

А. Ф. Богородский

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ
ЭЙНШТЕЙНА
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
В АСТРОНОМИИ



317412

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УССР

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

А. Ф. БОГОРОДСКИЙ

УРАВНЕНИЯ
ПОЛЯ ЭЙНШТЕЙНА
И ИХ ПРИМЕЧЕНИЕ
В АСТРОНОМИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1962

В книге содержится обзор основных вопросов релятивистской теории тяготения и ее применений в астрономии. Приводятся решения уравнений поля, которые могут представить астрономический интерес. Подробно исследуется задача Кеплера в теории относительности, рассматриваются релятивистские возмущения в движении искусственных спутников Земли, изучаются особенности распространения света в поле гравитации. Значительное внимание уделяется космологическим приложениям общей теории относительности.

Книга предназначена для специалистов астрономов, аспирантов и студентов старших курсов университетов.

Ответственный редактор
канд. физ.-мат. наук **О. С. ИВАНИЦКАЯ**

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге рассматриваются астрономические следствия общей теории относительности. При изложении теории различных релятивистских эффектов используются работы автора, большей частью опубликованные в виде отдельных статей. Во всех случаях теоретические расчеты завершаются формулами, позволяющими произвести соответствующие количественные оценки. Обсуждается также возможность проверки эффектов общей теории относительности путем астрономических наблюдений.

В первой главе дается обзор развития релятивистской теории тяготения и изложены основы математического аппарата этой теории. Далее рассматриваются решения уравнений поля, которые могут представить астрономический интерес. Кроме внешнего и внутреннего решения Шварцшильда для случая сферической симметрии, приводится общий метод приближенного интегрирования Эйнштейна и подробно излагается развитое автором решение уравнений поля для системы точечных масс, а также некоторые следствия этого решения. Производится интегрирование уравнений поля для однородного равномерно вращающегося шара.

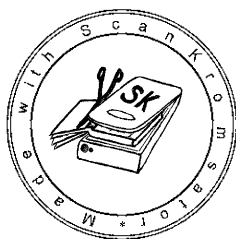
В третьей главе рассматривается задача о движении частицы в поле одного центра. Исследование уравнения орбиты, выполненное с помощью эллиптических интегралов в форме Лежандра, иллюстрируется графиками. Приводятся данные, характеризующие точность астрономической проверки релятивистского эффекта в движении линии апсид планетной орбиты. Рассматривается задача о релятивистских возмущениях в элементах орбиты искусственного спутника Земли с учетом вращения последней. Обсуждается вопрос о динамическом обосновании гелиоцентрической системы.

Далее изучаются оптические эффекты общей теории относительности. Выполнено подробное исследование луча в центральном поле тяготения, дается теория эффекта Доплера и ее приложение к статическому полю, рассматриваются некоторые фотометрические эффекты.

В пятой главе изложены основы так называемой релятивистской космологии.

В заключение приводится подробная, хотя и не исчерпывающая, библиография.

Эта страница пуста



Глава I

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Введение

С математической точки зрения пространство и время в теории относительности рассматриваются как четырехмерный континуум Римана. Метрика этого континуума выбирается таким образом, чтобы движение частицы в поле гравитации, происходящее с ньютоновской точки зрения под действием «силы тяготения», в четырехмерном представлении являлось инерциальным. Мировая точка частицы должна двигаться с нулевым четырехмерным ускорением, следуя обобщенному закону инерции Галилея.

Релятивистская интерпретация движения в гравитационном поле приобретает эту простую и ясную форму в том случае, если частица имеет достаточно малую массу и не вызывает заметного возмущения поля. Мировой линией частицы в пространственно-временном континууме оказывается при этом четырехмерная геодезическая линия, уравнения которой служат релятивистским законом движения в поле гравитации. При разработке общей теории относительности принцип геодезической линии играл фундаментальную роль и считался самостоятельным физическим законом. Лишь впоследствии, в результате подробного изучения уравнений поля Эйнштейна, выяснилось, что в общем случае эти уравнения не допускают независимой формулировки закона движения.

Поскольку строение гравитационного поля обусловлено распределением массы, принцип геодезической линии требует, чтобы метрика пространственно-временного континуума находилась в некотором соответствии с распределением материи. Это значит, что геометрия четырехмерного континуума лишь в том случае отражает объективные свойства пространства — времени, если она позволяет дать правильное объяснение движения частицы в гравитационном поле. Таким образом, выбор геометрии пространственно-временного континуума не является вопросом математического удобства или простоты; он должен производиться на основе изуче-

ния реальных движений материи, т. е. на основе опыта. Априорное признание какой-либо определенной геометрии пространства—времени с физической точки зрения недопустимо и может привести к неправильной интерпретации движения в гравитационном поле. Так, в механике Ньютона постулирование геометрии Эвклида с необходимостью приводит к понятию силы тяготения в классическом смысле.

Соответствие между геометрией пространственно-временного континуума и распределением масс является основой релятивистского представления о природе гравитации и имеет фундаментальное значение в теории относительности. Установление этого соответствия составляет важнейшую задачу теории тяготения. Решение ее ищется в форме так называемых уравнений поля, связывающих метрический тензор пространства—времени с тензором энергии—импульса, характеризующим распределение материи.

Первоначально релятивистское представление о природе гравитации возникло в связи с известным количественным соотношением между энергией и массой, установленным Эйнштейном в 1905 году [1]. Во время дискуссии с Абрагамом Эйнштейн, пользуясь этим соотношением, определяет границы применимости специальной теории относительности и указывает на необходимость расширения этой теории при включении в нее явления гравитации [2]. В 1911 году Эйнштейн, основываясь на эмпирическом равенстве инертной и тяжелой масс, формулирует принцип эквивалентности инерции и тяготения, являющийся физической основой новой теории гравитации [3]. Успешному применению этого принципа в значительной степени содействовали дискуссии Эйнштейна с Абрагамом и Нордстремом, которые привели Эйнштейна к четкой формулировке нового представления о тяготении.

Абрагам, разработавший теорию тяготения, удовлетворяющую условию Лоренц-инвариантности в бесконечно малой области, выступил [4] против попытки Эйнштейна [5] реализовать идею об эквивалентности тяготения и инерции на примере статического поля. Будучи противником теории относительности, Абрагам, констатируя отказ Эйнштейна от постулата постоянства скорости света, утверждал [6], что сам автор этой теории убедился в ее несостоятельности. В связи с этим Эйнштейн [7] возвращается к вопросу о границах применимости специальной теории относительности и, пользуясь соотношением между энергией и массой, а также эквивалентностью инерции и тяготения, намечает план разработки теории гравитации. Несколько позднее, в связи с работами Нордстрема [8], предложившего теорию тяготения при сохранении принципа постоянства скорости света, Эйнштейн вновь выступает с разъяснением эквивалентности тяжелой и инертной масс и с обоснованием невозможности сохранить постулат постоянства скорости света в общей теории гравитации.

В 1913—1914 годах появилась важная работа Эйнштейна и Гроссмана [9], в которой сделана первая попытка применить сложив-

шиеся уже идеи для разработки теории гравитации при помощи тензорного исчисления. Однако задача об отыскании общековариантной связи между метрикой пространства — времени и тензором энергии-импульса в этих работах еще не была решена. Более того, наметился даже отказ от требования общей ковариантности уравнений поля. Лишь несколько позднее Эйнштейн [10], возвращаясь к условию общей ковариантности, намечает вывод уравнений поля, отвечающих новому представлению о природе гравитации. Однако он приходит к уравнениям вида

$$R_{ij} = -\kappa T_{ij},$$

где T_{ij} — тензор энергии-импульса, подчиненный ограничению $T^a_a = 0$, а R_{ij} определяется формулами

$$R_{ij} = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{i\beta}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^\beta.$$

Эти уравнения еще отличаются от современных уравнений поля.

В последовавшем вскоре дополнении [11] Эйнштейн присоединяет к приведенным выше уравнениям следующее ограничение метрического тензора: $|g_{ij}| = -1$, при выполнении которого R_{ij} совпадает с тензором Риччи. В этом случае написанные выше уравнения не отличаются от современных, поскольку инвариант тензора Риччи исчезает вместе с T^a_a .

В новой работе [12] Эйнштейн, принимая обозначение

$$G_{ij} = R_{ij} + S_{ij},$$

где R_{ij} имеет прежнее значение, а величины S_{ij} заданы формулами

$$S_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ia}^\alpha}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^\alpha \Gamma_{a\beta}^\beta,$$

т. е., вводя тензор Риччи в общих координатах и отказываясь от ограничения $T^a_a = 0$, приходит к уравнениям поля в современной форме

$$G_{ij} = -\kappa \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right).$$

Весь цикл работ завершается в 1916 году подробным и систематическим изложением физических основ и математического аппарата новой теории гравитации [13].

В дальнейшем Эйнштейн улучшает формальный аппарат созданной им теории и разъясняет ее физическое содержание. В этом отношении представляет, например, интерес статья, появившаяся в связи с дискуссией с Котлером [14], по мнению которого завершение общей теории относительности приводит к опровержению принципа эквивалентности. Эйнштейн [15] вновь формулирует основные положения теории и обсуждает значение принципа эквивалентности и условия общей ковариантности, указывая, в частности, что первый содержится во втором. В принципиальном отношении важное значение имеет также работа [16], в которой Эйнштейн вводит

так называемый принцип Маха, согласно которому поле метрического тензора не только связано с тензором энергии-импульса, но полностью им обусловлено.

В развитии формального аппарата теории относительности существенную роль сыграли работы Лоренца [17] и Гильберта [18], представивших новый закон тяготения в вариационной форме. Следуя этому направлению, Эйнштейн также излагает теорию гравитации в форме компактного вариационного принципа, стремясь при этом сохранить наибольшую общность и по возможности не делать специальных предположений о структуре вещества [19].

Некоторое обобщение релятивистского закона тяготения получено в связи с попыткой Эйнштейна приложить уравнения поля к космологии [20]. Эта попытка, предпринятая в предположении статичности космического поля тяготения, привела к принципиальному затруднению, аналогичному затруднению ньютоновской теории гравитации,— так называемому парадоксу Зеелигера [21]. Эйнштейн дополняет уравнения поля «космологическим членом», позволяющим получить формально непротиворечивое решение, приводящее к концепции конечной вселенной сферического типа. Эта работа положила начало многочисленным и разнообразным исследованиям по релятивистской космологии.

В принципиальном отношении важным моментом последующего развития теории относительности явилось изучение вопроса о связи между уравнениями поля и законом движения. В основу концепции Эйнштейна, сложившейся в перечисленных работах, положена идея, согласно которой движение в поле тяготения происходит без участия силы в собственном смысле. Законом движения в поле гравитации является обобщенный закон инерции Галилея, принимающий форму принципа четырехмерной геодезической линии и показывающий, что движение в этом поле происходит с нулевым четырехмерным ускорением. Таким образом, предполагалось, что искомые уравнения поля будут совместимы с принципом геодезической линии. Впоследствии оказалось, что найденные Эйнштейном уравнения поля в общем случае этим свойством не обладают. Поскольку частицы вещества являются особыми точками (или особыми областями) метрического поля, естественно ожидать, как впервые указал еще Вейль [22], что вследствие нелинейности уравнений поля распределение этих точек не может быть задано произвольно. Иными словами, требование интегрируемости уравнений поля должно ограничивать движение частиц. Таким образом возникает возможность отказаться от самостоятельного закона движения, заданного независимо от уравнений поля, и выводить этот закон из уравнений поля. В совместной работе Эйнштейна и Громмера [23] и в последующей за нею статье Эйнштейна [24] устанавливается принципиальная возможность такого объединения закона движения с уравнениями поля. В 1938 году появилось обширное исследование Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [25], в котором изучается приближенное решение уравнений поля для системы точечных масс.

В результате весьма сложных вычислений, подробности которых в опубликованной статье не приводятся, авторы показывают, что требование интегрируемости уравнений поля в рассмотренном ими приближении вполне определяет закон движения точечных масс в виде ньютоновских уравнений, снабженных соответствующими релятивистскими поправками. В фундаментальной работе акад. В. А. Фока [26] уравнения поля приложены к системе тел, имеющих конечные плотности и протяженности. Интегрирование уравнений поля выполнено в этой работе до членов второго порядка относительно ньютоновского потенциала. При этом оказалось, что условием интегрируемости служат ньютоновские уравнения движения для тел рассматриваемой системы. Ниже мы более подробно остановимся на этом важном вопросе.

После завершения релятивистской теории тяготения Эйнштейн и ряд других исследователей предпринимают попытки создания единой теории поля, перед которой ставится задача объяснения явлений гравитации и электромагнетизма с единой точки зрения. Не стремясь к сколько-нибудь систематическому обзору, мы укажем здесь лишь основные направления, в которых развивались эти попытки.

В нескольких статьях [27] Вейль развивает геометрию, представляющую собой некоторое обобщение геометрии Римана. В геометрии Вейля, наряду с метрическим тензором, существенную роль играет также метрический вектор, интерпретируемый как электромагнитный потенциал. При помощи этой геометрии Вейль разрабатывает теорию, в которой метрическая структура пространственно-временного континуума дает одновременное описание гравитационного и электромагнитного полей. Идеи Вейля получили развитие в работе Эддингтона [28], который построил геометрию, основанную на понятии параллельного переноса. К этому направлению относится также один из вариантов единой теории поля Эйнштейна [29]. Позднее, признавая неудовлетворительность единых теорий поля в духе идей Вейля — Эддингтона, Эйнштейн предлагает новую теорию, отказываясь от условия симметрии метрического тензора [30]. В этой теории метрический тензор представляется в виде суммы симметричной и антисимметричной составляющих, отвечающих гравитационному и электромагнитному полям соответственно.

Другое направление открывает исследование Калуза [31], который стремится еще более унифицировать теорию поля, описывая гравитацию и электромагнетизм при помощи одного универсального тензора. Математическим аппаратом этой теории остается геометрия Римана. Однако, вместо четырехмерного, Калуза пользуется пятимерным континуумом, по отношению к которому пространство — время является подпространством, определяемым так называемым цилиндрическим условием. К этому направлению относятся также работы Клейна [32], Фока [33], Мандела [34] и других.

В 1928 году Эйнштейн предложил еще один вариант единой теории поля. Как известно, риманова метрика позволяет сравнивать

величины линейных элементов, построенных в точках, отделенных конечными расстояниями. Однако сравнение подобных элементов по направлениям невозможно; в частности, утрачивается понятие об их параллелизме. В отличие от этого, в геометрии Вейля линейные элементы, отделенные конечным расстоянием, несравнимы не только по направлению, но и по величине. Эйнштейн, отпрвляясь от геометрии Римана, избирает противоположный путь: удерживая риманову метрику, он дополняет ее условием сравнимости линейных элементов также по направлениям, вводя понятие о параллелизме вдали (Fernparallelismus) [35]. При помощи этой геометрии Эйнштейн разрабатывает [36] теорию поля, показывая, что в первом приближении она дает удовлетворительное описание гравитации и электромагнетизма. В развитии этой теории принимают участие Леви-Чивита [37], Майер [38] и другие.

Упомянем еще о попытке построить теорию поля, основанную на представлении о кривизне и кручении пространственно-временного континуума [39], а также о теории Эйнштейна и Майера [40], в которой совместное описание гравитации и электромагнетизма дается в рамках четырехмерной геометрии с помощью векторов с пятью компонентами (Fünfvektoren).

Не останавливаясь на перечислении других попыток создания единой теории поля, заметим, что в одной из своих последних работ [41] Эйнштейн предлагает новое изложение обобщенной теории тяготения, основанной на несимметричном метрическом тензоре. Эту обобщенную теорию Эйнштейн считал вполне убедительной, хотя, как он сам признает, вследствие математических трудностей ему не удалось найти практического пути для сравнения результатов теории с экспериментальными данными.

Поскольку ни один из предлагавшихся до сих пор вариантов единой теории поля не содержит результатов, представляющих непосредственный астрономический интерес, в дальнейшем они не рассматриваются.

§ 2. Некоторые формулы геометрии Римана

Приведем некоторые формулы римановой геометрии, необходимые для дальнейшего изложения.

Прежде всего заметим, что метрика пространственно-временного континуума теории относительности в некотором отношении существенно отличается от обычной метрики римановых пространств. В простейшем случае это различие проявляется при сравнении эвклидовой геометрии с континуумом Минковского, употребляемым в специальной теории относительности. Пусть задана n -мерная квадратичная форма с постоянными коэффициентами

$$\varphi(x, x) = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n.$$

¹ Здесь, как и в дальнейшем (за исключением специально оговоренных случаев), одинаковые нижний и верхний значки являются индексами суммирования; в соответствии с общепринятым соглашением знак суммирования для простоты опущен.

Из теории квадратичных форм известно, что подобная форма всегда может быть приведена к каноническому виду

$$\varphi(x, x) = \varepsilon_{\alpha} x^{\alpha^2}, \quad \varepsilon_{\alpha} = \pm 1, \quad \alpha = 1, \dots, r,$$

где r — ранг матрицы $(g_{\alpha\beta})$, образованной из коэффициентов приводимой формы. Для простоты предположим, что ранг матрицы совпадает с ее порядком, т. е. $r = n$.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду можно выполнить различными способами, применяя, например, методы Лагранжа или Кронекера. При этом приведении выполняется так называемый закон инерции Якоби — Сильвестра, согласно которому число положительных и отрицательных квадратов канонической формы не зависит от способа приведения. Обозначая эти числа соответственно через p и q , имеем $p + q = n$. Разность $p - q$ носит название сигнатуры квадратичной формы.

Следует различать случаи: 1) $p = n$, 2) $q = n$, 3) $p \neq n$, $q \neq n$. В первых двух случаях квадратичная форма называется положительно или отрицательно определенной; в третьем — неопределенной.

Пространству Эвклида соответствует положительно определенная форма. В отличие от этого четырехмерное пространство Минковского описывается линейным элементом

$$s^2 = -x^2 - y^2 - z^2 + t^2,$$

т. е. неопределенной квадратичной формой с сигнатурой —2. Таким образом, геометрия пространства — времени специальной теории относительности не является эвклидовой; ее можно назвать, как это часто делают, псевдоэвклидовой.

Аналогичное различие существует между римановой метрикой и метрикой пространственно-временного континуума общей теории относительности. Первая из них является положительно определенной; в частном случае она вырождается в эвклидову. Геометрия пространства — времени в общей теории относительности должна быть построена таким образом, чтобы в предельном случае она переходила в континуум Минковского с неопределенной квадратической формой. Поэтому геометрию пространства — времени в общем случае можно назвать псевдоримановой.

Несмотря на различие между определенной и неопределенной формами, свойства псевдоримановой геометрии во многих отношениях подобны свойствам геометрии Римана. Вследствие этого приведенные ниже формулы дифференциальной геометрии римановых пространств почти непосредственно переносятся в теорию относительности с неопределенной формой ее линейного элемента.

Рассмотрим n -мерное пространство Римана, заданное квадратичной формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j > 0, \quad (1,2,1)$$

коэффициенты g_{ij} которой представляют собой ковариантные компоненты симметричного тензора второго порядка, называемого фундаментальным метрическим тензором. Эти коэффициенты являются функциями координат x^i , $i = 1, \dots, n$, зависящими от геометрии изучаемого пространства и от выбранной системы координат.

Определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix},$$

составленный из компонент метрического тензора и называемый фундаментальным, имеет положительный знак. Вследствие этого метрический тензор можно задать не только ковариантными, но также контравариантными компонентами

$$g^{ij} = \frac{A^{ij}}{g}, \quad (I, 2,2)$$

где A^{ij} — алгебраическое дополнение элемента g_{ij} в фундаментальном определителе.

Суммы вида $g^{ai} g_{aj}$, представляющие собой результат свертывания тензора четвертого порядка $g^{ik} g_{jl}$, называются смешанными компонентами метрического тензора; они совпадают с так называемыми символами Кронекера

$$\delta_i^j = \begin{cases} +1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Действительно, выражение $A^{ia} g_{ja}$ есть не что иное, как сумма произведений элементов j -ой строки определителя $|g_{ij}|$ на алгебраические дополнения элементов i -ой строки. Согласно известному свойству определителей, эта сумма равна величине определителя, если индексы i, j одинаковы, или нулю, если они различны.

Поэтому вообще

$$g^{ia} g_{ja} = \delta_j^i. \quad (I, 2,3)$$

Отсюда следует, что результат полного свертывания тензора $g^{ik} g_{jl}$ равен числу измерений пространства.

При помощи соответствующего преобразования координат коэффициенты квадратичной формы могут быть приведены к постоянным значениям, а следовательно и к величинам

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

в том и только в том случае, если геометрия пространства является эвклидовой. Задача о подобном приведении является основной в теории криволинейных координат в пространстве Эвклида. Для

случая ортогональных координат эта проблема впервые была решена Ламе в 1859 году.

В общем случае квадратичная форма однозначно определяется геометрией пространства и выбором системы координат. Обратная задача о реконструкции геометрии по квадратичной форме решается основной теоремой метрической геометрии, согласно которой все метрические свойства пространства содержатся в его линейном элементе.

Наиболее простой и удобный способ исследования пространства Римана основан на сравнении его с хорошо изученным пространством Эвклида. Оказывается возможным построить эвклидовы пространства, которые в первом и втором приближениях аппроксимируют пространство Римана в окрестности какой-либо произвольно заданной точки.

Пусть в точке x_0^i коэффициенты квадратичной формы будут g_{ij0} . В смежной точке $x^i + dx^i$ имеем

$$g_{ij} = g_{ij0} + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} \right)_0 dx^\alpha + \dots$$

В первом и втором приближениях соответственно будет

$$g_{ij0}, \quad g_{ij0} + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} \right)_0 dx^\alpha.$$

Введем пространство Эвклида с линейным элементом

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

коэффициенты γ_{ij} которого в точке x_0^i равны g_{ij0} . Это пространство называется касательным к риманову пространству. Понятие касательного пространства позволяет перенести в риманову геометрию целый ряд определений эвклидовой геометрии, например, определение угла между направлениями, построенными в данной точке, определения, связанные с линией, поверхностью, объемом и др. Однако обобщение ряда других геометрических понятий на случай римановой геометрии (например, понятие угла между направлениями, построенными в различных точках) оказывается здесь невозможным.

Рассмотрим далее эвклидово пространство с линейным элементом

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

заданным таким образом, чтобы в точке x_0^i коэффициенты γ_{ij} и их первые производные по координатам были соответственно равны g_{ij0} , $\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} \right)_0$. Это пространство, совпадающее в окрестности точки x_0^i с изучаемым римановым пространством во втором приближении, носит название соприкасающегося пространства Эвклида. Существование соприкасающегося пространства устанавливается, исходя из следующих соображений.

Пусть даны метрические поля g_{ij} , γ_{ij} . Если в какой-либо системе координат в точке x_0^i имеют место равенства

$$g_{ij} = \gamma_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k},$$

то они выполняются в любой другой системе.

По отношению к первому равенству, имеющему тензорный характер, высказанное утверждение очевидно, так как тензорные уравнения сохраняются при общем преобразовании координат. Для второго равенства справедливость этого утверждения вытекает из соотношения

$$\frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}} = g_{ij} \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right) + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \quad (I, 2,4)$$

которое получается из формулы преобразования

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$$

путем дифференцирования. Согласно этому соотношению частные производные от компонент метрического тензора в новой системе координат зависят только от компонент того же тензора и их производных в старой системе. Поэтому, допустив написанные выше равенства в системе x^i , приходим к заключению, что они выполняются и в системе $x^{i'}$.

В дифференциальной геометрии доказывается, что в пространстве Римана всегда можно построить координальную систему, в которой первые производные от компонент метрического тензора по координатам в одной произвольно заданной точке x_0^i равны нулю. Подобная система координат называется геодезической в точке x_0^i . Геодезическую систему координат можно построить для любой точки пространства Римана. Однако система геодезическая в одной точке вообще не является геодезической в какой-либо другой точке риманова пространства. Система геодезическая во всех точках может быть построена только в пространстве Эвклида.

Пусть координаты x^i будут геодезическими в точке x_0^i . Имеем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0.$$

при $x^i = x_0^i$ и $g_{ij} = g_{ij_0}$.

Введем эвклидово пространство с линейным элементом

$$ds^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

где γ_{ij} — постоянные, совпадающие с g_{ij_0} .

Мы имеем теперь метрические поля g_{ij} , γ_{ij} , которые в системе x^i удовлетворяют в точке x_0^i условиям

$$g_{ij} = \gamma_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k}.$$

На основании предыдущего эти равенства в точке x^i_0 имеют место во всех системах координат, откуда и вытекает существование соприкасающегося пространства Эвклида.

Понятие соприкасающегося эвклидового пространства является важным средством изучения римановых пространств. В частности, оно позволяет построить в римановой геометрии понятие о параллельном переносе, имеющее большое значение в теории относительности.

Если пространство Эвклида отнесено к декартовой системе координат, то параллельный перенос тензора любого строения из одной точки пространства в другую не изменяет компонент этого тензора. Однако в общих координатах компоненты тензора испытывают при параллельном переносе изменения, обусловленные различием координатных направлений в различных точках пространства. Пусть параллельный перенос тензора Z^i_j , заданного в точке x^k , производится в точку $x^k + dx^k$. В таком случае в результате параллельного переноса компоненты принимают значения $Z^i_j + dZ^i_j$, приобретая приращения

$$dZ^i_j = -\Gamma^i_{\alpha\beta} Z^{\alpha}_j dx^{\beta} + \Gamma^{\alpha}_{j\beta} Z^i_{\alpha} dx^{\beta}, \quad (I, 2,5)$$

где Γ^i_{jk} — так называемые символы Кристоффеля второго рода, выражающиеся через символы первого рода

$$\Gamma_{jk,\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{j\sigma}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\sigma}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{\sigma}} \right) \quad (I, 2,6)$$

посредством равенства

$$\Gamma^i_{jk} = g^{\sigma i} \Gamma_{jk,\sigma}. \quad (I, 2,7)$$

Заметим, что символы Кристоффеля не являются тензорами. Закон преобразования этих величин при переходе от одной системы координат к другой легко получить при помощи (I, 2,4). Если по

аналогии составить выражение для $\frac{\partial g_{j'k'}}{\partial x^{i'}}$ и сложить его с (I, 2,4),

а затем из суммы вычесть $\frac{\partial g_{k' i'}}{\partial x^{i'}}$, то получится

$$\Gamma^{i'k',j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} g_{jk} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{ik,l}$$

Умножая это соотношение на $g^{i'l'} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta}$ и производя свер-

тывание, находим закон преобразования символов Кристоффеля

$$\Gamma^{l'k'} = \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^{i'k'}. \quad (I, 2,8)$$

Умножая (I, 2,8) на $\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}$ и суммируя по индексу l' , перепишем предыдущее уравнение в форме

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} \Gamma_{i'k'}^{l'} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{ik}^j, \quad (\text{I, 2,9})$$

которая будет полезна в дальнейшем.

В римановой геометрии параллельный перенос тензора из точки x^i в бесконечно близкую точку $x^i + dx^i$ определяется как параллельный перенос в эвклидовом пространстве, соприкасающемся в точке x^i с данным пространством Римана.

Так как символы Кристоффеля зависят лишь от компонент метрического тензора и их первых производных, которые имеют одинаковые значения для риманова пространства и для соприкасающегося с ним пространства Эвклида, то параллельный перенос в римановой геометрии определяется формулами, написанными выше для пространства Эвклида.

С понятием параллельного переноса тесным образом связана операция ковариантного дифференцирования.

Рассмотрим поле контравариантного вектора Z^i . Пусть в точках x^σ , $x^\sigma + dx^\sigma$ компоненты этого вектора будут соответственно Z_j^i , $Z_i + dZ^i$. Произведем параллельный перенос вектора $Z^i + dZ^i$ в точку x^σ . Принимая во внимание, что переход от точки $x^\sigma + dx^\sigma$ к точке x^σ сопровождается приращением координат $-dx^\sigma$, имеем в результате переноса

$$Z^i + dZ^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i Z^\alpha dx^\beta.$$

Поэтому разность между компонентами вектора $Z^i + dZ^i$, параллельно перенесенного в точку x^σ , и значениями компонент вектора в той же точке равна

$$dZ^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i Z^\alpha dx^\beta.$$

Эта величина называется ковариантным или абсолютным дифференциалом данного вектора. Вводя для него обозначение DZ^i , имеем по определению

$$DZ^i = \left(\frac{\partial Z^i}{\partial x^j} + \Gamma_{ja}^i Z^a \right) dx^j. \quad (\text{I, 2,10})$$

Ковариантный дифференциал представляет собой сумму произведений элементарных приращений координат на выражения вида $\frac{\partial Z^i}{\partial x^j} + \Gamma_{ja}^i Z^a$. Совокупность последних носит название ковариантной производной вектора Z^i . Наиболее распространенным обозначением ковариантной производной являются символы

$$\nabla_j Z^i = Z_{|j}^i = \frac{\partial Z^i}{\partial x^j} + \Gamma_{ja}^i Z^a. \quad (\text{I, 2,11})$$

Это определение легко обобщается на случай тензора произвольного порядка и строения. Например, ковариантная производная от смешанного тензора второго порядка выражается формулой

$$Z_{ijk}^l = \frac{\partial Z_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ak}^i Z_j^a - \Gamma_{jk}^a Z_a^i. \quad (I, 2, 12)$$

Производя преобразования координат, нетрудно показать, что ковариантное дифференцирование не нарушает тензорного характера дифференцируемой величины. Ковариантная производная от данного тензора представляет собой новый тензор, порядок ковариантности которого на единицу превосходит порядок дифференцируемого тензора.

Приложив понятие ковариантной производной к метрическому тензору и воспользовавшись определением символов Кристоффеля, имеем

$$g_{ijk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^a g_{aj} - \Gamma_{jk}^a g_{ai} = 0.$$

Аналогично $g_{jk}^{ii} = 0$ и $\delta_{jk}^i = 0$. Эти равенства выражают так называемую теорему Риччи, согласно которой метрический тензор играет роль постоянной при ковариантном дифференцировании. Поле метрического тензора является результатом параллельного переноса тензора g_{ij} , заданного в какой-либо точке, во все другие точки пространства.

В дальнейшем мы будем пользоваться также понятием ковариантной расходимости тензора

$$\text{Div } Z_j^i = Z_{ja}^i, \quad (I, 2, 13)$$

т. е. свернутой ковариантной производной, представляющей собой новый тензор, порядок контравариантности которого на единицу ниже порядка контравариантности данного тензора.

Введем далее кривизну кривой в римановом пространстве.

Направление кривой в данной точке характеризуется касательным вектором, контравариантными компонентами которого служат производные от координат по дуге кривой $\frac{dx^i}{ds}$. Составим отношение абсолютного дифференциала этого вектора к соответствующему элементу дуги $\frac{D dx^i}{ds ds}$. Это отношение является вектором, нормальным к касательному. Длина его, как нетрудно убедиться, равна $\frac{d\varphi}{ds}$, где $d\varphi$ — угол поворота касательной, соответствующий элементу ds . Этот вектор называется вектором кривизны кривой в данной точке. По определению имеем

$$\frac{D dx^i}{ds ds} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}. \quad (I, 2, 14)$$

Отсюда следует, что линии нулевой кривизны, называемые геодезическими, определяются в пространстве Римана уравнениями

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (I, 2,15)$$

В евклидовом пространстве геодезические, т. е. прямейшие линии, являются одновременно линиями кратчайшего расстояния и наоборот. В римановой геометрии кратчайшие линии, когда они существуют, являются также прямейшими. Однако в общем случае обратное утверждение оказывается неправильным.

Напишем уравнения геодезической линии в несколько иной форме, которой часто будем пользоваться в дальнейшем.

Одну из координат, например, последнюю x^n , обозначим через t . Соответствующее уравнение геодезической линии дает

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^n \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2.$$

Поэтому очевидное соотношение

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = \frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d^2 t}{ds^2} \frac{dx^\sigma}{dt}$$

можно представить в виде

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = \left(\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} - \Gamma_{\alpha\beta}^n \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2.$$

Внося это соотношение в каждое из $n - 1$ остальных уравнений геодезической линии, получаем

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^n \frac{dx^\sigma}{dt} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0. \quad (I, 2,16)$$

В теории кривизны римановых пространств фундаментальное значение имеет так называемый тензор Римана — Кристоффеля, характеризующий кривизну пространства в данной точке и в направлении данной двумерной плоскости.

Смешанные составляющие тензора Римана—Кристоффеля выражаются формулами

$$R_{ij, k}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^\sigma \Gamma_{j\sigma}^l - \Gamma_{jk}^\sigma \Gamma_{i\sigma}^l. \quad (I, 2,17)$$

Очень часто этот тензор задается при помощи ковариантных компонент

$$R_{ij, kl} = g_{l\sigma} R_{ij, k}^\sigma.$$

Из его определения непосредственно вытекают равенства

$$R_{ji, kl} = -R_{ij, kl}, \quad R_{ij, lk} = R_{ij, kl} = R_{kl, ij},$$

показывающие, что тензор $R_{ij,kl}$ антисимметричен относительно индексов пар i, j и k, l и симметричен относительно пар индексов. Нетрудно также убедиться в том, что результат циклирования

каких-либо трех индексов равен нулю. Вследствие этих тождественных соотношений, число компонент тензора Римана—Кристоффеля, которые могут быть заданы независимо, значительно сокращается и связано с числом n измерений пространства формулой

$$N = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}.$$

Так например, для четырехмерного пространства число независимых компонент составляет 20. Тензор Римана—Кристоффеля позволяет установить общее соотношение между компонентами какого-либо тензора и альтернированной ковариантной производной этого тензора. Это соотношение, известное под названием тождества Риччи, имеет вид

$$X_{ab..p|qr} - X_{ab..p|rq} = R^{\omega}_{a, qr} X_{\omega b..p} + \dots + R^{\omega}_{p, qr} X_{ab.. \omega}. \quad (I, 2,18)$$

Ковариантная производная от тензора Римана—Кристоффеля образует тензор пятого порядка, удовлетворяющий следующему свойству цикличности

$$R_{\alpha\beta, \gamma\delta/i} + R_{\beta i, \gamma\delta/\alpha} + R_{i\alpha, \gamma\delta/\beta} = 0, \quad (I, 2,19)$$

которое носит название тождества Бианки—Падова.

Заканчивая перечень необходимых свойств тензора Римана—Кристоффеля, укажем еще, что исчезновение этого тензора является необходимым и достаточным условием вырождения римановой геометрии в евклидову.

В теории относительности важную роль играет тензор Риччи, образуемый путем свертывания тензора Римана—Кристоффеля. Для ковариантных компонент тензора Риччи по определению имеем

$$R_{ij} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha i, \beta j} = R_{\alpha i, j}^{\alpha}. \quad (I, 2,20)$$

Как легко убедиться, тензор Риччи симметричен относительно индексов ковариантности, вследствие чего число его независимых компонент равно $\frac{1}{2} n(n + 1)$. В частности, в пространстве четырех измерений это число равно десяти.

В развернутой форме компоненты тензора Риччи выражаются формулами

$$R_{ij} = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \Gamma_{i\beta}^{\beta}}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{i\alpha}^{\beta} \Gamma_{j\beta}^{\alpha}, \quad (I, 2,21)$$

которые нетрудно получить, воспользовавшись приведенным выше значением тензора Римана—Кристоффеля.

Если написать тождество Бианки—Падова в виде

$$R_{\alpha\beta, \gamma\delta/i} - R_{\beta i, \delta\gamma/\alpha} - R_{\alpha i, \gamma\delta/\beta} = 0$$

и произвести свертывание путем умножения на $g^{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}$, то после необходимых упрощений получится формула

$$R_{i/\sigma}^{\sigma} = \frac{1}{2} R_{/i}, \quad (I, 2,22)$$

выражающая расходимость тензора Риччи через градиент от его скаляра $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$.

Из тензора Риччи и его скаляра можно образовать симметричный тензор второго порядка

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}R, \quad (I, 2,23)$$

который мы условимся называть тензором Эйнштейна. Если написать значение для смешанных компонент этого тензора и составить его свернутую ковариантную производную, то, воспользовавшись приведенным выше выражением для расходимости тензора Риччи, нетрудно получить

$$E_{i/\sigma}^{\sigma} = 0. \quad (I, 2,24)$$

Эта теорема, устанавливающая исчезновение ковариантной расходимости тензора Эйнштейна, имеет весьма важное значение в теории относительности.

Как уже было указано, исчезновение тензора Римана—Кристоффеля служит условием вырождения римановой геометрии в евклидову. Простейшими формами римановых пространств, не отвечающих этому условию, являются пространства постоянной кривизны, в каждой точке которых кривизны одинаковы во всех направлениях. Таким образом, согласно определению, пространство постоянной кривизны изотропно во всех точках. При этом имеет место теорема Шура, утверждающая, что в римановом пространстве постоянной кривизны с числом измерений более двух кривизны одинаковы во всех точках. Иными словами, изотропное пространство является также однородным.

Для всех классов римановых пространств постоянной кривизны основную квадратичную форму можно привести к виду

$$ds^2 = \frac{dx^1{}^2 + \dots + dx^n{}^2}{\left[1 + \frac{k}{4}(x^1{}^2 + \dots + x^n{}^2)\right]^2}, \quad (I, 2,25)$$

где k — постоянная, называемая кривизной. При $k = 0$ эта форма переходит в линейный элемент пространства Эвклида в декардовых прямоугольных координатах. Эвклидово пространство является пространством Римана нулевой кривизны.

Если $k < 0$, то пространство характеризуется радиусом кривизны $R = \frac{1}{\sqrt{-k}}$. Геометрия такого пространства, называемого гиперболическим, впервые была построена Лобачевским.

При $k > 0$ имеем риманово пространство постоянной положительной кривизны, называемое сферическим. Радиус кривизны его определяется формулой $R = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

В предельном случае при $R \rightarrow \infty$ гиперболическое и сферическое пространства переходят в пространство Эвклида.

В теории кривизны доказывается, что для пространств постоянной кривизны тензор Римана—Кристоффеля имеет вид

$$R_{ij,kl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (I, 2,26)$$

Если умножить (I, 2,26) на g^{il} и произвести свертывание, то получится

$$R_{jk} = -(n-1)kg_{jk}. \quad (I, 2,27)$$

При $n > 3$ эта формула представляет собой необходимое, но недостаточное условие постоянства кривизны, так как число существенных компонент тензора Римана—Кристоффеля, равное $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$,

превышает число компонент тензора Риччи, равное $\frac{n(n+1)}{2}$, вследствие чего обратный переход от (I, 2,27) к (I, 2,26) вообще невозможен. Однако при $n = 3$ число тех и других компонент равно шести и (I, 2,27) оказывается не только необходимым, но и достаточным условием пространства постоянной кривизны.

Приведенные в данном параграфе формулы римановой геометрии, выводимые для случая положительно определенной квадратичной формы, почти непосредственно переносятся в теорию относительности. В отдельных формулах необходимо лишь вместо g , писать $-g$, так как вследствие неопределенности квадратичной формы пространственно-временного континуума фундаментальный определитель имеет в теории относительности отрицательное значение.

§ 3. Принцип эквивалентности

Физической основой релятивистской теории гравитации является так называемый принцип эквивалентности, выражающий наиболее важную и общую из известных особенностей поля тяготения. Простейшая формулировка этого принципа сводится, как известно, к утверждению, что в достаточно малой области пространственно-временного континуума, отвечающего заданному полю гравитации, существует система отсчета, в которой движение частицы в указанной малой области происходит так же, как и в отсутствие поля гравитации. С физической точки зрения принцип эквивалентности выражает тот факт, что в каждой достаточно малой области все тела обладают в данном поле тяготения одинаковыми ускорениями. Эту фундаментальную особенность поля тяготения, отличающую последнее от других физических полей, принято называть равенством инертной и тяжелой масс.

Для однородного поля тяготения равенство инертной и тяжелой масс впервые нашло свое выражение в законе падения Галилея, подвергалось эмпирической проверке в опытах Ньютона с маятниками и получило в конце прошлого века надежное подтверждение в хорошо известных и тщательно выполненных исследованиях Этвеша [42], а также в некоторых более поздних работах. В случае неоднородного поля это равенство подтверждается выводами небесной механики, в которой, как известно, не делают различия между инертной и тяжелой массами.

Не имея возможности входить в подробное обсуждение роли равенства инертной и тяжелой масс в задачах небесной механики, мы ограничимся здесь двумя простыми примерами.

Пусть M , M' и m , m' — инертные и тяжелые массы Солнца и планеты соответственно. Невозмущенное движение планеты относительно Солнца определяется уравнениями вида

$$\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} = 0, \quad \mu = \gamma (M + m) \frac{m' M'}{m M}.$$

Применяя третий закон Кеплера $a^3 : T^2 = \mu : 4\pi^2$ к двум планетам с большими полуосями орбит a , a_1 и периодами обращения T , T_1 , получим

$$\frac{m'}{m} : \frac{m'_1}{m_1} = \frac{a^3 T_1^2}{a_1^3 T^2} \left(1 + \frac{m_1}{M}\right) \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1}. \quad (I, 3,1)$$

С достаточной для наших целей точностью можно писать

$$\frac{m'}{m} : \frac{m'_1}{m_1} = \frac{a^3 T_1^2}{a_1^3 T^2}. \quad (I, 3,2)$$

Применяя это соотношение к планетам Меркурий — Марс и Уран — Марс, получаем 0,999 и 1,001 соответственно. Для Земли и Плутона формула (I, 3,2) дает около 0,9999.

Несколько более точную проверку равенства инертной и тяжелой масс можно произвести в случае Луны.

Элементарный расчет показывает, что спутник Земли, обращающийся непосредственно над земной поверхностью в плоскости экватора, имел бы период

$$T = 2\pi \frac{m}{m'} \sqrt{\frac{R}{g}}, \quad (I, 3,3)$$

где R — радиус Земли, g — ускорение силы тяжести, освобожденное от влияния вращения и сжатия Земли¹, m , m' — инертная и тяжелая массы спутника.

¹ Строго говоря, эта величина определяется формулой $g = \frac{\gamma M'}{R^2}$ и является ускорением свободного падения лишь при выполнении равенства инертной и тяжелой масс в однородном поле тяжести.

Обозначим через M , M' и M_1 , M_1' инертные и тяжелые массы Земли и Луны соответственно.

Согласно третьему закону Кеплера имеем

$$\frac{4\pi^2 R^3}{T^2 M'} \frac{m}{m'} = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2 (M + M_1)} \frac{M}{M'} \frac{M_1}{M_1'} = \gamma,$$

где a_1 , T_1 — большая полуось и период геоцентрического обращения Луны.

Поэтому, принимая во внимание (I, 3,3), находим

$$\frac{M_1}{M_1'} = \frac{g T_1^2}{4\pi^2 R} \left(\frac{R}{a_1}\right)^3 \left(1 + \frac{M_1}{M}\right). \quad (\text{I, 3,4})$$

В это соотношение нельзя, конечно, внести наблюдаемый сидерический период обращения Луны и найденное по параллаксу отношение $R : a_1$, так как третий закон Кеплера выполняется только при невозмущенном движении. Луна подвергается столь сильному возмущению, что третий закон Кеплера в ее движении нарушается. Однако в небесной механике доказывается, что закон Кеплера формально может быть сохранен, если вместо величины a_1 , вычисленной по среднему параллаксу, внести

$$a_1 \left(1 + \frac{m^2}{6} - \frac{176}{288} m^4 + \frac{m^2 e^2}{4} + \dots\right),$$

где m — основной параметр динамической теории Луны, e — эксцентриситет земной орбиты. Таким образом, пользуясь соотношением (I, 3,4), необходимо заменить a_1 величиной $a_1' = a_1 \cdot 1,0009135$. При этом получится $a_1' : R = 60,3216$, поскольку по среднему параллаксу Луны получается $a_1 : R = 60,2665$.

Вычисление по формуле (I, 3,4) дает $M_1 : M_1' = 1,00003$.

Итак, равенство инертной и тяжелой масс, а следовательно и вытекающий из него принцип эквивалентности выполняется с достаточно высокой точностью как в однородном поле гравитации, так и в ряде случаев движения в неоднородном поле.

Принцип эквивалентности позволяет формулировать закон движения частицы в заданном поле тяготения.

Фиксируем какую-либо точку мировой линии частицы в пространственно-временном континууме. Согласно принципу эквивалентности в бесконечно малой окрестности этой точки движение частицы, отнесенное к соответствующим образом выбранной системе отсчета x^i , происходит так же, как в отсутствии поля. Поэтому в указанной системе отсчета движение частицы вблизи выбранной точки должно отвечать уравнениям $\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0$.

Иными словами, должен выполняться закон свободного движения частицы специальной теории относительности.

Перейдем теперь от системы $x^{i'}$, обеспечивающей выполнение принципа эквивалентности в рассматриваемой бесконечно малой области пространственно-временного континуума, к произвольной системе x^i .

Дифференцируя равенство $\frac{dx^{i'}}{ds} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds}$, имеем

$$\frac{d^2x^{i'}}{ds^2} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{d^2x^\alpha}{ds^2}.$$

Внося сюда соотношение

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \Gamma_{\alpha'\beta'}^{i'},$$

непосредственно вытекающее из (1, 2,9) при соответствующей переделке индексов, и принимая во внимание, что в галилеевых координатах $x^{i'}$ символы Кристоффеля тождественно исчезают, получим

$$\frac{d^2x^{i'}}{ds^2} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right). \quad (1, 3,5)$$

Это показывает, что при переходе к произвольным координатам закон $\frac{d^2x^{i'}}{ds^2} = 0$ принимает вид

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (1, 3,6)$$

т. е. приводится к уравнениям геодезической линии (1,2,15). Таким образом в каждой произвольно выбранной точке мировая линия частицы соприкасается с геодезической линией пространственно-временного континуума; следовательно, мировая линия совпадает с геодезической.

Заметим, что в галилеевых координатах совокупность четырех производных $\frac{d^2x^{i'}}{ds^2}$ определяет контравариантный вектор; с кинематической точки зрения он представляет собой четырехмерное ускорение частицы. Согласно определению тензора равенство (1, 3,5) показывает, что левая часть уравнения (1,3,6) является выражением четырехмерных компонент вектора ускорения в произвольных координатах. Поэтому уравнения (1, 3,6) можно рассматривать как обобщенный закон инерции Галилея.

Принцип эквивалентности в приведенной выше формулировке имеет чисто локальный характер, поскольку необходимый для его выполнения переход от римановой метрики пространственно-временного континуума к метрике Минковского в общем случае возможен лишь в малой области. Переход к закону (1, 3,6) требует, чтобы риманова метрика с точностью до членов второго порядка совпадала с соприкасающейся евклидовой метрикой, что имеет

место лишь в бесконечно малой окрестности какой-либо точки континуума. На конечное движение частицы принцип эквивалентности в обычной формулировке можно непосредственно распространить только в случае евклидовой метрики пространства — времени в целом, т. е. для полей гравитации очень специального строения. Такими полями являются инерциальные поля механики Ньютона (центробежные, поля Кориолиса), которые исчезают при подходящем выборе системы отсчета. Переход к полю произвольного строения, требующий введения римановой метрики, с формальной точки зрения нарушает эквивалентность инерции и тяготения. В связи с этим некоторые авторы считают, что принцип эквивалентности, не имеет в теории относительности самостоятельного значения, а закон геодезической линии должен выводиться из уравнений поля. С особенной ясностью и последовательностью эта точка зрения развивается в работах акад. В. А. Фока, в частности в его монографии по общей теории относительности [43].

Основным аргументом в пользу этой точки зрения является, как уже сказано, локальный характер принципа эквивалентности, т. е. применимость его лишь к бесконечно малой окрестности какой-либо точки пространственно-временного континуума. Между тем общие свойства римановой метрики позволяют существенно расширить формулировку принципа эквивалентности и сделать ее применимой к конечному движению частицы в поле тяготения произвольного строения [44]. Математической предпосылкой такого расширения служит понятие о соприкосновении (оскуляции) римановой и евклидовой метрик вдоль данной линии.

Поскольку в теории относительности понятие об оскуляции вдоль линии не применялось, мы приведем здесь его краткое обоснование, следуя в общем Картану [45].

Пусть в n -мерном пространстве Римана с коэффициентами g_{ij} основной квадратической формы и соответствующими им символами Кристоффеля Γ_{ij}^k дана линия, координаты текущей точки которой выражены в функции некоторого параметра $u^i = u^i(t)$.

Введем пространство Эвклида того же числа измерений с компонентами метрического тензора q_{ii} , символами Кристоффеля F_{ij}^k и координатами x^i , которые оставим пока неопределенными. Уравнения $x^i = u^i(t)$ представляют в этом пространстве непрерывную линию. Обозначив через r' радиус-вектор текущей точки M' кривой и через e'_i — координатные векторы в этой точке, составим систему дифференциальных уравнений

$$dr' = e'_\alpha \frac{du^\alpha}{dt} dt, \quad de'_i = \Gamma_{i\beta}^\alpha e'_\alpha \frac{du^\beta}{dt} dt, \quad (I, 3,7)$$

потребовав, чтобы при $t = t_0$ векторы e'_α при попарном внутреннем умножении давали g_{ij} риманова пространства в точке $u^i = u^i(t_0)$.

Система (I, 3,7) имеет единственное решение (с точностью до радиуса-вектора r'_0 точки $u^i(t_0)$); в частности, она однозначно определяет систему векторов e'_i в точках кривой.

Легко убедиться в том, что при всех значениях t имеет место соотношение $e'_i e'_j = g_{ij}$. Действительно, второе из (I, 3,7) дает

$$\frac{de_i}{dt} e'_j = \Gamma_{i\beta}^{\alpha} \frac{du^{\beta}}{dt} e_{\alpha} e'_j.$$

Если произвести перестановку индексов i, j и сложить найденное при этом равенство с предыдущим, то получится дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} (e'_i e'_j) = \Gamma_{i\beta}^{\alpha} \frac{du^{\beta}}{dt} (e_{\alpha} e'_j) + \Gamma_{j\beta}^{\alpha} \frac{du^{\beta}}{dt} (e'_i e_{\alpha}), \quad (I, 3,8)$$

которому удовлетворяет произведение координатных векторов в точках кривой при начальном условии $(e'_i e'_j)_0 = g_{ij}(t_0)$.

С другой стороны, если в соотношение

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{\beta}} \frac{du^{\beta}}{dt}$$

внести равенство

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{\beta}} = g_{aj} \Gamma_{i\beta}^{\alpha} + g_{ai} \Gamma_{j\beta}^{\alpha}, \quad (I, 3,9)$$

вытекающее из самого определения символов Кристоффеля, то получится дифференциальное уравнение

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \Gamma_{i\beta}^{\alpha} \frac{du^{\beta}}{dt} g_{aj} + \Gamma_{j\beta}^{\alpha} \frac{du^{\beta}}{dt} g_{ai}, \quad (I, 3,10)$$

которому удовлетворяют коэффициенты g_{ij} в точках кривой при том же начальном условии. Поскольку уравнения (I, 3,8) и (I, 3,10) одинаковы и решения их единственны, должно быть $e'_i e'_j = g_{ij}$.

Итак, во всех точках рассматриваемой кривой выполняется равенство $g_{ij} = q_{ij}$.

Для упрощения последующих выкладок будем предполагать, что уравнения кривой имеют вид $u^1 = t$, $u^i = a = \text{const}$ при $i = 2, \dots, n$, т. е., что кривая является одной из координатных линий. Очевидно, что это условие не нарушает общности, так как оно может быть осуществлено путем соответствующего преобразования координат.

Вместо (I, 3,7) мы теперь имеем

$$\frac{dr'}{du^1} = e'_1, \quad \frac{de'_i}{dt} = \Gamma_{i1}^{\alpha} e'_{\alpha}, \quad (I, 3,11)$$

где r' и все e'_i являются функциями одного u^1 .

Напомним, что система координат в пространстве Эвклида остается еще неопределенной, поскольку для ее однозначного задания необходимо определить координатные вектора e_i во всех точках пространства, тогда как до сих пор мы определили их лишь для точек кривой. Выбор координат можно произвести путем зада-

ния связи между радиусом-вектором r точки M' пространства и ее координатами. Если положить $r = r(x^1 \dots x^n)$, то получится

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = e_i, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^\alpha e_\alpha. \quad (I, 3, 12)$$

Первые производные от радиуса-вектора по координатам дают систему координатных векторов в соответствующей точке, а их внутренние произведения определяют компоненты q_{ij} метрического тензора. Производные второго порядка являются линейными комбинациями координатных векторов, причем коэффициентами при этих векторах служат символы Кристоффеля Γ_{ij}^k данной эвклидовой метрики.

Выбор функции $r(x^1, \dots, x^n)$ в нашем случае ограничен требованием, чтобы при переходе от произвольной точки M пространства к точке M' кривой вектора e_i превращались в уже заданные вектора e'_i . Этот выбор мы произведем следующим образом.

Принадлежащую кривой точку M' с координатами $u^1, u^i = a^i (i \neq 1)$ и радиусом-вектором r' свяжем с точкой M , для координат которой положим: $x^1 = u^1$, x^i при $i \neq 1$ вообще отлично от a^i .

Пусть радиус-вектор r точки M определяется формулой

$$r = r' + e'_\omega (x^\omega - a^\omega) + \frac{1}{2} \Gamma_{\omega\tau}^k e'_k (x^\omega - a^\omega) (x^\tau - a^\tau), \quad (I, 3, 13)$$

где ω, τ — индексы суммирования, принимающие значения 2, 3 ... n , а через e'_k, Γ_{ij}^k обозначены координатные векторы и символы Кристоффеля римановой метрики в точке M' .

Дифференцируя это равенство по координатам $x^1 = u^1$ и x^i и положив затем $x^i = a^i$, получим

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x^1} \right)_{M'} = e'_1, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x^i} \right)_{M'} = e'_i,$$

убедившись таким образом в том, что выбор системы координат при помощи (I, 3, 13) находится в согласии с принятым ранее ограничением.

Вычисляя производные второго порядка и переходя затем от M к M' , найдем, учитывая (I, 3, 11),

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^{1^2}} \right)_{M'} = \Gamma_{11}^\alpha e'_\alpha, \quad \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^1 \partial x^i} \right)_{M'} = \Gamma_{i1}^\alpha e'_\alpha, \quad \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{M'} = \Gamma_{ij}^\alpha e'_\alpha,$$

т. е. вообще

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{M'} = \Gamma_{ij}^\alpha e'_\alpha$$

при всех значениях индексов i, j .

В то же время, согласно общей формуле (1, 3, 12), имеем

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{M'} = F_{ij}^{\alpha} e'_{\alpha}.$$

Следовательно, в точке M' выполняется соотношение $F_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$.

Воспользовавшись формулами вида (1, 3, 9) для коэффициентов g_{ij} и q_{ij} и принимая во внимание, что вдоль кривой компоненты метрических тензоров риманова и эвклидова пространств одинаковы, приходим к заключению, что вдоль кривой совпадают и значения первых производных от этих компонент по координатам.

Итак, мы видим, что существует возможность произвести такой выбор координат в пространстве Эвклида, при котором все g_{ij} и их первые производные по координатам в римановой и эвклидовой метриках имеют во всех точках данной кривой одинаковые значения. Эвклидова метрика соприкасается с римановой вдоль всей данной кривой. В бесконечно малой окрестности этой кривой эвклидова метрика представляет риманову с точностью до членов второго порядка.

Равенство инертной и тяжелой масс, выражающее независимость закона движения частицы в заданном поле гравитации от ее массы, вместе с понятием об оскуляции вдоль линии позволяет расширить обычную формулировку принципа эквивалентности, сделав его применимым к конечному движению.

Прежде всего заметим, что поля тяготения можно разделить на два типа. К первому из них относятся поля, которым отвечает эвклидова метрика пространственно-временного континуума. Движение частицы в полях этого типа происходит в отсутствие силы тяготения в ньютоновском смысле; как уже упоминалось, в дорелятивистской механике такие поля являются полями сил инерции.

Ко второму типу относятся поля более сложной структуры, которым отвечает риманова геометрия пространственно-временного континуума. Такие поля академик В. А. Фок называет истинными в отличие от полей первого типа, которые «имитируются» выбором системы отсчета. В механике Ньютона второму типу отвечают поля тяготения в собственном смысле.

Между полями указанных типов имеется существенное различие в граничных условиях. Потенциал «истинного» поля на бесконечности исчезает, тогда как потенциал «имитированного» поля не удовлетворяет этому требованию и при переходе на бесконечность может неопределенно возрастать.

Пусть в произвольно заданном поле гравитации (т. е. в случае римановой метрики пространства — времени) происходит движение свободной частицы. Из равенства инертной и тяжелой масс следует, что закон движения не зависит от массы частицы и определяется лишь начальными условиями. Пользуясь понятием об оскуляции вдоль линии, введем эвклидову метрику, соприкасающуюся с дан-

ной римановой метрикой вдоль всей четырехмерной траектории частицы. Отсюда и вытекает расширенная формулировка принципа эквивалентности: для любого однозначно определенного движения свободной частицы в заданном поле тяготения имеется возможность построить такую систему отсчета в эвклидовом пространстве—времени, в которой это движение происходит так же, как в поле гравитации первого типа (т. е. как в отсутствие «истинного» поля).

Линию оскуляции, рассматриваемую в качестве кривой в римановом пространстве, обозначим для краткости через C , а в пространстве Эвклида — через C' . Линию C' называют в геометрии результатом *развертывания* или *отображения* кривой C на эвклидово пространство. Употребляя эту терминологию, можно сказать, что любой определенный закон движения частицы в поле гравитации можно развернуть на эвклидово пространство—время.

Допустим, что развертываемая кривая C является геодезической линией римановой метрики. Поскольку уравнения геодезической содержат лишь символы Кристоффеля, можно утверждать, что вследствие соотношения $\Gamma_{ij}^k = F_{ij}^k$, выполняющегося вдоль всей линии оскуляции, отображенная кривая будет также геодезической. Иными словами, геодезическая линия риманова пространства развертывается на прямую эвклидова пространства. Легко видеть, что выполняется и обратное: линия, развертывающаяся на прямую, является геодезической.

Пользуясь этим заключением, можно получить важное следствие из приведенной формулировки принципа эквивалентности. Если движение в поле тяготения первого типа происходит по закону геодезической линии, то, не прибегая к уравнениям поля, можно утверждать, что и в заданном поле любой структуры движение свободной частицы отвечает этому закону. Таким образом, принцип геодезической линии является основным законом движения частицы в гравитационном поле, выводимым из общих соображений независимо от той или иной формы уравнений поля.

Следует отметить, что каждому конечному движению в заданном поле соответствует особая эвклидова метрика, позволяющая произвести развертывание закона движения. Варьируя начальные условия, необходимо также соответствующим образом изменить и оскулирующую эвклидову метрику. Поэтому расширенный принцип эквивалентности не позволяет, конечно, свести «истинное» поле в целом к «иммитированному». Вместе с тем, стремясь к общности теории, естественно предположить, что поля обоих типов имеют одинаковую физическую природу и отличаются лишь структурой. «Имитированные» поля центробежных или кориолисовых сил по своей физической природе так же мало отличаются от «истинного» поля тяготения Солнца, как электростатическое поле плоского конденсатора от сферического поля заряженного шара.

При разработке теории гравитации очень существенную роль играл принцип общей относительности или, как его часто называют, принцип ковариантности. Этот принцип состоит, как известно, в

требовании, чтобы во всех системах координат законы физики имели одну и ту же форму. При изложении общей теории относительности значение этого требования часто сильно преувеличивается. Так, О. Д. Хвольсон называл его «первой и главнейшей частью фундамента общей теории относительности» [46]. Между тем условие ковариантности само по себе не является каким-либо новым физическим законом. Его нельзя также считать и новым формальным требованием, присущим только общей теории относительности, поскольку, например, и законы классической механики можно, как известно, привести к форме, отвечающей этому требованию. Еще в 1917 году Кречман указывал [47], что ковариантность относится только к способу формулировки законов, а не к их физическому содержанию. В последние годы это обстоятельство неоднократно подчеркивал акад. В. А. Фок (смотри, напр., [43]). Интересно отметить, что в одной из статей [48], появившейся уже после завершения основ общей теории относительности, Эйнштейн высказал приблизительно такую же точку зрения, указав при этом на эвристическое значение условия ковариантности. Здесь уместно еще раз напомнить, что действительной основой релятивистской теории гравитации является не условие ковариантности, а принцип эквивалентности, выражающий наиболее общую физическую особенность полей тяготения. Именно этот принцип приводит к заключению о том, что гравитация связана с метрикой пространственно-временного континуума. Слияние же гравитации с метрикой пространства—времени составляет сущность общей теории относительности и определяет ее главную методологическую ценность.

В заключение отметим, что многие авторы рассматривают принцип эквивалентности как некую рабочую гипотезу, сыгравшую существенную роль лишь в процессе разработки теории гравитации и сохраняющую в настоящее время значение только педагогического приема, полезного при элементарном разъяснении основ общей теории относительности. Эддингтон утверждает, что «принцип эквивалентности сыграл огромную роль, давая указания при первоначальном построении обобщенной теории относительности. Теперь, когда мы достигли нового взгляда на природу мира, он сделался менее необходим» [49]. Еще более категорические суждения высказывает акад. В. А. Фок, считающий, что в современной теории относительности принцип эквивалентности вообще не имеет самостоятельного значения и может представлять интерес лишь в качестве следствия уравнений поля. Автор не может присоединиться к этой точке зрения, поскольку отказ от самостоятельного значения принципа эквивалентности лишает теорию относительности ее главной эмпирической основы.

Представляется более естественным потребовать, чтобы математический аппарат теории относительности и прежде всего ее уравнения поля отвечали этому важному физическому принципу, основанному на результатах непосредственного эксперимента и многочисленных выводах небесной механики.

§ 4. Закон сохранения

Как уже указывалось, уравнения поля гравитации связывают метрику пространственно-временного континуума с соответствующим распределением материи. Последнее описывается в теории относительности при помощи так называемого тензора энергии-импульса. В специальной теории относительности, характеризующейся псевдоевклидовой геометрией пространственно-временного континуума Минковского, тензор энергии-импульса определяется формулой

$$T^{ik} = \rho_0 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}, \quad (I, 4,1)$$

где ρ_0 — собственная плотность, $\frac{dx^i}{ds}$ — компоненты четырехмерной скорости материи.

Если ввести плотность ρ в системе отсчета, движущейся относительно гравитационных масс, связанную с собственной плотностью соотношением

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2,$$

то выражение для контравариантных компонент тензора энергии-импульса примет вид

$$T^{ik} = \rho \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}. \quad (I, 4,2)$$

Обозначив проекции скорости через u, v, w , получим следующую систему значений компонент

$$\begin{aligned} T^{ik} = & \rho u^2, \quad \rho uv, \quad \rho uw, \quad \rho v \\ & \rho v^2, \quad \rho vw, \quad \rho w \\ & \rho w^2, \quad \rho w \\ & \rho. \end{aligned} \quad (I, 4,2)$$

В более общем случае написанные выражения компонент тензора энергии-импульса должны быть дополнены членами, описывающими микроскопические движения и внутренние натяжения в материи. Так, в собственных координатах тензор энергии-импульса для идеальной жидкости имеет компоненты

$$T_0^1 = T_0^2 = T_0^3 = p_0, \quad T_0^4 = \rho_0, \quad T^{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad (I, 4,3)$$

где p_0, ρ_0 — собственное давление и собственная плотность материи.

Составим выражение компонент тензора энергии-импульса в произвольной системе координат x^σ .

Согласно закону преобразования тензора имеем

$$T^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^\beta} T_0^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^\omega} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^\omega} p_0 + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x_0^1} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^1} \rho_0, \quad (I, 4,4)$$

где через ω обозначен индекс суммирования, принимающий значения 1, 2, 3.

Компоненты метрического тензора в собственных координатах равны

$$g_0^{11} = g_0^{22} = g_0^{33} = -1, \quad g_0^{44} = 1, \quad g_0^{ik} = 0, \quad i \neq k.$$

Поэтому в общих координатах они определяются формулами

$$g^{ik} = -\frac{\partial x^i}{\partial x_0^\omega} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^\omega} + \frac{\partial x^i}{\partial x_0^4} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^4},$$

непосредственно вытекающими из формул преобразования контравариантного тензора. С другой стороны, вследствие того, что в собственных координатах материя покоится, имеем

$$\frac{dx_0^1}{ds} = \frac{dx_0^2}{ds} = \frac{dx_0^3}{ds} = 0, \quad \frac{dx_0^4}{ds} = 1,$$

и следовательно

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^4}, \quad (I, 4,5)$$

что позволяет переписать предыдущую формулу в виде

$$g^{ik} = -\frac{\partial x^i}{\partial x_0^\omega} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^\omega} + \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad (I, 4,6)$$

Внося (I, 4,5—6) в (I, 4,4), легко получаем

$$T^{ik} = (\rho_0 + p_0) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} - g^{ik} p_0. \quad (I, 4,7)$$

В специальной теории относительности тензор энергии-импульса удовлетворяет весьма важному закону

$$\frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (I, 4,8)$$

который является обобщением ньютоновских законов сохранения массы и количества движения.

Для того, чтобы представить этот закон в более наглядной форме, приложим его к системе тел, находящихся в какой-либо конечной области пространства.

Окружим рассматриваемую систему замкнутой поверхностью таким образом, чтобы в течение всего времени движения каждое из тел системы оставалось во внутренней области. Составим далее интеграл

$$P_i = \iiint T_i^4 dx dy dz, \quad (I, 4,9)$$

взятый по области, ограниченной выбранной поверхностью.

Смешанные компоненты тензора энергии-импульса заданы соотношением

$$T_i^4 = -\rho u, \quad -\rho v, \quad -\rho w, \quad \rho$$

и согласно (I, 4,8) удовлетворяют условию

$$\frac{\partial T_i^4}{\partial t} = -\frac{\partial T_i^1}{\partial x} - \frac{\partial T_i^2}{\partial y} - \frac{\partial T_i^3}{\partial z}. \quad (\text{I, 4,10})$$

При $i = 1, 2, 3$ интеграл P_i определяет компоненты количества движения системы, а при $i = 4$ он равен полной массе системы. Изменение каждой из этих величин со временем задано производными

$$\frac{dP_i}{dt} = \iiint \frac{\partial T_i^4}{\partial t} dx dy dz,$$

которые, согласно (I, 4,10), приводятся к виду

$$\frac{dP_i}{dt} = -\iiint \left(\frac{\partial T_i^1}{\partial x} + \frac{\partial T_i^2}{\partial y} + \frac{\partial T_i^3}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Во всех точках поверхности, ограничивающей область интегрирования, $T_i^j = 0$. Поэтому каждый из интегралов правой части, например

$$\iiint \frac{\partial T_i^1}{\partial x} dx dy dz = \iint \left. T_i^1 \right|_{x_1}^{x_2} dy dz,$$

равен нулю, и мы получаем уравнения

$$\frac{dP_i}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (\text{I, 4,11})$$

выражающие сохранение количества движения и полной массы системы.

Рассмотрим простой пример. Пусть дана система тел с собственными массами m_s , движущихся относительно наблюдателя со скоростями v_s . Пренебрегая гравитационным взаимодействием между массами m_s , вычислим величину P_4 , представляющую полную массу m системы.

Интеграл (I, 4,9) приводится в рассматриваемом случае к сумме интегралов, взятых по объему каждого из тел системы. Определим величину интеграла для тела m_s . Линейный элемент

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$$

дает

$$\left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{1}{1 - v_s^2}.$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - v_s^2}.$$

Вводя элемент собственного объема $d\omega$, имеем

$$dx dy dz = d\omega (1 - v_s^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Если вернуться к обыкновенным единицам измерений, то обе формулы примут вид

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{v_s^2}{c^2}\right)^{-1}, \quad dx dy dz = d\omega \left(1 - \frac{v_s^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому интересующий нас интеграл будет

$$\left(1 - \frac{v_s^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \iiint \rho_0 d\omega = \frac{m_s}{\left(1 - \frac{v_s^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

а полная масса системы определится формулой

$$m = \sum m_s \left(1 - \frac{v_s^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

выражающей зависимость между массой и кинетической энергией.

В общей теории относительности, в которой геометрия пространственно-временного континуума является римановой, закон сохранения в форме (1, 4, 8) не имеет места. Необходимое обобщение его может быть получено на основании принципа эквивалентности.

Предположим, что мы имеем случай специальной теории относительности и пользуемся галилеевой системой координат x^σ , в которой тензор энергии-импульса T_i^α определяется формулой (1, 4, 1) и удовлетворяет закону сохранения (1, 4, 8). Произведя преобразование координат, перейдем к общей системе $x^{\sigma'}$, в которой тензор энергии-импульса задан компонентами $T_{i'}^{\alpha'}$. Согласно определению тензора, имеем

$$T_i^\alpha = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T_{i'}^{\alpha'}.$$

Дифференцируя это равенство по x^{β} , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\beta} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^2 x^{\gamma'}}{\partial x^i \partial x^\beta} T_{\gamma'}^{\alpha'} + \frac{\partial x^i}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} T_{i'}^{\alpha'} + \\ &+ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial T_{i'}^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}}. \end{aligned}$$

В галилеевых координатах, для которых компоненты метрического тензора постоянны, символы Кристоффеля имеют нулевые значения. Поэтому на основании формулы преобразования символов Кристоффеля (I, 3,9) можно написать

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \Gamma_{\beta' \gamma'}^{\alpha'}, \quad \frac{\partial^2 x^{\gamma'}}{\partial x^i \partial x^\beta} = - \frac{\partial x^i}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \Gamma_{\beta'}^{\gamma'}$$

Произведя подстановку, получим

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial T_{i'}^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} + \Gamma_{\beta' \gamma'}^{\alpha'} T_{i'}^{\gamma'} - \Gamma_{\beta'}^{\gamma'} T_{\gamma'}^{\alpha'} \right)$$

или, в соответствии с определением ковариантной производной (I, 3,12),

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} T_{i'|\beta'}^{\alpha'}$$

Положив $\alpha = \beta$, имеем после свертывания

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial x^i} T_{i'|\alpha'}^{\alpha'}$$

Умножая это соотношение на $\frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}}$ и суммируя по индексу i , находим

$$T_{k'|\alpha'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}} \frac{\partial T_{\beta}^{\alpha}}{\partial x^\alpha} \quad (I, 4,12)$$

В галилеевых координатах (т. е. в отсутствие поля гравитации) тензор энергии-импульса удовлетворяет закону (I, 4,8). Поэтому в поле гравитации, отвечающем общим координатам x^σ , этот тензор следует закону

$$T_{k'|\alpha'}^{\alpha'} = 0, \quad (I, 4,13)$$

т. е. имеет исчезающую ковариантную расходимость.

Рассматриваемое поле гравитации является частной формой общего гравитационного поля и по физической природе не отличается от последнего. Поэтому естественно принять, что и в общем случае закон сохранения энергии-импульса выражается тем же тензорным равенством.

Закон (I, 4,13) в общем случае не приводится к столь простой форме, как в специальной теории относительности. Однако, применяя его к конечной системе тел и пренебрегая внешними полями, его можно привести к соотношению, выражающему сохранение некоторых свойств системы.

Введем так называемую плотность тензора энергии-импульса

$$F_i^k = T_i^k \sqrt{-g}. \quad (I, 4,14)$$

и образуем ее обыкновенную четырехмерную расходимость.

Внося в очевидное соотношение

$$\frac{\partial F_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \sqrt{-g} \frac{\partial T_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + T_i^{\alpha} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}}$$

значение

$$\frac{\partial T_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \Gamma_{i\beta}^{\alpha} T_{\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} T_i^{\beta},$$

непосредственно вытекающее из закона (I, 4, 13), получим после очень простых переделок

$$\frac{\partial F_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = F_{\alpha}^{\beta} \Gamma_{i\beta}^{\alpha} + F_i^{\alpha} \left(\frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \right).$$

Свернутый символ Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}$ находится очень легко. В самом деле, согласно определению

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \right),$$

откуда

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}.$$

С другой стороны, произведение $g g^{\beta\gamma}$ представляет собой алгебраическое дополнение элемента $g_{\beta\gamma}$ в определителе $|g_{ij}|$.

Поэтому на основании теоремы о дифференцировании определителей имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} = g g^{\beta\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}$$

и, следовательно,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Дивергенция плотности тензора энергии-импульса принимает теперь вид

$$\frac{\partial F_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = F_{\alpha}^{\beta} \Gamma_{i\beta}^{\alpha}.$$

Написав правую часть в развернутой форме

$$F_{\alpha}^{\beta} \Gamma_{i\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} F_{\alpha}^{\beta} g^{\nu\alpha} \frac{\partial g_{i\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{1}{2} F_{\alpha}^{\beta} g^{\alpha\nu} \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2} F_{\alpha}^{\beta} g^{\alpha\nu} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^i}$$

и убедившись в том, что первые два члена исчезают, получаем

$$\frac{\partial F_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{2} F_{\alpha}^{\beta} g^{\alpha\nu} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^i}.$$

Заметив еще, что вследствие $g^{\alpha\gamma}g_{\beta\gamma} = \delta_{\beta}^{\alpha}$ имеет место равенство

$$g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^i} = -g_{\beta\gamma} \frac{\partial g^{\gamma\alpha}}{\partial x^i},$$

можем окончательно написать

$$\frac{\partial F_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i}. \quad (I, 4,15)$$

Введем далее систему величин t_i^{α} , подчинив их дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial t_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} \quad (I, 4,16)$$

и требованию, чтобы каждая из них принимала нулевое значение в случае эвклидовой геометрии пространственно-временного континуума. Совокупность этих величин носит название плотности псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля.

Комбинируя (I, 4,15—16), имеем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (F_i^{\alpha} + t_i^{\alpha}) = 0, \quad (I, 4,17)$$

которое является новой формой закона (I, 4,13).

Приложим (I, 4,17) к конечной системе тел, пренебрегая внешними полями и допуская, что на достаточно большом расстоянии от системы геометрия пространства—времени является эвклидовой.

Окружим рассматриваемую систему какой-либо замкнутой поверхностью и составим интеграл

$$P_i = \iiint (F_i^{\alpha} + t_i^{\alpha}) dx^1 dx^2 dx^3, \quad (I, 4,18)$$

взятый по внутренней области. Изменение этого интеграла со временем характеризуется производной

$$\frac{dP_i}{dt} = \iiint \frac{\partial}{\partial x^4} (F_i^{\alpha} + t_i^{\alpha}) dx^1 dx^2 dx^3,$$

которую, в соответствии с (I, 4,17), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dt} = & - \iint \left| F_i^1 + t_i^1 \right|_{(1)}^{(2)} dx^2 dx^3 - \iint \left| F_i^2 + t_i^2 \right|_{(1)}^{(2)} dx^3 dx^1 - \\ & - \iint \left| F_i^3 + t_i^3 \right|_{(1)}^{(2)} dx^1 dx^2. \end{aligned}$$

Не занимаясь рассмотрением этого уравнения в общем случае, предположим, что построенная поверхность достаточно велика, вследствие чего все элементы ее расположены в областях, где пространственно-временной континуум имеет эвклидову геометрию.

Во всех точках поверхности величины F_i^k , t_i^k исчезают, и мы имеем соотношение

$$\frac{dP_i}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (I, 4, 19)$$

показывающее, что четыре величины P_i сохраняются в течение всего времени движения. Первые три из них, соответствующие $i = 1, 2, 3$, определяют количество движения системы, а последняя равна полной массе системы.

§ 5. Уравнения поля Эйнштейна

Согласно принципу эквивалентности геометрия пространственно-временного континуума в каждом конкретном случае должна быть выбрана таким образом, чтобы уравнения геодезической линии давали правильное описание движения в поле гравитации.

Для осуществления этого требования необходимо построить теоретическую зависимость между метрическим тензором, характеризующим геометрию пространства — времени, и распределением масс, которыми обусловлено данное поле гравитации. Как уже было указано, такая зависимость устанавливается в теории относительности в виде уравнений гравитационного поля.

Формулируем основные условия, которым должны удовлетворять уравнения поля.

Согласно принципу относительности форма уравнений поля не должна зависеть от выбора системы координат. Этому условию, называемому в дальнейшем для краткости условием A , можно удовлетворить в том случае, если искать уравнения поля в тензорной форме, так как всякое тензорное равенство, установленное в одной системе координат, сохраняется при переходе к любой другой системе.

Геометрия риманова пространства вполне определяется соответствующим линейным элементом. В частности, пространственно-временной континуум, рассматриваемый как четырехмерная псевдориманова метрика с сигнатурой -2 , однозначно характеризуется полем метрического тензора g_{ij} . Распределение масс, отвечающее тому или другому полю гравитации, описывается тензором энергии-импульса T_{ij} . Поэтому, в соответствии с релятивистским представлением о природе гравитации, мы можем потребовать, чтобы уравнения поля представляли соотношения, связывающие метрический тензор с тензором энергии-импульса (условие B).

Тензор энергии-импульса удовлетворяет, как мы видели, закону сохранения (I, 4, 13). Форма уравнений поля должна находиться в согласии с этим законом (условие C).

Наконец, необходимо потребовать, чтобы релятивистская теория гравитации в предельном случае переходила в теорию тяготения Ньютона (условие D). Это требование, имеющее первостепенное значение для согласования теории с результатами наблюдений,

можно формулировать следующим образом: уравнения поля гравитации вместе с уравнениями геодезической линии в первом приближении должны привести к закону движения Ньютона

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x^i} \quad (1, 5, 1)$$

и к уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi k^2 \rho, \quad (1, 5, 2)$$

связывающему потенциал U с плотностью гравитационных масс ρ . Последнее условие можно представить в еще более конкретной форме.

Рассмотрим случай слабого поля, когда геометрия пространственно-временного континуума мало отличается от евклидовой. Для компонент метрического тензора примем

$$g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}, \quad (1, 5, 3)$$

где через δ_{ij} обозначены коэффициенты линейного элемента специальной теории относительности, т. е.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} -1 & i = j = 1, 2, 3 \\ +1 & i = j = 4 \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

а через h_{ij} — малые величины, характеризующие отклонение пространства—времени от евклидовой метрики. Будем удерживать члены, линейные относительно величин h_{ij} и их производных, опуская члены более высоких порядков. Пользуясь релятивистской системой единиц, в которой механические скорости измеряются долями скорости света, будем также опускать произведения величин h_{ij} и их производных на компоненты скоростей. В этом приближении уравнения геодезической линии можно написать в виде

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} = -\Gamma_{44}^\sigma.$$

Согласно определению символов Кристоффеля с принятой степенью точности имеем

$$\Gamma_{44}^\sigma = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial h_{4\sigma}}{\partial t}.$$

В случае статического поля компоненты метрического тензора являются функциями координат и не зависят от времени, вследствие чего второй член в выражении для Γ_{44}^σ тождественно равен нулю. Если поле является переменным, то зависимость его от времени обусловлена перемещением гравитационных масс, так как случай, когда изменяются величины масс, не имеет в данном приближении существенного значения. Иными словами, время может входить в выражение h_{ij} не непосредственно, но лишь через

координаты гравитационных масс и их производные. Отсюда следует, что в рассматриваемом приближении второй член в выражении Γ_{44}^σ должен быть опущен и для переменного поля. Итак,

$$\Gamma_{44}^\sigma = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma}$$

и уравнения геодезической линии приводятся к виду

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(-\frac{1}{2} g_{44} \right),$$

совпадая с законом движения Ньютона, если величину $-\frac{1}{2} g_{44}$ отождествить (с точностью до аддитивной постоянной) с гравитационным потенциалом.

Таким образом мы приходим к следующей формулировке условия D : в случае достаточно слабого поля гравитационные уравнения при соответствующем выборе координат должны приводить к уравнению Пуассона относительно последней из компонент метрического тензора.

Условиям $A-C$ отвечает любое ковариантное уравнение вида

$$X_{ij} = -\kappa T_{ij}, \quad (I, 5,4)$$

где κ — произвольная постоянная, X_{ij} — симметричный тензор второго порядка, составленный при помощи метрического тензора g_{ij} и удовлетворяющий условию $X_{ij;\alpha}^\alpha = 0$. Тензор X_{ij} должен быть выбран таким образом, чтобы уравнение (I, 5,4) отвечало также условию D . Введенный в § 3 тензор Эйнштейна

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$$

вполне определяется метрическим тензором и имеет, как мы видели, исчезающую ковариантную расходимость. Поэтому для отождествления тензора X_{ij} в (I, 5,4) с тензором Эйнштейна достаточно показать, что последний обеспечивает переход к уравнению Пуассона.

Примем для компонент метрического тензора разложение (I, 5,3) и найдем приближенное выражение тензора Риччи, сохраняя только члены, линейные относительно величин h_{ij} и их производных. В этом приближении имеем

$$R_{ij} = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (I, 5,5)$$

так как остальные члены в (I, 2, 21) имеют второй порядок. Символы Кристоффеля с той же степенью точности равны

$$\Gamma_{ij}^\alpha = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{j\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (I, 5,6)$$

Вычислив фундаментальный определитель

$$g = -1 - h, \quad (I, 5,7)$$

где

$$h = \delta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = -h_{11} - h_{22} - h_{33} + h_{44},$$

легко находим

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (I, 5,8)$$

Внося значения (I, 5,6,8) в (I, 5,5) и выполнив необходимую перегруппировку членов, получаем

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \square h_{ij} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^j} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha i}}{\partial x^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha j}}{\partial x^\alpha} \right) \right], \quad (I, 5,9)$$

где через \square обозначен оператор $-\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Для упрощения компонент тензора Риччи (I, 5,9) произведем теперь малое преобразование координат. Пусть $l^\alpha(x^1, \dots, x^4)$ — система четырех функций, каждая из которых имеет порядок величин h_{ij} и удовлетворяет необходимым аналитическим условиям, но остается пока неопределенной.

Введем новые координаты $x^{\alpha'}$ при помощи соотношений

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + l^\alpha.$$

Компоненты $g_{i'j'}$ метрического тензора в новой системе определяются формулами

$$g_{i'j'} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}},$$

которые дают

$$g_{i'j'} = g_{ij} - \delta_{\alpha i} \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^i} - \delta_{\beta j} \frac{\partial l^\beta}{\partial x^j}$$

или

$$h_{ij} = h_{i'j'} + \delta_{ii} \frac{\partial l^i}{\partial x^j} + \delta_{jj} \frac{\partial l^j}{\partial x^i}. \quad (I, 5,10)$$

Дифференцируя последнее равенство по x^j и положив затем $j = \alpha$, умножим его на $\delta^{\alpha\alpha}$. После свертывания находим

$$\delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i'\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} + \delta^{\alpha\alpha} \delta_{ii} \frac{\partial^2 l^i}{\partial x^{\alpha^2}} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\alpha}. \quad (I, 5,11)$$

Умножая (I, 5,10) на δ^{ij} и выполняя полное свертывание, имеем

$$h = h' + 2 \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\alpha},$$

откуда

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial h'}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial t^\alpha}{\partial x^\alpha}. \quad (1, 5, 12)$$

Комбинируя (1, 5, 11—12), получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial h'}{\partial x^{i'}} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i'\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} - \delta_{ii} \square t'. \quad (1, 5, 13)$$

Четыре функции t' оставались до сих пор неопределенными. Подчиним их теперь соотношениям

$$\delta_{ii} \square t' = \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i}, \quad (1, 5, 14)$$

которые представляют собой систему уравнений Даламбера и не противоречат условию о порядке функций t' . Выполнимость подобного выбора функций t' вытекает из возможности интегрирования уравнений (1, 5, 14) (например, по методу запаздывающих потенциалов). В новой системе координат имеет место соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h'}{\partial x^{i'}} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha i'}}{\partial x^{\alpha'}} = 0,$$

к которому приводится (1, 5, 13) при учете (1, 5, 14).

Таким образом, в случае слабого поля можно построить координаты, в которых тензор Риччи с точностью до членов первого порядка относительно величин h_{ij} и их производных имеет компоненты

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \square h_{ij}, \quad (1, 5, 15)$$

а тензор Эйнштейна (1, 2, 23) выражается формулой

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \square \left(h_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} h \right). \quad (1, 5, 16)$$

Пользуясь этими координатами и отождествив X_{ij} с тензором Эйнштейна, напомним уравнения поля (1, 5, 4) в виде

$$\frac{1}{2} \square \left(h_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} h \right) = -\kappa T_{ij}. \quad (1, 5, 17)$$

Если принять еще во внимание соотношение

$$\frac{1}{2} \square h = \kappa T,$$

которое получается из (1, 5, 17) путем умножения на δ^{ij} и полного свертывания, то (1, 5, 17) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} \square h_{ij} = -\kappa \left(T_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} T \right), \quad (1, 5, 18)$$

где T — скаляр тензора энергии-импульса, равный $\delta^{\alpha\alpha} T_{\alpha\alpha}$. Рассмотрим последнее из уравнений системы (1, 5, 18), соответствующую

щее $i = j = 4$. В первом приближении компоненты тензора энергии-импульса, зависящие от скоростей, могут быть опущены, и единственная отличная от нуля компонента будет $T_{44} = \rho$. Скаляр этого тензора равен ρ . Заметив далее, что оператор $\square + \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, приложенный к h_{44} , дает величину более высокого порядка, вследствие чего волновой оператор $-\square$ можно заменить лапласианом, получим последнее из (I, 5,18) в виде

$$\Delta\left(-\frac{1}{2}g_{44}\right) = -\frac{1}{2}\kappa\rho. \quad (\text{I, 5,19})$$

Таким образом, отождествление X_{ij} с тензором Эйнштейна находится в согласии с условием D и в случае слабого поля обеспечивает переход уравнений поля в уравнение Пуассона для ньютоновского потенциала. При этом полное совпадение (I, 5,19) с уравнением Пуассона (I, 5,2) достигается определенным выбором постоянной κ .

В системе CGS имеем

$$\kappa = \frac{8\pi k^2}{c^4}. \quad (\text{I, 5,20})$$

Если же пользоваться так называемой релятивистской системой единиц, в которой гравитационная постоянная теории Ньютона и скорость света имеют единичные значения, то

$$\kappa = 8\pi. \quad (\text{I, 5,21})$$

Итак, в согласии с условиями $A - D$ уравнения поля гравитации можно написать в форме

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -8\pi T_{ij}. \quad (\text{I, 5,22})$$

Уравнения поля (I, 5,22) допускают простое обобщение. Поскольку метрический тензор играет при ковариантном дифференцировании роль постоянной, можно, не нарушая условий $A-C$, принять

$$X_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda g_{ij},$$

где Λ — произвольная постоянная. Величине Λ для согласования с условием D необходимо приписать достаточно малое значение, чтобы при переходе к первому приближению членом Λg_{ij} можно было пренебречь. Вместо (I, 5,22) можно написать

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda g_{ij} = -8\pi T_{ij}. \quad (\text{I, 5,23})$$

Эти уравнения называют уравнениями поля с космологическим или Λ -членом. При достаточно малом значении космологической постоянной Λ введение этого члена не изменяет приближенных решений уравнений поля. Однако точная форма (I, 5,23) весьма существенно отличается от (I, 5,22).

Кроме приведенных выше условий $A - D$, Эйнштейн при обосновании уравнений поля принял [12] дополнительное требование, согласно которому тензор X_{ij} представляет собой линейную функцию относительно вторых производных от g_{ij} по координатам и не зависит от производных более высоких порядков. Это допущение, принятое по аналогии с уравнением Пуассона, является чисто математическим ограничением, не получившим какого-либо физического обоснования. Между тем оно оказывается весьма существенным, определяя вид тензора X_{ij} с точностью до трех произвольных постоянных. Как показал Фермейль [50], все тензоры второго порядка, зависящие только от g_{ij} и от их первых и вторых производных и являющиеся при этом линейными функциями вторых производных, с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$X_{ij} = R_{ij} + C_1 g_{ij} R + C_2 g_{ij},$$

где R — инвариант тензора Риччи, а C_1, C_2 произвольные постоянные.

Воспользовавшись законом сохранения $X_{i/\alpha}^\alpha = 0$ и соотношением $R_{i/\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} R_{,i}$ (смотри (I, 2,22)), находим $C_1 = -\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$X_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + C_2 g_{ij}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что с точностью до члена вида $C_2 g_{ij}$ сформулированные выше условия $A - D$ вместе с дополнительным допущением Эйнштейна определяют уравнения поля вполне однозначно. Если же отказаться от этого дополнительного допущения, то уравнения поля (I, 5,22) не будут необходимым следствием условий $A - D$.

Почти одновременно с Эйнштейном уравнения поля в форме (I, 5,22) были выведены Гильбертом [18] на основе вариационного принципа и теории вещества Ми. Однако с физической точки зрения вывод Гильберта не является удовлетворительным. К числу его недостатков относится не только специальное предположение о строении вещества, которое не является необходимым (вывод уравнений поля на основе вариационного принципа, свободный от этого ограничения, см., например, в [51]), но также постулирование принципа наименьшего действия для гравитационного поля и материи. Представляется более естественным, следуя Эйнштейну, рассматривать вариационный принцип в качестве математического следствия уравнений поля подобно тому, как вариационные принципы классической механики выводятся из законов Ньютона. Придерживаясь этой точки зрения, мы не приводим здесь формулировки вариационного принципа.

В некоторых случаях удобнее пользоваться иной формой уравнений поля. Введем величину

$$L = \sqrt{-g} g^{\sigma\tau} (\Gamma_{\sigma\alpha}^\beta \Gamma_{\tau\beta}^\alpha - \Gamma_{\sigma\tau}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta), \quad (I, 5,24)$$

которую по аналогии с ньютоновской механикой обыкновенно называют функцией Лагранжа. Положим

$$q^{ij} = \sqrt{-g} g^{ij}, \quad q_k^{ij} = \frac{\partial q^{ij}}{\partial x^k}.$$

Рассматривая L как функцию величин q^{ij} , q_k^{ij} , можно доказать соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial q^{ij}} = -\Gamma_{i\alpha}^{\beta} \Gamma_{j\beta}^{\alpha} + \Gamma_{ij}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}^{ij}} = -\Gamma_{ij}^{\alpha} + \delta_i^{\alpha} \Gamma_{j\beta}^{\beta}, \quad (I, 5,25)$$

которыми мы и воспользуемся. Составим расходимость

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}^{ij}}$$

и вычтем из нее первое из (I, 5,25). Сравнивая полученное таким образом соотношение с определением тензора Риччи (I, 2,21), находим простое выражение компонент этого тензора через функцию Лагранжа

$$R_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}^{ij}} - \frac{\partial L}{\partial q^{ij}}. \quad (I, 5,26)$$

Нетрудно убедиться в том, что лагранжиан L является однородной функцией как величин q^{ij} , так и их производных q_k^{ij} , хотя и с различными показателями однородности. В самом деле, умножая первое из равенств (I, 5,25) на q^{ij} и производя суммирование по i, j , получим согласно определению (I, 5,24)

$$q^{ij} \frac{\partial L}{\partial q^{ij}} = -L. \quad (I, 5,27)$$

Если умножить второе из (I, 5,25) на производную

$$q_{\alpha}^{ij} = \sqrt{-g} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^{\alpha}} + g^{ij} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}},$$

которую можно представить в виде

$$q_{\alpha}^{ij} = \sqrt{-g} (-g^{\beta i} \Gamma_{\alpha\beta}^j - g^{\beta j} \Gamma_{\alpha\beta}^i + g^{ij} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}),$$

так как

$$\frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta},$$

в чем мы уже убедились в предыдущем параграфе, и

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{\beta i} \Gamma_{\alpha\beta}^j - g^{\beta j} \Gamma_{\alpha\beta}^i,$$

вследствие $g_{jk}^{ij} = 0$, то после простых преобразований будет

$$q_a^{ij} \frac{\partial L}{\partial q_a^{ij}} = 2L. \quad (I, 5,28)$$

Образуем теперь тензор Эйнштейна (I, 2,23). Пользуясь соотношением (I, 5,26), легко находим

$$E_{ij} = (\delta_i^\sigma \delta_j^\tau - \frac{1}{2} g_{ij} g^{\sigma\tau}) \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_a^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} \right) = -8\pi T_{ij}. \quad (I, 5,29)$$

Для пустоты система (I, 5,29) принимает очень простую форму

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_a^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} = 0, \quad (I, 5,30)$$

аналогичную уравнениям Лагранжа классической механики.

В общем случае уравнения (I, 5,29) позволяют найти выражение для псевдотензора энергии гравитационного поля, который был введен в предыдущем параграфе. Согласно определению (I, 4, 16) псевдотензор удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} F_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}.$$

Поэтому

$$16\pi \frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{ij} g^{\sigma\tau} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_a^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} \right). \quad (I, 5,31)$$

На основании известной теоремы о дифференцировании определителей можно написать

$$g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g}{\partial x^k},$$

так как произведения $g g^{ij}$ являются алгебраическими дополнениями элементов g_{ij} в определителе $|g_{ij}|$. С другой стороны, из соотношения $g_{ij} g^{ij} = 4$ вытекает

$$g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}.$$

Следовательно,

$$g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k}.$$

Пользуясь этим соотношением, можем написать

$$-\frac{1}{2} g_{ij} g^{\sigma\tau} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} q_k^{\sigma\tau},$$

вследствие чего (I, 5,31) принимает вид

$$16\pi \frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = -q_k^{\sigma\tau} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} \right)$$

или

$$16\pi \frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} \frac{\partial q_k^{\sigma\tau}}{\partial x^\alpha} + q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}}. \quad (I, 5,32)$$

Составим далее частную производную от функции Лагранжа по координате x^k . Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} \frac{\partial q^{\sigma\tau}}{\partial x^k} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} \frac{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}}{\partial x^k}.$$

Если принять во внимание соотношение

$$\frac{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 q^{\sigma\tau}}{\partial x^\alpha \partial x^k} = \frac{\partial q^{\sigma\tau}}{\partial x^\alpha},$$

то получится

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} \frac{\partial q_k^{\sigma\tau}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} q_k^{\sigma\tau}.$$

Поэтому уравнение (I, 5,32) переходит в следующее

$$16\pi \frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \delta_k^\alpha L \right).$$

Таким образом, с точностью до члена с исчезающей расходимостью можно принять

$$16\pi t_k^i = -q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\sigma\tau}} + \delta_k^i L. \quad (I, 5,33)$$

Эта формула выражает псевдотензор энергии гравитационного поля через метрический тензор, описывающий геометрию пространственно-временного континуума.

§ 6. Вопрос об однозначности уравнений поля

Вернемся к вопросу об однозначности гравитационных уравнений Эйнштейна.

В предыдущем параграфе сформулированы четыре условия, которые играют роль основных руководящих указаний при отыскании формы уравнений поля. Мы видели, что присоединение к ним дополнительного условия, требующего, чтобы тензор X_{ij} в (I, 5,4) был линейной функцией вторых производных от компонент метрического тензора по координатам и не содержал производных более

высоких порядков, позволяет определить этот тензор однозначно. Единственность уравнений поля может при этом нарушаться лишь вследствие неточности определения тензора энергии-импульса.

Если же отказаться от дополнительного условия, которое имеет главным образом формальное значение и по-видимому не поддается удовлетворительному обоснованию с физической точки зрения, то уравнения поля оказываются неоднозначными, поскольку они не могут быть выведены из условий $A - D$. Формальное доказательство такой неоднозначности связано с исследованием уравнения

$$X_{i/a}^a = 0, \quad (I, 6, 1)$$

где X_{ij} — искомый симметричный тензор второго порядка, выражающийся через метрический тензор.

Требуется показать, что тензор Эйнштейна $R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$ не является единственным решением уравнения (I, 6, 1). Интегрирование этого уравнения в ковариантных производных оказывается довольно сложной задачей. Поскольку такое интегрирование не является для наших целей необходимым, мы укажем здесь, каким образом могут быть получены частные решения, существенно отличающиеся от решения Эйнштейна.

Построим тензор второго порядка, называемый гамильтоновой производной от инварианта.

Прежде всего введем понятие о дискриминантном тензоре Риччи, т. е. тензоре четвертого порядка ε_{ijkl} антисимметричном относительно всех пар индексов с основной компонентой ε_{1234} , равной квадратному корню из абсолютной величины метрического определителя. При $g < 0$ компоненты ε_{ijkl} тензора Риччи равны $\pm\sqrt{-g}$, если группа индексов $ijkl$ отличается от 1234 четным или нечетным числом перестановок соответственно, или нулю, если среди этих индексов имеются равные.

Пусть в какой-либо точке континуума заданы четыре линейные элемента, компоненты которых соответственно равны d_1x^a, \dots, d_4x^a . В дифференциальной геометрии римановых пространств дается следующее выражение для объема, построенного на этих элементах

$$dV = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} d_1x^\alpha d_2x^\beta d_3x^\gamma d_4x^\delta. \quad (I, 6, 2)$$

Легко видеть, что элемент объема (I, 6, 2) является инвариантом, так как он представляет собой результат полного свертывания произведения ко- и контравариантных тензоров. Для упрощения положим, что каждый из четырех линейных элементов, образующих рассматриваемый объем, направлен по одной из координатных линий, т. е.

$$d_1x^a = dx^1, 0, 0, 0 \dots d_4x^a = 0, 0, 0, dx^4.$$

Тогда (I, 6, 2) примет вид

$$dV = \varepsilon_{1234} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \sqrt{-g} d\tau. \quad (I, 6, 3)$$

где через $d\tau$ обозначено произведение четырех дифференциалов координат. Этим выражением элемента объема мы и будем пользоваться в дальнейшем. Пусть I — инвариант, построенный при помощи компонент метрического тензора и их производных

$$g_{i\alpha} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}, \quad g_{i\alpha\beta} = \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \quad \dots$$

Образуем произведение $I\sqrt{-g} d\tau$ и составим интеграл

$$\int I\sqrt{-g} d\tau, \quad (I, 6,4)$$

взятый по какой-либо определенной четырехмерной области. Величина его является инвариантом и не зависит от выбора координат.

Не изменяя метрический тензор на границе области интегрирования, произведем теперь небольшое преобразование координат, в результате которого компоненты метрического тензора и их производные в каждой внутренней точке области получают приращения

$$\delta g_{ij}, \delta g_{i\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta g_{ij}, \quad \delta g_{i\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \delta g_{ij}, \quad \dots, \quad (I, 6,5)$$

в то время как величина интеграла (I, 6,4) сохранит прежнее значение. Таким образом мы получим

$$\int \frac{\partial I}{\partial g_{ij}} \delta g_{ij} \sqrt{-g} d\tau + \int \frac{\partial I}{\partial g_{i\alpha}} \delta g_{i\alpha} \sqrt{-g} d\tau + \dots = 0. \quad (I, 6,6)$$

Принимая во внимание очевидное соотношение

$$\sqrt{-g} \frac{\partial I}{\partial g_{i\alpha}} \delta g_{i\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial I}{\partial g_{ij}} \delta g_{ij} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial I}{\partial g_{i\alpha}} \right) \delta g_{ij},$$

второй интеграл в (I, 6,6) можно написать в виде

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial I}{\partial g_{ij}} \delta g_{ij} \right) d\tau - \int \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial I}{\partial g_{i\alpha}} \right) \delta g_{ij} d\tau.$$

Первый член этого выражения представляет собой сумму четырех интегралов, соответствующих $\alpha = 1, \dots, 4$. Каждый из них допускает непосредственное интегрирование по одной из координат и исчезает вследствие условия $\delta g_{ij} = 0$ на границе. Поэтому написанное выше выражение сводится к одному лишь второму члену.

Аналогичным образом, пользуясь соотношением вида

$$\alpha''\beta = (\alpha\beta)'' + \alpha\beta'' - 2(\alpha\beta)',$$

можно преобразовать второй интеграл в уравнении (I, 6,6), а затем и последующие.

В результате подобных преобразований получим

$$\int \left\{ \frac{\partial I}{\partial g_{ij}} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial I}{\partial g_{i\alpha}} \right) + \dots \right\} \sqrt{-g} \delta g_{ij} d\tau = 0. \quad (I, 6,7)$$

Легко видеть, что вследствие инвариантности интеграла (I, 6,4) совокупность величин

$$H^{ij} = \frac{\partial I}{\partial g_{ij}} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial I}{\partial g_{i\alpha}} \right) + \dots \quad (\text{I, 6,8})$$

представляет собой контравариантный тензор второго порядка. Этот тензор называют гамильтоновой производной от инварианта I по метрическому тензору. Во всех случаях гамильтонову производную можно считать симметричным тензором. В самом деле, если эта производная не является симметричным тензором, то ее можно представить в виде суммы симметричной H^{ij} и антисимметричной \bar{H}^{ij} частей, и тогда уравнение (I, 6,7) перейдет в следующее

$$\int (H^{ij} + \bar{H}^{ij}) \sqrt{-g} \delta g_{ij} d\tau = 0.$$

Однако сумма $\bar{H}^{ij} \delta g_{ij}$ тождественно равна нулю ввиду симметричности тензора δg_{ij} ; поэтому

$$\int H^{ij} \sqrt{-g} \delta g_{ij} d\tau = 0, \quad (\text{I, 6,9})$$

что и доказывает правильность сделанного утверждения о симметричности гамильтоновой производной.

Рассмотрим важное свойство гамильтоновой производной. Пусть новые координаты, переход к которым вызывает приращения δg_{ij} , $\delta g_{i\alpha}, \dots$, будут $x^\alpha + \delta x^\alpha$. Согласно закону преобразования тензора имеем

$$g_{ij} = (g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}) \frac{\partial (x^\alpha + \delta x^\alpha)}{\partial x^i} \frac{\partial (x^\beta + \delta x^\beta)}{\partial x^j}. \quad (\text{I, 6,10})$$

Величина δg_{ij} , определяемая этим равенством, представляет собой разность между компонентами метрического тензора в точках $x^\alpha + \delta x^\alpha$ и x^α новой и старой систем координат соответственно. Однако эта величина отличается от вариации δg_{ij} в (I, 6,9); последняя равна разности между новыми и старыми значениями компонент метрического тензора в точке x^α , так как при варьировании интеграла (I, 6,4) мы оставляли $d\tau$ неизменным.

В величину $\delta g_{\alpha\beta}$ в (I, 6,10) необходимо внести поправку $-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \delta x^\gamma$, соответствующую переходу из точки $x^\alpha + \delta x^\alpha$ к точке x^α . Таким образом, для вариаций δg_{ij} в уравнении (I, 6,9) мы имеем следующую систему равенства

$$g_{ij} = \left(g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \delta x^\gamma \right) \frac{\partial (x^\alpha + \delta x^\alpha)}{\partial x^i} \frac{\partial (x^\beta + \delta x^\beta)}{\partial x^j}.$$

Сохраняя лишь члены первого порядка относительно малых вариаций, можно написать

$$g_{ij} = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \delta x^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^j} \right) + \\ + (\delta g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta\gamma} \delta x^\gamma) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^j}.$$

Внеся в эти равенства $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\tau} = \delta_\tau^\sigma$, , получим после очевидных упрощений

$$\delta g_{ij} = - \left(g_{ija} \delta x^a + g_{ia} \frac{\partial \delta x^a}{\partial x^j} + g_{ja} \frac{\partial \delta x^a}{\partial x^i} \right). \quad (I, 6,11)$$

Этим выражением вариации мы и воспользуемся для дальнейшего преобразования равенства (I, 6,9). Предварительно заметим, что вариации компонент метрического тензора в (I, 6,9), возникшие в результате преобразования координат, нельзя, конечно, считать независимыми. Независимыми являются лишь вариации координат, т. е. величины δx^a . Имея это в виду, мы внесем (I, 6,11) в (I, 6,9) и произведем затем преобразование с целью исключения всех зависимых вариаций. Подстановка дает

$$\int H^{ii} \sqrt{-g} g_{ija} \delta x^a + 2 \int H^{ii} \sqrt{-g} g_{ia} \frac{\partial \delta x^a}{\partial x^j} d\tau = 0, \quad (I, 6,12)$$

так как вследствие симметричности гамильтоновой производной выражение $H^{ij} g_{ia} \frac{\partial \delta x^a}{\partial x^j}$ не зависит от порядка индексов i, j . С другой стороны, имеем

$$\int H^{ii} \sqrt{-g} g_{ia} \frac{\partial \delta x^a}{\partial x^i} d\tau = \int \frac{\partial}{\partial x^j} (H^{ij} \sqrt{-g} g_{ia} \delta x^a) d\tau - \\ - \int \frac{\partial}{\partial x^j} (H^{ij} \sqrt{-g} g_{ia}) \delta x^a d\tau.$$

Первый член правой части представляет собой сумму четырех интегралов, каждый из которых допускает интегрирование по одной из координат. Эти интегралы исчезают вследствие условия $\delta x^a = 0$ на границе области интегрирования. Уравнение (I, 6,12) принимает поэтому вид

$$\int \left\{ H^{a\beta} \sqrt{-g} g_{a\beta i} - 2 \frac{\partial}{\partial x^a} (H^{a\beta} \sqrt{-g} g_{i\beta}) \right\} \delta x^i d\tau = 0$$

и вследствие независимости вариаций координат переходит в систему четырех равенств

$$\frac{\partial}{\partial x^a} (H^{a\beta} g_{i\beta} \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} H^{a\beta} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{a\beta}}{\partial x^i} = 0$$

или, если ввести смешанные компоненты гамильтоновой производной,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (H_i^\alpha \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} H^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = 0. \quad (I, 6,13)$$

Согласно определению ковариантной расходимости тензора второго порядка, имеем

$$H_{i|\alpha}^\alpha = \frac{\partial H_i^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\beta H_i^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\beta H_{\beta}^\alpha.$$

Если внести сюда

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}$$

и перейти в последнем члене от смешанных к контравариантным компонентам, то получится

$$H_{i|\alpha}^\alpha = \frac{\partial H_i^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} H_i^\alpha - H^{\alpha\beta} \Gamma_{i\alpha, \beta}.$$

Напишем символ Кристоффеля в развернутой форме и примем затем во внимание, что суммы

$$H^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha}, \quad H^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta},$$

отличающиеся лишь обозначением немых индексов, совпадают, вследствие чего последний член в выражении расходимости приводится к виду

$$\frac{1}{2} H^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.$$

Мы можем теперь написать

$$H_{i|\alpha}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (H_i^\alpha \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} H^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right\}.$$

Сравнивая это выражение для ковариантной расходимости тензора H^{ii} с уравнением (I, 6,13), находим $H_{i|\alpha}^\alpha = 0$.

Таким образом, гамильтонова производная от инварианта, образованного из компонент метрического тензора и их производных по координатам, имеет исчезающую ковариантную расходимость. Благодаря этому свойству она является одним из решений уравнения (I, 6,1).

Легко понять, что при помощи метрического тензора и его производных можно построить большое число различных инвариантов. Вследствие этого понятие гамильтоновой производной позволяет найти многочисленный класс решений уравнения (I, 6,1). К этому

классу принадлежит, в частности, решение Эйнштейна, так как тензор $-R^{ij} + \frac{1}{2}g^{ij}R$ является гамильтоновой производной от инварианта тензора Риччи.

Итак, мы видим, что существуют многочисленные решения уравнения (I, 6,1).

Для завершения формального доказательства неопределенности уравнений поля с точки зрения условий $A - D$ остается сделать лишь несколько замечаний.

Пусть X_{ij} — какой-либо симметричный тензор с исчезающей ковариантной расходимостью, отличный от тензора Эйнштейна. Применяя многократно употреблявшееся разложение $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, удобное в случае слабого поля, будем считать, что при переходе к первому приближению тензор X_{ij} исчезает, так как если он содержит члены, линейные относительно величин h_{ij} или их производных по координатам, то его можно снабдить достаточно малым множителем.

Составим уравнение

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + X_{ij} = -\kappa T_{ij}.$$

В первом приближении X_{ij} может быть опущен, а тензор Эйнштейна обеспечивает переход к уравнению Пуассона. Таким образом, отказываясь от дополнительного условия Эйнштейна, мы приходим к заключению о том, что в более высоких приближениях, начиная со второго, уравнения поля содержат неизбежный произвол. Условия $A - D$ не позволяют выбрать уравнения поля однозначно или установить какое-либо преимущество уравнений Эйнштейна по сравнению с другой возможной формой этих уравнений. Иными словами, приходится признать, что физические предпосылки теории относительности дают возможность разработать общий метод описания и интерпретации движений в поле гравитации, но сами по себе эти предпосылки не представляют достаточной основы для развития однозначной количественной теории движений в поле тяготения.

Учитывая теоретическую неопределенность уравнений поля, уместно обсудить вопрос о возможности эмпирического обоснования уравнений Эйнштейна путем сравнения выводов теории с наблюдаемыми релятивистскими эффектами. Следует иметь в виду, что такое сравнение относится лишь к первому и второму приближениям и совершенно не затрагивает более высокие приближения, а тем более точную форму уравнений поля. При этом и второе приближение может быть подвергнуто эмпирической проверке только частично, поскольку число наблюдаемых релятивистских эффектов в поле тяготения до сих пор остается крайне ограниченным.

Рассмотрим вопрос подробнее.

Как известно, общая теория относительности приводит к трем основным следствиям, допускающим в настоящее время проверку

путем астрономических наблюдений. Одним из них является вывод о вековом перемещении перигелия невозмущенной планетной орбиты, а два другие определяют оптические эффекты общей теории относительности: искривление световых лучей вблизи Солнца и гравитационное смещение спектральных линий. Подробное изучение релятивистских эффектов производится в следующих главах. Здесь же мы рассмотрим эти эффекты предварительно, лишь в той мере поскольку это необходимо для обсуждения вопроса об эмпирическом обосновании уравнений поля.

Как мы увидим в следующей главе, поле одного центра в сферических координатах можно задать при помощи линейного элемента вида

$$ds^2 = -\alpha dr^2 - r^2 d\Theta^2 - r^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2 + \beta dt^2, \quad (I, 6, 14)$$

где α , β — функции переменной r , определяемые путем решения уравнений поля.

Если потребовать, чтобы эти функции отвечали уравнениям поля Эйнштейна и при $r \rightarrow \infty$ приводились к единице, то согласно решению Шварцшильда (см. гл. II) получится

$$\alpha = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad \beta = 1 - \frac{2m}{r},$$

где m — масса центрального тела в релятивистских единицах. С точностью до членов второго порядка можно написать

$$\alpha = 1 + \frac{am}{r} + \frac{bm^2}{r^2}, \quad \beta = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{cm^2}{r^2}, \quad (I, 6, 15)$$

имея в виду, что решению Шварцшильда соответствуют значения $a = 2$, $b = 4$, $c = 0$. Член первого порядка в выражении β определяется, как было показано в предыдущем параграфе, условием D , т. е. переходом к механике Ньютона.

Оставляя коэффициенты a , b , c неопределенными, составим формулы для количественной оценки основных релятивистских эффектов.

Рассмотрим движение в поле (I, 6, 14). Воспользуемся уравнениями геодезической линии в форме (I, 2, 16); их можно привести к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{g_{\sigma\sigma} dx^\sigma}{g_{44} dt} \right) - \frac{1}{2g_{44}} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dx^\alpha}{dt} \right)^2 = 0, \quad \sigma = 1, 2, 3 \quad (I, 6, 16)$$

Положим $x^1, x^2, x^3 = r, \Theta, \varphi$ и найдем первые интегралы уравнений движения. Последнее уравнение системы (I, 6, 16), соответствующее $\sigma = 3$, непосредственно дает

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1 \beta}{r^2 \sin^2 \Theta}, \quad (I, 6, 17)$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Положив затем $\sigma = 2$, имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{\beta} \frac{d\Theta}{dt} \right) - \frac{r^2}{\beta} \sin \Theta \cos \Theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0.$$

Если внести сюда значение производной $\frac{d\varphi}{dt}$ из (I, 6, 17) и затем умножить на $\frac{2r^2}{\beta} \frac{d\Theta}{dt}$, то это уравнение легко интегрируется и дает

$$\left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 = \frac{\beta^2}{r^4} \left(C_2^2 - \frac{C_1^2}{\sin^2 \Theta} \right),$$

где C_2 — новая постоянная интегрирования. Приняв плоскость движения в какой-либо момент времени за плоскость $\Theta = \frac{\pi}{2}$, нетрудно показать, что движение частицы является плоским и поэтому вообще $\Theta = \frac{\pi}{2}$.

Первый интеграл уравнения $\sigma = 1$ найдем из линейного элемента (I, 6, 14), воспользовавшись уже полученными интегралами, а также последним из уравнений геодезической линии в форме (I, 2, 15).

Для временной координаты (I, 2, 15) дает

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Принимая во внимание определение символов Кристоффеля, легко показать, что в нашем случае это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{g_{44}} \frac{\partial g_{\alpha 4}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

или

$$g_{44} \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dg_{44}}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

и дает

$$\frac{dt}{ds} = \frac{h}{\beta}, \quad (\text{I, 6, 18})$$

где h — постоянная интегрирования.

Разделив линейный элемент (I, 6, 14) на dt^2 и внося в него полученные первые интегралы, находим

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{C_1^2 \beta^2}{r^2 \alpha} - \frac{\beta^2}{h^2 \alpha}. \quad (\text{I, 6, 19})$$

Для составления уравнения орбиты достаточно разделить (I, 6,19) на возведенное в квадрат (I, 6,17); введя обозначение $u = \frac{1}{r}$, получим

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{C_1^2 \alpha \beta} - \frac{u^2}{\alpha} - \frac{1}{C_1^2 h^2 \alpha}.$$

Внесем сюда (I, 6,15), сохраняя члены двух первых порядков относительно m . получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{h^2 - 1}{C_1^2 h^2} - \frac{m}{C_1^2} \left(2 - a + \frac{a}{h^2}\right) u = \\ = \frac{m^2}{C_1^2} \left(4 + a^2 - 2a - b - c - \frac{a^2 - b}{h^2}\right) u^2 + \\ + am u^3 - m^2 (a^2 - b) u^4. \end{aligned} \quad (I, 6,20)$$

На достаточно больших расстояниях от центра поля все члены правой части будут пренебрежимо малы, и уравнение (I, 6,20) совпадет с уравнением ньютоновской орбиты

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{2}{p} u - \frac{e^2 - 1}{p^2} = 0,$$

где p и e — фокальный параметр и эксцентриситет.

Сравнение коэффициентов

$$\frac{h^2 - 1}{C_1^2 h^2} = \frac{e^2 - 1}{p^2}, \quad \frac{m}{C_1^2} \left(2 - a + \frac{a}{h^2}\right) = \frac{2}{p}$$

дает

$$C_1^2 = \frac{2mp}{2 + (e^2 - 1) \frac{am}{p}}, \quad h^2 = \frac{2 + (e^2 - 1) \frac{am}{p}}{2 - (e^2 - 1) \frac{(2-a)m}{p}}. \quad (I, 6,21)$$

Пользуясь этими соотношениями и сохраняя только первую степень отношения $\frac{m}{p}$, получим с достаточной для наших целей точностью

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{2u}{p} - \frac{e^2 - 1}{p^2} = \frac{m}{p} (4 - 2a - c) u^2 + am u^3$$

или, если выполнить дифференцирование по φ и произвести сокращение,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{1}{p} = \frac{m}{p} (4 - 2a - c) u + \frac{3}{2} am u^2. \quad (I, 6,22)$$

Этим уравнением и определяется орбита частицы в центральном поле (I, 6,15). На достаточно больших расстояниях от центра малые члены, расположенные в правой части равенства, будут прене-

брежимо малы, и уравнение (I, 6,22) переходит в уравнение орбиты механики Ньютона

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{1}{\rho} = 0,$$

решением которого является коническое сечение $u = \frac{1}{\rho} + \frac{e}{\rho} \cos \varphi$ с фокальным параметром ρ и эксцентриситетом e .

Решение уравнения (I, 6,22) имеет вид

$$u = \frac{1}{\rho} + \frac{e}{\rho} \cos \varphi + A + B \cos^2 \varphi + \frac{e}{\rho} k \varphi \sin \varphi, \quad (\text{I, 6,23})$$

где A, B, κ — малые первого порядка относительно $\frac{m}{\rho}$.

Прямая подстановка дает

$$k = \frac{m}{2\rho} (4 + a - c), \quad A = \frac{m}{2\rho^2} (8 - a - 2c + 2ae^2),$$

$$B = -\frac{ame^2}{2\rho^2}. \quad (\text{I, 6,24})$$

С помощью очевидного соотношения $\cos \varphi + k \varphi \sin \varphi = \cos (\varphi - k \varphi)$, выполняющегося с точностью до членов первого порядка относительно k , (I, 6,23) можно привести к виду

$$r = \frac{\rho'}{1 + e' \cos (\varphi - k \varphi)},$$

где

$$\rho' = \frac{\rho}{1 + \rho (A + B \cos^2 \varphi)}, \quad e' = \frac{e}{1 + \rho (A + B \cos^2 \varphi)}.$$

В случае периодического движения это уравнение представляет эллипс, параметр и эксцентриситет которого испытывают мелкие периодические изменения, а ось апсид медленно вращается в плоскости орбиты в прямом направлении. За время одного обращения долгота перигелия возрастает на величину

$$\Delta \omega = 2\pi k = \frac{\pi m}{\rho} (4 + a - c). \quad (\text{I, 6,25})$$

Вторым эффектом общей теории относительности является искривление светового луча вблизи Солнца. Для количественной оценки эффекта воспользуемся общим уравнением (I, 6,20), в котором необходимо положить $h = \infty$, поскольку распространение света характеризуется в теории относительности условием $ds = 0$.

Уравнение луча с точностью до членов первого порядка относительно m имеет вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{1}{C_1^2} = \frac{m}{C_1^2} (2 - a) u + am u^3.$$

На достаточно большом расстоянии от центра поля оно переходит в уравнение прямой

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{1}{C_1^2} = 0,$$

где C_1 — совпадает с величиной перпендикуляра p , опущенного из центра на направление луча. Поэтому уравнение луча можно писать в виде

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{2p^2} (2 - a) + \frac{3}{2} am u^2. \quad (I, 6,26)$$

Решением этого уравнения является функция

$$u = \frac{\cos \varphi}{p} + \frac{m}{2p^2} (2 + a \sin^2 \varphi). \quad (I, 6,27)$$

Найдем значения полярного угла, соответствующие асимптотическим направлениям кривой (I, 6,27). Положив $\varphi = \pm (90^\circ + \alpha)$ и считая α достаточно малым, получим $\alpha = \frac{m}{2p} (2 + a)$. Поэтому угол между асимптотическими направлениями, т. е. величина отклонения луча в поле тяготения равна

$$2\alpha = \Theta = \frac{m}{p} (2 + a). \quad (I, 6,28)$$

Остается рассмотреть третий эффект—гравитационное смещение спектральных линий.

Пусть источник излучения и наблюдатель покоятся в заданном статическом поле тяготения. Как будет показано в главе IV, гравитационное изменение длины волны $\delta\lambda$ определяется формулой

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \left(\frac{g_{44,2}}{g_{44,1}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (I, 6,29)$$

где $g_{44,1}$, $g_{44,2}$ — значения последней компоненты метрического тензора в точках излучения и наблюдения соответственно.

Внося $g_{44} = \beta$ согласно (I, 6,15) и ограничиваясь членом первого порядка относительно $\frac{m}{r}$, получим

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}. \quad (I, 6,30)$$

Этот эффект не зависит от формы уравнений поля и определяется условием перехода к механике Ньютона (условием D).

Итак, мы видим, что для эмпирического обоснования уравнений поля можно использовать только два следствия общей теории относительности: эффект движения перигелия невозмущенной планетной орбиты и вывод об искривлении световых лучей вблизи массивного тела. Формулы (I, 6,25) и (I, 6,28), дающие количественное

выражение этих эффектов, содержат два из трех неопределенных коэффициентов в функциях (I, 6,15), описывающих центральное поле гравитации с точностью до членов второго порядка. Согласно решению Шварцшильда уравнения поля Эйнштейна отвечают значения $a = 2$, $b = 4$, $c = 0$, при которых указанные два эффекта выражаются формулами

$$\Delta\omega = \frac{6\pi m}{r}, \quad \Theta = \frac{4m}{r}.$$

Если принять, что наблюдения подтверждают эти результаты с достаточной уверенностью (см. ниже), то получится $a = 2$, $c = 0$, тогда как коэффициент b , определяющий член второго порядка в первой из функций (I, 6,15), останется неопределенным.

Таким образом, приходится признать, что данные астрономических наблюдений не позволяют однозначно определить форму уравнений поля во втором приближении даже для простейшего частного случая, каким является статическое поле одного центра. Можно ожидать, что уравнения поля, существенно отличающиеся от уравнений Эйнштейна уже во втором приближении, могут привести к тем же количественным оценкам трех основных релятивистских эффектов.

В заключение заметим, что в одной из последних работ [41] Эйнштейн вновь возвращается к вопросу обоснования уравнений поля гравитации и обсуждает его с точки зрения принципа «жесткости» системы уравнений. Этот принцип, имеющий по мнению Эйнштейна всеобщую применимость к физическим теориям, состоит в требовании выбирать систему уравнений таким образом, чтобы характеристики поля определялись ею как можно более жестко. Однако принцип жесткости и развитая Эйнштейном методика его применения представляют главным образом математический интерес и едва ли могут служить удовлетворительным обоснованием конкретных физических законов.

Глава II

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

§ 1. Поле одного центра

Для астрономических следствий теории относительности, поддающихся в настоящее время проверке путем сравнения с данными наблюдений, основное значение имеет решение уравнений поля, удовлетворяющее условию сферической симметрии. Приближенное интегрирование уравнений поля для этого случая впервые выполнено в классической работе Эйнштейна о движении перигелия Меркурия [52]. Несколько позднее Шварцшильд [53] получил первое точное решение уравнений поля, исследованное затем Гильбертом [54], Биркгофом [55], Лауе [56] и другими авторами. В той или иной форме это решение приводится в настоящее время почти во всех руководствах по теории относительности, вследствие чего мы воспроизведем его здесь лишь схематически.

Для пустого пространства, во всех точках которого компоненты тензора энергии-импульса тождественно равны нулю, уравнения поля Эйнштейна принимают вид

$$R_{ij} = 0, \quad (\text{II}, 1,1)$$

так как инвариант тензора Риччи исчезает вместе с T .

Пусть поле гравитации, предполагаемое статическим, обусловлено материальной точкой или протяженным телом со сферическим распределением массы. Задача состоит в отыскании внешнего решения уравнений (II, 1,1), удовлетворяющего условию сферической симметрии и приводящего на бесконечности к линейному элементу специальной теории относительности.

В отсутствие поля тяготения линейный элемент пространственно-временного континуума в сферических координатах имеет вид

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\Theta^2 - r^2 \sin^2 \Theta d\Phi^2 + dt^2. \quad (\text{II}, 1,2)$$

Точечная масса, помещенная в начале координат, изменяет линейный элемент, не нарушая его сферической симметрии. Руководствуясь соображениями симметрии, можно написать

$$ds^2 = -f_1(r) dr^2 - f_2(r) (r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\Phi^2) + f_3(r) dt^2,$$

потребовав, чтобы с исчезновением массы каждая из функций f_1 , f_2 , f_3 приводилась к единице. Если положить $f_2(r)r^2 = r_1^2$, то линейный элемент примет вид

$$ds^2 = -F_1(r_1) dr_1^2 - r_1^2 d\Theta^2 - r_1^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2 + F_2(r_1) dt^2.$$

Таким образом, сферически-симметричное решение должно иметь форму

$$ds^2 = -e^\alpha dr^2 - r^2 d\Theta^2 - r^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2 + e^\beta dt^2, \quad (\text{II, 1,3})$$

где α, β — функции одного r , приводящиеся к единицам на бесконечности и обеспечивающие переход от (II, 1,3) к (II, 1,2) в отсутствие массы. Задача сводится к отысканию функций α, β , при которых форма (II, 1,3) удовлетворяет уравнениям поля (II, 1,1).

Если принять обозначение $r, \Theta, \varphi, t = x^i$ при $i = 1, \dots, 4$, то компоненты метрического тензора, соответствующего линейному элементу (II, 1,3), будут

$$g_{11} = -e^\alpha, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \Theta, \\ g_{44} = e^\beta, \quad g_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Определитель, составленный из компонент этого тензора, выражается формулой

$$g = -r^4 \sin^2 \Theta e^{\alpha+\beta},$$

а контравариантные компоненты будут

$$g^{11} = -e^{-\alpha}, \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta}, \quad g^{44} = e^{-\beta}, \quad g^{ii} = 0, \quad i \neq j.$$

Пользуясь этими значениями, нетрудно составить выражение для компонент тензора Риччи.

Вследствие $g_{ij} = g^{ij} = 0$ при $i \neq j$ символы Кристоффеля вычисляются в данном случае по формулам

$$\Gamma_{jk}^i = 0, \quad \Gamma_{ij}^i = -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}, \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i},$$

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i},$$

в которых i, j, k — различные фиксированные индексы. Пользуясь приведенными выше значениями компонент метрического тензора, легко убедиться в том, что все отличные от нуля символы Кристоффеля даются соотношениями

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\alpha'}{2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{14}^4 = \frac{\beta'}{2}, \quad \Gamma_{22}^2 = -re^{-\alpha},$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot \Theta, \quad \Gamma_{33}^3 = -r \sin^2 \Theta e^{-\alpha}, \quad \Gamma_{32}^2 = -\sin \Theta \cos \Theta,$$

$$\Gamma_{44}^4 = \frac{\beta'}{2} e^{\beta-\alpha}.$$

Поэтому диагональные компоненты тензора Риччи равны

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r}, \\ R_{22} &= e^{-\alpha} \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] - 1, \\ R_{33} &= e^{-\alpha} \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] \sin^2 \Theta - \sin^2 \Theta, \\ R_{44} &= e^{\beta-\alpha} \left(-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} \right), \end{aligned}$$

тогда как остальные компоненты этого тензора тождественно исчезают.

Таким образом, система уравнений поля (II, 1,1) сводится в данном случае к трем уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} &= 0, & e^{-\alpha} \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] - 1 &= 0, \\ -\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II, 1,4})$$

Первое и третье из уравнений этой системы дают

$$\alpha + \beta = C,$$

где C — постоянная интегрирования. Как уже указывалось, на бесконечности функции e^α , e^β должны приводиться к единицам, вследствие чего $C = 0$ и $\alpha + \beta = 0$.

Второе из уравнений (II, 1,4) принимает теперь вид

$$e^{-\alpha} (1 - \alpha' r) = 1$$

или

$$r e^{-\alpha} = r + C',$$

где C' — новая постоянная интегрирования.

Имеем

$$e^\alpha = \left(1 + \frac{C'}{r} \right)^{-1}, \quad e^\beta = 1 + \frac{C'}{r}. \quad (\text{II, 1,5})$$

Остается определить значение постоянной C' .

Рассмотрим поле на достаточно большом расстоянии от центра. В главе I мы видели, что в случае слабого поля величина $-\frac{1}{2}(g_{44}-1)$ совпадает с ньютоновским потенциалом, т. е. в данном случае с величиной $\frac{m}{r}$, где m — масса, выраженная в релятивистских единицах. Следовательно $C' = -2m$, и формулы (II, 1,5) принимают вид

$$e^\alpha = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, \quad e^\beta = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (\text{II, 1,6})$$

Таким образом, линейный элемент

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Theta^2 - r^2 \sin^2 \Theta d\Phi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 \quad (\text{II, 1,7})$$

представляет собой решение уравнений поля, удовлетворяющее условию сферической симметрии и обеспечивающее переход к квадратической форме (II, 1,2) на бесконечности. Это решение называется внешним решением Шварцшильда.

Как мы видели в главе I, уравнения поля Эйнштейна допускают простое обобщение путем введения так называемого космологического члена. Для пустого пространства обобщенные уравнения поля имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = 0.$$

Умножая на g^{ij} и производя свертывание, находим соотношение между инвариантом тензора Риччи и космологической постоянной $R = 4\Lambda$. Поэтому уравнения поля для пустоты можно написать в форме

$$R_{ij} = \Lambda g_{ij}. \quad (\text{II, 1,8})$$

Сохраняя условие сферической симметрии и пользуясь приведенными выше выражениями для компонент тензора Риччи, имеем в данном случае вместо (II, 1,4) следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = -\Lambda e^\alpha, \quad e^{-\alpha} \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right]' - 1 = -\Lambda r^2 \\ - \frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} = \Lambda e^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{II, 1,9})$$

Сравнение первого из этих уравнений с третьим дает, как и прежде,

$$e^{\alpha+\beta} = C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Второе уравнение принимает вид

$$e^{-\alpha} (1 - r\alpha') = 1 - \Lambda r^2$$

и приводит к формуле

$$re^{-\alpha} = r - \frac{1}{3} \Lambda r^3 + C',$$

где C' — новая постоянная.

Итак, в данном случае

$$e^\alpha = \left(1 + \frac{C'}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2\right)^{-1}, \quad e^\beta = C \left(1 + \frac{C'}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2\right). \quad (\text{II, 1,10})$$

Вследствие малости космологической постоянной член $\frac{1}{3} \Lambda r^2$ при не очень больших r должен быть весьма мал. Поэтому функции (II, 1,10) существенно отличаются от (II, 1,6) лишь на достаточно большом

расстоянии от центра гравитации, тогда как вблизи центра они практически совпадают с (II, 1,6). Это дает $C = 1$, $C' = -2m$. Следовательно,

$$e^\alpha = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2\right)^{-1}, \quad e^\beta = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \quad (\text{II, 1,11})$$

и линейный элемент Шварцшильда принимает вид

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Theta^2 - r^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2 + \\ + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2\right) dt^2. \quad (\text{II, 1,12})$$

При $m = 0$ решение (II, 1,7) переходит в линейный элемент специальной теории относительности, показывая, что в отсутствие массы или на достаточно большом расстоянии от нее пространственно-временной континуум отвечает псевдоэвклидовой геометрии. Значения переменной r имеют нижнюю границу $r = 2m$, которую иногда называют гравитационным радиусом массы. В отличие от этого, обобщенное решение Шварцшильда (II, 1,12) во всех случаях несовместимо с псевдоэвклидовой геометрией, и переменная r имеет не только нижнюю, но и верхнюю границу, для которой, пренебрегая величиной порядка $m\sqrt{\Lambda}$, можно принять $\sqrt{3\Lambda}^{-1}$.

§ 2. Внутреннее решение Шварцшильда

Для приложений может представить также интерес внутреннее решение Шварцшильда [57], характеризующее поле гравитации внутри сферы, наполненной несжимаемой жидкостью с постоянной собственной плотностью ρ и давлением p , зависящим от расстояния до центра сферы.

Диагональные компоненты тензора энергии-импульса имеют в этом случае вид

$$T_{ii} = \rho e^\alpha, \quad pr^2, \quad pr^2 \sin^2 \Theta, \quad \rho e^\beta,$$

тогда как остальные компоненты этого тензора тождественно исчезают.

Инвариант тензора Риччи, равный согласно (I, 5,22) $8\pi g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$, определяется соотношением $R = 8\pi(\rho - 3p)$.

Воспользовавшись приведенными в предыдущем параграфе выражениями для составляющих тензора Риччи, легко убедиться в том, что вся система уравнений поля сводится в рассматриваемом случае к трем следующим уравнениям

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = 4\pi e^\alpha (\rho - \rho),$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\beta' - \alpha'}{2r} - \frac{1}{r^2} e^\alpha = 4\pi e^\alpha (\rho - \rho),$$

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} + \frac{\beta'}{r} = 4\pi e^\alpha (3\rho + \rho)$$

или

$$\begin{aligned}8\pi p &= e^{-\alpha} \left(\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha' - \beta'}{2r} \right), \\8\pi p &= e^{-\alpha} \left(\frac{\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}, \\8\pi q &= e^{-\alpha} \left(\frac{\alpha'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}.\end{aligned}\tag{II, 2,1}$$

Последнее из (II, 2,1) после умножения на r^2 принимает вид

$$8\pi q r^2 = (r - r e^{-\alpha})'$$

и сразу дает

$$e^{-\alpha} = 1 - k r^2, \quad k = \frac{8}{3} \pi q,\tag{II, 2,2}$$

так как вследствие конечности $e^{-\alpha}$ при $r = 0$ для постоянной интегрирования следует принять нулевое значение.

Объединяя два первые уравнения (II, 2,1), имеем

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\beta''}{2} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{2r} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha' e^{-\alpha} \left(\frac{\beta'}{4} + \frac{1}{2r} \right) + \frac{1}{r^2} = 0$$

или, если внести найденную функцию α ,

$$\beta'' + \frac{\beta'^2}{2} - \frac{\beta'}{r(1 - k r^2)} = 0.$$

Переписывая это уравнение в виде

$$\frac{\beta''}{\beta'} + \frac{\beta'}{2} = \frac{1}{r(1 - k r^2)}$$

и выполняя интегрирование, легко получим

$$\beta' e^{\frac{\beta}{2}} = \frac{2Bkr}{\sqrt{1 - kr^2}},$$

где B — произвольная постоянная.

Повторное интегрирование дает

$$e^{\beta} = (A - B \sqrt{1 - kr^2})^2,\tag{II, 2,3}$$

где A — новая постоянная.

Давление оказывается равным

$$p = \frac{k}{4\pi} \frac{3B \sqrt{1 - kr^2} - A}{A - B \sqrt{1 - kr^2}}.\tag{II, 2,4}$$

Постоянные интегрирования определяются по условиям на границе сферы.

Согласно (II, 1,6) вне сферы имеем $e^\beta = 1 - \frac{2m}{r}$. Положив $2m = \frac{8}{3}\pi\varrho R^3 = kR^3$, где R — радиус сферы, и сравнивая эту функцию на границе с (II, 2,3), находим

$$1 - kR^2 = (A - B\sqrt{1 - kR^2})^2.$$

Кроме того, на границе необходимо принять $\rho = 0$, что по (II, 2,4) дает

$$A - 3B\sqrt{1 - kR^2} = 0.$$

Совместное решение этих уравнений приводит к следующим значениям постоянных

$$A = \frac{3}{2}\sqrt{1 - kR^2}, \quad B = \frac{1}{2}. \quad (\text{II, 2,5})$$

Рассмотрим еще случай сферы, наполненной сжимаемой непрерывной средой.

Переходя от релятивистских единиц к обычным, перепишем уравнения поля (II, 2,1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{4\pi k}{c^2} \rho &= e^{-\alpha} \left(\frac{\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}, \\ \frac{4\pi k}{c^2} p &= e^{-\alpha} \left(\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} + \frac{\beta' - \alpha'}{2r} \right), \\ 4\pi k \varrho &= e^{-\alpha} \left(\frac{\alpha'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (\text{II, 2,6})$$

где принято $k = \frac{2\gamma}{c^2}$.

Последнее из этих уравнений легко интегрируется и дает

$$4\pi k \int_0^r r^2 \varrho dr = r - re^{-\alpha}.$$

Поэтому, положив

$$M = 4\pi \int_0^r r^2 \varrho dr,$$

находим

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{kM}{r}.$$

Комбинируя первое из уравнений (II, 2,6) с третьим, имеем

$$\alpha' + \beta' = 4\pi k r e^\alpha \left(\varrho + \frac{p}{c^2} \right).$$

Пусть внешняя поверхность соответствует $r = R$. Поскольку на этой поверхности согласно внешнему решению Шварцшильда должно быть $\alpha + \beta = 0$, интегрируя предыдущее уравнение, получаем

$$\alpha + \beta = -4\pi k \int_r^R \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) e^\alpha r dr.$$

Следовательно,

$$e^\beta = e^{-\alpha - 4\pi k \int_r^R \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) e^\alpha r dr}.$$

Итак,

$$e^\alpha = \left(1 - \frac{kM}{r} \right)^{-1},$$

$$e^\beta = \left(1 - \frac{kM}{r} \right) e^{-4\pi k \int_r^R \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \left(1 - \frac{kM}{r} \right)^{-1} r dr}. \quad (\text{II, 2,7})$$

Составим уравнение, связывающее распределение плотности и давления и являющееся релятивистским обобщением основного уравнения гидростатики.

Комбинируя первое из соотношений (II, 2,6) со вторым, имеем

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha' + \beta'}{2r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0$$

или, если умножить на $\frac{2}{r}$ и произвести соответствующую перегруппировку членов,

$$\frac{d}{dr} \left\{ e^{-\alpha} \left(\frac{\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \right\} + e^{-\alpha} \frac{\beta'(\alpha' + \beta')}{2r} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{dp}{dr} + (p + c^2 \rho) \frac{\beta'}{2} = 0.$$

Внося сюда

$$\beta' = 4\pi k r e^\alpha \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) - \alpha' = \frac{kM}{r^2} \frac{1 + \frac{4\pi r^3 p}{c^2 M}}{1 - \frac{kM}{r}},$$

находим

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{c^2 k M \rho}{2r^2} \left(1 + \frac{p}{c^2 \rho} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{c^2 M} \right) \left(1 - \frac{kM}{r} \right)^{-1}.$$

Таким образом, входящие в (II, 2,7) функции удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\gamma M \rho}{r^2} \left(1 + \frac{\rho}{c^2 \rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 \rho}{c^2 M}\right) \left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}\right)^{-1}, \quad (\text{II, 2,8})$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho,$$

которая и является условием равновесия. Решение этой системы требует задания уравнения состояния в форме той или иной зависимости между давлением и плотностью.

§ 3. Плоское поле гравитации

В механике Ньютона полем тяжести принято называть однородное поле тяготения, обладающее во всех точках одинаковым градиентом потенциала. При соответствующем выборе координат свободная материальная точка движется в таком поле по закону

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g,$$

где g — постоянное ускорение, которое служит основной характеристикой поля.

Однородное поле тяжести можно осуществить в механике Ньютона двумя способами. Один из них состоит в введении системы координат, движущейся с постоянным ускорением относительно инерциальной системы отсчета. Движение свободной частицы, отнесенное к таким координатам, происходит в однородном поле тяжести, интерпретируемом как поле сил инерции. Второй способ позволяет осуществить поле тяжести как «истинное» поле тяготения, принадлежащее материальной плоскости с постоянной поверхностной плотностью. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим бесконечно тонкое материальное кольцо радиуса r и ширины dr . На единицу массы, помещенную над центром кольца на высоте z над его плоскостью, действует в направлении центра сила притяжения

$$\frac{2\pi\gamma\sigma z r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}},$$

где σ — поверхностная плотность.

Выполняя интегрирование, получим

$$g = 2\pi\gamma\sigma z \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = 2\pi\gamma\sigma.$$

Таким образом, материальная плоскость с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{g}{2\pi\gamma}$ создает однородное поле тяжести с заданным ускорением g .

Естественно спросить, каким образом понятие однородного поля тяжести можно обобщить в теории относительности. Требуется найти решение уравнений поля, которое могло бы служить релятивистским обобщением соответствующего определения классической механики.

Будем искать статическое решение уравнений поля в форме

$$ds^2 = -A dx^2 - B dy^2 - C dz^2 + D dt^2, \quad (II, 3,1)$$

где A, B, C, D могут зависеть только от координаты z .

Пользуясь определением тензора Риччи (I, 2,21), легко убедиться в том, что при $i \neq j$ все составляющие тензора Риччи тождественно исчезают, вследствие чего для составления уравнений поля достаточно вычислить лишь диагональные компоненты этого тензора.

Отличающиеся от нуля символы Кристоффеля находятся по формулам

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^3 &= -\frac{1}{2C} \frac{dA}{dz}, & \Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2C} \frac{dB}{dz}, & \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2C} \frac{dC}{dz} \\ \Gamma_{44}^3 &= \frac{1}{2C} \frac{dD}{dz}, & \Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2A} \frac{dA}{dz}, & \Gamma_{23}^2 &= \frac{1}{2B} \frac{dB}{dz}, & \Gamma_{43}^4 &= \frac{1}{2D} \frac{dD}{dz}. \end{aligned}$$

С помощью этих соотношений нетрудно получить следующие выражения для диагональных компонент тензора Риччи

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2C} \left\{ A'' + \frac{A'}{2} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} + \frac{D'}{D} \right) \right\}, \\ R_{22} &= \frac{1}{2C} \left\{ B'' + \frac{B'}{2} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} + \frac{D'}{D} \right) \right\}, \\ R_{33} &= \frac{1}{4} \left\{ 2 \left(\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{D''}{D} \right) - \left(\frac{A'^2}{A^2} + \frac{B'^2}{B^2} + \frac{D'^2}{D^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2A'B'}{AB} + \frac{A'C'}{AC} + \frac{2A'D'}{AD} + \frac{B'C'}{BC} + \frac{2B'D'}{BD} + \frac{C'D'}{CD} \right\}, \\ R_{44} &= \frac{1}{2C} \left\{ -D'' - \frac{D'}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} - \frac{D'}{D} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Мы имеем четыре уравнения вида $R_{ii} = 0$.

Уравнение $i = 3$ значительно упрощается, если внести в него A'', B'', D'' из трех остальных.

Таким образом, уравнения поля можно написать в виде

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{A'}{A} \right)' - \frac{A'C'}{AC} + \frac{A'}{A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{D'}{D} \right) &= 0, \\ 2 \left(\frac{B'}{B} \right)' - \frac{B'C'}{BC} + \frac{B'}{B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{D'}{D} \right) &= 0, \\ 2 \left(\frac{D'}{D} \right)' - \frac{C'D'}{CD} + \frac{D'}{D} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{D'}{D} \right) &= 0. \\ \frac{C'}{C} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{D'}{D} \right) &= 0 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{A'}{A} \right)' - \frac{A'C'}{AC} + \frac{A'}{A} \left(\frac{2A'}{A} + \frac{D'}{D} \right) &= 0, \\ 2 \left(\frac{D'}{D} \right)' - \frac{C'D'}{CD} + \frac{D'}{D} \left(\frac{2A'}{A} + \frac{D'}{D} \right) &= 0, \\ \frac{C'}{C} \left(\frac{2A'}{A} + \frac{D'}{D} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II, 3,2})$$

поскольку в рассматриваемой задаче координатные оси x, y равноправны, вследствие чего можно положить $A = B$.

Здесь следует различать случаи: $C' = 0, \frac{2A'}{A} + \frac{D'}{D} = 0$.

В первом из них имеем

$$A = (1 + nz)^p, \quad C = 1, \quad D = (1 + nz)^{2-2p}, \quad (\text{II, 3,3})$$

где n, p — произвольные постоянные¹.

Во втором случае система (II, 3,2) дает

$$A = e^{\rho \int \psi dz}, \quad C = \psi^2, \quad D = e^{-2\rho \int \psi dz}, \quad (\text{II, 3,4})$$

где ρ — постоянная интегрирования, а ψ — произвольная функция z .

Заметим, что метрика пространственно-временного континуума, отвечающая каждому из этих решений, вообще не является эвклидовой. Действительно, необходимым и достаточным признаком вырождения римановой геометрии в эвклидову служит, как известно, исчезновение тензора кривизны Римана — Кристоффеля. В случае линейного элемента (II, 3,1) отличиться от нуля могут лишь следующие компоненты этого тензора

$$\begin{aligned} R_{12,1}^2 &= -\frac{A'B'}{4BC}, \quad R_{13,1}^3 = \frac{A'}{4C} \left(\frac{A'}{A} + \frac{C'}{C} \right) - \frac{A''}{2C}, \\ R_{14,1}^4 &= -\frac{A'D'}{4CD}, \quad R_{21,2}^1 = -\frac{A'B'}{4AC}, \\ R_{23,2}^3 &= \frac{B'}{4C} \left(\frac{B'}{B} + \frac{C'}{C} \right) - \frac{B''}{2C}, \quad R_{24,2}^4 = -\frac{B'D'}{4CD}, \\ R_{31,3}^1 &= \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{C'}{C} \right) - \frac{A''}{2A}, \quad R_{32,3}^2 = \left(\frac{B'}{B} + \frac{C'}{C} \right) - \frac{B''}{2B}, \\ R_{34,3}^4 &= \frac{D'}{4D} \left(\frac{D'}{D} + \frac{C'}{C} \right) - \frac{D''}{2D}, \quad R_{41,4}^1 = \frac{A'D'}{4AC}, \\ R_{42,4}^2 &= \frac{B'D'}{4BC}, \quad R_{43,4}^3 = -\frac{D'}{C} \left(\frac{D'}{D} + \frac{C'}{C} \right) + \frac{D''}{2C}. \end{aligned}$$

¹ Функции A, C, D ищутся с точностью до постоянных множителей, поскольку последние преобразованием масштабов могут быть приведены к единице.

Пользуясь написанными соотношениями, нетрудно убедиться в том, что при $A = B$ условием вырождения римановой метрики в евклидову являются равенства

$$A' = 0, \quad \frac{C'}{C} + \frac{D'}{D} - \frac{2D''}{D'} = 0,$$

т. е.

$$A = \text{const}, \quad \frac{D'^2}{CD} = \text{const}.$$

Этому условию удовлетворяет решение (II, 3,3), в специальном случае $p = 0$.

В механике Ньютона свободное движение в однородном поле тяжести происходит по закону

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g \quad (\text{II, 3,5})$$

Легко показать, что в случае (II, 3,3) не существует значения p , при котором свободное движение точно отвечает этому закону. В этом деле, система уравнений геодезической линии в форме (I, 3,16) приводит в рассматриваемом случае к следующему закону движения

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{2-3p}{1+nz} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt}, & \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{2-3p}{1+nz} \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{1}{2} pn(1+nz)^{p-1} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{2n(1-p)}{1+nz} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - n(1-p)(1+nz)^{1-2p}. \end{aligned}$$

Первым двум условиям (II, 3,5) можно удовлетворить, положив $p = \frac{2}{3}$. Вместо третьего из этих условий, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{1}{3} n(1+nz)^{-\frac{1}{3}} + \frac{2n}{3(1+nz)} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{3} n(1+nz)^{-\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Если n достаточно мало, то, пренебрегая членами второго порядка относительно скоростей, получим $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{n}{3}$. Поскольку в этом приближении релятивистское движение должно совпадать с классическим, следует принять $n = 3g$.

Решение (II, 3,3) отвечает в этом случае линейному элементу

$$ds^2 = -(1+3gz)^{\frac{2}{3}} (dx^2 + dy^2) - dz^2 + (1+3gz)^{\frac{2}{3}} dt^2, \quad (\text{II, 3,6})$$

который, по-видимому, и является простейшим релятивистским обобщением однородного поля тяжести классической механики.

В обычных единицах имеем

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{3g}{c^2} z\right)^{\frac{2}{3}} (dx^2 + dy^2) - dz^2 + c^2 \left(1 + \frac{3g}{c^2} z\right)^{\frac{2}{3}} dt^2. \quad (\text{II}, 3,7)$$

§ 4. Решение Эйнштейна для слабого поля

Решение Шварцшильда применимо к полю тяготения материальной точки или протяженного тела со сферическим распределением массы. Для произвольного распределения массы Эйнштейном указан [58] общий метод приближенного интегрирования уравнений поля, пригодный в случае достаточно слабого поля.

Будем считать, что основная квадратичная форма мало отличается от линейного элемента специальной теории относительности. Представив компоненты метрического тензора в виде $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, где δ_{ij} — значения, соответствующие галилеевым координатам, предположим, что при подходящем выборе системы координат величины h_{ij} и их производные достаточно малы. В уравнениях поля условимся сохранять лишь члены, линейные относительно этих величин.

Как было показано в главе I, при сделанных предположениях уравнения поля можно привести к виду

$$\square \left(h_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} h \right) = -16\pi T_{ij}, \quad (\text{II}, 4,1)$$

где

$$\square = -\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad h = \delta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}.$$

Уравнения (II, 4,1) допускают интегрирование методом запаздывающих потенциалов, который и приводит к решению Эйнштейна

$$h_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} h = -4 \int \frac{1}{r-r'} \left| T_{ij} \right|_{t-r'} dx' dy' dz'. \quad (\text{II}, 4,2)$$

Эта формула определяет систему величин h_{ij} для каждой пространственно-временной точки x, y, z, t . Интегрирование в правой части производится по всему пространству. При этом

$$r'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

а через $|T_{ij}|_{t-r'}$ обозначены значения компонент тензора энергии-импульса в точке x', y', z' , взятые для момента $t - r'$.

Приложим решение (II, 4,2) к случаю, когда поле гравитации обусловлено системой тел с собственными массами m_s и объемами Ω_s , движущихся по заданным законам. Обозначим координаты цент-

ров масс через $a_s(t)$, $b_s(t)$, $c_s(t)$ и введем систему функций $\sigma_s = \sigma_s(x - a_s, y - b_s, z - c_s)$, каждую из которых определим таким образом, чтобы

$$\int_{\Omega_s} \sigma_s dx dy dz = 1,$$

и чтобы значение ее отличалось от нуля лишь внутри соответствующей области Ω_s , исчезая вне этой области.

Произведения $m_s \sigma_s$ представляют собой плотности тел системы, а величина $\sigma = \sum m_s \sigma_s$ является плотностью в данной пространственной точке. Легко заметить, что в любой внешней точке функция σ равна нулю, а в точках, принадлежащих одному из тел системы, совпадает с плотностью последнего. Пусть для краткости $\sigma'_s = \sigma_s(x' - a_s, y' - b_s, z' - c_s)$. Если принять обозначение

$$U_s = \int \frac{\sigma'_s}{r'} dx' dy' dz',$$

где интегрирование производится по всему пространству, то произведение $m_s U_s$ даст потенциал поля массы m_s в точке x, y, z , а $U = \sum m_s U_s$ — потенциал поля всей системы тел в той же точке.

Для компонент тензора энергии-импульса в решении (II, 4,2) можно принять значения

$$\begin{aligned} T^{14} &= \sum m_s \dot{a}_s \sigma_s, & T^{24} &= \sum m_s \dot{b}_s \sigma_s, & T^{34} &= \sum m_s \dot{c}_s \sigma_s, \\ T^{44} &= \sum m_s \sigma_s, & T^{ij} &= 0, \quad i \neq 4, \quad j \neq 4, \end{aligned} \quad (\text{II, 4,3})$$

которые, как не трудно убедиться, удовлетворяют закону сохранения $T^{\alpha a}_{|a} = 0$.

Потенциалы и их производные по пространственным координатам условимся считать величинами первого порядка малости. В соответствии с этим, принимая, что движение тел системы происходит без участия внешних сил и обусловлено только гравитационным взаимодействием между ними, припишем компонентам скоростей $\dot{a}_s, \dot{b}_s, \dot{c}_s$ порядок $\frac{1}{2}$, а компонентам ускорений — первый порядок. Решение Эйнштейна позволяет легко найти диагональные элементы h_{ii} с точностью до членов первого порядка и смешанные h_{i4} — с точностью до членов порядка $\frac{3}{2}$ включительно. Элементы h_{ij} при различных $i, j \neq 4$ содержат члены, начиная со второго порядка; в данном приближении мы условимся их опускать.

Внося (II, 4,3) в решение (II, 4,2), имеем

$$\begin{aligned} h_{ii} &= -\frac{1}{2} h = -2U \\ h_{14} &= 4 \sum m_s \dot{a}_s U_s, \quad h_{24} = 4 \sum m_s \dot{b}_s U_s, \quad h_{34} = \sum m_s \dot{c}_s U_s. \end{aligned} \quad (\text{II, 4,4})$$

§ 5. Решение уравнения поля для системы точечных масс

В этом и в трех следующих параграфах приводится решение уравнений поля для системы точечных масс с точностью до членов второго порядка относительно ньютоновского потенциала [59].

Пусть система состоит из материальных точек с заданными массами m_s , движущихся по законам

$$a_s = a_s(t), \quad b_s = b_s(t), \quad c_s = c_s(t)$$

которые мы оставим пока неопределенными.

Вместо дискретного распределения массы, отвечающего данной системе, будем рассматривать некоторое непрерывное распределение по всему пространству, выбранное таким образом, чтобы при помощи соответствующего предельного перехода это распределение превращалось в систему точечных масс. С этой целью введем функцию $\sigma = \sigma(\alpha, \lambda)$ непрерывную и неотрицательную для всех α в интервале $0, \infty$ и имеющую наибольшее значение при $\alpha = 0$. Не определяя конкретной формы этой функции, подчиним ее следующим трем условиям:

- 1) при $\alpha = 0 \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma = \infty$;
- 2) при $\alpha \neq 0 \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma = 0$;
- 3) при любом $\lambda \quad 4\pi \int_0^{\infty} \alpha^2 \sigma(\alpha, \lambda) d\alpha = 1$.

Задание функции σ , удовлетворяющей перечисленным требованиям, можно произвести различными способами; в частности, можно, например, принять

$$\sigma = \lambda^2 \pi^{-\frac{3}{2}} e^{-\lambda^2 \alpha^2}.$$

Введем далее обозначение

$$r_s^2 = (x - a_s)^2 + (y - b_s)^2 + (z - c_s)^2$$

и положим для краткости $\sigma(r_s, \lambda) = \sigma_s$. В таком случае функция

$$\rho = \sum m_s \sigma_s, \quad (\text{II}, 5, 1)$$

называемая в дальнейшем плотностью, при конечном λ непрерывна во всех точках, а при $\lambda \rightarrow \infty$ дает дискретное распределение, соответствующее системе материальных точек с координатами a_s, b_s, c_s и массами m_s .

Пользуясь определением (II, 5, 1), составим приближенное решение уравнений поля при непрерывном распределении массы по всему пространству и положив затем $\lambda \rightarrow \infty$, получим искомое решение для системы материальных точек.

Если ввести обозначение

$$\begin{aligned} r'^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \\ r_s'^2 &= (x' - a_s)^2 + (y' - b_s)^2 + (z' - c_s)^2, \\ \sigma_s' &= \sigma(r_s', \lambda) \end{aligned}$$

и принять

$$U_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \frac{\sigma_s'}{r'^2} dx' dy' dz', \quad (\text{II, 5,2})$$

то ньютоновский потенциал масс с плотностью (II, 5,1) выразится формулой

$$U = \sum m_s U_s. \quad (\text{II, 5,3})$$

Величину (II, 5,2) можно рассматривать как потенциал поля, обусловленного сферическим распределением массы с плотностью $\sigma(r_s', \lambda)$, в точке, расположенной на расстоянии r_s от центра. По отношению к массе, заключенной внутри сферы радиуса r_s , эта точка является внешней, тогда как по отношению к массе, распределенной вне указанной сферы, — внутренней. Первая масса создает в этой точке потенциал

$$\frac{4\pi}{r_s} \int_0^{r_s} a^2 \sigma(a, \lambda) da.$$

Потенциал, обусловленный второй массой, равен

$$4\pi \int_{r_s}^{\infty} a \sigma(a, \lambda) da.$$

Поэтому функцию (II, 5,2) можно представить в виде

$$U_s = \frac{4\pi}{r_s} \int_0^{r_s} a^2 \sigma(a, \lambda) da + 4\pi \int_{r_s}^{\infty} \sigma(a, \lambda) a da. \quad (\text{II, 5,4})$$

При конечном λ функция (II, 5,4) непрерывна и конечна во всех точках, но при $\lambda \rightarrow \infty$ она приобретает в точке a_s, b_s, c_s бесконечно большое значение. Во внешних точках, отличных от a_s, b_s, c_s , второй интеграл в (II, 5,4) исчезает при $\lambda \rightarrow \infty$. В первом интеграле в качестве верхнего предела можно принять ∞ , вследствие чего, пользуясь определением функции σ , получим $U_s = \frac{1}{r_s}$ и, следовательно,

$$\lim U = \sum \frac{m_s}{r_s}. \quad (\text{II, 5,5})$$

При произвольном λ , согласно (II, 5,4), имеем

$$\frac{\partial U_s}{\partial r_s} = -\frac{4\pi}{r_s^2} \int_0^{r_s} \sigma a^2 da, \quad \lim_{r_s \rightarrow 0} \frac{\partial U_s}{\partial r_s} = 0.$$

Отсюда следует, что производные от ньютоновского потенциала по координатам в каждой из точек a_s, b_s, c_s удовлетворяют при любом λ равенствам вида

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_\kappa = \frac{\partial U(k)}{\partial a_\kappa},$$

где $U(k)$ — потенциал масс с плотностью $\rho_k = \sum_{s \neq k} m_s \sigma_s$ в точке a_k, b_k, c_k ,

Заметим еще, что потенциал U и функции U_s представляют собой решения уравнений Пуассона $\Delta U = -4\pi\rho$, $\Delta U_s = -4\pi\sigma_s$, которые при $\lambda \rightarrow \infty$ переходят во всех внешних точках в уравнения Лапласа $\Delta U = 0$, $\Delta U_s = 0$.

Сохраняя условие предыдущего параграфа, потенциал и его производные по пространственным координатам, а также составляющие ускорений $\ddot{a}_s, \ddot{b}_s, \ddot{c}_s$ будем считать величинами первого порядка малости, тогда как компонентам скоростей $\dot{a}_s, \dot{b}_s, \dot{c}_s$ припишем порядок $1/2$. Задача состоит в интегрировании уравнений поля с точностью до членов второго порядка включительно.

Как и прежде, будем употреблять разложение $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$. Диагональные h_{ii} и смешанные h_{i4} элементы в приближениях I и $\frac{3}{2}$ соответственно даются решением (II, 4,4); элементы вида h_{ij} ($i, j \neq 4$) в этих приближениях исчезают, как легко заключить на основании (II, 4,2). Для того, чтобы довести решение до членов второго порядка включительно, необходимо уточнить значения компонент тензора энергии-импульса, так как формулы (II, 4,3) обеспечивают определение метрического тензора лишь с точностью до членов порядка $\frac{3}{2}$. Это уточнение должно быть выполнено в соответствии с законом сохранения $T_{/a}^{ia} = 0$.

Введем

$$\begin{aligned} \bar{T}^{11} &= \sum m \dot{a}_s^2 \sigma_s, & \bar{T}^{12} &= \sum m_s \dot{a}_s \dot{b}_s \sigma_s, & \bar{T}^{13} &= \sum m_s \dot{a}_s \dot{c}_s \sigma_s, \\ & & \bar{T}^{14} &= \sum m_s \dot{a}_s \sigma_s, \\ \bar{T}^{22} &= \sum m_s \dot{b}_s^2 \sigma_s, & \bar{T}^{23} &= \sum m_s \dot{b}_s \dot{c}_s \sigma_s, & \bar{T}^{24} &= \sum m_s \dot{b}_s \sigma_s, \\ & & \bar{T}^{33} &= \sum m_s \dot{c}_s^2 \sigma_s, & \bar{T}^{34} &= \sum m_s \dot{c}_s \sigma_s, \\ & & \bar{T}^{44} &= \sum m_s \sigma_s, \end{aligned} \quad (\text{II, 5,6})$$

и напишем искомые компоненты в виде

$$T^{ii} = \bar{T}^{ij} + S^{ij}. \quad (\text{II, 5,7})$$

Три первые компоненты дивергенции тензора энергии-импульса выражаются формулами

$$T^i{}_{j\sigma} = \frac{\partial T^{i\sigma}}{\partial x^j} + \Gamma_{\tau\sigma}^i T^{i\tau} + \Gamma_{\tau\sigma}^i T^{\sigma\tau}$$

или, если принять во внимание значение символов Кристоффеля

$$\Gamma_{\sigma\tau}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^\tau}, \quad \Gamma_{\sigma\tau}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{\sigma\tau}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{i\sigma}}{\partial x^\tau} - \frac{\partial h_{i\tau}}{\partial x^\sigma} \right)$$

и ограничиться только членами первого порядка относительно потенциала,

$$T^i{}_{j\sigma} = \frac{\partial S^{i\sigma}}{\partial x^j} + \frac{\partial \bar{T}^{i\sigma}}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x^i} \bar{T}^{44}.$$

Вычислим первую из этих компонент. Согласно (II, 5,6) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{i\sigma}}{\partial x^j} &= \sum m_s \dot{a}_s \left(\dot{a}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} + \dot{b}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial y} + \dot{c}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \right) + \\ &+ \sum m_s \ddot{a}_s \sigma_s = \sum m_s \ddot{a}_s \sigma_s, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} = \dot{a}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial a_s} + \dot{b}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial b_s} + \dot{c}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial c}$$

и

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial a_s} = - \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

Далее, решение (II, 4,4) вместе с (II, 5,6) дает

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x} \bar{T}^{44} = - \varrho \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Поэтому

$$\bar{T}^i{}_{j\sigma} = \frac{\partial S^{i\sigma}}{\partial x^j} + \sum m_s \ddot{a}_s \sigma_s - \varrho \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Аналогичными формулами выражаются вторая и третья компоненты дивергенции.

Четвертая компонента дивергенции, которая должна быть вычислена с точностью до членов порядка $\frac{3}{2}$, находится по формуле

$$T^4{}_{j\sigma} = \frac{\partial S^{4\sigma}}{\partial x^j} + \frac{\partial \bar{T}^{4\sigma}}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{1}{2} h + h_{44} \right) \bar{T}^{4\sigma} - \frac{\partial h_{44}}{2} \frac{\partial \bar{T}^{44}}{\partial t}.$$

Внося сюда решение (II, 4,4) и очевидное равенство

$$\frac{\partial \bar{T}^{4\sigma}}{\partial x^\sigma} = \sum m_s \left(\dot{a}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} + b_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial y} + \dot{c}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \right) = 0,$$

получаем

$$T_{1\sigma}^{4\sigma} = \frac{\partial S^{4\sigma}}{\partial x^\sigma} - \varrho \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Закон сохранения тензора энергии-импульса приводится в нашем случае к системе четырех уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^{1\sigma}}{\partial x^\sigma} &= \varrho \frac{\partial U}{\partial x} - \sum m_s \ddot{a}_s \sigma_s, \\ \frac{\partial S^{2\sigma}}{\partial x^\sigma} &= \varrho \frac{\partial U}{\partial y} - \sum m_s \ddot{b}_s \sigma_s, \\ \frac{\partial S^{3\sigma}}{\partial x^\sigma} &= \varrho \frac{\partial U}{\partial z} - \sum m_s \ddot{c}_s \sigma_s, \\ \frac{\partial S^{4\sigma}}{\partial x^\sigma} &= -\varrho \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned} \tag{II, 5,8}$$

Выбор десяти поправок S^{ij} , удовлетворяющих этой системе, можно произвести различными способами. Положив

$$S^{12} = S^{13} = S^{23} = S^{44} = 0,$$

мы примем

$$\begin{aligned} S^{11} &= \sum m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \ddot{a}_s \right) dx, & S^{22} &= \sum m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \ddot{b}_s \right) dy, \\ S^{33} &= \sum m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \ddot{c}_s \right) dz, & S^{14} &= - \sum m_s \dot{a}_s \int \varrho \frac{\partial U_s}{\partial x} dx, \\ S^{24} &= - \sum m_s \dot{b}_s \int \varrho \frac{\partial U_s}{\partial y} dy, & S^{34} &= - \sum m_s \dot{c}_s \int \varrho \frac{\partial U_s}{\partial z} dz. \end{aligned} \tag{II, 5,9}$$

Формулами (II, 5, 6, 9) определяются контравариантные компоненты тензора энергии-импульса с точностью, достаточной для интегрирования уравнений поля во втором приближении. Ковариантные компоненты этого тензора находятся по формулам

$$T_{ij} = (\delta_{ij} \delta_{jj} + \delta_{ii} h_{jj} + \delta_{jj} h_{ii}) T^{ij},$$

в которых индексы i, j , повторяющиеся в правых частях, являются фиксированными. При $i, j \neq 4$ эти формулы дают значения

$$T_{ij} = \bar{T}^{ij}, \quad T_{ii} = \bar{T}^{ii} + S^{ii}, \quad T_{i4} = -\bar{T}^{i4}, \quad T_{44} = \bar{T}^{44} - 4\varrho U, \tag{II, 5,10}$$

которыми мы и воспользуемся для составления уравнений поля во втором приближении.

§ 6. Уравнения поля во втором приближении

Для составления уравнений поля во втором приближении необходимо аппроксимировать тензор Риччи с точностью до членов второго порядка относительно величин h_{ij} и их производных. Ковариантные компоненты этого тензора выражаются, согласно (I, 3,21), соотношениями

$$R_{ij} = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha i}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Пользуясь разложением $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$ и производя необходимые вычисления, которые мы здесь опускаем, можно показать, что с точностью до членов второго порядка компоненты тензора Риччи равны

$$\begin{aligned} R_{ij} = & \frac{1}{2} \square h_{ij} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^j} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha j}}{\partial x^\alpha} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha i}}{\partial x^\alpha} \right) \right] + \delta^{\alpha\alpha} \delta^{\beta\beta} \Gamma_{i\alpha, \beta} \Gamma_{j\beta, \alpha} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (h^{\alpha\beta} \Gamma_{ij, \beta}) - \frac{1}{2} \delta^{\alpha\alpha} \Gamma_{ij, \alpha} \frac{\partial h}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left(H - \frac{1}{2} h^2 \right), \quad (\text{II}, 6, 1) \end{aligned}$$

где $\Gamma_{ij, k}$ — символы Кристоффеля первого рода, $h^{ij} = \delta^{ii} \delta^{jj} h_{ij}$, h имеет прежнее значение, а величина H задана соотношением

$$\begin{aligned} H = & h_{11} (h_{22} + h_{33} - h_{44}) + h_{22} (h_{33} - h_{44}) - h_{33} h_{44} - \\ & - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{14}^2 + h_{24}^2 + h_{34}^2. \end{aligned}$$

Тензор Риччи должен быть определен с точностью до членов второго порядка относительно ньютоновского потенциала, причем компонентам скоростей и ускорений, как уже было сказано, следует приписать порядки $\frac{1}{2}$, 1 соответственно. Поэтому, применяя (II, 6, 1), мы сохраним в линейных членах обозначение h_{ij} и воспользуемся значением (II, 4,4) в членах второго порядка.

При $i = j = 1$ непосредственное вычисление по формуле (II, 6,1) дает

$$\begin{aligned} R_{11} = & \frac{1}{2} \square h_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2} + 4 \sum m_s \dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} - \\ & - 4 \sum m_s \ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 4U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2(\text{grad } U)^2 + 8\pi \rho U. \quad (\text{II}, 6, 2) \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно получить для R_{22} , R_{33} . Положив $i = j = 4$, находим выражение для последней компоненты тензора Риччи

$$R_{44} = \frac{1}{2} \square h_{44} + 2(\text{grad } U)^2 + 8\pi \rho U. \quad (\text{II}, 6, 3)$$

При различных i, j , отличающихся от четырех, получаем

$$R_{12} = \frac{1}{2} \square h_{12} + \frac{\partial^2}{2\partial x \partial y} (h + h_{11} + h_{22}) + 2 \sum m_s (\dot{a}_s^2 + \dot{b}_s^2) \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} - \\ - 2 \sum m_s (\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x}) - 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - 4U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (\text{II, 6,4})$$

и две аналогичные формулы для R_{23}, R_{31} .

Если принять $i = 1, j = 4$, то получится

$$R_{14} = \frac{1}{2} \square h_{14} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h_{44}}{\partial t} + \frac{\partial h_{14}}{\partial x} + \frac{\partial h_{24}}{\partial y} + \frac{\partial h_{34}}{\partial z} \right), \quad (\text{II, 6,5})$$

Аналогичные выражения нетрудно составить для R_{24}, R_{34} . Инвариант тензора Риччи, вычисляемый по формуле

$$R = -R_{11}(1 + h_{11}) - R_{22}(1 + h_{22}) - R_{33}(1 + h_{33}) + R_{44}(1 - h_{44}),$$

в том же приближении равен

$$R = \frac{1}{2} \square h - \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (h + h_{11}) - \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (h + h_{22}) - \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (h + h_{33}) - \\ - 4 \sum m_s (\dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2}) + \\ + 4 \sum m_s (\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z}) + 10 (\text{grad } U)^2 - 64\pi \rho U. \quad (\text{II,6,6})$$

В нашем распоряжении имеются теперь все величины, необходимые для составления уравнений поля в развернутой форме. Каждому из уравнений мы припишем двузначный номер, соответствующий индексам i, j .

После необходимых алгебраических преобразований, которые мы здесь не приводим, получаем уравнение 11 в виде

$$\square \left(h_{11} - \frac{1}{2} \delta_{11} h \right) + \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (h + 2h_{11}) - \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (h + 2h_{22}) - \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (h + 2h_{33}) - \\ - 4 \sum m_s \left(-\dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \right) + 4 \sum m_s \left(-\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \right. \\ \left. + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 4 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6 (\text{grad } U)^2 - \\ - 32\pi \rho U = -16\pi (\bar{T}^n + S^n). \quad (\text{II, 6,7})$$

По аналогии нетрудно написать уравнения 22 и 33.

Уравнение 44 имеет вид

$$\square \left(h_{44} - \frac{1}{2} \delta_{44} h \right) + \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (h + 2h_{11}) + \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (h + 2h_{22}) + \\ + \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (h + 2h_{33}) + 4 \sum m_s \left(\dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \right) - \\ - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - \\ - 6 (\text{grad } U)^2 = -16\pi (\bar{T}^{44} + 2\rho U). \quad (\text{II, 6,8})$$

Из трех уравнений с различными $i, j \neq 4$ мы приведем уравнение 12

$$\square \left(h_{12} - \frac{1}{2} \delta_{12} h \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (h + h_{11} + h_{22}) + 4 \sum m_s \left(\dot{a}_s^2 + \dot{b}_s^2 \right) \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} -$$

$$- 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \right) - 4 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} -$$

$$- 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = - 16\pi \bar{T}^{12} \quad (\text{II, 6,9})$$

Остальные три уравнения, соответствующие $i \neq 4, j = 4$, аналогичны одно другому. Из них мы напишем уравнение 14

$$\square \left(h_{14} - \frac{1}{2} \delta_{14} h \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h_{14}}{\partial x} + \frac{\partial h_{24}}{\partial y} + \frac{\partial h_{34}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial h_{11}}{\partial t} - \frac{\partial h_{44}}{\partial t} \right) = 16\pi \bar{T}^{14}. \quad (\text{II, 6,10})$$

Таким образом, поправки h_{ij} , определяемые с точностью до членов второго порядка относительно потенциала, удовлетворяют довольно сложной системе десяти уравнений. С целью упрощения этой системы мы представим искомые поправки в виде

$$h_{ij} = \bar{h}_{ij} + k_{ij}, \quad (\text{II, 6,11})$$

где величины \bar{h}_{ij} могут содержать члены до второго порядка включительно, а k_{ij} имеют второй порядок. Из двадцати величин h_{ij} и k_{ij} десять могут быть заданы независимо. Имея это в виду, мы потребуем, чтобы все \bar{h}_{ij} удовлетворяли уравнениям

$$\square \left(\bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \bar{h} \right) = - 16\pi \delta_{ii} \delta_{jj} \bar{T}^{ij}, \quad (\text{II, 6,12})$$

где, как и прежде, $\bar{h} = \delta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta}$.

Внося (II, 6,11) в (II, 6,7—10) и принимая во внимание (II, 6,12), приходим к заключению, что поправки второго порядка должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{22} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{11}) -$$

$$- \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{22}) - \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{33}) -$$

$$- 4 \sum m_s \left(- \dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \right) + 4 \sum m_s \left(- \ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 4 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6 (\text{grad } U)^2 -$$

$$- 32\pi \rho U = - 16\pi S^{11}. \quad (\text{II, 6,13})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_{22} + k_{33}) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} + k_{11}) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{11} + k_{22}) + \\ & + \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{11}) + \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{22}) + \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{33}) + \\ & + 4 \sum m_s \left(\dot{a}_s^2 \frac{\partial U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial U_s}{\partial z^2} \right) - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 6 (\text{grad} U)^2 = -32\pi\sigma U. \quad (\text{II}, 6, 14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (k_{44} - k_{33}) - \Delta k_{12} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\bar{h}_{44} - \bar{h}_{33}) + 4 \sum m_s \left(\dot{a}_s^2 + \dot{b}_s^2 \right) \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} - \\ & - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \right) - 4 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \quad (\text{II}, 6, 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\Delta k_{14} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial k_{14}}{\partial x} + \frac{\partial k_{24}}{\partial y} + \frac{\partial k_{34}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \bar{h}_{14}}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial \bar{h}_{24}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{h}_{34}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{h}_{44}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{h}_{11}}{\partial t} = 0. \quad (\text{II}, 6, 16) \end{aligned}$$

Общее число этих уравнений равно десяти. Шесть из них, которые здесь не приведены, распадаются на группы по два уравнения, аналогичные уравнениям (II, 6, 13, 15—16) соответственно.

§ 7. Определение величин \bar{h}_{ij}

Переходим к интегрированию уравнений (II, 6, 12). Решение этих уравнений находится по методу запаздывающих потенциалов и имеет вид

$$\bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \bar{h} = -4 \delta_{ii} \delta_{jj} \int \frac{1}{r'} \bar{T}^{ij} \Big|_{t-r'} dt', \quad (\text{II}, 7, 1)$$

где $d\tau' = dx' dy' dz'$ и интегрирование производится по всему пространству. Через $(\bar{T}^{ij})_{t-r'}$ обозначены, как и прежде, значения величин \bar{T}^{ij} в точке x', y', z' , взятые для момента $t - r'$. При этом для тех из величин \bar{T}^{ij} , которые имеют первый порядок относительно потенциала, запаздыванием можно пренебречь, так как в выражении \bar{h}_{ij} учет его не изменит члены до второго порядка включительно.

Положив $i = j = 1, 2, 3, 4$, получим

$$\begin{aligned} \bar{h}_{11} + \frac{1}{2} \bar{h} &= -4 \sum m_s \dot{a}_s^2 U_s, & \bar{h}_{22} + \frac{1}{2} \bar{h} &= -4 \sum m_s \dot{b}_s^2 U_s, \\ \bar{h}_{33} + \frac{1}{2} \bar{h} &= -4 \sum m_s \dot{c}_s^2 U_s, & \bar{h}_{44} - \frac{1}{2} \bar{h} &= -4 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma_s'(t-r') d\tau', \end{aligned}$$

где через $\sigma'_s(t-r')$ обозначено σ'_s , в котором a_s, b_s, c_s взяты для момента $t-r'$. Комбинируя написанные равенства, имеем

$$\bar{h} = 4 \sum m_s \int_{r'} \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' - 4 \sum m_s v_s^2 U_s, \quad (\text{II}, 7,2)$$

где

$$v_s^2 = \dot{a}_s^2 + \dot{b}_s^2 + \dot{c}_s^2,$$

и, следовательно,

$$\bar{h}_{11} = -2 \sum m_s \int_{r'} \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' + 2 \sum m_s (v_s^2 - 2\dot{a}_s^2) U_s,$$

$$\bar{h}_{22} = -2 \sum m_s \int_{r'} \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' + 2 \sum m_s (v_s^2 - 2\dot{b}_s^2) U_s,$$

$$\bar{h}_{33} = -2 \sum m_s \int_{r'} \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' + 2 \sum m_s (v_s^2 - 2\dot{c}_s^2) U_s. \quad (\text{II}, 7,3)$$

С целью получения в дальнейшем внешнего решения уравнений поля при $\lambda \rightarrow \infty$, преобразуем интеграл, входящий в (II, 7,2—3). Введем новые переменные u, v, w при помощи соотношений

$$x' - a_s(t-r') = u, \quad y' - b_s(t-r') = v, \quad z' - c_s(t-r') = w.$$

Якобиан I_s этого преобразования представляет собой определитель, обратный определителю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x'} & \frac{\partial v}{\partial x'} & \frac{\partial w}{\partial x'} \\ \frac{\partial u}{\partial y'} & \frac{\partial v}{\partial y'} & \frac{\partial w}{\partial y'} \\ \frac{\partial u}{\partial z'} & \frac{\partial v}{\partial z'} & \frac{\partial w}{\partial z'} \end{vmatrix}.$$

Непосредственное вычисление дает

$$I_s = \left(1 + \frac{\partial r'}{\partial x'} \frac{da_s}{d\theta} + \frac{\partial r'}{\partial y'} \frac{db_s}{d\theta} + \frac{\partial r'}{\partial z'} \frac{dc_s}{d\theta} \right)^{-1}, \quad \theta = t - r'.$$

В частности, при $u = v = w = 0$ будет

$$I_s = \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1},$$

где r_s определяется соотношением

$$r_s^2 = [x - a_s(\theta)]^2 + [y - b_s(\theta)]^2 + [z - c_s(\theta)]^2, \quad \theta = t - r_s. \quad (\text{II}, 7,4)$$

В результате преобразования переменных интеграл, входящий в (II, 7,2—3), принимает вид

$$\iiint \frac{1}{r'} \sigma (\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}) I_s du dv dw$$

и при переходе к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$ может быть заменен следующим

$$\frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta} \right)^{-1} \iiint \sigma \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \, dudvdw.$$

Если теперь произвести новое преобразование

$$u = \alpha \sin \vartheta \cos \varphi, \quad v = \alpha \sin \vartheta \sin \varphi, \quad w = \alpha \cos \vartheta$$

и выполнить интегрирование по ϑ, φ , то получится

$$\frac{4\pi}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta} \right)^{-1} \int_0^\infty \alpha^2 \sigma(\alpha) \, d\alpha$$

или, согласно определению функции σ ,

$$\frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta} \right)^{-1}.$$

Таким образом, при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем для внешних точек

$$\begin{aligned} \bar{h}_{11} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta} \right)^{-1} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2a_s^2), \\ \bar{h}_{22} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta} \right)^{-1} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2b_s^2), \\ \bar{h}_{33} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta} \right)^{-1} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2c_s^2), \\ \bar{h}_{44} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta} \right)^{-1} - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}, \end{aligned} \quad (\text{II}, 7,5)$$

где в первых членах правых частей величина r_s определяется равенством (II, 7,4), тогда как во вторых членах, пренебрегая запаздыванием, для нее можно принять прежнее значение

$$r_s^2 = (x - a_s)^2 + (y - b_s)^2 + (z - c_s)^2. \quad (\text{II}, 7,6)$$

Если для величины r_s сохранить это значение во всех членах, то формулы (II, 7,5) примут вид

$$\begin{aligned} \bar{h}_{11} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} - \sum m_s \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2a_s^2), \\ \bar{h}_{22} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} - \sum m_s \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2b_s^2), \\ \bar{h}_{33} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} - \sum m_s \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2c_s^2), \\ \bar{h}_{44} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} - \sum m_s \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2} - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}, \end{aligned} \quad (\text{II}, 7,7)$$

в чем нетрудно убедиться, разлагая в ряд выражение

$$\frac{1}{r_s(\vartheta)} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta} \right)^{-1}.$$

Остается определить еще \bar{h}_{ij} с различными индексами.

Положив в (II, 7,1) $i = 1, 2, 3$ и $j = 4$, имеем

$$\bar{h}_{14} = 4 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') \dot{a}_s(t-r') dt' \quad (\text{II, 7,8})$$

и две аналогичные формулы для \bar{h}_{24} , \bar{h}_{34} . Если произвести прежнее преобразование переменных и принять затем $\lambda \rightarrow \infty$, то для внешних точек получится

$$\bar{h}_{14} = 4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s(\vartheta)}{r_s(\vartheta)} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta} \right)^{-1} \quad (\text{II, 7,9})$$

или

$$\bar{h}_{14} = 4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s}{r_s} - 4 \sum m_s \ddot{a}_s, \quad (\text{II, 7,10})$$

где для r_s принято значение (II,7,6). Мы не приводим здесь формулы для \bar{h}_{24} , \bar{h}_{34} , которые легко написать по аналогии.

Пусть индексы i, j различны и каждый из них отличается от четырех. Положив, например, $i = 1, j = 2$, получим по (II, 7,1)

$$\bar{h}_{12} = -4 \sum m_s \dot{a}_s \dot{b}_s U_s \quad (\text{II; 7,11})$$

или, после перехода к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$,

$$\bar{h}_{12} = -4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s \dot{b}_s}{r_s}. \quad (\text{II, 7,12})$$

Аналогичные выражения получаются для величин \bar{h}_{23} и \bar{h}_{31} .

§ 8. Определение k_{ij}

Для завершения интегрирования уравнений поля нам остается найти поправки k_{ij} , удовлетворяющие, как мы видим, системе десяти уравнений, из которых четыре приведены в § 6, а остальные шесть легко могут быть написаны по аналогии.

Рассмотрим прежде всего три уравнения вида (II, 6,16), соответствующие $i = 1, 2, 3, j = 4$. Пользуясь значениями \bar{h}_{ij} и принимая во внимание отсутствие величин k_{i4} в других уравнениях, можно принять $k_{14} = k_{24} = k_{34} = 0$. Далее, положив $k_{12} = k_{23} = k_{31} = 0$, покажем, что остальным уравнениям можно удовлетворить при помощи четырех величин k_{ii} .

Найденное в предыдущем параграфе решение (II, 7,2—3) позволяет переписать уравнение (II, 6,13) следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{22} - k_{44}) + 4 \sum m_s \left(-\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \right. \\ \left. + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U}{\partial z} \right) - 4 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \\ + 6 (\text{grad } U)^2 - 32\pi_0 U = -16\pi S^{11}. \end{aligned} \quad (\text{II, 8,1})$$

Аналогичную форму принимают уравнения, соответствующие $i = j = 2$ и $i = j = 3$.

Вместо (II, 6,14), имеем теперь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_{22} + k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} + k_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{11} + k_{22}) + \\ + 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) + 6 (\text{grad } U)^2 = 32\pi_0 U. \end{aligned} \quad (\text{II, 8,2})$$

Уравнение (II, 6,15) приводится к следующему

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (k_{44} - k_{33}) - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \right) - \\ - 4 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - 8 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II, 8,3})$$

и подобный же вид приобретают последние два уравнения, соответствующие $i = 2, j = 3$ и $i = 3, j = 1$. Нетрудно убедиться в том, что решение трех последних уравнений удовлетворяет уравнениям вида (II, 8,1) и (II, 8,2).

Действительно, из (II, 8,3) имеем

$$\begin{aligned} k_{33} - k_{44} = -4U^2 + 4 \iint \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} dx dy - \\ - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \int U_s dx + \ddot{b}_s \int U_s dy \right). \end{aligned} \quad (\text{II, 8,4})$$

Написав далее выражение для $k_{22} - k_{44}$, образуем сумму

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{22} - k_{44})$$

и внесем ее в (II, 8,1). После необходимых преобразований и учета уравнений Пуассона для функций U_s, U получим

$$S^{11} = \sum m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \ddot{a}_s \right) dx,$$

т. е. значение (II, 5,9), принятое нами ранее в согласии с законом сохранения тензора энергии-импульса.

Подобным же образом убеждаемся в выполнении двух уравнений, аналогичных (II, 8,1).

Выразив затем k_{11} , k_{22} , k_{33} через k_{44} , составим сумму

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_{22} + k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_{33} + k_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(k_{11} + k_{22})$$

и внесем ее в (II, 8,2). Выполнив необходимые упрощения, получим уравнение

$$\Delta(k_{44} - 2U^2) = 8\pi \sum m_s \left\{ \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \ddot{a}_s \right) dx + \right. \\ \left. + \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \ddot{b}_s \right) dy + \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \ddot{c}_s \right) dz \right\}, \quad (\text{II, 8,5})$$

которое служит для определения k_{44} .

Таким образом задача приводится к интегрированию уравнения Пуассона (II, 8,5), которое позволяет найти поправку k_{44} последней из компонент метрического тензора, и к вычислению поправок трех других диагональных компонент при помощи соотношений вида (II, 8,4). Мы не будем выписывать соответствующие формулы в общем виде и ограничимся только предельным случаем $\lambda \rightarrow \infty$, который нас непосредственно интересует. Для перехода к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$ вместо (II, 8,5) можно воспользоваться уравнением

$$\Delta(k_{44} - 2U^2) = 8\pi \sum m_s \left\{ \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_s - \ddot{a}_s \right] \int \sigma_s dx + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_s - \ddot{b}_s \right] \int \sigma_s dy + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_s - \ddot{c}_s \right] \int \sigma_s dz \right\}, \quad (\text{II, 8,6})$$

так как вне нулевой точки функция σ_s , согласно ее определению, имеет при достаточно большом λ сколь угодно малое значение.

Решение этого уравнения по методу Пуассона содержит интегралы вида

$$\iiint \frac{1}{r'} \int \sigma'_s dx' d\tau', \quad (\text{II, 8,7})$$

взятые по всему пространству. Каждый из таких интегралов расходится, как нетрудно убедиться на основании определения функции σ_s .

В самом деле, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r'} \int \sigma'_s dx' \cdot dx'$$

можно представить в виде

$$\ln(x' - x + r') \int \sigma'_s dx' \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma'_s \ln(x' - x + r') dx'$$

или

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} \ln \frac{x' - x + r'}{a_s - x + r_s} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma'_s dx',$$

так как

$$\lim_{x' \rightarrow -\infty} (x' - x + r') = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{1}{x' - x + r'}$$

и при достаточно большом λ можно написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma'_s \ln (x' - x + r') dx' = \ln (a_s - x + r_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma'_s dx'.$$

Поэтому рассматриваемый интеграл, а следовательно и каждый из трех объемных интегралов вида (II, 8,7) расходится, показывая, что при произвольных законах движения точек системы уравнения поля не имеют конечного решения. Для существования решения необходимо, чтобы коэффициенты при каждом из интегралов вида $\int \sigma_s dx$ в (II, 8,6) тождественно исчезали, т. е., чтобы система точечных масс удовлетворяла закону движения Ньютона

$$\ddot{a}_s = \frac{\partial U}{\partial a_s}, \quad \ddot{b}_s = \frac{\partial U}{\partial b_s}, \quad \ddot{c}_s = \frac{\partial U}{\partial c_s}. \quad (\text{II, 8,8})$$

Таким образом, закон движения Ньютона является условием интегрируемости уравнений поля Эйнштейна. При соблюдении (II, 8,8) уравнение (II,8,6) переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta (k_{44} - 2U^2) = 0,$$

показывающее, что разность $k_{44} - 2U^2$ есть функция, гармоническая во всем пространстве. Следовательно,

$$k_{44} - 2U^2 = \text{const.}$$

Принимая во внимание условие на бесконечности, получаем

$$k_{44} = 2 \left(\sum \frac{m_s}{r_s} \right)^2. \quad (\text{II, 8,9})$$

Полное значение последней компоненты метрического тензора в данном приближении дается формулой

$$g_{44} = 1 - 2 \sum \frac{m_s}{r_s(\vartheta)} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta} \right)^{-1} + 2 \left(\sum \frac{m_s}{r_s} \right)^2 - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s} \quad (\text{II, 8,10})$$

или, если употреблять обозначение (II, 7,6),

$$g_{44} = 1 - 2 \sum \frac{m_s}{r_s} + 2 \left(\sum \frac{m_s}{r_s} \right)^2 - \sum m_s \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2} - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \quad (\text{II, 8,11})$$

Остальные поправки определяются теперь непосредственно по формулам вида (II, 8,4). Так,

$$k_{11} = -2U^2 + 4 \iint \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} dy dz - 4 \sum m_s \left(\ddot{b}_s \int \frac{dy}{r_s} + \ddot{c}_s \int \frac{dz}{r_s} \right). \quad (\text{II, 8,12})$$

Аналогичные соотношения нетрудно составить для k_{22} , k_{33} .

Интегрирование уравнений поля с точностью до членов второго порядка завершено. Выполненное исследование показывает, что условием интегрируемости уравнений поля в данном приближении является ньютоновский закон движения для точек системы. Таким образом закон движения в поле тяготения утрачивает самостоятельное значение и должен рассматриваться в качестве следствия уравнений поля. Как уже указывалось в гл. I, обоснование этого заключения впервые было получено в работе Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [25], а несколько позже в известном исследовании В. А. Фока [26], разработавшего метод интегрирования уравнений поля для системы конечных тел в так называемых гармонических координатах.

§ 9. Скорость передачи гравитации и парадокс Лапласа

Как известно, в ньютоновской теории тяготения существенную роль играет принцип дальнего действия, согласно которому гравитационное взаимодействие происходит без участия промежуточной среды. Тяготение описывается в теории Ньютона полем потенциала, обусловленным лишь геометрией масс. Если для какого-либо момента времени задано пространственное распределение плотности, то поле потенциала для того же момента находится путем интегрирования уравнения Пуассона при соответствующих граничных условиях. Изменение геометрии масс вызывает мгновенное изменение поля гравитации. Иными словами, тяготению приписывается бесконечно большая скорость, что с принципиальной точки зрения является одним из наиболее слабых моментов теории Ньютона.

В теории относительности вопрос о скорости распространения гравитации имеет определенный физический смысл, хотя он и не получил пока вполне однозначного решения. В случае слабого поля элементарное решение задачи содержится в рассмотренном выше методе интегрирования Эйнштейна.

Согласно решению (II, 4,2) компоненты метрического тензора в какой-либо заданной пространственно-временной точке определяются полем тензора энергии-импульса.

Пусть требуется определить систему поправок h_{ij} в точке x, y, z для момента t . При вычислении интеграла (II, 4,2) для элементарного объема $dx' dy' dz'$, находящегося на расстоянии r' от заданной

точки x, y, z , должны быть составлены значения компонент тензора энергии-импульса, взятые для момента $t-r'$, или, если вернуться к обычным единицам измерения, для момента $t - \frac{r'}{c}$. Иными словами, значения компонент тензора энергии-импульса обуславливают метрический тензор с некоторым запозданием. При этом величина запоздания равна промежутку времени, в течение которого процесс, распространяющийся со световой скоростью, передается на соответствующее расстояние. Таким образом, мы приходим к заключению, что в теории относительности принцип дальнего действия не имеет места и передача гравитации происходит со скоростью света.

Попытки отказа от принципа дальнего действия неоднократно производились в классической теории задолго до возникновения теории относительности. Однако успеха они не имели. Впервые, по-видимому, ещё Лаплас [60] показал, что дополнение теории Ньютона принципом конечной скорости передачи гравитации приводит к значительным трудностям. Так, например, в задаче двух тел этот принцип требует введения дополнительной компоненты силы, направленной по касательной к орбите и равной $\frac{\gamma m_1 m_2}{r^3} \frac{v}{c}$, где v — относительная скорость, c — скорость распространения тяготения. Учет этой силы усложняет задачу двух тел, вызывая, в частности, вековое увеличение среднего расстояния.

Можно поставить вопрос о нижней границе скорости c , при которой влияние дополнительной компоненты силы не будет явно противоречить данным астрономических наблюдений. Лаплас нашел, что для согласования теории с наблюдаемым движением Луны необходимо постулировать чрезвычайно большую скорость распространения гравитации, допустив, что она превосходит скорость света не менее чем в сто миллионов раз. Более поздние исследователи, например Оппольцер [61], Леман [62] и др., изучавшие влияние дополнительной компоненты силы на движение Луны, планет и комет, приходили к несколько иным оценкам нижней границы c . Однако во всех случаях эта граница оказывалась в огромное число раз больше скорости света.

Это заключение, которое мы будем называть парадоксом Лапласа, является результатом одностороннего обобщения закона тяготения Ньютона. С точки зрения теории относительности дополнение закона тяготения Ньютона одним лишь принципом конечной скорости гравитации недопустимо, так как поле метрического тензора обусловлено не только геометрией, но также кинематикой масс. Уже решение (II, 4,2) показывает, что эффекты, вызываемые кинематикой масс и конечной скоростью гравитации, имеют одинаковые порядки, вследствие чего уточнение теории Ньютона путем учета лишь одного из этих эффектов является ошибочным.

Рассмотрим вопрос несколько подробнее. Пусть частица движется в поле системы точечных масс m_s , координаты a_s, b_s, c_s

которых представляют собой заданные функции времени. Это движение определяется уравнением геодезической линии, которая в данном случае должна быть аппроксимирована с точностью до членов порядка $\frac{3}{2}$ включительно.

Согласно решению (II, 8,10) в данном приближении имеем

$$h_{44} = -2 \sum \frac{m_s}{r_s(\vartheta)} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial t}, \quad (\text{II, 9,1})$$

где

$$r_s^2 = (x - a_s)^2 + (y - b_s)^2 + (z - c_s)^2,$$

$$r_s^2(\vartheta) = [x - a_s(\vartheta)]^2 + [y - b_s(\vartheta)]^2 + [z - c_s(\vartheta)]^2, \quad \vartheta = t - r_s(\vartheta).$$

Первый член правой части формулы (II, 9,1) представляет собой запаздывающий потенциал, отличающийся от ньютоновского потенциала поправкой за конечную скорость передачи гравитации. Второй член определяет зависимость компоненты g_{44} от движения гравитационных масс.

Воспользовавшись очевидными соотношениями

$$a_s(\vartheta) = a_s(t) - r_s \dot{a}_s(t) \text{ и т. д.}$$

с принятой степенью точности, получим

$$\frac{m_s}{r_s(\vartheta)} = \frac{m_s}{r_s} + \frac{m_s}{r_s} \left(\frac{\partial r_s}{\partial a_s} \dot{a}_s + \frac{\partial r_s}{\partial b_s} \dot{b}_s + \frac{\partial r_s}{\partial c_s} \dot{c}_s \right)$$

и

$$\frac{m_s}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial t} = \frac{m_s}{r_s} \left(\frac{\partial r_s}{\partial a_s} \dot{a}_s + \frac{\partial r_s}{\partial b_s} \dot{b}_s + \frac{\partial r_s}{\partial c_s} \dot{c}_s \right).$$

Таким образом, с точностью до членов порядка $\frac{3}{2}$ включительно имеем

$$-\frac{1}{2} h_{44} = \sum \frac{m_s}{r_s}.$$

С другой стороны, уравнения геодезической линии, написанные в форме (I, 3, 16), приводятся в том же приближении к виду

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(-\frac{1}{2} h_{44} \right).$$

Следовательно, движение частицы в поле рассматриваемых точечных масс происходит по закону Ньютона

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x^i} \sum \frac{m_s}{r_s}.$$

В данном приближении эффект запаздывающего потенциала компенсируется зависимостью поля гравитации от движения масс,

чем и устраняется порядок Лапласа. Уклонение движения частицы от закона Ньютона обнаруживается в теории относительности лишь в том случае, если исследование производится с точностью до членов не ниже второго порядка.

§ 10. Соотношение между массой и энергией

Соотношение между массой и энергией выводится в специальной теории относительности из законов сохранения массы и количества движения. Покажем, что в общей теории относительности это соотношение также имеет место и является следствием закона сохранения тензора энергии-импульса и уравнений поля [63].

Рассмотрим изолированную систему тел, движущихся по законам механики Ньютона. Пусть собственные массы тел будут m_s , собственные плотности — ρ_{0s} , скорости движения — v_s . Предположим, что размеры тел достаточно малы по сравнению с расстояниями между ними.

В главе 1 мы видели, что полная масса изолированной системы определяется формулой

$$m = \iiint (F_4^4 + t_4^4) dx dy dz, \quad (\text{II}, 10, 1)$$

в которой F_4^4 — последняя из смешанных компонент плотности тензора энергии-импульса, равная

$$F_4^4 = T_4^4 \sqrt{-g}.$$

t_4^4 — компонента псевдотензора энергии гравитационного поля, заданная соотношением

$$t_4^4 = \frac{1}{16\pi} \left(-q_4^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial q_4^{\alpha\beta}} + L \right), \quad (\text{II}, 10, 2)$$

где $q^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}$, $q_4^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial t}$, $q^{\alpha i}$, а L — функция Лагранжа

$$L = q^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} \Gamma_{\beta\delta}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\delta}^{\delta}). \quad (\text{II}, 10, 3)$$

Воспользуемся общей формулой (II, 10, 1) для определения массы рассматриваемой системы.

Ограничиваясь членами первого порядка относительно ньютоновского потенциала U , имеем согласно приближенному решению Эйнштейна квадратичную форму

$$ds^2 = - (1 + 2U) (dx^2 + dy^2 + dz^2) + (1 - 2U) dt^2, \quad (\text{II}, 10, 4)$$

которой соответствует метрический тензор

$$g_{ii} = \delta_{ii} - 2U, \quad g_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

с определителем $g = -1 - 4U$. Компонента плотности тензора

энергии-импульса в данном приближении равна $F_4^4 = \epsilon_0 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2$ или, если принять во внимание линейный элемент (II, 10, 4),

$$F_4^4 = \epsilon_0 (1 + 2U + v^2). \quad (\text{II}, 10, 5)$$

Функция Лагранжа (II, 10, 3) содержит члены не ниже второго порядка. С достаточной для наших целей точностью эта функция вычисляется по формуле

$$L = \delta^{ab} (\Gamma_{a\gamma}^b \Gamma_{\beta\delta}^\gamma - \Gamma_{a\beta}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^b).$$

Внося сюда выражение символов Кристоффеля через компоненты метрического тензора, получаем после необходимых упрощений $L = 2 (\text{grad } U)^2$. Компонента псевдотензора энергии поля сводится в этом приближении ко второму члену правой части (II, 10, 2), так как первый член имеет более высокий порядок и может быть опущен. Следовательно,

$$t_4^4 = \frac{1}{8\pi} (\text{grad } U)^2. \quad (\text{II}, 10, 6)$$

Величина (II, 10, 6) вполне аналогична максвелловой плотности энергии электрического поля в пустоте и может быть названа плотностью энергии поля гравитации. Как мы увидим ниже, интеграл, взятый от t_4^4 по всему пространству, определяет потенциальную энергию системы тел, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона.

Внося (II, 10, 5—6) в (II, 10, 1), имеем

$$m = \iiint \epsilon_0 (1 + v^2 + 2U) dx dy dz + \frac{1}{8\pi} \iiint (\text{grad } U)^2 dx dy dz. \quad (\text{II}, 10, 7)$$

Вычислим интегралы (II, 10, 7). Элементы первого из них тождественно исчезают для всего пространства вне тел системы. Поэтому величина интеграла сводится к сумме интегралов, взятых по объемам тел системы.

Рассмотрим бесконечно малую окрестность какой-либо точки, принадлежащей телу m_s . Для этой окрестности примем эвклидову геометрию, положив, что в линейном элементе (II, 10, 4) ньютонианский потенциал имеет постоянную величину U_s , которую можно считать одинаковой для всех точек данного тела. Соответствующий элемент интеграла равен

$$\epsilon_{0s} (1 + v_s^2 + 2U_s) dx dy dz.$$

Произведя преобразование

$$x' = x(1 + U_s), \quad y' = y(1 + U_s), \quad z' = z(1 + U_s), \quad t' = t(1 + U_s),$$

превращающее квадратичную форму (II, 10, 4) при $U = U_s$ в линейный элемент специальной теории относительности, получим

$$dx dy dz = dx' dy' dz' (1 - 3U_s).$$

Если ввести теперь элемент собственного объема

$$d\omega = dx'dy'dz' (1 - v_s^2)^{-\frac{1}{2}},$$

то предыдущая формула примет вид

$$dxdydz = (1 - 3U_s) \left(1 - \frac{1}{2} v_s^2\right) d\omega$$

и рассматриваемый элемент интеграла будет

$$\rho_{0s} \left(1 + \frac{1}{2} v_s^2 - U_s\right) d\omega.$$

Следовательно,

$$\iiint \rho_0 (1 + v^2 + 2U) dxdydz = \sum m_s + \sum \frac{m_s v_s^2}{2} - \sum m_s U_s. \quad (\text{II}, 10,8)$$

Переходим к определению второго из интегралов (II, 10,7), при вычислении которого можно пренебречь отклонением от евклидовой геометрии, так как учет этого отклонения окажет влияние лишь на члены более высокого порядка малости. Пользуясь известным соотношением векторного анализа

$$\text{div} (U \text{grad} U) = U \Delta U + (\text{grad} U)^2,$$

находим

$$\iiint (\text{grad} U)^2 dxdydz = \iiint \text{div} (U \text{grad} U) dxdydz - \iiint U \Delta U dxdydz.$$

Первый член правой части приводится по формуле Гаусса к интегралу

$$\iint U (\text{grad} U)_n dS,$$

взятому по сфере бесконечно большого радиуса. Этот интеграл исчезает по условию на бесконечности, и мы имеем

$$\iiint (\text{grad} U)^2 dxdydz = - \iiint U \Delta U dxdydz.$$

Если принять во внимание уравнение Пуассона, то получится

$$\frac{1}{8\pi} \iiint (\text{grad} U)^2 dxdydz = \frac{1}{2} \sum m_s U_s. \quad (\text{II}, 10,9)$$

Внося (II, 10,8—9) в (II, 10,7), окончательно находим

$$m = \sum m_s + \sum \frac{m_s v_s^2}{2} - \frac{1}{2} \sum m_s U_s. \quad (\text{II}, 10,10)$$

Первый член правой части равен сумме собственных масс тел системы, а второй и третий представляют собой соответственно кинетическую и потенциальную энергию системы. При этом полная

энергия $E = \sum \frac{m_s v_s^2}{2} - \frac{1}{2} \sum m_s U_s$ не изменяется, поскольку система, следуя законам движения Ньютона, удовлетворяет интегралу живых сил.

Таким образом, мы видим, что инертная масса изолированной системы остается постоянной и отличается от суммы собственных масс на величину полной энергии.

§ 11. Внешнее решение для однородного вращающегося шара

В заключение рассмотрим внешнее поле гравитации однородного шара, равномерно вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр [64].

В механике Ньютона внешнее поле тяготения однородного шара не зависит от его вращения вокруг диаметра и удовлетворяет условию сферической симметрии. В теории относительности вращение однородного шара нарушает центральную симметрию поля. Поле гравитации сферического небесного тела (напр. Солнца или планеты) обладает симметрией относительно оси вращения и зависит не только от массы, но также от угловой скорости и радиуса тела.

Составим приближенное решение уравнений поля для однородного шара радиуса R_0 , вращающегося вокруг оси OZ с постоянной угловой скоростью ω_0 .

Принимая обычное разложение $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, воспользуемся общим решением Эйнштейна. Имея в виду последующее приложение, будем искать h_{44} с точностью до членов второго порядка относительно ньютоновского потенциала включительно, тогда как во всех остальных h_{ij} сохраним члены только первого порядка относительно потенциала. При этом член второго порядка в h_{44} найдем без учета вращения, поскольку последнее вносит в него лишь пренебрежимую поправку.

Согласно решению Эйнштейна имеем

$$h_{ij} = -4 \int \frac{1}{r'} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} T \right) dv. \quad (\text{II}, 11, 1)$$

Здесь r' расстояние внешней точки x, y, z от элемента объема dv , построенного во внутренней точке x', y', z' данного тела. Интегрирование производится по объему тела.

Ковариантные составляющие тензора энергии-импульса с достаточной для наших целей точностью определяются формулами

$$\begin{aligned} T_{11} = \rho \dot{x}'^2, \quad T_{12} = \rho x' \dot{y}', \quad T_{13} = 0, \quad T_{14} = \rho \dot{x}', \\ T_{22} = \rho \dot{y}'^2, \quad T_{23} = 0, \quad T_{34} = \rho \dot{y}', \\ T_{33} = 0, \quad T_{34} = 0, \\ T_{44} = \rho. \end{aligned} \quad (\text{II}, 11, 2)$$

Инвариант этого тензора равен

$$T = -\varrho x'^2 - \varrho y'^2 + \varrho. \quad (\text{II}, 11, 3)$$

Для использования решения (II, 11, 1) необходимо найти интегралы

$$\int \frac{1}{r'} \varrho dv, \quad \int \frac{1}{r'} \varrho x' dv, \quad \int \frac{1}{r'} \varrho y' dv, \quad \int \frac{1}{r'} \varrho x'^2 dv, \quad \int \frac{1}{r'} \varrho y'^2 dv,$$

к вычислению которых мы и переходим.

Введем сферические координаты a, ϑ, ψ элемента объема dv , расположенного внутри шара (рис. 1) Пусть r, Θ_0, φ_0 — сферические координаты внешней точки M .

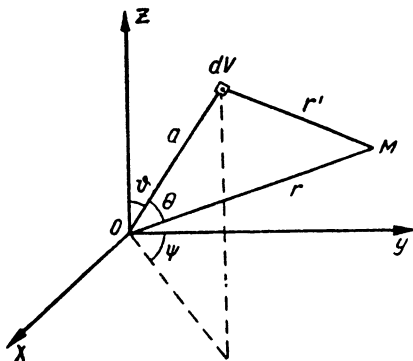


Рис. 1.

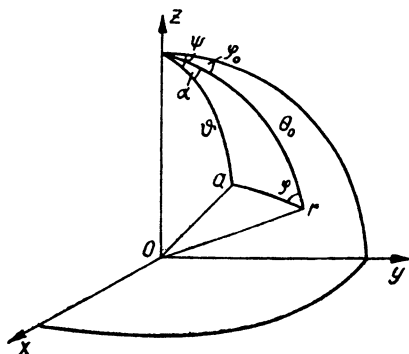


Рис. 2.

Первый из перечисленных интегралов равен

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\varrho a^2 \sin \Theta d\Theta d\psi da}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \Theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{m}{r}, \quad (\text{II}, 11, 4)$$

где m — масса шара, выраженная в релятивистских единицах.

Положив $\psi = \omega_0$, имеем

$$x' = a\omega_0 \sin \vartheta \cos \psi, \quad y' = -a\omega_0 \sin \vartheta \sin \psi. \quad (\text{II}, 11, 5)$$

Введя в сферическом треугольнике arz (рис. 2) угол α , можно написать

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \cos \psi &= \sin \vartheta \cos \alpha \cos \varphi_0 - \sin \vartheta \sin \alpha \sin \varphi_0, \\ \sin \vartheta \sin \psi &= \sin \vartheta \sin \alpha \cos \varphi_0 + \sin \vartheta \cos \alpha \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Внося сюда соотношения

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \sin \alpha &= \sin \Theta \sin \varphi, \\ \sin \vartheta \cos \alpha &= \sin \Theta_0 \cos \Theta - \sin \Theta \cos \varphi \cos \Theta_0, \end{aligned}$$

которые легко находятся из того же сферического треугольника, получаем

$$\begin{aligned}\sin \vartheta \cos \psi &= \cos \Theta \sin \Theta_0 \cos \varphi_0 - \sin \Theta \cos \varphi \cos \Theta_0 \cos \varphi_0 - \\ &\quad - \sin \Theta \sin \varphi \sin \varphi_0, \\ \sin \vartheta \sin \psi &= \sin \Theta \sin \varphi \cos \varphi_0 + \cos \Theta \sin \Theta_0 \sin \varphi_0 - \\ &\quad - \sin \Theta \cos \varphi \cos \Theta_0 \sin \varphi_0.\end{aligned}\quad (\text{II}, 11, 6)$$

С помощью (II, 11, 5) и (II, 11, 6) второй из перечисленных интегралов приводится к следующему

$$\begin{aligned}\omega_0 \varrho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\alpha^3}{r'} (\cos \Theta \sin \Theta_0 \cos \varphi_0 - \sin \Theta \cos \varphi \cos \Theta_0 \cos \varphi_0 - \\ - \sin \Theta \sin \varphi \sin \varphi_0) \sin \Theta d\Theta d\varphi da = \\ = 2\pi \omega_0 \varrho \sin \Theta_0 \cos \varphi_0 \int_0^R \alpha^3 \int_0^\pi \frac{1}{r'} \sin \Theta \cos \Theta d\Theta da\end{aligned}$$

и оказывается равным $\frac{1}{5} \omega_0 m R_0^2 \frac{y}{r^3}$. Подобным же образом находится третий интеграл; он равен

$$-\frac{1}{5} \omega_0 m R_0^2 \frac{x}{r^3}.$$

Четвертый интеграл

$$\begin{aligned}\omega_0^2 \varrho \int_0^R \alpha^4 \int_0^\pi \frac{\sin \Theta}{r'} \int_0^{2\pi} (\cos \Theta \sin \Theta_0 \cos \varphi_0 - \sin \Theta \cos \varphi \cos \Theta_0 \cos \varphi_0 - \\ - \sin \Theta \sin \varphi \sin \varphi_0)^2 d\varphi d\Theta da\end{aligned}$$

приводится к величине

$$\frac{\omega_0^2 m R_0^2}{5r} \left(1 - \frac{R_0^2}{7r^2} + \frac{3R_0^2 y^2}{7r^4} \right).$$

Последний из перечисленных интегралов равен

$$\frac{\omega_0^2 m R_0^2}{5r} \left(1 - \frac{R_0^2}{7r^2} + \frac{3R_0^2 x^2}{7r^4} \right).$$

Пользуясь приведенными значениями, легко находим с принятой точностью

$$\begin{aligned}h_{11} = h_{22} = h_{33} = -\frac{2m}{r}, \quad h_{14} = -\frac{4}{5} \omega_0 m R_0^2 \frac{y}{r}, \quad h_{24} = \frac{4}{5} \omega_0 m R_0^2 \frac{x}{r} \\ h_{44} = -\frac{2m}{r} + \frac{2m^2}{r^2} - \frac{2m\omega_0^2 R_0^2}{5r} \left(2 + \frac{R_0^2}{7r^2} - \frac{3R_0^2 z^2}{7r^4} \right).\end{aligned}\quad (\text{II}, 11, 7)$$

Выражение для h_{44} дополнено членом второго порядка относительно потенциала (см., например, [59]) Остальные h_{ij} в рассматриваемом приближении исчезают.

Глава III

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА

§ 1. Уравнения движения

Релятивистская задача Кеплера о движении частицы в центральном поле является обобщением ограниченной задачи двух тел ньютоновской механики для случая, когда относительная величина одного из тел достаточно мала. Вывод о вековом вращении линии апсид в невозмущенном движении планеты принадлежит к числу важнейших результатов общей теории относительности и является одним из трех главных астрономических следствий этой теории.

Впервые релятивистская задача Кеплера изучалась в классической работе Эйнштейна [52]. Пользуясь приближенным решением уравнений поля для случая центральной симметрии, Эйнштейн исследует уравнения движения и получает известную формулу, определяющую прецессию периодической орбиты

$$\Delta\omega = \frac{6\pi m}{\rho}, \quad (\text{III}, 1, 1)$$

где $\Delta\omega$ — изменение долготы перигелия в течение одного периода, m — масса центра гравитации в релятивистских единицах, ρ — фокальный параметр орбиты.

Решение Шварцшильда, рассмотренное в предыдущей главе, позволяет дать элементарный, но достаточно обоснованный вывод приближенной формулы (III, 1, 1), который в той или иной форме воспроизводится почти во всех руководствах по теории относительности. Общее решение задачи о движении в поле одного центра содержится в работе Хагихара [65], в которой уравнения геодезической линии интегрируются при помощи эллиптических функций Вейерштрасса. В последующих параграфах воспроизводится более элементарное исследование уравнения релятивистской орбиты, выполненное при помощи эллиптических интегралов в форме

Лежандра [66]. Во всех случаях это исследование доведено до формул, непосредственно пригодных для вычислений.

Переходим к составлению уравнений движения.

Пусть x^1, x^2, x^3 — пространственные координаты, $x^4 = t$ — временная координата. Согласно принципу геодезической линии в форме (I, 2,16) уравнения движения имеют вид

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\sigma}{dt} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0. \quad (\text{III}, 1, 2)$$

Геометрия пространственно-временного континуума, соответствующего полю центральной симметрии, определяется внешним решением Шварцшильда, в котором отличны от нуля лишь диагональные компоненты метрического тензора. Вследствие этого символы Кристоффеля, входящие в уравнения движения, даются, как нетрудно убедиться на основании определений (I, 2,6—7), формулами

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}, \quad \Gamma_{ji}^j = -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}, \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i},$$

где i, j, k — различные фиксированные индексы.

Внеся эти значения в (III, 1,2) и принимая во внимание, что метрический тензор не зависит явно от времени, легко привести уравнения движения к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{g_{\sigma\sigma}}{g_{44}} \frac{dx^\sigma}{dt} \right) - \frac{1}{2g_{44}} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dx^\alpha}{dt} \right)^2 = 0. \quad (\text{III}, 1, 3)$$

Положим $x^1 = r, x^2 = \vartheta, x^3 = \varphi$ и найдем первые интегралы уравнений (III, 1,3). Последнее уравнение этой системы, соответствующее $\sigma = 3$, непосредственно дает

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(1 - \frac{2m}{r} \right), \quad (\text{III}, 1, 4)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Положив затем $\sigma = 2$, имеем

$$\frac{d}{dt} \left[r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \frac{d\vartheta}{dt} \right] - r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0.$$

Если внести сюда значение $\frac{d\varphi}{dt}$ из (III, 1,4) и умножить это уравнение на $2r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \frac{d\vartheta}{dt}$, то после интегрирования получится

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \left(C_2^2 - \frac{C_1^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \frac{1}{r^4} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^2, \quad (\text{III}, 1, 5)$$

где C_2 — новая постоянная интегрирования. Уравнение (III, 1,5) непосредственно показывает, что задача Кеплера является, как и в ньютоновской теории, плоской. В самом деле, выбрав систему

координат таким образом, чтобы в начальный момент t_0 движение происходило в плоскости $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, т. е., чтобы при $t = t_0$ выполнялись условия

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

получим из (III, 1,5) $C_1^2 = C_2^2$. В этих координатах уравнение (III, 1,5) переходит в следующее

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -\frac{C_1^2}{r^4} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \cot^2 \vartheta,$$

показывая, что вообще должно быть $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Вместо (III, 1,4) напишем теперь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (\text{III,1,6})$$

При $\sigma = 1$ интегрирование уравнения (III, 1,3) оказывается сложнее, поэтому первый интеграл его мы получим косвенным путем.

Вернемся к уравнениям геодезической линии в первоначальной форме (I, 2,15). Последнее из них, соответствующее $\sigma = 4$, имеет вид

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Из символов Кристоффеля, входящих в это уравнение, в данном случае может отличаться от нуля лишь $\Gamma_{\alpha 4}^4$ при $\alpha \neq 4$. Поэтому

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + 2\Gamma_{\alpha 4}^4 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

или

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{d \ln g_{44}}{ds} \frac{dt}{ds} = 0,$$

откуда получается

$$\frac{dt}{ds} = h \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1},$$

где h — постоянная интегрирования.

Решению Шварцшильда соответствует квадратичная форма (II, 1,7). Разделив ее на ds^2 и внося найденные ранее производные $\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{d\vartheta}{dt}$, а также $\frac{ds}{dt}$, получим первый интеграл уравнения $\sigma = 1$.

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{1}{h^2} + \frac{C_1^2}{r^2}\right)\right]. \quad (\text{III,1,7})$$

Таким образом, в выбранной системе координат закон движения частицы определяется формулами (III, 1,6—7).

Для составления дифференциального уравнения орбиты разделим (III, 1,7) на возведенное в квадрат соотношение (III, 1,6).

Введя переменную $u = \frac{1}{r}$ и приняв обозначение $C_1^2 = \frac{a^2}{h^2}$, получим

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2mu^3 - u^2 + \frac{2m}{a^2}u + \frac{h^2 - 1}{a^2}. \quad (\text{III}, 1,8)$$

Прежде чем перейти к общему исследованию уравнения (III, 1,8), рассмотрим простейший частный случай, который в дальнейшем будем предполагать исключенным.

Пусть $a = 0$. Вместо (III, 1,7,8) имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{h^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right].$$

Первое из этих уравнений показывает, что орбита представляет собой прямую линию; движение происходит в радиальном направлении. Второе уравнение определяет зависимость между переменными r, t . При $r_1 = 2m$ и $r_2 = \frac{2m}{1-h^2}$ скорость принимает нулевые значения. В точке r_1 , переменная r имеет стационарное значение, так как при $r = r_1$ исчезают все производные $\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \dots$, в то время как в точке r_2 нулевое значение принимает только первая из этих производных. Вследствие этого при всех значениях постоянной h орбита простирается от точки r_1 до ∞ . Сферу радиуса r_1 называют гравитационной поверхностью.

§ 2. Классификация орбит

Входящий в общее уравнение (III, 1,8) полином

$$f(u) = u^3 - \frac{u^2}{2m} + \frac{u}{a^2} + \frac{h^2 - 1}{2ma^2}$$

для всех вещественных точек орбиты может принимать только положительные или нулевые значения. Поэтому мы будем рассматривать лишь те интервалы значений переменной u , которые удовлетворяют условию $0 \leq u \leq \frac{1}{2m}$ и дают $f(u) \geq 0$. Для отыскания этих интервалов необходимо исследовать ход функции $f(u)$.

Пусть вещественные корни полинома $f(u)$ в порядке их возрастания будут u_1, u_2, u_3 . Введем обозначения

$$p = \frac{1}{2} [9(h^2 - 1) + 1], \quad \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - 12m^2}}{a},$$

$$\alpha_{1,2} = \mp \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + p} \quad (\text{III}, 2,1)$$

и, не приводя соответствующих вычислений, перечислим интервалы значений u при различных предположениях относительно постоянных h, a .

	Вещественные корни полинома $f(u)$	Интервалы значений переменной u
$0 \leq h^2 \leq \frac{8}{9}$	$\begin{cases} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leq \alpha < 1 \end{cases}$	$u_1 > 0$ $\left(u_1, \frac{1}{2m}\right)$
$\frac{8}{9} < h^2 < 1$	$\begin{cases} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leq \alpha < \alpha_1 \end{cases}$	$u_1 > 0$ $\left(u_1, \frac{1}{2m}\right)$
	$\alpha = \alpha_1$	$u_1 = \frac{1 - 2\alpha_1}{6m},$ $u_{2,3} = \frac{1 + \alpha_1}{6m}$ $(u_1, u_{2,3}) \left(u_{2,3}, \frac{1}{2m}\right)$
	$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$	$u_1 > 0, u_2, u_3$ $u_{1,2} = \frac{1 - \alpha_2}{6m},$ $u_3 = \frac{1 + 2\alpha_2}{6m}$ $(u_1, u_2) \left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$
	$\alpha = \alpha_2$	$u_{1,2} = \frac{1 - \alpha_2}{6m},$ $u_3 = \frac{1 + 2\alpha_2}{6m}$ $u_{1,2} \left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$
	$\alpha_2 < \alpha < 1$	$u_1 > 0$ $\left(u_1, \frac{1}{2m}\right)$
$h^2 = 1$	$\begin{cases} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leq \alpha < \alpha_1 \end{cases}$	u_1 $\left(0, \frac{1}{2m}\right)$
	$\alpha = \alpha_1$	$u_1 = 0, u_{2,3} = \frac{1 + \alpha_1}{6m}$ $\left(0, \frac{1}{2m}\right)$
	$\alpha_1 < \alpha < 1$	$u_1 = 0,$ $u_{2,3} = \frac{3 \mp \sqrt{3(4\alpha^2 - 1)}}{12m}$ $(0, u_2) \left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$
$h^2 > 1$	$\begin{cases} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leq \alpha < \alpha_1 \end{cases}$	$u_1 < 0$ $\left(0, \frac{1}{2m}\right)$
	$\alpha = \alpha_1$	$u_1 = \frac{1 - 2\alpha_1}{6m},$ $u_{2,3} = \frac{1 + \alpha_1}{6m}$ $\left(0, \frac{1}{2m}\right)$
	$\alpha_1 < \alpha < 1$	$u_1 < 0, u_2, u_3$ $(0, u_2) \left(u_3, \frac{1}{2m}\right).$

При некоторых значениях постоянных h, a существуют два различных интервала, которым соответствуют две различные орбиты. В подобных случаях выбор орбиты определяется начальным

значением u_0 . В дальнейшем принимается следующая классификация орбит.

Орбиты класса А определяются монотонным изменением переменной u от нуля или от некоторого $u > 0$ до $\frac{1}{2m}$. К этому классу относятся случаи:

1) когда функция $f(u)$ имеет один вещественный корень;
 2) когда функция $f(u)$ имеет двойной $u_{1,2}$ и простой u_3 вещественные корни и начальное значение задано в интервале $u_3, \frac{1}{2m}$;

3) когда все корни полинома $f(u)$ вещественны и различны и начальное значение лежит в интервале $u_3, \frac{1}{2m}$. Рассмотренный в конце предыдущего параграфа случай $a = 0$ также можно отнести к этому классу.

К *классу В* относятся *орбиты*, для которых кратный корень функции $f(u)$ превосходит простой корень. В этом случае, в зависимости от условий $u_0 \leq u_{2,3}$ переменная u монотонно возрастает от нуля (если $u_1 \leq 0$) или от u_1 (если $u_1 > 0$) до $u_{2,3}$ или от $u_{2,3}$ до $\frac{1}{2m}$. Если начальное значение совпадает с кратным корнем, то уравнение орбиты имеет вид $u = u_{2,3}$.

Орбиты класса С определяются существованием трех различных корней полинома $f(u)$, меньший из которых отрицателен или равен нулю, и заданием начального значения в интервале $0, u_2$. Орбиты этого класса характеризуются возрастанием переменной u от нуля до наибольшего значения u_2 и последующим убыванием от u_2 до нуля.

Наконец, к *классу D* относятся *орбиты*, для которых функция $f(u)$ имеет различные положительные корни, а начальное значение u_0 лежит в интервале u_1, u_2 . Орбиты этого класса характеризуются колебательным изменением переменной u между u_1, u_2 и являются периодическими. При $u_1 = u_2$, а также при $u_1 = u_2 = u_3$ орбита этого класса вырождается в окружность. В частном случае, когда $u_{1,2} = 0$, последняя будет бесконечно удаленной.

Переходим к систематическому исследованию орбит перечисленных классов.

§ 3. Орбиты класса А

Согласно принятому выше определению для орбит данного класса переменная u является монотонной функцией φ . Пусть положительное направление φ соответствует возрастанию переменной u , вследствие чего $\frac{du}{d\varphi} \geq 0$. В таком случае уравнение (III, 1,8) дает

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{|f(u)|}}. \quad (\text{III}, 3, 1)$$

Предположим, что мы имеем первый из трех случаев, перечисленных в определении орбит класса A , т. е., что полином $f(u)$ имеет один вещественный корень. Трехчлен $\frac{f(u)}{u-u_1}$ при всех вещественных значениях u остается положительным, и так как

$$f'(u) = \frac{f(u)}{u-u_1} + (u-u_1) \frac{d}{du} \frac{f(u)}{u-u_1},$$

то очевидно

$$f'(u_1) = 3u_1^2 - \frac{u_1}{m} + a^{-2} > 0.$$

Введем новую переменную Φ при помощи соотношения

$$u = u_1 + \sqrt{f'(u_1)} \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2}, \quad (\text{III}, 3, 2)$$

из которого следует

$$f(u) = [f'(u_1)]^{\frac{3}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \Phi) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} \cos^{-4} \frac{\Phi}{2},$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\frac{3}{2} u_1 - \frac{1}{4m}}{\sqrt{f'(u_1)}} \right). \quad (\text{III}, 3, 3)$$

Тогда уравнение (III, 3, 1) примет вид

$$\varphi - \varphi_0 = [4m^2 f'(u_1)]^{-\frac{1}{4}} \left(\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right),$$

$$\Delta\Phi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}, \quad (\text{III}, 3, 4)$$

выражаясь через эллиптические интегралы.

Если $h \geq 1$, вследствие чего $u_1 \leq 0$, то орбита имеет бесконечно удаленную точку. Точка орбиты, соответствующая наибольшему значению переменной $u = \frac{1}{2m}$, лежит на гравитационной поверхности. Пусть рассматриваемая орбита относится ко второму случаю, когда меньший из вещественных корней полинома $f(u)$ двойной, а начальное значение u_0 принадлежит интервалу $u_3, \frac{1}{2m}$. В этом случае уравнение (III, 1, 8) легко интегрируется в элементарных функциях

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left| \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{u - u_1}{u_3 - u_1}} \right|_{u_0}^u. \quad (\text{III}, 3, 5)$$

Орбита соединяет сферу $u = u_3$ с гравитационной поверхностью. Предположим, наконец, что все корни полинома $f(u)$ вещественны и различны, а начальное значение u_0 лежит в интервале $u_3, \frac{1}{5m}$.

Для простоты примем $u_0 = u_3$, $\Phi_0 = 0$. Замечая, что величина $f'(u_1) = (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)$ по-прежнему положительна, употребим подстановку (III, 3,2). После необходимых преобразований получим

$$\varphi = [4m^2 f'(u_1)]^{-\frac{1}{4}} \left(\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_k} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \quad (\text{III, 3,6})$$

При этом модуль эллиптических интегралов, определяющийся теперь формулой

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{u_2 + u_3 - 2u_1}{4\sqrt{f'(u_1)}},$$

превосходит единицу, так как при всех u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющих условию $u_1 < u_2 < u_3$, отношение

$$\frac{u_2 + u_3 - 2u_1}{\sqrt{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}}$$

будет больше двух. Однако при всех значениях u в интервале $u_3, \frac{1}{2m}$ уравнение (III 3.6) остается вещественным, так как верхний предел интеграла не достигает значения Φ_k , удовлетворяющего равенству $1 - k^2 \sin^2 \Phi_k = 0$

В самом деле, наибольшее значение Φ , соответствующее $u = \frac{1}{2m}$, определяется формулой

$$1 - k_1^2 \sin^2 \Phi_m = 0,$$

в которой

$$k_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{f'(u_1) + \left(\frac{1}{2m} - u_1\right)^2}{4\left(\frac{1}{2m} - u_1\right)\sqrt{f'(u_1)}}.$$

Но

$$k_1^2 - k^2 = \frac{1}{4\sqrt{f'(u_1)}} \left(\frac{1}{2m} - u_1\right)^{-1} \left(\frac{1}{2m} - u_2\right)^{-1} \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{u_3}\right)^{-1} > 0.$$

Поэтому $\Phi_m < \Phi_k$.

При вычислении по формуле (III, 3,6) следует предварительно произвести преобразование $k \sin \Phi = \sin \psi$, приводящее к эллиптическим интегралам с модулем $\frac{1}{k} < 1$.

На рис. 3 изображены орбиты первых двух типов класса A. При построении графиков принято: $h^2 = 1$, $a = 3,936 m$; $h^2 = \frac{17}{18}$, $\alpha = 0,6404$.

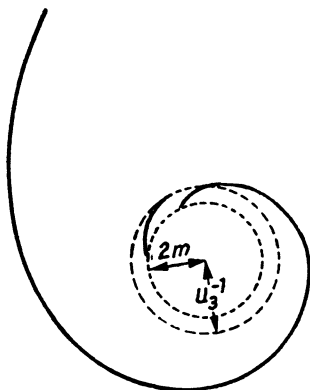


Рис. 3.

§ 4. Орбиты класса *B*

Переходим к рассмотрению случая, когда полином $f(u)$ имеет простой u_1 и двойной $u_{2,3}$ вещественные корни.

Прежде всего заметим, что если начальное значение u_0 совпадает с двойным корнем, то орбита класса *B* является круговой. Действительно, так как при $u = u_{2,3}$ все производные

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{2mf(u)}, \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = mf'(u), \quad \frac{d^3u}{d\varphi^3} = mf''(u) \frac{du}{d\varphi}, \dots$$

исчезают, то в точке $u_{2,3}$ переменная u имеет стационарное значение,

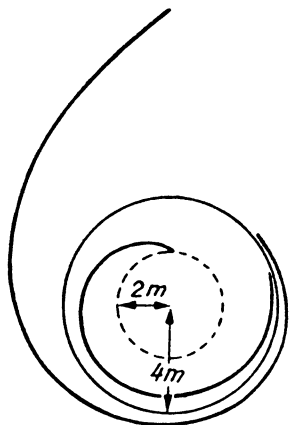


Рис. 4.

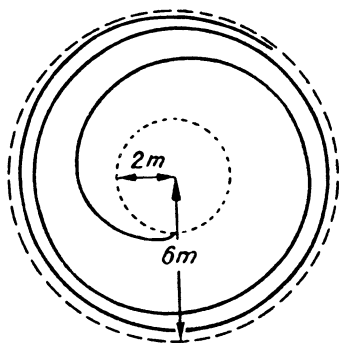


Рис. 5.

ние, и, следовательно, $u = u_{2,3}$. Уравнение орбиты имеет в этом случае вид

$$r = \frac{6m}{1 + \alpha_1}. \quad (\text{III}, 4, 1)$$

Входящая в (III, 4, 1) величина α_1 представляет собой согласно определению (III, 2, 1) монотонно возрастающую функцию p . С другой стороны, как показывает табл. на стр. 102, полином $f(u)$ имеет простой u_1 и двойной $u_{2,3}$ корни в том случае, если $h^2 > \frac{8}{9}$, или $p > 0$. Поэтому величина α_1 удовлетворяет в нашем случае условию $0 < \alpha_1 \leq 1$, которое для орбит (III, 4, 1) дает $3m \leq r < 6m$. Если присоединить сюда случай равных корней $u_{1,2,3} = \frac{1}{6m}$, имеющий место при $h^2 = \frac{8}{9}$ (или $\alpha_1 = 0$) и соответствующий окружности $r = 6m$, то рассматриваемый класс будет содержать все круговые орбиты, отвечающие неравенству $3m \leq r \leq 6m$. При

$u_0 \neq u_{2,3}$ орбита класса B отличается от круговой. Уравнение ее интегрируется в элементарных функциях и легко приводится к виду

$$\Phi_0 - \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2m(u_{2,3} - u_1)}} \ln \left. \frac{\sqrt{u_{2,3} - u_1} + \sqrt{u - u_1}}{\sqrt{u_{2,3} - u_1} - \sqrt{u - u_1}} \right|_{u_0}^u, \quad (\text{III, 4,2})$$

если $u_0 < u_{2,3}$, или

$$\Phi - \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m(u_{2,3} - u_1)}} \ln \left. \frac{\sqrt{u - u_1} + \sqrt{u_{2,3} - u_1}}{\sqrt{u - u_1} - \sqrt{u_{2,3} - u_1}} \right|_{u_0}^u, \quad (\text{III, 4,3})$$

если $u_0 > u_{2,3}$. При $u_1 \leq 0$ орбита (III, 4,2) имеет бесконечно удаленную точку. Если же это условие не выполняется, то наиболее удаленной точкой орбиты является $u = u_1$. При $u \rightarrow u_{2,3}$ уравнение (III, 4,2) дает $\Phi - \Phi_0 \rightarrow \infty$, показывая, что орбита имеет спиралевидную форму и асимптотически приближается к окружности (III, 4,1).

Уравнение (III, 4,3) определяет вторую спиралевидную орбиту, расположенную внутри окружности (III, 4,1). Эта орбита также асимптотически приближается к (III, 4,1) и, подобно орбитам класса A , имеет точку на гравитационной поверхности.

На рис. 4 изображены орбиты для случая $h^2 = 1$.

Пусть полином имеет тройной корень $u_{1,2,3} = \frac{1}{6m}$ и начальное значение $u_0 \neq u_{1,2,3}$. В этом случае уравнение (III, 1,8) дает спиралевидную орбиту

$$\sqrt{\frac{m}{2}} (\Phi - \Phi_0) + \left. \frac{1}{\sqrt{u - u_1}} \right|_{u_0}^u = 0, \quad (\text{III, 4,4})$$

которая имеет точку на гравитационной поверхности и асимптотически приближается к окружности $r = \frac{1}{6m}$ (рис. 5).

§ 5. Орбиты класса C

Согласно определению орбит класса C полином $f(u)$ имеет вещественные корни, меньший из которых отрицателен или равен нулю, а два другие положительны. Все значения переменной u принадлежат интервалу $0, u_2$.

Обозначим полярный угол бесконечно удаленной точки орбиты через Φ_0 и выберем положительное направление Φ таким образом, чтобы оно соответствовало возрастанию переменной u . Уравнение орбиты (III, 1,8) показывает, что при увеличении полярного угла от Φ_0 до Φ_m производная $\frac{du}{d\Phi}$ остается положительной и переменная u возрастает от нуля до максимума u_2 . При дальнейшем увеличении полярного угла эта производная, пройдя через нулевое значение,

в точке φ_m становится отрицательной, и переменная u убывает от u_2 до нуля

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_0^u \frac{du}{Vf(u)}, \quad (\text{III, 5,1})$$

если $\varphi \leq \varphi_m$, или

$$\varphi' - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(2 \int_0^{u_2} \frac{du}{Vf(u)} - \int_0^u \frac{du}{Vf(u)} \right), \quad (\text{III, 5,2})$$

если $\varphi' \geq \varphi_m$.

Введем новую переменную Φ при помощи соотношения

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi,$$

из которого следует

$$Vf(u) = (u_2 - u_1) V(u_3 - u_1) (1 - k^2 \sin^2 \Phi),$$

где

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}.$$

Тогда уравнения (III, 5,1,2) перейдут в следующие

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \quad (\text{III, 5,3})$$

$$\varphi' - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right).$$

Далее, если ввести полярный угол φ_m экстремальной точки орбиты, для которого каждая из формул (III, 5,3) дает

$$\varphi_m - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \quad (\text{III, 5,4})$$

то (III, 5,3) можно объединить при помощи уравнения

$$\varphi - \varphi_m = \pm \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \quad (\text{III, 5,5})$$

показывающего, что орбита имеет ось симметрии, проходящую через экстремальную точку u_2 и центр поля.

Рассмотрим две точки орбиты, симметричные относительно указанной оси. Разность полярных углов этих точек равна

$$\varphi' - \varphi = \frac{4}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \quad (\text{III}, 5,6)$$

как это следует из (III, 5,3). Положив $u = 0$, получим угол между асимптотическими направлениями

$$\varphi'_0 - \varphi_0 = 2(\varphi_m - \varphi_0).$$

Если корень u_2 достаточно близок к u_3 , что имеет место при a близком к a_1 , то разность $\varphi'_0 - \varphi_0$ может оказаться сколь угодно большой. В самом деле, при $u_2 \rightarrow u_3$ имеем $k^2 \rightarrow 1$, вследствие чего полный эллиптический интеграл в (III, 5,4) неограниченно возрастает, тогда как неполный остается конечным.

Если при заданных u_1, u_2, u_3 выполняется неравенство

$$2\pi n < \varphi'_0 - \varphi_0 < 2\pi(n+1),$$

где n — целое положительное число, то орбита имеет n двойных точек (точек возврата). Соответствующие этим точкам значения переменной Φ находятся по формулам

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \frac{\pi i}{2} \sqrt{2m(u_3 - u_1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{III}, 5,7)$$

вытекающим из (III, 5,6) при $\varphi' - \varphi = 2\pi i$.

Полярные углы двойных точек определяются соотношениями $\varphi - \varphi_0 = \varphi_m - \varphi_0 - \pi i$, которые показывают, что все двойные точки лежат на оси симметрии.

С приближением a к единице разность полярных углов асимптотических направлений убывает и число двойных точек уменьшается. При этом, если $h^2 = 1$, то разность $\varphi'_0 - \varphi_0$ не может оказаться меньше 2π , так как при $a \rightarrow 1$ имеем $u_2 \rightarrow 0$, $u_3 \rightarrow \frac{1}{2m}$ и, следовательно, $\varphi'_0 - \varphi_0 \rightarrow 2\pi$. Если же $h^2 > 1$, то при a , достаточно близком к единице, разность $\varphi'_0 - \varphi_0$ становится меньше 2π , стремясь к π при $a \rightarrow 1$.

На рис. 6 изображена орбита класса C с тремя двойными точками. При ее построении принято: $h = 1$, $a = 4,000\ 032m$.

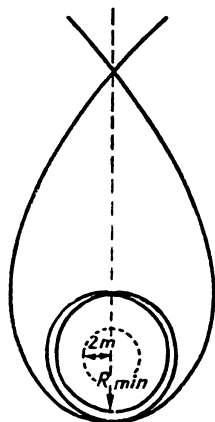


Рис. 6.

§ 6. Орбиты класса D

Переходим к рассмотрению орбит последнего класса. В данном случае полином $f(u)$ имеет три вещественных корня и начальное значение u_0 лежит в интервале u_1, u_2 .

Пусть полярные углы точек u_1, u_2 будут $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}$. Если соответственным образом выбрать направление полярного угла, то при увеличении его от $\varphi_1^{(i)}$ до $\varphi_2^{(i)}$ производная $\frac{du}{d\varphi}$ останется положительной и переменная u будет возрастать от u_1 до u_2 . В точке $\varphi_2^{(i)}$ производная изменит знак и при дальнейшем увеличении полярного угла от $\varphi_2^{(i)}$ до $\varphi_1^{(i+1)}$ переменная u будет убывать от u_2 до u_1 . Таким образом, для орбиты класса D переменная u колеблется в пределах u_1, u_2 ; орбита расположена между окружностями $u = u_1$ и $u = u_2$ и соприкасается с ними в своих экстремальных точках.

Рассмотрим две точки орбиты, отделенные двумя последовательными экстремальными точками u_1, u_2 и соответствующие равным значениям переменной u . Полярный угол первой из этих точек, заключенный между $\varphi_1^{(i)}$ и $\varphi_2^{(i)}$, определяется формулой

$$\varphi - \varphi_1^i = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_{u_1}^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

Для полярного угла второй точки, лежащего между $\varphi_1^{(i+1)}$ и $\varphi_2^{(i+1)}$, имеем

$$\varphi' - \varphi_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} + \int_{u_1}^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \right).$$

Разность полярных углов

$$\varphi' - \varphi = \frac{2}{\sqrt{2m}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \quad (\text{III, 6,1})$$

не зависит от координат этих точек. Это показывает, что переменная u является периодической функцией полярного угла.

Выполнив преобразование

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi, \quad (\text{III, 6,2})$$

получим следующее выражение для периода

$$P = \frac{4}{\sqrt{2m(u_2 - u_1)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}. \quad (\text{III, 6,3})$$

Величина периода может быть сколь угодно большой, так как при $u_2 \rightarrow u_3$ модуль эллиптического интеграла стремится к единице.

С другой стороны, она не может оказаться меньше 2π вследствие того, что при $u_1 \rightarrow u_2$ модуль стремится к нулю и, следовательно, $P \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2}}$, где $0 < \alpha_2 < 1$, так как случай $u_1 = u_2$ имеет место при $\frac{8}{9} < h^2 < 1$.

Рассмотрим несколько подробнее отрезок орбиты, соответствующий одному периоду и ограниченный двумя последовательными экстремальными точками u_1 . Положим $u_0 = u_1$ и обозначим полярный угол точки u_2 через φ_m . Произведя преобразование (III, 6,2), получим:

при $\varphi \leq \varphi_m$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}, \quad (\text{III, 6,4})$$

при $\varphi \geq \varphi_m$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right).$$

Каждая из этих формул дает $\varphi_m - \varphi_0 = \frac{1}{2} P$; оба уравнения можно заменить следующим

$$\varphi - \varphi_m = \pm \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \quad (\text{III, 6,5})$$

Это показывает, что прямая, проходящая через центр поля и точку u_2 , служит осью симметрии. Далее, две точки орбиты, симметричные относительно оси, имеют полярные углы, разность между которыми равна

$$\varphi' - \varphi = P - \frac{4}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}. \quad (\text{III, 6,6})$$

Если, в частности, разность $\varphi' - \varphi$ представляет собой величину, кратную 2π , то эти точки совпадают, образуя точку возврата. Пусть при заданных значениях корней полинома $f(u)$ период удовлетворяет условию

$$2n\pi < P < 2\pi(n + 1),$$

где n — целое положительное число. В таком случае на

рассматриваемом отрезке орбиты имеется n точек возврата. Значения Φ , соответствующие этим точкам, определяются формулами

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{1}{4} (P - 2\pi i) \sqrt{2m(u_3 - u_1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{III}, 6,7)$$

вытекающими из (III, 6,6), если положить $\varphi' - \varphi = 2\pi i$. Полярные углы точек возврата находятся при помощи соотношений

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{2} P - \pi i,$$

которые показывают, что все точки возврата расположены на оси симметрии.

В частном случае, когда период удовлетворяет условию $P = = 2\pi l$, орбита имеет $n - 1$ двойных точек и представляет собой

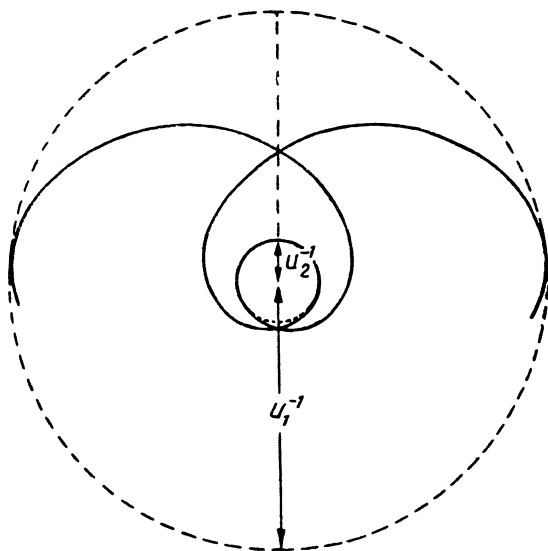


Рис. 7.

замкнутую кривую. Если $P < 4\pi$, то на протяжении одного периода орбита имеет только одну точку возврата. Однако при описании последующих периодов орбита опять пересекает данный отрезок, образуя на нем новые точки возврата, среди которых могут оказаться точки более высоких кратностей.

На рис. 7 построен график орбиты класса D с двумя точками возврата. При вычислении его принято: $h^2 = \frac{17}{18}$, $a = 14,1518 m$

§ 7. Приближенное уравнение орбиты

Составим приближенное уравнение орбит классов C и D , аппроксимируя точное уравнение (III, 5,5) или (III, 6,5) в предположении, что все точки орбиты достаточно удалены от центра поля.

В рассматриваемом случае полином $f(u)$ имеет три вещественные корни.

Введем обозначения

$$\rho_0 = \frac{2}{u_1 + u_2}, \quad e_0 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1},$$

которые, вместе с очевидным соотношением $u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2m}$, вытекающим из определения функции $f(u)$, дают

$$u_1 = \frac{1 - e_0}{\rho_0}, \quad u_2 = \frac{1 + e_0}{\rho_0}, \quad u_3 = \frac{1}{2m} - \frac{2}{\rho_0}. \quad (\text{III, 7,1})$$

Величина ρ_0 характеризует линейные размеры орбиты. Считая, что последние достаточно велики по сравнению с массой центра гравитации, будем при аппроксимировании точного уравнения удерживать лишь первую степень отношения $\frac{m}{\rho_0}$. Внося (III, 7,1) в выражение для модуля эллиптических интегралов в (III, 6,5), получим приближенную формулу

$$k^2 = \frac{4me_0}{\rho_0}.$$

С той же степенью точности коэффициент в (III, 6,5) определяется соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} = 1 + \frac{(3 - e_0)m}{\rho_0},$$

а эллиптический интеграл, как нетрудно убедиться, равен

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \left(1 + \frac{me_0}{\rho_0}\right) \Phi - \frac{me_0}{2\rho_0} \sin 2\Phi.$$

При помощи этих значений точное уравнение орбиты (III, 6,5) легко приводится к виду

$$\pm (\varphi - \varphi_m) \left(1 - \frac{3m}{\rho_0}\right) = \pi - 2\Phi + \frac{me_0}{\rho_0} \sin 2\Phi \quad (\text{III, 7,2})$$

или

$$\cos \left[\varphi - \varphi_m - \frac{3m}{\rho_0} (\varphi - \varphi_m) \right] = -\cos 2\Phi - \frac{me_0}{\rho_0} \sin^2 2\Phi. \quad (\text{III, 7,3})$$

С другой стороны, из (III, 7,2) следует, что в принятом приближении вместо $\sin^2 2\Phi$ в (III,7,3) можно написать $\sin^2 (\varphi - \varphi_m)$.

Поэтому, принимая во внимание соотношение $\cos 2\Phi = \frac{1 - \rho_0 \mu}{e_0}$, которое выводится из (III, 6,2) при помощи (III, 7,1) после простых преобразований получим приближенное уравнение орбиты в виде

$$u = \frac{1}{\rho} + \frac{e}{\rho} \cos(\Phi - \Phi_m - \Delta\omega), \quad (\text{III, 7,4})$$

где

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{m}{\rho_0} e_0^2 \sin^2(\Phi - \Phi_m) \right], \quad e = \frac{e_0 \rho}{\rho_0},$$

$$\Delta\omega = \frac{3m(\Phi - \Phi_m)}{\rho_0}. \quad (\text{III, 7,5})$$

В нашем приближении орбита (III, 7,4) весьма мало отличается от ньютоновской. Орбиты класса *C*, для которых $u_1 \leq 0$ и, следовательно, $e_0 \geq 1$, соответствуют гиперболическим и параболическим орбитам механики Ньютона; их можно рассматривать как конические сечения, элементы которых испытывают малые изменения. Орбиту класса *D* можно рассматривать как медленно прецессирующий эллипс. В течение одного периода полярный угол точки орбиты, ближайшей к центру поля, изменяется на величину

$$\Delta\omega = \frac{6\pi m}{\rho_0}, \quad (\text{III, 7,6})$$

как это следует из (III, 7,5) при $\Phi - \Phi_m = 2\pi$.

В приложении к солнечной системе этот эффект состоит в вековом движении перигелия планеты. Изменение долготы перигелия за время одного обращения вокруг Солнца определяется формулой (III, 7,6), которую после перехода от релятивистских единиц измерения к обыкновенным можно переписать в виде

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\gamma M}{c^2 a (1 - e^2)}, \quad (\text{III, 7,7})$$

где M — масса Солнца, a и e — большая полуось и эксцентриситет планетной орбиты.

Если внести в (III, 7,7) значения постоянных, то для изменения долготы перигелия планеты в течение столетия получим.

$$\Delta\omega'' = \frac{3,34 \cdot 10^{33}}{a^2 (1 - e^2)}. \quad (\text{III, 7,8})$$

Для планет солнечной системы эта формула дает:

$$\begin{aligned} \text{Меркурий} & - 43'',0, \\ \text{Венера} & - 8'',6, \\ \text{Земля} & - 3'',8, \\ \text{Марс} & - 1'',4. \end{aligned}$$

Наибольший эффект обнаруживает Меркурий — ближайшая к Солнцу планета, имеющая орбиту со сравнительно большим эксцентриситетом. Для других планет вековое перемещение перигелия составляет заметно меньшую величину, убывающую с расстоянием от Солнца. Для Венеры эффект остается еще значительным, но малая эксцентricность орбиты этой планеты сильно ухудшает точность определения ее перигелия, вследствие чего сравнение теории с наблюдениями становится затруднительным. Единственной планетой, для которой подобное сравнение можно провести с уверенностью, является Меркурий.

Вековое перемещение перигелия планеты, с точки зрения ньютоновской небесной механики, может быть обусловлено только возмущениями. При этом последние практически одинаковы как в ньютоновской механике, так и в релятивистской. Поэтому для проверки эффекта движения перигелия в релятивистской задаче Кеплера необходимо сравнить формулу (III, 7,8) с величиной невязки между данными наблюдений и результатами классической небесной механики. Впервые необъяснимое вековое перемещение перигелия Меркурия, остающееся после учета возмущений, было открыто в 1859 году Лаверье [67] на основании составленных им таблиц движения больших планет. Полученная Лаверье величина невязки ($38''$, 3) представляет в настоящее время лишь исторический интерес. Впоследствии подробные исследования, основанные на более обширном наблюдательном материале, были произведены Ньюкомом [68], который в 1898 году вывел для этой невязки величину $41''$, 24. Более поздние исследования (например, Гроссмана [69] и др.) не внесли в эту оценку значительных изменений. Лишь в начале 30-х годов нашего столетия вопрос о движении перигелия Меркурия потребовал нового пересмотра в связи с выявившейся необходимостью учета неравномерности вращения Земли. Глейх [70], предпринявший первую попытку подобного учета, получил значительно меньшую оценку невязки и тем самым вызвал сомнения в правильности формулы (III, 7,6). Однако последующие работы (Фосерингема [71], Джексона, Вильямса и др.) не подтвердили этих сомнений. Тщательный пересмотр вопроса о движении перигелия Меркурия был выполнен Г. А. Чеботаревым [72]. Для массы Венеры, играющей очень существенную роль при учете возмущений, Чеботарев принял $1 : (406\,000 \pm 860)$, как наиболее вероятное значение из всех важнейших определений. Окончательный результат Чеботарева составляет $42''$, $65 \pm 0''$, 60, что находится в согласии с формулой Эйнштейна (III, 7,6).

Позднейшие работы (см., например, [73]) также подтверждают это согласие. Таким образом, можно, по-видимому, с уверенностью считать, что основной результат релятивистской задачи Кеплера находится в полном соответствии с данными астрономических наблюдений.

Поскольку Меркурий остается до настоящего времени единственной планетой, позволяющей произвести надежную эмпири-

ческую проверку формулы (III, 7,6), было бы очень желательно обсудить возможность привлечения других небесных тел.

Особый интерес в этом отношении может представить малая планета Икар, имеющая весьма малое среднее расстояние от Солнца (1,077 а. е.) и отличающаяся очень большой эксцентricностью орбиты ($e = 0,8265$). Согласно (III, 7,6) вековое перемещение перигелия для этого астероида должно достигать $10''$. Имеются основания предполагать (см. [74]), что подробное изучение движения Икара позволит произвести даже более точную проверку формулы (III, 7,6), чем это имеет место в случае Меркурия. Однако вследствие недостаточности наблюдений такая проверка остается пока невозможной.

§ 8. Релятивистские эффекты в движении искусственных спутников земли

Можно надеяться, что подробный анализ движения искусственных спутников Земли откроет новые возможности для проверки небесно-механических выводов общей теории относительности. Эффект в вековом движении перигея для короткопериодических спутников Земли оказывается довольно большим. Так, например, согласно [75] для спутника, обращающегося на высоте 400 км над земной поверхностью при эксцентриситете орбиты 0,01, этот эффект должен составить около $24'$ в столетие.

Следует иметь в виду, что помимо перемещения линии апсид согласно формуле Эйнштейна (III, 7,7), в движении искусственных спутников Земли могут проявиться и другие релятивистские эффекты, в частности эффекты, зависящие от вращения Земли. Для планет солнечной системы эти эффекты впервые изучались еще Ленсе и Тиррингом [76], формула которых применялась в последнее время к искусственным спутникам Земли В. Л. Гинзбургом [77].

В данном параграфе рассматриваются вековые релятивистские эффекты в элементах орбиты искусственного спутника Земли [78]. Уравнения движения спутника, составленные с учетом вращения Земли, исследуются по методу вариации элементов классической небесной механики.

Согласно (III, 1,2) уравнения движения спутника можно писать в виде

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^\sigma}{dt} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0,$$

где Γ^k_{ij} — трехзначковые символы Кристоффеля, известным образом выражающиеся через составляющие метрического тензора и их первые производные; α, β — индексы суммирования, принимающие значения 1, 2, 3, 4.

Введем декартову геоцентрическую систему координат $x^\sigma = x, y, z$, ориентированную таким образом, чтобы плоскость xy совпадала с плоскостью экватора, а ось z была направлена по оси

вращения Земли. Для упрощения последующих вычислений допустим также, что ось y совмещена с линией узлов невозмущенной орбиты спутника. Составляя уравнения движения, будем считать ньютоновский потенциал φ величиной первого порядка, а составляющие скорости спутника — порядка $\frac{1}{2}$. Легко убедиться в том, что в уравнениях движения член первого порядка содержится в Γ_{44}^σ , входя в выражение $\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma}$. Поскольку главный переменный член в g_{44} согласно (II, 11,7) равен -2φ , в уравнениях движения содержатся производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}$, отвечающие ньютоновскому приближению. Поэтому уравнения движения можно писать в виде

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} = X^\sigma, \quad \sigma = 1, 2, 3, \quad (\text{III, 8,1})$$

обозначая через X^σ совокупность остальных членов, представляющих релятивистские поправки к закону движения Ньютона.

Соотношения (III, 8,1) можно рассматривать как уравнения движения, происходящего под действием центральной ньютоновской силы и возмущающего ускорения с декартовыми проекциями $X^\sigma = X, Y, Z$. Для исследования этих уравнений можно применить метод вариации элементов.

Как и прежде, представим ковариантные составляющие метрического тензора в виде $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$. Вычисляя символы Кристоффеля с точностью до членов второго порядка относительно величин h_{ij} и их производных по координатам, а также, принимая во внимание стационарность поля гравитации равномерно вращающейся Земли, получим следующие выражения для проекций возмущающего ускорения

$$X^\sigma = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (h_{44} + 2\varphi) - \frac{1}{2} h_{\sigma\sigma} \frac{\partial h_{44}}{\partial x^\sigma} - \left(\frac{\partial h_{\sigma 4}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial h_{\sigma 4}}{\partial x^\sigma} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} + \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dx^\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt}. \quad (\text{III, 8,2})$$

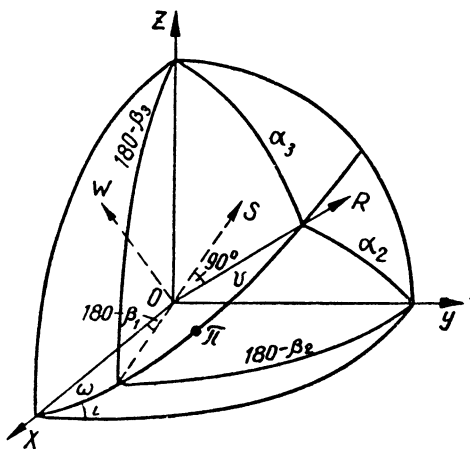


Рис. 8.

Множитель $\frac{1}{c^2}$ введен здесь в связи с переходом от релятивистской единицы времени к обычной. Пусть R, S, W — проекции возмущающего ускорения на радиус-вектор спутника, на перпендикуляр к нему и на нормаль к плоскости орбиты соответственно (рис. 8). Обозначив через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ углы, образованные направлениями R, S, W с осями координат, имеем

$$\begin{aligned} R &= X \cos \alpha_1 + Y \cos \alpha_2 + Z \cos \alpha_3, \\ S &= X \cos \beta_1 + Y \cos \beta_2 + Z \cos \beta_3, \\ W &= X \cos \gamma_1 + Y \cos \gamma_2 + Z \cos \gamma_3. \end{aligned} \quad (\text{III}, 8,3)$$

При этом

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos(\omega + v), \quad \cos \alpha_2 = \sin(\omega + v) \cos i, \quad \cos \alpha_3 = \sin(\omega + v) \sin i; \\ \cos \beta_1 &= -\sin(\omega + v), \quad \cos \beta_2 = \cos(\omega + v) \cos i, \quad \cos \beta_3 = \cos(\omega + v) \sin i; \\ \cos \gamma_1 &= 0, \quad \cos \gamma_2 = -\sin i, \quad \cos \gamma_3 = \cos i, \end{aligned}$$

где через ω обозначено угловое расстояние перигея от восходящего узла, i — наклонность орбиты спутника к экватору, v — истинная аномалия.

Воспользуемся известными уравнениями небесной механики, определяющими производные по времени от оскулирующих элементов орбиты в зависимости от проекций возмущающего ускорения. В общепринятых обозначениях эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin(\omega + v)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos(\omega + v)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W; \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2} \cos v}{nae} R + \\ &+ \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin v \cdot S - \frac{r \sin(\omega + v) \cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W; \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2e \sin v}{n \sqrt{1-e^2}} R + \frac{2a \sqrt{1-e^2}}{nr} S; \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{na} R + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left[\frac{a^2 (1-e^2)}{r} - r \right] S; \\ \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{1}{na} \left(\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e} \cos v \right) R - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \cdot S. \end{aligned}$$

Здесь a, p, e — большая полуось, фокальный параметр и эксцентриситет орбиты спутника, n — среднее движение, а величина σ связана с моментом τ прохождения через перигей соотношением $\sigma = -n\tau$

Изучая возмущения первого порядка, можно преобразовать написанные уравнения с помощью законов Кеплера. Последние можно представить в виде

$$r = \frac{\rho}{1 + e \cos v}, \quad \frac{dt}{dv} = \frac{r^2}{\frac{1}{cm^2} \frac{1}{\rho^2}}, \quad n = cm^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{3}{2}} (1 - e^2)^{\frac{2}{3}}, \quad (\text{III}, 8,4)$$

где принято $m = \gamma M : c^2$.

Уравнения для оскуллирующих элементов легко приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dv} &= \frac{\sin(\omega + v)}{c^2 m \rho \sin i} r^3 W, \quad \frac{di}{dv} = \frac{\cos(\omega + v)}{c^2 m \rho} r^3 W, \\ \frac{d\omega}{dv} &= -\frac{\cos v}{c^2 m e} r^2 R + \frac{(2 + e \cos v) \sin v}{c^2 m p e} r^3 S - \frac{\sin(\omega + v) \cot i}{c^2 m \rho} r^3 W, \\ \frac{da}{dv} &= \frac{2pe \sin v}{c^2 m (1 - e^2)^2} r^2 R + \frac{2p^2}{c^2 m (1 - e^2)^2} r S, \\ \frac{de}{dv} &= \frac{\sin v}{c^2 m} r^2 R + \frac{e + 2 \cos v + e \cos^2 v}{c^2 m p} r^3 S, \\ \frac{d\sigma}{dv} &= -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{c^2 m p e} (2e - \cos v - e \cos^2 v) r^3 R - \\ &\quad - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{c^2 m p e} (2 + e \cos v) \sin v \cdot r^3 S. \end{aligned} \quad (\text{III}, 8,5)$$

Входящие в (III, 8,5) проекции возмущающего ускорения вычисляются для поля гравитации вращающейся Земли.

Пользуясь полученными в предыдущей главе решением (II, 11,7) и принимая во внимание очевидные соотношения

$$x = r \cos(\omega + v), \quad y = r \sin(\omega + v) \cos i, \quad z = r \sin(\omega + v) \sin i,$$

найдем декартовы проекции возмущающего ускорения по формулам (III, 8,2). Внося затем найденные значения декартовых проекций в (III, 8,3), получим после необходимых преобразований и упрощений

$$\begin{aligned} R &= \frac{c^2 m^2}{r^3} \left(\frac{2}{r} + \frac{1 - e^2 + 4e^2 \sin^2 v}{p} \right) + \frac{4}{5} c p^{\frac{1}{2}} m^{\frac{3}{4}} \omega_0 R_0^2 \cos i \frac{1}{r^4} - \\ &\quad - \frac{2m\omega_0^2 R_0^2}{5r^2} + \frac{3m\omega_0^2 R_0^4}{35r^4} [3 \sin^2(\omega + v) \sin^2 i - 1], \\ S &= \frac{4c^2 m^2}{r^3} e \sin v - \frac{4}{5} c p^{\frac{1}{2}} m^{\frac{3}{4}} \omega_0 R_0^2 e \cos i \frac{\sin v}{r^3} - \\ &\quad - \frac{6}{35} m \omega_0^2 R_0^4 \sin^2 i \sin(\omega + v) \cos(\omega + v) \cdot \frac{1}{r^4}, \end{aligned} \quad (\text{III}, 8,6)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{4}{5} c p^{\frac{1}{2}} m^{\frac{3}{4}} \omega_0 R_0^2 \sin i \frac{1}{r^3} [-e \sin \omega + (2 + 3e \cos v) \sin(\omega + v)] - \\ &\quad - \frac{6m\omega_0^2 R_0^4}{35r^4} \sin i \cos i \sin(\omega + v). \end{aligned}$$

Система уравнений (III, 8,5) вместе с приведенными выше значениями проекций R, S, W вполне определяет релятивистские возмущения в элементах орбиты спутника. Однако общее исследование этих уравнений не заслуживает внимания. Интерес могут представить только вековые эффекты, к изучению которых мы и переходим.

Поскольку поле тяготения равномерно вращающейся Земли является стационарным, для вычисления вековых изменений элементов орбиты достаточно интегрировать производные от элементов в пределах одного полного обращения.

Внося последнюю из величин (III, 8,6) в первое уравнение системы (III, 8,5), получим

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{4m^{\frac{1}{2}} \omega_0 R_0^2}{5cp^{3/2}} [-e \sin \omega + (2 + 3e \cos v) \sin(\omega + v)] \sin(\omega + v) - \frac{6\omega_0^2 R_0^4 \cos i}{35c^2 p^2} (1 + e \cos v) \sin^2(\omega + v).$$

Выполняя указанное интегрирование, находим следующее выражение для угла поворота линии узлов в течение одного обращения спутника

$$\Delta\Omega = \frac{8\pi\omega_0 R_0^2 m^{\frac{1}{2}}}{5cp^{\frac{3}{2}}} - \frac{6\pi\omega_0^2 R_0^4}{35c^2 p^2} \cos i.$$

Отношение второго члена к первому по абсолютной величине не превышает $0,6 \cdot 10^{-2}$, вследствие чего членом с квадратом угловой скорости можно пренебречь.

Аналогично находятся изменения других элементов орбиты. При этом вариация в моменте прохождения через перигей вычисляется из соотношения $\Delta\tau = -\frac{\Delta\sigma}{n}$, поскольку большая полуось орбиты, а, следовательно, и среднее движение не испытывают вековых изменений.

Выполнив необходимые вычисления, получим

$$\Delta a = \Delta e = \Delta i = 0,$$

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\gamma M}{c^2 a (1 - e^2)} - \frac{24\pi(\gamma M)^{\frac{1}{2}} \omega_0 R_0^2 \cos i}{5c^2 a^{\frac{3}{2}} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{III, 8,7})$$

$$\Delta\Omega = \frac{8\pi(\gamma M)^{\frac{1}{2}} \omega_0 R_0^2}{5c^2 a^{\frac{3}{2}} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Delta\tau = \frac{6\pi(\alpha\gamma M)^{\frac{1}{2}}}{c^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} (5 - 2\sqrt{1 - e^2}).$$

Мы видим, что вековые релятивистские эффекты имеются в движении линии апсид и линии узлов, а также в моменте прохождения

через перигей, тогда как в большой полуоси, эксцентриситете и наклонности вековые изменения отсутствуют. Первый член в выражении $\Delta\omega$ представляет собой обычный релятивистский поворот линии апсид, отвечающий формуле Эйнштейна. Второй член определяет дополнительное перемещение перигея, обусловленное вращением Земли и зависящее от наклонности орбиты спутника к экватору. Перемещение узлов также обусловлено вращением Земли, но не зависит от наклонности орбиты. Что же касается векового эффекта в моменте прохождения через перигей, то он не обнаруживает заметной зависимости от вращения Земли (выражение для $\Delta\tau$ содержит член с квадратом угловой скорости; в (III, 8,7) этот член опущен).

Все величины (III, 8,7) выражены в единицах системы CGS, $\Delta\omega$ и $\Delta\Omega$ — в радианах. Если массу Земли исключить с помощью третьего закона Кеплера, периоды обращения и вращения выразить в сутках, перемещения перигея и узлов — в секундах дуги, то за столетие вариации элементов орбиты составят

$$\Delta\omega = \frac{5\pi^2 a^2 I}{24c^2 T^3 (1-e^2)} - \frac{\pi^2 R_0^2 I \cos i}{6c^2 T^2 P (1-e^2)^2} \quad (\text{III, 8,8})$$

$$\Delta\Omega = \frac{\pi^2 R_0^2 I}{18c^2 T^2 P (1-e^2)^2}, \quad \Delta\tau = \frac{\pi^2 a^2 I}{72c^2 T^2 (1-e^2)^2} (5 - 2\sqrt{1-e^2}),$$

где через I обозначено число суток в году, а период P вращения центрального тела (равный в данном случае единице) сохранен из соображений общности.

Иллюстрируем полученные формулы числовыми примерами. Положив $a = R = 6,4 \cdot 10^8$ см, $e = 0$, $\omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5}$ сек $^{-1}$, найдем предельные значения релятивистских вариаций элементов орбиты спутника Земли. За столетие эти вариации составляют

$$\Delta\omega = 1660'' - 74'' \cos i, \quad \Delta\Omega = 25'', \quad \Delta\tau = 33''.$$

Воспользовавшись начальными элементами орбиты третьего советского ИСЗ, получим за то же время

$$\Delta\omega = 1100'' - 20'',6, \quad \Delta\Omega = 16'',3, \quad \Delta\tau = 16'',4.$$

Обычный релятивистский эффект в движении линии апсид достигает довольно значительной величины (для ИСЗ с достаточно большой продолжительностью существования он может составить около 1000'' в столетие), тогда как эффекты вращения в $\Delta\omega$ и $\Delta\Omega$, обнаружение которых представило бы особенно большой интерес, оказываются весьма малыми вследствие относительно медленного вращения Земли. Эти эффекты значительно больше в поле тяготения Юпитера. Так, например, для V спутника Юпитера ($a = 1,81 \cdot 10^{10}$ см, $e = 0,003$, $i = 3^\circ,1$) второй член в выражении $\Delta\omega$

составляет около $1200''$ в столетие, что почти в 30 раз превосходит обычное релятивистское перемещение перигелия Меркурия за то же время.

Следует заметить, что в движении спутника Земли должны также иметь место релятивистские возмущения, обусловленные полем тяготения Солнца. Эти возмущения (перемещение узлов и перигея), изучавшиеся еще Де Ситтером [79], в формулах (III, 8,7) не учитываются; они весьма малы и составляют около $2''$ в столетие.

Итак, релятивистские возмущения в движении искусственных спутников Земли являются очень тонкими эффектами. Выявление их представляет собой весьма трудную задачу и требует длинных рядов высокоточных наблюдений, а также тщательной разработки теории движения спутников, без чего эти эффекты невозможно отделить, от многочисленных возмущений, вызываемых другими причинами.

§ 9. Задача двух тел

Рассмотренная в этой главе задача о движении частицы в статическом поле гравитации одного центра представляет собой релятивистское обобщение так называемой ограниченной задачи двух тел классической небесной механики, в которой предполагается, что относительная масса одного из тел пренебрежимо мала. Для системы двух сравнимых масс необходимо найти решение общей задачи двух тел, которая оказывается в теории относительности значительно более сложной, чем в механике Ньютона.

В главе II было показано, что система точечных масс с произвольным законом движения не удовлетворяет уравнениям поля. Мы видели, что уравнения поля гравитации допускают интегрирование с точностью до членов второго порядка включительно лишь в том случае, если движение масс отвечает закону Ньютона. Таким образом ньютоновский закон движения оказывается условием интегрируемости уравнений поля Эйнштейна во втором приближении. В свою очередь закон движения системы точечных масс во втором приближении (т. е. с релятивистскими поправками к ньютоновскому закону движения) является условием интегрируемости уравнений поля с точностью до членов третьего порядка. Как уже указывалось, такой метод вывода закона движения взаимодействующих точечных масс был развит впервые в известной работе Эйнштейна, Гофмана и Инфельда [25] и в последующих работах Эйнштейна и Инфельда [80, 81], а для случая тел конечных размеров — в исследовании В. А. Фока [26]. Метод В. А. Фока применен Н. Петровой [82] для вывода уравнений движения конечных масс с релятивистскими поправками. Подробное исследование релятивистской задачи двух тел в этой постановке выполнено В. А. Фоком [26]. Главным результатом этого исследования, который может представить непосредственный астрономический интерес, является количественная оценка движения линии апсид.

Согласно В. А. Фоку в общей задаче двух тел периодической орбитой относительного движения служит медленно прецессирующий эллипс. При каждом обращении линия апсид поворачивается в прямом направлении на

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\gamma(M_1 + M_2)^{1/2}}{c^2 p}, \quad (\text{III}, 9,1)$$

где p — фокальный параметр относительной орбиты, M_1 , M_2 — массы тел.

В применении к планетам солнечной системы формула (III, 9,1) практически ничем не отличается от уравнения Эйнштейна (III, 1,1) и может представить интерес только для двойных звезд со сравнимыми по массам компонентами. К сожалению, этот тонкий эффект в движении двойных звезд в настоящее время не поддается проверке.

§ 10. Гелиоцентрическая система Коперника

После разработки основ небесной механики Ньютоном истинность гелиоцентрического учения долгое время не вызывала сомнений, и только в текущем столетии, в связи с общей теорией относительности, отдельные авторы высказывали тезис о равноправности систем Коперника и Птолемея. Различие между гелио- и геоцентрическими учениями эти авторы считают условным, зависящим от субъективных склонностей исследователей, а вопрос об объективной истинности того или другого учения объявляют бессмысленным. «Два предложения — «Солнце покоится, а Земля движется» и «Солнце движется, а Земля покоится» — ...просто два различных соглашения о двух различных системах координат»².

Прежде всего необходимо отметить, что сторонники указанного тезиса сводят различие между системами Коперника и Птолемея к различию между гелио- и геоцентрическими координатами, как средствами изображения движений небесных тел или как «точками зрения наблюдателей». Такая постановка задачи и приводит к заключению об эквивалентности обеих систем. В самом деле, поскольку уравнения общей теории относительности удовлетворяют принципу ковариантности, сохраняя форму при общем преобразовании координат, исследователь может с одинаковым правом пользоваться как гелио-, так и геоцентрическими координатами, производя выбор между ними по своему усмотрению.

В действительности противоположность между учениями Коперника и Птолемея не сводится к различию между гелио- и геоцентрическими координатами как способами изучения движений небесных тел.

Как известно, в современной астрономии успешно пользуются разнообразными координатами, в том числе и геоцентрическими,

¹ Формула (III, 9,1) впервые указана, по-видимому, Робертсоном [83].

² А. Эйнштейн, Л. Инфельд, Эволюция физики, ОГИЗ, 1948, стр. 197.

которые позволяют получить правильные решения ряда задач. Преобразование гелиоцентрических координат в геоцентрические, весьма часто осуществляемое в различных вопросах астрономии (например, при определении элементов орбиты из наблюдений), не означает, разумеется, отказа от учения Коперника и возврата к учению Птолемея. Гелио- и геоцентрическая системы координат одинаково пригодны для изображения движений, и как способы исследования они вполне равноправны. Однако одна из этих систем обладает физически обусловленной привилегированностью, которая и выражает объективную истинность учения Коперника.

Рассматривая солнечную систему в отрыве от других космических тел, можно удовлетворительно обосновать главный тезис гелиоцентризма лишь в том случае, если допустить существование инерциальных координат, т. е. систем отсчета, в которых выполняется закон инерции. Согласно механике Ньютона, в каждой из таких систем отсчета центр массы солнечной системы, практически совпадающий с центром Солнца, движется равномерно и прямолинейно, тогда как планеты обладают значительными ускорениями. Однако постулат об инерциальных системах, не связанных так или иначе с какими-либо материальными телами, находит оправдание лишь в ньютоновой концепции абсолютного пространства. Малое ускорение Солнца означает, приблизительно, равномерное и прямолинейное движение его по отношению к абсолютному пространству.

Отказываясь от метафизической концепции абсолютного пространства, приходится отвергнуть и постулат об инерциальных координатах, как системах отсчета, независимых от материальных тел. Понятие абсолютного ускорения при этом утрачивается и обычное доказательство гелиоцентризма теряет силу. Для преодоления этой трудности необходимо обосновать понятие инерциальной системы отсчета, не прибегая к концепции абсолютного пространства.

Применение общей теории относительности встречает такую же трудность. С интересующей нас точки зрения теория относительности не имеет преимуществ по сравнению с механикой Ньютона, поскольку эта теория уточняет движение тел солнечной системы лишь в деталях, которые непосредственно не имеют отношения к различию между гелио- и геоцентрическим учениями. Как мы видели, уравнения поля построены таким образом, что в первом приближении, которое только и представляет интерес для нашей задачи, они обеспечивают переход к законам ньютонианской механики.

Проблема гелиоцентризма является задачей об особенностях механического движения конкретных небесных тел. В постановке этой задачи необходимо принимать во внимание природу механического движения, которое по самой его сущности представляет собой процесс перемещения одного тела по отношению к другому. Можно сказать, что в механическом движении проявляются пространственно-временные отношения между телами. Отдельное тело,

взятое в целом и рассматриваемое независимо от всех других тел природы, не находится ни в покое ни в движении, поскольку оно могло бы покоиться или двигаться лишь по отношению к чему-либо внешнему. В изолированной системе, состоящей из двух или большего числа тел, но рассматриваемой в отрыве от других тел, происходят только внутренние относительные движения. При этом ни одно из внутренних движений не является преимущественным по сравнению с другими. В случае системы двух тел утверждения: «*A* покоится, *B* движется», «*B* покоится, *A* движется», «*A* и *B* обращаются вокруг их неподвижного центра масс» приобретают определенный физический смысл лишь в том случае, если система в целом относится к чему-либо внешнему. Так, например, движение системы Земля — Луна относительно Солнца определяет объективное содержание предложения о том, что каждое из двух тел обращается вокруг их общего центра тяжести. Подобным же образом гелиоцентризм солнечной системы обусловлен не только внутренними перемещениями ее членов, но также отношением этой системы в целом к внешним космическим телам.

Как известно, в распределении космических масс наблюдается резко выраженная структурность. Солнце и планеты с их спутниками, астероиды, кометы и многочисленные мелкие тела составляют обособленную систему, которая отделена от звезд очень большими расстояниями. Взаимные перемещения членов этой системы обусловлены внутренними причинами и лишь в ничтожной степени зависят от внешних воздействий. Эту особенность солнечной системы можно назвать автономностью. В свою очередь, солнечная система в целом является одним из многочисленных членов космической системы более высокого порядка — Галактики, которая также обладает значительной автономностью в отношении ее внутренних свойств. Принадлежность солнечной системы к Галактике и является необходимым условием гелиоцентризма.

Рассмотрим взаимодействие между Галактикой G и одним из ее членов — системой S , характеризующейся относительно малыми размерами и массой, пренебрежимыми по сравнению с размерами и массой Галактики. Изучая движение S , можно принимать во внимание только общее поле тяготения G , поскольку учет возмущений со стороны отдельных звезд при их случайных сближениях с S не внесет принципиальных изменений.

Движение S будем относить к системе отсчета, связанной тем или иным способом с G . Так, например, поместив начало координат в ядро Галактики и совместив одну из координатных плоскостей со средней плоскостью Галактики, можно связать расположенные в этой плоскости координатные оси с достаточно удаленными от ядра звездами.

При рассмотрении движения системы S в поле тяготения Галактики необходимо учитывать равенство инертной и тяжелой масс. Поскольку гравитационное притяжение и силы инерции соответственно пропорциональны тяжелой и инертной массам, можно утверждать, что вследствие относительно малых размеров системы S

все тела этой системы, независимо от их масс, а также от точного выбора галактических координат, будут обладать одинаковыми ускорениями. Поэтому, если в какой-либо момент времени члены системы S имели одинаковые скорости, то вся система будет длительно двигаться как одно целое.

Введем систему отсчета, жестко связанную с S . Точный закон ее движения по отношению к G обусловлен не только начальной скоростью и полем Галактики, но также выбором системы отсчета G , от которого зависят силы инерции. Поскольку мы отказались от абсолютной инерциальной системы, этот закон движения остается неопределенным. Однако, независимо от него, любое тело внутри или вблизи системы S , не подвергаясь действию сил со стороны членов этой системы, будет двигаться относительно S равномерно и прямолинейно. Таким образом, сопутствующая система координат S является местной инерциальной системой отсчета. При изучении движений внутри S ускорения и вращения относительно этой системы отсчета условно можно назвать абсолютными. Расчет таких ускорений производится на основании обычных законов механики Ньютона, вследствие чего внутренние движения должны отвечать интегралам центра масс. Если одно из тел системы S (Солнце) обладает достаточно большой массой, тогда как массы других тел (планет) относительно малы, то первое будет практически покоиться, в то время как остальные будут обращаться вокруг него по замкнутым орбитам. Таким образом, ньютоновское обоснование гелиоцентризма сохраняет свое значение и при отказе от метафизической концепции абсолютного пространства, если только под инерциальной системой подразумевается не абстрактная система координат, лишенная материального содержания, но конкретная местная система отсчета, обусловленная реальными связями с внешними космическими массами [83 А].

Обоснование гелиоцентризма с релятивистской точки зрения отличалось бы от приведенных рассуждений только по форме, поскольку, как уже указывалось, для этого обоснования достаточно первое приближение, в котором выводы теории относительности совпадают с результатами механики Ньютона.

Итак, мы видим, что гелиоцентризм солнечной системы представляет собой динамическую закономерность, которая приобретает конкретное физическое содержание лишь по отношению к космической системе более высокого порядка. Обоснование гелиоцентризма путем изучения солнечной системы в отрыве от окружающих ее космических масс свелось бы к доказательству абсолютности ускорений. Некоторые авторы считают, что такое доказательство содержится в известной работе В. А. Фока [26]. «Как показали советские ученые, особенно акад. В. А. Фок, никакой относительности ускорения общая теория относительности не доказала и не могла доказать, ибо ее не существует в природе»¹. Подобная точка

¹ Сб. «Философские вопросы современной физики», 1952, стр. 59.

зрения представляет собой уступку метафизической концепции Ньютона и основана на упрощенном истолковании результатов исследования В. А. Фока.

В указанной работе В. А. Фока рассматривается задача о движении конечных масс в общей теории относительности. Основной частью этого исследования является приближенное интегрирование уравнений поля Эйнштейна для системы нескольких тел, рассматриваемых как особые области, внутри которых тензор энергии-импульса отличен от нуля. Все вычисления производятся в координатах, удовлетворяющих условию гармоничности

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (g^{\alpha i} \sqrt{-g}) = 0, \quad i = 1, \dots, 4,$$

где g^{ij} — контравариантные составляющие метрического тензора, а g — величина определителя, образованного из ковариантных составляющих этого тензора.

Поскольку система считается изолированной, принимается, что на бесконечности метрика пространственно-временного континуума вырождается в евклидову. Допускается также, что к изучаемой системе не приходят внешние гравитационные волны, вследствие чего на бесконечности выполняется особое условие излучения.

В работе показано, что три перечисленные условия (гармоничность координат, псевдоевклидова метрика на бесконечности, условие излучения) с точностью до преобразования Лоренца определяют координаты, которые являются инерциальными для рассматриваемой системы тел. В таких координатах солнечная система является гелиоцентрической.

С интересующей нас точки зрения это заключение показывает, что уравнения поля теории относительности допускают выбор группы систем отсчета, которые в данном приближении играют роль инерциальных координат ньютоновской механики. Однако такой вывод не решает проблемы гелиоцентризма, поскольку объективная привилегированность указанной группы остается невыясненной. Действительной причиной этой привилегированности является, как мы знаем, взаимодействие солнечной системы с внешними космическими массами.

Глава IV

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

§ 1. Введение

Изучение распространения света в гравитационном поле приводит, как известно, к двум релятивистским эффектам (искривление луча и смещение спектральных линий), которые допускают эмпирическую проверку путем астрономических наблюдений и являются важнейшими результатами теории относительности в этой области. Астрономический интерес эти эффекты представляют только в простейшем случае статического поля одного центра, когда теория их носит вполне элементарный характер.

Первая попытка теоретического исследования влияния поля гравитации на распространение света была предпринята Эйнштейном еще в 1907 году [84]. Однако лишь четыре года спустя, опираясь на принцип эквивалентности инерции и тяготения, Эйнштейну удалось получить основные количественные результаты [85]. Принцип эквивалентности приводит к заключению об ограниченности постулата постоянства скорости света и о зависимости последней от потенциала поля тяготения. Эйнштейн получает формулы

$$v = v_0 \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right), \quad c = c_0 \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right), \quad (\text{IV}, 1,1)$$

выражающие зависимость частоты колебаний ν и скорости распространения света c от потенциала поля φ . Первая из этих формул определяет релятивистский эффект «красного смещения» в поле гравитации. Пользуясь вторым соотношением, Эйнштейн рассматривает задачу об искривлении светового луча в центральном поле тяготения и приходит к следующей формуле для угла отклонения луча

$$\vartheta = \frac{2\gamma M}{c^2 \Delta}, \quad (\text{IV}, 1,2)$$

где γ — гравитационная постоянная, M — масса центра, Δ — расстояние от центра до ближайшей к нему точки луча.

В действительности угол отклонения светового луча имеет, как известно, в два раза большую величину. Различие обусловлено тем обстоятельством, что в [85] Эйнштейн, принимая во внимание переменный характер скорости света, пользуется в своем расчете евклидовой геометрией. Позднее, в статье [86], опубликованной вслед за рядом основных работ по теории гравитации, Эйнштейн констатирует эту ошибку и указывает, что правильный результат, должен быть в два раза больше. Впоследствии Эйнштейн неоднократно возвращается к обсуждению обоих эффектов (см., например, [13]).

В настоящее время приближенную теорию вопроса можно найти почти во всех руководствах по теории относительности. Точная теория распространения света в поле одного центра изложена в статье автора [87], в которой изучается траектория луча и эффект Допплера. Развитая Толманом [88] общая теория эффекта Допплера приложена автором к случаю статического поля [89].

Следует указать также на несколько статей, в которых изучаются явления, вызываемые отклонением световых лучей в поле тяготения звезд [90—93], в частности на работы Г. А. Тихова, изучавшего фотометрические эффекты, обусловленные этим отклонением [94].

Отметим затем работу Минора, в которой формула Эйнштейна для угла отклонения луча обобщается на случай, когда масса центра тяготения является функцией времени [95].

Многочисленные работы по изучению законов распространения света в гравитационных полях связаны с так называемой релятивистской космологией. Таковы, например, статьи Вейля [96], Цвикки [97], Лауэ [98], Колера [99] и целого ряда других авторов. Работы этого направления, имеющие целью выяснить особенности распространения света в различных статических и нестатических «вселенных», с нашей точки зрения не имеют прямого астрономического значения.

В настоящей главе дана элементарная теория распространения света в гравитационном поле. Изложение ограничивается, главным образом, случаем статического поля одного центра, который, как было уже указано выше, остается до сих пор единственным случаем, представляющим непосредственный интерес.

§ 2. Траектория луча

Предположим, что распространение света происходит в поле одного центра с постоянной массой m . В общем виде задача состоит в исследовании уравнений геодезической линии, преобразованных в соответствии с условием $ds = 0$, при помощи которого в теории относительности описываются особенности распространения света. При этом мы можем воспользоваться результатами гл. III.

Рассмотрим формулу (III, 1,8), определяющую общее уравнение траектории свободной частицы в поле одного центра. Легко

видеть, что условие $ds = 0$ эквивалентно требованию $h = \infty$, тогда как постоянная c_1 согласно (III, 1,7) остается конечной. Поэтому, сохраняя прежние обозначения, имеем $a = \infty$ и $a^{-2}(h^2 - 1) = c_1^{-2}$.

Формула (III, 1,8) приводит к следующему дифференциальному уравнению луча

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - 2mu^3 - c_1^{-2} = 0. \quad (\text{IV, 2,1})$$

Нетрудно убедиться в том, что постоянная c_1 геометрически представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из центра поля на направление луча в удаленной от центра области. Действительно, в этой области член $2mu^3$ вследствие его малости может быть опущен, и уравнение (IV, 2,1) принимает вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - c_1^{-2} = 0.$$

Решение этого уравнения

$$u = c_1^{-1} \sin(\omega - \varphi),$$

где ω — постоянная интегрирования, показывает, что в достаточно удаленной от центра области луч имеет форму прямой. Обозначая перпендикуляр, опущенный на эту прямую, через a , имеем $c_1 = a$.

Исследуем корни трехчлена

$$f(u) = 2mu^3 - u^2 + a^{-2}.$$

При $u = 0$ этот трехчлен имеет максимум, равный a^{-2} , и минимум, равный $a^{-2} - \frac{1}{27m^2}$. Поэтому полином $f(u)$ имеет: 1) при $a < 3\sqrt[3]{3}m$ один отрицательный корень; 2) при $a = 3\sqrt[3]{3}m$ двойной положительный корень, равный $1:3m$, и отрицательный корень, равный $-1:6m$; 3) при $a > 3\sqrt[3]{3}m$ два положительных корня, один из которых лежит в промежутке $0,1:3m$, а другой превосходит $1:3m$, и один отрицательный корень.

Переменная u может совпадать лишь с двойным корнем при $a = 3\sqrt[3]{3}m$ и с меньшим из положительных корней при $a > 3\sqrt[3]{3}m$.

Принимая во внимание уравнение

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - 3mu^2 = 0,$$

непосредственно вытекающее из (IV, 2,1), приходим к заключению, что переменная u имеет максимум в промежутке $0, 1:3m$ при $a > 3\sqrt[3]{3}m$. Этот максимум совпадает с меньшим положительным корнем функции $f(u)$.

Пусть значение переменной φ , соответствующее этому максимуму, будет φ_m .

Имеем при $a \leq 3\sqrt{3}m$ $\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{f(u)}$, (IV, 2,2)

при $a > 3\sqrt{3}m$ $\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{f(u)}$, $\varphi < \varphi_m$ (IV, 2,3)

$$\frac{du}{d\varphi} = -\sqrt{f(u)}, \quad \varphi > \varphi_m.$$

Рассмотрим случай $a \leq 3\sqrt{3}m$. По формуле (IV, 2,2) получаем

$$\varphi = \text{const} + \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \quad (\text{IV, 2,4})$$

Если $a = 0$, то (IV, 2, 4) дает $\varphi = \text{const}$, что указывает на прямолинейное распространение луча вдоль радиального направления. При этом уравнение (III, 1, 7) при соответствующем направлении распространения превращается в следующую

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

и имеет интеграл $e^r(r-2m)^{2m} = Ce^{-t}$, где C — постоянная интегрирования. Положив $t \rightarrow \infty$, находим $r \rightarrow 2m$. Поэтому рассматриваемый прямолинейный луч заканчивается на гравитационной поверхности $r = 2m$.

Если $a = 3\sqrt{3}m$, то уравнение (IV, 2, 4) допускает решение $u = 1:3m$, определяющее круговую траекторию. Общее решение уравнения (IV, 2, 4) имеет в этом случае вид

$$\varphi = \text{const} + \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6mu + 1}}{\sqrt{3} - \sqrt{6mu + 1}}.$$

При $u \rightarrow 1:3m$ это решение дает $\varphi \rightarrow \infty$, показывая, что луч имеет форму спиралевидной кривой, асимптотически приближающейся к окружности $u = 1:3m$.

В промежуточном случае, когда $0 < a < 3\sqrt{3}m$, по формуле (III, 1,7) получаем

$$t = \text{const} + a^{-1} \int_{u_0}^u \frac{du}{u^2(1-2mu)\sqrt{f(u)}}.$$

Здесь верхний предел интегрирования может только возрастать.

Не производя вычисления, заметим, что при всяком $u < 1:2m$ интеграл, а следовательно и время распространения остается конечным. Если же $u \rightarrow 1:2m$, то интеграл неограниченно возрастает, вследствие чего $t \rightarrow \infty$. Поэтому при $a < 3\sqrt{3}m$ луч также заканчивается на гравитационной поверхности массы. Полярный угол конечной точки находится по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^{1:2m} \frac{du}{\sqrt{f(u)}},$$

вытекающей из (IV, 2,2).

На рис. 9 представлены лучи при $0 \leq u \leq 3\sqrt{3} m$.

Переходим к случаю $a > 3\sqrt{3} m$, когда луч имеет экстремальную точку. Значения переменных φ , u , соответствующие этой точке, обозначим через φ_m , u_m .

Полярные углы φ , φ' точек, лежащих по обе стороны от экстремальной точки, определяются, согласно (IV, 2,3), формулами

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

$$\varphi' = \varphi_0 + 2 \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} - \int_0^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

Пусть корни трехчлена $f(u)$ в порядке их возрастания будут u_1 , u_2 , u_3 . Введем новую переменную Φ при помощи соотношения

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi,$$

из которого следует

$$\sqrt{f(u)} = (u_2 - u_1) \sqrt{2m(u_3 - u_1)(1 - k^2 \sin^2 \Phi)} \sin \Phi \cos \Phi,$$

где

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}.$$

Принимая во внимание, что $u_m = u_2$, можно переписать приведенные выше формулы следующим образом

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right),$$

$$\varphi' = \varphi_0 + \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right),$$
(IV, 2,5)

где для краткости принято $\Delta\Phi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}$.

При помощи (IV, 2,5) найдем выражение для угла, образованного радиусами-векторами двух точек, симметрично расположенных относительно точки максимума. Имеем

$$\varphi' - \varphi = \frac{4}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \quad (IV, 2,6)$$

Разность полярных углов асимптотических направлений определяется формулой

$$\varphi'_0 - \varphi_0 = \frac{4}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \quad (IV, 2,7)$$

Если a достаточно близко к $3\sqrt{3}m$, то эта разность может иметь сколь угодно большое значение. В самом деле, при $a \rightarrow 3\sqrt{3}m$ имеем $u_1 \rightarrow -1 : 6m$, $u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow 1 : 3m$, вследствие чего $k^2 \rightarrow 1$, $\Phi_0 \rightarrow \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому полный эллиптический интеграл в (IV, 2,7) неограниченно возрастает, тогда как неполный стремится к конечному пределу. Далее, пусть n — целое число, удовлетворяющее условию

$$2n\pi < \varphi'_0 - \varphi_0 < 2(n+1)\pi.$$

В таком случае луч имеет n двойных точек; соответствующие им значения переменной Φ определяются формулами

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \frac{\pi i}{2} \sqrt{2m(u_3 - u_1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{IV, 2,8})$$

вытекающими из (IV, 2,6), если положить $\varphi' - \varphi = 2\pi i$. Вычисление этих значений можно выполнить следующим образом.

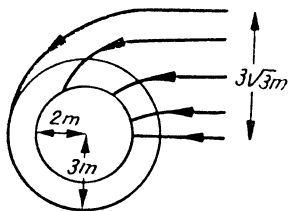


Рис. 9.

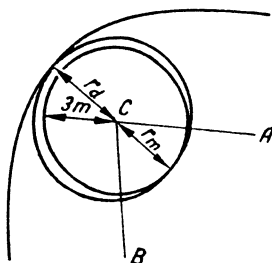


Рис. 10.

Отыскав корни функции $f(u)$, например по формулам тригонометрического решения, которые в данном случае будут иметь вид

$$u = \frac{1}{6m} \left(1 + 2 \cos \frac{\psi + 2\pi i}{3} \right), \quad i = 0, 1, 2,$$

где
$$\cos \psi = 1 - 54 \frac{m^2}{a^2}$$

найдем при помощи (IV, 2,8) n значений интеграла $\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}$. Входя затем в таблицу эллиптических интегралов с данным k , получим искомые значения Φ .

Координаты двойных точек находятся по формулам

$$u_d = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi, \quad \varphi_d = \frac{1}{2} (\varphi_0 + \varphi'_0) - \pi i.$$

На рис. 10 изображен луч, имеющий одну двойную точку.

C — начало координат, совпадающее с центром поля; CA, CB — асимптотические направления. При построении принято: $m = 2,5$, $a = 12,995$, $\varphi_0 = 0$. Вычисления дают: $\varphi'_0 = 640^\circ$, $r_d = 8,55$, $\varphi_d = 140^\circ$, $r_m = 7,6$, $\varphi_m = 320^\circ$.

Если при заданном $a > 3\sqrt{3}m$ окажется $\varphi'_0 - \varphi_0 = 2\pi$, то асимптотические направления совпадают; луч имеет бесконечно удаленную двойную точку. При $\varphi'_0 - \varphi_0 < 2\pi$ луч не имеет двойных точек.

На рис. 11 изображена траектория без двойных точек при $m = 2,5$, $a = 13,7$.

Предположим, что $m \ll a$. В этом случае для корней трехчлена можно принять приближенные значения

$$u_1 = \frac{m}{a^2} - \frac{1}{a}, \quad u_2 = \frac{m}{a^2} + \frac{1}{a},$$

$$u_3 = \frac{1}{2m} - \frac{2m}{a^2},$$

Рис. 11.

вытекающие из приведенных выше формул тригонометрического решения.

При помощи этих значений получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2m(u_3 - u)}} = 1 - \frac{m}{a}, \quad k^2 = \frac{4m}{a}, \quad \Phi_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{m}{2a},$$

$$\int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{m}{a}\right) - \frac{m}{a}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{m}{a}\right). \quad (\text{IV}, 2,9)$$

Поэтому, согласно (IV, 2,7), для острого угла между асимптотическими направлениями имеем

$$\vartheta = \frac{4m}{a}. \quad (\text{IV}, 2,10)$$

Найдем, наконец, приближенное уравнение траектории при $m \ll a$. Как показывает каждая из формул (IV, 2,5), полярный угол точки максимума, определяемой условием $\Phi = \frac{\pi}{2}$, равен

$$\varphi_m = \varphi_0 + \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right).$$

Поэтому оба уравнения (IV, 2,5) можно объединить при помощи следующего

$$\pm (\varphi - \varphi_m) = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \quad (\text{IV}, 2,11)$$

Входящий в (IV, 2,11), эллиптический интеграл приближенно выражается формулой

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \Phi \left(1 + \frac{m}{a} \right) - \frac{m}{a} \sin \Phi \cos \Phi.$$

Внося это значение, а также первое из соотношений (IV, 2,9) в точное уравнение (IV, 2, 11) имеем после упрощения

$$\pm (\varphi - \varphi_m) = \pi - 2\Phi + \frac{m}{a} \sin 2\Phi,$$

откуда, с той же степенью точности, вытекает

$$\cos(\varphi - \varphi_m) = -\cos 2\Phi - \frac{m}{a} \sin^2 2\Phi.$$

С другой стороны, легко убедиться, что, ограничиваясь первой степенью отношения $\frac{m}{a}$, можно положить $\sin 2\Phi = \sin(\varphi - \varphi_m)$, вследствие чего

$$\cos(\varphi - \varphi_m) = -\cos 2\Phi - \frac{m}{a} \sin^2(\varphi - \varphi_m).$$

Исключая переменную Φ , окончательно получаем

$$u = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{a} \cos(\varphi - \varphi_m), \quad (\text{IV, 2,12})$$

где

$$\rho = \frac{a^2}{m} [1 + \sin^2(\varphi - \varphi_m)].$$

Кривую, определяемую уравнением (IV, 2,12), можно приближенно рассматривать как гиперболу с переменными элементами. Вблизи центра поля эта кривая совпадает с гиперболой, имеющей полуоси $A = m$, $B = a^1$. В области, удаленной от центра, кривая

¹ Заметим, что в пределах принятой точности эта гипербола совпадает с ньютоновской. В самом деле, для гиперболической орбиты имеем

$$r = \frac{A(e^2 - 1)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_m)},$$

где A — действительная полуось, связанная со скоростью V соотношением

$$V^2 = \gamma(M + M') \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{A} \right)$$

Принимая $V = c$ при $r = \infty$ и вводя релятивистские единицы, получим $A = m + m'$. Эксцентриситет выражается через длину перпендикуляра a , опущенного из фокуса на асимптоту, при помощи формулы $e = \frac{\sqrt{A^2 + a^2}}{A}$.

Опуская m' , имеем $A = m$, $e = \frac{\sqrt{m^2 + a^2}}{m}$.

(IV, 2,12) превращается в гиперболу с полуосями $A = 2m$, $B = a$. Асимптотические направления первой гиперболы, имеющие угловые коэффициенты $\pm \frac{a}{m}$, образуют острый угол $\vartheta_1 = \frac{2m}{a}$, величина которого соответствует первоначальной (ошибочной) формуле Эйнштейна. Острый угол между асимптотическими направлениями второй гиперболы равен $\vartheta_2 = \frac{4m}{a}$, что соответствует более поздней формуле Эйнштейна.

На рис. 12 кривые I, II изображают предельные гиперболы для луча III; CA и CB — асимптотические направления. При построении принято $m = 2,5$, $a = 10$.

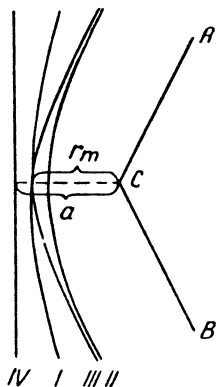


Рис. 12.

§ 3. Принцип Доплера

Предположим, что в точке x_1^σ , $\sigma = 1, \dots, 4$ пространственно-временного континуума с заданным метрическим тензором g_{ij} , некоторый источник радиации, движущийся по определенному закону, излучает импульс какой-либо заданной частоты ν_1 . Пусть далее в точке x_2^σ , $\sigma = 1, \dots, 4$ того же континуума излученный импульс принимается наблюдателем, движущимся также по определенному закону, и оценивается частотой ν_2 . Соотношение между частотами излучения и наблюдения, зависящее от законов движения источника и наблюдателя и от геометрии пространственно-временного континуума, мы и будем называть принципом Доплера, несколько обобщая таким образом классическое определение последнего.

Законы движения источника и наблюдателя зададим компонентами их пространственных скоростей $\left(\frac{dx^\sigma}{dx^4}\right)_1$, $\left(\frac{dx^\sigma}{dx^4}\right)_2$, а излученный и наблюдаемый периоды обозначим соответственно через τ_1 , τ_2 .

Прежде всего заметим, что отношение этих периодов, как и в классической теории, можно заменить отношением соответствующих длин волн. В самом деле, если бы излученный и наблюдаемый периоды совпадали, то наблюдатель характеризовал воспринятый им импульс длиной волны $\lambda = \tau_1 V$, где V — скорость света в точке наблюдения. Однако, в соответствии с его измерениями, он имеет $\lambda + \delta\lambda = \tau_2 V$.

Поэтому отношение периодов равно

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda}.$$

Периоды τ_1 , τ_2 , измеренные в масштабах источника и наблюдателя соответственно, являются собственными периодами. Они

могут быть отождествлены с соответствующими значениями инвариантного линейного элемента $\tau_1 = ds_1$, $\tau_2 = ds_2$.

Основная квадратическая форма $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ дает

$$ds_\sigma = \left(g_{ij} \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^j}{dx^4} \right)_\sigma^{\frac{1}{2}} dx_\sigma^4,$$

где производные $\left(\frac{dx^i}{dx^4} \right)_\sigma$ представляют собой компоненты скоростей источника ($\sigma = 1$) и наблюдателя ($\sigma = 2$) в моменты излучения и наблюдения соответственно.

Следовательно,

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dx_2^4}{dx_1^4} \frac{\left[g_{ij} \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^j}{dx^4} \right]_2^{\frac{1}{2}}}{\left[g_{ij} \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^j}{dx^4} \right]_1^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{IV, 3,1})$$

Формула (IV, 3,1) является общим релятивистским выражением принципа Доплера. Входящая в это выражение производная $\frac{dx_2^4}{dx_1^4}$ должна быть вычислена в зависимости от законов движения источника и наблюдателя и формы луча.

Приложим общую формулу (IV, 3,1) к случаю статического поля, структура которого позволяет построить ортогональную систему координат, т. е. привести к нулю все g_{ij} при $i \neq j$.

Для подобного поля линейный элемент можно написать в виде

$$ds^2 = g_{\alpha\alpha} dx^{\alpha^2} + g_{44} dx^{4^2}. \quad (\text{IV, 3,2})$$

В соответствии с выражением для пространственного элемента $d\sigma^2 = -g_{\alpha\alpha} dx^{\alpha^2}$, определим модуль пространственной скорости формулой

$$v^2 = -g_{\alpha\alpha} \left(\frac{dx^{\alpha^2}}{dx^4} \right)^2,$$

при помощи которой квадратичную форму (IV, 3,2) можно переписать следующим образом

$$ds^2 = (g_{44} - v^2) dx^{4^2} = (V^2 - v^2) dx^{4^2}, \quad (\text{IV, 3,3})$$

где V — скорость света, определяемая условием $ds = 0$. Сумма $g_{ij} \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^j}{dx^4}$, входящая в общее выражение принципа Доплера,

¹ Здесь через $\alpha, \beta \dots$ обозначены индексы суммирования, принимающие значения 1, 2, 3.

в рассматриваемом случае равна $V^2 - v^2$, вследствие чего это выражение приводится к виду

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dx_2^4}{dx_1^4} \sqrt{\frac{V_2^2 - v_2^2}{V_1^2 - v_1^2}}, \quad (\text{IV, 3,4})$$

где v_1, v_2 — скорости источника излучения и наблюдателя, V_1, V_2 — значения скорости света в точках излучения и наблюдения.

Переходим к вычислению производной $\frac{dx_2^4}{dx_1^4}$. Напишем выражение для промежутка времени, в течение которого свет распространяется от точки x_1^σ до точки x_2^σ ; согласно (IV, 3,2) он равен

$$x_2^4 - x_1^4 = \int_1^2 - \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{dx^\alpha}{dx^4} dx^\alpha.$$

Криволинейный интеграл должен быть взят вдоль луча, соединяющего точки x_1^σ, x_2^σ .

Варьируя линию интегрирования при фиксированных начальной и конечной точках и при постоянном x_1^4 , имеем

$$\delta x_2^\sigma = \delta \int_1^2 - \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{dx^\alpha}{dx^4} dx^\alpha.$$

Нетрудно убедиться в том, что эта вариация равна нулю.

Составим уравнения, определяющие пространственную траекторию луча. Согласно (III, 1,3), уравнения инерциального движения в статическом поле (IV, 3,2) имеют вид

$$\frac{d}{dx^4} \left(\frac{g_{\sigma\sigma}}{g_{44}} \frac{dx^\sigma}{dx^4} \right) - \frac{1}{2g_{44}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dx^i}{dx^4} \right)^2 = 0, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Произведя преобразование

$$\frac{1}{g_{44}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{g_{ii}}{g_{44}} \right) - g_{ii} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{1}{g_{44}} \right)$$

и принимая во внимание, что для света должно быть выполнено равенство $g_{ii} dx^{i^2} = 0$, перепишем эти уравнения следующим образом

$$\frac{d}{dx^4} \left(\frac{g_{\sigma\sigma}}{g_{44}} \frac{dx^\sigma}{dx^4} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{g_{ii}}{g_{44}} \right) \left(\frac{dx^i}{dx^4} \right)^2 = 0. \quad (\text{IV, 3,5})$$

По отношению к интегралу

$$\int_1^2 - \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \left(\frac{dx^\alpha}{dx^4} \right)^2 dx^4$$

соотношения (IV, 3,5) представляют собой систему уравнений Эйлера — Лагранжа, являясь условием его экстремальности.

Следовательно,

$$\delta \int_1^2 - \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{dx^\alpha}{dx^4} dx^\alpha = 0 \quad (\text{IV}, 3,6)$$

Это показывает, что при распространении света в статическом поле выполняется принцип Ферма.

Образум далее полную вариацию интеграла

$$\int_1^2 - \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{dx^\alpha}{dx^4} dx^\alpha,$$

варьируя не только линию интегрирования, но и пределы его; имеем

$$\begin{aligned} \delta x_2^4 - \delta x_1^4 = & \int_{1'}^{2'} \left[- \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{dx^\alpha}{dx^4} dx^\alpha + \delta \left(- \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{dx^\alpha}{dx^4} dx^\alpha \right) \right] - \\ & - \int_1^2 - \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{dx^\alpha}{dx^4} dx^\alpha, \end{aligned}$$

где через $1'$, $2'$, обозначены точки с координатами $x_1^\sigma + \delta x_1^\sigma$, $x_2^\sigma + \delta x_2^\sigma$ соответственно. Простое преобразование дает

$$\begin{aligned} \delta x_2^4 - \delta x_1^4 = & \int_{1'}^{2'} \delta \left(- \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{dx^\alpha}{dx^4} dx^\alpha \right) + \int_{1'}^1 - \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{dx^\alpha}{dx^4} dx^\alpha + \\ & + \int_2^{2'} - \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{dx^\alpha}{dx^4} dx^\alpha. \end{aligned}$$

Отождествим вариации δx_1^σ , δx_2^σ с действительными перемещениями dx_1^σ , dx_2^σ источника и наблюдателя в течение элементарных промежутков времени dx_1^4 , dx_2^4 . Первый член полученного выражения исчезает по условию (IV, 3,6); остальные члены дают

$$dx_2^4 - dx_1^4 = - \left[- \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4} \right]_1 dx_1^4 + \left[- \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4} \right] dx_2^4,$$

где через $\left(\frac{\delta x^\sigma}{\delta x^4} \right)_i$ обозначены компоненты пространственной скорости света в точках излучения ($i = 1$) и наблюдения ($i = 2$). Поэтому для производной $\frac{dx_2^4}{dx_1^4}$ в (IV, 3,4) получаем формулу

$$\frac{dx_2^4}{dx_1^4} = \frac{1 - \left[- \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4} \right]_1}{1 - \left[- \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4} \right]_2}.$$

Угол между двумя пространственными элементами $d\sigma$, $\delta\sigma$, величины которых определяются соотношениями

$$d\sigma^2 = -g_{\alpha\alpha} dx^\alpha{}^2, \quad \delta\sigma^2 = -g_{\alpha\alpha} \delta x^\alpha{}^2$$

выражается очевидной формулой

$$\cos(d\sigma, \delta\sigma) = -\frac{g_{\alpha\alpha} dx^\alpha \delta x^\alpha}{d\sigma \delta\sigma}.$$

Отождествив эти элементы с элементом луча и перемещением частицы, движущейся со скоростью v , имеем $d\sigma = v dx^4$, $\delta\sigma = V dx^4$. Следовательно,

$$\cos(v, V) = -\frac{g_{\alpha\alpha}}{v \sqrt{g_{44}}} \frac{\delta x^\alpha}{dx^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4}$$

или

$$-\frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{dx^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4} = \frac{v}{V} \cos(v, V).$$

Это приводит к следующей формуле для искомой производной

$$\frac{dx_2^4}{dx_1^4} = \frac{1 - \frac{v_1}{V_1} \cos(v_1, V_1)}{1 - \frac{v_2}{V_2} \cos(v_2, V_2)}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае статического поля выражение принципа Допплера принимает вид

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{1 - \frac{v_1}{V_1} \cos(v_1, V_1)}{1 - \frac{v_2}{V_2} \cos(v_2, V_2)} \left[\frac{V_2^2 - v_2^2}{V_1^2 - v_1^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{IV}, 3, 7)$$

Рассмотрим (IV, 3, 7) несколько подробнее.

Первый множитель правой части является простым обобщением классического выражения принципа Допплера. Этот множитель показывает, что в доплеровском смещении частот основную роль играют проекции полных скоростей источника и наблюдателя на направления касательных к лучу в точках излучения. При этом учитывается также уклонение скорости света от постоянной c .

Второй множитель определяет эффект полных скоростей, найденный, как известно, еще в специальной теории относительности.

В отсутствие гравитационного поля, когда $g_{\alpha\alpha} = -1$, $g_{44} = c^2$, соотношение (IV, 3, 7) превращается в известную формулу специальной теории относительности

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{1 - \frac{v_1}{c} \cos(v_1, c)}{1 - \frac{v_2}{c} \cos(v_2, c)} \left[\frac{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{IV}, 3, 8)$$

Предположим, что источник излучения и наблюдатель неподвижны. В этом случае формула (IV, 3,7) принимает вид

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \left(\frac{g_{44,2}}{g_{44,1}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{IV, 3,9})$$

показывая, что гравитационное смещение спектральных линий не зависит от геометрических свойств пространства и определяется одним лишь различием временных масштабов в точках излучения и наблюдения.

В первом приближении, когда при решении уравнений поля сохраняются только члены линейные относительно ньютоновского потенциала, можно написать

$$g_{\alpha\alpha} = -1 - 2\varphi, \quad g_{44} = 1 - 2\varphi,$$

где φ — ньютоновский потенциал. При этом формула (IV, 3,9) перейдет в следующую

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (\text{IV, 3,10})$$

Соотношение (IV, 3,10) выражает известный результат Эйнштейна, согласно которому относительное изменение длины волны в гравитационном поле пропорционально разности потенциалов в точках излучения и наблюдения.

Если наблюдатель находится вне поля тяготения ($\varphi_2 = 0$), происходит «красное» смещение $\delta\lambda : \lambda = \varphi_1$, а при $\varphi_1 = 0$, т. е., когда источник излучения находится вне поля, имеет место «фиолетовое» смещение $\delta\lambda : \lambda = -\varphi_2$.

§ 4. Фотометрические эффекты

Как уже указывалось, некоторые авторы изучали фотометрические эффекты, вызываемые искривлением световых лучей в поле тяготения. Поскольку в настоящее время ни один из этих эффектов не может быть обнаружен практически, мы ограничимся здесь только двумя простыми примерами.

Пусть в точке A (см. рис. 13) находится наблюдатель, расположенный на расстоянии a от звезды. Обозначим через $H(a)$ поток излучения, измеренный этим наблюдателем. Пренебрегая искривлением световых лучей в поле тяготения звезды, мы оценим светимость звезды по формуле $L' = 4\pi a^2 H(a)$, тогда как в действительности светимость L будет несколько ниже, поскольку наблюдаемый в точке A поток $H(a)$ вследствие искривления лучей окажется больше отношения $\frac{L}{4\pi a^2}$.

Найдем соотношение между L , L' .

Согласно (IV, 2,1) форма луча в поле тяготения звезды определяется уравнением

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - 2mu^3 - c_1^{-2} = 0,$$

где c_1 — длина перпендикуляра, опущенного из центра звезды на направление луча в удаленной от звезды области.

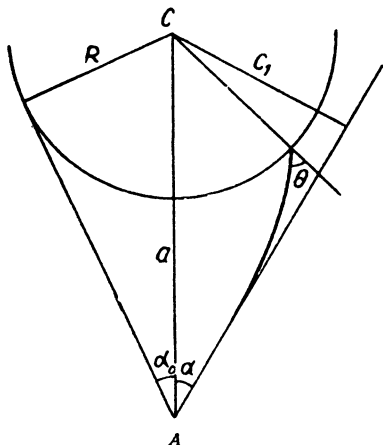


Рис. 13.

Считая расстояние a достаточно большим, имеем $c_1 = a \sin \alpha$, где α — угол при точке A между лучом и направлением на центр звезды.

При принятом на чертеже выборе полярной оси имеем для луча, проходящего через точку A и какую-либо точку поверхности звезды

$$\frac{du}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{1}{a^2 \sin^2 \alpha} - u^2 + 2mu^3}.$$

Направление луча на поверхности звезды можно задать углом Θ , образованным лучом и внешней нормалью. Очевидно $\operatorname{tg} \Theta = r d\varphi : dr = -u d\varphi : du$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{a^2 \sin^2 \alpha} - 1 + \frac{2m}{R}}}. \quad (\text{IV, 4,1})$$

Пусть α_m — наибольшее значение α , которое соответствует лучу, соприкасающемуся с поверхностью звезды. Положив $\Theta = \frac{\pi}{2}$, имеем согласно (IV, 4,1)

$$\sin \alpha_m = \frac{R}{a} \left(1 - \frac{2m}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \sin \alpha_0 + \frac{m}{a}, \quad (\text{IV, 4,2})$$

где α_0 — угловая величина радиуса звезды без учета искривления лучей.

Допустим, что закон потемнения диска звезды к краю имеет вид $I = I_0 f(\cos \Theta)$, где I_0 — поверхностная яркость в центре диска. Поток излучения в точке A выражается формулой

$$H(a) = 2\pi I_0 \int_0^{\alpha_m} f(\cos \Theta) \cos \alpha \sin \alpha d\alpha.$$

При вычислении этого интеграла удобнее перейти к переменной Θ .

Из (IV, 4,1) следует

$$\sin^2 \alpha = \frac{R^2}{a^2} \sin^2 \Theta \left(1 - \frac{2m}{R} \sin^2 \Theta \right)^{-1} \approx \frac{R^2}{a^2} \left(\sin^2 \Theta + \frac{2m}{R} \sin^4 \Theta \right).$$

Дифференцируя это соотношение, имеем

$$\cos \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{R^2}{a^2} \left(1 + \frac{4m}{R} \sin^2 \Theta \right) \sin \Theta \cos \Theta d\Theta.$$

Поэтому написанное выше выражение для потока излучения в точке A приводится к величине

$$H(a) = 2\pi I_0 \frac{R^2}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos \Theta) \left(1 + \frac{4m}{R} \sin^2 \Theta \right) \sin \Theta \cos \Theta d\Theta.$$

Опуская релятивистскую поправку, зависящую от массы звезды, получим поток излучения, вычисленный без учета искривления лучей

$$H = 2\pi I_0 \frac{R^2}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos \Theta) \sin \Theta \cos \Theta d\Theta.$$

Таким образом,

$$\frac{H(a)}{H} = 1 + \frac{4m}{R} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos \Theta) \sin^3 \Theta \cos \Theta d\Theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos \Theta) \sin \Theta \cos \Theta d\Theta}. \quad (\text{IV, 4,3})$$

Если, в частности, принять закон потемнения $f(\cos \Theta) = 1 - u + u \cos \Theta$, где u — так называемый коэффициент потемнения, то получится

$$H(a) = H \left\{ 1 + \frac{2m}{R} \frac{15 - 7u}{5(3 - u)} \right\}. \quad (\text{IV, 4,4})$$

Вычисляя светимость звезды с помощью наблюдаемого потока $H(a)$ по обычной формуле, не учитывающей искривления лучей, имеем $L' = 4\pi a^2 H(a)$, тогда как в действительности должно быть $L = 4\pi a^2 H$.

Переходя к обычным единицам, в случае принятого закона потемнения, можно написать согласно (IV, 4,4)

$$L = L' \left\{ 1 - \frac{15 - 7u}{5(3 - u)} \frac{2\gamma M}{c^2 R} \right\}. \quad (\text{IV, 4,5})$$

Возможные значения дроби $\frac{15-7u}{5(3-u)}$ не влияют на порядок эффекта, поскольку границы этих значений, отвечающие крайним случаям $u = 0$ и $u = 1$, равны 1,0 и 0,8 соответственно.

Для Солнца отношение $(L' - L) : L'$ составляет всего около $4 \cdot 10^{-5}$. Даже для белых карликов, отличающихся сравнительно очень малыми размерами, это отношение остается вполне пренебрежимым. Так например, в случае звезды Ван-Маанена ($R \approx 0,007 R_{\odot}$, $M \approx 0,1 M_{\odot}$) оно имеет порядок 10^{-4} .

Рассмотренный пример показывает, что поле тяготения звезды не может вызвать заметных фотометрических эффектов в излучении этой звезды.

Произведем количественную оценку эффекта, который должен иметь место в излучении одной звезды под влиянием поля тяготения другой звезды, расположенной на пути к наблюдателю. Как мы увидим, принципиально этот эффект может оказаться весьма значительным. Однако осуществление его требует выполнения специальных условий, которые практически приходится признать невозможными. Г. А. Тихов, посвятивший изучению этого эффекта несколько статей [94], называл его «космическим миражем».

Допустим, что две звезды и наблюдатель B расположены на одной прямой на расстояниях a , b соответственно (см. рис. 14). При прямолинейном распространении света произойдет затмение одной звезды другой, вследствие чего наблюдатель должен видеть только более близкую звезду. При криволинейном распространении лучей удаленная звезда будет наблюдаться в виде светлого кольца, окружающего более близкую звезду.

Поскольку расстояния a , b принимаются большими (порядка средних расстояний между звездами), можно считать, что световые лучи, идущие от удаленной звезды к наблюдателю, распространяются прямолинейно, но испытывают излом в соответствии с формулой Эйнштейна (IV, 2,10).

Пусть x — расстояние от центра близкой звезды до точки излома. В обозначениях, принятых на нашем рисунке, можно написать следующие очевидные соотношения

$$x = a(\beta - \alpha) + r \sin \omega, \quad \alpha = \frac{x}{b}, \quad \beta = \frac{4m}{x},$$

где m — масса близкой звезды в релятивистских единицах.

С помощью этих соотношений, получаем

$$x = \frac{br \sin \omega + \sqrt{b^2 r^2 \sin^2 \omega + 16mab(a+b)}}{2(a+b)}. \quad (\text{IV}, 4,6)$$

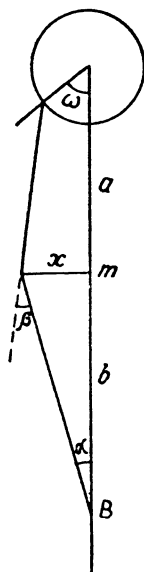


Рис. 14.

Наименьшее x_1 и наибольшее x_2 расстояния до точки излома луча соответствуют $\omega = \mp 90^\circ$,

$$x_{1,2} = \frac{\mp br + \sqrt{b^2 r^2 + 16mab(a+b)}}{2(a+b)}. \quad (\text{IV, 4,7})$$

Световые лучи, приходящие в точку наблюдения от удаленной звезды, образуют с линией центров углы в пределах от $\alpha_1 = \frac{x_1}{b}$, до $\alpha_2 = \frac{x_2}{b}$. Вычислим поток излучения удаленной звезды в точке B .

Имеем

$$H' = \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I \cos \alpha \sin \alpha d\alpha d\varphi,$$

где I — интенсивность излучения, φ — угол между плоскостью чертежа и какой-либо постоянной плоскостью, проходящей через линию центров.

Считая для простоты интенсивность постоянной, получим

$$H' = \pi I (\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1) = \frac{\pi I}{b^2} (x_2^2 - x_1^2).$$

Если a , b измеряются парсеками, а величины r , m сравнимы с радиусом и массой Солнца, то член $b^2 r^2$ будет достаточно малым по сравнению с выражением $16mab(a+b)$.

Поэтому согласно (IV, 4,7) можно написать

$$x_2^2 - x_1^2 = \frac{4br}{(a+b)^2} \sqrt{mab(a+b)}.$$

Следовательно,

$$H' = \frac{4\pi r I}{b(a+b)^2} \sqrt{mab(a+b)}.$$

С другой стороны, в отсутствие звезды m поток излучения удаленной звезды в той же точке B будет равен

$$H = \frac{\pi r^2 I}{(a+b)^2}.$$

Таким образом поле тяготения звезды, расположенной на пути к наблюдателю и играющей роль гравитационной линзы, увеличивает поток излучения в отношении

$$\frac{H'}{H} = \frac{4}{br} \sqrt{mab(a+b)}. \quad (\text{IV, 4,8})$$

Эта формула показывает, что при соответствующих условиях гравитационная линза может во много раз увеличить блеск звезды. Так, например, принимая $a = b = 10$ парс. $\approx 3 \cdot 10^{17}$ см,

$r = r_{\odot} = 7 \cdot 10^{10}$ см, $m = m_{\odot} = 1,5 \cdot 10^6$ см, получим $H' : H = 170$. «Космический мираж» оказывается весьма интенсивным. Однако осуществление его требует выполнения весьма исключительно редких условий, вследствие чего наблюдение этого явления приходится признавать практически невозможным.

Фотометрические эффекты, вызываемые искривлением световых лучей, более вероятны в двойных звездах, хотя и здесь их выявление оказывается крайне затруднительным.

Пусть затменно-переменная звезда состоит из главной звезды радиуса R и спутника радиуса r , обращающегося на расстоянии a . В момент центрального затмения спутник экранирует среднюю часть диска главной звезды. При этом вследствие искривления лучей радиус r' заэкранированной части должен быть меньше радиуса спутника.

Найдем соотношение между r , r' при условии, что расстояние до наблюдателя значительно превосходит размеры орбиты спутника.

Формула (IV, 4,6) принимает в нашем случае вид

$$x = \frac{1}{2} R \sin \omega + \frac{1}{2} \sqrt{R^2 \sin^2 \omega + 16ma}, \quad (\text{IV, 4,9})$$

где ω представляет собой угол, указанный на рисунке.

Положим $x = r$ и найдем значение ω , отвечающее границе заэкранированной части главной звезды. Из (IV, 4,9) непосредственно следует $R r \sin \omega = r^2 - 4ma$. Поэтому радиус заэкранированной части, равный $R \sin \omega$, определяется формулой

$$r' = r \left(1 - \frac{4ma}{r^2} \right). \quad (\text{IV, 4,10})$$

Ослабление блеска звезды во время затмения будет менее значительным, чем при прямолинейном распространении лучей. Иными словами, радиус спутника, вычисленный из фотометрических наблюдений затменной звезды без учета искривления лучей окажется меньше его истинного значения. Если, например, для спутника принять $r = r_{\odot} \approx 10^{10}$ см, $m = m_{\odot} \approx 10^6$ см и положить $a \approx 10^{14}$ см (т. е., приблизительно, 10 астрономических единиц), то получится $(r - r') : r \approx 0,1$.

Мы видим, что в двойных звездах эффект, вызванный искривлением световых лучей, может оказаться значительным. Однако обнаружить его практически весьма трудно, поскольку в наблюдениях затменно-переменных звезд сказывается множество других эффектов.

§ 5. Астрономическая проверка

Вместе с эффектом прецессии периодической орбиты в задаче Кеплера искривление световых лучей в поле тяготения и гравитационное смещение спектральных линий составляют три важней-

шие следствия общей теории относительности, которые в настоящее время доступны астрономической проверке. Как указывалось в предыдущей главе, первый из этих эффектов хорошо подтверждается наблюдаемым движением перигелия планеты Меркурий. Нам остается теперь привести результаты астрономической проверки двух оптических следствий теории относительности.

Угол отклонения светового луча, проходящего на расстоянии a от центра поля гравитации, определяется формулой (IV, 2,10), которую мы напомним здесь в виде

$$\Theta = \frac{4\gamma M}{c^2 a}, \quad (\text{IV, 5,1})$$

перейдя от релятивистских единиц измерения к системе CGS. Если внести значения постоянных, то получится

$$\Theta'' = 6,12 \cdot 10^{-23} \frac{M}{a}. \quad (\text{IV, 5,2})$$

Для некоторых звезд (особенно для белых карликов, характеризующихся очень высокими плотностями), этот угол достигает заметной величины. Однако единственным небесным телом, для которого этот эффект может быть измерен путем наблюдений, является Солнце. Определение угла Θ производится, как известно, путем измерения смещений звезд на фотографиях, полученных во время полного солнечного затмения. Наибольшую величину смещения должна обнаружить звезда, наблюдающаяся непосредственно у края солнечного диска. Принимая для Солнца $M = 1,985 \cdot 10^{33}$ г, $a = 6,951 \cdot 10^{10}$ см, получаем $\Theta = 1'',75$. Однако столь значительных смещений наблюдать не удастся, так как даже при наиболее благоприятных условиях приходится довольствоваться звездами, расположенными на тех или иных расстояниях от края диска. Измеренные при этом смещения нетрудно, конечно, редуцировать на край.

Впервые проверка формулы (IV, 5,2) производилась во время солнечного затмения 29 мая 1919 года. Измерение фотографий, полученных экспедициями в Собраль и Принцип при помощи трех различных инструментов, позволило получить три независимые оценки величины Θ . Две из них дали соответственно $1'', 98 \pm 0'',12$ и $1'',61 \pm 0'',3$, что находится в очень хорошем согласии с теорией, приводящей, как мы видели, к величине $1'',75$. Третья оценка составила всего $0'',86 \pm 0'',1$, т. е. лишь около половины теоретического значения. Однако эта оценка, основанная на фотографиях, полученных в очень неблагоприятных условиях, не заслуживает большого доверия.

Новые определения были основаны на наблюдениях солнечного затмения 21 сентября 1922 года, выполненных экспедицией Ликской обсерватории. Эти определения дали четыре независимые оценки: $1'',75 \pm 0'',3$, $1'',77 \pm 0'',3$, $1'',72 \pm 0'',11$, $1'',82 \pm 0'',15$,

которые также находятся в согласии с теоретическим значением. Таким образом, предсказанное теорией относительности искривление лучей в поле тяготения хорошо подтверждалось наблюдениями. Убеждение в правильности этого результата усилилось в результате дискуссии, которой были подвергнуты попытки объяснить наблюдаемое смещение звезд другими причинами. Так, например, Кемпбелл и Тремплер [100] установили неприемлемость гипотезы Курвуазье о влиянии «годовой рефракции» и о роли аномальной рефракции в земной атмосфере, вызванной охлаждением внутри лунной тени. Несуществование последнего фактора доказана также Миллером и Мариоттом [101] на основании измерений диаметра Луны во время затмения 1926 года. Тем не менее вопрос об эмпирической проверке формулы (IV, 5,2) оказался весьма сложным и окончательного решения его в настоящее время мы еще не имеем. Новые сомнения в правильности закона (IV, 5,2) возникли в связи с результатами определения величины θ , произведенного по наблюдениям солнечного затмения 9 мая 1929 года. На основании фотографий, полученных на Суматре экспедицией Фреундлиха, была выведена величина $2'',24 \pm 0'',10$, которая почти в полтора раза превосходит теоретическую. Против этого определения неоднократно выдвигались возражения, относящиеся к методу обработки фотографий. В частности, Тремплер [102], выполнивший новую обработку наблюдений экспедиции Фреундлиха, вывел значение $1'',75 \pm 0'',13$, совпадающее с теоретическим и с результатами более ранних определений. Однако этот результат нельзя считать бесспорным.

Малая величина измеряемого эффекта и трудность учета различных погрешностей сильно осложняют количественную проверку формулы Эйнштейна. Не высказывая окончательных суждений о точности этой формулы, в настоящее время нельзя полностью отрицать возможность того, что действительное отклонение световых лучей вблизи Солнца окажется несколько больше теоретического значения (IV, 5,2). К большому значению величины смещения приводит также определение А. А. Михайлова на основании фотографий, полученных им во время затмения 19 июня 1936 года. Выведенный Михайловым результат [103] составляет $2'',74 \pm 0'',26$, т. е. в 1,55 раза превосходит теоретическое значение. Вместе с тем в настоящее время еще нет достаточных оснований для того, чтобы подобное расхождение (если оно действительно существует) объяснить неточностью вывода теории относительности или приписать влиянию каких-либо неизвестных причин. Только новые наблюдения и их тщательный анализ могут привести к решению этого важного и интересного вопроса.

Остановимся теперь на эмпирической проверке второго оптического эффекта теории относительности, согласно которому наблюдаемое положение спектральных линий зависит от разности потенциалов в точках излучения и наблюдения.

Предположим, что излучение происходит на поверхности небес-

ного тела массы M и радиуса R . Пренебрегая силой тяжести у земной поверхности, можно записать формулу (IV, 3,9) в виде

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\gamma M}{c^2 R} \quad (\text{IV, 5,3})$$

или, если внести значения постоянных,

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 7,42 \cdot 10^{-29} \frac{M}{R}. \quad (\text{IV, 5,4})$$

Для Солнца (IV, 5,4) дает относительное смещение $\delta\lambda : \lambda^* = 2,06 \cdot 10^{-6}$, которому при $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ соответствует $\delta\lambda = 0,0082 \text{ \AA}$. Столь малая величина эффекта делает его количественную проверку очень трудной и требует весьма точного учета условий в солнечной атмосфере. Впервые попытка такой проверки была произведена Ст. Джоном [104] на основании многочисленных данных обсерватории Маунт Вилсон и Эвершедом [105]. Факт «красного смещения» установлен в этих работах достаточно убедительно. Однако количественное подтверждение формулы Эйнштейна нельзя признать бесспорным, т. к. невозможно вполне однозначно отделить гравитационное смещение от других эффектов, особенно от доплеровского смещения. Значительно большей убедительностью отличаются попытки количественной проверки гравитационного смещения линий в спектрах белых карликов, в которых величина смещения оказывается очень большой. В этом отношении прежде всего необходимо отметить работу Адамса [106], исследовавшего гравитационное смещение линий в спектре спутника Сириуса. Не входя в более подробное обсуждение этого вопроса, заметим, что в настоящее время «красное смещение» в поле тяготения из средства проверки теории относительности превратилось в важный метод определения звездных масс, с успехом примененный Ботлингером, Тремплером и другими исследователями.

Глава V

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КОСМОЛОГИЯ

§ 1. Введение

Проблема космологии ставится обыкновенно как проблема о строении и общих законах космоса. Космология имеет целью обобщить результаты изучения отдельных космических тел и их систем и представить эти результаты в виде более или менее законченной картины мира, позволяющей с единой точки зрения охватить наиболее общие существенные особенности окружающей нас части вселенной.

Важной особенностью космологии является постепенное расширение объекта ее исследования, связанное с развитием техники наблюдений и накоплением новых сведений о строении вселенной. Если в XVI—XVII столетиях главной задачей космологии являлось изучение строения и общих свойств солнечной системы, то в результате последующего развития астрономии границы доступной наблюдению части вселенной чрезвычайно расширились, и в настоящее время основным вопросом космологии следует считать проблему Метагалактики. Это расширение делает современную космологическую проблему значительно более трудной, поскольку система галактик по своему строению, многочисленности компонент и динамической природе гораздо сложнее солнечной системы.

Вследствие крайней ограниченности наблюдательных данных о Метагалактике, а также ввиду возможной непригодности имеющегося в нашем распоряжении теоретического аппарата проблема системы галактик еще очень далека от сколько-нибудь удовлетворительного решения. Поскольку до сих пор наблюдению была доступна, по-видимому, лишь относительно малая часть Метагалактики, может оказаться, что имеющиеся в настоящее время сведения совершенно недостаточны для выяснения общих закономерностей этой космической системы в целом. Можно также предположить, как это делает, например, М. С. Эйгенсон [107], что в Метагалактике гравитация частично или даже полностью утрачивает свое значение

и что в этой системе господствуют взаимодействия еще неизвестной нам природы.

Предлагавшиеся попытки решения проблемы Метагалактики имеют в значительной степени умозраительный характер и их научное значение сомнительно. В математическом отношении наиболее разработанной из этих попыток является релятивистская космология, основанная на уравнениях поля теории относительности.

Исторически развитие космологии связано с так называемыми космологическими парадоксами, которые возникают при экстраполяции законов классической физики на бесконечную вселенную.

Еще Шезо в 1744 году указывал, что если бы бесконечная вселенная была равномерно заполнена излучающими звездами, то при прозрачности мирового пространства все небо имело бы весьма большую поверхностную яркость, приблизительно равную яркости Солнца. Впоследствии это заключение обсуждалось Ольберсом [108], вследствие чего оно и получило название оптического парадокса Ольберса.

Поскольку парадокс Ольберса играл существенную роль в формировании космологических представлений, мы рассмотрим его здесь несколько подробнее.

Пусть звезды распределены в пространстве с объемной плотностью D , которая является заданной функцией координат. Каждой из наблюдаемых звезд, которые мы будем предполагать для простоты одинаковыми, соответствует телесный угол $\pi R^2 : r^2$, где R — радиус звезды, r — расстояние ее от наблюдателя. Все звезды, расстояния до которых превосходит r и которые располагаются внутри этого телесного угла, экранируются данной звездой и недоступны наблюдению. Поэтому, наряду с истинной плотностью D , можно ввести видимую звездную плотность $D' \leq D$, понимая под этой величиной число звезд, находящихся в единице объема и не экранируемых другими звездами. Найдем связь между истинной и видимой плотностями.

Предположим, что наблюдение производится в телесном угле $d\omega$, вершина которого совпадает с точкой наблюдения, а ось имеет какое-либо определенное направление в пространстве, вследствие чего плотности D , D' могут зависеть лишь от расстояния r .

Число звезд, находящихся в объеме $r^2 d\omega dr$, вырезанном из телесного угла сферами с радиусами r , $r + dr$, равно $r^2 D d\omega dr$. Число видимых звезд в объеме $q^2 d\omega dq$ составляет $q^2 D' d\omega dq$, а образованный ими телесный угол равен $\pi R^2 D' d\omega dq$, поскольку каждая из этих звезд видна из точки наблюдения под углом $\pi R^2 : q^2$. Все видимые звезды с расстояниями менее r образуют телесный угол

$\pi R^2 d\omega \int_0^r D' dq$ и на сфере радиуса r экранируют площадку

$\pi r^2 R^2 d\omega \int_0^r D' dq$. Поэтому из числа $r^2 D d\omega dr$ звезд, находящихся

в объеме $r^2 d\omega dr$, окажутся заэкранированы звезды, расположенные в объеме $\pi r^2 R^2 D d\omega dr \int_0^r D' d\varrho$, т. е. всего $\pi r^2 R^2 D d\omega dr \int_0^r D' d\varrho$ звезд. Таким образом, в объеме $r^2 d\omega dr$ видимых звезд будет

$$r^2 D' d\omega dr = r^2 D d\omega dr - \pi r^2 R^2 D d\omega dr \int_0^r D' dr.$$

Отсюда получается уравнение

$$D' = D - \pi R^2 D \int_0^r D' dr, \quad (V, 1, 1)$$

связывающее видимую звездную плотность в данном направлении с истинной.

Дифференцируя это соотношение по r и внося затем выражение $\pi R^2 \int_0^r D' dr$ из (V, 1, 1), получим простое уравнение

$$\frac{dD'}{dr} = \frac{D'}{D} \frac{dD}{dr} - \pi R^2 D D',$$

которое легко интегрируется и дает

$$D' = C D e^{-\pi R^2 \int_0^r D dr},$$

где C — постоянная интегрирования.

При $r = 0$ должно быть $D' = D$, поскольку в точке наблюдения эффект экранирования исчезает. Следовательно, $C = 1$, и потому окончательно можно написать

$$D' = D e^{-\pi R^2 \int_0^r D dr}. \quad (V, 1, 2)$$

Воспользуемся полученной формулой для вычисления средней поверхностной яркости неба.

Обозначим через I среднюю поверхностную яркость участка неба, наблюдаемого в телесном угле $d\omega$. Интегральная яркость этого участка неба, равная $I d\omega$, обусловлена видимыми звездами, расположенными внутри телесного угла $d\omega$. Если $d\omega'$ — телесный угол, под которым видны указанные звезды из точки наблюдения, I_0 — поверхностная яркость звезды, то $I d\omega = I_0 d\omega'$.

Видимые звезды, находящиеся внутри телесного угла $d\omega$ и

расположенные на расстояниях, не превышающих r , образуют, как мы знаем, телесный угол $\pi R^2 d\omega \int_0^r D' dr$. Поэтому все видимые звезды, находящиеся внутри $d\omega$, наблюдаются под телесным углом

$$d\omega' = \pi R^2 d\omega \int_0^{\infty} D' dr.$$

Внося сюда (V, 1,2), получаем

$$d\omega' = d\omega (1 - e^{-\pi R^2 \int_0^{\infty} D dr}).$$

Следовательно,

$$I = I_0 (1 - e^{-\pi R^2 \int_0^{\infty} D dr}). \quad (V, 1,3)$$

Этой формулой определяется связь между поверхностной яркостью звезды и средней поверхностной яркостью неба в данном направлении. Если предположить, что все пространство заполнено звездами с конечной плотностью, то яркость неба окажется равной яркости звезды. В этом и состоит парадокс Ольберса.

Формула (V, 1,3) показывает, что поверхностная яркость неба будет меньше величины I_0 лишь в том случае, если интеграл $\int_0^{\infty} D dr$ сходится, т. е., если звездная плотность в данном направлении убывает с расстоянием быстрее, чем r^{-p} , где $p > 1$.

Аналогичный характер имеет космологический парадокс Зеелигера [109—110], который возникает при попытке распространить закон тяготения Ньютона на бесконечное пространство, заполненное материей с конечной плотностью. Проследим в общих чертах рассуждения, приводящие к этому парадоксу.

Рассмотрим поле тяготения масс, распределенных с плотностью D в пространстве между двумя сферами радиусов R_0 , R с общим центром в точке O . Потенциал поля в точке A , находящейся на заданном расстоянии a от центра (рис. 15), при соответствующем выборе единиц можно представить в виде

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_0}^R Dr^2 \varrho^{-1} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr,$$

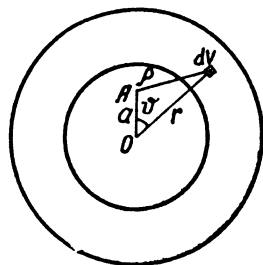


Рис. 15.

где r — расстояние от центра до элемента объема $dv = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$
 ϱ — расстояние точки A от того же элементарного объема, ϑ —
 угол, образованный радиусом-вектором и прямой OA .

Считая a малым по сравнению с r , произведем разложение

$$\varrho^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \cos \vartheta \right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= r^{-1} \left\{ 1 + \frac{a}{r} \cos \vartheta + \frac{a^2}{2r^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \frac{a^3}{2r^3} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta) + \dots \right\}.$$

Таким образом,

$$\varrho^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta),$$

где P_n — полиномы Лежандра, заданные формулами

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2} (3z^2 - 1), \dots$$

Пользуясь этим разложением, перепишем выражение для потенциала в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_0}^R Dr^{1-n} P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr. \quad (V, 1,4)$$

Если произвести двукратное дифференцирование (V, 1,4) по переменной a и положить затем $a = 0$, то получится следующая группа формул

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_0}^R Dr \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr, \quad (V, 1,5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_0}^R D \sin \vartheta \cos \vartheta d\varphi d\vartheta dr,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_0}^R Dr^{-1} \sin \vartheta (3 \cos^2 \vartheta - 1) d\varphi d\vartheta dr.$$

Естественно допустить, что в среднем плотность не зависит от направления. В этом случае при конечном R потенциал, определяющийся первой из формул (V, 1,5), является величиной конечной, а обе производные, как и производные более высоких порядков, будут иметь нулевые значения. Применяя полученные формулы к бесконечному пространству, следует положить $R \rightarrow \infty$. Если при этом допустить, что $D = \text{const}$ (или уменьшается с расстоянием слишком медленно), то потенциал окажется бесконечно большим,

а производные от него будут неопределенными. Между тем предельные значения этих производных должны быть обязательно конечны, поскольку они определяют действие космических масс на небесное тело, помещенное в точке 0. Величина $\frac{d\varphi}{da}$ представляет собой ускорение тела, произведение $\frac{d\varphi}{da}\Delta a$ равно разности скоростей двух небесных тел, расположенных на расстоянии Δa одно от другого. Легко видеть, что конечность потенциала и исчезновение его производных имеют место в том случае, если Dr убывает быстрее, чем r^{-p} при $p > 1$, т. е., если плотность уменьшается с расстоянием быстрее, чем r^{-2} . Предположение о бесконечном пространстве и о конечной во всех его частях плотности оказывается, таким образом, несовместимым с законом тяготения Ньютона. Это заключение и получило название гравитационного парадокса Зеелигера.

Заметим, что Зеелигер, придерживаясь концепции бесконечной вселенной, заполненной веществом с конечной плотностью, считал причиной парадокса неточность закона тяготения, который трактуется им как некоторая эмпирическая формула. Постулирование абсолютной точности закона Ньютона является, по мнению Зеелигера, гипотезой, не имеющей оснований. Можно, например, принять формулу

$$f = \frac{\gamma mm'}{r^2} e^{-\lambda r},$$

которая при достаточно малом значении постоянной λ практически эквивалентна закону Ньютона в пределах солнечной системы, тогда как в случае больших расстояний приводит к значительным отклонениям от этого закона, обеспечивая, в частности, сходимость интегралов (V, 1,5) при конечной плотности во всем пространстве.

Аналогичные возражения можно, разумеется, выдвинуть и против рассуждений, приводящих к парадоксу Ольберса. Вообще попытки распространить какой-либо конкретный физический закон на вселенную в целом не могут претендовать на серьезное научное значение. Такие попытки являются необоснованными экстраполяциями, и результаты их, аналогичные рассмотренным парадоксам Ольберса и Зеелигера, «тепловой смерти» и т. п., не могут служить убедительными доказательствами правильности или ошибочности представлений о пространственной и материальной бесконечности вселенной.

Необходимо заметить, что в рамках концепции бесконечной вселенной разрешение космологических парадоксов возможно также при сохранении точной формы законов классической физики. Следуя идеям иерархичности в строении вселенной, восходящим к Ламберту [111] и более точно сформулированным Проктором [112], Шарлье [113] указал возможную схему вселенной, бесконечной в пространственном и в материальном отношениях, но свободной от оптического и гравитационного парадоксов.

Согласно Шарлье вселенная представляет собой неограниченную последовательность космических систем, построенных иерархически. Допустим, что N_1 звезд, принимаемых одинаковыми по массам и размерам, образуют Галактику — систему первого порядка, которую для простоты условимся считать сферической с радиусом R_1 . N_2 галактик образуют систему второго порядка с радиусом R_2 . В свою очередь, совокупность N_3 систем второго порядка составляют систему третьего порядка радиуса R_3 и т. д. Вселенная, отвечающая подобной схеме, является бесконечной не только в пространственном, но также в материальном отношении, так как масса i -й системы, равная

$$M_i = N_i N_{i-1} \dots N_1 M_0, \quad (V, 1, 6)$$

где M_0 — масса звезды, при достаточно большом порядке i будет как угодно большой.

Найдем условие, при котором вселенная Шарлье будет свободна от гравитационного и оптического парадоксов.

Рассмотрим звезду, принадлежащую системе i -го порядка и находящуюся на расстоянии a_i от центра системы. Плотность этой системы равна

$$D_i = \frac{M_i}{\frac{4}{3} \pi R_i^3} = \frac{N_i \dots N_1 M_0}{\frac{4}{3} \pi R_i^3}, \quad (V, 1, 7)$$

а ускорение, которое она сообщает рассматриваемой звезде, определяется формулой

$$\omega_i = \frac{4}{3} \pi \gamma D_i a_i.$$

Поэтому полное ускорение звезды будет удовлетворять соотношению

$$\omega \leq \frac{4}{3} \pi \gamma \sum D_i a_i$$

и, следовательно,

$$\omega \leq \frac{4}{3} \pi \gamma \sum D_i R_i, \quad (V, 1, 8)$$

так как наибольшее значение a_i есть R_i . С другой стороны, согласно (V, 1, 7)

$$D_i R_i = \frac{N_i \dots N_1 M_0}{\frac{4}{3} \pi R_i^2},$$

вследствие чего отношение любого из членов суммы (V, 1, 8) к последующему будет

$$\frac{D_{i-1} R_{i-1}}{D_i R_i} = \frac{R_i^2}{N_i R_{i-1}^2}.$$

Для сходимости суммы (V, 1,8) достаточно, чтобы это отношение при сколь угодно большом i оставалось больше единицы, т. е., чтобы

$$R_i : R_{i-1} > \sqrt{N_i}. \quad (\text{V}, 1,9)$$

Это неравенство играет основную роль в теории Шарлье и является условием конечности ускорения звезды, т. е. условием отсутствия гравитационного парадокса Зеелигера.

Определим поверхностную яркость неба во вселенной Шарлье.

Предположим, что наблюдение производится в телесном угле $d\omega$, ориентированном в каком-либо определенном направлении. Пусть отрезок оси этого угла в i -й системе составляет b_i . Средняя плотность вещества в этой системе равна величине (V, 1,7).

Пренебрегая эффектом экранирования одних звезд другими, который может лишь ослабить парадокс Ольберса, можно принять, что в объеме $r^2 d\omega dr$, вырезанном из телесного угла двумя сферами радиусов $r, r + dr$, будет наблюдаться

$$\frac{N_i \dots N_1}{\frac{4}{3} \pi R_i^3} r^2 d\omega dr$$

звезд, а экранированный ими участок небесной сферы определится телесным углом

$$\frac{3N_i \dots N_1 R_0^2}{4R_i^3} d\omega dr,$$

где R_0 — радиус звезды.

Вся i -я система вызовет в данном направлении экранирование

$$\frac{3N_i \dots N_1 R_0^2 b_i}{4R_i^3} d\omega$$

Полный эффект, вызванный всеми звездами, расположенными внутри $d\omega$, составит

$$\frac{3}{4} R_0^2 d\omega \sum N_i \dots N_1 b_i R_i^{-3}.$$

Поэтому, принимая поверхностную яркость звезды за единицу и учитывая очевидное соотношение $b_i \leq 2R_i$, приходим к заключению, что яркость неба I должна удовлетворять неравенству

$$I \leq \frac{3}{2} R_0^2 \sum N_i \dots N_1 R_i^{-2}. \quad (\text{V}, 1,10)$$

Отношение i -го члена суммы (V, 1,10) к предыдущему равно

$$\frac{N_i R_{i-1}^2}{R_i^2}.$$

Отсюда следует, что сходимость суммы (V, 1,10), устраняющая оптический парадокс¹, обеспечивается соотношением (V, 1,9). Таким образом, вселенная Шарлье, отвечающая концепции пространственной и материальной бесконечности, при соблюдении условия (V, 1,9) свободна как от гравитационного, так и от оптического парадоксов.

Интересный анализ теории Шарлье содержится в работе академика В. Г. Фесенкова [114], а также в статьях М. С. Эйгенсона [115]. Однако мы не будем останавливаться на более глубоком рассмотрении этой теории, так как с интересующей нас точки зрения она представляет лишь пример возможного устранения космологических парадоксов в рамках концепции пространственной и материальной бесконечности вселенной. Отметим только, что выводы теории Шарлье не содержат явного противоречия с современными данными наблюдений (см., например, [116]).

§ 2. Гравитационный парадокс и уравнения поля теории относительности

Мы видели, что гравитационный парадокс Зеелигера возникает при попытке приложить закон тяготения Ньютона к бесконечному пространству, заполненному материей с конечной плотностью. Точная форма закона Ньютона оказывается несовместимой с предположением постоянной плотности во всем пространстве. С точки зрения классической механики устранение парадокса достигается путем отказа от точной формы закона Ньютона или путем постулирования соответствующего распределения материи, как это принято, например, в теории Ламберта—Шарлье. Естественно поставить теперь вопрос о возможности согласовать гипотезу равномерного распределения материи с уравнениями поля теории относительности.

Допустим, что вся космическая материя непрерывно распределена в мировом пространстве с постоянной собственной плотностью ρ и постоянным давлением p . Вследствие полной равноправности всех точек и пространственных направлений, линейный элемент должен иметь в данном случае форму, независимую от выбора начала координат и удовлетворяющую условию сферической симметрии. Его можно принять в виде

$$ds^2 = -e^{\alpha} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{\beta} dt^2, \quad (V, 2,1)$$

где α, β — функции одного r .

С математической точки зрения поставленный выше вопрос сводится к задаче: допускают ли уравнения поля Эйнштейна

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -8\pi T_{ij} \quad (V, 2,2)$$

¹ Если сумма (V, 1,10) расходится, то вследствие эффекта экранирования звезд, яркость неба будет равна яркости звезды.

решение в форме (V, 2,1), отвечающее принятому распределению материи?

Представим уравнения поля в развернутой форме. Прежде всего, с целью упрощения последующих выкладок, напомним систему уравнений (V, 2,2) в несколько ином виде. Умножив (V, 2,2) на g^{ii} и произведя полное свертывание, получим соотношение $R = 8\pi T$, которое позволяет привести уравнения поля к виду

$$R_{ii} = -8\pi \left(T_{ii} - \frac{1}{2} g_{ii} T \right). \quad (V, 2,3)$$

Этой формой уравнений поля мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Как мы видели в главе II, в случае квадратичной формы (V, 2,1) диагональные компоненты тензора Риччи определяются формулами

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r}, \\ R_{22} &= e^{-\alpha} \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] - 1, \\ R_{33} &= e^{-\alpha} \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] \sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta, \\ R_{44} &= e^{3-\alpha} \left(-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} \right), \end{aligned} \quad (V, 2,4)$$

тогда как остальные шесть компонент этого тензора тождественно исчезают.

Тензор энергии-импульса находится по общей формуле (I, 4,7)

$$T^{ii} = (\rho + p) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^i}{ds} - g^{ij} p. \quad (V, 2,5)$$

Считая космическую материю в среднем неподвижной, допустим, что из четырех компонент вектора $\frac{dx^\sigma}{ds}$ отличается от нуля лишь последняя $\frac{dt}{ds}$, удовлетворяющая соотношению

$$g_{44} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 1.$$

Поэтому, пользуясь определением (V, 2,5) и принимая для компонент метрического тензора значения, отвечающие линейному элементу (V, 2,1), легко получаем

$$\begin{aligned} T_{11} &= \rho e^\alpha, & T_{22} &= \rho r^2, & T_{33} &= \rho r^2 \sin^2 \vartheta \\ T_{44} &= \rho e^\beta, & T &= \rho - 3p, & T_{ij} &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (V, 2,6)$$

Внося эти значения, а также выражения (V, 2,4) для компонент

тензора Эйнштейна, приведем уравнения поля к системе трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} &= -4\pi e^\alpha (\varrho - p), \\ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r} (\beta' - \alpha') - \frac{e^\alpha}{r^2} &= -4\pi e^\alpha (\varrho - p), \\ -\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} &= -4\pi e^\alpha (\varrho + 3p) \end{aligned} \quad (V, 2,7)$$

относительно двух функций α , β .

Найдем условие совместности уравнений (V, 2,7). Сложив первое из уравнений с третьим, получим

$$\alpha' + \beta' = 8\pi r e^\alpha (\varrho + p).$$

Это равенство вместе со вторым уравнением (V, 2,7) дает

$$\alpha' = \frac{1}{r} - \frac{e^\alpha}{r} + 8\pi r \varrho e^\alpha, \quad \beta' = -\frac{1}{r} + \frac{e^\alpha}{r} + 8\pi r p e^\alpha. \quad (V, 2,8)$$

Если соотношения

$$\begin{aligned} \beta'' &= \frac{2}{r^2} - \frac{2e^\alpha}{r^2} + \frac{\alpha' + \beta'}{r} + \alpha'\beta', \\ 4\pi e^\alpha (\varrho - p) &= \frac{\alpha' - \beta'}{2r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^\alpha}{r^2}, \\ 4\pi e^\alpha (\varrho + 3p) &= \frac{\alpha' + 3\beta'}{2r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^\alpha}{r^2} \end{aligned}$$

непосредственно вытекающие из (V, 2,8), внести в первое или третье из уравнений (V, 2,7), то получится

$$\begin{aligned} \text{т. е.} \quad (\alpha' + \beta')\beta' &= 0, \\ (p + \varrho)\beta' &= 0. \end{aligned} \quad (V, 2,9)$$

Это равенство и представляет собой условие совместности уравнений поля (V, 2,7).

При $\varrho = p = 0$ система (V, 2,7) переходит в уравнения поля для пустого пространства, которым отвечает решение Шварцшильда, рассмотренное в главе II. Поскольку этот случай не представляет сейчас интереса, остается положить $\beta' = 0$. Однако при этом последнее из уравнений (V, 2,7) дает $\varrho + 3p = 0$, т. е. $\varrho = p = 0$. Таким образом, уравнения поля не допускают решения при постоянных положительных ϱ , p ; как и закон тяготения Ньютона, они не совместимы с концепцией однородной статической вселенной.

Следуя Зеелигеру, пытавшемуся устранить космологический парадокс классической теории тяготения путем отказа от точной формы закона Ньютона, можно преодолеть это затруднение при помощи подходящей переделки уравнений поля (V, 2,2).

Эйнштейн показал [117], что для согласования с представлением об однородной статической вселенной уравнения поля следует дополнить космологическим членом. Обобщенные таким образом уравнения поля, рассмотренные нами в главе I, имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = -8\pi T_{ij}, \quad (V, 2,10)$$

где Λ — космологическая постоянная, предполагаемая весьма малой.

Напомним, что такое обобщение находится, как мы указывали, в согласии с основными требованиями теории относительности и в приложении к конкретным задачам приводит при достаточно малом Λ практически к тем же результатам, как и первоначальная форма уравнений поля (V, 2,2).

§ 3. Статическая космология

Переходим к краткому обзору статической космологии, основанной на обобщенных уравнениях поля (V, 2,10).

Как мы указывали ранее, задачей релятивистской космологии является разработка теории вселенной как целого. Объект этой космологии не ограничивается наблюдаемой нами частью вселенной, но охватывает совокупность всех тел, как вошедших уже в пределы нашего опыта, так и тех, которые остаются еще вне этих пределов. При этом, отвлекаясь от конкретных свойств и особенностей космических тел, в релятивистской космологии обычно предполагают, что выбор места и направления наблюдения не может оказать влияния на общую картину мира. Иными словами, допускают, что строение пространства и законы распределения материи инвариантны по отношению к различным точкам и направлениям, т. е., что вселенная в целом однородна и изотропна. Далее предполагается, что дискретное распределение космической материи в мировом пространстве может быть заменено непрерывным. Введенное в качестве упрощающего условия, это допущение представляет собой новый постулат, утверждающий, что общие свойства вселенной не зависят от имеющего место в действительности дискретного распределения космических масс, от наблюдаемой структурности вселенной. Законность подобного упрощения далеко не является очевидной. Пример теории Ламберта — Шарлье показывает, какое важное космологическое значение может иметь учет структурности в распределении материи.

Статическая космология содержит, кроме того, специальное условие статичности, согласно которому метрическая структура пространственно-временного континуума, а также плотность и давление материи не зависят от времени. Математическая разработка космологии оказывается при этом аналогичной задаче

предыдущего параграфа и требует лишь замены уравнений поля (V, 2,2) обобщенными уравнениями (V, 2,10).

Напишем эти уравнения в форме

$$R_{ij} = -8\pi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) + \Lambda g_{ij}, \quad (V, 3,1)$$

которая легко получается при помощи соотношения $R = 8\pi T + 4\Lambda$, представляющего собой результат свертывания (V, 2,10). Сохраняя линейный элемент (V, 2,1) и повторяя вычисления предыдущего параграфа, можно убедиться в том, что уравнения поля (V, 3,1) приводят к системе трех уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} &= -4\pi e^\alpha (\varrho - p) - \Lambda e^\alpha, \\ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r} (\beta' - \alpha') - \frac{e^\alpha}{r} &= -4\pi e^\alpha (\varrho - p) - \Lambda e^\alpha, \\ -\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} &= -4\pi e^\alpha (\varrho + 3p) + \Lambda e^\alpha, \end{aligned} \quad (V, 3,2)$$

отличающихся от (V, 2,7) только членом Λe^α .

Найдем условие совместности трех уравнений (V, 3,2).

Складывая первое уравнение с третьим и комбинируя результирующее соотношение со вторым уравнением этой системы, легко найдем

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{r} - \frac{e^\alpha}{r} + \Lambda r e^\alpha + 8\pi r \varrho e^\alpha, \\ \beta' &= -\frac{1}{r} + \frac{e^\alpha}{r} - \Lambda r e^\alpha + 8\pi r p e^\alpha. \end{aligned} \quad (V, 3,3)$$

Повторяя вычисления предыдущего параграфа, внесем эти значения в первое или третье из уравнений (V, 3,2) и после соответствующих преобразований получим условие совместности

$$(\varrho + p)\beta' = 0,$$

совпадающее с условием (V, 2,9).

Здесь возможны три частных случая:

$$1) \beta' = 0, \quad \varrho, p \neq 0 \quad 2) \varrho = p = 0, \quad \beta' \neq 0 \quad 3) \varrho = p = 0, \quad \beta' = 0.$$

Первый случай соответствует решению Эйнштейна [117], который впервые применил теорию относительности к космологической проблеме. При $\beta' = 0$ из второго равенства (V, 3,3) находим

$$e^\alpha = (1 - \Lambda r^2 + 8\pi r^2 p)^{-1}. \quad (V, 3,4)$$

При этом первое равенство дает формулу

$$\Lambda = 4\pi (\varrho + 3p), \quad (V, 3,5)$$

связывающую космологическую постоянную со средней плотностью и давлением материи.

Если ввести обозначение

$$R^{-2} = \Lambda - 8\pi\rho \quad (V, 3,6)$$

и положить $\beta = 0^1$, то решение примет вид

$$e^\alpha = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}, \quad e^\beta = 1$$

и приведет к линейному элементу Эйнштейна

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 d\Theta^2 - r^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2 + dt^2. \quad (V, 3,7)$$

Согласно этому решению пространство имеет форму трехмерной сферы радиуса R , тогда как четырехмерный пространственно-временной континуум представляет собой цилиндр с неискривленной осью времени.

Во втором из перечисленных случаев, когда $\rho = p = 0$, $\beta' \neq 0$ уравнения (V, 3,3) дают функции

$$e^\alpha = \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2\right)^{-1}, \quad e^\beta = 1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2, \quad (V, 3,8)$$

соответствующие решению Де Ситтера [118]

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 d\Theta^2 - r^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2, \quad (V, 3,9)$$

где

$$R^2 = 3\Lambda^{-1}. \quad (V, 3,10)$$

Это решение предполагает, что сферическую форму имеет как трехмерное пространство, так и четырехмерный пространственно-временной континуум. Третий случай ($\rho = p = \beta' = 0$), как нетрудно убедиться, дает $\alpha, \beta = \text{const}$, $\Lambda = 0$ и приводит к линейному элементу специальной теории относительности, который не представляет космологического интереса.

Перечислим основные свойства космологической модели Эйнштейна.

Квадратичная форма (V, 3,7) показывает, что пространство этой модели является трехмерной сферой и имеет конечный объем

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} r^2 \sin\Theta \, d\varphi \, d\Theta \, dr = 2\pi^2 R^3, \quad (V, 3,11)$$

¹ Выбор численного значения постоянной β не играет принципиальной роли и определяется масштабом временной координаты в (V, 2,1).

или, если положить $p = 0$,

$$V = 2\pi^2 \Lambda^{-\frac{3}{2}}, \quad (\text{V}, 3, 12)$$

так как радиус пространства, согласно (V, 3, 6), определяется в данном случае формулой

$$R = \Lambda^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{V}, 3, 13)$$

Расстояние до наиболее удаленной точки пространства выражается величиной

$$2 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr = \pi R,$$

а длина окружности, образованной каким-либо пространственным направлением и представляющей наибольшее линейное протяжение в модели Эйнштейна, равна $2\pi R$.

Собственная плотность материи выражается через космологическую постоянную при помощи соотношения

$$\varrho = \frac{\Lambda}{4\pi}, \quad (\text{V}, 3, 14)$$

непосредственно вытекающего из (V, 3, 5). Поэтому полная масса равна

$$M = \frac{1}{2} \pi \Lambda^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{V}, 3, 15)$$

Это показывает, что величина космологической постоянной, а следовательно радиус и объем пространства, а также средняя плотность определяются в модели Эйнштейна полным количеством материи.

Отметим еще интересную гравитационную особенность модели Эйнштейна.

Если в данный момент какое-либо тело покоится относительно окружающей космической материи, то общее гравитационное поле не может привести его в движение. Действительно, если в уравнениях геодезической линии (I, 2, 16) положить $\frac{dx^\sigma}{dt} = 0, \sigma = 1, 2, 3$, то получится

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0$$

или

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} = 0,$$

так как символы Кристоффеля Γ_{44}^{α} , проводящиеся к величинам $-\frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^{\sigma}}$, тождественно исчезают. Таким образом, модель Эйнштейна свободна от гравитационного парадокса типа парадокса Зеелигера.

Если принять, что средняя плотность материи составляет величину порядка 10^{-30} г/см^3 , то, переходя к релятивистской системе единиц и пользуясь формулой (V, 3,14), получим

$$\Lambda = 9,3 \cdot 10^{-58} \text{ см}^{-2}.$$

Радиус кривизны оказывается при этом равным $3,3 \cdot 10^{28} \text{ см}$, т. е. около 10^{10} парсеков, весь объем пространства составляет $7 \cdot 10^{86} \text{ см}^3$ или около $3 \cdot 10^{31}$ куб. парсеков, а полная масса достигает $7 \cdot 10^{56}$ или около $3 \cdot 10^{23}$ солнечных масс.

Заметим, что с точки зрения небесной механики оценка космологической постоянной величиной порядка 10^{-57} см^{-2} может считаться допустимой. В самом деле, в обобщенном решении Шварцшильда (II, 1,12) отношение дополнительного члена к основному

равно $\frac{\Lambda r^3}{6m}$ и для не очень больших расстояний должно быть исчезающе малым. Так, например, для орбиты наиболее удаленной от Солнца планеты — Плутона оно составляет величину порядка 10^{-12} , вследствие чего эффекты, обусловленные космологическим членом, не имеют небесно-механического значения.

Переходим к краткому описанию космологической модели Де Ситтера. Согласно линейному элементу (V, 3,9) пространственно-временной континуум этой модели представляет собой четырехмерную сферу радиуса (V, 3,10). По строению трехмерного пространства модель Де Ситтера не отличается от модели Эйнштейна, как и в последней, пространство Де Ситтера является сферическим и обладает конечным объемом. Метрическое различие моделей относится лишь к измерению времени.

Наиболее характерная особенность модели Де Ситтера состоит в отсутствии материи с пространственной плотностью. Действительно, решение (V, 3,9) имеет, как мы видели, место лишь при $\rho = p = 0$. Вследствие этого статическую модель Де Ситтера можно называть моделью «пустого мира», полностью лишенной материи. Однако подобная интерпретация решения (V, 3,9) является неточной. Как впервые указал Эйнштейн [119], решение Де Ситтера удовлетворяет уравнениям поля для пустоты лишь при $r < R$, тогда как для сферы $r = R$ оно нарушается. Это показывает, что материя, определяющая геометрию пространственно-временного континуума (V, 3,9), распределена на указанной сфере.

В отличие от модели Эйнштейна, гравитационное поле модели Де Ситтера вызывает ускорение покоящихся тел. В самом деле, ускорение частицы, покоящейся относительно наблюдателя,

определяется согласно уравнениям геодезической линии формулами

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} = -\Gamma_{44}^\sigma, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Символы Γ_{44}^σ исчезают при $\sigma = 2, 3$. Однако $\Gamma_{44}^1 = -\frac{r}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$. Поэтому покоящееся в модели Де Ситтера тело обладает радиальным ускорением

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{r}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (\text{V}, 3, 16)$$

которое равно нулю лишь в начале координат. Таким образом, в модели Де Ситтера общее гравитационное поле вызывает рассеяние небесных тел. Отметим интересную оптическую особенность модели Де Ситтера.

Пусть распространение света происходит вдоль радиального направления. Положив в линейном элементе (V, 3, 9) $d\theta = d\varphi = 0$ и $ds = 0$, получаем уравнение

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (\text{V}, 3, 17)$$

показывающее, что для распространения света между началом координат и точкой сферы $r = R$ необходим бесконечно большой промежуток времени. События, происходящие в точках $r = R$, оказываются недоступными для наблюдателя, помещенного в начале координат, а указанная сфера приобретает характер «горизонта», ограничивающего часть пространства, доступную одному наблюдателю.

Рассмотрим еще эффект Допплера в модели Де Ситтера. Пусть источник света, имеющий для простоты лишь радиальную составляющую скорости, излучает в момент t_1 световой импульс длины волны λ . Найдем длину волны $\lambda + \delta\lambda$, измеренную в момент t_2 наблюдателем, покоящимся в начале координат. Согласно общей формуле (IV, 3, 1), принцип Допплера выражается в данном случае соотношением

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt_2}{dt_1} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)_1. \quad (\text{V}, 3, 18)$$

Связь между моментами излучения и наблюдения определяется формулой (V, 3, 17)

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

которая после интегрирования дает

$$t_2 = t_1 + \int_0^r \frac{dr}{1 - \frac{r^2}{R^2}},$$

откуда, дифференцируя по t_1 , получаем

$$\frac{dt_2}{dt_1} = 1 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} \frac{dr}{dt}, \quad (\text{V}, 3,19)$$

где $\frac{dr}{dt}$ — радиальная компонента скорости источника в момент излучения.

Для вычисления $\left(\frac{ds}{dt}\right)_1$ воспользуемся последним из уравнений геодезической линии

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \Gamma_{44}^4 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{14}^4 \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0.$$

Применительно к линейному элементу (V, 3,9) имеем

$$\Gamma_{44}^4 = 0, \quad \Gamma_{14}^4 = -\frac{r}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{2r}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0.$$

Это уравнение легко интегрируется, приводя к соотношению

$$\frac{dt}{ds} = h \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}, \quad (\text{V}, 3,20)$$

где h — постоянная интегрирования, зависящая от скорости движения источника и не принимающая отрицательных значений.

Если внести (V, 3,19—20) в (V, 3,18), то получится формула

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = h \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} + h \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-2} \frac{dr}{dt}, \quad (\text{V}, 3,21)$$

определяющая доплеровское смещение спектральных линий в зависимости от скорости движения источника и от расстояния до него в момент излучения. В частности она показывает, что для любого неподвижного источника, лежащего вне начала координат, имеет место «красное смещение»

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = h \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} \quad (\text{V}, 3,22)$$

В общем случае смещение может быть как «красным», так и «фиолетовым» в зависимости от знака и величины производной $\frac{dr}{dt}$.

Для приложения (V, 3,21) к реальным космическим объектам, например к внегалактическим туманностям, необходимо сделать

ту или иную гипотезу об их распределении и движении. Одна из подобных гипотез была высказана и подробно рассмотрена Толмэном [120], который допустил, что наблюдаемая часть системы галактик приблизительно удовлетворяет условию стационарности, согласно которому число галактик, вступающих в доступную наблюдению область пространства, равно числу галактик, покидающих эту область за то же время. Подробная дискуссия привела к заключению о том, что «красное» смещение в спектрах внегалактических туманностей должно преобладать над «фиолетовым». Однако гипотеза Толмэна не объясняет полного отсутствия «фиолетового» смещения в спектрах далеких галактик и не приводит к известной линейной корреляции Хаббла между величиной смещения и расстоянием. Вторая гипотеза принадлежит Вейлю [121]. Подробный анализ ее, выполненный Робертсоном [122] и самим Вейлем [123], показал, что в модели Де Ситтера можно получить формально удовлетворительную интерпретацию линейного закона Хаббла. При этом, по Вейлю, нужно только допустить, что «мировые» линии внегалактических туманностей составляют семейство геодезических линий, имеющих общую точку в прошлом. Не приводя вычислений, которые особенно просты в координатах Робертсона, заметим, что гипотеза Вейля позволяет представить принцип Допплера в модели Де Ситтера в форме (см., например, [88]).

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = e^{k(t_2 - t_1)}, \quad (\text{V}, 3,23)$$

где $k = R^{-1}$. Поэтому, ограничиваясь значениями r , малыми по сравнению с R , можно принять приближенный закон

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = kr, \quad (\text{V}, 3,24)$$

формально совпадающий с линейной корреляцией Хаббла, так как в первом приближении переменная r пропорциональна расстоянию, определяемому астрономическими методами.

Если принять подобную интерпретацию и отождествить (V, 3,24) с законом Хаббла, положив $k = 6 \cdot 10^{-28} \text{ см}^{-1}$, то для радиуса модели Де Ситтера получится $1,7 \cdot 10^{27} \text{ см}$, а космологическая постоянная согласно (V, 3,10) будет равна $1,1 \cdot 10^{-54} \text{ см}^{-2}$. Хотя последняя величина на три порядка превосходит значение космологической постоянной, выведенное в модели Эйнштейна, тем не менее с точки зрения небесной механики она остается еще допустимой, так как отношение двух членов обобщенного решения Шварцшильда для орбиты Плутона оказывается и теперь достаточно малым (порядка 10^{-9}). Однако расстояние до «горизонта» в модели Де Ситтера лишь на один порядок превосходит расстояния, доступные крупнейшим современным инструментам.

§ 4. Теория «расширяющейся вселенной» Леметра

Если исключить линейный элемент специальной теории относительности, то при сделанных в предыдущем параграфе предположениях уравнения поля допускают, как мы видели, только два решения, которым отвечают космологические модели Эйнштейна и Де Ситтера. Сохраняя условие однородности, можно получить новые космологические модели, если отказаться от условия статичности и искать нестатические решения уравнений поля.

Впервые нестатическое решение уравнений поля было получено советским математиком А. Фридманом [124]. Впоследствии этим решением воспользовался Леметр [125], построивший и изучивший первую космологическую модель нестатического типа, получившую широкую известность под названием теории расширяющейся вселенной.

Переходя к краткому рассмотрению теории Леметра, мы еще раз вернемся к решению Эйнштейна и представим линейный элемент (V, 3,7) в несколько иной форме.

Если вместо координаты r ввести переменную ψ , заданную соотношением $r = R \sin \psi$, то (V, 3,7) примет вид

$$ds^2 = -R^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Theta^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \Theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (\text{V}, 4,1)$$

где R определяется, как и прежде, формулой (V, 3,13).

Вместо (V, 4,1) напомним

$$ds^2 = -R^2 d\sigma^2 + dt^2, \quad (\text{V}, 4,2)$$

где квадратичная форма

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Theta^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \Theta d\varphi^2 \quad (\text{V}, 4,3)$$

определяет линейный элемент трехмерного сферического пространства единичной кривизны с тензором Риччи

$$\overset{x}{R}_{ij} = -2\gamma_{ij}, \quad (\text{V}, 4,4)$$

как это следует из формулы (I, 2, 27) для пространства постоянной кривизны.

При постоянном R линейный элемент (V, 4,2) дает, как мы знаем, статическую модель Эйнштейна. Отказавшись от этого условия, будем, следуя Фридману, искать решения уравнений поля в предположении, что R представляет собой функцию времени.

Прежде всего найдем символы Кристоффеля для (V, 4,2).

Пусть каждый из индексов i, j, k отличается от четырех. Метрический тензор имеет в рассматриваемом случае ковариантные

$$g_{44} = 1, \quad g_{i4} = 0, \quad g_{ij} = -R^2 \gamma_{ij}$$

и контравариантные компоненты

$$g^{44} = 1, \quad g^{i4} = 0, \quad g^{ij} = -\frac{\gamma_{ij}}{R^2},$$

где γ^{ij} — приведенные миноры элементов γ_{ij} в определителе $|\gamma_{ij}| = \gamma$.

Определитель метрического тензора, как нетрудно убедиться, равен

$$g = -R^6 \gamma.$$

Если обозначить через ω индекс суммирования, принимающий значения 1, 2, 3, и воспользоваться очевидным равенством

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\omega} \Gamma_{ij, \omega} + \frac{1}{2} g^{k4} \Gamma_{ij, 4},$$

непосредственно вытекающим из определения символов Кристоффеля, то легко получить ряд соотношений

$$\Gamma_{ij}^k = \overset{x}{\Gamma}_{ij}^k, \quad \Gamma_{ij}^4 = R \dot{R} \gamma_{ij}, \quad \Gamma_{i4}^k = \dot{R} R^{-1} \delta_j^k, \quad \Gamma_{44}^k = \Gamma_{4k}^4 = \Gamma_{44}^4 = 0,$$

в которых звездочка поставлена над величинами, относящимися к трехмерному пространству с линейным элементом (V, 4,3). При выводе этих соотношений следует помнить, что коэффициенты γ_{ij} не содержат времени.

Найдем далее компоненты тензора Риччи.

Внося написанные выше выражения для символов Кристоффеля в определение (I, 2,21), получим после несложных преобразований

$$R_{44} = 3\ddot{R}R^{-1}, \quad R_{i4} = 0, \quad R_{ij} = \overset{x}{R}_{ij} - (2\dot{R}^2 + R\ddot{R}) \gamma_{ij}.$$

Как и прежде, будем считать, что в избранной системе координат материя покоится. Воспользовавшись определением (V, 2,5) и повторяя выкладки § 2, легко составим выражения для контравариантных компонент тензора энергии-импульса

$$T^{ii} = -g^{ii} \rho, \quad T^{44} = g^{44} \rho, \quad T^{4i} = 0.$$

Ковариантные компоненты и скаляр этого тензора будут

$$T_{ii} = -g_{ii} \rho, \quad T_{44} = \rho, \quad T = \rho - 3\rho.$$

Мы имеем теперь возможность написать уравнения поля в развернутой форме. Положив для простоты $\rho = 0$, получим

$$\begin{aligned} \overset{x}{R}_{ij} &= (2\dot{R}^2 + R\ddot{R} - \Lambda R^2 - 4\pi R^2 \rho) \gamma_{ij}, \\ 3\ddot{R}R^{-1} - \Lambda &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (V, 4,5)$$

Первые шесть уравнений (V, 4, 5) вместе с (V, 4,4) приводятся к следующему

$$2\dot{R}^2 + R\ddot{R} - \Lambda R^2 - 4\pi R^2 \rho + 2 = 0,$$

которое при помощи последнего из (V, 4, 5) можно представить в виде

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3} R^2 \varrho + \frac{1}{3} \Lambda R^2 - 1. \quad (\text{V, 4,6})$$

Воспользуемся этим уравнением для определения зависимости между плотностью материи и радиусом. Дифференцируя (V, 4, 6) по времени и внося затем \ddot{R} из (V, 4,5), получаем $R\dot{\varrho} + 3R\dot{R}\varrho = 0$, откуда

$$\varrho = \alpha R^{-3}, \quad (\text{V, 4,7})$$

где α — постоянная интегрирования. Плотность материи обратно пропорциональна кубу радиуса. При помощи (V, 4,7) мы получаем теперь из (V, 4,6) дифференциальное уравнение для определения радиуса

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3} \alpha R^{-1} + \frac{1}{3} \Lambda R^2 - 1. \quad (\text{V, 4,8})$$

Космологическая модель Леметра представляет собой четырехмерный пространственно-временной континуум, заданный линейным элементом (V, 4,1), в котором радиус является функцией времени и удовлетворяет уравнению (V, 4,8). При этом из двух возможных случаев $\dot{R} \geq 0$ выбирается первый, вследствие чего теория Леметра и является теорией «расширяющейся вселенной».

Прежде всего сравним модель Леметра со статической моделью Эйнштейна.

Если положить $R = R_0$, то (V, 4,5,7—8) дадут

$$\varrho = \frac{\Lambda}{4\pi}, \quad R_0 = \Lambda^{-\frac{1}{2}},$$

показывая, что модель Эйнштейна представляет собой равновесное состояние модели Леметра. Однако нетрудно убедиться в том, что это равновесное состояние является неустойчивым. Действительно, пусть модель Эйнштейна была выведена в какой-либо момент из состояния равновесия, вследствие чего радиус кривизны приобрел малое положительное приращение $y = R - R_0$. Так как согласно предположению $\dot{R} > 0$ и следовательно $\dot{y} > 0$, то приращение будет возрастать, и модель Леметра будет продолжать расширяться, удаляясь от состояния равновесия. Расширение должно сопровождаться монотонным убыванием плотности согласно (V, 4, 7). Можно сказать, что модель Леметра, все более удаляясь от модели Эйнштейна, асимптотически приближается к модели Де Ситтера бесконечно большого радиуса.

В процессе расширения модели Леметра объем пространства $V = 2\pi^2 R^3$ возрастает со временем пропорционально кубу радиуса, тогда как полная масса $M = 2\pi^2 \alpha$ остается постоянной.

Пользуясь соотношением (V, 3,15), находим $4\pi a = R_0$, вследствие чего уравнение (V, 4,8) для радиуса модели Леметра можно переписать в виде

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2}{3} R_0 R^{-1} + \frac{1}{3} R^2 R_0^{-2} - 1}, \quad (\text{V, 4,9})$$

откуда после интегрирования находим

$$t - t_1 = \int_{R_1}^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{2}{3} R_0 R^{-1} + \frac{1}{3} R^2 R_0^{-2} - 1}}, \quad (\text{V, 4,10})$$

где моменты t , t_1 соответствуют радиусам R , R_1 . Если положить $R_1 \rightarrow R_0$, то интеграл (V, 4,10) даст $t - t_1 \rightarrow \infty$, показывая, что равновесное состояние модели Леметра имело место в бесконечно далеком прошлом.

Рассмотрим эффект Допплера в модели Леметра. Пусть источник излучения имеет постоянные пространственные координаты ψ , Θ , φ , а наблюдатель покоится в начале координат. Принцип Допплера выражается в этом случае формулой

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt_2}{dt_1},$$

где t_1 , t_2 — моменты излучения и наблюдения. Распространение света от источника к наблюдателю происходит в радиальном направлении. Поэтому, положив в линейном элементе (V, 4,1) $d\Theta = d\varphi = 0$, $ds = 0$, имеем $\frac{d\psi}{dt} = -R^{-1}$, откуда получаем уравнение

$$\psi = \int_{t_1}^{t_2} R^{-1} dt, \quad (\text{V, 4,11})$$

связывающее постоянную координату ψ источника с моментом излучения и наблюдений. Считая t_2 функцией t_1 и выполняя дифференцирование, находим

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{R_2}{R_1},$$

где R_1 , R_2 — соответствующие значения радиуса. Следовательно,

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{V, 4,12})$$

В модели Леметра должно иметь место «красное смещение» в спектре источника с постоянными пространственными координатами. Величина этого смещения определяется отношением радиусов в моменты излучения и наблюдения. Естественно ожидать, что

отношение $R_2 : R_1$ может заметно отличаться от единицы только в том случае, если промежуток времени между излучением и наблюдением будет достаточно велик. Иными словами, «красное смещение» должно обнаруживаться лишь в спектрах весьма удаленных объектов.

Представим (V, 4,12) в приближенной форме. Обозначая современную величину радиуса кривизны через R , можно написать

$$R_1 \simeq R, \quad R_2 \simeq R + R(t_2 - t_1).$$

С другой стороны, из (V, 4,11) имеем $t_2 - t_1 \simeq R\psi$, т. е. линейное расстояние l источника от начала координат. Следовательно, вместо (V, 4,12) приближенно можно написать

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{R}}{R} l. \quad (V, 4,13)$$

В модели Леметра удаленные объекты должны обнаруживать «красное смещение», удовлетворяющее линейному закону Хаббла.

Принимая для средней плотности и отношения $\dot{R} : R$ значения, определяемые из наблюдений, и пользуясь формулами (V, 4,5), (V, 4,9) и соотношением $R_0^{-2} = \Lambda$, можно получить количественную оценку космологической постоянной, а также начального и современного радиусов кривизны.

Дифференцируя (V, 4,9), имеем

$$\ddot{R} = -\frac{1}{3} R_0 R^{-2} + \frac{1}{3} R_0^{-2} R.$$

Поэтому последнее из равенства (V, 4,5) дает

$$R = \left(\frac{R_0}{4\pi\varrho} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (V, 4,14)$$

Уравнение (V, 4,9) можно переписать теперь в виде

$$\dot{R}^2 R^{-2} = \frac{8\pi}{3} \varrho + \frac{1}{3} R_0^{-2} - (4\pi\varrho R_0^{-1})^{\frac{2}{3}}$$

или

$$\Lambda = 3\Lambda^{\frac{1}{3}} (4\pi\varrho)^{\frac{2}{3}} - 8\pi\varrho + 3\dot{R}^2 R^{-2}. \quad (V, 4,15)$$

По этой формуле находится значение космологической постоянной, а следовательно и начальный радиус R_0 . По (V, 4,14) определяется затем современное значение радиуса. Масса находится по очевидной формуле $M = \frac{1}{2} \pi R_0$.

Заметим, что указанные оценки являются неточными и соответствуют приближению формулы (V, 4,13), в которой пренебрегается изменением отношения $\dot{R} : R$ в течение промежутков времени,

требующихся для распространения света от удаленных внегалактических туманностей до наблюдателя. Для более точных оценок необходимо пользоваться общим выражением принципа Допплера (V, 4, 12).

В первой работе Леметр вывел для начального радиуса кривизны величину $8,5 \cdot 10^{26}$ см, т. е. в 40 раз меньше радиуса статической модели Эйнштейна. Эддингтон оценивал современный радиус модели Леметра величиной $11 \cdot 10^{26}$ см, а полную массу ее — $2,3 \cdot 10^{56}$ г, или около 10^{22} солнечных масс. Де Ситтер предлагал для начального и современного радиусов оценки $7,6 \cdot 10^{26}$ см и $15 \cdot 10^{26}$ см соответственно.

§ 5. Общая нестатическая модель

Теория «расширяющейся вселенной» Леметра была только первым вариантом однородной космологической модели, основанной на решении Фридмана. В результате последовавших работ теория Леметра подверглась радикальному обобщению и оказалась одним из простых частных случаев общей космологической модели нестатического типа.

В 1931 году Эйнштейн показал [126], что, отказавшись от условия статичности, можно получить формально непротиворечивую космологическую модель на основании первоначальных уравнений поля, не содержащих космологического члена. Согласно этой модели, пространство в целом в каждый данный момент удовлетворяет геометрии Эвклида, но, как и в теории Леметра, расширяется, вызывая эффект «красного смещения» в спектрах далеких источников излучения. Вскоре Гекман [127], пользуясь уравнениями поля с космологическим членом, построил нестатическую модель гиперболического типа, а затем Колер [128] разработал обобщенную модель, в которой эллиптическое, эвклидово и гиперболическое расширяющиеся пространства содержатся в виде частных случаев.

Не стремясь к систематическому обзору нестатической космологии, мы кратко рассмотрим основные свойства обобщенной модели.

Удобным формальным описанием нестатических моделей различных типов может служить линейный элемент, построенный впервые Фридманом и подробно исследованный Робертсоном [129] и Толманом [130]. Робертсоном было показано, что применяемая в космологии форма нестатического линейного элемента может быть строго обоснована при помощи двух следующих постулатов: 1) пространство и время являются ортогональными подпространствами четырехмерного континуума, вследствие чего линейный элемент можно писать в виде $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + dt^2$, $i, j = 1, 2, 3$; 2) трехмерное пространство в целом однородно и изотропно.

Пользуясь уравнениями поля, линейный элемент при сделанных предположениях можно привести к форме

$$ds^2 = -e^{g(t)} \left(1 + \frac{r^2}{4R_0^2} \right)^{-2} (dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\Phi^2) + dt^2, \quad (\text{V}, 5, 1)$$

где R_0^2 — постоянная, которая может иметь как конечное — положительное или отрицательное, — так и бесконечно большое значение, а $g(t)$ — некоторая функция времени.

Физические предпосылки, которые соответствуют указанным постулатам и приводят к линейному элементу (V, 5,1), подробно рассмотрены Толмэном в указанной работе [130], а также в его книге [188].

Если произвести подстановку

$$R_0 \sin \psi = r \left(1 + \frac{r^2}{4R_0^2} \right)^{-1},$$

которая, как нетрудно убедиться, дает

$$R_0 d\psi = \left(1 + \frac{r^2}{4R_0^2} \right)^{-1} dr,$$

то линейный элемент примет вид

$$ds^2 = -R_0^2 e^g (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Theta^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \Theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (\text{V}, 5,2)$$

Мы будем писать его в более общей форме

$$ds^2 = -R^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j + dt^2, \quad (\text{V}, 5,3)$$

в которой R — функция одного t , γ_{ij} — функции пространственных координат x^σ , $\sigma = 1, 2, 3$. Приведем основные свойства модели, отвечающей линейному элементу (V, 5,1)

В переменных

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \Theta$$

этот элемент переходит в следующий

$$ds^2 = -e^g \left(1 + \frac{r^2}{4R_0^2} \right)^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2, \quad (\text{V}, 5,4)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

В каждый данный момент времени геометрия трехмерного пространства описывается квадратичной формой

$$d\sigma^2 = \left(1 + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{4R^2} \right)^{-2} (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2), \quad (\text{V}, 5,5)$$

в которой $R^2 = R_0^2 e^g$, а координаты x' , y' , z' получаются из старых координат путем простого преобразования масштаба по формулам

вида $x' = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}g}} x$. Сравнивая (V, 5,5) с формулой (I, 2,25) главы I, мы приходим к заключению, что в каждый данный момент пространство модели (V, 5,1) является пространством постоянной кривизны

$$k = R^{-2} = R_0^{-2} e^{-g(t)} \quad (\text{V}, 5,6)$$

Возможны следующие частные случаи:

1) при $R_0^2 = \infty$ пространство имеет нулевую кривизну и является эвклидовым;

2) при $R_0^2 > 0$ кривизна пространства положительна и его геометрия является сферической (или эллиптической);

3) наконец, при $R_0^2 < 0$ мы имеем гиперболическое пространство с отрицательной кривизной.

Кривизна пространства рассматриваемой обобщенной модели имеет одно и то же значение во всех точках и во всех направлениях, отвечая условиям однородности и изотропности, но величина ее изменяется со временем. Кривизна будет постоянной только при $R_0 = \infty$. Однако, как показывает (V, 5,4), расстояние между точками с заданными пространственными координатами и в этом случае представляет собой функцию времени.

Пространство сферической модели в каждый момент характеризуется конечным объемом, тогда как объем пространства эвклидовой или гиперболической моделей будет бесконечно большим.

Отметим еще, что при вещественном конечном R_0 (сферическая модель) каждое радиальное направление является замкнутым и характеризуется полной собственной длиной $l = 2\pi R_0 e^{\frac{1}{2}g}$, тогда как к мнимому или бесконечному R_0 соответствуют незамкнутые модели.

Составим уравнения поля для рассматриваемой модели.

Не ограничивая себя какой-либо определенной системой пространственных координат, будем пользоваться линейным элементом в обобщенной форме (V, 5,3). Соответствующий этой форме метрический тензор пространственно-временного континуума имеет ковариантные компоненты

$$g_{ij} = -R^2 \gamma_{ij}, \quad g_{i4} = 0, \quad g_{44} = 1,$$

где $ij = 1, 2, 3$, γ_{ij} — метрический тензор трехмерного пространства постоянной единичной кривизны.

Если, как и прежде, через $\overset{x}{R}_{ij}$ обозначить тензор Риччи для метрического поля γ_{ij} , то, повторяя вычисления предыдущего параграфа и принимая во внимание очевидное соотношение $\overset{x}{R}_{ij} = -2\gamma_{ij}$, можно получить

$$R_{ij} = -(2 + 2\dot{R}^2 + R\ddot{R}) \gamma_{ij}, \quad R_{i4} = 0, \quad R_{44} = 3\ddot{R}R^{-1}.$$

Поэтому, воспользовавшись найденными ранее выражениями для ковариантных компонент $T_{ij} = R^2 p \gamma_{ij}$, $T_{i4} = 0$, $T_{44} = \rho$ и скаляра $T = \rho - 3p$ тензора энергии-импульса, легко убедиться в том, что десять уравнений поля сводятся в нашем случае к системе двух следующих уравнений

$$\begin{aligned} 2\dot{R}^2 + R\ddot{R} + 2 &= 4\pi R^2 (\rho - p) + \Lambda R^2, \\ 3\ddot{R}R^{-1} &= -4\pi (\rho + 3p) + \Lambda. \end{aligned} \quad (\text{V}, 5,7)$$

Если произвести подстановку $R^2 = R_0^2 e^g$, то эта система примет вид

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \frac{1}{2} \ddot{g} + 2R_0^{-2} e^{-g} &= 4\pi(\varrho - p) + \Lambda, \\ \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \frac{3}{2} \ddot{g} &= -4\pi(\varrho + 3p) + \Lambda. \end{aligned} \quad (\text{V}, 5,8)$$

Наконец, разрешив ее относительно p, ϱ , получим

$$\begin{aligned} 8\pi p &= -R_0^{-2} e^{-g} - \ddot{g} - \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \Lambda, \\ 8\pi \varrho &= 3R_0^{-2} e^{-g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda. \end{aligned} \quad (\text{V}, 5,9)$$

В частном случае, при $g = 0$ уравнения (V, 5,9) дают

$$\Lambda = 4\pi(\varrho + 3p), \quad R_0^{-2} = \Lambda - 8\pi p,$$

т. е. формулы (V, 3,5,6) статической модели Эйнштейна. В этом случае при $\varrho > 0, p \geq 0$ должно быть $\Lambda > 0$. Это и послужило поводом для введения космологического члена, поскольку при $\Lambda = 0$ уравнения поля, как мы видели в § 2, не допускают решения, удовлетворяющего условию однородности и изотропности. Между тем уравнения (V, 5,9) при $\varrho > 0, p \geq 0$ позволяют найти функцию $g(t)$ в каждом из трех случаев $\Lambda \neq 0$. Таким образом, при переходе к нестатической космологии первоначальная форма уравнений поля оказывается свободной от гравитационного парадокса, и введение в эти уравнения космологического члена перестает быть необходимым.

Напишем соотношение между величинами ϱ и p и функцией g еще в одной форме, вытекающей из (V, 5,9). Если продифференцировать второе из (V, 5,9) по времени и внести затем \ddot{g} из равенства

$$8\pi(\varrho + p) = 2R_0^{-2} e^{-g} - \ddot{g},$$

которое получается при сложении уравнений (V, 5,9), то после необходимых преобразований будем иметь формулу

$$\frac{d}{dt} (\varrho e^{\frac{3}{2}g}) + p \frac{d}{dt} (e^{\frac{3}{2}g}) = 0. \quad (\text{V}, 5,10)$$

Можно показать, что (V, 5,10) выражает закон сохранения тензора энергии-импульса.

Переходим к более подробному изучению уравнений поля.

Функции ϱ и p представляют собой полные плотность и давление материи, включая радиацию. Можно положить

$$\varrho = \varrho_m + \varrho_r, \quad p = p_m + p_r, \quad (\text{V}, 5,11)$$

где значки m, r относятся к веществу и излучению соответственно. Давление вещества определяется средней кинетической энергией

беспорядочного движения частиц (галактик, частиц межгалактического вещества и т. п.). Оно значительно уступает давлению радиации, вследствие чего с достаточной точностью можно принять $p = p_r$. Соотношение $\varrho_r = 3 p_r$ дает $\varrho_m = \varrho - 3 p$. Поэтому, комбинируя равенства (V, 5,9), получаем следующее выражение для плотности вещества

$$8\pi\varrho_m = 6R_0^{-2}e^{-g} + 3\ddot{g} + 3\dot{g}^2 - 4\Lambda. \quad (\text{V, 5,12})$$

Если модель принадлежит к эвклидову или гиперболическому типу, то она является бесконечной не только в пространственном, но и в материальном отношении. Замкнутая же модель, объем пространства которой равен $2\pi^2 R^3$, имеет конечную массу

$$M = 2\pi^2 R^3 \varrho_m, \quad (\text{V, 5,13})$$

представляющую в общем случае некоторую функцию времени. Если при помощи соотношения $\varrho_m = \varrho - 3 p$ переписать (V, 5,13) в виде $M = -6\pi^2 p R^3 + 2\pi^2 \varrho R^3$, то после дифференцирования по времени получится

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{6\pi^2}{R} \frac{d}{dt} (pR^4) + 2\pi^2 \left(p \frac{dR^3}{dt} + \frac{d}{dt} \varrho R^3 \right)$$

или, вследствие (V, 5,10),

$$\frac{dM}{dt} = -6\pi^2 R^{-1} \frac{d}{dt} (pR^4). \quad (\text{V, 5,14})$$

Этим уравнением определяется изменение массы замкнутой модели со временем.

В частном случае замкнутая модель может удовлетворять закону сохранения массы. Тогда согласно (V, 5,13,14) получится

$$\varrho_m = \frac{\alpha}{R^3}, \quad p = \frac{\beta}{R^4},$$

где α, β — постоянные. Следовательно полная плотность материи в этом случае равна

$$\varrho = \frac{\alpha}{R^3} + \frac{3\beta}{R^4}$$

а радиус модели удовлетворяет уравнению

$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3} \pi \alpha R^{-1} + 8\pi\beta R^{-2} + \frac{1}{3} \Lambda R^2 - 1,$$

составленному впервые Леметром и исследованному затем Де Ситтером. Если пренебречь давлением, положив $\beta = 0$, то получится уравнение (V, 4,8), рассмотренное еще Фридманом и положенное позднее Леметром в основу его теории «расширяющейся вселенной».

Можно сказать, что замкнутая нестатическая модель постоянной массы есть модель Фридмана — Леметра.

Оставляя специальный случай постоянной массы, приведем теперь общую классификацию нестатических моделей в зависимости от характера их изменения со временем.

Сначала рассмотрим замкнутые модели, характеризующиеся вещественным R_0 .

В качестве основного дифференциального уравнения, определяющего радиус как функцию времени, мы примем второе из (V, 5,9), переписав его при помощи соотношения $\dot{g} = 2 \dot{R}R^{-1}$, в виде

$$\dot{R} = \pm \sqrt{\frac{8}{3} \pi \rho R^2 + \frac{1}{3} R^2 \Lambda - 1} = \pm R \sqrt{\frac{1}{3} (\Lambda - F)}, \quad (\text{V}, 5, 15)$$

где через F обозначена функция

$$F = 3R^{-2} - 8\pi\rho. \quad (\text{V}, 5, 16)$$

Прежде всего заметим, что плотность ρ , входящая в определение F , является убывающей функцией радиуса не только в специальном случае $M = \text{const}$, но и в общем случае. В самом деле, уравнение (V, 5,10) после умножения на R_0^3 можно привести к виду

$$\frac{d\rho}{dt} = -3(\rho + p)R^{-1}\dot{R}, \quad (\text{V}, 5, 17)$$

что и доказывает наше утверждение. Кроме того, переписывая (V, 5,17) в форме $\frac{d}{dR} \rho R^3 = -3pR^2$, мы убеждаемся в том, что произведение ρR^3 является также убывающей функцией радиуса, вследствие чего плотность убывает быстрее чем R^{-3} . Пользуясь этим заключением, исследуем ход функции F с радиусом.

Если положить $R \rightarrow 0$, то по определению (V, 5,16) получим $F \rightarrow -\infty$. С другой стороны, при увеличении R от нуля функция F возрастает от $-\infty$ до нуля. При этом она остается монотонной и не имеет никаких особенностей. Действительно, из ее определения вытекает

$$\frac{dF}{dR} = -6R^{-3} - 8\pi \frac{d\rho}{dR}$$

или, согласно (V, 5,17),

$$\frac{dF}{dR} = -6R^{-3} + 24\pi(\rho + p)R^{-1}. \quad (\text{V}, 5, 18)$$

Поэтому особенности могут появиться лишь в точке $4\pi(\rho + p) = = R^{-2}$, которой соответствует значение

$$F = R^{-2} + 8\pi\rho > 0. \quad (\text{V}, 5, 19)$$

Далее, при $R \rightarrow \infty$ функция F асимптотически приближается к нулю со стороны положительных значений. Она обладает по крайней мере одним максимумом, величина которого дается формулой (V, 5,19). В частных случаях могут иметь место и другие особенности, но они требуют соблюдения специальных условий.

Вернемся к уравнению (V, 5,15), которое имеет вещественное решение при $F \leq \Lambda$.

Пусть значение Λ совпадает с F_{\max} ; обозначим его через Λ_E . Согласно (V, 5,15) имеем

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{3} R^2 (\Lambda_E - F), \quad \ddot{R} = \frac{1}{3} R (\Lambda_E - F) - \frac{1}{6} R^2 \frac{dF}{dR}, \dots,$$

вследствие чего при $F = F_{\max}$ все производные \dot{R}, \ddot{R}, \dots исчезают. Это показывает, что в точке максимума функции F уравнение (V, 5,15) при $\Lambda = \Lambda_E$ имеет стационарное решение $\dot{R} = 0$. При помощи равенства (V, 5,18), которое в точке максимума $4\pi(\rho + p) = R^{-2}$, а также соотношения (V, 5,19), определяющих величину F_{\max} , находим связь между ρ, p и F для стационарного решения

$$8\pi\rho = \Lambda_E - R_E^{-2}, \quad 8\pi p = 3R_E^{-2} - \Lambda_E.$$

Сравнивая эти формулы с (V, 3,5,6), приходим к заключению, что принятое значение космологической постоянной дает в точке максимума функции F статическое решение Эйнштейна.

Рассмотрим теперь случаи: 1) $\Lambda > \Lambda_E$, 2) $\Lambda = \Lambda_E$, 3) $0 < \Lambda < \Lambda_E$, 4) $\Lambda \leq 0$.

Первому из них соответствует класс монотонно расширяющихся нестатических моделей, которые при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к модели Де Ситтера бесконечно большого радиуса.

Случай $\Lambda = \Lambda_E$ допускает два класса решений асимптотического типа. Если для какого-либо момента модель характеризуется радиусом $R < R_E$, то в дальнейшем она непрерывно расширяется, асимптотически приближаясь к статической модели Эйнштейна.

Если же в какой-либо момент радиус превосходит величину R_E , то мы имеем расширяющуюся модель, начальное состояние которой при $t \rightarrow -\infty$ совпадало со статической моделью Эйнштейна, которая при $t \rightarrow +\infty$ приближается к модели Де Ситтера бесконечного радиуса. К этому классу относится, в частности, модель Леметра, рассмотренная в § 4.

Пусть $0 < \Lambda < \Lambda_E$. Уравнение $F = \Lambda$ имеет, по крайней мере, два решения R_1, R_2 , определяющих два интервала значений, которые отвечают вещественным решениям дифференциального уравнения (V, 5,15): от нуля до $R_1 < R_E$ и от $R_2 > R_E$ до ∞ . Если после главного максимума при $R = R_E$ функция F имеет еще минимум, а следовательно также вторичный максимум, то условие $F = \Lambda$ может дать три интервала значений радиуса: $0, R_1, R_2, R_3$.

F, ∞ . Здесь возможны решения трех классов. К первому из них относится монотонное решение в промежутке R_2, ∞ или R_4, ∞ ; оно соответствует расширяющейся модели, которая при $t \rightarrow \infty$ переходит к модели Де Ситтера с бесконечным радиусом. Второе решение содержится в интервале $0, R_1$ и дает осциллирующую модель, которая последовательно переходит от расширения к сжатию и наоборот. Другая осциллирующая модель соответствует периодическому решению в промежутке R_2, R_3 ; эта модель пульсирует, расширяясь от R_2 до R_3 и сжимаясь от R_3 до R_2 . Если, наконец, $\epsilon \leq 0$, то значения радиуса R образуют интервал от нуля до некоторого $R_1 < R_E$, и мы имеем осциллирующую модель первого указанных выше типов.

Перечисленные случаи исчерпывают возможные классы нестационарных моделей замкнутого типа. Нам остается теперь указать классы незамкнутых моделей, для которых R_0 имеет мнимое или бесконечное значение.

Перепишем уравнение (V, 5,10) в двух следующих формах

$$\frac{dq}{dg} = -\frac{3}{2}(q+p), \quad \frac{d}{dg}(qe^{\frac{3}{2}g}) = -\frac{3}{2}pe^{\frac{3}{2}g}, \quad (V, 5,19)$$

позволяющих судить об изменении плотности в зависимости от g . Согласно первому из этих соотношений, плотность является убывающей функцией величины g . Второе равенство (V, 5,19) свидетельствует о том, что при возрастании функции g плотность убывает быстрее, чем $e^{-\frac{3}{2}g}$. Представим далее второе уравнение (V, 5,9) в виде

$$\frac{d}{dt}e^{\frac{1}{2}g} = \pm e^{\frac{1}{2}g} \sqrt{\frac{1}{3}(\Lambda - F)}, \quad (V, 5,20)$$

положив

$$F = -8\pi q - 3a^2e^{-g}, \quad (V, 5,21)$$

где через a^2 обозначена величина $-R_0^{-2}$.

Принимая во внимание указанный выше ход плотности с величиной g , нетрудно убедиться в том, что при $g \rightarrow 0$ функция F превращается в отрицательную бесконечность, а при $g \rightarrow \infty$ стремится к нулю. При этом во всем интервале ход функции F остается монотонным, так как ее производная, выражаясь согласно (V, 5,19) формулой

$$\frac{dF}{dg} = 12\pi(q+p) + 3a^2e^{-g},$$

положительна.

Вследствие столь простого хода функции F , нестатические модели открытого типа исчерпываются двумя решениями в зависимости от $\Lambda \geq 0$ или $\Lambda < 0$. В первом случае уравнение (V, 5,20) определяет расширяющиеся гиперболическую (при $\Lambda > 0$) или эвклидову (при $\Lambda = 0$) модели. Если $\Lambda < 0$, то значения функции g заключены в интервале от нуля до g_1 , где g_1 — решение уравнения $F = \Lambda$. В этом случае имеет место осциллирующее решение, которое определяет пульсирующую модель, испытывающую попеременно сжатие и расширение от нуля до g_1 .

Не входя в более подробное изучение решений различных классов, рассмотрим в заключение некоторые свойства обобщенной нестатической модели.

Геометрия пространственно-временного континуума нестатической модели определяется линейным элементом (V, 5,3), в котором коэффициенты γ_{ij} зависят лишь от пространственных координат x^σ , а R — функция одной временной координаты t . При $dt = 0$ (V, 5,3) дает пространственный элемент

$$dl^2 = R^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

определяющий расстояние между точками с координатами $x^i + dx^i$. При заданных x^i , dx^i величина этого элемента изменяется со временем вместе с R .

Пусть какая-либо пространственная кривая задана параметрическими уравнениями $x^i = x^i(\sigma)$. Элемент дуги этой кривой равен

$$dl = R \sqrt{\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma}} d\sigma, \quad (\text{V, 5,22})$$

а длина кривой между точками, соответствующими значениям параметра σ_1, σ_2 , находится по формуле

$$l_{12} = R \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma}} d\sigma. \quad (\text{V, 5,23})$$

Эта длина также является функцией времени, возрастая в расширяющейся и уменьшаясь в сжимающейся модели. Изменение ее в единицу времени определяется согласно (V, 5, 23) равенством

$$\frac{dl_{12}}{dt} = \frac{\dot{R}}{R} l_{12} \quad (\text{V, 5,24})$$

и является линейной функцией длины. В нестатической модели все линейные размеры изменяются со временем, но отношения между ними остаются постоянными.

Предположим, что в нестатической модели происходит какой-либо пространственно локализованный процесс, например ход часов, покоящихся в избранной системе координат. Элемент dt_0

собственного времени, измеренный связанным с этими часами наблюдателем, находится при помощи квадратичной формы (V, 5,3), если положить $dx^i = 0$. Вследствие $dt_0 = ds$ получаем $dt_0 = dt$, откуда следует, что координатное время совпадает с собственным временем любого наблюдателя, покоящегося в данной системе пространственных координат.

Величина пространственной скорости в случае линейного элемента (V, 5,3) задана соотношением

$$\frac{dl}{dt} = R \sqrt{\gamma_{il} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^l}{dt}},$$

которое при $ds = 0$ переходит в $\frac{dl}{dt} = 1$, показывая, что в нестатической модели скорость распространения света одинакова во всех точках и равна универсальной постоянной.

Рассмотрим механическую частицу, покоящуюся в данный момент в какой-либо пространственной точке x^i и определим ее ускорение, вызванное общим гравитационным полем модели. Компоненты этого ускорения находятся по закону геодезической линии

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^i - \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^4}{dt} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0,$$

который в случае покоящейся частицы для данного момента дает

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \Gamma_{44}^i.$$

Пользуясь определением символов Кристоффеля, легко убедиться в том, что для линейного элемента (V, 5,3) три величины Γ_{44}^i тождественно исчезают, вследствие чего $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0$. Общее гравитационное поле модели не вызывает ускорения покоящейся частицы; частица, неподвижная в данный момент, останется неподвижной неопределенно долго, если какая-либо локальная причина не приведет ее в движение.

Рассмотрим еще эффект Допплера в нестатической модели (V, 5,3).

Пусть источник излучения и наблюдатель неподвижны и их положения заданы постоянными пространственными координатами x^i_1, x^i_2 .

Согласно общей формуле (V, 3,1), принцип Допплера выражается в этом случае формулой

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt_2}{dt_1},$$

где t_1, t_2 — моменты излучения и наблюдения. Уравнения светового луча, соединяющего точки излучения и наблюдения, напишем в параметрической форме $x^{i2} = x^{i1} + v^i(\sigma)$.

Линейный элемент дает для света при $ds = 0$

$$dt^2 = R^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

откуда

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma}} d\sigma, \quad (\text{V}, 5,25)$$

т. е. постоянная величина, поскольку пределы интегрирования постоянны вследствие неподвижности источника и наблюдателя. Это уравнение определяет момент наблюдения как функцию момента излучения. После дифференцирования по t_1 , получаем

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Принцип Доплера принимает вид

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (\text{V}, 5,26)$$

показывая, что изменение длины волны определяется отношением радиусов в моменты излучения и наблюдения. Если расстояние между источником и наблюдателем невелико, то величина смещения исчезающе мала.

Предположим, что расстояние имеет заметную величину, но за время $t_2 - t_1$ радиус R испытывает сравнительно небольшое изменение, вследствие чего можно принять

$$R_1 = R, \quad R_2 = R + \dot{R}(t_2 - t_1).$$

В таком случае

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = 1 + \frac{\dot{R}}{R}(t_2 - t_1).$$

С другой стороны, на основании (V, 5,25) приближенно имеем

$$t_2 - t_1 = R \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma}} d\sigma,$$

т. е. согласно (V, 5,23) $t_2 - t_1 = l_{12}$.

Окончательно получаем следующее приближенное выражение принципа Доплера

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{R}}{R} l_{12}. \quad (\text{V}, 5,27)$$

В релятивистской космологии эта формула привлекается для объяснения «красного смещения» в спектрах внегалактических туманностей. Если за время распространения света до наблюдателя

отношение $\dot{R} : R$ практически не изменяется, то для расширяющихся моделей равенство (V, 5,27) можно формально отождествить с линейным законом Хаббла.

На этом мы заканчиваем рассмотрение основ релятивистской космологии. Нет необходимости останавливаться на дальнейшем развитии этих приложений общей теории относительности, поскольку изложенное дает достаточную характеристику попыток применить уравнения поля к проблеме космологии.

Краткий очерк релятивистской космологии и библиографию, относящуюся к первому периоду ее развития (до 1933 года), читатель найдет в обзорной статье Робертсона [131]. Более подробное изложение вопросов космологии имеется в книгах Толмэна [88], Милна [132], Хекмана [133], Бонди [134] и др. Критический обзор релятивистской космологии и ряда смежных вопросов содержится в статье Э. Шацмана [135].

§ 6. Релятивистская космология и уравнения поля

В предыдущих параграфах мы кратко изложили основы релятивистской космологии. Эта космология представляет собой довольно обширное и детально разработанное учение, основанное на уравнениях поля теории относительности и находящееся в тесной связи с методологическими позициями его авторов. Тезис о пространственной и материальной конечности вселенной, принятый в некоторых из рассмотренных нами космологических моделей релятивизма, и допущение конечности вселенной во времени имеют откровенно идеалистический характер и несовместимы с материалистическим мировоззрением. Непопулярность релятивистской космологии среди советских астрономов обусловлена также ее научной бесплодностью. Единственным результатом этой космологии, который может претендовать на астрономическое значение, является объяснение линейной корреляции Хаббла, связывающей величину «красного смещения» в спектрах внегалактических туманностей с расстояниями до туманностей. Однако это объяснение является чисто качественным и не допускает независимой количественной оценки коэффициента пропорциональности. Как указывалось В. А. Кратом [136], а также автором [137], это объяснение непосредственно не связано с уравнениями поля теории относительности. В самом деле, соотношение (V, 5,27) является, как мы видели, следствием не уравнений поля, но исходной формы линейного элемента (V, 5,3). Поэтому рассуждения, приводящие к соотношению (V, 5,27), сохраняют силу при любой другой форме уравнений поля, если только она допускает линейный элемент вида (V, 5,3). Таким образом даже качественное объяснение корреляции Хаббла соотношением (V, 5,27) нельзя считать положительным выводом релятивистской космологии, поскольку конкретное содержание последней не имеет непосредственного отношения к этому объяснению.

Свойства космологических моделей являются следствием уравнений поля Эйнштейна. Мы видели, что с математической точки зрения построение моделей сводится к отысканию поля метрического тензора, удовлетворяющего уравнению поля при тех или иных предположениях о тензоре энергии-импульса. При этом, в отличие от конкретных задач, решение которых основано на приближенном интегрировании уравнений поля, в релятивистской космологии фундаментальную роль играет точная форма уравнений поля. Малое изменение этой формы, не затрагивающее обычных астрономических приложений теории относительности, оказывается весьма важным для ее космологических приложений. Если, например, эффект движения линии апсид в релятивистской задаче Кеплера практически не зависит от Λ -члена, то статические модели Эйнштейна и Де Ситтера существенно связаны с Λ -членом и удовлетворяют обобщенным уравнениям поля только при положительном значении космологической постоянной, тогда как при $\Lambda < 0$ они становятся невозможными. Таким образом, все содержание релятивистской космологии определяется точной формой уравнений поля и специальными условиями каждой модели.

В главе I мы подробно обсудили вопрос о единственности уравнений поля и пришли к заключению о том, что физические предпосылки теории относительности не позволяют вывести эти уравнения однозначно. Как первоначальные, так и обобщенные уравнения Эйнштейна содержат неизбежный произвол, который не удастся устранить с должной убедительностью. Поскольку же релятивистская космология основана на точной форме уравнений поля, ее не следует считать составной частью физического содержания теории относительности.

С методологической точки зрения ошибочной является сама постановка задачи о строении и общих свойствах вселенной в целом, так как попытки решения этой задачи неизбежно приводят к абсолютизации конкретных физических законов и к перенесению наблюдаемых особенностей конечных космических систем на вселенную в целом. Уравнения поля учитывают лишь один вид взаимодействий — гравитацию, и потому связи, которые они устанавливают между материей и метрикой пространства—времени, не могут быть ни универсальными ни всеобщими. Столь же необоснованной является экстраполяция свойств наблюдаемой системы галактик, постулат об однородности и изотропности, понятие о средней плотности вселенной и т. п. Поэтому любая из космологических моделей релятивизма является в методологическом отношении неприемлемой независимо от того, каким образом в ней решается вопрос о материальной и пространственно-временной бесконечности вселенной.

Заметим еще, что, отвергая космологические модели теории относительности или любые другие теории расширяющейся вселенной (например, кинематическую космологию Милна [138]), мы отнюдь не отрицаем возможности доплеровской природы красного

смещения в спектрах внегалактических туманностей. Согласно очень распространенному и почти общепринятому среди астрономов представлению, красное смещение вызвано реальным расширением системы галактик или ее части. Такое представление нельзя, конечно, считать признанием расширения вселенной в целом.

Основным аргументом в пользу доплеровского истолкования красного смещения считается неудача попыток объяснить это явление какой-либо другой причиной, например внутренней неустойчивостью [139] или «усталостью» [140] фотонов, гравитационной потерей энергии фотонами [141] и т. п. Отдельные авторы приводят различные косвенные соображения с целью доказать невозможность недоплеровской природы красного смещения. В этом отношении интересны соображения, высказанные в одной из последних работ А. Эйнштейна [142]. Представим себе, что две звезды S_1 и S_2 соединены твердым стержнем. Монохроматический свет, посланный из S_1 к S_2 и отраженный обратно к S_1 , будет иметь в системе S_1 другую частоту лишь в том случае, если число волн вдоль стержня изменяется со временем. При этом скорость света также оказывается функцией времени, что противоречит даже специальной теории относительности. Далее Эйнштейн указывает, что если бы причиной красного смещения был процесс убыли энергии фотонов, аналогичный эффекту Комптона, то он сопровождался бы рассеянием, вызывающим замывание изображений туманностей.

Не считая подобные рассуждения вполне убедительными, следует однако признать, что доплеровское объяснение красного смещения является весьма правдоподобным. Вместе с тем, поскольку такое объяснение еще не является окончательно доказанным, нельзя без должного обсуждения отвергать всякие попытки его недоплеровского истолкования.

§ 7. Уравнения поля и принцип эквивалентности

В заключение мы вновь вернемся к вопросу о значении принципа эквивалентности в теории относительности.

В главе I было указано, что в оценке принципа эквивалентности имеются две существенно различные точки зрения. В ранних работах Эйнштейна общая теория относительности рассматривалась как расширение специальной теории, отвечающее условию общей ковариантности. Это расширение, имеющее целью включить в теорию ускоренные движения и гравитацию, производилось на основе принципа эквивалентности, который приобретал таким образом фундаментальное значение и превращался в самостоятельный физический закон, выведенный из изучения особенностей движения в гравитационных полях. Последовательное применение принципа эквивалентности приводит к заключению об относительности ускорений, позволяет найти общий закон движения частицы в поле тяготения в форме уравнений геодезической линии, а также

указывает на необходимость заменить псевдоевклидову геометрию пространственно-временного континуума римановой. Придерживаясь этой точки зрения, следует потребовать, чтобы математический аппарат теории относительности находился в согласии с принципом эквивалентности.

Согласно другой точке зрения принцип эквивалентности играл при создании теории относительности главным образом эвристическую роль. После разработки математического аппарата общей теории относительности и составления уравнений поля он утратил свое значение и не должен рассматриваться в качестве самостоятельного физического закона. В настоящее время принцип эквивалентности является с этой точки зрения не физическим принципом, а скорее педагогическим приемом, которым удобно пользоваться при элементарном разъяснении сущности общей теории относительности.

Принцип эквивалентности имеет, как известно, опытное происхождение. В простейшем случае он является следствием закона Галилея, согласно которому падение всех тел в пустоте происходит с одинаковым ускорением, что свидетельствует о равенстве инертной и тяжелой масс. Обобщая эту эмпирическую закономерность, мы приходим к мысли о единстве физической природы инерции и тяготения, что в свою очередь приводит к гипотезе о геодезической линии, как законе движения частицы в заданном поле гравитации. В этой форме принцип эквивалентности служит непосредственной основой релятивистского представления о природе гравитации и позволяет отказаться от понятия силы тяготения в ньютоновском смысле. Однако и в этом виде он сохраняет еще существенную неопределенность.

При изучении движения в гравитационном поле следует различать два случая. К первому из них относится движение пробной частицы, масса которой не производит возмущения изучаемого поля. Именно такая частица имеется в виду в формулировке закона падения Галилея, поскольку при достаточно больших неравных массах ускорения тел относительно Земли окажутся, строго говоря, различными. Второй случай относится к движению массы, которая производит заметное возмущение гравитационного поля.

Непосредственно принцип геодезической линии, как возможное выражение эквивалентности инерции и тяготения, представляет собой закон движения пробной частицы, т. е. частицы с достаточно малой (формально с бесконечно малой) массой. В этом случае совместимость уравнений поля Эйнштейна с принципом эквивалентности не вызывает сомнения. Пусть, например, мы имеем систему масс, законы движения которых позволяют интегрировать уравнения. Присоединяя к этой системе частицу с бесконечно малой массой, движущуюся по любому заданному закону, в частности, по закону геодезической линии, мы не нарушим условий интегрируемости уравнений поля.

Указанная выше неопределенность принципа эквивалентности

относится к телам с конечными массами. Следует ли сохранить закон геодезической линии и для конечных масс или его необходимо подвергнуть какому-либо преобразованию? Устранить эту неопределенность можно, по-видимому, только с помощью новой гипотезы, поскольку исходные предпосылки теории относительности не содержат определенного ответа на наш вопрос. Мы можем лишь ожидать, что закон движения тела с произвольной массой m будет иметь такую форму, которая при $m \rightarrow 0$ обеспечивает переход к уравнениям геодезической линии.

В ньютонианской механике силы гравитации и инерции пропорциональны тяжелой и инертной массам данного тела соответственно. Поэтому, учитывая равенство инертной и тяжелой масс, можно, как известно, представить закон движения данного тела в форме, которая явно не содержит массы тела. В механике Ньютона эта особенность закона движения относится в одинаковой степени как к пробной частице, так и к массивному телу, хотя в первом случае движения масс, создающих поле гравитации, не зависят от пробной частицы, а во втором эти движения согласуются с движением изучаемого тела. Если допустить, что в теории относительности форма закона движения также должна быть одинаковой для всех материальных точек, то принцип геодезической линии окажется пригодным для любой частицы независимо от ее массы. Однако при этом возникает вопрос о совместимости такого закона движения с уравнениями поля.

Первоначально предполагалось, что уравнения поля можно будет согласовать с любым законом движения, вследствие чего вопрос об их совместности вообще не ставится. По аналогии с уравнением Пуассона для ньютонианского потенциала допускалось, что уравнения поля можно интегрировать при произвольном распределении и движении масс. Как было подробно выяснено в главе II, это допущение оказалось неправильным. Вследствие нелинейности уравнений поля необходимо соблюдение условий интегрируемости, которые и определяют закон движения масс, создающих поле гравитации. Так, например, интегрируя уравнения Эйнштейна для системы точечных масс, мы нашли, что условием существования решения во втором приближении является ньютонианский закон движения, т. е. первое приближение принципа геодезической линии. Условием интегрируемости уравнений поля в третьем приближении служит закон движения с поправками второго порядка, причем этот закон уже отличается от уравнений геодезической линии.

Для решения задачи двух тел в механике Ньютона следует составить уравнения движения каждого тела, учитывая его притяжение другим телом, и затем интегрировать всю систему уравнений совместно. Принимая принцип геодезической линии, можно поступить таким же образом и в теории относительности. Однако с точки зрения уравнений Эйнштейна этот путь оказывается, как мы видим, неправильным.

Устранение противоречия между уравнениями поля Эйнштейна и принцип геодезической линии можно искать в одном из следующих направлений: а) принять уравнения Эйнштейна и в общем случае отказаться от принципа геодезической линии, заменив его условием интегрируемости, б) сохраняя принцип геодезической линии, как основной закон движения, отказаться от уравнений поля в форме Эйнштейна, начиная с третьего приближения.

Первое направление намечено Эйнштейном еще в 1927 году. Стремясь объединить закон движения с уравнениями поля, Эйнштейн показывает, что первый может быть выведен из вторых, вследствие чего имеется возможность отказаться от независимой формулировки закона движения и тем самым повысить логическую стройность теории относительности. Однако при этом первоначальные физические предпосылки теории относительности утратят самостоятельное значение и уравнения поля будут играть роль постулата, из которого все содержание теории выводится путем математической дедукции. Поскольку движение материальной точки в общем случае не будет отвечать принципу геодезической линии, его четырехмерное ускорение окажется отличным от нуля и таким образом мы будем вынуждены вернуться к ньютоновскому понятию силы тяготения в рамках римановой геометрии.

С физической точки зрения второе направление представляется нам более приемлемым. Принимая принцип геодезической линии как самостоятельный закон движения, выведенный из наблюдаемых особенностей поля гравитации, мы получаем возможность отказаться от понятия силового поля в ньютоновском смысле, и в четырехмерной трактовке можем рассматривать всякое движение в поле тяготения как свободное, происходящее без ускорения. Уравнения Эйнштейна сохраняют значение в приближениях не выше второго, поскольку начиная с третьего они несовместимы с принципом геодезической линии. Обычные астрономические эффекты общей теории относительности, основанные, как мы знаем, на первом и втором приближениях уравнений поля, остаются прежними, тогда как следствия точной формы этих уравнений (в частности, все выводы релятивистской космологии) утрачивают значение и не могут быть оправданы физическими предпосылками теории относительности.

Значительный интерес представили бы уравнения поля, форма которых отвечает принципу геодезической линии в общем случае. Однако возможность их составления далеко не является очевидной. Если такие уравнения существуют, то можно надеяться, что они в значительной мере или даже полностью будут свободны от той неопределенности, которой обладают уравнения поля Эйнштейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, Ann. d. Phys., 18, 639, 1905.
2. A. Einstein, Ann. d. Phys., 38, 1061, 1912.
3. A. Einstein, Ann. d. Phys., 35, 898, 1911.
4. M. Abraham, Phys. Zeitschr., 13, 1, 311, 1912; Ann. d. Phys., 39, 444, 1913.
5. A. Einstein, Ann. d. Phys., 38, 355, 1912.
6. M. Abraham, Ann. d. Phys., 38, 1056, 1912.
7. A. Einstein, Ann. d. Phys., 38, 1061, 1912.
8. G. Nordström, Phys. Zeitschr., 1126, 13, 1912; Ann. d. Phys., 40, 872, 1913; 42; 533, 1913; 43, 1101, 1913.
9. A. Einstein, M. Grossman, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 63, 215, 1914.
10. A. Einstein, Berl. Ber., 1915, 778.
11. A. Einstein, Berl. Ber., 1915, 799.
12. A. Einstein, Berl. Ber., 1915, 884.
13. A. Einstein, Ann. d. Phys., 49, 769, 1916.
14. F. Kottler, Ann. dn. Phys., 50, 955, 1916.
15. A. Einstein, Ann. d. Phys., 51, 639, 1916.
16. A. Einstein, Ann. d. Phys. 55, 243, 1918.
17. H. Lorenz, Publ. d. Ak. d. Wet. Amsterdam, 23, 1073, 1915; 24, 1389, 1759, 1916; 25, 468, 1380, 1916.
18. D. Hilbert, Gött. Nachr., 1915, H. 3.
19. A. Einstein, Berl. Ber., 1916, 1111.
20. A. Einstein, Berl. Ber., 1917, 142.
21. H. Seeliger, Astr. Nachr., 137, 129, 1895; Münch. Ber., 26, 373, 1896; C. Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Princip der Fernwirkungen, Leipzig, 1896.
22. H. Weyl, Raum-Zeit-Materie.
23. A. Einstein, G. Grommer, Berl. Ber., 1927, 2.
24. A. Einstein, Berl. Ber., 1927, 235.
25. A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, Ann. Math., 39, 65, 1938.
26. В. А. Фок, ЖЭТФ, 9, 411, 1939.
27. H. Weyl, Berl. Ber, 1918, 465; Math. Zeitschr. 2, 384, 1918; Ann. d. Phys., 59, 101, 1919; Raum-Zeit-Materie, 1920; Gött. Nachr, 1921, 99.
28. A. Eddington, Proc. Roy. Soc., 99, 104, 1921; Mathematical Theorie of Relativity.
29. A. Einstein, Berl. Ber., 1923, 32, 76, 137.
30. A. Einstein, Berl. Ber., 1925, 414.
31. Th. Kaluza, Berl. Ber., 1921, 966.

32. O. Klein, Zeitschr. f. Phys., 37, 895, 1926; 46, 188, 1927.
33. W. Vock, Zeitschr. f. Phys., 39, 226, 1926.
34. H. Mandel, Zeitschr. f. Phys., 45, 285, 1927; 54, 564, 1929; 54, 567, 1929; 56, 838, 1929; Учен. зап. ЛГУ, сер. физ., т. I, в. 2, 1936; Труды семин. по тензор. анализу, в. IV, 62, 1937.
35. A. Einstein, Berl. Ber., 1928, 217.
36. A. Einstein, Berl. Ber., 1928, 224.
37. T. Levi-Civita, Berl. Ber., 1929, 2, 156; 1930, 18, 401.
38. W. Mayer, Berl. Ber., 1930, 110; 1931, 257.
39. P. Straneo, Berl. Ber., 1930, 110; 1931, 257, 319; Lincei Rend., 13, 695, 770, 1931; 15, 462, 1932; L. Infeld, Lincei Rend., 15, 157, 1932.
40. A. Einstein, W. Mayer, Berl. Ber., 1931, 541; 1932, 130.
41. A. Einstein, The Meaning of Relativity, Princeton, 1953.
42. R. Eötvös, Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn, 8, 66, 1890; R. Eötvös, D. Pekar, E. Fekete, Abh. der XVI allg. Konferenz der intern. Erdmessung, 1903.
43. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, 1955.
44. А. Богородский, Публ. Киев. астр. obs., 9.
45. E. Cartan, Leçon s. e. géométrie d. espace d. Riemann, Paris, 1946.
46. О. Д. Хвольсон, Курс физики, т. I, 1933, стр. 582.
47. E. Kretschmann, Ann. d. Phys., 53, 575, 1917.
48. A. Einstein, Ann. d. Phys., 55, 241, 1918.
49. А. Эддингтон, Математ. теория относительности, 1933.
50. H. Vermeil, Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1917, 334.
51. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, 1941, гл. X.
52. A. Einstein, Berl. Ber., 1915, 831.
53. K. Schwarzschild, Berl. Ber., 1916, 189.
54. H. Hilbert, Gott. Nachr., 1917, 53.
55. G. Birkhoff, Relativity and Modern Physics, Camb., 1923.
56. M. Laue, Berl. Ber., 1923, 27.
57. K. Schwarzschild, Berl. Ber., 1916, 424.
58. A. Einstein, Berl. Ber., 1916, 688.
59. А. Богородский, Публ. Киев. астр. obs., 2, 31, 1948.
60. Laplace, Mec. cel., 4, livre X, chap. VII.
61. Th. Oppolzer, Tagebl. 54. Versaml. Natuf. u. Arzte, Salzburg, 1881.
62. A. Lehman, Astr. Nachr., 110, 1885.
63. А. Богородский, Публ. Киев. астр. obs., 2, 23, 1948.
64. А. Богородский, Публ. Киев. астр. obs., 11.
65. Hagihara, Japan. Journ. Astr. Geophys., III, № 3, 1931.
66. А. Богородский, Цирк. Глав. астр. obs., № 30.
67. U. Y. Leverrier, Ann. de l'obs. Paris, vol. V, 1859.
68. S. Newcomb, Wash. Astr. pap., 6, 108, 1898.
69. E. Grossmann, Zeitschr. f. Phys., 5, 280, 1921.
70. G. Gleich, Astr. Nachr. 241, 105, 1931.
71. Y. K. Fotheringham, Month. Not., 91, 1001, 1931.
72. Г. А. Чеботарев, Учен. Зап. Ленингр. ун. сер. мат., астр., 11, 1941.
73. G. M. Clemence, Rev. Mod. Phys., 19, 361, 1947.
74. Y. Y. Gilvarry, Publ. Astr. Soc. Pac., 65, 173, 1953.
75. L. La Paz, Publ. Astr. Soc. Pac., 66, 13, 1954.
76. Y. Lense, H. Thirring, Phys. Zeitschr., 19, 156, 1918.
77. В. Л. Гинзбург, Усп. физ. наук, 58, 4, 1956; ЖЭТФ, 30, 213, 1956; Сборн., «Эйнштейн и совр. физика», Москва, 1956.
78. А. Богородский, Астр. журн., XXXVI, 5, 883, 1959; Публ. Киев. Астр. obs., 11.
79. De Sitter, Month. Not., 77, 155, 1916.
80. A. Einstein, L. Infeld, Ann. Math., 41, 455, 1940.
81. A. Einstein, L. Infeld, Canad. Journ. Math., 1, 209, 1949.
82. Н. Петрова, ЖЭТФ, 19, 989, 1949.
83. H. P. Robertson, Ann. Math., 39, 101, 1938.
83. А. А. Богородский, Публ. Киев. Астр. obs., 8, 1959.

84. A. Einstein, *Jahrb. f. Radioakt. u. Elektr.*, 4, 1907.
85. A. Einstein, *Ann. d. Phys.*, 1911, 898.
86. A. Einstein, *Berl. Ber.*, 1915, 831.
87. А. Богородский, *Изв. ин-та Лесгафта*, XXIII, 21, 1940.
88. R. C. Tolman, *Relativity Thermodynamics a. Cosmology*, Oxford, 1934.
89. А. Богородский, *Цирк. Глав. астр. обс.*, № 28.
90. O. D. Schwoison, *Astr. Nachr.*, 221, 329, 1924.
91. F. Link, *Comp. Rend. Paris*, 202, 1917, 1936; *Bull. Astr. X*, 73, 1937.
92. A. Einstein, *Science*, 84, 506, 1936.
93. F. Zwicky, *Phys. Rev.*, 51, 290, 1937.
94. Г. А. Тихов, *ДАН*, XVI, № 4, 1938; *Изв. Глав. астр. обс.*, 16, I, 1937; *Природа*, № 6, 1938, (см. также Г. А. Тихов, *Основные труды*, т. III, 196—234, *Алма-Ата*, 1957).
95. H. Mineur, *Ann. Ec. Norm.*, 3, 1933.
96. H. Weyl, *Phys. Mag.*, 47, 907; 48, 348, 1924.
97. F. Zwicky, *Proc. Nat. Ac.*, 5, 773, 1929.
98. M. Laue, *Berl. Ber.*, 1931, 123.
99. M. Kohler, *Ann. d. Phys.*, 16, 112, 129, 1933.
100. W. Campbell, R. Trumpler, *Lick Obs. Bull.*, 13, 130, 1928.
101. Miller, Marriott, *Astrophys. Journ.*, 38, 101, 1928.
102. R. Trumpler, *Zeitschr. f. Astrophys.*, 4, 208, 1932; *Publ. Astr. Soc. Pac.*, 44, 167, 1932.
103. А. А. Михайлов, *ДАН*, XXIX, № 9, 1940.
104. St. John, *Zeitschr. f. Phys.*, Bd. 21, 1924; *Wash. Nat. Ac. Proc.*, 12, 65, 1926.
105. Evershed, *Month. Not.*, 88, 126, 1927.
106. W. Adams, *Observ.*, 48, 337, 1925; *MtWilson Comm.*, 94, 1925.
107. М. С. Эйгенсон, *ДАН*, XXVI, № 8: 1940.
108. W. Olbers, *Bode Jahrb.*, 1826.
109. H. Seeliger, *Astr. Nachr.*, 137, 129, 1895; *Sitzungsber. d. Ak. Wiss. München*, 1896, 373.
110. C. Neuman, *Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip*, Leipzig, 1896.
111. Lambert, *Cosmologische Briefe*, Augsburg, 1761.
112. R. Proctor, *The Univers of Stars London*, 1878.
113. Charlier, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 16, № 21, 1921; *Lund Medd.* 98.
114. В. Г. Фесенков, *АЖ*, № 5—6, 1937.
115. М. С. Эйгенсон, *ДАН*, XXVI, № 8, 1940; *Природа* № 3, 1940.
116. П. П. Паренаго, *Курс звездной астрономии*.
117. A. Einstein, *Berl. Ber.*, 1917, 142.
118. De Sitter, *Proc. Ak. Wet. Amsterdam*, 19, 1217, 1917; *Month. Not.*, 78, 3, 1917.
119. A. Einstein, *Berl. Ber.*, 1918, 270.
120. R. C. Tolman, *Astroph. Journ.*, 69, 245, 1929.
121. H. Weyl, *Phys. Zeitschr.*, 24, 230, 1923.
122. H. P. Robertson, *Phil. Mag.*, 5, 835, 1928.
123. H. Weyl, *Phil. mag.*, 9, 936, 1930.
124. A. Friedmann, *Zeitschr. f. Phys.*, 10, 377, 1922; 21, 326, 1924.
125. G. Lemaitre, *Brux. Ann. Soc. Scien.*, 47 A, 49, 1927; *Month. Not.*, 91, 483, 1931.
126. A. Einstein, *Berl. Ber.*, 1931, 235.
127. O. Heckmann, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1931, 127.
128. M. Kohler, *Ann. d. Phys.*, 16, 129, 1933.
129. H. P. Robertson, *Proc. Nat. Akad.*, 15, 822, 1929.
130. R. C. Tolman, *Proc. Nat. Akad.*, 16, 320, 1930.
131. H. P. Robertson, *Rev. Mod. Phys.*, 5, N1, 62, 1933.

132. E. A. Milne, *Relativity Gravitation and World-structure*, 1935.
 133. O. Heckmann, *Theorie der Kosmologie*, Berl., 1942.
 134. H. Bondi, *Cosmology*, Cambridge, 1952.
 135. Э. Шацман, *Вопросы космогонии*, IV, М., 1955.
 136. В. А. Крат, *Цирк. Глав. Астр. obs. № 32*, 1941.
 137. А. Богородский, *Публ. Киев. Астр. obs.*, № 1, 1946.
 138. E. A. Milne, *Month. Not.*, 104, N2, 120, 1944; *Kinematic Relativity*, Oxford, 1948.
 139. А. А. Белопольский, *Astr. Nachr.*, 236, 357, 1929.
 140. А. Вагајас, G. Birkhoff, C. Graef, M3 Vallerta, *Phys. Rev.*, 66, 138, 1944.
 141. А. Богородский, *Циркуляр ГАО*, № 32, 16, 1941.
 142. A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Princeton, 1953.
-

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Предисловие	3
Г л а в а I. Уравнения поля тяготения	5
§ 1. Введение	5
§ 2. Некоторые формулы геометрии Римана	10
§ 3. Принцип эквивалентности	21
§ 4. Закон сохранения	31
§ 5. Уравнения поля Эйнштейна	38
§ 6. Вопрос об однозначности уравнений поля	47
Г л а в а II. Некоторые решения уравнений поля	
§ 1. Поле одного центра	60
§ 2. Внутреннее решение Шварцшильда	64
§ 3. Плоское поле гравитации	68
§ 4. Решение Эйнштейна для слабого поля	72
§ 5. Решение уравнений поля для системы точечных масс	74
§ 6. Уравнения поля во втором приближении	79
§ 7. Определение величин \bar{h}_{ij}	82
§ 8. Определение k_{ij}	85
§ 9. Скорость передачи гравитации и парадокс Лапласа	89
§ 10. Соотношение между массой и энергией	92
§ 11. Внешнее решение для однородного вращающегося шара	95
Г л а в а III. Задача Кеплера	
§ 1. Уравнения движения	98
§ 2. Классификация орбит	101
§ 3. Орбиты класса <i>A</i>	103
§ 4. Орбиты класса <i>B</i>	106
§ 5. Орбиты класса <i>C</i>	107
§ 6. Орбиты класса <i>D</i>	110
§ 7. Приближенное уравнение орбиты	113
§ 8. Релятивистские эффекты в движении искусственных спутников Земли	116
§ 9. Задача двух тел	122
§ 10. Гелиоцентрическая система Коперника	123
Г л а в а IV. Распространение света в гравитационном поле	
§ 1. Введение	128
§ 2. Траектория луча	129
§ 3. Принцип Допплера	136

§ 4. Фотометрические эффекты	141
§ 5. Астрономическая проверка	146

Глава V. Релятивистская космология

§ 1. Введение	150
§ 2. Гравитационный парадокс и уравнения поля теории относительности	158
§ 3. Статическая космология	161
§ 4. Теория «расширяющейся вселенной» Леметра	169
§ 5. Общая нестатическая модель	174
§ 6. Релятивистская космология и уравнения поля	185
§ 7. Уравнения поля и принцип эквивалентности	187

Богородский А. Ф.

Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии

Редактор *Никонова Р. С.*

Корректор *Сокирко Л. П.*

БФ 03513. Зак 735. Тираж 3000. Формат бумаги 60×92¹/₁₆. Физ. печатн. лист. 12,25. Условно-печатн. лист. 12,25. Учетно-издат. лист. 14,33. Бумажн. лист. 6,125
Подписано к печати 2/VI 1962 г. Цена 85 коп.

Напечатано в типографии издательства КГУ, Киев, Б. Шевченко, 14 с матриц Книжно-журнальной фабрики Главполиграфиздата Министерства культуры УССР. Киев, ул. Воровского, 24.