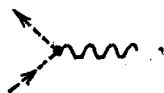
В этом выражении введены «комплексные» обозначения для поля духов  $\xi \rightarrow (\xi, \bar{\xi})$ . Дело в том, что, как оказывается, замкнутые циклы духовых линий соответствуют вкладам, содержащим «дополнительный» множитель  $(-1)$ . Поэтому формально удобно считать скалярное поле  $\xi$  проквантованным по Ферми — Дираку, что и учитывается введенными обозначениями:

$$\overline{\xi(x)} \bar{\xi}(y) = -\overline{\bar{\xi}(y)} \xi(x)$$



(21)

$$g \bar{\xi}(x) [B_\nu(x) \times \partial^\nu \xi(x)]$$



(22)

Правила Фейнмана включают теперь еще знаковый фактор

$$\eta = (-1)^g, \quad (23)$$

где  $g$  — число замкнутых духовых циклов диаграммы.

Для иллюстрации рассмотрим члены порядка  $g^2$  в матрице рассеяния  $S_2(x, y)$ , с двумя неспаренными операторами поля Янга — Миллса, аналогичные выражению (10).

Эти члены, во-первых, возникают из различных спариваний операторов, стоящих в тройных вершинах:

$$S_2(x, y) \sim i^2 g^2 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{def} : \{ \overbrace{F_{\nu\mu}^a(x) B_\nu^b(x) B_\mu^c(x) F_{\rho\sigma}^d(y) B_\rho^e(y) B_\sigma^f(y)} + \\ + \overbrace{F_{\nu\mu}^a(x) B_\nu^b(x) B_\mu^c(x) F_{\rho\sigma}^d(y) B_\rho^e(y) B_\sigma^f(y)} + \\ + \overbrace{F_{\nu\mu}^a(x) B_\nu^b(x) B_\mu^c(x) F_{\rho\sigma}^d(y) B_\rho^e(y) B_\sigma^f(y)} \} :, \quad (24)$$

а во-вторых, из членов, содержащих взаимодействие духового поля  $\xi$  с полем Янга — Миллса:

$$S_2(x, y) \sim i g^2 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{def} : \overbrace{\xi^a(x) \partial_\nu \xi^b(x) B_\nu^c(x) \xi^d(y) \partial_\mu \xi^e(y) B_\mu^f(y)} :. \quad (25)$$

С точностью до очевидных модификаций спариваний, стоящих под знаком производных, как, например,

$$\partial_\nu \overline{\xi^a(x)} \xi^b(y) = \frac{\delta_{ab}}{i(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{-k^2 - i\varepsilon} dk = \frac{\delta_{ab}}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)k_\nu dk}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (26)$$

эти слагаемые соответствуют двум фейнмановским диаграммам, изображенным на рис. 19.4.



Рис. 19.4. Диаграммы второго порядка с двумя внешними векторными линиями для поля Янга — Миллса в пустоте.

Правила Фейнмана для полей Янга — Миллса, взаимодействующих с полями материи, читатель найдет в Дополнении VIII.

## § 20. Правила Фейнмана в $p$ -представлении

**20.1. Переход к импульсному представлению.** Обратимся теперь к вычислению матричных элементов матрицы рассеяния, необходимых для получения вероятностей переходов. Это вычисление удобно проводить в импульсном представлении, так как именно в этом представлении обычно записываются амплитуды состояния

$$\Phi_{\dots k \dots} = a_1^+ (k_1) \dots a_s^+ (k_s) \Phi_0. \quad (1)$$

Для получения матричных элементов переходов между состояниями типа (1) от слагаемых  $S$ -матрицы  $n$ -го порядка

$$S_{(n)} = \int dx_1 \dots dx_n K(x_1, \dots, x_n) : \dots u_\alpha(x_i) \dots u_\beta(x_j) \dots : \quad (2)$$

следует вычислять выражения

$$\overset{*}{\Phi}_{\dots k' \dots} : \dots u_\alpha \dots u_\beta \dots : \Phi_{\dots k \dots} = \overset{*}{\Phi}_f : \dots u_\alpha \dots u_\beta \dots : \Phi_{in}. \quad (3)$$

При этом операторы рождения  $u^+(x)$  из нормального произведения надо коммутировать с операторами уничтожения  $a^-(p)$  из амплитуды  $\overset{*}{\Phi}_f$ , а операторы уничтожения  $u^-(x)$  — с операторами рождения  $a^+(k)$  из  $\Phi_{in}$  до тех пор, пока один из  $u^+$  не подействует на  $\overset{*}{\Phi}_0$  или один из  $u^-$  не окажется рядом с  $\Phi_0$ , что даст нуль. Матричный элемент (3) может оказаться отличным от нуля, если для каждого оператора  $u(x)$  из нормального произведения найдется оператор  $a^+$  в  $\Phi_{in}$  или  $a^-$  в  $\overset{*}{\Phi}_f$  того же поля, который «погасит» оператор  $u$  в результате коммутации с ним. Поэтому (3) будет отличен от нуля тогда, когда сумма числа частиц каждого поля в начальном состоянии  $\Phi_{in}$  и конечном состоянии  $\overset{*}{\Phi}_f$  в точности равна числу операторных функций данного поля в нормальном произведении. Матричный элемент (3) окажется отличным от нуля также в случае, если, кроме операторов, «гасящих» нормальное произведение, в  $\overset{*}{\Phi}_f$  и  $\Phi_{in}$  содержатся операторы, гасящие друг друга. При этом полное число частиц в состояниях  $\overset{*}{\Phi}_f$  и  $\Phi_{in}$  превышает число операторов в нормальном произведении на некоторое четное число. Однако такие матричные элементы отличны от нуля лишь тогда, когда импульсы указанных «лишних» частиц в состояниях  $\overset{*}{\Phi}_f$  и  $\Phi_{in}$  совпадают, т. е. «лишние» частицы не испытывают взаимодействия.

Ограничиваясь случаем, когда ни для одной частицы импульс в начальном состоянии не равен импульсу в конечном состоянии, приходим к выводу, что матричный элемент (3) представляется в виде произведения результатов коммутации операторов:

$$u^-(x_j) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-ipx_j} \sum_{\sigma} v_{\sigma}^-(p) a_{\sigma}^-(p) dp \quad \text{с} \quad a^+(k_j)$$

и

$$u^+(x_i) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{ipx_i} \sum_{\sigma} v_{\sigma}^+(p) a_{\sigma}^+(p) dp \quad \text{с} \quad a^-(k_i).$$

Таким образом, после явного выполнения этих коммутаций матричный элемент (3) сводится к произведению

$$\prod (\dots x \dots) = \prod_j \{ (2\pi)^{-3/2} e^{-ik_j x_j} v^-(k_j) \} \prod_l \{ (2\pi)^{-3/2} e^{ik_l x_l} v^+(k_l) \}, \quad (4)$$

причем сомножители, входящие в  $\prod_i$  соответствуют частицам начального состояния, а входящие в  $\prod_f$  — конечного.

Возвращаясь к исходному матричному элементу  $S$ -матрицы

$$\Phi_f^* S_{(n)} \Phi_{in} = \int dx_1 \dots dx_n K(x_1, \dots, x_n) \prod (\dots x \dots), \quad (5)$$

можем теперь выполнить интегрирование по переменным  $x_1, \dots, x_n$ . В силу чисто экспоненциальной зависимости произведения  $\prod$  от конфигурационных переменных матричный элемент с точностью до множителей  $v^-(k)$ ,  $v^+(k)$  и степеней числа  $2\pi$  сводится к фурье-образу коэффициентной функции  $K(x_1, \dots, x_n)$ . Поскольку эта функция в свою очередь выражается в виде произведения спариваний, то ее фурье-образ представляется интегральной сверткой от фурье-образов спариваний.

Подставляя интегральные представления спариваний

$$\frac{1}{i} D_{\alpha\beta}^c(x-y) = (2\pi)^{-4} \int e^{-iq(x-y)} \Delta_{\alpha\beta}(q) dq$$

в правую часть (5), видим, что интеграция по конфигурационным переменным сводится к интегралам вида

$$\int dx_j e^{ix_j \left( \sum_{\alpha} p_{\alpha} \right)} = (2\pi)^4 \delta \left( \sum p_{\alpha} \right). \quad (6)$$

**20.2. Правила Фейнмана для матричных элементов.** Суммируя приведенные рассуждения, приходим к диаграммам и правилам Фейнмана в импульсном представлении.

Для вычисления матричного элемента перехода  $s \rightarrow r$  (т. е. процесса, в котором  $s$  частиц начального состояния переходят в  $r$  частиц конечного состояния)  $n$ -го порядка следует, сначала нарисовать соответствующую диаграмму по правилам предыдущего параграфа. На этой диаграмме нужно расставить импульсные переменные, т. е. каждой внутренней и наружной линии диаграммы присвоить свой 4-импульс. При этом необходимо провести различие между внешними линиями, описывающими входящие частицы (начальное состояние) и выходящие частицы (конечное состояние), а также учесть все топологически неэквивалентные возможности.

Вычисление матричного элемента производится затем по следующим правилам:

- 1) каждой внешней линии начального состояния с 4-импульсом  $p_{in}$  отвечает множитель  $(2\pi)^{-3/2} v_{\sigma}^-(p_{in})$ ;
- 2) каждой внешней линии конечного состояния с 4-импульсом  $k_f$  отвечает множитель  $(2\pi)^{-3/2} v_{\rho}^+(k_f)$ ;

3) каждой вершине отвечает множитель

$$igO_\alpha (2\pi)^4 \delta(\sum p_i),$$

где  $gO_\alpha$  — константа связи и матрица из соответствующего лагранжиана взаимодействия, в аргументы  $\delta$ -функции входит алгебраическая сумма импульсов всех линий (внутренних и наружных), встречающихся в данной вершине, а множитель  $i$  учитывает фактор  $i^n$ , стоящий при  $S_n$  в выражении для  $S$ ;

4) каждой внутренней линии с 4-импульсом  $q_j$  сопоставляется множитель

$$(2\pi)^{-4} \Delta_{\alpha\beta}(q_j),$$

причем:

5) по всем аргументам  $q_j$  проводится интегрирование;

6) в случае наличия ферми-полей необходимо учесть правило знаков и умножить все выражение на множитель (19.12);

7) полученное таким образом выражение должно быть еще умножено на числовой множитель — фактор симметрии  $s_n$ . Мы обсудим структуру этого фактора ниже — в конце следующего раздела.

**20.3. Иллюстрация для модели  $\phi^4$ .** В качестве иллюстрации рассмотрим вклад в матричный элемент  $2 \rightarrow 2$  рассеяния, отвечающий диаграмме рис. 19.1, б. Обозначим 4-импульсы начальных частиц символами  $p_1, p_2$ , а импульсы конечных через  $k_1, k_2$ .

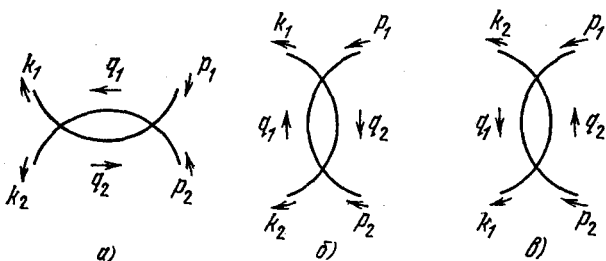


Рис. 20.1. Диаграммы рассеяния второго порядка модели  $\phi^4$  в импульсном представлении.

Возможны три топологически неэквивалентных способа присвоения импульсов  $p_i, k_j$  внешним линиям. Они изображены на рис. 20.1, а, б, в. Импульсы внутренних линий обозначены символами  $q_j$ , коротенькие стрелки отвечают алгебраическим знакам соответствующих импульсов.

Используя сформулированные выше правила с учетом того, что для скалярного поля

$$v^-(p) = v^+(p) = (2p_0)^{-1/2}, \quad \Delta(q) = \frac{1}{i(m^2 - q^2 - i\epsilon)},$$

получаем для диаграммы 20.1, *a*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= [(2\pi)^{12} 2\rho_1^0 2\rho_2^0 2k_1^0 2k_2^0]^{-1/2} \int \frac{dq_1}{(2\pi)^4 i (m^2 - q_1^2)} \times \\ &\times \int \frac{dq_2}{(2\pi)^4 i (m^2 - q_2^2)} i^2 h^2 (2\pi)^8 \delta(\rho_1 + \rho_2 + q_2 - q_1) \delta(q_1 - k_1 - k_2 - q_2) = \\ &= \frac{h^2 \delta(\rho_1 + \rho_2 - k_1 - k_2)}{(2\pi)^6 (16\rho_1^0 \rho_2^0 k_1^0 k_2^0)^{1/2}} \int \frac{dq_1}{(m^2 - q_1^2) [m^2 - (q_1 - k_1 - k_2)^2]} \end{aligned}$$

Соответственно для диаграмм рис. 20.1, *б*, *в*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_b &= \frac{h^2 \delta(\rho_1 + \rho_2 - k_1 - k_2)}{(2\pi)^6 (16\rho_1^0 \rho_2^0 k_1^0 k_2^0)^{1/2}} \int \frac{dq_1}{(m^2 - q_1^2) [m^2 - (q_1 - k_1 + \rho_1)^2]}, \\ \mathcal{M}_c &= \frac{h^2 \delta(\rho_1 + \rho_2 - k_1 - k_2)}{(2\pi)^6 (16\rho_1^0 \rho_2^0 k_1^0 k_2^0)^{1/2}} \int \frac{dq}{(m^2 - q^2) [m^2 - (q - k_1 + \rho_2)^2]}. \end{aligned}$$

Чтобы получить окончательное выражение для вклада в матричный элемент рассеяния  $\Phi_f^* S \Phi_i$ , необходимо еще учесть фактор симметрии. Для его определения рассмотрим возможные варианты коммутаций и спариваний операторов в изучаемом матричном элементе

$$\Phi_2^* S \Phi_2 = \frac{i^2 h^2}{2!} \int dx dy \langle a_1^- a_2^- T [\varphi^4(x) \varphi^4(y)] a_1^+ a_2^+ \rangle_0. \quad (7)$$

Диаграмме 20.1, *a* соответствует следующая схема коммутаций:

$$\langle \underbrace{a_1^- a_2^-}_{1, 2} \underbrace{\varphi_x \varphi_x \varphi_x \varphi_x \varphi_y \varphi_y \varphi_y \varphi_y}_{3, 4, 5, 6} \underbrace{a_1^+ a_2^+}_{7, 8} \rangle_0.$$

Здесь около каждой скобки, обозначающей вид коммутации, стоит ее комбинаторный вес. Мы начинаем с оператора уничтожения  $a_1^-$ . Он может зацепиться за любой из восьми операторов произведения  $\varphi_x^4 \varphi_y^4$ . Поэтому «вес» первого зацепления  $\overline{a_1^- \varphi_x}$  равен 8. Поскольку топология диаграммы 20.1, *a* требует, чтобы оператор  $\overline{a_2^-}$  зацепился за ту же вершину, что и  $a_1^-$ , то вес второго зацепления  $\overline{a_2^- \varphi_x}$  равен 3 и т. д.

Следует еще учесть вес хронологических спариваний оставшихся операторов. Легко видеть, что

$$\langle T : \varphi_x \varphi_x : : \varphi_y \varphi_y : \rangle_0 = 2 (\overline{\varphi_x \varphi_y})^2. \quad (8)$$

Собирая множители, получаем

$$c_{(2)}^a = \frac{1}{2!} 8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{(4!)^2}{2}.$$

Аналогичные рассуждения для диаграмм 20.1, *б*, *в* дают

$$c_{(2)}^b = c_{(2)}^c = c_{(2)}^a = (4!)^2 / 2.$$

Итак, матричный элемент  $2 \rightarrow 2$  рассеяния во втором порядке теории возмущений для модели  $\hbar\varphi^4$  будет

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= C_{(2)}^a \mathcal{M}_a + C_{(2)}^b \mathcal{M}_b + C_{(2)}^c \mathcal{M}_c = \\ &= \frac{\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) 18\hbar^2}{(p_1^0 p_2^0 k_1^0 k_2^0)^{1/2} (2\pi)^4 i} [I(k_1 + k_2) + I(k_1 - p_1) + I(k_1 - p_2)], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq}{(m^2 - q^2 - i\epsilon) [m^2 - (q - k)^2 - i\epsilon]}. \quad (10)$$

Сформулируем теперь рецепт получения фактора симметрии:

1) В  $n$ -м члене разложения  $S$ -матрицы содержится множитель  $(n!)^{-1}$ . Этот множитель всегда компенсируется множителем  $n!$ , возникающим за счет перебора вершин  $x_1, \dots, x_n$ , которые из-за наличия интегрирования по  $dx_1, \dots, dx_n$  являются немymi индексами суммирования.

2) В случае, если лагранжиан взаимодействия содержит  $k$  одинаковых операторных множителей (в рассмотренном случае  $k=4$ ), при установлении порядка зацепления и порядка хронологического спаривания операторов за счет перебора симметричных возможностей в каждой вершине возникает множитель  $k!$ .

3) В случае наличия  $\nu$  топологически эквивалентных вариантов спаривания внутренних линий их следует учитывать только один раз. Это соответствует введению множителя  $(\nu!)^{-1}$ .

**20.4. Спинорная электродинамика.** Приведем теперь сводку правил Фейнмана для спинорной электродинамики (табл. 2). Эти правила необходимо дополнить правилом знаков и учетом фактора симметрии.

Как отмечалось, введенные диаграммы фактически одновременно описывают несколько различных процессов. Рассмотрим, например, диаграмму, изображенную на рис. 20.2. Для симметрии все входящие импульсы условно направлены внутрь.

Если считать, что нулевые составляющие у 4-векторов  $p_1$  и  $p_2$  положительны, а у  $k_1$  и  $k_2$  — отрицательны ( $p_1^0, p_2^0 > 0$ ;  $k_1^0, k_2^0 < 0$ ), то диаграмма соответствует однофотонной аннигиляции электрона  $e^-(p_2)$  и позитрона  $e^+(p_1)$  с последующим рождением пары  $e^-(K_2 = -k_2)$ ,  $e^+(K_1 = -k_1)$ . Этот процесс изображен

на рис. 20.3, а, где ось времени направлена слева направо.

Если же положить, что  $p_1^0, k_2^0 > 0$ , а  $p_2^0, k_1^0 < 0$ , то мы получаем процесс рассеяния электрона на электроне с обменом одним фотоном (мёллеровское рассеяние). В этом случае удобно ввести

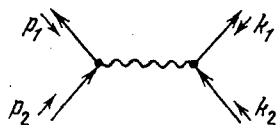
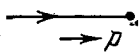
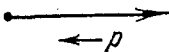
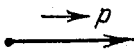
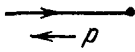
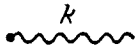
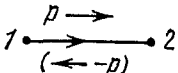



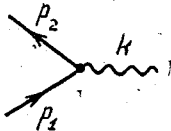
Рис. 20.2. Диаграмма второго порядка спинорной электродинамики с четырьмя фермионными внешними линиями.



Таблица 2. Правила Фейнмана для матричных элементов в спинорной электродинамике

№ пп	Частица и ее состояние	Фактор в матричном элементе
1	Электрон в начальном состоянии с импульсом $p$ 	$(2\pi)^{-3/2} v^{s, -}(p)$
2	Позитрон в начальном состоянии с импульсом $p$ 	$(2\pi)^{-3/2} \bar{v}^{s, -}(p)$
3	Электрон в конечном состоянии с импульсом $p$ 	$(2\pi)^{-3/2} \bar{v}^{s, +}(p)$
4	Позитрон в конечном состоянии с импульсом $p$ 	$(2\pi)^{-3/2} v^{s, +}(p)$
5	Фотон в начальном или конечном состоянии с поляризацией $e_\nu$ и импульсом $k$ 	$\frac{e_\mu^\nu}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k_0}} \quad (\nu \neq 0)$
6	Движение электрона из 1 в 2 (или позитрона из 2 в 1) 	$\frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} d^4p$

Продолжение табл. 2

№ пп	Частица и ее состояние	Фактор в матричном элементе
7	Движение фотона между вершинами с индексами суммирования $\mu$ и $\nu$ 	$\frac{g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk}{k^2 + i\epsilon}$
8	Узел с индексом суммирования $\nu$ , в который входят электронная линия $p_1$ и фотонная линия $k$ и выходит электронная линия $q_2$ 	$ie\gamma^\nu (2\pi)^4 \delta(p_2 - p_1 - k)$

обозначение  $K_1 = -k_1$ ,  $P_1 = -p_1$  и повернуть диаграмму на  $90^\circ$  по часовой стрелке. На полученной таким образом диаграмме 20.3, б время течет слева направо.

Случай  $p_1^0, k_1^0 > 0$ ,  $p_1^0, k_2^0 < 0$  отвечает меллеровскому рассеянию электрона на позитроне. Обозначая  $P_1 = -p_1$  и  $K_2 = -k_2$ .

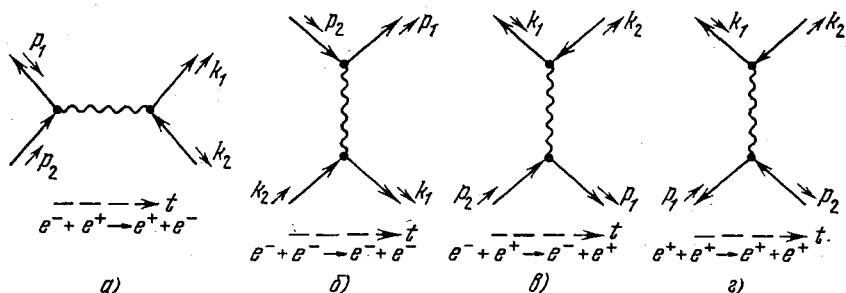


Рис. 20.3. Различные физические процессы, описываемые диаграммой рис 20.2.

получаем диаграмму 20.3, в. Матричный элемент диаграммы в должен быть добавлен к матричному элементу диаграммы а.

Таким образом, две различные диаграммы 20.3, а и 20.3, в дают вклад в один и тот же физический процесс

$$e^+(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow e^+(K_1) + e^-(K_2) \quad (11)$$

(необходимо лишь учесть, что в диаграмме 20.3,  $v$  4-векторы  $p_1$  и  $K_1$  обозначены через  $k_1$  и  $P_1$ ), полный матричный элемент которого в рассматриваемом приближении второго порядка теории возмущений равен сумме двух членов

$$\mathcal{M}(11) = \mathcal{M}(20.3, a) + \mathcal{M}(20.3, b), \quad (12)$$

соответствующих двум этим диаграммам.

Наконец, случай  $k_1^0, p_1^0 > 0$ ;  $p_2^0, k_2^0 < 0$  отвечает мёллеровскому рассеянию позитрона на позитроне — см. рис. 20.3,  $z$ . Для того чтобы получить в последнем случае матричный элемент рассеяния, необходимо еще учесть антисимметрию физических состояний относительно перестановок двух тождественных ферми-частиц — позитронов.

При вычислении величины

$$\int dx dy \langle a^-(k_2) a^-(q_2) \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \hat{A}(y) \psi(y) a^+(k_1) a^+(q_1) \rangle$$

возникают два варианта «зацепления» ферми-операторов, изображенные на рис. 20.4. Матричный элемент процесса

$$e^+(k_1) + e^+(p_1) \rightarrow e^+(k_2) + e^+(q_2) \quad (13)$$

представляется теперь разностью

$$\mathcal{M}(13) = \mathcal{M}(20.4, a) - \mathcal{M}(20.4, b) \quad (14)$$

матричных элементов, соответствующих диаграммам 20.4, что и обеспечивает упомянутую антисимметрию и выполнение принципа Паули.

В заключение отметим, что в приведенных выше примерах содержатся пропагаторы скалярного, спинорного и электромагнитного полей, не обладающих какой-либо внутренней симметрией. В этих примерах отсутствует также векторное поле с массой. Для полноты картины приведем поэтому еще выражения в импульсном представлении для пропагатора поля пи-мезонов:

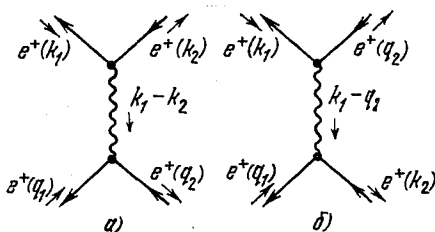


Рис. 20.4. Прямая и обменная диаграммы мёллеровского рассеяния позитронов.

$$\int \overline{\varphi_a(x)} \varphi_b(y) e^{ik(x-y)} dx = \frac{\delta_{ab}}{i(m^2 - k^2 - i\varepsilon)} \quad (15)$$

и для пропагатора массивного векторного поля ср. формулу (18.14)

$$\int \overline{U_\nu(x)} U_\mu(y) e^{ik(x-y)} dx = i \frac{g_{\nu\mu} - k_\nu k_\mu / m^2}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}, \quad (16)$$

## § 21. Вероятности переходов

**21.1. Общая структура матричных элементов.** Как было установлено в примере § 20.3, матричный элемент перехода содержит сингулярный множитель в виде  $\delta$ -функции, отвечающей закону сохранения полного 4-вектора энергии-импульса начальных и конечных частиц. Нетрудно убедиться, что из правил Фейнмана для матричных элементов (см. § 20.2, п. 3)) вытекает, что матричный элемент перехода  $s \rightarrow r$  всегда пропорционален четырехмерной  $\delta$ -функции

$$\delta\left(\sum_i^s p_i - \sum_f^r p_f'\right). \quad (1)$$

Этот факт является отражением общего свойства трансляционной инвариантности матрицы рассеяния. Если процесс взаимодействия происходит во внешних полях, то соответствующая однородность нарушается и множитель (1) частично или полностью исчезает. Например, при рассеянии во внешнем поле, зависящем от пространственных координат и не зависящем от времени, вместо (1) получим одномерную  $\delta$ -функцию

$$\delta\left(\sum_i p_i^0 - \sum_f p_f'^0\right)$$

— закон сохранения энергии.

Возвращаясь к общему случаю взаимодействия в вакууме, получаем

$$\Phi_{p', S\Phi_p}^* = \delta\left(\sum p - \sum p'\right) F(p', p), \quad (2)$$

причем для связанных диаграмм функция  $F$  является гладкой, т. е. не содержит других  $\delta$ -функций.

Функция  $F$  описывается набором фейнмановских диаграмм с числом внешних линий, равным  $s+r$ . Введем здесь некоторые полезные определения.

Мы будем называть диаграмму  $G$  *связной*, если ее нельзя разбить на части, которые не соединены друг с другом линиями. Если же диаграмма  $G$  распадается на связные «части»  $G_1, G_2, \dots$ , то мы назовем  $G$  *несвязной*, а ее «куски»  $G_i$  — компонентами связности. Связную диаграмму называют *слабо связной* (или *одночастично приводимой*), если ее можно превратить в несвязную снятием одной внутренней линии, и *сильно связной* (одночастично неприводимой), если это невозможно.

Вклад каждой из компонент связности несвязной диаграммы в матричный элемент (1) содержит  $\delta$ -функцию. Вклады связных диаграмм содержат по одной  $\delta$ -функции. Поэтому для связных диаграмм функция  $F$  в правой части (2) является гладкой, т. е. не содержит множителями других  $\delta$ -функций.

Для определения вероятностей переходов приходится вычислять квадраты матричных элементов и иметь дело с квадратом  $\delta$ -функции.

Здесь следует учесть, что, как обычно в квантовой механике, нас интересуют вероятности переходов, отнесенные к единичному интервалу времени и единичному пространственному объему. Принимая еще во внимание, что импульсная 4-мерная  $\delta$ -функция возникает в результате интегрирования по 4-мерному объему  $VT$  ( $V \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$ ), находим

$$[\delta(p)]^2 = \delta(p) \delta(0) = \delta(p) (2\pi)^{-4} \int dx = \delta(p) (2\pi)^{-4} VT,$$

Имеем поэтому

$$|\Phi_{p'}^* S \Phi_p|^2 = (2\pi)^{-4} VT \delta(\sum p - \sum p') |F(p', p)|^2. \quad (3)$$

Аналогичные рассуждения для процесса перехода в статическом внешнем поле  $A_{\text{ext}}$  дают

$$|\Phi_{p'}^* S(A_{\text{ext}}) \Phi_p|^2 = (2\pi)^{-1} T \delta(\sum p_0 - \sum p'_0) |F(p', p; A_{\text{ext}})|^2. \quad (4)$$

Формула (4) вполне эквивалентна соответствующим выражениям для вероятностей переходов нерелятивистской квантовой механики (см., например, § 84 учебника Блохинцева (1976)). Сингулярный множитель  $T$  исчезает при обращении к вероятности перехода в единицу времени. Наличие другого сингулярного множителя  $V$  в формуле (3) является следствием того, что мы работаем с плоскими волнами. Этот множитель выпадает из выражения для вероятности перехода, отнесенной к единице объема.

**21.2. Нормировка амплитуды состояния.** Изучим теперь вопрос о нормировке амплитуд состояний вида

$$\Phi_k = a_1^+ (k_1) \dots a_s^+ (k_s) \Phi_0.$$

Поскольку такая амплитуда отвечает частицам со строго фиксированными значениями импульсов, она соответствует плоским волнам, которые не обладают конечной нормой во всем пространстве. Однако плоская волна, а следовательно, и амплитуда  $\Phi_k$  могут быть нормированы в единичном объеме.

Для того чтобы аккуратно ввести предельный переход  $V \rightarrow \infty$ , рассмотрим одночастичное состояние и введем пакет плоских волн

$$\Phi_1 = \int \chi_\sigma(k) a_\sigma^+(k) dk \Phi_0. \quad (5)$$

Норма этого состояния равна

$$\Phi_1^* \Phi_1 = \int |\chi_\sigma(k)|^2 dk = N.$$

Полагая  $N = 1$ , можем считать, что выражение

$$|\chi_\sigma(k)|^2 dk$$

дает вероятность того, что частица, характеризуемая внутренним квантовым числом  $\sigma$ , обладает импульсом в интервале  $d\mathbf{k}$  около среднего значения  $\mathbf{k}$ . Сама функция  $\chi(\mathbf{k})$  является, таким образом, волновой функцией частицы в импульсном представлении. Поэтому ее фурье-образ

$$f_{\sigma}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \chi_{\sigma}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (6)$$

есть волновая функция в координатном представлении с нормой, равной

$$\int |f_{\sigma}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int |\chi_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = N.$$

При  $N = 1$  величину

$$|f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (7)$$

можно интерпретировать как вероятность в конфигурационном пространстве. Полагая  $N$  равным числу частиц, много большему единицы, находим, что выражение (7) есть среднее число частиц в бесконечно малом элементе объема  $d\mathbf{x}$ .

Здесь уместно напомнить, что, согласно общей статистической интерпретации квантовой механики, мы имеем дело с квантовым ансамблем, т. е. большим числом тождественных систем микро-частиц или набором тождественных экземпляров одной и той же системы. В данном конкретном случае этот образ вполне адекватен реализуемой на опыте картине. Так, например, пучок частиц от ускорителя — это разреженный пучок тождественных частиц, невзаимодействующих друг с другом, которые «по очереди» падают на мишень одинаковым образом.

Увеличивая теперь неограниченно норму  $N$  так, чтобы при этом  $\chi_{\sigma}$  стремилось к выражению  $(2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ , мы будем получать волновой пакет со все более фиксированным импульсом. Из (7) находим, что при этом

$$|f_{\sigma}(\mathbf{x})| \rightarrow 1,$$

а потому также

$$|f_{\sigma}(\mathbf{x})|^2 \rightarrow 1$$

и в пределе на единицу объема будет приходиться одна частица.

Переходя к пределу, получаем выражение для амплитуды одночастичного состояния, нормированной на единицу объема:

$$\Phi_1 = (2\pi)^{3/2} a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \Phi_0.$$

В случае нескольких сортов частиц вместо (5) следует рассмотреть выражение

$$\Phi_s = \prod_{1 \leq i \leq s} \left\{ \chi_{\sigma_i}(\mathbf{k}_i) a_{\sigma_i}^{\dagger}(\mathbf{k}_i) d\mathbf{k}_i \right\} \Phi_0, \quad (8)$$

где все наборы  $\{\sigma_i, k_i\}$  различны. Норма такой амплитуды представится, очевидно, произведением норм  $s$  одночастичных состояний

$$\Phi_s^* \Phi_s = N_1 N_2 \dots N_s. \quad (9)$$

Повторяя только что проведенное рассуждение отдельно для каждого из сомножителей в (8), (9), приходим к выводу, что амплитуда состояния, нормированная для каждой находящейся в нем частицы на единицу объема, имеет вид

$$\Phi_s = \prod_i \left\{ (2\pi)^{3/2} a_{\sigma_i}^+(k_i) \right\} \Phi_0. \quad (10)$$

**21.3. Общая формула для вероятности перехода.** Поставим теперь задачу определения вероятности такого процесса, когда в начальном состоянии имеется  $s$  потоков частиц с точно определенными импульсами  $k_1, \dots, k_s$  и внутренними квантовыми числами  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ , характеризующими массу, заряд и спин, и требуется найти среднее число частиц, рассеянных с импульсами, лежащими в бесконечно малых областях  $dp_1, \dots, dp_r$ , и с внутренними квантовыми числами  $\rho_1, \dots, \rho_r$ .

В результате взаимодействия система перейдет из состояния (1) в состояние, описываемое амплитудой

$$S(1) (2\pi)^{3s/2} \Phi_k,$$

где  $\Phi_k$  определена согласно (20.1). Поэтому среднее число частиц, которое окажется в конечном состоянии, описываемом нормированной амплитудой  $\Phi_\alpha$ , согласно общему правилу квантовой механики равно

$$(2\pi)^{3s} \frac{|\Phi_\alpha^* S(1) \Phi_k|^2}{\Phi_\alpha^* \Phi_\alpha}. \quad (11)$$

Произведенный выбор нормировки отвечает тому, что в начальном состоянии средние числа частиц на единицу объема равны единице. Если же эти числа равны соответственно  $n_1, n_2, \dots, n_r$ , то выражение (11) следует умножить на  $n_1 n_2 \dots n_r$ .

Нас интересует сейчас число частиц, рассеянных в интервалы импульсов  $\Delta p_1, \dots, \Delta p_r$  около средних значений  $p_1, \dots, p_r$ . При этом мы будем полагать, как это было оговорено в § 20.1, что каждая частица в начальном и конечном состоянии имеет различные значения импульса. В эксперименте это соответствует тому, что частицы с неизменившимся импульсом отнесены к основному первичному пучку, а рассеянными считаются частицы, изменившие свой импульс.

Амплитуду конечного состояния  $\Phi_\alpha$  возьмем в виде

$$\Phi_\alpha = (2\pi)^{3r/2} \int_{\Delta} \Phi_{\dots p \dots} dp_1 \dots dp_r,$$

где область  $\Delta$  равна произведению объемов  $\Delta p_f$ . Поэтому

$$\Phi_{\alpha}^* \Phi_{\alpha} = (2\pi)^{3r} \Delta p_1 \dots \Delta p_r,$$

а вместо (11) получаем выражение

$$\frac{n_1 \dots n_s (2\pi)^{3s}}{\Delta p_1 \dots \Delta p_r} \left| \int_{\Delta} dp'_1 \dots dp'_r \Phi_{p'}^* S \Phi_k \right|^2,$$

равное, по определению области  $\Delta$ ,

$$n_1 \dots n_s (2\pi)^{3s} | \Phi_p^* S \Phi_k |^2 \Delta p_1 \dots \Delta p_r. \quad (12)$$

Структура квадратов матричных элементов типа  $| \Phi \dots S \Phi \dots |^2$  была исследована в начале параграфа. Подставляя выражение (3) в (12) и деля на  $VT$ , получаем число частиц, рассеянных в интервал  $dp_1, \dots, dp_r$  за единицу времени и в единице объема:

$$(2\pi)^{3s-4} n_1 \dots n_s | F(p, k) |^2 \delta(\sum p - \sum k) dp_1 \dots dp_r. \quad (13)$$

Используя формулу (4), находим также соответствующее выражение при рассеянии стационарным классическим полем в единицу времени в виде

$$(2\pi)^{3s-1} n_1 \dots n_s | F(p, k, A_{ext}) |^2 \delta(\sum p^0 - \sum k^0) dp_1 \dots dp_r. \quad (14)$$

Таким образом, для определения вероятности перехода следует вычислить сначала матричный элемент (2) и полученную функцию  $F$  подставить в формулу (13) (соответственно в (14)).

Отметим, что в связи с переходом от (20.1) к (10) оказывается удобным изменить нормировку матричного элемента. Положим вместо (2)

$$\Phi_{\dots p}^* \dots S \Phi_{\dots k} \dots = \frac{i (2\pi)^{4 - \frac{3}{2}(s+r)}}{\left\{ \prod_i (2k_i^0) \prod_f (2p_f^0) \right\}^{1/4}} \delta^{(4)}(\sum p - \sum k) \mathcal{M}(p, k). \quad (15)$$

Формула (13) принимает вид

$$2\pi n_1 \dots n_s \frac{|\mathcal{M}(p, k)|^2}{\prod_i (2k_i^0)} R_r, \quad (16)$$

где

$$R_r = \prod_{1 \leq f \leq r} \left\{ \frac{dp_f}{(2\pi)^3 2p_f^0} \right\} (2\pi)^3 \delta(\sum p - \sum k) \quad (17)$$

— плотность конечных состояний в импульсном пространстве размерности  $3r$ . Если в конечном состоянии имеются две частицы ( $r=2$ ), оказывается удобным пользоваться плотностью, отнесенной не к 6-мерному, а к 2-мерному фазовому объему (т. е. сняв



четыре интегрирования с помощью  $\delta$ -функций). Она может быть представлена в виде

$$R_2 = \frac{d\Omega_1}{4\pi \cdot 8\pi^2} \cdot \frac{1}{[(\rho_1)^2 Q_0 - \rho_1^2 (\rho_1 Q)]}, \quad (18a)$$

где  $Q = \sum_i k_i$ ,  $\rho_1 = |\mathbf{p}_1|$ .

В пределе, когда одна частица гораздо тяжелее другой ( $m_2 \gg m_1$ ,  $\rho_1$ ), имеем

$$R_2 = \frac{\rho_1 d\Omega_1}{32\pi^3 m_2}. \quad (18б)$$

В системе центра масс

$$R_2 = \frac{\rho_1 d\Omega_1}{32\pi^3 Q^0}. \quad (18в)$$

**21.4. Рассеяние двух частиц.** Рассмотрим важный случай рассеяния двух частиц ( $2 \rightarrow 2$ ). Матричный элемент перехода, стоящий в левой части (15), может быть отличен от нуля и при отсутствии взаимодействия, когда  $S = 1$ , а импульсы и квантовые числа частиц в начальном состоянии равны импульсам и квантовым числам в конечном состоянии.

Для того чтобы иметь дело с чистым эффектом взаимодействия, «диагональный» матричный элемент вычитают из полного, т. е. рассматривают выражение

$$\Phi_{\dots p \dots}^* (S - 1) \Phi_{\dots k \dots},$$

которое не отличается от исходного при  $\rho_i \neq k_i$ . В соответствии с (15) положим, одновременно несколько изменив нормировку,

$$\begin{aligned} \Phi_0^* a_{\bar{1}}^*(\mathbf{p}_1) a_{\bar{2}}^*(\mathbf{p}_2) (S - 1) a_{\bar{1}}^+(\mathbf{k}_1) a_{\bar{2}}^+(\mathbf{k}_2) \Phi_0 &= \\ &= \frac{i\delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{2\pi (\rho_1^0 \rho_2^0 k_1^0 k_2^0)^{1/2}} f(\rho_1, \rho_2; k_1, k_2). \end{aligned} \quad (19)$$

Введенная здесь функция  $f$  представляет собой амплитуду рассеяния в релятивистском случае. Нормировка правой части соответствует случаю рассеяния бесспиновых частиц. Как нетрудно убедиться, релятивистская амплитуда  $f$  является безразмерной функцией. Можно показать, что она является также релятивистски инвариантной функцией.

Для рассеяния бозона (оператор рождения  $a_n^+(\mathbf{k})$ ) на фермионе (оператор рождения  $b_\mu^+(q)$ ) амплитуда рассеяния обычно вводится несколько иным образом:

$$\begin{aligned} \Phi_0^* a_{\bar{m}}^-(\mathbf{k}') b_{\bar{\mu}}^-(q') (S - 1) a_n^+(\mathbf{k}) b_\mu^+(q) \Phi_0 &= \\ &= \frac{i\delta(\mathbf{k}' + \mathbf{q}' - \mathbf{k} - \mathbf{q})}{2\pi \sqrt{k_0 k'_0}} f_{\nu n, \mu m}(\mathbf{k}', \mathbf{q}'; \mathbf{k}, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $n, m$  — изотопические индексы бозонов, а  $\nu, \mu$  — спиновые и изотопические индексы фермиона. Представление (20) применимо,

например, для рассеяния света на электронах (комptonовское рассеяние) или для пион-нуклонного рассеяния. Матричная амплитуда рассеяния  $f_{\nu\mu, \mu\nu}$  имеет размерность  $[m^{-1}] = \text{см}^{-1}$  и может быть сделана безразмерной введением соответствующей массы. Этого, однако, обычно не делают из традиционных соображений соответствия ее нерелятивистского предела с размерной квантовомеханической амплитудой рассеяния.

Используя нормировку (20), получаем вместо (16)

$$n_1 n_2 (2\pi)^3 4 \frac{q_0' q_0}{k_0 k_0'} |f|^2 R_2. \quad (21)$$

Это выражение равно числу частиц, рассеянных в  $R_2$  в единичном объеме в единицу времени. Его обычно представляют в виде произведения  $n_1 n_2 v(k) d\sigma$ , где  $v(k)$  — модуль скорости налетающей частицы в лабораторной системе координат (л. с. к.) (равный единице для фотона и  $|k|/k_0$  для частиц с конечной массой покоя). Множитель  $d\sigma$ , имеющий размерность площади  $\text{см}^2$ , пропорционален элементу телесного угла частицы после рассеяния и называется *дифференциальным эффективным поперечным сечением*. Согласно (21) и (18а) его можно представить в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} = \frac{q_0' (k')^3}{k [(k')^2 Q_0 - k_0' (k' Q)]} |f|^2, \quad k = |k|. \quad (22)$$

В статическом пределе пион-нуклонного рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2. \quad (23)$$

Интегрируя дифференциальное сечение по полному телесному углу, получаем *полное эффективное поперечное сечение* в лабораторной системе координат

$$\sigma = \int_{4\pi} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (24)$$

Напомним еще, что с помощью так называемой оптической теоремы (см. Блохинцев (1976), § 86; Ландау Лифшиц (1974), § 125; Давыдов (1973), § 107) мнимая часть амплитуды упругого рассеяния вперед, определенной как предел амплитуды рассеяния на малый угол

$$f(E, \theta = 0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f(E, \theta), \quad (25)$$

выражается через полное эффективное поперечное сечение

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{elast}} + \sigma_{\text{inelast}} \quad (26)$$

линейным соотношением.

Для введенной в (20) амплитуды пион-нуклонного рассеяния оптическую теорему обычно записывают следующим образом:

$$\operatorname{Im} f_{\nu n, \mu m}(k, q; k, q) = \frac{|k|_{\text{л.с.к}}}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}^{\nu n}, \quad (27)$$

тогда как для безразмерной амплитуды пион-пионного рассеяния в нормировке (19) эту теорему удобно выразить через инвариантные переменные:

$$\operatorname{Im} f(k_1, k_2; k_1, k_2) = \frac{V S (S - 4m^2)}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}(S), \quad (28)$$

$$S = (k_1^2 + k_2^2)^2 - (k_1 + k_2)^2.$$

**21.5. Двухчастичный распад.** Допустим теперь, что в начальном состоянии находится одна частица ( $s=1$ ) массы  $M$ , а в конечном — две частицы  $r=2$  с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Этот случай соответствует двухчастичному распаду частицы  $M$ , который кинематически возможен при  $M > m_1 + m_2$ .

Согласно формуле (16) среднее число частиц в конечном состоянии, попадающих в интервалы  $dp_1, dp_2$  в единицу времени и единицу объема, будет

$$2\pi n \frac{|\mathcal{M}(p, k)|^2}{2k^0} R_2.$$

Переходя в систему покоя начальной частицы, т. е. в систему центра масс продуктов распада, получаем с помощью (18в) при  $n=1$

$$\frac{p_1}{32\pi^2 M^2} |\mathcal{M}(p, k)|^2 d\Omega.$$

Интегрируя это выражение по телесному углу, находим полную вероятность двухчастичного распада в единицу времени

$$w = \frac{p}{32\pi^2 M^2} \int d\Omega |\mathcal{M}(p, \Omega)|^2. \quad (29)$$

Величина  $w$  имеет размерность массы (в обычной системе единиц  $= \text{с}^{-1}$ ) и совпадает с энергетической шириной:  $w = \Gamma$ . В случае, если существует несколько каналов распада, полная ширина складывается из суммы выражений вида (29)

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_i \Gamma_i,$$

а время жизни исходной частицы  $\tau$  определяется соотношением

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{\text{tot}}} \left( = \frac{\hbar}{\Gamma_{\text{tot}}} \right). \quad (30)$$

## Глава VI. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ И РАСХОДИМОСТИ

### § 22. Техника вычисления интегралов

22.1. Интегралы по виртуальным импульсам. В общем случае количество вершин диаграммы меньше числа внутренних линий, вследствие чего матричный элемент представляется выражением, содержащим интегрирования по виртуальным 4-импульсам:

$$\mathcal{M}(\dots p \dots) = \int dk_1 \dots dk_c F(p, k).$$

Число интегрирований  $c$  равно числу «петель» диаграммы, т. е. числу содержащихся в ней топологически независимых замкнутых контуров.

Подынтегральная функция  $F$  представляет собой произведение пропагаторов (свободных функций Грина), имеющих структуру

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{P_{\alpha\beta}(k)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

и соответствующих внутренним линиям, через которые проходит 4-импульс интегрирования, умноженное на произведение множителей, соответствующих вершинам. Последние состоят из констант связи, матриц и, возможно, компонент, «проходящих» через вершину 4-импульсов (в случае, если лагранжиан взаимодействия содержит производные от функций поля).

Таким образом, наиболее общее выражение для интеграла по 4-импульсу имеет вид

$$I(p, L) = \frac{i}{\pi^2} \int dk \prod_l^L \{m_l^2 - (k + p_l)^2 - i\varepsilon\}^{-1} P(k, p), \quad (1)$$

где  $P$  — полином по компонентам 4-векторов  $k, \dots, p, \dots$  с матричными коэффициентами.

Наша ближайшая задача — развить технику вычисления интегралов типа (1).

**22.2. Альфа-представление и гауссовы квадратуры.** Для вычисления интеграла (1) используем следующий вспомогательный прием. Представим сомножители знаменателя подынтегрального выражения в виде интеграла по параметру:

$$\frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} = i \int_0^{\infty} e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} d\alpha. \quad (2)$$

Это преобразование назовем переходом в  $\alpha$ -представление. После такого перехода интегрирование в (1) сводится к взятию интегралов гауссовского вида.

Базовый четырехмерный гауссов интеграл имеет вид

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2 + 2bk)} dk = \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a}. \quad (3)$$

Здесь  $b$  — некоторый 4-вектор. Ввиду того, что левая и правая части покомпонентно факторизуются, вывод формулы (3) сводится к вычислению произведения четырех одномерных гауссовых квадратур вида

$$I(a, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(-at^2 + 2\beta t) dt.$$

Интеграл  $I$  для определенности будем считать пределом выражения

$$I(a + i\eta, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(-at^2 + 2bt) - \eta t^2] dt, \quad a > 0, \quad \eta \rightarrow +0,$$

для вычисления которого произведем замену переменной  $t \rightarrow x$ :

$$t = \frac{1-i}{\sqrt{2}} x + \frac{b}{a}, \quad i(-at^2 + 2bt) = -ax^2 + ib^2/a,$$

сводящуюся к сдвигу начала координат на  $b/a$  и последующему повороту контура интегрирования в комплексной плоскости на  $45^\circ$ . Тогда в пределе  $\eta = 0$  получим

$$I(a, b) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{-ib^2/a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = (\pi/ai)^{1/2} \exp(+ib^2/a), \quad a > 0.$$

Значение аналогичного интеграла при  $a < 0$  может быть получено отсюда операцией комплексного сопряжения

$$I(-|a|, b) = I^*(a, b) = (\pi i/|a|)^{1/2} \exp(-ib^2/|a|).$$

Возвращаясь к исходному выражению в левой части (3), пред-

ставим его в виде произведения

$$\int e^{i(ak_0^2 + 2b_0k_0)} dk_0 \prod_{1 \leq n \leq 3} \int e^{-i(a k_n^2 + 2b_n k_n)} dk_n = \\ = I(-a, b_0) I(a, b_1) I(a, b_2) I(a, b_3) = (\pi^2/ia^2) \exp \frac{b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2}{ia},$$

что и завершает доказательство формулы (3).

Обратим внимание на то, что вместо комплексного сопряжения интеграла  $I(a, b)$  при выполнении интегрирования по  $k_0$  можно было бы перейти к интегрированию по чисто мнимому аргументу  $k_0 = ik_4$ , что эквивалентно повороту контура интегрирования по  $k_0$  на  $90^\circ$ . Такую операцию, приводящую к 4-мерному евклидову интегралу

$$\int d^4k = \int dk^0 \int d\vec{k} \rightarrow i \int dk_4 \int d\vec{k} \equiv i \int (d_4k)_E,$$

иногда называют «виковым поворотом».

Остальные необходимые интегралы, содержащие множители  $k_\mu$  в числителе (отвечающие полиному  $P(k, p)$  в формуле (1)), могут быть получены из базового гауссова интеграла (3) путем повторного дифференцирования по компонентам  $b_\nu$ :

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^\nu] dk = \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \left[ -\frac{b^\nu}{a} \right], \quad (4a)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^\nu k^\mu] dk = \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \left[ \frac{2b^\nu b^\mu + iag^{\nu\mu}}{2a^2} \right], \quad (4б)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^2] dk = \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \left[ \frac{b^2 + 2ia}{a^2} \right]. \quad (4в)$$

Используя формулу (2), преобразуем правую часть в (1) к виду

$$\frac{i^{L+1}}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha_1 \dots d\alpha_L \int dk P(k, p) \exp i(Ak^2 + 2Bk - M^2 + i\epsilon A).$$

Здесь  $A = \alpha_1 + \dots + \alpha_L$ ,  $B = \sum_i \alpha_i p_i$ ,  $M^2 = \sum_i \alpha_i (m_i^2 - p_i^2)$ . Представляя далее  $P$  в виде

$$P(k, p) = P(p) + k^\nu P_\nu(p) + k^\nu k^\mu P_{\nu\mu}(p) + \dots,$$

получаем с помощью (3), (4)

$$I(p) = i^L \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_L}{A^2} \exp i \left( -\frac{B^2}{A} - M^2 + i\epsilon A \right) \times \\ \times \left[ P(p) - \frac{B^\nu}{A} P_\nu(p) + \frac{2B^\nu B^\mu + iAg^{\nu\mu}}{2A^2} P_{\nu\mu}(p) + \dots \right].$$

Для выполнения сингулярного интегрирования произведем замену переменных интегрирования  $(\alpha_1, \dots, \alpha_L) \rightarrow (x_1, \dots, x_{L-1}, A)$ :

$$\alpha_l = x_l A, \quad l = 1, 2, \dots, L-1, \quad \alpha_L = (1 - x_1 - \dots - x_{L-1})A,$$

$$\left| \frac{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_L}{\partial x_1 \dots \partial x_{L-1} \partial A} \right| = A^{L-1}. \quad (5)$$

Принимая во внимание, что

$$B^2/A + M^2 = AD(x, p); \quad D(x, p) = (\sum x_l p_l)^2 + \sum x_l (m_l^2 - p_l^2), \quad (6)$$

получаем

$$I(p; L) = i^L \int_0^\infty dA A^{L-3} \int_0^1 \{dx\}_L e^{iA(-D + i\epsilon)} \left\{ Q_0 + \frac{1}{A} Q_1 + \dots \right\}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{dx\}_L &= \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_L \delta \left( 1 - \sum_l x_l \right) = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \dots \int_0^{1-x_1-x_2-\dots-x_{L-2}} dx_{L-1}, \end{aligned}$$

$$Q_0(p, x) = P(p) - b^\nu P_\nu + b^\nu b^\mu P_{\nu\mu},$$

$$Q_1(p, x) = (i/2) P_\nu^2 + \dots, \quad b = \sum_l x_l p_l.$$

Теперь не составляет труда провести сингулярное интегрирование по  $A$  с помощью формул, родственных (2):

$$\int_0^\infty e^{iA(-D + i\epsilon)} A^{L-3} dA = \frac{-\Gamma(L-2)}{i^L (D - i\epsilon)^{L-2}}, \quad L > 2. \quad (8)$$

При интегрировании по  $A$  в правой части (7) при  $L \leq 2$  и (или) при наличии спинов у частиц ( $P_{\nu\mu} \neq 0$ ) формула (8) может оказаться неприменимой, так как индекс  $k$  окажется равным нулю или отрицательным. Такие интегралы содержат неинтегрируемую особенность при  $A=0$ , связанную с ультрафиолетовыми расходимостями исходных интегралов (1), и мы отложим их рассмотрение до § 23.

Изложенная выше процедура вполне достаточна для вычисления фейнмановских интегралов, не содержащих ультрафиолетовых расходимостей. В результате выполнения квадратур по  $A$   $I(p)$  представится в виде многократного интеграла по параметрам  $x_l$

$$I_L(p) = i^2 \int_0^1 \frac{\{dx\}}{(D - i\epsilon)^{L-2}} \left\{ (L-3)! Q_0 + \frac{(L-2)!}{iD} Q_1 + \dots \right\}. \quad (9)$$

Оставшиеся квадратуры по параметрам  $x_i$ , вообще говоря, не сингулярны и при  $l \leq 3$  могут быть проведены до конца.

**22.3. Фейнмановская параметризация.** Приведем еще один, часто употребляемый способ вычисления интеграла (1). Исходным шагом является формула, использованная в первоначальных работах Фейнмана:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_L} = (L-1)! \int_0^1 \frac{\{dx\}_L}{\left(\sum_{1 \leq i \leq L} a_i x_i\right)^L}. \quad (10)$$

Полагая  $(k + p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon = a_i$ , представим (1) в виде интеграла по параметрам  $x_i$

$$I_L(p; L) = (-1)^L (L-1)! \int_0^1 \{dx\}_L J_L(p, x), \quad (11)$$

где

$$J_L(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk P(k, p)}{[Z(p, k, x)]^L};$$

здесь  $Z$  — квадратичная форма по компонентам  $k$ :

$$Z(p, k, x) = \sum_i x_i [(k + p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon] = k^2 + 2bk + b^2 - D + i\epsilon.$$

После сдвига переменной интегрирования  $k \rightarrow k + b = q$  имеем

$$J_L(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq P(q - b, p)}{(q^2 - D + i\epsilon)^L}, \quad (12)$$

где  $D$  — форма, введенная ранее формулой (6).

Этот интеграл в ряде случаев может быть сведен к более простому

$$\tilde{J}_3(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq}{(q^2 - D + i\epsilon)^3}. \quad (13)$$

Для того чтобы убедиться в этом, заметим, во-первых, что все интегралы вида  $\int q^\nu F(q^2) dq$ ,  $\int q^\nu q^\mu q^\rho F(q^2) dq$ , ..., содержащие нечетное число компонент вектора интегрирования  $q^\nu$ , по соображениям симметрии обращаются в нуль. Из этих же соображений интегралы с четным числом компонент упрощаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \int q^\nu q^\mu F(q^2) dq &= (1/4) g^{\nu\mu} \int q^2 F(q^2) dq, \\ \int q^\nu q^\mu q^\rho q^\sigma F(q^2) dq &= (1/24) (g^{\nu\mu} g^{\rho\sigma} + g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) \int (q^2) F(q^2) dq. \end{aligned}$$

Поэтому полином  $P(q - b, p)$  может быть заменен полиномом по степеням  $q^2$ , а следовательно, и по степеням аргумента  $q^2 - D$ . Вследствие этого исходный интеграл (12) выразится через линей-



ную комбинацию интегралов

$$\tilde{J}_l(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq}{(q^2 - D + i\varepsilon)^l}, \quad l \leq L. \quad (14)$$

Эти последние в свою очередь операцией интегрирования по  $D$  при  $l \geq 3$  сводятся к  $\tilde{J}_3$ . При  $l \leq 2$  интеграл (14) не существует. Интеграл (13) может быть вычислен путем комбинирования формул (2), (3) и (8). Получаем этим путем

$$\begin{aligned} \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq_0 dq}{(q_0^2 - q^2 - D + i\varepsilon)^2} &= \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq_0 dq}{(-q_0^2 - q^2 - D + i\varepsilon)^2} = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d_E q}{(q_E^2 + D)^2} = \frac{1}{2D}. \end{aligned} \quad (15)$$

Дифференцируя по  $D$ , имеем также

$$\tilde{J}_L(p, x) = \frac{(-1)^{L+1}}{(L-1)(L-2)} \frac{1}{D^{L-2}} \quad (L \geq 3). \quad (16)$$

Подставляя в (11), получаем

$$\tilde{I}_L(p) = -(L-3)! \int_0^1 \frac{\{dx\}_L}{[D(x, p) + i\varepsilon]^{L-2}} \quad (17)$$

— формулу, совпадающую с (9) в простейшем ( $P(k, p) = 1$ ) случае.

Таким образом, оба способа интегрирования приводят к одинаковым выражениям.

**22.4. Ультрафиолетовые расходимости.** Как уже неоднократно отмечалось выше, матричные элементы, формально определенные правилами Фейнмана в виде интегралов (1) по виртуальным импульсам, могут оказаться не существующими в силу недостаточно быстрого убывания подынтегрального выражения в области больших  $k$ .

Расходимости интегралов по виртуальным импульсам в области больших  $k$  называются ультрафиолетовыми. Ультрафиолетовые расходимости являются типичными для матричных элементов теории возмущений релятивистской квантовой теории поля. Они являются не исключением, а правилом.

Простейшая расходимость отвечает однопетлевому интегралу с двумя бесспиновыми внутренними линиями (рис. 22.1)

$$I(p) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk}{(m^2 - k^2 - i\varepsilon)[m^2 - (k+p)^2 - i\varepsilon]},$$

который в области больших  $k$  расходится логарифмически.

Интеграл  $I(p)$  представляет фурье-образ квадрата причинной функции Грина:

$$\int e^{ip(x-y)} I(p) dp \sim i2^3 \pi^6 [D^c(x-y)]^2.$$

Выражение, стоящее в правой части, является неопределенным в силу сингулярного характера функции  $D_c$  на световом конусе. Оно возникает при раскрытии с помощью теоремы Вика хронологического произведения  $T(\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y))$ , входящего в  $S_2(x, y)$ . В § 14 было установлено, что это выражение неопределено при  $x=y$ , а в § 16 было показано, что оно может быть доопределено с помощью квазилокального оператора  $\Lambda_2(x, y)$ .



Рис. 22.1. Скалярная однопетлевая диаграмма второго порядка.

Оказывается возможным выбрать оператор  $\Lambda_2$  таким образом, чтобы доопределенные выражения типа (16), (17) оказались конечными. Подобная программа известна как процедура устранения ультрафиолетовых расходимостей с помощью метода перенормировок. Мы рассмотрим ее более подробно ниже в §§ 27, 28.

Для анализа характера ультрафиолетовых расходимостей и выбора адекватных  $\Lambda_2, \Lambda_3, \dots$  оказывается удобным использовать процедуру вспомогательной промежуточной регуляризации расходящихся интегралов. К рассмотрению различных вариантов этой процедуры мы сейчас перейдем.

## § 23. Вспомогательные регуляризации

**23.1. Необходимость регуляризации.** Как было установлено в § 18.3, причинные функции Грина, фигурирующие в правилах Фейнмана, являются сингулярными функциями, обладающими особенностями на световом конусе. С математической точки зрения они представляют собой обобщенные функции. Интегралы по виртуальным 4-импульсам, введенные в предыдущем параграфе и отвечающие замкнутым петлям диаграмм, представляют фурье-образы произведений причинных  $\Delta_c$ -функций, аргументы которых соответствуют элементам этих петель.

Как отмечалось в конце предыдущего параграфа, простейший интеграл

$$I(k) \sim \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)(m^2 - (p-k)^2 - i\varepsilon)}, \quad (1)$$

отвечающий однопетлевой диаграмме с двумя скалярными внутренними линиями (см. рис. 22.1), является фурье-образом произведения двух пропагаторов с совпадающими аргументами:

$$I(k) = 16\pi^2 i \int e^{ikx} [D_c(x)]^2 dx. \quad (2)$$

Такие произведения, согласно формуле (18.22), содержат квадраты сингулярных обобщенных функций вида  $\delta(\lambda), \lambda^{-1}$  (где  $\lambda = x^2$ ) и потому не являются хорошо определенными величинами. Иными

словами, с математической точки зрения произведения пропагаторов и их фурье-образы нуждаются в доопределении.

Подчеркнем, что необходимость специального определения произведений вообще типична для обобщенных функций. Дело в том, что обобщенная функция задается правилами интегрирования ее произведения с достаточно регулярными функциями, а из таких правил рецептура интегрирования произведения нескольких обобщенных функций не следует.

Для того чтобы сконструировать необходимые определения, можно воспользоваться методом несобственного предельного перехода и попытаться определить соответствующие произведения  $\prod_{r \neq s} \{\Delta_c(x_r - x_s)\}$  и их фурье-образы вида (22.1) с помощью последовательности регулярных выражений. Здесь возможны два различных подхода.

Один из них основан на получении регулярных приближений к самим причинным функциям, т. е. к замене обобщенных сингулярных функций

$$\Delta_c(x) \rightarrow \text{reg } \Delta_c(x)$$

на некоторые регуляризованные приближения, являющиеся непрерывными на световом конусе вместе с необходимым числом своих производных. При этом произведения регуляризованных пропагаторов  $\prod \{\text{reg } \Delta_c(x_r - x_s)\}$  также оказываются регулярными. Весьма употребительной процедурой такого рода является регуляризация Паули — Вилларса.

Второй способ действий оставляет неизменными исходные выражения для пропагаторов и заключается в построении регулярных приближений к их произведениям и интегралам по виртуальным 4-импульсам. К этому типу относятся регуляризация обрезанием, а также размерная регуляризация.

**23.2. Регуляризация Паули — Вилларса.** Она заключается в замене сингулярных функций Грина свободного поля с массой  $m$  на линейную комбинацию

$$\Delta(m) \rightarrow \text{reg}_m \Delta(m) = \Delta(m) + \sum_i c_i \Delta(M_i). \quad (3)$$

Здесь символом  $\Delta(m)$  обозначена функция Грина поля с массой  $m$ . В дальнейшем мы всегда будем подразумевать под символом  $\Delta$  причинную функцию Грина, хотя процедура Паули — Вилларса формулируется единым образом как для  $\Delta_c$ , так и для  $\Delta_{\text{ret}}$ ,  $\Delta_{\text{adv}}$ ,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^-$ . В правой части  $\Delta(M_i)$  — вспомогательные величины, являющиеся функциями Грина фиктивных полей с массами  $M_i$ , а  $c_i$  — некоторые коэффициенты, удовлетворяющие специальным условиям. Эти условия подбираются таким образом, чтобы регуляризованная функция  $\text{reg } \Delta(x; m)$ , рассматриваемая в коорди-

натном представлении, оказалась достаточно регулярной в окрестности светового конуса, или, что эквивалентно, функция  $\text{reg } \tilde{\Delta}(p; m)$  в импульсном представлении достаточно быстро убывала в области больших значений  $|p^2|$ .

Так, для полей с целым спином на основании заключительных формул § 18.3 видим, что наиболее сильные особенности на световом конусе  $\delta(\lambda)$  и  $\lambda^{-1}$  входят в  $D(x; m)$  с коэффициентами, не зависящими от массы  $m$ . Поэтому, налагая на  $c_i$  условие

$$1 + \sum_i c_i = 0, \quad (4a)$$

мы получим для  $\text{reg } \Delta(x; m)$  выражение, не содержащее особенностей  $\delta(\lambda)$ ,  $\lambda^{-1}$ . Его фурье-образ  $\text{reg } \tilde{\Delta}(p; m)$  в области больших  $|p^2|$  будет убывать как  $|p^2|^{-2}$ . Подобным образом условие

$$m^2 + \sum_i c_i M_i^2 = 0 \quad (4б)$$

обеспечивает отсутствие в  $\text{reg } \Delta(x)$  особенностей вида  $\theta(\lambda)$ ,  $\ln \lambda$  и приводит к тому, что  $\text{reg } \tilde{\Delta}(p)$  в ультрафиолетовой области убывает как  $|p^2|^{-6}$ .

Снятие регуляризации Паули — Вилларса осуществляется переходом к пределу  $M_i \rightarrow \infty$ .

Простейший случай регуляризации Паули — Вилларса сводится к введению одной вспомогательной массы  $M$  с коэффициентом  $c = -1$ , удовлетворяющим условию (4а). В импульсном представлении

$$D_c(p) = \frac{1}{m^2 - p^2} \rightarrow \text{reg}_M D_c(p) = \frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{M^2 - p^2}. \quad (5)$$

Проводя регуляризацию (5) в подынтегральном выражении правой части (1), получаем

$$I(k) \rightarrow \text{reg}_M I(k) = \\ = \frac{i}{\pi^2} \int dp \left[ \frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{M^2 - p^2} \right] \left[ \frac{1}{m^2 - (p-k)^2} - \frac{1}{M^2 - (p-k)^2} \right].$$

Правая часть этого уравнения является конечным выражением и может быть вычислена с помощью техники § 22. Получаем этим путем

$$\text{reg}_M I(k) = i^2 \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^2} e^{ik^2 \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}} [e^{-i\alpha m^2} - e^{-i\alpha M^2}] [e^{-i\beta m^2} - e^{-i\beta M^2}] = \\ = \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{xM^2 + (1-x)m^2 - x(1-x)k^2} \cdot \frac{M^2 - x(1-x)k^2}{(1-x)M^2 + xm^2 - x(1-x)k^2} \right].$$

Здесь мы использовали формулы вида

$$\int_0^{\infty} \frac{da}{a} (e^{tAa} - e^{tBa}) e^{-\varepsilon a} = \ln \frac{B + i\varepsilon}{A + i\varepsilon}$$

(см. Дополнение VI).

Теперь следует приступить к снятию регуляризации. Устремляя  $M^2$  к бесконечности, имеем

$$\text{reg}_M I(k) \approx -\ln \frac{M^2}{\mu^2} + \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{m^2 - x(1-x)k^2 - i\varepsilon}{\mu^2} \right] + O\left(\frac{1}{M^2}\right), \quad (6)$$

где  $\mu^2$  — произвольный положительный параметр.

Таким образом, снять регуляризацию непосредственно не удается. Можно лишь в явном виде выделить из  $I(k)$  ультрафиолетовую бесконечность

$$\text{reg}_M I(k) = -\ln \frac{M^2}{\mu^2} + I_{\text{кон}}(M)(k^2, \mu^2), \quad (7)$$

где конечная часть  $I_{\text{кон}}$  может быть вычислена в явном виде (см. ниже § 24.1).

Приведем еще без выкладок результат вычисления с помощью регуляризации Паули—Вилларса квадратично расходящегося интеграла

$$J_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p_\mu p_\nu dp}{[m^2 - (p - k/2)^2][m^2 - (p + k/2)^2]}, \quad (8)$$

входящего составной частью во вклад диаграммы собственной энергии фотона (см. ниже § 24.2). В пределе  $M^2 \rightarrow \infty$  получаем  $\text{reg}_M J_{\mu\nu}(k) =$

$$= \frac{1}{4} g_{\mu\nu} M^2 + \left[ g_{\mu\nu} \left( \frac{k^2}{12} - \frac{m^2}{2} \right) + \frac{k_\mu k_\nu}{12} \right] \ln \frac{M^2}{\mu^2} + J_{\mu\nu}^{\text{кон}}(M)(k), \quad (9)$$

где конечная часть

$$J_{\mu\nu}^{\text{кон}}(M)(k) = \frac{3}{4} g_{\mu\nu} m^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 dx [2g_{\mu\nu} Z(x, k^2) - k_\mu k_\nu (1-2x)^2] \ln \frac{Z(x, k^2)}{\mu^2},$$

$$Z(x, k^2) = m^2 - x(1-x)k^2 - i\varepsilon$$

может быть проинтегрирована до конца.

Ряд других формул для часто встречающихся расходящихся интегралов приведен в Дополнении VII.

**23.3. Размерная регуляризация.** Эта регуляризация состоит в том, что интеграл по 4-мерному многообразию виртуальных импульсов заменяют на символ, формально соответствующий

интегралу по пространству  $n = 4 - 2\varepsilon$  измерений. При этом  $\varepsilon$  считается малой положительной величиной, и кратность регуляризованного интегрирования  $n$  оказывается нецелой.

Мы обозначаем здесь, следуя установившемуся обычаю, нецелую часть размерности с помощью того же самого символа  $\varepsilon$ , который используется для определения причинной функции. В этом разделе мы будем использовать его лишь в новом значении, молчаливо подразумевая, что  $m^2 = m^2 - i\delta$  ( $\delta \rightarrow +0$ ).

В евклидовом случае операция введения размерной регуляризации выглядит следующим образом:

$$\int (d^4 p)_E = \int_{\Omega(4)} d\Omega \int_0^\infty p^3 dp \rightarrow \int d^n p \equiv \mu^{2\varepsilon} \int_{\Omega(n)} d\Omega \int_0^\infty p^{n-1} dp, \quad (10)$$

причем объем  $\Omega(n)$  единичной сферы в  $n$ -мерном пространстве интерполируется с помощью  $\Gamma$ -функции Эйлера:

$$\Omega(n) = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2),$$

а зависимость от параметра  $\mu$ , имеющего размерность массы, введена из соображений сохранения общей размерности.

Вместо этого можно также непосредственно интерполировать формулы предыдущего параграфа. Основная гауссова квадратура принимает вид

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^n p e^{i(a p^2 + 2b p)} = \left(\frac{i a \mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{1}{a^2} e^{-i b^2/a}. \quad (11)$$

Основной интеграл в фейнмановской параметризации может быть теперь вычислен путем комбинирования формул (11) и (22.8). Он оказывается равным

$$\text{reg}_\varepsilon J_1(D) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(p^2 - D)^l} = \left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{(-1)^{l+1} \Gamma(l + \varepsilon - 2)}{D^{l+\varepsilon-2} \Gamma(l)}. \quad (12)$$

Вычислим интеграл (1) методом размерной регуляризации с помощью перехода в  $\alpha$ -представление:

$$\begin{aligned} I(k) &\rightarrow \text{reg}_\varepsilon I(k) = \frac{i \mu^{2\varepsilon}}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(m^2 - p^2) [m^2 - (p+k)^2]} = \\ &= \frac{i^3 \mu^{2\varepsilon}}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha d\beta e^{i\beta k^2 - i(\alpha + \beta) m^2} \int d^n p e^{i(\alpha + \beta) p^2 + 2i\beta p k} = \\ &= - \left(\frac{i \mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^{2-\varepsilon}} e^{i \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} k^2 - i(\alpha + \beta) m^2} = \\ &= - \left(\frac{i \mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{da}{a^{1-\varepsilon}} e^{i a Z(x, k^2)}. \end{aligned}$$

Для вычисления появившегося интеграла воспользуемся квадратурой (22.8). Находим

$$\operatorname{reg}_\varepsilon I(k) = -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \frac{dx}{[m^2 - x(1-x)k^2]^\varepsilon}. \quad (13)$$

Теперь необходимо снять регуляризацию, т. е. устремить  $\varepsilon$  к нулю. Используя соотношение

$$\Gamma(\varepsilon) \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - C + O(\varepsilon) \quad (C = 0,5772\dots), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

получаем

$$\operatorname{reg}_\varepsilon I(k) \rightarrow -1/\varepsilon + I^{\text{кон}}(\varepsilon)(k), \quad (14)$$

где

$$I^{\text{кон}}(\varepsilon)(k) = \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right] + \ln \pi + C.$$

Таким образом, в методе размерной регуляризации сингулярная часть интеграла, логарифмически расходящегося в ультрафиолетовой области, принимает обличие полюса  $\varepsilon^{-1}$ .

Приведем еще без выкладки результат вычисления квадратично расходящегося интеграла (8):

$$\operatorname{reg}_\varepsilon J_{\mu\nu}(k) = \left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon)}{4} \int_0^1 \frac{dx}{(Z)^\varepsilon} \left[ 2g_{\mu\nu} \frac{Z}{1-\varepsilon} - k_\mu k_\nu (1-2x)^2 \right],$$

где

$$Z = Z(x, k^2) = m^2 - x(1-x)k^2.$$

В пределе малых  $\varepsilon$  имеем

$$\operatorname{reg}_\varepsilon J_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{2\varepsilon} \left[ g_{\mu\nu} m^2 - \frac{g_{\mu\nu} m^2 + k_\mu k_\nu}{6} \right] + J_{\mu\nu}^{\text{кон}}(\varepsilon)(k), \quad (15)$$

причем

$$J_{\mu\nu}^{\text{кон}}(\varepsilon)(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left( m^2 - \frac{k^2}{6} \right) + \frac{1}{4} \int_0^1 dx [2g_{\mu\nu} Z - k_\mu k_\nu (1-2x)^2] \ln Z. \quad (16)$$

Сравнивая формулы (6) и (14), заключаем, что логарифмические ультрафиолетовые расходимости в методе размерной регуляризации выступают в виде полюсов по  $\varepsilon$ . Сравнение формул (9) и (15) подтверждает это заключение и свидетельствует также о том, что и квадратичные ультрафиолетовые расходимости в этом методе приводят к полюсу  $\varepsilon^{-1}$ .

**23.4. Регуляризация обрезанием.** Она является наиболее простой с интуитивной точки зрения и состоит в обрезании импульсных интегралов на некотором верхнем пределе. После приведения

4-импульсного интеграла к евклидову виду эта регуляризация может быть сформулирована следующим образом:

$$\int dp = i \int (d^4 p)_E = i \int dp_4 \int dp \rightarrow \text{reg}_\Lambda \int dp = \int_{\Omega_\Lambda} dp = i \int_{\Omega(4)} d\Omega \int_0^\Lambda p^3 dp.$$

Не составляет труда убедиться, что для расходящихся импульсных интегралов в фейнмановской параметризации регуляризация обрезанием дает

$$\text{reg}_\Lambda J_2(D) = \frac{i}{\pi^2} \int_{\Omega_\Lambda} \frac{dq}{(q^2 - D + i\varepsilon)^2} = \ln \frac{D - i\varepsilon}{\Lambda^2} + 1, \quad (17)$$

$$\text{reg}_\Lambda J_{\mu\nu}(D) = \frac{i}{\pi^2} \int_{\Omega_\Lambda} \frac{q_\mu q_\nu dq}{(q^2 - D + i\varepsilon)^2} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left( \Lambda^2 - 2D \ln \frac{\Lambda^2}{D} - D \right). \quad (18)$$

При использовании  $\alpha$ -представления более удобно ввести плавное обрезание (фейнмановская регуляризация)

$$\int dp \rightarrow \text{reg}_{\Lambda(F)} \int dp = \int dp \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - p^2}, \quad (19)$$

которого оказывается достаточно для логарифмически расходящихся интегралов. В простейших случаях оно сводится к варианту регуляризации Паули — Вилларса и позволяет, модифицировав исходный интеграл, использовать без изменения формулы предыдущего параграфа. Так, для интеграла (1) получаем

$$\begin{aligned} \text{reg}_{\Lambda(F)} I(k) &= \frac{i\Lambda^2}{\pi^2} \int \frac{dp}{(m^2 - p^2)(\Lambda^2 - p^2)[m^2 - (p-k)^2]} = \\ &= \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{m^2 - (p-k)^2} \left( \frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{\Lambda^2 - p^2} \right) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - m^2} = \\ &= i^2 \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^2} e^{i\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} k^2 - i\alpha m^2} (e^{-i\beta m^2} - e^{-i\beta \Lambda^2}) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - m^2} = \\ &= \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - m^2} \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{x m^2 + (1-x)\Lambda^2 - x(1-x)k^2} \right] \rightarrow -\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \\ &\quad + \left\{ 1 + \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right] \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

## § 24. Однопетлевые диаграммы

Рассмотрим теперь подробнее ряд простейших фейнмановских интегралов, отвечающих однопетлевым диаграммам и содержащих одно четырехмерное импульсное интегрирование.

**24.1. Скалярная «рыба».** Наиболее простая диаграмма второго порядка с двумя внутренними линиями (см. рис. 22.1) известна



под названием «рыба». В случае, когда обе внутренние линии отвечают скалярному полю с массой  $m$ , матричный элемент  $I$  имеет вид интеграла

$$I(k) \sim \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{(m^2 - p^2 - i\epsilon) [m^2 - (p-k)^2 - i\epsilon]}. \quad (23.1)$$

Этот интеграл логарифмически расходится в области больших значений  $p$ . В предыдущем параграфе он был изучен с помощью различных регуляризаций. Сравнение формул (23.6, 7, 14, 20) показывает, что расходящееся выражение (23.1) после выделения сингулярного аддитивного вклада, не зависящего от  $k$ , сводится к конечному выражению

$$I_{\text{кон}}(k) = \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right]. \quad (1)$$

Иными словами, можно записать

$$I(k) = I_{\text{синг}} + I_{\text{кон}}(k). \quad (2)$$

Расходящаяся константа  $I_{\text{синг}}$  при регуляризации Паули — Вилларса равна  $\ln(\mu^2/M^2)$ , при размерной регуляризации —  $\ln \pi + C - 1/\epsilon$ , при регуляризации обрезанием —  $1 + \ln \mu^2/\Lambda^2$ .

Конечная часть  $I_{\text{кон}}$  содержит зависимость от произвольного параметра  $\mu^2$  и определена с точностью до аддитивной постоянной. Выбранное нами в (1) определение этой константы совершенно произвольно. Правую часть (1) удобно разбить на два члена

$$J\left(\frac{p^2}{4m^2}\right) + \left(\ln \frac{m^2}{\mu^2} - 2\right),$$

где интеграл

$$J(z) = \int_0^1 dx \ln [1 - 4x(1-x)z] + 2 = \int_0^1 dx \ln \frac{1 - 4x(1-x)z}{1 - 4x(1-x)}$$

может быть представлен в виде

$$J(z) = (1-z) \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma(\sigma-1)}(\sigma-z+i\epsilon)}. \quad (3)$$

Полученное выражение (3) имеет структуру интеграла Коши. Мы будем называть подобные формулы *спектральными представлениями*. Спектральное представление (3) определяет функцию комплексного переменного  $z$ , имеющую особенность на разрезе  $\text{Im} z = 0$ ,  $\text{Re} z \geq 1$ . На остальной части действительной оси она

действительна:

$$\begin{aligned}
 J(x) &= 2 \left( \frac{1-x}{x} \right)^{1/2} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{1-x} \right)^{1/2} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\
 &= 2 \left( \frac{x-1}{x} \right)^{1/2} \operatorname{Arth} \left( \frac{x}{x-1} \right)^{1/2} = \\
 &= 2 \left( \frac{x-1}{x} \right)^{1/2} \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{-x}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{при } x \leq 0. \\ \sim + \ln(-x) \end{array} \right\} \quad (4)
 \end{aligned}$$

При  $x > 1$  подынтегральное выражение в (3) содержит полюс, правило обхода которого определяется бесконечно малой добавкой  $+i\epsilon$ . Используя символическую формулу (ДV.6), получим

$$J(x) = -i\pi \left( \frac{x-1}{x} \right)^{1/2} + 2 \left( \frac{x-1}{x} \right)^{1/2} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \quad \text{при } x \geq 1. \quad (5)$$

Таким образом, в ультрафиолетовой области при  $|p^2| \gg m^2$

$$\begin{aligned}
 I_{\text{ков}}(p^2, \mu^2) &= + \ln(|p^2/\mu^2|) - i\pi\theta(p^2) + \text{const} = \\
 &= - \ln(-p^2/\mu^2) + \text{const}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

**24.2. Собственные энергии фотона и электрона.** В спинорной электродинамике диаграммы, топологически эквивалентные рассмотренной, могут отличаться типом внешних и внутренних линий (рис. 24.1, а, б). Когда внешние линии фотонные, а внутренние

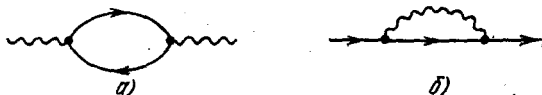


Рис. 24.1. Однопетлевые диаграммы второго порядка спинорной электродинамики: а) собственная энергия фотона; б) собственная энергия электрона.

электронные, мы имеем диаграмму собственной энергии фотона. Соответствующий интеграл

$$I^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{i\pi^2} \int dq \operatorname{Sp} \left( \frac{1}{m+\hat{q}} \gamma^\mu \frac{1}{m+\hat{q}+\hat{k}} \gamma^\nu \right), \quad (7)$$

будучи умножен на  $e^2/16\pi^2 = \frac{\alpha}{4\pi}$ , образует так называемый *поляризационный оператор*

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{\alpha}{4\pi} I^{\mu\nu}(k). \quad (8)$$

Фейнмановский интеграл (7) в области больших  $q$  расходится квадратично. Для его регуляризации используем вариант процедуры Паули — Вилларса:

$$S_c(q) = \frac{1}{i} \frac{1}{m+\hat{q}} \rightarrow \operatorname{reg} S_c(q) = \frac{m-\hat{q}}{i} \left( \frac{1}{m^2-q^2} - \frac{1}{M^2+m^2-q^2} \right).$$

Регуляризованное выражение

$$I_M^{\nu\sigma}(k) = \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{dg \operatorname{Sp}(\dots)}{(m^2 - q^2)(M^2 + m^2 - q^2)[m^2 - (k+q)^2][M^2 + m^2 - (k+q)^2]}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp}(\dots) &= \operatorname{Sp}[(m - \hat{q})\gamma^\nu(m - \hat{q} - \hat{k})\gamma^\sigma] = \\ &= 4g^{\nu\sigma}m^2 + 8q^\nu q^\sigma + 4(q^\nu k^\sigma + k^\nu q^\sigma) - 4g^{\nu\sigma}(q^2 + qk), \end{aligned}$$

с помощью стандартных преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} I_M^{\nu\sigma}(k) &= 4i \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \exp i\lambda[x(1-x)k^2 - m^2 - i\varepsilon] \times \\ &\times (1 - e^{-ix\lambda M^2})(1 - e^{-i(1-x)\lambda M^2}) \times \\ &\times \left[ ix(1-x)(2k^\nu k^\sigma - g^{\nu\sigma}k^2) + g^{\nu\sigma} \left( \frac{1}{\lambda} + im^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Для выполнения интегрирования по  $\lambda$  члены, содержащие в знаменателе  $\lambda$  и  $\lambda^2$ , преобразуем по формулам

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\varepsilon\lambda} (e^{i\lambda a} - e^{i\lambda A}) &= \ln \frac{A + i\varepsilon}{a + i\varepsilon}, \\ \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} e^{-\varepsilon\lambda} f(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\varepsilon\lambda} f'(\lambda). \end{aligned}$$

Окончательный результат вычислений в пределе  $M^2 \rightarrow \infty$  будет

$$\Pi_M^{\nu\sigma}(k) = \frac{\alpha}{2\pi} M^2 g^{\nu\sigma} + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} (g^{\nu\sigma} k^2 - k^\nu k^\sigma) + \Pi_{\text{кон}}^{\nu\sigma}(k), \quad (10)$$

где

$$\Pi_{\text{кон}}^{\nu\sigma}(k) = \frac{\alpha}{\pi} (k^2 g^{\nu\sigma} - k^\nu k^\sigma) I\left(\frac{k^2}{4m^2}\right), \quad (11)$$

причем

$$I(z) = \int_0^1 dx (1-x)x \ln[1 - 4x(1-x)z].$$

Явное интегрирование по  $x$  позволяет получить выражение, родственное функции  $J(z)$  введенной в (5):

$$I(z) = \frac{2}{3} [J(z) + J'(z)] - 4/9. \quad (12)$$

Спектральное представление для  $I$  имеет вид

$$I(z) = -\frac{z}{3} \int_1^\infty \frac{1+2\sigma}{\sigma^2} \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \frac{d\sigma}{\sigma-z}. \quad (13)$$

Диаграмме собственной энергии электрона (рис. 24.1, б) соответствует линейно расходящееся выражение

$$\Sigma(p) \sim \frac{1}{\pi^2} \int \frac{dq}{q^2 + i\epsilon} \gamma^v \frac{1}{m - \hat{q} - \hat{p}} \gamma_v, \quad (14)$$

которое после регуляризации фотонного пропагатора

$$\frac{1}{q^2} \rightarrow \frac{1}{q^2} + \frac{1}{M^2 - q^2} = \frac{M^2}{q^2 (M^2 - q^2)} \quad (15)$$

сводится к следующему:

$$\Sigma_M(p) = 2 \int_0^1 dx (2m - x\hat{p}) \ln \frac{\rho^2 x(1-x) - (1-x)m^2 - xM^2}{x\rho^2(1-x) - (1-x)m^2}.$$

В пределе  $M^2 \rightarrow \infty$  получаем

$$\Sigma_M(p) \simeq (4m - \hat{p}) \ln \frac{M^2}{m^2} + \Sigma_{\text{кон}}(p), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{кон}}(p) &= 2 \int_0^1 dx (2m - x\hat{p}) \left( \ln \frac{m^2}{m^2 - x\rho^2} + \ln \frac{x}{1-x} \right) = \\ &= \left[ \hat{p} \left( \frac{\rho^2 + m^2}{m^2} \right) - 4m \right] \left( \frac{\rho^2 - m^2}{\rho^2} \right) \ln \left( \frac{m^2 - \rho^2}{m^2} \right) + 4m - \hat{p} \left( \frac{3}{2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

**24.3. Треугольные вершинные диаграммы.** Обратимся теперь к однопетлевым диаграммам, состоящим из трех линий. В простей-

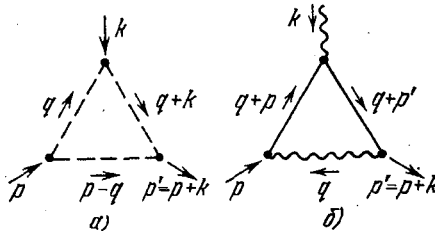


Рис. 24.2. Однопетлевые вершинные диаграммы третьего порядка: а) в скалярной модели, б) в спинорной электродинамике.

шем случае, когда все эти линии скалярные (рис. 24.2, а), соответствующий фейнмановский интеграл

$$\Gamma(p, k) = \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{dq}{m^2 - q^2} \cdot \frac{1}{m^2 - (q+k)^2} \cdot \frac{1}{m^2 - (q-p)^2} \quad (18)$$

сходится. В результате интегрирования по  $q$  он приводится к виду

$$\Gamma(p^2, k^2, p'^2) = \int_0^1 \frac{\{dx\}_3}{m^2 - x_1 x_2 k^2 - x_1 x_3 p^2 - x_2 x_3 p'^2}, \quad p' = p + k. \quad (19)$$

Здесь использовано сокращенное обозначение (ДV.7), введенное после формулы (22.7).

Рассмотрим важную с физической точки зрения треугольную вершинную диаграмму спинорной электродинамики, изображенную на рис. 24.2, б. Соответствующий интеграл

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq}{-q^2} \gamma^\mu \frac{1}{m - \hat{q} - \hat{p}} \gamma^\nu \frac{1}{m - \hat{q} - \hat{p}'} \gamma_\mu \quad (20)$$

в области больших  $q$  расходится логарифмически. Проводя регуляризацию фотонного пропагатора по формуле (15)

$$\Gamma_M^\nu(p, p') = \frac{M^2 i}{\pi^2} \int \frac{dq}{q^2 (q^2 - M^2)} \frac{\gamma^\mu (m + \hat{q} + \hat{p}) \gamma^\nu (m + \hat{q} + \hat{p}') \gamma_\mu}{[m^2 - (q + p)^2] [m^2 - (q + p')^2]}, \quad (21)$$

получаем после необходимых преобразований в пределе больших  $M$

$$\text{reg}_M \Gamma^\nu(p', p, k) = \gamma^\nu \ln \frac{M^2}{\mu^2} + \Gamma_{\text{кон}}^\nu, \quad (22)$$

$$\Gamma_{\text{кон}}^\nu = 2 \int_0^1 \{dx\}_3 \left( \gamma^\nu \ln \frac{\mu^2}{Z} + \frac{N^\nu}{Z} \right), \quad (23)$$

где

$$Z = m^2 (1 - x_1) - x_1 x_2 p'^2 - x_1 x_3 p^2 - x_2 x_3 k^2,$$

$$\begin{aligned} N^\nu = & \gamma^\nu \{ m^2 + (1 - x_3) (1 - x_2) k^2 - x_1 (1 - x_2) p'^2 - x_1 (1 - x_3) p^2 \} + \\ & + k^\nu \{ (1 - x_2) (1 - x_3) (\hat{p} - \hat{p}') + 2m (x_2 - x_3) \} + \\ & + (p^\nu + p'^\nu) \{ (1 - x_2) (1 - x_3) (\hat{p} + \hat{p}') - 2m x_1 \} - \\ & - x_1 \hat{p}' \gamma^\nu \hat{p} - 2x_2 (1 - x_2) p'^\nu \hat{p}' - 2x_3 (1 - x_3) p^\nu \hat{p}. \end{aligned}$$

В правой части (23) можно провести некоторые упрощения и выполнить два интегрирования. Ввиду громоздкости мы не будем проводить эти выкладки. Отметим лишь, что в важном частном случае, когда электрон до и после акта взаимодействия находится на массе поверхности, соответствующая проекция вершинной функции может быть представлена в виде

$$\bar{u}(p') \Gamma_{\text{кон}}^\nu u(p) = f_1(k^2) \bar{u}(p') \gamma^\nu u(p) + f_2(k^2) \bar{u}(p') \left\{ \frac{p^\nu + p'^\nu}{2m} - \gamma^\nu \right\} u(p), \quad (24)$$

т. е. выражена через два формфактора

$$f_1(k^2) = 2 \int_0^1 \{dx\}_3 \ln \frac{\mu^2}{Z_0} + \int_0^1 \{dx\}_3 \frac{N_1}{Z_0}, \quad (25)$$

$$f_2(k^2) = \int_0^1 \{dx\}_3 \frac{N_2}{Z_0}, \quad (26)$$

причем

$$Z_0 = m^2 (1 - x_1)^2 - x_2^2 x_3^2 k^2,$$

$$N_1 = 2m^2 (1 - 4x_1 + x_1^2) - 2k^2 (1 - x_2) (1 - x_3), \quad N_2 = 4m^2 x_1 (x_2 - 1).$$

Интегралы в (25) и (26) можно выразить через элементарные функции. После замены  $x_2 = t(1 - x_1)$  получаем для  $f_2$

$$f_2(k^2) = 2 \int_0^1 \frac{m^2 dt}{t(1-t)k^2 - m^2 + i\varepsilon} = -8 \frac{m^2}{k^2 Q} \arctg \frac{1}{Q}; \quad (27)$$

$$Q = \left( \frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \quad \text{при} \quad k^2 \leq 4m^2$$

и, в частности,

$$f_2(0) = -2. \quad (28)$$

В то же время подстановка  $x_2 = t(1 - x_1)$  во втором слагаемом для формфактора  $f_1$  выявляет неинтегрируемую особенность при  $x_1 = 1$ . Эта сингулярность является проявлением *инфракрасной* катастрофы и соответствует особенности подынтегрального выражения в исходном фейнмановском интеграле (20) при малых значениях  $q$ , т. е. интегрированию по импульсам *мягких* виртуальных фотонов. Подобная особенность содержится также в производной оператора собственной энергии электрона (17), взятой на массовой поверхности. Мы не будем, однако, обсуждать здесь проблему инфракрасных расходимостей квантовой электродинамики и отсылаем читателя к краткому изложению их физических причин, содержащемуся ниже в § 29.4 и цитированной там литературе. Отметим лишь, что если приписать виртуальному фотону на диаграмме рис. 24.2, б малую массу  $\lambda_0$ , то упомянутая сингулярность может быть выражена через логарифм этой массы

$$\int \frac{dx_1}{1-x_1} \rightarrow \ln \frac{\lambda_0}{m} \quad (29)$$

(см. по этому поводу раздел 5 Дополнения VI). В то же время формфактор  $f_1(k^2)$  может быть «сдвинут на константу»

$$f_1(k^2) \rightarrow f_1(k^2) + c$$

операцией перенормировки константы связи (т. е. электрического заряда электрона  $e$ ) — см. ниже §§ 25 и 28.1, вследствие чего расходящиеся аддитивные составляющие в (25), не содержащие импульсных зависимостей, не имеют непосредственного физического смысла.

Второе слагаемое в (24) с помощью соотношения

$$2\bar{u}(\mathbf{p}') [p^\nu + p'^\nu - 2m\gamma^\nu] u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}') [\gamma^\nu \hat{k} - \hat{k} \gamma^\nu] u(\mathbf{p}); \quad k = p' - p, \quad (30)$$

вытекающего из уравнений Дирака, преобразуется к виду, удобному для вычисления радиационной поправки к магнитному моменту электрона (см. ниже § 30.2).

**24.4. Ультрафиолетовые расходимости в высших порядках.** Разобранные примеры простейших однопетлевых диаграмм

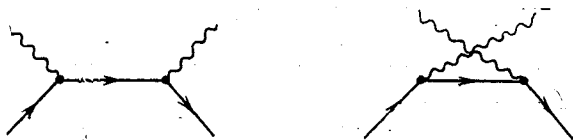


Рис. 24.3. Диаграммы второго порядка комптоновского рассеяния.

позволяют заключить, что ультрафиолетовые расходимости являются типичным, часто встречающимся явлением («правилом», а не «исключением»). При переходе к более сложным диаграммам (высшие порядки теории возмущений, большее количество петель) картина существенно не меняется.

Для иллюстрации схематически рассмотрим процесс комптоновского рассеяния. В низшем, втором, порядке теории возмущений процесс описывается двумя диаграммами Фейнмана, изображенными на рис 24.3. Эти диаграммы не имеют замкнутых петель,

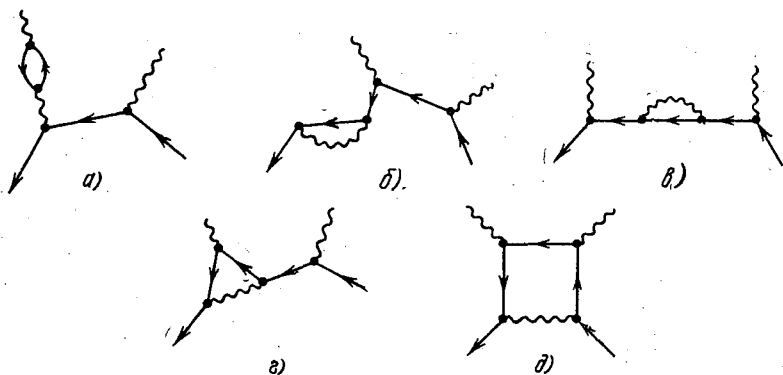


Рис. 24.4. Некоторые диаграммы четвертого порядка для комптоновского рассеяния.

а соответствующие матричные элементы не содержат интегрирований по 4-импульсам.

В четвертом порядке процесс описывается восемью однопетлевыми диаграммами, характерные представители которых приведены на рис. 24.4. Две диаграммы содержат поляризационные вставки во внешние фотонные линии (см. рис. 24.4, а); две диаграммы — собственно энергетические вставки (поддиаграммы)

во внешние электрон-позитронные линии (рис. 24.4, б); одна диаграмма — собственно энергетическую поддиаграмму во внутренней электрон-позитронной линии (рис. 24.4, в) и две диаграммы — вершинные треугольные поддиаграммы (рис. 24.4, з). Согласно результатам § 24.3 все эти диаграммы содержат ультрафиолетовые расходимости. Наконец, последняя диаграмма, изображенная на рис. 24.4, д, имеет замкнутый цикл с четырьмя вершинами. Соответствующий импульсный интеграл сходится.

Шестой порядок теории возмущений отвечает двухпетлевым диаграммам; некоторые из них изображены на рис. 24.5. Здесь

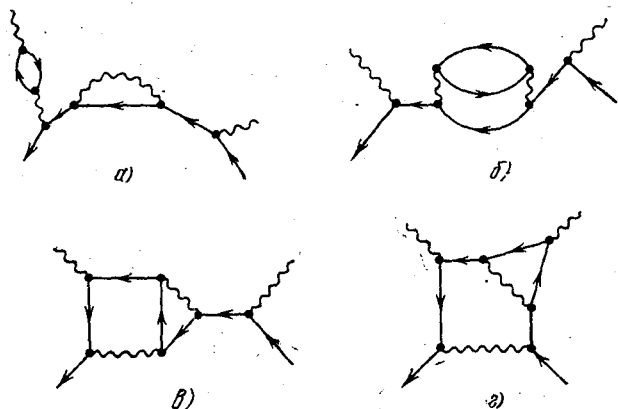


Рис. 24.5. Примеры диаграмм шестого порядка для комптоновского рассеяния.

встречаются диаграммы с двумя независимыми однопетлевыми поддиаграммами (подобные изображенным на рис. 24.5, а), а также диаграммы, в которых расходящаяся однопетлевая поддиаграмма входит в элемент, содержащий второе импульсное интегрирование. Примеры подобных случаев изображены на рис. 24.5, б, в, г. При этом, как правило, оба интегрирования содержат ультрафиолетовые расходимости, которые, таким образом, накладываются друг на друга.

Наша ближайшая цель — установить общую структуру расходящихся вкладов в матричные элементы переходов и построить процедуру их устранения (процедуру перенормировок).

## § 25. Выделение расходимостей

**25.1. Структура однопетлевых расходимостей.** Как мы убедились в предыдущем параграфе, всем расходящимся однопетлевым интегралам присуще замечательное свойство: ультрафиолетовые бесконечности могут быть выделены в виде аддитивных составляющих (см. формулы (24.2), (24.10), (24.16), (24.22)). Последние



имеют вид полиномов по степеням компонент внешних импульсов с расходящимися (в пределе снятия регуляризации) коэффициентами.

Если теперь перейти от импульсного представления к координатному, то расходящиеся вклады представляются полиномом по производным от  $\delta$ -функций. Так, например, формулы (23.1), (23.2) и (24.2) дают

$$\text{reg}[D^c(x)]^2 = \frac{\pi^2}{i(2\pi)^8} \int e^{-ipx} I_\Delta(p^2) dp = \frac{1}{16\pi^2 i} I_{\text{синг}} \delta(x) + \widetilde{D}_c^2(x), \quad (1)$$

где сингулярная константа в регуляризации Паули — Вилларса равна  $I_{\text{синг}} = \ln(\mu^2/M^2)$ , а функция

$$\widetilde{D}_c^2(x) = \frac{\pi^2}{i(2\pi)^8} \int e^{-ipx} \widetilde{I}(p^2, \mu^2) dp \quad (2)$$

свободна от ультрафиолетовых расходимостей.

Подобным образом

$$\begin{aligned} \text{reg}[\Pi^{\mu\nu}(x)] &= -ie^2 \text{Sp}[\gamma^\mu \text{reg} S_c(x) \gamma^\nu \text{reg} S_c(-x)] = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} g^{\mu\nu} M^2 \delta(x) + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} (g^{\mu\nu} \square + \partial^\mu \partial^\nu) \delta(x) + \widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(x), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{reg}[\Sigma(x)] &= -ie^2 \gamma^\nu S^c(x) \gamma_\nu \text{reg} D_0^c(x) = \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} (4m - i\hat{d}) \delta(x) + \widetilde{\Sigma}(x), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{reg} \Gamma^\nu(x, z; y) &= ie^3 \text{reg} D_0^c(x-z) \gamma^\mu S^c(x-y) \gamma^\nu S^c(y-z) \gamma_\mu = \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\nu \ln \frac{M^2}{m^2} \delta(x-y) \delta(x-z) + \widetilde{\Gamma}^\nu(x, z; y), \end{aligned} \quad (5)$$

причем функции  $\widetilde{\Pi}$ ,  $\widetilde{\Sigma}$ ,  $\widetilde{\Gamma}$  являются фурье-образами конечных выражений (24.11), (24.16) и (24.23).

**25.2. Вклад в  $S$ -матрицу.** Обратимся к структуре вкладов в матрицу рассеяния от расходящихся слагаемых из правых частей формул (1), (3), (4) и (5).

Начнем со скалярной «рыбы». В модели  $\mathcal{L} = g\phi^3$  член второго порядка в  $S$ -матрице содержит отвечающее ей слагаемое типа собственной энергии частицы (рис. 25.1)

$$S_2(x, y) = i^2 g^2 T(\phi^3(x) \phi^3(y)) = 18g^2 : \phi(x) [D^c(x-y)]^2 \phi(y) : + \dots,$$

содержащее ультрафиолетовую расходимость. После регуляризации на основании (1) получаем

$$\begin{aligned} S_2(x, y) &= ig^2 C : \phi(x) \delta(x-y) \phi(y) : + 18g^2 : \phi(x) [\widetilde{D^c(x-y)}]^2 \phi(y) : + \\ &+ \dots = ig^2 C : \phi(x) \delta(x-y) \phi(y) : + \widetilde{S}_2(x, y), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C = (9/8\pi^2) \ln(M^2/\mu^2)$ , а  $\widetilde{S}_2$  свободно от ультрафиолетовых расходимостей. При вычислении матричных элементов от  $\widetilde{S}_2$  скалярной «рыбе» соответствует конечное выражение (2).

Подставляя выражение (6) в разложение для  $S$ -матрицы, находим

$$S = 1 + \int S_1(x) dx + \frac{1^2}{2} \int S_2(x, y) dx dy + \dots = \\ = 1 + i \int [\mathcal{L}(x) + \Delta \mathcal{L}(x)] dx + \frac{1^2}{2} \int \tilde{S}_2(x, y) dx dy + \dots, \quad (7)$$

где

$$\Delta \mathcal{L}(x) = \frac{g^2}{2} C : \varphi^2(x) :. \quad (8)$$

Таким образом, выделение из  $S_2$  расходящегося квазилокального вклада  $\varphi(x) \delta(x-y) \varphi(y)$  эквивалентно добавлению в  $S_1$  локального слагаемого  $\Delta \mathcal{L}(x)$ . Подобные слагаемые называются *контрчленами*.



Рис. 25.1. Диаграмма собственной энергии второго порядка в скалярной  $\varphi^3$  модели.



Рис. 25.2. Диаграмма рассеяния второго порядка в модели  $\varphi^4$ .



Рис. 25.3. Диаграмма «орех», представляющая собственную энергию второго порядка в модели  $\varphi^4$ .

Скалярная «рыба» входит также в член второго порядка в модели  $\mathcal{L} = \hbar \varphi^4$ :

$$S_2(x, y) = i^2 \hbar^2 T(\varphi^4(x) \varphi^4(y)) = 72 \hbar^2 : \varphi^2(x) D_c^2(x-y) \varphi^2(y) : - \\ - i 96 \hbar^2 : \varphi(x) D_c^3(x-y) \varphi(y) : + \dots, \quad (9)$$

дающий вклад в амплитуду рассеяния  $2 \leftrightarrow 2$  (рис. 25.2).

Второе слагаемое в правой части (9) отвечает диаграмме «орех», изображенной на рис. 25.3. Соответствующий матричный элемент расходится квадратично. Вычисления дают

$$\text{reg}[D_c(x-y)]^3 = -\frac{A_2}{48} \delta(x) - \frac{A_0}{48} \square_x \delta(x) + \widetilde{D}_c^3(x), \quad (10)$$

где при регуляризации Паули — Вилларса

$$A_0 = a_0 \ln \frac{M^2}{m^2}, \quad A_2 = a_2 M^2,$$

а  $\widetilde{D}_c^3$  свободна от ультрафиолетовых расходимостей. Подставляя (9), (10) и (1) в разложение  $S$ -матрицы, получаем формулу вида (7), причем  $\Delta \mathcal{L}$  состоит из трех контрчленов:

$$\Delta \mathcal{L}(x) = C \hbar^2 : \varphi^4(x) : + A_2 \hbar^2 : \varphi^2(x) : - A_0 \hbar^2 : \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi :. \quad (11)$$

В  $S$ -матрице спинорной электродинамики член второго порядка содержит расходящиеся слагаемые, отвечающие (3) и (4):

$$S_2(x, y) = -i : \bar{\psi}(x) \Sigma(x-y) \psi(y) : - \\ -i : A_\mu(x) \Pi^{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) : + (x \leftrightarrow y) + \dots,$$

а член третьего порядка включает слагаемые (рис. 25.4), содер-

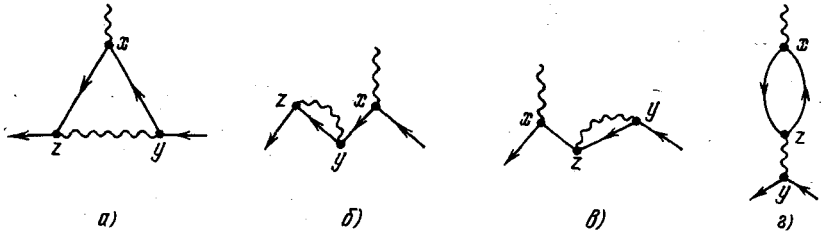


Рис. 25.4. Расходящиеся вклады третьего порядка в матрицу рассеяния спинорной электродинамики.

жащие множителями как собственные энергии (3), (4), так и треугольную вершинную диаграмму (5):

$$S_3(x, y, z) = -ie : \bar{\psi}(z) A_\nu(x) \Gamma^\nu(z, y; x) \psi(y) : + \\ -ie : \bar{\psi}(z) \Sigma(z-y) S^c(y-x) \gamma^\nu A_\nu(x) \psi(x) : + \\ -ie : \bar{\psi}(x) \gamma^\nu A_\nu(x) S^c(x-z) \Sigma(z-y) \psi(y) : + \\ +ie : A_\nu(x) \Pi^{\nu\mu}(x-z) D_{\nu\rho}^c(z-y) \bar{\psi}(y) \gamma^\rho \psi(y) : + \\ + (x \leftrightarrow y) + (x \leftrightarrow z) + (y \leftrightarrow z) + \dots$$

Выделение из  $\Sigma$ ,  $\Pi$  и  $\Gamma$  локальных слагаемых

$$\Sigma(x-y) = (am + ib\hat{\partial}) \delta(x-y) + \Sigma'(x-y), \\ \Pi^{\mu\nu}(x-y) = cg^{\mu\nu} \delta(x-y) + d(g^{\mu\nu} \square + \partial^\mu \partial^\nu) \delta(x-y) + \Pi'^{\mu\nu}, \quad (12) \\ \Gamma^\nu(x, z; y) = fg^{\nu\delta} \delta(x-y) \delta(x-z) + \Gamma'^\nu(x, z; y)$$

приводит к следующей перестройке вклада второго порядка:

$$\frac{1}{2} \int S_2(x, y) dx dy = -i \int \bar{\psi}(x) (am + ib\hat{\partial}) \psi(x) dx + \\ -i \int A_\mu(x) [cg^{\mu\nu} + d(g^{\mu\nu} \square + \partial^\mu \partial^\nu)] A_\nu(x) dx + \\ + \frac{1}{2} \int S'_2(x, y) dx dy \quad (13)$$

и вклада третьего порядка

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \int S_3(x, y, z) dx dy dz = & \\ = ie \int A_\mu(x) [cg^{\mu\nu} + d(g^{\mu\nu} \square_x + \partial_x^\mu \partial_x^\nu)] D_{\rho\nu}(x-y) \times & \\ \times \bar{\psi}(y) \gamma^\rho \psi(y) dx dy - ie \int \bar{\psi}(x) (am + ib\hat{\partial}_x) \times & \\ \times S^c(x-y) \gamma^\nu A_\nu(y) \psi(y) dx dy + ( & \\ - ie \int \bar{\psi}(x) \gamma^\nu A_\nu(x) S^c(x-y) (am + b\hat{\partial}_y) \psi(y) dx dy + & \\ -ief \int \bar{\psi}(x) A_\nu(x) \gamma^\nu \psi(x) dx + \frac{1}{3!} \int S'_3(x, y, z) dx dy dz. & \end{aligned} \quad (14)$$

Видно теперь, что два первых слагаемых в правой части (13) и четвертое слагаемое в правой части (14) могут быть отнесены в член первого порядка

$$\begin{aligned} \int S_1(x) dx \rightarrow i \int [\mathcal{L}(x) + \Delta\mathcal{L}(x)] dx, \\ \Delta\mathcal{L}(x) = -\bar{\psi}(x) (am + ib\hat{\partial}) \psi(x) - c : A_\nu(x) A^\nu(x) : + \\ - d : A_\mu(x) \square A^\mu(x) : + d : (\partial^\mu A_\mu) (\partial^\nu A_\nu) : - ef : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) :. \end{aligned} \quad (15)$$

В то же время первые три члена в правой части формулы (14) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{i^2}{2} \int T \{ \mathcal{L}(x) + \Delta\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y) + \Delta\mathcal{L}(y) \} dx dy - \\ - \frac{i^2}{2} \int T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y)) dx dy = i^2 \int T(\mathcal{L}(x), \Delta\mathcal{L}(y)) dx dy + \dots, \end{aligned}$$

причем под символом  $\Delta\mathcal{L}$  следует понимать правую часть (15) за вычетом последнего слагаемого.

Таким образом, мы убедились, что выделение из  $S_2$  и  $S_3$  сингулярных вкладов, отвечающих квазилокальным слагаемым в (12), эквивалентно добавлению локальных контрчленов (15) в лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}(x)$ .

Эта эквивалентность является основой метода устранения ультрафиолетовых расходимостей, известного как *метод перенормировки*.

**25.3. Контрчлены и перенормировки.** Идеология перенормировок основана на том факте, что контрчлены (9), как правило, имеют структуру отдельных слагаемых исходного полного лагранжиана.

Рассмотрим модель действительного скалярного поля с четверным взаимодействием:

$$\mathcal{L}_{\text{полн}}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2(x) + \hbar \varphi^4(x).$$

Сравнение с формулой (11) показывает, что расходящиеся контрчлены имеют структуру отдельных слагаемых полного лагранжиана.

Для того чтобы установить физический смысл добавления к лагранжиану контрчленов такого типа, отвлечемся на время от расходимостей и рассмотрим контрчлены

$$\Delta \mathcal{L}(x) = \frac{a_0}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{a_2}{2} \varphi^2(x) + c \varphi^4(x) \quad (11')$$

с конечными коэффициентами  $a_0$ ,  $a_2$ ,  $c$ . Складывая  $\mathcal{L}_{\text{полн}}$  с  $\Delta \mathcal{L}$ , получаем

$$\mathcal{L}' = \frac{z_1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{z_1 m'^2}{2} \varphi^2 + z_2 h \varphi^4, \quad (16)$$

где  $z_1 = 1 + a_0$ ,  $z_1 m'^2 = m^2 + a_2$ ,  $z_2 h = h + c$ .

Обсудим сперва смысл коэффициента  $z_1$ . Два первых члена в правой части (16) представляют собой умноженный на  $z_1$  лагранжиан свободного скалярного поля с массой  $m'$ . Абсолютная нормировка свободного лагранжиана проявляется лишь при квантовании поля, т. е. в уравнениях типа (7.1). Не составляет труда убедиться, что, производя замену

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \sqrt{z_1} \varphi, \quad (17)$$

мы приходим к перенормированному полю  $\varphi'(x)$  с нормальными коммутационными соотношениями (8.4). Подставляя (17) в (16), преобразуем  $\mathcal{L}'$  к виду

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi')^2 - \frac{m'^2}{2} \varphi'^2 + h' \varphi'^4, \quad (18)$$

где

$$h' = z_1^{-2} z_2 h = \frac{h+c}{(1+a_0)^2}, \quad m'^2 = \frac{m^2+a_2}{1+a_0}. \quad (19)$$

Таким образом, мы видим, что совокупный эффект трех контрчленов (11), (11') сводится к перенормировке двух физических параметров модели: массы  $m$  и константы связи  $h$ .

В реальном случае коэффициенты при контрчленах (типа  $C$ ,  $A_0$ ,  $A_2$  в формулах (11), (8)) сингулярны, т. е. стремятся к бесконечности при снятии регуляризации. Вследствие этого становятся сингулярными соотношения типа (19), связывающие исходные «затравочные» значения  $m$ ,  $h$  с физическими «перенормированными» значениями  $m'$ ,  $h'$ .

Подобные соотношения перенормировок для массы и нормы операторной волновой функции были нами получены в модели тяжелого нуклона (в § 13.4). Напомним читателю, что эти соотношения становились сингулярными при переходе к точечному нуклону. В релятивистской квантовой теории поля природа ультрафиолетовых расходимостей также обусловлена локальным точечным характером взаимодействия. Этот факт особенно ясно виден на разобранных в § 24 примерах диаграмм собственной энергии

электрона и вершинной диаграммы. Используемая там регуляризация фотонного пропагатора (24.15) равносильна «размазке» точечного электрона, т. е. переходу к нелокальному взаимодействию

$$j_\mu(x) A^\mu(x) \rightarrow j_\mu(x) \int K(x-y) A^\mu(y) dy,$$

где формфактор

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{iqx} \frac{M^2}{M^2 - q^2} dq$$

в пределе  $M^2 \rightarrow \infty$  стремится к  $\delta$ -функции.

В методе перенормировок, который более подробно излагается ниже (см. §§ 28, 29), сингулярные соотношения перенормировок типа (19) рассматриваются чисто формально. При этом имеется в виду то обстоятельство, что затравочные значения констант типа  $m$  и  $h$ , фигурирующие в исходном лагранжиане и отнесенные к свободным полям (точнее, к полям с бесконечно слабым взаимодействием), не имеют физического смысла, так как подобные идеализированные поля в природе не существуют и невозможно связать затравочные параметры с какими-либо даже мысленными экспериментами.

В то же время учет радиационных поправок высших порядков приводит к тому, что не только  $S_1$ , но и высшие  $S_n$  ( $n \geq 2$ ) зависят лишь от перенормированных масс и констант связи. Поэтому оказывается возможным связать перенормированные параметры с измеряемыми на опыте величинами и считать их физическими массами и зарядами.

Факт зависимости полученных в результате процесса перенормировки свободных от расходимостей матричных элементов только лишь от перенормированных физических масс и констант связи

$$g' = f_g(m, g, \Lambda), \quad m' = f_m(m, g, \Lambda) \quad (20)$$

и отсутствие дополнительных зависимостей от затравочных  $m, g$  и сингулярного параметра  $\Lambda$  и каких-либо других параметров по отдельности является важным свойством некоторого класса моделей, которые называются *перенормируемыми*.

**25.4. Расходимости и обобщенные функции.** Возможна еще одна точка зрения на процесс устранения ультрафиолетовых расходимостей, который эффективно сводится к вычитанию из расходящихся матричных элементов соответствующих полиномов. Обратим внимание на то, что расходящимся фейнмановским интегралам по виртуальным импульсам в координатном представлении всегда соответствуют произведения некоторого числа пропагаторов  $D_c(x)$ ,  $D_0^c(x)$ ,  $S^c(x)$ , ... Как было установлено в § 18 3, эти последние содержат слагаемые типа  $\theta(x^0)$ ,  $\delta(x^2)$  и с математической точки зрения являются обобщенными функциями. В отличие от обычных

функций математического анализа, отвечающих отображению число  $\rightarrow$  число, обобщенные функции определяются как ядра линейных функционалов и задают отображение функция  $\rightarrow$  число. Поэтому операция умножения обобщенных функций друг на друга требует особого определения. Не вдаваясь в подробности этого довольно сложного вопроса (см. Введение, §§ 18, 19), отметим здесь, что переход типа

$$[D^c(x)]^2 \rightarrow \text{reg}[D^c(x)]^2 \rightarrow \widetilde{D}_c^2(x)$$

можно рассматривать как *определение* произведения  $D_c^2$ . Иными словами, можно положить

$$D_c(x) \cdot D_c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{D}_c^2(x), \quad (21)$$

где правая часть определена согласно (2).

При таком способе рассуждений ультрафиолетовые расходимости вообще не фигурируют в  $S$ -матрице и нет нужды заниматься бесконечными перенормировками масс и зарядов. Следует лишь однозначно фиксировать произвол в конечных величинах, связанный с параметрами типа  $\mu^2$  из формулы (24.1).

При этом оказывается, что в перенормируемых моделях квантовой теории поля матричные элементы выражаются через некоторые функции параметров лагранжиана  $m$ ,  $g$  и произвольных констант типа  $\mu$

$$\tilde{g} = \varphi_g(m, g, \mu), \quad \tilde{m} = \varphi_m(m, g, \mu) \quad (22)$$

и не зависят от  $m$ ,  $g$  и  $\mu$  по отдельности. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в следующей главе.

## Глава VII. УСТРАНЕНИЕ РАСХОДИМОСТЕЙ

### § 26. Общая структура расходимостей

**26.1. Расходимости высших порядков.** В предыдущем параграфе мы рассмотрели ультрафиолетовые расходимости двух низших порядков теории возмущений скалярной нелинейной модели и спинорной электродинамики. Там, во-первых, было установлено, что для простейших однопетлевых диаграмм Фейнмана ультрафиолетовые расходимости могут быть выделены в аддитивные квазилокальные слагаемые. Во-вторых, было показано, что в силу квазилокального характера подобные слагаемые дают вклад в матрицу рассеяния, имеющий структуру членов более низкого порядка теории возмущений, и благодаря этому в конечном итоге сводятся к локальным вкладам в лагранжиан, т. е. к контрчленам.

Сейчас мы проведем аналогичный анализ диаграмм высшего порядка и покажем, что, хотя в общем случае расходящиеся вклады и не имеют квазилокальной структуры, тем не менее они также сводятся к контрчленам. Для простоты ограничимся скалярной нелинейной моделью с четверным самодействием

$$\mathcal{L} = -\frac{16\pi^2}{4!} h\varphi^4(x). \quad (1)$$

Диаграммы второго порядка, изображенные на рис. 25.2 и 25.3 были рассмотрены в § 25.2. В третьем порядке процесс рассеяния описывается двумя двухпетлевыми диаграммами, изображенными на рис. 26.1.

Диаграмма 26.1, *a* представляет итерацию диаграммы «рыба», и соответствующий матричный элемент в координатном представлении пропорционален выражению

$$D_c^2(x-y) D_c^2(y-z). \quad (2)$$



После регуляризации с помощью (25.1) имеем

$$\begin{aligned} \text{reg}_M [D_c^2(x-y) D_c^2(y-z)] = & \left( \frac{i}{16\pi^2} \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right)^2 \delta(x-y) \delta(y-z) + \\ & + \frac{i}{16\pi^2} \ln \frac{M^2}{\mu^2} [\delta(x-y) \widetilde{D}_c^2(y-z) + \delta(y-z) \widetilde{D}_c^2(x-y)] + \\ & + \widetilde{D}_c^2(x-y) \widetilde{D}_c^2(y-z). \end{aligned} \quad (3)$$

Соответственно этому в импульсном представлении фурье-образ сводится к квадрату интеграла (23.7), т. е. к выражению

$$[\text{reg}_M I(k^2)]^2 = \left( \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right)^2 - 2 \ln \frac{M^2}{\mu^2} I_{\text{кон}}(k^2) + (I_{\text{кон}}(k^2))^2, \quad (4)$$

где  $I_{\text{кон}}$  описывается формулой (24.1).

Структура сингулярных составляющих диаграммы рис. 26.1, б может быть установлена наиболее просто в импульсном представ-

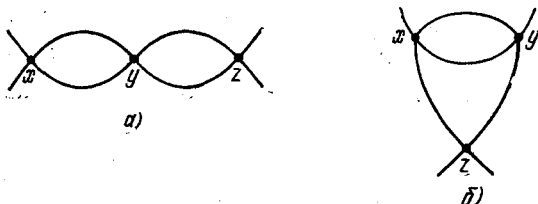


Рис. 26.1. Двухпетлевые диаграммы рассеяния третьего порядка в модели  $\phi^4$ .

лении. Используя обозначения импульсов, указанные на рис. 26.2, рассмотрим двухпетлевой фейнмановский интеграл

$$\begin{aligned} K(k_1, \dots, k_4) \sim & \int \frac{i dq}{\pi^2} \frac{1}{m^2 - q^2} \cdot \frac{1}{m^2 - (q - k)^2} \times \\ & \times \int \frac{i dp}{\pi^2} \cdot \frac{1}{m^2 - p^2} \cdot \frac{1}{m^2 - (q + p - k_4)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Как нетрудно убедиться, этот интеграл расходится в области больших импульсов. Введем «плавное обрезание» по каждой переменной интегрирования:

$$\int dq \rightarrow \text{reg}_{M(F)} \int dq = \int \frac{dq M^2}{M^2 - q^2}.$$

Получаем

$$\text{reg}_{M(F)} K = \int \frac{i dq}{\pi^2} \cdot \frac{M^2}{M^2 - q^2} \cdot \frac{1}{m^2 - q^2} \cdot \frac{1}{m^2 - (q - k)^2} \text{reg}_{M(F)} I(q - k_4). \quad (6)$$

В этом сходящемся выражении мы установили определенную последовательность интегрирований и воспользовались введенным

ранее обозначением (23.1). Используя формулу (23.7) под знаком интеграла, находим

$$\operatorname{reg}_{M(F)} K = -\ln \frac{M^2}{\mu^2} \operatorname{reg}_{M(F)} I(k) + \int \frac{i dq}{\pi^2} \frac{M^2}{M^2 - q^2} \cdot \frac{1}{m^2 - q^2} \cdot \frac{1}{m^2 - (q - k)^2} I_{\text{кон}}(q - k_4). \quad (7)$$

Структура первого слагаемого ясна из формулы (23.7). Второе слагаемое также содержит сингулярность в пределе  $M^2 \rightarrow \infty$ , как это следует из асимптотической формулы (24.6) для  $I_{\text{кон}}$ . Не составляет труда убедиться, что этот сингулярный вклад аддитивен. Вычисления показывают, что он пропорционален квадрату «большого» логарифма  $\ln M^2$ . Опуская соответствующие выкладки, приведем окончательный результат:

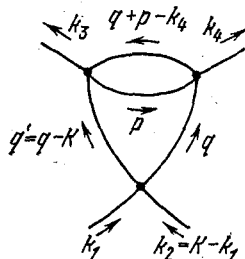


Рис. 26.2. Импульсные обозначения в интеграле (5).

$$\operatorname{reg}_{M(F)} K = \left( \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right)^2 - \ln \frac{M^2}{\mu^2} I_{\text{кон}}(k) - \frac{1}{2} \left( \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right)^2 + K_{\text{кон}}(\dots k \dots). \quad (8)$$

Здесь первые два члена в правой части соответствуют первому слагаемому правой части формулы (7).

Полученные выражения (4) и (8) имеют общую структуру. В пределе больших  $M$  они имеют вид полиномов по  $\ln M$ . Коэффициенты при  $(\ln M)^2$  являются числами, а при  $\ln M$  — функциями импульсных переменных.

В случае более высоких порядков диаграммы рассеяния (4-хвостные диаграммы) также расходятся логарифмически. Полное выражение для каждой из них в пределе больших  $M$  представляется полиномом по степеням  $\ln M$ . Старшая степень расходящегося логарифма равна числу петель  $l$  (т. е. числу независимых 4-импульсных интегрирований) диаграммы. Коэффициент при  $(\ln M)^l$  является числом, а коэффициенты при младших степенях  $\ln M$  — функциями импульсных переменных.

**26.2. Связь с контрчленами и перенормировки.** Покажем теперь, что члены с младшими степенями расходящихся логарифмов, не имеющие квазилокальной структуры в  $x$ -представлении, также сводятся к контрчленам и перенормировкам.

Введем для этого графическое изображение процесса выделения расходимостей. Формуле (24.2) сопоставим рисунок

$$\text{loop} = \oplus + \text{hatched loop}, \quad (9)$$

на котором заштрихованная «рыба» отвечает конечной функции  $I_{\text{кон}}$ , а крестик, обведенный кружком, — расходящемуся логарифму. Тогда вклад диаграммы «рыба» в матричный элемент рассеяния второго порядка (25.9) изображается в виде

$$\text{fish} = \oplus \text{cross} + \text{shaded fish} \quad (10)$$

Вклад диаграммы рис. 26.1, а, согласно формуле (4), будет

$$\text{double fish} = \oplus^2 \text{cross} + 2\oplus \text{shaded fish} + \text{double shaded fish} \quad (11)$$

Для диаграммы рис. 26.2, б соответственно

$$\text{triangle} = \oplus^2 \text{cross} + \oplus \text{shaded fish} + \oplus \text{cross} + \text{shaded triangle} \quad (12)$$

На последнем рисунке крестиком в двойном круге изображен третий член формулы (8), т. е. расходящаяся часть второго слагаемого из правой части (7). Все остальные обозначения очевидны.

Собирая вклады слагаемых (10), (11), (12) в матрицу рассеяния, получаем

$$\begin{aligned} S &= 1 + S_1 + S_2 + S_3 + \dots = \\ &= \hbar \text{cross} + \hbar^2 \text{fish} + \hbar^3 \text{double fish} + \hbar^3 \text{triangle} + \dots = \\ &= \hbar [1 + \hbar \oplus + \hbar^2 \oplus^2 + \hbar^2 \oplus + \dots] \text{cross} + \\ &+ \hbar^2 [1 + 2\hbar \oplus + \dots] \{ \text{shaded fish} + \text{fish} \} + \\ &+ \hbar^3 \{ \text{double shaded fish} + \text{shaded triangle} \} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Мы видим, что расходящиеся вклады из многопетлевых диаграмм высших порядков, имеющие квазилокальную структуру, дают вклад в член первого порядка  $S_1$ , т. е. в контрчлены лагранжиана, что в данном примере приводит к перенормировке константы связи:

$$\hbar \rightarrow \hbar_* = \hbar (1 + \hbar \oplus + \hbar^2 \oplus^2 + \hbar^2 \oplus + \dots).$$

Сингулярные составляющие второго типа, не имеющие квазилокального характера и в импульсном представлении зависящие от импульсов [подобные вторым слагаемым в правых частях формул (4) и (8)], приводятся в нашем примере к структурам, подобным членам второго порядка матрицы рассеяния, и эффективно перенормируют константу связи в  $S_2$ :

$$h^2 \rightarrow h^2 (1 + 2h \oplus + \dots) \simeq h^2 (1 + h \oplus + \dots)^2 = h^2.$$

Рассмотренная иллюстрация является типичной для целого класса квантовополевых моделей взаимодействующих полей — класса, включающего самодействие скалярного поля  $h\varphi^4$ , а также такой физически важный случай, как спинорная электродинамика. Для моделей этого класса все без исключения расходящиеся составляющие матричных элементов сколь угодно высокого порядка приводятся к контрчленам, добавленным к лагранжианам взаимодействия в составляющих  $S$ -матрицы более низших порядков, что в свою очередь оказывается эквивалентным перенормировкам физических параметров модели, т. е. масс, констант связи и волновых функций.

Модели взаимодействующих полей этого типа называются *перенормируемыми*.

**26.3. Степень расходимости диаграмм.** Рассмотрим теперь более подробно описанное выше свойство перенормируемости и сформулируем критерий, которому должны удовлетворять перенормируемые модели квантовой теории поля.

Возьмем типичный фейнмановский интеграл в импульсном представлении

$$J(\dots k \dots) = \int \prod_{1 \leq \nu \leq n} \{\delta(\sum p_\nu - k_\nu)\} \prod_{1 \leq l \leq L} \{\Delta_l^c(p_l) dp_l\}, \quad (14)$$

отвечающий связанной диаграмме  $n$ -го порядка. Здесь в аргументах  $\delta$ -функций стоят алгебраические суммы импульсов внутренних линий диаграммы и внешние для данной  $\nu$ -й вершины импульсы  $k_\nu$ . Пропагаторы представим в виде

$$\Delta_l^c(p) = \frac{P_l(p)}{m_l^2 - p^2 - i\epsilon}, \quad (15)$$

где  $P_l$  — некоторый полином степени  $r_l$ , характеризующий спином соответствующего поля.

Как было установлено, интегралы типа (14) в силу ультрафиолетовых расходимостей, вообще говоря, не существуют и требуют регуляризации. Мы, однако, не будем здесь ее вводить и рассмотрим свойства подынтегральных выражений в области больших  $|p_l|$  с целью определения характера соответствующих ультрафиолетовых расходимостей.

В силу связного характера рассматриваемых диаграмм с помощью  $\delta$ -функций снимется  $4(n-1)$  интегрирований (последняя  $\delta$ -функция выразит закон сохранения полного 4-импульса), вследствие чего останется  $4(L-n+1)$  независимых переменных, где  $L$  обозначает полное число внутренних линий.

Подобно тому как при интеграции по трехмерному пространству в качестве переменной удобно ввести радиус, введем в  $4(L-n+1)$ -мерном пространстве соответствующий «радиальный» импульс  $P$ . Тогда произведение независимых дифференциалов  $dp_i$  даст фактор  $P^{4(L-n+1)} dP/P$ . Учитывая лишь старшие степени импульсов в функциях  $\Delta^c$ , получаем множитель

$$P^{\sum r_i - 2L} = P^{\sum (r_i - 2)},$$

и поэтому в подынтегральном выражении множитель при  $dP/P$  в области больших  $P$  будет вести себя как  $P^\omega$ , где

$$\omega(G) = \sum_i (r_i + 2) - 4(n-1). \quad (16)$$

Число  $\omega$  назовем *индексом диаграммы*.

Интеграл по  $P$  окажется сходящимся при  $\omega(G) < 0$  и расходящимся в противном случае.

Разумеется, из сходимости интеграла по  $P$  еще не следует сходимость интеграла типа (14) в целом. Здесь может возникнуть положение, подобное тому, когда при вычислении интеграла

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{x}{(y^2+1)^2}$$

интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\rho^2 d\rho}{(1+\rho^2 \sin^2 \varphi)^2}$$

по радиальной переменной  $\rho = x/\cos \varphi = y/\sin \varphi$  сходится, но остающийся интеграл по  $\varphi$  из-за особенности в точке  $\varphi=0$  оказывается расходящимся.

Примеры такого типа дают интегралы, отвечающие диаграммам, изображенным на рис. 26.3. Обе диаграммы имеют отрицательный индекс  $\omega = -2$ , однако каждая из них имеет поддиаграмму, которая расходится логарифмически или квадратично.

Таким образом, условие

$$\omega(G) < 0 \quad (17)$$

является необходимым для сходимости, но недостаточным.

Как видно из примеров расходящихся диаграмм, рассмотренных в §§ 24, 25, степень расходимости интеграла, равная  $\omega$ ,

при  $\omega \geq 0$  определяет структуру расходящихся вкладов соответствующего регуляризованного интеграла в пределе снятия вспомогательной регуляризации.

Интегралу с индексом  $\omega > 0$  соответствует выражение

$$I_\omega(p) \sim \text{reg } I_\omega(p, M),$$

причем

$$\text{reg } I_\omega(p, M) \rightarrow a_0 M^\omega + a_1 p M^{\omega-1} + \dots + a_{\omega-1} p^{\omega-1} M + a_\omega p^\omega + I_{\text{кон}}^\omega(p),$$

где  $I_{\text{кон}}$  — «конечная часть» интеграла  $I$ , не зависящая от параметра регуляризации,  $a_\alpha$  — коэффициенты, которые могут зависеть от  $\ln M$ .

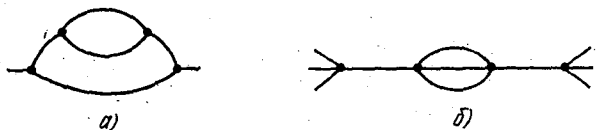


Рис. 26.3. Примеры скалярных диаграмм, имеющих отрицательный индекс, но содержащих расходящиеся поддиаграммы.

Мы видим, что индекс диаграммы определяет степень полинома по компонентам импульсных переменных с сингулярными коэффициентами, после выделения которого интеграл становится конечным. Этот полином в координатном представлении является полиномом по производным от  $\delta$ -функций.

Итак, если рассматриваемая диаграмма  $G$  объединяет  $n$  вершин и обладает  $s$  внешними линиями, то соответствующий квазилокальный оператор представится выражением типа

$$:u_1(x_1) \dots u_s(x_s): Z_\omega(\partial/\partial x) \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_{n-1} - x_n),$$

причем степень полинома  $Z_\omega$  равна индексу диаграммы  $\omega$ . Интегрируя это выражение по всем переменным  $x_i$ , кроме одной, получим контрчлен лагранжиана. При выполнении этих тривиальных интегралов производные с  $\delta$ -функций перейдут на операторы поля  $u_\sigma$  и результат представится в виде нормального произведения некоторого числа операторных функций поля и их производных. При этом максимальная суммарная степень производных оказывается равной индексу диаграммы  $\omega(G)$ , а степень всего выражения по операторным функциям — числу внешних линий  $s$ .

**26.4. Свойство перенормируемости.** Поэтому, если какая-либо теория приводит к сильносвязным диаграммам с неотрицательным индексом, у которых числа  $\omega(G)$ ,  $s$  оказываются ограниченными, то для полного исключения всех расходимостей такая теория требует введения контрчленов конечного числа типов. Под типом контрчлена здесь подразумевается его операторный тип и степень

производных у каждого оператора поля. В противном случае число типов контрчленов оказывается бесконечным.

Проанализируем теперь зависимость индексов  $\omega(G)$  от числа внешних и внутренних линий диаграммы. Введем для этого понятие индекса вершины, определив его равенством

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{int}}} (r_l + 2) - 4, \quad (18)$$

причем суммирование производится по всем внутренним линиям, входящим в  $i$ -ю вершину. Нетрудно заметить, что индексы диаграммы выражаются через индексы входящих в диаграмму вершин следующим образом:

$$\omega(G) = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i + 4, \quad (19)$$

поскольку каждая внутренняя линия входит одновременно в две вершины. Для данного типа вершин индекс  $\omega_i$  принимает максимальное значение  $\Omega_i$  в том случае, когда все линии, входящие в вершину, оказываются внутренними.

Максимальный индекс вершины  $\Omega_i$ , очевидно, является характеристикой лагранжиана взаимодействия, точнее его отдельных слагаемых. Его можно назвать индексом лагранжиана. Если все

$$\Omega_i \leq 0, \quad (20)$$

то из (19) следует, что  $\omega(G) \leq 4$ . Напротив, если хотя бы для некоторых типов вершин (некоторых слагаемых лагранжиана взаимодействия)

$$\Omega_i > 0, \quad (21)$$

то всегда можно построить такую диаграмму  $G$ , содержащую достаточное число вершин этого типа, чтобы  $\omega(G)$  оказалось большим любого наперед заданного числа. Таким образом, либо индекс диаграмм не превышает четырех, либо он может быть сделан сколько угодно большим.

Учитывая, что

$$\omega_i = \Omega_i - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{ext}}} (r_l + 2),$$

где  $l_{\text{ext}}$  — индексы внешних линий, входящих в данную вершину, зависимость  $\omega(G)$  от числа внешних линий можно записать в виде

$$\omega(G) = \sum_i \Omega_i + 4 - \frac{1}{2} \sum_{L_{\text{ext}}} (r_l + 2), \quad (22)$$

причем суммирование в последнем члене производится по всем внешним линиям данной диаграммы. Поэтому в случае (20) число

внешних линий диаграммы с положительным индексом не превышает четырех. В этом случае обе величины  $\omega(G)$  и  $s$  ограничены числом 4, количество типов соответствующих контрчленов оказывается конечным и может быть осуществлена их детальная классификация. В случае же (21) обе суммы в правой части (22) могут быть сделаны сколь угодно большими при неотрицательном  $\omega(G)$ . Обе характеристики,  $\omega(G)$  и  $s$ , оказываются неограниченными, и для компенсации расходимостей возрастающих порядков приходится вводить контрчлены с возрастающими степенью «линейности» и количеством производных. Замкнутого выражения для полного эффективного лагранжиана при этом получить не удастся.

В соответствии с указанным все взаимодействия могут быть разбиты на два класса:

- а) взаимодействия перенормируемого типа (все  $\Omega_i \leq 0$ );
- б) взаимодействия перенормируемого типа (некоторые из  $\Omega_i > 0$ ).

Квантовополевые модели, содержащие взаимодействия первого класса, являются перенормируемыми. Здесь, однако, следует заметить, что условие  $\Omega_i \leq 0$  является достаточным, но не необходимым. Это замечание иллюстрируется моделью Вайнберга — Салама, рассмотренной ниже в § 32.

## § 27. Полные функции Грина

**27.1. Пропагаторы физических полей.** Для более систематического изучения физического смысла различных контрчленов и связанных с ними перенормировок нам потребуются так называемые *полные функции Грина* и *вершинные части*, т. е. объекты, учитывающие радиационные поправки, возникающие в результате взаимодействия квантовых полей и потому отвечающие реальным физическим частицам.

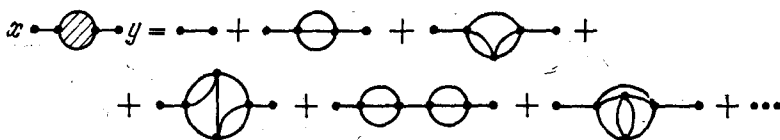


Рис. 27.1. Пропагатор скалярной частицы с радиационными поправками низших порядков в модели  $\varphi^4$ .

Начнем с одночастичных (2-хвостных) функций Грина, т. е. с пропагаторов. Радиационные поправки к пропагаторам свободных полей обусловлены диаграммами собственно энергетического типа. На рис. 27.1 изображены собственно энергетические вставки низших порядков в пропагатор скалярной частицы в модели  $\hbar\varphi^4$ . Их сумма приводит к полной функции Грина скалярного поля.



Из собственно энергетических диаграмм можно выделить класс сильносвязных или одночастично неприводимых диаграмм (т. е. диаграмм, которые не могут быть приведены к двум несвязным путем снятия одной внутренней линии). Сумма таких диаграмм

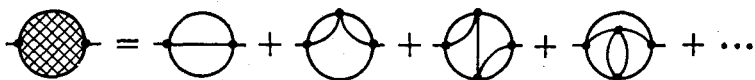


Рис. 27.2. Сумма сильносвязных диаграмм, представляющих массовый оператор.

изображена на рис. 27.2. Она отвечает так называемому массовому оператору  $M(p^2)$ .

Полная функция Грина скалярного поля  $\Delta(p; g)$ , т. е. пропагатор скалярной частицы, учитывающий виртуальные процессы рождения и поглощения дополнительных частиц при движении



Рис. 27.3. Представление полной функции Грина через диаграммы, содержащие итерации массового оператора.

первоначальной частицы через вакуум, связан с массовым оператором  $M(p^2; g)$  соотношением, отвечающим рис. 27.3:

$$\Delta(p^2; g) = \Delta_0(p^2) + \Delta_0 \frac{M(p^2; g)}{i} \Delta_0 + \Delta_0 \frac{M}{i} \Delta_0 \frac{M}{i} \Delta_0 + \dots \quad (1)$$

Здесь

$$\Delta_0(p^2) = \frac{1}{i(m^2 - p^2)},$$

а нормировка массового оператора (выделение множителя  $i$ ) следует введенным в § 24 простейшим однопетлевым вставкам. В низшем порядке теории возмущений, отвечающем диаграмме «орех» (см. рис. 25.3), имеем

$$M(p^2; g) = g^2 M_2(p^2) = \frac{96g^2}{(2\pi)^8 i} \int dk dq \Delta(q) \Delta(k) \Delta(p+q+k). \quad (2)$$

Как легко видеть, правая часть соотношения (1) имеет структуру геометрической прогрессии и может быть представлена в свернутом виде. Получаем

$$\Delta = \Delta_0 [1 - iM\Delta_0 + (-iM\Delta_0)^2 + \dots] = \Delta_0 (1 + iM\Delta_0)^{-1},$$

т. е.

$$\Delta(p^2; g) = \frac{1}{i[m^2 - p^2 + M(p^2; g)]}. \quad (3)$$

Подобным образом можно представить полные функции Грина частиц со спином, например, электрона и фотона в спинорной электродинамике. Так, вводя массовый оператор электрона  $\Sigma$ , согласно рис. 27.4 получаем

$$G(p) = \frac{-i}{m - \hat{p} + \Sigma(p, \alpha)}. \quad (4)$$

Вклад от сильносвязанных собственно энергетических диаграмм фотона образует поляризационный оператор  $\Pi_{\mu\nu}(k; \alpha)$  и т. д.

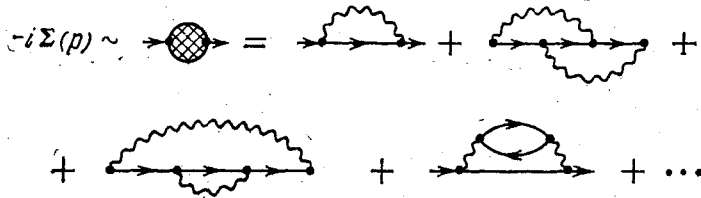


Рис. 27.4. Сильносвязанные диаграммы, образующие массовый оператор электрона.

В низшем порядке теории возмущений эти операторы сводятся к введенным в § 24 (см. формулы (24.8) и (24.14)) выражениям

$$\begin{aligned} \Sigma(p; \alpha) &= \alpha \Sigma(p) + \alpha^2 \dots, \\ \Pi_{\mu\nu}(k; \alpha) &= \alpha \Pi_{\mu\nu}(k) + \alpha^2 \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Мы отложим рассмотрение матричной структуры поляризационного оператора до § 29, где будет введено и использовано условие градиентной инвариантности.

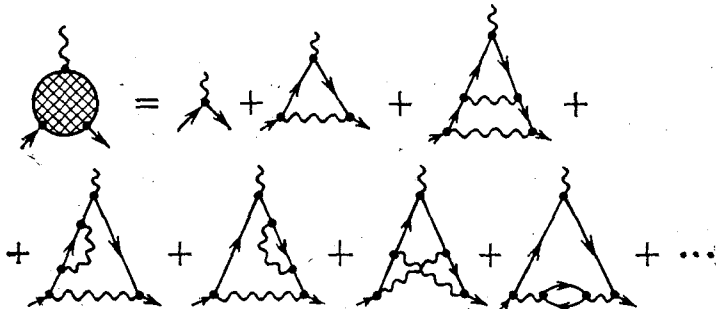


Рис. 27.5. Сильносвязанные диаграммы третьего и пятого порядков, представляющие электрон-фотонную вершину в спинорной электродинамике.

Аналогичным образом можно ввести суммы многохвостных диаграмм, в том числе суммы сильносвязанных диаграмм с  $l \geq 3$  внешними линиями, образующие так называемые *вертексы*, или *вершинные функции* (см., например, рис. 27.5). В дальнейшем

мы будем обозначать собирательным термином *полные функции Грина* выражения, отвечающие наборам связанных диаграмм с данным числом внешних линий, равным или большим двух. Пропагаторы физических полей в этой терминологии отвечают 2-хвостным полным функциям Грина.

**27.2. Высшие функции Грина.** Введенные выше понятия опирались на полунититивные рассуждения, использующие суммирование членов, соответствующих определенным типам диаграмм. Мы дадим сейчас аналитические формулы для полных функций Грина.

В основу соответствующего формального выражения для  $n$ -хвостной функции положим вакуумное ожидание

$$\langle T u_1(x_1) \dots u_n(x_n) S \rangle_0, \quad (6)$$

содержащее под знаком  $T$ -произведения матрицу рассеяния

$$S = T(\exp i\mathcal{A}), \quad (7)$$

где  $\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x) dx$ . С одной стороны, выражения типа (6) родственны матричным элементам  $S$ -матрицы для переходов  $n_{in} \rightarrow n_f$ ;  $n_{in} + n_f = n$ . С другой стороны, при  $n=2$  подобные выражения являются естественными обобщениями одночастичных функций Грина свободных полей на случай взаимодействия.

Разлагая  $T$ -экспоненту, получаем из (6) при  $n=2$  ряд

$$\begin{aligned} \langle T u_1(x) u_2(y) S \rangle_0 &= \langle T u_1(x) u_2(y) \rangle_0 + i \langle T u_1(x) u_2(y) \mathcal{A} \rangle + \\ &+ \frac{i^2}{2!} \langle T u_1(x) u_2(y) \mathcal{A}^2 \rangle_0 + \frac{i^3}{3!} \langle T u_1(x) u_2(y) \mathcal{A}^3 \rangle_0 + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

последовательные члены которого содержат радиационные поправки к первому члену  $\langle T u_1 u_2 \rangle_0$ , представляющему собой элементарное (свободное) спаривание.

Здесь уместно сделать одно важное техническое замечание, относительно выражений, содержащих под знаком операции  $\langle T(\dots) \rangle_0$  операторные сомножители, не зависящие явно от времени, подобные показателю экспоненты в (7) или, например, операторам полей в импульсном представлении. Может возникнуть искушение вынести такой «не зависящий» от времени сомножитель из-под знака  $T$ -произведения. Однако в результате этой операции после вычисления вакуумного ожидания мы приходим к выражению, в котором некоторые хронологические спаривания окажутся замененными на обычные, т. е. приходим к неверному результату.

В выражениях подобного типа всегда следует сначала выполнить операцию  $\langle T(\dots) \rangle_0$ , а затем уже интегрировать по конфигурационному пространству. Например, третий член в правой части (8) есть по определению

$$\langle T u_1(x) u_2(y) \mathcal{A}^2 \rangle_0 \equiv \int dz_1 dz_2 G(x, y; z_1, z_2),$$

где

$$G(x, y; z_1, z_2) = \langle T u_1(x) u_2(y) \mathcal{L}(z_1) \mathcal{L}(z_2) \rangle_0.$$

Таким образом, операции  $\langle T \dots \rangle_0$  и  $\int dx$  непереставимы и запись типа (8) является чисто символической.

Слагаемые правой части (8) содержат члены, соответствующие диаграммам с двумя внешними линиями, выходящими из точек  $x$  и  $y$ , подобным изображенным на рис. 27.1. Однако, помимо диаграмм, приведенных на рис. 27.1, третьему слагаемому правой части (8) соответствует несвязная диаграмма, изображенная на рис. 27.6, а, четвертому слагаемому — диаграмма рис. 27.6, б и т. д. Подобные несвязные диаграммы имеются во всех высших порядках. Они отвечают определенному способу спариваний операторов, когда операторы  $u_1(x)$  и  $u_2(y)$  спарены друг с другом через часть промежуточных вершин  $z_1, \dots, z_m$ .

Операторы из остальных вершин  $z_{m+1}, \dots, z_n$  в диаграммах данного  $n$ -го порядка спарены только между собой. Соответствующие вклады факторизуются:

$$\langle T \{u_1 u_2 (i\mathcal{L})^m\} \rangle_0^{CB} \cdot \langle T (i\mathcal{L})^{n-m} \rangle_0.$$

Введенный здесь верхний индекс обозначает связанные вклады. Вершины  $z_1, \dots, z_m$  могут быть выбраны из  $n$  вершин  $n!/m!(n-m)!$  способами. Имеем поэтому

$$\langle T u_1 u_2 S \rangle_0 = \sum_n \frac{i^n}{n!} \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \langle T u_1 u_2 \mathcal{L}^m \rangle_0^{CB} \cdot \langle T \mathcal{L}^{n-m} \rangle_0;$$

$$\sum_n = \sum_{0 \leq n \leq \infty}.$$

Меняя порядок суммирования, получаем

$$\begin{aligned} \langle T u_1 u_2 S \rangle_0 &= \sum_m \frac{i^m}{m!} \langle T u_1 u_2 \mathcal{L}^m \rangle_0^{CB} \sum_l \frac{i^l}{l!} \langle T \mathcal{L}^l \rangle_0 = \\ &= \langle T u_1 u_2 S \rangle_0^{CB} S_0; \quad S_0 = \langle S \rangle_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, вакуумные вклады  $S_0$  факторизуются и в полном выражении

Поэтому полные одночастичные функции Грина определим следующим образом:

$$\Delta_{12}(x, y; g) = i \frac{\langle T u_1(x) u_2(y) S \rangle_0}{S_0}. \quad (10)$$

Выражение (10) учитывает все радиационные поправки, соответствующие связным диаграммам Фейнмана, и в пределе выключения взаимодействия переходит в функцию Грина свободных полей.

Проведенное рассуждение, приводящее к факторизации вакуумных вкладов, может быть повторено для вакуумных ожиданий при  $k > 2$ . Здесь, однако, после удаления вакуумных вкладов выражения

$$S_0^{-1} \langle T u_1 \dots u_k S \rangle_0, \quad (11)$$

вообще говоря, содержат слагаемые, в которых часть операторов  $u_1, \dots, u_i$  входит в одну компоненту связности несвязной диаграммы, а остальные  $u_{i+1}, \dots, u_k$  в другую (другие). Такие члены отвечают произведению диаграмм, входящих в полные функции Грина с меньшим числом внешних линий.

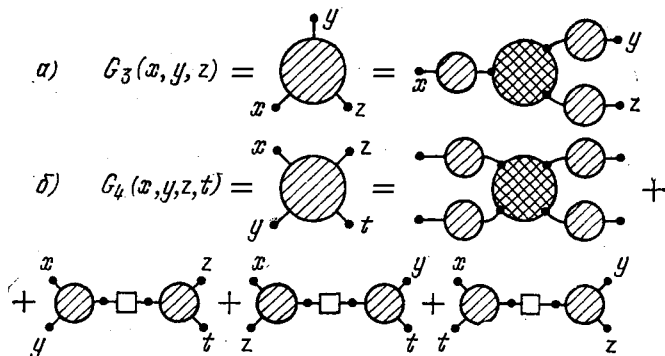


Рис. 27.7. Представление 3- и 4-хвостных функций Грина через 2-хвостную функцию Грина  $\Delta$  и сильносвязные вертексы, отмеченные двойной штриховкой. Квадратом  $\square$  обозначен «обратный пропагатор»  $\Delta^{-1}$ .

Поэтому выражения типа (11) при  $k > 2$  не могут быть приравнены полным  $k$ -хвостным функциям Грина. Исключение составляет 3-хвостка

$$S_0^{-1} \langle T u_1(x) u_2(y) u_3(z) S \rangle_0, \quad (12)$$

представляющая собой сумму связных вкладов.

Для связной 4-хвостки приведем без вывода формулу

$$G_{1234}(x, y, z, t) = S_0^{-1} \langle T u_1(x) u_2(y) u_3(z) u_4(t) S \rangle_0 - i\Delta_{12}(x, y) \Delta_{34}(z, t) - i\Delta_{13}(x, z) \Delta_{24}(y, t) - i\Delta_{14}(x, t) \Delta_{23}(y, z). \quad (13)$$

**27.3. Сильносвязные многохвостки (вертексы).** Введенные выше многохвостные функции Грина содержат все слабосвязные (т. е. одночастично приводимые) вклады. Этот тезис иллюстрируется рис. 27.3 и 27.7, на которых сильносвязные составляющие отмечены двойной штриховкой.

Соответствующие формулы, выражающие связанные многохвостки (полные функции Грина) через сильносвязные вертексы, могут быть получены на основе аппарата производящего функционала с помощью представления полных функций Грина и вертексов через соответствующие вариационные производные. Отсылая любознательного читателя к имеющейся специальной литературе (см., например, § 38 Введения), приведем здесь окончательные формулы, отвечающие рис. 27.7 для скалярного поля:

$$G_3(x, y, z) = \int \Delta(x-x') dx' \Gamma_3(x', y', z') dy' \Delta(y'-y) dz' \Delta(z'-z), \quad (14)$$

$$G_4(x, y, z, t) = \int \Delta(x-x') dx' \Delta(y-y') dy' \Gamma_4(x', y', z', t') dz' \Delta(z'-z) dt' \Delta(t'-t) + \\ + \int G_3(x, y, \tau) d\tau \Delta^{-1}(\tau-\tau') d\tau' G_3(\tau', z, t) + \\ + \int G_3(x, z, \tau) d\tau \Delta^{-1}(\tau-\tau') d\tau' G_3(\tau', y, t) + \\ + \int G_3(x, t, \tau) d\tau \Delta^{-1}(\tau-\tau') d\tau' G_3(\tau', y, t). \quad (15)$$

Здесь  $\Delta^{-1}$  — функция, обратная к  $\Delta$  в смысле интегральной свертки, т. е. по определению

$$\int \Delta(x-\tau) d\tau \Delta^{-1}(\tau-y) = \int \Delta^{-1}(x-\tau) d\tau \Delta(\tau-y) = \delta(x-y). \quad (16)$$

Заметим, что в импульсном представлении фурье-образы функций  $\Delta$  и  $\Delta^{-1}$  взаимобратны в алгебраическом смысле:

$$\tilde{\Delta}(p) \tilde{\Delta}^{-1}(p) = 1.$$

С помощью функции  $\Delta^{-1}$  не составляет труда записать формулы, обратные к (14) и (15). Имеем, например,

$$\Gamma_3(x, y, z) = \int \Delta^{-1}(x-x') dx' \Delta^{-1}(y-y') dy' G_3(x', y', z') dz' \Delta^{-1}(z'-z). \quad (17)$$

Приведем еще формулу типа (14) для спинорной электродинамики:

$$S_0^{-1} \langle T\psi(x) \bar{\psi}(y) A^\mu(z) S \rangle_0 = \int S^c(x-x') dx' D_c^{\mu\nu}(z-z') dz' \Gamma_\nu(x', y', z') dy' S^c(y'-y). \quad (18)$$

В заключение отметим, что процедура перехода от слабосвязной треххвостки  $G_3$  к сильносвязной  $\Gamma_3$  сводится к исключению радиационных поправок из внешних линий и поэтому иногда именуется «ампутацией» внешних линий. Для более высоких функций Грина соответствующий переход, как видно из формулы (15), не ограничивается ампутацией внешних линий.

**27.4. Редукционные формулы.** Рассмотренные выше функции Грина могут быть связаны простыми соотношениями с матричными элементами матрицы рассеяния.

Довольно ясно, что матричный элемент перехода  $m \rightarrow n$

$$\langle \Phi^* \dots (p_1, \dots, p_n) S\Phi(q_1, \dots, q_m) \rangle_0, \quad (19)$$

где

$$\Phi_{\alpha \dots \omega}(q_1, \dots, q_m) = a_{\alpha}^+(q_1) \dots a_{\omega}^*(q_m) \Phi_0,$$

описывается теми же самыми диаграммами Фейнмана, что и связанная  $(n+m)$ -хвостная функция Грина  $G_{n+m}$ .

Отличие состоит в множителях, отвечающих внешним линиям. В матричном элементе (19) внешним линиям, согласно правилам Фейнмана из § 20, соответствуют амплитуды начальных и конечных частиц  $f_{\sigma}^{\pm}(k)$ . Например,

$$f^{\pm}(k) = \pm (16\pi^3 k_0)^{-1/2} \quad \text{для бесспинового поля,}$$

$$f_s^{\pm}(p) = (2\pi)^{-3/2} v_s^{\pm}(p) \quad \text{для спинорного поля,}$$

$$f_v^{\pm}(q) = \pm (16\pi^3 q_0)^{-1/2} e_v(q) \quad \text{для электромагнитного поля,}$$

причем отрицательно-частотные амплитуды  $f^-$  отвечают частицам в начальном состоянии, а положительно-частотные  $f^+$  — частицам конечного состояния.

В то же время в функции Грина, взятой в импульсном представлении

$$\tilde{\Delta}_{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \int e^{i \sum k_j x_j} \Delta_{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (20)$$

внешним линиям соответствуют свободные пропагаторы полей. Поэтому, как можно показать,

$$\begin{aligned} \langle \Phi^*(p_1, \dots, p_n) S\Phi(q_1, \dots, q_m) \rangle_0 &= i\eta \prod_{1 \leq k \leq n} [f_k^+(p_k) \Delta_k^{-1}(p_k)] \times \\ &\times \tilde{\Delta}_{(n+m)}(p_1, \dots, p_n; -q_1, \dots, -q_m) \prod_{1 \leq l \leq m} [f_l^-(q_l) \Delta_l^{-1}(q_l)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Множитель  $i$  в правой части обязан своим происхождением стандартному определению функций Грина, а  $\eta = \pm 1$  — знаковый фактор, учитывающий перемены знаков при перестановках фермионных операторов.

Соотношение (21) является *редукционной формулой* в импульсном представлении.

## § 28. Процедура перенормировок

**28.1. Перенормировка вкладов в функции Грина.** Наша ближайшая программа — провести процедуру вычитания расходимостей в полных функциях Грина и получить для них выражения, не содержащие ультрафиолетовых бесконечностей (т. е. выражения для так называемых *перенормированных функций Грина*).

Такие выражения еще будут нести на себе печать произвола, связанного с неоднозначностью процедуры вычитания бесконечностей. Однако зависимость перенормированных функций Грина от соответствующих неопределенных конечных постоянных для ренормируемых теорий имеет довольно простой и в то же время специфический характер. Это позволяет отнести произвол в такие параметры, как массы, константы связи, нормировки операторов полей и в конечном итоге получить для перенормированных функций Грина выражения, зависящие от так называемых перенормированных масс и констант связи и не содержащие каких-либо дополнительных неопределенных констант. Перенормированные массы и константы связи в свою очередь однозначно выражаются через непосредственно наблюдаемые величины.

Мы начнем эту программу с анализа одночастичных функций Грина.

Как было установлено в § 27.1, в импульсном представлении одночастичная функция Грина  $G(p)$  выражается через сильносвязную 2-хвостную вершину  $\Gamma_2(p; g)$ , равную массовому оператору, алгебраическим соотношением

$$G(p; g) = G_0(p) + G_0\Gamma_2(p; g)G_0 + G_0\Gamma_2G_0\Gamma_2G_0 + \dots = (G_0^{-1} - \Gamma_2)^{-1}. \quad (1)$$

В результате вычитания расходимостей функция  $\Gamma_2$ , формально определенная правилами Фейнмана через сильносвязные диаграммы, заменяется выражением  $\tilde{\Gamma}_2(p)$ , не содержащим расходимостей. Структура  $\tilde{\Gamma}_2(p)$  существенно зависит от типа рассматриваемой модели квантовой теории поля.

Для перенормируемых моделей взаимодействия, когда максимальный индекс вершины равен нулю, степень расходимости диаграмм не зависит от порядка теории возмущений и для диаграмм с двумя наружными бозонными линиями равна 2, а для диаграмм с двумя фермионными линиями равна 1.

Поэтому в первом случае  $\tilde{\Gamma}_2$  имеет следующую структуру:

$$\tilde{\Gamma}_2(p) = ap^2 + bm^2 + \Gamma_2^{\text{кон}}(p^2), \quad (2a)$$

тогда как во втором случае

$$\tilde{\Gamma}_2(p) = a\hat{p} + bm + \Gamma_2^{\text{кон}}(p), \quad (2b)$$

т. е. в обоих случаях в силу релятивистской инвариантности  $\tilde{\Gamma}_2$  содержит две конечные произвольные константы.

Напротив, в неперенормируемых моделях степень расходимости зависит от числа вершин и неограниченно возрастает вместе с порядком теории возмущений. В каждом конечном порядке функция  $\tilde{\Gamma}_2$  содержит конечный полином по степеням  $p^2$  или  $\hat{p}$  с произвольными коэффициентами, степень которого возрастает вместе с порядком диаграммы. Поэтому полная функция  $\tilde{\Gamma}_2$ , являю-



щаяся бесконечной суммой вкладов различных порядков теории возмущений, зависит от бесконечного числа произвольных параметров (т. е. от произвольной функции).

Для скалярного случая с помощью (1) и (2) получаем

$$\tilde{G}(p) = [(1-b)m^2 - (1+a)p^2 - \Gamma_2^{\text{КОН}}(p^2)]^{-1}. \quad (3)$$

Определим квадрат перенормированной массы скалярной частицы  $\tilde{m}^2$  как положение полюса правой части уравнения (3) по переменной  $p^2$ , т. е.

$$\tilde{G}^{-1}(\tilde{m}^2) = (1-b)m^2 - (1+a)\tilde{m}^2 - \Gamma_2^{\text{КОН}}(\tilde{m}^2) = 0. \quad (4a)$$

Последнее соотношение можно представить в виде

$$\tilde{m}^2 = m^2 + \Delta m^2,$$

где

$$\Delta m^2 = -\frac{a+b}{1+a} m^2 - \frac{\Gamma_2^{\text{КОН}}(\tilde{m}^2)}{1+a} \quad (5a)$$

— сдвиг квадрата массы, обусловленный квантовыми (радиационными) поправками. Для фактического определения  $\tilde{m}^2$  и  $\Delta m^2$  следует решать трансцендентное уравнение (4a).

В окрестности полюса  $p^2 = \tilde{m}^2$  перенормированный пропагатор  $\tilde{G}$  можно представить в виде

$$\tilde{G}(p) = \frac{Z_2}{\tilde{m}^2 - p^2}, \quad (6a)$$

где

$$Z_2^{-1} = 1 + a + \Gamma_2^{\prime \text{КОН}}(\tilde{m}^2), \quad \Gamma_2'(m^2) = \left. \frac{\partial \Gamma_2(k^2)}{\partial k^2} \right|_{k^2 = m^2}. \quad (7a)$$

Повторяя рассуждения для спинорного пропагатора, находим

$$G^{-1}(\hat{p} = m) = m(1-b) - \tilde{m}(1+a) - \Gamma_3^{\text{КОН}}(\tilde{m}) = 0, \quad (4б)$$

$$\tilde{m} = m + \Delta m, \quad \Delta m = -\frac{a+b}{1+a} m - \frac{\Gamma_3^{\text{КОН}}(m)}{1+a}, \quad (5б)$$

$$\tilde{G}(\hat{p}) \Big|_{\hat{p} \sim m} \simeq \frac{Z_2}{\tilde{m} - \hat{p}}, \quad (6б)$$

$$Z_3^{-1} = 1 + a + \Gamma_3^{\prime \text{КОН}}(m). \quad (7б)$$

Мы видим, что в каждом случае две произвольные постоянные в конечном счете входят в перенормировку массы  $\Delta m$  и перенормировку пропагатора  $Z_2$  (т. е. в перенормировку функции поля).

Перейдем теперь к высшим функциям Грина, т. е. к вертексам. Для конкретности будем рассматривать параллельно два объекта: 4-хвостку для скалярных частиц  $\Gamma_4$  и 3-хвостную

бозон-фермионную вершину  $\Gamma_3$  для моделей, содержащих частицы с целым и полуцелым спином (наподобие спинорной электродинамики).

В моделях с равными нулю максимальными индексами вершин (перенормируемых моделях) индексы диаграмм, образующих обе указанные вершины, не зависят от порядка теории возмущений и равны нулю. Поэтому структура неопределенностей в обоих случаях одинакова:

$$\tilde{\Lambda}_4(p_1, \dots, p_4) = d + \Lambda_4^{\text{кон}}(\dots p \dots), \quad (8a)$$

$$\tilde{\Lambda}_3(p_1, \dots, p_3) = cO + \Lambda_3^{\text{кон}}(\dots p \dots). \quad (8б)$$

Здесь  $c$ ,  $d$  — произвольные конечные константы,  $O$  — дираковская матрица, отвечающая лоренцевой структуре 3-вертекса, а  $\Lambda_n$  — суммы радиационных поправок, которые вместе с затравочным вкладом от первого порядка теории возмущений образуют полные вертексы  $\Gamma_n$ . Так, в модели  $\hbar\varphi^4$

$$\Gamma_4^{\text{кон}} = h + \Lambda_4^{\text{кон}}, \quad (9a)$$

тогда как в спинорной электродинамике

$$\Gamma_\mu^{\text{кон}} = e\gamma_\mu + (\Lambda_3^{\text{кон}})_\mu. \quad (9б)$$

Как видно, первые слагаемые в правых частях формул (8a), (8б) имеют ту же структуру, что и затравочные члены, вследствие чего эффект постоянных  $c$ ,  $d$  сводится к модификации констант связи

$$g \rightarrow g' = g + c \quad (10)$$

(символом  $g$  обозначаем здесь константу связи, отвлекаясь от конкретной модели).

Вертексы с числом внешних линий, большим четырех, мы не будем обсуждать, поскольку, согласно формуле (26.22), диаграммы с таким числом внешних линий в перенормируемых моделях в целом сходятся и им не соответствуют какие-либо новые константы.

**28.2. Теорема о перенормируемости.** Проведенные выше рассуждения носили схематический характер. В них, в частности, не нашел отражения важный факт наличия расходимостей в поддиаграммах данной диаграммы и не обсуждалась структура соответствующего произвола.

Для иллюстрации этого факта заметим, например, что при вычислении вклада пятого порядка в 4-вертекс  $\Gamma_4$  в скалярной модели  $\hbar\varphi^4$  от диаграммы, изображенной на рис. 28.1, а, необходимо вычислить квадратично расходящуюся поддиаграмму собственной энергии (рис. 28.1, б) и логарифмически расходящуюся поддиаграмму рассеяния (рис. 28.1, в). Поэтому второе слагаемое

в правой части (8а) зависит как от произвольных констант  $a$ ,  $b$ , введенных в (2), так и от константы  $d$ .

Ограниченный объем изложения не позволяет нам входить в детали этих важных вопросов. Отсылая интересующегося читателя за подробностями к более специальной литературе (см., например, гл. V Введения и гл. II, III книги Завьялова (1979)),

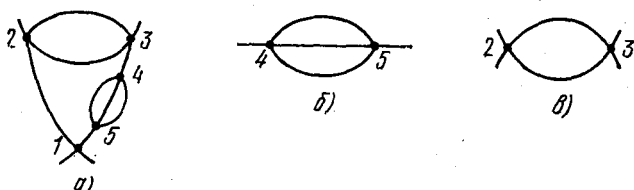


Рис. 28.1. Логарифмически расходящаяся скалярная диаграмма пятого порядка (а) и ее расходящиеся поддиаграммы (б) и (в).

мы лишь отметим здесь, что общее утверждение о перенормируемости теории возмущений составляет сущность фундаментальной *теоремы о перенормировках* (теорема Боголюбова — Парасюка), а удобный практический рецепт однозначного вычитания расходимостей следует из так называемой *R-операции Боголюбова*.

С практической точки зрения наиболее важный аспект процедуры перенормировки заключается в необходимости соблюдения некоторых простых правил, обеспечивающих ее внутреннюю согласованность. Согласно этим правилам в любой данной расходящейся диаграмме вычитание следует производить одним и тем же способом независимо от того, выступает ли она как самостоятельная диаграмма или как поддиаграмма какой-либо сложной диаграммы. Например, обе произвольные константы, возникающие при вычислении конечной части диаграммы второго порядка «орех» в скалярной модели  $h\varphi^4$  (см. рис. 25.3), должны определяться одним и тем же способом, как при вычислении вклада второго порядка в пропагатор, так и при любых вычислениях сколь угодно сложных диаграмм, в том числе диаграммы рис. 28.1, а.

При этих условиях возникающие в процессе устранения бесконечностей произвольные константы входят в окончательные выражения для функций Грина и матричных элементов в виде небольшого числа комбинаций

$$\tilde{m}_i = f_i(m, g, a, b, \dots), \quad \tilde{g}_k = \psi_k(m, g, a, b, \dots),$$

которые могут быть отождествлены с физическими массами и физическими константами связи.

Таким образом, оказывается возможным последовательно провести во всех порядках теории возмущений переход от первона-

чальных параметров (масс и констант связи), входящих в лагранжиан и правила Фейнмана, к новым перенормированным параметрам

$$\{g, m\} \rightarrow \{\tilde{g}, \tilde{m}\}. \quad (11)$$

Перенормированные вертексы и наблюдаемые матричные элементы зависят теперь только от перенормированных масс и констант связи и не зависят от исходных масс, констант связи и произвольных параметров  $a, b, c, \dots$  по отдельности.

**28.3. Рецепт вычитания на массовой поверхности.** Приведем теперь наиболее удобный для практических вычислений способ определения произвольных параметров, возникающих при вычитании расходимостей. Заметим прежде всего, что, согласно формулам (5а), (5б), параметрами  $a, b$  можно распорядиться таким образом, чтобы сдвиг массы  $\Delta m$  оказался равным нулю. В скалярном случае для этого следует положить

$$m^2 b = -m^2 a - \Gamma_2^{\text{кон}}(m^2). \quad (12)$$

Подставляя это соотношение в (2), получаем

$$\tilde{\Gamma}_2(p) = a(p^2 - m^2) + \Gamma_2^{\text{кон}}(p^2) - \Gamma_2^{\text{кон}}(m^2).$$

Если теперь распорядиться постоянной  $a$  так, чтобы перенормированная  $\tilde{\Gamma}$  имела при  $p^2 = m^2$  нуль второго порядка

$$a = -\tilde{\Gamma}'_2{}^{\text{кон}}(m^2) = -\left. \frac{\partial \Gamma_2^{\text{кон}}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2 = m^2}, \quad (13)$$

то, согласно (7), мы получим, что константа перенормировки функции поля  $Z_2$  равна единице.

Заметим, что рецепт (12), (13), эквивалентный определению

$$\Gamma_2^{\text{рен}}(p^2) = \Gamma_2^{\text{кон}}(p^2) - \Gamma_2^{\text{кон}}(m^2) - (p^2 - m^2) \Gamma_2^{\text{кон}}(m^2), \quad (14)$$

сводится к вычитанию из конечной части  $\Gamma^{\text{кон}}$  ее первых двух членов разложения в ряд Тейлора в точке  $p^2 = m^2$ , т. е. на массовой поверхности. Этот рецепт вычитания на массовой поверхности одновременно обращает в нуль перенормировку массы и изменение нормы функции поля:

$$\tilde{m}^2 = m^2, \quad Z_2 = 1,$$

что является весьма удобным с практической точки зрения.

В спинорном случае соответствующая формула имеет вид

$$\Gamma_2^{\text{рен}}(\hat{p}) = \Gamma_2^{\text{кон}}(\hat{p}) - \Gamma_2^{\text{кон}}(m) - (\hat{p} - m) \Gamma_2^{\text{кон}}(m). \quad (15)$$

Здесь имеется в виду, что функция  $\Gamma_2^{\text{кон}}$ , зависящая от матричного аргумента  $\hat{p}$  и скалярного аргумента  $p^2$ , путем отождествле-

ния  $p^2 = (\hat{p})^2$  рассматривается как функция одного аргумента  $\hat{p}$ . Именно в этом смысле понимается производная в последнем члене правой части:  $\Gamma'^{\text{кон}} = (\partial/\partial\hat{p}) \Gamma^{\text{кон}}$ .

Как будет установлено ниже в § 29.4, производная массового оператора электрона  $\Sigma'$  в точке  $\hat{p} = m$  обращается в бесконечность из-за так называемой *инфракрасной* расходимости, обусловленной безмассовостью фотонов. Поэтому, вообще говоря, может статься, что вычитание производной более удобно производить не на массовой поверхности, а в какой-либо другой точке  $\hat{p} = p_*$  (например, при  $\hat{p} = 0$ ). В этом случае формула (15) примет вид

$$\Gamma_2^{\text{ден}}(\hat{p}) = \Gamma_2^{\text{кон}}(\hat{p}) - \Gamma_2^{\text{кон}}(m) - (\hat{p} - m) \Gamma'^{\text{кон}}(p_*). \quad (16)$$

Такой вариант вычитания соответствует перенормировке спинорного поля, равной

$$Z_2^{-1} = 1 + \Gamma_2'^{\text{кон}}(m) - \Gamma_2'^{\text{кон}}(p_*). \quad (17)$$

**28.4. Неоднозначность перенормировки вертекса.** Перейдем к перенормировкам вершинных функций. Как показано в Дополнении VII, скалярная 4-хвостка  $\Gamma_4(p_1, \dots, p_4)$  является функцией шести независимых скалярных переменных. Мы будем, однако, записывать явно зависимость от семи переменных

$$\Gamma_4^{\text{кон}} = F(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2; s = (p_1 + p_2)^2, t = (p_1 + p_3)^2, u = (p_1 + p_4)^2), \quad (18)$$

имея в виду линейную связь между ними (см. (DVII.7)).

Переход на массовую поверхность фиксирует первые четыре из них, оставляя три последних связанными соотношением

$$s + t + u = 4m^2. \quad (19)$$

Точка вычитания 4-хвостки, таким образом, не фиксируется однозначно при выходе на массовую поверхность. Остающийся двухпараметрический произвол ограничен лишь условием действительности. Как было показано в § 26.2, произвольная константа  $d$  из правой части (8) эквивалентна 4-мезонному контрчлену  $d\phi^4$  в лагранжиане и потому должна быть действительна. Поэтому константа  $d$  может быть определена через значение вершины

$$\Gamma_4^{\text{кон}}(s, u, t) = F(m^2, m^2, m^2, m^2, s, u, t) \quad (20)$$

в области значений аргументов  $s, u, t$ , ограниченной условиями

$$s \leq 4m^2, \quad t \leq 4m^2, \quad u \leq 4m^2. \quad (21)$$

Происхождение этих условий объяснено в Дополнении VII.

Возможной точкой вычитания является точка, отвечающая порогу реакции в одном из каналов, например точка  $s = 4m^2, u = t = 0$ . Значение 4-хвостки и амплитуды рассеяния в этой

точке пропорционально так называемой  $s$ -волновой длине рассеяния и может быть непосредственно измерено на опыте.

Если положить

$$\Lambda_4^{\text{рег}} (\dots p \dots) = \Lambda_4^{\text{кон}} (s, u, t) - \Lambda_4^{\text{кон}} (4m^2, 0, 0), \quad (22)$$

то полная вершинная функция согласно (9) будет удовлетворять соотношению

$$\Gamma_4^{\text{рег}} (4m^2, 0, 0; g) = g, \quad (23)$$

которое можно рассматривать как определение *перенормированной константы связи*.

Часто используют другую, так называемую симметричную, точку вычитания  $s = u = t = 4m^2/3$ . В этом случае

$$\Lambda_4^{\text{рег}} (\dots p \dots) = \Lambda_4^{\text{кон}} (s, u, t) - \Lambda_4^{\text{кон}} (4m^2/3, 4m^2/3, 4m^2/3) \quad (24)$$

и

$$g = \Gamma_4^{\text{рег}} (4m^2/3, 4m^2/3, 4m^2/3; g). \quad (25)$$

Константы связи (23) и (25) могут быть выражены друг через друга. Обозначим через  $\Gamma_4^{\text{сим}}$  вершинную функцию, нормированную в симметричной точке, т. е. удовлетворяющую соотношению (25). Соответствующую константу связи обозначим через  $g^{\text{сим}}$ , т. е.

$$\Gamma_4^{\text{сим}} \left( \frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}; g^{\text{сим}} \right) = g^{\text{сим}}. \quad (26)$$

Процедуре вычитания на пороге сопоставим  $\Gamma_4^{\text{пор}}$  и  $g^{\text{пор}}$ :

$$\Gamma_4^{\text{пор}} (4m^2, 0, 0; g^{\text{пор}}) = g^{\text{пор}}. \quad (27)$$

Тогда

$$\Gamma_4^{\text{пор}} \left( \frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}; g^{\text{пор}} \right) = g^{\text{сим}} \quad (28)$$

и, наоборот,

$$\Gamma_4^{\text{сим}} (4m^2, 0, 0; g^{\text{сим}}) = g^{\text{пор}}. \quad (29)$$

## § 29. Перенормировки в спинорной электродинамике

**29.1. Условие градиентной инвариантности.** В квантовой теории поля, описывающей электромагнитные взаимодействия, важную роль играет требование градиентной инвариантности. Как было показано в § 4, градиентное преобразование потенциала электромагнитного поля

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (1)$$

не меняет значений компонент электрического и магнитного полей и, следовательно, не должно приводить к каким-либо наблюдаемым эффектам.

Требование инвариантности матричных элементов  $S$ -матрицы по отношению к преобразованию (1) называется условием градиентной инвариантности матрицы рассеяния. Для того чтобы сформулировать его в явном виде, заметим, что при преобразовании (1), где  $f$  — произвольная бесконечно малая функция, член  $n$ -го порядка матрицы рассеяния

$$\int S_n(x, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

получит приращение, главная часть которого имеет вид

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \int \frac{\partial S_n}{\partial A_\mu(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i^\mu} dx_1 \dots dx_n.$$

Интегрируя это выражение по частям, находим, что оно обращается в нуль, если тождественно

$$\operatorname{div} \left( \frac{\partial S_n}{\partial A} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} \frac{\partial S_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial A_\mu(x_i)} = 0. \quad (2)$$

Нетрудно убедиться, что полученное условие обеспечивает инвариантность  $S$ -матрицы и при конечных градиентных преобразованиях.

Условие (2) можно рассматривать применительно к формальному определению  $S$ -матрицы в виде хронологической экспоненты от лагранжианов взаимодействия. Можно показать (см., например, Введение, §§ 28.2 и 33.2, 33.3), что градиентная инвариантность  $S$ -матрицы, представленной произведениями пропагаторов согласно правилам Фейнмана, обусловлена уравнением непрерывности фермионного тока в представлении взаимодействия.

Мы будем рассматривать условие градиентной инвариантности применительно к матрице рассеяния, не содержащей расходимостей, т. е. подразумевать под коэффициентными функциями  $S_n$  выражения, полученные *после* вычитания расходимостей.

**29.2. Градиентное преобразование фотонного пропагатора.** Заметим теперь, что если рассматривать функцию  $f(x)$  в правой части градиентного преобразования (1) как оператор, зависящий от операторных потенциалов  $A_\mu$ , то для хронологического спаривания электромагнитного поля можно получить более общее выражение, чем использованное в правилах Фейнмана диагональное выражение, которое мы запишем в виде

$$\overline{A_\mu(k) A_\nu(q)} \equiv \langle T A_\mu(k) A_\nu(q) \rangle_0 = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \delta(k + q). \quad (3)$$

Рассмотрим градиентное преобразование от потенциалов  $A_\mu$ , удовлетворяющих соотношению (3), к потенциалам

$$A'_\nu = A_\nu + k_\nu (k A(k)) \mathcal{F}(k^2)/k^2,$$

где  $\mathcal{F}$  — некоторая  $c$ -функция. Определяя хронологическое спаривание новых операторов  $A'$ , получаем

$$\overline{A'_\mu(k) A'_\nu(q)} = \frac{1}{ik^2} \left\{ \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} d_l(k^2) \right\} \delta(k+q), \quad (4)$$

причем

$$d_l(k^2) = (1 + \mathcal{F}(k^2))^2.$$

Первое слагаемое в правой части (4) пропорционально поперечному проекционному оператору  $P_{\mu\nu}^{\text{tr}}$ , второе — продольному проекционному оператору  $P_{\mu\nu}^{\text{l}}$ , т. е.

$$P_{\mu\nu}^{\text{tr}}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad P_{\mu\nu}^{\text{l}} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (5)$$

Согласно условию градиентной инвариантности матричные элементы не должны зависеть от  $d_l(k^2)$ .

Полагая  $d_l = 0$ , получаем из (4) выражение, удовлетворяющее условию поперечности,

$$k^\nu \overline{A'_\nu(k) A'_\mu(q)} = 0.$$

При  $d_l = 1$  возвращаемся к обычному диагональному спариванию (3).

**29.3. Пропагатор фотона с радиационными поправками.** В § 24 были проведены вычисления простейших однопетлевых диаграмм спинорной электродинамики. Там было показано, что диаграмме поляризации вакуума рис. 24.1, б соответствует квадратично расходящийся интеграл  $\Pi_{\mu\nu}$  (см. формулы (24.7), (24.8)), представляющий низшее приближение к поляризованному оператору. Конечная часть этого интеграла, согласно (24.11), (24.12) может быть записана в виде

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = a g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \left[ b + I \left( \frac{k^2}{4m^2} \right) \right] \frac{\alpha}{\pi}, \quad (6)$$

где  $a$  и  $b$  — произвольные конечные постоянные, а интеграл

$$I(z) = 2 \int_0^1 dx x(1-x) \ln [1 - 4x(1-x)z - i\varepsilon]$$

после элементарных преобразований может быть представлен как

$$I(z) = -\frac{z}{3} \int_1^\infty \frac{d\sigma (1+2/\sigma)}{\sigma(\sigma-z+i\varepsilon)} \sqrt{1-\frac{1}{\sigma}} = -\frac{4}{9} + \frac{2}{3} [J(z) + J'(z)],$$

где функция  $J(z)$  в явном виде определяется формулами (24.4, 5). В пределе больших  $|z|$

$$I(z) \rightarrow \frac{1}{3} \ln(-z).$$



Используем теперь условие (2) для определения входящих в  $\Pi_{\mu\nu}$  неопределенных констант. Заметим для этого, что поляриза-ционный оператор входит в  $S_2(x, y)$  следующим образом:

$$-i : A^\mu(x) \Pi_{\mu\nu}(x-y) A^\nu(y) :.$$

Поэтому условие градиентной инвариантности дает

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \Pi_{\nu\mu}(x) = 0, \quad k^\nu \Pi_{\nu\mu}(k) = 0. \quad (7)$$

Подставляя правую часть (6) во второе из соотношений (7), полу-чаем  $a=0$ . Оператор поляризации вакуума в силу условия гра-диентной инвариантности имеет чисто поперечную форму

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{per}}(k) = (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \left[ b + I \left( \frac{k^2}{4m^2} \right) \right] \frac{\alpha}{\pi}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь обусловленную  $\Pi_{\mu\nu}$  радиационную поправку к пропагатору фотона, который соответственно формуле (4) за-пишем в произвольной калибровке:

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \frac{d_I k_\mu k_\nu}{k^2 k^2} = -\frac{P_{\mu\nu}^{\text{tr}} + d_I P_{\mu\nu}^1}{k^2}, \quad (9)$$

где  $P^{\text{tr}}$  и  $P^1$  — проекционные операторы, введенные в (5). Согласно выводу в § 29.2 коэффициент  $d_I$  может зависеть от  $k^2$ . Однако здесь и всюду ниже будем считать  $d_I = \text{const}$ .



Рис. 29.1. Вклад итераций простейших однопетлевых диаграмм в пропагатор фотона.

Для вычисления поправки к (9) следует прибавить выражение  $i^2 D_{\mu\sigma}(k) \Pi^{\sigma\rho}(k) D_{\rho\nu}(k)$ . Подставляя в него (8) и (9), находим

$$D_{\mu\nu}(k, \alpha) = -\frac{d(k^2, \alpha)}{k^2} P_{\mu\nu}^{\text{tr}}(k) - \frac{d_I}{k^2} P_{\mu\nu}^1(k), \quad (10)$$

где

$$d(k^2, \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[ I \left( \frac{k^2}{4m^2} \right) + b \right].$$

Учет повторных однопетлевых вставок в фотонный пропагатор (рис. 29.1)

$$D - D\Pi D + D\Pi D\Pi D - D\Pi D\Pi D\Pi D + \dots$$

снова приводит нас к выражению (10), где теперь  $d(k^2, \alpha)$  пред-ставлена геометрической прогрессией

$$d(k^2, \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{\pi} (I + b) + \frac{\alpha^2}{\pi^2} (I + b)^2 + \dots,$$

которая после формального суммирования дает

$$d(k^2, \alpha) = \frac{1}{1 - \pi(k^2, \alpha)}, \quad (11)$$

где

$$\pi(k^2, \alpha) = \frac{\alpha}{\pi} \left[ I\left(\frac{k^2}{4m^2}\right) + b \right].$$

Здесь уместно сделать несколько замечаний. Видно, во-первых, что условие градиентной инвариантности приводит к отсутствию перенормировки массы фотона ( $a=0$ ). Однако «параметр второго вычитания»  $b$ , аналогичный параметру  $a$  в формуле (28.2), остается произвольным и дает вклад в перенормировку поперечной части электромагнитного потенциала. С учетом того, что, согласно (24.13),  $I(0)=0$ , получаем

$$d(0, \alpha) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\pi} b} = Z_3.$$

По аналогии с рассуждениями § 28, константу  $b$  удобно положить равной нулю. В этом случае фотонный пропагатор не перенормируется на массовой поверхности фотона и не дает вклада в эффективное значение константы связи.

$$\Pi = \alpha \left( \text{tadpole} \right) + \alpha^2 \left( \text{two-loop diagrams} \right) + \alpha^3 \left( \text{three-loop diagram} \right) + \dots$$

Рис. 29.2. Слагаемые поляризационного оператора.

Заметим, во-вторых, что формула (11) имеет весьма общую природу. Если под  $\Pi_{\mu\nu}$  понимать не диаграмму второго порядка, а сумму всех сильносвязных поляризационных диаграмм (рис. 29.2), то мы снова получим формулу (11), в которой теперь

$$\pi(k^2, \alpha) = \frac{\alpha}{\pi} I + \alpha^2 I_2 + \alpha^3 I_3 + \dots \quad (12)$$

Здесь  $I_n(k^2)$  — вклад  $n$ -петлевых сильносвязных диаграмм, нормированный, согласно только что сделанному замечанию, в нуле:  $I_n(0)=0$ . На массовой поверхности

$$d(0, \alpha) = 1.$$

Наконец, следует сказать, что изученная в этом разделе радиационная поправка, представляющая низшее приближение эффекта поляризации вакуума, становится существенной в ультрафиолетовой области при  $|k^2/m^2| \gg 1$ .

С помощью формулы (10) находим

$$\pi(k^2, \alpha) \rightarrow \frac{\alpha}{3\pi} \left( \ln \frac{k^2}{m^2} + \text{const} \right)$$

и, следовательно,

$$d(k^2, \alpha) \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln k^2}. \quad (13)$$

**29.4. Полный пропагатор электрона.** Оператор собственной энергии электрона  $\Sigma$  во втором порядке теории возмущений формально определен соотношениями

$$\Sigma(x) \sim -ie^2 \gamma^\nu S^c(x) \gamma^\mu D_{\nu\mu}^c(x), \quad (14a)$$

$$\Sigma(p) \sim \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{dk}{k^2 + i\epsilon} [P_{\mu\nu}^{\text{tr}}(k) + d_l P_{\mu\nu}^1(k)] \gamma^\nu \frac{m + \hat{p} - \hat{k}}{m^2 - (p-k)^2} \gamma^\mu. \quad (14б)$$

Приведем без выкладок результат вычисления линейно расходящегося в ультрафиолетовой области интеграла (14б):

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{рег}}(p) = & \\ = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{p^2 - m^2}{m^2} \left[ -3mA(p^2) + d_l \left( \frac{p^2 + m^2}{p^2} \hat{p} - m \right) A(p^2) + d_l \hat{p} \frac{m^2}{p^2} \right] + \right. & \\ & \left. + c_1(\hat{p} - m) + c_2 m \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

где

$$A(p^2) = \int_0^1 \frac{m^2 dx}{xp^2 - m^2} = \frac{m^2}{p^2} \ln \left( \frac{m^2 - p^2}{m^2} \right).$$

Если проводить вычитание на массовой поверхности, то, полагая  $c_2 = 0$ , получим

$$\Sigma(m) = 0. \quad (16)$$

Однако при вычислении производной  $\partial\Sigma/\partial\hat{p}$  в точке  $p^2 = m^2$  мы встретимся с логарифмической расходимостью функции  $A(p^2)$ . Эта расходимость связана с поведением подынтегрального выражения при *малых* значениях 4-импульсов  $k$  (т. е. поведением в окрестности точки  $k_\mu = 0$ ) и потому называется *инфракрасной* особенностью. Физически она обусловлена равенством нулю массы фотона и возможностью излучения заряженной частицей (электронном или позитронном) большого числа очень мягких фотонов. Мы не можем здесь обсуждать этот важный вопрос подробно и отошлем читателя к более специальной литературе (см., например, Введение, § 35.4; Бьеркен, Дрелл (1978), § 17.10; Ахиезер, Берестецкий (1969), §§ 29, 39).

Здесь возможны два различных пути. Первый из них состоит в том, что фотону формально приписывается малая масса  $\lambda_0$ . Вводя соответствующее слагаемое  $k^2 + i\epsilon \rightarrow k^2 - \lambda_0^2 + i\epsilon$  в знаменатель подынтегрального выражения (14б), приходим к выраже-

нию (15), в котором произведена замена  $A(p^2)$  на

$$A(p^2, \lambda_0^2) = \int_0^1 \frac{dx(x-1)m^2}{(1-x)(m^2 - xp^2) + x\lambda_0^2} = \begin{cases} \frac{m^2}{p^2} \ln \left( \frac{m^2 - p^2}{m^2} \right), & |p^2 - m^2| \gg \lambda_0^2, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_0^2}{m^2}, & p^2 = m^2. \end{cases} \quad (17)$$

Теперь можно вычислить константу  $c_1$  из условия

$$\left. \frac{\partial \Sigma(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=m} = \Sigma'(m) = 0, \quad (18)$$

что дает

$$c_1 = 2(3 - d_1) A(m^2, \lambda_0^2) - 2d_1. \quad (19)$$

В окончательных выражениях для наблюдаемых вероятностей перехода величина  $|\lambda_0|$  играет роль параметра, описывающего неопределенность значения импульса заряженной частицы, связанную с возможностью излучения мягких фотонов, нерегистрируемых в данном эксперименте (см цитированную выше литературу).

Другой путь заключается в том, что второе вычитание массового оператора электрона можно делать не на массовой поверхности.

Полагая  $c_2 = 0$ , запишем (15) в виде

$$\alpha \Sigma_2(\hat{p}) = (\hat{p} - m) \frac{\alpha}{4\pi} s(\hat{p}),$$

где

$$s(\hat{p}) = c_1 - 3 \left( \frac{\hat{p} + m}{m} \right) A(p^2) + d_1 \left[ \frac{p^2 + \hat{p}m}{p^2} + \left( \frac{p^2}{m^2} + \frac{m\hat{p}}{p^2} \right) A(p^2) \right]. \quad (20)$$

Видно теперь, что выбор

$$c_1 = 3 - d_1, \quad s(0) = 0 \quad (21)$$

приводит к тому, что пропагатор электрона, представленный с помощью (27.4) в виде

$$G(p) = \frac{1}{i(m - \hat{p})} \left[ 1 - \frac{\alpha}{4\pi} s(\hat{p}) \right]^{-1}, \quad (22)$$

в окрестности массовой поверхности имеет вид

$$G(p) \sim \frac{1}{i(m - \hat{p})} Z_2, \quad \hat{p} \sim m, \quad (23)$$

$$Z_2^{-1} \simeq 1 + \frac{\alpha}{4\pi} [2(3 - d_1) A(m^2, \lambda_0^2) - 3 - d_1].$$

**29.5. Вершинная часть и тождество Уорда.** Вклад третьего порядка в вершинную часть представляется выражениями

$$\begin{aligned} \Lambda^\nu(x, z; y) &\sim ie^2 \gamma_\mu S^c(x-y) \gamma^\nu S^c(y-z) \gamma_\sigma D^{\mu\sigma}(x-z; d_l), \\ \Lambda^\nu(p', p; k=p'-p; d_l) &\sim \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int dq D^{\mu\sigma}(p-q; d_l) \gamma_\mu S^c(q+k) \gamma^\nu S^c(q) \gamma_\sigma. \end{aligned} \quad (24)$$

Второе из них отвечает расстановке импульсных переменных на рис. 29.3. Фотонный пропагатор  $D^{\mu\sigma}$  определен формулой (9).

Интеграл (24) расходится логарифмически в ультрафиолетовой области.

Ввиду громоздкости мы не будем приводить здесь конечную часть вершинной функции  $\Lambda^\nu$  в произвольной калибровке электромагнитного поля. (Соответствующее выражение содержится, например, в § 35.3 Введения.) Для наших целей окажется вполне достаточным выражения для  $\Lambda^\nu$ , вычисленного в § 24.3 в диагональной калибровке при  $d_l = 1$ .

Положим

$$\Lambda^\nu{}^{\text{per}}(p', p; k; d_l = 1) = c_3 \gamma_\nu + \Gamma_\nu^{\text{kon}}(p', p; k; \mu^2 = m^2), \quad (25)$$

где  $\Gamma_\nu^{\text{kon}}$  определено в (24.23), а  $c_3$  — произвольная постоянная. Эта постоянная, однако, не является независимой и может быть выражена через константу  $c_1$  из выражения (15) для массового оператора с помощью условия градиентной инвариантности (2).

Применим это условие к слагаемым третьего порядка матрицы рассеяния  $S_3(x, y, z)$ , которые удобно разбить на две группы. В первую группу войдут члены, содержащие произведение трех операторов  $A(x)$ ,  $A(y)$ ,  $A(z)$ , а во вторую — выражения, линейные по  $A$ . В силу различной операторной структуры члены первой и второй групп дают вклады в различные матричные элементы. Поэтому условия градиентной инвариантности можно исследовать для них по отдельности. Рассмотрим это условие применительно к диаграммам второй группы. Соответствующий вклад в  $S_3$  может быть записан как сумма трех членов

$$:A_\nu(x) J^\nu(x|y, z): + :A_\nu(y) J^\nu(y|z, x): + :A_\nu(z) J^\nu(z|x, y):,$$

отличающихся перестановкой переменных интегрирования  $x, y, z$ . Условие градиентной инвариантности принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} J^\nu(x|y, z) = 0. \quad (26)$$

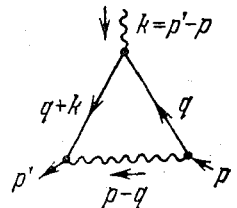


Рис. 29.3. Выбор импульсных обозначений в интеграле (24).

Функция  $J^v$  содержит четыре слагаемых, отвечающих диаграммам, изображенным на рис. 25.4 и еще четыре слагаемых, отличающихся от первых перестановкой аргументов  $z$  и  $y$ .

Заметим, во-первых, что дивергенция от слагаемого, отвечающего диаграмме рис. 25.4,  $z$ ,

$$\Pi^{v0}(x-z) D_{\rho\mu}(x-y) : \bar{\psi}(y) \gamma^\mu \psi(y) :$$

после устранения расходимостей обращается в нуль вследствие условия градиентной инвариантности конечной части поляризационного оператора (7). Поэтому следует рассмотреть сумму трех первых диаграмм рис. 25.4. Она может быть представлена в виде

$$:\bar{\psi}(z) \Lambda_v(z, y; x) \psi(y) : + \bar{\psi}(z) \Sigma(z-y) S^c(y-x) \gamma_v \psi(x) + \\ + \bar{\psi}(x) \gamma_v S^c(x-z) \Sigma(z-y) \psi(y).$$

Применяя к этому выражению операцию  $i\partial/\partial x_v$ , получаем после небольших преобразований с помощью уравнений Дирака для  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и соответствующих неоднородных уравнений для  $S^c$ :

$$\bar{\psi}(z) \left\{ i \frac{\partial \Lambda_v(z, y; x)}{\partial x_v} + \Sigma(z-y) \delta(y-x) - \delta(x-z) \Sigma(z-y) \right\} \psi(y).$$

Таким образом, условие градиентной инвариантности связывает вклад в вершинную часть  $\Lambda_v$  с вкладом в собственную энергию электрона  $\Sigma$ :

$$i \frac{\partial \Lambda_v^{\text{per}}(z, y; x)}{\partial x_v} = \Sigma^{\text{per}}(z-y) \{ \delta(x-z) - \delta(y-x) \}. \quad (27)$$

Переходя к импульсному представлению по формулам

$$\Sigma(y) = (2\pi)^{-4} \int e^{ipy} \Sigma(p) dp,$$

$$\Lambda_v(z, y; x) = (2\pi)^{-8} \int e^{ikx + ipy - ip'z} \Lambda_v(p', p; k) \delta(p+k-p') dp' dp dk,$$

имеем

$$k^v \Lambda_v(p', p; k) = \Sigma(p') - \Sigma(p); \quad p' = p + k. \quad (28)$$

Эта формула доказана нами для вкладов низшего порядка в  $\Lambda_v$  и  $\Sigma$ . Можно показать однако, что аналогичное соотношение имеет место и в высших порядках, связывая почленно вклады в вершинную функцию

$$\Gamma^v(p', p; k | \alpha) = \gamma^v + \sum_{n \geq 1} \alpha^n \Lambda_{(n)}^v(p', p; k)$$

и вклады в массовый оператор  $\Sigma_{(n)}$  с одним и тем же значением индекса  $n$ . При этом соответствующие вклады описываются сильно-связными вершинными диаграммами с  $2n+1$  вершинами и сильно-связными диаграммами собственной энергии электрона с  $2n$  вершинами.

Суммируя соотношение (28) по всем  $n$ , получаем с учетом (27.4)

$$k_\nu \Gamma^\nu(p', p; k | \alpha) = G^{-1}(p; \alpha) - G^{-1}(p'; \alpha). \quad (29)$$

Эта формула известна под названием *обобщенного тождества Уорда* (тождества Уорда — Такахаша).

Тождество Уорда в виде (28) связывает конечные части низших радиационных поправок (20) и (25) и устанавливает связь между константами  $c_1$  и  $c_3$ :

$$c_3 = c_1 + 2. \quad (30)$$

Мы предоставляем читателю проделать соответствующие выкладки.

## Г л а в а VIII. ОПИСАНИЕ РЕАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

### § 30. Электромагнитные взаимодействия

Изложенная схема описания взаимодействий квантовых полей с помощью теории возмущений имеет шансы на успех в том случае, если взаимодействие полей может считаться слабым. Таким свойством, несомненно, обладает электромагнитное взаимодействие, которому отвечает безразмерный малый параметр  $\alpha = e^2/4\pi\hbar c \sim 10^{-2}$  — так называемая постоянная тонкой структуры.

Наиболее простой оказывается модель теории поля, состоящая из взаимодействующих спинорного и электромагнитного полей. Такая модель адекватна взаимодействию электронов и позитронов с фотонами, поскольку в очень широком интервале энергий оказывается возможным отвлечься от слабых и сильных взаимодействий даже в виртуальных эффектах. Эту модель — спинорную электродинамику — мы и рассмотрим в первую очередь.

**30.1. Спинорная электродинамика.** В собственном смысле слова она описывает процессы и эффекты, включающие электрон-позитроны и гамма-кванты в начальных, конечных и промежуточных состояниях. К этим процессам относятся такие процессы, как рассеяние фотонов на электронах (комptonовское рассеяние), рассеяние электронов на электронах (мёллеровское рассеяние), а также аналогичные процессы с участием позитронов, образование и аннигиляция электрон-позитронных пар, взаимодействие электронов с внешним магнитным полем (аномальный магнитный момент), тормозное излучение электрона во внешнем электростатическом поле (например, поле атомного ядра) и некоторые другие, в том числе чисто электромагнитные взаимодействия мюонов и адронов друг с другом и с электронами.

Мы не будем здесь сколько-нибудь подробно рассматривать эти процессы и эффекты и ограничимся описанием общих закономерностей и наиболее яркими иллюстрациями.

Рассматриваемые явления можно условно разбить на два класса. К первому из них отнесем процессы, которые в главном приближении могут быть поняты и рассчитаны путем учета электромаг-



нитных эффектов в рамках нерелятивистской квантовой механики, точнее говоря, в рамках квантовой теории взаимодействия вещества с излучением. Мы имеем здесь в виду такие задачи, как движение электрона в кулоновском поле ядра, рассеяние света на свободных электронах, двухфотонная аннигиляция электрон-позитронной пары, тормозное излучение электрона в поле ядра и некоторые другие.

Общим для них является то, что основной вклад в матричные элементы дают диаграммы Фейнмана, не содержащие замкнутых петель и интегрирований по виртуальным 4-импульсам (так называемые *древесные* диаграммы). Соответствующие расчеты были выполнены в конце 20-х годов вслед за созданием квантовой механики. Оказалось, что теоретические результаты находятся в хорошем согласии с экспериментом.

Примером этому является полученная в 1929—1930 гг. Клейном, Нишиной и Таммом формула для дифференциального сечения рассеяния фотона с импульсом  $k_1$  и энергией  $k_1 = |\mathbf{k}_1|$  на покоящемся электроном:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{k_2^3}{k_1^3} \left( \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} - \sin^2 \theta \right). \quad (1)$$

Здесь  $r_0 = \alpha/m$  — так называемый классический радиус электрона,  $\theta$  — угол рассеяния электрона, а  $k_2$  — энергия рассеянного фотона, связанная с  $k_1$  и  $\theta$  формулой Комптона

$$k_2 = \frac{mk_1}{m + k_1(1 - \cos \theta)}.$$

Формула Клейна — Нишины — Тамма соответствует квадрату суммы матричных элементов, отвечающих двум диаграммам второго порядка, изображенным на рис. 24.3.

Вычисление вклада диаграмм четвертого порядка (см. рис. 24.4) натолкнулось на трудности, связанные с ультрафиолетовыми расходимостями. Для преодоления этих трудностей потребовалось около двух десятилетий. Лишь во второй половине 40-х годов была построена так называемая ковариантная теория возмущений, в рамках которой была сформулирована процедура перенормировок.

Создание метода перенормировок в теории возмущений открыло дорогу для вычисления поправок к формулам древесного приближения. Радиационная поправка к формуле (1), отвечающая диаграммам четвертого порядка, была рассчитана Броуном и Фейнманом в 1952 г.

Ко второму классу явлений можно отнести явления, которые самим своим существованием обязаны радиационным эффектам. Среди них — свертонное расщепление электронных уровней

в атоме водорода, лэмбовский сдвиг уровней, рассеяние фотона фотоном, аномальный магнитный момент электрона.

**30.2. Аномальный магнитный момент электрона.** Как хорошо известно, уравнение Дирака для электрона, взаимодействующего с внешним электромагнитным полем, содержит член, отвечающий магнитному взаимодействию (ДII.30). Этот член может быть также получен из матричного элемента, отвечающего борновскому взаимодействию электрона с электромагнитным полем  $A^{\text{ext}}$  магнитного типа ( $A_0^{\text{ext}} = 0, |\mathbf{k}| = 0$ ).

В выражении

$$-e\bar{u}^{+,s}(\mathbf{p}')\gamma^{\nu}u^{-,s}(\mathbf{p})A_{\nu}(\mathbf{k}) = e\bar{u}^{+,s}(\mathbf{p}')\boldsymbol{\gamma}A(\mathbf{k})u^{-,s}(\mathbf{p}),$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{k}, \quad (2)$$

записанном в представлении взаимодействия перейдем к расщепленному представлению спиноров и матриц (ДII.22), (ДII.23).

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{p}) \\ \chi(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \alpha = \boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

и воспользуемся свободными уравнениями движения для двухкомпонентных спиноров  $\varphi$  и  $\chi$ . Исключая малые позитронные компоненты  $\chi$  с помощью следующих из этих уравнений соотношений

$$\chi(\mathbf{p}') = \frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}')}{2m}\varphi(\mathbf{p}'), \quad \chi^*(\mathbf{p}') = \varphi^*(\mathbf{p}')\frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}')}{2m},$$

представим (2) в виде

$$e\left[\varphi^*(\mathbf{p}')\boldsymbol{\sigma}A\chi(\mathbf{p}) + \chi^*(\mathbf{p}')\boldsymbol{\sigma}A\varphi(\mathbf{p})\right] =$$

$$= \frac{e}{2m}\left[\varphi^*(\mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma}A(\mathbf{k}))(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma}A(\mathbf{k}))\varphi(\mathbf{p})\right].$$

Используя затем формулы умножения матриц Паули (ДII.28), получаем окончательно

$$\frac{e}{2m}\varphi^*(\mathbf{p}')\{i\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{k} \times A(\mathbf{k})] + (\mathbf{p} + \mathbf{p}')A(\mathbf{k})\}\varphi(\mathbf{p}).$$

Первый член полученного выражения имеет вид чисто магнитного взаимодействия

$$\frac{e}{2m}\varphi^*(\mathbf{p}')\boldsymbol{\sigma}\varphi(\mathbf{p}) \cdot i[\mathbf{k} \times A(\mathbf{k})] = M_0H(\mathbf{k}),$$

где

$$H(\mathbf{k}) = i[\mathbf{k} \times A(\mathbf{k})], \quad M_0 = \mu_0\varphi^*\boldsymbol{\sigma}\varphi,$$

а

$$\mu_0 = \frac{e}{2m} \quad (3)$$

— магнетон Бора.

Выражению (2) отвечает диаграмма фундаментального электромагнитного взаимодействия, изображенная на рис. 30.1, а. Эффекты радиационных поправок приводят к тому, что выражение (2) следует заменить на

$$-e\bar{u}^{+,s}(\mathbf{p}')\Gamma_{\text{рен}}^{\nu}(\mathbf{p}', \mathbf{p}; k)u^{-,s}(\mathbf{p})A_{\nu}^{\text{ext}}(k), \quad (2')$$

где матричный элемент  $\bar{u}\Gamma u$  может быть представлен в виде, аналогичном (24.24):

$$\bar{u}(\mathbf{p}')\Gamma^{\nu}u(\mathbf{p}) = f_1(k^2, \alpha)\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^{\nu}u(\mathbf{p}) + f_2(k^2, \alpha)\bar{u}(\mathbf{p}')\left[\frac{p^{\nu}+p'^{\nu}}{2m} - \gamma^{\nu}\right]u(\mathbf{p}). \quad (4)$$

Примем теперь во внимание, что, согласно (24.30), второй член в правой части при  $k=0$  обращается в нуль, вследствие чего электрический заряд электрона определяется первым слагаемым. Поэтому в точке  $k=0$  форм-фактор  $f_1$  обычно нормируют на единицу:

$$f_1(0, \alpha) = 1. \quad (5)$$

Такая нормировка достигается соответствующим выбором неопределенных конечных параметров, возникающих при вычитании ультрафиолетовых расходимостей (например, выбором параметра  $\mu$  в формуле (24.23)), и отвечает определению перенормированного электрического заряда  $e$  как величины, описывающей взаимодействие электрона с электромагнитным полем исчезающе малой частоты.

Из условия (5) теперь вытекает, что аномальный магнитный момент целиком определяется вторым слагаемым правой части формулы (4). Вклад этого слагаемого в выражение (2') с помощью формулы (24.30) может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{e}{2m}f_2(k^2, \alpha)\bar{u}(\mathbf{p}')(\hat{A}_{\text{ext}}(k)\hat{k} - \hat{k}\hat{A}_{\text{ext}}(k))u(\mathbf{p}) = \\ = -\frac{e}{2m}f_2(k^2, \alpha)\bar{u}(\mathbf{p}')\sigma\mathbf{u}(\mathbf{p})\mathbf{H}(k). \end{aligned}$$

Таким образом, величина  $ef_2(0, \alpha)/2m$  представляет собой поправку к магнитному моменту электрона, который может быть записан в виде

$$\mu = \mu_0(1 + f_2(0, \alpha)) = \mu_0\left[1 + \frac{\alpha}{\pi}a_2 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2a_4 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3a_6 + \dots\right].$$

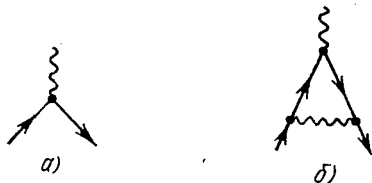


Рис. 30.1. Диаграммы магнитного момента, отвечающие магнетону Бора и поправке Швингера.

Первая радиационная поправка к борновскому магнетону

$$a_2 = 1/2$$

соответствует диаграмме рис. 30.1, б и выкладкам § 24.3 и была вычислена Ю. Швингером в 1948 г. (см. упражнение М5). Для вычисления следующего вклада потребовался учет пяти двухпетлевых диаграмм, изображенных на рис. 30.2. Соответствующий результат

$$a_4 = \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \pi^2 \ln 2 + \frac{3}{4} \zeta(3) \simeq 0,328479 \dots \quad (6)$$

был получен Петерманом и Зомерфельдом в конце 50-х годов.

Для определения вклада  $a_6$  необходимо рассмотреть 40 различных трехпетлевых диаграмм. Аналитический расчет практически невозможно произвести вручную из-за непомерно длинных



Рис. 30.2. Двухпетлевые диаграммы, дающие вклад в аномальный магнитный момент электрона.

выкладок. Первый расчет  $a_6$ , выполненный в 1971 г., содержал большую неопределенность:  $a_6 = 1,49 \pm 0,25$ , связанную с приближенным численным способом вычислений значительной части интегралов. В течение последующих лет благодаря использованию электронно-вычислительных машин для выполнения аналитических вычислений удалось аналитически рассчитать до конца 30 из 40 трехпетлевых диаграмм, что привело к существенному повышению точности. Современный результат имеет вид \*)

$$a_6 = 1,183 \pm 0,011 = 1,183 \quad (7)$$

При достигнутой точности теоретических расчетов в формуле (7) приобретает важность соответствующая точность в определении постоянной тонкой структуры. Современное значение  $\alpha^{-1} = 137,035987$  (29) оказывается достаточно аккуратным для этих целей и вместе с (6) и (7) дает следующую величину аномального магнитного момента:

$$(\mu/\mu_0)_{\text{теор}} = 1,00115965236 \quad (8)$$

При этом более половины погрешности результата связано с неопределенностью в численном значении постоянной  $\alpha$ .

\*) Здесь употребляется запись неопределенности численного результата, введенная в § 1 (см. стр. 11).

Экспериментальное значение, полученное в 1978 г.,

$$(\mu/\mu_0)_{\text{эксп}} = 1,00115965241 \quad (20) \quad (9)$$

находится в соответствии с теоретическим значением (8). Достигнутый уровень соответствия между теоретическим и экспериментальными значениями ( $< 1 \cdot 10^{-10}$  в относительных величинах) является рекордным в физике.

**30.3. Пределы спинорной электродинамики.** Приведенный пример является весьма впечатляющим. Что касается других эффектов квантовой электродинамики, то в них либо точность эксперимента не столь высока, либо теоретические расчеты указывают на необходимость учета эффектов, выходящих за рамки чистой электродинамики.

Так, например, экспериментальное значение величины сверхтонкого расщепления уровня  $1S_{1/2}$  в атоме водорода, обусловленного взаимодействием электрона с магнитным полем протона, известно сейчас с рекордной точностью (до 13 порядков)

$$\nu_{Hfs}^{\text{эксп}} = 1420,4057517864 \quad (17) \text{ МгГц}, \quad (10)$$

однако теоретические расчеты дают лишь 7 знаков, причем уже с учетом конечных размеров протона.

Лэмбовский сдвиг, т. е. тонкое расщепление  $2S_{1/2}$  и  $1P_{1/2}$  уровней в атоме водорода известен с точностью порядка  $10^{-6}$ :

$$\begin{aligned} s^{\text{теор}} &= 1057,89 \quad (2) \text{ МгГц}, \\ s^{\text{эксп}} &= 1057,89 \quad (2) \text{ МгГц}, \end{aligned} \quad (11)$$

причем эффекты, выходящие за рамки спинорной электродинамики, имеют порядок  $10^{-5}$  и учтены в теоретическом значении.

В целом следует сказать, что вся совокупность экспериментальных данных по большому числу эффектов находится в согласии с результатами расчетов теории возмущений спинорной электродинамики в тех случаях, когда в этих эффектах сильные взаимодействия оказываются несущественными, либо поддаются учету.

Существует, однако, область, в которой замкнутость электродинамики нарушается. Здесь имеются две причины.

Во-первых, электромагнитные взаимодействия адронов оказывают влияние на электродинамику лептонов (электрон-позитронов и мюонов) через виртуальные состояния. Так, например, в процессы, идущие через однофотонную аннигиляцию

$$\begin{aligned} e^- + e^+ &\rightarrow e^- + e^+, \\ e^- + e^+ &\rightarrow \mu^- + \mu^+ \end{aligned} \quad (12)$$

и реализуемые на ускорителях со встречными пучками, дают существенный вклад диаграммы Фейнмана, содержащие вставки

в виртуальные фотонные линии, отвечающие адронной поляризации фотона (рис. 30.3, 30.4).

Благодаря резонансному взаимодействию двух пионов (так называемый  $\rho$ -резонанс) сечение процессов (12) при энергиях порядка 700—800 МэВ в системе центра масс более чем на порядок превышает величину, вычисленную по электродинамической теории возмущений.

Во-вторых как мы видели при вычислении низших электродинамических радиационных поправок в §§ 24, 29, эти поправки

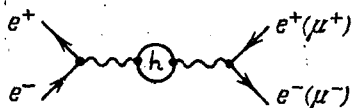


Рис. 30.3. Влияние «адронной поляризации вакуума» на процессы аннигиляции и рождения лептонных пар.

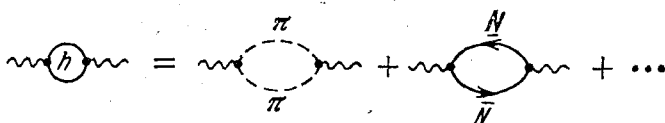


Рис. 30.4. Вклад пионных и нуклонных петель в «адронную поляризацию вакуума».

содержат логарифмически растущие вклады, пропорциональные ультрафиолетовому логарифму  $L = \ln \frac{p^2}{m^2}$ . Анализ высших радиационных поправок показывает, что фактическим параметром разложения теории возмущений становятся произведения  $\alpha L$ , либо  $\alpha L^2$ . В ряде случаев (в области высоких энергий) члены вида  $\alpha L^2$ ,  $\alpha L$  могут вносить значительные вклады в сечения процессов и другие наблюдаемые величины. Их приходится рассчитывать и учитывать вносимые ими поправки при анализе процессов, измеряемых с достаточно высокой точностью.

Однако в целом проблема учета высших радиационных поправок имеет пока еще в основном теоретическое значение.

## § 31. Слабые взаимодействия

**31.1. Взаимодействия Ферми.** Эти четырехфермионные взаимодействия контактного типа являются заметно более слабыми по сравнению с электромагнитными взаимодействиями. Как отмечалось в § 10, безразмерный параметр, образованный константой связи Ферми  $G$  и массой протона  $M_p$ , оказывается на три порядка меньше постоянной тонкой структуры  $\alpha$ .

Простейшие примеры слабых взаимодействий были рассмотрены в § 10.1. Там было упомянуто, что лагранжиан взаимодействия Ферми имеет вид произведения ток  $\times$  ток

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}} j_\mu(x) j_\mu^\dagger(x), \quad (1)$$

где  $j_\mu$  — так называемый слабый ток, билинейный по фермионным полям. Выражение такого типа было предложено Ферми в 1934 г. для описания  $\beta$ -распада нейтрона. Однако потребовалось более 30 лет для того, чтобы установить структуру слабого тока (точнее его лептонной части) во всех деталях.

Слабый ток  $j_\nu$  является суммой квадратичных операторных структур вида

$$\bar{u}_i(x) O_\nu^{(i)} v_i(x) \quad (2)$$

(по  $i$  нет суммирования!), причем операторы  $u_i$  и  $v_i$ , вообще говоря, принадлежат различным полям. Часть слагаемых содержит лишь лептонные поля и образует лептонную составляющую слабого тока (короче — *лептонный ток*)  $l_\nu$ . Остальные слагаемые, включающие адронные поля, образуют адронный ток  $h_\nu$ . Таким образом,

$$j_\nu = l_\nu + h_\nu, \quad (3)$$

причем каждая из двух составляющих является суммой структур вида (2). Примеры конструкций подобного рода были приведены в формуле (10.12).

Произведения двух лептонных токов друг на друга образуют *лептонную* часть лагранжиана Ферми. Они ответственны за чисто лептонные слабые процессы вида

$$\begin{aligned} \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \\ \nu_\mu + e^- &\rightarrow \nu_\mu + e^-, \\ \bar{\nu}_e + e^- &\rightarrow \bar{\nu}_e + e^- \end{aligned} \quad (4)$$

и т. д.

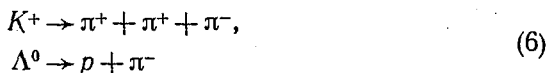
Произведения лептонных составляющих на адронные  $h_\nu j_\nu^\dagger$  отвечают так называемым *полулептонным* процессам, в которых участвуют как лептоны, так и адроны. Примером полулептонных взаимодействий являются

$$\begin{aligned} n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ \nu_\mu + n &\rightarrow p + \mu^-, \\ \Lambda &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \end{aligned} \quad (5)$$

и многие другие.

Наконец, в нелептонных слабых взаимодействиях, соответствующих произведению  $h_\nu h_\nu^\dagger$ , участвуют лишь адроны. Соответ-

вующие реальные процессы осуществляются путем комбинации сильных и слабых взаимодействий. Важными примерами таких процессов являются распады странных адронов



и т. п.

**31.2. Структура слабого тока.** Структура матриц  $O$ , входящих в составляющие слабого тока, была установлена в середине 50-х годов вслед за открытием несохранения четности в слабых взаимодействиях. Было обнаружено, что слабый ток представляет собой сумму вектора  $V$  и аксиального вектора  $A$ . Взаимные произведения  $V$  на  $A$  в лагранжиане (1) приводят к переходам, в которых не сохраняется четность.

Такой структуре слабого тока в общем случае отвечает матрица  $O$  следующего вида:

$$O_\alpha^{(i)} = \gamma_\alpha (1 + g_i \gamma_5), \quad (7)$$

где  $g_i$  — некоторые константы. С учетом эрмитовости  $\gamma_5$  константы  $g_i$  следует полагать действительными.

Опыт показал, что для лептонных слагаемых все константы  $g_i$  равны единице. Этому важному свойству лептонных токов

$$l_\alpha = \bar{e}(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e(x) + \bar{\mu}(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_\mu(x) + \dots \quad (8)$$

отвечает свойство двухкомпонентности нейтрино (см. § 9.2).

Таким образом, лептонная часть взаимодействия Ферми содержит всего один параметр  $G$ . Этот параметр может быть определен из времени жизни мюона (см. упражнение Ф4). При этом оказывается, что

$$GM_p^2 = \frac{G \cdot M^2 c^2}{\hbar c \hbar^2} = 1,0262 (1) \cdot 10^{-5}. \quad (9)$$

Что же касается адронной составляющей, то она имеет несколько более сложную структуру. Так, например, в нуклонной компоненте адронного тока  $\bar{p} O_\alpha n$ , ответственной за  $\beta$ -распад нейтрона, константа  $g_A$ , определенная через время жизни нейтрона и соотношение (9), оказалось равной  $g_A = 1,25$ .

Отмеченная выше недиагональность слабого тока приводит к тому, что слабый ток меняет квантовые числа фермионов: превращает нейтрино в электрон, нейтрон в протон и т. д. Рассмотренные выше токи меняют электрический заряд  $Q$ . Они называются *заряженными* токами. (В этой терминологии обычный электромагнитный ток электрон-позитронов является незаряженным, т. е. нейтральным.) В адронной составляющей слабого тока имеются также компоненты, меняющие странность адронов на единицу. Для них принято обозначение  $h_\alpha (\Delta S = 1)$ . Таким образом, полный



адронный ток может быть представлен в виде суммы

$$h_\alpha(\Delta S = 0) + h_\alpha(\Delta S = 1). \quad (10)$$

При этом для второго слагаемого выполняется правило  $\Delta S = \Delta Q$ .

Несколько лет назад было доказано существование *нейтральных* слабых токов  $j_\alpha^0$ , не меняющих электрического заряда. Произведение нейтральных токов входит в лагранжиан аддитивно, т. е. выражение (1) следует заменить на

$$\mathcal{L}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} [j_\alpha^+(x) j_\alpha^+(x) + j_\alpha^0(x) j^0, \alpha(x)]. \quad (11)$$

Нейтральные токи также можно представить в виде суммы  $j^0 = l^0 + h^0$ , причем лептонная составляющая имеет относительно простую структуру:

$$l_\alpha^0(x) = \frac{1}{2} \bar{\nu}_e(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e(x) + \frac{1}{2} \bar{\nu}_\mu(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_\mu(x) + \bar{e}(x) \gamma_\alpha (g_V + g_A \gamma_5) e(x) + (e \leftrightarrow \mu), \quad (12)$$

где  $g_V, g_A$  — константы, меньшие единицы.

**31.3. Неперенормируемость и ультрафиолетовое поведение.** В целом теория слабых взаимодействий находится в положении, которое можно сравнить с положением квантовой электродинамики до появления метода перенормировок.

Лагранжиан взаимодействия известен и содержит небольшое число констант связи, а матричные элементы, вычисленные в древесном приближении, находятся в хорошем согласии с большим количеством экспериментального материала. В тех случаях, когда удастся отвлечься от эффектов сильных взаимодействий, можно надеяться, что точность согласия лимитируется радиационными поправками, имеющими электромагнитное (малость  $\alpha/\pi \sim 1/400$ ) или слабое (малость  $GM^2 \sim 10^{-5}$ ) происхождение. Однако вычислять радиационные поправки по слабому взаимодействию мы не можем.

Лагранжиан (1), (2) имеет индекс  $\Omega = +2$  и по классификации § 26.3 принадлежит к перенормируемому типу. Отражением этого свойства является размерность константы связи  $G$  и степенной рост матричных элементов в ультрафиолетовой области.

Так, например, полное сечение упругого рассеяния двух фермионов за счет слабого взаимодействия первого порядка ведет себя как

$$\sigma(s) \sim G^2 s \quad (s \gg m_i^2), \quad (13)$$

т. е. неограниченно растет с ростом полной энергии  $W = \sqrt{s}$  в системе центра масс. Следует также ожидать, что радиационные поправки к любым процессам за счет слабых взаимодействий будут расти подобным образом. Иными словами, эффективная

безразмерная комбинация, содержащая константу  $G$  и представляющая параметр разложения в теории возмущений, зависит от энергии и равна

$$GW^2 = G \cdot s. \quad (14)$$

Из сравнения (14) и (9) видно, что при энергиях порядка

$$W^* \simeq 10^{2.5} M_p \simeq 300 \text{ ГэВ} \quad (15)$$

взаимодействие Ферми перестает быть слабым. Энергию  $W^*$  иногда называют энергией *унитарного предела*.

**31.4. Гипотеза промежуточного бозона.** Структура взаимодействия Ферми (ток  $\times$  ток) наводит на мысль, что выражение вида (1) может не быть фундаментальным, а являться производным и возникать вследствие того, что слабые токи  $j$  взаимодействуют между собой через некоторое промежуточное поле.

Для того чтобы пояснить эту идею, вернемся к спинорной электродинамике

$$\mathcal{L}_{\text{эд}}(x) = e J_\nu(x) A^\nu(x)$$

и мысленно ограничимся на время рассмотрением таких начальных и конечных состояний, в которых отсутствуют фотоны. Тогда фотоны остаются лишь в виртуальных состояниях, а на диаграммах Фейнмана — в виде виртуальных линий. Вообразим еще, что виртуальные фотоны имеют массу  $M$ . Тогда (рис. 31.1) можно

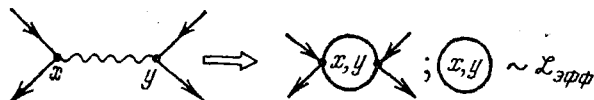


Рис. 31.1. Формальное описание внутренних линий с помощью нелокального эффективного лагранжиана.

формально исключить электромагнитное поле, заменив его нелокальным эффективным лагранжианом

$$e^2 J_\nu(x) D_M^{\nu\mu}(x-y) J_\mu(y) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{эфф}} = e^2 J_\nu(x) \int D_M^{\nu\mu}(x-y) J_\mu(y) dy.$$

При этом в импульсном представлении

$$D_M^{\nu\mu}(x) \sim \frac{g^{\nu\mu}}{M^2 - k^2}.$$

Если все интересующие нас импульсы и массы частиц много меньше массы «тяжелого промежуточного фотона»  $M$ , то в правой части последнего выражения можно пренебречь  $k^2$  по сравнению с  $M^2$  и получить

$$D_M^{\nu\mu}(x-y) \rightarrow \frac{g^{\nu\mu}}{M^2} \delta(x-y), \quad \mathcal{L}_{\text{эфф}}(x) \rightarrow \frac{e^2}{M^2} J_\nu(x) J^\nu(x). \quad (16)$$

Поэтому образ промежуточного векторного поля с большой массой  $M$  позволяет «естественным» образом объяснить размерность константы Ферми и порождает надежду на возможность построения такой новой формулировки слабых взаимодействий, при которой они окажутся перенормируемыми. Разумеется, для этого приходится с самого начала допустить, что масса промежуточного векторного бозона  $M$  существенно больше достижимых в настоящее время энергий (имеются в виду энергии в системе центра масс) лептонов, т. е. являются величинами порядка нескольких десятков, если не сотен ГэВ.

В настоящее время большую популярность приобрела модель слабых взаимодействий, основанная на идее промежуточных бозонов, являющихся квантами неабелева калибровочного поля — модель Вайнберга — Салама. Эта модель имеет довольно сложную структуру, однако сложности модели с лихвой окупаются тем, что, кроме перенормируемой формулировки слабых взаимодействий, она органически включает и электромагнитные, т. е. является единой теорией слабых и электромагнитных взаимодействий.

## § 32. Модель Вайнберга — Салама

**32.1. Основные свойства.** Здесь мы изложим в общих чертах единую модель слабых и электромагнитных взаимодействий, предложенную в конце 60-х годов Вайнбергом и Саламом. Эта модель замечательна в нескольких отношениях.

Во-первых, она содержит основанную на поле Янга — Миллса модель слабых взаимодействий лептонов, которая в области «достаточно низких» энергий ( $\lesssim 50$  ГэВ в системе центра масс) соответствует взаимодействию Ферми. Универсальность константы Ферми получает естественное объяснение через универсальность калибровочной константы взаимодействия.

Во-вторых, модель довольно простым образом объединяет слабые и электромагнитные взаимодействия лептонов и позволяет ввести массивные промежуточные бозоны с помощью спонтанного нарушения симметрии ценой введения лишь одного хиггсова бозона. В-третьих, она предсказала существование нейтральных слабых токов, которые были затем обнаружены экспериментально.

Далее, условие перенормируемости «кваркового расширения» модели, т. е. варианта, содержащего описание слабых взаимодействий адронов через калибровочное взаимодействие составляющих их кварков, привело к необходимости существования четвертого («очарованного») кварка и нового квантового числа (очарования). Это предсказание также подтвердилось на опыте.

Наконец, все наиболее существенные численные результаты модели зависят всего от трех параметров: двух калибровочных

констант связи  $g$  и  $g_1$  и массы  $M_W$  заряженных промежуточных бозонов  $W^\pm$ .

Постоянная электромагнитного взаимодействия  $e$  и константа Ферми  $G_F$  выражаются через них следующим образом:

$$e = \frac{gg_1}{(g^2 + g_1^2)^{1/2}}, \quad \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \quad (1)$$

Если использовать для  $e$  и  $G_F$  известные экспериментальные значения, то остается всего одна числовая степень свободы. Она обычно связывается с арксинусом отношения  $e/g$

$$\sin \theta_W = \frac{e}{g} = \frac{g_1}{(g^2 + g_1^2)^{1/2}}, \quad (2)$$

который называется *углом Вайнберга*.

Через тройку  $e$ ,  $G_F$ ,  $\theta_W$ , как правило, и выражают предсказания модели. Так, с помощью (1) и (2) можно получить для массы заряженного промежуточного мезона формулу и оценку

$$M_W = \left( \frac{e^2 \sqrt{2}}{8G_F} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_W} = \frac{37,7 \text{ ГэВ}}{\sin \theta_W} \geq 37,7 \text{ ГэВ}. \quad (3)$$

**32.2. Структура бозонного сектора.** В основе модели лежит гипотеза о существовании двух калибровочных полей. Одно из них ( $A_a$ ,  $a=1, 2, 3$ ) трехкомпонентно и отвечает присоединенному представлению группы  $SU(2)$ , а второе ( $B$ ) однокомпонентно и его калибровочная группа —  $U(1)$ .

Таким образом, калибровочная группа модели Вайнберга — Салама — это полупростая группа  $SU(2) \times U(1)$ . Она содержит два числовых параметра, обозначаемых  $g$  и  $g_1$ . Четыре калибровочные векторные частицы необходимы для описания трех промежуточных (массивных) мезонов и фотона. Из четырех частиц две (компоненты  $A_1, A_2$ ) заряжены и две ( $A_3$  и  $B$ ) нейтральны. Поскольку поля  $A_3$  и  $B$  имеют одинаковые квантовые числа, между ними возможно смешивание. Физические нейтральные векторные частицы — фотон и массивный  $Z$ -мезон оказываются суперпозициями полей  $A_3$  и  $B$ . Чтобы сделать векторные мезоны массивными, используют механизм спонтанного нарушения симметрии (см. § 11.3), для чего вводят вспомогательное двухкомпонентное комплексное (четыре степени свободы) скалярное поле  $\phi$ . Три степени свободы из четырех уходят на то, чтобы с помощью механизма Хиггса «создать» по лишнему поляризованному состоянию у трех векторных компонент, а четвертое приводит к физическому массивному бозону Хиггса.

Таким образом, бозонный сектор модели Вайнберга — Салама основывается на лагранжиане

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + |D_\mu \bar{\phi}|^2 - \frac{\lambda^2}{4} (|\bar{\phi}|^2 - \eta^2)^2. \quad (4)$$

Здесь  $F$  — тензор абелева поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

$G_{\mu\nu}$  — тензор неабелева поля

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

поле  $\bar{\varphi}$  — изотопический (калибровочной группы  $SU(2)$ ) дублет комплексных полей

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

$D_\mu \bar{\varphi}$  — ковариантные производные:

$$D_\mu \bar{\varphi}(x) = \left( \partial_\mu - \frac{ig}{2} \tau A_\mu - \frac{ig_1}{2} B_\mu \right) \bar{\varphi}(x). \quad (5)$$

Спонтанное нарушение симметрии реализуется сдвигом на действительную константу  $\eta$  второй компоненты поля  $\bar{\varphi}$ :

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 + \eta \end{pmatrix} = \varphi + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \text{Im } \eta = 0. \quad (6)$$

В результате сдвига член  $|D_\mu \bar{\varphi}|^2$  дает следующий вклад в «массовую матрицу» (т. е. в члены, билинейные по компонентам  $A^a, B$ ):

$$\frac{g^2 \eta^2}{4} [(A_\nu^1)^2 + (A_\nu^2)^2] + \frac{\eta^2}{4} [g A_\nu^3 - g_1 B_\nu]^2. \quad (7)$$

Диагонализация этого вклада выполняется линейным преобразованием

$$(A_\nu^3, B_\nu) \rightarrow (Z_\nu, A_\nu),$$

где

$$Z_\nu = \frac{-g A_\nu^3 + g_1 B_\nu}{(g^2 + g_1^2)^{1/2}}, \quad A_\nu = \frac{g_1 A_\nu^3 + g B_\nu}{(g^2 + g_1^2)^{1/2}}. \quad (8)$$

Вводя обозначения

$$M_W = \frac{g\eta}{\sqrt{2}}, \quad M_Z = \frac{\eta(g^2 + g_1^2)^{1/2}}{\sqrt{2}} = \frac{M_W}{\cos \theta_W}, \quad (9)$$

запишем форму (7) в виде

$$M_W^2 \bar{W}^\nu W_\nu + (1/2) M_Z^2 Z_\nu Z^\nu. \quad (10)$$

Здесь в целях дальнейшего удобства введены новые взаимно комплексно-сопряженные поля для промежуточных заряженных мезонов:

$$W_\nu^\pm = \frac{A_\nu^1 \mp i A_\nu^2}{\sqrt{2}}, \quad W_\nu \equiv W_\nu^-, \quad \bar{W}_\nu = W_\nu^+. \quad (11)$$

Если представить компоненты дублета  $\Phi$  в виде

$$\Phi_1(x) = \frac{\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}}, \quad \Phi_2(x) = \frac{\sigma(x) + i\Phi_3(x)}{\sqrt{2}},$$

то последний член в (4) приводит к выражению

$$-\frac{\lambda^2}{16} (\Phi^2 + \sigma^2)^2 - \frac{\lambda^2 \eta}{2\sqrt{2}} \sigma(x) (\Phi^2 + \sigma^2) - \frac{\lambda^2 \eta^2}{2} \sigma^2(x),$$

$$\Phi^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2,$$

из которого явствует, что поле  $\sigma$  имеет массу

$$m_\sigma = \lambda \eta, \quad (12)$$

а компоненты  $\Phi_a$  представляют собой голдстоуновские поля. Они могут быть устранены калибровочным преобразованием, в результате которого три компонента неабелева калибровочного поля приобретают лишнюю поляризационную компоненту (эффект Хиггса). В итоге последний член правой части (4) сведется к

$$-\frac{g^2}{32} \frac{m_\sigma^2}{M_W^2} \sigma^4(x) - \frac{g m_\sigma^2}{4M_W} \sigma^3(x) - \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma^2(x). \quad (13)$$

**32.3. Фермионный сектор.** Как известно, слабое взаимодействие не сохраняет четность. Правополяризованное нейтрино на опыте не наблюдается. Поэтому структура фермионного сектора лептонов в первую очередь должна учесть эти свойства. С этой целью левополяризованная компонента электронного спинора  $e(x)$  и электронное нейтрино  $\nu_e(x)$  объединяются в «левый» дублет  $L_e(x)$ , а правополяризованная часть  $e(x)$  образует «правый» синглет относительно группы  $SU(2)$ :

$$L_{(e)}(x) = \frac{1 + \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ e(x) \end{pmatrix}, \quad R_{(e)}(x) = \frac{1 - \gamma_5}{2} e(x). \quad (14)$$

Аналогичные мультиплеты вводятся для мюона и мюонного нейтрино:

$$L_{(\mu)}(x) = \frac{1 + \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_\mu(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix}, \quad R_{(\mu)}(x) = \frac{1 - \gamma_5}{2} \mu(x).$$

Такая структура мультиплетов удобна тем, что позволяет оставить в заряженных составляющих слабых токов лишь левые компоненты лептонов, объединенные в дублеты  $L$ .

Считая, что левые дублеты участвуют в калибровочном взаимодействии группы  $SU(2) \times U(1)$ , а правые связаны лишь с абелевой подгруппой, приходим к следующим членам в лагранжиане:

$$\mathcal{L}_{\text{фер}}(x) = i\bar{L}(x) \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{ig}{2} \tau A_\mu + \frac{ig_1}{2} B_\mu \right) L(x) +$$

$$+ i\bar{R}(x) \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_1 B_\mu) R(x). \quad (15)$$

Здесь мы опустили нижние индексы ( $\mu$ ) и ( $\nu$ ), подразумевая, что по ним необходимо произвести независимое суммирование.

Прямое введение массовых членов для лептонов

$$m(\bar{L}R + \bar{R}L)$$

нарушает калибровочную инвариантность. Однако если предположить, что мультиплеты  $L$  и  $R$ , подобно калибровочным полям  $A_\mu$  и  $B_\mu$ , взаимодействуют со скалярным полем  $\bar{\phi}$ , введенным в (4), то они приобретут массу в результате спонтанного нарушения симметрии.

Полагая, что соответствующий член взаимодействия имеет юкавскую форму

$$-G \left[ (\bar{L}(x) \bar{\phi}(x)) R(x) + \bar{R}(x) (\bar{\phi}^*(x) L(x)) \right], \quad (16)$$

получаем, что в результате «сдвига» (6) поля  $\bar{\phi}$  на константу в лагранжиане появляются массовые лептонные члены

$$-m_e \bar{e}(x) e(x) - m_\mu \bar{\mu}(x) \mu(x),$$

причем

$$m_e = \eta G_e / 2, \quad m_\mu = \eta G_\mu / 2. \quad (17)$$

Таким образом, полное выражение для лептонной части лагранжиана, основанное на слагаемых (15), (16) и записанное в переменных  $W$ ,  $A$ ,  $\phi$ , будет иметь вид

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{(e)}(x) + \mathcal{L}_{(\mu)}(x) + \mathcal{L}_{\text{lep}}^0(x), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(e)}(x) = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{\nu}_e(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) e(x) W_\mu(x) + \bar{e}(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \nu_e(x) \bar{W}_\mu(x) \right] + \\ & + \frac{gg_1}{(g^2 + g_1^2)^{1/2}} \bar{e}(x) \gamma^\mu e(x) A_\mu(x) - \frac{G_e}{2} \bar{e}(x) e(x) \sigma(x) + \frac{(g^2 + g_1^2)^{1/2}}{4} \times \\ & \times \left[ \bar{\nu}_e(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \nu_e(x) - 2\bar{e}(x) \gamma^\mu \left( \gamma^5 + \frac{g^2 - 3g_1^2}{g^2 + g_1^2} \right) e(x) \right] Z_\mu(x), \quad (19) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_{(\mu)}$  получается из  $\mathcal{L}_{(e)}$  заменой  $e(x) \rightarrow \mu(x)$ ,  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  и  $\mathcal{L}_{\text{lep}}^0$  — свободный лагранжиан полей  $e(x)$ ,  $\mu(x)$ ,  $\nu_e(x)$ ,  $\nu_\mu(x)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{lep}}^0(x) = & i\bar{\nu}_e(x) \hat{\partial} \nu_e(x) + i\bar{\nu}_\mu(x) \hat{\partial} \nu_\mu(x) + \\ & + \bar{e}(x) (i\hat{\partial} - m_e) e(x) + \bar{\mu}(x) (i\hat{\partial} - m_\mu) \mu(x). \quad (20) \end{aligned}$$

Из формулы (19) вытекает, что константы электромагнитного взаимодействия  $e$  и слабого взаимодействия в форме Ферми  $G_F$  связаны с  $g$ ,  $g_1$  и  $M_W$  формулами (1).

Напомним еще, что масса хиггсова бозона  $m_\sigma$  выражается через параметры лагранжиана формулой (12).

**32.4. Лагранжиан и квантование.** Собирая результаты, находим, что полный классический лагранжиан модели Вайнберга — Салама имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{ws}} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{\text{lep}}^0 + \sum_{(i)} \mathcal{L}_{(i)}, \quad (21)$$

где  $\mathcal{L}_B$  — бозонная часть, определенная соотношением (4),  $\mathcal{L}_{(i)}$  — лептонные составляющие вида (19), а  $\mathcal{L}_{\text{lep}}^0$  — сумма свободных лептонных вкладов (20). Первый член  $\mathcal{L}_B$ , записанный в переменных  $W_\nu$ ,  $A_\nu$ ,  $\sigma$ , содержит следующие квадратичные слагаемые:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B^0(x) = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \overset{*}{W}_\nu - \partial_\nu \overset{*}{W}_\mu) (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) + M_W^2 \overset{*}{W}_\nu W_\nu - \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 + \frac{M_Z^2}{2} Z_\nu Z_\nu. \end{aligned} \quad (22)$$

Это выражение вместе со свободным лептонным лагранжианом  $\mathcal{L}_{\text{lep}}^0$ , описываемым выражением (20), и представляет полную «свободную» (точнее сказать — билинейную) составляющую часть лагранжиана Вайнберга — Салама, которую необходимо проквантовать для построения теории возмущений по константам связи  $g$ ,  $g_1$ ,  $G_{(i)}$  (или их комбинациям). Процедура квантования абелева сингулярного лагранжиана для электромагнитного поля была рассмотрена в § 8.5, а для неабелева поля обрисована в § 19.4. Там было показано, что правила Фейнмана для поля Янга — Миллса содержат дополнительные элементы, которые могут быть выражены с помощью вспомогательного фиктивного поля духов Фаддеева — Попова. Мы не будем излагать здесь процедуру квантования, отослав читателя, интересующегося правилами Фейнмана для массивного поля Янга — Миллса, к Дополнению VIII.

Сделаем еще замечание относительно ультрафиолетовых расходимостей. Модель Салама — Вайнберга имеет довольно сложную структуру и включает массивные векторные поля. Пропагаторы таких полей (см. (18.14)) содержат в числителе полином второй степени по компонентам импульса и поэтому, согласно анализу § 26, на первый взгляд приводят к перенормируемым ультрафиолетовым расходимостям. В то же время первоначальный лагранжиан типа (4) до сдвига скалярных полей на константу содержит безмассовые векторные частицы и, как можно показать, является перенормируемым. Ввиду того, что исходный лагранжиан и конечный, полученный в результате спонтанного нарушения симметрии, являются физически эквивалентными (и отличаются лишь выбором переменных), бозонный сектор модели оказывается перенормируемым.

Более тщательное исследование показывает (см., например, гл. IV, V в книге Славнова, Фаддеева (1978)), что реальная труд-



ность для перенормируемости возникает в фермионном секторе. Она связана с несохранением четности и проявляется в так называемых аномальных треугольных диаграммах (рис. 32.1), в которых все три внутренние линии фермионные, а наружные — векторные калибровочные и в вершинах которых имеются матрицы  $\gamma^5$  (ср. первую строку в правой части формулы (19)). Расходимости этих диаграмм нельзя перенормировать так, чтобы сохранить калибровочную инвариантность. Их однако можно скомпенсировать.

Одна из возможностей компенсации связана с кварковым расширением модели. Если добавить в описанную лептонную модель Вайнберга—Салама слабые взаимодействия адронов, введя их через калибровочные взаимодействия фермионных кварковых полей, то можно достичь перенормируемости расширенной модели при выполнении условия баланса между лептонами и кварками. Четырем лептонам ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ) должны соответствовать четыре кварка. Именно эти соображения, дополненные некоторыми качественными физическими доводами, и привели к гипотезе о четвертом кварке с новым квантовым числом (очарованием), столь эффектно подтвердившейся открытием семейства  $\psi$ -частиц в 1975 г. и последующим обнаружением адронов с отличным от нуля очарованием.

**32.5. Физическое содержание и экспериментальный статус.** Дадим теперь краткое описание физического содержания модели Вайнберга—Салама и его соответствия с данными опытов.

Существенным свойством модели является наличие нейтральных токов (связанных с нейтральным промежуточным мезоном). Эти токи были обнаружены в 1973 г. в опытах по взаимодействию нейтрино с нуклонами. Измеренные количественные характеристики согласуются с предсказаниями модели при  $\theta_W \approx 30^\circ$ ,  $\sin^2 \theta_W \approx 0,23 \pm 0,02$ . Подставляя это значение в (3) и (9), получаем приближенные значения для масс промежуточных бозонов:  $M_W \approx 75$  ГэВ,  $M_Z \approx 87$  ГэВ. Этим значениям соответствует радиус действия слабых сил  $r_{cl} \approx 3 \cdot 10^{-16}$  см.

Для того чтобы непосредственно обнаружить эффекты, связанные с существованием столь тяжелых частиц, необходимы достаточно высокие энергии ускорителей. Так, например, нейтральный  $Z$ -бозон может быть рожден в установке со встречными  $e^+e^-$  или  $p\bar{p}$  пучками, энергия каждого из которых должна быть не менее 40—50 ГэВ. Подобные ускорители могут появиться в ближайшем десятилетии.

Модель содержит скалярный хиггсов бозон. Его масса  $m_\sigma$  определяется формулой (12), содержащей свободный параметр  $\lambda$ .

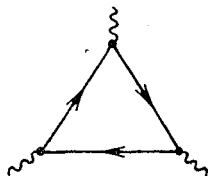


Рис. 32.1. Аномальная треугольная диаграмма неабелевой калибровочной теории.

Поэтому масса  $m_\sigma$  может быть «выбрана» достаточно большой для того, чтобы отсутствие на опыте тяжелого скалярного нейтрального бозона еще долгое время не являлось источником беспокойства.

### § 33. Общая картина

**33.1. Сильные взаимодействия.** При обсуждении взаимодействий между полями в § 10 были выписаны лагранжианы юкавского типа в псевдоскалярном (10.17) и псевдовекторном (10.19) вариантах. Как там также отмечалось при введении пион-пионного взаимодействия (10.22), нет никаких серьезных оснований считать подобные выражения фундаментальными. Их можно рассматривать в чисто феноменологическом плане и пытаться определить конкретный вариант лагранжиана взаимодействия и численное значение констант связи из сравнения с данными опыта. Такие попытки неоднократно предпринимались главным образом в течение 50-х годов. Было установлено, что некоторые выражения этого типа могут быть положены в основу перенормируемой теории возмущений. Таковы, например, лагранжианы (10.17) и (10.22). (В то же время юкавское псевдовекторное взаимодействие (10.19) неперенормируемо.) Однако никаких удовлетворительных количественных описаний процессов сильных взаимодействий на этом пути получить не удалось.

Довольно прозрачная (хотя и не единственная) причина неудач связана с тем, что константы связи  $g$ ,  $h$ , а следовательно и параметры разложения теории возмущений, в сильных взаимодействиях не являются малыми по сравнению с единицей. Так, например, константа связи  $g$  юкавского пион-нуклонного псевдоскалярного взаимодействия, оцененная с помощью метода дисперсионных соотношений (см. ниже § 33.3), оказалась равной

$$g^2/4\pi \simeq 14,7. \quad (1)$$

В 70-х годах в связи с разработкой составной кварковой модели адронов выражения типа (10.17), (10.22) постепенно «вышли из моды», и усилия теоретиков в последнее время сосредоточились на так называемой глюон-партонной модели, в которой основную роль играют гипотетические «истинно фундаментальные» составляющие адронов — *кварки*. Фермионные и кварковые поля связаны между собой калибровочным полем, кванты которого — векторные частицы — называются *глюонами*.

Благодаря свойству асимптотической свободы калибровочных полей (см. ниже § 33.3), кварк-глюонное взаимодействие ослабевает с ростом энергии, вследствие чего в ультрафиолетовом пределе кварки и глюоны ведут себя как квазисвободные точечные объекты. На опыте в высокоэнергетических, так называемых глубоконеуп-

ругих процессах адроны проявляют сложную структуру и выглядят как бы состоящими из точечных составляющих — партонов. Эта наблюдаемая картина и находит естественное объяснение с помощью свойства асимптотической свободы. Роль партонов при этом играют кварки, представление о которых возникло в начале 60-х годов в связи с феноменологической схемой классификации адронов и адронных резонансов, основанной на концепции унитарной симметрии.

Квантовополевая модель, описывающая взаимодействия фермионных кварковых полей с помощью калибровочного глюонного поля, называется *квантовой хромодинамикой*.

Мы не имеем здесь возможности вдаваться сколько-нибудь подробно в физику сильных взаимодействий и детали квантовой хромодинамики. Отметим лишь, что, согласно современным представлениям, применение описанного в этой книге метода перенормируемой теории возмущений к некоторым физическим ситуациям оказывается здесь оправданным. Тем не менее основные физические проблемы кварк-глюонной модели, связанные с отсутствием кварков и глюонов в свободном состоянии, еще ждут своего решения. Они не могут быть исследованы с помощью аппарата слабой связи (т. е. в рамках обычной теории возмущений).

Таким образом, область применения методов перенормируемой теории возмущений естественным образом ограничивается моделями квантовой теории поля с численно малыми значениями констант связи. Существуют и другие ограничения.

**33.2. Ограничения метода теории возмущений.** Оказывается, например, что даже при численно малых константах связи имеются области значений кинематических переменных, в которых последовательные члены разложений теории возмущений могут не убывать. Как было установлено выше, при вычислении однопетлевых поправок к пропагаторам в области больших значений импульсов  $p$  (ультрафиолетовая асимптотика) эти поправки возрастают логарифмически (см., например, формулы (24.6), (29.6)), вследствие чего их относительный вклад в пропагатор пропорционален произведению  $g^2 L$  — квадрата константы связи  $g$  на большой «ультрафиолетовый» логарифм

$$L = \ln(p^2/\lambda^2). \quad (2)$$

Анализ высших радиационных поправок показывает, что в ультрафиолетовой области  $n$ -петлевые вклады растут как  $(g^2 L)^n$ . Аналогичная ситуация возникает в области малых импульсов (инфракрасная асимптотика) в некоторых квантовополевых моделях, содержащих безмассовые поля. Так, например, в спинорной электродинамике радиационная поправка к пропагатору электрона, обусловленная испусканием и поглощением безмассового фотона, содержит (см. формулы (29.17), (29.20)) произведение  $\alpha l$  — пара-

метра разложения  $\alpha = e^2/4\pi$  на «инфракрасный» логарифм

$$l = \ln \frac{m^2 - p^2}{m^2}, \quad (3)$$

который неограниченно возрастает при приближении импульса электрона  $p$  к массовой поверхности ( $p^2 \rightarrow m^2$ ). Высшие радиационные поправки содержат произведения  $(\alpha l)^n$ .

Тем самым в ультрафиолетовой и инфракрасной областях произведения типа  $g^2 L$  и  $g^2 l$  оказываются фактическими параметрами разложения теории возмущений. В этих областях происходит эффективный выход за рамки слабой связи даже при малых численных значениях констант взаимодействия. Сказанное относится не только к одночастичным пропагаторам, но и к высшим вершинным функциям.

Возникает задача определения и суммирования подобных больших вкладов высших порядков. Эта задача в отдельных случаях поддается частичному решению с помощью некоторого усовершенствования техники теории возмущений. Пример дает формула (29.13) для ультрафиолетовой асимптотики фотонного пропагатора. Однако в общем случае необходимо привлечение методов, существенно выходящих за рамки обычной теории возмущений, или по крайней мере их комбинирование с результатами теории возмущений (см. ниже § 33.3).

Таким образом поле применения изложенного в гл. IV — VII этой книги аппарата перенормируемой теории возмущений оказывается ограниченным с нескольких сторон.

Во-первых, этот аппарат работает лишь в так называемых перенормируемых взаимодействиях. Он, в частности, не может быть использован для слабых взаимодействий в форме Ферми (как об этом было сказано в § 31.3) и для гравитационных взаимодействий (ввиду того, что спин гравитона равен 2 и его пропагатор сильно растет в ультрафиолетовой области).

Во-вторых, в перенормируемых моделях квантовой теории поля метод теории возмущений может быть использован лишь в случае малости констант связи. Этому условию удовлетворяет спинорная электродинамика и ее «обобщения в сторону слабых взаимодействий», типа модели Вайнберга — Салама. Однако в подавляющей части перенормируемых моделей сильных взаимодействий теория возмущений не может быть использована из-за большого значения константы связи (ср. (1)).

Наконец, как только что было показано, даже в перенормируемых моделях с численно малыми константами связи имеются кинематические ограничения. Для их преодоления используются различные приемы и методы, позволяющие хотя бы частично выйти за рамки изложенной в этой книге «стандартной» теории возмущений.

**33.3. Другие методы квантовой теории поля.** Ввиду отмеченной ограниченности возможностей применения теории возмущений к реальным процессам, особенно к задачам физики адронов, большое значение приобретают любые успешные теоретические пути анализа задач теории частиц, не связанные непосредственно с малостью константы связи и степенными разложениями. Таких зарекомендовавших себя подходов известно три. Это — метод дисперсионных соотношений, метод функционального (или континуального) интегрирования и метод ренормализационной группы.

Метод *дисперсионных соотношений* основан на аксиоматической формулировке квантовой теории поля, представление о которой читатель получил в гл. IV. Сформулированные в § 15 аксиомы были употреблены в § 16 для построения разложения матрицы рассеяния по степеням малости взаимодействия, т. е. по степеням константы (или констант) связи. Полученные результаты оказались эквивалентными решению уравнения Шредингера методом итераций, приведенному в § 14.

Несколько расширенный вариант аксиом § 15 (боголюбовская аксиоматика) был использован одним из авторов в середине 50-х годов для обоснования метода дисперсионных соотношений (см. Введение, гл. X). Решающими элементами строгого математического вывода явились формулировка условия причинности в дифференциальной форме (15.16) и соединение методов теории функций нескольких комплексных переменных с теорией обобщенных функций.

Дисперсионные соотношения формально являются следствиями теоремы Коши из теории функций комплексного переменного, примененной к амплитуде рассеяния  $f(E)$ , аналитически продолженной в комплексную плоскость переменной энергии  $E \rightarrow E + iV$ . Обычно они записываются с помощью интегральных соотношений вида

$$\operatorname{Re} f(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(E')}{E' - E} dE' + \dots$$

между вещественной и мнимой частями амплитуды двухчастичного рассеяния вперед:

$$f(E) = f(E, \theta = 0) = \operatorname{Re} f(E) + i \operatorname{Im} f(E),$$

каждая из которых может быть выражена алгебраическими соотношениями (см. формулы § 21.4) через две непосредственно измеряемые величины — полное эффективное сечение  $\sigma(E)$  и дифференциальное сечение рассеяния на нулевой угол  $\frac{d\sigma(E, \theta=0)}{d\Omega}$ .

Аналитическое продолжение амплитуды рассеяния  $f(E)$  в комп-

лексную плоскость энергии оказывается возможным благодаря условию причинности.

Дисперсионные соотношения представляют собой строгие следствия основных аксиоматических положений локальной квантовой теории поля, сформулированные в виде интегральных по энергии соотношений для наблюдаемых величин. Эти соотношения не образуют системы уравнений, достаточных для теоретического определения входящих в них функций. Они, однако, могут непосредственно проверяться на опыте, а также представляют собой основу для получения строгих качественных и приближенных результатов.

В течение последующих десятилетий метод дисперсионных соотношений получил большое развитие и вплоть до 70-х годов являлся единственным средством количественного анализа процессов сильных и электромагнитных взаимодействий адронов.

Метод *функционального интеграла* основан на фейнмановской формулировке квантовой механики в виде интеграла по путям (см. § 138 в учебнике Блохинцева (1976)). Амплитуды переходов и функции Грина выражаются через некоторые формальные выражения (функциональные интегралы), которые можно представлять себе как пределы многократных интегралов при стремлении числа интегрирований к бесконечности. Оказывается возможным ввести определенные правила обращения с функциональными интегралами и в ряде случаев способы их явного вычисления. К настоящему времени метод функционального интеграла зарекомендовал себя как метод получения общих результатов в квантовой теории поля. С его помощью были проквантованы неабелевы калибровочные поля (см. книгу Славнова, Фаддеева (1978)), весьма элегантно выведены формулы калибровочных преобразований полных функций Грина в квантовой электродинамике (см. гл. VIII Введения), а также получены некоторые другие важные результаты. В самые последние годы ряд интересных свойств, относящихся к структуре ряда теории возмущений в целом, был установлен с помощью приближенного вычисления функционального интеграла методом функционального перевала, являющегося аналогом метода перевала из теории функций комплексного переменного. Этим путем удалось показать, что ряды квантово-полевой теории возмущений являются асимптотическими (и, следовательно, не имеют области сходимости).

Метод *ренормализационной группы* основан на групповом характере конечных перенормировок функций Грина и констант связи, отвечающих различным способам устранения расходимостей (например, различным точкам вычитания  $R$ -операции — см. § 28). Математическая формулировка групповых свойств (см. гл. IX Введения) приводит к функциональным соотношениям, связывающим между собой функции Грина для различных схем пере-

нормировок. Соответствующие групповые дифференциальные уравнения (уравнения Ли) оказываются весьма удобными для исследования ультрафиолетовых и инфракрасных асимптотик функций Грина, т. е. анализа тех случаев, когда, как было указано выше в § 33.2, происходит эффективный выход за рамки слабой связи.

Следует отметить, что, в отличие от основной массы результатов, полученных с помощью дисперсионных соотношений и представления функционального интеграла, основные физические результаты получаются здесь в итоге своего рода симбиоза вычислений по теории возмущений и строгих ренормгрупповых соотношений. К ним относится свойство *асимптотической свободы* ряда квантовополевых моделей, содержащих поля Янга — Миллса.

Квинтэссенция явления асимптотической свободы выражается формулой

$$\bar{g}^2(k^2, g) = \frac{g^2}{1 + cg^2 \ln(k^2/\lambda^2)}, \quad c > 0, \quad |k^2| \rightarrow \infty \quad (4)$$

для так называемой эффективной (или инвариантной) константы взаимодействия  $\bar{g}$ , зависящей от квадрата 4-импульса и описывающей эффективное изменение интенсивности взаимодействия в области больших импульсов (т. е. малых расстояний). Формула (4) представляет собой сумму «старших» ультрафиолетовых логарифмических вкладов  $(g^2 L)^n$  из всех порядков теории возмущений и отличается от аналогичной формулы спинорной электродинамики для инвариантного электрического заряда

$$\bar{\alpha}(k^2, \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k^2}{\lambda^2}}, \quad |k^2| \rightarrow \infty \quad (5)$$

алгебраическим знаком логарифмического слагаемого в знаменателе. (Выражение (5) является непосредственным следствием формулы (29.13) для фотонного пропагатора и отвечает сумме ультрафиолетовых асимптотических вкладов итераций простых электрон-позитронных петель — см. рис. 29.1.)

Это отличие приводит к важным физическим следствиям. Формула (5) соответствует «нормальной картине» экранировки (подобной картине экранировки точечного заряда, внесенного в поляризуемую среду), когда эффективный заряд  $\alpha$  увеличивается вместе с  $k^2$ , т. е. с уменьшением расстояния (рис. 33.1). В противоположность этому формула (4) приводит к уменьшению эффективного взаимодействия с ростом импульса, которое в асимптотическом ультрафиолетовом пределе стремится к нулю, а поля, участвующие во взаимодействии, — к свободным (рис. 33.2). Этот феномен «самовыключения» взаимодействия на малых расстояниях и называется асимптотической свободой. В свое время он явился

решающим аргументом для утверждения калибровочного механизма взаимодействия полей в качестве единственно возможного для сильных взаимодействий.

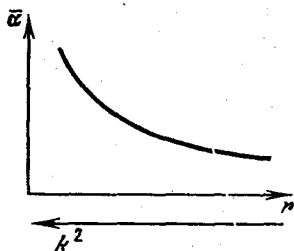


Рис. 33.1. Эффект поляризации вакуума в спинорной электродинамике, приводящий к картине «нормальной экранировки».

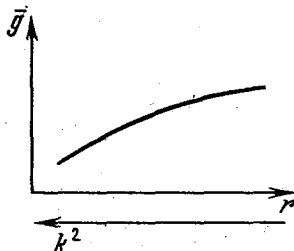


Рис. 33.2. Уменьшение эффективного взаимодействия с ростом импульса в неабелевой калибровочной теории.

**33.4. Заключение.** Изложенный в этой книге метод перенормируемой теории возмущений является основным регулярным рабочим инструментом квантовой теории поля. Он позволяет получать надежные количественные результаты, описывающие широкий круг физических явлений микромира. Существенным элементом метода является процедура устранения ультрафиолетовых расходимостей с помощью перенормировок. Иногда высказывается мнение, что факт существования этих расходимостей представляет собой серьезный дефект квантовой теории поля — дефект, который приходится «прикрывать» математически неудовлетворительной операцией перенормировок.

В этой связи следует подчеркнуть два момента. Наличие ультрафиолетовых расходимостей органически связано с локальностью квантовой теории поля. Поэтому расходимости и перенормировки неизбежно будут сопровождать любую модификацию современной формулировки квантовой теории поля при условии сохранения ее локального характера.

Процедура перенормировок в свою очередь в настоящее время представляет собой математически строгую операцию, выполняемую по рецепту, в основе которого лежит теория обобщенных функций. Физический смысл перенормировок состоит в том, что влияние «малых» расстояний на физику «больших» расстояний может быть эффективно учтено с помощью ограниченного числа конечных параметров.



## Дополнение I. ИЗОТОПИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Формализм изотопического спина был введен Гайзенбергом для того, чтобы описать независимость ядерных сил от электрического заряда. В этом формализме нейтрон и протон рассматриваются как два различных (зарядовых) состояния одной и той же частицы (нуклона).

Нуклонная волновая функция при этом наделяется свойствами двухкомпонентного спинора относительно преобразований вращения в некотором фиктивном трехмерном пространстве — пространстве изотопического спина (изотопическом пространстве). Аналогичные свойства приписываются волновым функциям других зарядовых мультиплетов. Так, например, пионный триплет  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$  описывается тремя функциями, являющимися компонентами вектора в изотопическом пространстве и т. д.

Инвариантность относительно вращений в изотопическом пространстве физически соответствует равноправности частиц внутри мультиплетов. Очевидно, что эта равноправность нарушается электромагнитными взаимодействиями. Однако если отвлечься от последних, то свойство изотопической инвариантности оказывается справедливым для сильных (ядерных) взаимодействий.

Ниже мы дадим конспективный перечень основных формул изотопического формализма для нуклонов и пионов. Для более детального ознакомления читателю может быть рекомендована гл. 3 книги Перкинса (1975).

**1. Дублет нуклонов.** Рассмотрим прежде всего изотопический дублет нуклонов. Спинор трехмерного (изотопического) пространства имеет две компоненты, которые соответствуют протонной  $\psi_p$  и нейтронной  $\psi_n$  полевым функциям:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \Psi^* = (\psi_p^*, \psi_n^*). \quad (1)$$

Операторы вращений в изотопическом пространстве строятся из матриц 2-го ранга, которые совпадают с матрицами Паули (ДП1.8), но обозначаются другими символами:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Матрицы  $\tau$  антикоммутируют друг с другом

$$\tau_a \tau_b + \tau_b \tau_a = 0 \quad (a \neq b), \quad \tau_a^2 = 1 \quad (3)$$

и удовлетворяют соотношениям

$$\tau_1 \tau_2 = i \tau_3 \quad (\text{и циклические перестановки индексов } 1, 2, 3). \quad (4)$$

Операторы изотопических вращений нуклонов связаны с матрицами  $\tau$  соотношением

$$I_a = \tau_a / 2. \quad (5)$$

В силу (3), (4) они удовлетворяют коммутационным соотношениям для операторов вращения

$$[I_1, I_2] = iI_3 \quad (\text{и циклические перестановки индексов } 1, 2, 3), \quad (6)$$

а также соотношению

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = 3/4,$$

вследствие чего собственное значение полного изотопического момента вращения  $I$ , определяемого из квантовомеханического соотношения

$$I^2 = I(I+1),$$

оказывается равным  $I = 1/2$ .

Линейные комбинации матриц  $\tau_1$  и  $\tau_2$

$$\tau_+ = \tau_1 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \tau_1 - i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

переводят нейтронное состояние в протонное и наоборот:

$$\tau_+ \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix},$$

вследствие чего  $\tau_+$  и  $\tau_-$  иногда называют операторами «повышения» и «понижения» электрического заряда. Формулы преобразований спинора  $\Psi$  при вращении изотопического пространства вокруг оси  $z_a$  на угол  $\varphi$  имеют вид, аналогичный (ДП.18):

$$\Psi' = \Lambda_a(\varphi) \Psi, \quad \bar{\Psi}' = \Lambda_a^{-1}(\varphi) \bar{\Psi},$$

где

$$\Lambda_a(\varphi) = e^{-iI_a\varphi} = e^{-i\tau_a\varphi/2} = \cos \frac{\varphi}{2} - i\tau_a \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Билинейные формы  $\bar{\Psi}\tau_a\Psi$  ( $a=1, 2, 3$ ) образуют пространственную плотность вектора изотопического спина

$$I = \int \bar{\Psi}(x) \frac{\tau}{2} \Psi(x) dx,$$

третья компонента которого связана с электрическим зарядом и гиперзарядом:

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (8)$$

**2. Триплет пионов.** Тройка псевдоскалярных пионов  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$  образует изотопический триплет, который описывается тремя псевдоскалярными полевыми функциями, образующими изотопический вектор. Обычно используют два представления этих функций. В первом из них функции поля действительны:

$$\pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}, \quad \pi_a(x) = \pi_a(x). \quad (9)$$

Во втором представлении из двух действительных функций  $\pi_1, \pi_2$  образуют две комплексные комбинации

$$\varphi_1 = \frac{\pi_1 - i\pi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \pi_3, \quad \varphi_3 = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Преобразование от (9) к представлению

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \quad (11)$$

может быть записано в матричном виде

$$\Phi = O\pi, \quad O = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $O$  — унитарная матрица

$$O^\dagger O = 1.$$

Формулы преобразования изотопического вектора (9) при вращениях трехмерного изотопического пространства имеют вид

$$\pi \rightarrow \pi' = \Lambda(\alpha)\pi, \quad \Lambda(\alpha) = e^{-i\omega_n\alpha_n},$$

где  $\alpha_n$  ( $n=1, 2, 3$ ) — углы вращений, а  $\omega_n$  — матрицы изотопического спина в представлении (9):

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Квадрат матричного вектора  $\omega$  равен

$$\omega(\omega + 1) = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 2.$$

Поэтому  $\omega$  является оператором момента вращения с собственными значениями 1, 0, -1.

Оператор преобразования вращения на угол  $\alpha$  вокруг оси  $z_3$  может быть представлен в виде

$$\Lambda(\alpha) = e^{-i\omega_3\alpha} = 1 - \omega_3^2 + \omega_3^2 \cos \alpha - i\omega_3 \sin \alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Компоненты матриц (13) могут быть выражены через совершенно антисимметричный единичный тензор третьего ранга

$$(\omega_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}.$$

Матрицы  $\omega_a$  удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\omega_1, \omega_2] = i\omega_3 \quad (\text{и циклические перестановки индексов } 1, 2, 3). \quad (15)$$

Переход к представлению (11) достигается унитарным преобразованием

$$T_n = O\omega_n O^\dagger.$$

Матрицы  $T_n$  имеют вид

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям (15). Существенно, что матрица  $T_3$  диагональна. Это свойство отражает тот факт, что в представлении (11) компоненты  $\varphi_\nu$  соответствуют определенным значениям электрического заряда. На основании (8) следует отождествить

$$\varphi_1 \sim \pi^+, \quad \varphi_2 \sim \pi^0, \quad \varphi_3 \sim \pi^-. \quad (17)$$

## Дополнение II. МАТРИЦЫ ДИРАКА И УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Это дополнение содержит технический материал по матрицам Дирака, уравнению Дирака и трансформационным свойствам спинорных функций, являющийся вводным к § 5, а также полезным для вычисления матричных элементов. Упражнения к материалу этого дополнения помещены в задании «Сентябрь».

1. **Матрицы Дирака.** Свойства четырех гиперкомплексных чисел  $\gamma_\nu$  ( $\nu=0, 1, 2, 3$ ) определяются основным антикоммутиационным соотношением

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Из этого соотношения во-первых вытекает, что 16 величин:

$$\left. \begin{array}{l} \text{единичная матрица } I = g^{\nu\nu} \gamma^\nu \gamma^\nu \text{ (нет суммирования!),} \\ \text{четыре величины } \gamma_\nu, \\ \text{шесть величин } \sigma_{\nu\mu} = (\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu) / 2i \quad (\nu < \mu), \\ \text{одна величина } \gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \\ \text{и четыре величины } D_\nu = \gamma_\nu \gamma_5 \end{array} \right\} \quad (2)$$

образуют алгебру над полем комплексных чисел. Иными словами, совокупность элементов, определенная всевозможными линейными комбинациями величин (2) с комплексными коэффициентами, а также всевозможными произведениями таких величин и их комбинаций друг с другом, является замкнутой относительно операций сложения элементов, умножения элементов друг на друга и на комплексное число.

Отметим, что формы  $\sigma_{\nu\mu}$  являются билинейными по  $\gamma$ , формы  $D_\nu$  — тройными, а  $\gamma_5$  — единственной формой четвертого порядка. Все остальные формы четвертого порядка, все формы пятого и высших порядков с помощью фундаментального соотношения (1) сводятся к одной из величин (2).

Используя ряд алгебраических теорем, можно показать, что ранг  $r$  неприводимого матричного представления системы гиперкомплексных чисел связан с числом  $n$  линейно независимых элементов соотношением

$$r^2 = n,$$

которое является совершенно естественным, если гиперкомплексные числа представляются в виде квадратных матриц

Не составляет труда показать, что шестнадцать матриц (2) являются линейно-независимыми. Для этого необходимо, во-первых, рассмотреть шпуры всех этих матриц и убедиться, что все шпуры, кроме шпура единичной матрицы  $\text{Sp } I = r$ , равны нулю. Доказательство основано на возможности циклической перестановки матриц-сомножителей под знаком шпура. В качестве примера рассмотрим шпур произведения  $\gamma_\nu \gamma_\mu$  при  $\nu \neq \mu$ . Используя последовательно циклическость и основное соотношение (1) получаем

$$\text{Sp } \gamma_\nu \gamma_\mu = \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu = (1/2) \text{Sp } (\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu) = 0.$$

На втором этапе следует рассмотреть линейную форму

$$F = aI + b^\nu \gamma_\nu + c^{\nu\mu} \sigma_{\nu\mu} + d^\nu D_\nu + e\gamma_5$$

и путем вычисления шпуров от  $F$  и от произведений  $F\gamma_\nu$ ,  $F\sigma_{\nu\mu}$ ,  $FD_\nu$ ,  $F\gamma_5$  последовательно убедиться, что предположение о том, что  $F=0$ , приводит к це-

почке соотношений

$$a=0, \quad b^{\nu}=0, \quad c^{\nu\mu}=0, \quad d^{\nu}=0, \quad e=0.$$

Таким образом, в нашем случае  $n=16$ , и из формулы  $n=r^2$  теперь следует, что гиперкомплексные числа  $\gamma^{\nu}$ , определенные соотношением (1), могут быть представлены в виде квадратных матриц четвертого порядка — матриц Дирака.

Из фундаментального соотношения (1) вытекает также, что четыре матрицы  $\gamma^{\nu}$  могут быть выбраны унитарными, если условия эрмитова сопряжения наложить в виде

$$\gamma^{\nu\dagger} = \gamma^{\nu}, \quad (\gamma^{\nu\dagger})_{\alpha\beta} \equiv \gamma_{\beta\alpha}^{\nu*}. \quad (3)$$

Замечая еще, что матрица  $\gamma_5$  антикоммутирует с  $\gamma^{\nu}$  ( $\nu=0, 1, 2, 3$ ), а ее квадрат равен  $+1$ , можем записать

$$\gamma_m \gamma_n + \gamma_n \gamma_m = 2g_{mn}, \quad m, n=0, 1, 2, 3, 5, \quad (4)$$

где по определению

$$g_{55} = 1.$$

При этом

$$\gamma_5^{\dagger} = \gamma_5 = \gamma_5^5.$$

Основные соотношения (1) и все полученные из них следствия являются инвариантными относительно унитарного преобразования

$$\gamma^{\nu} \rightarrow O \gamma^{\nu} O^{-1},$$

где  $O$  — произвольная неособенная (т. е. обладающая обратной) матрица, которую с учетом (3) следует считать унитарной.

Тем самым матрицы Дирака вообще определены с точностью до унитарного преобразования. Обычно употребляют представление

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & i & \cdot \\ \cdot & i & \cdot & \cdot \\ -i & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

(точками обозначены нули), в котором  $\gamma^0$  является диагональной. Оно оказывается особенно удобным при рассмотрении нерелятивистского предела (см. ниже). Мы будем называть представление (5) *стандартным* представлением матриц Дирака.

Это представление матриц  $\gamma$  связано с употребляемыми иногда матрицами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  и  $\rho$  посредством соотношений

$$\alpha_n = \gamma_0 \gamma^n \quad (n=1, 2, 3); \quad \beta = \gamma^0;$$

$$\sigma_n = \gamma^5 \gamma^n \gamma^0 \quad (n=1, 2, 3), \quad \sigma_1 = \sigma^{23}, \quad \sigma_2 = \sigma^{31}, \quad \sigma_3 = \sigma^{12}; \quad (6)$$

$$\rho_1 = -\gamma^5, \quad \rho_2 = i\gamma^0 \gamma^5, \quad \rho_3 = \gamma^0.$$

Стандартное представление (5) может быть записано в так называемом «расщепленном» виде.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^n = - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ -\sigma_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

через двухрядные матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}, \quad \sigma_k \sigma_j = \delta_{kj} + i\epsilon_{kjl} \sigma_l \quad (9)$$

а также единичную и нулевую матрицы второго ранга

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вернемся к шпурам матриц Дирака и их произведений. Шпур единичной матрицы равен рангу представления, т. е.

$$\text{Sp } I = \text{Sp } \gamma_\nu \gamma^\nu = 4 \quad (\text{нет суммирования по } \nu!).$$

Принимая теперь во внимание доказанное выше обращение в нуль шпура матриц  $\sigma_{\mu\nu}$  и  $D_\nu$ , имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp } \gamma_\nu &= 0, & \text{Sp } \gamma_\nu \gamma_\mu &= 4g_{\nu\mu}, & \text{Sp } \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho &= 0, \\ (\frac{1}{4}) \text{Sp } \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma &= g_{\nu\mu} g_{\rho\sigma} + g_{\nu\sigma} g_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}, \\ \nu, \mu, \rho, \sigma &= 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

Как общее правило, получаем, что шпуры произведений нечетного числа матриц  $\gamma$  всегда равны нулю, а шпуры произведений четного числа  $\gamma$  с точностью до множителя 4 выражаются через антисимметризованные произведения множителей  $g_{\mu\nu}$ , причем знак слагаемого  $4g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} \dots g_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}$  в выражении

для  $\text{Sp } (\gamma_{\nu_1} \gamma_{\nu_2} \dots \gamma_{\nu_{2n}})$  определяется четностью перестановки  $P_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n}}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n}}$ .

Приведем еще ряд формул для шпуров от сверток  $\gamma$ -матриц с 4-векторами  $\hat{a} = a^\nu \gamma_\nu$ , вытекающих из (10):

$$\text{Sp } \hat{a}\hat{b} = 4(ab), \quad (11a)$$

$$\text{Sp } \hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} = 4\{(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)\}, \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} (\frac{1}{4}) \text{Sp } [(\hat{k}_1 + m_1)(\hat{k}_2 + m_2)(\hat{k}_3 + m_3)(\hat{k}_4 + m_4)] &= \\ = (K_1 K_2)(K_3 K_4) + (K_1 K_4)(K_2 K_3) - (K_1 K_3)(K_2 K_4), \end{aligned} \quad (11b)$$

где

$$K_i K_j = k_i k_j + \eta_{ij} m_i m_j, \quad \eta_{ij} = (-1)^{i-j+1}.$$

Связь между шпурами, «содержащими массы», и «безмассовыми» шпурами, аналогичная связи между формулами (11b) и (11b), имеет место и при наличии большего числа множителей.

**2. Уравнение Дирака.** Это матричное линейное уравнение первого порядка в частных производных

$$[(i\hat{\partial}_x - m)\psi(x)]_\alpha = \left( i\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - mI \right)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) = 0. \quad (12)$$

Функция поля  $\psi_\alpha$  четырехкомпонентна ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ). Действуя на (12) слева оператором  $(i\hat{\partial} + m)$ , получаем с помощью (1)

$$(i\hat{\partial} + m)(i\hat{\partial} - m)\psi = [-\partial^2 - m^2]\psi = (\square - m^2)\psi = 0.$$

Таким образом, каждая из компонент  $\psi_\alpha$  удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона.

Сопряженное уравнение получается из уравнения Дирака в два этапа. Беря эрмитово сопряжение от (12), получаем с помощью (3)

$$i\gamma_\nu^* \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} + m\bar{\psi}^* = i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma_\nu^* + m\bar{\psi}^* = i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma^\nu + m\bar{\psi}^* = 0.$$

Это выражение не обладает «правильной» лоренц-симметричной формой. Умножая его справа на  $\gamma^0$ , с учетом того, что

$$\gamma_0 \gamma^\nu \gamma_0 = \gamma_\nu = \overset{+}{\gamma}^\nu, \quad (13)$$

получаем

$$i \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x^\nu} \gamma_\nu + m \bar{\psi}(x) = 0 \quad (14)$$

— сопряженное уравнение Дирака. Входящий в него спинор

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0 \quad (15)$$

именуют «сопряженным» относительно  $\psi$ .

Спиноры  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  часто представляют в виде четырехкомпонентных столбца и строки. При всей своей наглядности такое представление иногда может приводить к некоторым неудобствам, например при введении операции зарядового сопряжения (см. § 9.3). Практически в случае необходимости достаточно иметь в виду вторую форму записи уравнения (12) — записи в компонентах.

**3. Трансформационные свойства.** Отсылая читателя, интересующегося выводом, к имеющейся обширной литературе, приведем здесь лишь окончательные формулы преобразований спинорных функций поля.

При преобразованиях сдвига, на основании общих соображений из § 1.3, имеем

$$\psi(x) = \psi'(x'), \quad x' = x + a.$$

При пространственных поворотах в плоскости  $x_m x_n$  на угол  $\varphi$

$$x'_m = x_m \cos \varphi - x_n \sin \varphi, \quad x'_n = x_n \cos \varphi + x_m \sin \varphi$$

соответствующее преобразование является матричным:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \Lambda_{(m,n)}(\varphi) \psi(x), \quad (16)$$

где матрица поворота  $\Lambda$  имеет вид

$$\Lambda_{(m,n)}(\varphi) = \exp\left(-i\sigma_{mn} \frac{\varphi}{2}\right),$$

а  $\sigma_{mn}$  — введенная в (2) «матрица тензора спина». Таким образом,

$$\psi'(x') = \cos \frac{\varphi}{2} \psi(x) - i \sin \frac{\varphi}{2} \sigma_{mn} \psi(x). \quad (17)$$

При преобразовании лоренцева поворота в плоскости  $x^0x^n$  ( $n=1, 2, 3$ )

$$x'_0 = x_0 \operatorname{ch} \varphi - x_n \operatorname{sh} \varphi, \quad x'_n = x_n \operatorname{ch} \varphi - x_0 \operatorname{sh} \varphi \quad (\operatorname{tg} \varphi = v = v/c)$$

соответственно имеем

$$\Lambda_{(0n)}(\varphi) = \exp\left(i\sigma_{0n} \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2} + i\sigma_{0n} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2}.$$

Полученные формулы могут быть объединены

$$\Lambda_{(\mu\nu)}(\varphi) = \exp\left(-i\sigma^{\mu\nu} \frac{\varphi}{2}\right). \quad (18)$$

Можно показать, что выписанные формулы находятся в соответствии с уравнением Дирака. Для этого, во-первых, следует убедиться в том, что матрицы  $\Lambda_{(\mu\nu)}$ , отвечающие преобразованию

$$x' = Lx, \quad x'_\nu = L_{\nu\mu} x^\mu,$$

обладают свойством

$$\Lambda_{(\nu\mu)}^{-1} \gamma_\nu \Lambda_{(\nu\mu)} = L_{\nu\mu} \gamma_\mu, \quad \Lambda \gamma_\mu \Lambda^{-1} = L_{\mu\nu}^{-1} \gamma_\nu. \quad (19)$$

Умножая затем уравнение Дирака (12) слева на  $\Lambda$ , получаем

$$\Lambda (i\gamma_\nu \partial^\nu - m) \psi = [i(\Lambda \gamma_\nu \Lambda^{-1}) \partial^\nu - m] \Lambda \psi = (iL_{\nu\mu}^{-1} \gamma_\mu \partial^\nu - m) \psi'(x') = (i\partial' - m) \psi'(x') = 0.$$

Здесь было принято во внимание, что в соответствии с (19)

$$\partial^\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \partial'^\mu L_{\mu\nu}, \quad \partial'^\nu = \partial^\mu L_{\mu\nu}^{-1}.$$

Как известно, уравнение называется *ковариантным*, если после преобразования, т. е. записанное через преобразованные функции и переменные, оно имеет прежнюю форму.

Таким образом, мы убедились, что в силу матричного преобразования (16) уравнение Дирака оказывается ковариантным относительно преобразований группы Лоренца.

Аналогичный вывод для сопряженного уравнения Дирака может быть сделан с помощью формулы преобразования для сопряженного спинора

$$\bar{\psi}(x') = \bar{\psi}(x) \Lambda^{-1}(\varphi), \quad (20)$$

которая получается из (16) операцией эрмитова сопряжения и умножения справа на  $\gamma_0$  с учетом того, что

$$\gamma_0^+ \Lambda \gamma_0 = \gamma_0 \exp\left(i\sigma^{\mu\nu} \frac{\varphi}{2}\right) \gamma_0 = \exp\left(i\sigma^{\mu\nu} \frac{\varphi}{2}\right) = \Lambda^{-1}.$$

Из формул пространственного вращения (17) непосредственно вытекает неоднозначность спинорных функций. Полагая  $\varphi = 2\pi$ , находим, что полному пространственному обороту системы координат соответствует матрица преобразования  $\Lambda(2\pi) = -1$ , т. е. при таком преобразовании функция поля меняет знак. Поскольку, однако, поворот на  $2\pi$  приводит систему координат в первоначальное положение, т. е. совпадает с тождественным преобразованием, то отсюда следует, что спинорные волновые функции всегда определены с точностью до знака.



Приведем еще вид матрицы  $\Lambda$  для преобразований отражения координатных осей. Замечая, что формулы преобразования при отражениях четного числа различных пространственных осей, сводящихся к поворотам, вытекают из (17), ограничимся преобразованием отражения всех трех пространственных осей ( $P$ -преобразование):

$$\begin{aligned} x'^n &= -x^n \quad (n = 1, 2, 3), & x'^0 &= x^0, \\ \psi'(x') &= \eta(P) \Lambda_{123} \psi(x), & \Lambda_{123} &= \gamma^0. \end{aligned} \quad (21)$$

В силу двузначности спинорного представления фазовый множитель  $\eta$  подчиняется условию  $\eta^2(P) = \pm 1$ .

Формулы «лоренцевых преобразований» для матриц  $\gamma$  в совокупности с формулами преобразований для  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  позволяют получить законы преобразования билинейных форм вида  $\bar{\psi} O \psi$ . Действительно, на основании (16) и (20) получаем

$$\bar{\psi}'(x') O \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \Lambda^{-1} O \Lambda \psi(x).$$

С помощью (19) находим теперь:

- а)  $O = 1, \quad \bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \psi(x),$
- б)  $O = \gamma_\nu, \quad \bar{\psi}'(x') \gamma_\nu \psi'(x') = L_{\nu\mu} \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x),$
- в)  $O = \sigma_{\nu\mu}, \quad \bar{\psi}' \sigma_{\nu\mu} \psi' = L_{\nu\nu'} L_{\mu\mu'} \bar{\psi} \sigma_{\nu'\mu'} \psi$  и т. д.

Таким образом, рассматриваемые квадратичные формы преобразуются по тензорным представлениям группы Лоренца. Особо рассмотрим случаи, когда в  $O$  входит множителем матрица  $\gamma_5$ . Нетрудно проверить, что матрица поворотов (18) коммутирует с  $\gamma_5$ :

$$\Lambda^{-1}(\varphi) \gamma_5 \Lambda(\varphi) = \gamma_5.$$

В то же время матрица (21) отражения нечетного числа пространственных осей антикоммутирует с  $\gamma_5$ :

$$\Lambda_{123}^{-1} \gamma_5 \Lambda_{123} = \gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 = -\gamma_5.$$

В результате получаем следующую классификацию билинейных форм:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \psi & \text{— скаляр,} & \bar{\psi} \gamma_5 \psi & \text{— псевдоскаляр,} \\ \bar{\psi} \gamma_\nu \psi & \text{— 4-вектор,} & \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 \psi & \text{— псевдовектор,} \\ \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi & \text{— тензор второго ранга.} \end{aligned}$$

**4. Нерелятивистский предел.** Нерелятивистский предел уравнения Дирака отвечает случаю  $|p| \ll m$ . Для перехода к нерелятивистскому пределу удобно представить 4-компонентный спинор 4-мерного пространства—времени через два 2-компонентных спинора  $\chi$  и  $\varphi$  3-мерного евклидова пространства:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

и, фиксируя стандартное представление (5), перейти к матрицам  $\alpha, \beta$ :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Вошедшие в  $\alpha$  матрицы второго ранга  $\sigma$  — матрицы Паули — определены в (8).

Исходя из уравнения Дирака (12), записанного в импульсном представлении

$$(\rho^0 \gamma_0 - \rho \gamma - mI) u(p) = 0 \quad (24)$$

(здесь под  $u(p)$  подразумевается отрицательно-частотная часть спинора  $u^-(p)$ ), получим, умножая его слева на  $\gamma_0 = \beta$  и используя (22) и (23), два уравнения для двухкомпонентных спиноров  $\varphi$  и  $\chi$ :

$$(\rho^0 - m) \varphi(p) + (\rho \sigma) \chi(p) = 0, \quad (25)$$

$$(\rho \sigma) \varphi(p) + (\rho^0 + m) \chi(p) = 0. \quad (26)$$

В нерелятивистском приближении, как видно, спинор  $\chi$  много меньше спинора  $\varphi$ . Действительно, получаем из (26)

$$\chi(p) = \frac{(\sigma p)}{m + \rho^0} \varphi(p) \approx \frac{(\sigma p)}{2m} \varphi(p). \quad (27)$$

Поэтому обычно спинор  $\varphi$  описывает электронные компоненты (ср. формулу (5.12)), а  $\chi$  — позитронные компоненты.

Подставляя (27) в (25), (26), получаем уравнение для  $\varphi$

$$\rho^0 \varphi(p) = \left[ m + \frac{(\sigma p)(\sigma p)}{2m} \right] \varphi(p).$$

Если воспользоваться матричным соотношением

$$(\sigma a)(\sigma b) = (ab) - i(\sigma [a \times b]), \quad (28)$$

то видно, что оператор в правой части оказывается диагональным по спинорным индексам. Переходя в координатное представление и выделяя множитель  $\exp(imt)$ ,

$$\varphi(x, t) e^{-imt} = \int e^{-i\rho^0 t + i\rho x} \varphi(p) d\rho,$$

получим для  $\varphi(x, t)$

$$i \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi(x, t)$$

— уравнение Шредингера.

Когда имеется внешнее электромагнитное поле, то, по общему правилу удлинения производных (см. § 10.3), вместо (24) следует записать:

$$[(\rho^0 - eA_0) \gamma_0 - (\rho - eA) \gamma - mI] u(p) = 0. \quad (29)$$

Повторяя переход к двухкомпонентному электронному спинору, получаем, пренебрегая  $eA_0$  по сравнению с  $2m$ :

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[ -\frac{1}{2m} (\nabla - ieA)^2 + eA_0 - \frac{e}{2m} (\sigma H) \right] \varphi. \quad (30)$$

Здесь  $H = \text{rot} A$  — вектор магнитного поля.

Это уравнение называется *уравнением Паули*. Оно имеет вид уравнения Шредингера с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2m} (\rho - eA)^2 + eA_0 - (\mu H), \quad (31)$$

где последний член описывает энергию магнитного диполя

$$\mu = \mu_0 \sigma, \quad \mu_0 = \frac{e}{2m} = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (32)$$

во внешнем магнитном поле  $H$ . Величина  $\mu_0$  отвечает магнитному моменту электрона и называется *магнетоном Бора*.

### Дополнение III \*). НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ

В этом дополнении приводятся справочные сведения по теории непрерывных групп. За подробностями формулировок и доказательствами приводимых фактов мы отсылаем читателя к имеющимся руководствам по теории групп.

Дадим вначале ряд определений, относящихся к абстрактным группам, т. е. группам, на природу элементов и групповых операций которых не наложено пока никаких ограничений.

1. **Общие определения.** Группой называется множество  $G$  (элементы которого мы будем, как правило, обозначать  $g_1, g_2$  и т. д.), в котором определена операция, однозначно сопоставляющая каждой паре элементов группы  $g_1$  и  $g_2$  некоторый элемент  $g$  того же множества. Групповая операция обычно называется умножением и записывается в виде

$$g = g_1 g_2.$$

При этом  $g$  называют произведением элементов группы  $g_1$  и  $g_2$ . Для конкретных групп, элементами которых могут являться числа, отображения, матрицы, операторы и т. п. групповыми операциями могут быть соответственно сложение или умножение чисел, умножение матриц и операторов, композиция отображений и т. д. Групповая операция должна обладать следующими свойствами:

1. Для любых трех элементов  $g_1, g_2, g_3$  группы имеет место ассоциативность, т. е. \*\*).

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad (g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3).$$

2. В группе  $G$  существует единственный элемент  $e$ , называемый единичным или просто единицей группы  $G$ , обладающий тем свойством, что для любого элемента  $g$  группы  $G$

$$ge = eg = g.$$

3. Для любого элемента  $g$  группы  $G$  существует один и только один элемент этой группы, называемый обратным к  $g$  и обозначаемый  $g^{-1}$ , такой, что

$$g^{-1}g = gg^{-1} = e.$$

Заметим, что перечисленные свойства групповой операции (которую мы в дальнейшем всюду будем называть умножением) не предполагают ее комму-

\*) Написано Н. А. Свешниковым, которому авторы выражают свою признательность.

\*\*) В данном дополнении мы будем использовать ряд принятых в математической литературе сокращений — кванторов:  $\forall \equiv$  «для любых»,  $\in \equiv$  «принадлежит»,  $\exists \equiv$  «существует».

тативности, т. е., вообще говоря,  $g_1g_2 \neq g_2g_1$  для произвольных элементов группы  $G$ .

Если для данной группы  $G$  произведение коммутативно, т. е.

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1g_2 = g_2g_1,$$

то группа  $G$  называется *абелевой* или коммутативной. Простейшим примером абелевой группы является множество действительных чисел, обозначаемое символом  $\mathbb{R}$ , где в качестве группового умножения выбрано обычное сложение чисел. Очевидно, что при этом единицей группы является число «0», а элементом, обратным к « $x$ », оказывается « $-x$ ».

*Подгруппой*  $K$  группы  $G$  называется любое подмножество  $G$ , замкнутое относительно групповых операций, т. е.

$$\forall g_1, g_2 \in K \quad g_1g_2 \in K, \quad \forall g \in K \quad g^{-1} \in K.$$

Так, в приведенном выше примере можно указать подгруппу  $\mathbb{Z}$  группы действительных чисел, состоящую из всех целых чисел. Любая группа  $G$  обладает двумя так называемыми тривиальными подгруппами, одна из которых совпадает с самой группой  $G$ , а другая состоит из одного элемента — единицы  $e$  группы.

В теории групп важную роль играют понятия простых и полупростых групп. Для их определения введем сначала понятие *инвариантной подгруппы*. Подгруппа  $K$  группы  $G$  называется инвариантной подгруппой или, что то же, *нормальным делителем* группы  $G$ , если для любого элемента  $g$  группы  $G$  множество, состоящее из элементов  $gkg^{-1}$ , где  $k$  пробегает всю подгруппу  $K$ , совпадает с  $K$ , т. е.

$$\forall g \in G \quad gKg^{-1} = K.$$

Группа  $G$  называется *простой*, если она не имеет инвариантных подгрупп. Группа  $G$  называется *полупростой*, если она не имеет абелевых инвариантных подгрупп. Отметим, что к этим классам относятся такие важные для теории элементарных частиц группы, как группа Лоренца и группы унитарной симметрии.

Исторически первыми группами, возникшими в теоретической физике, были группы симметрии кристаллов. Примером таких групп является группа вращений плоскости на углы, кратные  $60^\circ$ . Групповым умножением является в данном случае композиция вращений. В качестве другого примера конечной группы, т. е. группы с конечным числом элементов, можно привести совокупность преобразований полевых функций, образованную введенными в § 9 операциями  $S$ ,  $P$  и  $T$ , тождественным преобразованием  $I$  и всевозможными их комбинациями. Не составляет труда убедиться в том, что ввиду свойства

$$S^2 = P^2 = T^2 = I$$

и коммутативности преобразований  $S$ ,  $P$ ,  $T$  полное число элементов данной группы равно 8.

2. Группы Ли. В квантовой теории наибольший интерес представляют бесконечные группы, т. е. группы, содержащие бесконечно много элементов. Бесконечные группы можно разделить на два больших класса — дискретные и непрерывные группы. Структура бесконечных дискретных групп весьма

близка структуре конечных групп: они обладают тем свойством, что все их элементы «заметно» отличаются друг от друга. Примером такой группы может служить уже упоминавшаяся абелева группа целых чисел. В противоположность этому в непрерывной группе существует дополнительная структура (топология), позволяющая вводить понятия близости элементов группы, непрерывности предела и т. д. Существование такой структуры делает возможной непрерывную параметризацию элементов групп точками некоторого топологического пространства. При этом групповые операции должны быть непрерывными преобразованиями в пространстве параметров. Говорят, например, что элементы « $x_1$ » и « $x_2$ » группы  $R$  близки, если близки соответствующие им действительные числа  $x_1$  и  $x_2$ . Если для данной группы в качестве пространства параметров может быть локально выбрано конечномерное евклидово пространство, то эта группа называется *группой Ли*. Более точно, непрерывная группа  $G$  называется  $n$ -параметрической группой Ли (или группой Ли размерности  $n$ ), если некоторая окрестность любого ее элемента может быть взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображена в некоторую область  $n$ -мерного действительного евклидова пространства  $R^n$ . Практически все непрерывные группы, возникающие в исследованиях по физике частиц, являются группами Ли. Этим определяется первостепенное значение теории групп Ли для квантовой теории.

Простейшим физически интересным примером группы Ли может служить абелева группа вращений плоскости на произвольные углы  $\varphi \leq 2\pi$  — группа  $U(1)$ . Элементы группы  $U(1)$  могут быть непрерывно и однозначно параметризованы с помощью точек отрезка  $[0, 2\pi]$  действительной прямой с отождествленными концами по правилу:

$$\text{«вращение на угол } \varphi \text{»} \leftrightarrow \text{число } \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (1)$$

Таким образом, в соответствии с приведенным выше определением группа  $U(1)$  является группой Ли размерности 1. Другая параметризация элементов группы  $U(1)$  возникает при сопоставлении вращению на угол  $\varphi$  точки единичной окружности на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ :

$$\text{«вращение на угол } \varphi \text{»} \leftrightarrow \text{число } z = e^{i\varphi} \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

В физике частиц группа  $U(1)$  возникает как абелева группа калибровочных преобразований, связанных с сохранением аддитивных зарядов.

Важным классом групп Ли являются группы невырожденных линейных преобразований конечномерных векторных пространств, с которыми можно однозначно связать группы квадратных матриц. Элементами таких групп являются матрицы с ненулевыми определителями, а в качестве групповой операции используется умножение матриц. В названии групп матриц принято отражать свойства ее элементов. Так, при отсутствии ограничений на вид невырожденных матриц — элементов группы — в названии группы ставится буква  $L$  (от английского linear — линейный), унитарность элементов группы отмечается буквой  $U$  (unitary), их ортогональность (для действительных матриц) — буквой  $O$ . Если матрицы — элементы группы — имеют единичный определитель, то этот факт отмечается буквой  $S$  (special) в названии группы. В скобках после назва-

ния, как правило, указывается размерность (число строк) матриц, составляющих группу. Например, группа  $SU(N)$  состоит из всех унитарных матриц размерности  $N \times N$ , определители которых равны 1. По существующей традиции названия ряда групп матриц таких, как  $SU(N)$ ,  $SO(N)$ ,  $SL(N)$  и т. д. переносятся на соответствующие им абстрактные группы, т. е. группы Ли, обладающие теми же групповыми и топологическими свойствами. Так, группа  $SL(2, \mathbb{C})$  есть группа Ли, между множеством элементов которой всеми и двухрядными комплексными матрицами с единичным определителем может быть установлено взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие таким образом, что произведению элементов группы соответствует произведение матриц, взятию обратного элемента — обращение матрицы.

Большую роль в теоретической физике играет группа спина  $SU(2)$ , которая являет собой простейший пример неабелевой группы Ли. Действительно, легко проверить, что для двухрядных унитарных матриц  $A$  и  $B$  соотношение  $AB = BA$ , вообще говоря, несправедливо. Комплексная матрица  $2 \times 2$  параметризуется, очевидно, восьмью действительными числами. Условие унитарности накладывает на эти числа 4 независимых условия, единичность определителя — еще одно. Таким образом, произвольный элемент группы  $SU(2)$  параметризуется тремя действительными числами, т. е. размерность  $SU(N)$  равна 3.

Аналогичным образом можно показать, что размерность  $SU(3)$  равна 8, размерность  $SU(N)$  равна  $N^2 - 1$ . Произвольный элемент  $g$  группы  $SU(2)$  может быть записан в виде

$$g = \exp \left( i \sum_{k=1}^3 \tau_k \alpha_k \right) \equiv \cos \alpha + \frac{i}{\alpha} \sin \alpha \sum_{k=1}^3 \tau_k \alpha_k, \quad (3)$$

где  $\tau_k$  — матрицы Паули,  $\alpha_k$  — действительные числа такие, что  $\alpha \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2} \leq \pi$ . Заметим, что, как и в случае группы  $U(1)$  (см. формулы (1), (2)), область изменения параметров в формуле (3) замкнута и ограничена в соответствующем евклидовом пространстве. Как оказывается, этот факт есть не следствие выбранной параметризации, а отражение общего для групп  $U(1)$  и  $SU(2)$  свойства, называемого компактностью. Вообще группа Ли  $G$  называется *компактной*, если множество ее элементов является компактным многообразием, т. е. если из любой бесконечной последовательности ее элементов может быть выделена сходящаяся подпоследовательность. Следствием компактности является возможность непрерывной параметризации группы Ли точками некоторой замкнутой и ограниченной (т. е. компактной) области соответствующего евклидова пространства. Важными примерами компактных групп Ли являются группы  $SU(N)$  и  $SO(N)$  при любых  $N$ . Теория компактных полупростых групп Ли есть наиболее разработанный раздел общей теории групп Ли.

В качестве примеров некомпактных групп Ли можно привести группу  $T$  сдвигов пространства-времени и группу Лоренца  $L$ .

Элемент  $a_T$  группы  $T$  определяется как параллельный перенос точек пространства-времени  $M$  на вектор  $a \in M$ :

$$(a_T x)_\mu = x_\mu + a_\mu.$$

Очевидно, что произведение элементов  $a_T$  и  $b_T$  группы  $T$  дается формулой

$$a_T b_T = (a + b)_T,$$

где элементу  $(a + b)_T$  группы  $T$  соответствует вектор  $a + b$  пространства  $M$ . Элемент, обратный к  $a_T$  есть  $(-a)_T$ . Ясно, что группа  $T$  является абелевой. Понятие близости (а следовательно, и понятие сходимости) элементов группы  $T$  совпадает с понятием близости соответствующих им векторов пространства-времени. Таким образом, некомпактность группы  $T$  есть прямое следствие неограниченности  $M$ .

Произвольный элемент  $\Lambda$  группы Лоренца может быть представлен в виде суперпозиции пространственного вращения  $R$  и чисто лоренцева преобразования (называемого часто *бустом*)  $B$ , переводящего систему из состояния покоя в состояние равномерного прямолинейного движения со скоростью  $v$

$$\Lambda = B(v) R.$$

Пространственные вращения образуют компактную подгруппу группы Лоренца — группу  $SO(3)$ . Некомпактность группы связана с тем очевидным фактом, что величина гиперболического угла  $\chi = \operatorname{arctgh}(v/c)$  непрерывно параметризующего буст  $B(v)$ , может меняться в бесконечных пределах:

$$-\infty < \chi < +\infty.$$

Группа Пуанкаре  $P$  — «главная» группа всей релятивистской физики — является объединением групп  $T$  и  $L$  в том смысле, что любой ее элемент  $p$  может быть представлен в виде

$$p = a_T \Lambda, \quad (4)$$

причем произведение элементов  $p_1, p_2 \in P$  дается формулой

$$p_1 p_2 = (a_{1T} \Lambda_1) (a_{2T} \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2)_T (\Lambda_1 \Lambda_2).$$

Смысл формулы (4) состоит в утверждении, что любое линейное преобразование пространства-времени, сохраняющее интервалы между событиями, может быть представлено как результат последовательного выполнения преобразования Лоренца  $\Lambda$  системы отсчета и сдвига начала координат на вектор  $a$ . Ясно, что тот же результат можно получить, производя сначала сдвиг на вектор  $\Lambda a^{-1}$ , а затем лоренцев поворот на  $\Lambda$ . Поэтому преобразование  $p$  может быть записано также в виде

$$p \equiv a_T \Lambda = \Lambda (\Lambda^{-1} a)_T.$$

Легко проверить, что группа сдвигов  $T$  является абелевым нормальным делителем  $P$ . В силу этого группа Пуанкаре не является ни полупростой, ни тем более простой.

**3. Представления групп Ли.** В физических исследованиях нас обычно интересуют конкретные реализации данной абстрактной группы. Если ограничиться рассмотрением реализаций групп линейными операторами, то мы приходим к понятию *линейного представления* группы. Более точно, линейным представлением группы  $G$  называется непрерывное отображение этой группы в группу линейных операторов в некотором векторном пространстве  $\mathcal{L}$ , коммутирующее с групповым умножением. Таким образом, если  $g \in G$  — произвольный элемент

группы,  $A(g)$  — соответствующий линейный оператор в  $\mathcal{L}$ , то

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad A(g_1 g_2) = A(g_1) A(g_2)$$

и

$$\forall g \in G \quad A(g^{-1}) = A^{-1}(g).$$

Эти формулы показывают, что групповое умножение и обращение элемента группы заменяются для операторов представления умножением операторов в пространстве  $\mathcal{L}$  и взятием обратного оператора соответственно. Размерность пространства  $\mathcal{L}$  называется размерностью представления.

Для представления размерности  $N$  можно заменить операторы соответствующими им матрицами (в некотором базисе пространства  $\mathcal{L}$ ) и изучать представление исходной группы как группы матриц  $N \times N$ . Для любой группы возможно тривиальное одномерное представление, сопоставляющее каждому элементу число «1».

Представление  $A$  группы  $G$  называется *точным*, если различным элементам группы  $g_1$  и  $g_2$  соответствуют различные операторы  $A(g_1)$  и  $A(g_2)$ , т. е. если между множеством элементов группы и множеством операторов, образующих ее представление, установлено взаимно однозначное соответствие. Точное представление полностью воспроизводит структуру группы Ли.

Линейное представление  $A$  группы  $G$  в пространстве  $\mathcal{L}$  называется *приводимым*, если в  $\mathcal{L}$  существует собственное (т. е. отличающееся от  $\{0\}$  и  $\mathcal{L}$ ) подпространство  $\mathcal{L}_1$ , которое переводится в себя всеми операторами представления

$$A(g) \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_1 \quad \forall g \in G.$$

В противном случае представление  $A$  называется *неприводимым*. В физике частиц наибольший интерес представляет изучение унитарных линейных представлений, т. е. представлений, элементы которых являются унитарными операторами и сохраняют тем самым нормировку векторов состояния. Можно показать, что любое приводимое унитарное представление  $U$  группы  $G$  распадается на сумму неприводимых представлений, т. е. все матрицы  $U(g)$  имеют в подходящем базисе блочнодиагональный вид

$$U(g) = \begin{pmatrix} \square & & & 0 \\ & \square & & \\ & & \square & \\ 0 & & & \square \end{pmatrix}$$

Таким образом, изучение произвольного унитарного представления сводится к изучению неприводимых представлений.

Приведем ряд примеров. Для любой абелевой группы все неприводимые представления одномерны. В частности, для группы  $\mathbb{R}$  неприводимые унитарные представления имеют вид

$$A(x) = e^{i\rho x} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

где  $\rho$  — действительное число, фиксирующее выбор представления. Выше мы упоминали о том, что групповые и топологические свойства ряда групп ( $SL(N)$ ,  $SU(N)$ ,  $SO(N)$  и т. д.) идентичны свойствам соответствующих групп матриц.



Ясно, что в этом случае группа матриц, название которой совпадает с названием данной группы, реализует ее точное неприводимое представление. Для  $SU(2)$ ,  $SU(3)$  и некоторых других часто используемых в квантовой теории групп это представление принято называть *фундаментальным*.

Большую роль в теории групп Ли играет понятие *присоединенного* представления группы. Оказывается, что любая  $n$ -параметрическая группа Ли имеет представление размерности  $n$ , вид которого полностью определяется локальной структурой данной группы. Способ построения этого представления будет нами указан после введения понятия алгебры Ли (см. раздел 4 данного Дополнения). Здесь отметим, что для компактных простых групп, каковыми, в частности, являются группы  $SU(N)$  и  $SO(N)$  при любом значении  $N$ , присоединенное представление неприводимо. Таким образом, для группы  $SU(2)$ , например, присоединенное представление имеет размерность 3. В заключение этого раздела заметим, что в теории поля группу  $SU(2)$  часто ассоциируют с группой спина (или изоспина), а группу  $SU(3)$  — с группой унитарной симметрии. В таком случае векторы пространства  $\mathcal{L}$ , в котором реализовано неприводимое представление группы  $SU(2)$ , можно отождествить со спиновыми (изоспиновыми) мультиплетами, группы  $SU(3)$  — с унитарными мультиплетами. Существуют спиновые мультиплеты любой размерности. В то же время унитарные мультиплеты могут иметь лишь выделенные размерности 1, 3, 8, 10, ..., т. е. не при любой размерности пространства  $\mathcal{L}$  в нем может быть построено неприводимое представление  $SU(3)$ .

**4. Генераторы и алгебра Ли.** Из самого определения группы Ли следует, что эта группа локально (т. е. в бесконечно малой окрестности любого элемента) обладает структурой евклидова пространства. Это дает возможность ввести на группе такие понятия, как разность бесконечно близких элементов, производная и т. д. Замечательным результатом теории групп Ли является утверждение о том, что элемент группы Ли является не только непрерывной, но и дифференцируемой и даже аналитической функцией параметров. Рассмотрим малую окрестность единицы группы. Без ограничения общности можно считать, что единице соответствуют нулевые значения параметров. Тогда произвольный элемент  $g$  из рассматриваемой окрестности может быть с точностью до членов второго порядка малости записан в виде

$$g(a_1, a_2, \dots, a_n) = e + i \sum_{k=1}^n X_k a_k, \quad (5)$$

где величины

$$X_k = \frac{1}{i} \frac{\partial g(\dots a \dots)}{\partial a_k} \Big|_{a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0} \quad (6)$$

называются инфинитезимальными генераторами группы Ли или просто *генераторами*. Введение мнимой единицы в формулу (6) дает то преимущество, что в физически интересных случаях так определенные генераторы группы оказываются эрмитовыми операторами физически важных величин типа импульса, энергии, спина, заряда и т. д.

Можно показать, что законы группового умножения требуют выполнения следующих соотношений для генераторов

$$[X_i, X_j] = i \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k, \quad (7)$$

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0, \quad (8)$$

последнее из которых представляет собой тождество Якоби. Здесь  $[X, Y] = XY - YX$  — коммутатор двух генераторов,  $C_{ij}^k$  — числа, называемые *структурными константами* группы Ли. Указанные выше свойства генераторов обычно формулируют в виде утверждения о том, что генераторы группы Ли образуют базис алгебры Ли. Множество  $A$  называется *алгеброй Ли*, если оно является действительным или комплексным линейным пространством, т. е.  $\forall X, Y \in A$  и  $\forall$  чисел  $\alpha, \beta$

$$\alpha X + \beta Y \in A,$$

и замкнуто относительно операции коммутирования элементов, т. е.  $\forall, XY \in A$

$$[X, Y] \in A.$$

Отметим, что последнее свойство отличает алгебру Ли от обычной алгебры, замкнутой относительно операции умножения элементов, обладающей свойством ассоциативности. Можно показать, что набор структурных констант, т. е. чисел со свойствами

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k,$$

$$\sum_{l=1}^n (C_{ik}^l C_{lj}^m + C_{ji}^l C_{lk}^m + C_{kj}^l C_{li}^m) = 0, \quad (9)$$

первое из которых следует из (7), а второе может быть выведено из тождества Якоби, полностью определяет структуру алгебры Ли, т. е. в силу (5) локальную структуру группы Ли. Наиболее простой вид алгебра Ли имеет для абелевой группы. В этом случае все структурные константы равны нулю. В частности, генераторы группы  $T$  образуют 4-вектор импульса  $P_\mu$ , причем

$$[P_\mu, P_\nu] = 0.$$

Алгебра Ли группы  $SU(2)$  задается коммутационными соотношениями между тремя ее генераторами  $I_k$  (это могут быть операторы компонент орбитального момента, спина, изоспина и т. д.)

$$[I_i, I_j] = i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} I_k,$$

где  $\varepsilon$  — полностью антисимметричный тензор. Такие же коммутационные соотношения выполняются для генераторов группы  $SO(3)$ , т. е. группы  $SU(2)$  и  $SO(3)$  локально совпадают.

Как и для группы Ли, для алгебр Ли можно ввести понятие линейного представления, т. е. отображения алгебры Ли в алгебру операторов некоторого векторного пространства. Представление алгебры Ли связано с соответствующим представлением группы Ли формулами (5), (6), в которых нужно только заменить элементы абстрактной группы и алгебры их конкретными реализациями

в виде операторов соответствующего пространства. Заметим, что если представление группы унитарно, то в силу (6) элементы алгебры Ли являются эрмитовыми операторами. В частности, для группы  $SU(2)$  генераторами фундаментального представления являются матрицы  $2 \times 2$

$$(I_k)_{\text{Фунд}} = \frac{1}{2} \tau_k,$$

генераторами присоединенного представления — матрицы  $3 \times 3$

$$(I_k)_{ij}^{\text{прис}} = i\epsilon_{ijk}.$$

Вообще *присоединенным представлением алгебры Ли* размерности  $n$  называется представление матрицами  $n \times n$ , генераторы которого составлены из структурных констант

$$(X_k^{\text{прис}})_m^l = iC_{mk}^l.$$

Легко убедиться, используя свойство (9) структурных констант, что так определенные генераторы удовлетворяют (7) и, следовательно, задают представления алгебры Ли. Соответствующее этому представлению по формуле (5) представление групп называется *присоединенным представлением группы Ли*. Заметим, что относительная простота теории компактных полупростых групп Ли связана с тем, что любой элемент такой группы (а не только бесконечно близкий к единичному) может быть представлен в так называемой нормальной форме

$$g(a_1, \dots, a_n) = \exp \left( i \sum_{k=1}^n X_k a_k \right).$$

В заключение выпишем коммутационные соотношения, определяющие алгебру Ли группы Пуанкаре  $P$ . Общее число генераторов группы равно 10, четыре из них — операторы: компонент импульса  $P_\mu$  — связаны с подгруппой  $T$ , остальные — компоненты момента  $M_{\mu\nu}$  — с группой Лоренца. Можно показать, что

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [P_\mu, M_{\nu\lambda}] &= i(g_{\mu\lambda}P_\nu - g_{\mu\nu}P_\lambda), \\ [M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] &= i(g_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}M_{\nu\lambda}). \end{aligned} \quad (10)$$

#### Дополнение IV. ОПЕРАТОРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. **Линейные непрерывные преобразования.** Пусть задано некоторое непрерывное линейное преобразование операторов  $a_i$ , зависящее от параметра  $\varphi$

$$a_i - a_i' = L_{ij}(\varphi) a_j, \quad a' = U^{-1}(\varphi) a U(\varphi)$$

и обладающее групповым свойством

$$L(\varphi_1) L(\varphi_2) = L(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Тогда явный вид унитарного оператора  $U$ , который в силу упомянутого свойства с необходимостью имеет экспоненциальный вид

$$U(\varphi) = \exp(i\varphi V), \quad \dot{V} = V,$$

может быть найден следующим общим приемом.

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование ( $\varphi \rightarrow \varepsilon \ll 1$ )

$$a' \simeq a + \varepsilon A, \quad U \simeq 1 + i\varepsilon V.$$

Приравнявая

$$a + \varepsilon A \simeq (1 - i\varepsilon V) a (1 + i\varepsilon V),$$

получаем

$$A = i[a, V] \quad (1)$$

— основное уравнение для определения явного вида оператора  $V$ . Приведем ряд важных примеров:

а) Преобразование сдвига на  $c$ -число:

$$a' = a + \varphi, \quad a'^* = a^* + \varphi^*$$

или

$$a' = a + \varphi + i\psi, \quad a'^* = a^* + \varphi - i\psi,$$

$$U = \exp(i\varphi u + i\psi v).$$

Основное уравнение дает

$$1 = i(au - ua), \quad 1 = i[a^*, u],$$

$$1 = [a, v], \quad -1 = [a^*, v].$$

Видно, что  $u$  и  $v$  должны быть линейны по бозе-операторам  $a, a^*$ :

$$[a, a^*] = aa^* - a^*a = 1, \quad [a, a] = [a^*, a^*] = 0,$$

Получаем

$$u = i(a - a^*), \quad v = (a + a^*),$$

вследствие чего

$$U = \exp(a^*\varphi - a\varphi). \quad (2)$$

Отметим, что соответствующего решения для операторов Ферми не существует.

Операция сдвига в этом случае требует замены  $c$ -числовых объектов  $\varphi, \varphi^*$  на образующие алгебры Грассмана.

б) Преобразование «поворота»  $\{a = (a_1, a_2)\}$ :

$$a'_1 = a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi, \quad \text{то же для } a'^*_1;$$

$$a'_2 = a_2 \cos \varphi + a_1 \sin \varphi, \quad \text{то же для } a'^*_2.$$

К таким преобразованиям сводятся, например, преобразования вращения в изотопическом пространстве.

Основные уравнения дают

$$a_1 = i[a_2, V], \quad -a_2 = i[a_1, V], \quad (3)$$

а также эрмитово сопряженные соотношения

$$a^*_1 = i[a^*_2, V], \quad -a^*_2 = i[a^*_1, V]. \quad (3')$$

В отличие от предыдущего, оператор  $V$  должен быть билинейным по  $a_k$  и  $a^*_k$ :

$$V = ca_1a_1 + da_2a_2 + e(a^*_1a_2 + a^*_2a_1) + if(a_1a_2 - a_2a_1).$$

Подставляя это наиболее общее эрмитово выражение в (3) и (3'), находим  $c = d = e = 0, f = 1$ , т. е.

$$U = \exp(a^*_2a_1 - a_1a_2). \quad (4)$$

Полученное выражение справедливо как для бозе-, так и для ферми-операторов.

в) Преобразование Боголюбова для бозе-операторов:

$$\begin{aligned} b_1 &\rightarrow \beta_1 = b_1 \operatorname{ch} \varphi + b_2^* \operatorname{sh} \varphi, & \beta_1^* &= b_1^* \operatorname{ch} \varphi + b_2 \operatorname{sh} \varphi, \\ b_2 &\rightarrow \beta_2 = b_1^* \operatorname{sh} \varphi + b_2 \operatorname{ch} \varphi, & \beta_2^* &= b_1 \operatorname{sh} \varphi + b_2^* \operatorname{ch} \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Основное уравнение дает

$$b_2^* = i [b_1, V], \quad b_1^* = i [b_2, V]$$

и соответствующие эрмитово сопряженные уравнения. Решение имеет вид

$$V = i (b_1 b_2 - b_2^* b_1^*) = i (\beta_1 \beta_2 - \beta_2^* \beta_1^*),$$

т. е.

$$U(\varphi) = \exp [\varphi (b_2^* b_1^* - b_1 b_2)]. \quad (6)$$

г) Преобразование Боголюбова для ферми-операторов:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 \cos \varphi + a_2^* \sin \varphi, & \alpha_1^* &= a_1^* \cos \varphi + a_2 \sin \varphi, \\ \alpha_2 &= -a_1^* \sin \varphi + a_2 \cos \varphi, & \alpha_2^* &= -a_1 \sin \varphi + a_2^* \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Основное уравнение дает

$$a_1^* = -i [a_2, V], \quad a_2^* = i [a_1, V]$$

и эрмитово сопряженные соотношения. Решение имеет вид

$$\begin{aligned} V &= i (a_1 a_2 - a_2^* a_1^*) = i (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2^* \alpha_1^*), \\ U(\varphi) &= \exp [\varphi (a_2^* a_1^* - a_1 a_2)]. \end{aligned} \quad (8)$$

д) Лоренцевы «повороты» матриц Дирака:

Построим оператор  $U(\varphi)$  преобразования матриц Дирака

$$\gamma_\mu \rightarrow \tilde{\gamma}_\mu = L_{\mu\nu}(\varphi) \gamma_\nu,$$

где  $L$  — матрица лоренцевых 4-поворотов координатного вектора  $x' = L(\varphi)x$ . Для пространственного (евклидова) поворота в плоскости  $x_1, x_2$

$$\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi, \quad \tilde{\gamma}_2 = \gamma_1 \sin \varphi + \gamma_2 \cos \varphi, \quad \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0, \quad \tilde{\gamma}_3 = \gamma_3;$$

для лоренцева поворота в плоскости  $x_0, x_1$

$$\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 \operatorname{ch} \varphi + \gamma_1 \operatorname{sh} \varphi, \quad \tilde{\gamma}_1 = \gamma_0 \operatorname{sh} \varphi + \gamma_1 \operatorname{ch} \varphi, \quad \tilde{\gamma}_2 = \gamma_2, \quad \tilde{\gamma}_3 = \gamma_3.$$

Основное уравнение дает

$$\begin{aligned} -\gamma_2 &= i [\gamma_1, V_{12}], & \gamma_1 &= i [\gamma_2, V_{12}], & [\gamma_0, V_{12}] &= [\gamma_3, V_{12}] = 0; \\ \gamma_1 &= i [\gamma_0, V_{01}], & \gamma_0 &= i [\gamma_1, V_{01}], & [\gamma_2, V_{01}] &= [\gamma_3, V_{01}] = 0. \end{aligned}$$

Решения имеют вид

$$V_{12} = -(i/2) \gamma_1 \gamma_2, \quad V_{01} = -(i/2) \gamma_0 \gamma_1.$$

Полученные результаты могут быть объединены в одну формулу

$$U_{\mu\nu} = \exp \left( \frac{\varphi}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu \right). \quad (9)$$

## 2. «Распутывание» экспонент \*) Пусть

$$U = \exp(A + B),$$

где  $A$  и  $B$  не коммутируют между собой. Требуется факторизовать зависимости от операторов  $A$  и  $B$ . В частном случае, когда  $A$  содержит только операторы рождения, а  $B$  — лишь операторы уничтожения, подобная задача возникает при приведении оператора  $U$  к нормальной форме.

В общем случае оператор  $U$  можно представить в виде

$$U = e^A Q e^B,$$

причем множитель  $Q$ , вообще говоря, содержит зависимость от операторов  $A$  и  $B$ , а также от их повторных коммутаторов.

Для определения явного вида  $Q$  воспользуемся методом бесконечно малых приращений. Введем для этого вспомогательный параметр  $\tau$ :

$$U \rightarrow U(\tau) = e^{\tau(A+B)} = e^{\tau A} Q(\tau, A, B, [A, B], \dots) e^{\tau B},$$

и, продифференцировав по  $\tau$ , запишем для  $Q$  дифференциальное операторное уравнение:

$$Q'(\tau) = e^{-\tau A} B e^{\tau A} Q(\tau) - Q(\tau) B, \quad Q(\tau=0) = 1.$$

Наиболее прост случай, когда коммутатор операторов  $A$  и  $B$

$$[A, B] = C$$

является  $c$ -числом (см. формулу (2)). Тогда

$$e^{-\tau A} B e^{\tau A} = B - \tau C, \quad Q(\tau) = \exp(-\tau^2 C/2),$$

и мы приходим к так называемой формуле Бэйкера — Хаусдорфа

$$(C = [A, B] \sim c\text{-число!}) \quad e^{A+B} = e^A e^{-C/2} e^B. \quad (10)$$

Для распутывания формул (6), (8), возникающих в результате канонического преобразования Боголюбова, оказывается важным случай, когда коммутатор  $C$  является оператором, однако операторы  $A, B, C$  образуют замкнутую коммутативную алгебру специального вида

$$[A, B] = C, \quad [A, C] = -2\xi A, \quad [B, C] = 2\xi B. \quad (11)$$

Этот случай также может быть исследован дифференциальным методом. Предоставляем читателю самостоятельно убедиться, что искомый результат имеет вид

$$e^{\tau(A+B)} = e^{\alpha(\tau) A} e^{\gamma(\tau) C} e^{\alpha(\tau) B}, \quad (12)$$

причем

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \operatorname{th}(\tau \sqrt{\xi}), \quad \gamma(\tau, \xi) = \frac{1}{\xi} \ln \operatorname{ch}(\tau \sqrt{\xi}). \quad (13)$$

В случае бозе-операторов

$$A = b_1^\dagger b_2, \quad B = -b_1 b_2, \quad C = 1 - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2, \quad \xi = 1,$$

\*) Изложение этого раздела следует Приложению Б из книги Киржница (1963), в котором содержится также ряд других полезных формул.

тогда как для ферми-операторов

$$A = a_1^+ a_2^+, \quad B = -a_1 a_2, \quad C = 1 - a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2, \quad \xi = 1.$$

3. Коммутаторы с оператором плотности числа частиц  $n(k)$ . Получим еще ряд полезных формул для коммутаторов с оператором плотности числа частиц:

$$n(k) = a^*(k) a(k) = a^+(k) a^-(k).$$

Введем линейную суперпозицию операторов  $a^+$  и  $a^-$ :

$$A = A_+ + A_-, \quad A_{\pm} = \int \lambda_{\pm}(q) a^{\pm}(q) dq. \quad (14)$$

Тогда

$$[n(k), A_{\pm}] = \pm \lambda_{\pm}(k) a^{\pm}(k)$$

и

$$[n(k), A] = K(k) = \lambda_+(k) a^+(k) - \lambda_-(k) a^-(k),$$

причем коммутатор операторов  $A$  и  $K$  является  $c$ -числом:

$$[A, K(k)] = -2\lambda^2(k), \quad \lambda^2(k) \equiv \lambda_+(k) \lambda_-(k).$$

Поэтому

$$[n(k), A^{\nu}] = \nu K(k) A^{\nu-1} - \nu(\nu-1) \lambda^2 \Lambda^{\nu-2}$$

и, следовательно,

$$[n(k), e^{\pm A}] = \{\pm K(k) + \lambda^2(k)\} e^{\pm A}. \quad (15)$$

### Дополнение V. СВОДКА СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Вспомогательные сингулярные функции. Четырехмерная  $\delta$ -функция Дирака:

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} dk, \quad (1)$$

$$\delta(x) = \delta(x^0) \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3). \quad (2)$$

Разрывные функции  $\theta(\alpha)$  и  $\varepsilon(\alpha)$ :

$$\theta(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha\tau}}{\tau - i\varepsilon} d\tau = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases} \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad (3)$$

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\tau} \frac{d\tau}{\tau} = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases} \quad (4)$$

( $\mathcal{P}$  — символ главного значения),

Частотные части  $\delta$ -функции:

$$\delta_{\pm}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\pm i\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{2} \left[ \delta(\alpha) \pm \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} \right]. \quad (5)$$

Некоторые полезные соотношения:

$$\frac{1}{\alpha + i\varepsilon} = \frac{2\pi}{i} \delta_+(\alpha) = \frac{\pi}{i} \delta(\alpha) + \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad (6)$$

$$\frac{1}{\alpha - i\varepsilon} = 2\pi i \delta_-(\alpha) = \pi i \delta(\alpha) + \mathcal{P} \frac{1}{\alpha}, \quad (7)$$

$$\mathcal{P} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{i\alpha\tau} d\tau. \quad (8)$$

2. Функции скалярного поля. Перестановочная функция Паули — Йордана  $D$ :

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \frac{1}{i} D(x-y); \quad (8.4)$$

$$D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikx} \sin(x^0 \sqrt{k^2 + m^2}); \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial D(x^0, \mathbf{x})}{\partial x^0} \right|_{x^0=0} = \delta(\mathbf{x}); \quad (10)$$

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m}{4\pi \sqrt{\lambda}} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda) J_1(m\sqrt{\lambda}), \quad (18.16)$$

$$\lambda = x^2 = x_0^2 - x^2.$$

В окрестности светового конуса  $D$  имеет вид

$$D(x) \sim \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m^2}{8\pi} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda). \quad (18.20)$$

Частотные части функции Паули — Йордана  $D^+$  и  $D^-$ :

$$[\varphi^-(x), \varphi^+(y)] = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_0 = \frac{1}{i} D^-(x-y); \quad (11)$$

$$[\varphi^+(x), \varphi^-(y)] = \frac{1}{i} D^+(x-y) = iD^-(y-x); \quad (12)$$

$$D^\pm(x) = \frac{\pm 1}{(2\pi)^3 i} \int e^{ikx} \theta(\pm k^0) \delta(k^2 - m^2) dk =$$

$$= \frac{\mp i}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{2\sqrt{k^2 + m^2}} e^{\pm ix^0 \sqrt{k^2 + m^2} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m\theta(\lambda)}{8\pi \sqrt{\lambda}} [\varepsilon(x^0) J_1(m\sqrt{\lambda}) \mp iN_1(m\sqrt{\lambda})] \mp$$

$$\mp \frac{mi\theta(-\lambda)}{4\pi^2 |\lambda|^{1/2}} K_1(m\sqrt{-\lambda}). \quad (18.17)$$

В окрестности светового конуса  $D^+$  и  $D^-$  имеют вид

$$D^\pm(x) = \frac{\varepsilon(x^0) \delta(\lambda)}{4\pi} \pm \frac{i}{4\pi^2 \lambda} \mp \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} - \frac{m^2}{16\pi^2} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda), \quad (14)$$



Свойства четности и вещественности:

$$D^{\pm}(-x) = -D^{\mp}(x) = -(D^{\pm}(x))^*, \quad D(x) = -D(-x) = \overset{*}{D}(x). \quad (15)$$

Причинная функция Грина  $D^c$ :

$$\langle T\varphi(x)\varphi(y) \rangle_0 = \frac{1}{i} D^c(x-y); \quad (18.12)$$

$$(\square - m^2) D^c(x) = -\delta(x),$$

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} D^c(k) dk, \quad D^c(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}; \quad (18.9)$$

$$D^c(x) = \frac{mi}{4\pi^2} \frac{K_1(m\sqrt{-\lambda+i\varepsilon})}{\sqrt{-\lambda+i\varepsilon}}. \quad (18.18)$$

Поведение  $D^c$  в окрестности светового конуса:

$$D^c(x) \approx \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) - \frac{i}{4\pi^2\lambda} + \frac{im^2}{8\pi^2} \ln|\lambda|^{1/2} - \frac{m^2}{16\pi} \theta(\lambda). \quad (18.21)$$

Причинная функция при массе, равной нулю:

$$D_0^c(x) = \frac{1}{4\pi} \left( \delta(\lambda) - \frac{i}{\pi\lambda} \right) = \frac{1}{4\pi^2 i (\lambda - i\varepsilon)}. \quad (16)$$

Запаздывающая и опережающая функции Грина  $D^{\text{ret}}$  и  $D^{\text{adv}}$ :

$$D^{\text{ret}}(x) = 0 \quad \text{при } x^0 < 0, \quad D^{\text{adv}}(x) = 0 \quad \text{при } x^0 > 0,$$

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\varepsilon k^0} dk = \theta(x^0) D(x); \quad (18.5), (18.6)$$

$$D^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 + i\varepsilon k^0} dk = -\theta(-x^0) D(x); \quad (18.7)$$

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0) \left\{ \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}) \right\}; \quad (18.19)$$

$$D^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(-x^0) \left\{ \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}) \right\}. \quad (17)$$

Связи между функциями  $D$ ,  $D^+$ ,  $D^-$ ,  $D^c$ ,  $D^{\text{ret}}$ ,  $D^{\text{adv}}$ :

$$D(x) = D^+(x) + D^-(x),$$

$$D^c(x) = \theta(x^0) D^-(x) - \theta(-x^0) D^+(x), \quad (18.8)$$

$$D^{\text{ret}}(x) = \theta(x^0) D(x) = D^c(x) + D^+(x), \quad (18)$$

$$D^{\text{adv}}(x) = -\theta(-x^0) D(x) = D^c(x) - D^-(x), \quad (19)$$

$$D(x) = D^{\text{ret}}(x) - D^{\text{adv}}(x). \quad (20)$$

**3. Функции электромагнитного, векторного и спинорного полей. Электромагнитное поле.**

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = +ig_{\mu\nu} D_0(x-y), \quad (8.22)$$

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle_0 = ig_{\mu\nu} D_0^c(x-y), \quad (21)$$

$$\langle T A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle_0 = ig_{\mu\nu} D_0^c(x-y). \quad (22)$$

Функции  $D_0$ ,  $D_0^\pm$ ,  $D_0^c$  и т. д. получаются из функций скалярного поля  $D$ ,  $D^\pm$ ,  $D^c$  при  $m=0$ , например:

$$D_0^c(x) = D^c(x)|_{m=0} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} dk. \quad (23)$$

Векторное поле:

$$[U_\mu(x), U_\nu(y)] = iD_{\mu\nu}(x-y), \quad (24)$$

$$\langle U_\mu(x) U_\nu(y) \rangle_0 = iD_{\mu\nu}^-(x-y), \quad (25)$$

$$\langle TU_\mu(x) U_\nu(y) \rangle_0 = iD_{\mu\nu}^c(x-y). \quad (26)$$

Функции  $D_{\mu\nu}$ ,  $D_{\mu\nu}^\pm$ ,  $D_{\mu\nu}^c$  и т. д. могут быть получены из соответствующих функций скалярного поля действием дифференциального оператора  $g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu / m^2$ , например

$$D_{\mu\nu}^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} e^{-ikx} dk. \quad (27)$$

Спинорное поле:

$$[\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(y)]_+ = -iS_{\alpha\beta}(x-y), \quad (9.4)$$

$$\langle \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \rangle_0 = -iS_{\alpha\beta}^-(x-y), \quad (28)$$

$$\langle T\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \rangle_0 = -iS_{\alpha\beta}^c(x-y). \quad (29)$$

Функции  $S$ ,  $S^\pm$ ,  $S^c$  и т. д. могут быть получены из соответствующих функций скалярного поля действием оператора

$$(i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} = i\gamma_{\alpha\beta}^\nu \partial_\nu + mI_{\alpha\beta},$$

например:

$$S(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx\varepsilon} (k^0) (\hat{k} + m) \delta(k^2 - m^2) dk, \quad (30)$$

$$S(x)|_{x^0=0} = i\gamma^0 \delta(x), \quad (31)$$

$$S^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} e^{-ipx} dp. \quad (32)$$

## Дополнение VI. ФОРМУЛЫ ИМПУЛЬСНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Альфа-представление. Формула перехода в  $\alpha$ -представление:

$$\frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} = i \int_0^\infty e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} d\alpha \quad (22.2)$$

и ее обобщение:

$$\frac{1}{(D - i\varepsilon)^k} = \frac{ik}{\Gamma(k)} \int_0^\infty e^{i\alpha(-D + i\varepsilon)} \alpha^{k-1} d\alpha, \quad k > 0. \quad (22.8)$$

Основные гауссовы квадратуры ( $a$  — положительное число,  $b$  — 4-вектор):

$$\frac{i}{\pi^2} \int dke^i (ak^2 + 2bk) = \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \equiv I(a, b^2), \quad (22.3)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int dke^i (ak^2 + 2bk) [k^\nu] = \left[ -\frac{b^\nu}{a} \right] I(a, b^2), \quad (22.4a)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int dke^i (ak^2 + 2bk) [k^\nu k^\mu] = \left[ \frac{2b^\nu b^\mu + iag^{\mu\nu}}{2a^2} \right] I(a, b^2), \quad (22.4б)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int dke^i (ak^2 + 2bk) [k^2] = \left[ \frac{b^2 + 2ia}{a^2} \right] I(a, b^2), \quad (22.4в)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int dke^i (ak^2 + 2bk) [k^\nu k^2] = \left[ -\frac{b^\nu (b^2 + 3ia)}{a^3} \right] I(a, b^2). \quad (1)$$

Выделение бесконечного интегрирования:

$$\int_0^\infty d\alpha_1 \dots \int_0^\infty d\alpha_n = \int_0^1 \{dx\}_n \int_0^\infty da a^{n-1}, \quad (2)$$

где

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad x_\nu = \alpha_\nu/a,$$

$$\{dx\}_n = dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta(1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n). \quad (3)$$

Типичные интегралы по  $a$ :

$$\frac{1}{i} \int_0^\infty da e^{ia(A+i\epsilon)} = \frac{1}{A+i\epsilon}, \quad (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{da}{a} (e^{iaA} - e^{iaB}) e^{-\epsilon a} = \ln \frac{B+i\epsilon}{A+i\epsilon}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{da}{a^2} (e^{iaA} - e^{iaB}) (e^{iaC} - e^{iaD}) e^{-\epsilon a} = \\ = (A+D) \ln(A+D+i\epsilon) + (B+C) \ln(B+C+i\epsilon) - \\ - (A+C) \ln(A+C+i\epsilon) - (B+D) \ln(B+D+i\epsilon). \end{aligned} \quad (6)$$

В случае, когда  $B$  и  $D$  содержат большой параметр  $\Lambda^2$  ( $B = b\Lambda^2$ ,  $D = d\Lambda^2$ ), получаем из (6) в пределе  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ :

$$\rightarrow \Lambda^2 [b \ln b + d \ln d - (b+d) \ln(b+d)] + (A+C) \ln \Lambda^2 + \\ + (A+C) [1 - \ln(A+C)] + A \ln d + C \ln b. \quad (7)$$

2. Фейнмановская параметризация. Исходная формула:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 \frac{\{dx\}_n}{\left( \sum_{1 \leq \nu \leq n} a_\nu x_\nu \right)^n}, \quad (22.10)$$

причем символ  $\{dx\}_n$  определен в (3).

Импульсные квадратуры типа

$$J_L(D) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq}{(q^2 - D + i\epsilon)^L} = \frac{(-1)^{L+1} (L-3)!}{(D-i\epsilon)^{L-2} (L-1)!}, \quad L \geq 3, \quad (22.16)$$

для практических целей удобно обобщить (сдвинуть переменную интегрирования):

$$F_L(D, k) = J_L(k^2 - D) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{[p^2 - 2kp + D]^L} = - \frac{(L-3)!}{(D-k^2 + i\varepsilon)^{L-2} (L-1)!}, \quad (8)$$

$$F_L^\mu(D, k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^\mu dp}{[p^2 - 2kp + D]^L} = - \frac{k^\mu (L-3)!}{(D-k^2)^{L-2} (L-1)!} = k^\mu F_L(D, k), \quad (9)$$

$$F_L^{\mu\nu}(D, k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^\mu p^\nu dp}{[p^2 - 2kp + D]^L} = \frac{g^{\mu\nu} (D-k^2) + 2(L-3) k^\mu k^\nu}{2(L-3)} F_L(D, k), \quad (10)$$

$$F_L^{(2)}(D, k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^2 dp}{[p^2 - 2kp + D]^L} = \frac{2D - (L-1)k^2}{(L-3)} F_L(D, k) \quad (11)$$

и т. д.

### 3. Размерная регуляризация:

$$\int dp = \int d^4 p \rightarrow \int d^n p = \mu^{2\varepsilon} \int_{\Omega(n)} d\Omega \int_0^\infty p^{n-1} dp, \quad n = 4 - 2\varepsilon. \quad (23.10)$$

Модификация гауссовых квадратур:

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^n k e^{i(ak^2 + 2bk)} = \left( \frac{ia\mu^2}{\pi} \right)^\varepsilon \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} = I_\varepsilon(a, b^2), \quad (23.11)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^n k e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^\nu] = \left[ -\frac{b^\nu}{a} \right] I_\varepsilon(a, b^2), \quad (12)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^n k e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^\nu k^\mu] = \left[ \frac{2b^\nu b^\mu + ia g^{\nu\mu}}{2a^2} \right] I_\varepsilon(a, b^2) \quad (13)$$

(эти три формулы отличаются лишь заменой  $I(a, b^2) \rightarrow I_\varepsilon(a, b^2)$  от формул (22.3) и (22.4а, 22.4б));

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^n k e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^2] = \left[ \frac{b^2 + ia(2-\varepsilon)}{a^2} \right] I_\varepsilon(a, b^2), \quad (14)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^n k e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^2 k^\nu] = \left[ -\frac{b_\nu [b^2 + ia(3-\varepsilon)]}{a^3} \right] I_\varepsilon(a, b^2) \quad (15)$$

и т. д.

Заметим, что формула (14) может быть получена либо из (23.11) дифференцированием по параметру  $a$ , либо из (13) суммированием по лоренцевым индексам. В последнем случае необходимо учесть, что

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \text{Sp } g_{\mu\nu} = n = 4 - 2\varepsilon. \quad (16)$$

С учетом этого свойства при выполнении операций с матрицами Дирака следует пользоваться обычным соотношением

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3).$$

Модификация формул фейнмановского интегрирования:

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{[p^2 - 2pk + D + i\varepsilon]^L} = - \left( \frac{i^2 \mu^2}{\pi} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(L + \varepsilon - 2)}{(D - k^2)^{L + \varepsilon - 2} \Gamma(L)} \equiv F_L^\varepsilon(D, k), \quad (17)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^\nu d^n p}{[p^2 - 2pk + D]^L} = k^\nu F_L^\varepsilon(D, k), \quad (18)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^\nu p^\mu d^n p}{[p^2 - 2pk + D]^L} = \left\{ k^\nu k^\mu + \frac{g^{\nu\mu}(D - k^2)}{2(L + \varepsilon - 3)} \right\} F_L^\varepsilon(D, k), \quad (19)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^2 d^n p}{[p^2 - 2pk + D]^L} = \left\{ k^2 + (D - k^2) \frac{2 - \varepsilon}{L + \varepsilon - 3} \right\} F_L^\varepsilon(D, k^2), \quad (20)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p_\nu p^2 d^n p}{[p^2 - 2pk + D]^L} = k_\nu \left\{ k^2 + \frac{3 - \varepsilon}{L + \varepsilon - 3} (D - k^2) \right\} F_L^\varepsilon(D, k^2). \quad (21)$$

Из приведенных формул с учетом того, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\Gamma(\varepsilon) \rightarrow 1/\varepsilon - C$  (где константа Эйлера  $C = 0,5772 \dots$ ), в частности, вытекает:

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{p^2 - 2pk + D} = \frac{D - k^2}{\varepsilon} + \left\{ \ln \frac{\mu^2}{(k^2 - D)\pi} + 1 - C \right\} (D - k^2), \quad (22)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{[p^2 - 2pk + D]^2} = -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{(k^2 - D)\pi}{\mu^2} + C, \quad (23)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p_\nu d^n p}{[p^2 - 2pk + D]^2} = k_\nu \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{(k^2 - D)\pi}{\mu^2} + C \right\}, \quad (24)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p_\nu p_\mu d^n p}{[p^2 - 2pk + D]^2} = \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{(k^2 - D)\pi}{\mu^2} + C \right\} \left\{ k_\mu k_\nu + g_{\mu\nu} \frac{k^2 - D}{2} \right\}, \quad (25)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p_\nu p_\mu d^n p}{[p^2 - 2pk + D]^3} = -\frac{g_{\mu\nu}}{4\varepsilon} + \frac{k_\nu k_\mu}{2(k^2 - D)} + \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left[ \ln \frac{(k^2 - D)\pi}{\mu^2} + C \right] \quad (26)$$

и т. д.

#### 4. Регуляризация обрезанием:

$$\int dp = i \int (d^4 p)_E \rightarrow i \int_{\Omega(4)} d\Omega \int_0^\Lambda p^3 dp \equiv \text{reg}_\Lambda \int dp.$$

Приведем здесь сводку наиболее упорнобительных расходящихся интегралов. Детали соответствующих вычислений можно найти, например, у Ахизера и Берестецкого (1969) в § 36.

$$\text{reg}_\Lambda \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{p^2 - 2pk + D} = -\Lambda^2 + (D - k^2) \ln \frac{\Lambda^2}{k^2 - D}, \quad (27)$$

$$\text{reg}_\Lambda \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{(p^2 - 2pk + D)^2} = \ln \frac{k^2 - D}{\Lambda^2} + 1, \quad (23.17)$$

$$\text{reg}_\Lambda \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p_\nu dp}{(p^2 - 2pk + D)^2} = k_\nu \left( \ln \frac{k^2 - D}{\Lambda^2} + \frac{3}{2} \right), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{reg}_\Lambda \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p_\nu p_\mu dp}{(p^2 - 2pk + D)^2} &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} \Lambda^2 - \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{2} (k^2 - D) + k_\mu k_\nu \right\} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \\ &- \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left\{ (k^2 - D) \ln \frac{\mu^2}{k^2 - D} + \frac{5k^2 - 3D}{6} \right\} + k_\nu k_\mu \left( \ln \frac{k^2 - D}{\mu^2} + \frac{11}{6} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{reg}_\Lambda \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p_\nu p_\mu dp}{(p^2 - 2pk + D)^3} = -\frac{g_{\mu\nu}}{4} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left( \ln \frac{k^2 - D}{\mu^2} + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - D}. \quad (30)$$

Сравнение этих формул с формулами (22) — (26) показывает, что конечные части рассмотренных интегралов совпадают с точностью до конечных констант для логарифмически расходящихся интегралов и с точностью до конечных полиномов первой или второй степени — для линейно и квадратично расходящихся интегралов.

**5. Простейшие однопетлевые квадратуры.** Выпишем еще некоторые результаты вычислений для однопетлевой диаграммы, состоящей из двух внутренних скалярных линий с различными массами

$$f \sim \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk}{(m^2 - k^2 - i\epsilon) [\mu^2 - (k+p)^2 - i\epsilon]}. \quad (31)$$

Конечная часть функции  $f$  может быть записана следующим образом:

$$f(p^2; m^2, \mu^2) = \int_0^1 dx \ln \frac{xm^2 + (1-x)\mu^2 - x(1-x)p^2 - i\epsilon}{xm^2 + (1-x)\mu^2}.$$

Это выражение действительно при  $p^2 < (m+\mu)^2$  и нормировано в нуле, т. е.

$$f(0; m^2, \mu^2) = 0.$$

Вычисляя интеграл по  $x$ , получаем

$$f = \left( \frac{\Delta}{2p^2} - \frac{\Sigma}{2\Delta} \right) \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{K(p)}{2} \text{Ln} \frac{\Sigma - p^2 - p^2 K(p)}{\Sigma - p^2 + p^2 K(p)} - 1, \quad (32)$$

где  $\Sigma = m^2 + \mu^2$ ,  $\Delta = m^2 - \mu^2$  и

$$K(p) = \left[ \left( 1 - \frac{(m+\mu)^2}{p^2} \right) \left( 1 - \frac{(m-\mu)^2}{p^2} \right) \right]^{1/2}.$$

Второе слагаемое в (32), содержащее логарифм, обозначает три разных выражения при различных действительных значениях  $p^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{K(p)}{2} \text{Ln} \frac{\Sigma - p^2 - p^2 K}{\Sigma - p^2 + p^2 K} &= \frac{K(p)}{2} \ln \frac{\Sigma - p^2 - p^2 K}{\Sigma - p^2 + p^2 K} \quad \text{при } p^2 < (m-\mu)^2, \\ &= \frac{K(p)}{2} \ln \frac{\Sigma - p^2 - p^2 K}{\Sigma - p^2 + p^2 K} - i\pi K(p) \quad \text{при } p^2 \geq (m+\mu)^2, \\ &= Q(p) \text{arctg} \frac{p^2 Q(p)}{\Sigma - p^2} \quad \text{при } (m-\mu)^2 \leq p^2 \leq (m+\mu)^2, \end{aligned}$$

причем

$$p^2 Q(p) = [((m+\mu)^2 - p^2)(p^2 - (m-\mu)^2)]^{1/2}.$$

В случае одинаковых масс ( $\mu = m$ ) получаем

$$f(p^2; m^2, m^2) = J \left( \frac{p^2}{4m^2} \right) - 2; \quad J(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right)^{1/2} \text{Ln} \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z-1} - \sqrt{z}}.$$

Отметим, что функция  $J$  была введена в § 24 и может быть записана в виде

$$J(z) = \int_0^1 dx \ln \frac{1-4x(1-x)z - i\epsilon}{1-4x(1-x)} = (1-z) \int_1^\infty \frac{d\sigma}{V\sigma(\sigma-1)(\sigma-z+i\epsilon)}.$$

Согласно (24.12) через  $J$  и ее производную записывается поляризационный оператор фотона во втором порядке теории возмущений. Если же одна из масс равна нулю ( $\mu=0$ ), то

$$f(p^2; m^2, 0) = \frac{z-1}{z} \ln(1-z) - 1, \quad z = p^2/m^2.$$

Подобные выражения встречаются при вычислении собственной энергии электрона (см. (24.17)) и вершинной части. Отметим в этой связи, что логарифмическая функция возникает из параметрического интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{x \frac{p^2}{m^2} - 1} = \frac{m^2}{p^2} \ln \frac{m^2 - p^2}{m^2},$$

который оказывается сингулярным на массовой поверхности, т. е. при  $p^2 = m^2$ . Эта сингулярность является проявлением так называемой *инфракрасной* расходимости и связана с особенностью подынтегрального выражения исходного фейнмановского интеграла при *малых* значениях виртуального импульса  $k$ .

Поэтому переход к пределу  $\mu=0$  в некоторых случаях необходимо проводить более аккуратно. Как нетрудно убедиться, при малых, но конечных  $\mu^2$  интеграл в левой части следует (см. § 29.4) заменить на

$$A(p^2) = \int_0^1 \frac{m^2(x-1)dx}{(1-x)(m^2 - xp^2) + \mu^2} = \begin{cases} \frac{m^2}{p^2} \ln \frac{m^2 - p^2}{m^2} & \text{при } |p^2 - m^2| \gg \mu^2, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\mu^2}{m^2} & \text{при } p^2 = m^2. \end{cases} \quad (29.17)$$

Представление функции  $f$  через  $A$

$$\lim_{\mu^2 \rightarrow 0} f(p^2; m^2, \mu^2) = \frac{p^2 - m^2}{m^2} A(p^2) - 1 \quad (33)$$

оказывается полезным при проведении вычитания массового оператора электрона  $\Sigma(p)$  на массовой поверхности, а также при вычислении вершинной функции (см. §§ 24.3, 29.4, 29.5).

## Дополнение VII. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВЕРШИН

1. **Тройная вершина** (рис. Д. VII.1). Из трех 4-векторов  $p_1, p_2, p_3$  сумма которых равна нулю

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0,$$

можно составить три инвариантных выражения:

$$p_1^2, p_2^2 \text{ и } p_3^2 = (p_1 + p_2)^2. \quad (1)$$

Эти величины независимы. Однако не все тройки значений могут быть реализованы с помощью действительных значений компонент 4-векторов  $p_1, p_2$  и  $p_3$ .

В квантовой электродинамике представляет интерес случай, когда два квадрата положительны и равны квадрату массы электрона, а третий квадрат равен нулю:

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2, \quad k^2 = 0 \quad (k = p_3). \quad (2)$$

При соблюдении условия действительности компонент всех 4-векторов система соотношений (2) приводит к требованию  $k_\mu = 0$ ,  $p_1 = -p_2$ . Таким образом, все три конца электрон-фотонной вершины могут находиться на массовой поверхности лишь для фотонов исчезающе малой частоты.

Область

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2, \quad k^2 < 0, \quad (3)$$

отвечающая испусканию или поглощению электроном пространственно подобного фотона, равно как и область

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2, \quad k^2 \geq 4m^2, \quad (4)$$

соответствующая аннигиляции пары, является кинематически разрешенной.

В случае мезон-нуклонного 3-вертекса, описывающего юкавское взаимодействие (импульс мезона  $p_3 = k$ ), невозможно одновременно выйти на массовую поверхность по всем трем импульсам. Точка

$$p_1^2 = p_2^2 = M^2, \quad k^2 = \mu^2 < M^2 \quad (5)$$

не является кинематически разрешенной. Этот факт необходимо принимать во внимание при формулировании рецепта вычитания расходимостей в соответствующих моделях квантовой теории поля.

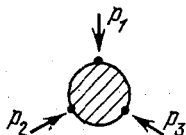


Рис. ДVII.1. Кинематические обозначения 3-хвостной вершины.

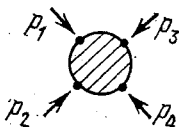


Рис. ДVII.2. Кинематические обозначения 4-хвостной вершины.

2. Четверная вершина. Скалярная 4-хвостная вершина (рис. ДVII.2) в силу лоренц-инвариантности является функцией скалярных произведений четырех своих 4-импульсных аргументов  $p_i p_j$ . Из-за закона сохранения полного 4-импульса

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$$

только шесть скалярных произведений являются независимыми. Четыре из них естественно выбрать в виде квадратов внешних 4-импульсов  $p_i$ , а два остальных обычно представляют выражениями вида  $(p_i + p_j)^2$ . Всего может быть составлено три подобных выражения:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2, \quad u = (p_1 + p_4)^2, \quad (6)$$

которые в силу закона сохранения полного 4-импульса удовлетворяют соотношению

$$s + t + u = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2. \quad (7)$$

Для того чтобы понять физический смысл переменных  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , заметим, что рассматриваемый 4-вертекс может описывать шесть различных процессов



типа 2 частицы  $\rightarrow$  2 частицы:

$$\begin{aligned} 1+2 \rightarrow 3+4, \quad 1+3 \rightarrow 2+4, \quad 1+4 \rightarrow 2+3, \\ 3+4 \rightarrow 1+2, \quad 2+4 \rightarrow 1+3, \quad 2+3 \rightarrow 1+4. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь цифры означают индексы частиц. Три последних связаны с предыдущими изменением знака всех 4-импульсов и отвечают тем же самым значениям квадратичных импульсных переменных. Поэтому для наших целей достаточно различать три возможности:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \text{II} \\ 1+2 \leftrightarrow 3+4 & 1+3 \leftrightarrow 2+4 \\ p_1+p_2 \rightarrow (-p_3)+(-p_4) & p_1+p_3 \rightarrow (-p_2)+(-p_4) \\ p_3+p_4 \rightarrow (-p_1)+(-p_2) & p_2+p_4 \rightarrow (-p_1)+(-p_3) \\ \text{III} & \\ 1+4 \leftrightarrow 2+3 & \\ p_1+p_4 \rightarrow (-p_2)+(-p_3) & \\ p_2+p_3 \rightarrow (-p_1)+(-p_4), & \end{array} \quad (9)$$

каждая из которых объединяет некоторую реакцию (прямую) и ей обратную и, как говорят, отвечает определенному каналу.

В первом канале переменная  $s=(p_1+p_2)^2$  играет роль релятивистски инвариантного квадрата полной энергии, а переменная  $t=(p_1+p_3)^2$  — инвариантного квадрата 4-импульса, переданного от частицы 1 частице 3. Переменная  $u=(p_1+p_4)^2$  описывает передачу 4-импульса от частицы 1 частице 4. Поэтому в физической области канала I.

$$s \geq (m_1+m_2)^2, \quad s \geq (m_3+m_4)^2, \quad u, t < 0.$$

В дальнейшем мы будем предполагать массы всех четырех частиц равными друг другу. Тогда

$$s \geq 4m^2, \quad u \leq 0, \quad t \leq 0. \quad (10-I)$$

Аналогично физические области каналов II и III

$$t \geq 4m^2, \quad s \leq 0, \quad u \leq 0, \quad (10-II)$$

$$u \geq 4m^2, \quad s \leq 0, \quad t \leq 0. \quad (10-III)$$

При этом, согласно (7), на массовой поверхности переменные  $s, t, u$  удовлетворяют правилу суммы

$$s+u+t=4m^2. \quad (11)$$

Картина может быть представлена на плоскости, причем оси переменных  $s, u, t$  отличаются по направлениям на  $120^\circ$  (рис. ДVII.3).

В физических областях (10) амплитуда рассеяния, пропорциональная матричному элементу матрицы рассеяния, является комплексной величиной. Поэтому точку вычитания 4-хвостки нельзя выбирать в этих областях. Исключения составляют точки, отвечающие порогам реакций:

$$s=4m^2, \quad t=u=0, \quad (12-I)$$

$$t=4m^2, \quad s=u=0, \quad (12-II)$$

$$u=4m^2, \quad s=t=0. \quad (12-III)$$

Вершина оказывается действительной внутри треугольника, ограниченного прямыми  $s=4m^2$ ,  $u=4m^2$ ,  $t=4m^2$ , соответствующими двухчастичным порогами реакций I, II и III. Уже во втором порядке теории возмущений в модели  $\varphi^4$

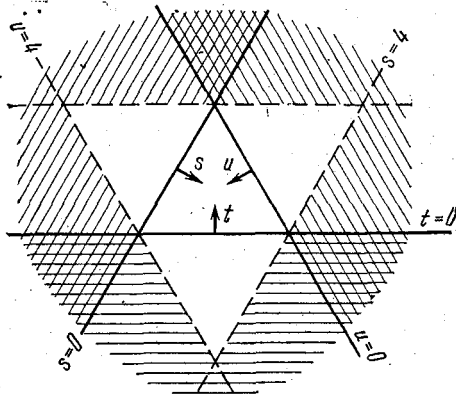


Рис. ДVII.3. Плоскость кинематических переменных  $s$ ,  $u$ ,  $t$  4-хвостной вершины. Физические области отмечены двойной штриховкой. Центральный треугольник, определенный условиями  $s, u, t \leq 4m^2$ , отвечает области, в которой 4-вертекс действителен.

в 4-вертекс дают вклады диаграммы «рыба», которые, как показано явным вычислением в § 24.1, имеют мнимую часть, отличную от нуля выше двухчастичного порога.

### Дополнение VIII. ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ ПОЛЕЙ ЯНГА — МИЛЛСА

В этом Дополнении приведены правила построения матрицы рассеяния по теории возмущений для квантовополевых моделей, содержащих неабелевы калибровочные поля. Ввиду сложности процедуры квантования мы не имеем возможности обсуждать вывод этих правил. Отметим лишь, что поля Янга — Миллса удалось проквантовать во второй половине 60-х годов, причем для этого были использованы такие сложные приемы, как представление матрицы рассеяния в виде функционального интеграла (см., например, монографию Славнова, Фаддеева (1978)). В то же время модели квантовой теории поля, основанные на полях Янга — Миллса, в последние годы приобретают все большее значение как в электромагнитных и слабых (единые модели типа модели Вайнберга — Салама — см. § 32), так и в сильных взаимодействиях (партон-глюонные модели).

1. Свободное поле группы  $SU(2)$ . Начнем с наиболее простого случая свободного поля Янга — Миллса  $B_{\nu}^a$ , отвечающего калибровочной группе  $SU(2)$ . Классический лагранжиан запишем в виде

$$\mathcal{L}(B) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2\alpha} (\partial B)(\partial B), \quad (1)$$

отличающемся от выражения  $\mathcal{L}_{YM}$ , использованного в § 11.1, наличием второго слагаемого, фиксирующего калибровку поля  $B_V$ . Введение подобного члена в лагранжиан абелева калибровочного поля обсуждалось в § 4.3.

Лагранжиан  $\mathcal{L}$  удобно разбить на два слагаемых:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(B) + \mathcal{L}_1(B, g), \quad (2)$$

к первому из которых отнесем члены, квадратичные по компонентам  $B$  и их производным

$$\mathcal{L}_0(B) = -\frac{1}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial B)^2, \quad (3)$$

где

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

а второй содержит члены высших степеней

$$\mathcal{L}_1(B, g) = -\frac{g}{2} H_{\mu\nu} [B_\mu \times B_\nu] - \frac{g^2}{4} ([B_\mu \times B_\nu])^2. \quad (4)$$

Напомним (ср. § 4.3), что благодаря наличию второго слагаемого дифференциальный оператор лагранжиана

$$\mathcal{L}_0(B) = -\frac{1}{2} B_\nu^a K^{\nu\mu} B_\mu^a, \quad (5)$$

$$K^{\nu\mu} = g^{\nu\mu} \partial^2 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \partial^\nu \partial^\mu \quad (\partial^2 = -\square)$$

оказывается несингулярным, т. е. имеет обратный

$$K^{\nu\mu-1} = \frac{1}{\square^2} \{g^{\nu\mu} \partial^2 - (1-\alpha) \partial_\mu \partial_\nu\}. \quad (6)$$

Квадратичный лагранжиан (3), (5) часто называют «свободным» лагранжианом. В этом случае поля, описываемые лагранжианом вида (11.9) и (1), именуют «полями Янга—Миллса в пустоте». Для того чтобы избежать смешения понятий (и в соответствии с терминологией § 19) мы будем называть поле, описываемое линейными уравнениями, вытекающими из квадратичных лагранжианов (3), (5), полем линейного приближения или «линейным полем Янга—Миллса». Поле Янга—Миллса, описываемое лагранжианами (11.9) и (1) и удовлетворяющее нелинейным уравнениям вида (11.11), не содержащим членов взаимодействия с другими полями (т. е. с полями материи), фигурирует у нас как «свободное поле Янга—Миллса» в соответствии с физикой дела.

Если теперь считать константу  $g$  малой величиной ( $g \ll 1$ ), то можно поставить задачу построения теории возмущений по степеням  $g$ , отталкиваясь от линейного приближения. Такая теория возмущений схематически была рассмотрена в § 19.4. Диаграммная техника в этом случае содержит безмассовый пропагатор в произвольной калибровке

$$\langle T B_\nu^a(x) B_\mu^b(y) \rangle = i \delta^{ab} \Delta_{\nu\mu}^c(x-y),$$

где

$$\Delta_{\nu\mu}^c(x; \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx} dk}{-k^2 - i\varepsilon} \left\{ g_{\nu\mu} - (1-\alpha) \frac{k_\nu k_\mu}{k^2 + i\varepsilon} \right\}, \quad (7)$$

и вершины, соответствующие кубичным и четверным составляющим из (4). Как было объяснено в § 19, она приводит к трудности с унитарностью, которая может быть преодолена путем введения фиктивного безмассового скалярного поля духов (Фаддеева — Попова)  $\xi^a(x)$ , преобразующегося по присоединенному представлению калибровочной группы (см. (19.22)):

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_0(\xi) + \mathcal{L}_1(\xi, B), \quad (8)$$

где

$$\mathcal{L}_0\xi = -\partial^\mu \bar{\xi}(x) \partial_\mu \xi(x), \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_1(\xi, B) = g \bar{\xi}(x) [B_\nu(x) \times \partial^\nu \xi(x)]. \quad (10)$$

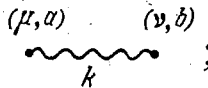
При этом поле духов  $\xi$  формально следует полагать проквантованным по Ферми — Дираку, что результативно проявляется в том, что каждому замкнутому духовому циклу на диаграмме Фейнмана в матричном элементе отвечает множитель  $-1$ .

Таким образом, диаграммы Фейнмана для свободного поля Янга — Миллса содержат внешние и внутренние линии поля Янга — Миллса, а также внутренние линии поля духов. Соответствующие правила Фейнмана в конфигурационном представлении были сформулированы в § 19.4.

В импульсном представлении правила Фейнмана свободного поля Янга — Миллса содержат следующие элементы:

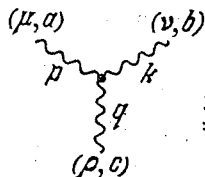
а) пропагатор безмассовых векторных частиц

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{1}{i} \frac{\delta^{ab}}{k^2 + i\varepsilon} \left[ g_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\varepsilon} \right] \quad (11)$$



б) вершину тройного самодействия векторных частиц

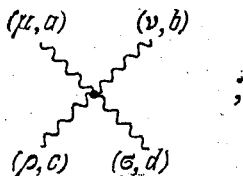
$$V_a = ig t^{abc} [(p-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-q)_\mu g_{\nu\rho} + (q-p)_\nu g_{\mu\rho}] \delta(p+k+q) \quad (12)$$



(на этой диаграмме и ниже на всех вершинных диаграммах все 4-импульсы для определенности считаются входящими);

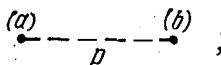
в) вершину четверного взаимодействия

$$V_4 = g^2 \left\{ t^{abctde} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + \left( \begin{matrix} b \leftrightarrow c \\ \nu \leftrightarrow \rho \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} b \leftrightarrow d \\ \nu \leftrightarrow \sigma \end{matrix} \right) \right\} \delta(\Sigma k) \quad (13)$$



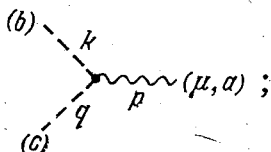
г) пропагатор духов

$$\Delta_{\xi\xi}^{ab}(p) = i \frac{\delta^{ab}}{p^2 + i\varepsilon} \quad (14)$$



д) вершину взаимодействия духов с полем Янга—Миллса

$$V_{\xi\xi B} = -\frac{ig}{2} t^{abc} (k-q)_\mu \delta(k+q+p) \quad (15)$$



е) знаковый фактор

$$\eta = (-1)^g, \quad (16)$$

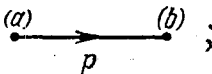
где  $g$  — число замкнутых петель фиктивного поля  $\xi$ .

2. Взаимодействие калибровочного поля с полями материи. Как отмечалось в § 11.2, взаимодействие калибровочных полей с полями материи вводится единым образом путем ковариантного удлинения производных.

Поэтому каждому спинорному полю материи  $\psi^a$  с массой  $m$  в правилах Фейнмана соответствует:

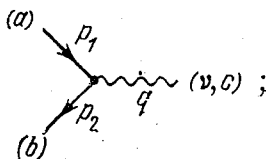
а) спинорный пропагатор

$$S^{ab}(p) = \frac{\delta^{ab}}{i} \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \quad (17)$$



б) вершина взаимодействия с калибровочным полем

$$V_{\psi\psi V} = -g\gamma_\nu (T^c)_{ab} \delta(p_1 + p_2 + q) \quad (18)$$



в) знаковый множитель

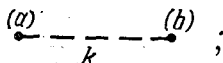
$$\eta_f = (-1)^f,$$

где  $f$  — число замкнутых фермионных циклов.

Каждому (псевдо) скалярному полю материи  $u^a$  с массой  $\mu$  соответствует:

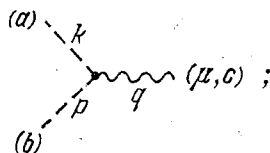
а) скалярный пропагатор

$$D^{ab}(k) = \frac{-i\delta^{ab}}{\mu^2 - k^2 - i\varepsilon} \quad (19)$$



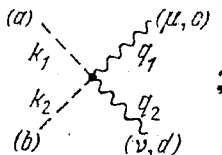
б) тройная вершина взаимодействия с калибровочным полем

$$V_{uuV} = -g(T^c)_{ab} (k-p)_\mu \delta(k+p+q) \quad (20)$$



в) четверная вершина взаимодействия с калибровочным полем

$$V_{uuVV} = g^2 g_{\mu\nu} (\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}) \delta(k_1 + k_2 + q_1 + q_2) \quad (21)$$



г) другие возможные вершины самодействия скалярного поля (вида  $u^4$ ) или его взаимодействия с другими полями материи.

**3. Массивное поле Янга—Миллса.** Сформулируем теперь правила Фейнмана для калибровочного поля с массой, возникающей с помощью механизма Хиггса в результате спонтанного нарушения симметрии вспомогательным скалярным полем.

В целях соответствия с моделью Вайнберга—Салама будем рассматривать случай поля Янга—Миллса группы  $SU(2)$ , взаимодействующего с комплексным скалярным полем  $\phi^a$ , преобразующимся по спинорному представлению ( $a=1, 2$ ) калибровочной группы. Поле  $\phi$ , таким образом, содержит всего

четыре скалярных действительных поля. Этот случай является простейшим расширением модели спонтанного нарушения калибровочной симметрии, описанной в § 11.4.

В результате сдвига второй компоненты дублета  $\varphi$  на действительную константу  $\eta$  и перехода к четырем новым действительным скалярным полям  $\sigma$ ,  $C$  ( $C^1$ ,  $C^2$ ,  $C^3$ )

$$\varphi^1 = \frac{iC^1 + C^2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi^2 = \eta + \frac{\sigma - iC^3}{\sqrt{2}} \quad (22)$$

исходный лагранжиан вида (11.20) принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial B)^2 + \frac{M^2}{2} (B_\mu B^\mu) + \\ & + \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2] + \frac{1}{2} (\partial_\mu C)^2 + MB_\mu \partial^\mu C - \\ & - \frac{g}{2} B_\mu \{ \sigma \partial_\mu C - C \partial_\mu \sigma - [C \times \partial_\mu C] \} - \frac{Mg}{2} \sigma (B_\mu B^\mu) + \\ & + \frac{g^2}{8} (\sigma^2 + C^2) (B_\mu)^2 + \frac{gm_\sigma^2}{4M} \sigma (\sigma^2 + C^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^2 + C^2)^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$(B_\mu)^2 = B_\mu^a B^{\mu, a}, \quad (\partial_\mu C)^2 = \partial_\mu C^a \partial^\mu C^a, \quad C^2 = C^a C^a,$$

а также

$$M = \frac{\eta g}{\sqrt{2}}, \quad m_\sigma = \eta \lambda. \quad (24)$$

Лагранжиан (23) содержит три массивных векторных поля  $B^a$  (масса  $M$ ), одно скалярное поле Хиггса  $\sigma$  с массой  $m_\sigma$  и три безмассовых голдстоуновских поля  $C^a$ .

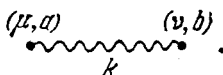
Из-за наличия недиагонального члена

$$MB_\mu \partial^\mu C \quad (25)$$

голдстоуновское поле  $C(x)$  и продольная часть векторного поля не являются независимыми динамическими переменными. Поэтому подходящим выбором калибровки можно обратить в нуль либо  $C$ , либо  $\partial B$ . Калибровка  $C=0$  называется унитарной. В этой калибровке лагранжиан содержит только физические поля — триплет массивных векторных мезонов и один массивный хиггсов мезон.

Для вычислений оказывается более удобной так называемая поперечная калибровка  $\partial B=0$ , в которой векторный пропагатор принимает следующий вид:

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = i\delta^{ab} \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{M^2 - k^2 - i\varepsilon} \quad (26)$$

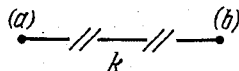


В этом случае, благодаря условию поперечности поля Янга—Миллса, член  $B_\mu \partial^\mu C \sim -C \partial_\mu B^\mu$  оказывается неэффективным, так как хронологические

спаривания дивергенции  $\partial^\mu B_\mu$  становятся равными нулю (иногда говорят, что «поле  $\partial V$  не распространяется»).

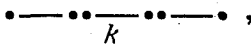
Кроме поперечного пропагатора векторного поля (26), правила Фейнмана содержат функции распространения духов Фаддеева—Попова и вершины их взаимодействия (15) с полем Янга—Миллса, функции распространения голдстоуновских частиц

$$\overline{C^a(k)} C^b(k) \sim i \frac{\delta^{ab}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (27)$$



и хиггсова бозона

$$\overline{\sigma(k)} \sigma(k) \sim - \frac{i}{m_\sigma^2 - k^2 - i\varepsilon} \quad (28)$$



многочисленные вершины взаимодействия полей  $B$ ,  $C$ ,  $\sigma$ , которые легко восстановить по третьей и четвертой строкам лагранжиана (23), а также, возможно, пропагаторы и вершины типа (17)—(21) различных полей материи.

Напомним, что как поля, соответствующие духам Фаддеева—Попова, так и поля  $C(x)$ , описывающие голдстоуновские бозоны, встречаются лишь во внутренних линиях фейнмановских диаграмм.



## ЗАДАНИЕ «СЕНТЯБРЬ» К ГЛАВЕ I

С1. Явным вычислением, исходя из определения (2.7) и используя уравнение движения (2.2), показать, что тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнению непрерывности (2.8).

С2. Вывести формулу (2.22) для тензора момента векторного поля. С этой целью, исходя из (1.6), получить явное выражение для матрицы  $A$  в формуле (2.20), затем определить матрицу  $\Psi$  бесконечно малого приращения компонент функций поля и воспользоваться формулой (2.13).

С3. Явным вычислением, используя определение (2.22), показать, что тензор момента удовлетворяет уравнению непрерывности.

С4. Показать, что симметрия тензора энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  приводит к сохранению спина.

С5. Исходя из лагранжиана (3.1), с помощью формул (2.2) и (2.7) получить уравнение движения (3.2) и тензор энергии-импульса (3.3) для вещественного скалярного поля.

С6. Исходя из лагранжиана (3.16), с помощью формул (2.2), (2.22) и (2.28) получить уравнения движения и явные выражения для тензоров энергии-импульса, спинного момента и вектора тока комплексного векторного поля.

С7. Рассмотреть поле пи-мезонов, преобразующееся по присоединенному триплетному представлению изотопической группы  $SU(2)$ . В вещественном представлении  $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ ,  $\pi_a^* = \pi_a$  изотопические преобразования записываются следующим образом:

$$\pi_a \rightarrow \pi'_a = \Lambda_{ab}(\alpha) \pi_b, \quad \Lambda(\alpha) = \exp(-i\omega_l \alpha_l).$$

Здесь  $\alpha_l$  ( $l=1, 2, 3$ ) — числовые параметры (углы) изотопических вращений, а  $\omega_l$  — генераторы поворотов, которые в действительном триплетном представлении могут быть выбраны в виде

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е.  $(\omega_l)_{jk} = -i\varepsilon_{ljk}$ , где  $\varepsilon_{ljk}$  — совершенно антисимметричный тензор третьего ранга.

Найти матрицу  $O$  унитарного преобразования  $T_l = O\omega_l O^{-1}$ , приводящего к представлению, в котором

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

С8. С помощью теоремы Нётер, исходя из лагранжиана

$$\mathcal{L}_0(\pi) = \frac{1}{2} \pi_i \nu \pi^i \nu - \frac{m^2}{2} \pi \pi,$$

построить соответствующие «изотопические» токи и сохраняющиеся во времени «изотопические заряды». Проверить, что лагранжиан инвариантен относительно рассматриваемых в задаче С7 преобразований.

С9. Аналогично предыдущей задаче рассмотреть изотопический дублет нуклонов

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \Psi'_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}(\alpha) \Psi_\beta, \quad \Lambda(\alpha) = \exp\left(-\frac{i}{2} \tau_i \alpha_i\right),$$

где  $\tau$  — матрицы Паули,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi} (i\hat{\partial} - M) \Psi.$$

С10. Показать, что формулы, обратные к (3.8), имеют вид

$$\bar{\varphi}^\pm(k) = \sqrt{2k_0} \varphi^\pm(k) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{\mp ikx} [k_0 \varphi(x) \mp i\dot{\varphi}(x)] dx, \quad k_0 = \sqrt{k^2 + m^2}.$$

С11. Переходя к импульсному представлению по формулам (3.8), показать явным вычислением, что «вклады с одинаковыми частотами» в энергию и импульс обращаются в нуль, т. е.

$$\int dx [\varphi_{;\nu}^\pm(x) \varphi_{;\nu}^\pm(x) + m^2 \varphi^\pm(x) \varphi^\pm(x)] = \int dx \bar{\varphi}^\pm(x) \varphi_{;\nu}^\pm(x) = 0.$$

С12. Подставляя импульсные разложения (3.18) в нулевые компоненты формул (3.17) и выполняя интегрирование по конфигурационному пространству, получить выражения (3.19) — (3.21) для векторов энергии импульса, спина и для электрического заряда комплексного векторного поля.

С13 \*. Найти решение уравнения Клейна — Гордона — Фока

$$(\square - m^2) \varphi(x) = 0,$$

предполагая  $\varphi$  и  $\dot{\varphi} = \partial\varphi/\partial t$  заданными на плоскости  $t = y^0$ . Выразить через  $\varphi(t, y)$  и  $\dot{\varphi}(t, y)$  частотные части функции Паули — Йордана

$$D^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int e^{ikx\theta} (\pm k^0) \delta(k^2 - m^2) dk = \frac{\mp i}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{2k^0} e^{\pm ikx} \Big|_{k^0 = \pm \sqrt{k^2 + m^2}}$$

положительно- и отрицательно-частотные части функции поля  $\varphi(x)$ .

С14. Убедиться, что для векторного поля лагранжиан (3.16) автоматически приводит к уравнениям Клейна — Гордона и дополнительным условиям Лоренца.

С15. Исходя из лагранжиана (3.11) для векторного поля, получить выражения для  $T_{\mu\nu}$ ,  $P_\nu$  и обсудить их отличие от (3.17а) и (3.19).

\*) Курсивом помечены номера задач повышенной трудности.

C16. Используя переход к локальному реперу (3.24), провести диагонализацию квадратичной формы (3.23). Получить формулу (3.25).

C17. Вводя с помощью (3.27) амплитуды  $b_n$ , отвечающие круговым поляризациям, диагонализировать выражение (3.26) для проекции спина векторного поля на направление движения.

C18. Исходя из лагранжиана (4.13) для электромагнитного поля, получить пространственные плотности вектора энергии-импульса  $T^{\alpha\nu}$  и вектора спина  $S$ .

C19. Переходя к импульсным амплитудам по формулам (4.22) и используя разложение (4.23) по локальному реперу, с помощью условия Лоренца получить выражения для векторов энергии-импульса и спина электромагнитного поля.

C20. Исходя из лагранжиана (5.5) для спинорного поля, получить тензор энергии-импульса и вектор тока в форме (5.6) и (5.7).

C21. Пусть

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Показать, что

$$\gamma^\nu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\nu = 0, \quad \gamma^5\gamma^5 = I \quad (\nu=0, 1, 2, 3).$$

C22. Используя свойства цикличности шпура и закон перестановки матриц Дирака (5.1), доказать, что шпуры всех матриц (Д.П.2), кроме единичной, равны нулю.

C23. Используя результаты предыдущей задачи, доказать линейную независимость 16 матриц (Д.П.2).

C24. Показать, что шпур нечетного числа матриц Дирака равен нулю, а также получить рекуррентную формулу, выражающую шпур произведения  $2n$  матриц через шпуры произведений  $2n-2$  матриц.

C25. Вычислить

$$\text{Sp} \hat{k}_1 \hat{k}_2, \quad \text{Sp} [(\hat{p}_1 + m_1)(\hat{p}_2 + m_2)],$$

$$\text{Sp} [\hat{k}_1(\hat{p}_1 + m_1)\hat{k}_2(\hat{p}_2 + m_2)], \quad \text{Sp} [\hat{k}_1\hat{k}_2(\hat{p}_1 + m_1)(\hat{p}_2 + m_2)].$$

C26. Выполнить суммирование по  $\sigma$  в произведениях

$$\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma_\sigma, \quad \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\sigma, \quad \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\sigma.$$

C27. Показать, что

$$\text{Sp} \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 = 0; \quad \text{Sp} \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5 = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma},$$

где  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  — совершенно антисимметричный единичный тензор 4-го ранга.

C28. На основе результатов задачи C25 и рассмотрения шпуров от шести множителей типа

$$\text{Sp} [\hat{k}_1(\hat{p}_1 + m_1)\hat{k}_2(\hat{p}_2 + m_2)\hat{k}_3(\hat{p}_3 + m_3)], \quad \text{Sp} [\hat{k}_1\hat{k}_2(\hat{p}_1 + m_1)(\hat{p}_2 + m_2)\hat{k}_3\hat{k}_4], \dots$$

найти общую формулу связи между

$$\text{Sp} [\hat{k}_1\hat{p}_1\hat{p}_2\hat{k}_2\hat{p}_3\hat{k}_3 \dots \hat{p}_m \dots \hat{k}_n] \quad \text{и} \quad \text{Sp} [\hat{k}_1\hat{p}_1\hat{p}_2\hat{k}_2\hat{p}_3\hat{k}_3 \dots \hat{p}_m \dots \hat{k}_n],$$

где  $\hat{P}_i = \hat{p}_i + m_i$ .

C29. Исходя из формул лоренцевых преобразований для спиноров (Д.П.16, 18, 20), получить явные выражения для генераторов  $A^\psi(\mu\nu)$  и  $A^{\bar{\psi}}(\mu\nu)$  вращений спиноров  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  в плоскости  $x^\mu x^\nu$ , введенных в (2.20), через матрич-

ный тензор спина  $\sigma^{\mu\nu}$ , определенный по формуле (ДII.2), и с помощью формулы (2.24) получить выражение (5.8) для тензора спина спинорного поля.

С30. С помощью формул (ДII.18) преобразования спинора при лоренцевых поворотах получить из (5.12) формулы (5.26).

С31. В представлении (ДII.5), (ДII.7) найти нормированные решения  $u^{s,\pm}(\mathbf{k})$ ,  $s=1, 2$  уравнения Дирака, являющиеся собственными функциями оператора спиральности

$$\lambda = \frac{\mathbf{k}\Sigma}{|\mathbf{k}|}, \quad \Sigma = \frac{1}{2} \gamma^5 \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$$

и удовлетворяющие условиям ортонормированности

$$u^{r,\mp}(\mathbf{k}) u^{s,\pm}(\mathbf{k}) = \frac{k_0}{m} \delta^{rs}.$$

С32. Построить оператор проектирования, выделяющий состояния с определенной спиральностью.

### ЗАДАНИЕ «ОКТЯБРЬ» К ГЛАВЕ II

О1. Получить реализацию собственных функций  $\psi_n$  и операторов  $a$  и  $a^+$  для гармонического осциллятора в координатном и импульсном представлениях. Убедиться в выполнении соотношений

$$\begin{aligned} a^+ a &= \tilde{n}, & a a^+ &= \tilde{n} + 1, & \tilde{n} \psi_n &= n \psi_n, & a \psi_0 &= 0, \\ [a, a^+] &= a^+ a - a a^+ = 1, & [a, a] &= [a^+, a^+] = 0. \end{aligned}$$

О2. Исходя из коммутационных соотношений предыдущей задачи и условия нормировки нижнего состояния

$$\Psi_0^* \Psi_0 = 1,$$

вычислить норму состояния  $\Psi_n = (a^+)^n \Psi_0$ .

О3. Вычислить норму одночастичного состояния

$$\Phi_1 = \int dq \omega(q) a^+(q) \Phi_0, \quad \Phi_0^* \Phi_0 = 1,$$

где оператор  $a^+(q)$  удовлетворяет перестановочным соотношениям (6.8), а  $\omega(q)$  —  $c$ -функция. Рассмотреть предел

$$\omega(q) \rightarrow \delta(q - P),$$

где  $P$  — фиксированный вектор.

О4. Исходя из коммутационных соотношений (7.4), содержащих оператор заряда  $Q$ , показать, что для комплексного поля операторы  $u^\pm$  понижают заряд, а операторы  $u^{*\pm}$  — повышают, т. е., например, если  $Q\Phi_q = q\Phi_q$ , то  $Q u^{*\pm} \Phi_q = (q \pm 1) u^{*\pm} \Phi_q$ .

О5. Получить аналог уравнения (7.4) для изотопических преобразований. Рассмотреть частные случаи: а) дублет нуклонов ( $I=1/2$ ), б) триплет пионов ( $I=1$ ).

06. Доказать соотношения (7.14). Получить аналог этих соотношений для триплета пионов, используя решение задачи 05.

07. Получить оператор момента количества движения для скалярного поля в координатном и импульсном представлениях. Получить перестановочные соотношения для его компонент. Показать, что

$$[M_{\mu\nu}, \varphi(x)] = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \varphi(x).$$

08. Исходя из условия эрмитова сопряжения операторов

$$(a^\pm(k))^\dagger = a^{\mp\dagger}(k)$$

и формулы (7.19) и используя свойство положительности метрики в гильбертовом пространстве  $\Phi | A |^2 \Phi \geq 0$ , определить тип перестановочных соотношений для частиц с целыми и полуцелыми спинами.

09. Предположив, что скалярные поля  $\varphi(x)$  квантуются по Ферми — Дираку, а спинорные  $\psi(x)$  — по Бозе — Эйнштейну, обсудить поведение антикоммутиатора  $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$  и коммутатора  $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]$  при  $(x-y)^2 < 0$ .

010. Исходя из коммутаторов (7.19), с помощью преобразования перехода к локальному реперу (3.24) получить коммутационные соотношения для векторного поля (8.14).

011. Полагая  $\mu = \nu = 0$  в коммутационном соотношении (8.17), доказать, что коммутатор для временных псевдофотонов противоречит свойству положительности метрики в гильбертовом пространстве. Указание. Умножить коммутационное соотношение для  $a_0^+(q)$  и  $a_0^-(k)$  на  $f(q) \bar{f}(k)$  и проинтегрировать по  $q$  и  $k$ .

012. Используя антикоммутационные соотношения (9.4), вычислить коммутаторы

$$[\bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x), \bar{\psi}(y) \gamma^\mu \psi(y)], \quad [\bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x), \bar{\psi}(y) \gamma^5 \psi(y)]$$

и рассмотреть их поведение вне светового конуса.

013. Определить поведение вне светового конуса (при  $x \sim y$ ) коммутаторов  $[\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)]$  при:

- а)  $\mathcal{L}(x) = e : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) :$ ,
- б)  $\mathcal{L}(x) = g : \bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x) \varphi(x) :$ .

014. Вычислить фурье-образы  $\tilde{F}(q) = \int e^{iqx} F(x) dx$  от следующих произведений  $D$  и  $S$  функций одинаковой частотности:

- а)  $F(x) = D^-(x) D^-(x)$ ;
- б)  $F(x) = \text{Sp} [\gamma^5 S^-(x) \gamma^5 S^+(-x)]$ ,
- в)  $F(x) = \text{Sp} [\gamma^\mu S^-(x) \gamma_\mu S^+(-x)]$ .

015. Вычислить фурье-образ вакуумного ожидания коммутатора свободных спинорных токов  $\int e^{ip(x-y)} \langle [J^\mu(x), J^\nu(y)] \rangle_0 dx$  при

- а)  $J^\nu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x)$ ,
- б)  $J^\nu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \gamma^5 \psi(x)$ .

016. Исходя из двухкомпонентных уравнений Вейля (9.15) для безмассового спинорного поля, показать, что средние значения оператора спиральности

$$\lambda(p) = \frac{(\sigma p)}{p^0}$$

по состояниям  $\tilde{\varphi}_{\pm}$  равны  $\pm 1$ , т. е., что спин нейтрино в состоянии  $\tilde{\varphi}_{+}(p)$  направлен по направлению движения, а в состоянии  $\tilde{\varphi}_{-}(p)$  — против направления движения.

017. Исходя из формул (9.24), (9.28) и (9.29) и условия унитарности матрицы  $\gamma^0$ , вывести формулу (9.30).

018. С помощью формулы (9.29) получить явный вид матрицы зарядового сопряжения  $C$  в стандартном (ДП.5) и спиральном (9.21) представлениях матриц Дирака. Прокомментировать одинаковый вид матриц  $C$  в этих двух частных представлениях.

### ЗАДАНИЕ «НОЯБРЬ» К ГЛАВЕ III

Н1. Построить лагранжианы взаимодействий, содержащие минимальные степени полей и не более одной производной:

- а) скалярного поля  $\varphi$  со спинорным полем  $\psi$ ;
- б) псевдоскалярного поля  $\varphi$  со спинорным полем  $\psi$ ;
- в) действительного скалярного поля  $\varphi$  с аксиально-векторным полем  $B_{\nu}$ ;
- г) спинорного поля  $\psi$  с векторным полем  $A_{\nu}$ .

Н2. Построить изотопически инвариантные лагранжианы взаимодействий, содержащие минимальные степени полей:

- а) дублета спинорных полей с триплетом скалярных;
- б) дублета спинорных полей с триплетом псевдоскалярных;
- в) дублета спинорных полей с триплетом векторных;
- г) дублета спинорных полей с триплетом аксиально-векторных;
- д) дублета спинорных полей с триплетом скалярных полей с векторной

связью;

- е) дублета спинорных полей с дублетом псевдоскалярных.

Н3. Построить минимальный локально-калибровочно-инвариантный лагранжиан взаимодействующих а) спинорного и электромагнитного полей, б) скалярного и электромагнитного полей.

Н4. Исходя из формул (11.3) и определения ковариантной производной (11.4), показать, что она преобразуется подобно полевой функции, т. е. доказать формулу (11.6).

Н5. Исходя из определения (11.7) и формул преобразования (11.5) для поля Янга-Миллса, найти закон преобразования тензора поля Янга-Миллса  $F_{\mu\nu}$ .

Н6. Построить калибровочную модель поля Янга-Миллса группы  $SU(2)$ , взаимодействующего с триплетом скалярных мезонов  $\varphi$  и дублетом фермионов  $\psi$ .

Н7. Найти статические ( $\partial\varphi/\partial t = 0$ ) решения задачи со спонтанным нарушением симметрии

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{h^2}{4} \left[ \varphi^2(z, t) - \varphi_0^2 \right]^2,$$

удовлетворяющие граничным условиям  $\varphi(z, \pm\infty) = \pm\varphi_0$ , где  $\varphi(z, t)$  — функция поля в двумерном пространстве-времени  $x = (z, t)$ ,  $h^2$  и  $\varphi_0^2$  — некоторые положительные константы. Обсудить характер локализации энергии и импульса.

**Н8.** Линейной подстановкой диагонализировать лагранжиан

$$\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{L}_0(\varphi_1; m_1) + \mathcal{L}_0(\varphi_2; m_2) + g\varphi_1(x)\varphi_2(x),$$

где

$$\mathcal{L}_0(\varphi; m) = \frac{1}{2} \partial_\nu \varphi \partial^\nu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2.$$

**Н9.** То же для лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\varphi; m) + g\rho(x)\varphi(x).$$

**Н10.** Найти оператор  $U(\alpha)$ , осуществляющий унитарное преобразование бозе-операторов  $a, a^\dagger$ , которые удовлетворяют соотношениям

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0,$$

к новым операторам

$$A = U^{-1}(\alpha) a U(\alpha) = a + \alpha, \\ A^\dagger = U^{-1}(\alpha) a^\dagger U(\alpha) = a^\dagger + \alpha,$$

где  $\alpha$  — действительное  $c$ -число.

**Н11.** Найти явный вид оператора  $U$ , осуществляющего унитарное преобразование от бозе-операторов  $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ , удовлетворяющих соотношениям

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1, \quad [a, b] = [a, b^\dagger] = [a^\dagger, b] = [a^\dagger, b^\dagger] = 0,$$

к новым операторам

$$A = U^{-1}(\varphi) a U(\varphi) = a \cos \varphi + b \sin \varphi, \quad B = U^{-1}(\varphi) b U(\varphi) = b \cos \varphi - a \sin \varphi.$$

**Н12.** Провести каноническое квантование лагранжиана задачи Н8. Получить одновременные коммутационные соотношения.

**Н13.** Провести диагонализацию гамильтониана

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \omega a a^\dagger + \epsilon b b^\dagger, \quad H_1 = g(ab + a^\dagger b^\dagger),$$

содержащего бозе-операторы  $a, b$ , которые удовлетворяют соотношениям

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1, \quad [a, b] = [a, b^\dagger] = [a^\dagger, b] = [a^\dagger, b^\dagger] = 0.$$

Построить собственные состояния, выразив их через а) полевые операторы диагонального представления; б) собственные состояния свободного гамильтониана  $H_0$ .

**Н14.** То же для гамильтониана

$$H = \int \omega(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k} + \int g(\mathbf{k}^2) \left( a^\dagger(-\mathbf{k}) + a(\mathbf{k}) \right) d\mathbf{k}; \quad [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{q})] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}).$$

**Н15.** Рассмотреть переход к локальному релятивистскому пределу

$$g(\mathbf{k}^2) = \frac{g}{[2\omega(\mathbf{k})]^{1/2}}, \quad \omega(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$$

в выражениях задачи Н14 для сдвига энергии вакуума и нормы собственных состояний.

**Н16.** Доказать, что в однонуклонном секторе решение задачи тяжелого нуклона сводится к решению уравнения (13.9).

**Н17.** Проверить прямой подстановкой, что выражение

$$\Psi_p^{(1)}(\mathbf{k}) = b^+(\mathbf{k})\Psi_p^{(0)} + g(\mathbf{k})\Psi_{p+\mathbf{k}}^{(0)} \quad (13.23)$$

удовлетворяет уравнению

$$H\Psi_p^{(1)}(\mathbf{k}) = (M - \Delta M + \omega(\mathbf{k}))\Psi_p^{(1)}(\mathbf{k}), \quad (13.22)$$

причем состояние  $\Psi_p^{(0)}$  определено соотношением (13.15) и удовлетворяет уравнению (13.17), а  $H$  — гамильтониан (13.1) — (13.3) задачи тяжелого нуклона.

**Н18.** Определить общий вид ядер  $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{q})$  и  $J(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$  в операторе

$$H = \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) + \\ + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 J(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) a^+(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_2) a(\mathbf{q}_1) a(\mathbf{q}_2),$$

при котором этот оператор может рассматриваться в качестве гамильтониана системы, в которой сохраняется число частиц и 3-вектор импульса.

**Н19.** Определить явный вид функций  $\omega$  и  $J$  и правила квантования операторов  $a, a^+$  в гамильтониане предыдущей задачи таким образом, чтобы

а) гамильтониан  $H$  описывал полную энергию системы одноименно заряженных тождественных нерелятивистских бозе-частиц с классическим потенциалом кулоновского взаимодействия

$$V(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|},$$

б) гамильтониан  $H$  правильно описывал полную энергию системы тождественных релятивистских фермионов (например, нуклонов) с юкавским потенциалом взаимодействия

$$V(\mathbf{x}) = \frac{g^2}{4\pi} \frac{\exp(-m|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}.$$

## ЗАДАНИЕ «ДЕКАБРЬ» К ГЛАВЕ IV

**Д1.** Решить итерациями уравнение Шредингера для  $S$ -матрицы

$$i \frac{dS(t)}{dt} = H(t) S(t).$$

Провести рассмотрение  $n$ -го члена. Решение привести к виду хронологической экспоненты,

**Д2.** Рассмотреть следующие лагранжианы взаимодействия (здесь  $\varphi(x)$  — скалярное поле,  $\Phi(x)$  — псевдоскалярный изотриплет  $\lambda$ -мезонов,  $\Psi = \{\Psi_p, \Psi_n\}$  — изодублет нуклонов,  $e(x)$  — поле электронов,  $\mu(x)$  — поле мюонов,  $\nu(x)$  — поле нейтрино):

а)  $\mathcal{L} = g\varphi^3(x);$

б)  $\mathcal{L} = h\varphi^4(x);$

в)  $\mathcal{L} = h(\varphi(x)\Phi(x))^2;$



г) лагранжиан взаимодействия электронного, нуклонного и пионного полей с электромагнитным полем:

д)  $\mathcal{L} = g\bar{\Psi}(x) \tau\gamma^5\Psi(x) \Phi(x)$ ;

е)  $\mathcal{L} = (f/\mu)\bar{\Psi}(x) \tau\gamma^5\gamma^{\nu}\Psi(x) \partial_{\nu}\Phi(x)$ ;

ж)  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(2в)} + \mathcal{L}_{(2д)}$ ;

з)  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(2в)} + \mathcal{L}_{(2е)}$ ;

и)  $\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}} j_{\alpha}(x) \tilde{j}^{\alpha}(x)$ , где  $j_{\alpha} = l_{\alpha} + h_{\alpha}$ ,

а

$$l_{\alpha} = \bar{v}_e(x) \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_5) e(x) + \bar{v}_{\mu}(x) \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_5) \mu(x),$$

$$h_{\alpha} = \bar{\psi}_p(x) \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_5) \psi_n(x) + f_{\pi} \partial_{\alpha} \pi_{-}(x).$$

Для каждого из этих лагранжианов с помощью второй теоремы Вика записать в нормальной форме хронологическое произведение  $T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y))$ .

Д3. То же для лагранжиана самодействия калибровочного поля Янга — Миллса:

$$\mathcal{L}_{YM} = - (1/4) F_{\mu\nu}^a F^{a, \mu\nu},$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} B_{\nu}^a - \partial_{\nu} B_{\mu}^a + ig f^{abc} B_{\mu}^b B_{\nu}^c.$$

Здесь  $f$  — структурные константы соответствующей группы Ли. *Указание.* Выделить из  $\mathcal{L}_{YM}$  квадратичные члены и рассматривать в качестве лагранжиана взаимодействия оставшуюся часть.

Д4. То же для хронологических произведений  $T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(z))$  из задач 2а) — 2в).

Д5. Для лагранжианов из задач 2 и 3 построить правила Фейнмана в импульсном представлении.

Д6. Пользуясь комбинациями лагранжианов из задачи 2, нарисовать простейшие диаграммы и выписать соответствующие им вклады в  $S$ -матрицу в импульсном представлении для следующих процессов: а)  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ ; б)  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ ; в) рассеяние  $\pi^+$  на протоне; г)  $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ ,  $\pi^+\pi^+ \rightarrow \pi^+\pi^+$ ; д) юкавское рассеяние  $np \rightarrow np$ ; е) комптоновское рассеяние  $\gamma p \rightarrow \gamma p$ ; ж) мёллеровское рассеяние  $ep \rightarrow ep$ ; з)  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ ; и) взаимодействие нейтронов с фотонами; к)  $\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm}\nu$ ; л)  $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^0p$ ; м)  $\mu \rightarrow e\tilde{\nu}$ .

### ЗАДАНИЕ «ФЕВРАЛЬ» К ГЛАВЕ V

Ф1. Получить формулу для дифференциального сечения упругого рассеяния двух спинорных частиц.

Ф2. Вывести формулы для вероятностей процессов распада одной частицы на две и на три частицы и времени жизни исходной частицы.

Ф3. Воспользовавшись результатами задачи Д6, вычислить дифференциальные сечения аннигиляции электрона и позитрона по следующим каналам:

а)  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ;

б)  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ ;

в)  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ .

**Ф4.** Получить значения времен жизни исходных частиц в следующих процессах распадов:

$$а) \mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu;$$

$$б) \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu.$$

*Указание.* Воспользоваться результатами задачи Д2 г), д), и). Сравнить полученные результаты с экспериментальными данными. Последние можно взять, например, из книги Перкинса (1975).

**Ф5.** Получить распределение по энергиям вылетающих электронов для  $\beta$ -распада

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e.$$

*Указание.* Воспользоваться лагранжианом взаимодействия, приведенным в задаче Д2 и). Сравнить полученные результаты с экспериментальными данными, приведенными в гл. IV книги Перкинса (1975).

**Ф6.** Вывести отношение парциальных ширин распадов

$$\varphi \rightarrow \begin{cases} K^+K^-, \\ K^0\tilde{K}^0 \end{cases}$$

в зависимости от спина  $\varphi$ -мезона.

Характеристики частиц следующие:

$\varphi$	масса 1019,	спин = ?,	изоспин 0,
	четность = —,	$G$ -четность = —;	
$K^\pm$	масса 494,	спин 0,	изоспин 1/2,
	четность = —,	$G$ -четность = +;	
$K^0, \tilde{K}^0$	масса 498,	спин 0,	изоспин 1/2,
	четность = —,	$G$ -четность = +.	

Пользуясь данными эксперимента

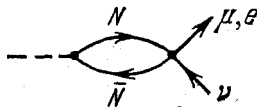
$$\Gamma(\varphi \rightarrow K^+K^-)/\Gamma(\varphi \rightarrow K^0\tilde{K}^0) \simeq 1,5,$$

высказать соображения в вероятном значении спина  $\varphi$ -мезона.

**Ф7.** Рассчитать отношение вероятностей распадов  $\pi^\pm$ -мезонов

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu \text{ и } \pi^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e$$

и сравнить с отношением экспериментальных значений, равным  $1 : (1,24 \pm \pm 0,03) \cdot 10^{-4}$ . *Указание.* Использовать механизм распада, изображенный на диаграмме



и слабые лагранжианы из задачи Д2.

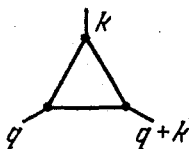
**ЗАДАНИЕ «МАРТ» К ГЛАВЕ VI**

**М1.** Вычислить разность фейнмановских интегралов  $I(k) - I(0)$ , где

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int D^c(q) D^c(k-q) dq,$$

соответствующую диаграмме второго порядка собственной энергии мезона в теории с лагранжианом взаимодействия  $\mathcal{L} = (g/3) : \varphi^3(x) :$ . Вычисление провести двумя способами: а) переходом в  $\alpha$ -представление, б) использованием фейнмановских параметров.

**М2.** Теми же двумя методами вычислить диаграмму третьего порядка вершинной функции мезона в теории  $\mathcal{L} = g\varphi^3$



**М3.** Вычислить время жизни  $\pi$ -мезона, обусловленное распадом  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  через виртуальное состояние  $N\bar{N}$ . По известному экспериментальному значению времени жизни определить константу пион-нуклонного взаимодействия  $g$ . *Указание.* Воспользоваться результатами задачи Ф2 и задач Д2 г), д).

**М4.** Вычислить вклад в  $S$ -матрицу диаграммы второго порядка собственной энергии электрона в спинорной электродинамике. Пропагатор фотона взять в произвольной калибровке

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left\{ \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} d_I \right\}.$$

Использовать три метода регуляризации:

а) регуляризацию Паули—Вилларса

$$\frac{1}{m^2 - p^2} \rightarrow \frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{M^2 - p^2};$$

б) обрезание импульса виртуального фотона при  $p^2 = \Lambda^2$ ;

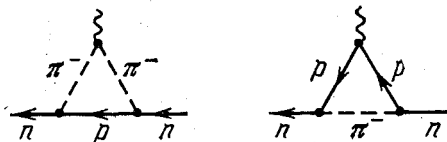
в) размерную регуляризацию

Изучить поведение полученных выражений при  $\Lambda^2, M^2 \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ . Получить аналог формул (24.16), (24.17).

Найти значение  $d_I$ , при котором рассматриваемая диаграмма не содержит расходимостей.

**М5.** Вычислить швингеровский вклад в аномальный магнитный момент электрона, соответствующий вершинной диаграмме порядка рис. 24.2, б. *Указание.* Воспользоваться формулами (24.24) — (24.26) и (30.4).

**М6.** Вычислить аномальный магнитный момент нейтрона, исходя из лагранжиана взаимодействия задачи Д2 г) и д). *Указание.* Рассмотреть вершинные диаграммы вида



### ЗАДАНИЕ «АПРЕЛЬ» К ГЛАВЕ VII

**A1.** Вычислить вклад в  $S$ -матрицу диаграммы второго порядка собственной энергии мезона в теории с кубичным самодействием

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = \frac{g}{3} : \varphi^3(x) : .$$

Произвести устранение расходимостей.

**A2.** Найти максимальный индекс вершины для скалярной теории со степенным самодействием

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = h : \varphi^k(x) :$$

в  $N$ -мерном пространстве-времени. Определить возможные значения пар чисел  $(N, k)$  для перенормируемых моделей.

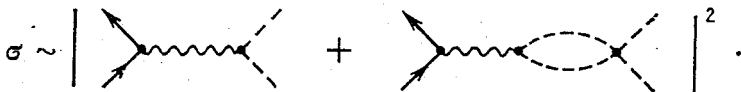
**A3.** Найти амплитуды  $\pi\pi$ -рассеяния во втором порядке теории

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = -\frac{4\pi^2}{3} h (\dot{\varphi}^*(x) \varphi(x))^2 .$$

Найти пороговые значения (при  $s = (p_1 + p_2)^2 = 4m_\pi^2$ ) амплитуд и сечений процессов упругого рассеяния  $\pi^+\pi^0$ ,  $\pi^0\pi^0$ .

**A4.** Найти сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  с точностью до второго порядка по  $\alpha$  и  $h$  включительно в теории с лагранжианом взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = eA^\nu(x) \{ \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x) + i\dot{\varphi}^*(x) T_3 \partial_\nu \varphi(x) \} + \frac{4\pi^2}{3} h (\dot{\varphi}^*(x) \varphi(x))^2 ,$$



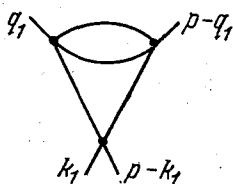
**A5.** Найти вклад поляризации вакуума в поправку к закону Кулона

$$A_{\text{ext}}^0(q) = \frac{1}{|q|^2} ,$$



А6. Вычислить вклад в  $S$ -матрицу диаграммы третьего порядка «рюмка» для лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = -\frac{4\pi^2}{3} \hbar \varphi^4(x),$$



Сформулировать  $R$ -операцию, устранить расходимости и обсудить структуру конечного произведения в окончательном выражении.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Эта книга представляет собой пособие к годовому курсу, состоящему из 30 с небольшим лекций и такого же числа семинаров. Каждый параграф примерно соответствует одной полуторачасовой лекции. Упражнения, собранные в тематические Задания, предназначены для семинарских занятий. Для этой же цели может быть использован технический материал из Дополнений. Итоги проработки Заданий целесообразно подводить в форме коллоквиумов по два раза в семестр.

В оглавлении курсивом отмечены разделы, которые можно опустить при первоначальном ознакомлении с предметом. Остальной материал образует «минимум», рекомендуемый при недостаточном знакомстве студентов с разделами «Основы релятивистской теории» и «Квантовая теория многих частиц» университетского курса квантовой механики, а также в случае неполной продолжительности учебного года.

Этот минимум выглядит следующим образом:

1-й семестр: §§ 1—5, 6\*, 7, 8\*, 9\*, 10\*, 14, 17\* и 18—всего 13 лекций;  
2-й семестр: §§ 19\*, 20—22, 23\*, 24—26, 27\*, 28, 30, 31 и 33—всего 13 лекций.  
(Звездочка рядом с номером параграфа означает материал за вычетом подпараграфов, отмеченных в оглавлении курсивом.)

К содержанию «минимума», в зависимости от конкретных условий и интересов преподавателя, можно в различных комбинациях добавлять материал, отмеченный курсивом. Со своей стороны в качестве «первого резерва» мы рекомендуем §§ 9.4, 10.3, 12, 23,3 и 29. Из остального материала выделим «наборы»: а) §§ 8.4, 8.5, 11, 19.4, 32 и Дополнение VIII; б) §§ 15 и 16, которые целесообразно вводить целиком.

Желательный объем знаний для студентов, приступающих к изучению этой книги, помимо стандартного курса квантовой механики, включающего упомянутые выше два раздела, содержит небольшой курс теории непрерывных групп и их представлений (особенно представлений группы Пуанкаре), а также элементарные сведения о физике частиц.

## ЛИТЕРАТУРА

- Введение — Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3-е изд. — М.: Наука, 1976.
- Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. 1969, Квантовая электродинамика. — 3-е изд. — М.: Наука.
- Блохинцев Д. И. 1976, Основы квантовой механики. — 5-е изд. — М.: Наука.
- Боголюбов Н. Н. (1970), Лекции по квантовой статистике, в т. 2 «Избранных трудов» в трех томах, Киев: Наукова думка.
- Боголюбов Н. Н. (1979), Избранные труды по статистической физике. — М.: Изд-во МГУ.
- Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. 1969, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука.
- Бьеркен Дж., Дрелл С. (1978), Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, т. 2.
- Вигнер Е. (1971), Этюды о симметрии. — М.: Мир.
- Владимиров В. С. (1976), Уравнения математической физики. 3-е изд. — М.: Наука.
- Давыдов А. С. (1973), Квантовая механика. 2-е изд. — М.: Наука.
- Дирак П. А. М. (1968), Лекции по квантовой механике. — М.: Мир. См. также Дирак (1979), стр. 408—475.
- Дирак П. А. М. (1979), Принципы квантовой механики. — М.: Наука.
- Елютин П. В., Кривченко В. Д. (1976), Квантовая механика. — М.: Наука.
- Заявлялов О. И. (1979), Перенормированные диаграммы Фейнмана. — М.: Наука
- Киржниц Д. А. (1963), Полевые методы теории многих частиц. — М.: Атомиздат.
- Клаудер Дж., Сударшан Э. (1970), Основы квантовой оптики. — М.: Мир.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. (1974), Квантовая механика. — М.: Наука.
- Липкин Г. (1977), Квантовая механика: — М.: Мир.
- Медведев Б. В. (1977), Начала теоретической физики. — М.: Наука.
- Мессиа А. (1978), Квантовая механика. М.: Наука, т. I.
- Перкинс Д. (1975), Введение в физику высоких энергий, М.: Мир.
- Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. (1978), Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука.
- Фейнман Р. (1978), Теория фундаментальных процессов: — М.: Наука.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиоматическая теория поля 84, 127, 257  
Альфа-представление 177  
Амплитуда рассеяния 173  
— состояния 57  
— — вакуума 60  
— —, нормировка 169  
Асимптотика ультрафиолетовая 255  
Асимптотическая свобода 259
- Боголюбова преобразование 110, 281
- Вайнберга—Салама модель 247  
Вайнберга угол 248, 253  
Вектор 16  
— ковариантный 9  
— состояния см. Амплитуда состоя-  
ния  
— тока 24  
Векторное поле 28  
— — калибровочное 93  
— — комплексное квантование 70  
— — промежуточное 247  
— — Янга—Миллса 94, 97  
— — —, квантование 157  
Вероятность перехода 171  
Вертекс 214, 217  
Вершина диаграммы 152, 154, 158  
Вершинная функция 192, 212  
— — сильносвязная см. Вертекс  
Взаимодействия полей 89  
— — калибровочные 93, 97  
— — Ферми 87, 242  
— частиц 11, 85  
— — нелептонные 243  
— — электромагнитные 85, 236  
Взаимопревращаемость частиц 12  
Виртуальные частицы 153  
Внутренние симметрии 12, 24  
Время жизни 11, 175, 309, 310  
— — пиона 12  
Вторичное квантование 49
- Гамильтониан 49, 55, 103  
—, диагонализация 108  
Гамильтонов подход 106/  
Глюоны 254  
Голдстоуна теорема  $\rho$ 01  
Голдстоуновские бозоны 101, 226  
Градиентная инвариантность 33, 226  
— — матрицы рассеяния 227  
Градиентное преобразование 33  
— — фотонного пропагатора 227  
Группа 271  
— абелева 272  
— калибровочная 94, 97, 248  
— Ли 273  
— —, генераторы 277  
— —, представления 276  
— Лоренца 14  
— —, представления 15  
— неабелева 94  
— простая 272  
— Пуанкаре 14  
— ренормировок 258
- Действие 17  
Диаграмма Фейнмана 151  
— — вершинная 192  
— — древесная 237  
— —, индекс 209  
— — связанная 168  
— — собственной энергии 190  
Дирака матрицы 41, 264  
— поле 40  
— —, квантование 75  
— спиор 42  
— уравнение 41, 266  
— —, нерелятивистский предел 269  
Дисперсионные соотношения 257  
Духи Фаддеева—Попова 158, 252
- Законы сохранения 12  
— — заряда 24  
— — энергии-импульса 20



- Заряд 23, 24  
 — электрона 11  
 Зарядовая симметрия 65  
 Зарядовое сопряжение 65, 81  
 — — операторов 84  
 — — спинорного поля 81.
- И**  
 Изовектор 90  
 Изотопическая группа 94, 301  
 — симметрия 12, 24  
 Изотопический дублет 94, 261  
 — мультиплет 94, 100  
 — спин 262  
 — триплет 94, 262, 301  
 — формализм 261  
 Инвариантность лоренцева 14  
 — Пуанкаре (релятивистская) 14  
 Индекс вершины 211  
 — диаграммы 209  
 — лагранжиана 211  
 Индефинитная метрика 75  
 Инфракрасная особенность 231  
 — расходимость 225
- К**  
 Калибровка 37, 102  
 — диагональная 37  
 — кулонова 38  
 — поперечная 299  
 — унитарная 299  
 Калибровочное взаимодействие 92, 96  
 Калибровочные поля 93  
 — преобразования 23, 94  
 — — локальные 92, 95  
 Квантование каноническое 53, 54  
 — — полей 49  
 —, релятивистская схема 56, 57  
 Квантовая хромодинамика 255  
 Ковариантная производная 92, 95  
 Когерентное состояние 116  
 Компенсирующие поля 93, 97  
 Константа связи 87, 89  
 — — инвариантная 259  
 — — перенормированная 201, 226  
 Контрчлены 198, 201  
 Коэффициентные функции 150
- Л**  
 Лагранжев формализм 17  
 Лагранжиан 17  
 — взаимодействия 89  
 —, локальность 18, 136  
 — сингулярный 36  
 — поперечный 35  
 Локальная коммутативность 67, 135  
 Локальное выражение 126
- Локальный оператор 125  
 — репер 31, 39  
 Лэмбовский сдвиг 241
- М**  
 Магнетон Бора 238, 271  
 Магнитный момент электрона 238  
 — — — аномальный 239  
 Масса протона 11  
 — промежуточных бозонов 253  
 — электрона 11  
 Массовый оператор 213, 214  
 Матрица рассеяния 123  
 — —, ковариантность 129  
 — —, причинность 131—133  
 — —, унитарность 130, 157  
 Матрицы Дирака 41, 264  
 — —, спиральное представление 80  
 — —, стандартное представление 265, 266  
 — —, унитарность 42  
 — —, шпуры произведений 266  
 — Паули 266  
 Модель Вайнберга—Салама 247  
 — статического источника 108  
 — тяжелого нуклона 112
- Н**  
 Нейтральные токи 245  
 Нейтринное поле 77, 87, 244, 245, 250  
 Несобственные функции см. Обобщенные функции  
 Нормальное произведение 68  
 — — со спариваниями 140
- О**  
 Обобщенные функции 150  
 — —, умножение 183, 203  
 Обращение времени 83  
 Оператор д'Аламбера 10  
 — квазилокальный 136, 198  
 — массовый 213  
 — поля 56  
 — — локальный 125  
 — поляризаационный 190, 191, 214, 228  
 — проекционный 34  
 — унитарный 57  
 Оптическая теорема 174, 175  
 Осцилляторы поля 14, 52
- П**  
 Паули—Йордана функция 67, 147, 148, 284  
 Паули матрицы 266  
 — теорема 66  
 — уравнение 270  
 Перенормировка 112, 200  
 — вертекса 225

- Перенормировка константы связи  
 — 201, 208, 222, 226  
 — массы 201, 221, 224  
 — полевой функции 201, 221  
 —, теорема 223  
 — функций Грина 219, 221  
 Перенормируемость 202, 208, 212  
 — модели Вайнберга—Салама 252, 253  
 Перестановочная функция 64  
 — — векторного поля 71, 286  
 — — скалярного поля 67, 147, 284  
 — — спинорного поля 76, 286  
 — — электромагнитного поля 75, 285  
 Перестановочные соотношения 50, 53, 55, 61, 62  
 — — Бозе—Эйнштейна 66, 67, 70, 72  
 — — одновременные 54, 104, 106  
 — — Ферми—Дирака 66, 76  
 Планка постоянная 11  
 Поле векторное 28  
 — калибровочное 93  
 — нейтринное (Вейля) 77  
 — скалярное 24  
 — спинорное (Дирака) 41  
 — Хиггса 103, 248  
 — электромагнитное (Максвелла) 32  
 — Янга—Миллса 94  
 Поляризация вакуума 242  
 Постоянная тонкой структуры 88, 240  
 Правила Фейнмана 151—154  
 — —, импульсное представление 161, 162  
 — — поля Янга—Миллса 157—159, 296—300  
 — —, спинорная электродинамика 153, 154, 165, 166  
 Правило знаков 156, 162  
 Представление взаимодействия (Дирака) 122  
 — Гейзенберга 56, 104  
 — матриц Дирака — см. Матрицы Дирака  
 — фоковское 61  
 — чисел заполнения 49  
 — Шредингера 55, 113  
 Преобразование Боголюбова 110, 281  
 — градиентное 33  
 — зарядового сопряжения 65, 81  
 — калибровочное 33, 95, 96  
 — Лоренца 21, 268  
 — обращения времени 83  
 — пространственного отражения 16, 269  
 — Пуанкаре 14, 129  
 — унитарное 57, 58  
 — — операторов 56, 57, 59, 84, 109, 110  
 Преобразование фазовое 23  
 — — локальное 92  
 Причинная функция Грина 147  
 Промежуточный векторный бозон 90  
 Пропагатор см. Причинная функция Грина  
 Радиационные поправки 195, 228, 232, 240, 242  
 Распад двухчастичный 175  
 Рассеяние 173  
 — комптоновское 236, 237  
 — мёллеровское 166, 167, 236  
 Расходимости инфракрасные 194, 231  
 — ультрафиолетовые 181, 197, 202, 204  
 Регуляризация обрезанием 188, 289  
 — Паули—Вилларса 183, 190, 192, 193, 198  
 — размерная 186, 288  
 — фейнмановская 188  
 Редукционные формулы 219  
 Релятивистская инвариантность 14  
 — ковариантность  $S$ -матрицы 129  
 Сверхтонкое расщепление 241  
 Сечение поперечное 174, 257  
 Сингулярные функции см. Обобщенные функции  
 — лагранжианы 36  
 Скобки Пуассона квантовые 54  
 — — классические 54  
 Сопряжение дираковское 42  
 — зарядовое 81  
 Спаривание операторов 139  
 — — хронологическое 141  
 Спектральное представление 189  
 Спин 22  
 Спинор 15  
 Спинорная электродинамика 236  
 Спинорное поле 40  
 — — безмассовое 77  
 — —, законы преобразования 267—269  
 — —, квантование 76, 77  
 Спиральное представление 80  
 Спиральность 78  
 Спонтанное нарушение симметрии 98, 99  
 Сохранения законы 19, 20  
 Тензор 15  
 — Минковского 9  
 — момента количества движения 22  
 — спина 23

- Тензор электромагнитного поля 32  
— энергии-импульса 19  
Теорема Вика 140, 143, 144  
— Нётер 20, 103  
— о перенормировках 223  
— Паули 66  
— *CPT* 84  
Тождество Уорда 234  
— Уорда—Такахаша 235  
Ток заряженный 244  
— нейтральный 245
- Угол Вайнберга 248, 253  
Узел диаграммы см. Вершина диаграммы  
Унитарный предел 246  
Уравнение Вейля 78  
— Гайзенберга 56, 104  
— д'Аламбера 36, 37  
— Дирака 41, 77, 266  
— Клейна—Гордона 24  
— Паули 270  
— Прока 29, 33  
— Шредингера 50, 55, 270  
Уравнения Максвелла 32  
Условие Лоренца 34, 35  
— — ослабленное 73, 74  
— причинности 131  
— — дифференциальное 133
- Ферми взаимодействие 88, 242  
— постоянная 87, 244  
Формула Клейна—Нишины 237  
— Комптона 237  
Формфактор электрона 193, 239  
Функции Грина 145, 285, 286  
— — полные 212, 215  
— — причинные 147, 285, 286  
Функционал 127  
Функциональная производная 129, 133  
Функциональный интеграл 258
- Хиггса бозон 103, 248  
— механизм 103, 248, 250  
Хронологическая экспонента 126, 137  
Хронологическое произведение 124, 125  
— спаривание 141  
*CPT*-преобразование 84
- Четность 16
- Экранировка заряда 112, 259  
Электромагнитное взаимодействие 85, 236  
— — минимальное 93  
Эффективное сечение см. Сечение