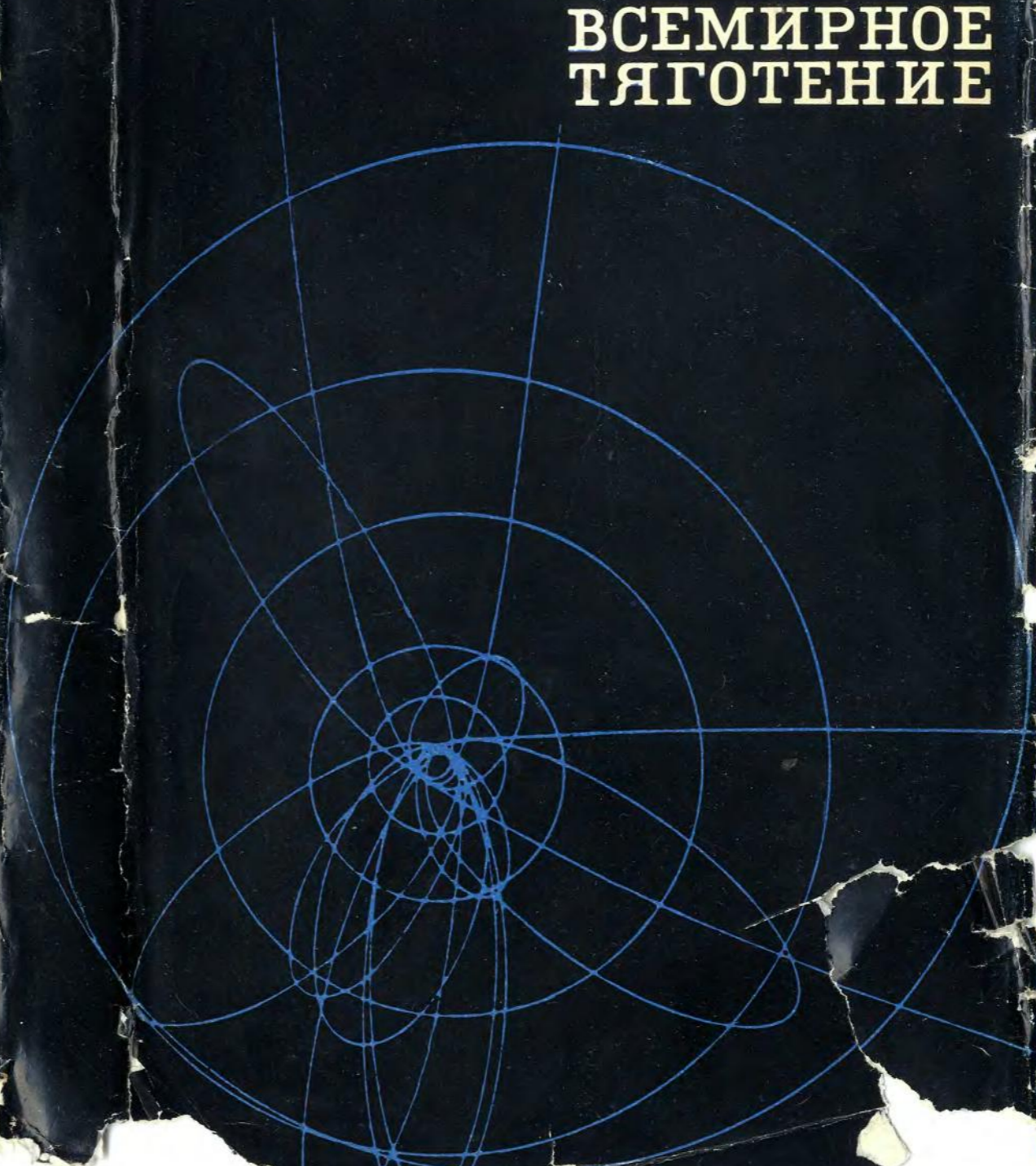


А. Ф. Бовородский

**ВСЕМИРНОЕ
ТЯГОТЕНИЕ**

А. Ф. Богородский

ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ



НАУКОВА
ДУМКА

В книге изложены основные этапы развития теории гравитации от закона всемирного тяготения до уравнений поля Эйнштейна. Физические основы и математический аппарат общей теории относительности (ОТО), составляющей основу современного представления о природе гравитации, изложены в духе классических работ Эйнштейна без описания других вариантов и попыток толкования этой теории.

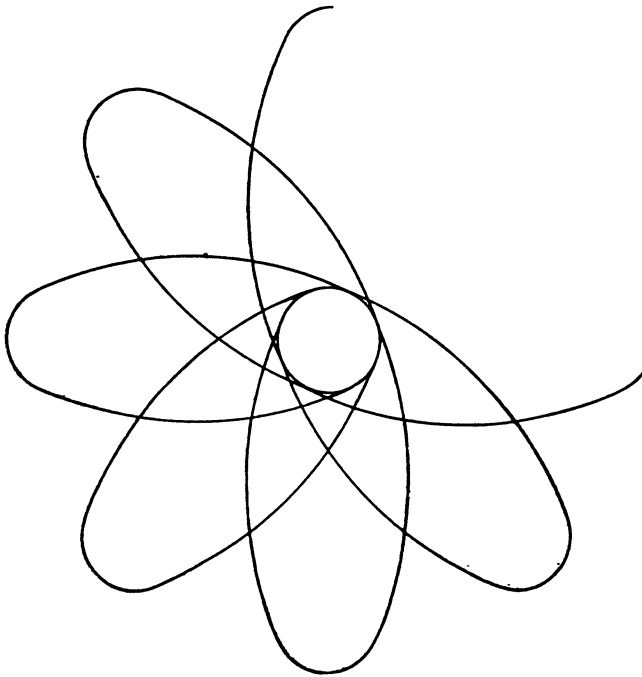
Уделяется должное внимание астрономическим приложениям: релятивистским эффектам в движении небесных тел, распространению света в поле тяготения, строению звезд, космологии. Рассмотрены некоторые астрономические эффекты, вызванные, возможно, гипотетическим ослаблением гравитации. Кратко изложена одна из так называемых линейных теорий тяготения — теория Биркгофа, позволяющая количественно объяснить основные релятивистские эффекты, не прибегая к ОТО.

В заключение высказываются некоторые замечания о современном состоянии и задачах дальнейшего развития теории гравитации.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области физики и астрономии.

**АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ГЛАВНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ**

А.Ф.Богородский



ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ



КИЕВ — 1971

Ответственный редактор *В. В. Порфирьев*

530.1

Б74

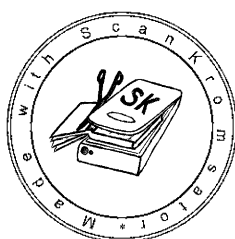
Рецензенты кандидаты физ.-мат. наук

И. Г. Колчинский и И. Г. Колесник

УДК 521.12—530.12

*Светлой памяти
Лидии Антоновны Зайцевой*

Эта страница пуста



ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы теории гравитации довольно широко освещены во многих монографиях, сборниках специальных работ и в обзорных статьях различного уровня и назначения. В фундаментальной монографии акад. В. А. Фока общая теория относительности (ОТО) последовательно излагается в новом понимании, существенно отличающемся от ее классической трактовки в духе идей создателя этой теории А. Эйнштейна. Широко известные книги А. З. Петрова посвящены главным образом развитию математического аппарата ОТО и почти не касаются ее физических основ. Появившиеся в последние годы монографии посвящены преимущественно различным прикладным вопросам, которые быстро развиваются в связи с новыми открытиями в астрономии. К их числу принадлежит большая работа академика Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова, в которой изучаются проблемы релятивистской астрофизики — строение и эволюция звездных конфигураций и космология. Из переводных работ необходимо отметить сборник «Гравитация и относительность», содержащий ряд важных оригинальных и обзорных статей, книгу Д. Уилера, Б. Гэрисона, М. Вакано и К. Торна о гравитационном коллапсе, работу Дж. Вебера о гравитационных волнах, известную книгу Дж. Уилера с изложением его геометродинамики и др.

В отличие от перечисленных работ, в которых рассматриваются те или другие специальные вопросы теории гравитации в ее современном состоянии, предлагаемая книга посвящена развитию проблемы гравитации в целом. Автор стремился проследить основные этапы в развитии физических основ и математического аппарата теории гравитации, начиная от закона всемирного тяготения Ньютона до уравнений поля Эйнштейна включительно. В книге последовательно рассматриваются принципы ньютоновой теории тяготения, дорелятивистские попытки уточнения закона обратных квадратов, различные теории гравитации, возникшие в начале нашего столетия после создания специальной теории относительности. В последующих главах достаточно подробно изложены физические предпосылки и математический аппарат ОТО, а также основные результаты этой теории. При этом автор придерживался классического изложения ОТО, развитого в работах Эйнштейна, и не стремился к описанию различных новых вариантов теории, поскольку такое описание не является необходимым с точки зрения основной задачи книги и потребовало бы значительного увеличения ее объема.

Автор подходит к проблеме гравитации прежде всего как астроном. Поэтому, наряду с рассмотрением принципиальных основ теории гравитации, в книге уделяется должное внимание ее астрономическим приложениям — изучению

релятивистских эффектов в движении небесных тел, распространению света в поле тяготения, строению и эволюции звезд, космологии. Рассмотрены некоторые астрономические эффекты, которые могут быть вызваны ослаблением гравитации. В последней главе кратко изложена одна из так называемых линейных теорий гравитации — теория Биркгофа, позволяющая дать правильное количественное описание основных релятивистских эффектов, не прибегая к ОТО.

В заключение высказываются некоторые принципиальные замечания о современном состоянии и проблемах дальнейшего развития теории гравитации.

Май, 1969 г.

Глава I. ЗАКОН ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА

1. Введение. При изучении движения небесных тел закон всемирного тяготения Ньютона всегда будет иметь фундаментальное значение. Вместе с общими законами динамики он составляет незыблемую основу небесной механики, позволяющей с величайшей точностью объяснить и предвычислить подавляющее большинство движений, наблюдаемых в Солнечной системе. Наряду с высокой точностью этот закон также поразительно универсален, поскольку он в одинаковой степени применим к падению тел у земной поверхности и обращению планет вокруг Солнца, к движению двойных звезд и звездных систем, к Галактике в целом и, вероятно, также к взаимодействию между галактиками.

Формулировка закона Ньютона отличается большой общностью и не связана с каким-либо конкретным представлением о природе или механизме взаимного притяжения между телами. Это придает закону Ньютона формальный характер, но вместе с тем определяет надежность и широкую его применимость.

Оставляя вопрос о природе тяготения открытым, Ньютон развивал учение о движении небесных тел по образцу геометрии. Он стремился вывести движения небесных тел путем математической дедукции из небольшого числа твердо установленных и тщательно сформулированных общих принципов, играющих в его теории роль аксиом или постулатов. Последние же, в свою очередь, должны быть индуктивно найдены из наблюдений и опытов, т. е. обоснованы эмпирически путем тщательного изучения и анализа действительных движений в природе. С особенной ясностью и определенностью этот метод описан Ньютоном в последнем вопросе его «Оптики»: «Вывести из явлений два или три общих принципа движения и затем изложить, как из этих ясных принципов вытекают свойства и действия всех вещественных предметов,— вот что было бы очень большим шагом вперед в философии, хотя бы причины этих принципов и не были еще открыты» [1].

Ставя своей целью разработку математической теории движения небесных тел, Ньютон выдвигал на первый план точную количественную формулировку закона всемирного тяготения, оставляя открытым вопрос о физической природе гравитационных взаимодействий. К гипотезам о механизме этих взаимодействий он проявляет

сдержанное, порой даже несколько высокомерное отношение, выразившееся в его знаменитом «*hypotheses non fingo*». Во втором издании «Начал» в «Общем поучении» сказано: «До сих пор я изъяснил небесные явления и приливы наших морей на основании силы тяготения, но я не указывал причины самого тяготения. Эта сила происходит от некоторой причины, которая проникает до центра Солнца и планет без уменьшения своей способности и которая действует не пропорционально поверхности частиц, на которые она действует (как это обыкновенно имеет место для механических причин), но пропорционально количеству твердого вещества, причем ее действие распространяется повсюду на огромные расстояния, убывая пропорционально квадратам расстояний... Причину этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю... Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам, и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря» [2].

Довольствуясь эмпирическим обоснованием закона тяготения, Ньютон в то же время неоднократно указывал на возможность механического объяснения гравитации с точки зрения гипотезы эфира, хотя это объяснение не казалось ему, по-видимому, убедительным и не играло существенной роли в его концепции. Вместе с тем он не поддерживал и идею о первичности гравитации, изложенную Котсом в предисловии ко второму изданию «Начал» [2]. Согласно этой идее, тяготение представляет собой неотъемлемое свойство всякой материи, проявляющееся в ее способности непосредственно действовать на сколь угодно больших расстояниях; будучи первичным, это свойство не допускает дальнейшего объяснения и является неким непознаваемым началом. В известном письме Бентлею от 25 февраля 1693 г. Ньютон писал: «Непостижимо, чтобы неодушевленная грубая материя могла без посредства чего-либо нематериального действовать и влиять на другую материю без взаимного соприкосновения, как это должно бы происходить, если бы тяготение в смысле Эпикура было существенным и врожденным в материи. Предполагать, что тяготение является существенным, неразрывным и врожденным свойством материи, так что тело может действовать на другое на любом расстоянии в пустом пространстве, без посредства чего-либо передавая действие и силу,— это, по моему, такой абсурд, который немислим ни для кого, умеющего достаточно разбираться в философских предметах. Тяготение должно вызываться агентом, постоянно действующим по определенным законам» [3].

На основе закона тяготения Ньютона выросло обширное и детально разработанное учение — классическая небесная механика, значение и успехи которой общеизвестны. Однако триумфальное

развитие небесной механики сопровождалось многочисленными попытками внести те или иные малые поправки в точную форму закона тяготения, а также появлением ряда гипотез о механизме гравитационных взаимодействий. Эти попытки, связанные с отдельными трудностями небесной механики и с различными общими соображениями, оставались в течение двух столетий безуспешными, и только создание теории относительности привело к глубокому пересмотру концепции Ньютона.

2. Закон тяготения Ньютона как следствие законов Кеплера.

По представлению Ньютона, закон тяготения является одним из немногих общих принципов, из которых «вытекают свойства и действия всех вещественных предметов». Однако, в свою очередь, этот закон должен быть индуктивно выведен из «явлений», т. е. из наблюдаемых в природе движений. Такими «явлениями» служили, как известно, особенности движения в задаче двух тел, найденные эмпирически на основе многолетних наблюдений планет Солнечной системы и получившие выражение в трех законах Кеплера. Первые два закона Кеплера относятся к гелиоцентрическому движению каждой отдельно взятой планеты, третий связывает средние расстояния планет от Солнца с периодами их обращения. В полярных геоцентрических координатах законы Кеплера можно выразить равенствами

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}; \quad r^2 \dot{\varphi} = C; \quad \frac{a^3}{T^2} = f, \quad (1,2,1)$$

где p, e — фокальный параметр и эксцентриситет планетной орбиты, C — постоянная площадей, равная удвоенной секториальной скорости планеты, a — среднее расстояние от Солнца, T — период обращения планеты, f — постоянная.

Восстановим в общих чертах переход от законов Кеплера (1,2,1) к закону тяготения. Ограничиваясь случаем системы двух тел, будем принимать во внимание взаимодействие данной планеты с Солнцем, пренебрегая действием других планет.

Отнесем изучаемое движение двух тел к инерциальной системе отсчета и обозначим радиусы-векторы точечных масс M, m соответственно через $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Уравнения движения имеют вид

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\mathbf{F}; \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F},$$

где через \mathbf{F} обозначена сила, приложенная к массе m .

Перейдем к системе отсчета, связанной с массой M , т. е. к гелиоцентрическим координатам. Введя относительный радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, получим уравнение относительного движения

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{m + M}{mM} \mathbf{F}. \quad (1,2,2)$$

Задача заключается в определении силы F , обеспечивающей выполнимость законов Кеплера (1,2,1).

Согласно первому из этих законов, относительное движение происходит в постоянной плоскости, проходящей через центральную массу. Введем в плоскости движения полярные координаты, совместив их начало с центральной массой и направив полярную ось через ближайшую точку орбиты, т. е. через перигелий. Проекции полного ускорения на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему определяются известными формулами

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2; \quad \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right).$$

С помощью двух первых соотношений (1,2,1) получим

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_r = -\frac{C^2}{pr^3}; \quad \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_\varphi = 0.$$

Вводя период T обращения планеты вокруг Солнца и воспользовавшись очевидными формулами

$$C = \frac{2\pi ab}{T}; \quad p = \frac{b^2}{a},$$

согласно третьему закону Кеплера, находим $\frac{C^2}{p} = 4\pi^2 f$.

Следовательно, приложенная к планете сила имеет проекции

$$F_r = -\frac{4\pi^2 f}{r^2} \frac{Mm}{M+m}; \quad F_\varphi = 0.$$

Это показывает, что между рассматриваемыми массами существует сила взаимного притяжения

$$F = \frac{4\pi^2 f}{M+m} \frac{Mm}{r^2}. \quad (1,2,3)$$

Величина f , определяющая соотношение между средним расстоянием планеты от Солнца и периодом ее обращения, не может быть универсальной постоянной, поскольку, например, отношение $\frac{a^3}{T^2}$ для системы Солнце — Земля сильно отличается от его значения для системы планета — спутник. Остается предположить, что эта величина обусловлена самими взаимодействующими телами, хотя в случае Солнечной системы она может зависеть от планеты лишь в незначительной степени, так как для различных планет отношения $\frac{a^3}{T^2}$ оказываются очень близкими. Однако наблюдаемые особенности планетных движений, происходящих под действием силы тяготения, не дают возможности непосредственно установить, какие именно свойства взаимодействующих тел определяют величину постоянной f .

На основании уравнения (1,2,3) можно утверждать, что законы Кеплера вместе с общими законами динамики Ньютона определяют зависимость силы притяжения от расстояния между взаимодействующими материальными точками, но не позволяют найти связь между величиной этой силы и какими-либо физическими параметрами тел.

Гравитацию следует считать особым свойством материальных тел, которое качественно отличается от других механических свойств. Мерой этого свойства должна служить особая физическая величина, позволяющая дать количественное выражение способности данного тела к гравитационным взаимодействиям с другими телами. Эта величина получила название г р а в и т а ц и о н н о й, или т я ж е л о й, массы. Гравитационная масса материальной точки представляет собой величину, пропорциональную силе, с которой она действует на другую определенным образом выбранную материальную точку, помещенную на стандартном расстоянии от первой. В качестве единицы измерения можно было бы принять гравитационную массу частицы, которая притягивает с определенной силой такую же частицу, находящуюся на расстоянии единицы длины. Однако имеется и другой, практически более удобный способ определения единицы измерения тяжелой массы. В качестве единицы принимают гравитационную массу стандартного тела, например шарика, изготовленного из определенного однородного материала и обладающего единичной инертной массой. При этом гравитационная масса другого тела, имеющего известную инертную массу, может быть найдена только путем измерений. Argioi невозможно судить о соотношении между инертной m и гравитационной m' массами какого-либо тела, отличного от выбранного стандарта.

Сила притяжения между двумя материальными точками должна быть пропорциональна гравитационной массе каждой из них. Поэтому закон притяжения можно представить в следующем виде:

$$F = \frac{\gamma m' M'}{r^2},$$

где γ — коэффициент пропорциональности, играющий роль универсальной постоянной и подлежащий опытному определению.

Сравнивая эту формулу с (1,2,3), находим выражение для постоянной третьего закона Кеплера

$$4\pi^2 f = \gamma (m + M) \frac{m'}{m} \frac{M'}{M}. \quad (1,2,4)$$

Многочисленные измерения, выполненные с высокой степенью точности, показали, что отношение тяжелой и инертной масс одинаково для всех тел, вследствие чего при принятой единице гравитационной массы должно выполняться равенство $m = m'$.

Следовательно,

$$4\pi^2 f = \gamma(m + M). \quad (1,2,5)$$

Третий закон Кеплера принимает при этом вид

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} (m + M), \quad (1,2,6)$$

показывая, что его первоначальная формулировка нуждается в уточнении.

Итак, закон тяготения Ньютона для двух точечных масс, выражающийся обычной формулой

$$F = \frac{\gamma mM}{r^2}, \quad (1,2,7)$$

представляет собой следствие трех законов Кеплера и найденной опытным путем пропорциональности инертной и гравитационной масс. В такой же форме этот закон выполняется для двух протяженных тел со сферическим распределением масс, если расстояние между их центрами не менее суммы их радиусов. Для произвольных тел, расположенных на достаточно большом расстоянии, формула (1,2,8) применима с точностью до членов порядка $\frac{l^2}{r^2}$, где l — линейные размеры тел, r — расстояние между центрами их масс.

3. Тяготение и тяжесть. После вывода формы закона притяжения важнейшим шагом в развитии ньютоновой теории гравитации было установление тождественности тяжести и тяготения. Доказательство единой природы гравитационного притяжения между небесными телами и силы тяжести на поверхности Земли явилось завершением физических основ теории Ньютона. В известном письме к Галлею (1686) Ньютон назвал это доказательство одним из важнейших своих открытий.

Сущность доказательства Ньютона состоит, как известно, в сравнении ускорения Луны в ее геоцентрическом обращении с ускорением силы тяжести у земной поверхности. Предположив, что оба ускорения обусловлены притяжением Земли, Ньютон показал, что величины этих ускорений хорошо согласуются с законом обратных квадратов.

Завершая вычисление, выполненное в Предложении IV третьей книги «Начал», Ньютон пишет: «Итак, сила, которою Луна удерживается на своей орбите, если ее опустить до поверхности Земли, становится равной силе тяжести, поэтому она и есть та самая сила, которую мы называем тяжестью или тяготением» [2].

Приводимый ниже расчет воспроизводит рассуждения Ньютона в уточненной форме с использованием современных значений астрономических постоянных.

Рассмотрим невозмущенное геоцентрическое движение Луны, происходящее по эллиптической орбите с большой полуосью a и с сидерическим периодом T . Следуя приему Ньютона, сравним это движение с невозмущенным движением воображаемого спутника Земли, обращающегося по орбите с большой полуосью a_1 и периодом T_1 . Обозначив массы Земли и Луны соответственно через M и μ и пренебрегая массой воображаемого спутника, согласно третьему закону Кеплера, можно написать

$$\frac{a^3}{T^2(M + \mu)} = \frac{a_1^3}{T_1^2 M}. \quad (1,3,1)$$

Пусть воображаемый спутник обращается непосредственно у земной поверхности, вследствие чего полуось a_1 можно положить равной радиусу Земли R . Если вблизи земной поверхности тяготение тождественно тяжести, то движение спутника происходит с ускорением свободного падения g . Поэтому должны выполняться очевидные равенства

$$T_1 = \frac{2\pi R}{v}; \quad \frac{v^2}{R} = g,$$

из которых следует $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$.

Уравнение (1,3,1) принимает вид

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{gR^2}{a^3} \left(1 + \frac{\mu}{M}\right).$$

Если ввести среднее сидерическое движение Луны $n = \frac{2\pi}{T}$, то

$$n = a^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\mu}{M}\right)^{\frac{1}{2}} R \sqrt{g}. \quad (1,3,2)$$

Среднее движение Луны известно из наблюдений с очень высокой точностью. Значение, принятое в 1964 г. Международным астрономическим союзом (МАС), составляет $2,6616994890 \cdot 10^{-6} \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$, а теоретическое, выведенное на основании гипотезы Ньютона о тождестве тяжести и тяготения, выражается правой частью равенства (1,3,2). Сравнение теоретического значения с наблюдаемым и является количественной проверкой гипотезы Ньютона.

Переходя к вычислению величины (1,3,2), прежде всего заметим, что a нельзя отождествить со средним расстоянием Луны от Земли, найденным по параллаксу, поскольку действительное геоцентрическое движение Луны является возмущенным, тогда как a представляет собой полуось невозмущенной лунной орбиты. Согласно теории

Хидла, наблюдаемое движение Луны происходит по так называемой вариационной орбите, имеющей форму овала. Среднее расстояние Луны от Земли, отвечающее этой орбите, $a_0 = 3,84400 \cdot 10^{10}$ см (МАС, 1964). С большой полуосью невозмущенной геоцентрической орбиты Луны оно связано соотношением

$$a_0 = a \left(1 - \frac{1}{6} m^2 + \frac{1}{3} m^3 + \frac{407}{2304} m^4 - \frac{67}{288} m^5 - \dots \right),$$

где параметр m равен 0,08084893... . Воспользовавшись этим соотношением, получим величину большой полуоси невозмущенной лунной орбиты $a = 3,84749 \cdot 10^{10}$ см.

Произведение $R\sqrt{g}$ отвечает невозмущенной круговой орбите вообразяемого спутника. Движение его по такой орбите происходило бы при условии, что масса Земли сосредоточена в ее центре или что распределение массы является строго сферическим. В этом случае величина $R\sqrt{g}$ не зависит от радиуса R , поскольку вне Земли ускорение силы тяжести изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра.

Величина $(R\sqrt{g})^2$ совпадает с так называемой геоцентрической гравитационной постоянной, равной произведению постоянной тяготения на массу Земли. Принятое в настоящее время значение $(R\sqrt{g})^2 = 3,98603 \cdot 10^{20}$ см² · сек⁻² (МАС, 1964).

Отношение масс Луны и Земли, по тому же международному соглашению 1964 г., определяется величиной $\left(\frac{\mu}{M}\right)^{-1} = 81,30$. Однако имеется более точное значение, полученное из недавних наблюдений лунников и космических ракет (США): $\left(\frac{\mu}{M}\right)^{-1} = 81,3015 \pm 0,0033$.

Вычисления, выполненные с указанными значениями постоянных, дают $2,66170 \cdot 10^{-6}$ рад · сек⁻¹, что прекрасно согласуется с наблюдаемым значением среднего движения Луны. Относительная величина различия не превышает $2 \cdot 10^{-6}$.

В пределах доступной в настоящее время точности выводы небесной механики, вместе с результатами астрономических наблюдений, подтверждают гипотезу Ньютона о том, что тяжесть у земной поверхности и сила тяготения, определяющая движение небесных тел в мировом пространстве, имеют одинаковую природу.

4. Равенство инертной и тяжелой масс. Закон всемирного тяготения Ньютона, как мы видели, представляет собой следствие законов Кеплера и равенства инертной и тяжелой масс. Это равенство, выражающее наиболее характерную особенность полей гравитации, имеет в теории Ньютона фундаментальное значение, поэтому мы рассмотрим его подробнее.

Равенство инертной и тяжелой масс содержится уже в законе падения Галилея, согласно которому все тела при свободном падении в поле тяжести движутся с одинаковыми ускорениями. Пользуясь законом тяготения и вторым законом динамики, вычислим ускорение свободного падения.

Пусть на тело с тяжелой массой m' действует сила притяжения $\frac{\gamma M' m'}{R^2}$, где R и M' — радиус и тяжелая масса Земли. Согласно второму закону динамики, эта сила равна произведению инертной массы m данного тела на ускорение свободного падения. Следовательно,

$$g = \frac{\gamma M'}{R^2} \cdot \frac{m'}{m}. \quad (1,4,1)$$

Поскольку первый множитель правой части является общим для всех тел, отношение $\frac{m'}{m}$ определяется величиной ускорения. Если последнее не зависит от падающего тела, то $\frac{m'}{m} = \text{const}$ и поэтому, при соответствующем выборе единиц, для всех тел должно выполняться равенство $m' = m$.

Непосредственное измерение ускорения при свободном падении тел в поле тяжести связано со значительными трудностями, поэтому проверка этого равенства с помощью (1,4,1) оказывается очень грубой.

Более точную эмпирическую проверку закона $m' = m$ можно произвести, изучая колебания маятников.

Рассмотрим математический маятник, состоящий из нити длиной l и материальной точки с инертной и тяжелой массами m, m' . На материальную точку со стороны Земли действует вертикальная сила притяжения $F = n^2 m l$, где

$$n^2 = \frac{g m'}{l m}, \quad g = \frac{\gamma M}{R^2}.$$

При малых отклонениях горизонтальная проекция этой силы равна $-F \text{tg} \theta = -n^2 m x$. Поэтому уравнение колебаний маятника имеет вид $\ddot{x} + n^2 x = 0$. Решением его служит функция $x = A \cos nt + B \sin nt$, отвечающая гармоническим колебаниям с периодом

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{m}{m'}}. \quad (1,4,2)$$

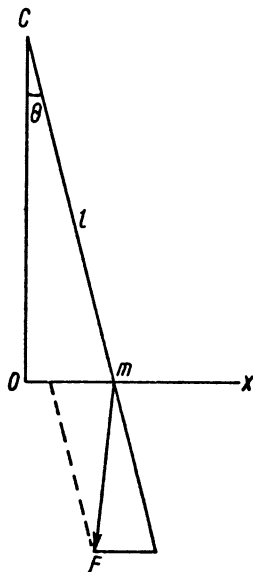
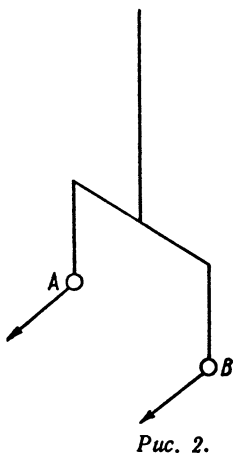


Рис. 1.

Формула (1,4,2) показывает, что доказательством пропорциональности инертной и тяжелой масс может служить независимость периода колебаний от выбора тела маятника.

Впервые подобные опыты производились Ньютоном. Они описаны в Предложении VI третьей книги «Начал». «Я произвел такое испытание для золота, серебра, свинца, стекла, обыкновенной соли, дерева, воды, пшеницы», — замечает Ньютон и после краткого рассказа об условиях экспериментов добавляет, что даже разность меньше 0,001 полной массы была бы «с ясностью обнаружена этими опытами» [2].

В 1828 г. опыты с маятниками повторил Бессель [4], применявший грузы из самых разнообразных материалов (различные сорта латуни, железо, свинец, серебро, золото, метеоритное железо, мрамор, кварц и др.). По тщательности они значительно превосходили опыты Ньютона, однако и их точность оставалась относительно низкой. Высокая точность была достигнута только в опытах Этвеша [5], результаты которых не оставили серьезных сомнений в пропорциональности тяжелой и инертной масс.



Первая серия экспериментов Этвеша выполнена в 1889, вторая — в 1908 г. Принципиальная схема этих экспериментов показана на рис. 2. Пусть унифиляр AB вместе с системой отсчета равномерно вращается вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω . Считая тяжелые массы тел A и B одинаковыми, обозначим их инертные массы через m_1 , m_2 . Центробежное ускорение, обусловленное вращением всей системы, равно $\omega^2 r$, где r — расстояние унифиляра от оси вращения (это расстояние принимается весьма большим по сравнению с плечом AB). При различии инертных масс на тела A , B действуют различные центробежные силы $m_1 \omega^2 r$ и $m_2 \omega^2 r$, которые создают вращающий момент $(m_2 - m_1) \omega^2 r^2$. Вследствие этого унифиляр должен испытать кручение, при котором возникает такой же вращающий момент противоположного направления. Обозначив угол поворота через $\Delta\varphi$, можно написать

$$k\Delta\varphi = (m_2 - m_1) \omega^2 r^2, \quad (1,4,3)$$

где k — коэффициент, зависящий от свойств унифиляра.

В опытах Этвеша вращающейся системой отсчета служила

Земля, вследствие чего угол между вертикальным направлением и осью вращения зависел от географической широты места наблюдения. Опыты Этвеша были выполнены весьма тщательно и подтвердили равенство инертной и тяжелой масс с относительной точностью $5 \cdot 10^{-9}$. В 1935 г. их повторил в Венгрии Реннер.

В 1961 г. очень интересный эксперимент осуществлен Дике [6]. Для выяснения его основной идеи представим унифиляр с двумя грузами, расположенный над полюсом и принимающий участие во вращении Земли. Вместе с Землей унифиляр каждые 24 ч поворачивается на 360° , совершая при этом движение в поле тяготения Солнца. В орбитальном движении вокруг Солнца грузы A и B имеют ускорения

$$\frac{\gamma M'_{\odot}}{a^2} \frac{m'_1}{m_1}, \quad \frac{\gamma M'_{\odot}}{a^2} \frac{m'_2}{m_2},$$

где m_1, m_2 и m'_1, m'_2 — их инертные и гравитационные массы соответственно, M'_{\odot} — гравитационная масса Солнца, a — расстояние последнего от Земли.

Если эти ускорения одинаковы, то коромысло унифиляра будет покоиться относительно Земли. Если же инертная и тяжелая массы не пропорциональны и потому указанные ускорения различны, то груз с бóльшим ускорением периодически ускоряет или замедляет равномерное вращение коромысла. В системе отсчета, связанной с Землей, унифиляр должен в этом случае совершать колебания с периодом 24 ч. Отсутствие таких колебаний и будет служить доказательством пропорциональности инертной и тяжелой масс.

В опытах Дике, производившихся с соблюдением всевозможных предосторожностей и в условиях высокого вакуума, равенство инертной и тяжелой масс проверено с относительной точностью около 10^{-10} (по сравнению с экспериментами Этвеша точность повышена приблизительно в 50 раз).

Равенство инертной и гравитационной масс может быть также проверено путем сравнения выводов небесной механики с данными астрономических наблюдений, хотя по точности такая проверка значительно уступает лабораторному эксперименту. В качестве примера сравним отношения гравитационной и инертной масс для Луны и для искусственного спутника Земли.

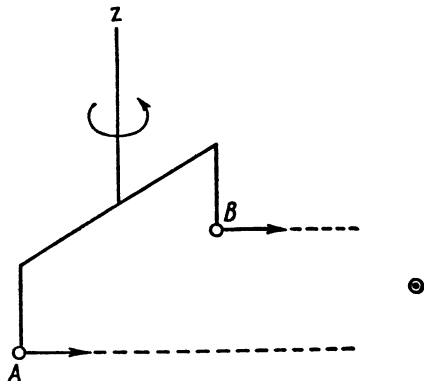


Рис. 3.

Применив третий закон Кеплера к невозмущенному движению Луны и воспользовавшись соотношением (1,2,4), получим

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} (M + \mu) \frac{M'}{M} \frac{\mu'}{\mu},$$

где a_1 , T_1 — среднее невозмущенное расстояние и период обращения Луны, M , M' и μ , μ' — инертные и тяжелые массы Земли и Луны соответственно.

Для искусственного спутника, обращающегося вокруг Земли по круговой орбите радиуса R , этот же закон выражается уравнением

$$\frac{R^3}{T_1^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} \frac{M'}{M} \frac{m'}{m},$$

где, как и прежде (см. п. 3), период обращения связан с ускорением силы тяжести формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Комбинируя полученные равенства, имеем

$$\frac{4\pi^2 a_1^3}{g R^2 T_1^2} = \left(1 + \frac{\mu}{M}\right) \frac{\mu'}{\mu} : \frac{m'}{m},$$

или, если ввести среднее движение Луны и геоцентрическую гравитационную постоянную,

$$\frac{\mu'}{\mu} : \frac{m'}{m} = \frac{n_1^2 a_1^3}{E} \left(1 + \frac{\mu}{M}\right)^{-1}. \quad (1,4,4)$$

Подобным же образом можно произвести сравнение гелиоцентрического обращения Земли с Луной и искусственной планеты.

В этом случае получается формула

$$\frac{M' + \mu'}{M + \mu} : \frac{M_1'}{M} = \frac{n^2 a^3}{S} \left(1 + \frac{M + \mu}{M_\odot}\right)^{-1}, \quad (1,4,5)$$

связывающая отношения гравитационных и инертных масс Земли с Луной и искусственной планеты в зависимости от гелиоцентрической гравитационной постоянной S , среднего движения Земли и большой полуоси a земной орбиты.

Вычисления показывают, что правые части формул (1,4,4) и (1,4,5) отличаются от единицы на величину порядка 10^{-6} . Более точная проверка оказывается невозможной, поскольку соотношение между входящими в эти формулы массами известно в настоящее время с относительно большими погрешностями.

Итак, мы видим, что принятое в механике Ньютона равенство инертной и тяжелой масс является надежно установленным эмпирическим законом, который с высокой степенью точности подтверждается лабораторными опытами и хорошо согласуется с результатами астрономических наблюдений.

5. Гравитационный потенциал. Основной характеристикой поля тяготения служит *н а п р я ж е н н о с т ь*, т. е. отнесенная к единице массы сила, действующая на частицу, помещенную в данную точку поля. В дальнейшем напряженность обозначим через f . Пользуясь этим понятием, гравитационное поле с математической точки зрения можно рассматривать как векторное поле, изображаемое семейством силовых линий, т. е. линий вектора f .

Из закона тяготения Ньютона непосредственно следует, что векторное поле напряженности связано с полем скалярной функции, получившей название *г р а в и т а ц и о н н о г о п о т е н ц и а л а*. Эта связь определяется известным соотношением

$$f = \text{grad } \varphi, \quad (1,5,1)$$

показывающим, что в каждой точке поля напряженность направлена по нормали к поверхности равного потенциала. Таким образом, силовые линии поля гравитации являются семейством ортогональных траекторий поверхностей постоянных потенциалов.

Гравитационный потенциал в данной точке поля с декартовыми координатами x, y, z определяется формулой

$$\varphi = \gamma \iiint \frac{\rho d\tau}{r}; \quad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \quad (1,5,2)$$

где $d\tau$ — элемент объема в точке x', y', z' , ρ — плотность в той же точке, r — расстояние элемента $d\tau$ от данной точки x, y, z . Интегрируем по координатам x', y', z' в пределах объема тела, создающего рассматриваемое поле. Нетрудно показать, что если размеры и плотность этого тела конечны, то гравитационный потенциал и соответствующая ему, согласно (1,5,1), напряженность конечны и непрерывны во всех точках поля, расположенных как вне, так и внутри тела.

В простейшем случае, когда источником поля тяготения служит материальная точка с заданной массой M , потенциал поля на расстоянии r равен

$$\varphi = \frac{\gamma M}{r}. \quad (1,5,3)$$

Такой же формулой определяется потенциал во внешних точках поля, созданного телом со сферическим распределением массы.

Во внутренних точках этого тела потенциал на расстоянии r от центра равен

$$\varphi = \frac{\gamma M(r)}{r} + 4\pi\gamma \int_r^R \rho(r) r dr. \quad (1,5,4)$$

Через $M(r)$ здесь обозначена масса внутренней части тела, ограниченной сферой радиуса r .

Соответствующая потенциалу (1,5,4) напряженность, как нетрудно убедиться, равна $\frac{\gamma M(r)}{r^2}$ и направлена к центру; она обусловлена массой $M(r)$ внутренней области, тогда как внешний сферический слой создает в этой области поле с постоянным потенциалом, которому отвечает нулевая напряженность.

В частном случае, когда $\rho = \text{const}$, формула (1,5,4) дает

$$\varphi = 2\pi\gamma\rho \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right), \quad (1,5,5)$$

вследствие чего напряженность по абсолютному значению оказывается равной $\frac{4}{3}\pi\gamma\rho r$.

В приложениях встречаются случаи, когда распределение плотности заметно отличается от сферического. Вблизи такого тела поле гравитации может иметь очень сложное строение. Однако, по мере удаления от тела, резкие особенности в строении поля постепенно сглаживаются, и на достаточно большом расстоянии поле имеет почти такую же структуру, как в случае материальной точки. Если r — расстояние от центра массы тела, R — характерный размер последнего, то с относительной точностью порядка $\frac{R}{r}$ включительно гравитационный потенциал при любой форме тела совпадает с (1,5,3).

Во внешних точках гравитационный потенциал удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad (1,5,6)$$

а во внутренних точках тела — уравнению Пуассона

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\gamma\rho. \quad (1,5,7)$$

Изучение уравнений Лапласа и Пуассона составляет предмет теории потенциала, рассмотрение которой не входит в нашу задачу. Отметим только, что в этой теории фундаментальное значение имеет следующая теорема Дирхле: если функция φ вне масс отвечает уравнению (1,5,6), внутри масс — уравнению (1,5,7) и вместе со своим градиентом остается конечной и непрерывной во

всем пространстве, стремясь на бесконечности к нулю, как $\frac{1}{r}$, то она имеет единственное значение, совпадающее с (1,5,2). Из этой важной теоремы следует, что задание гравитационного потенциала соотношением (1,5,2) эквивалентно его заданию с помощью уравнений (1,5,6) и (1,5,7). При указанных свойствах гравитационного потенциала уравнения Лапласа и Пуассона вместе с формулой (1,5,1) являются лишь иным выражением закона тяготения Ньютона.

6. Небесная механика. На основе общих законов классической динамики и закона всемирного тяготения Ньютона возникла и получила широкое развитие *н е б е с н а я м е х а н и к а*, предметом которой является изучение движения небесных тел, главным образом тел Солнечной системы. Обыкновенно в небесной механике учитываются только гравитационные взаимодействия между изучаемыми телами, тогда как силы иной природы не принимаются во внимание. В большинстве случаев такие силы (например, сопротивление среды, электромагнитные взаимодействия и др.) не оказывают заметного влияния на движение небесных тел, но при определенных условиях они могут играть значительную роль. При изучении движения тел Солнечной системы учитываются лишь внутренние силы, поскольку внешние воздействия на систему, т. е. силы, приложенные со стороны других небесных тел (например, со стороны ближайших звезд), обыкновенно пренебрежимы. Расстояния между членами Солнечной системы велики по сравнению с их размерами, поэтому при изучении движения эти тела можно рассматривать как материальные точки. Такому упрощению способствует также почти сферическая форма всех крупных членов Солнечной системы — Солнца, больших планет и их спутников.

Простейшей из задач небесной механики является задача двух тел, исчерпывающее решение которой найдено еще Ньютоном. С математической точки зрения она приводит к системе дифференциальных уравнений шестого порядка. Поэтому общее решение задачи содержит шесть постоянных интегрирования, которые играют роль параметров, однозначно определяющих все обстоятельства движения. В астрономии принят исторически сложившийся выбор таких параметров, получивших название элементов орбиты.

На рис. 4 изображена система декартовых прямоугольных координат, начало которой совмещено с центром Солнца. Плоскость *xу* совпадает с плоскостью эклиптики, в которой происходит годовое обращение Земли вокруг Солнца, а направление оси *x* связано с некоторой точкой небесной сферы (так называемой точкой весны), которая может быть с большой точностью определена из наблюдений. В соответствии с задачей двух тел геоцентрическое движение планеты происходит вокруг Солнца по законам Кеплера. Плоскость

орбиты пересекается с плоскостью эклиптики по линии узло в ON . Узел N , в котором планета находится в момент перехода из области отрицательных значений координаты z в область положительных значений, называется *восходящим*; противоположный узел орбиты называется *нисходящим*. Угол Ω , определяющий направление из центра Солнца на восходящий узел орбиты, служит одним из элементов орбиты; он называется *долготой восходящего узла*. Вторым элементом является угловое расстояние ω от узла до ближайшей к Солнцу точки орбиты, обозначенной на нашем рисунке буквой π . Угол между плоскостью орбиты и эклипстикой равен углу i , образованному осью z с нормалью к плоскости движения планеты; он называется *наклоном* орбиты и служит третьим элементом. Большая полуось a и эксцентриситет e определяют размеры и форму планетной орбиты, а момент прохождения через перигелий τ позволяет связать положение планеты на орбите со временем. Совокупность всех шести элементов Ω, i, \dots, τ дает возможность однозначно определить положение планеты в пространстве в любой момент времени.

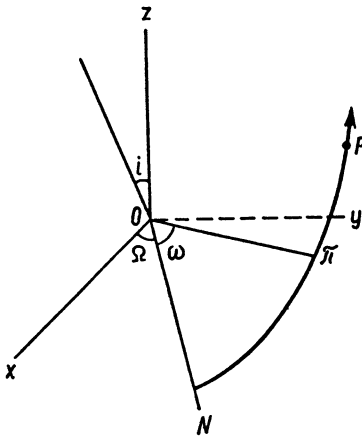


Рис. 4.

При изучении движения спутников планет перечисленные элементы орбиты могут иметь несколько иной смысл. Например, в случае искусственного спутника Земли ориентировку плоскости орбиты в пространстве удобнее определять наклоном по отношению к плоскости экватора, а параметром τ считать момент прохождения спутника через *перигей*, т. е. точку орбиты, ближайшую к земной поверхности.

При гиперболическом движении параметрами орбиты могут служить те же шесть элементов. Что касается параболического движения, то для его задания достаточно пяти элементов орбиты (парабола характеризуется одним лишь фокальным *параметром* p — половиной хорды, проведенной через фокус перпендикулярно к оси симметрии; вместо *параметра* часто употребляют *перигелийное* расстояние $q = \frac{p}{2}$).

Во всех трех случаях постоянные элементы орбиты служат характеристиками невозможного движения, ко-

гда планета находится в момент перехода из области отрицательных значений координаты z в область положительных значений, называется *восходящим*; противоположный узел орбиты называется *нисходящим*. Угол Ω , определяющий направление из центра Солнца на восходящий узел орбиты, служит одним из элементов орбиты; он называется *долготой восходящего узла*. Вторым элементом является угловое расстояние ω от узла до ближайшей к Солнцу точки орбиты, обозначенной на нашем рисунке буквой π . Угол между плоскостью орбиты и эклипстикой равен углу i , образованному осью z с нормалью к плоскости движения планеты; он называется *наклоном* орбиты и служит третьим элементом. Большая полуось a и эксцентриситет e определяют размеры и форму планетной орбиты, а момент прохождения через перигелий τ позволяет связать положение планеты на орбите со временем. Совокупность всех шести элементов Ω, i, \dots, τ дает возможность однозначно определить положение планеты в пространстве в любой момент времени.

торое происходит под действием гравитационного притяжения со стороны центрального тела. В Солнечной системе движение тела можно считать невозмущенным только в соответствующем приближении, поскольку в действительности оно подвергается притяжению со стороны всех других членов системы. Поэтому главное содержание небесной механики состоит в изучении задачи n тел, т. е. задачи о движении нескольких материальных точек, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона. При $n \geq 3$ строгое и в то же время практически эффективное решение этой задачи в общем случае оказывается невозможным. Поэтому в небесной механике рассматриваются различные специальные случаи и разрабатываются приближенные методы с учетом тех или иных особенностей Солнечной системы. К числу специальных случаев относится, например, случай Лагранжа в задаче трех тел, имеющий место при определенных начальных условиях, и так называемая ограниченная задача трех тел, когда два массивные тела движутся вокруг общего центра масс под влиянием взаимного притяжения, а третье тело имеет бесконечно малую массу. Однако частные случаи, допускающие строгое математическое решение, играют в небесной механике второстепенную роль. Обыкновенно дифференциальные уравнения движения небесных тел интегрируются приближенно с помощью аналитических или численных методов, позволяющих получить решение задачи с достаточной точностью. Не имея возможности даже кратко останавливаться на характеристике этих методов, мы приведем здесь группу формул небесной механики, которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем при исследовании возмущенного движения.

При интегрировании уравнений невозмущенного движения, происходящего в поле тяготения одного лишь центрального тела, шесть элементов орбиты играют роль произвольных постоянных. Это значит, в частности, что под влиянием притяжения Солнца каждая планета совершает кеплерово движение с постоянными элементами орбиты. Пользуясь методом вариации произвольных постоянных, нетрудно показать, что возмущенное движение можно представить как кеплерово движение с переменными элементами орбиты. Эти элементы, называемые *оскулирующими*, должны изменяться со временем в соответствии с весьма сложной системой дифференциальных уравнений Лагранжа. Отвечающая им оскулирующая орбита определяется для каждого заданного момента положением и скоростью планеты по формулам невозмущенного движения, применяемым в предположении, что начиная с этого момента возмущающая сила не действует на планету.

Допустим, что к данному телу, кроме притяжения со стороны центрального тела, приложена возмущающая сила. Обусловленное этой силой возмущающее ускорение зададим тремя

проекциями: на направление радиуса-вектора, на перпендикуляр к нему и на нормаль к плоскости оскулирующей орбиты. Обозначим эти проекции соответственно через R , S , W . Проекцию R условимся считать положительной, если она отвечает возрастанию радиуса-вектора, т. е. направлена от планеты в противоположную от центрального тела сторону. Положительная проекция S соответствует направлению обращения планеты, образуя острый угол со скоростью последней. Нормаль к плоскости орбиты направим в ту сторону, при наблюдении с которой обращение планеты представляется происходящим против часовой стрелки.

Система уравнений Лагранжа для оскулирующих элементов имеет вид (см., например, [7]):

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin(\omega + \varphi)}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \sin i} W; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos(\omega + \varphi)}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} W; \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi}{nae} R + \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi}{nae} \left(1 + \frac{r}{p}\right) S - \\ &\quad - \frac{r \sin(\omega + \varphi) \operatorname{ctg} i}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} W; \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2e \sin \varphi}{n(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} R + \frac{2a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{nr} S; \quad \frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi}{na} R + \\ &\quad + \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e} \left[\frac{a^2(1-e^2)}{r} - r \right] S; \quad (1,6,1) \\ \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{1}{na} \left(\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e} \cos \varphi \right) R - \frac{(1-e^2) \sin \varphi}{nae} \left(1 + \frac{r}{p}\right) S. \end{aligned}$$

Для элементов орбиты здесь приняты указанные выше обозначения. Величина n представляет собой среднее движение, соответствующее оскулирующей орбите, $\sigma = -\pi t$. Полярный угол φ (так называемая истинная аномалия) отсчитывается от оси, проведенной из фокуса через перигелий орбиты.

Если возмущающее ускорение достаточно мало, то элементы орбиты изменяются со временем медленно, и потому, применяя уравнения (1,6,1) к не очень большим промежуткам времени, в правых частях этих уравнений можно сохранить постоянные значения элементов.

Во многих случаях оскулирующие элементы удобно рассматривать в виде функций истинной аномалии. С этой целью уравнения (1,6,1) следует преобразовать с помощью законов Кеплера, которые мы напишем в форме

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad \frac{dt}{d\varphi} = r^2 \mu^{-\frac{1}{2}} p^{-\frac{1}{2}}, \quad n = \mu^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{3}{2}} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (1,6,2)$$

где $\mu = \gamma (M + m)$.

Умножая уравнения Лагранжа на $\frac{dt}{d\varphi}$, приведем их к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\varphi} &= \frac{\sin(\omega + \varphi)}{\mu p \sin i} r^3 W; \\ \frac{di}{d\varphi} &= \frac{\cos(\omega + \varphi)}{\mu p} r^3 W; \\ \frac{d\omega}{d\varphi} &= -\frac{\cos \varphi}{\mu e} r^2 R + \frac{(2 + e \cos \varphi) \sin \varphi}{\mu p e} r^3 S - \frac{\sin(\omega + \varphi) \cot i}{\mu p} r^3 W; \\ \frac{da}{d\varphi} &= \frac{2pe \sin \varphi}{\mu (1 - e^2)^2} r^2 R + \frac{2p^2}{\mu (1 - e^2)^2} r S; \\ \frac{de}{d\varphi} &= \frac{\sin \varphi}{\mu} r^2 R + \frac{e + 2 \cos \varphi + e \cos^2 \varphi}{\mu p} r^3 S; \\ \frac{d\sigma}{d\varphi} &= -\frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{\mu p e} (2e - \cos \varphi - e \cos^2 \varphi) r^3 R - \\ &\quad - \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi}{\mu p e} (2 + e \cos \varphi) r^3 S. \end{aligned} \quad (1,6,3)$$

Если X, Y, Z — декартовы проекции возмущающего ускорения, вычисленные в системе координат рис. 4, то принятые в уравнениях Лагранжа проекции R, S, W находятся по формулам

$$\begin{aligned} R &= X \cos \alpha_1 + Y \cos \alpha_2 + Z \cos \alpha_3; \\ S &= X \cos \beta_1 + Y \cos \beta_2 + Z \cos \beta_3; \\ W &= X \cos \gamma_1 + Y \cos \gamma_2 + Z \cos \gamma_3, \end{aligned} \quad (1,6,4)$$

где $\alpha_1, \dots, \beta_1, \dots, \gamma_1, \dots$ — углы между направлениями R, S, W и осями декартовых координат. Из рис. 4 непосредственно следуют соотношения

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos(\omega + \varphi), \quad \cos \alpha_2 = \sin(\omega + \varphi) \cos i, \\ \cos \alpha_3 &= \sin(\omega + \varphi) \sin i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \beta_1 &= -\sin(\omega + \varphi), & \cos \beta_2 &= \cos(\omega + \varphi) \cos i, \\ \cos \beta_3 &= \cos(\omega + \varphi) \sin i; & & (1,6,5) \\ \cos \gamma_1 &= 0; & \cos \gamma_2 &= -\sin i; & \cos \gamma_3 &= \cos i.\end{aligned}$$

В некоторых случаях возмущающее ускорение удобнее задавать другим способом, чем это принято в уравнениях (1,6,1) и (1,6,3). В плоскости орбиты ускорение проектируют на радиальное направление и на направление скорости планеты. Возмущающее ускорение задают при этом проекциями R , T , W , преобразуя соответствующим образом уравнения для оскулирующих элементов.

Далее мы будем во всех случаях пользоваться уравнениями Лагранжа в форме (1,6,1) или (1,6,3), так как возмущающее ускорение T нетрудно заменить проекциями на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему. Эти проекции определяются формулами

$$R = T \cos \alpha, \quad S = T \sin \alpha, \quad (1,6,6)$$

где через α обозначен угол между направлением радиуса-вектора и скоростью движения планеты. Его находят с помощью соотношений

$$\cos \alpha = \frac{e \sin \varphi}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \varphi}}, \quad \sin \alpha = \frac{1 + e \cos \varphi}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \varphi}}. \quad (1,6,7)$$

7. Принципиальные недостатки теории Ньютона. Как известно, небесная механика Ньютона широко разрабатывалась и долгое время служила образцом для других разделов классической физики. Она позволила с большой точностью объяснить особенности движений тел Солнечной системы и привела к открытию новой планеты, предсказанной Лаверье и Адамсом путем анализа наблюдаемых неравенств в движении Урана. Однако, отмечая быстрое и успешное развитие небесной механики Ньютона, необходимо также указать на серьезные принципиальные недостатки в ее физических основах.

Одним из них является необъяснимость пропорциональности инертной и тяжелой масс. Эта пропорциональность свидетельствует о глубокой связи между двумя совершенно различными физическими свойствами материальных тел: пассивным стремлением сохранить состояние движения и способностью к активному гравитационному взаимодействию с другими телами. В механике Ньютона равенство $m' = m$ никак не объясняется; оно как бы случайно, а выраженная им связь между тяготением и инерцией не находит истолкования. Мы можем только сказать, что, при соблюдении равенства $m' = m$ в заданном поле тяготения, ускорение материальной точки не зависит от ее массы и является характеристикой поля, совпадая с вектором напряженности в данной точке. Эта закономерность представляет собой наиболее общую и харак-

терную особенность гравитационного поля, отличающую его от силовых полей другой природы, и потому отсутствие ее объяснения приходится признать важным недостатком теории.

Второй закон динамики Ньютона, связывающий величину приложенной к телу силы с вызванным ею ускорением, выполняется в обычной формуле лишь в инерциальной системе отсчета. При переходе к неинерциальным координатам эта форма нарушается, поскольку в уравнение движения приходится вводить так называемые силы инерции, обусловленные не взаимодействием данного тела с другими материальными телами, а законом движения избранной системы координат.

Пусть система координат x', y', z' является инерциальной. Положение движущейся точки M , заданное в этой системе радиусом-вектором r' , в движущейся системе отсчета x, y, z определяется радиусом-вектором $r = xi + yj + zk$, где i, j, k — единичные векторы координатных направлений x, y, z соответственно.

Если в уравнение абсолютного движения $m \frac{d^2 r'}{dt^2} = F$ внести очевидное соотношение $r' = r_0 + xi + yj + zk$, то после необходимых преобразований получится

$$m w_r = F + (-m w_e) + (-m w_c), \quad (1,7,1)$$

где через w_r, w_e, w_c обозначены относительное, переносное и кориолисово ускорения, которые определяются формулами

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{d^2 x}{dt^2} i + \frac{d^2 y}{dt^2} j + \frac{d^2 z}{dt^2} k; \\ w_e &= \frac{d^2 r_0}{dt^2} + x \frac{d^2 i}{dt^2} + y \frac{d^2 j}{dt^2} + z \frac{d^2 k}{dt^2}; \\ w_c &= 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{di}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dj}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dk}{dt} \right). \end{aligned} \quad (1,7,2)$$

Уравнение (1,7,1) представляет собой закон движения материальной точки в движущейся системе координат. От обычной формы второго закона динамики он отличается тем, что в правой части, кроме действующей силы, находятся сила инерции переноса $(-m w_e)$ и сила инерции Кориолиса $(-m w_c)$. Силы инерции

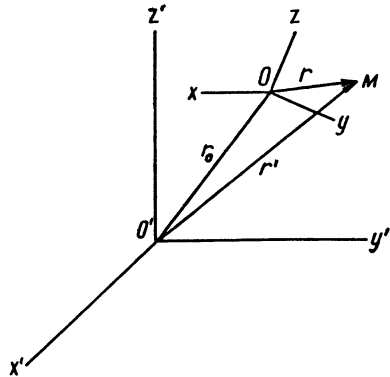


Рис. 5.

исчезают, если система x, y, z движется поступательно и без ускорений, т. е. если она также является инерциальной.

Понятие инерциальной системы отсчета имеет в механике фундаментальное значение, поскольку с ним связана формулировка основных законов движения. Между тем в теории Ньютона это понятие является физически бессодержательным, так как остается неизвестным, чем именно обусловлена привилегированность инерциальной системы координат. Существование инерциальных координат приходится постулировать, а вопрос об инерциальных свойствах конкретной системы отсчета можно решить лишь экспериментально.

Самым крупным недостатком небесной механики Ньютона является принцип дальнего действия (*actio in distans*), допускающий возможность непосредственного действия данного тела на сколь угодно большом расстоянии без посредства промежуточной среды.

Идея дальнего действия, почти безраздельно господствовавшая до середины XIX столетия, была изгнана из учения об электромагнитных явлениях после работ Фарадея, исследований Максвелла и опытов Герца, но в небесной механике она сохраняет свое значение до наших дней.

Определяя напряженность поля гравитации соотношением $\mathbf{f} = \text{grad } \varphi$, мы вычисляем потенциал по формуле

$$\varphi = \gamma \iiint \frac{\rho dt}{r},$$

учитывая распределение масс в пространстве в данный момент времени. Изменение этого распределения вызывает мгновенное изменение потенциала и напряженности поля во всех точках пространства. Таким образом, гравитации приписывается бесконечно большая скорость распространения. Это значит, в частности, что небесная механика допускает принципиальную возможность мгновенной передачи сигналов, вступая тем самым в конфликт с современной физикой. В следующей главе будут рассмотрены некоторые попытки отказа от принципа дальнего действия и замены его гипотезой конечной скорости гравитации. Здесь же мы только заметим, что буквальное понимание закона тяготения Ньютона с современной точки зрения недопустимо, поскольку оно с неизбежностью приводит к признанию гравитационного дальнего действия и, таким образом, сообщает небесной механике мистический характер.

8. Попытки механического объяснения тяготения. Развитие теории тяготения сопровождалось многочисленными попытками механического объяснения гравитационных взаимодействий. Перечисляя здесь некоторые из этих попыток, мы не будем входить в их количественное обсуждение, поскольку в настоящее время они

не имеют серьезного научного значения и могут представить только исторический интерес.

Гидростатическая модель тяготения, идея которой принадлежит, по-видимому, Ньютону, основана на предположении о том, что плотность и давление мирового эфира, окружающего материальное тело, убывает с удалением от его поверхности. Вследствие этого данное тело испытывает со стороны другого тела меньшее давление эфира, чем с противоположной стороны. Это и является причиной гравитационных взаимодействий: тяготение вызвано разностью давлений в эфире и выражает стремление тел перемещаться от более плотных к менее плотным частям мировой среды.

Следует иметь в виду, что Ньютон относился к эфирной гипотезе не только с большой осторожностью, но часто даже с явным скептицизмом и нигде не излагал ее в форме положительного утверждения. Упоминая эту гипотезу в вопросах, завершающих его «Оптику», Ньютон здесь же высказывал сомнения в самом существовании мирового эфира. В Общем поучении, которым заканчивается третья книга «Начал», Ньютон после перечисления основных свойств тяготения решительно отказывается обсуждать вопрос о его природе и формулирует свое отношение к нему с помощью знаменитой фразы: «Причину этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю».

Современник Ньютона Р. Гук развивал эфирную гипотезу тяготения в другом варианте. Согласно его представлению, колебания атомов материального тела передаются эфиру, распространяются в последнем и, достигая других тел, вызывают их притяжение к данному телу. Это представление является прообразом пульсационной гипотезы, предложенной в конце XIX столетия Бьеркнесом [8].

На основании законов гидродинамики было показано, что пульсирующие шары, помещенные в непрерывную среду на большом по сравнению с их радиусами расстоянии, обнаруживают видимое притяжение, если их пульсации совпадают по частоте и фазе. Сила взаимного притяжения прямо пропорциональна интенсивности пульсаций и обратно пропорциональна квадрату расстояния между центрами шаров. Использование этого вывода для механического объяснения гравитации вызывает непреодолимые трудности даже с чисто формальной точки зрения. Как известно, упругие волны возникают и распространяются только в сжимаемой жидкости. Поэтому, если принять гидродинамическую аналогию, то придется признать, что, согласно пульсационной гипотезе Бьеркнеса, мировая среда, передающая гравитацию, должна быть сжимаемой. Однако рассмотрение вопроса о взаимодействии пульсирующих шаров с учетом сжимаемости окружающей их жидкости показывает,

что знак этого взаимодействия будет противоположным, если расстояние между шарами превосходит половину длины волн в среде [9]. Таким образом, с точки зрения пульсационной гипотезы, на достаточно большом расстоянии гравитационное притяжение должно переходить в отталкивание.

Из всех гипотез о механизме гравитационных взаимодействий, высказывавшихся в XVIII—XIX ст., наибольшее распространение получила гипотеза Лесажа [10], согласно которой тяготение обусловлено ударами частиц мирового эфира. Предполагается, что

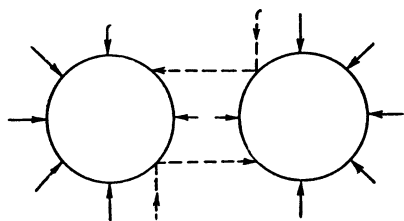


Рис. 6.

мировая среда, окружающая материальные тела, имеет корпускулярную структуру и состоит из мельчайших частиц, движущихся с огромными скоростями во всех направлениях. Для простоты скорости считались одинаковыми, а их направления в пространстве — равновероятными. При столкновении с атомами частицы эфира сообщают им импульсы соответствующих направлений и часть кинетической энергии. Лесажа допускал, что эфирные корпускулы абсолютно неупруги; другие исследователи, развивавшие эту гипотезу, приписывали им в той или другой степени упругие свойства.

Одинокое тело, достаточно удаленное от других тел, испытывает со всех сторон одинаковое действие эфирных корпускул, и потому получаемый им результирующий импульс равен нулю. Если же данное тело находится вблизи другого тела, то в распределении сталкивающихся с ним частиц эфира имеется асимметрия, которая создает отличный от нуля результирующий импульс, — появляется сила, зависящая от взаимного расположения тел. При вычислении результирующего импульса необходимо учитывать *экранирование*, вызывающее видимое притяжение тел, и действие *отраженных* частиц эфира, которые создают отталкивательную силу.

На рис. 6 условно показаны оба процесса. Пунктирными линиями изображены пути отраженных частиц, действие которых противоположно эффекту экранирования.

Лесажа учитывал только экранирование, поскольку корпускулы эфира он считал абсолютно неупругими.

При соответствующих допущениях можно показать, что в случае двух шаров возникающая вследствие экранирования сила притяжения изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между центрами шаров. Пропорциональность массам обеспечивается пористостью, которая позволяет корпускулам эфира сво-

бодно проникать в тела и независимо взаимодействовать с каждым атомом (сила притяжения пропорциональна числу атомов). Отталкивание, создаваемое отраженными корпускулами, уменьшает притяжение, не изменяя его зависимости от расстояния и от числа атомов.

Гипотеза Лесажа обсуждалась многими авторами, стремившимися подкрепить ее теми или иными дополнительными предположениями или развить математически. Однако и эта гипотеза связана с непреодолимыми трудностями, из которых перечислим здесь наиболее простые и очевидные.

Если удары частиц эфира не являются абсолютно упругими, то их кинетическая энергия должна передаваться сталкивающимся с ними телам. О судьбе этой энергии в гипотезе Лесажа ничего не говорится. Естественно было бы предположить, что столкновения с эфирными корпускулами вызывают нагревание гравитирующих тел. В частности, можно ожидать, что непрерывному нагреванию подвергаются также одинокие тела, не испытывающие притяжения со стороны других тел.

Согласно гипотезе Лесажа, сила взаимодействия между двумя телами должна зависеть от наличия третьего тела, расположенного между первыми. Например, притяжение Земли Солнцем должно изменяться в моменты, когда между ними располагается Луна. Однако, как известно, наблюдения не обнаруживают заметных возмущений гелиоцентрического движения Земли в такие моменты.

Выше указывалось, что одинокое тело остается в равновесии, поскольку корпускулы мировой среды оказывают на него одинаковое действие со всех сторон. Высказывая это утверждение, мы молчаливо предполагали, что по отношению к мировой среде данное тело покоится. Если же оно обладает достаточно большой скоростью, то симметрия в распределении скоростей частиц мировой среды нарушается, и тело получает от этих частиц импульс, противоположный направлению движения. Иными словами, быстро движущееся тело должно испытывать сопротивление со стороны мировой среды.

Остроумное возражение против гипотезы Лесажа высказал Дюбуа-Реймон. Представим себе тело вращения, имеющее форму усеченного конуса. Сечением этого тела плоскостью, проведенной через ось конуса, является трапеция $ABCD$ (рис. 7). Пусть в вершине конуса находится пробная частица O , испытывающая притяжение со стороны конуса. При заданной плотности вещества сила, действующая на частицу, зависит от высоты H ; при возрастании

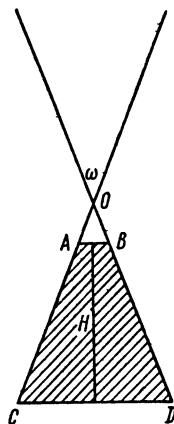


Рис. 7.

H она может оказаться сколь угодно большой. По Лесажу сила притяжения определяется разностью двух импульсов, один из которых обусловлен ударами частиц, движущихся внутри телесного угла ω сверху вниз, а другой — частицами, движущимися вверх со стороны тела *ABCD*. Верхний предел результирующей силы определяется первым импульсом и соответствует случаю, когда все корпускулы мировой среды, движущиеся внутри конуса снизу вверх по направлению к пробной частице *O*, поглощаются веществом. Таким образом, согласно гипотезе Лесажа, предельное значение силы, действующей на пробную частицу, является конечным и обусловлено свойствами мировой среды, тогда как, по закону тяготения Ньютона, эта сила не имеет конечного предела и неограниченно возрастает вместе с высотой *H*.

Не входя в более подробное обсуждение предлагавшихся в разное время механических моделей гравитации, еще раз подчеркнем, что, с современной точки зрения, эти модели могут представить только исторический интерес. Можно, по-видимому, не сомневаться в том, что в рамках механики Ньютона невозможно получить удовлетворительного объяснения природы гравитационных взаимодействий. Существенный успех в развитии проблемы гравитации возможен только на основе принципиально нового подхода, выходящего за пределы ньютоновой механики. Как теперь хорошо известно, этот успех впервые был достигнут в связи с разработкой с тециальной и особенно общей теории относительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н ь ю т о н. Оптика или трактат об отражениях, преломлениях и цветах света. Перевод С. И. Вавилова. Госиздат, М.— Л., 1927.
2. И. Н ь ю т о н. Математические начала натуральной философии. Перевод А. Крылова, собрание трудов акад. А. Н. Крылова, 7. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1936.
3. С. И. В а в и л о в. Исаак Ньютон. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1961.
4. F. W. Bessel.— Abhandlung. Akad. Wissensch. Berlin, 1830.
5. R. E ö t v ö s.— Mathem. und Naturwiss. Bericht. aus Ungarn, 8, 66, 1890.
6. R. E ö t v ö s, D. P e k a r, E. F e k e t e.— Abhandlung. der XVI allgemeinen Konferenz der internat. Erdmessung. 1903. R. E ö t v ö s, D. P e k a r, E. F e k e t e.— Annal. Phys., 68, 11, 1922.
7. R. H. D i c k e.— American Scientist, 205 (6), 84, 1961.
8. М. Ф. С у б б о т и н. Курс небесной механики, 2. ОНТИ, М.— Л., 1937.
9. V. B j e r k n e s. Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. B j e r k n e s Theorie. Leipzig, 1900.
10. А. К о р н. Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. Berlin, 1898.
11. G. L. L e s a g e.— Nouv. Memoires de l'Academie Royale des Science. Berlin, 1782.
12. P. P r e v o s t. Deux tractes de Physique mecanique. Paris, 1818.

Глава II. ПОПЫТКИ УТОЧНЕНИЯ ЗАКОНА НЬЮТОНА

1. Закон тяготения в форме Клеро. В течение XVIII и XIX ст. развитие небесной механики сопровождалось попытками уточнить закон тяготения Ньютона путем введения различных малых поправок в формулу обратных квадратов. До создания теории относительности такие попытки в большинстве случаев имели характер формальных гипотез, высказывавшихся без глубокого пересмотра основ механики Ньютона. Появление этих гипотез связано с отдельными трудностями небесной механики, которые вызывали сомнения в точности закона обратных квадратов, а также с различными общими соображениями, в частности со стремлением отказаться от принципа дальнего действия.

Первая теория возмущенного движения Луны была разработана Ньютоном и изложена в третьей книге «Начал». Однако полученная Ньютоном оценка движения линии апсид лунной орбиты оказалась ошибочной. Учитывая среднее значение возмущающей силы солнечного притяжения, Ньютон нашел, что в течение одного обращения Луны линия апсид ее орбиты перемещается в прямом направлении на $1^{\circ} 31' 28''$, тогда как в действительности это перемещение приблизительно в два раза больше и превышает 3° .

В 1745 г. в известном мемуаре «О системе мира согласно началу тяготения» Клеро [1] подтвердил оценку Ньютона, придя, таким образом, к выводу о том, что закон обратных квадратов не может объяснить наблюдаемое движение лунного перигея. В связи с этим Клеро предложил заменить обычный закон тяготения формулами вида $\frac{\gamma M}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)$ или $\frac{\gamma M}{r^2} \left(1 + \frac{\beta}{r^2}\right)$, где α , β — постоянные, значения которых должны отвечать наблюдаемому движению перигея геоцентрической орбиты Луны. Из-за малости этих значений предполагалось, что на расстояниях порядка радиусов гелиоцентрических планетных орбит дополнительные члены в формуле закона силы будут пренебрежимо малы.

Впоследствии Клеро отказался от этой идеи и вернулся к обычной формуле обратных квадратов. В 1752 г. он представил в Петербургскую Академию наук работу «Теория Луны, выведенная из единственного начала притяжения, обратно пропорционального

квадратам расстояний», в которой развита более точная теория возмущенного движения Луны, позволившая, в частности, получить вполне удовлетворительное решение задачи о движении линии апсид лунной орбиты [2].

В конце XIX ст. изучение так называемой «Портсмутской коллекции» рукописей Ньютона показало, что создатель закона всемирного тяготения нашел правильное решение задачи задолго до работ Клеро, хотя это решение, оставшееся неизвестным до 1872 г., не могло иметь значения для небесной механики XVIII ст.

Не останавливаясь на других обстоятельствах этого важного этапа в развитии небесной механики, подробно описанного в интересной статье Н. И. Идельсона [3], рассмотрим закон тяготения

$$\mathbf{f} = -\frac{\gamma M}{r^3} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r^n}\right) \mathbf{r}, \quad (2,1,1)$$

который можно назвать законом Клеро*.

Основной интерес могут представить особенности движения в задаче двух тел, обусловленные дополнительной компонентой силы, которая отличает (2,1,1) от обычного закона Ньютона.

Обозначим радиусы-векторы точечных масс M , m через \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 соответственно. Уравнения движения масс имеют вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{\gamma m}{r^3} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r^n}\right) \mathbf{r}; \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{\gamma M}{r^3} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r^n}\right) \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — радиус-вектор второй массы относительно первой.

Относительное движение определяется уравнением

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\gamma(M+m)}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{\gamma \varepsilon (M+m)}{r^{n+3}} \mathbf{r}. \quad (2,1,2)$$

Это уравнение показывает, что с точки зрения обычной небесной механики движение происходит под действием ньютоновой силы и центростремительного возмущающего ускорения. Из трех проекций возмущающего ускорения, входящих в общие уравнения для оскулирующих элементов, отличной от нуля является лишь радиальная проекция R .

Согласно (2,1,2) имеем

$$r^2 R = -\frac{\gamma \varepsilon (M+m)}{r^n}. \quad (2,1,3)$$

Найдем возмущения в большой полуоси, эксцентриситете и в движении линии апсид относительной орбиты. Воспользовавшись

* Такое название условно, поскольку, независимо от Клеро, этот закон был предложен также Даламбером. Впервые движение под действием центральной силы вида (2,1,1) рассматривалось Ньютоном.

общими уравнениями (1,6,3) и соотношением (2,1,3), находим

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\varphi} &= -\frac{2ee}{a^{n-1}(1-e^2)^{n+2}} \sin \varphi (1 + e \cos \varphi)^n; \\ \frac{de}{d\varphi} &= -\frac{e}{a^n(1-e^2)^n} \sin \varphi (1 + e \cos \varphi)^n; \\ \frac{d\omega}{d\varphi} &= \frac{e}{ea^n(1-e^2)^n} \cos \varphi (1 + e \cos \varphi)^n.\end{aligned}$$

Изменение элементов за время одного обращения находится интегрированием по полярному углу. Выполняя его, легко убедиться в том, что большая полуось и эксцентриситет не испытывают вековых изменений, тогда как линия апсид в течение каждого периода поворачивается в прямом направлении на угол

$$\Delta\omega = \frac{e}{ea^n(1-e^2)^n} \int_0^{2\pi} \cos \varphi (1 + e \cos \varphi)^n d\varphi. \quad (2,1,4)$$

При $n = 1$ имеем

$$\Delta\omega = \frac{e\pi}{a(1-e^2)}. \quad (2,1,5)$$

В случае закона (2,1,1) этот эффект должен наблюдаться в невозмущенной задаче двух тел. Для его проверки формулу (2,1,5) необходимо сравнить с величиной невязки между наблюдаемым движением линии апсид и результатом вычислений, выполненных на основе обычной теории возмущений. Как известно, необъяснимое вековое перемещение перигелия Меркурия, остающееся после учета возмущений, было открыто в 1859 г. Леверье [4] на основании составленных им таблиц движения больших планет. Полученная Леверье невязка ($38''$,3 в столетие) неоднократно уточнялась. Подробное исследование этого эффекта, выполненное с привлечением обширного наблюдательного материала, выполнил Ньюкомб [5], который в 1898 г. получил величину $41''$,24. Более поздние исследования (например, Гроссмана, [6] и др.) не внесли в эту оценку существенных изменений. В начале 30-х годов нашего столетия вопрос потребовал пересмотра в связи с необходимостью учета неравномерности вращения Земли. Глейх [7], сделавший первую попытку такого учета, получил значительно меньшую невязку. Однако последующие работы Фосерингема [8] и др. не подтвердили этой оценки. Тщательный пересмотр вопроса был произведен Г. А. Чеботаревым [9], результат которого составляет $42''$,65 \pm 0'',60.

Ниже приводятся невязки для трех первых планет Солнечной системы, согласно [10].

Меркурий	Венера	Земля
43'',11 \pm 0,45 (Клеменс)	8'',4 \pm 4,8 (Данкомб)	5'',0 \pm 1,2 (2,1,6) (Клеменс, Морган, Данкомб)

Для Меркурия величина $\Delta\omega$, выраженная в радианах и отнесенная к одному обращению, составляет $0,50 \cdot 10^{-6}$. Если эту величину отождествить с эффектом (2,1,5), обусловленным дополнительной компонентой силы в законе Клеро, то получится $\epsilon = 8,8 \cdot 10^6$ см. Для Венеры и Земли значения $\Delta\omega$ оказываются при этом равными $2,6 \cdot 10^{-7}$ и $1,8 \cdot 10^{-7}$, т. е. $8'',6$ и $3'',8$ в столетие, что хорошо согласуется с (2,1,6).

Мы видим, что закон тяготения в форме Клеро при соответствующем выборе постоянной ϵ позволяет дать удовлетворительное количественное объяснение невязок в движении линий апсид планетных орбит. Однако этот закон оказывается неприемлемым даже с чисто формальной точки зрения, поскольку он противоречит наблюдениям в другом отношении.

Наблюдаемое движение лунного перигея, как было указано, обусловлено возмущающим действием Солнца. Поэтому в невозмущенном движении Луны, происходящем в поле тяготения Земли, движения линии апсид лунной орбиты не должно быть. Между тем формула (2,1,5) в применении к геоцентрическому движению Луны дает $\Delta\omega \approx 15''$, что составляет более $3'$ в год. В невозмущенном движении Луны такого эффекта в действительности нет.

2. Закон тяготения в форме $\frac{\gamma M}{r^2} e^{-hr}$. В конце прошлого столетия

Зеелигер [11] подробно рассмотрел так называемый гравитационный парадокс, возникающий при попытке распространить закон тяготения Ньютона на бесконечное пространство, заполненное материей с конечной плотностью. Естественно допустить, что гравитационный потенциал, обусловленный космическими массами, наполняющими мировое пространство, является величиной конечной, а производные от него по координатам имеют в среднем нулевые значения. Между тем, несложные вычисления показывают, что при соблюдении точной формы закона тяготения Ньютона указанные условия выполняются лишь в том случае, если во всех направлениях от выбранной точки плотность космических масс убывает с расстоянием быстрее, чем r^{-2} . Представление о бесконечном пространстве с конечной во всех его частях плотностью космических масс оказывается, таким образом, несовместимым с законом тяготения Ньютона. Это заключение и получило название космологического парадокса Зеелигера.

Приверживаясь концепции бесконечной Вселенной, заполненной веществом с конечной плотностью, можно устранить парадокс Зеелигера, отказавшись от точной формы закона Ньютона. В частности, это можно осуществить, заменив закон обратных квадратов

формулой, применявшейся еще Лапласом [12]:

$$f = -\frac{\gamma M}{r^3} r e^{-hr}, \quad (2,2,1)$$

где h — некоторая положительная постоянная.

Наличие экспоненциального множителя обеспечивает сходимость интегралов и тем самым устраняет гравитационный парадокс. В то же время при достаточно малом h формула (2,2,1) в случае не очень больших расстояний мало отличается от закона Ньютона; ее применение не внесет существенных изменений в выводы небесной механики и приведет лишь к небольшим дополнительным эффектам.

Пусть $hr \ll 1$. С достаточной точностью (2,2,1) принимает вид

$$f = -\frac{\gamma M}{r^3} (1 - hr) r, \quad (2,2,2)$$

совпадая с (2,1,1) при $\epsilon = -h$, $n = -1$.

Для применения (2,2,2) к задаче двух тел можно воспользоваться результатами, полученными в случае закона Клеро. Основываясь на вычислениях, выполненных в предыдущем параграфе, приходим к заключению, что большая полуось и эксцентриситет только периодически изменяются, тогда как линия апсид медленно вращается в плоскости орбиты. В течение одного обращения эта линия поворачивается на угол

$$\Delta\omega = \frac{2\pi ha}{e^2} \left\{ (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} - 1 + e^2 \right\}, \quad (2,2,3)$$

как это следует из (2,1,4) при указанных значениях постоянных ϵ и n .

Пренебрегая более высокими степенями эксцентриситета, эту формулу можно написать в виде

$$\Delta\omega = \pi ah \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right). \quad (2,2,4)$$

Для оценки постоянной h отождествим этот эффект с наблюдаемой невязкой в движении перигелия Меркурия. Внося $\Delta\omega = 5,0 \times 10^{-7}$ в (2,2,4) и выполнив необходимые вычисления, найдем $h = 2,8 \cdot 10^{-20} \text{ см}^{-1}$. При этом произведение hr в пределах Солнечной системы остается достаточно малым; даже для Плутона оно составляет лишь около $1,6 \cdot 10^{-5}$, обеспечивая достаточную точность представления закона (2,2,1) в форме разложения (2,2,2).

Неприемлемость рассматриваемого закона связана прежде всего с тем обстоятельством, что формула (2,2,4) не соответствует известным невязкам в движении линий апсид. Для Луны получается пренебрежимая величина (около $7'' \cdot 10^{-6}$ за одно обращение).

Однако применение (2,2,4) к планетам приводит к слишком большим значениям эффекта. Для Венеры и Земли получается соответственно 32" и 27" в столетие, что невозможно примирить с величинами (2,1,6), выведенными из наблюдений.

3. Закон тяготения Холла. Обсуждение проблемы движения перигелиев планетных орбит связано с еще одной попыткой уточнения закона Ньютона. В 1894 г. Холл исследовал эту задачу на основе закона тяготения [13]

$$f = - \frac{\gamma M}{r^{3+\alpha}} r, \quad (2,3,1)$$

где α — малая положительная поправка, уточняющая обычный закон обратных квадратов.

По Холлу, удовлетворительное объяснение невязки в движении линии апсид орбиты Меркурия получается при $\alpha = 1,574 \cdot 10^{-7}$. Почти одновременно с Холлом закон (2,3,1) изучал также Ньюкомб [14].

Представим закон (2,3,1) в форме, более удобной для последующих вычислений.

Произведем разложение

$$r^\alpha = 1 + \frac{\alpha \ln r}{1!} + \frac{(\alpha \ln r)^2}{2!} + \dots$$

и, считая поправку α достаточно малой, сохраним член только первого порядка относительно величины $\alpha \ln r$. Вместо (2,3,1) в этом приближении можно написать

$$f = - \frac{\gamma M}{r^3} r + \frac{\alpha \gamma M \ln r}{r^3} r. \quad (2,3,2)$$

Приложим этот закон к задаче двух тел.

Уравнение относительного движения имеет вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{\gamma (M + m)}{r^3} r = \frac{\alpha \gamma (M + m) \ln r}{r^3} r.$$

Оно показывает, что, кроме ньютонового притяжения, на движущееся тело действует отталкивательное возмущающее ускорение. Радиальная проекция этого ускорения находится из соотношения

$$r^2 R = \alpha \gamma (M + m) \ln r. \quad (2,3,3)$$

Проекции ускорения на перпендикуляр к радиусу-вектору и на нормаль к плоскости орбиты имеют нулевые значения.

Обратимся к общим уравнениям (1,6,3), определяющим изменение оскулирующих элементов со временем. Внося в них $W =$

$= S = 0$ и равенство (2,3,3), после интегрирования по полярному углу получим

$$\Delta a = \frac{2ae\alpha}{1-e^2} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \ln r d\varphi; \quad \Delta e = \alpha \int_0^{2\pi} \sin \varphi \ln r d\varphi;$$

$$\Delta \omega = -\frac{\alpha}{e} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \ln r d\varphi. \quad (2,3,4)$$

Этими формулами определяются изменения элементов орбиты в течение одного обращения.

В рассматриваемом приближении для вычисления интегралов (2,3,4) можно воспользоваться уравнением невозмущенной орбиты. Внося $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi}$, легко убедиться в том, что задача сводится к вычислению интегралов

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin \varphi \ln(1+e \cos \varphi) d\varphi; \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \ln(1+e \cos \varphi) d\varphi.$$

Интегрированием по частям первый из них приводится к величине

$$-\int_0^{2\pi} \frac{e \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}{1+e \cos \varphi} = 0.$$

Второй интеграл преобразуется следующим образом:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{e \sin^2 \varphi d\varphi}{1+e \cos \varphi} = \frac{2\pi}{e} (1 - \sqrt{1-e^2}).$$

Следовательно,

$$\Delta a = \Delta e = 0, \quad \Delta \omega = \frac{2\alpha\pi}{e^2} (1 - \sqrt{1-e^2}). \quad (2,3,5)$$

С точностью до членов порядка e^2 включительно можно написать $\Delta \omega = \alpha\pi$.

Итак, в задаче двух тел, взаимодействующих по закону Холла, большая полуось и эксцентриситет изменяются только периодически. Вековым эффектом, монотонно возрастающим со временем, является движение линии апсид. Если его отождествить с наблюдаемой невязкой в движении перигелия Меркурия, положив $\Delta \omega = 5,0 \cdot 10^{-7}$, то получится $\alpha = 0,00000016$. Для Луны этот эффект составил бы около $140''$ в столетие; для Венеры, Земли и Марса — приблизительно $16'', 8, 10'', 1$ и $5'', 5$ соответственно, что значительно превосходит невязки, выведенные из наблюдений.

4. Отказ от принципа дальнего действия. Многочисленные попытки уточнить закон тяготения связаны с отказом от принципа гравитационного дальнего действия — наиболее слабого момента механики Ньютона. Первая из таких попыток была предпринята,

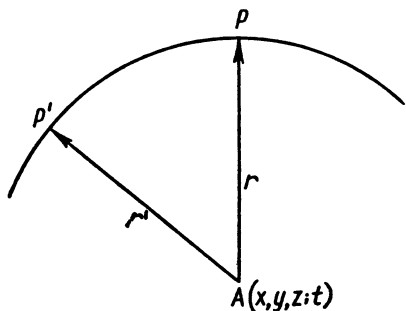


Рис. 8.

по-видимому, Лапласом [15], который пришел к заключению о том, что дополнение теории Ньютона постулатом конечной скорости передачи гравитации приводит к значительным трудностям в небесной механике. В дальнейшем обобщения закона Ньютона предлагались в различных вариантах, основанных на тех или иных предположениях о распространении гравитационных взаимодействий. Рассмотрим простейший из них.

Допустим, что в данной точке пространства напряженность поля тяготения отвечает обычной форме закона Ньютона, но в определенный момент времени она обусловлена некоторым предшествующим положением движущегося тела, создающего рассматриваемое поле.

Пусть точечная масса M движется по закону $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. В данный момент t напряженность поля в точке $A(x, y, z)$ определяется формулой (рис. 8)

$$\mathbf{f} = \frac{\gamma M}{r'^3} \mathbf{r}'. \quad (2,4,1)$$

Здесь \mathbf{r}' — радиус-вектор, отнесенный к предшествующему моменту t' , удовлетворяющему условию $t - t' = \frac{r'}{V}$, где V — конечная скорость передачи гравитационного действия. Масса M движется со скоростью \mathbf{v} , предположительно весьма малой по сравнению с V . С точностью до членов 1-го порядка относительно $\frac{v}{V}$ можно написать

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{V} r.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3} \left\{ 1 + 3 \left(\frac{\mathbf{r}}{r}, \frac{\mathbf{v}}{V} \right) \right\}.$$

Внеся эти соотношения в (2,4,1), получим

$$\mathbf{f} = \frac{\gamma M}{r^3} \mathbf{r} + \frac{3\gamma M}{r^3} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}, \frac{\mathbf{v}}{V} \right) \mathbf{r} - \frac{\gamma M}{r^2} \frac{\mathbf{v}}{V}. \quad (2,4,2)$$

Возможен и другой способ обобщения закона Ньютона, основанный на понятии потенциала. С учетом запаздывания потенциал поля в точке A в данный момент времени равен

$$\Phi = \frac{\gamma M}{r'},$$

где r' имеет прежнее значение.

Несложные вычисления показывают, что в этом случае напряженность поля определяется в том же приближении формулой

$$\mathbf{f} = \frac{\gamma M}{r^3} \mathbf{r} + \frac{2\gamma M}{r^3} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{V} \right) \mathbf{r} - \frac{\gamma M}{r^2} \frac{\mathbf{v}}{V}, \quad (2,4,3)$$

отличающейся от (2,4,2) лишь коэффициентом среднего члена.

Рассмотрим один из этих законов подробнее. Пусть масса, создающая поле гравитации, движется в радиальном направлении, приближаясь к точке A или удаляясь от нее.

Внося в (2,4,3) соотношение $\mathbf{v} = \pm \frac{v}{r} \mathbf{r}$, отвечающее указанным случаям движения, получим

$$\mathbf{f} = \frac{\gamma M}{r^3} \left(1 \mp \frac{v}{V} \right) \mathbf{r}.$$

Приближающаяся масса притягивает слабее, а удаляющаяся — сильнее, чем это следует из закона Ньютона.

Если масса движется в тангенциальном направлении, то второй член в (2,4,3) исчезает и напряженность поля оказывается равной

$$\mathbf{f} = \frac{\gamma M}{r^2} \mathbf{r} - \frac{\gamma M}{r^2} \frac{\mathbf{v}}{V}.$$

Дополнительная компонента напряженности антипараллельна скорости.

Приложим закон (2,4,3) к задаче двух тел.

Обозначим радиусы-векторы точечных масс M и m через \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно. Пусть абсолютные скорости точек будут \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 . Относительная скорость второй массы $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, а ее относительный радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Согласно закону (2,4,3), уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= \frac{\gamma m}{r^3} \mathbf{r} + \frac{2\gamma m}{r^3} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{v}_2}{V} \right) \mathbf{r} - \frac{\gamma m}{r^2} \frac{\mathbf{v}_2}{V}; \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= -\frac{\gamma M}{r^3} \mathbf{r} + \frac{2\gamma M}{r^3} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{V} \right) \mathbf{r} - \frac{\gamma M}{r^2} \frac{\mathbf{v}_1}{V}. \end{aligned}$$

Вычитая из второго равенства первое, найдем уравнение движения материальной точки m относительно массы M . Воспользовавшись соотношениями $\mathbf{v}_1 = -\frac{m}{M+m} \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = \frac{M}{M+m} \mathbf{v}$, которые

непосредственно вытекают из определения $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ и закона центра масс $M\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 = 0$, представим это уравнение в виде

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\gamma(M+m)}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{4\gamma Mm}{(M+m)r^3}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}, \frac{\mathbf{v}}{V}\right)\mathbf{r} + \frac{2\gamma Mm}{(M+m)r^2}\frac{\mathbf{v}}{V}. \quad (2,4,4)$$

Кроме ньютонового притяжения, к материальной точке приложены две возмущающие силы, одна из которых действует вдоль радиуса-вектора, а другая направлена по касательной к орбите. Первая из них имеет следующие проекции на положительное направление радиуса-вектора, на перпендикуляр к нему и на нормаль к плоскости орбиты:

$$R = -\frac{4\gamma Mm}{(M+m)r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}, \frac{\mathbf{v}}{V}\right); \quad S = W = 0.$$

Проекции второй силы на те же направления таковы:

$$R = \frac{e \sin \varphi}{(1 + e^2 + 2e \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}} T; \quad S = \frac{1 + e \cos \varphi}{(1 + e^2 + 2e \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}} T; \quad W = 0.$$

Здесь через T обозначена абсолютная величина этой силы. Результирующая обеих сил имеет проекции

$$R = -\frac{2\gamma Mm}{(M+m)r^2}\frac{v}{V}\frac{e \sin \varphi}{(1 + e^2 + 2e \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}};$$

$$S = \frac{2\gamma Mm}{(M+m)r^2}\frac{v}{V}\frac{1 + e \cos \varphi}{(1 + e^2 + 2e \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}}; \quad (2,4,5)$$

$$W = 0.$$

Допустим, что в ньютоновом приближении, которому отвечает $V = \infty$, орбита является эллиптической. Найдем вековые вариации, вызываемые в элементах орбиты возмущающим ускорением (2,4,5). С этой целью воспользуемся общими уравнениями (1,6,3), определяющими оскулирующие элементы в функции истинной аномалии. Основной интерес представляют элементы ω , a , e .

Внесем (2,4,5) в уравнения (1,6,3). Для орбитальной скорости можно при этом принять формулу

$$v^2 = \frac{\gamma(M+m)}{a(1-e^2)}(1 + e^2 + 2e \cos \varphi),$$

которая непосредственно следует из интеграла живых сил ньютоновой задачи двух тел.

Выполнив необходимые вычисления, получим

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{4\gamma M m (1 + e \cos \varphi) \sin \varphi}{(M + m) [\gamma (M + m)]^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} e V};$$

$$\frac{da}{d\varphi} = \frac{4\gamma M m a^{\frac{1}{2}}}{(M + m) [\gamma (M + m)]^{\frac{1}{2}} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} V} [1 - e^2 + 2e \cos \varphi (1 + e \cos \varphi)];$$

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{4\gamma M m (1 + e \cos \varphi) \cos \varphi}{(M + m) [\gamma (M + m)]^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} V}.$$

Изменения элементов за время одного обращения находятся путем интегрирования по полярному углу, после чего легко убедиться в том, что эти изменения равны

$$\Delta\omega = 0;$$

$$\Delta a = \frac{8\pi\gamma M m a^{\frac{1}{2}}}{(M + m) [\gamma (M + m)]^{\frac{1}{2}} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} V};$$

$$\Delta e = \frac{4\pi\gamma M m e}{(M + m) [\gamma (M + m)]^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} V}.$$
(2,4,6)

Для количественной оценки эффектов достаточно рассмотреть ограниченную задачу двух тел, т. е. случай $m \ll M$, когда формулы упрощаются.

$$\Delta\omega = 0;$$

$$\Delta a = \frac{8\pi\gamma m a^{\frac{1}{2}}}{(\gamma M)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} V};$$

$$\Delta e = \frac{4\pi\gamma m e}{(\gamma M)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} V}.$$
(2,4,7)

При взаимодействии по закону (2,4,3) размеры и форма орбиты в задаче двух тел испытывают вековые изменения, зависящие от скорости распространения гравитации. Наиболее существенным эффектом является изменение большой полуоси орбиты, указанное еще Лапласом.

Применяя формулы (2,4,7) к гелиоцентрическому обращению Земли и положив, что передача гравитации происходит со скоростью

света, находим $\Delta a = 1,1 \cdot 10^5$ см, $\Delta e = 6 \cdot 10^{-11}$. Вторая из этих величин пренебрежима, тогда как первая — недопустима велика.

Для Луны этот эффект оказывается еще более значительным: при $V = c$ формула (2,4,7) дает $\Delta a \approx 5$ км/год. Как известно, наблюдения показывают, что в действительности большая полуось орбиты в задаче двух тел не испытывает вековых изменений. В связи с этим Лаплас указал, что при отказе от принципа дальнего действия необходимо постулировать чрезвычайно большую скорость передачи гравитации, во много раз превосходящую скорость света. К аналогичным заключениям приходили и более поздние исследователи, напр. Оппольцер, Леман и др.

Следует заметить, что многие авторы, принимая принцип конечной скорости распространения гравитации, изменяли также форму закона тяготения. При этом вековое возрастание большой полуоси орбиты в задаче двух тел не является необходимым следствием отказа от гравитационного дальнего действия. В качестве примера рассмотрим закон

$$F = \frac{\gamma Mm}{r^2} \left[1 - \frac{1}{V^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{V^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right], \quad (2,4,8)$$

предложенный в 1876 г. Цельнером [16].

В этом случае в задаче двух тел сила остается центральной, но, кроме ньютоновой компоненты, отвечающей обычному закону обратных квадратов, появляется возмущающее ускорение

$$R = \frac{\gamma (M + m)}{r^2 V^2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2 r}{dt^2} \right],$$

направленное по радиусу-вектору.

Если невозмущенное движение является эллиптическим, то с достаточной точностью можно написать

$$r^2 R = \frac{e \gamma (M + m)^2}{a (1 - e^2) V^2} (3e \sin^2 \varphi - 2 \cos \varphi - 2e). \quad (2,4,9)$$

Пользуясь методом оскулирующих орбит, нетрудно определить вековые эффекты, обусловленные законом Цельнера. Внося (2,4,9) в уравнения (1,6,3) для оскулирующих элементов и выполняя затем интегрирование по полярному углу, находим приращения элементов за время одного обращения

$$\Delta \omega = \frac{2\pi \gamma (M + m)}{a (1 - e^2) V^2}; \quad \Delta a = \Delta e = 0. \quad (2,4,10)$$

Мы видим, что в данном случае большая полуось и эксцентриситет орбиты не испытывают вековых изменений; орбита только медленно прецессирует в прямом направлении.

Формула (2,4,10) хорошо согласуется с наблюдаемыми невязками в движении перигелиев планетных орбит. Действительно,

при $V = 1,73 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ эта формула дает значения, близкие к (2,1,6). Однако такое объяснение нельзя признать удовлетворительным, поскольку закон Цельнера (2,4,8) является лишь формальной гипотезой, не получившей обоснования с физической точки зрения.

Другим примером может служить закон тяготения Гаусса

$$F = \frac{\gamma M m}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{V^2} \left[2v^2 - 3 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2,4,11)$$

где — V относительная скорость взаимодействующих тел.

Радиальное возмущающее ускорение в задаче двух тел определяется в этом случае соотношением

$$r^2 R = - \frac{[\gamma (M + m)]^2}{a (1 - e^2) V^2} (3e^2 \cos^2 \varphi + 4e \cos \varphi + 2 - e^2),$$

а изменения элементов орбиты в течение одного обращения равны

$$\Delta a = \Delta e = 0, \quad \Delta \omega = \frac{4\pi\gamma (M + m)}{a (1 - e^2) V^2}. \quad (2,4,12)$$

И здесь единственным вековым эффектом в задаче двух тел является прямое движение линии апсид. Количественное совпадение этого эффекта с наблюдаемой невязкой (2,1,6) получается при $V = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$.

В заключение рассмотрим обобщение закона тяготения, построенное по аналогии с понятием запаздывающего потенциала классической электродинамики. Как известно, в электродинамике потенциал электрического поля, обусловленного движущимися зарядами, определяется общей формулой

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint \frac{1}{r'} \rho(x', y', z', t - \frac{r'}{c}) dt',$$

где ρ — объемная плотность электрического заряда. При интегрировании величина ρ в точке x', y', z' должна быть взята для момента $t' = t - \frac{r'}{c}$, где r' — расстояние до заданной точки x, y, z . Применение этой общей формулы к полю одного движущегося заряда приводит к потенциалу Лиенара — Вихерта (см., например, [17])

$$\varphi = \frac{e}{r' + \frac{1}{c} (r', v')}.$$

Через \mathbf{r}' и \mathbf{v}' здесь обозначены относительный радиус-вектор и скорость заряда, взятые в момент времени t' .

По аналогии с потенциалом Лиенара — Вихерта примем, что запаздывающий гравитационный потенциал определяется формулой

$$\varphi = \frac{\gamma M}{r' + \frac{1}{c} (\mathbf{r}', \mathbf{v}')} . \quad (2,4,13)$$

С точностью до членов 1-го порядка относительно $\frac{v}{c}$ векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' связаны соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \frac{\mathbf{r}'}{c} \mathbf{v}' ,$$

из которого непосредственно следует

$$r = r' + \frac{1}{c} (\mathbf{r}', \mathbf{v}') .$$

Поэтому запаздывающий потенциал (2,4,13) с указанной точностью совпадает с обычным ньютоновым потенциалом, вследствие чего эффектов порядка $\frac{v}{c}$ (например, векового изменения большой полуоси) при таком обобщении закона тяготения не будет.

Как и в случае рассмотренных выше законов Цельнера и Гаусса, отличие от закона Ньютона определяется эффектами второго порядка. Выполнив необходимые вычисления, формулу (2,4,13) нетрудно привести к виду

$$\varphi = \frac{\gamma M}{r} + \frac{\gamma M}{2r} \left\{ \frac{v^2}{c^2} - \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^2}{c^2 r^2} + \frac{\mathbf{r}, \mathbf{w}}{c^2} \right\} , \quad (2,4,14)$$

где через \mathbf{w} обозначен вектор ускорения движущейся точечной массы.

5. Поглощение гравитации. Начиная с конца XIX ст. неоднократно обсуждался вопрос о возможном поглощении гравитации средой, расположенной между взаимодействующими телами. Закон тяготения при наличии поглощения принимался обыкновенно в форме $f = \frac{\gamma M}{r^2} e^{-h\rho x}$, где ρ — плотность среды, которая для простоты предполагается однородной, x — линейная протяженность среды между данной точкой и массой M , создающей рассматриваемое поле, h — постоянная поглощения.

Первые опыты, предпринятые с целью экспериментального обнаружения поглощения гравитации, были выполнены в 1897 г. Аустинном и Твингом [18]. Эти опыты, производившиеся с применением специальных экранов, не дали определенных результатов. Позднее такие опыты в различных вариантах выполняли другие исследователи, например Лаагер (1904), Клайнер (1905), Эризман (1908). В 1919—1930 гг. в Турине, а затем в Болонье производились

широко известные опыты Майораны [19]. Эти эксперименты состояли в точном взвешивании с применением экранов, предназначенных для ослабления земного притяжения. Первая серия опытов Майораны (1919—1920 гг.) привела к оценке $h = 6,73 \cdot 10^{-12} \text{ э}^{-1} \text{ см}^2$. Из второй серии (1921) Майорана вывел меньшее значение постоянной поглощения: $h = 2,8 \cdot 10^{-12} \text{ э}^{-1} \text{ см}^2$.

Опыты Майораны способствовали усилению интереса к гипотезе о поглощении гравитации. Независимо от физического механизма процесса сам факт поглощения гравитации должен бы вызывать небесно-механические эффекты, трудно совместимые с данными астрономических наблюдений. Эти эффекты, связанные с нарушением пропорциональности между инертной и тяжелой массами, подробно обсуждал Рассел [20]. Возражая против гипотезы поглощения гравитации, Рассел в то же время признавал большую тщательность опытов Майорана и пытался объяснить их результаты на основе общей теории относительности.

В настоящее время данные Майораны считаются сомнительными. В последние годы Брагинский, Руденко и Рукман [21] провели в Московском университете весьма точные эксперименты с целью обнаружить поглощение гравитации, но заметных эффектов не получили.

6. Формула Майораны. Принимая гипотезу поглощения гравитации, рассмотрим внешнее поле тяготения однородного шара в предположении, что последний окружен вакуумом.

Пусть плотность и радиус шара будут соответственно ρ и R . Вычислим напряженность поля во внешней точке, расположенной на расстоянии r от центра шара.

Элементарный телесный угол с вершиной в точке A (рис. 9) равен $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, где θ — угол, образованный его осью с направлением на центр шара, φ — азимут. Элемент объема, ограниченный двумя нормальными сечениями, расположенными на расстоянии dx одно от другого, равен $dt = (x + r_1)^2 d\omega dx$. Масса этого элемента создает в точке A напряженность

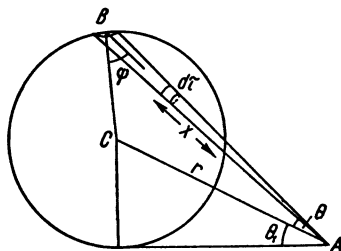


Рис. 9.

$$\frac{\gamma \rho dt}{(x + r_1)^2} e^{-hrx} = \gamma \rho e^{-hrx} \sin \theta d\theta d\varphi dx.$$

В направлении AC напряженность имеет составляющую

$$\gamma \rho e^{-hrx} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi dx.$$

Полную напряженность поля в точке A находим путем интегрирования по трем переменным

$$f = \frac{2\pi\gamma}{h} \int_0^{\theta_1} (1 - e^{-2h\rho R \cos \psi}) \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Заменяя переменную с помощью очевидного соотношения $\sin \theta = \frac{R}{r} \sin \psi$, получим

$$f = \frac{2\pi\gamma R^2}{hr^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-2u \cos \psi}) \sin \psi \cos \psi d\psi,$$

где принято $u = h\rho R$.

Выполнив интегрирование и воспользовавшись равенством $R^2 = \frac{3M}{4\pi\rho R}$, где M — масса шара, можно окончательно написать

$$f = \frac{\gamma M}{r^2} \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^3} + e^{-2u} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2u^3} \right) \right\}. \quad (2,6,1)$$

Мы видим, что при наличии поглощения напряженность поля во внешней точке оказывается такой же, как в случае материальной точки с некоторой эффективной массой

$$M_s = M \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^3} + e^{-2u} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2u^3} \right) \right\}. \quad (2,6,2)$$

Зная эффективную массу однородного шара данного радиуса и постоянную поглощения, нетрудно вычислить значение параметра u , а затем и истинную массу шара. Внося в (2,6,2) соотношение $M = \frac{4}{3}\pi R^2 \frac{u}{h}$, после простых преобразований получим уравнение

$$\frac{1}{2u^2} - e^{-2u} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} \right) = 1 - \frac{hM_s}{\pi R^2}, \quad (2,6,3)$$

с помощью которого и решается указанная задача.

Применим это уравнение к Солнцу. При $h = 6,73 \cdot 10^{-12} \text{ э}^{-1}\text{см}^2$ уравнение (2,6,3) будет иметь решение $u = 1,96$. Поэтому истинная плотность равна $4,2 \text{ гсм}^{-3}$, а истинная масса Солнца составляет $5,9 \cdot 10^{33} \text{ г}$.

Для Земли и других планет Солнечной системы эффект значительно меньше. Так, для Юпитера, Сатурна, Земли и Марса отношение истинной массы к эффективной при указанном значении постоянной h составляет 1,048, 1,021, 1,018, 1,007 соответственно; для Луны это отношение равно 1,003.

При малых значениях параметра u общую формулу Майораны (2,6,2) можно привести к виду

$$M_3 = M(1 - \alpha M); \quad \alpha = \frac{9h}{16\pi R^2}. \quad (2,6,4)$$

7. Нарушение третьего закона Кеплера. Как мы видели, поглощение гравитации вызывает различие между инертными (истинными) и тяжелыми (эффективными) массами небесных тел. Это различие должно вызывать небесно-механические эффекты, доступные проверке путем наблюдений. Простейшим из них является отступление от третьего закона Кеплера.

При нарушении равенства инертной и тяжелой масс третий закон Кеплера имеет вид (см. главу I, п. 2)

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} \frac{m_3}{m} \frac{M_3}{M} (M + m),$$

или, если массой m планеты пренебречь по сравнению с массой M Солнца,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M_3}{4\pi^2} \frac{m_3}{m}. \quad (2,7,1)$$

Отношение куба большой полуоси планетной орбиты к квадрату периода обращения зависит от планеты. Учитывая указанные ранее оценки, можно утверждать, что такая зависимость должна быть заметной. Так, при $h = 6,73 \cdot 10^{-12} \text{ e}^{-1} \text{ см}^2$ отношение $\frac{a^3}{T^2}$ для Марса должно более чем на 0,01 превышать это отношение для Сатурна. Столь большой эффект был бы легко обнаружен.

Нарушение третьего закона Кеплера является серьезным аргументом против гипотезы поглощения гравитации веществом. Для устранения этого аргумента необходимо предположить, что поглощение гравитации сопровождается уменьшением инерции поглощающего вещества, в результате чего тяжелые и инертные массы небесных тел остаются одинаковыми. Однако и в такой форме гипотеза поглощения гравитации встречает значительные трудности, поскольку, как мы увидим далее, она приводит к другим сомнительным следствиям, не связанным с нарушением пропорциональности между инертной и тяжелой массами.

8. Суточная вариация силы тяжести. Если гравитация поглощается, то на земной поверхности должна наблюдаться суточная вариация силы тяжести, обусловленная экранированием солнечного притяжения Землей.

Для количественной оценки этого эффекта рассмотрим упрощенную картину явления, принимая, что ось вращения Земли перпендикулярна к плоскости эклиптики, и пренебрегая размерами Земли по сравнению с расстоянием до Солнца.

Найдем гелиоцентрические ускорения в точках A , B земной поверхности, расположенных на одной линии с Солнцем (рис. 10). Имеем

$$\omega_A = \frac{\gamma M_\odot}{a^2}; \quad \omega_B = \frac{\gamma M_\odot}{a^2} (1 - 2h\rho R) = \frac{\gamma M_\odot}{a^2} \left(1 - \frac{8}{3} \alpha m\right),$$

где M_\odot — эффективная масса Солнца, m — истинная масса Земли, a — астрономическая единица, α — величина (2,6,4), для Земли равная $2,96 \cdot 10^{-30} \text{ e}^{-1}$.

Гелиоцентрическое ускорение Земли $\omega = \frac{\gamma M_\odot}{a^2} (1 - \alpha m)$ удовлетворяет очевидному соотношению $\omega_B < \omega < \omega_A$. Поэтому тела, расположенные у земной поверхности в точках A и B , под влиянием солнечного притяжения имеют по отношению к Земле ускорения

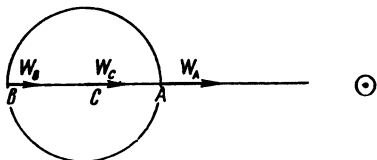


Рис. 10.

$$\omega_A - \omega = \frac{\gamma M_\odot}{a^2} \alpha m,$$

$$\omega - \omega_B = \frac{\gamma M_\odot}{a^2} \frac{5}{3} \alpha m,$$

направленные вверх по соответствующим вертикалям.

Если через g обозначить ускорение, обусловленное притяжением Земли, то результирующие геоцентрические ускорения в рассматриваемых точках будут равны

$$g_A = g - \frac{\gamma M_\odot}{a^2} \alpha m, \quad g_B = g - \frac{\gamma M_\odot}{a^2} \frac{5}{3} \alpha m.$$

В полдень сила тяжести оказывается больше, чем в полночь. Относительное изменение веса определяется формулой

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\gamma M_\odot}{a^2} \frac{2\alpha m}{3g}. \quad (2,8,1)$$

При принятой постоянной поглощения оно составляет около $\frac{1}{150\,000}$ и допускает уверенную проверку путем непосредственных измерений. Вероятно, этот эффект был бы легко обнаружен в опытах с маятниками.

9. Вариация силы тяжести во время солнечного затмения. Мы рассмотрели изменение силы тяжести на земной поверхности, вызванное экранирующим действием Земли на притяжение со стороны Солнца. Оно должно иметь характер суточной вариации, зависящей от зенитного расстояния Солнца. Возможен еще один эффект, обусловленный поглощением гравитации веществом и не связанный с нарушением пропорциональности между инертной и тяжелой массами. Его должно вызывать экранирующее действие Луны во время

полного солнечного затмения, наблюдаемого в данной точке земной поверхности.

Пусть в момент полного солнечного затмения, наступившего для точки A земной поверхности, угловые радиусы Солнца S и Луны L одинаковы (рис. 11). Отрезки BD и B_1D_1 , расположенные на каком-либо направлении AB , пересекающем поверхности Солнца и Луны, удовлетворяют очевидно-му соотношению $\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{R_1}{R}$.

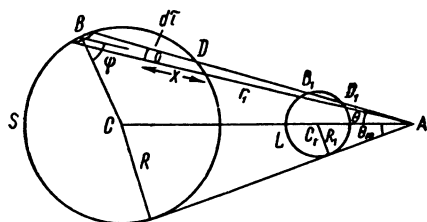


Рис. 11.

Построим элементарный цилиндр $d\tau$ с объемом $(x + r_1)^2 \times \times \sin \theta d\theta d\varphi dx$, где θ — угол, указанный на рисунке, φ — азимут, принимающий значения в пределах $0, 2\pi$. В отсутствие Луны масса этого цилиндра создает в точке A напряженность

$$\gamma \rho e^{-h\rho x} \sin \theta d\theta d\varphi dx.$$

Поглощение гравитации Луной характеризуется множителем $e^{-h\rho_1 B_1 D_1} = e^{-2h\rho_1 R_1 \cos \psi}$. Поэтому составляющая напряженности в направлении AC равна

$$\gamma \rho e^{-h\rho x - 2h\rho_1 R_1 \cos \psi} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi dx.$$

Результирующая напряженность находится путем интегрирования

$$f = \frac{2\pi\gamma}{h} \int_0^{\theta_m} (1 - e^{-2h\rho R \cos \psi}) e^{-2h\rho_1 R_1 \cos \psi} \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Если заменить переменную с помощью соотношения $\sin \theta = = \frac{R}{a} \sin \psi$, которое непосредственно следует из треугольника ABC , то предыдущая формула примет вид

$$f = \frac{2\pi\gamma}{h} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-2h\rho R \cos \psi}) e^{-2h\rho_1 R_1 \cos \psi} \sin \psi \cos \psi d\psi. \quad (2,9,1)$$

Это уравнение определяет напряженность поля тяготения Солнца в полосе полного солнечного затмения с учетом экранирующего действия Луны.

Введем обозначение

$$F(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2u \cos \psi} \sin \psi \cos \psi d\psi = \frac{1}{4u^2} - e^{-2u} \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{4u^2}\right). \quad (2,9,2)$$

Вместо (2,9,1) можно написать

$$f = \frac{\gamma M}{a^2} \frac{3}{2u} \{F(u_1) - F(u + u_1)\}, \quad (2,9,3)$$

где $u = h\rho R$, $u_1 = h\rho_1 R_1$.

Параметр u относительно велик (≈ 2), тогда как u_1 — достаточно мал ($\approx 10^{-3}$). Вследствие этого разложение функции $F(u + u_1)$ по возрастающим степеням u_1 сходится очень быстро. Сохраняя только линейные члены относительно u_1 , нетрудно привести формулу (2,9,3) к виду

$$f = \frac{\gamma M}{a^2} \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{u} - \frac{2}{u} F(u) \right\} - \frac{\gamma M}{a^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} F'(u) \right\} \frac{u_1}{u}.$$

Согласно общей формуле Майораны (2,6,2), величина $M \cdot \frac{3}{4} \times \left\{ \frac{1}{u} - \frac{2}{u} F(u) \right\}$ представляет собой эффективную массу Солнца. Следовательно,

$$f = \frac{\gamma M_\odot}{a^2} - \frac{\gamma M}{a^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} F'(u) \right\} \frac{u_1}{u}. \quad (2,9,4)$$

Найденная напряженность равна ускорению, которое поле тяготения Солнца сообщает телу, находящемуся на земной поверхности в полосе полного солнечного затмения. Чтобы определить влияние этого ускорения на наблюдаемую силу тяжести, необходимо сопоставить его с ускорением Земли. Поскольку для земного шара в целом экранирование солнечного притяжения Луной незначительно, можно написать

$$\omega_T = \frac{\gamma M_\oplus m_\oplus}{a^2 m},$$

где m , m_\oplus — инертная и гравитационная массы Земли.

Геоцентрическое ускорение тела в поле тяготения Солнца в момент затмения равно

$$f - \omega_T = \frac{\gamma M_\odot}{a^2} \left(1 - \frac{m_\oplus}{m} \right) - \frac{\gamma M}{a^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} F'(u) \right\} \frac{u_1}{u}. \quad (2,9,5)$$

Первый член правой части представляет собой относительное ускорение вне затмения, когда Луна не является экраном. Поэтому дополнительное ускорение во время полного солнечного затмения, направленное в сторону, противоположную Солнцу,

$$\omega = \frac{\gamma M}{a^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} F'(u) \right\} \frac{u_1}{u}.$$

Допустим для простоты, что Солнце во время затмения находится в зените. В этом случае относительное увеличение силы тяжести

определяется соотношением

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\gamma M}{a^2 g} \left\{ 1 + \frac{3}{2} F'(u) \right\} \frac{u_1}{u}, \quad (2,9,6)$$

где g — ускорение свободного падения.

Если в момент затмения Солнце находится на зенитном расстоянии z , то получится

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\gamma M}{a^2 g} \left\{ 1 + \frac{3}{2} F'(u) \right\} \frac{u_1}{u} \cos z. \quad (2,9,7)$$

Направление силы тяжести должно отклониться от вертикали на угол

$$\beta = \frac{\Delta P}{P} \sin z. \quad (2,9,8)$$

Как уже сказано, эффект не зависит от нарушения пропорциональности между инертной и тяжелой массой Земли, поскольку это нарушение влияет только на первый член (2,9,5), не связанный с экранированием солнечного притяжения Луной. Входящая в формулы (2,9,7 и 8) величина является истинной массой Солнца. С точки зрения гипотезы поглощения эти формулы должны выполняться даже в том случае, если истинная масса отличается не только от тяжелой, т. е. эффективной, но и от инертной массы.

При принятом значении коэффициента поглощения, по Майоране, $h = 6,73 \cdot 10^{-12} \text{ э}^{-1} \text{ см}^2$ параметры u , u_1 составляют 1,96 и $3,9 \cdot 10^{-3}$, истинная масса Солнца — $5,9 \cdot 10^{33} \text{ г}$. Вычисление по формуле (2,9,7) дает $\frac{\Delta P}{P} = 3,3 \cdot 10^{-6} \cos z$, показывая, что относительное изменение силы тяжести в момент полного солнечного затмения должно измеряться миллионными долями. Верхняя граница отклонения силы тяжести от вертикали составляет около $0'', 7$.

Измерения силы тяжести во время солнечных затмений в 1954, 1958 гг. и особенно в 1961 г. оказались довольно противоречивыми и не подтвердили ожидаемых эффектов. Различные аномалии, обнаруженные во время этих наблюдений, вызваны, вероятно, ошибками измерений и другими причинами, не связанными с поглощением солнечного притяжения Луной.

10. Влияние поглощения гравитации на приливы. Как известно, основные свойства приливов получают удовлетворительное количественное объяснение на основе закона тяготения Ньютона. Источником приливообразующих ускорений, вызывающих движение Мирового океана, является притяжение со стороны Луны и Солнца, вычисленное согласно обычному закону обратных квадратов. Гипотеза поглощения гравитации существенно изменяет величину приливообразующего ускорения, приводя, таким образом, к новым эффектам.

Пусть a — расстояние от центра Земли T до центра приливообразующего тела с массой M . Найдем обусловленные этим телом ускорения частиц, находящихся на земной поверхности в точках A, B (рис. 12). Считая, что инертные и гравитационные массы этих частиц одинаковы, можно написать:

$$\begin{aligned} \omega_A &= \frac{\gamma M_3}{(a-R)^2} \simeq \frac{\gamma M_3}{a^2} \left(1 + \frac{2R}{a}\right); \\ \omega_B &= \frac{\gamma M_3}{(a+R)^2} e^{-2\alpha R} \simeq \frac{\gamma M_3}{a^2} \left(1 - \frac{2R}{a} - \frac{8}{3} \alpha m\right), \end{aligned} \quad (2,10,1)$$

где α сохраняет значение (2,6,4), m — масса Земли.

Отношение $\frac{R}{a}$ здесь достаточно мало, вследствие чего его квадратом мы пренебрегли. Опущен также член с произведением этого отношения на αm .

Ускорение Земли в целом

$$\omega_C = \frac{\gamma M_3}{a^2} (1 - \alpha m)$$

удовлетворяет условию $\omega_A > \omega_C > \omega_B$.

Геоцентрические ускорения частиц, направленные вверх по вертикалям в соответствующих точках, равны

$$\begin{aligned} \omega_A - \omega_C &= \frac{2\gamma M_3 R}{a^3} + \frac{\gamma M_3}{a^2} \alpha m; \\ \omega_C - \omega_B &= \frac{2\gamma M_3 R}{a^3} + \frac{\gamma M_3}{a^2} \frac{5}{3} \alpha m. \end{aligned} \quad (2,10,2)$$

Первые члены правых частей совпадают с приливообразующим ускорением, согласно теории Ньютона; вторые члены — поправки, обусловленные поглощением гравитации. Существенной особенностью является их количественное различие: дополнительный член в ускорении точки B оказывается почти в 1,7 раза больше соответствующей поправки в ускорении точки A .

Для количественной оценки поправок сравним второй член в (2,10,2) с первым. С точностью до числового коэффициента отношение этих членов равно $\frac{\alpha m a}{R}$. Для Солнца оно приблизительно в 390 раз больше, чем для Луны. Принимая прежнюю оценку постоянной поглощения по Майоране, находим, что для Луны и Солнца величина $\frac{\alpha m a}{R}$ составляет 1,1 и $4,2 \cdot 10^2$ соответственно. Отсюда сле-

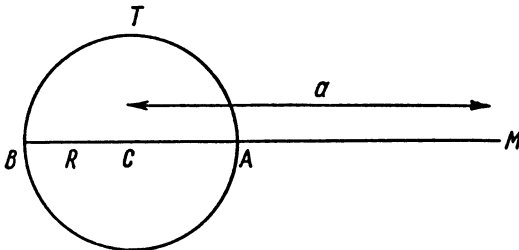


Рис. 12.

дует, что, с учетом рассматриваемой поправки, приливообразующее ускорение Луны увеличивается приблизительно в 1,5 раза, тогда как солнечное — в 390 раз.

Допустим, что поглощение гравитации не нарушает равенства инертной и тяжелой масс. Формулы (2,10,1) выполняются и в этом случае, но ускорение Земли будет равно $\omega_C = \frac{\gamma M_\odot}{a^2}$. Притяжение Солнца сообщает следующие геоцентрические ускорения частицам, расположенным у земной поверхности в точках *A* и *B*:

$$\begin{aligned} \omega_A - \omega_C &= \frac{2\gamma M_\odot R}{a^3}; \\ \omega_C - \omega_B &= \frac{2\gamma M_\odot R}{a^3} + \frac{\gamma M_\odot}{a^2} \frac{8}{3} \alpha m. \end{aligned} \quad (2,10,3)$$

Это допущение не уменьшает трудности гипотезы поглощения гравитации. Если в ускорении точки *A* дополнительного члена нет, то поправка в приливообразующем ускорении точки *B* оказывается еще большей, увеличивая тем самым асимметрию эффекта поглощения.

Итак, мы видим, что в применении к теории приливов гипотеза о поглощении гравитации встречает непреодолимые трудности. Расчеты по обычному закону обратных квадратов удовлетворительно согласуются с наблюдаемой картиной приливов, а по гипотезе поглощения дают недопустимо большие приливообразующие ускорения и резкую асимметрию, несовместимые с наблюдениями. Для согласования гипотезы поглощения с известными свойствами приливов имеется, по-видимому, только одна возможность: отказаться от выведенной в опытах Майораны постоянной поглощения и принять гораздо меньшую, при которой рассмотренные эффекты будут пренебрежимыми.

Отношение поправочных членов в формулах (2,10,2) к членам, соответствующим обычному закону Ньютона, по порядку равно $\frac{\alpha m a}{R}$. Предполагая эту величину достаточно малой, поправочные члены можно опустить. Внося значение α из (2,6,4), представим это условие в виде

$$h < \frac{16\pi R^3}{9am}. \quad (2,10,4)$$

Вычисление дает $h < 10^{-14} \text{ э}^{-1} \text{ см}^2$. Приходится, таким образом, допустить, что если постоянная поглощения отлична от нуля, то она, по крайней мере, на три порядка меньше полученной в опытах Майораны. Этот вывод не противоречит также опытам Брагинского, Руденко и Рукмана, которым, как уже сказано, не удалось обнаружить заметного поглощения гравитации. Однако при этом и все

другие эффекты, обусловленные поглощением гравитации, становятся весьма малыми и практически недоступными наблюдениям, в связи с чем сама гипотеза поглощения в значительной степени утрачивает интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. C. Clairaut. Histoire de l'Academie des Sciences, annee 1745. Paris, 1749.
2. A. C. Clairaut. Theorie de la Lune, deduite du seul principe de l'attraction reciproquement proportionella aux quarres des distances. St.= Petersburg, 1752.
3. Н. И. Идельсон.— В кн.: Исаак Ньютон. Сборн. статей к трехсотлетию со дня рождения. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1943.
4. U. Leverrier.— Annal. de l'observ. de Paris, 5, 1859.
5. S. Newcomb.— Washington Astronom. Papers, 6, 173, 1898.
6. E. Grossmann.— Zeitschr. f. Physik, 5, 280, 1921.
7. Q. Gleich.— Astronom. Nachr., 241, 105, 1931.
8. G. Fotheringham.— Month. Notic. Royal Astron. Soc., 91, 1001, 1931.
9. Г. А. Чеботарев.— Учен. зап. Ленингр. ун-та, серия матем. наук, астрономия, 11, 1941.
10. Morton Donald C.— Journ. Royal Astron. Soc. Canada, 50, N 5, 223, 1956.
11. H. Seeliger.— Astron. Nachr., 137, 129, 1895; Sitzungsber. Akad. Wissensch., München, 1896, 373.
12. P. S. Laplace.— Mécanique céleste, 5, livre XVI. Paris, 1825.
13. M. A. Hall.— Astronom. Journ., 14, 49, 1894—95.
14. S. Newcomb. Elements of inner planets. Washington, 1895.
15. P. S. Laplace.— Mécanique céleste, 4, livre X. Paris, 1805.
16. F. Zöllner. Principien einer electrodynamischen Theorie der Materie. Leipzig, 1876.
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, глава VIII. Физматгиз, М., 1962.
18. L. W. Austin, S. H. Thwing.— Phys. Review, 5, 294, 1897.
19. Q. Majorana.— Compt. Rend. Acad. Scien. Paris, 169, 646, 719, 1919; 172, 478, 1921; Philosoph. Magaz., (6), 39, 488, 1920
20. Н. М. Russell.— Astrophys. Journ., 54, 334, 1921.
21. В. Б. Брагинский, Г. И. Рукман.— Вестник Московск. ун-та, серия 3, № 3, 1961. В. Б. Брагинский, В. Н. Руденко, Г. И. Рукман.— Журн. эксп. теор. физ., 43, в 1(7), 51, 1962.

Глава III. РАЗВИТИЕ ЗАКОНА ТЯГОТЕНИЯ ДО СОЗДАНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Закон движения в специальной теории относительности. Среди принципиальных недостатков теории тяготения Ньютона наиболее существенным является дальноедействие — мгновенная передача гравитации на сколь угодно большие расстояния.

В физике принцип дальноедействия был окончательно отвергнут после экспериментального измерения скорости распространения электромагнитных полей. Что же касается небесной механики, основанной на законе тяготения Ньютона, то здесь принцип дальноедействия полностью сохранял свое значение, поскольку отказ от него приводил, как мы видели, к выводам, противоречащим результатам астрономических наблюдений.

Таким образом, к началу XX века теория тяготения находилась в своеобразном состоянии. Если конкретные выводы небесной механики отличались высокой точностью и, за немногими исключениями, прекрасно согласовались с данными наблюдений, то теоретические основы этой науки противоречили сложившейся к тому времени физической картине мира и нуждались в глубоком пересмотре. Необходимость эта стала особенно очевидной после создания специальной теории относительности (СТО).

Как известно, СТО, фундамент которой заложен в работах Лоренца [1], Пуанкаре [2] и особенно Эйнштейна [3], произвела глубокий переворот в физике и сопровождалась радикальным пересмотром понятий о пространстве и времени. В частности, она привела к уточнению почти всех понятий механики, которые прежде представлялись безукоризненными и не вызывали сомнений. С интересующей нас точки зрения особенно важным был вывод теории относительности о том, что скорость света является верхней границей скоростей всех физических процессов. Поэтому обычная форма закона тяготения, допускающая гравитационную передачу сигналов с бесконечно большой скоростью, оказалась несовместимой с теорией относительности.

Попытку изменить форму закона тяготения и привести ее в соответствие с теорией относительности мы отложим до одного из следующих разделов. Предварительно рассмотрим задачу о движении материальной точки в поле тяготения неподвижного центра,

применяя при этом обобщенный закон динамики, составленный с учетом зависимости массы от скорости. Дальнодействие, присущее закону тяготения Ньютона в общем случае, в данной задаче не скажется, поскольку поле неподвижного центра статично.

Второй закон динамики можно написать в виде

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}), \quad (3,1,1)$$

где \mathbf{F} — вектор действующей силы, \mathbf{v} — скорость, m — масса движущейся материальной точки, связанная с массой покоя m_0 и скоростью света c известной формулой

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3,1,2)$$

Выполнив дифференцирование, перепишем уравнение (3,1,1) в виде

$$\mathbf{F} = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m_0 \mathbf{v}}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot v \frac{dv}{dt}.$$

Умножив это равенство скалярно на вектор \mathbf{v} , получим после простых преобразований

$$\frac{\mathbf{F}, \mathbf{v}}{c^2} = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt},$$

или, согласно (3,1,2),

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\mathbf{F}, \mathbf{v}}{c^2}. \quad (3,1,3)$$

Второй закон динамики (3,1,1), представленный в форме

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{v} \frac{dm}{dt},$$

с помощью (3,1,3) можно написать следующим образом:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{F}, \mathbf{v}}{c^2} \mathbf{v}. \quad (3,1,4)$$

Мы видим, что ускорение материальной точки определяется не только вектором действующей силы, как в механике Ньютона, но также величиной и направлением скорости. Формула (3,1,4) показывает, что направление ускорения вообще отличается от направления силы. Эти направления совпадают только в тех случаях, когда сила параллельна или перпендикулярна скорости.

2. Задача Кеплера. Пусть частица с достаточно малой массой движется в поле тяготения массивной материальной точки или тела со сферическим распределением плотности. Начало координат совместим с центром массы этого тела. Масса M последнего остается постоянной, тогда как масса m движущейся частицы изменяется со скоростью по закону (3,1,2). Сила, действующая на эту частицу, равна

$$\mathbf{F} = - \frac{\gamma M m}{r^3} \mathbf{r},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор частицы относительно центрального тела. Гравитационную массу частицы мы отождествили с его инертной массой (3,1,2).

Согласно (3,1,4), закон движения частицы имеет вид

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma M}{r^3} \mathbf{r} = \frac{\gamma M}{c^2 r^3} (\mathbf{r}, \mathbf{v}) \mathbf{v}. \quad (3,2,1)$$

Введем угол α , образованный радиусом-вектором частицы и ее скоростью. Считая, что оскулирующей орбитой является эллипс, этот угол можно определить с помощью (1,6,7). Формула (3,2,1) показывает, что кроме центральной силы притяжения, отвечающей обычной форме закона тяготения Ньютона, к частице приложено возмущающее ускорение

$$\mathbf{T} = \frac{\gamma M}{r^2} \frac{v^2}{c^2} \cos \alpha,$$

направленное по касательной к орбите.

Проекции этого ускорения на радиус-вектор частицы и на перпендикуляр к нему равны

$$R = \frac{\gamma M}{r^2} \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \alpha; \quad S = \frac{\gamma M}{r^2} \frac{v^2}{c^2} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (3,2,2)$$

Ввиду относительной малости возмущающего ускорения скорость частицы можно вычислить по обычной формуле задачи двух тел.

$$v^2 = \frac{\gamma M}{a} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \varphi}{1 - e^2},$$

где a — большая полуось, e — эксцентриситет орбиты.

Внося это значение в (3,2,2) и учитывая (1,6,7), получим

$$r^2 R = \frac{(\gamma M)^2 e^2}{c^2 a (1 - e^2)} \sin^2 \varphi; \quad r^3 S = \frac{(\gamma M)^2 e}{c^2} \sin \varphi. \quad (3,2,3)$$

Влияние возмущающего ускорения на движение частицы можно исследовать по методу вариации элементов. Воспользовавшись 3-м,

4-м и 5-м уравнениями (1,6,3), легко находим

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{d\varphi} &= \frac{2\gamma M \sin^2 \varphi}{c^2 a (1 - e^2)}; \\ \frac{da}{d\varphi} &= \frac{2\gamma M e \sin \varphi}{c^2 (1 - e^2)^2} (1 + e^2 + 2e \cos \varphi); \\ \frac{de}{d\varphi} &= \frac{2\gamma M e \sin \varphi}{c^2 a (1 - e^2)} (e + \cos \varphi),\end{aligned}\quad (3,2,4)$$

определяющие движение линии апсид и изменение размеров и формы орбиты.

Ввиду малости этих эффектов интерес могут представить только вековые изменения элементов, которые находятся путем интегрирования соотношений (3,2,4) по истинной аномалии. Интегрируя, находим приращение элементов за время одного обращения

$$\Delta\omega = \frac{2\pi\gamma M}{c^2 a (1 - e^2)}; \quad \Delta a = \Delta e = 0. \quad (3,2,5)$$

Большая полуось и эксцентриситет орбиты не испытывают вековых изменений; линия апсид вращается в плоскости орбиты в прямом направлении.

Впервые этот эффект, обусловленный зависимостью массы движущейся частицы от скорости, обнаружил Зоммерфельд при исследовании движения электрона в электрическом поле атомного ядра. Полная энергия электрона оказалась зависящей не только от его эллиптического движения, отвечающего случаю постоянной массы, но и от прецессии орбиты, что позволило дать первое объяснение тонкой структуры спектра водорода.

Качественно эффект (3,2,5) отвечает известному движению перигелиев планетных орбит, но количественно он оказывается в три раза меньше найденной Эйнштейном величины, хорошо согласующейся с наблюдениями. Например, в случае Меркурия формула (3,2,5) дает для векового перемещения перигелия около $14''$ в столетие вместо наблюдаемых $43''$.

3. Обобщение закона тяготения Ньютона. Выше рассматривалось влияние релятивистского эффекта массы на движение частицы в центральном поле при условии, что закон тяготения Ньютона сохраняет обычную форму. Полученные результаты могут представить известный интерес, поскольку в случае статического поля закон тяготения не вступает в явное противоречие с выводами СТО. Однако рассмотренная задача имеет очень ограниченное значение. Для развития теории гравитации гораздо больший интерес представляют попытки согласовать с принципами СТО общую форму закона тяготения. Вопрос о возможности такого согласования с большой глубиной и тщательностью рассмотрел в 1905 г. Пуанкаре [2].

К этому времени было окончательно установлено, что явления электромагнетизма удовлетворяют с п е ц и а л ь н о м у п р и н ц и п у о т н о с и т е л ь н о с т и, т. е. протекают по одним и тем же законам во всех инерциальных координатах. Математически этот принцип выражается в инвариантности уравнений электромагнитного поля относительно преобразований Лоренца, с помощью которых осуществляется переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Для доказательства общности этого принципа Лоренц высказал гипотезу о том, что и силы другой природы, каковы бы ни было их происхождение, ведут себя при указанном преобразовании так же, как и электромагнитные силы. Гипотеза Лоренца относится, в частности, к силам гравитации. Она требует отказа от дальнего действия и согласования формы закона тяготения с принципом относительности.

Следуя Пуанкаре, мы перечислим здесь основные условия, которым должно отвечать такое согласование.

Пусть частица, обладающая скоростью v_0 , испытывает притяжение со стороны материальной точки, движущейся со скоростью v . Радиус-вектор притягиваемой точки относительно данной частицы обозначим через g . Отказавшись от принципа дальнего действия, допустим, что сила притяжения в данный момент времени t зависит от положения и скорости притягиваемой точки в некоторый предшествующий момент t' . Относительный радиус-вектор и скорость точки в этот момент обозначим через g' и v' соответственно. Необходимо получить соотношение

$$\varphi(t - t', g', v', v_0) = 0, \quad (3,3,1)$$

определяющее время распространения гравитационного действия в зависимости от относительного расположения и скоростей притягиваемой и притягиваемой частиц, и найти силу притяжения, выразив ее через g' , v' , v_0 .

Решение этой задачи ограничивается следующими условиями.

1. Уравнение (3,3,1) должно сохраняться при преобразовании Лоренца.

2. Сила притяжения удовлетворяет принципу относительности, т. е. изменяется при преобразовании Лоренца так же, как и электромагнитные силы.

3. Если взаимодействующие тела неподвижны в данной системе отсчета, то искомый закон притяжения совпадает с законом Ньютона в обычной форме.

4. При достаточно малых скоростях искомый закон должен быть близким к закону Ньютона, поскольку в противном случае могут возникнуть противоречия между теорией и данными астрономических наблюдений.

Поставленная таким образом задача является неопределенной, так как упомянутые условия недостаточны для однозначного вывода обобщенного закона притяжения.

При помощи инвариантов группы преобразований Лоренца Пуанкаре разработал метод, позволяющий найти *возможные* решения задачи, т. е. составить обобщенные формы закона тяготения, которые отвечают принятым условиям, но не вытекают из них с необходимостью. Скорость распространения гравитации оказалась при этом равной скорости света, вследствие чего уравнение (3,3,1) приняло очень простой вид:

$$t - t' = \frac{r'}{c}. \quad (3,3,2)$$

Может показаться, что это заключение свидетельствует о невозможности разумного обобщения закона тяготения Ньютона в СТО, поскольку, как мы видели в главе II, формула обратных квадратов и соотношение (3,3,2) приводят к выводам, противоречащим наблюдаемым движениям в Солнечной системе. Однако необходимо иметь в виду, что в дорелятивистских попытках отказа от гравитационного дальнего действия учет запаздывания, согласно соотношению (3,3,2), составлял *единственную* поправку к теории Ньютона. В релятивистском же обобщении этой теории изменяется также форма закона взаимодействия, и может случиться, что поправка, обусловленная (3,3,2) и вызывающая нежелательные небесно-механические следствия, в первом приближении компенсируется поправкой к закону обратных квадратов. Поэтому оценку соотношения (3,3,2) с точки зрения небесной механики следует отложить до полного решения задачи о релятивистском обобщении закона Ньютона.

Не повторяя довольно сложных рассуждений Пуанкаре, имеющих теперь главным образом исторический интерес, приведем здесь одну из полученных им форм обобщенного закона тяготения. С точностью до постоянного множителя сила притяжения рассматриваемой частицы со стороны материальной точки оказывается равной

$$F = - \frac{r'}{k_0 B^3} - \frac{k'}{k_0} \frac{A}{B^3 C} \frac{v'}{c}, \quad (3,3,3)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} k_0 &= \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; & k' &= \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; \\ A &= -k_0 \left(r' + \frac{r' \cdot v_0}{c}\right); & B &= -k' \left(r' + \frac{r' \cdot v'}{c}\right); \\ C &= k_0 k' \left(1 - \frac{v_0 \cdot v'}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (3,3,4)$$

Напомним, что сила притяжения и скорость \mathbf{v}_0 частицы относятся к данному моменту t , а радиус-вектор \mathbf{r}' и скорость \mathbf{v}' притягивающей точки — к предшествующему моменту t' , который определяется соотношением (3,3,2).

Как мы видели в главе II, отказ от дальнего действия в дорелятивистском обобщении закона тяготения приводит к дополнительной составляющей силы, пропорциональной первой степени отношения $\frac{v}{c}$. Именно эта составляющая вызывает вековое изменение большой полуоси орбиты, противоречащее наблюдаемому движению планет и Луны. Выясним, содержится ли такая составляющая в релятивистском законе (3,3,3). С этой целью вычислим силу (3,3,3) с точностью до членов, линейных относительно $\frac{v}{c}$.

Воспользовавшись полученным в главе II соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \frac{r'}{c} \mathbf{v}' + \frac{r'^2}{2c^2} \mathbf{w}',$$

находим в нашем приближении

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \frac{r}{c} \mathbf{v}; \quad r' + \frac{r', \mathbf{v}'}{c} = r.$$

Первый член правой части формулы (3,3,3) оказывается равным $\frac{r}{r^3} - \frac{v}{cr^2}$, тогда как для второго получаем $\frac{v}{cr^2}$. Поэтому с принятой степенью точности закон (3,3,3) принимает вид $F = \frac{r}{r^3}$, переходя в обычный закон Ньютона. Таким образом, в данном приближении поправка, обусловленная конечной скоростью передачи гравитации, компенсируется зависимостью силы притяжения от скорости притягиваемого тела. Отличие силы (3,3,3) от закона тяготения Ньютона определяется членами, зависящими от второй и более высоких степеней отношения $\frac{v}{c}$. В случае орбитального движения Земли соответствующие этим поправкам эффекты оказываются приблизительно в 10^4 раз меньше поправки, возникающей при дорелятивистском обобщении закона тяготения.

Необходимо вновь подчеркнуть, что соотношение (3,3,3) является лишь *одним из возможных* обобщений закона тяготения, отвечающих требованиям специальной теории относительности. Пуанкаре предлагает простой метод, с помощью которого можно получить другие формы такого обобщения. Поэтому подробное исследование закона (3,3,3) не представляет большого интереса с точки зрения небесной механики. Значение теории Пуанкаре состоит главным образом в том, что она, не уступая механике Ньютона в практических приложениях, позволяет устранить дальнее действие и согласовать закон тяготения с принципами СТО.

4. Принцип эквивалентности. В 1911 г. А. Эйнштейн, основываясь на известном со времен Ньютона равенстве инертной и тяжелой масс, высказал гипотезу, которая приобрела фундаментальное значение для последующего развития теории гравитации [4]. Ввиду важности этой гипотезы, получившей название *принципа эквивалентности*, мы кратко воспроизведем здесь рассуждения Эйнштейна.

Пусть в однородном поле тяжести, заданном ускорением g , покоится система отсчета S , ориентированная таким образом, что силовые линии антипараллельны оси z . Система S' находится в пространстве, свободном от поля тяготения, и движется в направлении оси z с постоянным ускорением g . Материальная точка произвольной массы движется в системе S согласно уравнениям

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g, \quad (3.4.1)$$

как это следует из закона Галилея, выражающего пропорциональность инертной и тяжелой масс.

Согласно динамике Ньютона, тем же уравнениям отвечает движение материальной точки в системе S' . Такое совпадение законов движения позволяет предположить, что системы S и S' механически равноценны. Это значит, что допустимы два истолкования: 1) система S , как и S' , находится вне поля, но движется с постоянным ускорением; 2) система S' , как и S , покоится в однородном поле тяжести. Подобно понятию скорости в специальной теории относительности, ускорение утрачивает абсолютное значение и оказывается лишь относительной характеристикой движения.

Вводя систему отсчета S'' , движущуюся с постоянным ускорением $-g$ относительно системы S , мы убеждаемся и в относительности поля тяжести: в системе S это поле существует, тогда как в системе S'' его нет.

В более общем случае относительность поля тяготения состоит в том, что при переходе от S к системе отсчета с произвольным ускорением мы изменяем напряженность и структуру поля.

В данной форме гипотеза эквивалентности представляет собой лишь новое истолкование давно известной закономерности. В механике Ньютона поле тяготения считается абсолютным, а особенности движения, проявляющиеся в ускоренной системе координат, объясняются действием сил инерции.

Выбор той или другой точки зрения не влияет на решение конкретной механической задачи. Однако новое представление приобретет более глубокое физическое содержание и станет важным средством исследования, если, следуя Эйнштейну, принять, что ускоренные системы отсчета равноценны не только с точки зрения механики, а по отношению ко *всем* физическим процессам.

В такой форме принцип эквивалентности имеет большое эвристическое значение. Изучая физическое явление, протекающее вне поля относительно ускоренной системы координат, мы можем выяснить, как происходит это явление в гравитационном поле.

Основываясь на принципе эквивалентности, Эйнштейн получил несколько новых результатов, представляющих значительный интерес. Первый из них связан с релятивистским соотношением между массой и энергией.

Согласно СТО, инертная масса тела изменяется вместе с содержащейся в нем энергией; приращение энергии ΔE сопровождается приращением инертной массы тела на величину $\frac{\Delta E}{c^2}$, где c — скорость света. Происходит ли при этом такое же изменение тяжелой массы тела?

Равенство инертной и гравитационной масс, как мы видели, является необходимой предпосылкой принципа эквивалентности. Нетрудно убедиться в том, что имеет место и обратное: при выполнении принципа эквивалентности должно выполняться и указанное равенство масс. Поэтому очень простые рассуждения, основанные на принципе эквивалентности, приводят Эйнштейна к заключению о том, что приращение энергии ΔE изменяет на величину $\frac{\Delta E}{c^2}$ как инертную, так и гравитационную массы тела.

Далее устанавливается влияние поля тяжести на время: продолжительность какого-либо периодического процесса в поле тяжести оказывается больше, чем вне поля; отношение периодов составляет $1 - \frac{\Phi}{c^2}$, где Φ — ньютонов потенциал. В частности, если излучение наблюдается вне поля, а излучающие атомы расположены в поле тяжести, то измеренная частота ν спектральной линии связана с нормальной частотой ν_0 соотношением

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right), \quad (3,4,2)$$

показывающим, что, по сравнению с лабораторным спектром, линии должны смещаться к красному концу спектра. Это явление, называемое гравитационным смещением, действительно наблюдается в спектрах звезд в тех случаях, когда на их поверхности поле гравитации имеет достаточно высокий потенциал.

В настоящее время гравитационное смещение можно проверить с очень большой точностью в лаборатории, наблюдая в соответствующих условиях явление Мёссбауэра.

Зависимость времени от поля тяжести проявляется также в особенностях распространения света. Скорость света в вакууме, совпадающая в отсутствие поля тяжести с универсальной постоянной

c_0 , которая входит в формулы специальной теории относительности, при наличии поля равна

$$c = c_0 \left(1 - \frac{\Phi}{c_0^2} \right). \quad (3,4,3)$$

Соотношение (3,4,3) имеет очень важное значение. В частности, оно устанавливает границы применимости специальной теории относительности, показывая, что эта теория выполняется лишь для достаточно слабых полей, когда отношением $\frac{\Phi}{c^2}$ можно пренебречь по сравнению с единицей.

Из соотношения (3,4,3) непосредственно вытекает, что при распространении света в поле тяготения прямолинейность световых лучей в общем случае нарушается. Рассматривая распространение света в поле одного центра, Эйнштейн показывает, что вследствие искривления световой луч отклоняется на угол

$$\theta = \frac{2\gamma M}{c^2 a}, \quad (3,4,4)$$

где M — масса центра притяжения, a — длина перпендикуляра, опущенного из центра на направление луча.

Впоследствии оказалось, что искривление луча обусловлено не только зависимостью скорости света от потенциала поля, но и нарушением евклидовой геометрии вблизи центра гравитации. Как было найдено Эйнштейном на основе общей теории относительности, полный эффект превосходит величину (3,4,4) в два раза. В случае Солнца максимальное значение эффекта соответствует лучу, касательному к солнечной поверхности; оно составляет около $1''$, 7, что хорошо согласуется с наблюдениями.

Принцип эквивалентности Эйнштейна, конечно, не является новой теорией гравитации. Однако он может служить исходным моментом и одной из физических предпосылок такой теории, а плодотворность подтверждается новизной и принципиальной важностью вытекающих из него следствий.

5. Теория Абрагама. В 1912 г. М. Абрагам предложил теорию гравитации, обобщающую закон Ньютона без учета принципа относительности [5]. В основу этой теории положено следующее уравнение для гравитационного потенциала:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = -4\pi\gamma\rho, \quad (3,5,1)$$

где x, y, z — прямоугольные декартовы координаты, u — переменная, связанная со временем t соотношением $u = ict$, i — мнимая единица, ρ — собственная плотность.

В математической физике дифференциальное уравнение (3,5,1) называется уравнением Даламбера. Его решение

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint \frac{\gamma}{r'} \rho \left(x', y', z', t - \frac{r'}{c} \right) dt' \quad (3,5,2)$$

носит название **запаздывающего потенциала**. Интегрирование производится по всему объему, в котором распределены массы, определяющие данное поле тяготения. Через r' обозначено расстояние данной точки x, y, z от элемента объема dt' , расположенного в точке x', y', z' . Значение объемной плотности в точках x', y', z' должно быть взято для момента $t - \frac{r'}{c}$, т. е. с запаздыванием, соответствующим передаче гравитационного действия со скоростью c . Таким образом, в теории Абрагама принимается, что гравитация распространяется со скоростью света.

Пространственно-временной интервал, определяющийся известной формулой специальной теории относительности

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - du^2, \quad (3,5,3)$$

связан с элементом $d\tau$ собственного времени соотношением $ds = cd\tau$.

Рассматривая пространственные координаты и переменную u в функции собственного времени, введем составляющие скорости $x = \frac{dx}{d\tau}, \dots, \dot{u} = \frac{du}{d\tau}$ и составляющие ускорения $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{d\tau}, \dots, \ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{d\tau}$. Ускорение частицы, движущейся в поле тяготения, равно четырехмерному вектору напряженности $\mathbf{f} = \text{grad } \varphi$. Приравнявая проекции этого вектора составляющим ускорения, Абрагам постулирует закон движения частицы в виде

$$\ddot{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots, \ddot{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}. \quad (3,5,4)$$

Нетрудно убедиться в том, что преобразование Лоренца изменяет форму уравнений (3,5,4), показывая, что принятый Абрагамом закон движения противоречит СТО.

Если принцип постоянства скорости света, положенный в основу СТО, сохранить и при наличии поля гравитации, то четырехмерный вектор скорости частицы должен быть перпендикулярен четырехмерной напряженности поля. Действительно, внося в (3,5,3) соотношение $ds = cd\tau$, получим

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \dot{u}^2 = -c^2.$$

Дифференцируя это равенство по собственному времени при $c = \text{const}$, находим

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + u\ddot{u} = 0,$$

откуда и следует высказанное выше утверждение.

Если же отказаться от указанного принципа и допустить, что в поле тяготения скорость света переменна, то после дифференцирования того же равенства получится

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} + \ddot{u}\dot{u} = -c\dot{c}.$$

Вместе с законом движения (3,5,4) это соотношение дает $c \frac{dc}{d\tau} = -\frac{d\varphi}{d\tau}$. Следовательно,

$$c^2 = C - 2\varphi,$$

где C — постоянная интегрирования.

Положив $c = c_0$ при $\varphi = 0$, находим

$$c^2 = c_0^2 - 2\varphi.$$

Считая отношение $\frac{\varphi}{c_0}$ достаточно малым, можно написать

$$c = c_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c_0^2} \right),$$

что совпадает с формулой Эйнштейна (3,4,3), основанной на принципе эквивалентности.

Приложим решение (3,5,2) к случаю, когда поле обусловлено одной точечной массой, движущейся по произвольному закону. Найдем запаздывающий потенциал в точке x, y, z в момент времени t . Как и в главе II, радиус-вектор движущейся массы относительно данной точки обозначим через \mathbf{r} , а ее скорость — через \mathbf{v} . Пусть t' — некоторый предшествующий момент; радиус-вектор и скорость, отнесенные к этому моменту, обозначим через \mathbf{r}' и \mathbf{v}' . В соответствии с принятой гипотезой о скорости распространения гравитации положим $t - t' = \frac{r'}{c}$.

С точностью до постоянного множителя решение (3,5,2) приводится в этом случае к величине

$$\varphi = \frac{1}{r' + \frac{\mathbf{r}', \mathbf{v}'}{c}} \quad (3,5,5)$$

и носит название потенциала Лиенара — Вихерта.

Нетрудно убедиться в том, что запаздывающий потенциал (3,5,5) отличается от обычного ньютонового величинами второго порядка относительно $\frac{v}{c}$.

В главе II мы получили приближенное соотношение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \frac{r'}{c} \mathbf{v}' + \frac{r'^2}{2c^2} \mathbf{w}',$$

в котором через w обозначено ускорение движущейся точечной массы. В соответствии с теоремой живых сил произведение rw считается величиной порядка v^2 .

С помощью этого соотношения находим

$$r' + \frac{r', v'}{c} = r \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{r, v}{2c^2 r^2} - \frac{r, w}{2c^2} \right\}.$$

Поэтому с точностью до членов второго порядка потенциал Лиенара — Вихерта равен

$$\phi = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{(r, v)^2}{2c^2 r} + \frac{r, w}{2c^2} \right\} \quad (3,5,6)$$

и не содержит членов первого порядка относительно $\frac{v}{c}$.

Отсюда непосредственно следует, что теория Абрагама также свободна от эффектов, присущих дорелятивистским обобщениям закона Ньютона, и поэтому она не может привести к резким противоречиям с наблюдаемым движением небесных тел. Отличие от механики Ньютона, как и в случае теории Пуанкаре, начинается с членов второго порядка, отвечающих тонким особенностям движения. Однако эффекты второго порядка в теории Абрагама не представляют интереса, поскольку в этом приближении данная теория ошибочна. С современной точки зрения, всякое обобщение закона тяготения должно отвечать требованиям СТО. Между тем, теория Абрагама, как уже сказано, противоречит принципу относительности, поскольку принятый в ней закон движения не удовлетворяет преобразованиям Лоренца.

6. Теория Нордстрема. Обсуждая состояние проблемы всемирного тяготения, Эйнштейн [6] перечисляет следующие четыре требования, которые, по его мнению, должны быть положены в основу теории гравитационного поля:

- 1) выполнимость законов сохранения импульса и энергии,
- 2) равенство инертной и тяжелой масс,
- 3) выполнимость специальной теории относительности,
- 4) независимость формы законов от абсолютных значений гравитационного потенциала.

Теория Абрагама, как было указано, не отвечает третьему из этих условий. Появившаяся вскоре теория Ми [7] противоречит равенству инертной и тяжелой масс. Со всеми четырьмя условиями согласуется теория Нордстрема, предложенная в 1912 г. [8] и развитая затем в работах Эйнштейна [6], Эйнштейна и Фоккера [9].

Как и в теории Абрагама, в теории Нордстрема поле гравитации характеризуется запаздывающим потенциалом, который удовлетворяет уравнению Даламбера (3,5,1). В этом уравнении, как и прежде, через x, y, z обозначены пространственные декартовы координаты,

а временной координатой служит переменная $u = ict$. Градиент потенциала в четырехмерном континууме Минковского служит напряженностью поля; составляющими его являются четыре производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u}$.

Пространственно-временной интервал определяется обычной формулой СТО, имеющей в принятых обозначениях вид

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - du^2. \quad (3,6,1)$$

С элементом $d\tau$ собственного времени интервал связан соотношением $ds = cd\tau$. Четырехмерная скорость a частицы, которую Нордстрем назвал вектором движения, имеет проекции $a_x = \frac{dx}{d\tau}, \dots, a_u = \frac{du}{d\tau}$.

Закон движения материальной точки в гравитационном поле принимается в теории Нордстрема в форме

$$\frac{d}{d\tau}(ma) = m \text{ grad } \varphi, \quad (3,6,2)$$

где m — масса покоя точки.

Нетрудно убедиться в том, что при неизменной массе покоя закон движения (3,6,2) противоречит одному из основных принципов СТО — постулату постоянства скорости света. Действительно, с помощью соотношения $ds = cd\tau$ линейный элемент (3,6,1) можно переписать в виде

$$-c^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + a_u^2,$$

откуда

$$-c \frac{dc}{d\tau} = a_x \frac{da_x}{d\tau} + \dots + a_u \frac{da_u}{d\tau}.$$

Внеся значения $\frac{da_x}{d\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots, \frac{da_u}{d\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$, которые следуют из (3,6,2) при $m = \text{const}$, и принимая во внимание определение вектора a , находим

$$\frac{dc}{d\tau} = -\frac{1}{c} \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Это показывает, что скорость света остается постоянной только при $\varphi = \text{const}$, т. е. вне поля тяготения.

Стремясь сохранить принцип постоянства скорости света и при наличии поля, Нордстрем отказывается от условия $m = \text{const}$ и ищет закон изменения массы в поле гравитации, который обеспечит выполнимость указанного принципа.

Считая массу покоя частицы переменной, перепишем закон движения (3,6,2) в виде

$$m \frac{da}{d\tau} + a \frac{dm}{d\tau} = m \operatorname{grad} \varphi.$$

Умножим это уравнение скалярно на вектор движения. В полученное равенство

$$\frac{1}{2} m \frac{da^2}{d\tau} + a^2 \frac{dm}{d\tau} = m \frac{d\varphi}{d\tau}$$

внесем соотношение $a^2 = -c^2$, которое непосредственно следует из линейного элемента (3,6,1).

Уравнение

$$\frac{1}{2} m \frac{dc^2}{d\tau} = -c^2 \frac{dm}{d\tau} - m \frac{d\varphi}{d\tau}$$

показывает, что необходимым и достаточным условием постоянства скорости света является дифференциальное уравнение

$$c^2 \frac{dm}{d\tau} + m \frac{d\varphi}{d\tau} = 0,$$

которое после интегрирования дает

$$m = m_0 e^{-\frac{\varphi}{c^2}}. \quad (3,6,3)$$

Постоянная m_0 представляет здесь массу покоя частицы в точке с нулевым потенциалом.

Уравнение (3,6,2) при условии (3,6,3) принимает следующий вид:

$$\frac{da}{d\tau} = \operatorname{grad} \varphi + \frac{a}{c^2} \frac{d\varphi}{d\tau}, \quad (3,6,4)$$

показывая, что закон движения частицы не зависит от ее массы. Этим обеспечивается равенство инертной и тяжелой масс. Можно также показать, что закон движения в форме (3,6,4) инвариантен относительно преобразований Лоренца.

Рассмотрим задачу о движении частицы в поле одного неподвижного центра Запаздывающий потенциал (3,5,2) совпадает в этом случае с обычным ньютоновым потенциалом $\varphi = \frac{\gamma M}{r}$, где M — масса центра.

Равенство (3,6,4) представляет собой систему четырех дифференциальных уравнений второго порядка: трех уравнений для декартовых координат x, y, z и одного — для переменной u . Поскольку поле неподвижного центра является статическим, в рассматриваемом случае потенциал не зависит от переменной u , вследствие чего

последнее из уравнений системы приводится к равенству

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d\varphi}{dt} \frac{du}{d\tau},$$

или, если подставить $u = ict$,

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2. \quad (3,6,5)$$

Внося это соотношение в очевидное преобразование

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{dx}{dt} \frac{d^2t}{d\tau^2},$$

получим

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{c^2} \frac{d\varphi}{dt} \frac{dx}{dt} \right\} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2.$$

Поэтому первое из уравнений системы (3,6,4) можно написать в форме

$$\frac{d^2x}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Таким образом, векторное равенство (3,6,4) приводится к трем следующим уравнениям:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2, \quad (3,6,6)$$

определяющим декартовы координаты в функции времени.

Найдем теперь производную $\frac{d\tau}{dt}$. Интегрируя (3,6,5), получим

$$\frac{d\tau}{dt} = h e^{-\frac{\varphi}{c^2}}, \quad (3,6,7)$$

где h — постоянная интегрирования.

Это уравнение выражает связь между собственным временем частицы и относительным временем системы отсчета. Постоянная h зависит от центрального тела и от орбиты частицы. Найдем значение этой постоянной с точностью до величин порядка $\frac{\varphi}{c^2}$. С этой целью воспользуемся линейным элементом (3,6,1) в виде

$$c^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = -v^2 + c^2.$$

Внося (3,6,7) и положив $e^{-\frac{2\varphi}{c^2}} = 1 - \frac{2\varphi}{c^2}$, получим

$$h^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right).$$

Для вычисления правой части применима известная формула ньютоновой задачи двух тел

$$v^2 = \gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = 2\varphi - \frac{\gamma M}{a},$$

где a — большая полуось кеплеровой орбиты.

В принятом приближении получим

$$h^2 = 1 + \frac{\gamma M}{c^2 a}. \quad (3,6,8)$$

Система уравнений движения (3,6,6) принимает теперь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\gamma M}{c^2 a} - \frac{2\varphi}{c^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(\frac{\gamma M}{c^2 a} - \frac{2\varphi}{c^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(\frac{\gamma M}{c^2 a} - \frac{2\varphi}{c^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3,6,9)$$

Сравнивая (3,6,9) с законом движения механики Ньютона, видим, что, кроме обычной центральной силы притяжения, на частицу действует возмущающее ускорение

$$\mathbf{R} = \frac{(\gamma M)^2}{c^2 r^3} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \mathbf{r},$$

направленное вдоль радиуса-вектора.

Проекция этого ускорения на положительное направление радиуса-вектора равна

$$R = \frac{(\gamma M)^2}{c^2 r^2} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (3,6,10)$$

Поскольку $r < 2a$, величина R положительна и свидетельствует о том, что возмущающее ускорение является отталкивательным и состоит из членов, изменяющихся обратно пропорционально второй и третьей степени расстояния от центрального тела.

Вясним, как влияет возмущающее ускорение на элементы орбиты.

Третье из уравнений (1,6,3), определяющее движение линии апсид, принимает в нашем случае вид

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = - \frac{\gamma M}{c^2 a e (1 - e^2)} \left\{ (1 + e^2) \cos \varphi + 2e \cos^2 \varphi \right\}.$$

Интегрируя это равенство по истинной аномалии в пределах от нуля до 2π , получим угол поворота линии апсид за время одного

обращения частицы вокруг центрального тела

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi\gamma M}{c^2 a(1-e^2)}. \quad (3,6,11)$$

В отличие от прямого движения перигелия, наблюдаемого в действительности, в теории Нордстрема орбита прецессирует в обратном направлении.

Четвертое и пятое уравнения системы (1,6,3) в случае возмущающего ускорения (3,6,10) дают $\Delta a = \Delta e = 0$, показывая, что большая полуось и эксцентриситет не испытывают вековых изменений.

В заключение отметим, что в теории Нордстрема поле тяготения не влияет на распространение света. Как видим, изменение массы по закону (3,6,3) является необходимой и достаточной предпосылкой постоянства скорости света, следовательно, и условия $d\tau = 0$. Форма луча определяется уравнениями (3,6,6), которые при $d\tau = 0$ принимают вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

и дают

$$\frac{dx}{dt} = \text{const}; \quad \frac{dy}{dt} = \text{const}; \quad \frac{dz}{dt} = \text{const},$$

показывая, что световые лучи распространяются прямолинейно.

7. Теория Нордстрема (продолжение). Рассмотренная выше теория является существенным шагом в развитии учения о поле гравитации. Она обобщает закон тяготения в согласии с требованиями СТО и с учетом равенства инертной и тяжелой масс. Приложение этой теории к конкретным задачам приводит к результатам, по точности не уступающим выводам механики Ньютона. Если величине $\frac{\Phi}{c^2}$ приписать первый порядок, а отношению $\frac{v}{c}$ — порядок $\frac{1}{2}$, то с точностью до членов порядка $\frac{3}{2}$ теория Нордстрема совпадает с механикой Ньютона; различие между ними обнаруживается начиная только с членов второго порядка, т. е. в очень тонких особенностях движения. Следует, однако, иметь в виду, что надежно установленный эффект второго порядка — движение перигелия Меркурия — противоречит теории Нордстрема, которая, как мы видели, приводит к эффекту противоположного знака.

Развитая Нордстремом теория гравитации была одобрена Эйнштейном, посвятившим ей специальный параграф в упомянутом обзоре проблемы тяготения [6]. В 1914 г. в совместной работе Эйнштейна и Фоккера [9] предложен новый вариант теории Нордстрема, развитый с применением общего тензорного анализа.

Обобщая понятие мира Минковского, отвечающего СТО, Эйнштейн пользуется четырехмерным пространственно-временным континуумом с общими координатами. Инвариантный интервал в нем можно задать линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (3,7,1)$$

в котором через x^σ , $\sigma = 1, 2, 3, 4$, обозначены пространственные и временная координаты, а коэффициентами служат компоненты g_{ij} основного метрического тензора. Одинаковые верхний и нижний значки служат индексами суммирования; знак суммирования опущен, как это принято в формулах тензорного анализа. Метрический тензор симметричен ($g_{ij} = g_{ji}$), вследствие чего в общем случае он имеет всего десять различных компонент.

Движение материальной частицы изображается в пространственно-временном континууме «мировой точкой», перемещающейся по «мировой линии». В соответствии с принципом эквивалентности принимается, что мировой линией частицы, движущейся в поле гравитации в отсутствие сил другой природы, является геодезическая линия пространственно-временного континуума. Закон движения в гравитационном поле имеет, таким образом, вид

$$\delta^i ds = 0. \quad (3,7,2)$$

Пользуясь обычными методами вариационного исчисления, трудно представить этот закон в форме системы четырех дифференциальных уравнений. В общем виде эти уравнения мы приводить здесь не будем; ограничимся частным случаем, когда поле гравитации является статическим и употребляются ортогональные координаты, для которых отличны от нуля лишь диагональные компоненты метрического тензора.

Рассматривая пространственные координаты x^1, x^2, x^3 в функции времени $x^4 = t$, уравнения геодезической линии можно записать так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{g_{\sigma\sigma}}{g_{44}} \frac{dx^\sigma}{dt} \right) - \frac{1}{2g_{44}} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dx^\alpha}{dt} \right)^2 = 0. \quad (3,7,3)$$

Здесь α является индексом суммирования, а σ имеет в каждом уравнении одно из фиксированных значений 1, 2, 3.

В общих координатах принцип постоянства скорости света не соблюдается. Однако мы принимаем, что существует система отсчета, в которой этот принцип выполняется. В такой системе линейный элемент (3,7,1) при $ds = 0$ должен привести к условию $-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2 = 0$, выражающему постоянство скорости света.

Этому требованию можно удовлетворить только в том случае,

если в указанной системе отсчета линейный элемент принимает вид

$$ds^2 = \Phi^2 (-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2), \quad (3,7,4)$$

где Φ — некоторая скалярная функция координат и времени.

Легко видеть, что, допустив существование одной системы координат, отвечающей квадратической форме (3,7,4), мы тем самым допускаем существование сколь угодно большого числа таких систем, связанных между собой преобразованием Лоренца.

Для функции Φ Эйнштейн получает уравнение

$$\Phi \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = kT, \quad (3,7,5)$$

обобщающее уравнение Пуассона для гравитационного потенциала. Здесь k — постоянная, T — скаляр, зависящий от распределения масс, которые служат источником поля тяготения.

С точки зрения общих предпосылок оба варианта теории Нордстрема вполне равноценны, поскольку они в одинаковой степени отвечают специальному принципу относительности, постулату постоянства скорости света и равенству инертной и тяжелой масс. Их следствия, относящиеся к конкретным задачам, также во многом оказываются одинаковыми. В качестве иллюстрации вновь рассмотрим задачу о движении частицы в постоянном поле одного центра, основываясь на втором варианте теории.

Для статического поля в вакууме уравнение (3,7,5) превращается в уравнение Лапласа $\nabla^2 \Phi = 0$ и в случае центральной симметрии имеет решение $\Phi = \frac{A}{r} + B$, где A, B — постоянные интегрирования. Считая, что на бесконечности квадратическая форма (3,7,4) совпадает с линейным элементом СТО, находим $B = 1$. Следовательно,

$$\Phi = 1 + \frac{A}{r}. \quad (3,7,6)$$

Составим уравнения движения.

Отличные от нуля компоненты метрического тензора, отвечающего линейному элементу (3,7,4),

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\Phi^2, \quad g_{44} = c^2 \Phi^2.$$

Поэтому, положив x^σ равным соответственно декартовым координатам x, y, z , первое из уравнений (3,7,3) можно написать в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{c^2}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c^2 - v^2}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (3,7,7)$$

где v — скорость частицы.

Чтобы определить значение постоянной A , перейдем к приближению Ньютона, для чего в (3,7,7) следует опустить v^2 . Уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial x} (c^2 \ln \Phi) = 0$$

совпадает с законом движения Ньютона, если величину $c^2 \ln \Phi$ отождествить с гравитационным потенциалом φ . Следовательно,

$$\Phi = e^{-\frac{\varphi}{c^2}} \simeq 1 - \frac{\gamma M}{c^2 r}, \quad (3,7,8)$$

что совпадает с решением (3,7,6) при $A = -\frac{\gamma M}{c^2}$, где M — масса центра гравитации.

Возвращаясь к равенству (3,7,7), можно переписать его следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{v^2}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3,7,9)$$

Аналогичную форму имеют два другие уравнения системы (3,7,3).

Таким образом, на частицу, кроме ньютоновой силы притяжения к центральному телу, действует возмущающее ускорение

$$\mathbf{R} = \frac{v^2}{c^2} \frac{\gamma M}{r^3} \mathbf{r},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор частицы относительно центра притяжения.

Возмущающее ускорение является отталкивательным и совпадает со значением (3,6,10), найденным на основе первоначальной теории Нордстрема. При $v = c$ три уравнения вида (3,7,7) дают для производных $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ постоянные значения, показывая, что свет распространяется в поле тяготения прямолинейно.

8. Теория Эйнштейна — Гроссмана. С математической точки зрения теорию гравитации Нордстрема можно назвать *скалярной*, поскольку поле тяготения характеризуется в ней скалярной функцией — обобщенным гравитационным потенциалом. Важнейшей физической особенностью этой теории является инвариантность ее уравнений относительно преобразования Лоренца, т. е. выполнение специального принципа относительности. Это значит, что, с точностью до преобразований Лоренца, теория Нордстрема выполняется только в определенной системе отсчета, совпадающей с инерциальными координатами специальной теории относительности, тогда как при переходе к ускоряющейся системе отсчета теория нарушается.

Если движение частицы изучается в ускоренной системе, то необходимо учесть также силы инерции. Таким образом, как и в

механике Ньютона, гравитация и инерция имеют в теории Нордстрема абсолютное значение, а равенство инертной и тяжелой масс не истолковывается.

Придерживаясь идеи об относительности гравитации и инерции и единстве их физической природы, Эйнштейн и Гроссман предложили в 1913 г. теорию тяготения, основанную на принципе эквивалентности и разработанную при помощи общего тензорного анализа [10]. Несколько позднее концепция была окончательно разработана в общей теории относительности, которой посвящены следующие главы. Поэтому здесь мы не будем рассматривать работу Эйнштейна и Гроссмана сколько-нибудь подробно и ограничимся только немногими замечаниями, чтобы отметить принципиальное отличие этого направления от скалярной теории Нордстрема.

Пространство и время в теории Эйнштейна и Гроссмана рассматриваются как четырехмерный континуум, заданный квадратической формой

$$ds^2 = g_i dx^i dx^i, \quad (3,8,1)$$

коэффициенты которой составляют симметричный тензор второго порядка, называемый в общей римановой геометрии метрическим тензором. Предполагается, что полю гравитации в данной системе отсчета соответствует определенная метрика пространственно-временного континуума, вследствие чего тензор g_{ij} является математическим описанием этого поля.

Движение частицы в гравитационном поле изображается в пространственно-временном континууме точкой, перемещающейся по четырехмерной геодезической линии, как это следует из принципа эквивалентности. Таким образом, закон движения частицы имеет вид $\delta \int ds = 0$, являясь обобщением закона инерции Галилея. Это значит, что движение частицы, происходившее, с точки зрения механики Ньютона, под действием силы тяготения, в новой теории следует считать свободным, происходящим по инерции; объяснение особенностей этого движения нужно искать в метрике пространственно-временного континуума. Никакого различия между тяготением и инерцией в теории Эйнштейна — Гроссмана не существует; они представляют лишь частные формы общего поля гравитации.

В тех случаях, когда в результате преобразования пространственно-временных координат квадратическая форма (3,8,1) принимает вид

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2, \quad (3,8,2)$$

гравитационного поля нет, и теория Эйнштейна — Гроссмана переходит в специальную теорию относительности.

Заметим, что условие $ds = 0$, характеризующее распространение света в СТО (а также в теории Нордстрема), сохраняется и в общем случае, когда пространственно-временной интервал определяется соотношением (3,8,1). Однако скорость распространения света в поле гравитации оказывается вообще переменной; она постоянна только в том случае, когда выполняется соотношение (3,8,2), т. е. вне поля гравитации.

Важнейшей и наиболее трудной задачей является вывод уравнений, связывающих метрический тензор с распределением масс в данной системе отсчета. Сточки зрения принципа эквивалентности такие уравнения, называемые обыкновенно уравнениями поля, должны иметь одну и ту же форму во всех системах отсчета, т. е. должны быть *ковариантны относительно произвольных преобразований* пространственно-временных координат. Это требование, получившее название общего принципа относительности, играло фундаментальную роль в последующем развитии теории гравитации. Однако в указанном совместном исследовании Эйнштейна и Гроссмана и в ряде более поздних работ Эйнштейна не удалось получить решение задачи, удовлетворяющее этому общему требованию. Частные формы уравнений поля, найденные при ограниченном выборе систем отсчета, мы приводить не будем, поскольку в настоящее время они представляют только исторический интерес. Более подробно вопрос об уравнениях поля рассмотрим при изложении основ общей теории относительности (ОТО).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. A. Lorentz.— Proceedings Acad. Science. Amsterdam, 6, 809, 1904
2. H. Poincaré.— Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXI, 129, 1906.
3. A. Einstein.— Annal. Phys., 17, 891, 1905. Собр. научн. трудов, 1, 7. «Наука», М., 1965.
4. A. Einstein.— Annal. Phys., 35, 898, 1911. Собр. научн. трудов, 1, 165. «Наука», М., 1965.
5. M. Abraham.— Phys. Zeitschr., 13, N 1, 311, 1912; Annal. Phys., 39, 444, 1913.
6. A. Einstein.— Phys. Zeitschr., 14, 1249, 1913; Собр. научн. трудов, 1, 273, «Наука», М., 1965.
7. C. Mie.— Annal. Phys., 40, 1, 1913.
8. G. Nordström.— Phys. Zeitschr., 13, 1126, 1912; Annal. Phys., 1913, 40, 872; 42, 533; 43, 1101.
9. A. Einstein, A. Fokker.— Annal. Phys., 44, 321, 1914. Собр. научн. трудов, 1, 305, «Наука», М., 1965.
10. A. Einstein, M. Grossmann.— Zeitschr. Mathem. Phys., 62, 225, 1913. Собр. научн. трудов, 1, 227. «Наука», М., 1965.

Глава IV. ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И ГЕОМЕТРИЯ РИМАНА

1. Эвклидово пространство в криволинейных координатах. Тензорный анализ и геометрия римановых пространств составляют основу математического аппарата ОТО. В многочисленных учебных руководствах и специальных монографиях эти разделы математики излагаются в различных аспектах с большой полнотой и строгостью. Здесь кратко рассматриваются только основные понятия и приводятся лишь необходимые формулы, непосредственно применяемые в дальнейшем. Глубокое обоснование и анализ этих понятий и формул не входят в нашу задачу; за ними мы отсылаем читателей к специальным математическим изданиям. В конце главы указаны лишь важнейшие классические исследования и современные учебные руководства [1—5].

Рассмотрим пространство Эвклида n измерений. Вводя общие криволинейные координаты, каждую точку пространства можно характеризовать с помощью n параметров x^1, \dots, x^n — координат точки. Геометрическим местом точек, для которых все координаты, кроме одной (например, x^i), сохраняют постоянные значения, является непрерывная линия, называемая **к о о р д и н а т н о й л и н и е й**. В каждой точке пространства пересекаются все n координатных линий.

Выбрав каким-нибудь способом **н а ч а л о**, построим в пространстве Эвклида радиус-вектор \mathbf{r} и будем считать этот вектор функцией координат его конечной точки: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \dots, x^n)$. Частные производные $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \mathbf{e}_i$ представляют собой единичные векторы касательных к координатным линиям; будем называть их **к о о р д и н а т н ы м и в е к т о р а м и**. Во всех точках пространства они линейно независимы. Это значит, что сумма вида $m^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ не может оказаться равной нулю ни при каких значениях коэффициентов m^α , если только исключить тривиальный случай, когда все $m^\alpha = 0$.

Рассмотрим две бесконечно близкие точки пространства с координатами \mathbf{r} и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Разложив дифференциал радиуса-вектора на компоненты, направленные вдоль координатных линий, можно написать

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\alpha dx^\alpha, \quad (4,1,1)$$

где dx^α — дифференциалы координат, которые являются составляющими вектора $d\mathbf{r}$.

Тот же вектор можно задать другим способом, определив его с помощью проекций на направления координатных линий в данной точке. Обозначив проекции через dx_i , имеем $dx_i = dr, e_i$. Если употребляются прямоугольные координаты, то составляющие и проекции совпадают; в общих координатах они различны.

Преобразуем координаты, перейдя от системы x^i к новой системе $x^{i'}$. Форму преобразования оставим неопределенной, но допустим, что она удовлетворяет необходимым для дальнейшего аналитическим требованиям, в частности, позволяет однозначно выразить координаты одной системы через координаты другой. Введенные выше величины в новой системе координат обозначим через $e_{i'}$, $dx^{i'}$, $dx_{i'}$.

Радиус-вектор \mathbf{r} какой-либо точки пространства представляет собой функцию ее координат x^i , которые, в свою очередь, являются функциями переменных $x^{i'}$. Поэтому, дифференцируя вектор \mathbf{r} по координате $x^{i'}$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}},$$

где α — индекс суммирования, принимающий значения 1, 2, ... n . Следовательно,

$$e_{i'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} e_\alpha. \quad (4,1,2)$$

Координатные векторы преобразуют с помощью матрицы $\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\right)$, элементами которой служат n^2 производных от старых координат по новым. Если обе системы декартовы, то эти производные постоянны; в общем случае они являются функциями координат.

Выразим новые координаты через старые: $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$. Образуя полный дифференциал, находим закон преобразования составляющих вектора $d\mathbf{r}$

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \quad (4,1,3)$$

В этом случае преобразование осуществляется с помощью матрицы $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right)$, обратной матрице $\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\right)$.

По определению, проекции вектора $d\mathbf{r}$ в новой системе равны $dx_{i'} = d\mathbf{r}, e_{i'}$. Внося сюда (4,1,2), получим

$$dx_{i'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} (d\mathbf{r}, e_\alpha) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} dx_\alpha. \quad (4,1,4)$$

Сравним формулы перехода (4,1,3) и (4,1,4) с соотношением (4,1,2). Проекция вектора dr преобразуются как координатные векторы, а его составляющие — по обратному закону. В соответствии с этим вектор, заданный проекциями, принято называть *к о в а р и а н т н ы м*, тогда как при задании его составляющими он называется *к о н т р а в а р и а н т н ы м*. Те же термины употребляются для обозначения компонент вектора: dx_i — ковариантные, dx^i — контравариантные. Индекс ковариантности служит нижним знаком, индекс контравариантности — верхним.

Нетрудно найти связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора dr . Внося (4,1,1) в соотношение $dx_i = dr, e_i$, получим

$$dx_i = (e_i, e_\alpha) dx^\alpha = g_{i\alpha} dx^\alpha. \quad (4,1,5)$$

Коэффициенты g_{ik} , связывающие компоненты обоих типов, играют в тензорном анализе очень важную роль и встречаются во многих формулах геометрии. В частности, они позволяют составить общую формулу, определяющую расстояние между двумя смежными точками пространства. Если радиусы-векторы этих точек соответственно равны r и $r + dr$, то расстояние ds между ними можно определить с помощью очевидного соотношения $ds^2 = dr, dr$. Воспользовавшись разложением (4,1,1), получим $ds^2 = (e_i, e_j) dx^i dx^j$. Следовательно,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (4,1,6)$$

Суммирование выполняется здесь по каждому из индексов.

Коэффициенты g_{ij} представляют собой функции координат; общее их число равно n^2 . Однако среди них имеются равные, поскольку по определению они удовлетворяют условию симметрии $g_{ij} = g_{ji}$. Нетрудно убедиться в том, что число различных значений g_{ij} в общем случае равно $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Найдем закон преобразования величин g_{ij} при переходе от одной системы координат к другой.

По определению, имеем $g_{i'j'} = (e_{i'}, e_{j'})$. Поэтому, согласно (4,1,2), получим

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} (e_\alpha, e_\beta),$$

т. е.

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} g_{\alpha\beta}. \quad (4,1,7)$$

Для вычисления новых значений коэффициентов g_{ij} необходимо дважды применить матрицу, с помощью которой преобразуются

ковариантные векторы. Величины, преобразующиеся по закону (4,1,7) являются компонентами ковариантного тензора второго порядка. В соответствии с таким определением ковариантный вектор следует назвать ковариантным тензором первого порядка.

Аналогично вводится определение контравариантного тензора второго порядка. Пример такого тензора можно построить, вернувшись к соотношению (4,1,5), связывающему ко- и контравариантные компоненты элементарного вектора dr .

Составим определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4,1,8)$$

который в дальнейшем предполагается отличным от нуля.

Обозначим через $A^{i\alpha}$ алгебраическое дополнение элемента $g_{i\alpha}$ этого определителя и составим сумму $A^{i\alpha}g_{k\alpha}$, оставляя значки i, k фиксированными. Из теории определителей известно, что при $i = k$ эта сумма равна определителю, тогда как при $i \neq k$ — нулю.

Итак,

$$A^{i\alpha}g_{k\alpha} = \delta_k^i g, \quad (4,1,9)$$

где δ_k^i — так называемые символы Кронекера, заданные соотношением

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad (4,1,10)$$

Напишем формулу (4,1,5) в виде $dx_\alpha = g_{\alpha\beta}dx^\beta$ и умножим ее на $A^{i\alpha}$. Суммируя по индексу α , получим

$$A^{i\alpha}dx_\alpha = A^{i\alpha}g_{\alpha\beta}dx^\beta = g\delta_\beta^i dx^\beta = gdx^i.$$

Следовательно,

$$dx^i = g^{i\alpha}dx_\alpha; \quad g^{ij} = \frac{A^{ij}}{g}. \quad (4,1,11)$$

Коэффициенты g^{ij} позволяют выразить контравариантные компоненты вектора dr через ковариантные компоненты того же вектора.

Рассмотрим свойства этих коэффициентов подробнее. Прежде всего заметим, что они удовлетворяют условию симметрии $g^{ij} = g^{ji}$, поскольку из симметричности тензора g_{ij} непосредственно следует $A^{ij} = A^{ji}$.

Образовав произведение $g_{i\alpha}g^{i\alpha}$ и выполнив суммирование по индексу α , получим соотношение

$$g_{i\alpha}g^{i\alpha} = \delta_i^i, \quad (4,1,12)$$

неоднократно используемое в дальнейшем.

Найдем закон, по которому преобразуются коэффициенты $g^{i'}$ при переходе к новой системе координат.

Согласно (4,1,11), в новой системе координат имеем $dx^{i'} = g^{i'\alpha}dx_\alpha$. Внесем сюда (4,1,3) и (4,1,4); получим

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = g^{i'\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} dx_\beta,$$

или, если, согласно (4,1,11), в левой части равенства перейти к ковариантным компонентам вектора dx ,

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} g^{\alpha\beta} dx_\beta = g^{i'\alpha'} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} dx_\beta.$$

Поскольку величины dx_β независимы, из соотношения

$$\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} g^{\alpha\beta} - g^{i'\alpha'} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \right) dx_\beta = 0$$

с необходимостью следует

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} g^{\alpha\beta} = g^{i'\alpha'} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}.$$

Умножим это равенство на производную $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\beta}$ и суммируем по индексу β :

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\beta} g^{i'\alpha'}.$$

Принимая во внимание очевидное соотношение $\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\beta} = \delta_{\alpha'}^{i'}$, а также равенство $\delta_{\alpha'}^{i'} g^{i'\alpha'} = g^{i'i'}$, окончательно получим

$$g^{i'i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (4,1,13)$$

Найденный закон преобразования состоит в двукратном применении преобразования (4,1,3), присущего контравариантному вектору. Это показывает, что совокупность коэффициентов $g^{i'}$ образует контравариантный тензор второго порядка.

В заключение преобразуем символы Кронекера (4,1,10). Согласно (4,1,12), в новой системе координат имеет место равенство

$$\delta_{j'}^{i'} = g^{i'\alpha'} g_{j'\alpha'}.$$

Внесем сюда преобразования (4,1,7) и (4,1,13).

$$\delta_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\alpha'}} g^{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{j'}} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}.$$

Принимая во внимание (4,1,12), окончательно получим

$$\delta_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (4,1,14)$$

В данном случае одновременно используются законы преобразования как ковариантного, так и контравариантного векторов. Символы Кронекера образуют смешанный тензор второго порядка — ковариантный относительно нижнего индекса и контравариантный относительно верхнего.

Рассмотренный тензор второго порядка, заданный ковариантными g_{ij} или контравариантными g^{ij} компонентами, называется метрическим тензором. Он играет фундаментальную роль в теории римановых пространств, являясь основной характеристикой их геометрических свойств.

2. Тензоры и их свойства. Выше были рассмотрены примеры тензоров, которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по определенным законам, полученным путем соответствующего обобщения формулы преобразования координатных векторов. Расширяя введенные понятия, дадим более общее определение тензора.

Совокупность величин T_{klm}^{ij} представляет собой тензор пятого порядка — ковариантный относительно нижних индексов и контравариантный относительно верхних, если при переходе от одной системы координат к другой эти величины преобразуются по формулам вида

$$T_{k'l'm'}^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x^{m'}} T_{\gamma\delta\epsilon}^{\alpha\beta}. \quad (4,2,1)$$

Это определение выполняется для тензора любого порядка и произвольного строения. В частности, тензор первого порядка является вектором, а тензор нулевого порядка — скаляром, или инвариантом, сохраняющим одно и то же значение во всех системах координат.

Заметим, что в какой-нибудь одной системе координат все компоненты тензора можно задать совершенно произвольно; в других системах координат компоненты определяются вполне однозначно

принятым законом преобразования. Чтобы убедиться в этом, необходимо показать, что при непосредственном переходе от одной системы координат к другой компоненты данного тензора оказываются такими же, как при любом числе промежуточных систем.

В качестве примера рассмотрим переход от координат x^i к системе $x^{i'}$, а затем к $x^{i''}$. В результате первого преобразования для компонент некоторого тензора третьего порядка получим

$$T_{i'k'}^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{k'}} T_{\beta\gamma}^{\alpha}$$

Второе преобразование дает

$$\begin{aligned} T_{i''k''}^{j''} &= \frac{\partial x^{j''}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{k''}} T_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = \\ &= \frac{\partial x^{j''}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} T_{\beta\gamma}^{\alpha} \end{aligned}$$

Согласно теореме о дифференцировании сложных функций,

$$\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{\alpha}} \text{ и т. п.}$$

Поэтому

$$T_{i''k''}^{j''} = \frac{\partial x^{j''}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{k''}} T_{\beta\gamma}^{\alpha}$$

Такой же результат получается при непосредственном переходе от координат x^i к координатам x'' .

Из рассмотренного свойства вытекает заключение о сохранении тензорных уравнений.

Допустим, что в какой-либо системе координат установлено равенство двух тензоров: $T_{jk}^i = L_{jk}^i$. Перейдя к новой системе, вычислим компоненты $T_{j'k'}^{i'}$ и $L_{j'k'}^{i'}$ по известным формулам преобразования. Убедившись в том, что новые компоненты выражаются через старые с помощью одинаковых соотношений, найдем $T_{j'k'}^{i'} = L_{j'k'}^{i'}$. Таким образом, тензорное уравнение, полученное в одной системе координат, выполняется во всех других системах. Это свойство тензорных уравнений имеет в ОТО фундаментальное значение.

Перечислим основные операции тензорной алгебры.

Пусть A_k^{ij} и B_k^{ij} — тензоры одинакового строения. Основываясь на определении тензора, легко видеть, что совокупность величин $C_k^{ij} = A_k^{ij} + B_k^{ij}$ является тензором того же порядка и строения. Эта операция, называемая *сложением тензоров*, инвариантна относительно общего преобразования координат.

Если A_j^i и B_{lm}^k — тензоры, то $C_{ilm}^{ik} = A_j^i B_{lm}^k$ — также тензор, порядки ко- и контравариантности которого равны суммам соответствующих порядков двух первых тензоров. Эта операция носит название *умножения тензоров*; она также инвариантна относительно общего преобразования координат.

Рассмотрим какой-либо смешанный тензор A_{kl}^{ij} . Выделим компоненты, у которых один из индексов ковариантности совпадает с одним из индексов контравариантности, и составим их сумму

$$A_{k\alpha}^{i\alpha} = A_{kl}^{il} + \dots + A_{kn}^{in}.$$

Нетрудно показать, что совокупность величин $A_{k\alpha}^{i\alpha}$ является тензором, у которого порядки ко- и контравариантности на единицу ниже, чем у исходного тензора. В данном случае $A_{k\alpha}^{i\alpha}$ представляет собой смешанный тензор второго порядка — ковариантный относительно индекса k и контравариантный относительно i . Эта операция называется *свертыванием*. Если порядки ко- и контравариантности одинаковы, то можно выполнить *полное свертывание*, результатом которого является с к а л я р, или и н в а р и а н т, данного тензора. Так, двойная сумма $A_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ служит инвариантом тензора A_{kl}^{ij} . В качестве простого примера имеем $\delta_{\alpha}^{\alpha} = n$.

Несколько более сложным примером является свертывание произведения $g_{ij}g^{kl}$. Имеем $g_{i\alpha}g^{k\alpha} = \delta_i^k$ (см. формулу (4,1,12)), $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\alpha} = n$.

Сочетание умножения и свертывания позволяет осуществить особые операции, называемые *поднятием* и *опусканием* индексов.

Пусть A_{ijk} — ковариантный тензор третьего порядка. Составим произведение $A_{ija}g^{k\beta}$ и, положив $\alpha = \beta$, выполним свертывание. Полученный таким образом тензор $A_{ija}g^{k\alpha}$ имеет второй порядок ковариантности и первый порядок контравариантности. Его обозначают обыкновенно символом A_{ij}^k ; один из индексов оказался поднятым.

Аналогично, умножив тензор B^{ilk} на g_{lm} и произведя затем свертывание, можно образовать тензор B_k^{ij} , опустив один из индексов исходного тензора. Это дает возможность изменять строение тензоров: по заданным ковариантным компонентам вычислять смешанные или контравариантные компоненты и наоборот. В частности, символы Кронекера можно рассматривать как результат поднятия одного из индексов ковариантного метрического тензора или как результат опускания одного индекса контравариантного тензора.

3. Параллельный перенос тензора. При задании двух тензоров одинакового строения в одной точке пространства вопрос об их равенстве или неравенстве не требует особого исследования и решается путем непосредственного сравнения компонент. Тензоры считаются

равными, если их соответствующие компоненты одинаковы. Если же тензоры заданы в различных точках пространства, то при употреблении криволинейных координат вопрос об их равенстве или неравенстве усложняется.

Пусть, например, в точках $M_1(x_1^i)$ и $M_2(x_2^i)$ заданы векторы с контравариантными компонентами y_1^i и y_2^i соответственно. Поскольку координатные векторы в указанных точках различны, непосредственное сравнение компонент не может служить признаком равенства или неравенства векторов. Предварительно необходимо ввести в одной из точек местную систему координат, выбрав ее так, чтобы координатные векторы этой системы совпали с координатными векторами в другой точке. Если при этом соответственные компоненты рассматриваемых векторов окажутся одинаковыми, то и сами векторы равны. Такое определение равенства применимо для тензоров любого порядка и строения. Если два тензора одинакового строения, заданные в различных точках пространства, отвечают этому определению, то их называют равными; каждый из них представляет собой результат *параллельного переноса* тензора из одной точки в другую. Для выяснения равенства или неравенства тензоров, заданных в различных точках, нет необходимости в фактическом выборе местной системы координат. Имеется возможность найти в общем виде закон изменения компонент тензора при его параллельном переносе из одной точки пространства в другую.

Рассмотрим прежде всего вопрос о бесконечно малом параллельном переносе контравариантного вектора. Пусть вектор y^i задан в точке $M(x^i)$. Требуется определить, какие приращения приобретут компоненты этого вектора при его параллельном переносе в точку $M'(x^i + dx^i)$.

В точке M координатные направления определяются единичными векторами $e_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки M относительно произвольно выбранного начала. При переходе к точке M' координатные векторы изменяются на $de_i = \frac{\partial e_i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^\alpha} dx^\alpha$. Величина $\frac{\partial e_i}{\partial x^j}$ представляет собой вектор, симметричный относительно индексов i, j . Разложив его на составляющие, направленные вдоль координатных линий, можно написать $\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^\alpha e_\alpha$, где Γ_{ij}^α — коэффициенты разложения, отвечающие условию симметрии $\Gamma_{ij}^\alpha = \Gamma_{ji}^\alpha$.

Для определения этих коэффициентов дифференцируем известное соотношение $g_{ij} = (e_i, e_j)$:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial e_i}{\partial x^k}, e_j \right) + \left(e_i, \frac{\partial e_j}{\partial x^k} \right). \quad (4,3,1)$$

Умножив равенство $\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^\alpha e_\alpha$ скалярно на вектор e_k , получим

$$\left(\frac{\partial e_i}{\partial x^j}, e_k \right) = \Gamma_{ij}^\alpha (e_\alpha, e_k) = g_{\alpha k} \Gamma_{ij}^\alpha.$$

Введя обозначение

$$g_{\alpha k} \Gamma_{ij}^\alpha = \Gamma_{ij,k} \quad (4,3,2)$$

и выполнив соответствующую перестановку индексов, найдем

$$\left(\frac{\partial e_i}{\partial x^k}, e_j \right) = \Gamma_{ik,j}.$$

Поэтому (4,3,1) можно переписать так:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik,i} + \Gamma_{jk,i}. \quad (4,3,3)$$

С помощью этого соотношения нетрудно найти $\Gamma_{ij,k}$, после чего искомые коэффициенты Γ_{ij}^k вычисляются на основании (4,3,2).

Круговая перестановка индексов в (4,3,3) позволяет составить выражения для производных $\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$ и $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$. Вычтя из суммы этих производных величину (4,3,3), получим

$$\Gamma_{i,j,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (4,3,4)$$

Для вычисления коэффициентов Γ_{ij}^k напишем (4,3,2) в виде $g_{\alpha\beta} \Gamma_{ij}^\beta = \Gamma_{ij,\alpha}$. Умножив это равенство на $g^{\alpha k}$ и просуммировав по α , найдем

$$g_{\alpha\beta} g^{\alpha k} \Gamma_{ij}^\beta = \delta_\beta^k \Gamma_{ij}^\beta = g^{\alpha k} \Gamma_{ij,\alpha},$$

откуда непосредственно следует

$$\Gamma_{ij}^k = g^{\alpha k} \Gamma_{ij,\alpha}. \quad (4,3,5)$$

Величины $\Gamma_{ij,k}$ и Γ_{ij}^k называются символами Кристоффеля первого и второго рода соответственно. Они симметричны относительно индексов i, j и являются однородными линейными функциями производных от компонент метрического тензора по координатам. Не будучи тензорами, символы Кристоффеля входят во многие формулы тензорного анализа.

Возвращаемся к задаче о параллельном переносе вектора.

Воспользовавшись разложением $\frac{\partial e_i}{\partial x^\alpha} = \Gamma_{i\alpha}^\beta e_\beta$, можно представить приращение вектора e_i в виде $de_i = \Gamma_{i\alpha}^\beta e_\beta dx^\alpha$. Таким образом, координатные векторы в точках M и M' соответственно равны e_i и

$e_i + \Gamma_{i\alpha}^{\beta} e_{\beta} dx^{\alpha}$. Как известно, вектор равен сумме произведений его контравариантных составляющих на единичные векторы координатных направлений (рис. 13). Поскольку составляющие в точках M , M' соответственно равны y^i и $y^i + dy^i$, то условие параллельного переноса выражается уравнением

$$e_i y^i = (e_i + \Gamma_{i\alpha}^{\beta} e_{\beta} dx^{\alpha}) (y^i + dy^i).$$

С точностью до бесконечно малых первого порядка имеем

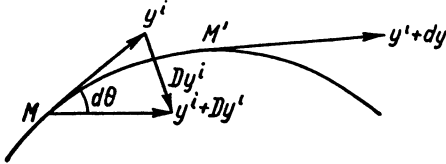


Рис. 13.

$$\Gamma_{i\alpha}^{\beta} e_{\beta} y^i dx^{\alpha} + e_i dy^i = 0,$$

или

$$(\Gamma_{\alpha\beta}^i y^{\alpha} dx^{\beta} + dy^i) e_i = 0,$$

откуда, ввиду произвольности системы координатных векторов, следует

$$dy^i = -\Gamma_{\alpha\beta}^i y^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (4,3,6)$$

Эта формула и определяет приращение контравариантных компонент при параллельном переносе вектора в бесконечно близкую точку.

Вясним, как при параллельном переносе изменяются ковариантные компоненты вектора.

В точке M эти компоненты определяются, как мы знаем, формулами $y_i = (y, e_i)$. В точке M' значение ковариантной компоненты $y_i + dy_i$ равно скалярному произведению вектора y на координатный вектор $e_i + \Gamma_{i\alpha}^{\beta} e_{\beta} dx^{\alpha}$. Следовательно,

$$y_i + dy_i = (y, e_i) + \Gamma_{i\alpha}^{\beta} (y, e_{\beta}) dx^{\alpha},$$

или

$$dy_i = \Gamma_{i\alpha}^{\beta} y_{\beta} dx^{\alpha}. \quad (4,3,7)$$

Найденные законы изменения ко- и контравариантных компонент при параллельном переносе вектора легко обобщаются на случай тензора любого строения. Так, при переносе в бесконечно близкую точку смешанного тензора третьего порядка его компоненты приобретают приращения

$$dX_{ik}^i = -\Gamma_{\alpha\beta}^i X_{ik}^{\beta} dx^{\alpha} + \Gamma_{j\alpha}^{\beta} X_{\beta k}^i dx^{\alpha} + \Gamma_{\alpha k}^{\beta} X_{j\beta}^i dx^{\alpha}. \quad (4,3,8)$$

Приложим операцию параллельного переноса к метрическому тензору.

Пусть в пространстве задано поле тензора g_{ij} . Если в точке M (x^{α}) компоненты этого тензора равны g_{ij} , то в точке M' ($x^{\alpha} + dx^{\alpha}$) они

определяются формулами $g_{ij} + dg_{ij}$, где $dg_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$. Произведем параллельный перенос тензора g_{ij} из точки M в точку M' . Приращения компонент, обусловленные этим переносом, обозначим через Δg_{ij} . Согласно общей формуле (4,3,8), имеем

$$\Delta g_{ij} = \Gamma_{i\alpha}^{\beta} g_{j\beta} dx^\alpha + \Gamma_{j\alpha}^{\beta} g_{i\beta} dx^\alpha.$$

Воспользовавшись (4,3,5), заменим символы Кристофеля второго рода символами первого рода.

$$\begin{aligned} \Delta g_{ij} &= (g_{j\beta} g^{\beta\gamma} \Gamma_{i\alpha,\gamma} + g_{i\beta} g^{\beta\gamma} \Gamma_{j\alpha,\gamma}) dx^\alpha = \\ &= (\delta_j^\gamma \Gamma_{i\alpha,\gamma} + \delta_i^\gamma \Gamma_{j\alpha,\gamma}) dx^\alpha = (\Gamma_{i\alpha,i} + \Gamma_{j\alpha,i}) dx^\alpha. \end{aligned}$$

Согласно (4,3,3), искомое приращение оказывается равным

$$\Delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = dg_{ij},$$

совпадая с дифференциалом, обусловленным различием координат в точках M , M' . Это значит, что поле метрического тензора можно рассматривать как результат параллельного переноса этого тензора из какой-либо одной точки во все другие точки пространства.

Нетрудно убедиться в том, что такой же особенностью обладают тензоры g^{ij} и δ_j^i . Так, приращение смешанного тензора δ_j^i , вызванного его параллельным переносом, равно

$$\Delta \delta_j^i = -\Gamma_{\alpha\beta}^i \delta_j^\beta dx^\alpha + \Gamma_{i\alpha}^\beta \delta_j^\alpha dx^\alpha = 0,$$

что совпадает с дифференциалом этого тензора, имеющего одинаковые значения компонент во всех точках пространства.

Мы рассмотрели задачу о параллельном переносе тензора в бесконечно близкую точку. Остается указать, каким образом можно осуществить параллельный перенос на конечное расстояние.

Допустим, что некоторый контравариантный вектор задан в точке M (x_0^α) своими компонентами y_0^i . Проведем через эту точку непрерывную линию, заданную уравнениями $x^i = x^i(\tau)$, где τ — параметр, принимающий для точки M значение τ_0 . Требуется параллельно перенести вектор вдоль данной линии.

Соотношение (4,3,6) определяет приращение компонент вектора при его параллельном переносе между двумя бесконечно близкими точками кривой. Разделив это соотношение на приращение параметра $d\tau$, отвечающее переходу между указанными точками, получим

$$\frac{dy^i}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\beta}{d\tau} y^\alpha = 0. \quad (4,3,9)$$

Входящие сюда символы Кристофеля известным образом выражаются через составляющие метрического тензора и их производные

по координатам. Для данной линии эти символы являются определенными функциями параметра τ , зависящими от уравнений линии.

Теми же уравнениями определяются производные $\frac{dx^\beta}{d\tau}$.

Равенства (4,3,9) составляют систему линейных однородных уравнений первого порядка относительно величин y^i . Поскольку при $\tau = \tau_0$ величины y^i принимают заданные значения y_0^i , эта система имеет единственное решение, однозначно определяющее параллельный перенос вдоль линии.

Предположим, что, найдя решение системы (4,3,9), мы определили затем значения компонент вектора в какой-либо определенной точке M_1 данной линии. Соединив точки M и M_1 другой линией, мы могли бы осуществить параллельный перенос вектора в точку M_1 по новому пути. Однако в случае геометрии Эвклида, которой мы до сих пор придерживаемся, значения компонент остались бы прежними: результат параллельного переноса данного вектора в эвклидовом пространстве определяется начальной и конечной точками и не зависит от выбранного пути.

4. Геометрия Римана. Эвклидово пространство n измерений представляет собой множество точек, каждая из которых находится в однозначном соответствии с n числами-координатами. Расстояние ds между двумя точками пространства с координатами x^i и $x^i + dx^i$ определяется инвариантной квадратической формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (4.4.1)$$

коэффициентами которой служат ковариантные компоненты метрического тензора. Задание последнего определяет метрические свойства пространства, поскольку этот тензор позволяет найти длины линий и углы между ними.

Длина отрезка линии, заданной в пространстве уравнениями $x^i = x^i(\tau)$, вычисляется по формуле

$$s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}. \quad (4.4.2)$$

Угол θ между двумя линейными элементами $ds = e_\alpha dx^\alpha$ и $\delta s = e_\beta dx^\beta$ можно найти, образовав скалярное произведение $ds, \delta s = (e_\alpha, e_\beta) dx^\alpha dx^\beta$. Положив $ds, \delta s = ds\delta s \cos \theta$ и воспользовавшись определением компонент метрического тензора, получим

$$\cos \theta = \frac{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{ds\delta s}. \quad (4.4.3)$$

В пространстве Эвклида можно построить систему прямолинейных декартовых координат. В этой системе координатные векторы во всех точках пространства имеют одинаковые значения, след-

ствии чего компоненты метрического тензора $g_{ij} = (e_i, e_j)$ будут постоянными числами. Можно утверждать, что континуум, отвечающий квадратической форме (4,4,1), будет эвклидовым пространством в том и только в том случае, если существует преобразование координат, приводящее компоненты метрического тензора к постоянным.

Легко видеть, что это условие выполняется лишь при специальном задании величин g_{ij} . Как мы знаем, число различных компонент метрического тензора может быть равно $\frac{1}{2} n(n+1)$; при $n \geq 2$ оно превосходит число измерений. Например, при $n = 4$ число различных g_{ij} достигает десяти. Поэтому совершенно очевидно, что при помощи преобразований координат в общем случае невозможно привести все произвольно заданные функции g_{ij} к постоянным. Таким образом, континуум, соответствующий квадратической форме (4,4,1), вообще не является пространством Эвклида. Однако этот континуум и в общем случае рассматривают как пространство n измерений, хотя его метрические свойства могут существенно отличаться от геометрии Эвклида. Такое пространство принято называть **римановым**.

С формальной точки зрения пространство Римана можно определить как поле метрического тензора в n -мерном континууме, в котором расстояние между бесконечно близкими точками находится с помощью квадратической формы (4,4,1), а угол между двумя линейными элементами — по (4,4,3). Геометрия Римана охватывает широкий класс пространств и включает эвклидову геометрию в качестве простейшего частного случая.

5. Соприкасающееся пространство Эвклида. Введенные выше определения тензора и тензорных действий, а также операции параллельного переноса непосредственно относятся к пространству Эвклида. Вопрос о пригодности этих определений для римановой геометрии нуждается в специальном исследовании. Наиболее простой и естественный путь такого исследования состоит в сравнении риманова пространства с пространством Эвклида.

Пусть n -мерное пространство Римана характеризуется метрическим тензором g_{ij} . Рассмотрим точку $M(x^k)$ и ее бесконечно малую окрестность. В точке $M'(x^k + dx^k)$, принадлежащей этой окрестности, метрический тензор имеет компоненты $g_{ij}(x^k + dx^k)$. Производя разложение, можно записать

$$g_{ij}(x^k + dx^k) = g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta + \dots \quad (4,5,1)$$

В правой части значения компонент и их производных относятся к точке M ; индексы i, j являются фиксированными; суммируют по α и β .

В первом приближении, сохраняя в правой части (4,5,1) лишь конечную величину, имеем $g_{ij}(x^k + dx^k) = g_{ij}$. Это значит, что для всех точек рассматриваемой окрестности принимаются одинаковые значения компонент метрического тензора: бесконечно малая область пространства Римана отождествляется с евклидовым пространством, которое называется касательным по отношению к риманову пространству в данной точке.

Понятие касательного пространства Эвклида во многих случаях оказывается полезным. Однако оно пригодно при изучении лишь наиболее простых свойств геометрии Римана, но совершенно недостаточно в тех случаях, когда нас интересуют более тонкие свойства, зависящие от производных метрического тензора по координатам. Более эффективным средством исследования римановых пространств является понятие соприкасающегося пространства Эвклида.

Удерживая в правой части (4,5,1) члены первого порядка относительно дифференциалов координат, можно написать

$$g_{ij}(x^k + dx^k) = g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \quad (4,5,2)$$

В этом разложении g_{ij} и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ имеют для рассматриваемой бесконечно малой области постоянные значения, соответствующие точке M . Покажем, что в данном приближении, которое мы будем называть вторым, эту область пространства Римана также можно представить некоторым пространством Эвклида.

Предварительно рассмотрим вопрос о преобразовании производных $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ при переходе к новой системе координат.

Значения компонент метрического тензора в системе координат $x^{k'}$ находят по известной формуле

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} g_{\alpha\beta}. \quad (4,5,3)$$

Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}} &= \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} g_{\alpha\beta} + \\ &+ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}. \end{aligned} \quad (4,5,4)$$

В новой системе координат производные ковариантных компонент являются линейными однородными функциями от компонент и их первых производных в старой системе.

Допустим, что в старой системе координат задано поле тензора G_{ij} , отличное от поля g_{ij} , но удовлетворяющее в точке M условиям

$$G_{ij} = g_{ij}; \quad \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \quad (4,5,5)$$

Применяя преобразования (4,5,3) и (4,5,4) к тензорам g_{ij} и G_{ij} в точке M и учитывая равенства (4,5,5), находим $G_{i'j'} = g_{i'j'}$, $\frac{\partial G_{i'j'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}}$. Таким образом, соотношения (4,5,5), имеющие место в какой-либо точке пространства в одной системе координат, выполняются в этой точке во всех системах координат.

Составим далее закон преобразования символов Кристоффеля.

Круговая перестановка фиксированных значков i' , j' , k' позволяет написать формулу (4,5,4) в двух следующих вариантах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{j'k'}}{\partial x^{i'}} &= \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{k'}} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} g_{\alpha\beta} + \\ &+ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}; \\ \frac{\partial g_{i'k'}}{\partial x^{j'}} &= \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{k'}} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} g_{\alpha\beta} + \\ &+ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}} \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}. \end{aligned}$$

В последних членах правой части мы изменили обозначение индексов суммирования, чтобы сохранить форму первых трех множителей.

Сложим написанные равенства и из полученной суммы вычтем (4,5,4). После очевидных упрощений найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{i'k'}}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial g_{j'k'}}{\partial x^{i'}} - \frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}} &= 2 \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}} g_{\alpha\beta} + \\ &+ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right), \end{aligned}$$

или

$$\Gamma_{i'j',k'} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma},$$

где $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ — символы Кристоффеля первого рода (4,3,4).

Для перехода к символам второго рода воспользуемся соотношением (4,3,5). С этой целью умножим найденное равенство на

$$g^{k''} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\varepsilon}} g^{\varepsilon\delta}$$

и выполним свертывание по индексу k' . В левой части, согласно определению (4,3,5), получится символ Кристофеля второго рода $\Gamma_{i'j'}^{k'}$. Для упрощения первого члена правой части необходимо принять во внимание соотношение

$$\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{\delta}} g^{\varepsilon\delta} = g^{\beta\varepsilon}$$

и, далее,

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{\varepsilon}} g^{\beta\varepsilon} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Во втором члене имеется множитель

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{\delta}} g^{\varepsilon\delta} = g^{\nu\varepsilon}.$$

После упрощений получим

$$\Gamma_{i'j'}^{l'} = \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{\varepsilon}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\varepsilon}. \quad (4,5,6)$$

Это и есть искомый закон преобразования символов Кристофеля. Он показывает, в частности, что эти символы не являются тензорами, поскольку первый член правой части (4,5,6) нарушает закон тензорного преобразования.

Для дальнейшего полезно несколько изменить соотношение (4,5,6).

Умножим его на производную $\frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}}$ и суммируем по индексу l' . В правой части при свертывании появятся множители $\delta_{\alpha}^{l'}$ и $\delta_{\varepsilon}^{l'}$. Поэтому закон преобразования примет вид

$$\frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \Gamma_{i'j'}^{l'} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}} \Gamma_{\alpha\beta}^{l'}. \quad (4,5,7)$$

Возвращаемся к исследованию пространства Римана в окрестности точки M .

Во избежание недоразумений обозначим координаты этой точки через x_0^l . Преобразуем координаты

$$x^l = x_0^l + x^{i'} - \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha'\beta'}^{l'} x^{\alpha'} x^{\beta'}. \quad (4,5,8)$$

Штрихи у индексов координат, как и прежде, указывают на принадлежность их к новой системе. Фиксированные индексы i, i' принимаются одинаковыми. Значения символов Кристофеля взяты в старой системе координат и отнесены к точке M ; в формулах преобразования (4,5,8) они играют роль постоянных коэффициентов.

Новые координаты имеют в точке M нулевые значения, поскольку при $x^i = x_0^i$ соотношение (4,5,8) дает $x^{i'} = \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha'\beta'}^i x^{\alpha'} x^{\beta'}$.

Дифференцируя (4,5,8) последовательно по координатам $x^{i'}$, $x^{k'}$, получим

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \delta_{i'}^i - \Gamma_{i'\alpha'}^i x^{\alpha'}; \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} = -\Gamma_{i'k'}^i.$$

Следовательно, в точке M

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)_0 = \delta_{i'}^i, \quad \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} \right)_0 = -\Gamma_{i'k'}^i. \quad (4,5,9)$$

Применим теперь к той же точке общую формулу (4,5,6). Принимая во внимание (4,5,9), находим $\Gamma_{i'j'}^{i'} = 0$.

Нетрудно убедиться в том, что при исчезновении символов Кристофеля производные от компонент метрического тензора по координатам также исчезают. Действительно, умножая (4,3,5) на g_{kl} и свертывая затем по индексу k , получим соотношение $\Gamma_{ij,l} = g_{kl} \Gamma_{ij}^k$, с помощью которого символы Кристофеля первого рода выражаются через символы второго рода. При $\Gamma_{ij}^k = 0$ будет $\Gamma_{ij,k} = 0$, а следовательно, и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$, как это непосредственно вытекает из (4,3,3).

Итак, мы доказали существование системы координат, в которой символы Кристофеля, а следовательно, и производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ принимают в данной точке нулевые значения. Такая система носит название *геодезической*. Важно отметить, что хотя преобразование координат, приводящее к геодезической системе, не является единственным, но оно существенно зависит от выбранной точки. Поэтому система координат, геодезическая в какой-либо одной точке, вообще не будет геодезической для другой произвольно выбранной точки.

Пусть поле метрического тензора g_{ij} отвечает геометрии Римана. Выберем определенную точку $M (x_0^i)$ и построим геодезическую систему координат; в указанной точке имеем $g_{ij} = (g_{ij})_0$, $\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)_0 = 0$. Пусть далее G_{ij} — метрический тензор, отвечающий геометрии Эвклида. Для всего пространства можно положить $G_{ij} = \text{const} =$

$= (g_{ij})_0$ и, следовательно, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$. Таким образом, в данной точке эвклидова и риманова метрики связаны условиями (4,5,5). Однако выше мы видели, что если эти условия имеют место в одной системе координат, то они выполняются в данной точке во всех системах, когда производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ вообще отличны от нуля. Это значит, что для каждой точки пространства Римана имеется возможность построить пространство Эвклида, метрический тензор которого удовлетворяет соотношениям (4,5,5). Такое пространство Эвклида называется соприкасающимся.

При исследовании бесконечно малой окрестности какой-либо точки пространства Римана во втором приближении, как мы видели, можно пользоваться разложением (4,5,2), в котором g_{ij} и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ имеют для этой области постоянные значения, отвечающие указанной точке. Поскольку они равны эвклидовым величинам G_{ij} и $\frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k}$,

во втором приближении риманова метрика совпадает в рассматриваемой области с соприкасающейся эвклидовой метрикой. Благодаря этому совпадению в геометрию Римана переходят все определения эвклидовой геометрии, связанные с метрическим тензором и его первыми производными по координатам. В частности, бесконечно малый параллельный перенос тензора в пространстве Римана формально можно определить как бесконечно малый перенос в соприкасающемся пространстве Эвклида. Общая формула (4,3,8) для приращения тензора при параллельном переносе в бесконечно близкую точку сохраняет значение и в римановой геометрии. Что же касается *конечного* параллельного переноса тензора, то, в случае римановой геометрии, его результат, в отличие от геометрии Эвклида, зависит не только от начальной и конечной точек, но также от линии переноса. Поэтому при параллельном переносе тензора в пространстве Римана должен быть указан путь переноса.

Введем понятие о пространстве Эвклида, соприкасающемся с римановым пространством *вдоль линии*.

Пусть в n -мерном пространстве Римана с координатами u^i , метрическим тензором g_{ij} и соответствующим ему символом Кристофеля Γ_{ij}^k имеется линия, заданная уравнениями вида $u^i = u^i(t)$. Введем пространство Эвклида того же числа измерений с метрическим тензором q_{ij} , символами Кристофеля F_{ij}^k и координатами x^i , которые оставим пока неопределенными. Уравнения $x^i = u^i(t)$ представляют в этом пространстве некоторую линию. Обозначим через \mathbf{r}' радиус-вектор точки M' линии и через \mathbf{e}_i — координатные векторы

в этой точке. Составим дифференциальные уравнения

$$dr' = e'_\alpha \frac{du^\alpha}{dt} dt; \quad de'_i = \Gamma_{i\beta}^\alpha e'_\alpha \frac{du^\beta}{dt} dt \quad (4,5,10)$$

и потребуем, чтобы при $t = t_0$ векторы e'_α при попарном скалярном умножении давали g_{ij} риманового пространства в точке $u^i(t_0)$. С точностью до радиуса-вектора r'_0 точки $u^i(t_0)$ система (4,5,10) имеет единственное решение; в частности, она однозначно определяет координатные векторы в точках кривой.

Покажем, что при произвольном t выполняется соотношение $e'_i, e'_j = g_{ij}$.

Умножая второе соотношение (4,5,10) скалярно на e'_j , имеем

$$\frac{de'_i}{dt}, e'_j = \Gamma_{i\beta}^\alpha \frac{du^\beta}{dt} e'_\alpha, e'_j.$$

Если переставить индексы i, j и сложить найденное при этом равенство с предыдущим, то получится дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} (e'_i, e'_j) = \Gamma_{i\beta}^\alpha \frac{du^\beta}{dt} (e'_\alpha, e'_j) + \Gamma_{j\beta}^\alpha \frac{du^\beta}{dt} (e'_\alpha, e'_i),$$

определяющее ход скалярного произведения координатных векторов вдоль кривой. К нему необходимо присоединить принятое выше начальное условие $(e'_i, e'_j)_0 = g_{ij}(t_0)$.

Составим теперь дифференциальное уравнение для метрического тензора g_{ij} . Изменение его вдоль линии определяется производной

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\beta} \frac{dx^\beta}{dt}.$$

Внеся сюда равенство

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\beta} = g_{\alpha i} \Gamma_{i\beta}^\alpha + g_{\alpha j} \Gamma_{j\beta}^\alpha,$$

которое непосредственно следует из (4,3,3), находим уравнение

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \Gamma_{i\beta}^\alpha \frac{du^\beta}{dt} g_{\alpha i} + \Gamma_{j\beta}^\alpha \frac{du^\beta}{dt} g_{\alpha j},$$

определяющее компоненты метрического тензора вдоль линии вместе с начальным условием $g_{ij} = g_{ij}(t_0)$ при $t = t_0$.

Так как уравнения для (e'_i, e'_j) и g_{ij} одинаковы, а в начальный момент эти величины по условию совпадают, то вообще должно быть $e'_i, e'_j = g_{ij}$. Отсюда непосредственно следует, что во всех точках линии выполняется соотношение $g_{ij} = q_{ij}$.

Для упрощения последующих выкладок положим, что уравнения кривой имеют вид $u^1 = t, u^i = a^i = \text{const}$ при $i = 2, \dots, n$, т. е. что

кривая является одной из координатных линий. Это упрощение не нарушает общности, так как оно может быть осуществлено путем соответствующего преобразования координат. Вместо (4,5,10) имеем

$$\frac{dr'}{dt} = e'_i; \quad \frac{de'_i}{dt} = \Gamma_{il}^\alpha e'_\alpha. \quad (4.5.11)$$

Система координат в пространстве Эвклида остается еще неопределенной, поскольку для ее задания необходимо определить координатные векторы *во всех точках пространства*, тогда как мы определили их лишь для *точек кривой*.

Пусть \mathbf{r} — радиус-вектор точки M пространства. Производные от радиуса-вектора по координатам равны координатным векторам e_i в соответствующих точках, а скалярные произведения (e_i, e_j) — компонентам метрического тензора g_{ij} . Производные $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j}$ можно представить в виде линейных комбинаций координатных векторов, причем коэффициентами в таком разложении служат символы Кристофеля (см. п. 3).

Итак,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = e_i; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^\alpha e_\alpha. \quad (4.5.12)$$

Координаты x^i в пространстве Эвклида определяются выбором функции $\mathbf{r}(x^1, \dots, x^n)$, довольно свободным, так как до сих пор он был ограничен только требованием, чтобы при переходе к точкам кривой векторы e_i превращались в заданные векторы e'_i .

Точка M' линии имеет координаты $x^i = u^i = t$, $x^i = a^i$ ($i \neq 1$). Радиус-вектор \mathbf{r}' этой точки свяжем с радиусом-вектором \mathbf{r} точки M пространства соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + e'_\omega (x^\omega - a^\omega) + \frac{1}{2} \Gamma_{\omega\tau}^\alpha e'_\alpha (x^\omega - a^\omega)(x^\tau - a^\tau). \quad (4.5.13)$$

где ω, τ — индексы суммирования, принимающие значения 2, 3, ..., n , $\Gamma_{\omega\tau}^\alpha$ — символы Кристофеля римановой метрики в точке u^i, a^i ($i \neq 1$).

Дифференцируя это равенство по координатам и положив $x^i = a^i$, получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \right)_{M'} = e'_i, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \right)_{M'} = e'_i,$$

убедившись в том, что выбор системы координат при помощи (4,5,13) отвечает упомянутому требованию.

Вычислим далее производные второго порядка. Переходя затем от точки M к M' , найдем

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^{i^2}} \right)_{M'} = \Gamma_{il}^\alpha e'_\alpha, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^l} \right)_{M'} = \Gamma_{il}^\alpha e'_\alpha, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^l \partial x^i} \right)_{M'} = \Gamma_{li}^\alpha e'_\alpha.$$

Следовательно, вообще

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{M'} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha}$$

при всех значениях индексов i, j , от 1 до n .

Сравнивая это равенство с соотношением

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{M'} = F_{ij}^{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha},$$

которое непосредственно вытекает из общей формулы (4,5,12) при $M \rightarrow M'$, приходим к заключению, что в каждой точке рассматриваемой линии символы Кристоффеля римановой и эвклидовой метрик одинаковы. Поэтому найденное условие $g_{ij} = q_{ij}$ и соотношение (4,3,3), которое можно написать в виде

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha i} \Gamma_{jk}^{\alpha} + g_{\alpha j} \Gamma_{ik}^{\alpha},$$

показывают, что одинаковыми оказываются и производные от компонент метрического тензора по координатам.

Итак, существует возможность так выбрать координаты в пространстве Эвклида, чтобы все g_{ij} и их первые производные по координатам в римановой и эвклидовой метриках имели во всех точках данной линии одинаковые значения. В этом случае эвклидова метрика *соприкасается вдоль заданной кривой* с метрикой Римана. В бесконечно тонкой трубке, содержащей эту кривую, эвклидово пространство представляет пространство Римана с точностью до членов второго порядка.

6. Ковариантное дифференцирование. Обычное дифференцирование непригодно для развития тензорного анализа, так как применение этой операции к какому-либо тензору нарушает его тензорную природу. Например, если совокупность величин y^i образует контравариантный вектор, то производные $\frac{\partial y^i}{\partial x^i}$ не являются компонентами тензора, поскольку при переходе к новой системе координат они преобразуются по закону

$$\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{i'} \partial x^{\alpha}} y^{\alpha},$$

который отличается от закона преобразования тензора (4,2,1).

В тензорном анализе употребляют операцию **к о в а р и а н т н о г о д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я**, которая представляет собой некоторое обобщение обычного дифференцирования, обладающего тем свойством, что применение к тензору не нарушает его тензорной природы.

Пусть дано поле контравариантного вектора y^i . В точках $M(x^\sigma)$ и $M'(x^\sigma + dx^\sigma)$ компоненты этого вектора соответственно равны y^i и $y^i + dy^i$. Необходимо ясно представить, что сумма $y^i + dy^i$ составляет в точке M' вектор, тогда как отдельные члены ее (т. е. y^i и dy^i) не являются в этой точке векторами.

Действительно, дифференцируя формулу преобразования $y^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} y^\alpha$, получаем соотношение

$$dy^{i'} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} y^\alpha dx^\beta + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} dy^\alpha,$$

которое не совпадает с законом преобразования тензора в точке M' .

Правила тензорной алгебры нельзя применить к векторам y^i и $y^i + dy^i$, поскольку последние заданы в точках с различными координатными векторами. Для устранения этого различия выполним параллельный перенос вектора $y^i + dy^i$ из точки M' в точку M . Компоненты вектора приобретут при таком переносе приращения, соответствующие приращению координат — dx^α ; согласно формуле (4,3,6), приращения компонент составят $\Gamma_{\alpha\beta}^i y^\alpha dx^\beta$. Поэтому в результате переноса вектора $y^i + dy^i$ в точку M его компоненты будут $y^i + dy^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i y^\alpha dx^\beta$.

Теперь в точке M имеются два вектора с компонентами, заданными в одной системе координатных векторов. Можно их сравнить, применяя правила тензорной алгебры. Разность этих векторов представляет собой также некоторый контравариантный вектор. Его называют ковариантным дифференциалом данного вектора и обозначают символом Dy^i . Согласно этому определению, имеем

$$Dy^i = dy^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i y^\alpha dx^\beta. \quad (4,6,1)$$

Не будем останавливаться на формальном доказательстве тензорной природы величин Dy^i . Его легко получить, составив выражение (4,6,1) в новой системе координат и воспользовавшись затем приведенными выше законами преобразования дифференциалов dy^i и символов Кристоффеля.

Вместо (4,6,1) можно написать

$$Dy^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^i y^\beta \right) dx^\alpha. \quad (4,6,2)$$

Коэффициенты при дифференциалах в правой части (4,6,2) образуют систему n^2 двухзначковых величин. Пользуясь правилами тензорной алгебры, нетрудно доказать, что эти величины являются компонентами смешанного тензора второго порядка, ковариантного относительно нижнего индекса α и контравариантного относительно

индекса i . Этот тензор называют ковариантной производной i -го порядка данного вектора и обозначают обычно символом $\Delta_{\alpha} y^i$ или $y^i_{|\alpha}$. Таким образом, по определению, имеем

$$\Delta_{\alpha} y^i = y^i_{|\alpha} = \frac{\partial y^i}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^i_{\alpha\beta} y^{\beta}. \quad (4,6,3)$$

Если оператор D не изменяет строения тензора, то применение операции ковариантной производной увеличивает на единицу порядок ковариантности данного тензора.

Понятия ковариантного дифференциала и ковариантной производной, рассмотренные выше в применении к контравариантному вектору, обобщаются на случай тензора любого порядка и строения. Прежде всего необходимо определить операцию ковариантного дифференцирования для скалярной функции, которая рассматривается как тензор нулевого порядка. Если X — скаляр, то, по определению, допустим

$$DX = dX; \quad X_{|i} = \frac{\partial X}{\partial x^i}, \quad (4,6,4)$$

т. е. примем, что ковариантное дифференцирование совпадает с обыкновенным. При этом производная $X_{|i}$ является ковариантным вектором, называемым градиентом.

Повторяя прежние рассуждения, легко убедиться в том, что в случае ковариантного вектора

$$Dy_i = dy_i - \Gamma^{\beta}_{i\alpha} y_{\beta} dx^{\alpha}; \quad (4,6,5)$$

$$y_{i|\alpha} = \frac{\partial y_i}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\beta}_{i\alpha} y_{\beta}.$$

Для смешанного тензора третьего порядка имеем

$$DT^i_{k|\alpha} = dT^i_{k|\alpha} + \Gamma^i_{\alpha\beta} T^{\beta}_{k|\alpha} dx^{\alpha} + \Gamma^i_{\alpha\beta} T^i_{k|\beta} dx^{\alpha} - \Gamma^{\beta}_{k\alpha} T^i_{\beta|\alpha} dx^{\alpha}; \quad (4,6,6)$$

$$T^i_{k|\alpha} = \frac{\partial T^i_{k|\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^i_{\alpha\beta} T^{\beta}_{k|\alpha} + \Gamma^i_{\alpha\beta} T^i_{k|\beta} - \Gamma^{\beta}_{k\alpha} T^i_{\beta|\alpha}.$$

По аналогии нетрудно написать формулы для тензоров другого строения.

Ковариантное дифференцирование отвечает следующим свойствам, подобным хорошо известным теоремам обычного анализа:

$$\nabla_i (A_i^{ik} + B_i^{ik}) = \nabla_i A_i^{ik} + \nabla_i B_i^{ik};$$

$$(A_i^j B^k)_{|i} = A_i^j B^k + A_i^j B^k_{|i}.$$

Отметим еще переместительность ковариантного дифференцирования и рассмотренной ранее операции свертывания. Так, если A_k^i — какой-либо смешанный тензор третьего порядка,

то в выражении $A_{\alpha/l}^{\alpha j}$ свертывание по индексу α и ковариантное дифференцирование можно выполнить в любом порядке; результатом обеих операций является один и тот же смешанный тензор второго порядка. Свертывание тензора можно осуществить и по индексу ковариантного дифференцирования. Если, в частности, составить ковариантную производную A_{jk}^{ij} и, положив $j = k = \alpha$, суммировать по индексу α , то получится некоторый контравариантный вектор. Свернутую таким образом производную вида $A_{i\alpha}^{i\alpha}$ называют к о в а р и а н т н о й р а с х о д и м о с т ь ю данного тензора.

Ковариантную расходимость можно также образовать от смешанного тензора. Согласно определению ковариантной производной (4,6,6), расходимость смешанного тензора второго порядка равна

$$T_{i/\alpha}^{\alpha} = \frac{\partial T_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} T_i^{\alpha} - \Gamma_{i\alpha}^{\beta} T_{\beta}^{\alpha}. \quad (4,6,7)$$

В качестве примера найдем ковариантную производную метрического тензора.

Имеем

$$g_{i//k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^{\alpha} g_{\alpha i} - \Gamma_{jk}^{\alpha} g_{\alpha i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik,i} - \Gamma_{jk,i}.$$

Поэтому, согласно (4,3,3), $g_{i//k} = 0$.

Далее,

$$\delta_{i//k}^i = \frac{\partial \delta_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{\alpha k}^i \delta_j^{\alpha} - \Gamma_{ik}^{\alpha} \delta_j^{\alpha} = 0.$$

Теперь легко вычислить ковариантную производную контравариантного метрического тензора. Дифференцируя соотношение $g^{ie} g_{ie} = \delta_i^i$, получим $g_{jk}^{ie} g_{ie} + g^{ie} g_{ie/k} = 0$, т. е. $g_{jk}^{ie} g_{ie} = 0$. Умножим это соотношение на g^{il} . Найдем

$$g_{jk}^{ie} g_{ie} g^{il} = \delta_e^i g_{jk}^{ie} = g_{jk}^{il} = 0.$$

Ковариантные производные (а следовательно, и ковариантные дифференциалы) тензоров g_{ij} , δ_j^i , g^{ij} имеют нулевые значения. Эта особенность метрического тензора в несколько иной форме отмечалась при рассмотрении параллельного переноса. Как было показано, поле метрического тензора является результатом параллельного переноса этого тензора из какой-либо одной точки во все другие точки пространства.

Метрический тензор играет в тензорном анализе роль постоянной. Поэтому при ковариантном дифференцировании произведения его можно вынести за знак дифференцирования. Так, $\nabla_i (g_{jk} A_n^{lm}) = g_{jk} \nabla_i A_n^{lm}$.

7. **Кривые в пространстве Римана.** Рассмотрим непрерывную линию, заданную параметрическими уравнениями $x^i = x^i(s)$, в которых параметром s служит длина дуги линии. В дифференциальной геометрии уравнения кривой в этой форме принято называть естественными. Пусть точка M кривой имеет радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \dots, x^n)$. Образует производную

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} = \mathbf{e}_\alpha y^\alpha,$$

где \mathbf{e}_α — координатные векторы, $y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ — контравариантные компоненты вектора $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, направленного по касательной к кривой.

Образует скалярное произведение

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) y^\alpha y^\beta = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}.$$

Элемент ds дуги кривой определяется основной квадратической формой (4,4,1); поэтому $\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1$. Контравариантный вектор y^i является единичным вектором касательной.

Пусть $M(x^\alpha)$ и $M'(x^\alpha + dx^\alpha)$ — две бесконечно близкие точки линии, отделенные дугой ds . Касательный вектор имеет в этих точках компоненты y^i и $y^i + dy^i$ соответственно. Перенесем вектор $y^i + dy^i$ из точки M' параллельно в точку M . Согласно определению ковариантного дифференциала, компоненты вектора в результате указанного переноса будут равны $y^i + Dy^i$. В точке M имеются теперь два вектора, угол между которыми называется углом смежности. Разность этих векторов по модулю составляет $|Dy^i| = |y^i| d\theta = d\theta$. Следовательно, $\left| \frac{Dy^i}{ds} \right| = \frac{d\theta}{ds}$. В дифференциальной геометрии производная от угла смежности по дуге называется геодезической кривизной линии в данной точке.

Найдем направление вектора $\frac{Dy^i}{ds}$.

Из определения ковариантного дифференциала непосредственно следует, что этот вектор расположен в соприкасающейся плоскости кривой в данной точке. Угол φ , образованный вектором $\frac{Dy^i}{ds}$ с касательным вектором, определяется формулой (4,4,3), которая принимает в данном случае вид

$$\cos \varphi = \frac{g_{\alpha\beta} y^\alpha Dy^\beta}{|y^\alpha| \cdot |Dy^\beta|}.$$

Дифференцируя соотношение $g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = 1$, получим $Dg_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta + g_{\alpha\beta}Dy^\alpha y^\beta + g_{\alpha\beta}y^\alpha Dy^\beta = 0$ или $g_{\alpha\beta}y^\alpha Dy^\beta = 0$, так как первый член исчезает по условию $Dg_{\alpha\beta} = 0$, а два другие отличаются только обозначением индексов суммирования. Поэтому $\varphi = 90^\circ$.

Итак, вектор $\frac{Dy^i}{ds}$, равный по абсолютному значению геодезической кривизны, направлен вдоль главной нормали к линии в данной точке. Этот контравариантный вектор называют в е к т о р о м к р и в и з н ы. Согласно (4,6,1), имеем

$$\frac{Dy^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}. \quad (4,7,1)$$

Большой интерес представляют линии, во всех точках которых вектор кривизны равен нулю. Такие линии называются г е о д е з и ч е с к и м и. Уравнения геодезической линии таковы:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (4,7,2)$$

В общем случае это сложная система дифференциальных уравнений второго порядка, для интегрирования которой необходимы соответствующие начальные условия. Последние можно задать в форме $x^i = x_0^i$, $\frac{dx^i}{ds} = \left(\frac{dx^i}{ds}\right)_0$ при $s = s_0$. Так как касательный вектор $\frac{dx^i}{ds}$ является единичным, он должен удовлетворять соотношению $\left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}\right)_0 = 1$; в остальном он может иметь в точке s_0 произвольное значение.

Поскольку при указанных начальных условиях решение системы (4,7,2) является единственным, мы приходим к заключению о том, что через каждую точку пространства в каждом произвольно заданном направлении можно провести одну и только одну геодезическую линию.

Понятие геодезической линии имеет в дальнейшем очень важное значение. Поэтому мы рассмотрим его также с другой точки зрения.

Пусть в пространстве заданы две какие-либо точки $x_{(1)}^\alpha$ и $x_{(2)}^\alpha$. Найдем кратчайшую из линий, соединяющих эти точки, предполагая, что такая линия существует.

Условие, которому отвечает кратчайшая линия, имеет вид

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = 0. \quad (4,7,3)$$

Воспользовавшись квадратической формой (4,4,1), представим это условие в форме

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} ds = 0,$$

приведя поставленный вопрос к основной вариационной задаче.

Из вариационного исчисления известно, что интеграл $\int_{(1)}^{(2)} F(t, x^1, \dots, x^n; \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) dt$ имеет экстремальное значение в том случае, если функции $x^i = x^i(t)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Составим эти уравнения для нашей задачи. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right) - \frac{d}{ds} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right) \right\} = 0. \quad (4,7,4)$$

Выделяя в сумме $g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}$ члены, зависящие от фиксированного индекса i , можно написать

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = g_{ii} \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2 + 2g_{i\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^i}{ds} + g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right) = 2g_{ii} \frac{dx^i}{ds} + 2g_{i\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} = 2g_{i\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds}.$$

Выполнив дифференцирование полученного равенства, найдем

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right) &= 2 \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + 2g_{i\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = \\ &= \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + 2g_{i\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2}. \end{aligned}$$

Уравнение (4,7,4) в развернутой форме примет вид

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - 2g_{i\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = 0,$$

т. е.

$$g_{i\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta,i} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

где $\Gamma_{\alpha\beta,i}$ — символ Кристоффеля первого рода (4,3,4).

Умножим это соотношение на $g^{i\sigma}$ и произведем свертывание по индексу i . Окончательно получим систему уравнений

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

совпадающую с (4,7,2).

Таким образом, если в пространстве Римана существуют кратчайшие линии, то они совпадают с геодезическими, т. е. с линиями нулевой кривизны.

Представим уравнения геодезической линии в несколько иной форме, которая будет полезна в дальнейшем.

Уравнения (4,7,2) определяют координаты x^1, \dots, x^n как функции длины дуги s . Одну из этих функций можно обратить, выразив длину дуги через соответствующую координату, например, через последнюю x^n . Остальные $n - 1$ координат можно будет тогда рассматривать как функции x^n .

Преобразуем систему (4,7,2), исключив переменную s и заменив ее новой независимой переменной x^n .

Последнее из этих уравнений напомним так:

$$\frac{d^2 x^n}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^n \frac{dx^\alpha}{dx^n} \frac{dx^\beta}{dx^n} \left(\frac{dx^n}{ds} \right)^2. \quad (4.7,5)$$

Дифференцируя координату x^σ ($\sigma \neq n$), находим соотношение

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = \frac{d^2 x^\sigma}{dx^{n^2}} \left(\frac{dx^n}{ds} \right)^2 + \frac{dx^\sigma}{dx^n} \frac{d^2 x^n}{ds^2},$$

или, если внести (4,7,5),

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = \left\{ \frac{d^2 x^\sigma}{dx^{n^2}} - \Gamma_{\alpha\beta}^n \frac{dx^\alpha}{dx^n} \frac{dx^\beta}{dx^n} \frac{dx^\sigma}{dx^n} \right\} \cdot \left(\frac{dx^n}{ds} \right)^2.$$

Поэтому оставшиеся $n - 1$ уравнений геодезической линии принимают вид

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dx^{n^2}} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^n \frac{dx^\sigma}{dx^n} \right) \frac{dx^\alpha}{dx^n} \frac{dx^\beta}{dx^n} = 0, \quad (4.7,6)$$

$$\sigma = 1, \dots, n - 1.$$

8. Тензор кривизны. Хорошо известно, что в обычном анализе при дифференцировании функции от нескольких переменных результат не зависит от принятого порядка дифференцирования. При ковариантном дифференцировании это свойство в общем случае нарушается.

Пусть u_k — ковариантный вектор, компоненты которого обладают необходимыми аналитическими свойствами. Ковариантная производная

$$u_{k/j} = \frac{\partial u_k}{\partial x^j} - \Gamma_{jk}^\alpha u_\alpha$$

является, как мы знаем, ковариантным тензором второго порядка.

Повторно продифференцируем этот тензор. Согласно общему определению (4,6,6), имеем

$$u_{k/ji} = \frac{\partial u_{k/j}}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^\alpha u_{\alpha/j} - \Gamma_{ij}^\alpha u_{k/\alpha}$$

Если внести сюда выражение ковариантной производной первого порядка, то предыдущая формула примет вид

$$\begin{aligned} u_{k/ji} = & \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^i} u_\alpha - \Gamma_{jk}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^j} + \\ & + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha i}^\beta u_\beta - \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^\beta u_\beta. \end{aligned}$$

Изменив порядок дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} u_{k/ji} = & \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} u_\alpha - \Gamma_{ik}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^j} - \Gamma_{jk}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i} + \\ & + \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{\alpha i}^\beta u_\beta - \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^\beta u_\beta. \end{aligned}$$

Составим разность вторых производных. После очевидного упрощения и переделки индексов суммирования эта разность оказывается равной

$$u_{k/ji} - u_{k/ij} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{j\beta}^\alpha - \Gamma_{jk}^\beta \Gamma_{i\beta}^\alpha \right) u_\alpha. \quad (4,8,1)$$

Итак, в случае произвольно заданного метрического поля g_{ij} результат ковариантного дифференцирования зависит от порядка дифференцирования.

Рассмотрим соотношение (4,8,1) подробнее.

Вторые производные $u_{k/ji}$ и $u_{k/ij}$ являются ковариантными тензорами второго порядка, вследствие чего левая часть (4,8,1) представляет собой тензор того же строения. В правой части выполняется свертывание произведения ковариантного вектора u_α на коэффициенты, образованные из символов Кристофеля и их производных. Согласно правилам тензорной алгебры, эти коэффициенты также составляют тензор соответствующего строения.

Поскольку во втором множителе значок суммирования является индексом ковариантности, в выражении указанных коэффициентов он должен быть индексом контравариантности. Фиксированные

значки i, j, k являются, как и в левой части равенства, индексами ковариантности. Общепринятым обозначением коэффициентов служат символы $R_{ij,k}^\alpha$.

Итак, система величин

$$R_{ij,k}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{j\beta}^\alpha - \Gamma_{jk}^\beta \Gamma_{i\beta}^\alpha \quad (4,8,2)$$

представляет собой некоторый смешанный тензор четвертого порядка, ковариантный относительно i, j, k и контравариантный относительно α . Его компоненты образованы из составляющих метрического тензора и их производных первого и второго порядков. Этот тензор, называемый тензором кривизны Римана — Кристофеля, имеет фундаментальное значение в геометрии римановых пространств.

Для задания тензора Римана — Кристофеля вместо смешанных компонент часто употребляют ковариантные компоненты, образуя их путем умножения (4,8,2) на метрический тензор и последующего свертывания

$$R_{ij,kl} = g_{\alpha\lambda} R_{ij,k}^\alpha \quad (4,8,3)$$

Перечислим формальные свойства тензора кривизны.

Переставим два первых индекса ковариантности в (4,8,2) и образуем $R_{ji,k}^\alpha$. Непосредственное сравнение с правой частью (4,8,2) дает

$$R_{ij,k}^\alpha = -R_{ji,k}^\alpha, \quad (4,8,4)$$

показывая, что тензор кривизны антисимметричен относительно индексов первой пары.

Выполнив циклическую перестановку всех трех индексов ковариантности, составим $R_{jk,i}^\alpha$ и $R_{ki,j}^\alpha$. Сложив эти компоненты с (4,8,2), получим

$$R_{ij,k}^\alpha + R_{jk,i}^\alpha + R_{ki,j}^\alpha = 0, \quad (4,8,5)$$

убедившись в том, что при циклировании по трем нижним индексам тензор Римана — Кристофеля исчезает.

Рассмотрим теперь ковариантные компоненты тензора кривизны. Антисимметричность величин $R_{ij,kl}$ относительно индексов первой пары является непосредственным следствием свойства (4,8,4) и не представляет ничего нового. То же можно сказать и о равенстве $R_{ij,kl} + R_{jk,il} + R_{ki,jl} = 0$, которое вытекает из соотношения (4,8,5) после умножения на $g_{\alpha\lambda}$ и свертывания по индексу α . Существенно новое свойство можно получить из определения (4,8,3), если написать его в развернутой форме. Простые преобразования, которые мы здесь не приводим, позволяют получить равенство

$$R_{ij,kl} = R_{kl,ij}, \quad (4,8,6)$$

показывающее, что тензор Римана — Кристофеля симметричен относительно пар индексов ковариантности.

Комбинируя это свойство с условием антисимметричности (4,8,4), преобразуем $R_{ij,kl} = R_{kl,ij} = -R_{ij,lk}$, убедившись в том, что тензор кривизны антисимметричен и относительно индексов второй пары.

Пользуясь свойствами симметрии и антисимметрии, можно сделать первыми любые три индекса из четырех. Например, с помощью преобразования $R_{ij,kl} = R_{kl,ij} = R_{lk,ji}$ на первых местах мы расположили три последние индекса в исходном обозначении тензора. Отсюда следует, что согласно свойству (4,8,5), результат циклирования тензора $R_{ij,kl}$ по трем любым индексам равен нулю.

Рассмотренные особенности тензора Римана — Кристофеля выражают ряд тождественных соотношений между его компонентами. Наличие таких соотношений показывает, что все компоненты этого тензора (их общее число равно n^2) не могут быть заданы произвольно. В связи с этим естественно возникает вопрос о числе *существенных* компонент, т. е. таких, которые можно задать произвольно, выражая через них все остальные компоненты. Принимая во внимание все тождественные соотношения, можно показать, что число существенных компонент тензора кривизны в общем случае составляет $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$. При $n = 2$ оно равно единице, а при $n = 4$ — двадцати.

Очень важным свойством тензора кривизны Римана — Кристофеля является тождество Бианки — Падова.

Согласно общему определению (4,6,6), ковариантная производная тензора кривизны определяется формулой

$$R_{ij,k;l}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^l} R_{ij,k}^{\alpha} + \Gamma_{i\beta}^{\alpha} R_{ij,k}^{\beta} - \Gamma_{il}^{\beta} R_{\beta j,k}^{\alpha} - \Gamma_{jl}^{\beta} R_{i\beta,k}^{\alpha} - \Gamma_{kl}^{\beta} R_{ij,\beta}^{\alpha}. \quad (4,8,7)$$

Первый член правой части в развернутой форме равен

$$\frac{\partial^2 \Gamma_{ik}^{\alpha}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ik}^{\alpha}}{\partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{i\beta}^{\alpha} - \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{j\beta}^{\alpha}). \quad (4,8,8)$$

В любой произвольно выбранной точке пространства Римана, как было показано, можно построить геодезическую систему координат, в которой символы Кристофеля в указанной точке принимают нулевые значения.

Выполним преобразование, перейдя от общих координат к геодезическим в данной точке пространства. В формуле (4,8,7) при таком преобразовании исчезнут все члены, кроме первого, находящегося

из (4,8,8). Следовательно, в геодезических координатах выражение для ковариантной производной тензора кривизны примет вид

$$R_{ij,k \cdot l}^{\alpha} = \frac{\partial^2 \Gamma_{jk}^{\alpha}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ik}^{\alpha}}{\partial x^j \partial x^l}. \quad (4,8,9)$$

В этом соотношении выполним круговую подстановку значков i, j, l , т. е. двух первых индексов ковариантности и индекса ковариантного дифференцирования. Полученные таким образом величины $R_{il,k \cdot j}^{\alpha}$, $R_{ij,k \cdot l}^{\alpha}$ сложим с (4,8,9):

$$R_{ij,k \cdot l}^{\alpha} + R_{il,k \cdot j}^{\alpha} + R_{ij,k \cdot l}^{\alpha} = 0. \quad (4,8,10)$$

Равенство (4,8,10) найдено в геодезических координатах. Однако, будучи тензорным, оно выполняется во всех системах координат и является поэтому вполне общим. Это соотношение и носит название тождества Бианки — Падова.

Легко видеть, что соотношение (4,8,10) сохраняет свою форму и для ковариантных компонент тензора кривизны, в чем можно убедиться, опуская индекс согласно (4,8,6).

Подробное исследование тензора Римана — Кристофеля и выяснение его геометрического значения не входит в нашу задачу; ограничимся перечислением лишь необходимых формальных его свойств. В заключение только заметим, что тензор кривизны позволяет формулировать общий признак вырождения римановой геометрии в эвклидову.

Как было указано ранее, квадратическая форма (4,4,1) отвечает геометрии Эвклида в том и только в том случае, если существует система координат, в которой все компоненты метрического тензора приводятся к постоянным.

Допустим, что это условие выполнено. Перейдя к указанной системе координат, мы получим $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ и $\Gamma_{ii}^k = 0$ во всех точках пространства. Следовательно, согласно (4,8,2), $R_{ij,k}^{\alpha} = 0$. Поскольку это равенство является тензорным, оно выполняется при переходе от нашей специальной (декартовой) системы координат к общей. Это значит, что в любых координатах уравнение $R_{ij,k}^{\alpha} = 0$ представляет собой *необходимый* признак превращения геометрии Римана в геометрию Эвклида.

Доказательство достаточности признака значительно сложнее, и потому мы его здесь не приводим.

Итак, равенство $R_{ij,k}^{\alpha} = 0$ служит *необходимым и достаточным признаком вырождения римановой геометрии в эвклидову*.

9. Тензор Риччи. Переходим к рассмотрению тензора второго порядка, имеющего важное значение в ОТО.

В компонентах тензора Римана — Кристоффеля

$$R_{ki..i}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^{\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{\alpha}}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^{\beta} \Gamma_{i\beta}^{\alpha} - \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{k\beta}^{\alpha}$$

положим $k = \alpha$ и выполним свертывание.

Полученный таким образом ковариантный тензор второго порядка

$$R_{\alpha i..i}^{\alpha} = R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{i\alpha}^{\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{i\alpha}^{\beta} \Gamma_{j\beta}^{\alpha} - \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}, \quad (4,9,1)$$

который составлен из компонент метрического тензора и их производных первых двух порядков, называется тензором Риччи.

Приведем выражение (4,9,1) к виду, во многих приложениях более удобному. Составим сумму $\Gamma_{\alpha i}^{\alpha}$. Согласно определению символов Кристоффеля, имеем

$$\Gamma_{\alpha i}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.$$

Образуем далее производную по координате от определителя $g = |g_{ij}|$, элементами которого служат ковариантные компоненты метрического тензора. Выполнив дифференцирование, получим

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = g g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.$$

Следовательно,

$$\Gamma_{\alpha i}^{\alpha} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^i}. \quad (4,9,2)$$

Вместо (4,9,1) можно написать

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^{\alpha} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{i\beta}^{\alpha} \Gamma_{j\alpha}^{\beta} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}. \quad (4,9,3)$$

Формулы (4,9,1) и (4,9,3) определяют ковариантные компоненты тензора Риччи. Однако этот тензор можно также задать смешанными или контравариантными компонентами, вычисляя их путем соответствующего поднятия индексов. Смешанные компоненты находятся по формулам $R_i^j = g^{\alpha i} R_{\alpha j}$, а контравариантные — с помощью соотношений $R^{ij} = g^{\alpha i} R_{\alpha}^j = g^{\alpha i} g^{\beta j} R_{\alpha\beta}$. Скаляр рассматриваемого тензора вычисляется полным свертыванием $R = R_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$.

Отметим некоторые особенности тензора Риччи.

Учитывая свойства симметрии и антисимметрии тензора Римана — Кристоффеля, выполним преобразование

$$R_{ij} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha i..i\beta} = g^{\alpha\beta} R_{j\beta..i\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\beta j..i\alpha} = R_{jt},$$

убедившись в том, что тензор Риччи симметричен относительно индексов ковариантности.

В частности, отсюда непосредственно следует, что число существенных компонент тензора Риччи равно $\frac{1}{2}n(n+1)$. При $n=2$ он имеет только три существенные компоненты, а при $n=4$ их число достигает десяти.

Составим ковариантную дивергенцию тензора Риччи.

Напишем тождество Бианки — Падова для ковариантных компонент тензора кривизны:

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta/i} + R_{\beta i,\gamma\delta/\alpha} + R_{i\alpha,\gamma\delta/\beta} = 0.$$

Умножив это равенство на произведение $g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}$, выполним свертывание по всем повторяющимся индексам. Принимая во внимание соотношения

$$\begin{aligned} g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= g^{\beta\gamma}R_{\beta\gamma} = R, \\ g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{\beta i,\gamma\delta} &= -g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{\beta i,\delta\gamma} = -R_i^\alpha, \\ g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{i\alpha,\gamma\delta} &= -g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{\alpha i,\gamma\delta} = -R_i^\beta, \end{aligned}$$

получим $R_{/i} - R_{i/\alpha} - R_{i/\beta}^\beta = 0$, т. е.

$$R_{i/\alpha}^\alpha = \frac{1}{2}R_{/i}. \quad (4.9.4)$$

Это важное уравнение показывает, что ковариантная расходимость тензора Риччи равна половине градиента инварианта этого тензора.

В заключение образуем тензор $E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$, который непосредственно применяется в общей теории относительности и играет в ней очень важную роль. Этот тензор, введенный Эйнштейном при составлении уравнений поля, уместно назвать тензором Эйнштейна. Его компоненты, как и составляющие тензора Римана — Кристоффеля, выражены через компоненты метрического тензора и их производные по координатам первого и второго порядков.

С помощью смешанных компонент тензора Эйнштейна $E_i^i = R_i^i - \frac{1}{2}\delta_i^i R$ составим его ковариантную расходимость. Пользуясь уравнением (4,9,4), найдем

$$E_{i/\alpha}^\alpha = R_{i/\alpha}^\alpha - \frac{1}{2}\delta_i^\alpha R_{/\alpha} = 0. \quad (4.9.5)$$

Тензор Эйнштейна имеет исчезающую ковариантную расходимость.

10. Кривизна пространства Римана. Пусть в точке $M(x^\alpha)$ риманова пространства заданы контравариантные единичные векторы y^i и z^j , образующие между собой прямой угол. По условию, эти векторы удовлетворяют соотношениям

$$g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = 1; \quad g_{\alpha\beta}z^\alpha z^\beta = 1; \quad g_{\alpha\beta}y^\alpha z^\beta = 0. \quad (4,10,1)$$

Согласно правилам тензорной алгебры, величины

$$x^{ij} = \frac{1}{2} (y^i z^j - y^j z^i) \quad (4,10,2)$$

являются компонентами контравариантного тензора второго порядка. Этот тензор, антисимметричный относительно индексов контравариантности, принято называть б и в е к т о р о м.

Можно показать, что бивектор (4,10,2) однозначно определяет плоскость P , в которой расположены векторы y^i , z^j , а также площадь образованного ими параллелограмма.

Проведем через точку M замкнутый контур, расположенный в плоскости P , и определим направление обхода этого контура поворотом от вектора y^i к вектору z^j . Перенесем вектор y^i параллельно вдоль указанного контура до возвращения в точку M . В результате этой операции получим некоторый вектор $y^i + \Delta y^i$, где Δy^i — приращение, которое должно быть вычислено по закону параллельного переноса.

Вектор $y^i + \Delta y^i$ отличается от исходного вектора y^i как по модулю, так и по направлению; он вообще не будет лежать в плоскости P . Составим проекцию вектора $y^i + \Delta y^i$ на плоскость P ; она образует с исходным вектором y^i некоторый угол $\Delta\varphi$, который мы условимся считать положительным в направлении установленного обхода.

Составим далее отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma}$, где $\Delta\sigma$ — площадь, ограниченная построенным контуром, и перейдем к пределу, стягивая контур к точке M . Этот предел называется *кривизной риманова пространства в данной точке и в направлении данной плоскости*.

В геометрии Римана выводится формула

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma} = R_{\alpha\beta,\gamma\delta} x^{\alpha\beta} x^{\gamma\delta}, \quad (4,10,3)$$

определяющая кривизну пространства в данной точке и в направлении плоскости, характеризуемой бивектором x^{ij} .

Исчезновение тензора Римана — Кристофеля, как было сказано, служит необходимым и достаточным условием вырождения римановой геометрии в евклидову. Поэтому из (4,10,3) следует, что кривизна имеет нулевое значение в том и только в том случае, если

геометрия пространства является евклидовой. Иными словами, пространство Эвклида есть пространство Римана нулевой кривизны.

Рассмотрим случай, когда тензор Римана — Кристоффеля имеет вид

$$R_{ij,kl} = K (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad (4,10,4)$$

где K — какая-либо скалярная функция координат.

Внесем это соотношение, а также равенство (4,10,2) в общую формулу (4,10,3). Выполнив необходимые преобразования и учитывая условия (4,10,1), получим

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} x^{\alpha\beta} x^{\gamma\delta} = K.$$

Это значит, что в случае (4,10,4) кривизна пространства в данной точке не зависит от ориентировки плоскости и может быть функцией только координат точки. Такое пространство называется пространством постоянной кривизны: в каждой его точке кривизны одинаковы во всех двумерных направлениях.

Выполняется и обратное предложение: если кривизна в каждой точке пространства Римана в направлении любой плоскости равна одной и той же скалярной функции K , то тензор Римана — Кристоффеля имеет вид (4,10,4). Для доказательства этого предложения требуются более сложные алгебраические преобразования, которые мы опускаем.

Указанное определение пространства постоянной кривизны требует, чтобы в данной точке кривизна не зависела от ориентировки плоскости. Однако в этом определении нет явных условий о кривизнах в *различных* точках, вследствие чего вопрос о виде скалярной функции K остается открытым. Решение этого вопроса содержится в **теореме Шура**, утверждающей, что в пространстве постоянной кривизны с числом измерений $n > 2$ во всех точках кривизны одинаковы. Это значит, что риманово пространство, изотропное во всех точках, является однородным.

Для доказательства теоремы Шура составим ковариантную производную тензора кривизны (4,10,4)

$$R_{ij,kl|m} = (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) K_{|m}$$

и внесем ее в тождество Бианки — Падова. Получим

$$(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) K_{|m} + (g_{jk}g_{ml} - g_{il}g_{mk}) K_{|i} + \\ + (g_{mk}g_{il} - g_{ml}g_{ik}) K_{|j} = 0.$$

Умножим это равенство на g^{ml} и произведем свертывание по индексам m, l . Принимая во внимание известные соотношения $g^{al}g_{al} = \delta_j^i$ и $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = n$, получим после несложных преобразований

$$(n - 2)(g_{jk}K_{|i} - g_{ik}K_{|j}) = 0, \quad (4,10,5)$$

откуда при $n > 2$ и $K_{ji} \neq 0$ непосредственно следует

$$g_{ik} = g_{ik} \frac{K_{li}}{K_{li}}.$$

Оставляя i, j фиксированными и изменяя индекс K , получим соотношение между элементами i -ой и k -ой строк определителя $|g_{ij}|$. Поскольку эти элементы оказываются пропорциональными, должно быть $|g_{ij}| = 0$, что противоречит известному свойству основной квадратической формы. Поэтому из равенства (4,10,5) с необходимостью следует $K_{ji} = 0$, т. е. $K = \text{const}$, что мы и хотели доказать.

Случай $n = 2$ не представляет интереса, так как при этом в каждой точке континуума можно определить кривизну в направлении только одной единственной плоскости.

Формула (4,10,4) позволяет составить простое выражение для компонент тензора Риччи в пространстве постоянной кривизны.

Умножив равенство

$$R_{\alpha i, \beta} = K (g_{\alpha j} g_{i\beta} - g_{\alpha\beta} g_{ij})$$

на $g^{\alpha\beta}$ и проведя свертывание, получим после упрощений

$$R_{ij} = -(n-1) K g_{ij}. \quad (4,10,6)$$

При $n > 3$ эта формула представляет собой необходимое, но недостаточное условие постоянства кривизны, так как число существенных компонент тензора Римана — Кристофеля, равное $\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$, превышает число компонент тензора Риччи, равное $\frac{1}{2} n (n + 1)$, вследствие чего обратный переход от (4,10,6) к (4,10,4) вообще невозможен. В частном случае, при $n = 3$, когда число тех и других компонент равно шести, соотношение (4,10,6) является не только необходимым, но и достаточным условием постоянной кривизны риманова пространства.

В заключение заметим, что существует три класса римановых пространств постоянной кривизны. При $K = \text{const}$ квадратическую форму можно привести к следующему виду:

$$ds^2 = \frac{dx^1{}^2 + \dots + dx^n{}^2}{\left[1 + \frac{1}{4} K (x^1{}^2 + \dots + x^n{}^2)\right]^2}. \quad (4,10,7)$$

Простейшему случаю $K = 0$ отвечает евклидово пространство в прямоугольных декартовых координатах. Если $K < 0$, то пространство имеет постоянную отрицательную кривизну; радиусом кривизны называется величина $(-K)^{-\frac{1}{2}}$. Такое пространство называют гиперболическим. Для $n = 3$ его геометрия впервые

была развита Н. И. Лобачевским. При $K > 0$ имеем случай пространства постоянной положительной кривизны. Радиус такого пространства, называемого сферическим, определяется формулой $K^{-\frac{1}{2}}$.

11. Сигнатура квадратической формы. Мы ввели ряд определений и составили формулы, употребляемые в ОТО. Однако при их применении необходимо иметь в виду, что в теории относительности метрика в некотором отношении существенно отличается от обычной метрики римановых пространств. В простейшем случае это различие проявляется при сравнении евклидовой геометрии с четырехмерным континуумом Минковского.

Пусть имеется квадратическая форма

$$\varphi(x, x) = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n \quad (4,11,1)$$

с произвольно заданными постоянными коэффициентами $g_{\alpha\beta}$, отвечающими условию симметрии.

С помощью линейных преобразований эту форму можно привести к каноническому виду

$$\varphi(x, x) = \varepsilon_\alpha x^\alpha{}^2; \quad \varepsilon_\alpha = \pm 1; \quad \alpha = 1, \dots, r, \quad (4,11,2)$$

где r — ранг матрицы, образованной из коэффициентов приводимой формы. Для простоты допустим, что ранг матрицы совпадает с ее порядком, т. е. $r = n$.

Форму (4,11,1) к виду (4,11,2) можно привести различными способами. При этом выполняется так называемый закон инерции Якоби — Сильвестра, согласно которому числа положительных и отрицательных коэффициентов ε_α канонической формы не зависят от способа приведения. Обозначив эти числа через p и q соответственно, имеем $p + q = n$. Разность $p - q$ называется сигнатурой квадратической формы.

Пространству Эвклида в прямоугольных декартовых координатах отвечает случай $p = n, q = 0$, когда сигнатура равна числу измерений пространства. В отличие от этого, пространственно-временной континуум Минковского, применяемый в СТО, характеризуется квадратической формой

$$s^2 = -x^2 - y^2 - z^2 + t^2,$$

для которой $p = 1, q = 3$, что соответствует сигнатуре -2 .

Иногда пользуются формой

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

с сигнатурой $+2$.

Таким образом, геометрия пространственно-временного континуума СТО отличается от обычной геометрии Эвклида; ее можно назвать, как это часто делают, псевдоевклидовой.

Аналогичное различие существует между римановой метрикой и метрикой пространства-времени ОТО.

Если в пространстве Римана ввести систему ортогональных координат, то общая форма (4,4,1) примет вид

$$ds^2 = g_{\alpha\alpha} dx^{\alpha^2}$$

с положительными коэффициентами $g_{\alpha\alpha}$. В частном случае, когда $g_{\alpha\alpha}$ приводятся к постоянным, пространство является эвклидовым.

Пространственно-временной континуум ОТО в ортогональных координатах характеризуется квадратической формой с тремя отрицательными и одним положительным коэффициентом (или наоборот), т. е. с сигнатурой -2 (или $+2$); геометрию этого континуума в общем случае можно назвать псевдоримановой.

Рассмотренные в этой главе теоремы и формулы геометрии Римана не зависят от сигнатуры квадратической формы; в частности, они выполняются и в псевдоримановой геометрии ОТО.

Необходимо только помнить, что определитель $g = |g_{ij}|$, имеющий в обычной римановой геометрии положительное значение, при сигнатуре $(-, -, -, +)$ становится отрицательным, вследствие чего отдельные формулы нуждаются в соответствующей перделке. Например, в уравнении (4,9,3) определитель g необходимо заменить величиной $-g$.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Riemann. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1854, Gött. Abhandlungen, v. 13, 133. Русск. пер.: Б. Риман. Сочинения. ОГИЗ, М.—Л., 1948.
2. G. Ricci, T. Levi-Civita.— Annal. Mathem., 54, 1901.
3. L. P. Eisenhart. Riemannian Geometry. Princeton, 1927. Русск. пер.: Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ИЛ, М., 1948.
4. E. Cartan. Leçons sur la geometrie des espaces de Riemann. Paris, 1928. Русск. пер.: Э. Картан. Геометрия римановых пространств. ОНТИ, М., 1936.
5. П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. «Наука», М., 1967.

Глава V. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. **Принцип эквивалентности.** В предыдущих главах мы рассмотрели некоторые из многочисленных попыток уточнения и обобщения закона тяготения Ньютона. Эти попытки, основанные на анализе отдельных тонких особенностей движения небесных тел или на различных общих соображениях, не привели к существенному развитию теории Ньютона. Большое значение имело обсуждение закона тяготения с точки зрения специальной теории относительности (СТО), показавшее, что при отказе от гравитационного дальнего действия точная форма закона тяготения нуждается только в небольших поправках порядка $\frac{v^2}{c^2}$. Этот важный вывод позволил найти

путь для преодоления главной, принципиальной трудности классической небесной механики без существенного изменения положенного в ее основу закона Ньютона и тем самым вновь подтвердил фундаментальное значение этого закона. Новая эпоха в развитии теории гравитации началась лишь с созданием общей теории относительности (ОТО). К изложению основ этой теории мы и переходим.

В исследованиях Эйнштейна ОТО разрабатывалась как расширение СТО на основе принципа общей ковариантности. Если в СТО изучаются системы отсчета, движущиеся без ускорений и связанные между собой известным преобразованием Лоренца, то ОТО включает в рассмотрение произвольные движения систем отсчета и гравитацию, объединяя, таким образом, учение о пространстве-времени с теорией гравитационного поля.

Развитие ОТО было завершено к 1916 г. Первое систематическое изложение физических основ и математического аппарата теории содержится в известной работе Эйнштейна [1], опубликованной впервые в журнале «Annalen der Physik» и многократно переиздававшейся затем на различных языках. Распространению и развитию ОТО способствовало появление специальных монографий, среди которых в первую очередь следует назвать книги Вейля [2], Паули [3], Лауэ [4], Эддингтона [5], Толмана [6]. Из более поздних можно отметить работы Бергмана [7], Фока [8], Ландау и Лифшица [9], Петрова [10] и Синга [11].

Физической предпосылкой ОТО, составляющей ее главный эмпирический фундамент, является принцип эквивалент-

ности, который мы предварительно рассмотрели в главе III. Этот принцип выражает наиболее общую и характерную особенность тяготения, отличающую его от полей другой природы.

Исходным моментом принципа эквивалентности является независимость ускорения тела от его массы в заданном гравитационном поле. Обсуждая эту закономерность, известную в механике со времени Ньютона, Эйнштейн пришел к заключению об относительности ускорений и гравитации и высказал гипотезу об эквивалентности инерции и тяготения.

Временно ограничивая наши рассуждения рамками механики Ньютона, примем гипотезу эквивалентности Эйнштейна и включим в понятие гравитационного поля не только силовое поле, обусловленное материальными массами, но также поле сил инерции, зависящее от закона движения применяемой системы отсчета. Считая, что оба вида полей имеют одинаковую физическую природу, будем в то же время учитывать различие их строения. Поле первого вида условно назовем, как это часто делают, и с т и н н ы м; оно не зависит от выбора системы отсчета. Поле сил инерции (например, однородное поле тяжести, поле центробежных сил и др.) будем называть к и н е м а т и ч е с к и м, или и н е р ц и о н н ы м. Оно обладает тем свойством, что при соответствующем выборе системы отсчета напряженность во всех его точках может быть приведена к нулю *. В общем случае поле гравитации представляет собой результат сложения полей обоих указанных видов.

В случае кинематического поля гравитации можно построить систему координат, по отношению к которой свободная частица движется, как в отсутствие поля. Для поля произвольного строения это утверждение неправильно, поскольку не существует системы отсчета, позволяющей привести к нулю напряженность поля во всех точках. В общем случае указанное утверждение выполняется в бесконечно малом. В самом деле, в достаточно малой окрестности любой точки поле произвольного строения можно рассматривать как однородное, а следовательно, и как кинематическое. Поэтому *для каждой бесконечно малой области поля гравитации можно построить систему отсчета, по отношению к которой движение свободной частицы в этой области происходит, как вне поля.* В этом и заключается принцип эквивалентности в механике Ньютона. Как видим, в общем случае он имеет локальный характер и относится не к полю в целом, а к его достаточно малым пространственно-временным областям.

При обобщении принципа эквивалентности в теории относительности необходимо воспользоваться понятием четырехмерного ускорения, принятым в СТО.

* Такое поле называют иногда *имитированным*, так как его можно возбудить («имитировать») путем перехода от инерциальной системы координат к системе, движущейся с ускорением.

В механике Ньютона ускорение ω в декартовых координатах находится по формуле

$$\omega^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2,$$

которая дает одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета, связанных преобразованием Галилея. В СТО инерциальные системы отсчета связаны преобразованием Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (5,1,1)$$

по отношению к которому ньютоново определение ускорения, как легко убедиться, не является инвариантным.

Требованиям СТО отвечает четырехмерный вектор ускорения с компонентами

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2}, \quad \frac{d^2t}{ds^2},$$

где s — собственное время частицы, т. е. длина дуги мировой линии частицы в континууме Минковского. Элемент собственного времени в галилеевых координатах определяется квадратической формой

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2, \quad (5,1,2)$$

которой отвечает метрический тензор

$$\begin{aligned} & -1, \quad i = j = 1, 2, 3; \\ & g_{ij} = c^2, \quad i = j = 4; \\ & 0, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (5,1,3)$$

Величина четырехмерного ускорения находится по формуле

$$\omega^2 = g_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta = -\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 + c^2 \left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)^2, \quad (5,1,4)$$

инвариантной относительно преобразования Лоренца. Действительно, если в соотношение

$$\omega'^2 = -\left(\frac{d^2x'}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2y'}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2z'}{ds^2}\right)^2 + c^2 \left(\frac{d^2t'}{ds^2}\right)^2,$$

определяющее ускорение частицы в системе x' , y' , z' , t' , внести равенства

$$\begin{aligned} \frac{d^2x'}{ds^2} &= \frac{\frac{d^2x}{ds^2} - v \frac{d^2t}{ds^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & \frac{d^2y'}{ds^2} &= \frac{d^2y}{ds^2}; \\ \frac{d^2z'}{ds^2} &= \frac{d^2z}{ds^2}; & \frac{d^2t'}{ds^2} &= \frac{\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned}$$

непосредственно вытекающие из (5,1,1), то после необходимых упрощений получится величина, совпадающая с (5,1,4). Это значит, что во всех системах координат, переход между которыми осуществляется с помощью преобразований Лоренца, движущаяся частица имеет одно и то же четырехмерное ускорение*.

Как и в случае механики Ньютона, предположим вначале, что поле гравитации является кинематическим; оно существует в координатах x^σ , но отсутствует в системах отсчета $x^{\sigma'}$, отвечающих СТО и связанных между собой преобразованием Лоренца. Свободная частица, движущаяся в системе x^σ под действием кинематического поля, в системе $x^{\sigma'}$ перемещается, как вне поля; мы принимаем, что, в соответствии с принципом эквивалентности, четырехмерным законом ее движения являются равенства

$$\frac{d^2x'}{ds^2} = \frac{d^2y'}{ds^2} = \frac{d^2z'}{ds^2} = \frac{d^2t'}{ds^2} = 0.$$

Найдем закон движения этой частицы в произвольной системе отсчета x^σ .

Пусть в общих координатах квадратическая форма имеет вид

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (5,1,5)$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор, который при переходе к одной из систем $x^{\sigma'}$ принимает значения (5,1,3).

Первые производные от координат по собственному времени (т. е. по длине дуги мировой линии частицы) составляют контравариантный вектор, преобразующийся по известной формуле

$$\frac{dx^{i'}}{ds} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds}.$$

Дифференцируя это равенство, имеем

$$\frac{d^2x^{i'}}{ds^2} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{d^2x^\alpha}{ds^2}.$$

Внесем сюда соотношение

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \Gamma_{\alpha'\beta'}^{i'},$$

непосредственно вытекающее из общей формулы (4,5,7) после

* Равенство $w' = w$ получено с помощью преобразования (5,1,1), связывающего системы координат с общим направлением осей x, x' , совпадающим с направлением их относительного движения. Однако это равенство сохраняется и в том случае, если оси x, x' образуют любые углы с направлением движения одной системы по отношению к другой.

соответствующей переделки индексов. При подстановке необходимо принять во внимание, что в галилеевой системе символы Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}$ имеют нулевые значения.

Полученное таким образом соотношение

$$\frac{d^2 x^{i'}}{ds^2} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right)$$

выполняется при произвольном преобразовании координат. Поэтому из условия $\frac{d^2 x^{i'}}{ds^2} = 0$ с необходимостью следует

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (5,1,6)$$

В произвольных координатах мировой линией свободной частицы, движущейся в кинематическом поле гравитации, служит геодезическая линия пространственно-временного континуума. Этот важный вывод, являющийся непосредственным следствием обобщенного принципа эквивалентности, лежит в основе релятивистского представления о гравитации. Левая часть (5,1,6) содержит четыре компонента контравариантного вектора четырехмерного ускорения частицы. Найденный закон показывает, что в пространственно-временном континууме частица движется с нулевым ускорением; тем самым ньютоново понятие силы тяготения, действующей на частицу со стороны поля и вызывающей ее ускорение, отвергается. С точки зрения ОТО движение свободной частицы в гравитационном поле является инерциальным и его особенности обусловлены не приложенной к частице силой, а метрикой пространства-времени.

Рассмотрим теперь гравитационное поле, отличное от кинематического. Допустим, что пространственно-временной интервал, как и прежде, определяется квадратической формой (5,1,5), где $g_{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора, равные произведениям соответствующих координатных векторов. В данном случае не существует системы отсчета, по отношению к которой движение свободной частицы происходило бы как в отсутствие поля. Поэтому не существует также и преобразования координат, которое позволило бы привести компоненты метрического тензора к значениям (5,1,3), отвечающим континууму Минковского. Таким образом, в случае поля гравитации произвольного строения пространственно-временной континуум не имеет евклидовой (точнее, псевдоевклидовой) метрики, присущей СТО. Стремясь развить теорию, пригодную для полей гравитации любого строения, необходимо, следуя Эйнштейну, принять, что пространство и время в общем случае образуют четырехмерный континуум Римана. Вырождение этого континуума в евклидово многообразие имеет место лишь в случае кинематического поля, когда при

соответствующем выборе системы отсчета общая формула (5,1,5) преобразуется в линейный элемент Минковского (5,1,2), и ОТО переходит в СТО.

Закон движения свободной частицы в форме уравнений геодезической линии (5,1,6), выведенный из принципа эквивалентности для кинематического поля, обобщается на случай поля гравитации произвольной структуры.

Пусть g_{ij} — метрический тензор пространственно-временного континуума R_4 , отвечающего полю гравитации произвольного строения и имеющего риманову метрику. Выбрав какую-либо точку континуума, построим четырехмерное евклидово многообразие E_4 , соприкасающееся в этой точке с R_4 . Как было показано в главе IV, 5, метрический тензор G_{ij} континуума E_4 связан в точке соприкосновения с полем тензора g_{ij} соотношениями

$$G_{ij} = g_{ij}; \quad \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Поэтому символы Кристофеля обоих континуумов, зависящие лишь от составляющих метрического тензора и их первых производных, в точке соприкосновения будут также одинаковыми. Отсюда вытекает, что система уравнений (5,1,6), коэффициентами которых служат символы Кристофеля, в точке соприкосновения, а следовательно, и в ее бесконечно малой окрестности представляет геодезическую линию как в римановом R_4 , так и в евклидовом E_4 континуумах. Если движение свободной частицы в континууме E_4 происходит по геодезической линии, то оно отвечает геодезической линии и в континууме R_4 . Поскольку же для континуума E_4 , соответствующего кинематическому полю гравитации, закон геодезической линии выведен непосредственно из принципа эквивалентности, этот закон можно считать обоснованным и для поля произвольного строения.

Следует еще раз подчеркнуть, что в конечных областях пространственно-временного континуума многообразие E_4 пригодно для описания только кинематического поля; при произвольном строении поля это многообразие можно употреблять лишь в бесконечно малом. В этом сказывается локальный характер принципа эквивалентности: *в общем случае только достаточно малые области поля гравитации тождественны кинематическим полям*. В то же время необходимо помнить, что локальность принципа эквивалентности выражает *структурные различия* между кинематическим и любым другим полем гравитации. Что же касается *физической природы*, то она одинакова для гравитационных полей произвольного строения. Эта идея Эйнштейна имеет в ОТО такое же фундаментальное значение, каким для классической теории гравитации обладала гипотеза Ньютона о тождестве тяжести и тяготения.

Пользуясь понятием о соприкасающейся евклидовой метрике; мы имеем возможность несколько улучшить формулировку принципа эквивалентности в ОТО. С точки зрения механики, этот принцип заключается в общем случае в том, что *для бесконечно малой области пространственно-временного континуума можно построить систему отсчета, по отношению к которой свободная частица в этой области движется как в кинематическом поле гравитации.*

Многие авторы, подчеркивая локальный характер принципа эквивалентности, считают, что в ОТО он имеет ограниченное значение. Признавая важную роль принципа эквивалентности в процессе разработки ОТО, они, вместе с тем, утверждают, что после завершения ОТО этот принцип утратил свое значение и может служить только удобным вспомогательным средством при разъяснении основных положений ОТО. Еще Эддингтон писал, что «принцип эквивалентности сыграл огромную роль, давая указания при первоначальном построении обобщенной теории относительности. Теперь, когда мы достигли нового взгляда на природу мира, он сделался менее необходимым» [5].

С такой точкой зрения, получившей довольно широкое распространение, нельзя согласиться, так как открытая Эйнштейном эквивалентность инерции и тяготения составляет главную физическую предпосылку ОТО, в основу которой положены выводы небесной механики и точных экспериментов.

2. Обобщение принципа эквивалентности. Принцип эквивалентности в рассмотренной выше форме выражает свойства гравитационного поля через особенность бесконечно малых элементов движения. Однако геометрия Римана позволяет расширить формулировку этого принципа и сделать ее применимой к *конечному* движению свободной частицы в поле гравитации [12].

Математической предпосылкой такого расширения служит понятие о соприкосновении римановой и евклидовой метрик вдоль линии. Это понятие, введенное в геометрию Е. Картаном, рассмотрено в главе IV, 5.

Пусть g_{ij} и G_{ij} — метрические тензоры риманова R_n и евклидова E_n пространств n измерений. Пространства R_n и E_n соприкасаются вдоль заданной линии, если во всех точках этой линии выполняются соотношения

$$g_{ij} = G_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k}.$$

С точностью до членов второго порядка соприкасающаяся евклидова метрика представляет риманову в бесконечно малой окрестности линии соприкосновения.

Предположим, что в поле гравитации произвольного строения происходит движение частицы, отвечающее принципу эквивалентнос-

ти. В пространственно-временном континууме R_4 с римановой метрикой движение частицы изображается четырехмерной геодезической линией. Построим пространственно-временной континуум E_4 с эвклидовой метрикой, соприкасающийся с R_4 вдоль этой линии. Во всех точках линии величины g_{ij} , G_{ij} и их первые производные по координатам соответственно одинаковы, вследствие чего вдоль линии одинаковы также символы Кристоффеля римановой и эвклидовой метрик. Поэтому линия соприкосновения, являясь геодезической в пространстве R_4 , будет геодезической и в E_4 . Отсюда следует, что любое конечное движение частицы в гравитационном поле произвольного строения можно представить геодезической линией в специально построенном пространстве-времени с эвклидовой метрикой. Это пространство-время пригодно для изображения только вполне определенного конечного движения частицы (т. е. движения в заданном поле и с заданными начальными условиями), поскольку E_4 может соприкасаться с R_4 лишь вдоль одной линии. Вместе с тем такое изображение достаточно полно, так как соприкасающаяся метрика вполне определяет действие поля гравитации на данную частицу.

Итак, конечное движение свободной материальной точки в поле гравитации можно описать геодезической линией как в римановом, так и в эвклидовом континуумах. При первом описании движение считается обусловленным истинным полем гравитации, а при втором его можно рассматривать как движение в кинематическом поле. Это позволяет формулировать принцип эквивалентности следующим образом: *для любого конечного движения свободной частицы в поле гравитации имеется возможность построить систему отсчета, в которой это движение происходит как в кинематическом поле.* В этой формулировке принцип эквивалентности является особенно убедительным аргументом, в пользу гипотезы Эйнштейна о единой природе инерции и тяготения.

3. Принцип относительности. Как уже сказано, ОТО представляет собой расширение СТО на основе общего принципа относительности, утверждающего равноправность ускоренных систем отсчета. Если в СТО постулируются одинаковые законы физики только в инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга без ускорений, то в ОТО это требование распространяется на все системы отсчета, по каким бы законам они ни двигались.

Специальный принцип относительности имеет, как известно, опытное происхождение и подготовлен развитием механики и электродинамики. Общий принцип относительности также нельзя рассматривать только как требование к способу математической формулировки законов физики. Физическое содержание его обусловлено свойствами гравитации. Согласно принципу эквивалентности, гравитационное поле относительно: его напряженность и строение

зависят от применяемой системы отсчета. Во всех системах, движущихся относительно друг друга без ускорений, существует одно и то же поле гравитации, тогда как в системах отсчета, движущихся с ускорениями, гравитационные поля различны.

Пусть S , S' — две системы отсчета, одна из которых движется ускоренно относительно другой. Изучаемый физический процесс, протекающий в системе S в определенном поле тяготения, в S' происходит в другом поле. Если в системе S действие поля на данный процесс можно выразить общим законом, форма которого не зависит от величины напряженности и от конкретной структуры поля, то этот закон должен иметь такой же вид и в системе S' , поскольку переход от S к S' лишь изменяет поле гравитации.

Равноправность ускоренных систем отсчета по отношению к механическим движениям представляет собой следствие эквивалентности инерции и тяготения. Общий принцип относительности имеет более широкое значение, поскольку равноправность систем отсчета, установленная для механических процессов, переносится на все физические явления. Таким образом, принцип эквивалентности является необходимой предпосылкой и составной частью общего принципа относительности. Эйнштейн неоднократно подчеркивал, что первый из них содержится во втором.

При изложении ОТО общий принцип относительности обыкновенно отождествляют с условием ковариантности, т. е. с требованием выражать законы физики уравнениями, инвариантными относительно общего преобразования координат. В связи с этим в литературе неоднократно указывалось, что общий принцип относительности не является физическим законом и представляет собой чисто формальное требование к математическому выражению физических законов, применявшееся и в дорелятивистской физике. С этой точкой зрения, высказанной впервые, по-видимому, еще Кречманом в 1917 г. [13], едва ли можно согласиться, поскольку условие ковариантности связано, как мы видели, с гипотезой об эквивалентности инерции и гравитации.

Отдельные авторы приписывали понятию относительности два различных значения: физическое и логическое, или математическое. Понятие физической относительности предполагает существование данного физического процесса в различных системах отсчета, тогда как в математическом смысле относительность сводится к сохранению формы закона этого процесса (выраженного обыкновенно соответствующим дифференциальным уравнением) при преобразовании координат, т. е. при переходе от одной системы отсчета к другой.

В первом смысле справедливость принципа относительности для инерциальных систем отсчета (т. е. в рамках СТО) не вызывает сомнений: внутри лабораторий, движущихся относительно друг друга

равномерно и прямолинейно, все явления происходят одинаково. Для неинерциальных систем отсчета принцип относительности в физическом смысле подвергается сомнению или даже отвергается; для них допускается лишь логическая относительность, которая выполняется всегда, даже в том случае, когда физической относительности нет. Отсюда следует, что разработанная Эйнштейном теория, отвечающая условию ковариантности, не должна рассматриваться как обобщение СТО и не заслуживает названия общей теории относительности, поскольку общей относительности как физического закона не существует.

Изложенная концепция значительно отличается от точки зрения Эйнштейна. Представляется неправильным противопоставлять физическую относительность логической, так как вторая является математическим выражением (хотя и не всегда достаточно полным) первой.

Основываясь на принципе эквивалентности, можно рассмотреть некоторые конкретные физические процессы, осуществимые внутри ускоренно движущихся лабораторий и протекающие по одинаковым законам. Так, маятники, установленные в земной лаборатории и в космическом корабле, колеблются по общему закону с периодами, зависящими от напряженности соответствующих гравитационных полей. В земной лаборатории напряженность поля определяется притяжением Земли и ее вращением, а в космическом корабле — притяжением окружающих небесных тел, собственным полем корабля и законом его движения. На искусственном спутнике Земли, движущемся с выключенными двигателями, колебания маятника зависят только от собственного поля тяготения спутника и от его вращения.

Эквивалентность инерции и гравитации определяет принципиальную возможность осуществить любой *механический процесс* внутри лаборатории, движущейся по произвольному закону. Распространение этой возможности на *все физические процессы* является гипотезой, выраженной в постулате о равноправности всех ускоренных систем отсчета.

Итак, общий принцип относительности вместе с содержащейся в нем гипотезой о единой природе инерции и тяготения имеет в ОТО первостепенное значение. Последовательное применение его определило пути расширения СТО, указало на необходимость привлечения римановой геометрии и привело к идее о слиянии гравитации с метрикой пространственно-временного континуума.

4. Тензор энергии-импульса. В случае кинематического поля гравитации пространственно-временной континуум имеет эвклидову метрику и допускает введение галилеевых координат, в которых основная квадратическая форма (5,1,5) принимает вид (5,1,2), соответствующий миру Минковского СТО. Если же поле гравитации

обладает более сложным строением и связано с наличием масс, то квадратическую форму (5,1,5) нельзя привести к линейному элементу СТО, и потому приходится допустить, что метрика пространственно-временного континуума является римановой.

Наличие масс вызывает отклонение метрических свойств пространства-времени от геометрии Эвклида. Отыскание связи между распределением материальных масс метрикой пространственно-временного континуума составляет главную задачу ОТО.

Распределение масс характеризуется в теории относительности при помощи так называемого тензора энергии-импульса. В СТО этот тензор определяется формулой

$$T^{ij} = \rho_0 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}, \quad (5,4,1)$$

где ρ_0 — собственная плотность, $\frac{dx^i}{ds}$ — компоненты четырехмерной скорости материи в применяемой системе отсчета.

Если ввести плотность ρ в данной системе отсчета, связанную с собственной плотностью известным соотношением СТО $\rho = \rho_0 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2$, то выражение для контравариантных компонент тензора энергии-импульса примет следующий вид:

$$T^{ij} = \rho \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}. \quad (5,4,2)$$

Тензор T^{ij} дает достаточно подробное описание распределения масс с учетом их макроскопического движения. Последняя компонента T^{44} характеризует пространственное распределение плотности, компоненты вида T^{i4} и T^{4i} ($i = 1, 2, 3$) — распределение импульса и кинетической энергии. В *сопутствующих* координатах, принимающих участие в макроскопическом движении вещества, отличается от нуля только компонента $T^{44} = \rho_0$.

Однако во многих случаях необходимо принимать во внимание также микроскопические движения частиц вещества, от которых зависит давление в среде. В этом случае в *сопутствующих* координатах отличаются от нуля и остальные диагональные компоненты, равные переносу количества движения в соответствующих координатных направлениях; при равномерном распределении направлений микроскопических скоростей они имеют одинаковые значения, совпадающие с собственным давлением ρ_0 .

Таким образом, в *сопутствующих* галилеевых координатах, которые мы обозначим здесь через x_σ , $\sigma = 1, \dots, 4$, можно написать

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = \rho_0; \quad T^{44} = \rho_0; \quad T^{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Составим выражение для компонент тензора энергии-импульса в произвольных координатах $x^{\sigma'}$.

Согласно закону преобразования тензора, имеем

$$T^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\omega}} \rho_0 + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^4} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^4} \rho_0, \quad (5,4,3)$$

где через ω обозначен индекс суммирования, принимающий значения 1, 2, 3.

В системе x^{σ} компоненты метрического тензора *

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1; \quad g^{44} = 1; \quad g^{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Поэтому в общих координатах метрический тензор имеет компоненты

$$g^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta} = -\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\omega}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^4} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^4}.$$

Поскольку в системе x^{σ} макроскопических движений нет, должны выполняться равенства

$$\frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^2}{ds} = \frac{dx^3}{ds} = 0; \quad \frac{dx^4}{ds} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^4} = \frac{dx^{i'}}{ds}; \quad g^{i'j'} = -\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\omega}} + \frac{dx^{i'}}{ds} \frac{dx^{j'}}{ds}.$$

Внося эти соотношения в (5,4,3), находим

$$T^{ji} = (\rho_0 + p_0) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^i}{ds} - \rho_0 g^{ji}. \quad (5,4,4)$$

Штрих, которым отмечались общие координаты, здесь для простоты опущен.

Определение тензора энергии-импульса в форме (5,4,4) пригодно и для римановой метрики пространственно-временного континуума, так как это определение, полученное в общих координатах СТО, непосредственно переходит в ОТО, поскольку в каждой отдельно взятой точке обе метрики с достаточной точностью совпадают.

Во многих случаях удобно пользоваться не контравариантными, а смешанными $T^i_j = g_{\alpha j} T^{\alpha i}$ или ковариантными $T_{ij} = g_{\alpha i} g_{\beta j} T^{\alpha\beta}$ компонентами тензора энергии-импульса, образованными из контравариантных компонент путем опускания индексов.

Тензор энергии-импульса удовлетворяет закону сохранения, который является релятивистским обобщением законов

* Для упрощения записи принято $x^4 = ct$.

сохранения механики Ньютона. В галилеевых координатах СТО этот закон имеет вид

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0; \quad i = 1, \dots, 4. \quad (5,4,5)$$

Приложим соотношение (5,4,5) к изолированной системе тел, расположенной в конечной области пространства. Пренебрегая микроскопическими движениями частиц вещества, воспользуемся определением (5,4,2). Обозначив декартовы составляющие скорости через u, v, w , находим $T^{4i} = \rho u, \rho v, \rho w, \rho$. Смешанные компоненты равны $T_i^4 = -\rho u, -\rho v, -\rho w, \rho$.

Окружим рассматриваемую систему какой-либо замкнутой поверхностью S таким образом, чтобы система оставалась внутри образованного ею объема V . Составим интеграл

$$P_i = \int_V \int T_i^4 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (5,4,6)$$

При $i = 1, 2, 3$ этот интеграл определяет (с точностью до знака) компоненты количества движения, а при $i = 4$ равен полной массе системы. Дифференцируя (5,4,6) по времени, получим

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dx^4} &= \int \int \int \frac{\partial T_i^4}{\partial x^4} dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= - \int \int \int \left(\frac{\partial T_i^1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_i^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_i^3}{\partial x^3} \right) dx^1 dx^2 dx^3, \end{aligned}$$

так как в развернутой форме закон (5,4,5) имеет вид

$$\frac{\partial T_i^1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_i^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_i^3}{\partial x^3} + \frac{\partial T_i^4}{\partial x^4} = 0.$$

Во всех точках граничной поверхности выполняется условие $T_i^4 = 0$. Поэтому каждый из трех интегралов правой части предыдущего уравнения, например

$$\int \int \int \frac{\partial T_i^1}{\partial x^1} dx^1 dx^2 dx^3 = \int \int \left| T_i^1 \right|_{x_{(1)}^1}^{x_{(2)}^1} dx^2 dx^3,$$

равен нулю.

Следовательно,

$$\frac{dP_i}{dx^4} = 0. \quad (5,4,7)$$

Эти равенства выражают сохранение количества движения и полной массы системы.

Закон сохранения тензора энергии-импульса в форме (5,4,5) выполняется в галилеевых координатах. Преобразуем этот закон, перейдя к общим координатам $x^{\sigma'}$.

Согласно определению тензора, имеем

$$T_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T_{i'}^{\alpha'}.$$

Дифференцируя это равенство по координате x^β , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\beta} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^\beta} T_{i'}^{\alpha'} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} T_{i'}^{\alpha'} + \\ &+ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial T_{i'}^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}}. \end{aligned}$$

В галилеевых координатах, в которых компоненты метрического тензора постоянны, символы Кристофеля имеют нулевые значения. Поэтому, согласно закону преобразования символов Кристофеля (4,5,7), можно написать

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}; \quad \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^\beta} = - \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \Gamma_{\beta'\gamma'}^{i'}.$$

Внесем эти соотношения в предыдущее равенство. После соответствующей переделки индексов суммирования получим

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \left(\frac{\partial T_{i'}^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} + \Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} T_{i'}^{\gamma'} - \Gamma_{i'\beta'}^{\gamma'} T_{\gamma'}^{\alpha'} \right).$$

Выражение, заключенное в скобки в правой части равенства, представляет собой ковариантную производную вектора $T_{i'}^{\alpha'}$, по координате $x^{\beta'}$. В сбывчных обозначениях имеем

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T_{i'/\beta'}^{\alpha'}.$$

Положим $\alpha = \beta$ и произведем свертывание по этому индексу; принимая во внимание очевидное соотношение

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} = \delta_{\alpha'}^{\beta'},$$

находим

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T_{i'/\alpha'}^{\alpha'}.$$

Полученная формула связывает расходимость тензора энергии-импульса в галилеевых координатах с ковариантной дивергенцией этого тензора в общих координатах. Поскольку преобразование координат произвольно, из закона (5,4,5) с необходимостью следует

$$T_{i/\alpha}^{\alpha} = 0; \quad i = 1, \dots, 4. \quad (5,4,8)$$

Штрих, которым отмечались общие координаты, опущен.

Исчезновение ковариантной расходимости тензора энергии-импульса выражает закон его сохранения в общем случае. В форме (5,4,8) этот закон применяется в ОТО также при римановой метрике пространственно-временного континуума.

5. Уравнения поля ОТО. Согласно принципу эквивалентности, геометрия пространственно-временного континуума в каждом конкретном случае должна быть выбрана таким образом, чтобы четырехмерная геодезическая линия правильно описывала движение свободной материальной точки в поле гравитации. Для реализации этой идеи необходимо найти теоретическую зависимость между метрическим полем g_{ij} , определяющим геометрию пространства-времени, и распределением масс, которыми обусловлено данное поле гравитации. Такая зависимость устанавливается в ОТО в виде уравнений гравитационного поля, составляющих основу математического аппарата этой теории.

Постараемся прежде всего сформулировать основные условия, которым должны удовлетворять уравнения поля.

В соответствии с принципом относительности, потребуем, чтобы форма уравнений поля не зависела от выбора системы координат. Этому условию общей ковариантности (назовем его условием *A*) можно удовлетворить, применяя тензорный анализ, поскольку тензорное уравнение, установленное в одной системе координат, сохраняется при переходе к любой другой системе.

Геометрия риманова пространства вполне определяется основной квадратической формой (см. главу IV). Рассматривая пространство-время как четырехмерный континуум Римана, можно описать его геометрические свойства полем метрического тензора. Распределение масс в данной системе отсчета характеризуется в ОТО тензором энергии-импульса. Поэтому уравнения поля можно искать в виде соотношений между метрическим тензором и тензором энергии-импульса (условие *B*).

Третьим условием (условием *C*) является закон сохранения тензора энергии-импульса (5,4,8), который ограничивает форму уравнений поля.

Все эти требования выражают идею о слиянии метрики с гравитацией, а также о зависимости между метрикой пространства-времени и распределением масс. Однако эти условия чрезмерно широки, поскольку они не учитывают конкретных особенностей

механического движения в гравитационных полях. Дальнейшим ограничением является требование, чтобы ОТО в предельном случае переходила в теорию Ньютона. Это условие (назовем его условием D) предполагает, что при соответствующем выборе системы отсчета уравнения гравитационного поля ОТО и закон четырехмерной геодезической линии в первом приближении совпадают с дифференциальным уравнением Пуассона для гравитационного потенциала

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho \quad (5,5,1)$$

и с законом движения в форме

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}. \quad (5,5,2)$$

Условие D имеет первостепенное значение для согласования уравнений поля с результатами наблюдений. Пользуясь уравнениями геодезической линии, представим это условие в более конкретной форме.

Вне поля гравитации (а также в кинематическом поле) можно построить галилеевы координаты, которым отвечает метрический тензор

$$\begin{aligned} & -1, \quad i = j = 1, 2, 3; \\ \delta_{ij} & = +1, \quad i = j = 4; \\ & 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

В случае слабого поля геометрия пространства-времени отличается от евклидовой незначительно, вследствие чего можно принять $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, где h_{ij} — малые отклонения компонент метрического тензора от указанных галилеевых значений.

Будем удерживать только линейные члены относительно величин h_{ij} и их производных, опуская члены более высоких порядков. При $\delta_{44} = 1$ скорость света вне поля принимается равной единице, а скорости механического движения измеряются малыми долями единицы. Поэтому в рассматриваемом приближении можно также пренебречь произведениями скоростей на величины h_{ij} и на их производные.

Обратимся к уравнениям геодезической линии в форме (4,7,6). Положив $n = 4$, в нашем приближении получим

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dx^4{}^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0; \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Найдем символ Кристоффеля, пользуясь разложением $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$. Простое вычисление дает

$$\Gamma_{44}^\sigma = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial h_{4\sigma}}{\partial x^4}.$$

В случае статического поля компоненты метрического тензора являются функциями только пространственных координат и не зависят от времени, вследствие чего второй член в выражении для Γ_{44}^σ тождественно равен нулю. Если поле переменное, то зависимость его от времени обусловлена перемещениями масс, так как случай, когда изменяются массы, в нашем приближении не имеет существенного значения. Поэтому время может входить в величины h_{ij} только через координаты и скорости масс. Отсюда следует, что в данном приближении второй член в Γ_{44}^σ должен быть опущен и для переменного поля. Итак, $\Gamma_{44}^\sigma = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma}$.

Уравнения геодезической линии, определяющие закон движения в поле гравитации, имеют в первом приближении вид

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dx^{42}} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(-\frac{1}{2} g_{44} \right).$$

Они совпадают с законом движения Ньютона (5,5,2), если величина $-\frac{1}{2} g_{44}$ с точностью до аддитивной постоянной равна гравитационному потенциалу. Таким образом, условие D требует, чтобы в случае достаточно слабого поля гравитационные уравнения ОТО при соответствующем выборе координат в первом приближении приводили к уравнению Пуассона для последней компоненты метрического тензора.

Уравнения поля, отвечающие названным условиям, можно искать в форме

$$X_{ij} = -\kappa T_{ij}, \quad (5,5,3)$$

где X_{ij} — симметричный тензор второго порядка, составленный из метрического тензора и удовлетворяющий соотношению $X_{i/\alpha}^\alpha = 0$; κ — постоянная. Тензор X_{ij} должен обеспечить выполнение условия D .

Вывод уравнений поля, отвечающих всем требованиям, представляет собой неопределенную задачу. Эйнштейн подошел к ее решению эвристически, образуя левую часть (5,5,3) из g_{ij} различными способами. В дальнейшем форма уравнений поля была ограничена дополнительным условием, согласно которому тензор X_{ij} является линейной функцией относительно вторых производных компонент g_{ij} и не зависит от производных более высоких порядков. Это условие, принятое по аналогии с уравнением Пуассона, является чисто математическим ограничением, не получившим физического обоснования. Между тем оно оказывается очень существенным и позволяет определить вид тензора X_{ij} с точностью до двух произвольных постоянных.

Как показал в 1917 г. Фермеил [14], все тензоры второго порядка, зависящие от g_{ij} , от их первых и вторых производных и являющиеся при этом линейными функциями вторых производных, с точностью до произвольного постоянного множителя имеют следующий вид:

$$X_{ij} = R_{ij} + C_1 g_{ij} R + C_2 g_{ij},$$

где R_{ij} — тензор Риччи, R — инвариант этого тензора, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Постоянная C_1 находится с помощью условия C .

Составим смешанные компоненты X_i^j и образуем ковариантную расходимость

$$X_{i/\alpha}^\alpha = R_{i/\alpha}^\alpha + C_1 \delta_i^\alpha R_{/\alpha} = R_{i/\alpha}^\alpha + C_1 R_{/i}.$$

Воспользовавшись соотношением (4,9,4), находим, что условие C выполняется при $C_1 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, с точностью до члена вида $C_2 g_{ij}$ можно написать

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\kappa T_{ij}. \quad (5,5,4)$$

Уравнения поля в форме (5,5,4) предложены Эйнштейном в конце 1915 г. Они удовлетворяют условиям $A - C$ и указанному выше дополнительному ограничению Эйнштейна. Остается только показать, что они отвечают также условию D , обеспечивая в первом приближении переход к уравнению Пуассона.

Пользуясь разложением $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, составим развернутое выражение для тензора Риччи, сохраняя только линейные члены относительно величин h_{ij} и их производных. Прежде всего, заметим, что в случае сигнатуры, применяемой в ОТО $(-, -, -, +)$, определитель, составленный из компонент ковариантного метрического тензора, будет отрицательным. На основании определения тензора Риччи (4,9,1) легко показать, что общее выражение для компонент этого тензора (4,9,3) сохраняется и в этом случае, если только вместо g написать $-g$. В данном приближении определитель равен

$$g = -1 - h; \quad h = -h_{11} - h_{22} - h_{33} + h_{44}. \quad (5,5,5)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Вычисление символов Кристоффеля дает

$$\Gamma_{ij}^\alpha = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{j\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^\alpha} \right).$$

Внесем эти значения в общую формулу (4,9,3). Сохраняя члены первого порядка относительно поправок h_{ij} и их производных, после необходимых перегруппировок получим следующее выражение для компонент тензора Риччи:

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \square h_{ij} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^j} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha j}}{\partial x^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha i}}{\partial x^\alpha} \right) \right]. \quad (5,5,6)$$

Символом \square обозначен дифференциальный оператор

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^1{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^3{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^4{}^2}.$$

Для упрощения (5,5,6) произведем малое преобразование координат. С этой целью введем систему четырех функций $l^\alpha(x^1, \dots, x^4)$, каждая из которых имеет порядок величин h_{ij} и удовлетворяет необходимым для дальнейшего аналитическим условиям, но в остальном остается пока неопределенной.

Новые координаты зададим соотношениями $x^{\alpha'} = x^\alpha + l^\alpha$, в которых индексы α' и α предполагаются одинаковыми. Компоненты метрического тензора в новой системе координат находим по известным формулам

$$g_{i'j'} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}.$$

Дифференцируя формулу преобразования координат, имеем

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^i}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} = \delta_i^\alpha - \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^i}.$$

Поэтому новые компоненты метрического тензора связаны со старым равенством

$$g_{i'j'} = g_{ij} - \delta_{\alpha i} \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^j} - \delta_{\alpha j} \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^i}.$$

Поправки к галилеевым значениям метрического тензора в обеих системах координат удовлетворяют соотношениям

$$h_{ij} = h_{i'j'} + \delta_{\alpha i} \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^j} + \delta_{\alpha j} \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^i}. \quad (5,5,7)$$

Индексы i, j здесь фиксированы; повторение их во втором и третьем членах правой части равенства не означает суммирования.

Дифференцируем (5,5,7) по x^i ; положив затем $j = \alpha$, умножим это равенство на $\delta^{\alpha\alpha}$ и выполним свертывание по индексу α . Учтывая, что при произвольном фиксированном k произведение $\delta_{kk}\delta^{kk} = 1$, получим

$$\delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i'\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} + \delta^{\alpha\alpha} \delta_{ii} \frac{\partial^2 l^i}{\partial x^{\alpha^2}} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\alpha}. \quad (5,5,8)$$

Умножим (5,5,7) на δ^{ii} и выполним полное свертывание по обоим индексам. Найденное соотношение $h = h' + 2 \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\alpha}$ после дифференцирования дает

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial h'}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

Комбинируя это равенство с (5,5,8), получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial h'}{\partial x^{i'}} - \delta^{\alpha'\alpha'} \frac{\partial h_{i'\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} - \delta_{ii} \square l^i. \quad (5,5,9)$$

Напомним, что индекс $i = i'$ здесь фиксирован; суммируют по α .

Функции l^i оставались до сих пор неопределенными. Подчиним их соотношениям

$$\delta_{ii} \square l^i = \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i}; \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5,5,10)$$

т. е. уравнениям типа Даламбера, решения которых могут быть получены хорошо известным способом.

При указанном выборе функций l^i в новой системе координат выполняется равенство

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h'}{\partial x^{i'}} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i'\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} = 0,$$

к которому приводится (5,5,9) при условии (5,5,10).

Итак, в случае слабого поля можно построить систему координат, в которой тензор Риччи с точностью до членов первого порядка относительно величин h_{ij} и их производных имеет, согласно (5,5,6), компоненты $R_{ij} = \frac{1}{2} \square h_{ij}$. Инвариант этого тензора находится путем полного свертывания; он равен $R = \frac{1}{2} \square h$, где h опреде-

ляется формулой (5,5,5). Уравнения поля (5,5,4) имеют в данном приближении вид

$$\frac{1}{2} \square \left(h_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} h \right) = - \kappa T_{ij}. \quad (5,5,11)$$

Во многих случаях удобнее пользоваться несколько иной формой уравнений поля.

Если (5,5,4) умножить на δ^{ij} и выполнить свертывание по обоим индексам, то получится $R = \kappa T$, где T — инвариант тензора энергии-импульса. Следовательно, вместо (5,5,4) можно написать

$$R_{ij} = - \kappa \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right). \quad (5,5,12)$$

В рассмотренном выше линейном приближении этому соответствует система уравнений

$$\frac{1}{2} \square h_{ij} = - \kappa \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right). \quad (5,5,13)$$

Применим (5,5,13) к последней компоненте метрического тензора, для которой $i = j = 4$.

Принимая во внимание, что механические скорости небесных тел весьма малы по сравнению со скоростью света, оператор \square можно отождествить с оператором Лапласа, взятым с обратным знаком. По той же причине можно принять, что из всех компонент тензора энергии-импульса в первом приближении от нуля отличается только $T^{44} = \rho$. В соответствии с этим имеем $T_{44} = T = \rho$. Последнее из уравнений поля (5,5,13) принимает вид $\nabla^2 h_{44} = \kappa \rho$, совпадая с уравнением Пуассона для гравитационного потенциала, чем и обеспечивается выполнение условия D .

Количественное совпадение с уравнением Пуассона (5,5,1) достигается выбором коэффициента κ . Если все вычисления выполнить в системе CGS, то получится

$$\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}. \quad (5,5,14)$$

В релятивистской системе единиц, в которой гравитационная постоянная теории Ньютона и скорость света имеют единичные значения, указанный коэффициент равен $8\pi^*$.

* Если l, t, m — длина, время и масса, выраженные в релятивистских единицах, а L, T, M — те же величины в системе CGS, то соотношения между ними определяются равенствами

$$L = l \text{ см}; \quad T = \frac{1}{c} t \text{ сек}; \quad M = \frac{c^2}{\gamma} m \text{ г},$$

где c, γ — скорость света и гравитационная постоянная в системе CGS.

В ОТО обыкновенно пользуются релятивистскими единицами и поэтому уравнения поля пишут в следующем виде:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -8\pi T_{ij}, \quad (5,5,15)$$

или

$$R_{ij} = -8\pi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right). \quad (5,5,16)$$

Не нарушая уравнения $X_{i/\alpha}^\alpha = 0$ и дополнительного требования о порядке высшей производной метрического тензора, можно прибавить к тензору Эйнштейна член вида $C_2 g_{ij}$, где C_2 — произвольная постоянная. Такое обобщение уравнений поля нетрудно также согласовать и с условием D , если постоянная C_2 будет так мала, что при переходе к первому приближению член $C_2 g_{ij}$ окажется пренебрежим. Это обобщение уравнений поля было предложено Эйнштейном в 1917 г. в связи с попыткой применить ОТО к космологии [15]. Обобщенную форму уравнений поля принято писать в виде

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = -8\pi T_{ij}. \quad (5,5,17)$$

Коэффициент Λ носит название космологической постоянной.

6. Неоднозначность уравнений поля. В предыдущем параграфе сформулированы четыре условия, которым должны удовлетворять уравнения поля. Присоединение к ним дополнительного условия, требующего, чтобы тензор X_{ij} в (5,5,3) был линейной функцией вторых производных от компонент метрического тензора и не содержал производных более высоких порядков, позволяет определить этот тензор однозначно. Единственность уравнений поля может при этом нарушаться лишь вследствие неточности определения тензора, энергии-импульса. Если же отказаться от дополнительного требования, которое не получило обоснования с физической точки зрения и выдвинуто лишь по аналогии с уравнением Пуассона, то уравнения поля ОТО оказываются неоднозначными, поскольку их нельзя вывести из условий $A - D$.

Точная форма уравнений поля определяется решением уравнения

$$X_{i/\alpha}^\alpha = 0, \quad (5,6,1)$$

где X_{ij} — искомый симметричный тензор второго порядка.

Покажем, что тензор Эйнштейна $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$ не является единственным решением уравнения (5,6,1). Интегрирование этого уравнения в общем виде представляет собой сложную задачу. Однако для наших целей достаточно установить существование решений, отличных от решения Эйнштейна.

Построим тензор второго порядка, называемый гамильтоновой производной от инварианта.

Пусть в какой-либо точке четырехмерного континуума заданы четыре линейных элемента с компонентами d_1x^α , d_2x^α , d_3x^α , d_4x^α . Объем, построенный на этих элементах, равен

$$dV = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} d_1x^\alpha d_2x^\beta d_3x^\gamma d_4x^\delta. \quad (5,6,2)$$

Эта величина не зависит от выбора системы координат. С формальной точки зрения, инвариантность объема обусловлена тем, что выражение (5,6,2) представляет собой результат полного свертывания произведения ко- и контравариантных тензоров.

Совокупность коэффициентов $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ образует тензор Леви-Чивита, антисимметричный относительно всех пар индексов. Основная компонента этого тензора ε_{1234} равна квадратному корню из абсолютной величины определителя $g = |g_{ij}|$. Компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ равны $\pm \sqrt{-g}$, если группа индексов $\alpha\beta\gamma\delta$ отличается от 1234 четным или нечетным числом перестановок соответственно, или нулю, если среди этих индексов имеются равные.

Для простоты допустим, что каждый из четырех элементов, образующих рассматриваемый объем, направлен по координатной линии, т. е.

$$d_1x^\alpha = dx^1, 0, 0, 0; \dots d_4x^\alpha = 0, 0, 0, dx^4.$$

Формула (5,6,2) примет следующий вид:

$$dV = \varepsilon_{1234} dx^1 \dots dx^4 = \sqrt{-g} d\tau,$$

где через $d\tau$ обозначено произведение четырех дифференциалов координат.

Пусть далее I — инвариант, построенный при помощи компонент метрического тензора и их производных

$$g_{ij}; g_{ij\alpha} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}; g_{ij\alpha\beta} = \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \dots$$

Составим интеграл $\int I \sqrt{-g} d\tau$, взятый по какой-либо определенной области континуума. Величина интеграла является инвариантом.

Не изменяя метрический тензор на границе области интегрирования, варьируем его внутри области путем малого преобразования координат. В результате компоненты метрического тензора и их производные в каждой внутренней точке получают приращения

$$\delta g_{ij}; \delta g_{ij\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta g_{ij}; \delta g_{ij\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \delta g_{ij}, \dots$$

в то время, как величина интеграла сохранит прежнее значение. Следовательно,

$$\int \frac{\partial I}{\partial g_{ij}} \delta g_{ij} \sqrt{-g} d\tau + \int \frac{\partial I}{\partial g_{ij\alpha}} \delta g_{ij\alpha} \sqrt{-g} d\tau + \dots = 0. \quad (5,6,3)$$

Принимая во внимание очевидное соотношение

$$\sqrt{-g} \frac{\partial l}{\partial g_{i\alpha}} \delta g_{l i \alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial l}{\partial g_{i\alpha}} \delta g_{l i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial l}{\partial g_{i\alpha}} \right) \delta g_{l i},$$

второй интеграл в (5,6,3) можно привести к следующему виду:

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial l}{\partial g_{i\alpha}} \delta g_{l i} \right) d\tau - \int \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial l}{\partial g_{i\alpha}} \right) \delta g_{l i} d\tau.$$

Первый член этого выражения представляет собой сумму четырех интегралов, соответствующих $\alpha = 1, \dots, 4$. Каждый из них допускает непосредственное интегрирование по одной координате и исчезает вследствие условия $\delta g_{l i} = 0$ на границе. Поэтому написанное выражение сводится ко второму члену.

Аналогично, пользуясь соотношением

$$u''v = (uv)'' + uv'' - 2(uv)''',$$

можно преобразовать третий интеграл в уравнении (5,6,3), а затем и последующие.

В результате подобных преобразований получим

$$\int \left\{ \frac{\partial l}{\partial g_{il}} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial l}{\partial g_{i\alpha}} \right) - \dots \right\} \sqrt{-g} \delta g_{l i} d\tau = 0.$$

Величины

$$H^{il} = \frac{\partial l}{\partial g_{il}} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(-\sqrt{g} \frac{\partial l}{\partial g_{i\alpha}} \right) - \dots \quad (5,6,4)$$

являются контравариантными компонентами симметричного тензора второго порядка, называемого гамильтоновой производной от инварианта l по метрическому тензору. По определению этот тензор удовлетворяет условию

$$\int H^{il} \sqrt{-g} \delta g_{l i} d\tau = 0. \quad (5,6,5)$$

Рассмотрим важное свойство гамильтоновой производной.

Обозначим через $\delta g_{l i}$ приращение метрического тензора, соответствующее переходу от координат x^α к координатам $x^\alpha + \delta x^\alpha$. Согласно закону преобразования тензора, имеем

$$g_{ij} = (g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}) \frac{\partial (x^\alpha + \delta x^\alpha)}{\partial x^i} \frac{\partial x^\beta + \delta x^\beta}{\partial x^j}. \quad (5,6,6)$$

Величины $\delta g_{l i}$, определяемые этими равенствами, являются разностями между компонентами метрического тензора в точках $x^\alpha + \delta x^\alpha$ и x^α новой и старой систем координат соответственно. Однако они отличаются от вариаций $\delta g_{l i}$ в (5,6,5), поскольку последние равны разностям между новыми и старыми значениями компонент метрического тензора в точке x^α , так как при варьировании исходного

интеграла мы оставляли $d\tau$ неизменным. Чтобы получить приращения $\delta g_{\alpha\beta}$, содержащиеся в (5,6,6), к вариациям δg_{ij} необходимо прибавить поправку $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\nu} \delta x^\nu$, соответствующую переходу от x^α к $x^\alpha + \delta x^\alpha$. Таким образом, для вариаций метрического тензора мы имеем соотношения

$$g_{ij} = \left(g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \right) \frac{\partial (x^\alpha + \delta x^\alpha)}{\partial x^i} \frac{\partial (x^\beta + \delta x^\beta)}{\partial x^j}.$$

Сохраняя члены первого порядка, можно написать

$$g_{ij} = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \delta x^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^j} \right) + \\ + (\delta g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta\nu} \delta x^\nu) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^j}.$$

Внеся сюда $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\tau} = \delta_\tau^\sigma$, получим после очевидных упрощений

$$\delta g_{ij} = - \left(g_{i\alpha} \delta x^\alpha + g_{i\alpha} \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^i} + g_{j\alpha} \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^j} \right). \quad (5,6,7)$$

Воспользуемся этой формулой для дальнейшего преобразования уравнения (5,6,5).

Прежде всего отметим, что вариации δg_{ij} нельзя считать независимыми; независимыми являются только вариации координат δx^α , от которых зависят величины δg_{ij} , согласно (5,6,7).

Внесем (5,6,7) в (5,6,5). Принимая во внимание симметричность гамильтоновой производной, получим

$$\int H^{ii} \sqrt{-g} g_{i\alpha} \delta x^\alpha d\tau + 2 \int H^{ii} \sqrt{-g} g_{i\alpha} \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^i} d\tau = 0. \quad (5,6,8)$$

Выполним преобразование

$$\int H^{ii} \sqrt{-g} g_{i\alpha} \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^i} d\tau = \int \frac{\partial}{\partial x^i} (H^{ii} \sqrt{-g} g_{i\alpha} \delta x^\alpha) d\tau - \\ - \int \frac{\partial}{\partial x^i} (H^{ii} \sqrt{-g} g_{i\alpha}) \delta x^\alpha d\tau.$$

Первый член правой части этого равенства представляет собой сумму четырех интегралов, каждый из которых допускает интегрирование по одной координате. Эти интегралы исчезают вследствие условия $\delta x^\alpha = 0$ на границе области интегрирования. Уравнение (5,6,8) принимает вид

$$\int \left\{ H^{\alpha\beta} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta i} - 2 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (H^{\alpha\beta} \sqrt{-g} g_{i\beta}) \right\} \delta x^i d\tau = 0$$

и, вследствие независимости вариаций координат, приводит к системе четырех равенств

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(H^{\alpha\beta} g_{i\beta} \sqrt{-g} \right) - \frac{1}{2} H^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = 0,$$

или, если ввести смешанные компоненты гамильтоновой производной,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(H_i^\alpha \sqrt{-g} \right) - \frac{1}{2} H^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = 0. \quad (5,6,9)$$

Согласно определению ковариантной дивергенции смешанного тензора второго порядка (4,6,7), имеем

$$H_{i|\alpha}^\alpha = \frac{\partial H_i^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\beta H_i^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\beta H_\beta^\alpha.$$

Внесем сюда

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}$$

и перейдем в последнем члене от смешанных к контравариантным компонентам. Получим

$$H_{i|\alpha}^\alpha = \frac{\partial H_i^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} H_i^\alpha - H^{\alpha\beta} \Gamma_{i\alpha,\beta}.$$

Напишем символ Кристофеля в развернутой форме и примем во внимание, что суммы

$$H^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha}; \quad H^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta},$$

отличающиеся лишь обозначением немых индексов, совпадают, вследствие чего последний член правой части предыдущего уравнения приводится к следующему виду:

$$\frac{1}{2} H^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.$$

Поэтому можно записать

$$H_{i|\alpha}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (H_i^\alpha \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} H^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right\}.$$

Сравнивая это выражение с соотношением (5,6,9), находим $H_{i|\alpha}^\alpha = 0$.

Итак, гамильтонова производная от инварианта, образованного из компонент метрического тензора и их производных, имеет

исчезающую ковариантную расходимость. Благодаря этому свойству, она является одним из решений уравнения (5,6,1).

Поскольку с помощью метрического тензора и его производных можно построить различные инварианты, понятие гамильтоновой производной определяет различные решения ковариантного уравнения (5,6,1). К ним принадлежит, в частности, решение Эйнштейна, так как тензор $-R^{ij} + \frac{1}{2}g^{ij}R$ является гамильтоновой производной инварианта тензора Риччи.

Возвращаемся к вопросу об уравнениях поля.

Пусть H_{ij} — ковариантные компоненты гамильтоновой производной, отличной от тензора Эйнштейна. Применяя уже употреблявшееся разложение $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, допустим, что в первом приближении тензор H_{ij} пренебрежим, так как если он содержит члены, линейные относительно величин h_{ij} , то его можно снабдить достаточно малым постоянным множителем. Система уравнений

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + H_{ij} = -8\pi T_{ij}$$

с точки зрения условий $A-D$ равноценна уравнениям поля в форме (5,5,14). Таким образом, отказываясь от дополнительного условия Эйнштейна о порядке высшей производной от g_{ij} в тензоре X_{ij} , мы приходим к заключению о том, что, начиная со второго приближения, уравнения поля ОТО содержат неизбежный произвол. Условия $A-D$ не позволяют выбрать уравнения поля однозначно или установить какое-либо преимущество уравнений Эйнштейна по сравнению с другой возможной их формой. Иными словами, приходится признать, что физические предпосылки ОТО не составляют достаточной основы для однозначного развития количественной теории гравитации.

7. Другая форма уравнений поля. В некоторых случаях удобно пользоваться другой формой уравнений поля Эйнштейна, отличной от (5,5,4).

Введем скалярную функцию координат

$$L = \sqrt{g} \bar{g}^{\sigma\tau} (\Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} \Gamma_{\beta\tau}^{\alpha} - \Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}), \quad (5,7,1)$$

которую по аналогии с ньютоновой механикой обыкновенно называют функцией Лагранжа.

Примем также

$$q^{ij} = g^{ij} \sqrt{-g}; \quad q_k^{ij} = \frac{\partial q^{ij}}{\partial x^k}. \quad (5,7,2)$$

Воспользовавшись определением символов Кристоффеля, нетрудно убедиться в том, что функция Лагранжа может быть выражена через величины q^{ij} и q_k^{ij} . Имея это в виду, составим производные

функции L по переменным q^{ij} , q_k^{ij} . С этой целью образуем полный дифференциал функции Лагранжа и представим его так:

$$\begin{aligned} dL = & \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} d(g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \Gamma_{\beta\tau}^{\alpha}) + \Gamma_{\beta\tau}^{\alpha} d(g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta}) - \\ & - \Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha} d(g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} d(g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha}) - \\ & - (\Gamma_{\beta\tau}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha}) d(g^{\sigma\tau} \sqrt{-g}). \end{aligned} \quad (5,7,3)$$

Преобразуем первый член правой части этого равенства. Если символ $\Gamma_{\beta\tau}^{\alpha}$ написать в развернутой форме

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\tau}} + \frac{\partial g_{\tau\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial x^{\gamma}} \right),$$

то этот член можно привести к виду

$$\frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} d \left(g^{\sigma\tau} g^{\alpha\gamma} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\tau\gamma}}{\partial x^{\beta}} \right),$$

или

$$- \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} d \left(g^{\sigma\tau} g_{\tau\gamma} \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} \right),$$

так как при дифференцировании известного соотношения $g^{\alpha\gamma} g_{\tau\gamma} = \delta_{\tau}^{\alpha}$ получается тождество

$$g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\tau\gamma}}{\partial x^{\beta}} = - g_{\tau\gamma} \frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}.$$

Аналогично можно преобразовать остальные члены двух первых строк правой части (5,7,3).

Таким образом, получим

$$\Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} d(g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \Gamma_{\beta\tau}^{\alpha}) = - \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} d \left(\sqrt{-g} \frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}} \right);$$

$$\Gamma_{\beta\tau}^{\alpha} d(g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta}) = - \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} d \left(\sqrt{-g} \frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}} \right);$$

$$\Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha} d(g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}) = \Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha} d \left(g^{\sigma\tau} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} \right);$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} d(g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha}) = - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} d \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} (\sqrt{-g} g^{\alpha\gamma}) \right\}.$$

Внося эти соотношения в выражение дифференциала функции Лагранжа, после необходимых упрощений найдем

$$dL = -\Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha} d \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g} g^{\sigma\tau}) + \\ + \Gamma_{\sigma\beta}^{\beta} d \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} (\sqrt{-g} g^{\sigma\tau}) - (\Gamma_{\beta\tau}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha}) d (\sqrt{-g} g^{\sigma\tau}).$$

Применяя обозначения (5,7,2), можно окончательно записать

$$dL = (-\Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha} + \delta_{\tau}^{\alpha} \Gamma_{\sigma\beta}^{\beta}) dq_{\alpha}^{\sigma\tau} - (\Gamma_{\beta\tau}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha}) dq^{\sigma\tau}.$$

Это равенство и определяет искомые производные, которые служат коэффициентами при соответствующих дифференциалах.

Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial q^{ij}} = -\Gamma_{\beta i}^{\alpha} \Gamma_{\alpha j}^{\beta} + \Gamma_{ij}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}; \\ \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}^{ij}} = -\Gamma_{ij}^{\alpha} + \delta_{ij}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\beta}. \quad (5,7,4)$$

С помощью полученных соотношений можно показать, что лагранжиан является однородной функцией величин q^{ij} и их производных q_{α}^{ij} .

Умножим первое соотношение на q^{ij} и выполним полное свертывание. Принимая во внимание определение функции Лагранжа (5,7,1), найдем

$$\frac{\partial L}{\partial q^{ij}} q^{ij} = -q^{ij} (\Gamma_{\beta i}^{\alpha} \Gamma_{\alpha j}^{\beta} - \Gamma_{ij}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}) = -L.$$

Величину q_{α}^{ij} представим следующим образом:

$$q_{\alpha}^{ij} = \sqrt{-g} \left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^{\alpha}} + g^{ij} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} \right).$$

Производную $\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^{\alpha}}$ найдем с помощью применявшегося выше соотношения

$$g_{\sigma\tau} \frac{\partial g^{i\sigma}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{i\sigma} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Умножим это равенство на $g^{\tau i}$; после свертывания получим

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{i\sigma} g^{\tau i} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Если внести сюда

$$\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\alpha}} = \Gamma_{\sigma\alpha, \tau} + \Gamma_{\tau\alpha, \sigma},$$

согласно формуле (4,3,3), то указанная производная примет вид

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^\alpha} = -g^{i\sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^j - g^{i\tau} \Gamma_{\tau\alpha}^i.$$

Учитывая также соотношение

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha},$$

которое нетрудно получить из определения символа Кристофеля, можно написать

$$q_\alpha^{ij} = \sqrt{-g} (-g^{i\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^j - g^{i\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^i + g^{ij} \Gamma_{\sigma\beta}^\beta).$$

Умножим это равенство на второе из равенств (5,7,4) и выполним свертывание по всем трем индексам. После очевидных упрощений найдем

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{ij}} q_\alpha^{ij} = 2 \sqrt{-g} g^{\sigma\tau} (\Gamma_{\alpha\sigma}^\beta \Gamma_{\tau\beta}^\alpha - \Gamma_{\sigma\tau}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta).$$

Итак,

$$\frac{\partial L}{\partial q^{ij}} q^{ij} = -L, \quad \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{ij}} q_\alpha^{ij} = 2L. \quad (5,7,5)$$

Степень однородности функции Лагранжа относительно величин q^{ij} равна -1 , тогда как относительно производных q_α^{ij} эта функция имеет показатель однородности $+2$.

Воспользуемся теперь соотношениями (5,7,4), чтобы с помощью функции Лагранжа составить выражение для компонент тензора Риччи.

Образовав свернутую производную $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{ij}}$ и вычтя из нее первое соотношение (5,7,4), найдем, согласно общему определению тензора Риччи (4,9,1),

$$R_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{ij}} - \frac{\partial L}{\partial q^{ij}}. \quad (5,7,6)$$

Инвариант этого тензора равен

$$R = g^{\sigma\tau} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} \right).$$

Поэтому, представив равенство (5,7,6) в форме

$$R_{ij} = \delta_i^\sigma \delta_j^\tau \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} \right),$$

можно написать следующее выражение для компонент тензора Эйнштейна:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \left(\delta_i^\sigma \delta_j^\tau - \frac{1}{2} g_{ij} g^{\sigma\tau} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} \right).$$

Уравнения поля (5,5,4) принимают вид

$$\left(\delta_i^\sigma \delta_j^\tau - \frac{1}{2} g_{ij} g^{\sigma\tau} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} \right) = -8\pi T_{ij}. \quad (5,7,7)$$

Введя инвариант тензора энергии-импульса, можно привести уравнения поля к несколько более компактной форме. С этой целью следует воспользоваться равенством (5,5,12), в котором скаляр тензора Риччи выражен через указанный инвариант. Внося в это равенство соотношение (5,7,6), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{ij}} - \frac{\partial L}{\partial q^{ij}} = -8\pi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right). \quad (5,7,8)$$

Вне масс, где тензор энергии-импульса исчезает, система уравнений поля будет следующей:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{ij}} - \frac{\partial L}{\partial q^{ij}} = 0, \quad (5,7,9)$$

аналогичной уравнениям Лагранжа ньютоновой механики.

В заключение мы вновь подчеркнем, что уравнения поля Эйнштейна в виде (5,5,4) или в рассмотренной выше форме (5,7,8) могут быть выведены однозначно только в том случае, если к основным условиям, сформулированным в п. 5, присоединить дополнительное требование, согласно которому эти уравнения являются линейными относительно вторых производных компонент метрического тензора и не содержат производных более высоких порядков.

Многие авторы выводят уравнения поля ОТО из вариационного принципа, аналогичного принципу наименьшего действия механики Ньютона. В математическом отношении такой вывод обладает определенными достоинствами. Однако с физической точки зрения едва ли можно признать предпочтительным, поскольку в выборе варьируемого интеграла допускают известный произвол, а принцип наименьшего действия для гравитационного поля и материи принимают в форме постулата. По мнению автора, более естественно рассматривать вариационный принцип ОТО в качестве следствия уравнений поля, подобно тому, как принцип наименьшего действия в дорелятивистской классической механике был найден в качестве следствия законов Ньютона.

8. Внешнее решение Шварцшильда. Для большинства приложений ОТО основное значение имеет решение уравнений поля, отве-

чающее условию сферической симметрии. Приближенное интегрирование уравнений поля для этого случая впервые выполнено в известной работе Эйнштейна о движении перигелия планеты Меркурий [16]. Вскоре Шварцшильд получил точное решение [17], которое мы здесь кратко воспроизводим.

Для пустого пространства, во всех точках которого тензор энергии-импульса тождественно равен нулю, уравнения поля (5,5,16) принимают вид

$$R_{ij} = 0. \quad (5,8,1)$$

Допустим, что поле гравитации статическое и обусловлено материальной точкой или протяженным телом со сферическим распределением массы. Задача о внешнем поле состоит в интегрировании уравнений (5,8,1) в предположении, что искомое решение удовлетворяет центральной симметрии, на достаточно большом расстоянии соответствует теории Ньютона, а на бесконечности приводит к квадратической форме СТО, которая в сферических координатах имеет следующий вид:

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2. \quad (5,8,2)$$

Тело со сферическим распределением массы, помещенное в начале координат, не нарушает условия пространственной симметрии. Поэтому можно предположить, что квадратическая форма, отвечающая искомому решению уравнений поля, такова:

$$ds^2 = -e^{\alpha} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{\beta} dt^2, \quad (5,8,3)$$

где α, β — функции одного r , которые в отсутствие тела обеспечивают переход к (5,8,2), а на бесконечности принимают нулевые значения при любой массе тела.

Требуется определить вид функций α, β , согласно уравнениям поля (5,8,1). Положим $r, \theta, \varphi, t = x^i$ при $i = 1, \dots, 4$. При этом компоненты метрического тензора будут

$$g_{11} = -e^{\alpha}; \quad g_{22} = -r^2; \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta; \quad g_{44} = e^{\beta}; \\ g_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Определитель, составленный из этих компонент, равен $g = -r^4 \sin^2 \theta e^{\alpha+\beta}$, а контравариантные компоненты метрического тензора определяются формулами

$$g^{11} = -e^{-\alpha}; \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}; \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}; \quad g^{44} = e^{-\beta}; \\ g^{ij} = 0; \quad i \neq j.$$

Пользуясь этими значениями, найдем компоненты тензора Риччи.

Символы Кристофеля при различных i, j, k вычисляются по формулам

$$\Gamma_{jk}^i = 0; \quad \Gamma_{ij}^i = -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}; \quad \Gamma_{ii}^j = \frac{1}{2} g^{jj} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j};$$

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i},$$

которые легко получить из (4,3,4) — (4,3,5) принимая во внимание что при $i \neq j$ в нашем случае $g_{ij} = g^{ij} = 0$.

Эти вычисления показывают, что все отличные от нуля символы Кристофеля таковы:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\alpha'}{2}; \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{14}^4 = \frac{\beta'}{2}; \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{-\alpha};$$

$$\Gamma_{23}^3 = \text{ctg } \theta; \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-\alpha}; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta;$$

$$\Gamma_{44}^1 = \frac{\beta'}{2} e^{\beta-\alpha}.$$

Диагональные компоненты тензора Риччи определяются соотношениями

$$R_{11} = \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r};$$

$$R_{22} = e^{-\alpha} \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] - 1;$$

$$R_{33} = e^{-\alpha} \sin^2 \theta \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] - \sin^2 \theta;$$

$$R_{44} = e^{\beta-\alpha} \left(-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} \right),$$

тогда как остальные компоненты этого тензора тождественно исчезают.

Система уравнений поля сводится в данном случае к следующим трем дифференциальным уравнениям относительно функций α, β :

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = 0; \quad e^{-\alpha} \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] - 1 = 0;$$

$$-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} = 0. \quad (5,8,4)$$

Первое и третье уравнения этой системы дают $\alpha + \beta = C$, где C — постоянная интегрирования.

Как указывалось, на бесконечности функции e^α, e^β приводятся к единицам; поэтому $C = 0$ и $\alpha + \beta = 0$.

Второе уравнение (5,8,4) принимает следующий вид:

$$e^{-\alpha}(1 - r\alpha') = 1$$

и после интегрирования дает $re^{-\alpha} = r + C'$, где C' — новая постоянная. Следовательно,

$$e^{\alpha} = \left(1 + \frac{C'}{r}\right)^{-1}; \quad e^{\beta} = 1 + \frac{C'}{r}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эти функции удовлетворяют всем трем уравнениям (5,8,4).

Найдем значение постоянной C' .

Согласно условию D , в первом приближении величина $-\frac{1}{2}g_{44}$ с точностью до постоянной слагаемой должна совпадать с ньютоновым потенциалом (см. п. 5). Последний в релятивистских единицах равен $\frac{m}{r}$, где $m = \frac{\gamma M}{c^2}$. Следовательно,

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{C'}{r}\right) = \frac{m}{r} + \text{const},$$

откуда $C' = -2m$.

Окончательно можно написать

$$e^{\alpha} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad e^{\beta} = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (5,8,5)$$

Таким образом, квадратическая форма

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 \quad (5,8,6)$$

представляет собой решение уравнений поля, отвечающее всем поставленным условиям; оно называется внешним решением Шварцшильда.

Заметим, что в соответствии с принятым условием соотношение (5,8,6) при $r \rightarrow \infty$ стремится к линейному элементу СТО, который в сферических координатах имеет вид (5,8,2). При этом переменная r имеет нижнюю границу $2m$, поскольку при меньших значениях квадратическая форма (5,8,6) изменяет сигнатуру. Эта граница называется гравитационной сферой тела. В системе CGS гравитационный радиус равен

$$r_g = \frac{2\gamma M}{c^2}. \quad (5,8,7)$$

Для солнца $r_g = 2,9 \cdot 10^5$ см. Для известных в настоящее время небесных тел понятие гравитационной сферы имеет лишь формальное значение, поскольку линейные размеры тел в огромное число

раз превосходят их гравитационные радиусы, вычисленные по формуле (5,8,7).

Обобщенные уравнения поля (5,5,17), дополненные космологическим членом, для пустого пространства имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = 0.$$

Умножая эти уравнения на g^{ij} и выполняя свертывание, находим соотношение между инвариантом тензора Риччи и космологической постоянной $R = 4\Lambda$. Поэтому уравнения можно написать в форме

$$R_{ij} = \Lambda g_{ij}. \quad (5,8,8)$$

Сохраняя условие сферической симметрии и пользуясь полученными значениями компонент тензора Риччи, имеем, вместо (5,8,4), следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} &= -\Lambda e^\alpha; \\ e^{-\alpha} \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] - 1 &= -\Lambda r^2; \\ -\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} &= \Lambda e^\alpha. \end{aligned} \quad (5,8,9)$$

Решением этой системы, как нетрудно убедиться, являются функции

$$e^\alpha = \left(1 + \frac{C'}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right)^{-1}, \quad e^\beta = C \left(1 + \frac{C'}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right).$$

Вследствие малости космологической постоянной член $\frac{1}{3} \Lambda r^2$ при не очень больших r должен быть весьма мал, и поэтому полученное решение должно совпадать с (5,8,5). Поэтому следует положить $C = 1$, $C' = -2m$. Таким образом,

$$e^\alpha = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right)^{-1}; \quad e^\beta = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2. \quad (5,8,10)$$

Обобщенная квадратическая форма Шварцшильда имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - \\ & - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right) dt^2. \end{aligned} \quad (5,8,11)$$

В отличие от (5,8,6) решение (5,8,11) применимо к значениям переменной r , ограниченным не только нижней ($r_g \simeq 2m$), но также верхней границей. С точностью до величины порядка m последняя равна $\sqrt{3\Lambda^{-1}}$.

Отметим также, что обобщенное решение Шварцшильда в отсутствие центрального тела не переходит в квадратическую форму СТО: при $m = 0$ геометрия пространственно-временного континуума остается римановой.

9. Внутреннее решение Шварцшильда. Для приложений ОТО представляет также интерес внутреннее решение Шварцшильда [18], характеризующее поле гравитации внутри тела со сферическим распределением массы. Особенно большое значение это решение приобрело в связи с развитием теории внутреннего строения сверхплотных звезд, к которым закон тяготения Ньютона неприменим.

Рассмотрим прежде всего случай, когда сферическая конфигурация состоит из несжимаемой жидкости с постоянной собственной плотностью ρ и с давлением p , зависящим от расстояния до центра сферы.

Согласно (5,4,4), ковариантные компоненты тензора энергии-импульса определяются формулами

$$T_{ij} = (\rho + p) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} g_{\alpha i} g_{\beta j} - p g_{ij}.$$

Поскольку макроскопических движений в веществе нет и квадратическая форма, удовлетворяющая условию сферической симметрии, имеет вид (5,8,3), отличными от нуля являются лишь диагональные компоненты этого тензора

$$T_{ii} = (\rho + p) \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2 g_{ii} - p g_{ii}.$$

Четырехмерная скорость $\frac{\partial x^i}{\partial s}$ сводится к последней составляющей, которая находится из квадратической формы при $\frac{\partial x^i}{\partial s} = 0, i = 1, 2, 3$;

эта составляющая равна $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{g_{44}}$. Следовательно,

$$T_{ii} = p e^\alpha, \quad p r^2, \quad p r^2 \sin^2 \theta, \quad p e^\beta.$$

Скаляр тензора энергии-импульса вычисляется по формуле $T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \rho - 3p$.

Составим уравнения поля в форме (5,5,16). С этой целью воспользуемся компонентами тензора Риччи, вычисленными в предыдущем параграфе применительно к линейному элементу (5,8,3). Выполняя соответствующие подстановки, получим систему трех уравнений

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = 4\pi e^\alpha (p - \rho);$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\beta' - \alpha'}{2r} - \frac{e^\alpha}{r^2} = 4\pi e^\alpha (p - \rho);$$

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} + \frac{\beta'}{r} = 4\pi e^\alpha (3\rho + \rho).$$

Уравнения, отвечающие $i = j = 2$ и $i = j = 3$, совпадают.

Эту систему удобнее представить в несколько иной форме. Сложив первое уравнение с третьим, получим

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha' - \beta'}{2r} = 8\pi\rho e^\alpha.$$

Вычитание тех же уравнений дает

$$\frac{\alpha' + \beta'}{2r} = 4\pi(\rho + \rho)e^\alpha.$$

Комбинируя это соотношение со вторым уравнением системы, находим

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\beta'}{r} - \frac{e^\alpha}{r^2} = 8\pi\rho e^\alpha; \quad -\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha'}{r} + \frac{e^\alpha}{r^2} = 8\pi\rho e^\alpha.$$

Таким образом, систему уравнения поля можно написать следующим образом:

$$8\pi\rho = e^{-\alpha} \left(\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha' - \beta'}{2r} \right);$$

$$8\pi\rho = e^{-\alpha} \left(\frac{\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}; \quad (5,9,1)$$

$$8\pi\rho = e^{-\alpha} \left(\frac{\alpha'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}.$$

Заметим, что условие несжимаемости до сих пор не учитывалось и потому полученная система уравнений применима также к конфигурации, состоящей из сжимаемой среды.

В случае $\rho = \text{const}$, рассмотренном в упомянутой работе Шварцшильда, интегрирование системы (5,9,1) не вызывает затруднений. Последнее уравнение после умножения на r^2 принимает вид $8\pi\rho r^2 = (r - re^{-\alpha})'$ и дает

$$e^{-\alpha} = 1 - kr^2; \quad k = \frac{8}{3}\pi\rho, \quad (5,9,2)$$

так как вследствие конечности $e^{-\alpha}$ в центре сферы для постоянной интегрирования следует принять нулевое значение.

Объединяя два первые уравнения (5,9,1), имеем

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\beta''}{2} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{2r} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha' e^{-\alpha} \left(\frac{\beta'}{4} + \frac{1}{2r} \right) + \frac{1}{r^2} = 0,$$

или, если внести найденное значение функций α ,

$$\beta'' + \frac{\beta'^2}{2} - \frac{\beta'}{r(1 - kr^2)} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\beta' e^{\frac{\beta}{2}} = \frac{2Bkr}{\sqrt{1-kr^2}},$$

где B — произвольная постоянная.

Повторное интегрирование дает

$$e^{\beta} = (A - B\sqrt{1-kr^2})^2, \quad (5,9,3)$$

где A — новая постоянная.

Давление находится теперь с помощью второго из уравнений системы (5,9,1)

$$p = \frac{k}{8\pi} \frac{3B\sqrt{1-kr^2} - A}{A - B\sqrt{1-kr^2}}. \quad (5,9,4)$$

Постоянные интегрирования определяются по условиям на границе сферы, где внутреннее решение должно совпадать с внешним.

Согласно (5,8,5), на границе $e^{\beta} = 1 - \frac{2m}{R}$. Приняв $2m = \frac{8}{3}\pi\rho R^3 = kR^3$ и сравнивая оба решения, получим

$$1 - kR^2 = (A - B\sqrt{1-kR^2})^2.$$

Второе уравнение находится из условия $p = 0$.

$$A - 3B\sqrt{1-kR^2} = 0.$$

Совместное решение этих уравнений дает

$$A = \frac{3}{2}\sqrt{1-kR^2}; \quad B = \frac{1}{2}. \quad (5,9,5)$$

Формулы (5,9,2) — (5,9,4) вместе с (5,9,5) дают полное решение задачи.

Переходим к случаю сжимаемой сферы, когда интегрирование уравнений поля не может быть завершено без дополнительных условий.

Введем функцию

$$m(r) = 4\pi \int_0^r r^2 \rho dr.$$

Последнее из уравнений (5,9,1) можно переписать так:

$$2m'(r) = 1 - (re^{-\alpha})'.$$

Это уравнение легко интегрируется и дает

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{2m(r)}{r},$$

так как вследствие $m(0) = 0$ постоянная интегрирования имеет нулевое значение.

Сложив второе и третье уравнения (5,9,1), находим $\alpha' + \beta' = 8\pi(\rho + p)re^\alpha$. Согласно внешнему решению на границе сферы, т. е. при $r = R$, должно выполняться соотношение $\alpha + \beta = 0$. Поэтому, интегрируя написанное уравнение в пределах от r до R , получим

$$\alpha + \beta = -8\pi \int_r^R (\rho + p) r e^\alpha dr,$$

или

$$e^\beta = e^{-\alpha - 8\pi \int_r^R (\rho + p) r e^\alpha dr}$$

Итак, внутреннее решение уравнений поля для сферической конфигурации в случае сжимаемой среды имеет вид

$$e^{-\alpha} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1};$$

$$e^\beta = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) e^{-8\pi \int_r^R (\rho + p) \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} r dr}. \quad (5,9,6)$$

Для фактического вычисления функций e^α , e^β необходимо знать распределение плотности и давления в конфигурации.

Поскольку при выводе (5,9,6) одно из уравнений системы (5,9,1) остается неиспользованным, в общем случае можно найти зависимость между давлением и плотностью в виде уравнения, которое служит релятивистским обобщением закона гидростатики механики Ньютона.

Сопоставляя первые два уравнения (5,9,1), имеем

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha' + \beta'}{2r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0,$$

или, если умножить на $\frac{2}{r}$ и выполнить соответствующие преобразования,

$$\frac{d}{dr} \left\{ e^{-\alpha} \left(\frac{\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \right\} + e^{-\alpha} \frac{\beta'(\alpha' + \beta')}{2r} = 0.$$

Вновь воспользовавшись вторым уравнением (5,9,1) и применявшимся ранее соотношением $\alpha' + \beta' = 8\pi(\rho + p)re^\alpha$, найдем

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2}(\rho + p)\beta' = 0.$$

Остается внести сюда значение производной β' , для которой из (5,9,6) следует

$$\beta' = \frac{2m(r)}{r^2} \left(1 + \frac{4\pi r^3 \rho}{m(r)}\right) \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}.$$

Таким образом, давление и плотность в равновесной сферической конфигурации связаны уравнениями

$$\frac{dp}{dr} + \frac{m(r)\rho}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 \rho}{m(r)}\right) \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} = 0; \quad (5,9,7)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Эта связь выражает в ОТО условие гидростатического равновесия рассматриваемой конфигурации. Как и в механике Ньютона, для решения уравнений равновесия требуется задать закон состояния вещества сферы в форме той или иной зависимости между давлением и плотностью.

Все вычисления были выполнены в релятивистских единицах, что позволило несколько упростить запись коэффициентов. Если перейти к системе CGS, которой обычно пользуются в приложениях, то уравнения (5,9,7) примут следующий вид:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\gamma M \rho}{r^2} \left(1 + \frac{p}{c^2 \rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 \rho}{c^2 M}\right) \left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}\right)^{-1} = 0; \quad (5,9,8)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Релятивистские поправки выражаются тремя двучленными множителями. В обычных условиях, например для Солнца и других звезд, каждый из этих множителей приводится к единице, и соотношение (5,9,8) превращается в уравнение равновесия, основанное на законе тяготения Ньютона. Даже для белых карликов с очень высокими плотностями релятивистские поправки малы. Однако для гипотетических сверхплотных звездных конфигураций они имеют весьма существенное значение.

10. Решение Эйнштейна для слабого поля. Точные решения уравнений поля удастся найти только в немногих частных случаях, когда распределение масс удовлетворяет специальным условиям. При произвольном распределении масс Эйнштейн указал общий метод приближенного интегрирования этих уравнений, пригодный для достаточно слабого поля [19].

Будем считать, что пространственно-временной континуум мало отличается от метрики мира Минковского СТО. Представим компоненты метрического тензора в виде $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, допуская, что поправки h_{ij} и их производные достаточно малы. В уравнениях

поля условимся сохранять только линейные относительно этих величин члены. При сделанных предположениях уравнения поля можно привести к следующему виду (см п. 5):

$$\square \left(h_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} h \right) = -16\pi T_{ij}, \quad (5,10,1)$$

где

$$\square = -\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad h = \delta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}.$$

Уравнения (5,10,1) относятся к типу Даламбера, хорошо изученному в математической физике. Применяя обычный метод интегрирования, получаем

$$h_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} h = -4 \int \frac{1}{r'} |T_{ij}|_{t-r'} dx' dy' dz'. \quad (5,10,2)$$

Это и есть решение Эйнштейна, определяющее систему величин h_{ij} в каждой пространственно-временной точке x, y, z, t . В правой части равенства интегрирование выполняется по всему пространству. При этом $r'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, $|T_{ij}|_{t-r'}$ значения компонент тензора энергии-импульса в точке x', y', z' , взятые для момента $t - r'$.

В качестве иллюстрации применим решение (5,10,2) к системе тел, размеры которых малы по сравнению с расстояниями между ними. Релятивистские массы тел обозначим через m_s , их плотности — через ρ_s . Введем функцию

$$U = \sum \frac{m_s}{r_s}; \quad r_s^2 = (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2, \quad (5,10,3)$$

которая с точностью до постоянного множителя совпадает с потенциалом поля в точке x, y, z .

В системе CGS величина U представляет собой отношение обычного ньютонова потенциала к квадрату скорости света. Будем считать ее величиной первого порядка малости. Тогда скорость, выраженная в релятивистских единицах (т. е. отношение скорости вещества к скорости света), является величиной порядка $\frac{1}{2}$.

Если искать решение уравнений поля с точностью до членов первого порядка, то в (5,10,2) можно принять $|T_{ij}|_{t-r'} = |T_{ij}|_t$, так как это упрощение повлияет лишь на члены более высоких порядков малости. По той же причине из всех компонент тензора энергии-импульса внутри тел достаточно сохранить $T^{44} = \rho_s$, положив остальные компоненты равными нулю. Единственной отличной от нуля ковариантной компонентой оказывается $T_{44} = \rho_s$.

При $i = j = 4$ правая часть соотношения (5,10,2) равна $-4 \sum \frac{m_s}{r_s}$;

при других значениях i, j она исчезает. Следовательно,

$$h_{11} + \frac{1}{2} h = h_{22} + \frac{1}{2} h = h_{33} + \frac{1}{2} h = 0; \quad h_{44} - \frac{1}{2} h = -4U. \quad (5,10,4)$$

Принимая во внимание соотношение $h = -h_{11} - h_{22} - h_{33} + h_{44}$, получаем

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = h_{44} = -2U. \quad (5,10,5)$$

Таким образом, метрику пространственно-временного континуума, отвечающего данной системе масс, с точностью до членов первого порядка можно описать квадратической формой

$$ds^2 = -(1 + 2U)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + (1 + 2U) dt^2. \quad (5,10,6)$$

Если пользоваться системой единиц CGS и ввести обычный ньютонов потенциал φ , то (5,10,6) примет такой вид:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + c^2\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) dt^2. \quad (5,10,7)$$

В заключение следует сказать, что решением Эйнштейна во многих случаях удобнее пользоваться в несколько ином виде.

Умножив (6,9,2) на δ^{ij} и выполнив полное свертывание, получим

$$h = 4 \int \frac{1}{r'} |T|_{t-r'} dx' dy' dz',$$

где T — инвариант тензора энергии-импульса.

Следовательно, вместо (5,10,2), можно написать

$$h_{ij} = -4 \int \frac{1}{r'} \left| T_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} T \right|_{t-r'} dx' dy' dz'. \quad (5.10,8)$$

11. Решение уравнений поля для системы точечных масс. Переходим к интегрированию уравнений поля для системы точечных масс с точностью до членов второго порядка включительно. Массы материальных точек, как и прежде, обозначим через m_s . Закон движения системы, выражающий координаты точек в функциях времени $a_s = a_s(t)$, $b_s = b_s(t)$, $c_s = c_s(t)$, оставим пока неопределенным.

Материальным точкам отвечает дискретное распределение массы в пространстве. Однако мы будем рассматривать некоторое непрерывное распределение по всему пространству, заданное таким образом, чтобы при помощи соответствующего предельного перехода оно превратилось в систему точечных масс.

Введем функцию $\sigma(\alpha, \lambda)$, непрерывную и неотрицательную для всех α и λ в интервале $0 \rightarrow \infty$ и при заданном λ имеющую наибольшее значение при $\alpha = 0$. Подчиним эту функцию условиям:

$$1) \text{ при } \alpha = 0 \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma = \infty;$$

$$2) \text{ при } \alpha \neq 0 \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma = 0;$$

$$3) \text{ при произвольном } \lambda \quad 4\pi \int_0^{\infty} \alpha^2 \sigma(\alpha, \lambda) d\alpha = 1.$$

Функцию, отвечающую перечисленным требованиям, можно задать различными способами; в частности, можно положить $\sigma = \lambda^3 \pi^{-3/2} e^{-\lambda^2 \alpha^2}$.

Введем обозначение

$$r_s^2 = (a_s - x)^2 + (b_s - y)^2 + (c_s - z)^2$$

и примем для краткости $\sigma_s = \sigma(r_s, \lambda)$.

Функция $\rho = \Sigma m_s \sigma_s$, которую в дальнейшем мы называем плотностью, при конечном λ непрерывна во всех точках, а при $\lambda \rightarrow \infty$ соответствует системе материальных точек с координатами a_s, b_s, c_s и массами m_s . Пользуясь этим определением, составим приближенное решение уравнений поля при непрерывном распределении массы и, положив затем $\lambda \rightarrow \infty$, найдем искомое решение для системы точек.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} r'^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2; \\ r_s'^2 &= (x' - a_s)^2 + (y' - b_s)^2 + (z' - c_s)^2; \\ \sigma_s' &= \sigma(r_s', \lambda) \end{aligned}$$

и положить

$$U_s = \iiint \frac{1}{r'} \sigma_s' dx' dy' dz', \quad (5,11,1)$$

то ньютонов потенциал масс с плотностью ρ определится формулой $U = \Sigma m_s U_s$.

Величину (5,11,1) можно рассматривать как потенциал поля, обусловленного сферическим распределением массы с плотностью σ_s' , в точке, находящейся на расстоянии r_s от центра этого распределения. По отношению к массе, заключенной внутри сферы радиуса r_s , данная точка является внешней, тогда как по отношению к массе, расположенной вне указанной сферы, — внутренней. Первая масса создает в этой точке потенциал

$$\frac{4\pi}{r_s} \int_0^{r_s} \alpha^2 \sigma(\alpha, \lambda) d\alpha.$$

Потенциал, обусловленный второй массой, равен $4\pi \int_{r_s}^{\infty} \alpha \sigma(\alpha, \lambda) d\alpha$.

Поэтому

$$U_s = \frac{4\pi}{r_s} \int_0^{r_s} \sigma(\alpha, \lambda) \alpha^2 d\alpha + 4\pi \int_{r_s}^{\infty} \sigma(\alpha, \lambda) \alpha d\alpha. \quad (5,11,2)$$

Если величина λ конечна, то функция (5,11,2) непрерывна и конечна во всех точках; при $\lambda \rightarrow \infty$ она приобретает в точке a_s, b_s, c_s бесконечно большое значение. В точках, отличных от a_s, b_s, c_s , второй интеграл в (5,11,2) при $\lambda \rightarrow \infty$ исчезает, а первый стремится к $\frac{1}{r_s}$, вследствие чего $U \rightarrow \sum \frac{m_s}{r_s}$.

При произвольном λ выделим в выражении потенциала U член, отвечающий $s = k$, т. е. составим величину $U = m_k U_k + U(k)$, где $U(k) = \sum_{s \neq k} m_s U_s$ представляет собой потенциал масс с плотностью

$\sum_{s \neq k} m_s \sigma_s$. Дифференцируя эту сумму по какой-либо координате, получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m_k \frac{\partial U_k}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial x} + \frac{\partial U(k)}{\partial x}.$$

Согласно (5,11,2),

$$\frac{\partial U_k}{\partial r_k} = -\frac{4\pi}{r_k^2} \int_0^{r_k} \sigma(\alpha, \lambda) \alpha^2 d\alpha.$$

Поэтому при $r_k \rightarrow 0$ имеем $\frac{\partial U_k}{\partial r_k} \rightarrow 0$.

Отсюда следует, что при $x \rightarrow a_k, y \rightarrow b_k, z \rightarrow c_k$ производные от потенциала по координатам определяются формулами

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_k = \frac{\partial U(k)}{\partial a_k}.$$

Заметим еще, что потенциал U и функции U_s при произвольном λ удовлетворяют уравнениям Пуассона $\Delta U = -4\pi\rho, \Delta U_s = -4\pi\sigma_s$, которые при $\lambda \rightarrow \infty$ переходят во внешних точках в уравнения Лапласа $\Delta U = 0, \Delta U_s = 0$.

В последующих вычислениях принято, что потенциал и его производные по пространственным координатам, а также компоненты ускорений $\ddot{a}_s, \ddot{b}_s, \ddot{c}_s$ являются величинами первого порядка малости, а составляющие скоростей $\dot{a}_s, \dot{b}_s, \dot{c}_s$ — величинами порядка $\frac{1}{2}$.

Как уже сказано, задача состоит в интегрировании уравнений поля с точностью до членов второго порядка включительно.

Будем пользоваться прежним разложением $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$. Члены первого порядка в диагональных элементах h_{ij} определяются формулами (5,10,5). На основании решения (5,10,2) нетрудно убедиться в том, что в элементах h_{i4} ($i \neq 4$) содержатся члены не ниже порядка $\frac{3}{2}$, а в элементах h_{ij} ($i, j \neq 4$) — не ниже второго. С этой

точностью указанные элементы, согласно решению Эйнштейна (5,10,2), равны:

$$\begin{aligned} h_{14} &= 4\Sigma m_s \dot{a}_s U_s; & h_{24} &= 4\Sigma m_s \dot{b}_s U_s; & h_{34} &= \Sigma m_s \dot{c}_s U_s; \\ h_{12} &= -4\Sigma m_s \dot{a}_s \dot{b}_s U_s; & h_{13} &= -4\Sigma m_s \dot{a}_s \dot{c}_s U_s; & h_{23} &= -4\Sigma m_s \dot{b}_s \dot{c}_s U_s. \end{aligned} \quad (5,11,3)$$

Для составления уравнений поля во втором приближении необходимо найти с соответствующей точностью компоненты тензора энергии-импульса.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{T}^{11} &= \Sigma m_s \dot{a}_s^2 \sigma_s; & \bar{T}^{12} &= \Sigma m_s \dot{a}_s \dot{b}_s \sigma_s; & \bar{T}^{13} &= \Sigma m_s \dot{a}_s \dot{c}_s \sigma_s; \\ \bar{T}^{14} &= \Sigma m_s \dot{a}_s \sigma_s; \\ \bar{T}^{22} &= \Sigma m_s \dot{b}_s^2 \sigma_s; & \bar{T}^{23} &= \Sigma m_s \dot{b}_s \dot{c}_s \sigma_s; & \bar{T}^{24} &= \Sigma m_s \dot{b}_s \sigma_s; \\ \bar{T}^{33} &= \Sigma m_s \dot{c}_s^2 \sigma_s; & \bar{T}^{34} &= \Sigma m_s \dot{c}_s \sigma_s; \\ \bar{T}^{44} &= \Sigma m_s \sigma_s \end{aligned} \quad (5,11,4)$$

и напишем искомые компоненты в виде $T^{ij} = \bar{T}^{ij} + S^{ij}$, где S^{ij} — поправки, которые должны быть определены в согласии с законом сохранения.

Три первые компоненты ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса

$$T^i{}_{/\alpha} = \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha T^{i\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^i T^{\alpha\beta},$$

если принять во внимание значения символов Кристоффеля, ограничиваясь членами первого порядка, выражаются формулами

$$T^i{}_{/\alpha} = \frac{\partial S^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \bar{T}^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x^i} \bar{T}^{44}.$$

Вычислим первую из этих компонент. Согласно (5,11,4), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}^{1\alpha}}{\partial x^\alpha} &= \Sigma m_s \dot{a}_s \left(\dot{a}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} + \dot{b}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial y} + \dot{c}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \right) + \\ &+ \Sigma m_s \ddot{a}_s \sigma_s = \Sigma m_s \ddot{a}_s \sigma_s, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} = \dot{a}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial a_s} + \dot{b}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial b_s} + \dot{c}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial c_s}$$

и $\frac{\partial \sigma_s}{\partial a_s} = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial x}$ и г. д.

Далее,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x} \bar{T}^{44} = -\rho \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$T_{/\alpha}^{1\alpha} = \frac{\partial S^{1\alpha}}{\partial x^\alpha} + \Sigma m_s \ddot{a}_s \sigma_s - \rho \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Аналогичными формулами выражаются вторая и третья компоненты дивергенции.

Четвертая компонента ковариантной дивергенции находится при помощи соотношения

$$T_{/\alpha}^{4\alpha} = \frac{\partial S^{4\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \bar{T}^{4\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{1}{2} h + h_{44} \right) \bar{T}^{4\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial t} \bar{T}^{44}$$

и оказывается равной

$$T_{/\alpha}^{4\alpha} = \frac{\partial S^{4\alpha}}{\partial x^\alpha} - \rho \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Таким образом, закон сохранения тензора энергии-импульса приводится в нашем случае к системе четырех уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^{1\alpha}}{\partial x^\alpha} &= \rho \frac{\partial U}{\partial x} - \Sigma m_s \ddot{a}_s \sigma_s; \\ \frac{\partial S^{2\alpha}}{\partial x^\alpha} &= \rho \frac{\partial U}{\partial y} - \Sigma m_s \ddot{b}_s \sigma_s; \\ \frac{\partial S^{3\alpha}}{\partial x^\alpha} &= \rho \frac{\partial U}{\partial z} - \Sigma m_s \ddot{c}_s \sigma_s; \\ \frac{\partial S^{4\alpha}}{\partial x^\alpha} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned} \tag{5,11,5}$$

Десять поправок S^{ij} , удовлетворяющих этой системе, можно выбрать различными способами. Положив $S^{12} = S^{13} = S^{23} = S^{44} = 0$, примем

$$\begin{aligned} S^{11} &= \Sigma m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \ddot{a}_s \right) dx; & S^{22} &= \Sigma m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \ddot{b}_s \right) dy; \\ S^{33} &= \Sigma m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \ddot{c}_s \right) dz; & S^{14} &= -\Sigma m_s \dot{a}_s \int \rho \frac{\partial U_s}{\partial x} dx; \\ S^{24} &= -\Sigma m_s \dot{b}_s \int \rho \frac{\partial U_s}{\partial y} dy; & S^{34} &= -\Sigma m_s \dot{c}_s \int \rho \frac{\partial U_s}{\partial z} dz. \end{aligned} \tag{5,11,6}$$

Эти формулы и соотношения (5,11,4) определяют контравариантные компоненты тензора энергии-импульса $T^{ij} = \bar{T}^{ij} + S^{ij}$ с нужной для наших целей точностью. Ковариантные

компоненты этого тензора легко вычислить по формулам

$$T_{ij} = (\delta_{ij}\delta_{jj} + \delta_{ii}h_{jj} + \delta_{jj}h_{ii})T^{ij},$$

с помощью которых с достаточной точностью получаем

$$T_{ij} = \bar{T}^{ij}; \quad T_{ii} = \bar{T}^{ii} + S^{ii}; \quad T_{i4} = -\bar{T}^{i4}; \quad T_{44} = \bar{T}^{44} - 4\rho U, \quad (5,11,7)$$

где i, j различные индексы, отличные от 4.

12. Уравнения поля во втором приближении. Рассматривая решение Эйнштейна, мы сохраняли в выражении тензора Риччи только линейные члены относительно поправок h_{ij} и их производных. Теперь такое представление недостаточно. Для составления уравнений поля во втором приближении необходимо аппроксимировать тензор Риччи с точностью до членов второго порядка относительно указанных величин.

Вспользуемся общей формулой для ковариантных компонент тензора Риччи (4,9,3). В соответствии с сигнатурой квадратической формы ОТО напомним эту формулу так:

$$R_{ij} = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha i}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - \Gamma_{ij}^{\alpha} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Простые, но несколько громоздкие вычисления, которые мы здесь не приводим, позволяют получить следующие выражения для компонент тензора Риччи с принятой точностью:

$$\begin{aligned} R_{ij} = & \frac{1}{2} \square h_{ij} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^j} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha i}}{\partial x^{\alpha}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha j}}{\partial x^{\alpha}} \right) \right] + \delta^{\alpha\alpha} \delta^{\beta\beta} \Gamma_{i\alpha, \beta} \Gamma_{j\beta, \alpha} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (h^{\alpha\beta} \Gamma_{ii, \beta}) - \\ & - \frac{1}{2} \delta^{\alpha\alpha} \Gamma_{i, \alpha} \frac{\partial h}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (H - \frac{1}{2} h^2), \end{aligned} \quad (5,12,1)$$

где $\Gamma_{ij, k}$ — символы Кристофеля первого рода, которые определяются соотношениями (4,3,4), $h^{ij} = \delta^{ij} \delta h_{ij}$, h имеет прежнее значение, а величина H задана равенством

$$\begin{aligned} H = & h_{11}(h_{22} + h_{33} - h_{44}) + h_{22}(h_{33} - h_{44}) - h_{33}h_{44} - \\ & - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{14}^2 + h_{24}^2 + h_{34}^2. \end{aligned}$$

Тензор Риччи должен быть вычислен с точностью до членов второго порядка относительно потенциала, причем компонентам скоростей и ускорений следует приписать порядки $\frac{1}{2}$ и 1 соответственно.

Применяя (5,12,1), в линейных членах, которые содержат величины h_{ij} , известные нам лишь в первом приближении, сохраним обо-

значение h_{ij} . В остальные линейные члены внесем (5,11,3). Члены второго порядка вычислим с помощью соотношений (5,10,5).

Найдем R_{11} . Согласно (5,12,1), в эту компоненту входит сумма

$$-\delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 h_{\alpha 1}}{\partial x \partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial x \partial z}$$

С помощью соотношений (5,11,3) получаем

$$\frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial x \partial z} = -4 \sum m_s \dot{a}_s \left(\dot{b}_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} + \dot{c}_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial z} \right).$$

Последний член этой суммы

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_{14}}{\partial x \partial t} &= 4 \sum m_s \ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + 4 \sum m_s \ddot{a}_s \left(\frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial a_s} \dot{a}_s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial b_s} \dot{b}_s + \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial c_s} \dot{c}_s \right) \end{aligned}$$

приводится к величине

$$4 \sum m_s \ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} - 4 \sum m_s \dot{a}_s \left(\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} \dot{a}_s + \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} \dot{b}_s + \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial z} \dot{c}_s \right),$$

так как, согласно определению функции U_s , имеем $\frac{\partial U_s}{\partial a_s} = -\frac{\partial U_s}{\partial x}$ и т. д.

Следовательно,

$$-\delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 h_{\alpha 1}}{\partial x \partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2} - 4 \sum m_s \ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + 4 \sum m_s \dot{a}_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}.$$

Принимая во внимание это равенство и вычисляя члены второго порядка с помощью (5,10,5), найдем

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2} \square h_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2} + 4 \sum m_s a_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} - \\ &- 4 \sum m_s \ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 4U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2(\text{grad } U)^2 + 8\pi\rho U. \end{aligned} \quad (5.12,2)$$

По аналогии легко написать выражения для R_{22} , R_{33} .

Положив $i = j = 4$, найдем последнюю из диагональных компонент тензора Риччи

$$R_{44} = \frac{1}{2} \square h_{44} + 2(\text{grad } U)^2 + 8\pi\rho U. \quad (5.12,3)$$

Из компонент, соответствующих различным индексам, отличающимся от четырех, приведем

$$R_{12} = \frac{1}{2} \square h_{12} + \frac{\partial^2}{2\partial x \partial y} (h + h_{11} + h_{22}) + 2 \sum m_s (\dot{a}_s^2 + \dot{b}_s^2) \cdot \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} - \\ - 2 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - 4U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \quad (5,12,4)$$

Аналогичными формулами определяются R_{23} , R_{31} .

При $i = 1, j = 4$ получаем

$$R_{14} = \frac{1}{2} \square h_{14} + \\ + \frac{\partial}{2\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h_{44}}{\partial t} + \frac{\partial h_{14}}{\partial x} + \frac{\partial h_{24}}{\partial y} + \frac{\partial h_{34}}{\partial z} \right). \quad (5,12,5)$$

Нетрудно составить аналогичные выражения для R_{24} , R_{34} .

Инвариант тензора Риччи в том же приближении вычисляется по формуле $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = (\delta^{\alpha\alpha} - h_{\alpha\alpha}) R_{\alpha\alpha}$.

$$R = \frac{1}{2} \square h - \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (h + h_{11}) - \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (h + h_{22}) - \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (h + h_{33}) - \\ - 4 \sum m_s \left(\dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \right) + \\ + 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) + 10 (\text{grad } U)^2 - 64\pi\rho U. \quad (5,12,6)$$

Теперь в нашем распоряжении имеются все величины, необходимые для составления уравнений поля в развернутой форме. Каждому из них припишем для удобства двузначный номер, отвечающий индексам i, j . Соответствующие алгебраические преобразования не представляют никаких трудностей. Опуская эти преобразования, напомним некоторые из уравнений, сохранив для тензора энергии-импульса обозначение (5,11,7).

Уравнение 11 имеет вид

$$\square \left(h_{11} + \frac{1}{2} h \right) + \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (h + 2h_{11}) - \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (h + 2h_{22}) - \\ - \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (h + 2h_{33}) - 4 \sum m_s \left(-\dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \right) + \\ + 4 \sum m_s \left(-\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 4 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - \\ - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6 (\text{grad } U)^2 - 32\pi\rho U = -16\pi (\bar{T}^{11} + S^{11}). \quad (5,12,7)$$

По аналогии легко написать уравнения 22 и 33.

Уравнение 44 получим в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \square \left(h_{44} - \frac{1}{2} h \right) + \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (h + 2h_{11}) + \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (h + 2h_{22}) + \\ & + \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (h + 2h_{33}) + 4 \sum m_s \left(\dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \right) - \\ & - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 6 (\text{grad } U)^2 = \\ & = -16\pi (\bar{T}^{44} + 2\rho U). \end{aligned} \quad (5,12,8)$$

Из трех уравнений с различными индексами, отличающимися от четырех, укажем уравнение 12:

$$\begin{aligned} & \square h_{12} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (h + h_{11} + h_{22}) + 4 \sum m_s (\dot{a}_s^2 + \dot{b}_s^2) \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} - \\ & - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \right) - 4 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - \\ & - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -16\pi \bar{T}_{12}. \end{aligned} \quad (5,12,9)$$

Остальные три уравнения отвечают $i \neq 4, j = 4$; из них напомним уравнение 14:

$$\square h_{14} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h_{14}}{\partial x} + \frac{\partial h_{24}}{\partial y} + \frac{\partial h_{34}}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) = 16\pi \bar{T}^{44}. \quad (5,12,10)$$

Всего имеется десять довольно сложных дифференциальных уравнений.

Искомые функции представим в следующем виде:

$$h_{ij} = \bar{h}_{ij} + k_{ij}, \quad (5,12,11)$$

подчинив \bar{h}_{ij} системе уравнений

$$\square \left(\bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \bar{h} \right) = -16\pi \delta_{ii} \delta_{jj} \bar{T}^{ij}, \quad (5,12,12)$$

где принято $\bar{h} = \delta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta}$.

Поправки k_{ij} должны удовлетворять системе десяти дифференциальных уравнений. Как и прежде, напомним четыре уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{22} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{11}) - \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{22}) - \\ & - \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{33}) - 4 \sum m_s \left(-\dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \right) + \\ & + 4 \sum m_s \left(-\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 4 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - \\ & - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6 (\text{grad } U)^2 - 32\pi \rho U = -16\pi S^{11}; \end{aligned} \quad (5,12,13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_{22} + k_{33}) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} + k_{11}) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{11} + k_{22}) + \\ & + \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{11}) + \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{22}) + \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{33}) + \\ & + \sum m_s \left(\dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \right) - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 6 (\text{grad } U)^2 = -32\pi\rho U; \quad (5,12,14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \Delta k_{12} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (k_{44} - k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\bar{h}_{44} - \bar{h}_{33}) + 4 \sum m_s (\dot{a}_s^2 + \dot{b}_s^2) \times \\ & \times \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \right) - 4 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0; \quad (5,12,15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \Delta k_{14} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial k_{14}}{\partial x} + \frac{\partial k_{24}}{\partial y} + \frac{\partial k_{34}}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{h}_{14}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}_{24}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{h}_{34}}{\partial z} + \frac{d\bar{h}}{dt} - \frac{\partial \bar{h}_{44}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5,12,16) \end{aligned}$$

Шесть из этих уравнений, которые здесь не приводятся, распадутся на группы по два, аналогичные написанным выше четырем уравнениям соответственно.

13. Определение величин \bar{h}_{ij} . Величины \bar{h}_{ij} удовлетворяют системе уравнений (5,12,12), решение которых имеет вид

$$\bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \bar{h} = -4\delta_{ij} \delta_{jl} \int \frac{1}{r'} |\bar{T}^{il}| dt'_{t-r'}, \quad (5,13,1)$$

где $dt' = dx' dy' dz'$, и интегрирование осуществляется по всему пространству. Выражение $|\bar{T}^{il}|_{t-r'}$ представляет собой значение \bar{T}_{il} в точке x', y', z' , взятое для момента $t - r'$. Переменная r' определяется соотношением

$$r'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

и в первом приближении равна расстоянию между элементом объема dt' , помещенным в точке x', y', z' , и точкой x, y, z , для которой ищутся значения \bar{h}_{ij} в момент времени t . Разность $t - r'$ (в системе CGS она равна $t - \frac{r'}{c}$, где c — скорость света) показывает, что \bar{T}^{ij} на метрический тензор влияет с запаздыванием, равным времени распространения света на расстояние r' . При этом для \bar{T}^{ij} с квадратической зависимостью от скоростей запаздыванием можно пренебречь, так как в выражении \bar{h}_{ij} учет запаздывания не изменит членов

уравнения до второго порядка включительно. В величинах \bar{T}^{i4} ($i = 1, \dots, 4$) запаздыванием пренебречь нельзя.

Положив в (5,13,1) $i = j = 1, \dots, 4$, получим

$$\bar{h}_{11} + \frac{1}{2} \bar{h} = -4 \sum m_s a_s^2 U_s; \quad \bar{h}_{22} + \frac{1}{2} \bar{h} = -4 \sum m_s b_s^2 U_s;$$

$$\bar{h}_{33} + \frac{1}{2} \bar{h} = -4 \sum m_s c_s^2 U_s; \quad \bar{h}_{44} - \frac{1}{2} \bar{h} = \\ = -4 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau',$$

где через $\sigma'_s(t-r')$ обозначено σ'_s , в котором a_s, b_s, c_s взяты для момента $t-r'$.

Комбинируя эти равенства, имеем

$$\bar{h} = 4 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' - 4 \sum m_s v_s^2 U_s,$$

где принято $v_s^2 = a_s^2 + b_s^2 + c_s^2$.

Следовательно,

$$\bar{h}_{11} = -2 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' + 2 \sum m_s (v_s^2 - 2a_s^2) U_s;$$

$$\bar{h}_{22} = -2 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' + 2 \sum m_s (v_s^2 - 2b_s^2) U_s; \quad (5,13,2)$$

$$\bar{h}_{33} = -2 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' + 2 \sum m_s (v_s^2 - 2c_s^2) U_s;$$

$$\bar{h}_{44} = -2 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' - 2 \sum m_s v_s^2 U_s.$$

Для дальнейшего удобно преобразовать интеграл, входящий в написанные формулы.

Введем новые переменные u, v, w при помощи соотношений

$$x' - a_s(t-r') = u; \quad y' - b_s(t-r') = v; \quad z' - c_s(t-r') = w.$$

В этих переменных функция $\sigma'_s(t-r')$ имеет вид $\sigma(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \lambda)$. Якобиан преобразования представляет собой определитель, обратный определителю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x'} & \frac{\partial v}{\partial x'} & \frac{\partial w}{\partial x'} \\ \frac{\partial u}{\partial y'} & \frac{\partial v}{\partial y'} & \frac{\partial w}{\partial y'} \\ \frac{\partial u}{\partial z'} & \frac{\partial v}{\partial z'} & \frac{\partial w}{\partial z'} \end{vmatrix}.$$

Вычисление дает для якобиана выражение

$$I_s = \left(1 + \frac{da_s}{d\theta} \frac{\partial r'}{\partial x'} + \frac{db_s}{d\theta} \frac{\partial r'}{\partial y'} + \frac{dc_s}{d\theta} \frac{\partial r'}{\partial z'} \right)^{-1}; \quad \theta = t - r',$$

которое при $u = v = w = 0$ приводится к величине

$$I_s = \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1},$$

где r_s определяется соотношением

$$r_s^2 = [x - a_s(\theta)]^2 + [y - b_s(\theta)]^2 + [z - c_s(\theta)]^2; \quad \theta = t - r_s. \quad (5,13,3)$$

В результате указанного преобразования интеграл, содержащийся в (5,13,2), принимает вид

$$\iiint \frac{1}{r'} \sigma(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \lambda) I_s du dv dw$$

и при достаточно большом λ может быть заменен следующим:

$$\frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} \iiint \sigma(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \lambda) du dv dw.$$

Если снова заменить переменные

$$u = \alpha \sin \psi \cos \varphi; \quad v = \alpha \sin \psi \sin \varphi; \quad w = \alpha \cos \psi$$

и выполнить интегрирование по Ψ и φ , то получится

$$\frac{4\pi}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} \int_0^\infty \sigma(\alpha, \lambda) \alpha^2 d\alpha,$$

или, согласно определению функции σ ,

$$\frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1}.$$

Таким образом, при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{h}_{11} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2a_s^2); \\ \bar{h}_{22} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2b_s^2); \\ \bar{h}_{33} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2c_s^2); \\ \bar{h}_{44} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \end{aligned} \quad (5,13,4)$$

В первых членах правых частей этих равенств величина r_s определяется соотношением (5,13,3) с учетом запаздывания. Во вто-

рых членах, пренебрегая запаздыванием, можно принять

$$r_s^2 = [x - a_s(t)]^2 + [y - b_s(t)]^2 + [z - c_s(t)]^2. \quad (5,13,5)$$

Остается определить \bar{h}_{ij} с различными индексами.

Положив в (5,13,1) $i = 1, j = 4$, найдем

$$\bar{h}_{14} = 4 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t - r') \dot{a}_s(t - r') dt'.$$

Если преобразовать переменные как прежде и положить затем $\lambda \rightarrow \infty$, то получится

$$\bar{h}_{14} = 4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s(\theta)}{r_s(\theta)} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta}\right)^{-1}. \quad (5,13,6)$$

Мы не приводим здесь формулы для \bar{h}_{24} и \bar{h}_{34} ; их легко написать по аналогии.

Допустим, что индексы i, j различны и отличаются от четырех. Принимая $i = 1, j = 2$, найдем

$$\bar{h}_{12} = -4 \sum m_s \dot{a}_s \dot{b}_s U_s,$$

или, после перехода к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$,

$$\bar{h}_{12} = -4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s \dot{b}_s}{r_s}, \quad (5,13,7)$$

где r_s определяется формулой (5,13,5).

Аналогичные выражения можно написать для величин \bar{h}_{23} и \bar{h}_{31} .

Полезно преобразовать найденные значения \bar{h}_{ij} , исключив из них r_s , определяемые с учетом запаздывания соотношениями (5,13,3), и введя величины, отвечающие положениям материальных точек в данный момент времени, согласно (5,13,5).

Выполним разложение

$$\frac{1}{r_s(\theta)} \left(1 + \frac{\partial r_s(\theta)}{\partial \theta}\right)^{-1} = \frac{1}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\}.$$

Выражения для диагональных элементов примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{11} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2\dot{a}_s^2); \\ \bar{h}_{22} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2\dot{b}_s^2); \end{aligned} \quad (5,13,8)$$

$$\bar{h}_{33} = -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2\dot{c}_s^2);$$

$$\bar{h}_{44} = -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{v_s}.$$

Величина \bar{h} , как легко убедиться, такова:

$$\bar{h} = 4 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t} \right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2} \right\} - 4 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \quad (5,13,9)$$

Остальные элементы с точностью до членов второго порядка включительно определяются формулами вида

$$\bar{h}_{14} = 4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s}{r_s}; \quad \bar{h}_{12} = -4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s \dot{b}_s}{r_s}. \quad (5,13,10)$$

14. Определение величин k_{ij} . Для завершения интегрирования уравнений поля необходимо найти поправки k_{ij} , удовлетворяющие системе уравнений, составленной в п. 12.

Рассмотрим прежде всего уравнения вида (5,12,16), содержащие k_{i4} . Воспользовавшись значениями (5,13,8)—(5,13,10), легко убедиться в том, что в нашем приближении эти уравнения сводятся к соотношениям

$$-\Delta k_{i4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial k_{14}}{\partial x} + \frac{\partial k_{24}}{\partial y} + \frac{\partial k_{34}}{\partial z} \right) = 0 \text{ и т. д.}$$

Поскольку указанных поправок в других уравнениях нет, можно положить $k_{14} = k_{24} = k_{34} = 0$. Примем далее $k_{12} = k_{23} = k_{31} = 0$ и покажем, что остальные уравнения можно удовлетворить с помощью четырех величин k_{ii} .

Найденное ранее решение (5,13,2) позволяет переписать уравнение (5,12,13) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{22} - k_{44}) + 4 \sum m_s \left(-\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 4 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6(\text{grad } U)^2 - \\ & - 32\pi\rho U = -16\pi S^{11}. \end{aligned} \quad (5,14,1)$$

Вместо (5,12,14) имеем теперь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_{22} + k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} + k_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{11} + k_{22}) + \\ & + 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) + 6(\text{grad } U)^2 = 32\pi\rho U. \end{aligned} \quad (5,14,2)$$

Уравнение (5,12,15) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (k_{44} - k_{33}) - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \right) - \\ & - 4 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (5,14,3)$$

Легко видеть, что решения трех уравнений последнего типа удовлетворяют уравнениям вида (5,14,1) и (5,14,2).

Действительно, из (5,14,3) следует

$$k_{33} - k_{44} = -4U^2 + 4 \iint \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} dx dy - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \int U_s dx + \ddot{b}_s \int U_s dy \right). \quad (5,14,4)$$

Составив аналогично выражение для $k_{22} - k_{44}$, образуем сумму

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{22} - k_{44})$$

и внесем ее в (5,14,1). После необходимых преобразований с учетом уравнений Пуассона для функций U_s , U получим

$$S^{11} = \sum m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \ddot{a}_s \right) dx,$$

т. е. значение поправки тензора энергии-импульса, найденное ранее в согласии с законом сохранения этого тензора. Подобным же образом убеждаемся в выполнимости двух других уравнений типа (5,14,1).

С помощью соотношений вида (5,14,4) выразим k_{11} , k_{22} , k_{33} через k_{44} и составим сумму

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_{22} + k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} + k_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{11} + k_{22}).$$

Внеся ее в (5,14,2) и выполнив необходимые упрощения, получим уравнение

$$\Delta (k_{44} - 2U^2) = 8\pi \sum m_s \left\{ \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \ddot{a}_s \right) dx + \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \ddot{b}_s \right) dy + \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \ddot{c}_s \right) dz \right\},$$

которое служит для определения k_{44} .

При достаточно большом λ это уравнение можно написать так:

$$\Delta (k_{44} - 2U^2) = 8\pi \sum m_s \left\{ \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_s - \ddot{a}_s \right] \int \sigma_s dx + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_s - \ddot{b}_s \right] \int \sigma_s dy + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_s - \ddot{c}_s \right] \int \sigma_s dz \right\}. \quad (5,14,5)$$

Решение его по методу Пуассона содержит интегралы вида

$$\iiint \frac{1}{r'} \int \sigma'_s dx' d\tau',$$

взятые по всему пространству. Они расходятся, показывая, что при произвольных \ddot{a}_s , \ddot{b}_s , \ddot{c}_s уравнения поля не имеют решения. Для существования решения необходимо, чтобы коэффициенты при инте-

галах в (5,14,5) тождественно исчезали, т. е. чтобы движение точечных масс происходило по закону Ньютона

$$a_s = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_s; \quad \ddot{b}_s = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_s; \quad \ddot{c}_s = \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_s. \quad (5,14,6)$$

Этот вывод имеет в ОТО фундаментальное значение. Если ньютоново уравнение поля гравитации, т. е. уравнение Пуассона, допускает решение при любом распределении масс, в частности при произвольных движениях тел, создающих поле, то уравнения поля ОТО имеют решение только при определенном движении этих тел. Закон движения в ОТО можно, таким образом, рассматривать как условие интегрируемости уравнений поля.

Закон Ньютона (5,14,6) получен как условие разрешимости уравнений поля во втором приближении. Интегрирование этих уравнений в более высоких приближениях позволяет уточнить закон движения, найдя соответствующие релятивистские поправки к его ньютоновой форме.

Принципиальная возможность объединения закона движения с уравнениями поля впервые рассматривалась в 1927 г. в работе Эйнштейна и Громмера [20] и в последующей статье Эйнштейна [21]. Однако определенное решение вопроса было получено только в 1938 г. в обширном исследовании Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [22], в котором выполнено приближенное интегрирование уравнений поля для системы точечных масс. В результате весьма сложных вычислений было показано, что требование разрешимости уравнений поля в достаточно высоком приближении определяет закон движения точечных масс в виде уравнений Ньютона с релятивистскими поправками.

Почти одновременно В. А. Фоком уравнения поля ОТО были применены к системе тел, имеющих конечные плотности и протяженности [23]. В этой работе интегрирование выполнено с точностью до членов второго порядка, и в качестве необходимого условия разрешимости уравнений поля получен закон (5,14,6). Этот результат впоследствии был подтвержден другими исследователями. Изложенный в последних параграфах метод принадлежит автору [24].

Возвращаемся к определению величин k_{ij} . Уравнение (5,13,5) при условии (5,13,6) принимает вид $\Delta(k_{44} - 2U^2) = 0$ и допускает решение $k_{44} - 2U^2 = \text{const}$. Поскольку на бесконечности поправка k_{44} должна исчезать, находим

$$k_{44} = 2 \left(\sum \frac{m_s}{r_s} \right)^2. \quad (5,14,7)$$

Теперь мы имеем возможность завершить интегрирование уравнений поля в принятом приближении. Поправки k_{11} , k_{22} , k_{33} определяются при помощи соотношений вида (5,14,4), после чего полные значения компонент метрического тензора находятся по формулам

$g_{ii} = \delta_{ij} + \bar{h}_{ij} + k_{ij}$. Так, для последней компоненты этого тензора можно написать

$$g_{44} = 1 - 2 \sum \frac{m_s}{r_s(\theta)} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta}\right)^{-1} + 2 \left(\sum \frac{m_s}{r_s}\right)^2 - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}, \quad (5,14,8)$$

или, если во всех членах перейти к обозначению (5,13,5),

$$g_{44} = 1 - 2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2 \left(\sum \frac{m_s}{r_s}\right)^2 - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \quad (5,14,9)$$

Легко составить также выражения для остальных компонент метрического тензора.

15. Скорость передачи гравитации. В первом приближении скорость распространения гравитации в ОТО определяется рассмотренным выше решением Эйнштейна (5,13,1), позволяющим найти метрический тензор путем интегрирования тензора энергии-импульса. При вычислении системы поправок h_{ij} в точке x, y, z в момент времени t необходимо, как сказано, в каждой точке x', y', z' , находящейся на расстоянии r' от заданной точки, принять значения компонент тензора энергии-импульса для более раннего момента $t - r'$ (в системе CGS для момента $t - \frac{r'}{c}$). Это значит, что тензор энергии-импульса определяет метрику пространства-времени с некоторым запаздыванием, равным времени распространения света. Таким образом, вместо гравитационного дальнего действия, присущего теории Ньютона, в ОТО в данном приближении содержится принцип конечной скорости гравитации, равной скорости света.

Следует подчеркнуть, что этот вывод является результатом приближенного интегрирования уравнений поля. В общем виде вопрос о скорости распространения гравитации требует соответствующего анализа точной формы уравнений поля; он оказывается очень сложным и принадлежит к числу еще нерешенных задач ОТО.

В главе II мы подробно рассмотрели трудности, возникавшие в небесной механике при попытках отказа от гравитационного дальнего действия в теории Ньютона. Упомянул также основной результат анализа Пуанкаре, доказавшего, что, с точки зрения СТО, отказываясь от принципа дальнего действия, необходимо одновременно изменить форму закона тяготения, и притом таким образом, что результирующие эффекты будут иметь порядок $\frac{v^4}{c^2}$, тогда как возмущения порядка $\frac{v}{c}$ исчезнут. Теперь мы можем вернуться к обсуждению этого вопроса с точки зрения ОТО.

12*

Рассмотрим движение частицы в поле тяготения системы тел с массами m_s , движущихся по законам $a_s(t)$, $b_s(t)$, $c_s(t)$. Движение частицы происходит по принципу геодезической линии, уравнения которой имеют вид (4,7,6). Положив, что x^σ при $\sigma = 1, 2, 3$ являются пространственными координатами x, y, z соответственно, а x^4 — временем t , можно написать эти уравнения в форме

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^\sigma}{dt} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0$$

Возмущения Лапласа имеют, как мы видели, порядок $\frac{3}{2}$ и определяются членами, содержащими произведения потенциала на составляющие скоростей. Поскольку символы Кристофеля имеют порядок не ниже первого, в нашем приближении уравнения геодезической линии следует писать в виде

$$-\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0.$$

Развернутое выражение символа Кристофеля

$$\Gamma_{44}^\sigma = \frac{1}{2} \delta^{\sigma\sigma} \left(\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma} \right)$$

и решение (5,13,9) показывают, что с точностью до членов порядка $\frac{3}{2}$ включительно эти уравнения сводятся к следующим:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(-\frac{1}{2} g_{44} \right). \quad (5,15,1)$$

Входящая сюда последняя компонента метрического тензора определяется формулой (5,14,8).

С помощью разложения

$$\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} = 1 - \frac{\partial r_s}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^2$$

представим второй член формулы (5,14,8) в виде

$$-2 \sum \frac{m_s}{r_s(\theta)} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s(\theta)} \cdot \frac{\partial r_s}{\partial \theta} - 2 \sum \frac{m_s}{r_s(\theta)} \left(\frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^2.$$

В двух последних суммах этого выражения, согласно (5,13,3) и (5,13,5), можно принять

$$\frac{1}{r_s(\theta)} = \frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial t} \right); \quad \frac{\partial r_s}{\partial \theta} = \frac{\partial r_s}{\partial t} - r_s \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}.$$

Выполнив эти подстановки и необходимые вычисления, получим

$$g_{44} = 1 - 2 \sum \frac{m_s}{r_s(\theta)} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(\frac{\partial r_s}{\partial t} - r_s \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2} \right) + \\ + 2 \left(\sum \frac{m_s}{r_s} \right)^2 - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{v_s}. \quad (5,15,2)$$

Второй член соотношения (5, 15, 2) содержит ньютонов потенциал с учетом запаздывания; третий и последний выражают зависимость метрического тензора от движения масс, создающих поле тяготения. С точностью до величин порядка $\frac{3}{2}$ включительно имеем

$$g_{44} = 1 - 2 \sum \frac{m_s}{r_s(\theta)} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial t}. \quad (5,15,3)$$

И в данном приближении, кроме запаздывания, как видим, необходимо учитывать зависимость поля от движения масс. Внося в (5,15,3) соотношение

$$\frac{1}{r_s(\theta)} = \frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial t} \right),$$

находим $g_{44} = 1 - 2\varphi$, где φ — обычный ньютонов потенциал, вычисленный без учета запаздывания. Принцип геодезической линии (5,15,1) переходит при этом в закон движения Ньютона

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Таким образом, и с точки зрения ОТО эффект запаздывающего потенциала в рассматриваемом приближении компенсируется зависимостью поля гравитации от движения создающих его масс. Как указывал Пуанкаре, новые эффекты, выражающие отступление от закона движения Ньютона, могут иметь порядок не ниже второго.

16. Внешнее решение для однородного вращающегося шара. В механике Ньютона поле тяготения однородного шара не зависит от его вращения вокруг диаметра и удовлетворяет условию сферической симметрии. В ОТО вращение шара нарушает центральную симметрию поля. Внешнее поле гравитации сферического небесного тела обладает симметрией относительно оси вращения и зависит не только от массы, но также от угловой скорости и радиуса тела.

Найдем внешнее решение уравнений поля для однородного шара радиуса R , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω [25]. Ось Oz системы координат направим вдоль оси вращения тела, плоскость xy совместим с плоскостью его экватора. Принимая обычное разложение $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, воспользуемся решением Эйнштейна. Имея в виду последующее приложение, величину h_{44} будем

искать с точностью до членов второго порядка включительно, тогда как в остальных h_{ij} сохраним только члены первого порядка. Член второго порядка в h_{44} найдем без учета вращения, поскольку при обычных угловых скоростях небесных тел оно вносит в этот член пренебрежимую поправку.

Согласно решению Эйнштейна (5,10,8), величины h_{ij} определяются формулами

$$h_{ij} = -4 \int \frac{1}{r'} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} T \right) d\tau. \quad (5,16,1)$$

Знак запаздывания опущен, так как при сделанных предположениях поле тензора энергии-импульса, а следовательно, и поле метрического тензора стационарны. Через r' обозначено расстояние внешней точки x, y, z от элемента объема $d\tau$, помещенного во внутренней точке x', y', z' . Интегрируем по объему тела.

Обозначим через $\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$ составляющие скорости элемента вещества шара. Ковариантные компоненты тензора энергии-импульса с достаточной для наших целей точностью определяются формулами

$$\begin{aligned} T_{11} &= \rho \dot{x}'^2; & T_{12} &= \rho \dot{x}' \dot{y}'; & T_{13} &= 0; & T_{14} &= \rho \dot{x}'; \\ T_{22} &= \rho \dot{y}'^2; & T_{23} &= 0; & T_{24} &= \rho \dot{y}'; \\ T_{33} &= 0; & T_{34} &= 0; \\ T_{44} &= \rho. \end{aligned} \quad (5,16,2)$$

Инвариант этого тензора $T = -\rho \dot{x}'^2 - \rho \dot{y}'^2 + \rho$.

Чтобы воспользоваться решением (5,16,1), необходимо вычислить интегралы

$$\int \frac{1}{r'} \rho d\tau; \quad \int \frac{1}{r'} \rho \dot{x}' d\tau; \quad \int \frac{1}{r'} \rho \dot{y}' d\tau; \quad \int \frac{1}{r'} \rho \dot{x}'^2 d\tau; \quad \rho \int \frac{1}{r'} \rho \dot{y}'^2 d\tau. \quad (5,16,3)$$

Введем сферические координаты $\alpha, \vartheta, \varphi$ элемента объема $d\tau$, расположенного внутри шара. Пусть далее $r, \vartheta_0, \varphi_0$ — сферические координаты внешней точки M (рис. 14).

Составляющие скорости элемента $d\tau$

$$\dot{x}' = -a\omega \sin \vartheta \sin \varphi; \quad \dot{y}' = a\omega \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Выразим их через ϑ и угол ψ , образованный плоскостями zr и ar (рис. 15). С этой целью воспользуемся соотношениями

$$\sin \vartheta \sin \varphi = \sin \vartheta \sin \varphi_0 \cos \alpha - \sin \vartheta \cos \varphi_0 \sin \alpha;$$

$$\sin \vartheta \cos \varphi = \sin \vartheta \cos \varphi_0 \cos \alpha + \sin \vartheta \sin \varphi_0 \sin \alpha,$$

которые непосредственно вытекают из условия $\varphi = \varphi_0 - \alpha$.

В сферическом треугольнике $ar\zeta$ имеем

$$\sin \vartheta \sin \alpha = \sin \theta \sin \psi;$$

$$\sin \vartheta \cos \alpha = \sin \vartheta_0 \cos \theta - \cos \vartheta_0 \sin \theta \cos \psi.$$

Внося эти значения в предыдущие формулы, получим после очевидных преобразований

$$\dot{x}' = a\omega (\cos \vartheta_0 \sin \varphi_0 \sin \theta \cos \psi + \cos \varphi_0 \sin \theta \sin \psi - \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \cos \theta); \quad (5,16,4)$$

$$\dot{y}' = a\omega (\sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 \cos \theta + \sin \varphi_0 \sin \theta \sin \psi - \cos \vartheta_0 \cos \varphi_0 \sin \theta \cos \psi).$$

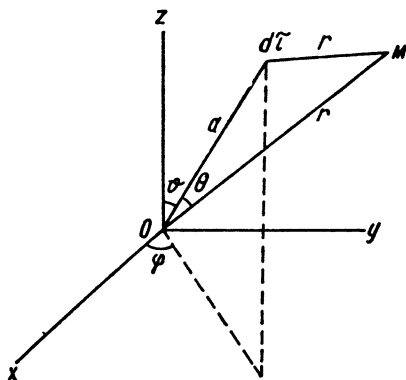


Рис. 14.

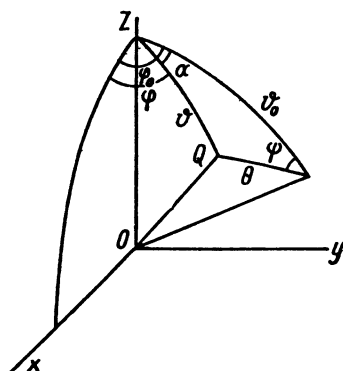


Рис. 15.

Переходим к вычислению интегралов (5,16,3). В переменных a, θ, ψ элемент объема $d\tau = a^2 \sin \theta da d\theta d\psi$. Поэтому первый интеграл

$$I_1 = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 \sin \theta da d\theta d\psi}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{1/2}} = \frac{m}{r},$$

где m — выраженная в релятивистских единицах масса шара.

Второй интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} I_2 &= \omega \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^3}{r'} (\cos \vartheta_0 \sin \varphi_0 \sin \theta \cos \psi + \cos \varphi_0 \sin \theta \sin \psi - \\ &\quad - \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \cos \theta) \sin \theta da d\theta d\psi = \\ &= -2\pi\omega \rho \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \int_0^R a^3 \int_0^\pi \frac{1}{r'} \sin \theta \cos \theta d\theta da. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование, получим

$$I_2 = -\frac{1}{5} \omega m R^2 \frac{x}{r^3}.$$

Подобным же образом находится третий интеграл

$$I_3 = \frac{1}{5} m \omega R^2 \frac{y}{r^3}.$$

Четвертый интеграл

$$I_4 = \omega^2 \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^4}{r'} (\cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin \theta \cos \psi + \cos \varphi_0 \sin \theta \sin \psi - \\ - \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta d\varphi da$$

требует более продолжительных преобразований. Выполнив их, найдем

$$I_4 = \frac{m\omega^2 R^2}{5r} \left(1 - \frac{R^2}{7r^2} + \frac{3R^2 y^2}{7r^4} \right).$$

Последний из перечисленных интегралов, аналогичный предыдущему, равен

$$I_5 = \frac{m\omega^2 R^2}{5r} \left(1 - \frac{R^2}{7r^2} + \frac{3R^2 x^2}{7r^4} \right).$$

Применяя решение (5,16,1) к трем первым диагональным элементам, которые мы условились определить лишь с точностью до величин первого порядка, имеем $h_{11} = h_{22} = h_{33} = -2I_1$. Смешанные элементы вида h_{i4} находятся по формулам $h_{14} = -4J_2$, $h_{24} = -4J_3$. Последний элемент, согласно (5,16,1), равен $h_{44} = -2I_1 - 2I_4 - 2I_5$. Напомним, что эту величину требуется найти с точностью до члена второго порядка относительно потенциала, для чего решение (5,16,1) недостаточно. Однако нет необходимости составлять уравнения поля с сохранением членов второго порядка относительно величин h_{ij} ; для введения указанной поправки в h_{44} можно воспользоваться полученным выше решением уравнений поля для системы точечных масс.

С принятой точностью внешнее решение уравнений поля для однородного вращающегося шара определяется формулами

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = -\frac{2m}{r}; \quad h_{14} = \frac{4}{5} m \omega R^2 \frac{x}{r^3}; \\ h_{24} = -\frac{4}{5} m \omega R^2 \frac{y}{r^3}; \quad h_{44} = -\frac{2m}{r} + \frac{2m^2}{r^3} - \\ - \frac{2m\omega^2 R^2}{5r} \left(2 + \frac{R^2}{7r^2} - \frac{3R^2 z^2}{7r^4} \right). \quad (5,16,5)$$

17. Поле тяжести в ОТО. В механике Ньютона полем тяжести называют однородное гравитационное поле, обладающее во всех точках одинаковым градиентом потенциала. Свободная материальная точка при соответствующем выборе координат движется в таком поле по закону

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g, \quad (5,17,1)$$

где g — постоянное ускорение, являющееся основной характеристикой поля.

В механике Ньютона постоянное поле тяжести можно осуществить двумя различными способами. Один из них состоит во введении системы координат, движущейся с постоянным ускорением относительно инерциальной системы отсчета. Свободная частица, отнесенная к таким координатам, движется по закону (5,17,1).

Во втором способе поле тяжести является полем гравитации бесконечной материальной плоскости с постоянной поверхностной плотностью.

Рассмотрим бесконечно тонкое материальное кольцо радиуса r и ширины dr . Элемент кольца обладает массой $\sigma r dr d\phi$ и создает в точке M напряженность, направленную вдоль линии MA :

$$\frac{\gamma \sigma r dr d\phi}{r^2 + z^2},$$

где σ — поверхностная плотность. Умножая это выражение на отношение $\frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$, найдем величину составляющей напряженности в направлении MO . Поэтому напряженность, обусловленная кольцом, равна $\frac{2\pi\gamma\sigma r z dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$.

Выполнив интегрирование, получим

$$g = 2\pi\gamma\sigma z \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi\gamma\sigma.$$

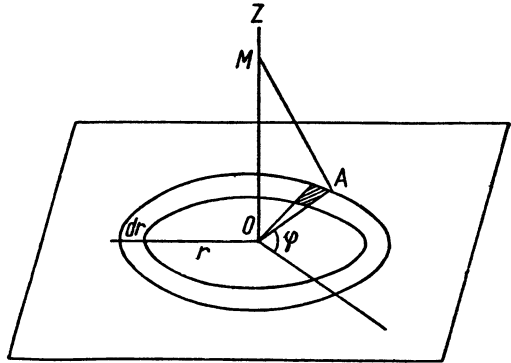


Рис. 16.

Это показывает, что материальная плоскость с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{g}{2\pi\gamma}$ создает однородное поле с заданным ускорением g .

Естественно спросить, можно ли сохранить понятие однородного поля тяжести в ОТО.

Будем искать решение уравнений поля Эйнштейна в форме

$$ds^2 = -A dx^2 - B dy^2 - C dz^2 + D dt^2, \quad (5,17,2)$$

где A, B, C, D — положительные функции координаты z .

Составим выражения для компонент тензора Риччи.

В случае квадратической формы (5,17,2) отличными от нуля являются следующие символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^3 = -\frac{A'}{2C}; \quad \Gamma_{22}^3 = -\frac{B'}{2C}; \quad \Gamma_{33}^3 = \frac{C'}{2C}; \quad \Gamma_{44}^3 = \frac{D'}{2C};$$

$$\Gamma_{13}^1 = \frac{A'}{2A}; \quad \Gamma_{23}^2 = \frac{B'}{2B}; \quad \Gamma_{43}^4 = \frac{D'}{2D}.$$

Входящая в выражение тензора Риччи сумма $\Gamma_{i\alpha}^\alpha$ при $i = 3$ определяется, как легко убедиться, формулой

$$\Gamma_{3\alpha}^\alpha = \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D}.$$

При других значениях индекса i эта сумма тождественно равна нулю.

С помощью написанных соотношений находим диагональные компоненты тензора Риччи

$$R_{11} = \frac{A''}{2C} + \frac{A'}{4C} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} + \frac{D'}{D} \right);$$

$$R_{22} = \frac{B''}{2C} + \frac{B'}{4C} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} + \frac{D'}{D} \right);$$

$$R_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{D''}{D} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{A'^2}{A^2} + \frac{B'^2}{B^2} + \frac{D'^2}{D^2} \right) - \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{A'C'}{AC} + \frac{B'C'}{BC} + \frac{C'D'}{CD} \right);$$

$$R_{44} = -\frac{D''}{2C} - \frac{D'}{4C} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} - \frac{D'}{D} \right).$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно исчезают.

Система уравнений поля сводится в рассматриваемом случае к четырем уравнениям вида $R_{ii} = 0$. Уравнение $R_{33} = 0$ значительно упрощается, если внести в него производные A'' , B'' , D'' из трех других уравнений. Кроме того, ввиду равноправности осей x , y , ориентированных перпендикулярно полю, можно положить $A = B$.

Выполнив необходимые преобразования, получим систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{A'}{A} - \frac{A'C'}{AC} + \frac{A'}{A} \left(\frac{2A'}{A} + \frac{D'}{D} \right) \right) &= 0; \\ 2 \left(\frac{D'}{D} \right)' - \frac{C'D'}{CD} + \frac{D'}{D} \left(\frac{2A'}{A} + \frac{D'}{D} \right) &= 0; \\ \frac{A'}{A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{2D'}{D} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5,17,3)$$

Согласно последнему уравнению, здесь возможны случаи $A' = 0$ и $\frac{A'}{A} + \frac{2D'}{D} = 0$.

В первом из них можно принять $A = 1$, так как функции A, C, D находятся с точностью до постоянных множителей, поскольку последние с помощью соответствующих преобразований масштабов приводятся к единицам. Второе уравнение системы принимает следующий вид:

$$\left(\frac{D'}{D} \right)' - \frac{1}{2} \frac{C'D'}{CD} + \frac{1}{2} \frac{D'^2}{D^2} = 0$$

и дает $C = aD^{-1}D'^2$, где a — постоянная интегрирования, которую мы оставим пока неопределенной.

Во втором случае можно положить $A = D^{-2}$. Два первые уравнения системы приводятся при этом к одному

$$\left(\frac{D'}{D} \right)' - \frac{1}{2} \frac{C'D'}{CD} - \frac{3}{2} \frac{D'^2}{D^2} = 0$$

и дают $C = bD^{-5}D'^2$, где b — новая постоянная, значение которой будет выбрано позднее.

Итак, система уравнений поля (5,17,3) имеет два решения:

$$A = 1, \quad C = aD^{-1}D'^2; \quad (5,17,4)$$

$$A = D^{-2}; \quad C = bD^{-5}D'^2. \quad (5,17,5)$$

Функция D может быть задана независимо, поскольку два первых уравнения системы (5,17,3) сводятся к одному. Выбор следует выполнить так, чтобы в первом приближении обеспечить переход к закону движения (5,17,1).

Свободное движение частицы определяется принципом четырехмерной геодезической линии. Рассматривая пространственные коор-

динаты x^σ в функции времени $x^4 = t$, уравнения этой линии, согласно (4,7,6), можно написать в виде

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^\sigma}{dt} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0.$$

Используя приведенные значения символов Кристофеля, при $\sigma = 1$ получим уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{A'}{A} - \frac{D'}{D} \right) \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} = 0,$$

интеграл которого $\frac{dx}{dt} = CA^{-1}D$ показывает, что при свободном падении, когда в начальный момент скорость частицы равнялась нулю, должно быть вообще $x = \text{const}$. Такой же особенностью обладает движение в направлении оси y .

Положим $\sigma = 3$ и допустим, что указанное начальное условие выполнено. Движение вдоль поля определяется в этом случае уравнением

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{C'}{2C} - \frac{D'}{D} \right) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{D'}{2C} = 0.$$

В ньютоновом приближении член, зависящий от скорости, должен быть опущен. Поэтому для перехода к закону падения Галилея (5,17,1) необходимо принять условие $D' = 2gC$, которым и определяется функция D .

Принимая для постоянных интегрирования a , b значение $\frac{1}{4} g^2$, найдем $D = e^{2gz}$ и $D = (1 - 8gz)^{-\frac{1}{4}}$, соответственно (5,17,4) и (5,17,5).

При таком выборе функции D решения уравнений поля имеют вид

$$A = 1; \quad C = e^{2gz}; \quad D = e^{2gz}; \quad (5,17,6)$$

$$A = (1 - 8gz)^{\frac{1}{2}}; \quad C = (1 - 8gz)^{-\frac{5}{4}}; \quad D = (1 - 8gz)^{-\frac{1}{4}}. \quad (5,17,7)$$

Эти решения являются, по-видимому, простейшими релятивистскими обобщениями понятия однородного поля тяжести механики Ньютона.

Напомним, что в этих формулах используются релятивистские единицы измерений. Если от этих единиц перейти к системе CGS, то вместо g следует писать $\frac{g}{c^2}$, где c — постоянная скорости света. Функцию D необходимо при этом снабдить множителем c^2 .

Полезно также подчеркнуть, что оба решения уравнений поля обеспечивают переход к закону падения (5,17,1) только в первом

приближении, тогда как точная форма релятивистских уравнений движения отличается от этого закона.

Как указывалось в главе IV, необходимым и достаточным условием вырождения римановой геометрии в евклидову является исчезновение тензора кривизны Римана — Кристоффеля. В общем случае для четырехмерного континуума число существенных компонент тензора кривизны, которые должны быть заданы независимо, равно 20; остальные компоненты можно получить при помощи известных алгебраических свойств этого тензора.

Прямое вычисление показывает, что в нашем случае отличаться от нуля могут только следующие существенные компоненты:

$$\begin{aligned} R_{12,1}^2 &= -\frac{A'^2}{4AC}; & R_{13,1}^3 &= R_{23,2}^3 = -\frac{A''}{2C} + \frac{A'^2}{4AC} + \frac{A'C'}{4C^2}; \\ R_{14,1}^4 &= R_{24,2}^4 = -\frac{A'D'}{4CD}; & R_{34,3}^4 &= -\frac{D''}{2C} + \frac{D'^2}{4D^2} + \frac{C'D'}{4CD}. \end{aligned} \quad (5,17,8)$$

Остальные компоненты тождественно равны нулю.

Соотношение (5,17,4) дает $R_{ij,k}^l = 0$, показывая, что это решение отвечает псевдоевклидовой метрике пространства-времени и может быть получено из квадратической формы Минковского при помощи соответствующего преобразования координат.

Для (5,17,5) компоненты тензора кривизны (5,17,8) отличны от нуля. Это решение определяет некоторую псевдориманову метрику, которую нельзя получить из континуума Минковского преобразованием координат.

Мы видим, что, как и в механике Ньютона, в ОТО имеется возможность осуществить однородное поле тяжести двумя способами, один из которых состоит в специальном выборе координат, а другой требует введения «истинного» поля гравитации.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. E i n s t e i n. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.— Annal. Phys., 49, 769, 1916. Русск. пер.: Принцип относительности. ОНТИ, М., 1935; Собр. научн. трудов., 1, 452. «Наука», М., 1965.
2. H. W e y l. Raum — Zeit — Materie. Springer, Berlin, 1923.
3. W. P a u l i. Relativitätstheorie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, B. V₂, H. IV, Art. 19. Leipzig, 1921. Русск. пер.: В. Паули. Теория относительности. ОГИЗ, М.—Л., 1947.
4. M. L a u e. Relativitätstheorie. Braunschweig, 1923.
5. A. S. E d d i n g t o n. The Mathematical Theory of Relativity. Oxford, 1924. Русск. пер.: А. С. Эддингтон. Математическая теория относительности. Гос. научно-техн. изд-во, Харьков — Киев, 1933.
6. R. C. T o l m a n. Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford, 1934.
7. P. G. B e r g m a n n. Introduction to the Theory of Relativity. New York, 1942. Русск. пер.: П. Г. Бергман. Введение в теорию относительности. ИЛ, М., 1947.

8. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат, М., 1955.
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Госфизматиздат, М., 1962
10. А. З. Петров. Пространства Эйнштейна. Госфизматиздат, М., 1961, Новые методы в общей теории относительности. «Наука», М., 1966.
11. Д. Л. Синг. Общая теория относительности. ИЛ, М., 1963.
12. А. Ф. Богородский. Публикации Киев. астрономич. обсерватории, 9, 3, 1961; Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. Изд-во КГУ, Киев, 1962.
13. E. Kretschmann.— Annal. Phys., 53, 575, 1917.
14. H. Vermeil.— Gött. Nachrichten, math.-phys. Kl., 1917, 334.
15. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1, 142, 1917.
- Русск. пер.: Принцип относительности. ОНТИ, М., 1935; Собр. научн. трудов, I, 601. «Наука», М., 1965.
16. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 47, 831, 1915.
- Русск. пер.: Собрание научн. трудов, I, 439. «Наука», М., 1965.
17. K. Schwarzschild.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1916, 189.
18. K. Schwarzschild.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1916, 424.
19. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1, 688, 1916.
- Русск. пер.: Собр. научн. трудов, I, 514 «Наука», М., 1965.
20. A. Einstein, G. Grommer— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1917, 2. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 2, 198. «Наука», М., 1966.
21. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1927, 235. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 2, 211. «Наука», М., 1966.
22. A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann.— Annal. Mathem., 39, 65, 1938. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 2, 450. «Наука», М., 1966.
23. В. А. Фок. Журн. эксперимент. теоретич. физики, 9, 411, 1939.
24. А. Ф. Богородский. Публикации Киев. астрономич. обсерв., 2, 31, 1948.
25. А. Ф. Богородский. Публикации Киев. астроном. обсерв., 11, 3, 1962.

Глава VI. ОСНОВНЫЕ СЛЕДСТВИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. **Задача Кеплера.** В задаче Кеплера изучается движение частицы в центральном поле гравитации. В релятивистской форме эта задача исследовалась впервые Эйнштейном в 1915 г. [1]. Полученная Эйнштейном формула, определяющая перемещение перигелия невозмущенной планетной орбиты, приводится во всех руководствах по ОТО. Стремясь достаточно полно сравнить ОТО с классической теорией тяготения Ньютона, мы рассматриваем здесь релятивистскую задачу Кеплера в общем виде и приводим подробную классификацию орбит [2]. Уравнение орбиты исследовано при помощи эллиптических интегралов в форме Лепандра. Во всех случаях вычисления завершаются формулами, пригодными для количественных оценок, и иллюстрируются графиками.

Составим уравнения движения частицы.

Пусть x^1, x^2, x^3 — пространственные координаты, $x^4 = t$ — временная координата. Согласно принципу геодезической линии, уравнения движения таковы:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^\sigma}{dt} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0; \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Геометрия пространственно-временного континуума, соответствующая полю гравитации одного центра, определяется внешним решением Шварцшильда (5,8,6), в котором отличаются от нуля лишь диагональные компоненты метрического тензора. Поэтому символы Кристоффеля вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= 0; \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}; \quad \Gamma_{ij}^j = -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i}; \\ \Gamma_{ii}^i &= \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

в которых i, j, k — различные фиксированные индексы.

Внося эти значения в закон движения и принимая во внимание, что компоненты метрического тензора не зависят от времени, приведем уравнения движения частицы к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{g_{\sigma\sigma}}{g_{44}} \frac{dx^\sigma}{dt} \right) - \frac{1}{2g_{44}} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dx^\alpha}{dt} \right)^2 = 0. \quad (6,1,1)$$

Положим $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ и найдем первые интегралы уравнений движения.

Последнее уравнение системы (6,1,1), соответствующее $\sigma = 3$, непосредственно интегрируется и дает

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1}{r^2 \sin^2\theta} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (6,1,2)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

При $\sigma = 2$ находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{d\theta}{dt} \right\} - r^2 \sin\theta \cos\theta \times \\ \times \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Если внести сюда соотношение (6,1,2), то после интегрирования получится

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(C_2^2 - \frac{C_1^2}{\sin^2\theta}\right) \frac{1}{r^4} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2, \quad (6,1,3)$$

где C_2 — новая постоянная интегрирования.

С помощью уравнения (6, 1, 3) нетрудно убедиться в том, что задача Кеплера в ОТО, как и в механике Ньютона, является плоской. Действительно, выбрав систему координат таким образом, чтобы в начальный момент движение происходило в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$, т. е. чтобы при $t = t_0$ выполнялись условия $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\frac{d\theta}{dt} = 0$, получим из (6,1,3) $C_1^2 = C_2^2$. В этих координатах уравнение (6,1,3) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{C_1^2}{r^4} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \operatorname{ctg}^2\theta$$

и показывает, что вообще $\theta = \operatorname{const} = \frac{\pi}{2}$. Вместо (6, 1, 2) имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (6,1,4)$$

Первое уравнение системы (6,1,1), соответствующее $\sigma = 1$, более сложно. Его интеграл удобнее получить из квадратической формы Шварцшильда (5,8,6), найдя предварительно связь между дифференциалом временной координаты и элементом собственного времени.

Воспользуемся уравнениями четырехмерной геодезической линии в общей форме (4,7,2). Для временной координаты

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Согласно приведенным формулам, из входящих в это уравнение символов Кристофеля могли бы отличаться от нуля следующие:

$$\Gamma_{4\alpha}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\alpha}; \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^4 = -\frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^4}; \quad \Gamma_{44}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}.$$

Однако два последние исчезают вследствие стационарности поля; от нуля отличаются только символы

$$\Gamma_{4\alpha}^4 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{44}}{\partial x^\alpha}.$$

Поэтому уравнение для временной координаты

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + 2\Gamma_{\alpha 4}^4 \frac{dt}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} = 0$$

принимает вид

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{d \ln g_{44}}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

и после интегрирования дает

$$\frac{dt}{ds} = h \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, \quad (6,1,5)$$

где h — постоянная интегрирования.

Согласно квадратической форме Шварцшильда (5, 8, 6), производные пространственных координат по времени связаны соотношением

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 1 - \frac{2m}{r}.$$

Внося сюда найденные значения производных, получим

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^2 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(\frac{1}{h^2} + \frac{C_1^2}{r^2} \right) \right\}. \quad (6,1,6)$$

Это равенство и представляет собой первый интеграл уравнения $\sigma = 1$.

Составим дифференциальное уравнение орбиты. С этой целью разделим (6, 1, 6) на возведенное в квадрат соотношение (6,1,4). Введя переменную $u = \frac{1}{r}$ и положив $C_1^2 = \frac{a^2}{h^2}$, найдем после очевидных преобразований

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{h^2 - 1}{a^2} + \frac{2m}{a^2} u - u^2 + 2mu^3. \quad (6,1,7)$$

На достаточно большом расстоянии от центра поля последний член правой части весьма мал. Если его опустить, то равенство (6,1,7) перейдет в уравнение конического сечения, фокальный параметр и эксцентриситет которого определяются формулами

$$p = \frac{a^2}{m}; \quad e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{m^2} (h^2 - 1)}. \quad (6,1,8)$$

Различие между релятивистской и ньютоновой орбитами обусловлено членом $2m\omega^3$. На больших расстояниях от центра поля гравитации этот член вызывает лишь незначительное отклонение от обычной кеплеровой орбиты, тогда как вблизи центра он играет очень важную роль, определяя орбиты новых классов.

Прежде чем перейти к общему исследованию уравнения орбит, рассмотрим простой частный случай, который в дальнейшем предполагается исключенным. Пусть $a = 0$. Вместо (6,1,4) и (6,1,6) имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0; \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left\{1 - \frac{1}{h^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right\}. \quad (6,1,9)$$

Первое из этих уравнений показывает, что орбита представляет собой прямую линию, совпадающую с радиальным направлением. Второе уравнение определяет зависимость между переменными r , t . Если в начальный момент частица покоится в точке r_0 , то при падении ее скорость изменяется по закону

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left\{1 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)^{-1}\right\}.$$

С приближением к центру поля скорость частицы возрастает и при $r = 6m \left(1 + \frac{4m}{r_0}\right)^{-1} \simeq 6m$ достигает максимума, равного $\frac{2}{3\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) \simeq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. В дальнейшем скорость уменьшается, стремясь к нулю при $r \rightarrow 2m$. Заметим еще, что в случае $h < 1$ орбита представляет собой конечный отрезок радиального направления между точками $r = 2m$ и $r = \frac{2m}{1-h^2}$, тогда как при $h \geq 1$ она с одной стороны ограничена гравитационной поверхностью $r = 2m$ и простирается до бесконечности.

Переходим к общей классификации орбит.

Входящий в уравнение (6,1,7) полином

$$f(u) = u^3 - \frac{u^2}{2m} + \frac{u}{a^2} + \frac{h^2 - 1}{2ma^2} \quad (6,1,10)$$

для вещественных точек орбиты может принимать только положительные или нулевые значения. Поэтому необходимо найти интер-

валы значений переменной u , отвечающие условиям $0 \leq u \leq \frac{1}{2m}$; $f(u) \geq 0$.

Полином $f(u)$ может иметь один вещественный корень u_1 или три $u_1 < u_2 < u_3$. Введем обозначения

$$\rho = \frac{1}{2} [9(h^2 - 1) + 1]; \quad \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - 12m^2}}{a};$$

$$\alpha_{1,2} = \mp \frac{\rho}{2} + \sqrt{\frac{\rho^2}{4} + \rho}. \quad (6.1.11)$$

Подробное исследование полинома (6,1,10) позволяет определить искомые интервалы переменной u при различных предположениях относительно постоянных h, a . Эти интервалы приводятся в табл. 1.

В дальнейшем принята следующая классификация орбит.

1. Орбиты класса А определяются монотонным изменением переменной u от нуля или от некоторого положительного значения до величины $\frac{1}{2m}$. Этому классу принадлежат случаи: 1) когда функция $f(u)$ имеет один вещественный корень; 2) когда функция $f(u)$ имеет двойной $u_{1,2}$ и простой u_3 вещественные корни, а начальное значение переменной u задано в интервале $(u_3, \frac{1}{2m})$; 3) когда все корни полинома $f(u)$ вещественны и различны, а начальное значение лежит в интервале $(u_3, \frac{1}{2m})$. Рассмотренный случай $a = 0$ также можно отнести к этому классу.

2. Классу В принадлежат орбиты, для которых кратный корень полинома $f(u)$ превосходит простой. В этом случае, в зависимости от условий $u_0 \leq u_{2,3}$, переменная u монотонно возрастает от нуля (если $u_1 \leq 0$), или от u_1 (если $u_1 > 0$) до $u_{2,3}$, или от $u_{2,3}$ до $\frac{1}{2m}$. В данный класс входит также орбита $u = u_{2,3}$.

3. Орбиты класса С определяются существованием трех различных вещественных корней полинома $f(u)$, из которых меньший отрицателен или равен нулю, и заданием начального условия в интервале $(0, u_2)$. Орбиты этого класса характеризуются возрастанием переменной u от нуля до наибольшего значения u_2 и последующим убыванием от u_2 до нуля.

4. К классу Д относятся орбиты, для которых функция $f(u)$ имеет различные положительные корни, а начальное значение переменной u лежит в интервале (u_1, u_2) . Орбиты этого класса характеризуются колебательным изменением переменной u между u_1, u_2 и являются периодически. При $u_1 = u_2$, а также при $u_1 = u_2 = u_3$ орбита вырождается в окружность.

2. Исследование орбит. Переходим к исследованию орбит в соответствии с принятой классификацией.

Таблица 1

Значения постоянных	Вещественные корни полинома	Интервалы переменной
$0 \leq h^2 \leq \frac{8}{9} \left\{ \begin{array}{l} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leq \alpha < 1 \end{array} \right.$	$u_1 > 0$	$\left(u_1, \frac{1}{2m} \right)$
$\left\{ \begin{array}{l} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leq \alpha < \alpha_1 \end{array} \right.$	$u_1 > 0$	$\left(u_1, \frac{1}{2m} \right)$
$\alpha = \alpha_1$	$u_1 = \frac{1 - 2\alpha_1}{6m},$	$(u_1, u_{2,3}), \left(u_{2,3}, \frac{1}{2m} \right)$
$u_{2,3} = \frac{1 + \alpha_1}{6m}$		
$\frac{8}{9} < h^2 < 1 \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 \\ \alpha = \alpha_2 \end{array} \right.$	$u_1 > 0, u_2, u_3$	$(u_1, u_2), \left(u_3, \frac{1}{2m} \right)$
$\alpha = \alpha_2$	$u_{1,2} = \frac{1 - \alpha_2}{6m},$	$u_{1,2}, \left(u_3, \frac{1}{2m} \right)$
$u_3 = \frac{1 + 2\alpha_2}{6m}$		
$\alpha_2 < \alpha < 1$	$u_1 > 0$	$\left(u_1, \frac{1}{2m} \right)$
$h^2 = 1 \left\{ \begin{array}{l} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leq \alpha < \alpha_1 \\ \alpha = \alpha_1 \end{array} \right.$	u_1	$\left(0, \frac{1}{2m} \right)$
$\alpha = \alpha_1$	$u_1 = 0, u_{2,3} = \frac{1 + \alpha_1}{6m}$	$\left(0, \frac{1}{2m} \right)$
$\alpha_1 < \alpha < 1$	$u_1 = 0,$	$(0, u_2), \left(u_3, \frac{1}{2m} \right)$
	$u_{2,3} = \frac{3 \mp \sqrt{3(4\alpha^2 - 1)}}{12m}$	
$h^2 > 1 \left\{ \begin{array}{l} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leq \alpha < \alpha_1 \\ \alpha = \alpha_1 \end{array} \right.$	u_1	$\left(0, \frac{1}{2m} \right)$
$\alpha = \alpha_1$	$u_1 = \frac{1 - 2\alpha_1}{6m},$	$\left(0, \frac{1}{2m} \right)$
$u_{2,3} = \frac{1 + \alpha_1}{6m}$		
$\alpha_1 < \alpha < 1$	$u_1 < 0, u_2, u_3$	$(0, u_2), \left(u_3, \frac{1}{2m} \right)$

Орбиты класса А. Согласно определению, переменная u является монотонной функцией полярного угла φ . Считая, что положительное направление φ отвечает возрастанию u , можно положить $\frac{du}{d\varphi} \geq 0$. В таком случае, согласно (6,1,7),

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \quad (6,2,1)$$

Рассмотрим первый из трех случаев, указанных в определении орбит класса А, когда полином $f(u)$ имеет один вещественный корень. При всех вещественных значениях переменной u трехчлен $\frac{f(u)}{u-u_1}$ остается положительным. Поэтому на основании очевидного равенства

$$f'(u) = \frac{f(u)}{u-u_1} + (u-u_1) \frac{d}{du} \frac{f(u)}{u-u_1}$$

находим

$$f'(u_1) = 3u_1^2 - \frac{u_1}{m} + a^{-2} > 0.$$

Введем новую переменную с помощью соотношения

$$u = u_1 + \sqrt{f'(u_1)} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2}. \quad (6,2,2)$$

Предварительно представим полином (5,1,10) в виде

$$f(u) = (u-u_1) \left\{ u^2 + \left(u_1 - \frac{1}{2m} \right) u + \frac{1}{a^2} + u_1^2 - \frac{u_1}{2m} \right\}.$$

Если подставить (6,2,2), то после необходимой перегруппировки членов получится

$$f(u) = \sqrt{f'(u_1)} \left\{ \left(3u_1 - \frac{1}{2m} \right) \sqrt{f'(u_1)} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} + \sqrt{f'(u_1)} \cdot \operatorname{tg}^4 \frac{\Phi}{2} + 3u_1^2 - \frac{u_1}{m} + a^{-2} \right\}.$$

Принимая во внимание, что трехчлен $3u_1^2 - \frac{u_1}{m} + a^{-2}$ совпадает с величиной $f'(u_1)$, это равенство можно написать так:

$$f(u) = [f'(u_1)]^{\frac{3}{2}} \left\{ \sin^4 \frac{\Phi}{2} + \cos^4 \frac{\Phi}{2} + \frac{3u_1 - \frac{1}{2m}}{\sqrt{f'(u_1)}} \sin^2 \frac{\Phi}{2} \times \right. \\ \left. \times \cos^2 \frac{\Phi}{2} \right\} \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} \cos^{-4} \frac{\Phi}{2}.$$

Теперь нетрудно получить

$$f(u) = [f'(u_1)]^{\frac{3}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \Phi) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} \cos^{-4} \frac{\Phi}{2},$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3u_1 - \frac{1}{2m}}{2\sqrt{f'(u_1)}} \right). \quad (6,2,3)$$

В результате указанного преобразования уравнение орбиты приводится к следующему:

$$\varphi - \varphi_0 = [4m^2 f'(u_1)]^{-\frac{1}{4}} \left\{ \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right\}, \quad (6,2,4)$$

где для краткости принято обозначение

$$\Delta\Phi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}.$$

Точка орбиты, ближайшая к центру поля гравитации, лежит на гравитационной поверхности $u = \frac{1}{2m}$. Если $h \geq 1$, вследствие чего $u_1 \leq 0$, то орбита имеет бесконечно удаленную точку.

Пусть орбита класса А относится ко второму случаю, когда меньший из вещественных корней полинома $f(u)$ — двойной, а начальное значение u_0 принадлежит интервалу $(u_3, \frac{1}{2m})$. Уравнение (6,1,7) легко интегрируется в элементарных функциях

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{u - u_1}{u_3 - u_1}} \Big|_{u_0}^u. \quad (6,2,5)$$

Орбита соединяет сферу $u = u_3$ с гравитационной поверхностью $u = \frac{1}{2m}$.

Предположим, наконец, что все корни полинома $f(u)$ вещественны и различны, а начальное значение u_0 принадлежит интервалу $(u_3, \frac{1}{2m})$. Для простоты положим $u_0 = u_3$.

Замечая, что величина $f'(u_1)$ — положительна, подставим (6,2,2), представив предварительно полином в виде произведения $(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$. После необходимых преобразований, аналогичных выполненным в предыдущем случае, получим

$$f(u) = [f'(u_1)]^{\frac{3}{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u_2 + u_3 - 2u_1}{2\sqrt{f'(u_1)}} \right) \sin^2 \Phi \right\} \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} \cos^{-4} \frac{\Phi}{2}.$$

Как и прежде, уравнение орбиты приводится к (6,2,4), но модуль эллиптических интегралов определяется теперь формулой

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{u^2 + u_3 - 2u_1}{4\sqrt{f'(u_1)}} \quad (6,2,6)$$

и превосходит единицу, так как при всех $u_1 < u_2 < u_3$

$$\frac{u_2 + u_3 - 2u_1}{\sqrt{f'(u_1)}} > 2.$$

Однако при всех значениях u в интервале $(u_3, \frac{1}{2m})$ уравнение (6,2,6) остается вещественным. Действительно, наибольшая величина переменной Φ , отвечающая $u = \frac{1}{2m}$, согласно (6,2,2), определяется равенством

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_m}{2} = \frac{1 - u_1}{\sqrt{f'(u_1)}}$$

или

$$\sin^2 \Phi_m = \frac{4 \left(\frac{1}{2m} - u_1 \right) \sqrt{f'(u_1)}}{\left(\frac{1}{2m} - u_1 + \sqrt{f'(u_1)} \right)^2}.$$

Эта величина удовлетворяет соотношению $1 - k_1^2 \sin^2 \Phi_m = 0$, где

$$k_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2m} - u_1 \right)^2 + f'(u_1)}{4 \left(\frac{1}{2m} - u_1 \right) \sqrt{f'(u_1)}}.$$

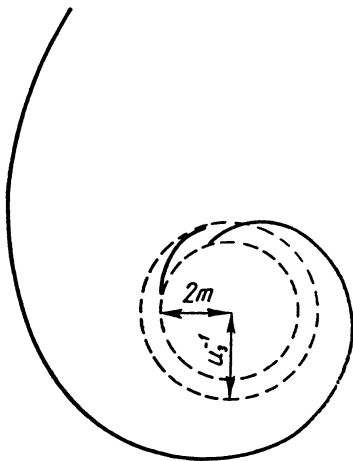


Рис. 17.

Поскольку модуль эллиптического интеграла (6,2,6) меньше величины k_1 , имеем $1 - k^2 \sin^2 \Phi_m > 0$.

Применяя уравнение орбиты (6,2,4), в данном случае следует выполнить преобразование $k \sin \Phi = \sin \Psi$, что приводит к эллиптическим интегралам с модулем $\frac{1}{k} < 1$. На рис. 17 изображены орбиты первых двух типов класса А. При построении графиков принято: $h^2 = 1$, $a = 3,936 m$; $h^2 = \frac{17}{18}$; $\alpha = 0,6404$.

Орбиты класса В. Переходим к случаю, когда полином $f(u)$ имеет простой u_1 и двойной $u_{2,3}$ вещественные корни.

Прежде всего заметим, что если начальное значение переменной u совпадает с двойным корнем, то орбита этого класса является окружностью. Действительно, поскольку в точке $u_{2,3}$ все производные

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{2mf(u)}; \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = mf'(u); \quad \frac{d^3u}{d\varphi^3} = mf''(u) \frac{du}{d\varphi}; \quad \dots$$

исчезают, переменная u имеет в этой точке стационарное значение

$u = \text{const} = u_{2,3}$. Орбитой служит окружность

$$u = \frac{1 + \alpha_1}{6m}. \quad (6,2,7)$$

Согласно определению (6, 1, 11), величина α_1 представляет собой монотонно возрастающую функцию ρ . Поскольку полином $f(u)$ имеет простой и двойной корни при $h^2 > \frac{8}{9}$ (т. е. при $\rho > 0$), величина α_1 удовлетворяет условию $0 < \alpha_1 \leq 1$. Поэтому для орбит типа (6,2,7) имеем $3m \leq r < 6m$. Присоединив случай трех равных корней $u_{1,2,3} = \frac{1}{6m}$, соответствующий $h^2 = \frac{8}{9}$ ($\rho = \alpha_1 = 0$), можно сказать, что рассматриваемый класс орбит содержит все-окружности, отвечающие условию $3m \leq r \leq 6m$.

При $u_0 \neq u_{2,3}$ орбита отличается от окружности. Уравнение ее легко интегрируется:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m(u_{2,3} - u_1)}} \ln \left. \frac{\sqrt{u_{2,3} - u_1} + \sqrt{u - u_1}}{\sqrt{u_{2,3} - u_1} - \sqrt{u - u_1}} \right|_{u_0}^u, \quad (6,2,8)$$

если $u_0 < u_{2,3}$, или

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m(u_{2,3} - u_1)}} \ln \left. \frac{\sqrt{u - u_1} + \sqrt{u_{2,3} - u_1}}{\sqrt{u - u_1} - \sqrt{u_{2,3} - u_1}} \right|_{u_0}^u, \quad (6,2,9)$$

если $u_0 > u_{2,3}$.

Орбита (6,2,8) при $u_1 \leq 0$ имеет бесконечно удаленную точку. В случае $u_1 > 0$ наиболее удаленной точкой орбиты является $u = u_1$. При $u \rightarrow u_{2,3}$ уравнение (6,2,8) дает $\varphi - \varphi_0 \rightarrow \infty$, показывая, что орбита имеет спиралевидную форму и асимптотически приближается к окружности (6,2,7).

Уравнение (6,2,9) определяет вторую спиралевидную орбиту, расположенную внутри окружности (6,2,7). Эта орбита также асимптотически приближается к указанной окружности и, подобно орбитам класса А, имеет точку на гравитационной поверхности.

На рис. 18 изображены орбиты всех трех типов при $h^2 = 1$.

В случае тройного корня $u_{1,2,3} = \frac{1}{6m}$ при условии $u_0 \neq u_{1,2,3}$ уравнение (6, 1, 7) принимает после интегрирования вид

$$\sqrt{\frac{m}{2}} (\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{\sqrt{u - \frac{1}{6m}}} \Big|_{u_0}^u = 0 \quad (6,2,10)$$

и определяет спиралевидную орбиту, которая имеет точку на гравитационной поверхности и асимптотически приближается к окружности $r = 6m$. Эта орбита изображена на рис. 19.

Орбиты класса С. Для орбит этого класса полином $f(u)$ имеет три вещественных корня, из которых меньший отрицателен или

равен нулю, а два другие положительны. Значения переменной u принадлежат интервалу $(0, u_2)$.

Орбита имеет бесконечно удаленную точку с координатами $\varphi_0, u_0 = 0$. Пусть положительное направление полярного угла соответствует возрастанию переменной u . При увеличении φ от φ_0

до некоторого φ_m производная $\frac{du}{d\varphi}$ остается положительной и переменная u возрастает от нуля до максимума $u_m = u_2$. При дальнейшем

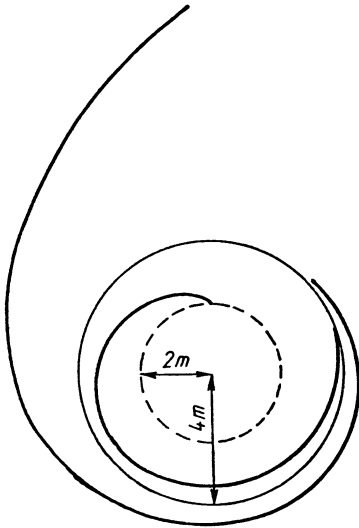


Рис. 18.

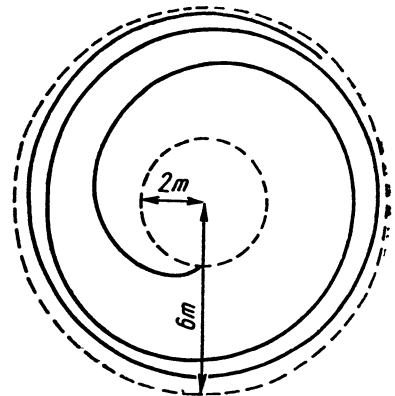


Рис. 19.

увеличении полярного угла производная $\frac{du}{d\varphi}$, обратившись в нуль в точке φ_m , становится отрицательной; переменная u убывает от u_m до нуля.

Уравнение орбиты этого класса можно написать в виде

$$\varphi \leq \varphi_m; \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{1}{V 2m} \int_0^u \frac{du}{V f(u)};$$

$$\varphi' \geq \varphi_m; \quad \varphi' - \varphi_0 = \frac{1}{V 2m} \left(\int_0^{u_m} \frac{du}{V f(u)} - \int_0^u \frac{du}{V f(u)} \right).$$

Заменим переменную при помощи соотношения

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi.$$

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2}{V 2m (u_2 - u_1)} \left(\int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right); \quad (6,2,11)$$

$$\varphi' - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right),$$

где Φ_0 соответствует $u = 0$, а модуль эллиптических интегралов определяется формулой

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}. \quad (6,2,12)$$

Если ввести полярный угол φ_m экстремальной точки, для которого каждое из равенств (6, 2, 11) дает

$$\varphi_m - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \quad (6,2,13)$$

то оба уравнения (6,2,11) можно объединить в одно:

$$\varphi - \varphi_m = \pm \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \quad (6,2,14)$$

которое показывает, что орбита имеет ось симметрии, проходящую через ее экстремальную точку и центр поля.

Рассмотрим две точки орбиты, симметричные относительно указанной оси. Согласно (6,2,11),

$$\varphi' - \varphi = \frac{4}{\sqrt{2m(u_2 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \quad (6,2,15)$$

При $u = 0$, когда выбранные точки бесконечно удалены, получим угол между асимптотическими направлениями орбиты $\varphi_0' - \varphi_0 = 2(\varphi_m - \varphi_0)$. Равенство (6,2,13) показывает, что этот угол может оказаться сколь угодно большим. Действительно, при $u_2 \rightarrow u_3$ модуль (6,2,12) стремится к единице, вследствие чего полный эллиптический интеграл в (6,2,13) неограниченно возрастает, тогда как неполный остается конечным.

Если при данных u_1, u_2, u_3 выполняется неравенство

$$2n\pi < \varphi_0' - \varphi_0 < 2(n+1)\pi,$$

то орбита имеет n двойных точек. Соответствующие им значения переменной Φ можно найти по формулам

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \frac{1}{2} \pi i \sqrt{2m(u_s - u_1)}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6,2,16)$$

которые непосредственно вытекают из (6,2,15) при $\varphi' - \varphi = 2\pi i$. Полярные углы удовлетворяют соотношениям $\varphi - \varphi_0 = (\varphi_m - \varphi_0) - \pi i$, показывающим, что все двойные точки расположены на оси симметрии орбиты.

На рис. 20 изображена орбита класса С с тремя двойными точками. Вычисление ее выполнено при $h^2 = 1$, $a = 4,000032 m$.

Орбиты класса D. Переходим к исследованию орбит класса D, для которого полином $f(u)$ имеет три вещественных корня и начальное значение u_0 лежит в интервале (u_1, u_2) .

Обозначим полярные углы точек u_1, u_2 через $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}$ и положим $\varphi_2^{(i)} > \varphi_1^{(i)}$. При увеличении полярного угла от $\varphi_1^{(i)}$ до $\varphi_2^{(i)}$ производная $\frac{du}{d\varphi}$ остается положительной, а переменная u возрастает от u_1 до u_2 . В точке $\varphi_2^{(i)}$ производная изменяет знак, и при дальнейшем увеличении полярного угла от $\varphi_2^{(i)}$ до $\varphi_1^{(i+1)}$ переменная u убывает от u_2 до u_1 . Орбита данного класса расположена между окружностями $u = u_1, u = u_2$ и соприкасается с ними в экстремальных точках. Пусть φ, u и φ', u — две точки орбиты, соответствующие одинаковым значениям переменной u , но отделенные двумя последовательными экстремальными точками u_1, u_2 . Полярный угол первой из них, заключенный между $\varphi_1^{(i)}$ и $\varphi_2^{(i)}$, определяется формулой

$$\varphi - \varphi_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_{u_1}^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

Для полярного угла второй точки, лежащего между $\varphi_1^{(i+1)}$ и $\varphi_2^{(i+1)}$, имеем

$$\varphi' - \varphi_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} + \int_{u_1}^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \right).$$

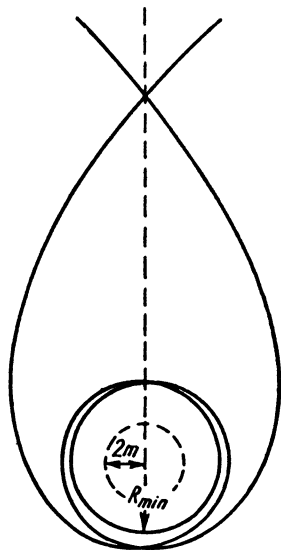


Рис. 20.

Разность полярных углов

$$\Phi' - \Phi = \frac{2}{\sqrt{2m}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{f(u)}$$

не зависит от координат этих точек; переменная u является периодической функцией полярного угла.

Выполнив преобразование

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi,$$

найдем следующее выражение для периода:

$$P = \frac{4}{\sqrt{2m(u_2 - u_1)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}. \quad (6,2,17)$$

Модуль эллиптического интеграла определяется, как и прежде, соотношением (6,2,12).

Период (6,2,17) может быть сколь угодно большим, так как при $u_2 \rightarrow u_3$ модуль стремится к единице. Но он не может оказаться меньше 2π , поскольку при $u_1 \rightarrow u_2$ модуль стремится к нулю, и потому $P \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2}}$ при условии $0 < \alpha_2 < 1$, так как случай $u_1 = u_2$ возможен при $\frac{8}{9} < h^2 < 1$.

Рассмотрим отрезок орбиты, отвечающий одному периоду и ограниченный экстремальными точками u_1 . Положим $u_0 = u_1$ и обозначим полярный угол точки u_2 через Φ_m . Выполнив преобразование, получим

$$\Phi \leq \Phi_m; \quad \Phi - \Phi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_2 - u_1)}} \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi};$$

$$\Phi \geq \Phi_m; \quad \Phi - \Phi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_2 - u_1)}} \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right).$$

Каждая из этих формул дает $\Phi_m - \Phi_0 = \frac{1}{2} P$. Поэтому оба уравнения можно заменить одним

$$\Phi - \Phi_m = \pm \frac{2}{\sqrt{2m(u_2 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \quad (6,2,18)$$

показывающим, что прямая, проходящая через центр поля гравитации и точку u_2 , служит осью симметрии орбиты.

Разность полярных углов двух точек орбиты, симметричных относительно оси, равна

$$\varphi' - \varphi = P - \frac{4}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}. \quad (6,2,19)$$

Если эта разность окажется кратной 2π , то обе точки совпадают, образуя точку возврата. Предположим, что при заданных корнях полинома $f(u)$ период удовлетворяет условию

$$2n\pi < P < 2(n+1)\pi,$$

где n — целое положительное число. В таком случае на рассматриваемом отрезке орбиты имеется n точек возврата. Значения переменной Φ , отвечающие этим точкам, находятся из соотношения

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{1}{4} (P - 2\pi i) \sqrt{2m(u_3 - u_1)}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (6,2,20)$$

которое следует из (6,2,19) при $\varphi' - \varphi = 2\pi i$. Все точки возврата расположены на оси симметрии.

В частном случае, когда период удовлетворяет условию $P = 2n\pi$, орбита имеет $n - 1$ двойных точек и представляет собой замкнутую кривую. Если $P < 4\pi$, то на протяжении периода орбита имеет только одну точку возврата. Однако в последующих периодах орбита вновь пересекает данный отрезок, образуя на нем новые точки возврата, среди которых могут оказаться точки более высоких кратностей.

На рис. 21 построен график орбиты класса D с двумя точками возврата. При вычислении принято: $h^2 = \frac{17}{18}$, $a = 14,1518$ т.

3. Приближенное уравнение орбиты. Составим приближенное уравнение орбит классов C и D в предположении, что все их точки достаточно удалены от центра поля гравитации.

Точное уравнение орбиты в форме (6,2,14) или (6,2,18) является общим для обоих классов. Полином $f(u)$ имеет три вещественных корня, удовлетворяющих соотношению $u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2m}$.

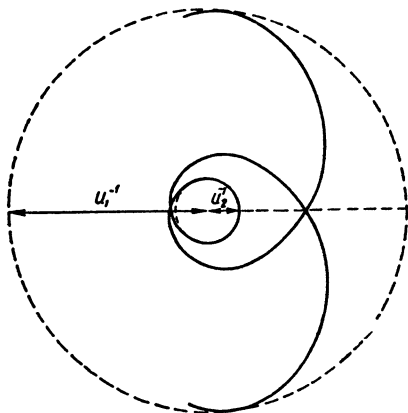


Рис. 21.

Введя обозначения

$$\rho_0 = \frac{2}{u_1 + u_2}; \quad e_0 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1},$$

можно написать

$$u_1 = \frac{1 - e_0}{\rho_0}; \quad u_2 = \frac{1 + e_0}{\rho_0}; \quad u_3 = \frac{1}{2m} - \frac{2}{\rho_0}. \quad (6,3,1)$$

Величина ρ_0 характеризует линейные размеры орбиты. Считая этот параметр достаточно большим, сохраним в уравнении орбиты только первую степень отношения $\frac{m}{\rho_0}$, опуская более высокие степени. В данном приближении модуль эллиптических интегралов, входящих в точное уравнение орбиты, определяется, согласно (6, 2, 12), формулой $k^2 = \frac{4me_0}{\rho_0}$, а коэффициент правой части этого уравнения равен

$$\frac{1}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} = 1 + \frac{(3 - e_0)m}{\rho_0}.$$

С той же степенью точности находим

$$\int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \left(1 + \frac{me_0}{\rho_0}\right) \Phi - \frac{me_0}{2\rho_0} \sin 2\Phi.$$

Точное уравнение орбиты приводится к виду

$$\pm (\varphi - \varphi_m) \left(1 - \frac{3m}{\rho_0}\right) = \pi - 2\Phi + \frac{me_0}{\rho_0} \sin 2\Phi,$$

или

$$\cos \left[\varphi - \varphi_m - \frac{3m}{\rho_0} (\varphi - \varphi_m) \right] = -\cos 2\Phi - \frac{me_0}{\rho_0} \sin^2 2\Phi.$$

В правой части равенства вместо $\sin^2 2\Phi$ в принятом приближении можно написать $\sin^2 (\varphi - \varphi_m)$. Поэтому, воспользовавшись соотношением $\cos 2\Phi = \frac{1 - \rho_0 u}{e_0}$, которое находится из преобразования $u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi$ с учетом (6,3,1), представим предыдущее уравнение в форме

$$u = \frac{1}{\rho_0} + \frac{me_0^2}{\rho_0^2} \sin^2 (\varphi - \varphi_m) + \frac{e_0}{\rho_0} \cos \left[\varphi - \varphi_m - \frac{3m}{\rho_0} (\varphi - \varphi_m) \right],$$

или

$$u = \frac{1}{\rho} + \frac{e}{\rho} \cos (\varphi - \varphi_0 - \Delta\omega), \quad (6,3,2)$$

где

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{e}{e_0} = 1 - \frac{me_0^2}{\rho_0} \sin^2 (\varphi - \varphi_m); \quad \Delta\omega = \frac{3m}{\rho_0} (\varphi - \varphi_m). \quad (6,3,3)$$

В нашем приближении релятивистские орбиты двух рассматриваемых классов весьма мало отличаются от конических сечений механики Ньютона. Орбиты класса С, для которых $u_1 \leq 0$ и, следовательно, $e_0 \geq 1$, соответствуют гиперболам и параболам, а орбиты класса D, имеющие $u_1 > 0$ (и, следовательно, $e_0 < 1$), — эллипсам. С достаточной точностью релятивистскую орбиту можно считать коническим сечением, элементы которого мало изменяются.

Вековым эффектом обладает только орбита класса D, которую можно рассматривать как эллипс, медленно процессирующий в прямом направлении. В течение одного обращения линия апсид орбиты поворачивается на угол $\Delta\omega = \frac{6\pi m}{p_0}$, как это следует из (6,3,3), при $\varphi - \varphi_m = 2\pi$. В единицах системы CGS угол поворота

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\gamma M}{c^2 a (1 - e^2)}, \quad (6,3,4)$$

где a , e — большая полуось и эксцентриситет орбиты, M — масса центрального тела.

Для планет Солнечной системы формула (6,3,4) дает следующие эффекты за столетие:

Меркурий	43",0
Венера	8",6
Земля	3",8
Марс	1",4

Наибольший эффект наблюдается у Меркурия — ближайшей к Солнцу планеты, имеющей орбиту со сравнительно большим эксцентриситетом. Для Венеры релятивистское перемещение перигелия остается еще значительным, но малая эксцентricность ее орбиты ухудшает точность определения перигелия, вследствие чего сравнение теоретических результатов с наблюдаемыми становится менее уверенным. В еще большей степени это относится к Земле.

В главе II приведены современные оценки невязки между наблюдаемым движением линии апсид планетной орбиты и результатами вычислений, выполненных на основе ньютоновой теории возмущений. Сравнивая их (см. 2,1,6) со значениями, вычисленными по формуле (6,3,4), можно с уверенностью сказать, что основной вывод релятивистской задачи Кеплера хорошо согласуется с данными астрономических наблюдений.

Для проверки формулы (6,3,4) может представить интерес астероид Икар, имеющий весьма малое среднее расстояние от Солнца (1,077 а. е.) и отличающийся большой эксцентricностью орбиты ($e = 0,8265$). Согласно (6,3,4), вековое перемещение перигелия этой малой планеты должно составить около $10''$. Однако вследствие недостаточности наблюдений проверить этот эффект пока невозможно.

4. Движение спутника вращающейся планеты. В механике Ньютона поле тяготения со сферическим распределением массы не зависит от его вращения вокруг оси, проходящей через центр распределения. В ОТО такое вращение нарушает центральную симметрию поля. Поле гравитации однородного шара, вращающегося вокруг диаметра (см. главу V), симметрично относительно оси вращения и зависит не только от массы, но также от угловой скорости и радиуса шара. Поэтому, с точки зрения ОТО, в движении спутника должны наблюдаться особенности, зависящие от вращения планеты. Впервые эти эффекты изучались еще Ленсе и Тиррингом в 1918 г. [3].

Рассмотрим вековые эффекты ОТО в элементах орбиты спутника, движущегося вокруг вращающейся планеты. Исследование производится по методу вариации элементов [4].

Уравнения движения спутника можно написать в виде

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^\sigma}{dt} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0; \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

где x^σ — пространственные координаты, Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля, отвечающие данному полю гравитации.

Введем декартову планетоцентрическую систему координат $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, ориентированную таким образом, чтобы плоскость xy совпадала с плоскостью экватора планеты, а ось z была направлена по оси вращения. Компоненты метрического тензора представим в форме $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, где δ_{ij} соответствуют галилеевым координатам СТО, а h_{ij} характеризуют уклонение метрики пространства-времени от геометрии Эвклида. С необходимой точностью эти величины получены в предыдущей главе при интегрировании уравнений поля для однородного вращающегося шара; они определяются формулами (5,16,5).

Составляя уравнения движения в развернутой форме, потенциал ϕ будем считать величиной первого порядка малости, а составляющие скорости — порядка $\frac{1}{2}$. Легко видеть, что в уравнениях движения член первого порядка содержится только в Γ_{44}^σ и входит в $\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma}$. Поскольку главный переменный член в g_{44} , согласно (5,16,5), равен -2ϕ , в уравнениях движения содержатся члены $\frac{\partial \phi}{\partial x^\sigma}$, соответствующие ньютонову приближению. Поэтому закон движения можно представить в виде

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x^\sigma} = X^\sigma; \quad \sigma = 1, 2, 3, \quad (6,4,1)$$

где через X^σ обозначена совокупность остальных членов, которые представляют поправки ОТО к закону движения Ньютона.

Уравнения (6,4,1) определяют движение частицы под действием центральной ньютоновой силы и возмущающего ускорения с декартовыми проекциями X, Y, Z . С точностью до членов второго порядка включительно эти проекции можно вычислить по формулам

$$X^\sigma = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (h_{44} + 2\varphi) - \frac{1}{2} h_{\sigma\sigma} \frac{\partial h_{44}}{\partial x^\sigma} - \left(\frac{\partial h_{\alpha 4}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial h_{\sigma 4}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} + \\ + \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\alpha}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dx^\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{\partial h_{44}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt}. \quad (6,4,2)$$

Пусть R, S, W — проекции возмущающего ускорения на радиус-вектор, на перпендикуляр к нему и на нормаль к плоскости орбиты соответственно. Обозначив через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ углы, образованные направлениями R, S, W с осями декартовых координат, имеем

$$R = X \cos \alpha_1 + Y \cos \alpha_2 + Z \cos \alpha_3; \\ S = X \cos \beta_1 + Y \cos \beta_2 + Z \cos \beta_3; \quad (6,4,3) \\ W = X \cos \gamma_1 + Y \cos \gamma_2 + Z \cos \gamma_3.$$

Если ось x проходит через восходящий узел орбиты спутника, то эти углы находятся с помощью соотношений

$$\cos \alpha_1 = \cos(\omega + \varphi); \quad \cos \alpha_2 = \sin(\omega + \varphi) \cos i; \quad \cos \alpha_3 = \\ = \sin(\omega + \varphi) \sin i; \\ \cos \beta_1 = -\sin(\omega + \varphi); \quad \cos \beta_2 = \cos(\omega + \varphi) \cos i; \quad \cos \beta_3 = \\ = \cos(\omega + \varphi) \sin i; \\ \cos \gamma_1 = 0; \quad \cos \gamma_2 = -\sin i; \quad \cos \gamma_3 = \cos i,$$

где ω — угол между линией узлов и осью апсид орбиты, i — наклонность орбиты спутника к экватору планеты, φ — истинная аномалия, т. е. полярный угол спутника, отсчитанный от линии апсид.

Для вычисления величин (6,4,2) воспользуемся решением (5,16,5), которое напомним в виде

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = -\frac{2m}{r}; \quad h_{14} = \frac{4}{5} m\omega_0 R_0^2 \frac{y}{r}; \\ h_{24} = -\frac{4}{5} m\omega_0 R_0^2 \frac{x}{r}; \\ h_{44} + 2\varphi = \frac{2m^2}{r^2} - \frac{2m\omega_0^2 R_0^2}{5r} \left(2 + \frac{R_0^2}{7r^2} - \frac{3R_0^2 z^2}{7r^4} \right).$$

Через ω_0 , R_0 обозначены угловая скорость и радиус планеты; $m = \frac{\gamma M}{c^2}$, где γ — гравитационная постоянная, c — скорость света, M — масса планеты.

Координаты спутника с достаточной точностью определяются по формулам

$$x = r \cos(\omega + \varphi); \quad y = r \sin(\omega + \varphi) \cos i; \quad z = r \sin(\omega + \varphi) \sin i;$$

$$r = \frac{\rho}{1 + e \cos \varphi}.$$

Найдя декартовы проекции возмущающего ускорения по формулам (6,4,2), вычислим затем величины (6,4,3). После ряда необходимых преобразований, которые мы здесь не приводим, получим

$$R = \frac{m^2}{r^2} \left(\frac{2}{r} + \frac{1 - e^2 + 4e^2 \sin^2 \varphi}{\rho} \right) + \frac{4}{5} \rho^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{3}{2}} \omega_0 R_0^2 \cos i \frac{1}{r^4} - \\ - \frac{2m\omega_0^2 R_0^2}{5r^2} + \frac{3m\omega_0^2 R_0^4}{35r^4} [3 \sin^2(\omega + \varphi) \sin^2 i - 1];$$

$$S = \frac{4m^2}{r^3} e \sin \varphi - \frac{4}{5} \rho^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{3}{2}} \omega_0 R_0^2 e \cos i \sin \varphi \frac{1}{r^3} - \\ - \frac{6}{35} m \omega_0^2 R_0^4 \sin^2 i \sin(\omega + \varphi) \cos(\omega + \varphi) \frac{1}{r^4}; \quad (6,4,4)$$

$$W = \frac{4}{5} \rho^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{3}{2}} \omega_0 R_0^2 \sin i [-e \sin \omega + (2 + 3e \cos \varphi) \sin(\omega + \varphi)] \frac{1}{r^3} - \\ - \frac{6m\omega_0^2 R_0^4}{35} \sin i \cos i \sin(\omega + \varphi) \frac{1}{r^4}.$$

Для исследования релятивистских возмущений в движении спутника применяется метод вариаций элементов классической небесной механики. Воспользуемся им в форме системы уравнений (1,6,3), которые определяют оскулирующие элементы орбиты в функциях истинной аномалии. При этом, в соответствии с принятым обозначением, следует положить $\mu = m$. Общее исследование уравнений для оскулирующих элементов не представляет интереса, так как периодические изменения элементов исчезающе малы. Заслуживают внимания только вековые эффекты, вызывающие монотонные изменения элементов. Поскольку поле тяготения равномерно вращающейся планеты стационарно, для оценки вековых эффектов достаточно интегрировать уравнения (1,6,3) в пределах одного обращения спутника.

Внесем (6,4,4) в первое из уравнений системы (1,6,3). Выполнив необходимые упрощения, получим уравнение, определяющее движение линии узлов:

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{4m \frac{1}{2} \omega_0 R_0^2}{5\rho \frac{3}{2}} [-e \sin \omega + (2 + 3e \cos \varphi) \sin(\omega + \varphi)] \times \\ \times \sin(\omega + \varphi) - \frac{6\omega_0^2 R_0^4}{35\rho^2} \cos i (1 + e \cos \varphi) \sin^2(\omega + \varphi).$$

Интегрируя его в указанных пределах, найдем следующее выражение для угла поворота линии узлов в течение одного обращения спутника:

$$\Delta\Omega = \frac{8\pi m \frac{1}{2} \omega_0 R_0^2}{5\rho \frac{3}{2}} - \frac{6\pi\omega_0^2 R_0^4}{35\rho^2} \cos i.$$

Отношение второго члена к первому по абсолютной величине не превышает $\frac{3}{28} \omega_0 R_0 \frac{3}{2} (\gamma M)^{-\frac{1}{2}} \approx 200 \omega_0 \rho^{-\frac{1}{2}}$, где ρ — средняя плотность центрального тела. Для тел Солнечной системы второй член пренебрежим. В случае Земли ($\omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$, $\rho = 5,52 \text{ г/см}^3$) величина указанного отношения менее $6,2 \cdot 10^{-3}$; даже для быстро вращающегося Юпитера ($\omega_0 = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$, $\rho = 1,33 \text{ г/см}^3$) она не превосходит $3,1 \cdot 10^{-2}$.

Аналогично находятся вековые изменения других элементов орбиты. Второе, четвертое и пятое уравнения системы (1,6,3) после соответствующих преобразований и интегрирования по истинной аномалии дают $\Delta i = \Delta a = \Delta e = 0$. С помощью третьего уравнения этой системы получаем

$$\Delta\omega = \frac{6\pi m}{\rho} - \frac{24\pi m \frac{1}{2} \omega_0 R_0}{5\rho \frac{3}{2}} \cos i.$$

Первый член представляет собой выражение обычного релятивистского поворота линии апсид в задаче Кеплера. Второй член определяет дополнительный поворот этой линии, обусловленный вращением центрального тела и зависящий от наклонности орбиты спутника к экватору центрального тела.

Вариация в моменте прохождения спутника через вершину орбиты вычисляется из соотношения $\Delta\tau = -\frac{\Delta\sigma}{n}$, так как большая полуось орбиты не испытывает векового изменения.

Таким образом, вековые релятивистские эффекты в элементах орбиты, отнесенные к одному обращению спутника, находятся по следующим формулам:

$$\Delta a = \Delta e = \Delta i = 0;$$

$$\Delta \omega = \frac{6\pi \gamma M}{c^2 a (1 - e^2)} - \frac{24\pi (\gamma M)^{\frac{1}{2}} \omega_0 R_0^2 \cos i}{5c^2 a^{\frac{3}{2}} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad (6,4,5)$$

$$\Delta \Omega = \frac{8\pi (\gamma M)^{\frac{1}{2}} \omega_0 R_0^2}{5c^2 a^{\frac{3}{2}} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \Delta \tau = \frac{6\pi (a\gamma M)^{\frac{1}{2}}}{c^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} (5 - 2\sqrt{1 - e^2}).$$

Все величины в (6,4,5) выражены в единицах системы CGS, $\Delta \omega$ и $\Delta \Omega$ — в радианах.

Иллюстрируем полученные формулы числовыми примерами. Положив $a = R_0 = 6,4 \cdot 10^{10}$ см, $e = 0$, $\omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5}$ сек $^{-1}$, найдем предельные значения релятивистских вариаций элементов орбиты спутника Земли. За столетие они составят

$$\Delta \omega = 1660'' - 74'' \cos i; \quad \Delta \Omega = 25''; \quad \Delta \tau = 33 \text{ сек.}$$

Обычный релятивистский эффект в движении линии апсид достаточно велик (для искусственного спутника Земли, движущегося со значительным периодом обращения, он может составить около 1000'' в столетие), тогда как эффекты вращения, обнаружение которых представило бы особенно большой интерес для ОТО, оказываются малыми из-за относительно медленного вращения Земли. Эти эффекты значительно больше в поле тяготения Юпитера. Для V спутника этой планеты ($a = 1,81 \cdot 10^{10}$ см, $e = 0,003$, $i = 3^\circ$, 1) второй член в выражении $\Delta \omega$ составляет около 1200'' в столетие, что почти в 30 раз превосходит обычное релятивистское перемещение перигелия Меркурия за то же время. К сожалению, имеющиеся в настоящее время данные наблюдений недостаточны для проверки этого эффекта ОТО.

5. Задача двух тел в общей теории относительности. Рассмотренная в начале этой главы задача о движении частицы в поле гравитации одного центра представляет собой релятивистское обобщение ограниченной задачи двух тел механики Ньютона, в которой предполагается, что относительная масса одного из тел пренебрежимо мала. Полученное решение с достаточной точностью можно отнести к гелиоцентрическому обращению планет, к движению естественного или искусственного спутника относительно планеты и к другим системам, состоящим из двух тел с сильно различающимися массами. Для системы двух тел со сравнимыми массами, например для двой-

ной звезды, необходимо изучить общую задачу двух тел, которая оказывается в ОТО весьма сложной и до сих пор не имеет полного решения.

В предыдущей главе мы видели, что система точечных масс с произвольным законом движения не удовлетворяет уравнениям поля ОТО. Уравнения поля допускают интегрирование с точностью до членов второго порядка включительно лишь в том случае, если движение масс отвечает закону Ньютона. Таким образом, закон движения Ньютона можно рассматривать как условие интегрируемости уравнений поля Эйнштейна во втором приближении. В свою очередь, закон движения во втором приближении (т. е. с релятивистскими поправками к закону Ньютона) является условием интегрируемости уравнений поля ОТО с точностью до членов третьего порядка. Как указывалось, такой метод вывода закона движения взаимодействующих точечных масс впервые был развит в известной работе Эйнштейна, Гопмана и Инфельда.

Ограниченная задача двух тел, названная нами задачей Кеплера, имеет в ОТО исчерпывающее решение, позволяющее изучить все типы возможных орбит. Что же касается общей задачи двух тел, то в указанной ее постановке имеется возможность выполнить только приближенный анализ различных особенностей движения в предположении, что расстояние между телами остается достаточно большим и поэтому релятивистские эффекты в их движении малы. Главным из этих эффектов, который может представить практический интерес, является движение линии апсид периодической орбиты. Отсылая читателей к монографии В. А. Фока [5], в которой подробно изучается задача о движении двух массивных тел, мы приведем здесь только конечную формулу, определяющую величину этого эффекта. В течение одного обращения линия апсид орбиты поворачивается в прямом направлении на угол

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\gamma(M_1 + M_2)}{c^2 a(1 - e^2)}, \quad (6,5,1)$$

где M_1, M_2 — массы тел системы, a и e — большая полуось и эксцентриситет относительной орбиты.

В принципиальном отношении это обобщение формулы Эйнштейна представляет значительный интерес. Практически же формула (6,5,1) не может быть проверена наблюдениями, поскольку в движении двойных звезд обнаружить столь тонкий эффект в настоящее время невозможно.

6. Распространение света в центральном поле гравитации. Распространение света в гравитационном поле определяется принципом геодезической линии и условием $ds = 0$, которое переносится в ОТО из СТО на основе принципа эквивалентности. Особого внимания заслуживает задача о распространении светового луча в статическом

поле одного центра, поскольку именно к этому случаю относится известный оптический эффект ОТО (отклонение лучей в поле тяготения Солнца), который допускает проверку путем наблюдений.

Приближенное рассмотрение задачи, приводящее к известной формуле Эйнштейна для угла отклонения светового луча в центральном поле гравитации, можно найти почти в каждом руководстве по ОТО. Ниже приводится подробное исследование формы луча в указанном поле, выполненное автором с помощью эллиптических интегралов [6]. Основные типы лучей иллюстрируются графиками.

Воспользуемся внешним решением Шварцшильда (5,8,6). В главе VI, п. 1 мы получили первые интегралы уравнений геодезической линии в виде соотношений (6,1,4) — (6,1,6). При $ds = 0$ равенство (6,1,5) превращается в тождество, если положить $\dot{h} = \infty$. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right); \quad (6,6,1)$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{C_1^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \right\}. \quad (6,6,2)$$

Эти уравнения и определяют распространение света в поле одного центра, помещенного в начале координат.

Разделим равенство (6,6,2) на возведенное в квадрат соотношение (6,6,1). Введя переменную $u = \frac{1}{r}$, получим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = 2mu^3 - u^2 + C_1^{-2}.$$

На достаточно большом расстоянии от центра поля член $2mu^3$ можно опустить. Решение дифференциального уравнения имеет в этой области вид $u = C_1^{-1} \sin(\omega - \varphi)$, показывая, что вдали от центра световой луч превращается в прямую линию. Обозначив через $a = C_1$ перпендикуляр, опущенный на эту прямую из центра поля, напишем дифференциальное уравнение луча

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = f(u) = 2mu^3 - u^2 + a^{-2}. \quad (6,6,3)$$

Нетрудно убедиться в том, что трехчлен $f(u)$ при $u = 0$ имеет максимум $f_{\max} = a^{-2}$, а при $u = \frac{1}{3m}$ минимум $f_{\min} = a^{-2} - \frac{1}{27m^2}$. Поэтому полином $f(u)$ имеет: 1) при $a < 3\sqrt{3}m$ один вещественный отрицательный корень; 2) при $a = 3\sqrt{3}m$ один отрицательный корень $-\frac{1}{6m}$ и один двойной положительный корень $\frac{1}{3m}$; 3) при $a >$

$> 3\sqrt{3}m$ — один отрицательный корень и два положительных, из которых один находится в промежутке от нуля до $\frac{1}{3m}$, а другой превосходит $\frac{1}{3m}$.

Для лучей, расположенных вне гравитационной сферы, переменная u отвечает условию $u \leq \frac{1}{2m}$ и может принимать лишь такие значения, при которых полином $f(u)$ неотрицателен. Поэтому переменная u может совпасть только с двойным корнем уравнения $f(u) = 0$ при $a = 3\sqrt{3}m$ или с меньшим из положительных корней при $a > 3\sqrt{3}m$.

Переходим к исследованию формы луча. Согласно уравнению (6,6,3), имеем

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = f(u); \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{2} f'(u).$$

Эти равенства показывают, что переменная u имеет максимум при $f(u) = 0$, $f'(u) < 0$. Если $a = 3\sqrt{3}m$, то переменная u может совпасть лишь с двойным корнем полинома $f(u)$, когда выполняются равенства $f(u) = f'(u) = 0$. В этом случае u является монотонной функцией полярного угла. Если же $a > 3\sqrt{3}m$, то указанные условия максимума выполняются при значении u , равном меньшему из положительных корней полинома $f(u)$; переменная u имеет в этом случае максимум, заключенный внутри интервала от нуля до $\frac{1}{3m}$.

Рассмотрим случай $a \leq 3\sqrt{3}m$. Если $a = 0$, то, согласно (6,6,1), имеем $\varphi = \text{const}$: луч распространяется прямолинейно. Уравнение (6,6, 2) при соответствующем направлении распространения принимает вид

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

и имеет интеграл $e^r (r - 2m)^{2m} = Ce^{-t}$, где C — постоянная интегрирования. Положив $t \rightarrow \infty$, находим $r \rightarrow 2m$: световой луч асимптотически приближается к гравитационной поверхности.

Если $a = 3\sqrt{3}m$, то уравнение луча (6,6,3) допускает решение $u = \text{const} = \frac{1}{3m}$, определяющее круговую траекторию. Общее решение в этом случае таково:

$$\varphi = \text{const} + \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6mu + 1}}{\sqrt{3} - \sqrt{6mu + 1}}$$

и при $u \rightarrow \frac{1}{3m}$ дает $\varphi \rightarrow \infty$, показывая, что луч распространяется

по спирали, асимптотически приближающейся к окружности $u = \frac{1}{3m}$.

При $0 < a < 3\sqrt{3}m$ находим

$$t = \text{const} + a^{-1} \int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 (1 - 2mu) \sqrt{f(u)}}.$$

Здесь u определяется положением источника излучения. При всяком $u < \frac{1}{2m}$ интеграл, а следовательно, и время распространения луча, остаются конечными. Если же $u \rightarrow \frac{1}{2m}$, то интеграл неограниченно возрастает, вследствие

чего $t \rightarrow \infty$. Световой луч заканчивается на гравитационной поверхности. Полярный угол конечной точки луча находится по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^{\frac{1}{2m}} \frac{du}{\sqrt{f(u)}},$$

вытекающей из уравнений (6,6,3).

На рис. 22 изображены лучи при $0 \leq a \leq 3\sqrt{3}m$.

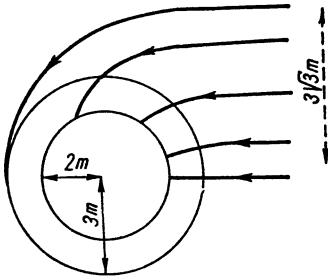


Рис. 22.

Переходим к случаю $a > 3\sqrt{3}m$, когда луч имеет экстремальную точку. Значения переменных φ , u , соответствующие этой точке, обозначим через φ_m , u_m . Полярные углы φ , φ' точек, лежащих по обе стороны от точки экстремума, определяются формулами

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}};$$

$$\varphi' = \varphi_0 + 2 \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} - \int_0^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

Через φ_0 обозначен полярный угол начальной точки $u = 0$.

В рассматриваемом случае полином $f(u)$ имеет три вещественных корня. Обозначим их в порядке возрастания через u_1 , u_2 , u_3 и введем новую переменную Φ при помощи соотношения

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 \Phi,$$

из которого получаем

$$\sqrt{f(u)} = (u_2 - u_1) \sqrt{2m(u_3 - u_1)(1 - k^2 \sin^2 \Phi)} \sin \Phi \cos \Phi,$$

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}.$$

Принимая во внимание, что $u_m = u_2$, можно переписать уравнение луча следующим образом:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right);$$

$$\Phi' = \Phi_0 + \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \quad (6,6,4)$$

где для краткости принято $\Delta\Phi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}$, а через Φ_0 обозначена величина новой переменной, отвечающая $u = 0$.

Пусть Φ_0' — полярный угол второй бесконечно удаленной точки луча. Значение его находится из (6,6,4) при $\Phi = \Phi_0$. Разность полярных углов асимптотических направлений определяется соотношением

$$\Phi_0' - \Phi_0 = \frac{4}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \quad (6,6,5)$$

Если a достаточно близко к $3\sqrt{3}m$, то эта разность может быть сколь угодно большой. Действительно, при $a \rightarrow 3\sqrt{3}m$ имеем $u_1 \rightarrow -\frac{1}{6m}$, $u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow \frac{1}{3m}$, вследствие чего $k^2 \rightarrow 1$, $\Phi_0 \rightarrow \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому полный эллиптический интеграл в (6,6,5) неограниченно возрастает, тогда как неполный стремится к конечному пределу.

Обозначим через n целое число, удовлетворяющее при данном a условию

$$2n\pi < \Phi_0' - \Phi_0 < 2(n+1)\pi.$$

Луч имеет n двойных точек. Соответствующие им значения переменной Φ определяются формулами

$$\int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \frac{\pi i}{2} \sqrt{2m(u_3 - u_1)}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (6,6,6)$$

которые легко находятся из (6,6,4), если положить $\varphi' - \varphi = 2\pi i$. Вычисление этих значений не представляет затруднений.

Отыскав корни функции $f(u)^*$ и вычислив модуль эллиптического интеграла, найдем n значений интеграла $\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}$ с помощью соотношений (6,6,6). Входя затем в таблицу эллиптических интегралов с

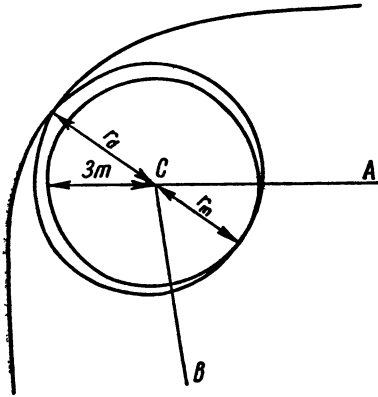


Рис. 23.

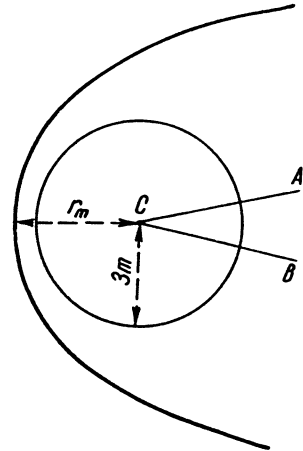


Рис. 24.

данным k , получим искомые величины переменной Φ_i . Координаты двойных точек определяются следующим образом:

$$u_i = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi_i; \quad \varphi_i = \frac{1}{2} (\varphi_0 + \varphi'_0) - \pi i.$$

На рис. 23 изображен луч, имеющий одну двойную точку. C — центр поля; CA и CB — асимптотические направления. При построении графика принято: $m = 2,5$, $a = 12,995$, $\varphi_0 = 0$. Вычисления дают: $\varphi' = 640^\circ$, $r_1 = 8,55$, $\varphi_1 = 140^\circ$, $r_m = 7,6$, $\varphi_m = 320^\circ$.

Если при заданном $a > 3\sqrt{3}m$ окажется, что $\varphi_0 - \varphi'_0 = 2\pi$, то асимптотические направления совпадают: луч имеет бесконечно удаленную двойную точку.

На рис. 24 изображен луч без двойных точек. При вычислении принято: $m = 2,5$, $a = 13,7$.

* Это можно сделать по формулам

$$u = \frac{1}{6m} \left(1 + 2 \cos \frac{\psi + 2\pi i}{3} \right); \quad i = 0,1,2,$$

$$\text{где} \quad \cos \psi = 1 - 54 \frac{m^2}{a^2}.$$

Предположим, что $m \ll a$. В этом случае для корней полинома $f(u)$ можно принять приближенные значения

$$u_1 = \frac{m}{a^2} - \frac{1}{a}; \quad u_2 = \frac{m}{a^2} + \frac{1}{a}; \quad u_3 = \frac{1}{2m} - \frac{2m}{a^2},$$

при помощи которых находим

$$\frac{1}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} = 1 - \frac{m}{a}; \quad k^2 = \frac{4m}{a}; \quad \Phi_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{m}{2a};$$

$$\int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{m}{a}\right) - \frac{m}{a}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{m}{a}\right).$$

Угол между асимптотическими направлениями (6,6,5) оказывается равным

$$\theta = \frac{4m}{a}. \quad (6,6,7)$$

Этой формулой Эйнштейна [1] определяется основной оптический эффект ОТО — искривление светового луча, проходящего вблизи массивного тела. В единицах системы CGS формула Эйнштейна имеет вид

$$\theta = \frac{4\gamma M}{c^2 a}. \quad (6,6,8)$$

Для луча, касательного к краю Солнца, угол отклонения составляет 1,75.

Найдем приближенное уравнение луча при $m \ll a$.

Как указывалось, экстремальная точка луча определяется условием $u = u_2$, из которого следует $\Phi = \frac{\pi}{2}$. Для полярного угла этой точки каждая из формул (6,6,4) дает

$$\Phi_m = \Phi_0 + \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right).$$

Поэтому обе формулы можно заменить одним уравнением

$$\pm (\Phi - \Phi_m) = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \quad (6,6,9)$$

Входящий в это равенство эллиптический интеграл приближенно выражается формулой

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \Phi \left(1 + \frac{m}{a}\right) - \frac{m}{a} \sin \Phi \cos \Phi.$$

Следовательно, вместо (6,6,9) можно написать следующее приближенное уравнение:

$$\pm (\varphi - \varphi_m) = \pi - 2\Phi + \frac{m}{a} \sin 2\Phi,$$

откуда с той же степенью точности вытекает

$$\cos(\varphi - \varphi_m) = -\cos 2\Phi - \frac{m}{a} \sin^2 2\Phi.$$

Ограничиваясь первой степенью отношения $\frac{m}{a}$, имеем

$$\cos(\varphi - \varphi_m) = -\cos 2\Phi - \frac{m}{a} \sin^2(\varphi - \varphi_m).$$

Исключив переменную Φ , окончательно получим

$$u = \frac{1}{p} + \frac{1}{a} \cos(\varphi - \varphi_m), \quad (6,6,10)$$

где принято

$$p = \frac{a^2}{m} [1 + \sin^2(\varphi - \varphi_m)].$$

Вблизи центра гравитации, когда $\varphi - \varphi_m \simeq 0$, кривая (6,6,10) отвечает уравнению

$$r = \frac{\frac{a^2}{m}}{1 + \frac{a}{m} \cos(\varphi - \varphi_m)}$$

и совпадает с гиперболой, имеющей эксцентриситет $\frac{a}{m}$ и вещественную полуось m .

Вдали от центра, когда $\varphi - \varphi_m \simeq \frac{\pi}{2}$, световой луч имеет форму гиперболы

$$r = \frac{\frac{2a^2}{m}}{1 + \frac{2a}{m} \cos(\varphi - \varphi_m)}$$

с эксцентриситетом $\frac{2a}{m}$ и вещественной полуосью $\frac{m}{2}$.

Угол между асимптотами первой гиперболы равен $\theta_1 = \frac{2m}{a}$, тогда как асимптоты второй гиперболы образуют угол $\theta_2 = \frac{4m}{a}$, совпадающий с (6,6,7). На рис. 25 изображены обе предельные гиперболы и расположенный между ними луч. Графики построены для $m = 2,5$, $a = 10$.

В принятом приближении первая гипербола совпадает с ньютоновой. Действительно, уравнение гиперболической орбиты в поле тяготения центральной массы M имеет вид

$$r = \frac{A(e^2 - 1)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_m)},$$

где действительная полуось A связана со скоростью соотношением

$$v^2 = \gamma M \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{A} \right),$$

а эксцентриситет выражается формулой

$$e = \frac{\sqrt{A^2 + a^2}}{A},$$

в которой a — длина перпендикуляра, опущенного из фокуса на асимптоту.

Положив $v = c$ при $r = \infty$ и вводя релятивистские единицы, получим $A = \frac{\gamma M}{c^2} = m$, $e = \frac{\sqrt{m^2 + a^2}}{m} = \frac{a}{m}$.

Искривление световых лучей вблизи массивного тела является одним из основных эффектов ОТО, доступных эмпирической проверке. Угол отклонения луча определяют, измеряя смещения звезд на фотографиях, сделанных во время полного солнечного затмения.

Наибольшее смещение ($1''.75$) должна испытать звезда, наблюдающаяся непосредственно у края солнечного диска. Однако практически приходится довольствоваться звездами, расположенными на тех или других расстояниях от края Солнца. Измеренные при этом смещения нетрудно редуцировать на край солнечного диска.

Впервые формула (6,6,8) проверялась по наблюдениям солнечного затмения 29 мая 1919 г. Измерение фотографий, сделанных на трех различных инструментах, позволило получить три независимые оценки. Две из них составили $1''.98 \pm 0''.12$ и $1''.61 \pm 0''.3$, что очень хорошо согласуется с теоретическим значением. Третья дала $0''.86 \pm 0''.1$, т. е. только половину ожидаемого значения. Однако эта оценка считается гораздо менее уверенной, поскольку она основана на фотографии, полученной в очень неблагоприятных условиях.

Новые определения были основаны на наблюдениях солнечного затмения 21 сентября 1922 г. экспедицией Ликской обсерватории. Их результаты ($1''.75 \pm 0''.3$, $1''.77 \pm 0''.3$; $1''.72 \pm 0''.11$; $1''.82 \pm 0''.15$) превосходно согласуются с формулой (6, 6, 8). Вместе с тем измерение фотографий, полученных на Суматре экспедицией Фрейнд-

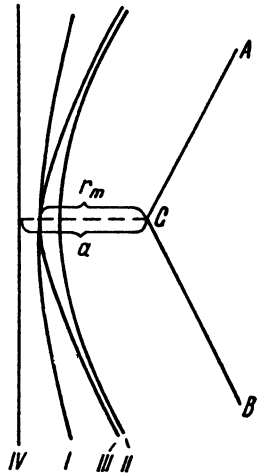


Рис. 25.

лиха во время солнечного затмения 9 мая 1929 г., привело к получению величины $2'',24 \pm 0'',10$, которая почти в полтора раза превосходит теоретическую. Чрезмерно большой угол отклонения получил также А. А. Михайлов, наблюдавший затмение 19 июня 1936 г. ($2'',74 \pm 0'',26$).

Как полагают, значительные ошибки в определении смещения звезд могут быть вызваны разностью атмосферной рефракции в момент затмения и в день, когда для сравнения производилось контрольное фотографирование того же участка неба. Во всяком случае, учитывая результаты других измерений (например, Ван-Бисбрука, который по наблюдению затмения 25 февраля 1952 г. в Хартуме получил $1'',70 \pm 0'',10$), в настоящее время нельзя высказать обоснованные сомнения в правильности формулы (6,6,8). Только новые наблюдения и их тщательная обработка могут привести к окончательному решению вопроса.

7. Принцип Допплера. В формулировке СТО принцип Допплера связывает частоты или длины волн излучения, измеренные движущимися друг относительно друга наблюдателями. Если один из наблюдателей неподвижен по отношению к источнику излучения, то этот принцип представляет собой соотношение между собственной длиной волны (т. е. длиной волны, измеренной в системе отсчета источника) и длиной волны, которая измерена наблюдателем, движущимся с заданной относительной скоростью.

В ОТО длина волны излучения зависит не только от скоростей источника и наблюдателя в моменты излучения и наблюдения светового импульса соответственно, но также от геометрии пространственно-временного континуума, т. е. от поля гравитации.

Пусть геометрия пространственно-временного континуума задана метрическим тензором g_{ij} . В точке x_1^σ континуума источник радиации, движущийся со скоростью $\left(\frac{dx^\sigma}{dx^4}\right)_1$, излучает световой импульс с периодом τ_1 . В точке x_2^σ излученный импульс принимается наблюдателем, который движется со скоростью $\left(\frac{dx^\sigma}{dx^4}\right)_2$ и характеризует этот импульс периодом τ_2 . Как и в дорелятивистской теории, отношение периодов можно заменить отношением соответствующих длин волн. Действительно, если бы излученный и наблюдаемый периоды совпали, то наблюдатель приписал бы световому импульсу длину волны $\lambda = \tau_1 V$, где V — скорость света в точке наблюдения. Измеренному периоду τ_2 соответствует длина волны $\lambda + \delta\lambda = \tau_2 V$. Следовательно,

$$\frac{(\lambda + \delta\lambda)}{\lambda} = \frac{\tau_2}{\tau_1}.$$

Периоды τ_1, τ_2 , измеренные в системах отсчета источника излучения и наблюдателя, можно отождествить с соответствующими значениями пространственно-временного интервала:

$$\tau_1 = ds_1; \quad \tau_2 = ds_2.$$

Согласно основной квадратической форме, имеем

$$ds_\sigma = \left(g_{ij} \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^j}{dx^4} \right)_\sigma^{\frac{1}{2}} dx_\sigma^4,$$

где индекс σ для источника и наблюдателя имеет значение 1, 2 соответственно.

Следовательно,

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dx_2^4}{dx_1^4} \frac{\left[g_{ij} \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^j}{dx^4} \right]_2^{\frac{1}{2}}}{\left[g_{ij} \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^j}{dx^4} \right]_1^{\frac{1}{2}}}. \quad (6,7,1)$$

Эта формула является общим выражением принципа Доплера в ОТО [8]. Входящая в нее производная $\frac{dx_2^4}{dx_1^4}$ должна быть вычислена в зависимости от скоростей источника и наблюдателя, а также формы светового луча.

Приложим уравнение (6,7,1) к случаю, когда поле гравитации является статическим и пространственно-временные координаты образуют ортогональную систему. В этом случае метрический тензор не зависит от временной координаты x^4 ; отличаются от нуля лишь диагональные компоненты этого тензора. Основная квадратическая форма такова:

$$ds^2 = g_{\alpha\alpha} dx^{\alpha 2} + g_{44} dx^{4 2}, \quad (6,7,2)$$

где α — индекс суммирования, принимающий значения 1, 2, 3.

Пространственный элемент определяется формулой $d\sigma^2 = -g_{\alpha\alpha} dx^\alpha$. Поэтому трехмерная скорость находится при помощи соотношения $v^2 = -g_{\alpha\alpha} \left(\frac{dx^\alpha}{dx^4} \right)^{\frac{1}{2}}$, которое позволяет переписать квадратическую форму следующим образом:

$$g_{ij} dx^i dx^j = (V^2 - v^2) dx^{4 2},$$

где V — скорость света, отвечающая условию $ds = 0$.

Входящая в уравнение (6,7,1) сумма $g_{ij} \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^j}{dx^4}$ оказывается при этом равной $V^2 - v^2$, вследствие чего принцип Доплера

принимает вид

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dx_2^4}{dx_1^4} \left(\frac{V_2^2 - v_2^2}{V_1^2 - v_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6,7,3)$$

Здесь v_1, v_2 — скорости источника излучения и наблюдателя, V_1, V_2 — скорость света в точках излучения и наблюдения соответственно.

Переходим к вычислению производной $\frac{dx_2^4}{dx_1^4}$.

Квадратическая форма (6,7,2) при $ds = 0$ дает

$$x_2^4 - x_1^4 = \int_1^2 - \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} dx^\alpha,$$

где пределы интегрирования, обозначенные индексами 1, 2, отвечают точкам излучения и наблюдения светового импульса. Во избежание недоразумений компоненты скорости света обозначены через $\frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4}$.

Если источник излучения и наблюдатель неподвижны, то соединяющий их световой луч имеет неизменную форму, поскольку поле гравитации, по предположению, статично. В этом случае $\frac{dx_2^4}{dx_1^4} = 1$. Если же источник и наблюдатель движутся, то

$$\frac{dx_2^4}{dx_1^4} - 1 = - \left(\frac{g_{\alpha x}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4} \right)_2 \cdot \frac{dx_2^4}{dx_1^4} + \left(\frac{g_{\alpha x}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4} \right)_1.$$

Следовательно,

$$\frac{dx_2^4}{dx_1^4} = \frac{1 - \left[- \frac{g_{\alpha x}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4} \right]_1}{1 - \left[- \frac{g_{\alpha x}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4} \right]_2}.$$

Пусть $d\sigma, \delta\sigma$ — пространственные элементы с контравариантными компонентами $dx^\alpha, \delta x^\alpha$ соответственно. В нашем случае их находят по формулам

$$d\sigma^2 = -g_{\alpha\alpha} dx^{\alpha^2}, \quad \delta\sigma^2 = -g_{\alpha\alpha} \delta x^{\alpha^2},$$

а угол между ними определяется соотношением

$$\cos(d\sigma, \delta\sigma) = - \frac{g_{\alpha\alpha} dx^\alpha \delta x^\alpha}{d\sigma \delta\sigma}.$$

Отождествим $d\sigma$, $\delta\sigma$ с элементом светового луча и перемещением механической частицы, положив $d\sigma = vdx^4$; $\delta\sigma = Vdx^4$. Получим

$$\cos(v, V) = -\frac{g_{\alpha\alpha}}{vV} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4}.$$

Принимая во внимание соотношение $V^2 = g_{44}$, находим

$$-\frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{44}} \frac{\delta x^\alpha}{\delta x^4} \frac{dx^\alpha}{dx^4} = \frac{v}{V} \cos(v, V).$$

Таким образом, искомая производная равна

$$\frac{dx_2^4}{dx_1^4} = \frac{1 - \frac{v_1}{V_1} \cos(v_1, V_1)}{1 - \frac{v_2}{V_2} \cos(v_2, V_2)}.$$

Общее выражение принципа Допплера принимает в статическом поле следующий вид:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{1 - \frac{v_1}{V_1} \cos(v_1, V_1)}{1 - \frac{v_2}{V_2} \cos(v_2, V_2)} \sqrt{\frac{V_2^2 - v_2^2}{V_1^2 - v_1^2}}. \quad (6,7,4)$$

Первый множитель правой части является обобщением дорелятивистского принципа Допплера. Этот множитель показывает, что в доплеровском смещении спектральных линий основную роль играют проекции полных скоростей источника и наблюдателя на направление соединяющего их светового луча в соответствующих точках. При этом должно учитываться влияние поля гравитации как на форму луча, так и на скорость его распространения. Второй множитель в (6,7,4) определяет эффекты полных скоростей, найденные, как известно, еще в СТО.

Если источник излучения и наблюдатель неподвижны, то формула (6,7,4) принимает вид

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \left(\frac{g_{44,2}}{g_{44,1}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6,7,5)$$

и определяет чисто гравитационное смещение спектральных линий, зависящее лишь от различия временных масштабов в точках излучения и наблюдения. В первом приближении, когда принимаются во внимание только линейные члены относительно ньютонового потенциала, гравитационное смещение линий находится по формуле

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = 1 + \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2}, \quad (6,7,6)$$

где Φ_1 , Φ_2 — потенциалы в точках излучения и наблюдения.

Если источник излучения расположен в поле тяготения ($\varphi_1 = \varphi$), а наблюдатель — вне поля ($\varphi_2 = 0$), то происходит «красное» смещение: $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\varphi}{c^2}$. Если же источник находится вне поля ($\varphi_1 = 0$), а наблюдатель — в поле ($\varphi_2 = \varphi$), то смещение будет «фиолетовым»: $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\varphi}{c^2}$.

В астрономических наблюдениях гравитационное смещение может быть измерено в спектрах небесных тел, на поверхности которых потенциал поля тяготения имеет достаточно большую величину. Предположим, что наблюдаемое излучение возникает на поверхности звезды с массой M и радиусом R . Пренебрегая силой тяжести на Земле, можно написать

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\gamma M}{c^2 R} = 7,42 \cdot 10^{-29} \frac{M}{R}. \quad (6,7,7)$$

Для большинства звезд величина «красного» смещения весьма мала. Так, для Солнца относительное смещение составляет $2,1 \cdot 10^{-6}$ что при $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ дает всего $\delta\lambda = 0,008 \text{ \AA}$. Столь малый эффект делает его количественную проверку очень трудной и требует весьма точного учета условий в солнечной атмосфере. Впервые попытка такой проверки произведена в 1924—1926 гг. Ст. Джоном и несколько позднее Эвершедом.

Значительно большее гравитационное смещение должно наблюдаться в спектрах белых карликов. Первое определение выполнил в 1925 г. Адамс, измеривший красное смещение линий в спектре спутника Сириуса. Если для этой звезды принять $M = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$, $R = 1,7 \cdot 10^9 \text{ см}$, то получится $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 8,5 \cdot 10^{-5}$. Абсолютное смещение при $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ составляет приблизительно $0,34 \text{ \AA}$. Допплеровское смещение такой величины соответствует скорости около 25 км/сек , что хорошо согласуется с результатом Адамса, который получил 23 км/сек .

Новые возможности для измерения гравитационного смещения спектральных линий возникли после открытия эффекта Мессбауэра, который позволяет проверить это смещение в лабораторных условиях.

Рассмотрение физической сущности и свойств явления Мессбауэра не входит в нашу задачу. Мы приведем здесь только результаты использования этого эффекта для измерения гравитационного смещения, обусловленного разностью потенциалов поля тяготения Земли в точках, расположенных на различных высотах.

В формуле (6,7,6) положим

$$\varphi_1 = -\frac{\gamma M}{R}; \quad \varphi_2 = \frac{\gamma M}{R+H},$$

где M и R — масса и радиус Земли, H — высота над земной поверхностью. Считая $H \ll R$ и принимая во внимание, что ускорение свободного падения в поле тяжести определяется формулой $g = \frac{\gamma M}{R^2}$, легко получим

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{gH}{c^2}. \quad (6,7,7)$$

В опытах Крэншоу, Шиффера и Уайтхеда при высоте 12,5 м относительное смещение, вычисленное по формуле (6,7,7), составило $1,36 \cdot 10^{-15}$. Измеренное смещение оказалось равным приблизительно $1,30 \cdot 10^{-15}$, что отлично согласуется с указанным теоретическим значением.

8. Общая теория относительности и система Коперника. После разработки Ньютоном основ небесной механики динамический смысл учения Коперника представлялся совершенно ясным, и истинность этого учения не вызывала сомнений. С точки зрения механики Ньютона, гелиоцентризм Солнечной системы состоит в том, что центр массы ее, практически совпадающий с центром Солнца, движется прямолинейно и равномерно. Согласно принципу относительности Галилея, прямолинейное и равномерное перемещение Солнечной системы в целом не влияет на наблюдаемые внутренние движения, тогда как ускоренное движение возбуждало бы силы инерции, которые могут нарушить законы динамики в обычной форме и изменить движение планет и других членов Солнечной системы. Иными словами, при относительности скоростей ускорения имеют в механике Ньютона абсолютный характер.

Таким образом, с ньютоновой точки зрения, основное положение учения Коперника состоит в утверждении, что центр массы Солнечной системы (практически центр Солнца) обладает нулевым ускорением, хотя его постоянная скорость может быть сколь угодно большой. С появлением ОТО эта простая концепция оказалась неудовлетворительной. Многие авторы, основываясь на условии общей ковариантности, высказывали тезис о равноправности систем Коперника и Птолемея. Различие между этими системами объявлялось условным, не имеющим объективного значения и зависящим лишь от субъективных склонностей исследователя.

Следует отметить, что сторонники указанного тезиса отождествляют различие между учениями Коперника и Птолемея с различием между гелио- и геоцентрическими координатами. Такое отождествление и приводит к выводу об эквивалентности этих учений с точки зрения ОТО. Поскольку уравнения ОТО отвечают условию ковариантности, исследователь может пользоваться гелио- и геоцентрическими координатами, выбирая их по своему усмотрению.

В действительности различие между системами Коперника и Птолемея имеет более глубокий физический смысл, чем различие между соответствующими координатами как способами изучения движения небесных тел. В астрономии успешно пользуются различными координатами, в том числе геоцентрическими. Преобразование гелиоцентрических координат в геоцентрические, весьма часто осуществляемое в астрономии, не означает, конечно, отказа от учения Коперника и возврата к учению Птолемея. Обе системы координат одинаково пригодны для изображения движений и как способы исследования они принципиально равноправны. Однако одна из этих систем координат обладает некоторой *материально обусловленной привилегированностью*, определяющей ее предпочтительность с астрономической точки зрения.

Рассматривая Солнечную систему в отрыве от других космических тел, можно удовлетворительно обосновать главный тезис гелиоцентризма только в том случае, если постулировать существование инерциальных координат, т. е. систем отсчета, в которых выполняются законы динамики Ньютона. В каждой из таких систем отсчета центр массы Солнечной системы движется равномерно и прямолинейно, тогда как планеты имеют значительное ускорение. Однако постулат об инерциальных координатах, не связанных так или иначе с материальными телами, оправдан только в ньютоновой концепции абсолютного пространства. Отказываясь от этой концепции, приходится отвергнуть и постулат об инерциальных координатах, существующих независимо от материальных тел. При этом понятие абсолютного ускорения утрачивается, и потому обычное доказательство гелиоцентризма теряет силу. Для преодоления этой трудности необходимо обосновать понятие инерциальной системы отсчета, не прибегая к ньютоновой концепции абсолютного пространства.

Применение ОТО связано с такой же трудностью. С интересующей нас точки зрения, ОТО не имеет преимуществ по сравнению с механикой Ньютона, поскольку эта теория уточняет движение тел Солнечной системы лишь в деталях, непосредственно не относящихся к различию между гелио- и геоцентрическим учениями. Уравнения поля ОТО построены таким образом, что в первом приближении, которое только и представляет интерес для обоснования гелиоцентризма, они обеспечивают переход к механике Ньютона.

Гелиоцентризм представляет собой механическую особенность определенной системы небесных тел. Поэтому при его обосновании необходимо учитывать физическую сущность *механического движения*, т. е. перемещения одного тела по отношению к другим. Можно сказать, что в механическом движении проявляются пространственно-временные отношения между телами. *Отдельное* тело, рассмат-

риваемое независимо от других тел природы, не находится ни в покое, ни в движении, поскольку оно может покоиться или двигаться только по отношению к чему-либо внешнему. В изолированной системе тел, рассматриваемой в отрыве от внешних космических масс, происходит только внутреннее движение. В случае системы двух тел утверждения «А покоится, В движется», «А движется, В покоится», «А и В обращаются вокруг их неподвижного центра масс» приобретают физический смысл лишь в том случае, если система относится к каким-либо внешним телам. Так, отношение системы Земля — Луна к Солнцу определяет физический смысл утверждения о том, что каждое из двух указанных тел обращается вокруг их общего центра тяжести. Подобным же образом гелиоцентризм Солнечной системы обусловлен отношением этой системы в целом к внешним космическим телам.

В строении космических систем наблюдается резко выраженная структурность. Солнце и планеты с их спутниками, астероиды, кометы и многочисленные мелкие тела составляют обособленную систему, которая отделена от звезд очень большими расстояниями. Взаимные перемещения членов системы обусловлены внутренними причинами и лишь в ничтожной степени зависят от внешних воздействий. Эту особенность Солнечной системы можно назвать *автономностью*. Солнечная система, в свою очередь, является одним из членов космической системы более высокого порядка — Галактики, которая также обладает значительной автономностью в отношении ее внутренних свойств.

Рассмотрим движение Солнечной системы S в поле тяготения Галактики G . Отнесем это движение к системе отсчета, связанной тем или иным способом с G . Например, поместив начало координат в ядро Галактики и совместив одну из координатных плоскостей со средней плоскостью Галактики, можно связать расположенные в этой плоскости оси координат с достаточно удаленными от ядра звездами. При изучении движения системы S необходимо учитывать равенство инертной и тяжелой масс. Поскольку гравитационное притяжение и силы инерции соответственно пропорциональны тяжелой и инертной массам, можно утверждать, что вследствие относительно малых размеров системы S все тела ее, независимо от их положений и масс, а также от принятого выбора галактических координат, в общем поле Галактики имеют одинаковые ускорения. Поэтому если в какой-либо момент времени члены системы S имели одинаковые скорости, то вся система будет длительно двигаться как одно целое. Введем теперь местную систему отсчета, жестко связанную с конфигурацией тел Солнечной системы в какой-либо определенный момент времени. Эту систему отсчета можно назвать *сопутствующей*; обозначим ее через S . Каждое тело, расположенное внутри или вблизи Солнечной системы и не испыты-

вающее притяжения со стороны его членов, двигалось бы относительно S равномерно и прямолинейно. Поэтому сопутствующая система S является местной инерциальной системой отсчета. При изучении движений внутри Солнечной системы ускорения в сопутствующих координатах можно было бы назвать абсолютными, поскольку их вычисление основано на обычных законах механики Ньютона. Если одно из тел системы S имеет достаточно большую массу, тогда как массы других тел относительно малы, то в сопутствующей системе отсчета первое будет практически покоиться, а остальные — обращаться вокруг него по замкнутым орбитам. Таким образом, ньютоново обоснование гелиоцентрического учения сохраняет значение и при отказе от концепции абсолютного пространства, если только под инерциальной системой подразумевается не абстрактная система координат, не связанная с материальными телами, а конкретная местная система отсчета, обусловленная внешними космическими массами [9].

Изложенные рассуждения основаны на механике Ньютона и на пропорциональности инертной и тяжелой масс. Обоснование системы Коперника с точки зрения ОТО отличалось бы от этих рассуждений только по форме, поскольку для такого обоснования достаточно первое приближение, в котором количественные выводы ОТО совпадают с результатами механики Ньютона.

Итак, гелиоцентризм Солнечной системы представляет собой динамическую закономерность, имеющую определенный физический смысл только по отношению к космической системе более высокого порядка. Если рассматривать Солнечную систему в отрыве от окружающих ее космических масс, то эта закономерность имела бы физический смысл лишь при абсолютности ускорений.

Некоторые авторы считают, что доказательство абсолютности ускорений содержится в известной работе В. А. Фока [10]. В этой работе рассматривается задача о движении конечных масс в ОТО. Основной частью исследования является приближенное интегрирование уравнений поля Эйнштейна для системы нескольких тел, рассматриваемых как особые области, внутри которых тензор энергии-импульса отличен от нуля. Вычисления выполняются в так называемых гармонических координатах, в которых компоненты метрического тензора удовлетворяют четырем условиям вида

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (g^{ai} \sqrt{-g}) = 0; \quad i = 1, \dots, 4.$$

Поскольку изучаемая система тел считается изолированной, принимается, что на бесконечности метрика пространства-времени вырождается в эвклидову. Допускается, что к системе не приходят внешние гравитационные волны, вследствие чего на бесконечности выполняется особое условие излучения.

В этой важной работе показано, что перечисленные три условия (гармоничность координат, псевдоэвклидова метрика на бесконечности, условие излучения) с точностью до преобразования Лоренца определяют координаты, инерциальные для рассматриваемой системы тел. В таких координатах Солнечная система отвечает учению Коперника. Это заключение показывает, что уравнения поля ОТО допускают выбор группы систем отсчета, которые в данном приближении играют роль инерциальных координат. Однако такой вывод не решает проблемы гелиоцентризма Солнечной системы, поскольку материальная обусловленность указанной группы систем отсчета остается невыясненной. Привилегированность этих систем обусловлена, как мы видели, внешними космическими массами.

9. Импульс и энергия поля гравитации. Переходим к вопросу о количестве движения и энергии гравитационного поля, имеющему в ОТО большое принципиальное значение.

В теории Ньютона важными характеристиками механической системы являются понятия количества движения и энергии, которые при определенных условиях удовлетворяют известным законам сохранения. Пусть, например, дана система материальных точек, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона и не испытывающих действия со стороны внешних сил и каких-либо сил другой природы. Обозначив массы материальных точек через m_i , а их декартовы координаты через x_i, y_i, z_i , можно написать закон движения так:

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad m_i \ddot{y}_i = - \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad m_i \ddot{z}_i = - \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

где U — потенциальная энергия системы, обусловленная гравитационным притяжением между всеми ее частицами и заданная известной формулой

$$U = - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Пользуясь этим законом движения, нетрудно показать, что величины

$$P_1 = \sum m_i \dot{x}_i; \quad P_2 = \sum m_i \dot{y}_i; \quad P_3 = \sum m_i \dot{z}_i;$$

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U \quad (6,9,1)$$

остаются при движении системы постоянными. Первые три из них представляют собой проекции вектора количества движения, последняя равна полной энергии системы.

В более общей форме, пригодной как в случае дискретного, так и непрерывного распределения масс, выражение для гравитацион-

ной энергии системы можно написать следующим образом:

$$U = -\frac{1}{2} \int \rho \varphi d\tau, \quad (6,9,2)$$

где ρ — объемная плотность массы, φ — гравитационный потенциал, $d\tau$ — элемент объема.

Гравитационная энергия (6,9,2) принадлежит данной механической системе в целом, и вопрос о более точной локализации этой энергии или ее частей не имеет сколько-нибудь существенного значения. Во всяком случае, с точки зрения механики Ньютона энергию гравитационных взаимодействий не следует, вероятно, относить к полю тяготения как таковому, т. е. считать, что она принадлежит пространству, в котором проявляется гравитационное действие тел данной механической системы. В то же время количественная оценка величины (6,9,2) может быть выполнена путем интегрирования по всему пространству, в соответствии с чем имеется формальная возможность приписать эту величину полю гравитации и ввести понятие плотности энергии поля.

Учитывая уравнение Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, можно переписать соотношение (6,9,2) в виде

$$U = \frac{1}{8\pi\gamma} \int \varphi \nabla^2\varphi d\tau.$$

Если воспользоваться формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) = (\operatorname{grad} \varphi)^2 + \varphi \nabla^2\varphi,$$

то получится

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) d\tau - \frac{1}{8\pi\gamma} \int f^2 d\tau,$$

где через $f = \operatorname{grad} \varphi$ обозначена напряженность поля тяготения.

Первый из интегралов правой части можно преобразовать по формуле Остроградского — Гаусса в поверхностный интеграл

$$\int_S \varphi (\operatorname{grad} \varphi)_n dS,$$

взятый по любой замкнутой поверхности, заключающей рассматриваемую механическую систему. Поскольку в (6,9,2) интегрировать можно по всему пространству, поверхность S можно отождествить со сферой бесконечно большого радиуса, вследствие чего $(\operatorname{grad} \varphi)_n = 0$. Поэтому

$$U = -\frac{1}{8\pi\gamma} \int f^2 d\tau, \quad (6,9,3)$$

это и доказывает наше утверждение. Гравитационная энергия системы тел находится путем интегрирования квадрата напряженно-

сти поля по всему пространству; величину $-\frac{f^2}{8\pi\gamma}$ можно назвать плотностью энергии поля.

Естественно поставить вопрос о том, можно ли ввести понятие импульса и энергии гравитационного поля в ОТО. При этом необходимо потребовать, чтобы эти определения позволили выполнить релятивистское обобщение законов сохранения механики Ньютона.

В СТО, где гравитационные взаимодействия не учитываются, релятивистское определение импульса и энергии механической системы имеет, согласно (5,4,6), следующий вид:

$$P_i = \int T_i^4 d\tau, \quad (6,9,4)$$

где T_i^4 — смешанные компоненты тензора энергии-импульса, контравариантные компоненты которого находятся при помощи (5,4,2).

При $i = 1, 2, 3$ P_i определяют количество движения системы, P_4 — полная масса (энергия) системы. Как уже отмечалось в главе V, п. 4, исчезновение дивергенции тензора энергии-импульса, т. е. условие

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0; \quad i = 1, \dots, 4, \quad (6,9,5)$$

которое мы назвали законом сохранения этого тензора, обеспечивает постоянство каждой из величин (6,9,4).

В ОТО закон сохранения тензора энергии-импульса имеет более сложную форму, требуя исчезновения его ковариантной дивергенции

$$T_{i/\alpha}^\alpha = 0; \quad i = 1, \dots, 4. \quad (6,9,6)$$

Это условие уже не обеспечивает постоянства интегралов $\int T_i^4 d\tau$. Таким образом, при учете гравитационных взаимодействий определение (6,9,4) оказывается непригодным, поскольку оно не удовлетворяет законам сохранения. В частности, интеграл $\int T_i^4 d\tau$ не может служить мерой энергии механической системы в ОТО. Необходимо найти обобщение, которое обеспечивает выполнимость законов сохранения при римановой метрике пространственно-временного континуума и, в случае квадратической формы Минковского, переходит в интеграл (6,9,4).

Введем смешанный тензор второго порядка

$$F_i^k = T_i^k \sqrt{-g} \quad (6,9,7)$$

и составим дивергенцию

$$\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \sqrt{-g} \frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} T_i^\alpha.$$

Условие (6,9,6) в развернутой форме таково:

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha T_i^\beta - \Gamma_{\alpha i}^\beta T_\beta^\alpha = 0.$$

Если внести сюда соотношение

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\beta},$$

вытекающее из определения символа Кристоффеля, то получится

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} T_i^\alpha + \Gamma_{i\beta}^\alpha T_\alpha^\beta.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \Gamma_{i\beta}^\alpha F_\alpha^\beta.$$

Напишем символ Кристоффеля в развернутой форме и выполним указанное в правой части равенства суммирование. После очевидного упрощения предыдущее соотношение примет следующий вид:

$$\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^i} F_\alpha^\beta,$$

или, если воспользоваться тождеством

$$g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^i} + g_{\beta\gamma} \frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial x^i} = 0,$$

которое непосредственно вытекает из равенства $g^{\alpha\gamma} g_{\beta\gamma} = \delta_\beta^\alpha$,

$$\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i}. \quad (6,9,8)$$

Введем теперь систему двухзначных величин t_i^α , подчинив их уравнениям

$$\frac{\partial t_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} \quad (6,9,9)$$

и требованию, чтобы при эвклидовой метрике пространства-времени эти величины имели в галилеевых координатах нулевые значения. Возможность такого выбора величин t_i^α выяснится ниже, когда для них будут составлены соответствующие формулы.

Сравнивая (6,9,8) и (6,9,9), находим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (F_i^\alpha + t_i^\alpha) = 0, \quad (6,9,10)$$

аналогичное закону сохранения (6,9,5) СТО.

Образум величини

$$P_i = \int (F_i^A + t_i^A) dt, \quad (6,9,11)$$

в которых интегрирование выполняется по всему пространству.

Приложим (6,9,11) к конечной механической системе. Необходимо учитывать, что F_i^A отличны от нуля лишь в тех областях пространства, где $T_i^A \neq 0$, т. е. внутри тел рассматриваемой системы. Величины t_i^A могут иметь отличные от нуля значения на всех конечных расстояниях от системы тел, но в бесконечно удаленных точках, где метрика пространства-времени является эвклидовой, они принимают, по условию, нулевые значения. Поэтому, повторяя рассуждения главы V, п. 4, можно убедиться в том, что соотношение (6,9,10) является условием постоянства четырех величин (6,9,11). Последние и представляют собой обобщенные выражения количества движения и полной энергии (массы) механической системы, отвечающие законам сохранения ОТО.

При переходе к СТО, когда гравитация не учитывается и метрика пространственно-временного континуума считается эвклидовой, эти выражения переходят в галилеевы координатах непосредственно в (6,9,4), а обобщенный закон сохранения (6,9,10) превращается в (6,9,5).

Итак, в ОТО количество движения и энергия механической системы определяются не только тензором F_i^k , характеризующим распределение и движение тел этой системы, но и величинами t_i^k , которые отличны от нуля также вне тел и являются некоторой характеристикой созданного системой тел поля гравитации. Рассмотрим эти величины подробнее.

Согласно (6,9,9), имеем

$$\frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}.$$

Входящий в правую часть этого равенства тензор энергии-импульса выразим через компоненты метрического тензора и их производные, воспользовавшись уравнениями поля в форме (5,7,7). Выполнив подстановку, получим

$$16\pi \frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\sqrt{-g} \left(\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} \right). \quad (6,9,12)$$

После преобразования

$$g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k},$$

основанного на известном правиле дифференцирования определителя, можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} &= \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{g^{\sigma\tau}}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^k} + g^{\sigma\tau} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} g^{\sigma\tau}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} q_k^{\sigma\tau}, \end{aligned}$$

где, как и в главе V (см. (5,7,2)), приняты обозначения

$$q^{ij} = g^{ij} \sqrt{-g}; \quad q_k^{ij} = \frac{\partial q^{ij}}{\partial x^k}.$$

Теперь равенство (6,9,12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} 16\pi \frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} &= -q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} + q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} q_k^{\sigma\tau} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} \frac{\partial q_k^{\sigma\tau}}{\partial x^\alpha}. \end{aligned}$$

Функция Лагранжа выражена через величины $q^{\sigma\tau}$ и $q_\alpha^{\sigma\tau}$. Поэтому, принимая во внимание очевидное соотношение

$$\frac{\partial q_k^{\sigma\tau}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}}{\partial x^k},$$

легко видеть, что сумма двух последних членов предыдущего равенства представляет собой производную

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\delta_k^\alpha L).$$

Следовательно,

$$16\pi \frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(-q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} + \delta_k^\alpha L \right). \quad (6,9,13)$$

Полученное уравнение эквивалентно основному условию (6,9,9), которому должна отвечать система величин t_j^i . С точностью до члена с исчезающей расходимостью решением этого уравнения является

$$16\pi t_j^i = -q_j^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\sigma\tau}} + \delta_j^i L. \quad (6,9,14)$$

Нетрудно убедиться в том, что (6,9,14) удовлетворяет и второму условию, предусмотренному в определении величин t_j^i : при эвкли-

довой метрике пространства-времени эти величины принимают в галилеевых координатах нулевые значения.

Итак, мы нашли систему двухзначковых величин t_i^j , которые позволяют составить обобщенные выражения количества движения и энергии механической системы, отвечающие законам сохранения ОТО.

Необходимо подчеркнуть, что совокупность этих величин не образует тензора. Если воспользоваться определением (6,9,14) в другой системе координат, то вычисленные таким образом величины t_i^j не будут связаны с t_i^j обычными формулами преобразования тензора второго порядка. Для доказательства этого нет необходимости выполнять подробные вычисления. Достаточно вспомнить, что всегда имеется возможность найти систему координат, которая является галилеевой в какой-либо произвольно выбранной точке пространственно-временного континуума. Согласно определению (6,9,14), в этой точке выполняется равенство $t_i^j = 0$. Если бы величины t_i^j составляли тензор, то уравнение $t_i^j = 0$ имело бы место в данной точке во всех системах координат. Между тем известно, что в общих координатах $t_i^j \neq 0$, что и свидетельствует о нетензорной природе рассматриваемых величин.

Величины t_i^j выражают влияние гравитационных взаимодействий на количество движения и энергию (массу) системы. Совокупность этих величин принято называть псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Если допустить, что тензор T_i^j определяет количество движения и энергию системы масс (с учетом соответствующей метрики пространственно-временного континуума), то псевдотензор t_i^j должен определять импульс и энергию гравитационного поля этой системы. Однако такое утверждение условно. Не следует забывать, что совокупность величин t_i^j представляет собой формальную поправку к тензору энергии-импульса, введение которой продиктовано стремлением обеспечить сохранение импульса и энергии системы гравитирующих масс. Нетензорный характер этой поправки не позволяет приписать ей непосредственный физический смысл, поскольку в ОТО физические величины должны иметь тензорную природу.

Введенные с помощью соотношений (6,9,11) величины P_i следует рассматривать как некоторые количественные характеристики механической системы в целом, включая в понятие системы не только входящие в ее состав тела, но также связанную с ними метрику пространства-времени, а следовательно, и гравитацию.

В качестве иллюстрации вычислим энергию стационарной системы в ньютоновом приближении.

Пользуясь релятивистскими единицами, квадратическую форму,

отвечающую статическому полю рассматриваемой системы, можно написать в виде

$$ds^2 = -(1 + 2\varphi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + (1 - 2\varphi)dt^2, \quad (6,9,15)$$

где φ — ньютонов потенциал.

Обозначим через ρ_0 собственную плотность. Масса системы, вычисленная без учета гравитации, равна $m_0 = \int \rho_0 d\tau$. В координатах x, y, z , отвечающих квадратической форме (6,9,15), элемент объема определяется формулой $d\tau = \sqrt{g} dx dy dz$, где g — определитель 3-го порядка, образованный компонентами соответствующего метрического тензора трехмерного пространства. Внося $g = (1 + 2\varphi)^3$, получим с принятой точностью $\sqrt{g} = 1 + 3\varphi$, и, следовательно, $dxdydz = (1 - 3\varphi) d\tau$.

Согласно (6,9,11), полная энергия системы

$$P_4 = \iiint (F_4^4 + t_4^4) dx dy dz.$$

В случае статической системы по формуле (5,4,1) имеем $T_4^4 = \rho_0$. Определитель четырехмерного метрического тензора, соответствующего квадратической форме (6,9,15), равен $g = -(1 + 4\varphi)$. Поэтому $F_4^4 = (1 + 2\varphi)\rho_0$. Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля находим по формуле (6,9,14), которая в нашем случае дает $t_4^4 = \frac{1}{16\pi} L$. Вычисление функции Лагранжа (5,7,1) применительно к квадратической форме (6,9,15) приводит к значению $L = 2(\text{grad } \varphi)^2$. Следовательно, $t_4^4 = \frac{1}{8\pi}(\text{grad } \varphi)^2$. Энергия системы равна

$$P_4 = \int \rho_0 d\tau - \int \varphi \rho_0 d\tau + \frac{1}{8\pi} \int (\text{grad } \varphi)^2 d\tau.$$

В двух последних интегралах с принятой степенью точности элемент объема можно отождествить с произведением $dxdydz$.

Воспользовавшись соотношением

$$(\text{grad } \varphi)^2 = \text{div}(\varphi \text{ grad } \varphi) - \varphi \nabla^2 \varphi$$

и уравнением Пуассона $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho_0$, получим

$$P_4 = m_0 - \frac{1}{2} \int \varphi \rho_0 d\tau + \frac{1}{8\pi} \int \text{div}(\varphi \text{ grad } \varphi) d\tau.$$

С помощью преобразования Остроградского — Гаусса нетрудно убедиться в том, что последний интеграл, по условию, на бесконечности исчезает. Таким образом, окончательно имеем

$$P_4 = m_0 - \frac{1}{2} \int \varphi \rho_0 d\tau. \quad (6,9,16)$$

В рассматриваемом приближении полная энергия (масса) системы отличается от величины m_0 потенциальной энергией гравитационных взаимодействий.

10. Гравитационные волны. При статическом распределении массы поле метрического тензора в данной системе отсчета неизменно. Примерами таких полей могут служить внешнее и внутреннее решения Шварцшильда, рассмотренные в главе V. Если же распределение масс переменное, то в гравитационном поле происходят соответствующие изменения. С точки зрения ОТО, такие изменения представляют собой возмущения метрики пространства-времени, которые, как мы видели в главе V, распространяются с конечной скоростью, равной скорости света. Особенный интерес представляют в этом отношении системы, в которых происходят периодические движения. В подобных случаях механическая система служит источником периодических изменений в метрике пространственно-временного континуума, получивших название г р а в и т а ц и о н н ы х волн.

Гравитационные волны можно определить как возмущения метрики, которые распространяются с конечной скоростью и переносят энергию, вызывая соответствующую убыль энергии возбуждающей их системы

Вопрос о свойствах и особенностях распространения волн гравитации имеет значительный научный интерес. Однако в настоящее время само существование гравитационных волн нельзя считать бесспорно доказанным, поскольку их практическое наблюдение остается пока невозможным, а теоретические аргументы в пользу их существования не безукоризненны.

Впервые вопрос о гравитационных волнах в ОТО был рассмотрен Эйнштейном в 1916 г. на основе развитого им приближенного метода интегрирования уравнений поля [11]. Более точный анализ, дополненный рассмотрением излучения гравитационных волн и их действия на механические системы, выполнен Эйнштейном два года спустя [12]. В последующие десятилетия изучением гравитационных волн с точки зрения ОТО занимались многие авторы. Интерес к вопросу особенно усилился в последние годы, когда наряду с теоретическими исследованиями разрабатывались установки, предназначенные для практического обнаружения и генерации гравитационных волн. Современное состояние вопроса подробно изложено в монографии Д. Вебера [13].

Ниже рассматривается приближенное нестатическое решение уравнений поля, отвечающее плоским гравитационным волнам в вакууме.

Пусть метрика пространства-времени мало отличается от евклидовой, вследствие чего можно принять $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, где δ_{ij} — галилеевы значения компонент метрического тензора, соответству-

ющие СТО, h_{ij} — малые поправки к ним. В главе V, п. 5 было показано, что при некотором выборе координат тензор Риччи в линейном приближении определяется формулой

$$R_i^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_i^k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial z^2} \right);$$

$$h_i^k = \delta^{ik} h_{ik}.$$

При этом уклонения h_i^k удовлетворяют дополнительному условию

$$\frac{\partial^2 h_i^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} = 0; \quad h = \delta^{\alpha\alpha} h_{\alpha\alpha}. \quad (6,10,1)$$

Уравнения поля в вакууме приводятся в нашем случае к системе трехмерных волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial t^2} = 0, \quad (6,10,2)$$

описывающих некоторый волновой процесс, распространяющийся с единичной скоростью, т. е. со скоростью света.

Рассмотрим плоские гравитационные волны, отвечающие хорошо известному решению волнового уравнения

$$h_i^k = h_i^k(\theta); \quad \theta = t - k_1 x - k_2 y - k_3 z, \quad (6,10,3)$$

где k_1, k_2, k_3 — постоянные, удовлетворяющие условию $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$.

Поправки h_i^k определяются фазой θ , которая в данный момент имеет одинаковые значения во всех точках фазовой плоскости

$$k_1 x + k_2 y + k_3 z = t - \theta.$$

Величины k_1, k_2, k_3 представляют собой направляющие косинусы нормали к фазовой плоскости. Плоскость, соответствующая данному значению фазы, перемещается со скоростью света, сохраняя неизменную ориентировку в пространстве.

Система поправок h_{ik} должна удовлетворять условию (6,10,1)

$$\delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\delta^{\alpha\alpha} h_{i\alpha} - \frac{1}{2} \delta_i^\alpha h \right) = 0.$$

Учитывая очевидные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\theta}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = -k_1 \frac{d}{d\theta}, \dots,$$

можно написать

$$k_1 \frac{d}{d\theta} \left(h_{11} + \frac{1}{2} \delta_1^1 h \right) + k_2 \frac{d}{d\theta} \left(h_{12} + \frac{1}{2} \delta_1^2 h \right) + \\ + k_3 \frac{d}{d\theta} \left(h_{13} + \frac{1}{2} \delta_1^3 h \right) + \frac{d}{d\theta} \left(h_{14} - \frac{1}{2} \delta_1^4 h \right) = 0.$$

При изучении волновых процессов нас интересуют только переменные части соответствующих величин. Поэтому, опуская постоянные интегрирования, имеем

$$k_1 \left(h_{11} + \frac{1}{2} \delta_1^1 h \right) + k_2 \left(h_{12} + \frac{1}{2} \delta_1^2 h \right) + \\ + k_3 \left(h_{13} + \frac{1}{2} \delta_1^3 h \right) + h_{14} - \frac{1}{2} \delta_1^4 h = 0.$$

В развернутой форме эти условия принимают следующий вид:

$$k_1 \left(h_{11} + \frac{1}{2} h \right) + k_2 h_{12} + k_3 h_{13} + h_{14} = 0; \\ k_1 h_{21} + k_2 \left(h_{22} + \frac{1}{2} h \right) + k_3 h_{23} + h_{24} = 0; \\ k_1 h_{31} + k_2 h_{32} + k_3 \left(h_{33} + \frac{1}{2} h \right) + h_{34} = 0; \\ k_1 h_{41} + k_2 h_{42} + k_3 h_{43} + h_{44} - \frac{1}{2} h = 0. \quad (6,10,4)$$

Десять поправок к галилеевым значениям метрического тензора связаны четырьмя соотношениями (6,10,4); шесть поправок должны быть найдены независимо, с учетом структуры изучаемых волн.

Если гравитационные волны существуют как реальный физический процесс, связанный с переносом энергии, то генерирующая их механическая система должна испытывать убыль энергии. Дадим количественную оценку энергии гравитационного излучения. При этом необходимо иметь в виду, что приводимая здесь формула до некоторой степени условна, поскольку она основана на понятии псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, физический смысл которого остается, как указывалось выше, не вполне ясным.

Пусть источником волн гравитации служит изолированная механическая система, все члены которой находятся внутри некоторого конечного объема τ и не выходят за его пределы. Составим интеграл

$$E = \int (F_4^4 + t_4^4) dt, \quad (6,10,5)$$

равный энергии системы, содержащейся в указанном объеме.

Естественно принять, что производная от этого интеграла по времени определяет убыль энергии системы вследствие гравитационного излучения.

Согласно закону сохранения (6,9,10), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (F_4^i + t_4^i) = - \frac{\partial}{\partial x} (F_4^1 + t_4^1) - \frac{\partial}{\partial y} (F_4^2 + t_4^2) + \frac{\partial}{\partial z} (F_4^3 + t_4^3),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} (F_4^i + t_4^i) = - \operatorname{div} \mathbf{A},$$

где через \mathbf{A} обозначен трехмерный вектор с проекциями $F_4^i + t_4^i$, $i = 1, 2, 3$.

Дифференцируя по времени интеграл (6,10,5), имеем

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau.$$

Воспользовавшись формулой Остроградского — Гаусса, получим

$$\frac{dE}{dt} = - \int_S \mathbf{A}_n dS, \quad (6,10,6)$$

где интегрирование выполняется по поверхности S , ограничивающей объем τ .

Поскольку тензор энергии-импульса во всех точках граничной поверхности равен нулю, вектор \mathbf{A} в формуле (6,10,6) имеет проекции t_4^1, t_4^2, t_4^3 . Этот вектор играет в нашей теории такую же роль, как вектор Пойтинга в электродинамике, хотя, в отличие от последнего, он не имеет, как уже сказано, ясного физического смысла. В частности, его модуль нельзя конечно отождествить с плотностью потока энергии в соответствующей точке.

Допустим, что излучающая гравитационная волна сосредоточена вблизи начала координат, а поверхность S является сферой, радиус R которой весьма велик по сравнению с размерами системы. Во всех случаях, которые могут представить интерес, поле гравитации является слабым, и потому при вычислении потока (6,10,6) можно пользоваться обычными формулами евклидовой геометрии. Направляющие косинусы внешней нормали к поверхности сферы равны k_1, k_2, k_3 , элемент поверхности определяется произведением $R^2 d\omega$, где $d\omega$ — телесный угол, под которым этот элемент виден из начала координат. Вместо (6,10,6) можно написать

$$\frac{dE}{dt} = - R^2 \int_{4\pi} (k_1 t_4^1 + k_2 t_4^2 + k_3 t_4^3) d\omega. \quad (6,10,7)$$

Применяя это уравнение, необходимо вычислить величины h_4^i , согласно соотношению (6,9,14), найдя предварительно решение уравнений поля для рассматриваемой механической системы.

Достаточную точность обеспечивает решение Эйнштейна (5,10,2), которое в нашем случае можно написать в виде

$$h_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i h = -\frac{4}{R} \iiint T_k^i(x', y', z', t - R) dx' dy' dz'. \quad (6,10,8)$$

Однако и при таком упрощении вычисления остаются довольно громоздкими. С целью их дальнейшего упрощения считают, что на расстоянии R от излучающей системы гравитационные волны являются практически плоскими, а потому при вычислении t_4^i можно пользоваться решением вида (6,10,3). Обыкновенно принимают, что в излучающей системе происходят какие-либо периодические движения (системой является линейный осциллятор, вращающийся стержень, двойная звезда и т. п.). Поэтому периодическими функциями времени оказываются и величины t_4^i . Вследствие малости эффектов гравитационного излучения временные колебания не представляют интереса, поэтому в уравнение (6,10,7) вносят усредненные значения t_4^i .

Для выяснения принципиальной стороны вопроса дальнейшие технические подробности вычислений не имеют большого значения, и потому ввиду их сложности они здесь не приводятся. Вместе с тем мы укажем конечные результаты вычислений в двух простых случаях, которые могут служить характеристикой величины рассматриваемых эффектов.

Однородный прямолинейный стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр стержня. Убыль энергии стержня, обусловленная излучением гравитационных волн, равна

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32\gamma}{5c^5} J^2 \omega^6, \quad (6,10,9)$$

где J — момент инерции стержня относительно указанной оси.

Эта формула показывает, что убыль энергии вследствие гравитационного излучения крайне мала. Сравнивая величину (6,10,9) с кинетической энергией стержня $E = \frac{1}{2} J \omega^2$, имеем

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -\frac{64\gamma}{5c^5} J \omega^4.$$

Для стержня с массой 1 кг и длиной 2 м при $\omega = 100\pi$ (50 об/сек) получаем

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \approx -1,1 \cdot 10^{-42} \text{ сек}^{-1}.$$

В течение года ($3,1 \cdot 10^7$ сек) стержень должен потерять около $3 \cdot 10^{-35}$ своей вращательной энергии.

В качестве второго примера рассмотрим систему двух тел, обращающихся по круговым орбитам вокруг их общего центра тяжести. Потеря энергии такой системы (двойной звездой) определяется формулой

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32\gamma}{5c^5} \left(\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 a^4 \omega^6, \quad (6,10,10)$$

где M_1, M_2 — массы тел, a — расстояние между ними, ω — угловая скорость.

Согласно третьему закону Кеплера,

$$\frac{a^3}{T^2 (M_1 + M_2)} = \frac{\gamma}{4\pi^2},$$

где T — период обращения.

Поэтому угловая скорость определяется соотношением $\omega^2 = \frac{\gamma (M_1 + M_2)}{a^3}$. Следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32\gamma^4}{5c^5} M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2) a^{-5}. \quad (6,10,11)$$

Для примерной количественной оценки допустим, что расстояние между телами равно астрономической единице ($1,5 \cdot 10^{13}$ см), а массы тел одинаковы и равны массе Солнца ($2 \cdot 10^{33}$ г). Потеря энергии составляет $4,5 \cdot 10^{20}$ эрг/сек⁻¹, т. е. около $1,4 \cdot 10^{28}$ эрг в год. Кинетическая энергия системы $\frac{\gamma M_1 M_2}{2a}$ равна приблизительно $8,9 \cdot 10^{45}$ эрг. Поэтому гравитационное излучение, составляющее в год только $1,6 \cdot 10^{-18}$ кинетической энергии системы, в данном случае не может иметь никакого космогонического значения.

В принципе можно ожидать, что для очень тесных двойных звезд энергия гравитационного излучения весьма значительна. Например, если сохранить принятые оценки масс и допустить, что расстояния между звездами в тысячу раз меньше, то убыль энергии будет равна $4,5 \cdot 10^{35}$ эрг/сек⁻¹, т. е. в 120 раз больше светимости Солнца. В этом случае гравитационное излучение составит в год около $1,6 \cdot 10^{-6}$ кинетической энергии системы и может играть существенную роль в ее эволюции.

Для развития проблемы гравитационных волн решающее значение имело бы прямое эмпирическое доказательство их существования. В этом отношении большой интерес представляют попытки создания лабораторных установок, предназначенных для генерации и обнаружения гравитационных волн, в частности для приема гравитационного излучения космических источников. Однако имеющие-

ся проекты и создававшиеся до сих пор лабораторные приборы не обеспечивают практического осуществления экспериментов, и потому вопрос о существовании гравитационных волн еще не получил определенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein.— *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 47, 831, 1915. Русск. пер.: собр. научн. трудов, 1, 439. «Наука», М., 1965.
2. А. Богородский. Циркуляр ГАО АН СССР, № 30, 1940; Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии, гл. III. Изд-во КГУ, К., 1962.
3. Y. Lense, H. Thirring.— *Phys. Zeitschr.*, 19, 156, 1918.
4. А. Богородский.— *Астрон. журн.*, 36, 883, 1959.
5. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат, М., 1955.
6. А. Богородский.— *Известия Ест.-научн. института Лесгафта*, 23, 21, 1940.
7. A. Einstein.— *Annal. Phys.*, 49, 769, 1916, Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 1, 452. «Наука», М., 1965.
8. R. C. Tolman. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, 288, Oxford, 1934.
9. А. Богородский.— *Публикации Киев. астроном. обсерватории*, 8, 1959.
10. В. А. Фок.— *Журн. эксперимент. теоретич. физики*, 9, 411, 1939.
11. A. Einstein.— *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1, 688, 1916, Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 1, 514. «Наука», М., 1965.
12. A. Einstein.— *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1, 154, 1918, Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 1, 631, «Наука», М., 1965.
13. J. Weber. *General Relativity and Gravitational Waves*. New York, 1961. Русск. пер.: Д. Вебер. Общая теория относительности и гравитационные волны. ИЛ, М., 1962.

1. Фигуры равновесия тяжелой жидкости. Наряду с небесной механикой обширной и важной областью применения теории гравитации является учение о фигурах равновесия жидких масс. В гидростатике известны три фигуры равновесия жидкой массы, частицы которой взаимодействуют по закону тяготения Ньютона: сферическая конфигурация, бесконечный цилиндр и бесконечный плоский слой.

Для сферической конфигурации условие равновесия имеет вид

$$\frac{dp}{dr} + \rho \frac{d\varphi}{dr} = 0, \quad (7,1,1)$$

где p , ρ , φ — соответственно давление, плотность и гравитационный потенциал, которые являются функциями расстояния r от центра.

Внешний радиус конфигурации обозначим через r_1 . Пусть $M(r)$ — масса среды, расположенной внутри сферы радиуса $r \leq r_1$. В теории притяжения выводится формула (1,5,4) для потенциала поля во внутренней точке

$$\varphi = \frac{\gamma M(r)}{r} + 4\pi \int_r^{r_1} r \rho dr.$$

Дифференцируя это равенство и принимая во внимание очевидное соотношение $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$, находим $\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\gamma M(r)}{r^2}$. Поэтому вместо (7,1,1) можно написать

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\gamma M(r) \rho}{r^2} = 0. \quad (7,1,2)$$

Это основное уравнение равновесия, связывающее давление и плотность в сферической конфигурации. Функция $M(r)$ зависит от распределения плотности и легко исключается. Если уравнение (7,1,2) умножить на $\frac{r^2}{\rho}$, то после дифференцирования оно примет вид

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) + 4\pi \gamma r^2 \rho = 0. \quad (7,1,3)$$

Для несжимаемой среды условие равновесия определяет ход гидростатического давления с расстоянием от центра. Решение уравнения (7,1,3) в этом случае таково: $p = \frac{2}{3} \pi \gamma r^2 (r_1^2 - r^2)$.

Если же среда сжимаема, то задача содержит две неизвестные функции. Чтобы сделать задачу определенной, необходимо к условию равновесия присоединить независимое уравнение состояния, связывающее давление с плотностью.

Бесконечный прямой цилиндр представляет собой конфигурацию, симметричную относительно оси. Все величины, характеризующие состояние среды, являются функциями расстояния r от оси цилиндра. Из условия симметрии следует, что в каждой точке напряженность поля гравитации направлена к оси цилиндра и образует с нею прямой угол. Найдем величину этой напряженности.

На рис. 26 точка O — основание перпендикуляра r , опущенного на ось цилиндра из внутренней точки A . На расстоянии z от нее построим кольцо, плоскость которого перпендикулярна к оси цилиндра. Внутренний радиус кольца — q , ширина его — dq , толщина — dz . Элемент кольца, отвечающий приращению $d\varphi$ азимута φ , имеет массу $dm = \rho q d\varphi dq dz$. В точке A напряженность поля, создаваемого этим элементом, равна $\frac{\gamma dm}{\Delta^2}$, а ее проекция на направление AO составляет $\frac{\gamma dm \cos \alpha}{\Delta^2}$. Из треугольников ABD и BCD находим

$$\Delta^2 = z^2 + q^2 + r^2 - 2qr \cos \varphi.$$

Треугольники ADO и CDO вместе с предыдущим равенством дают $\cos \alpha = \frac{(r - q \cos \varphi)}{\Delta}$. Поэтому указанная проекция равна $\frac{\gamma (r - q \cos \varphi) dm}{\Delta^3}$. Внося сюда значения dm , Δ и выполняя интегрирование, получим выражение для напряженности, направленной вдоль линии AO :

$$F_r = 2\gamma \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{r_1} \frac{(r - q \cos \varphi) \rho q d\varphi dq dz}{(z^2 + q^2 + r^2 - 2qr \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (7,1,4)$$

Множитель 2 введен для учета притяжения со стороны части цилиндра, расположенной по другую сторону от точки O .

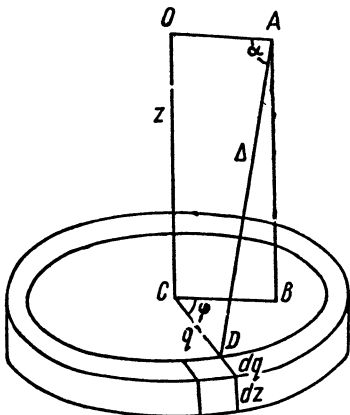


Рис. 26.

Проинтегрируем по переменной z ; имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + q^2 + r^2 - 2qr \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{q^2 + r^2 - 2qr \cos \varphi}.$$

Выполним теперь интегрирование по азимуту. Воспользовавшись преобразованием

$$2r - 2q \cos \varphi = \frac{1}{r} (q^2 + r^2 - 2qr \cos \varphi) + \frac{1}{r} (r^2 - q^2),$$

находим

$$\int_0^{2\pi} \frac{2(r - q \cos \varphi) d\varphi}{q^2 + r^2 - 2qr \cos \varphi} = \frac{2\pi}{r} + \frac{r^2 - q^2}{r} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{q^2 + r^2 - 2qr \cos \varphi}.$$

Интеграл, содержащийся в правой части этого равенства, равен $\pm \frac{2\pi}{r^2 - q^2}$ в зависимости от условий $r \geq q$ соответственно.

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} \frac{2(r - q \cos \varphi) d\varphi}{q^2 + r^2 - 2qr \cos \varphi} = \begin{cases} \frac{4\pi}{r}, & r > q; \\ 0, & r < q. \end{cases}$$

Область интегрирования по переменной q разделим на два интервала: $0, r$ и r, r_1 . Соотношение (7,1,4) принимает при этом вид

$$F_r = \frac{4\pi\gamma}{r} \int_0^r q\rho dq.$$

Рассмотрим отрезок цилиндра радиуса r , ограниченный поперечными сечениями, расположенными на расстоянии единицы длины друг от друга. Масса этого отрезка равна $m(r) = 2\pi \int_0^r q\rho dq$. Поэтому выражение для искомой напряженности можно написать так:

$$F_r = \frac{2\gamma m(r)}{r}.$$

Внутри бесконечного прямого цилиндра напряженность поля тяготения на расстоянии r от оси определяется массой погонной единицы цилиндра с сечением радиуса r . В точках, расположенных на расстояниях r и $r + dr$ от оси цилиндра, разность давлений составляет $dp = -F_r \rho dr$; следовательно,

$$\frac{dp}{dr} + \frac{2\gamma m(r) \rho}{r} = 0. \quad (7,1,5)$$

Как и в предыдущем случае, условие равновесия связывает гидростатическое давление с распределением плотности, от которого зависит функция $m(r)$. В частном случае, когда среда несжимаема, распределение давления в цилиндре отвечает, как легко убедиться, закону $p = \pi\gamma\rho^2(r_1^2 - r^2)$.

Третьей фигурой равновесия гравитирующей непрерывной среды является бесконечный слой, в котором распределение плотности, гидростатического давления и других характеристик симметрично относительно средней плоскости. Если начало координат поместить в плоскость симметрии и ось z направить по нормали к этой плоскости, то характеристики среды будут функциями одной координаты z . Напряженность поля направлена по перпендикуляру, опущенному из данной точки на плоскость симметрии. Найдем величину напряженности.

Две плоскости, перпендикулярные оси z и расположенные на расстоянии dz одна от другой, вырезают бесконечно тонкий однородный слой, на единицу площади которого приходится масса ρdz , где ρ — объемная плотность среды. Согласно известному результату теории притяжения, величина напряженности, обусловленная этим слоем, не зависит от расстояния данной точки от слоя и равна $2\pi\gamma\rho dz$. В точке с координатой z полная напряженность поля определяется массой среды, расположенной по обе стороны от плоскости симметрии до расстояний $|z|$, поскольку действия областей, расположенных на больших расстояниях от плоскости симметрии, взаимно компенсируются. Интегрируя в пределах $\mp z$, находим $2\pi\gamma \int_{-z}^{+z} \rho dz =$

$$= 4\pi\gamma \int_0^z \rho dz. \text{ Проекция напряженности на ось } z \text{ равна } -4\pi\gamma \int_0^z \rho dz.$$

Величина $\int_0^z \rho dz$ представляет собой массу $m(z)$ среды в объеме прямого цилиндра с единичным поперечным сечением, поставленного основанием на плоскость симметрии. Разность давлений в точках z и $z + dz$ равна $dp = -4\pi\gamma m(z) \rho dz$. Поэтому условие равновесия конфигурации таково:

$$\frac{dp}{dz} + 4\pi\gamma m(z) \rho = 0. \quad (7,1,6)$$

В частном случае, когда среда несжимаема, распределение гидростатического давления определяется соотношением $p = 2\pi\gamma\rho^2(h^2 - z^2)$, где h — расстояние от средней плоскости до границы конфигурации.

В астрономии интерес представляет первая из упомянутых фигур равновесия, поскольку наиболее распространенные небесные

тела — звезды являются сферическими конфигурациями, находящимися в равновесии в собственных гравитационных полях. Условие механического равновесия в форме (7,1,2) или (7,1,3) является одним из основных уравнений строения звезды, хотя применение его для точных расчетов требует знания ряда физических особенностей звезды. Взятое в отдельности, это уравнение позволяет составить только очень грубое представление о некоторых условиях в глубоких недрах звезды.

В уравнении (7,1,2) заменим в правой части переменную плотность ее средним значением $\rho_m = \frac{3M}{4\pi r_1^3}$, где M и r_1 — масса и радиус звезды. Считая, что веществом звезды является идеальный газ, воспользуемся формулой Клапейрона $p = \frac{R}{\mu} \rho_m T$, где R — газовая постоянная, μ — молекулярный вес вещества. Проинтегрировав уравнения равновесия, получим распределение температуры

$$T = \frac{\gamma \mu M}{2r_1 R} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right). \quad (7,1,7)$$

Соответствующее распределение давления находится по формуле Клапейрона, которая в данном приближении дает

$$p = \frac{3\gamma M^2}{8\pi r_1^4} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right). \quad (7,1,8)$$

Условия в центре конфигурации характеризуются температурой и давлением

$$T_c = \frac{\gamma \mu M}{2r_1 R}; \quad p_c = \frac{3\gamma M^2}{8\pi r_1^4}. \quad (7,1,9)$$

Для Солнца при $\mu = 1$ эти соотношения дают $T_c \approx 10^7$ град, $p_c \approx 10^9$ атм.

Воспользуемся условием равновесия (7,1,2) для вывода соотношения между гравитационной энергией газового шара и его тепловой энергией.

Энергия гравитационного взаимодействия массы $M(r)$ и сферического слоя с массой $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$ равна $-\frac{\gamma M(r) dM(r)}{r}$. Поэтому гравитационная энергия конфигурации определяется формулой

$$U = -4\pi\gamma \int_0^{r_1} r \rho M(r) dr. \quad (7,1,10)$$

Теплота, отнесенная к единице массы идеального газа, равна $\frac{c_v T}{\mu}$, где c_v — отнесенная к молю теплоемкость при постоянном объ-

еме. Согласно известному соотношению термодинамики, $c_v = \frac{R}{k-1}$, где k — отношение теплоемкостей, которое служит показателем степени в законе адиабаты.

Тепловая энергия сферического слоя с массой $dM(r)$

$$\frac{c_v}{\mu} T dM(r) = \frac{4\pi}{k-1} \frac{R}{\mu} \rho T r^2 dr = \frac{4\pi}{k-1} r^2 p dr.$$

Следовательно, вся конфигурация обладает тепловым запасом

$$Q = \frac{4\pi}{k-1} \int_0^{r_1} r^2 p dr. \quad (7,1,11)$$

Связь между величинами U и Q определяется условием равновесия.

Внесем в (7,1,10) значение $M(r)$ из уравнения равновесия (7,1,2). Полученное таким образом равенство

$$U = 4\pi \int_0^{r_1} r^3 \frac{dp}{dr} dr$$

проинтегрируем по частям:

$$U = 4\pi \left\{ pr^3 \int_0^{r_1} - 3 \int_0^{r_1} r^2 p dr \right\} = -12\pi \int_0^{r_1} r^2 p dr.$$

Сравнивая это соотношение с (7,1,11), находим

$$U + 3(k-1)Q = 0. \quad (7,1,12)$$

Это уравнение служит частным выражением теоремы вириала для стационарной системы.

Если газ одноатомный ($k = \frac{5}{3}$), то теорема вириала принимает вид $U + 2Q = 0$ и показывает, что в случае равновесия запас теплоты газового шара составляет половину абсолютной величины его гравитационной энергии. Основываясь на этой теореме, нетрудно показать, что при гравитационном сжатии убыль полной энергии газового шара равна половине освобождающейся гравитационной энергии. Вторая половина освобождающейся энергии увеличивает запас теплоты шара, вызывая соответствующее нагревание его.

Теорема вириала позволяет получить оценку средней температуры звезды.

Согласно (7,1,11), можно написать

$$Q \simeq \frac{6\pi}{\mu} \rho_m R \int_0^{r_1} r^2 T dr.$$

Если в правой части равенства заменить переменную температуру ее средним значением T_m , то получится

$$Q = \frac{3RM}{2\mu} T_m.$$

Гравитационную энергию шара вычислим по формуле (7,1,10), положив $\rho = \rho_m$.

$$U = -\frac{3}{5} \frac{\gamma M^2}{r_1}.$$

Внося эти значения в равенство $U + 2Q = 0$, найдем $T_m = \frac{2\gamma\mu M}{5r_1 R}$, что практически не отличается от первой формулы (7,1,9).

2. Политропные газовые шары. Как уже сказано, условие равновесия сферической конфигурации должно быть дополнено уравнением состояния в виде независимого соотношения между гидродинамическим давлением и плотностью среды. Таким независимым соотношением во многих случаях может служить закон политропы $p = C\rho^k$, охватывающий широкий класс термодинамических процессов в газах.

Политропный процесс в идеальном газе отвечает соотношениям

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T; \quad p = C\rho^k; \quad v = \frac{\mu}{\rho},$$

где μ — молекулярный вес, v — объем одного моля, R — газовая постоянная, равная разности удельных теплоемкостей $c_p - c_v$.

Непосредственное вычисление дает $p dv = -\frac{c_p - c_v}{k-1} dT$. Поэтому математическое выражение первого начала термодинамики $dQ = c_v dT + p dv$ приводится к виду $dQ = \frac{kc_v - c_p}{k-1} dT$ и показывает, что политропный процесс в идеальном газе протекает при постоянной теплоемкости. Обозначив ее через c , получим $k = \frac{c - c_p}{c - c_v}$. В частном случае, когда состояние газа изменяется при $dQ = 0$, т. е. без теплового обмена с окружающей средой, показатель степени равен отношению удельных теплоемкостей: политропа совпадает с адиабатой.

Теория строения политропных шаров развита в 1907 г. Эмдемом [1]. Математический аппарат ее сохраняет некоторое значение и в современной теории внутреннего строения звезд.

Напишем закон политропы в виде $p = C \rho^{\frac{1}{n} + 1}$, где n — постоянный параметр, называемый индексом политропы. Исключив гидродинамическое давление, приведем уравнение равновесия (7,1,3)

к следующему виду:

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} \frac{1}{\rho^n} + \frac{2}{r} \frac{d\rho}{dr} \frac{1}{\rho^n} + \frac{4\pi\gamma}{C(n+1)} \rho = 0,$$

или, если положить $\rho = u^n$ и ввести обозначение $\alpha^2 = \frac{4\pi\gamma}{C(n+1)}$,

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0. \quad (7,2,1)$$

Это основное уравнение строения равновесного политропного шара, называемое уравнением Эмдена. При его интегрировании принимается, что в центре конфигурации функция u имеет максимум: при $r = 0$; $u = u_0$; $\frac{du}{dr} = 0$. Внешняя граница конфигурации отвечает условию $u = 0$.

В элементарных функциях уравнение Эмдена интегрируется при трех значениях индекса $n = 0, 1, 5$. В первом случае решением, удовлетворяющим указанным условиям в центре, является функция $u = u_0 - \frac{1}{6} \alpha^2 r^2$. При $n = 1$ решение таково: $u = \frac{u_0 \sin \alpha r}{\alpha r}$.

Если же $n = 5$, то решением служит функция $u = u_0 \left(1 + \frac{1}{3} \alpha^2 u_0^4 r^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. В последнем случае величина u принимает нулевое значение только при $r \rightarrow \infty$, показывая, что шар имеет бесконечно большие размеры, хотя масса его остается конечной. В случае $n > 5$ не только размеры, но и массы политропных шаров оказываются бесконечно большими. Нетрудно убедиться в том, что значения $n < 0$ также не представляют интереса. Действительно, комбинируя закон

политропы и уравнение Клапейрона, получим равенство $RT = \mu C \rho^{\frac{1}{n}}$, показывающее, что при отрицательном индексе политропы с возрастанием плотности температура вещества падает. Основным интерес представляет, таким образом, случай $0 < n < 5$.

Уравнение Эмдена для различных n , отличных от трех упомянутых значений, решается численным интегрированием.

Предварительно уравнение (7,2,1) с помощью преобразований

$$u = u_0 y; \quad \alpha u_0^{\frac{n-1}{2}} r = x \quad (7,2,2)$$

приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + y^n = 0. \quad (7,2,3)$$

Условия в центре переходят при этом в следующие: $x = 0, y = 1, \frac{dy}{dx} = 0$, а внешняя граница конфигурации отвечает значениям $x = x_1, y = 0$.

В книге Эмдена имеются таблицы и графики, содержащие результаты численного интегрирования (7,2,3) для двенадцати значений политропного индекса. Приводим таблицы для $n = 1,5$ и $3,0$ (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

$n = 1,5$			$n = 3,0$		
x	y	$-y'$	x	y	$-y'$
0	1	0	0	1	0
0,25	0,98966	0,08268	0,25	0,98975	0,08204
0,50	0,95911	0,16057	0,50	0,95987	0,15495
0,75	0,91008	0,22988	0,75	0,91355	0,21270
1,00	0,84516	0,28727	1,00	0,85505	0,25219
1,25	0,76761	0,33061	1,25	0,78897	0,27370
1,50	0,68132	0,35752	1,50	0,71948	0,27993
1,75	0,58994	0,37168	1,75	0,64996	0,27460
2,00	0,49670	0,37209	2,00	0,58282	0,26149
2,25	0,40477	0,36119	2,1620	0,54133	0,25052
2,50	0,31678	0,34120	2,50	0,46109	0,22396
2,75	0,23468	0,31475	3,00	0,35921	0,18393
2,8085	0,21617	0,30788	3,50	0,27629	0,14859
3,00	0,15972	0,28442	4,00	0,20942	0,11998
3,25	0,09258	0,25261	4,50	0,15529	0,09748
3,50	0,03335	0,22147	5,00	0,11110	0,08003
3,625	0,00659	0,20680	6,00	0,04411	0,05599
3,64	0,00350	0,20511	6,80	0,00471	0,04360
3,6571	0	0,20316	6,9011	0	0,04231

Покажем, каким образом, пользуясь решением уравнения Эмдена для данного индекса, можно найти распределение плотности, давления и температуры в газовом шаре.

Преобразуем левую часть уравнений равновесия

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = - \frac{\gamma M(r)}{r^2}$$

с помощью закона политропы и введем переменные, согласно (7,2,2). Полученное таким образом равенство

$$\frac{4\pi}{\alpha} u_0^{\frac{n+1}{2}} \frac{dy}{dx} = - \frac{M(r)}{r^2},$$

а также второе из соотношений (7,2,2) приложим к внешней границе конфигурации. Система уравнений

$$\frac{4\pi}{\alpha} u_0^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = - \frac{M}{r_1^2}; \quad \alpha u_0^{\frac{n-1}{2}} r_1 = x_1 \quad (7,2,4)$$

позволяет вычислить постоянные α и u_0 , если при известном индексе политропы задать массу и радиус шара.

Нетрудно найти теперь распределение плотности и давления.

Для выбранного r вычисляется переменная x по первой из формул (7,2,2), затем находится соответствующее табличное значение y , что дает возможность вычислить плотность $\rho = (u_0 y)^n$. Давление легко получить с помощью закона политропы, определив входящую в этот закон постоянную $C = \frac{4\pi\gamma}{\alpha^2(n+1)}$. Для вычисления хода температуры следует воспользоваться уравнением Клапейрона, найдя предварительно молекулярный вес в зависимости от принятого химического состава.

Итак, полное решение задачи о внутреннем строении политропного шара определенного индекса требует задания радиуса и массы конфигурации и молекулярного веса ее вещества.

Составим общие формулы, характеризующие условия в центре политропного шара.

Найдя постоянные α , u_0 из уравнений (7,2,4), нетрудно убедиться в том, что при $r = 0$ плотность, давление и температура определяются соотношениями

$$\rho_c = -\frac{Mx_1}{4\pi r_1^3 \left(\frac{dy}{dx}\right)_1}; \quad p_c = \frac{\gamma M^2}{4\pi(n+1)r_1^4 \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2};$$

$$T_c = -\frac{\gamma \mu M}{(n+1) \left(x \frac{dy}{dx}\right)_1 r_1 R}. \quad (7,2,5)$$

В качестве иллюстрации приведем рассмотренный Эмденом пример адиабатического шара, имеющего массу и радиус Солнца и состоящего из нейтрального водорода ($n = 1,5$, $\mu = 1,0$). Формулы (7,2,5) и данные последней строки табл. 2 при $n = 1,5$ дают

$$\rho_c = 8,3 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}; \quad p_c = 8,2 \cdot 10^9 \text{ атм}; \quad T_c = 1,2 \cdot 10^7 \text{ град.}$$

В предыдущем параграфе мы составили выражение для потенциальной энергии газового шара, обусловленной гравитационным взаимодействием между его элементами. Величина этой энергии зависит от распределения плотности в шаре. Однако в случае политропного шара для вычисления гравитационной энергии нет необходимости знать распределение плотности в явном виде.

С помощью очевидного соотношения $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$ перепишем формулу (7,1,10) так:

$$U = -\gamma \int_0^{r_1} \frac{M(r)}{r} \frac{dM(r)}{dr} dr.$$

Выполнив интегрирование по частям, получим

$$U = -\frac{\gamma M^2}{2r_1} - \frac{\gamma}{2} \int_0^{r_1} \frac{M^2(r)}{r^2} dr.$$

При этом принято во внимание, что в случае $r \rightarrow 0$ величина $M(r)$ стремится к нулю, как r^3 .

Из условия равновесия следует

$$\frac{\gamma M^2(r)}{r^2} = -\frac{M(r)}{\rho} \frac{d\rho}{dr}.$$

Поэтому

$$U = -\frac{\gamma M^2}{2r_1} + \frac{1}{2} \int_0^{r_1} \frac{M(r)}{\rho} \frac{d\rho}{dr} dr. \quad (7,2,6)$$

Эта формула является вполне общей и выполняется при любом распределении плотности в равновесной сферической конфигурации.

Приложим ее к политропе. Подстановка $\rho = C\rho^{\frac{1}{n}+1}$ дает

$$\int_0^{r_1} \frac{M(r)}{\rho} \frac{d\rho}{dr} dr = \frac{n+1}{n} C \int_0^{r_1} M(r) \rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dr} dr.$$

После интегрирования по частям получим

$$(n+1)C \left\{ M(r) \rho^{\frac{1}{n}} \Big|_0^{r_1} - \int_0^{r_1} \frac{dM(r)}{dr} \rho^{\frac{1}{n}} dr \right\} = -4\pi(n+1) \int_0^{r_1} r^2 \rho dr.$$

При этом мы вновь воспользовались соотношением $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$ и приняли во внимание условие $\rho = 0$ на внешней границе конфигурации.

Вместо (7,2,6), можно написать

$$U = -\frac{\gamma M^2}{2r_1} - 2\pi(n+1) \int_0^{r_1} r^2 \rho dr. \quad (7,2,7)$$

При доказательстве теоремы вириала мы представили гравитационную энергию шара в виде $U = -12\pi \int_0^{r_1} r^2 \rho dr$. Внося это соотношение в (7,2,7), получим

$$U = -\frac{3}{5-n} \frac{\gamma M^2}{r_1}. \quad (7,2,8)$$

Гравитационная энергия политропного газового шара определяется его массой, радиусом и индексом политропы.

Если при гравитационном сжатии радиус политропного шара изменится от r_0 до r_1 , то убыль его гравитационной энергии

$$U_0 - U = \frac{3\gamma M^2}{5-n} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right).$$

При $r_0 > r_1$ вторым членом в правой части равенства можно пренебречь. Поэтому абсолютное значение величины (7,2,8) с достаточной точностью представляет собой гравитационную энергию, освободившуюся к данному моменту при эволюционном сжатии газового шара. Для шара, находящегося в адиабатическом равновесии ($n = 1,5$) и имеющего массу и радиус Солнца, эта величина составляет около $3 \cdot 10^{48}$ эрг.

Как известно, одной из первых гипотез о природе источников звездной энергии была контракционная гипотеза Гельмгольца — Кельвина, согласно которой излучение звезд поддерживается их гравитационным сжатием. Формула (7,2,8) показывает, что для количественного объяснения наблюдаемых светимостей пришлось бы допустить чрезмерно быстрое гравитационное сжатие. Действительно, с точки зрения контракционной гипотезы, светимость звезды должна определяться соотношением $L = -\frac{1}{2} \frac{dU}{dt}$. Коэффициент пропорциональности введен здесь согласно требованию теоремы вириала. По формуле (7,2,8) имеем

$$L = \frac{3}{2(5-n)} \frac{\gamma M^2}{r_1} \left| \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dt} \right|. \quad (7,2,9)$$

Приложим эту формулу к современному состоянию Солнца, принимая для определенности адиабатическое распределение плотности ($n = 1,5$).

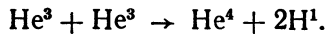
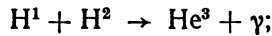
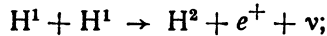
Светимость Солнца измеряется величиной $1,2 \cdot 10^{41}$ эрг в год. Внося это значение в формулу (7,2,9), получим $\left| \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dt} \right| \simeq 0,8 \cdot 10^{-7}$. Соответствующее уменьшение радиуса составляет около 50 м в год. При столь быстром сжатии радиус Солнца за 7 млн. лет должен сократиться вдвое, а эволюция Солнца в прошлом могла бы продолжаться не более 10—12 млн. лет, что в сотни или даже в тысячи раз меньше принятых в настоящее время оценок нижней границы его возраста. По современным представлениям, излучение звезд в продолжении большей части их существования поддерживается термоядерными реакциями, тогда как гравитационное сжатие служит основным источником энергии лишь в течение сравнительно кратковременных стадий звездной эволюции.

3. Условия внутри звезд. Теория Эмдена позволяет вычислить распределение плотности и температуры в газовом шаре, находящемся в гравитационном равновесии. Однако выводы ее применяются очень ограниченно, поскольку она не учитывает физических условий, присущих реальным звездам.

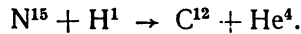
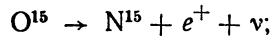
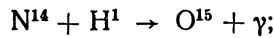
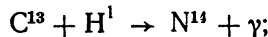
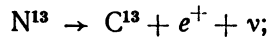
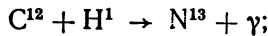
Для развития современных представлений о физических процессах в звездах большое значение имели исследования Эддингтона, результаты которых изложены в его известной книге [2], а также фундаментальная монография Чандрасекара [3].

Важнейшей особенностью звезды является наличие внутренних источников энергии, которые поддерживают ее излучение. Согласно общепринятому представлению, для большинства известных в настоящее время звезд источником энергии служат термоядерные реакции, сопровождающиеся превращением водорода в гелий. Подробное их изучение показало, что основную роль в звездах играют протон-протонные реакции и углеродный цикл [4].

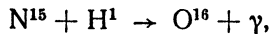
При взаимодействии двух протонов образуются дейтрон, позитрон и нейтрино. Позитрон, соединяясь с электроном, исчезает, превращаясь в два кванта радиации, а нейтрино свободно выходит наружу и покидает звезду, унося некоторую часть энергии. Образовавшийся дейтрон соединяется с новым протоном, образуя ядро He^3 и излучая γ -квант. При взаимодействии двух ядер He^3 возникает устойчивое ядро гелия He^4 и два протона. Вся группа реакций имеет следующий вид:



Углеродистый цикл состоит из шести реакций:

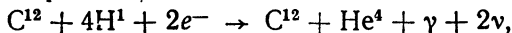


Наряду с последней из них, восстанавливающей ядро C^{12} , происходит также реакция



приводящая к образованию кислорода. Однако вероятность ее оказывается ничтожно малой, вследствие чего ее можно не принимать во внимание.

Позитроны, возникающие во второй и пятой реакциях цикла, соединяются затем с электронами и вместе с последними превращаются в излучение. Нейтрино покидают звезду. Весь цикл можно схематически выразить равенством



которое показывает, что конечным результатом цикла является образование α -частицы, тогда как углерод полностью восстанавливается.

Выделение энергии, сопровождающее превращение водорода в гелий, обусловлено тем, что суммарная масса четырех протонов превосходит массу образующегося ядра гелия. В обычных единицах атомный вес водорода равен 1,008, что для четырех протонов дает суммарное значение 4,032, тогда как атомный вес гелия достигает только 4,003. Дефект массы, равный 0,029, в абсолютных единицах составляет $\Delta M = 4,8 \cdot 10^{-26}$ г. Согласно известному соотношению Эйнштейна $\Delta E = c^2 \Delta M$, образование ядра гелия из четырех протонов сопровождается выделением энергии $\Delta E = 4,3 \cdot 10^{-5}$ эрг.

Для каждого из указанных типов термоядерных реакций эта величина должна быть несколько уменьшена, поскольку часть энергии уносится нейтрино.

В теории внутреннего строения звезд источники энергии принято характеризовать удельной светимостью ϵ , т. е. мощностью, отнесенной к единице массы звездного вещества. Для вычисления этой величины необходимо знать скорость превращения водорода в гелий, которая определяется эффективными сечениями соответствующих реакций.

Приводим применяемые для количественных расчетов формулы:
а) протон-протонные реакции

$$\epsilon_{pp} = 2,5 \cdot 10^6 \rho x_H^2 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{3/2} e^{-33,8 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/2}}; \quad (7,3,1)$$

б) углеродный цикл

$$\epsilon_{cc} = 9,5 \cdot 10^{28} \rho x_H x_{CN} \left(\frac{10^6}{T}\right)^{3/2} e^{-152,3 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/2}}. \quad (7,3,2)$$

Через x_H обозначено относительное содержание водорода в веществе звезды; x_{CN} — суммарное содержание углерода и азота.

Протон-протонные реакции играют роль основного источника звездной энергии при температурах порядка 10 млн. град. При температурах около 20 млн. град. главное значение приобретает углеродный цикл. В промежуточных случаях, когда температура в центральной части звезды составляет 12—16 млн. град, совместно происходят оба типа термоядерных реакций, так как величины (7,3,1) и (7,3,2) оказываются сравнимыми. В очень горячих звездах с центральными температурами около 100 млн. град гелий может превращаться в углерод при тройных столкновениях α -частиц. Этот процесс можно представить в виде двух следующих реакций:



Возникающее в первой реакции ядро Be^8 крайне неустойчиво и потому оно почти мгновенно распадается на две α -частицы. В стационарном состоянии, отвечающем равновесию между He^4 и Be^8 ,

в среднем на 10^{10} α -частиц приходится одно ядро Be^8 . Вступая во взаимодействие с новой частицей He^4 , оно образует C^{12} . Ввиду малой продолжительности жизни Be^8 обе реакции могут осуществиться только при тройных столкновениях ядер гелия. Сопровождающий этот процесс выход энергии определяется формулой

$$\epsilon = 2 \cdot 10^{17} \rho^2 x_{\text{He}}^3 \left(\frac{10}{T} \right)^3 e^{-4670 \cdot \frac{10^6}{T}}, \quad (7,3,3)$$

где через x_{He} обозначено содержание гелия.

Энергия, выделяемая источниками в глубоких недрах звезды, переносится к ее наружным слоям и излучается в окружающее пространство. Способы переноса энергии зависят от вида равновесия звезды. Если равновесие является статическим, при котором макроскопических перемещений звездного вещества нет, то энергия переносится излучением, медленно диффундирующим к внешней поверхности звезды. В этом случае равновесие звезды называют *лучистым*.

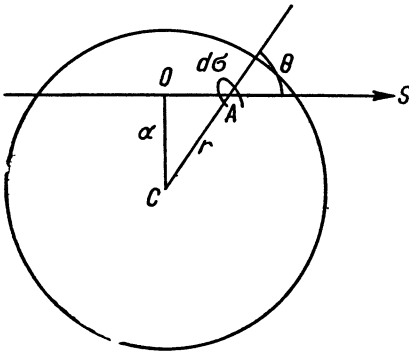


Рис. 27.

Количественный расчет показывает, что в условиях звездных недр лучистый перенос энергии

на три-четыре порядка превосходит передачу энергии теплопроводностью и потому последней можно пренебречь.

Если в звезде происходит конвективное перемешивание, то оно является основным механизмом переноса энергии, преобладающим не только над теплопроводностью, но и над лучистым переносом. В этом случае равновесие звезды называют *конвективным*.

Рассмотрим перенос энергии в звезде, находящейся в лучистом равновесии. Обозначим через I_ν интенсивность пучка излучения, распространяющегося в направлении s , проходящем через точку A под углом θ к радиусу-вектору r (рис. 27). Интенсивность удовлетворяет уравнению лучистого переноса $\frac{d}{ds} I_\nu = \epsilon_\nu - \alpha_\nu I_\nu$, где ϵ_ν , α_ν — коэффициенты излучения и поглощения.

Коэффициент поглощения представляет собой некоторую функцию частоты; заменим ее средним значением $\bar{\alpha}_\nu = \alpha$, допустив, таким образом, что звездное вещество является «серым», одинаково поглощающим во всех частях спектра. Примем также, что при взаимодействии излучения со звездным веществом выполняется закон Кирхгофа — Планка $\epsilon_\nu = \alpha B_\nu$, где B_ν — функция Планка, равная

интенсивности поля излучения при термодинамическом равновесии.

Выполнив интегрирование по частоте, уравнение переноса при сделанных упрощениях можно написать в следующем виде:

$$\frac{dI}{ds} = \alpha B - \alpha I; \quad B = \frac{ac}{4\pi} T^4, \quad (7,3,4)$$

где I — полная (интегральная) интенсивность излучения, B — функция Стефана — Больцмана, равная полной интенсивности поля излучения при термодинамическом равновесии. Через s и a обозначены скорость света и коэффициент пропорциональности в законе Стефана — Больцмана для интегральной плотности поля излучения.

Интенсивность излучения в (7,3,4) будем рассматривать как функцию полярных координат r, θ (см. рис. 27). Для перехода воспользуемся соотношениями $r \cos \theta = s, r \sin \theta = a$, из которых следует: $\frac{dr}{ds} = \cos \theta, r \frac{d\theta}{ds} = -\sin \theta$.

Выполнив преобразование $\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds}$, представим уравнение переноса в форме

$$\frac{\partial I}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} = \alpha B - \alpha I,$$

или

$$I = B - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial I}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right). \quad (7,3,5)$$

Можно показать, что на достаточно большой глубине второй член правой части (7,3,5) по абсолютному значению гораздо меньше первого. Поэтому с удовлетворительной для наших целей точностью во втором члене можно положить $I = B$. Следовательно,

$$I(r, \theta) = B - \frac{1}{\alpha} \frac{dB}{dr} \cos \theta. \quad (7,3,6)$$

В теории внутреннего строения звезд эта формула обеспечивает достаточно хорошее приближение.

Вычислим плотность энергии и поток поля излучения внутри звезды. Первая из этих величин определяется формулой $\rho_r = \frac{1}{c} \int I d\omega$. Через $d\omega$ здесь обозначен элементарный телесный угол, внутри которого в данную точку поступает пучок излучения с интенсивностью I . Введя азимут φ , можно написать $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. При интегрировании угол φ изменяется в пределах от 0 до 2π , а θ принимает значения от 0 до π . Внося (7,3,6) и выполнив интегрирование, получим $\rho_r = \frac{4\pi}{c} B = aT^4$. Это показывает, что внутри

звезды плотность энергии поля излучения определяется таким же законом, как при термодинамическом равновесии.

Обозначим через $H(r)$ поток поля излучения, т. е. количество энергии, которую в секунду переносит излучение через единичную площадку, помещенную на расстоянии r от центра звезды и расположенную нормально к радиальному направлению. Эта величина вычисляется по формуле $H(r) = \int I \cos \theta d\omega$. Воспользовавшись соотношением (7,3,6), найдем

$$H(r) = -\frac{4\pi}{3\alpha} \frac{dB}{dr} = -\frac{4\pi}{3\alpha} \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dr},$$

или, если внести выражение функции Стефана — Больцмана, согласно (7,3,4),

$$H(r) = -\frac{4ac}{3\alpha} T^3 \frac{dT}{dr}. \quad (7,3,7)$$

Этим равенством определяется лучистый перенос энергии в звезде.

Вычислим еще давление радиации внутри звезды.

Пучок излучения, проходящий через нормальную к r площадку $d\sigma$ в направлении s внутри элементарного телесного угла $d\omega$ (см. рис. 27), переносит в секунду импульс $\frac{1}{c} I \cos \theta d\omega d\sigma$. Проекция этого импульса на радиальное направление, отнесенная к единичной площадке, равна $\frac{1}{c} I \cos^2 \theta d\omega$. Поэтому полный перенос импульса в указанном направлении, т. е. лучистое давление, составляет $p_r = \frac{1}{c} \int I \cos^2 \theta d\omega$. Вычисление с помощью (7,3,6) приводит к значению $p_r = \frac{4\pi}{3c} B = \frac{1}{3} aT^4$, совпадающему с известным законом термодинамического равновесия.

Большинство известных звезд, образующих так называемую главную последовательность диаграммы спектр — светимость, состоит из вещества, которое с высокой степенью точности можно считать идеальным газом, удовлетворяющим классической статистике Больцмана. В частности, звездное вещество отвечает обычной формуле Клапейрона $p = \frac{R}{\mu} \rho T$, где R — универсальная газовая постоянная, μ — молекулярный вес звездного вещества, т. е. приходящееся на одну частицу среднее значение массы, выраженное в относительных единицах (с достаточной точностью эту единицу можно отождествить с массой атома водорода). Для смеси нейтральных газов молекулярный вес определяется точным химическим составом вещества. В нашем случае вычисление этой величины значительно упрощается и не требует точного знания химического состава веще-

ства, так как последнее в глубоких недрах звезды почти полностью ионизировано.

Составим общую формулу для молекулярного вещества в предположении полной ионизации.

Обозначим через x_i относительное содержание в звездном веществе элемента с атомным весом A_i и зарядом ядра Z_i . Если ρ — плотность вещества, то в 1 см^3 данный элемент имеет массу ρx_i , а число его атомов равно $\frac{\rho x_i}{A_i m_p}$, где m_p — абсолютная масса протона. Число частиц (ядер и свободных электронов), возникающих в 1 см^3 при ионизации этого элемента, равно $\frac{\rho x_i}{A_i m_p} (Z_i + 1)$. Полное число частиц составляет $\frac{\rho}{m_p} \sum \frac{x_i}{A_i} (Z_i + 1)$. Разделив массу вещества в объеме 1 см^3 , выраженную в относительных единицах (т. е. величину $\frac{\rho}{m_p}$), на полное число частиц, получим

$$\mu = \frac{1}{\sum \frac{x_i}{A_i} (Z_i + 1)}.$$

Выделим два члена суммы, соответствующие водороду и гелию. В выражении

$$2x_{\text{H}} + \frac{3}{4} x_{\text{He}} + \sum \frac{x_i}{A_i} (z_i + 1)$$

суммирование относится ко всем более тяжелым элементам, входящим в состав звездного вещества. Для этих элементов можно принять $\frac{Z_i + 1}{A_i} \simeq \frac{1}{2}$. Следовательно, предыдущее выражение примет вид

$$2x_{\text{H}} + \frac{3}{4} x_{\text{He}} + \frac{1}{2} \sum x_i.$$

Внося сюда очевидное значение $\sum x_i = 1 - x_{\text{H}} - x_{\text{He}}$, находим

$$\mu = \frac{1}{2x_{\text{H}} + \frac{3}{4} x_{\text{He}} + \frac{1}{2} (1 - x_{\text{H}} - x_{\text{He}})}. \quad (7,3,8)$$

В теории внутреннего строения звезд эта приближенная формула обеспечивает удовлетворительную точность. Отказ от соотношения $\frac{Z_i + 1}{A_i} \simeq \frac{1}{2}$ и задание определенного химического состава звездного вещества изменяют коэффициент при трехчлене $1 - x_{\text{H}} - x_{\text{He}}$, однако это изменение во всех случаях оказывается сравнительно небольшим. Так, если принять, что наиболее обильные из тяжелых элементов, входящих в состав звездного вещества, составляют

смесь Рассела *, то коэффициент при указанном трехчлене будет равен 0,54. Имеется также возможность ввести поправку, учитывающую неполную ионизацию звездного вещества. Для данного химического состава она вычисляется в зависимости от температуры и электронной концентрации.

Для чистого водорода ($x_H = 1, x_{He} = 0$) формула (7,3,8) дает $\mu = \frac{1}{2}$, для гелия ($x_H = 0, x_{He} = 1$) $\mu = \frac{4}{3}$, тогда как для вещества, состоящего из более тяжелых химических элементов, получается $\mu = 2$. Следует поэтому ожидать, что при полной ионизации звездного вещества его молекулярный вес заключен в пределах от $\frac{1}{2}$ до 2.

Для расчета внутреннего строения звезды необходимо знать коэффициент поглощения или, как его часто называют в астрофизике, коэффициент непрозрачности звездного вещества. Основными механизмами непрерывного поглощения в звездах являются фотоионизация (связанно-свободные переходы), свободно-свободные переходы и томсоновское рассеяние света на свободных электронах. Хорошо разработанная теория поглощения в каждом из перечисленных случаев позволяет получить надежные формулы, которые мы здесь не приводим. В двух первых случаях они определяют коэффициенты поглощения в виде функций частоты. Между тем составленная выше формула (7,3,7) найдена для «серого вещества», отвечающего постоянному значению коэффициента поглощения для всего спектра. Для ее обоснования необходимо убедиться в том, что столь сильное упрощение не вносит существенных погрешностей при вычислении переноса энергии.

Возвращаясь к уравнению переноса для удельной интенсивности и повторяя рассуждения, которые привели нас к формуле (7,3,6), нетрудно получить аналогичное соотношение

$$I_\nu = B_\nu - \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dB_\nu}{dr} \cos \theta,$$

представляющее собой приближенное выражение удельной интенсивности в направлении, образующем угол θ с радиусом-вектором данной точки. С его помощью найдем удельный поток излучения

$$H_\nu(r) = - \frac{4\pi}{3\alpha_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dr}. \quad (7,3,9)$$

Если формула (7,3,7) дает правильную величину переноса энергии, то она должна совпадать с результатом интегрирования выражения (7,3,9) по частоте. Условием такого совпадения является

* В астрофизике смесью Рассела называют вещество с относительным составом O : (Na + Mg) : Si : (K + Ca) : Fe = 8 : 4 : 1 : 1 : 2.

специальный выбор коэффициента α . После интегрирования и упомянутого сравнения получим

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha_{\nu}} \frac{dB_{\nu}}{dT} d\nu}{\frac{dB}{dT}}. \quad (7,3,10)$$

Вычисление переноса энергии на основе гипотезы «серого вещества» позволяет получить правильный количественный результат, если постоянное значение коэффициента поглощения найдено согласно закону усреднения (7,3,10). Это постоянное значение называют росселандовым средним.

Не производя вычислений, которые связаны с довольно громоздкими выкладками, но с интересующей нас точки зрения не имеют существенного значения, мы приведем здесь только конечные результаты в виде формул, непосредственно применяемых в теории внутреннего строения звезд.

В случае фотозлектрического поглощения росселандово среднее определяется приближенной формулой Крамерса

$$\alpha = 4,34 \cdot 10^{25} (1 + x_{\text{H}})(1 - x_{\text{H}} - x_{\text{He}}) \frac{\bar{g}}{t} \frac{\rho^2}{T^{3,5}}, \quad (7,3,11)$$

где \bar{g} — среднее значение множителя Гаунта, а t — фактор, учитывающий некоторые поправки к закону Крамерса и получивший название гильотинного множителя. Оба поправочных множителя по порядку не сильно отличаются от единицы, и потому их часто не принимают во внимание, полагая $\frac{\bar{g}}{t} \simeq 1$.

Формула Крамерса для свободно-свободных переходов такова:

$$\alpha = 3,68 \cdot 10^{22} (1 + x_{\text{H}})(x_{\text{H}} + x_{\text{He}}) \bar{g} \frac{\rho^2}{T^{3,5}}. \quad (7,3,12)$$

Третий из упомянутых процессов — томсоновское рассеяние света на свободных электронах — нейтральный, происходящий с одним и тем же коэффициентом во всех частотах. Его с достаточной точностью определяют формулой

$$\alpha = 0,19\rho(1 + x_{\text{H}}). \quad (7,3,13)$$

Для большинства звезд главной последовательности основную роль в механизме непрерывного поглощения играют связанно-свободные и свободно-свободные переходы. Количественное соотношение между ними определяется содержанием водорода и гелия в звездном веществе. Если $1 - x_{\text{H}} - x_{\text{He}} \geq 0,02$ (тяжелые элементы составляют не менее 2% вещества по массе), то преобладают

связанно-свободные переходы (фотоионизация). При большем содержании водорода и гелия заметно влияют на непрозрачность звездного вещества и свободно-свободные переходы.

Томсоновское рассеяние света на электронах играет роль при очень высоких температурах и низких плотностях.

4. Уравнения строения звезды. Переходим к составлению общих уравнений внутреннего строения звезды с учетом условий в ее недрах.

Первым из этих уравнений является условие гравитационного равновесия, которое мы будем писать в форме (7,1,2), присоединяя к нему очевидное соотношение $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$. Однако, в отличие от теории политропных шаров Эддена, в которой функция ρ отождествлялась с газовым давлением, в теории внутреннего строения звезд в общем случае необходимо принимать во внимание не только газовое, но и лучистое давление. Для предварительной оценки его составим отношение величины $p_r = \frac{1}{3} a T_c^4$ к газовому давлению в центре конфигурации. С помощью приближенных соотношений (7,1,9) находим

$$\frac{p_r}{p_c} \simeq \frac{\pi a \gamma^3}{18 R^4} \mu^4 M^2 = 8,2 \cdot 10^{-69} (\mu^2 M)^2. \quad (7,4,1)$$

Мы видим, что отношение лучистого давления к газовому в центральной части конфигурации определяется молекулярным весом и массой звезды. При заданном молекулярном весе оно возрастает пропорционально квадрату массы. Аналогичная зависимость существует и в политропном шаре, в чем легко убедиться при помощи формул (7,2,5).

Положив в (7,4,1) $\mu \simeq 1$ и $M = M_\odot$, получим $\frac{p_r}{p_c} \simeq 0,03$. Это показывает, что в звездах, массы которых близки к солнечной, лучистое давление не играет существенной роли. При переходе к ранним спектральным классам, которым присущи более значительные звездные массы, роль лучистого давления должна быстро возрастать. Однако для надежной количественной оценки величины $\frac{p_r}{p_c}$ соотношением (7,4,1) в этих случаях пользоваться нельзя, поскольку оно основано на формулах (7,1,9), при выводе которых лучистое давление во внимание не принималось.

Третье уравнение строения звезды выражает наличие в ней внутренних источников энергии.

Обозначим через $L(r)$ мощность источников, расположенных внутри сферы радиуса r . В стационарной звезде эта величина равна также потоку энергии через указанную сферу, поскольку генерация энергии источниками должна компенсироваться ее переносом к внешним слоям звездного вещества. Приращение $dL(r)$ этой функции

представляет собой мощность источников, находящихся в тонком слое между сферами радиусов r и $r + dr$. Сохраняя прежнее обозначение, можно написать $dL(r) = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr$, где ϵ определяется принятой в данной модели гипотезой о природе источников энергии.

Четвертое уравнение зависит от механизма переноса энергии в звезде. Если допустить, что этот перенос осуществляется излучением, то поток $H(r)$ энергии через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к радиальному направлению и помещенную на расстоянии r от центра звезды, равен, как мы видели, величине (7,3,7). Внося ее в очевидное соотношение $L(r) = 4\pi r^2 H(r)$, получим

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3}{16\pi\alpha c} \frac{\alpha L(r)}{r^2 T^3},$$

где α — росселандово среднее коэффициента непрерывного поглощения.

Таким образом, для звезды, находящейся в лучистом равновесии, мы имеем систему четырех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= - \frac{\gamma M(r) \rho}{r^2}; \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho; \\ \frac{dL(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho \epsilon; \quad \frac{dT}{dr} = - \frac{3}{16\pi\alpha c} \frac{\alpha L(r)}{r^2 T^3}. \end{aligned} \quad (7,4,2)$$

К этим уравнениям необходимо присоединить соотношение для гидростатического давления, а также формулы, выражающие физическую природу источников энергии и механизм непрозрачности звездного вещества.

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T + \frac{1}{3} \alpha T^4; \quad \epsilon = \epsilon(\rho, T, x_i); \quad \alpha = \alpha(\rho, T, x_i). \quad (7,4,3)$$

Принимая химический состав одинаковым во всех слоях звезды, следует считать, что величины x_i , характеризующие относительное обилие различных элементов, играют роль постоянных параметров.

Функции ϵ и α должны быть выбраны в виде (7,3,1) или (7,3,2), а также в соответствии с законами непрерывного поглощения (7,3,11), (7,3,12) или (7,3,13) в зависимости от типа изучаемой звезды и ее химического состава.

Если равенства (7,4,3) внести в (7,4,2), то получится довольно сложная система четырех дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $\rho(r)$, $T(r)$, $M(r)$, $L(r)$. Ее решение в общем виде оказывается невозможным, и потому приходится прибегнуть к численному интегрированию. Решение системы должно отвечать условиям:

1) в центре звезды

$$r = 0, \quad M(r) = 0, \quad L(r) = 0; \quad (7,4,4)$$

2) на внешней границе

$$\begin{aligned} r &= r_1, & \rho &= 0, & T &= 0^*, \\ M(r) &= M, & L(r) &= L, \end{aligned} \quad (7,4,5)$$

в которых через r_1 , M , L обозначены радиус, масса и светимость звезды соответственно.

Поскольку однозначное решение уравнений (7,4,2), составляющих систему четвертого порядка, определяется четырьмя условиями, а число условий (7,4,4), (7,4,5) равно шести, следует ожидать, что между тремя основными параметрами звезды — радиусом, массой и светимостью существуют два независимых соотношения. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Уравнения строения звезды имеют в общем случае четыре интеграла, содержащие четыре произвольные постоянные; их можно написать так:

$$F_i[r, \rho(r), T(r), M(r), L(r); x_H, x_{He}; C_1, \dots, C_4] = 0. \quad (7,4,6)$$

Из всех величин x_i , характеризующих химический состав звездного вещества, мы включили сюда лишь x_H и x_{He} , оставляя их значения неопределенными. В случае углеродного цикла в выражение функции $\epsilon(\rho, T)$, согласно (7,3,2), входит также x_{CN} ; однако этой величине мы можем приписать, как это обыкновенно делают, конкретное числовое значение.

Внесем в (7,4,6) условия (7,4,5). Полученные уравнения позволяют выразить постоянные интегрирования через пять параметров звезды: r_1 , M , L , x_H , x_{He} , вследствие чего интегралы (7,4,6) можно написать в следующем виде:

$$f_i[r, \rho(r), T(r), M(r); L(r); r_1, M, L, x_H, x_{He}] = 0.$$

Внося сюда условия (7,4,4), находим

$$f_i[0, \rho_c, T_c, 0, 0; r_1, M, L, x_H, x_{He}] = 0.$$

Два из этих равенств позволяют определить ρ_c и T_c , выразив их через параметры звезды. Подставив найденные таким образом значения ρ_c , T_c в два другие равенства, получим

$$\varphi_i(r_1, M, L, x_H, x_{He}) = 0; \quad i = 1, 2, \quad (7,4,7)$$

что и подтверждает высказанное выше утверждение о существовании двух независимых соотношений между параметрами звезды.

Доказанное утверждение получило название *теоремы Фогта — Рассела*. В частности, из этой теоремы следует, что для звезды с принятым способом генерации энергии и заданным законом

* Температура внешнего слоя звезды, разумеется, отлична от нуля. Однако она ничтожна по сравнению с температурой внутренних областей, измеряемой миллионами градусов. Поэтому при расчете внутреннего строения для нее можно принять нулевое значение.

непрозрачности внутреннее строение однозначно определяется тремя параметрами.

Если заданы радиус, масса и светимость звезды, то при указанных допущениях величины x_H , x_{He} определяются соотношениями (7,4,7), вследствие чего система уравнений (7,4,2) приобретает вполне конкретную форму и вместе с условиями (7,4,4) (7,4,5) позволяет найти однозначное решение задачи.

Три параметра, принятые при интегрировании уравнений строения звезды, могут быть, конечно, выбраны и другим способом: можно, например, задать массу и химический состав звезды, а ее радиус и светимость считать искомыми.

Последнее из уравнений (7,4,2) составлено в предположении лучистого равновесия, при котором энергия в звезде переносится излучением. Между тем, как уже указывалось, в звезде возможно также конвективное равновесие, когда механизмом передачи энергии являются регулярные движения звездного вещества. В теории внутреннего строения звезд допускается, что лучистое равновесие существует в тех случаях, когда оно устойчиво. Неустойчивое лучистое равновесие практически невозможно, так как любое случайное возмущение нарушило бы его и вызвало бы переход к конвективному равновесию.

Для устойчивости лучистого равновесия необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему градиент температуры по абсолютному значению был меньше градиента температуры при адиабатическом равновесии: $\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{луч}} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ад}}$. При соблюдении этого условия элемент вещества, переместившийся под влиянием возмущающей силы в более высокий слой звезды, будет иметь большую плотность, чем окружающая его среда, и потому на него будет действовать большая сила тяжести, стремящаяся вернуть его в исходное положение. Возмущение вызывает в этом случае появление сил, восстанавливающих равновесие. Если же лучистый градиент температуры по абсолютной величине больше адиабатического, то при подъеме элемента вещества его плотность окажется меньше плотности окружающей среды, на него будет действовать меньшая сила тяжести, и потому подъем элемента будет продолжаться и без возмущающей силы. К аналогичным заключениям приводит рассмотрение погружения элемента.

Убедившись в том, что гипотеза лучистого равновесия приводит к условию $\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{луч}} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ад}}$, необходимо отказаться от этой гипотезы и допустить конвективное равновесие в звезде. При этом последнее уравнение (7,4,2) должно быть заменено новым.

В случае конвективного равновесия состояние элемента звездного вещества, переходящего из одного слоя в другой, изменяется

вследствие механического и теплового взаимодействия с окружающей средой. Количественные оценки показывают, что обмен энергией путем теплопроводности и лучистого переноса относительно мал, вследствие чего основной причиной, определяющей изменение состояния данного элемента, является его механическое взаимодействие с прилегающими слоями звездного вещества. Поэтому с достаточной точностью выполняется закон адиабаты, который мы здесь напомним в виде $T \sim p^{1-\frac{1}{k}}$, или $\ln T = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \ln p + \text{const}$. Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{T}{p} \frac{dp}{dr}. \quad (7,4,8)$$

Этим уравнением и должно быть заменено последнее уравнение системы (7,4,2) в случае конвективного равновесия.

Принимая химический состав вещества одинаковым во всех слоях звезды, следует считать, что в уравнениях системы (7,4,2) величины x_i , характеризующие относительное содержание различных элементов, играют роль постоянных параметров. Однако это допущение имеет ограниченное значение и может относиться только к начальной эпохе существования звезды с термоядерной генерацией энергии. Протон-протонные реакции и углеродный цикл, сопровождающиеся превращением водорода в гелий, постепенно изменяют химический состав звездного вещества, причем скорость этого процесса различна в разных частях звезды.

По известному дефекту массы нетрудно вычислить количество энергии, освобождающееся при образовании α -частицы; оно составляет около $4,4 \cdot 10^{-5}$ эрг. Некоторую часть энергии уносят из звезды нейтрино, и потому указанное значение должно быть соответствующим образом уменьшено. С учетом этой поправки получается, что на каждую образующуюся α -частицу звезда получает энергию: при протон-протонной реакции $4,2 \cdot 10^{-5}$ эрг, при углеродном цикле — $4,0 \cdot 10^{-5}$ эрг.

Составив отношение этих величин к массе α -частицы, найдем, что на единицу массы образующегося в звезде гелия генерация энергии равна $E_{pp} = 6,3 \cdot 10^{13}$ и $E_{cc} = 6,0 \cdot 10^{18}$ эрг/г соответственно. Поскольку выход энергии в 1 см^3 составляет в секунду $\rho \epsilon_{pp}$ и $\rho \epsilon_{cc}$, массы расходуемого за то же время водорода в процессе рассматриваемых реакций равны $\frac{\rho \epsilon_{pp}}{E_{pp}}$ и $\frac{\rho \epsilon_{cc}}{E_{cc}}$. С другой стороны, полная убыль массы водорода в единице объема должна составить $-\rho \frac{dx_H}{dt}$. Следовательно,

$$\frac{dx_H}{dt} = -\frac{\epsilon_{pp}}{E_{pp}} - \frac{\epsilon_{cc}}{E_{cc}}. \quad (7,4,9)$$

Изменение содержания гелия в звездном веществе отличается от (7,4,9) только знаком.

Формулы (7,3,1) и (7,3,2), определяющие зависимость ϵ_{pp} и ϵ_{cc} от физических условий, показывают, что скорость изменения химического состава зависит от расстояния до центра звезды. В центре она значительна, с удалением от него довольно быстро убывает. В случае конвективного равновесия возникающие неоднородности сглаживаются вследствие перемешивания звездного вещества. Например, если ядро звезды конвективное, то в различных частях его химический состав практически одинаков, хотя может сильно отличаться от состава окружающей оболочки, находящейся в лучистом равновесии. Если же равновесие ядра лучистое, то с удалением от центра содержание водорода в звездном веществе возрастает, а гелия — убывает.

5. Строение звезд главной последовательности. По современным представлениям, термоядерные реакции приобретают существенное значение и начинают играть роль основного источника энергии с момента выхода звезды на главную последовательность, когда завершается сравнительно короткая и самая ранняя стадия звездной эволюции — гравитационное сжатие. На этой стадии звезда представляет собой относительно холодный газовый шар, постепенно уплотняющийся под влиянием сил тяготения. Скорость уплотнения зависит от излучения звезды, поскольку, по теореме вириала, около половины освобождающейся гравитационной энергии должно отдаваться в окружающее пространство. Вторая половина, превращаясь в тепло, вызывает нагревание звездного вещества.

Процесс гравитационного сжатия может несколько задержаться термоядерными реакциями, протекающими при относительно низких температурах, — реакциями с участием дейтерия, лития, бериллия и бора. Однако оценки, выполненные с учетом известного космического обилия этих элементов, показывают, что роль таких реакций невелика, и потому при изучении гравитационного сжатия ими можно пренебречь.

Расчет показывает, что продолжительность стадии гравитационного сжатия, завершающейся выходом звезды на главную последовательность и началом термоядерной генерации энергии, довольно сильно зависит от массы звезды. Длительность этой стадии можно рассчитать по формуле

$$\tau \approx \frac{3}{2} \frac{\gamma M^3}{r_1 L}, \quad (7,5,1)$$

где r_1 и L — радиус и светимость звезды в конце рассматриваемой стадии.

Внося в (7,5,1) значения массы, радиуса и светимости Солнца, получим $\tau = 5 \cdot 10^7$ лет.

Для общей ориентировки можно воспользоваться известными из наблюдений зависимостями между массами, радиусами и светимостями звезд главной последовательности. В первом приближении эти зависимости имеют вид $r_1 \sim M$ и $L \sim M^3$, следовательно, $\tau \sim M^{-2}$. Время жизни звезды в стадии сжатия убывает с возрастанием ее массы. Так, для звезд типа ВО оно составляет около 10^5 лет, а для нормальных карликов типа МО достигает $4 \cdot 10^8$ лет.

Массой определяется также спектральный класс, которым завершается стадия гравитационного сжатия: чем больше масса звезды, тем более ранним является ее спектральный класс в момент выхода на главную последовательность. Звезды с пятикратной солнечной массой завершают гравитационное сжатие в классе В5, а звезды с десятикратной массой Солнца — в спектральном классе В1.

Естественно предположить, что во время гравитационного сжатия вещество звезды остается химически однородным. Поэтому при изучении начального состояния звезд в стадии главной последовательности величины x_i являются постоянными параметрами для данной звезды в целом, что значительно упрощает задачу.

При расчете внутреннего строения звезд нельзя принять единую модель, общую для всех спектральных классов. Даже с помощью оценочной формулы (7,1,9) нетрудно убедиться в том, что с переходом от поздних спектральных классов к ранним температура в центральных частях звезд довольно быстро возрастает. Если для Солнца при $\mu = 1$ получается около $12 \cdot 10^8$ град, то для звезд более ранних классов температура оказывается выше, а в случае поздних классов — ниже. Поэтому в звездах верхней части главной последовательности источником энергии служит углеродный цикл, тогда как для звезд нижней части последовательности роль основного источника энергии играют протон-протонные реакции. Различие же в способах генерации энергии определяет и различие моделей строения звезд.

Формула (7,3,2) показывает, что выход энергии при углеродистом цикле очень остро зависит от температуры. Например, при температурах 15—25 млн. град эту формулу можно аппроксимировать зависимостью $\epsilon_{cc} \sim T^{18}$. Поэтому генерация энергии сосредоточена в относительно небольшом центральном объеме, вследствие чего условие стационарности звезды удовлетворяется только при очень большом градиенте температуры. Устойчивость лучистого равновесия при этом нарушается, и приходится принять, что центральная часть звезды находится в конвективном равновесии. В то же время во внешних частях звезды лучистый градиент температуры по абсолютной величине оказывается меньше адиабатического, и в этих частях сохраняется лучистое равновесие. Таким образом, к звездам верхней части главной последовательности применима модель, со-

стоящая из центрального конвективного ядра и окружающей его лучистой оболочки.

При протон-протонных реакциях генерация энергии зависит от температуры менее остро. В области температур 8—12 млн. град формула (7,3,1) дает $v_{pp} \sim T^{4,5}$. Поэтому стационарность соблюдается при значительно меньшем абсолютном градиенте температуры, который не нарушает устойчивости лучистого равновесия. В наружных же частях звезды устойчивым оказывается конвективное равновесие. В отличие от предыдущего случая модель состоит из ядра, находящегося в лучистом равновесии, и окружающей его конвективной оболочки.

Таблица 3

Масса	$10 M_{\odot}$	$5 M_{\odot}$	$2,5 M_{\odot}$	M_{\odot} (Солнце)	$0,6 M_{\odot}$ (Кастор С)
Спектр	B1	B5	A2	G2	M0
x_{H}	0,90	0,90	0,90	0,70	0,8
x_{He}	0,09	0,09	0,09	0,276	0,184
ρ_c	7,8	19,5	48,3	88	79
T_c	$28 \cdot 10^6$	$24 \cdot 10^6$	$20 \cdot 10^6$	$14 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$
Источник энергии	сс	сс	сс	pp	pp

В табл. 3 приводятся примерные данные, характеризующие начальные состояния звезд с различными массами на главной последовательности диаграммы Герцшпрунга — Рассела, заимствованные из известной монографии М. Шварцшильда [5].

С приходом на главную последовательность звезда вступает в новую стадию эволюции, продолжительность которой во много раз превосходит время гравитационного сжатия. Для Солнца продолжительность стадии главной последовательности составляет около 10^{10} лет, что в тысячи раз больше периода гравитационного сжатия. И здесь прослеживается обратная зависимость от массы: звезды с малыми массами остаются на главной последовательности дольше, чем звезды с большими массами. Можно поэтому предположить, что многие звезды, массы которых отвечают ранним спектральным классам, давно завершили стадию главной последовательности, тогда как звезды поздних спектральных классов с относительно малыми массами прошли лишь небольшую часть этой стадии.

Во время пребывания на стадии главной последовательности звезды изменяются сравнительно незначительно и притом очень

медленно, поскольку их светимости долгое время почти точно компенсируются выделением энергии при термоядерных реакциях. Для иллюстрации мы приведем изменение светимости, радиуса и эффективной температуры Солнца согласно расчетам М. Шварцшильда, выполненным в предположении, что со времени вступления Солнца на главную последовательность прошло $5 \cdot 10^9$ лет.

$$\frac{L_{\text{совр}}}{L_{\text{нач}}} = 1,6; \quad \frac{r_{1 \text{ совр}}}{r_{1 \text{ нач}}} = 1,04; \quad \frac{T_{\text{э совр}}}{T_{\text{э нач}}} = 1,1.$$

6. Белые карлики. Белые карлики составляют особый класс небесных тел, которые по своим свойствам сильно отличаются от звезд главной последовательности. При массах, близких к солнечной, эти звезды имеют радиусы, измеряемые сотыми долями радиуса Солнца, вследствие чего средние плотности их вещества достигают $10^5 - 10^6 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Светимости белых карликов обыкновенно составляют 10^{-2} , 10^{-4} светимости Солнца, а эффективные температуры обычно соответствуют спектральному классу А. На диаграмме Герцшпрунга — Рассела звезды этого класса расположены приблизительно параллельно главной последовательности, но на 8—9 звездных величин ниже последней. Первый из белых карликов — спутник Сириуса — был открыт Альваном Кларком в 1862 г. Это звезда с массой $0,98 M_{\odot}$ и светимостью около $0,002 L_{\odot}$, принадлежащая спектральному классу А5. Радиус Сириуса В составляет 15—20 тыс. км.

Особенности внутреннего строения белых карликов обусловлены тем, что в присущих этим звездам условиях плотности и температуры вещество не следует обычным законам идеальных газов. Как известно, система частиц, находящаяся в термодинамическом равновесии, удовлетворяет классической статистике Больцмана в том случае, если параметр

$$\lambda = \frac{2(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3 n} \quad (7,6,1)$$

значительно превосходит единицу. Если же при данных температуре T и концентрации частиц n этот параметр меньше единицы, в системе проявляются квантово-механические эффекты — наступает, как принято говорить, вырождение газа, свойства которого описываются квантовой статистикой.

Будем для простоты считать, что звездное вещество состоит из полностью ионизированных атомов химического элемента с атомным весом A и зарядом ядра Z . При заданной плотности ρ в этом случае электронная концентрация $n_e = \frac{\rho Z}{m_p A}$, что при $\rho \approx 10^6 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ дает $n_e \approx 10^{30} Z A^{-1}$. Для концентрации ядер находим $n_a \approx 10^{30} A^{-1}$.

Применяя формулу (7,6,1) к электронному газу ($m = m_e$) и к газу, состоящему из тяжелых частиц звездного вещества ($m = m_p A$), можно убедиться в том, что при температурах $10^6, 10^{70}$ К и при $A \geq 4$ в первом случае $\lambda \ll 1$, а во втором $\lambda > 1$. Это показывает, что в веществе белых карликов ядра атомов образуют обычный идеальный газ, удовлетворяющий классической статистике Больцмана, тогда как электронный газ находится в состоянии сильного вырождения, отвечающего квантовой статистике Ферми — Дирака.

При всех значениях T , обеспечивающих выполнение условия $\lambda \ll 1$, уравнение состояния вырожденного газа не зависит от температуры и будет таким же, как при $T = 0$. Вещество принято в этом случае называть холодным.

Статистика Ферми — Дирака приводит в общем случае к следующему уравнению состояния, связывающему электронное давление с плотностью звездного вещества:

$$p_e = Af(x); \quad \rho = Bx^3, \quad (7,6,2)$$

где

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} + 3 \operatorname{arcsch} x, \quad (7,6,3)$$

а через A и B обозначены постоянные

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3}; \quad B = \frac{8\pi c^3 m^3 m_p \mu_e}{3h^3}. \quad (7,6,4)$$

Входящий сюда параметр μ_e представляет собой среднюю относительную массу звездного вещества, приходящуюся на один электрон. По определению, $\mu_e = \frac{\rho}{m_p} : n_e$. При полной ионизации электронная концентрация определяется очевидной формулой $n_e = \frac{\rho}{m_p} \sum x_i Z_i : A_i$, где x_i — относительное содержание элемента с атомным весом A_i и зарядом ядра Z_i . Выделив член, соответствующий водороду, и принимая во внимание, что для других элементов отношение $\frac{Z_i}{A_i}$ в среднем составляет около $\frac{1}{2}$, получим $n_e = \frac{\rho}{2m_p} (1 + x_H)$.

Следовательно,

$$\mu_e = \frac{2}{1 + x_H}. \quad (7,6,5)$$

Параметр x в (7,6,2), связывающий электронное давление с плотностью вещества, равен отношению $\frac{p_{\max}}{mc}$, где p_{\max} — наибольшее значение импульса электрона в данной системе. При $x \ll 1$ вырождение газа называется нерелятивистским, а в слу-

чае $x \gg 1$, когда в газе имеются очень быстрые частицы, обнаруживающие сильные эффекты специальной теории относительности, вырождение является релятивистским. При достаточно больших значениях x первое уравнение (7,6,2) принимает вид $p_e = 2Ax^4$. Сравнивая его с формулой для плотности и принимая во внимание значения постоянных (7,6,4), найдем

$$p_e = C\rho^{\frac{4}{3}}; \quad C = \frac{ch}{8} \left(\frac{3}{\pi m_p^4 \mu_e^4} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7,6,6)$$

Уравнение состояния при сильном релятивистском вырождении формально совпадает с законом политропы при $n = 3$.

Стационарная звезда представляет собой конфигурацию, равновесие которой определяется взаимодействием между гравитацией и давлением. Полное давление внутри звезды находится по формуле $p = p_e + p_a + p_r$, где p_e и p_a — парциальные давления электронов и тяжелых частиц, p_r — давление излучения. Для сравнения отдельных слагаемых можно воспользоваться формулой (7,6,6) и очевидными соотношениями $p_a = n_a kT$, $p_r = \frac{1}{3} aT^4$. Простое вычисление дает $\frac{p_e}{p_a} \gg 1$ и $\frac{p_e}{p_r} \gg 1$. Поэтому с достаточной точностью следует положить $p = p_e$.

Вывод о сильном вырождении электронного газа в белых карликах основан на оценках средних плотностей звезд этого класса. Поскольку у внешней границы звезды плотность вещества должна быть малой, следует считать, что наружные слои белых карликов состоят из обычного идеального газа и что вырождение начинается лишь с некоторой глубины. Количественные расчеты показывают, что вследствие большой напряженности силы тяжести плотность вещества белых карликов быстро возрастает с глубиной, и потому переход к вырожденному состоянию происходит на сравнительно небольшом расстоянии от внешней границы звезды. Поэтому наружная невырожденная оболочка, обладающая лишь небольшой долей общей массы звезды, практически не влияет на строение массивного вырожденного ядра.

7. Строение белых карликов. Теория внутреннего строения белых карликов, отвечающая перечисленным особенностям, разработана в 1935 г. Чандрасекаром [6]. Математический аппарат ее составляют уравнение механического равновесия и параметрические уравнения состояния электронного газа Ферми (7,6,2).

Непосредственное вычисление дает

$$\frac{dp}{dr} = Af'(x) \frac{dx}{dr} = \frac{8Ax^4}{(1+x^2)^2} \frac{dx}{dr}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{8A}{B} \frac{d}{dr} (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Введя обозначение $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, из которого следует

$$x^2 = (y^2 - 1)^{\frac{3}{2}}; \quad \rho = B(y^2 - 1)^{\frac{3}{2}},$$

приведем уравнение равновесия (7,1,3) к виду

$$\frac{8A}{B} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dy}{dr} \right) + 4\pi\gamma r^2 B (y^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Как и прежде, примем, что плотность максимальна в центре звезды, а к периферии убывает, стремясь к нулю на внешней границе. В соответствии с этим введенная выше переменная y уменьшается от некоторого наибольшего значения y_0 в центре до единицы на поверхности звезды.

Заменяем переменные

$$r = \left(\frac{2A}{\pi\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{By_0} \eta; \quad y = y_0\varphi. \quad (7,7,1)$$

После несложных преобразований приведем предыдущее уравнение к виду

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta} \frac{d\varphi}{d\eta} + (\varphi^2 - y_0^{-2})^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (7,7,2)$$

При условиях в центре $\eta = 0$, $\varphi = 1$, $\frac{dy}{d\eta} = 0$ и при заданном значении y_0 это дифференциальное уравнение, называемое уравнением Чандрасекара, однозначно определяет строение белого карлика. Численное интегрирование уравнения выполняется от центра до внешней границы, которой отвечает точка η_1 , соответствующая $\varphi = y_0^{-1}$. В монографии Чандрасекара [3] имеются таблицы, содержащие результаты численного интегрирования уравнения (7,7,2) для десяти различных значений параметра y_0 .

Пользуясь таблицей для заданного значения y_0 , легко найти распределение плотности в звезде. При помощи первого из соотношений (7,7,1) вычисляется значение переменной η , отвечающее принятому расстоянию от центра. Входя с этим значением в таблицу, находим φ , после чего плотность вычисляем по формуле $\rho = B(y^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$. Масса конфигурации определяется с помощью

очевидного соотношения

$$M = 4\pi \int_0^{r_1} r^2 \rho dr,$$

где r_1 — радиус конфигурации.

Перейдя к переменным η , φ , получим

$$M = \frac{4\pi}{B^2} \left(\frac{2A}{\pi\gamma} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\eta_1} (\varphi^2 - y_0^{-2})^{\frac{3}{2}} \eta^2 d\eta,$$

Таблица 4

y_0^{-2}	η_1	$-\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$
0,00	6,8968	2,0182
0,01	5,3571	1,9321
,02	4,9857	,8652
,05	,4601	,7096
,10	,0690	,5186
,20	3,7271	,2430
,30	,5803	,0337
,40	,5245	0,8598
,50	,5330	,7070
,60	,6038	,5679
,80	4,0446	,3091
1,00	∞	0,0000

откуда, согласно (7,7,2), следует

$$M = -\frac{4\pi}{B^2} \left(\frac{2A}{\pi\gamma} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_1. \quad (7,7,3)$$

Радиус конфигурации находится по формуле

$$r_1 = \left(\frac{2A}{\pi\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\eta_1}{By_0}, \quad (7,7,4)$$

которая представляет собой первое из соотношений (7,7,1), примененное к внешней границе звезды.

Для применения теории Чандрасекара удобно пользоваться

специальной таблицей, выражающей зависимость граничных значений η_1 и $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$ от параметра y_0 . Ниже приводится такая таблица, составленная по данным Чандрасекара для десяти значений η_1 (табл. 4). Зная массу белого карлика, находим величину $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$ согласно соотношению (7,7,3), затем граничное значение η_1 , определяющее радиус конфигурации (7,7,4), и параметр y_0 , позволяющий вычислить ход плотности с расстоянием от центра звезды.

Однозначное соотношение между массой и радиусом конфигурации очень характерно для белых карликов. Другая особенность этого класса звезд состоит в существовании верхнего предела массы. Граничное значение $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$, связанное с массой звезды равенством (7,7,3), монотонно возрастает с увеличением y_0 и при $y_0 \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу. Уравнение Чандрасекара (7,7,2) переходит при этом в уравнение Эмдена для политропы $n = 3$, которому отвечает $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1 = -2,02$. Поэтому верхней границей массы

белого карлика служит величина

$$M_{\text{макс}} = \frac{8,08\pi}{B^2} \left(\frac{2A}{\pi\gamma} \right)^{\frac{3}{2}} = 5,75\mu_e^{-2} M_{\odot}. \quad (7,7,5)$$

Массы реальных звезд должны быть меньше этой величины, так как при $y_0 \rightarrow \infty$ величина η_1 остается конечной и соотношение (7,7,4) дает $r_1 \rightarrow 0$.

Параметр μ_e определяется формулой (7,6,5) в зависимости от содержания водорода в веществе звезды. Обыкновенно принимают, что в вырожденных ядрах белых карликов водород совершенно или почти полностью отсутствует, поскольку в противном случае при высокой плотности звездного вещества протон-протонные реакции были бы чрезмерно мощным источником энергии, не отвечающим низким светимостям звезд этого класса. При $x_H = 0$ имеем $\mu_e = 2$, $M_{\text{макс}} = 1,44 M_{\odot}^*$.

В табл. 5 приводятся массы, центральные и средние плотности и радиусы полностью вырожденных звездных конфигураций по

Таблица 5

y_0^{-2}	$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\rho_c, \text{г}\cdot\text{см}^{-3}$	$\bar{\rho}, \text{г}\cdot\text{см}^{-3}$	$r_1, \text{см}$
0,00	1,44	∞	∞	0
0,01	1,38	$1,97 \cdot 10^9$	$7,40 \cdot 10^7$	$2,06 \cdot 10^8$
0,02	1,33	$6,74 \cdot 10^8$	3,14	2,72
0,05	1,22	1,63	1,02	3,84
0,10	1,08	$5,30 \cdot 10^7$	$4,20 \cdot 10^6$	4,96
0,20	0,885	1,57	1,58	6,45
0,30	0,738	$7,00 \cdot 10^6$	$8,08 \cdot 10^5$	7,50
0,40	0,612	3,60	4,58	8,60
0,50	0,505	1,96	2,68	9,60
0,60	0,405	1,07	1,54	$1,07 \cdot 10^9$
0,80	0,22	$2,24 \cdot 10^5$	$3,84 \cdot 10^4$	1,39
1,00	0,00	0	0	∞

Чандрасекару для $\mu_e = 2$. Радиус звезды может отличаться от табличных значений r_1 лишь незначительно, так как геометрическая толща внешнего слоя, окружающего вырожденное ядро, относительно мала.

Обыкновенно принимают, что внутренние температуры белых карликов измеряются миллионами градусов. Для обоснования этой оценки необходимо принять во внимание, что вырожденный газ обладает очень высокой теплопроводностью, вследствие чего

* Следует заметить, что более точная теория (см. п. 8) дает для верхней границы масс белых карликов несколько меньшее значение, равное $1,22 M_{\odot}$.

вырожденная конфигурация, составляющая основную массу звезды, является изотермической. В отличие от этого, внешняя оболочка звезды, состоящая из обычного идеального газа, находится в лучистом равновесии и характеризуется быстрым повышением температуры с глубиной. Естественно поэтому допустить, что внутренняя температура белого карлика совпадает с температурой промежуточного слоя, расположенного между невырожденной оболочкой звезды и ее внутренним ядром. Простой расчет показывает, что эта температура удовлетворяет приближенному соотношению $T^{3,5} \sim \frac{L}{M}$ и зависит от молекулярного веса вещества оболочки и от параметра μ_e . Положив $M = M_\odot$ и принимая $x_H = 0$, $x_{He} = 0,9$ и, следовательно, $\mu = 1,38$, $\mu_e = 2$, Шварцшильд [5] находит следующую зависимость температуры от светимости звезды:

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{-2} \quad 10^{-3} \quad 10^{-4}$$

$$T = 17 \cdot 10^6 \quad 9 \cdot 10^6 \quad 4 \cdot 10^6 \text{ } ^\circ\text{K}$$

Источником энергии белых карликов могут служить термоядерные реакции, в процессе которых происходит выгорание остатков водорода в веществе звезды. Однако М. Шварцшильд считает такую гипотезу маловероятной. Гравитационное сжатие возможно только на ранних стадиях эволюции белых карликов, когда состоянием электронной компоненты звездного вещества еще не достигнуто полного вырождения, поскольку при достижении последнего имеется, как мы видели, однозначное соответствие между массой и радиусом конфигурации.

Не может также быть источником энергии и теплота электронного газа, так как в случае статистики Ферми — Дирака все состояния с малой энергией уже замещены, а их дополнительное заселение противоречит запрету Паули.

Единственным источником энергии может, вероятно, служить только тепловое движение атомных ядер, составляющих обычный идеальный газ, далекий от состояния вырождения. Этот источник способен поддерживать излучение белых карликов в течение весьма больших промежутков времени. Шварцшильд вычисляет время, прошедшее после прекращения термоядерной генерации энергии до современного состояния белого карлика. Принимая указанный химический состав и полагая $M = M_\odot$, он приходит к выводу, что для звезд со светимостями 10^{-2} , 10^{-3} и $10^{-4} L_\odot$ это время составляет $0,3 \cdot 10^9$, $1,6 \cdot 10^9$ и $8 \cdot 10^9$ лет соответственно.

8. Сверхплотные звездные конфигурации. Можно думать, что теория Чандрасекара, основанная на законе тяготения Ньютона и на уравнении состояния идеального газа Ферми, в общем хорошо описывает особенности строения звезд типа белых карликов. Однако

применение ее к очень плотным звездным конфигурациям (в частности, вывод верхней границы массы белых карликов) является недопустимой экстраполяцией, поскольку в области достаточно высоких плотностей нарушается как закон Ньютона, так и принятое в теории Чандрасекара уравнение состояния звездного вещества.

В главе V, рассматривая внутреннее решение Шварцшильда для сферической конфигурации, состоящей из сжимаемой среды, мы показали, что условие равновесия конфигурации имеет вид (см. (5,9,8))

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{\gamma M(r) \rho}{r^2} \left(1 + \frac{p}{c^2 \rho} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{c^2 M(r)} \right) \left(1 - \frac{2\gamma M(r)}{c^2 r} \right)^{-1}, \quad (7,8,1)$$

где $M(r)$ представляет собой функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (7,8,2)$$

При плотностях известных в настоящее время звезд, включая белые карлики, внутренние поля гравитации остаются слабыми, и поэтому эффектами ОТО можно пренебречь: релятивистское условие равновесия (7,8,1) переходит в обычное уравнение гидростатики

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{\gamma M(r) \rho}{r^2},$$

отвечающее закону тяготения Ньютона. В случае же очень плотных конфигураций, когда внутренние поля могут быть весьма сильными, релятивистские эффекты приобретают существенное значение, вследствие чего необходимо применять закон гидростатики в форме (7,8,1).

Как уже сказано, при высоких плотностях нарушается и уравнение состояния (7,6,3).

Вопрос об уравнении состояния сильно уплотненного «холодного» вещества требует специального рассмотрения, которое не входит в нашу задачу. Отметим здесь, что уравнение Чандрасекара, применяемое в теории строения белых карликов, относится к плотностям до $10^7 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Детальное исследование вопроса о соотношении между плотностью и гидростатическим давлением для широкого диапазона плотностей выполнено Гаррисоном, Уилером и Вакано. Результаты его в виде аналитических аппроксимаций, относящихся к различным областям плотностей, и в форме подробной таблицы изложены в специальной монографии, посвященной строению сверхплотных конфигураций и проблеме гравитационного коллапса [7]. Можно отметить также работу Г. С. Саакяна и Ю. Л. Вартапяна, в которой изучается уравнение состояния реального газа [8].

В дальнейшем уравнение состояния в форме $p = f(\rho)$ будем считать заданным для всего диапазона плотностей.

Соотношения (7,8,1), (7,8,2) вместе с законом состояния образуют систему двух дифференциальных уравнений первого порядка, интегрирование которой требует задания двух начальных условий. Одно из них имеет вид $M(r) = 0$ при $r = 0$. В качестве второго условия удобно задать центральное значение плотности ρ_0 , которое

может служить основным параметром равновесной конфигурации. Принимая различные значения ρ_0 , можно получить все возможные равновесные конфигурации, отвечающие принятому уравнению состояния.

Численное интегрирование уравнений (7,8,1), (7,8,2) ведется от центра и продолжается до точки, в которой давление равно нулю. Тем самым принятое значение ρ_0 определяет радиус r_1 и массу M конфигурации. Принципиальных затруднений интегрирование не представляет, и потому описывать его подробно нет необходимости. На рис. 28 показана кривая Гаррисона — Вакано — Уилера [7], выражающая зависимость массы от центральной плотности для равновесной конфигурации, состоящей из холодного вещества. Сходную

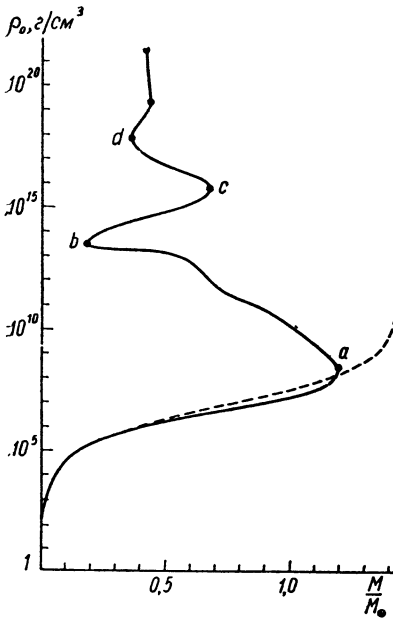


Рис. 28.

форму имеет кривая Саакяна — Вартаняна, вычисленная для уравнения состояния реального холодного газа [9].

Подробное исследование показывает, что устойчивым равновесиям соответствуют только два участка кривой: область до точки a и отрезок bc ; для остальных частей графика равновесие оказывается неустойчивым, и потому они не могут отвечать физически возможным звездным конфигурациям.

Следует отметить, что существование точек a и b , отделяющих области устойчивых конфигураций от неустойчивых, еще в 30-е годы предсказал Ландау. Точку a можно назвать пределом Чандрасекара, поскольку она соответствует верхней границе белых карликов. Кривая Чандрасекара, построенная по данным табл. 5, изображена пунктирной линией. Отклонение последней от сплошной линии обусловлено тем, что при очень больших плотностях нару-

шается как уравнение состояния (7,6, 2), (7,6,3) так и положенный в основу теории Чандрасекара закон тяготения Ньютона. Точку c уместно назвать пределом Оппенгеймера — Волкова, которые в 1939 г. впервые построили теорию сверхплотных звездных конфигураций, основанную на условии равновесия ОТО [10]. Область bc соответствует гипотетическим нейтронным звездам, вопрос о существовании которых приобрел в последнее время большой интерес в связи с открытием дискретных источников космического рентгеновского излучения и особенно после открытия так называемых пульсаров.

Центральная плотность определяет также радиус равновесной конфигурации. На рис. 29 приведена кривая [7], выражающая эту зависимость графически. Отмеченные на чертеже точки соответствуют обозначениям, принятым на рис. 28. Часть кривой до точки a отвечает белым карликам, отрезок bc — нейтронным звездам. Мы видим, что нейтронные звезды должны быть очень плотными небесными телами с радиусами, измеряемыми десятками километров, и со средними плотностями до $10^{15} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и более.

Поле тяготения вблизи звезды такого типа должно быть весьма сильным: у поверхности звезды гравитационный потенциал может составить десятки доли c^2 .

Вопросам строения сверхплотных конфигураций посвящены в последние годы многочисленные исследования. Из обзорных работ, кроме монографии [7], следует назвать книгу Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова [11], в которой содержится ряд важных оригинальных результатов.

Открытие сверхплотных звезд представило бы большой научный интерес. Однако, если такие звезды существуют в действительности, обнаружить их современными средствами чрезвычайно трудно.

Для определенности рассмотрим нейтронную звезду с радиусом порядка 10^6 см . По имеющимся оценкам, эффективная температура такой звезды в начальной стадии ее эволюции может быть около $10^6 \text{ }^\circ\text{К}$, вследствие чего при указанном радиусе светимость должна составить $\sim 10^{33} \text{ эрг/сек}$, что близко к светимости Солнца. Однако

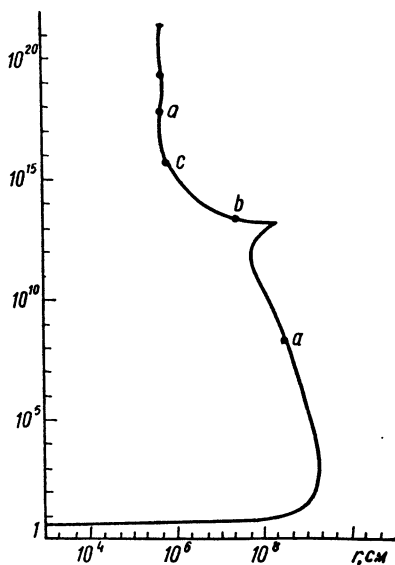


Рис. 29.

почти вся энергия излучения относится к области мягких рентгеновских лучей, поскольку максимум излучения при температуре около 1 млн. град приходится приблизительно на 40 Å. В области 3000—10 000 Å, доступной обычным астрономическим наблюдениям, излучение звезды составляет лишь миллионные доли светимости Солнца. В этих условиях нейтронную звезду можно надеяться обнаружить только по ее рентгеновскому излучению. При этом она будет доступна наблюдению относительно недолго, так как ее охлаждение должно протекать весьма быстро, и за 10^4 — 10^5 лет температура звезды значительно понизится. При эффективной температуре Солнца максимум излучения находится в области 4600 Å, но светимость звезды с радиусом $\sim 10^6$ см составит всего 10^{-7} , 10^{-8} солнечной.

Указывалось, что нейтронная звезда, окруженная рассеянной материей, может долгое время поддерживать рентгеновское излучение за счет аккреции — падения вещества с весьма большими скоростями, возникающими в поле тяжести звезды. Благодаря аккреции поверхностная температура долго остается очень высокой, вследствие чего вероятность наблюдения рентгеновского излучения звезды значительно возрастает.

В последнее время высказывалась гипотеза о том, что с нейтронными звездами могут быть связаны так называемые пульсары — недавно открытые источники радиоизлучения, отличающиеся большой правильностью и высокими частотами повторения импульсов. До сих пор было обнаружено около трех десятков пульсаров, большинство которых имеет периоды повторения импульсов от 0,25 до 2 сек. Осенью 1968 г. открыт пульсар, посылающий импульсы через каждые 0,033 сек. Согласно указанной гипотезе, ритмичность и высокая регулярность импульсов обусловлены радикальными пульсациями и собственным вращением нейтронных звезд.

9. Гравитационный коллапс. Мы видели, что звезды, лишенные внутренних источников энергии, могут находиться в устойчивом равновесии лишь в том случае, если их массы не превосходят предела Чандрасекара, составляющего около $1,22 M_{\odot}$. При больших массах устойчивость звезд обеспечивается термоядерной генерацией энергии в их недрах. Однако и в этом случае существует верхний предел массы, за которым устойчивость звездной конфигурации вновь нарушается.

Возмущение звездной конфигурации может вызвать пульсации и — последовательные расширения и сжатия звезды вокруг состояния ее равновесия. Частота таких колебаний по порядку определяется формулой $\omega^2 \approx \frac{\gamma M}{r_1^3}$; для Солнца период пульсаций составляет $\sim 10^3$ сек. Подробное изучение колебаний показывает, что они вызывают в звезде процессы, одни из которых противодей-

ствують пульсациям, а другие их усиливают. Так, расширение и сжатие звезды нарушает стационарность потока энергии, что вызывает затухание колебаний. С другой стороны, при сжатии звезды повышается температура ее недр, вследствие чего усиливается генерация энергии, что способствует последующему расширению. В свою очередь, при расширении звезды ослабляется термоядерная генерация энергии и уменьшается сопротивление последующему сжатию. Соотношение между двумя этими механизмами — затухания и раскачки колебаний — зависит от массы звезды: с увеличением массы относительная роль второго из них возрастает. Поэтому существует некоторое предельное значение массы, при переходе через которое звезда утрачивает устойчивость по отношению к пульсационным колебаниям; это масса около $10^2 M_{\odot}$. Таким образом, в соответствии с результатами астрономических наблюдений, теория звездных конфигураций приводит к заключению о том, что массы реальных звезд не превышают указанной верхней границы.

Учитывая сказанное, можно было бы предположить, что исследование очень массивных конфигураций не представляет практического интереса для астрономии. Однако в последние годы такие исследования заметно усилились. В связи с открытием квазаров Ф. Хойл и В. Фаулер [12] высказали предположение о том, что в центрах галактик или даже в межгалактической среде могут возникать конфигурации с массами порядка $10^8 M_{\odot}$ и светимостями $\sim 10^{46}$ эрг/сек. Продолжительность существования квазаров, вероятно, составляет $10^5 - 10^6$ лет, поэтому естественно допустить, что общая энергия излучения такого объекта может достигать почти $10^{69} - 10^{60}$ эрг, что соответствует массе примерно 10^{39} г, т. е. около $10^6 M_{\odot}$. Если эта энергия поддерживается термоядерными источниками, то масса излучающего объекта должна быть на два порядка больше, поскольку ее убыль при превращении водорода в гелий составляет обычно около 1%.

Подобная сверхмассивная конфигурация не может находиться в стационарном состоянии и должна испытывать быстрое гравитационное сжатие, которое лишь в незначительной степени замедляется термоядерными реакциями. Подробное изложение теории гравитационного коллапса имеется в монографии Д. Уилера, Б. Гаррисона, М. Вакано и К. Торна [7], к которой мы и отсылаем читателя. Здесь мы только перечислим некоторые особенности коллапсирующей конфигурации.

Изучение коллапса показало, что главным источником излучения должна служить гравитационная энергия конфигурации, освобождающаяся в процессе сжатия, тогда как термоядерная генерация энергии играет второстепенную роль. Для оценки скорости гравитационного сжатия можно принять, что вещество поверхностного слоя свободно падает в общем поле тяготения. Поэтому

можно воспользоваться уравнением (6,1,9), определяющим радиальное движение во внешнем поле Шварцшильда

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left\{1 - \frac{1}{h^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right\},$$

где m — центральная масса в релятивистских единицах, h^2 — постоянная интегрирования.

Для простоты положим, что при $r = r_0$ вещество имело нулевую скорость. В этом случае свободное падение вдоль радиуса происходит по закону

$$\frac{dr}{dt} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left\{1 - \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right\}. \quad (9,9,1)$$

Скорость падения возрастает и при $r = 6m \left(1 + \frac{4m}{r_0}\right)^{-1}$ достигает максимума, затем убывает, стремясь к нулю при $r \rightarrow 2m$, когда внешняя граница конфигурации приближается к гравитационной сфере Шварцшильда. В обычных единицах радиус последней определяется формулой (5,8,7) и для массы $10^8 M_\odot$ составляет около $3 \cdot 10^{13}$ см. При этом конфигурация становится недоступной для оптических наблюдений, и ее существование обнаруживает лишь внешнее поле гравитации.

Следует, однако, заметить, что внешний наблюдатель, который был свидетелем гравитационного коллапса при $r > r_g$, не может обнаружить оптического исчезновения конфигурации, поскольку из (9,9,1) вытекает, что $r \rightarrow r_g$ только при $t \rightarrow \infty$. Что же касается сопутствующей системы отсчета, принимающей участие в свободном падении, то в ней достижение гравитационной поверхности наступает в конечный момент. Действительно, квадратическая форма Шварцшильда (5,8,6), имеющая для радиального движения вид

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2,$$

в случае (9,9,1) приводит к соотношению

$$ds^2 = \frac{r_0 r dr^2}{2m(r_0 - r)}$$

и показывает, что значение r_g достигается при конечном собственном времени s .

Когда радиус сжимающейся конфигурации приближается к величине r_g , дальнейшее уменьшение его, с точки зрения внешнего наблюдателя, становится весьма медленным. Вместе с тем наблюдатель должен обнаружить очень быстрое убывание светимости

объекта. Вычисление показывает, что под влиянием сильного поля вблизи поверхности Шварцшильда светимость падает по закону

$$L = L_0 e^{-\frac{2c}{3\sqrt{3}r_g}(t-t_0)}$$

Уменьшение светимости в e раз происходит за время $\frac{3}{2}\sqrt{3}r_g : c$, которое для массы $10^8 M_\odot$ составляет всего $2,7 \cdot 10^3$ сек. В связи с этим различные авторы высказывали гипотезы о возможной роли вращения, турбулентности и магнитных полей как стабилизирующих факторов, замедляющих процесс гравитационного сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E m d e n. Gaskugeln. Leipzig — Berlin, 1907.
2. A. S. E d d i n g t o n. Internal Constitution of the Stars. Cambridge, 1926.
3. S. C h a n d r a s e k h a r. Stellar Structure. Chicago, 1938. Русск. пер.: Ч а н д р а с е к а р. Строение звезд. ИЛ, М., 1950.
4. C. F. W e i z s a c k e r.— Phys. Zeitschr., 38, 176, 1937. Н. B e t h e, C. L. C r i t c h f i e l d.— Phys. Review, 54, 248, 1938. Н. B e t h e.— Phys. Review, 55, 434, 1939; Astrophys. Journ., 92, 118, 1940.
- Последующее развитие теории термоядерных реакций в звездах в работах: E. E. S a l p e t e r.— Phys. Review, 88, 547, 1952; Astrophys. Journ., 115, 326, 1952. E. A. F r i e m a n, L. M o t z.— Phys. Review, 89, 648, 1953. W. A. F o w l e r.— Mémoires Société Royale Sciences. Liège, 4 ser., 14, 88, 1954. W. A. L a m b, R. E. H e s t e r.— Bull. American Phys. Society, 2, 181, 1957.
5. M. S c h w a r z s c h i l d. Structure and Evolution of the Stars. Princeton, 1958. Русск. пер.: М. Ш в а р ц ш и л ь д. Строение и эволюция звезд. ИЛ, М., 1961.
6. S. C h a n d r a s e k h a r.— Month. Not. Roy. Astron. Soc., 95, 207, 226, 676, 1935. См. также [3].
7. В. К. H a r r i s o n, К. S. T h o r n e, М. W a k a n o, J. A. W h e e l e r. Gravitation Theorie and Gravitational Collapse. Chicago, 1965. Русск. пер.: Д ж. У и л е р, Б. Г а р р и с о н, М. В а к а н о, К. Т о р н. Теория гравитации и гравитационный коллапс. «Мир», М., 1967.
8. Г. С. С а а к я н, Ю. Л. В а р т а н я н.— Сообщения Бюраканской обсерватории, 33, 55, 1963.
9. Г. С. С а а к я н, Ю. Л. В а р т а н я н.— Астроном. журн., 41, 193, 1964.
10. J. R. O r r e n h e i m e r, G. M. V o l k o f f.— Phys. Review, 55, 374, 1939.
11. Я. Б. З е л ь д о в и ч, И. Д. Н о в и к о в. Релятивистская астрофизика. «Наука», М., 1967.
12. F. H o y l e, W. F o w l e r.— Month. Not. Roy. Astronom. Soc., 125 169, 1963; Nature, 197, 533, 1963.

Глава VIII. КОСМОЛОГИЯ

1. Космологические парадоксы. Важной областью применения теории гравитации является космология, т. е. учение о наиболее общих законах строения и эволюции космоса. Космология имеет целью обобщить результаты изучения конкретных космических тел и их систем и представить эти результаты в виде картины мира в целом, позволяющей с единой точки зрения объяснить наиболее существенные особенности наблюдаемой части Вселенной.

Объектом современной космологии является *Метагалактика*, состоящая из галактик и их систем. Вследствие ограниченности наблюдательных данных, а также ввиду возможной непригодности существующего теоретического аппарата, проблема строения и развития Метагалактики еще не имеет ясного и убедительного решения. Поскольку до сих пор наблюдению доступна, по-видимому, только относительно малая часть Метагалактики, может оказаться, что имеющиеся в настоящее время сведения недостаточны для характеристики этой космической системы в целом. Можно также предположить, что в Метагалактике в целом гравитация частично или даже полностью утрачивает значение и что в этой системе господствуют взаимодействия еще неизвестной нам природы.

Предлагавшиеся решения космологической проблемы являются лишь примерными и имеют в значительной степени умозрительный характер. Наиболее разработанные и интересные решения принадлежат релятивистской космологии, основанной на уравнениях поля общей теории относительности.

Прежде чем перейти к краткому описанию релятивистской космологии, мы остановимся на так называемых космологических парадоксах, которые возникали при экстраполяции законов классической физики на бесконечную Вселенную и обсуждение которых играло существенную роль в развитии современных космологических представлений.

В 1744 г. Шезо указал, что если бы бесконечная Вселенная была равномерно заполнена звездами, то при прозрачности мирового пространства все небо имело бы очень большую яркость. Впоследствии это заключение обсуждалось Ольберсом [1], вслед-

ствии чего оно и получило название оптического парадокса Ольберса.

Пусть в данном направлении от наблюдателя звезды распределены в пространстве с объемной плотностью D , которая может зависеть от расстояния r . Каждая из звезд, которые для простоты мы предположим одинаковыми, видна из точки наблюдения под телесным углом $\frac{\sigma}{r^2}$, где σ — сечение звезды. Все звезды, расположенные внутри этого телесного угла на больших расстояниях, экранируются данной звездой и недоступны наблюдению.

Наряду с указанной истинной плотностью можно ввести видимую звездную плотность D' , понимая под этой величиной число звезд, находящихся в единице объема и не экранируемых от наблюдателя другими звездами. Найдем связь между истинной и видимой плотностями.

Предположим, что наблюдение ведется в пределах некоторого телесного угла $\Delta\omega$, вершина которого совпадает с точкой наблюдения, а ось имеет выбранное направление в пространстве. Число видимых звезд в объеме, вырезанном из этого телесного угла сферами с радиусами ρ и $\rho + d\rho$, составляет $\rho^2 D' \Delta\omega d\rho$, а образованный ими суммарный телесный угол равен $\sigma D' \Delta\omega d\rho$, поскольку каждая из них видна из точки наблюдения под углом $\frac{\sigma}{\rho^2}$. Все видимые звезды с расстояниями не более r образуют суммарный телесный

угол $\sigma \Delta\omega \int_{r_0}^r D' d\rho$ и на сфере радиуса r экранируют площадку

$\sigma r^2 \Delta\omega \int_{r_0}^r D' d\rho$. Через r_0 здесь обозначено расстояние до ближайшей

звезды, соответствующее звездной плотности в месте наблюдения.

Рассмотрим элементарный цилиндр, образованный сечениями сфер с радиусами r и $r + dr$. В нем содержится $r^2 D \Delta\omega dr$ звезд. Часть этого цилиндра, экранированная от наблюдателя более

близкими звездами, имеет объем $\sigma r^2 \Delta\omega dr \int_{r_0}^r D' d\rho$ и содержит

$\sigma r^2 D \Delta\omega dr \int_{r_0}^r D' d\rho$ звезд. В остальной части цилиндра находятся

звезды, доступные наблюдению; их число равно $r^2 D' \Delta\omega dr$. Следовательно,

$$r^2 D \Delta\omega dr - \sigma r^2 D \Delta\omega dr \int_{r_0}^r D' d\rho = r^2 D' \Delta\omega dr.$$

Таким образом, истинная и видимая звездные плотности связаны соотношением

$$D - \sigma D \int_{r_0}^r D' dr = D',$$

из которого следует дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{D'}{D} \right) + \sigma D' = 0,$$

имеющее очевидное решение

$$D' = D e^{-\sigma \int_{r_0}^r D dr}. \quad (8,1,1)$$

Если все пространство заполнено звездами с конечной плотнос-

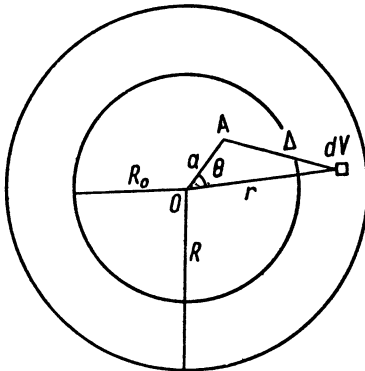


Рис. 30.

тью, то интеграл $\int_{r_0}^{\infty} D' dr$ расходится, видимая плотность D' стремится к нулю, показывая, что экранирование является полным и яркость неба равна яркости звезды. В этом и состоит космологический парадокс Ольберса.

Гравитационный парадокс Зеелигера [2] возник при попытке распространить закон тяготения Ньютона на бесконечное пространство, наполненное массами с конечной плотностью. Проследим в общих чертах

обычные рассуждения, приводящие к этому парадоксу.

Рассмотрим поле тяготения масс, распределенных с плотностью ρ между двумя сферами радиусов R_0 и R с общим центром в точке O (рис. 30). Потенциал поля в точке A , лежащей на расстоянии a от центра сферы, равен

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \gamma \rho r^2 \Delta^{-1} \sin \theta d\varphi d\theta dr,$$

где r — расстояние от центра до элемента объема $dV = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr$, Δ — расстояние точки A от того же элемента объема, заданное очевидной формулой

$$\Delta^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Составим производную потенциала по переменной a и положим затем $a = 0$. При $R_0 = 0$ получим

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \gamma r \sin \theta d\varphi d\theta dr; \\ \frac{d\varphi}{da} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \gamma r \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta dr.\end{aligned}\tag{8,1,2}$$

Применяя эти формулы к бесконечному пространству, следует положить $R \rightarrow \infty$. Если при этом допустить $\rho = \text{const}$, что для Вселенной в целом наиболее естественно, то потенциал будет бесконечно большим, а его производная, определяющая ускорение тела под действием космических масс, окажется неопределенной.

Зеелигер причиной гравитационного парадокса считал неточность закона тяготения. Поскольку последний выведен из наблюдений, можно предположить, что формула обратных квадратов является приближенной, имеет ограниченное значение и при переходе к очень большим областям пространства должна быть заменена более точной. Допустим, например, что точная формула закона тяготения отвечает потенциалу $\sim \frac{1}{r} e^{-\lambda r}$, где λ — достаточно малая постоянная, которая при не очень больших расстояниях обеспечивает переход к обычному ньютонову потенциалу.

В этом случае вместо (8,1,2) имеем формулы

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \gamma r e^{-\lambda r} \sin \theta d\varphi d\theta dr; \\ \frac{d\varphi}{da} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \gamma r e^{-\lambda r} \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta dr,\end{aligned}\tag{8,1,3}$$

которые при $\rho = \text{const}$ и $R = \infty$ дают $\varphi = \frac{4\pi\gamma\rho}{\lambda^2}$, $\frac{d\varphi}{da} = 0$, устраняя гравитационный парадокс.

Особенно простая и удобная формулировка космологического парадокса Зеелигера основана на уравнении Пуассона. Точной формуле закона обратных квадратов соответствует известное уравнение $\nabla^2\varphi = -4\pi\gamma\rho$. При $\rho \neq 0$ оно не имеет решения $\varphi = \text{const}$, показывая, что с точки зрения закона тяготения Ньютона гипотеза об однородной стационарной Вселенной несовместима с представлением о бесконечном пространстве, заполненном космическими массами с конечной плотностью. Противоречие можно устранить, если уравнение для гравитационного потенциала написать в виде $\nabla^2\varphi - \lambda^2\varphi = -4\pi\gamma\rho$, где λ — малая постоянная.

При $\rho = \text{const}$ это уравнение допускает решение $\varphi = \frac{2\pi\gamma\rho}{\lambda^2}$.

2. Вселенная Ламберта — Шарлье. Космологические парадоксы можно разрешить и при сохранении точной формулы законов классической физики, если отказаться от гипотезы об однородности стационарной Вселенной и приписать последней некоторую структуру.

Следуя идее об иерархичности в строении Вселенной, высказанной еще в XVIII ст. Ламбертом и более точно сформулированной в прошлом веке Проктором [3], Шарлье предложил возможную схему строения Вселенной, бесконечной в пространственном и материальном отношениях, но свободной от оптического и гравитационного парадоксов [4].

Согласно Шарлье, Вселенная представляет собой неограниченную последовательность космических систем, построенных иерархически. Пусть система первого порядка, которую для простоты мы будем считать сферической, имеет радиус R_1 и содержит N_1 звезд. N_2 таких систем образуют систему второго порядка радиуса R_2 . В свою очередь, N_3 систем второго порядка составляют систему третьего порядка радиуса R_3 и т. д. Вселенная, отвечающая такой схеме, бесконечна в пространстве и обладает бесконечно большой массой, так как масса i -й системы

$$M_i = N_i N_{i-1} \dots N_1 M_0,$$

где M_0 — масса звезды, при достаточно высоком порядке будет сколь угодно большой.

Найдем условие, при котором Вселенная Шарлье свободна от гравитационного и оптического парадоксов.

Каждая звезда, являясь членом определенной космической системы первого порядка, входит вместе с последней в состав систем второго, третьего и более высоких порядков. Поэтому полное ускорение звезды равно сумме ускорений, сообщаемых ей гравитационными полями всех систем космической иерархии.

Пусть рассматриваемая звезда находится на расстоянии a_i от центра системы i -го порядка. Средняя плотность этой системы

$$\rho_i = \frac{3N_i N_{i-1} \dots N_1 M_0}{4\pi R_i^3}. \quad (8,2,1)$$

Ускорение, сообщаемое данной звезде полем тяготения системы в направлении центра последней, можно определить по формуле $\omega_i = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_i a_i$. Поэтому полное ускорение звезды удовлетворяет соотношению $\omega \leq \frac{4}{3}\pi\gamma \sum \rho_i a_i$, или

$$\omega \leq \frac{4}{3}\pi\gamma \sum \rho_i R_i, \quad (8,2,2)$$

поскольку величины a_i не могут быть больше радиусов соответствующих космических систем.

Для сходимости суммы (8,2,2) необходимо, чтобы каждый ее член был меньше предыдущего, т. е. чтобы выполнялось соотношение $\rho_i R_i < \rho_{i-1} R_{i-1}$. Внося сюда (8,2,1), получим

$$\frac{R_i}{R_{i-1}} > \sqrt{N_i}. \quad (8,2,3)$$

Это неравенство имеет в теории Шарлье фундаментальное значение. Отвечающая ему космологическая модель свободна от гравитационного парадокса Зеелигера: звезды обладают в ней конечными ускорениями, хотя потенциал общего поля тяготения может быть неопределенно большим.

Рассмотрим вопрос о парадоксе Ольберса во Вселенной Ламберта — Шарлье. С этой целью воспользуемся соотношением (8,1,1), связывающим видимую звездную плотность с истинной. Полное экранирование неба звездами наступает в том случае, если при $r \rightarrow \infty$ видимая плотность исчезнет, т. е. если интеграл $\int_{r_0}^{\infty} D dr$ расходится.

Луч зрения, проведенный от наблюдателя в каком-либо направлении, пересекает космические системы различных порядков. Пусть отрезок его внутри системы i -го порядка имеет длину b_i . Средняя звездная плотность в этой системе

$$D_i = \frac{3N_i N_{i-1} \dots N_1}{4\pi R_i^3}.$$

Поэтому соответствующий элемент интеграла можно заменить выражением

$$\frac{3}{4\pi} N_i \dots N_1 b_i R_i^{-3},$$

а интеграл представить в виде суммы

$$\frac{3}{4\pi} \sum N_i \dots N_1 b_i R_i^{-3}.$$

Поскольку $b_i \leq 2R_i$, имеем

$$\int_{r_0}^{\infty} D dr < \frac{3}{2\pi} \sum N_i \dots N_1 R_i^{-2}. \quad (8,2,4)$$

Отношение i -го члена суммы (8,2,4) к предыдущему равно $N_i R_{i-1}^2 R_i^{-2}$ и, согласно (8,2,3), составляет величину меньше единицы. Таким образом, общее условие Вселенной Ламберта — Шарлье обеспечивает сходимость суммы (8,2,4), а следовательно, и интеграла в соотношении между видимой и истинной звездными

плотностями. Видимая плотность отлична от нуля на всех расстояниях от наблюдателя, и потому космологическая модель Шарлье свободна от оптического парадокса Ольберса.

3. Гравитационный парадокс и общая теория относительности. Гравитационный парадокс Зеелигера выражает несовместимость точной формы закона тяготения Ньютона с концепцией однородной статической Вселенной. С точки зрения классической механики, устранение парадокса достигается ценой отказа от точной формы закона Ньютона или путем постулирования некоторого неоднородного распределения космических масс, например такого, какой принят в иерархической вселенной Ламберта — Шарлье. Естественно спросить, можно ли согласовать идею однородной статической Вселенной с уравнением поля ОТО.

В однородной космологической модели все пространственные точки и все направления равноправны, поэтому линейный элемент независим от начала пространственных координат и должен удовлетворять условию сферической симметрии. В ОТО такой элемент имеет вид

$$ds^2 = -e^\alpha dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\beta dt^2, \quad (8,3,1)$$

где α, β — функции одного r .

С математической точки зрения, поставленный вопрос сводится к задаче: допускают ли уравнения поля Эйнштейна

$$R_{ij} = -8\pi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad (8,3,2)$$

решение в форме (8,3,1), если принять, что масса распределена с постоянными плотностью и давлением.

Представим уравнения поля в развернутой форме.

В случае пространственно-временного элемента (8,3,1) диагональные компоненты тензора Риччи определяются формулами (см. главу V)

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r}; \\ R_{22} &= e^{-\alpha} \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] - 1; \\ R_{33} &= e^{-\alpha} \sin^2 \theta \left[1 + \frac{r}{2} (\beta' - \alpha') \right] - \sin^2 \theta; \\ R_{44} &= e^{\beta-\alpha} \left(-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} \right), \end{aligned} \quad (8,3,3)$$

тогда как остальные компоненты этого тензора тождественно исчезают.

Тензор энергии-импульса находится по общей формуле

$$T^{ij} = (\rho + p) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} - g^{ij} p.$$

Согласно условию статичности, следует считать, что макроскопических движений в веществе нет, вследствие чего из четырех компонент вектора $\frac{dx^\sigma}{ds}$ отличается от нуля лишь последняя, удовлетворяющая соотношению $e^\beta \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1$. Поэтому ковариантные компоненты тензора энергии-импульса, отвечающие линейному элементу (8,3,1), а также скаляр этого тензора определяются формулами

$$\begin{aligned} T_{11} &= \rho e^\alpha; \quad T_{22} = \rho r^2; \quad T_{33} = \rho r^2 \sin^2 \theta; \quad T_{44} = \rho e^\beta; \\ T &= \rho - 3p; \quad T_{ij} = 0; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (8,3,4)$$

С помощью (8,3,3) и (8,3,4) уравнения поля приводятся к системе трех дифференциальных уравнений относительно функций α , β

$$\begin{aligned} \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} &= -4\pi e^\alpha (\rho - p); \\ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r} (\beta' - \alpha') - \frac{e^\alpha}{r^2} &= -4\pi e^\alpha (\rho - p); \\ -\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha' \beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} &= -4\pi e^\alpha (\rho + 3p). \end{aligned} \quad (8,3,5)$$

В эту систему входят лишь две искомые функции, поэтому можно ожидать, что при произвольно заданных ρ и p она не имеет решения. Найдем условие совместимости уравнений (8,3,5).

Сложив первое уравнение с третьим, получим

$$\alpha' + \beta' = 8\pi r e^\alpha (\rho + p). \quad (8,3,6)$$

Это равенство вместе со вторым уравнением (8,3,5) дает

$$\beta' = -\frac{1}{r} + \frac{e^\alpha}{r} + 8\pi r p e^\alpha.$$

Дифференцируя его и исключив затем давление, найдем

$$\beta'' = \frac{2}{r^2} - \frac{2e^\alpha}{r^2} + \frac{\alpha' + \beta'}{2} + \alpha' \beta'.$$

Если полученное равенство внести в формулу

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = \frac{1}{r^2} + \frac{\beta' - \alpha'}{2r} - \frac{e^\alpha}{r^2},$$

которая непосредственно следует из двух первых уравнений

(8,3,5), то после несложных преобразований получится $(\alpha' + \beta') \beta' = 0$ или, согласно (8,3,6),

$$(\rho + p) \beta' = 0. \quad (8,3,7)$$

Нетрудно убедиться в том, что это равенство является не только необходимым, но и достаточным условием совместимости уравнений поля (8,3,5).

При $\rho = p = 0$ система (8,3,5) переходит в уравнения поля для пустого пространства и приводит к внешнему решению Шварцшильда, рассмотренному в главе V. Поскольку в нашем случае это решение не представляет интереса, остается положить $\beta' = 0$. Однако при этом последнее уравнение системы (8,3,5) дает $\rho + 3p = 0$, т. е. также $\rho = p = 0$. Таким образом, уравнения поля не допускают решения при постоянных положительных ρ и p ; как и закон тяготения Ньютона, уравнения поля ОТО не совместимы с концепцией однородной статической Вселенной.

4. Космологические модели Эйнштейна и де Ситтера. Космологический парадокс классической теории тяготения можно устранить путем введения поправки в закон обратных квадратов Ньютона. Подобным же образом ОТО можно примирить с концепцией однородной статической Вселенной с помощью соответствующей переделки уравнений поля Эйнштейна.

Как упоминалось в главе V, такую переделку предложил Эйнштейн в 1917 г. [5]. Уравнения поля, дополненные «космологическим членом», имеют вид

$$R_{ij} = -8\pi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) + \Lambda g_{ij}, \quad (8,4,1)$$

где Λ — достаточно малая постоянная, значение которой должно быть определено путем сравнения космологической модели с данными астрономических наблюдений.

Как и прежде, пространственно-временной интервал принимается в форме (8,3,1), а тензор энергии-импульса — согласно соотношениям (8,3,4).

Воспользовавшись выражением для компонент тензора Риччи (8,3,3), легко представить уравнения поля (8,4,1) в развернутой форме; они приводятся к трем дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} &= -4\pi e^\alpha (\rho - p) - \Lambda e^\alpha; \\ \frac{1}{r^2} + \frac{\beta' - \alpha'}{2r} - \frac{e^\alpha}{r^2} &= -4\pi e^\alpha (\rho - p) - \Lambda e^\alpha; \\ -\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} &= -4\pi e^\alpha (\rho + 3p) + \Lambda e^\alpha, \end{aligned} \quad (8,4,2)$$

которые отличаются от системы (8,3,5) только членами с космологической постоянной.

Повторим вычисления, выполненные в 3.

Легко убедиться в том, что соотношения (8,3,6) и выражение для второй производной функции β сохраняют прежнюю форму. Поэтому, комбинируя первое и второе уравнения (8,4,2) и производя соответствующие подстановки, найдем, что и в данном случае условие совместимости трех уравнений (8,4,2) имеет вид (8,3,7).

Пусть $\beta' = 0$ при ρ и p , отличных от нуля. Последнее уравнение рассматриваемой системы определяет связь между космологической постоянной, давлением и плотностью вещества.

$$\Lambda = 4\pi(\rho + 3p). \quad (8,4,3)$$

Два первых уравнения имеют решение

$$e^{-\alpha} = 1 - 4\pi r^2(\rho + p).$$

Если ввести обозначение *

$$R^{-2} = \Lambda - 8\pi\rho = 4\pi(\rho + p), \quad (8,4,4)$$

то решение примет вид

$$e^{\alpha} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}.$$

Положив $\beta = 0$ **, получим полное решение уравнений поля, определяющее космологическую модель Эйнштейна [5] и соответствующее линейному элементу

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2. \quad (8,4,5)$$

При $\beta' \neq 0$, $\rho = p = 0$ система уравнений (8,4,2) имеет решение

$$e^{\alpha} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}; \quad e^{\beta} = 1 - \frac{r^2}{R^2}; \quad R^2 = 3\Lambda^{-1},$$

которому отвечает космологическая модель де Ситтера [6] с линейным элементом

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2. \quad (8,4,6)$$

* В соответствии с традицией, здесь и в дальнейшем через R обозначен радиус кривизны пространства. Во избежание недоразумений следует помнить, что обозначение тензора Риччи оставлено прежним.

** Численное значение постоянной β можно выбрать произвольно, поскольку оно определяется масштабом временной координаты.

Случай $\beta' = 0$, $\rho = p = 0$ не представляет космологического интереса, поскольку при этом получается $\Lambda = 0$, $\alpha, \beta = \text{const}$, что соответствует континууму Минковского СТО.

Итак, дополнение уравнений поля Эйнштейна космологическим членом позволяет согласовать ОТО с представлением об однородной статической Вселенной. Из возникающих при этом двух космологических моделей, с общей точки зрения, следует отдать предпочтение первой, так как модель де Ситтера основана на принципиально неприемлемом допущении об отсутствии космических масс с объемной плотностью.

В модели Эйнштейна пространство имеет форму трехмерной сферы радиуса R , тогда как четырехмерный пространственно-временной континуум представляет собой цилиндр с неискривленной осью времени. Объем пространства конечен и равен

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = 2\pi^2 R^3. \quad (8,4,7)$$

Если положить $p = 0$, то объем и радиус кривизны пространства определяется величиной космологической постоянной

$$V = 2\pi^2 \Lambda^{-\frac{3}{2}}; \quad R = \Lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad (8,4,8)$$

которая, в свою очередь, зависит от плотности вещества

$$\Lambda = 4\pi\rho. \quad (8,4,9)$$

Полная масса

$$M = \frac{1}{2}\pi\Lambda^{-\frac{1}{2}}. \quad (8,4,10)$$

Таким образом, для определения количественных характеристик модели Эйнштейна необходимо знать плотность вещества в однородной Вселенной. Эту величину отождествляют со средней плотностью в наблюдаемой части Метагалактики, которая, по современным оценкам, составляет $10^{-31} \text{ г/см}^{-3}$. Воспользовавшись этим значением, легко найти характеристики модели в обычных единицах

$$\Lambda = 9 \cdot 10^{-59} \text{ см}^{-2}; \quad R = 10^{29} \text{ см}; \quad M = 2 \cdot 10^{57} \text{ г} = 10^{24} M_{\odot}.$$

Отметим еще интересную особенность общего поля тяготения модели Эйнштейна.

Пусть какое-либо тело в данный момент времени покоится относительно окружающих космических масс. Согласно уравнениям геодезической линии,

$$\frac{d^2 x^{\sigma}}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^{\sigma}}{dt} \right) \frac{dx^{\alpha}}{dt} \frac{dx^{\beta}}{dt} = 0; \quad \sigma = 1, 2, 3;$$

ускорение тела в этот момент имеет составляющие

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} = -\Gamma_{44}^\sigma.$$

Символы Кристофеля в случае статической метрики (8,4,5) приводятся к величинам $-\frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma}$ и исчезают. Следовательно, $\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} = 0$. Это показывает, что общее гравитационное поле модели не может привести покоящееся тело в движение.

Переходим к краткому описанию космологической модели де Ситтера. Согласно линейному элементу (8,4,6), пространственно-временной континуум модели представляет собой четырехмерную сферу, радиус которой определяется космологической постоянной. По форме трехмерного пространства модель де Ситтера не отличается от модели Эйнштейна: как и в последней, пространство сферическое и имеет конечный объем. Различие в метрике моделей относится к измерению времени.

Характерная особенность модели де Ситтера состоит в отсутствии массы с объемной плотностью. Следует, однако, иметь в виду, что «мир де Ситтера» не является совершенно пустым, поскольку его метрика удовлетворяет уравнениям поля для пустоты лишь при $r < R$. При $r = R$ уравнения нарушаются, показывая, что в модели существует сферическая поверхность, на которой тензор энергии-импульса не равен нулю.

В отличие от модели Эйнштейна, общее поле тяготения модели де Ситтера вызывает ускорение покоящихся тел. Действительно, ускорение неподвижной частицы определяется, как указывалось, формулой $\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} = -\Gamma_{44}^\sigma$. Символы Кристофеля Γ_{44}^σ при $\sigma = 2, 3$ исчезают. При $\sigma = 1$ имеем $\Gamma_{44}^1 = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$. Поэтому неподвижное тело обладает радиальным ускорением

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{r}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

которое равно нулю лишь в начале координат и на сфере $r = R$. Это показывает, что в модели де Ситтера общее гравитационное поле вызывает рассеяние небесных тел.

Отметим интересную оптическую особенность этой модели. Положив в линейном элементе (8,4,6) $d\theta = d\varphi = 0$ и $ds = 0$, получим уравнение

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

интегрирование которого показывает, что для распространения света между сферой $r = R$ и какой-либо точкой $r < R$ необходим бесконечно большой промежуток времени. Световой сигнал о событии, которое произошло на сфере, недоступен для наблюдателя внутри нее.

Рассмотрим еще эффект Допплера в модели де Ситтера.

Пусть источник света, имеющий радиальную скорость, излучает в момент t_1 световой импульс длины волны λ . Найдем длину волны $\lambda + \delta\lambda$, измеренную в момент t_2 наблюдателем, находящимся в начале координат.

Согласно общей формуле (6,7,1), принцип Допплера в данном случае выражается соотношением

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt_2}{dt_1} : \left(\frac{ds}{dt} \right)_1,$$

в котором индексом 1 отмечена производная, относящаяся к источнику излучения.

Связь между моментами излучения и наблюдения определяется формулой

$$\frac{dr}{dt} = - \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

которая дает

$$t_2 = t_1 + \int_0^r \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{-1} dr$$

и после дифференцирования приводит к соотношению

$$\frac{dt_2}{dt_1} = 1 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt} \right)_1, \quad (8,4,11)$$

где $\left(\frac{dr}{dt} \right)_1$ — скорость источника в момент излучения.

Для вычисления $\left(\frac{ds}{dt} \right)_1$ воспользуемся последним из уравнений геодезической линии

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^4 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \Gamma_{44}^4 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{14}^4 \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Для метрики, отвечающей линейному элементу де Ситтера (8,4,6), имеем

$$\Gamma_{44}^4 = 0; \quad \Gamma_{14}^4 = - \frac{r}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2 t}{ds^2} - \frac{2r}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0.$$

Это уравнение легко интегрируется и дает

$$\frac{dt}{ds} = h \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}, \quad (8,4,12)$$

где h — постоянная интегрирования, которая может иметь только положительное значение и зависит от скорости движения источника. Для определения ее нужно воспользоваться линейным элементом (8,4,6), из которого непосредственно получаем

$$h^2 = \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_1}.$$

С помощью (8,4,11) и (8,4,12) выражение принципа Допплера приводится к следующему виду:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = h \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} + h \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)_1. \quad (8,4,13)$$

В частности, если источник излучения неподвижен, наблюдатель должен зарегистрировать красное смещение

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

возрастающее с приближением переменной r к радиусу модели.

Космологическую модель де Ситтера пытались привлечь для объяснения красного смещения в спектрах внегалактических туманностей. Однако эти попытки нельзя признать удачными, поскольку для вывода линейной корреляции между величиной красного смещения и расстоянием в модели де Ситтера приходится принять очень искусственное допущение о пространственно-временном распределении галактик.

5. Решение А. Фридмана. Если исключить линейный элемент Минковского СТО, то для однородной статической Вселенной уравнения поля имеют, как мы видим, только два решения, которым отвечают космологические модели Эйнштейна и де Ситтера. Сохраняя условие однородности, можно получить новые решения уравнений поля лишь при отказе от условия статичности. Впервые нестатическое решение уравнений поля ОТО получил А. Фридман [7], исследования которого были важным этапом в развитии релятивистской космологии.

Представим линейный элемент (8,4,5) в несколько иной форме, произведя преобразования $r = R \sin \psi$. Выполнив подстановку, получим

$$ds^2 = -R^2(d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (8,5,1)$$

При $R = \text{const}$ этот линейный элемент соответствует статической модели Эйнштейна, в которой пространство представляет собой трехмерную сферу радиуса R . Отказавшись от условия $R = \text{const}$, будем искать решение уравнений поля в предположении, что R является функцией времени.

Для упрощения последующих выкладок наряду с четырехмерной метрикой (8,5,1) будем рассматривать трехмерную метрику

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (8,5,2)$$

которая определяет континуум трех измерений единичной кривизны. Согласно общей формуле для пространств постоянной кривизны (см. главу IV, 10), тензор Риччи этого континуума имеет

компоненты $\overset{x}{R}_{ij} = -2\gamma_{ij}$, где γ_{ij} — составляющие метрического тензора, равные коэффициентам квадратической формы (8,5,2). Звездочкой условимся отмечать величины, относящиеся к трехмерной метрике, сохранив для четырехмерной обычные обозначения.

Переходим к вычислению компонент тензора Риччи применительно к квадратической форме (8,5,1), в которой радиус сферического пространства считается, как уже сказано, функцией временной координаты.

Пусть i, j, k — индексы, принимающие значения 1, 2, 3. Метрический тензор имеет в рассматриваемом случае ковариантные

$$g_{ij} = -R^2\gamma_{ij}; \quad g_{i4} = 0; \quad g_{44} = 1$$

и контравариантные

$$g^{ij} = -\frac{\gamma^{ij}}{R^2}; \quad g^{i4} = 0; \quad g^{44} = 1$$

компоненты.

Определитель метрического тензора, как нетрудно убедиться, равен $g = -R^6\gamma$, где γ — определитель третьего порядка $|\gamma_{ij}|$.

Из определения символов Кристофеля можно получить соотношения

$$\Gamma_{ij}^k = \overset{x}{\Gamma}_{ij}^k; \quad \Gamma_{ij}^4 = R\dot{R}\gamma_{ij}; \quad \Gamma_{i4}^k = R^{-1}\dot{R}\delta_i^k; \quad \Gamma_{44}^k = \Gamma_{4k}^4 = \Gamma_{44}^4 = 0,$$

при выводе которых следует принять во внимание, что коэффициенты γ_{ij} не зависят от времени.

Внеся написанные выражения символов Кристофеля в общее выражение тензора Риччи, получим после несложных преобразований

$$R_{ij} = \dot{R}_{ij} - (2\dot{R}^2 + R\ddot{R})\gamma_{ij}; \quad R_{i4} = 0; \quad R_{44} = 3R^{-1}\ddot{R}.$$

Составим компоненты тензора энергии-импульса, считая, как и прежде, что макроскопических движений в веществе нет.

Воспользовавшись общим определением тензора энергии-импульса, находим ковариантные компоненты

$$T_{ii} = -p g_{ii}; \quad T_{i4} = 0; \quad T_{44} = \rho$$

и скаляр этого тензора $T = \rho - 3p$.

В дальнейшем для простоты принимаем $p = 0$.

Теперь можно написать уравнения поля в развернутой форме. Учитывая полученные значения тензоров R_{ij} и T_{ij} и соотношение $\dot{R}_{ij} = -2\gamma_{ij}$, легко убедиться в том, что уравнения поля сводятся к двум дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} 2\dot{R}^2 + R\ddot{R} - \Lambda R^2 - 4\pi\rho R^2 + 2 &= 0; \\ 3R^{-1}\ddot{R} + 4\pi\rho - \Lambda &= 0, \end{aligned} \quad (8,5,3)$$

содержащим две искомые функции времени.

Систему (8,5,3) можно привести к одному уравнению относительно радиуса. Исключая \ddot{R} , получим

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho R^2 + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - 1, \quad (8,5,4)$$

Дифференцируя это уравнение по времени и сравнивая затем со вторым соотношением (8,5,3), найдем после простых преобразований $\dot{\rho}R + 3\rho\dot{R} = 0$, откуда непосредственно следует

$$\rho = \alpha R^{-3}, \quad (8,5,5)$$

где α — постоянная интегрирования.

Плотность вещества в рассматриваемой нестатической модели изменяется обратно пропорционально кубу радиуса пространства. Используя эту зависимость, уравнение (8,5,4) можно переписать

$$\text{в виде} \quad \dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\alpha R^{-1} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - 1. \quad (8,5,6)$$

Таким образом, при соблюдении условия однородности уравнения поля ОТО допускают нестатическое решение, в котором ось времени остается, как и в модели Эйнштейна, неискривленной, а пространство представляет собой трехмерную сферу с переменным радиусом, удовлетворяющим дифференциальному уравнению (8,5,6).

6. Расширяющаяся вселенная Леметра. Воспользовавшись решением Фридмана, Леметр построил и изучил космологическую

модель нестатического типа, известную под названием теории расширяющейся вселенной [8].

Уравнение (8,5,6) допускает различные решения, зависящие от выбора знака \dot{R} и от соотношения между коэффициентом пропорциональности в законе (8,5,5) и космологической постоянной. Найдем решение, содержащее статическое решение Эйнштейна. С этой целью положим $R = \text{const} = R_0$. Уравнения поля (8,5,3) примут при этом вид

$$\Lambda R_0^2 + 4\pi\rho_0 R_0^2 - 2 = 0; \quad \Lambda = 4\pi\rho_0.$$

Присоединяя к ним соотношение $\rho_0 = \alpha R_0^{-3}$, получим

$$R_0 = \Lambda^{-\frac{1}{2}}; \quad \rho_0 = \frac{\Lambda}{4\pi}; \quad \alpha = \frac{1}{4\pi\Lambda^{\frac{1}{2}}}. \quad (8,6,1)$$

Два первых равенства совпадают с соответствующими формулами статической модели Эйнштейна, последнее определяет значение α , при котором правая часть уравнения (8,5,6) имеет двойной положительный корень R_0 .

Рассмотрим нестатическую модель Леметра, отвечающую линейному элементу (8,5,1) и уравнению

$$\dot{R} = + \sqrt{\frac{2}{3} R_0 R^{-1} + \frac{1}{3} R_0^{-2} R^2 - 1}, \quad (8,6,2)$$

которое является частным случаем уравнения Фридмана при определенном выборе знака производной \dot{R} и при указанных значениях постоянных α , Λ . Пространство этой модели представляет собой монотонно расширяющуюся сферу и содержит равномерно распределенные массы с плотностью, убывающей обратно пропорционально кубу радиуса. Объем пространства $V = 2\pi^2 \dot{R}^3$ возрастает вместе с радиусом, тогда как полная масса $M = \frac{1}{2} \pi R_0$ остается постоянной.

Статическая модель Эйнштейна представляет собой состояние равновесия рассматриваемой модели. Однако это равновесие неустойчиво: если в какой-либо момент модель Леметра уклоняется от модели Эйнштейна, то со временем это отклонение будет возрастать.

Пусть в некоторый момент t_0 отклонение радиуса от равновесного значения R_0 составляет сколь угодно малую величину ε_0 . Положив для произвольного момента $R = R_0 + \varepsilon$ и произведя разложение с точностью до членов второго порядка относительно ε включительно, получим

$$\frac{2}{3} R_0 R^{-1} + \frac{1}{3} R_0^{-2} R^2 - 1 = \frac{\varepsilon^2}{R_0^2}.$$

Дифференциальное уравнение (8,6,2) примет при этом вид $\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{R_0}$ и после интегрирования дает $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\frac{t}{R_0}}$, показывая, что со временем уклонение ε монотонно возрастает.

Вычислим время расширения модели. Воспользовавшись уравнением (8,6,2), найдем

$$t_2 - t_1 = R_0 \sqrt{3} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} - 3}}; \quad x_1 = \frac{R_1}{R_0}; \quad x_2 = \frac{R_2}{R_0}. \quad (8,6,3)$$

Эта формула определяет время, в течение которого радиус модели возрастает от R_1 до R_2 . При $R_1 = R_0$ интеграл (8,6,3) расходуется.

Как и в статической модели Эйнштейна, общее поле тяготения модели Леметра не может привести в движение неподвижную частицу. В этом можно убедиться при помощи применявшегося уже соотношения $\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0$, в котором символ Кристофеля для метрики (8,5,1) равен нулю.

Рассмотрим эффект Допплера в модели Леметра.

Пусть источник излучения имеет заданные постоянные координаты ψ, θ, φ , а наблюдатель находится в начале координат. Принцип Допплера выражается в этом случае формулой $\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt_2}{dt_1}$, где t_1, t_2 — моменты излучения и наблюдения. Свет от источника к наблюдателю распространяется радиально, вследствие чего $d\theta = d\varphi = 0$. Положив в линейном элементе (8,5,1) $ds = 0$, получим $\frac{d\psi}{dt} = -R^{-1}$. Следовательно,

$$\psi = \int_{t_1}^{t_2} R^{-1} dt. \quad (8,6,4)$$

При заданном ψ этой формулой определяется момент наблюдения в функции момента излучения. Дифференцируя, находим $\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{R_2}{R_1}$, где R_1, R_2 — соответствующие значения радиуса модели. Поэтому принцип Допплера принимает следующий вид:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (8,6,5)$$

* Напомним, что вычисление производится в релятивистских единицах.

В системе CGS эта формула имеет следующий вид: $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\frac{ct}{R_0}}$.

показывая, что в спектре излучения источника с постоянными пространственными координатами должно наблюдаться смещение линий к красному концу спектра. Величина смещения определяется отношением радиусов в моменты наблюдения и излучения. Это отношение может заметно превосходить единицу только в том случае, если радиация распространяется достаточно долго, т. е. для достаточно удаленных источников излучения.

Представим соотношение (8,6,5) в приближенной форме. Положив $R_2 = R$, можно написать $R_1 = R - \dot{R} (t_2 - t_1)$. Расстояние источника излучения от начала координат в момент наблюдения составляет $l = R\psi$. С другой стороны, согласно (8,6,4), имеем $\psi = R^{-1} (t_2 - t_1)$; следовательно, $R_1 = R - \dot{R}l$. Принцип Допплера принимает теперь вид

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{R}}{R} l, \quad (8,6,6)$$

показывая, что в модели Леметра красное смещение в спектрах удаленных источников пропорционально расстояниям.

Этот вывод способствовал быстрому успеху теории Леметра. Как известно, в спектрах внегалактических туманностей наблюдается смещение линий в сторону длинных волн, причем величина этого смещения отвечает линейной корреляции Хаббла $V = Hl$, где H — так называемая постоянная Хаббла, которая, согласно современным данным, составляет 70—100 км/сек на мегапарсек. Если это явление отождествить с эффектом (8,6,5), обусловленным расширением космологической модели Леметра, то в релятивистских единицах получится: $H = \frac{\dot{R}}{R}$

Постоянная Хаббла и средняя плотность вещества являются основными данными наблюдений, позволяющими вычислить количественные характеристики модели Леметра: космологическую постоянную и современный радиус модели. Для этих вычислений следует воспользоваться уравнениями (8,5,4) и (8,5,5) вместе с последним соотношением (8,6,1). Принимая во внимание равенство $H = \frac{\dot{R}}{R}$, можно написать

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \rho + \frac{1}{3} \Lambda - R^{-2}; \quad \rho = \frac{1}{4\pi} \Lambda^{-\frac{1}{2}} R^{-3}. \quad (8,6,7)$$

По формулам (8,6,1) определяют затем начальный радиус и начальную плотность. Время расширения находят из соотношения (8,6,3).

Для иллюстрации рассмотренной теории приведем количественные значения основных параметров модели Леметра, вычисленные в соответствии с данными наблюдений.

Согласно современным оценкам постоянной Хаббла и средней плотности вещества в Метагалактике, можно принять

$$H = 75 \text{ км сек}^{-1} / \text{млс} \simeq 2 \cdot 10^{-18} \text{ смсек}^{-1} / \text{см}; \quad \rho \simeq 10^{-31} \text{ гсм}^{-3}.$$

В системе CGS написанные выше формулы имеют следующий вид:

$$\left(\frac{H}{c}\right)^2 = \frac{8\pi\gamma}{3c^2} \rho + \frac{1}{3} \Lambda - R^{-2}; \quad \frac{4\pi\gamma}{c^2} \rho = \Lambda^{-\frac{1}{2}} R^{-3}; \quad R_0 = \Lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

Выполнив с их помощью необходимые вычисления, найдем

$$\Lambda \simeq 2 \cdot 10^{-56} \text{ см}^{-2}; \quad R \simeq 4 \cdot 10^{28} \text{ см}; \quad R_0 \simeq 0,8 \cdot 10^{28} \text{ см}.$$

Согласно (8,6,3), время, за которое радиус модели удвоился и достиг современного, составляет около 10^{10} лет.

Отметим, что в первой работе Леметр, пользуясь принятыми в то время данными наблюдений, получил для начального радиуса модели $8,5 \cdot 10^{26}$ см.

7. Нестатическая модель Эйнштейна. Концепцию однородной статической вселенной, наполненной веществом с отличной от нуля плотностью, можно совместить с ОТО, дополнив уравнения поля космологическим членом. В работе, опубликованной в 1931 г., Эйнштейн указал, что необходимость такого расширения уравнений поля существенно связана с гипотезой статичности. При отказе от условия статичности имеется возможность согласовать концепцию однородной вселенной с ОТО, «не вводя Λ -член, явно неудовлетворительный с теоретической точки зрения» [9].

В качестве исходной формы линейного элемента примем (8,5,1), где R представляет собой функцию временной координаты. Уравнения поля принимают в этом случае вид (8,5,3). Естественно спросить, можно ли построить непротиворечивую и согласную с наблюдениями космологию, опустив космологический член, введение которого было необходимо для устранения гравитационного парадокса в статической вселенной. Положив $\Lambda = 0$, перепишем уравнения (8,5,3) в виде

$$\dot{R}^2 + 2R\ddot{R} + 1 = 0; \quad 3\dot{R}^2 + 3 - 8\pi\rho R^2 = 0. \quad (8,7,1)$$

Эта система позволяет определить функцию R , от которой зависит метрика пространства, и найти закон изменения плотности в процессе развития космологической модели во времени.

Первое уравнение (8,7,1) допускает непосредственное интегрирование и дает

$$\dot{R}^2 = \frac{R_0 - R}{R}, \quad (8,7,2)$$

где R_0 — постоянная интегрирования.

В расширяющейся модели величина R в области малых значений этой функции возрастает со временем весьма быстро. В дальнейшем скорость возрастания уменьшается и в точке R_0 исчезает. Однако величина R_0 не может служить стационарным решением уравнения (8,7,1), поскольку при этом $\ddot{R} = -\frac{1}{2} R_0^{-1} < 0$, вследствие чего расширение сменяется медленным, но постоянно ускоряющимся сжатием.

Учитывая наблюдаемое красное смещение в спектрах внегалактических туманностей, следует принять, что современному состоянию Вселенной соответствует стадия расширения. Поскольку величина смещения, как и в теории Леметра, должна удовлетворять соотношению (8,6,6), можно написать $H = \frac{\dot{R}}{R}$, где H — коэффициент пропорциональности в формуле Хаббла.

Постоянная Хаббла и средняя плотность вещества в Метагалактике являются основными данными наблюдений, с помощью которых можно вывести характеристики данной космологической модели.

Представив (8,7,1) в виде

$$\frac{3}{R^3} = 8\pi\rho - 3H^2,$$

нетрудно вычислить современное значение функции R , затем определить ее производную $\dot{R} = RH$ и параметр R_0 , согласно (8,7,2). Время расширения модели до современного состояния можно найти по формуле

$$\tau = \int_0^R (R_0 R^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}} dR,$$

которая непосредственно следует из уравнения (8,7,2).

Как уже сказано, наиболее важным выводом работы Эйнштейна является возможность согласовать гипотезу об однородности Вселенной с ОТО, не вводя космологический член в уравнения поля. Однако в данной форме нестатическая модель противоречит астрономическим наблюдениям. Действительно, написанное выше уравнение, имеющее в системе CGS вид $3c^2 R^{-2} = 8\pi\rho r - 3H^2$, показывает, что функция R вещественна лишь при условии $8\pi\rho r > 3H^2$. Внося сюда постоянную Хаббла, получим $\rho > 10^{27} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, тогда как, по современным данным, средняя плотность вещества в Метагалактике — около $10^{-31} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ *.

* В указанной работе Эйнштейн, принимая $R_0 - R \simeq R$, находит, что плотность вещества во Вселенной составляет $10^{-26} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, что в настоящее время совершенно неприемлемо.

8. **Общая нестатическая модель.** Сферическая вселенная Леметра и расширяющийся мир Эйнштейна являются частными вариантами общей однородной космологической модели, основанной на нестатическом решении уравнений поля ОТУ. Переходим к краткому рассмотрению этой модели.

Линейный элемент трехмерного пространства Римана постоянной кривизны, как сказано в главе IV, может быть представлен в форме

$$d\sigma^2 = \left\{ 1 + \frac{1}{4} K (x^2 + y^2 + z^2) \right\}^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

где K — кривизна пространства.

Введя радиус кривизны R , можно написать $K = kR^{-2}$, где $k = \pm 1,0$ для пространств положительной, отрицательной и нулевой кривизны соответственно. Поэтому исходную квадратическую форму для сферического, гиперболического и эвклидова пространства примем в виде

$$d\sigma^2 = \left\{ 1 + \frac{k(x^2 + y^2 + z^2)}{4R^2} \right\}^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (8,8,1)$$

Радиус кривизны одинаков во всех точках пространства. Считая его функцией времени, положим $R = R_0 e^{g(t)}$.

Преобразуем линейный элемент (8,8,1), перейдя к сферическим координатам при помощи соотношений,

$$x = e^{\frac{1}{2} g} r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = e^{\frac{1}{2} g} r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = e^{\frac{1}{2} g} r \cos \theta.$$

После вычислений получим

$$d\sigma^2 = e^{g t} \left(1 + \frac{k r^2}{4 R_0^2} \right)^{-2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8,8,2)$$

При исследовании свойства однородной космологической модели эту форму линейного элемента подробно изучали Робертсон [10] и Толман [11]. Для упрощения последующих выкладок преобразуем эту форму к виду, аналогичному (8,5,1).

При $k = \pm 1,0$ введем вместо r новую переменную ψ при помощи равенств

$$R_0 \sin \psi = r \left(1 + \frac{r^2}{4 R_0^2} \right)^{-1}; \quad R_0 \operatorname{sh} \psi = r \left(1 - \frac{r^2}{4 R_0^2} \right)^{-1}; \quad R_0 \psi = r$$

соответственно.

В результате линейный элемент (8,8,2) приводится в указанных случаях к одной из следующих форм:

$$d\sigma^2 = R_0^2 e^{g(t)} \left\{ d\psi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \\ \operatorname{sh}^2 \psi \\ \psi^2 \end{pmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\}. \quad (8,8,3)$$

Четырехмерный линейный элемент ОТО, отвечающий пространствам с метриками (8,8,3), запишем в виде

$$ds^2 = -R^2 \left\{ d\psi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \\ \text{sh}^2 \psi \\ \psi^2 \end{pmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\} + dt^2, \quad (8,8,4)$$

объединяя упомянутые типы трехмерных пространств постоянной кривизны.

В модели первого типа пространство имеет форму трехмерной сферы, является замкнутым и в каждый момент обладает конечным объемом $2\pi^2 R^3$. Второй случай соответствует разомкнутому гиперболическому пространству с бесконечно большим объемом, третий — пространству Эвклида, в котором расстояние между двумя точками с заданными постоянными координатами является функцией времени. Зависимость метрики (8,8,4) от временной координаты в каждом случае должна быть найдена из уравнений поля ОТО.

При составлении уравнений поля воспользуемся приемом, примененным в п. 5. С этой целью, наряду с четырехмерным континуумом (8,8,4), будем рассматривать трехмерное пространство с метрикой

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \\ \text{sh} \psi \\ \psi^2 \end{pmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

имеющее постоянную кривизну $k = \pm 1, 0$.

Компоненты метрического тензора четырехмерного континуума определяются формулами

$$g_{ij} = -R^2 \gamma_{ij}; \quad g_{i4} = 0; \quad g_{44} = 1;$$

$$g^{ij} = -\frac{\gamma^{ij}}{R^2}; \quad g^{i4} = 0; \quad g^{44} = 1,$$

в которых индексы i, j отличны от 4.

Тензор Риччи при $i, j \neq 4$ удовлетворяет формулам (см. 5)

$$R_{ij} = \overset{x}{R}_{ij} - (2\overset{x}{R}^2 + R\ddot{R}) \gamma_{ij},$$

где $\overset{x}{R}_{ij}$ — компоненты тензора Риччи пространства трех измерений. Последние, согласно (4,10,6), определяются соотношениями $R_{ij} = -2k\gamma_{ij}$, отвечающими каждому из рассматриваемых типов пространства при соответствующих значениях постоянной k .

Таким образом, компоненты тензора Риччи находятся по формулам

$$R_{ij} = -(2k + 2\overset{x}{R}^2 + R\ddot{R}) \gamma_{ij}; \quad R_{i4} = 0; \quad R_{44} = 3R^{-1}\ddot{R}.$$

Ковариантные составляющие и скаляр тензора энергии-импульса вычисляются, как и в 5, при помощи равенств

$$T_{ii} = -\rho g_{ii} = \rho \gamma_{ii} R^2; T_{i4} = 0; T_{44} = \rho; T = \rho - 3p.$$

Воспользовавшись этими значениями, нетрудно составить уравнения поля в развернутой форме. Система десяти уравнений поля сводится в нашем случае к двум следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\dot{R}^2 + R\ddot{R} + 2k - \Lambda R^2 &= 4\pi R^2 (\rho - p); \\ 2R^{-1}\ddot{R} - \Lambda &= -4\pi(\rho + 3p), \end{aligned} \quad (8,8,5)$$

связывающим радиус кривизны пространства с плотностью и давлением материи.

Прежде всего следует отметить, что при $\Lambda = 0$ решение $R = \text{const}$ дает $\rho = p = 0$. Стационарное решение при $\rho > 0$ и $p > 0$ существует лишь при $\Lambda \neq 0$. Таким образом, вновь приходим к выводу о том, что статическая однородная модель совместима с ОТО только при условии, что уравнения поля дополнены Λ -членом. В нестатическом же случае, когда радиус кривизны является функцией времени, уравнения (8,8,5) имеют решения при $\Lambda \geq 0$.

Не останавливаясь на классификации нестатических однородных моделей, которая представляет главным образом математический интерес*, рассмотрим некоторые общие их свойства.

Разрешив систему уравнений (8,8,5) относительно давления и плотности, составим произведение ρR^3 и выполним его дифференцирование по времени. Сделав необходимые упрощения, получим

$$\frac{d}{dt} \rho R^3 = -3pR^2\dot{R}. \quad (8,8,6)$$

Если радиус кривизны пространства является возрастающей функцией времени, то произведение ρR^3 убывает. Иными словами, плотность космологических масс уменьшается со временем быстрее, чем R^{-3} . В случае положительной кривизны, когда объем пространства конечен, полная масса $2\pi^2 R^3 \rho$ убывает при расширении модели и возрастает при ее сжатии. Масса замкнутой модели сохраняется только при $p = 0$, когда из (8,8,6) следует $\rho R^3 = \text{const}$.

Рассмотрим частицу, находящуюся в какой-либо точке с постоянными пространственными координатами, и определим ее ускорение в общем гравитационном поле модели. Согласно принципу геодезической линии, компоненты ускорения равны

* Подробную классификацию моделей можно найти во многих монографиях, например в известной книге Толмана.

$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} = -\Gamma_{44}^\sigma$; $\sigma = 1, 2, 3$. Для линейного элемента (8,8,4) все три величины Γ_{44}^σ тождественно исчезают, вследствие чего $\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} = 0$. Как и в теории Леметра, общее поле тяготения модели не вызывает ускорения неподвижной частицы.

Согласно квадратической форме (8,8,4), пространственный элемент в какой-либо заданный момент времени имеет вид

$$dl^2 = R^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где γ_{ij} — функции только пространственных координат, R зависит от временной координаты.

Приложим эту формулу к линии, заданной параметрическими уравнениями $x^i = x^i(\tau)$. Элемент дуги линии

$$dl = R \left(\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

а длина дуги между точками, отвечающими значениям параметра τ_1, τ_2 , определяется формулой

$$l_{12} = R \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Эта длина является функцией времени: вместе с R она возрастает в расширяющейся и убывает в сжимающейся модели. Изменение ее в единицу времени пропорционально длине:

$$\frac{dl_{12}}{dt} = \frac{\dot{R}}{R} l_{12}. \quad (8,8,7)$$

Все линейные размеры изменяются со временем в соответствии с законом расширения или сжатия модели, но отношения между ними остаются неизменными.

Принцип Доплера в обобщенной нестатической модели имеет такое же выражение, как и в теории Леметра. Если пространственные положения источника излучения и наблюдателя заданы постоянными координатами x_1^σ и x_2^σ , то, согласно общей формуле (6,7,1), принцип Доплера имеет следующий вид:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt_2}{dt_1},$$

где t_1, t_2 — моменты излучения и наблюдения соответственно.

Пусть световой луч, соединяющий точки излучения и наблюдения, задан параметрическими уравнениями $x^\sigma = x^\sigma(\tau)$.

Из условия $ds = 0$ непосредственно следует $dt^2 = R^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j$, откуда

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Это соотношение определяет момент наблюдения в функции момента излучения. Поскольку правая часть равенства постоянна, дифференцирование дает $\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{R_2}{R_1}$. Поэтому

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (8,8,8)$$

Рассматривая космологическую модель Леметра, мы представили это соотношение в виде приближенной формулы (8,6,6), выражающей линейную корреляцию Хаббла между красным смещением и расстоянием до источника излучения. Вычислим теперь правую часть равенства (8,8,8) с точностью до членов второго порядка включительно.

Обозначив современное значение радиуса кривизны R_2 через R , получим соотношение

$$R_1 = R - \dot{R}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \ddot{R}(t_2 - t_1)^2,$$

из которого следует

$$R_1^{-1} = R^{-1} \left\{ 1 + R^{-1} \dot{R}(t_2 - t_1) + \left(R^{-2} \dot{R}^2 - \frac{1}{2} R^{-1} \ddot{R} \right) (t_2 - t_1)^2 \right\}.$$

Поэтому

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = R^{-1} \dot{R}(t_2 - t_1) + \left(R^{-2} \dot{R}^2 - \frac{1}{2} R^{-1} \ddot{R} \right) (t_2 - t_1)^2.$$

Согласно условию $ds = 0$, расстояние источника излучения от наблюдателя, находящегося в начале координат, определяется

значением переменной $\psi = \int_{t_1}^{t_2} R^{-1} dt$. Воспользовавшись разложением $R^{-1}(t) = R^{-1} \{ 1 - R^{-1} \dot{R}(t - t_2) \}$, находим $\psi = R^{-1}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} R^{-2} \dot{R}(t_2 - t_1)^2$, откуда с достаточной для наших целей точностью получим $t_2 - t_1 = R\psi - \frac{1}{2} R \dot{R} \psi^2$.

Величина $R\psi$ представляет собой расстояние l до источника излучения в момент наблюдения; следовательно, $t_2 - t_1 = l - \frac{1}{2} R^{-1} \dot{R} l^2$. Внося это соотношение в предыдущее уравнение,

получим

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{R}}{R} l + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R} \right) l^2. \quad (8,8,9)$$

Следует обратить внимание на то, что при выводе принципа Доплера (8,8,8) и вытекающей из него формулы (8,8,9) мы не пользовались уравнениями поля и основывались лишь на общем виде линейного элемента (8,8,4), оставляя функцию $R(t)$ неопределенной. Спектральные линии должны смещаться в однородной космологической модели по закону (8,8,9) при любой форме уравнений поля, если только последние не противоречат упомянутому линейному элементу.

В релятивистской космологии приняты обозначения:

$$H = R^{-1}\dot{R}; \quad q = -R^{-1}\ddot{R}H^{-2}, \quad (8,8,10)$$

где H — постоянная Хаббла, q — так называемый фактор замедления. В этих обозначениях формула (8,8,9) имеет вид

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = Hl + \frac{1}{2} (1 + q) H^2 l^2. \quad (8,8,11)$$

Рассмотрим несколько подробнее случай $\Lambda = 0$, $p = 0$, когда основные уравнения (8,8,5) переходят в следующие:

$$2\dot{R}^2 + R\ddot{R} + 2k = 4\pi\rho R^2; \quad 3R\ddot{R} = -4\pi\rho R^2. \quad (8,8,12)$$

С помощью этих уравнений или на основе найденного выше общего закона (8,8,6) можно убедиться в том, что произведение ρR^3 не изменяется со временем, вследствие чего можно положить $\rho = \frac{3a}{2\pi} R^3$, где a — постоянная интегрирования, которую можно найти, задавая для какого-либо момента плотность космических масс и радиус кривизны пространства. Комбинируя это соотношение с (8,8,12), находим уравнение $\dot{R}^2 + k = aR^{-1}$, определяющее изменение кривизны пространства со временем. Ограничиваясь расширяющейся моделью, можно написать

$$\dot{R} = \sqrt{aR^{-1} - k}. \quad (8,8,13)$$

Это уравнение показывает, что при $k = 0$ и $k = -1$ расширение может начаться от состояния $R = 0$ и сопровождается монотонным возрастанием радиуса кривизны. Время расширения до некоторого R равно

$$t - t_0 = \int_0^R \left(\frac{R}{a - kR} \right)^{\frac{1}{2}} dR.$$

При указанных значениях параметра k это время вычисляется по формулам

$$t - t_0 = \frac{2}{3} a^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}};$$

$$t - t_0 = \sqrt{R(R+a)} - \frac{a}{2} \ln \frac{\sqrt{R+a} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+a} - \sqrt{R}} \quad (8,8,14)$$

соответственно.

Если же пространство сферическое ($k = 1$), то радиус кривизны увеличивается только до точки $R = a$, в которой расширение модели сменяется сжатием. Этот случай соответствует осциллирующей модели Эйнштейна, которая, как уже указывалось, не отвечает современным данным о Метагалактике.

В заключение рассмотрим еще космологическую модель, отвечающую условиям $p = 0$, $k = -1$ при $\Lambda \neq 0$. Нетрудно убедиться в том, что для расширяющейся модели система (8,8,5) приводит в этом случае к уравнению

$$\dot{R} = \sqrt{1 + aR^{-1} + \frac{1}{3} \Lambda R^2}.$$

При положительной космологической постоянной модель расширяется монотонно. Если же $\Lambda < 0$, то полином $a + R + \frac{1}{3} \Lambda R^3$ имеет положительный корень R_1 . Поэтому радиус кривизны возрастает только до точки R_1 , в которой расширение сменяется сжатием: модель оказывается осциллирующей. Время расширения модели до данного $R \leq R_1$ равно

$$t - t_0 = \int_0^R \frac{dR}{\left(1 + aR^{-1} + \frac{1}{3} \Lambda R^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (8,8,15)$$

9. Сравнение космологических моделей с наблюдениями. Сравнение космологических моделей с действительными свойствами окружающего нас мира основано на существующих оценках средней плотности вещества в Метагалактике и на результатах измерения красного смещения, наблюдаемого в спектрах внегалактических туманностей. Средняя плотность космического вещества выводится из наблюдаемого распределения галактик в пространстве и из определения масс галактик; по современным оценкам, как уже указывалось, она составляет около $10^{-31} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$.

Красное смещение в спектрах галактик характеризуется параметрами (8,8,10). Первым из них является постоянная Хаббла, значение которой выведено из достаточно большого числа

наблюдений после весьма тщательного и всестороннего обсуждения; оно составляет около $75 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}/\text{мпс}$. Второй параметр определяет уклонение красного смещения от линейной корреляции Хаббла; в настоящее время уверенных его оценок не существует. Анализ наблюдений и их сравнение с соотношением (8,8,11) показывают, что по порядку эта величина близка к единице и заключена, по видимому, в пределах от 0 до 1. Подробный обзор современного состояния вопроса о наблюдательных основах космологии можно найти в [12].

В дальнейшем принимаются следующие значения упомянутых параметров с системе CGS:

$$\rho \simeq 10^{-31} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}; H \simeq 2 \cdot 10^{-18} \text{ сек}^{-1}; q \simeq 1.$$

Согласно (8,8,10), эти величины позволяют найти отношения $\frac{R}{\dot{R}}$ и $\frac{\ddot{R}}{\dot{R}}$ независимо от конкретной формы космологической модели. Для использования полученных отношений в космологической модели ОТО необходимо применить уравнения поля (8,8,5). Положив $p = 0$ и воспользовавшись обозначениями (8,8,10), можно написать

$$\frac{2k}{R^2} = 4\pi\rho + (q - 2)H^2 + \Lambda;$$

$$3qH^2 = 4\pi\rho - \Lambda.$$

Сферическая, эвклидова и гиперболическая однородные модели отвечают значениям $k = 1, 0, -1$ соответственно. Внося в эти уравнения наблюдаемые значения ρ, H, q , можно найти космологическую постоянную и современный радиус кривизны, а также установить знак k , определив таким образом тип модели.

Исключая последовательно q , затем ρ , перепишем эту систему в виде

$$\frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\rho - H^2 + \frac{1}{3}\Lambda; \quad \frac{k}{R^2} = (2q - 1)H^2 + \Lambda. \quad (8,9,1)$$

Рассмотрим случай $\Lambda = 0$, когда уравнения поля не содержат космологического члена.

Нулевой кривизне пространства соответствует плотность, называемая критической. В системе CGS она определяется, согласно (8,9,1), соотношением $8\pi\rho_{\text{кр}} = 3H^2$, которое при указанном значении постоянной Хаббла дает $\rho_{\text{кр}} = 10^{-29} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. При $\rho \geq \rho_{\text{кр}}$ модель имеет, соответственно, положительную или отрицательную кривизну. Поскольку оценка средней плотности в Метагалактике существенно меньше $\rho_{\text{кр}}$, реальным условиям должна отвечать разомкнутая модель с бесконечно большим объемом и массой. Однако, согласно второй формуле (8,9,2), при $k = -1$ должно быть $q < 0,5$, что едва

ли приемлемо, поскольку наиболее вероятное значение q , по-видимому, близко к единице.

Для однородной расширяющейся модели есть еще одна существенная трудность как при $\Lambda = 0$, так и при $\Lambda \neq 0$.

Внося наблюдаемые параметры в первое соотношение (8,9,1), при $k = -1$ найдем современный радиус кривизны пространства, составляющий приблизительно $1,2 \cdot 10^{28}$ см*. Теперь можно вычислить время расширения модели до ее современного состояния, т. е. определить верхнюю границу возраста Метагалактики. Входящая в (8,8,14) постоянная a в системе CGS находится с помощью соотношения $a = \frac{8}{3} \pi \rho c^{-2} R^3$. Время расширения модели до современного радиуса составляет около $1,4 \cdot 10^{10}$ лет. В качестве верхней границы возраста Метагалактики такая оценка чрезмерно мала, ибо возраст отдаленных звездных скоплений в Галактике оценивается значительно большими промежутками времени.

Итак, при $\Lambda = 0$ сравнение однородной космологической модели с наблюдениями приводит к противоречивым выводам. Естественно поэтому рассмотреть случай $\Lambda \neq 0$, положив в основу космологической модели уравнения поля с Λ -членом, хотя последний, как уже было сказано, представлялся Эйнштейну неудовлетворительным.

Уравнения (8,9,1) имеют в этом случае решение

$$\frac{k}{R^2} = 4\pi\rho - (1 + q)H^2; \quad \Lambda = 4\pi\rho - 3qH^2.$$

При всех допустимых значениях q знак кривизны пространства определяется однозначно: согласно первому из написанных равенств, $k = -1$. Оставляя параметр замедления неопределенным, получим

$$R = 1,25(1 + q)^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{28} \text{ см}; \quad \Lambda = 9,35 \cdot 10^{-59} - \\ - 1,92q \cdot 10^{-56} \text{ см}^{-2}.$$

В случае отрицательного q радиус кривизны расширяющейся модели монотонно возрастает при соответствующем убывании плотности. Если же $q > 0$, то $\Lambda < 0$ и, как уже было сказано, модель расширяется до некоторого конечного R_1 , при котором трехчлен $a + R + \frac{1}{2} \Lambda R^3$ принимает нулевое значение, после чего расширение сменяется сжатием.

Пусть $q = 0,5$. Современный радиус кривизны модели оказывается равным $1,02 \cdot 10^{28}$ см, а время расширения модели, согласно

* Это значение совместимо со вторым уравнением (8,9,1) при достаточно малом q .

(8,8,15), составляет около $1,5 \cdot 10^{10}$ лет. Расширение будет продолжаться еще $2,7 \cdot 10^9$ лет и при $k_1 = 1,05 \cdot 10^{28}$ см сменится сжатием. Для сравнения положим $q = -0,5$, когда расширение модели продолжается неограниченно. Современный радиус кривизны равен в этом случае $1,8 \cdot 10^{28}$ см, время расширения — около $1,8 \cdot 10^{10}$ лет.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Olbers.— Bode Jahrbicht, 1826.
2. H. Seeliger.— Astron. Nachr., 137, 129, 1895; Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, 1896, 373. C. Neuman Allgemeine Untersuchungen über das Newtonische Princip. Leipzig, 1896.
3. R. Proctor. The Universe of Stars. London, 1878.
4. C. L. Charlier.— Arkiv Matem. Astronomi, Fysik, 16, N 21. Stockholm, 1921.
5. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1, 142, 1917. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 1, 601. «Наука», М., 1965.
6. De Sitter.— Proceedings Koninkl Akad. Wetensh., 19, 1217, Amsterdam, 1917; Month. Not. Roy. Astronom. Soc., 78, 3, 1917.
7. A. Friedmann.— Zeitschr. Phys., 10, 377, 1922; 21, 326, 1924. Русск. пер.: А. А. Фридман. Избранные труды. «Наука», М., 1966.
8. G. Lemaitre. Bruxelles Ann. Soc. Science, 47A, 49, 1927; Month. Not. Roy. Astron. Soc., 91, 483, 1931.
9. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1931, 235. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 2, 349. «Наука», М., 1966.
10. H. P. Robertson.— Proceedings Nat. Acad. Scien., 15, 822. Washington, 1929.
11. R. C. Tolman.— Proceedings Nat. Acad. Scien., 16, 320. Washington, 1930.
12. Наблюдательные основы космологии. «Мир», М. 1965.

Глава IX. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Мы рассмотрели развитие теории гравитации от закона всемирного тяготения Ньютона до релятивистской концепции Эйнштейна, основанной на идее о слиянии гравитации с метрикой пространства-времени. Достаточное внимание было уделено также применению теории гравитации в различных областях астрономии. При этом, излагая основы ОТО, мы придерживались классической формы теории, отвечающей направлению работ Эйнштейна, и не ставили своей целью описать последующее развитие математического аппарата ОТО, рассмотреть позднейшие истолкования этой теории или изложить ее новые варианты. Для ознакомления с этим широким кругом вопросов отсылаем читателя к более специальным монографиям и оригинальным работам. В заключительной главе мы коснемся некоторых принципиальных вопросов, рассмотрим обобщение ОТО на случай переменной гравитации и остановимся на одном из вариантов так называемой линейной теории гравитации.

1. Природа поля гравитации. Как известно, в современной физике принято различать два вида материи — вещество и излучение (электромагнитное поле). Естественно поставить вопрос о природе гравитационного поля: обладает ли гравитация непосредственной материальностью, являясь особым (третьим) видом материи, или она имеет чисто геометрическую природу и представляет собой только метрику пространственно-временного континуума? Этот вопрос, обсуждавшийся в той или иной форме многими физиками и философами, не имеет в настоящее время общепринятого решения. Некоторые авторы считают, что гравитационное поле является самостоятельной физической реальностью и должно рассматриваться как особый вид материи, свойства которого проявляются в метрике пространства-времени. Другие придерживаются противоположной точки зрения, отрицая субстанциональность гравитационного поля и отождествляя его с метрикой пространственно-временного континуума.

В настоящее время в нашем распоряжении нет эмпирических данных, которые могли бы составить основу убедительного решения вопроса о природе гравитации. Поэтому приходится отказаться

от широкой постановки этого вопроса и ограничить его рамками определенной теории. В качестве таковой естественно принять ОТО.

В ОТО виды материи — вещество и электромагнитное поле — характеризуются тензором энергии-импульса, удовлетворяющим известному закону сохранения. Этот тензор служит единственным признаком существования материи в данной области пространственно-временного континуума: условие $T_{ij} \neq 0$ указывает на наличие вещества или радиации, тогда как при $T_{ij} = 0$ область является вакуумом. Условие наличия или отсутствия материи, выражаясь тензорным уравнением, удовлетворяет общему принципу относительности. Если в одной системе отсчета тензор энергии-импульса отличен от нуля, то преобразованием координат невозможно добиться его исчезновения, как невозможно имитировать материю в вакууме с помощью какого-либо специального выбора системы отсчета.

Для положительного решения вопроса о материальности гравитационного поля необходимо найти тензорную характеристику, которая позволила бы определить свойства поля аналогичные свойствам других видов материи. Это, прежде всего, энергия и импульс, присущие всем известным формам материи. Однако, как видно из главы VI, для поля гравитации удалось сформулировать лишь так называемый псевдотензор энергии-импульса, который сохраняет тензорные свойства только при линейных преобразованиях координат, но не отвечает общему принципу относительности. Псевдотензор энергии-импульса не может служить признаком материальности поля гравитации, поскольку для каждой произвольно заданной точки пространственно-временного континуума можно построить систему координат, в которой все компоненты псевдотензора принимают нулевые значения.

Все попытки найти характеристику энергии-импульса поля гравитации, отвечающую общему определению тензора, оказались неудачными. Предлагались лишь новые определения псевдотензора, которые с принципиальной точки зрения не обладают каким-либо существенным преимуществом по сравнению с определением, указанным в главе VI.

Основываясь на принципе эквивалентности, можно предположить, что определение правильного тензора энергии-импульса поля в ОТО вообще невозможно, так как в бесконечно малой окрестности каждой точки пространственно-временного континуума существует система отсчета, в которой поля гравитации нет. Однако это предположение оказывается правильным лишь в том случае, если искомым тензор энергии-импульса содержит только первые производные от компонент метрического тензора. Действительно, введение системы координат, позволяющей устранить поле гравитации в окрестности данной точки, с математической точки зрения представляет собой введение соприкасающегося пространства Эв-

клида, которое аппроксимирует пространство Римана во втором приближении. Это значит, что в данной точке для обоих пространств совпадают компоненты метрического тензора и их первые производные по координатам, тогда как производные более высоких порядков остаются различными. Поэтому из компонент метрического тензора и их производных различных порядков можно составить такие выражения, которые нельзя привести к нулю одним лишь преобразованием координат. Отсюда следует, что, с математической точки зрения, возможность образовать правильный тензор энергии-импульса поля *argioi* отрицать нельзя, хотя предпринимавшиеся до сих пор попытки, как уже сказано, к успеху не привели.

Если будет доказана невозможность построить правильный тензор энергии-импульса поля гравитации, то придется признать, что в рамках ОТО поле не является видом материи, поскольку оно не имеет основных физических свойств, присущих известным формам материи. В этом случае гравитационному полю следует приписать чисто геометрическую природу, отождествив его с метрикой пространственно-временного континуума. Придется также изменить представление о природе гравитационных волн. Последние придется рассматривать как волнообразное возмущение метрики, распространяющееся с конечной скоростью, но не связанное с переносом энергии и количества движения. Такая точка зрения очень четко и последовательно развивается М. Ф. Широковым [1].

Геометрическое истолкование гравитации представляется в ОТО вполне естественным, хотя и отличается от обычного изложения, в котором гравитационные волны связываются с переносом энергии.

Рассмотрим гравитационную волну, распространяющуюся в континууме Минковского. Пробная частица, двигавшаяся до того равномерно и прямолинейно, под действием волны будет испытывать ускорение, которое с точки зрения СТО можно истолковать как увеличение ее энергии. На самом же деле мировой траекторией частицы, как и прежде, остается геодезическая линия пространственно-временного континуума, но метрика последнего отличается от метрики Минковского. С точки зрения ОТО, представление о силе, обусловленной гравитационной волной и вызвавшей увеличение кинетической энергии пробной частицы, условно: оно возникает в результате применения метрики СТО, тогда как в действительности при прохождении волны метрика пространства-времени отличается от континуума Минковского. После прохождения волны, когда метрика СТО восстановится, скорость пробной частицы, а следовательно, и ее энергия останутся прежними.

В заключение необходимо еще раз подчеркнуть, что геометрическое истолкование гравитации не общепринято и что многие авторы, следуя классическому изложению Эйнштейна (см. главу VI), приписывают гравитационному полю энергию и количество движения,

вычисляя их с помощью псевдотензора энергии-импульса. Гравитационные волны рассматриваются при этом как механизм переноса импульса и энергии и даже как источник дополнительного гравитационного поля (см., например, [2]). Придерживаясь этой точки зрения, А. З. Петров называет гравитационное поле особым видом материи, обладающим некоторыми общими свойствами с другими видами материи [3].

2. Квантование гравитации. Вскоре после разработки основ квантовой механики довольно популярной стала идея квантования поля гравитации. Необходимость такого квантования усматривалась в том, что в микромире классическая теория гравитации должна неизбежно вступить в конфликт с квантовой механикой. Действительно, если гравитационные поля элементарных частиц являются классическими и отвечают обычной ОТО, то принципиально возможно путем соответствующих изменений найти одновременно координаты и скорости частиц, что противоречит принципу неопределенности. Для преодоления противоречия необходимо преобразовать ОТО по образцу квантовой электродинамики с тем, чтобы в применении к микрочастицам она приводила к результатам, согласным с принципами квантовой механики.

Этому соображению противопоставлялось предположение о том, что в микромире гравитация крайне слаба и не играет сколь угодно существенной роли. Например, отношение гравитационного взаимодействия двух электронов к кулоновскому равно $\gamma : \left(\frac{e}{m}\right)^2$, что составляет величину порядка 10^{-42} . Однако с точки зрения ОТО такое сравнение допустимо только для достаточно больших расстояний, когда нелинейные уравнения поля можно аппроксимировать законом Ньютона. Что же касается расстояний, характерных для микромира, то для них, вследствие нелинейности уравнений поля, гравитационные взаимодействия могут оказаться существенными.

Первая попытка квантования гравитации относится, по-видимому, к 1930 г. [4]. Подробную квантовую теорию слабого гравитационного поля построил в 1936 г. М. Бронштейн [5], рассматривавший поле тяготения в пустоте как некоторую квантово-механическую систему. По аналогии с квантовой электродинамикой, Бронштейн ввел понятие «гравитационного кванта» (по современной терминологии — гравитона) и объяснял гравитационное взаимодействие между материальными частицами испусканием и поглощением этих квантов, пытаясь, таким образом, вывести закон тяготения Ньютона.

К ранним попыткам квантования поля гравитации можно отнести также работы П. Г. Бергмана [6]. Впоследствии различные варианты квантовой теории гравитационного поля как в линейном

приближении, так и в нелинейной форме разрабатывались С. Гупта [7], Д. Уилером [8] и рядом других исследователей. К сожалению, предлагавшиеся до сих пор варианты, основанные на формальной аналогии с квантовой электродинамикой, с физической точки зрения оказались бесплодными. Поскольку поле гравитации имеет особую природу и является, по-видимому, чисто геометрическим, трудно согласиться с тем, что его можно квантовать по тем же правилам, как и обычные материальные поля. Следует также иметь в виду, что при составлении условий квантования гравитационного поля приходится пользоваться псевдотензором энергии-импульса, физический смысл которого пока неясен. Большие сомнения вызывает вывод квантовой теории о существовании гравитона — гравитационной частицы, обладающей энергией, импульсом и спином, а особенно — заключение о возможности превращения материальных частиц в гравитоны и обратно.

Необходимость и процедура квантования материальных полей были результатом тщательного анализа множества твердо установленных фактов, необъяснимых с точки зрения классической физики. В отличие от этого, квантование полей гравитации до сих пор не имеет эмпирической основы и выполняется только по формальной аналогии с материальными полями. Трудно предположить, что этот путь окажется плодотворным и приведет к существенным успехам в теории гравитации.

3. Единые теории поля. Со времени завершения ОТО Эйнштейн и другие исследователи предпринимали многочисленные попытки создания единой теории поля, задачей которой является объяснение гравитации и электромагнетизма с единой точки зрения. Математическим аппаратом одного из первых вариантов единой теории поля служила геометрия Вейля [9], представляющая собой некоторое обобщение геометрии Римана. Наряду с метрическим тензором, в геометрии Вейля играет существенную роль четырехмерный вектор, интерпретируемый как электромагнитный потенциал. Идея Вейля разрабатывал Эддингтон [10], который построил геометрию на понятии параллельного переноса. К этому направлению примыкает один из ранних вариантов единой теории поля Эйнштейна [11]. Позднее Эйнштейн предлагает теорию, основанную на отказе от симметрии метрического тензора [12]. Последний разлагается на симметричный и антисимметричный компоненты, которые отвечают гравитационному и электромагнитному полям.

Другое направление начато исследованиями Калузы [13], который стремился описать гравитацию и электромагнетизм при помощи одного метрического тензора. Математическим аппаратом теории остается геометрия Римана, но число измерений континуума принимается равным пяти: к четырем измерениям пространственно-временного многообразия добавляется пятое, которое не обладает

непосредственным физическим смыслом, но позволяет увеличить число компонент метрического тензора. К этому направлению относятся работы Клейна [14], Фока [15], Манделя [16] и других.

В 1928 г. Эйнштейн предложил еще один вариант единой теории поля. Как известно, риманова метрика позволяет сравнивать величины линейных элементов, которые построены в точках, отделенных конечными расстояниями. Однако сравнение таких элементов по направлениям невозможно; в частности, нельзя говорить об их параллелизме. В геометрии Вейля линейные элементы, отделенные конечным расстоянием, нельзя сравнивать не только по направлениям, но и по величине. Эйнштейн, отходя от геометрии Римана, избирает противоположный путь: удерживая риманову метрику, он дополняет ее условием сравнимости линейных элементов также по направлениям, вводя понятие о параллелизме вдали [17]. В развитии теории поля, основанной на этой геометрии, кроме Эйнштейна [18], принимали участие Леви-Чивита [19], Майер [20] и другие.

Можно упомянуть о попытке построить теорию поля с использованием понятий кривизны и кручения пространственно-временного континуума [21], а также о теории Эйнштейна и Майера [22], в которой для совместного описания гравитации и электромагнетизма в четырехмерном континууме вводится вектор с пятью компонентами.

Не занимаясь дальнейшим перечислением вариантов единой теории поля, отметим, что в одной из последних работ [23] Эйнштейн дал новое изложение обобщенной теории тяготения при помощи несимметричного метрического тензора, содержащего симметричную и антисимметричную компоненты. Считая эту теорию удовлетворительной, Эйнштейн указывал, что только математическая сложность обобщенных уравнений поля не позволила ему применить теорию к конкретным задачам и найти следствия, пригодные для сравнения с опытом.

Ни одна из предлагавшихся до настоящего времени единых теорий не привела к результатам, представляющим непосредственный интерес с точки зрения физики или астрономии. Причиной этого является, по-видимому, то обстоятельство, что единые теории разрабатывались как чисто математические обобщения ОТО на основе той или иной формальной гипотезы и не содержали новых физических принципов или идей о связи между гравитацией и электромагнетизмом.

4. Переменная гравитация. В 1937 г. Дирак высказал гипотезу об изменении гравитации со временем [24]. Поводом для такого предположения послужило сравнение безразмерных величин, которые могут быть составлены из физических констант в комбинации с постоянной Хаббла.

Отношение кулоновского отталкивания двух электронов к силе тяготения, действующей между этими частицами, равно $\frac{e^2}{\gamma m^2}$ и составляет около $4 \cdot 10^{42}$. Комбинируя массу и заряд электрона со скоростью света и постоянной Хаббла, нетрудно получить другую безразмерную величину $\frac{mc^3}{e^2 H}$, равную приблизительно $3 \cdot 10^{40}$. Допуская, что близкие значения этих величин выражают некое общее свойство мира, Дирак принимает соотношение $\frac{e^2}{\gamma m^2} \sim \frac{mc^3}{e^2 H}$, считая, что оно сохраняется в процессе эволюции Вселенной. Поскольку же постоянная Хаббла в релятивистской космологии переменна, это соотношение требует, чтобы со временем изменялась одна или несколько из числа других входящих в него констант. В частности, можно положить $\gamma \sim H$, связав, таким образом, закон изменения гравитационной постоянной с эволюцией Вселенной в целом.

Следуя гипотезе Дирака, П. Иордан обобщил уравнения поля Эйнштейна, введя вместо гравитационной постоянной скалярную функцию пространственно-временных координат [25].

Уравнения Иордана в общем случае таковы [26]:

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R + (\zeta - 2) \kappa^{-2} \kappa_i \kappa^k + \kappa^{-1} \kappa_i^k + \delta_i^k \left\{ -\kappa^{-1} \kappa^\alpha_{/\alpha} - \frac{1}{2} (\zeta - 4) \kappa^{-2} \kappa_\alpha \kappa^\alpha \right\} = \frac{\kappa}{c^2} T_i^k; \quad (9,4,1)$$

$$R - 3\zeta \kappa^{-2} \kappa_\alpha \kappa^\alpha + 2\zeta \kappa^{-1} \kappa^\alpha_{/\alpha} = 0.$$

Здесь κ — гравитационный скаляр, ζ — безразмерная константа, выбираемая путем сравнения теории с данными наблюдений.

Для упрощения записи приняты обозначения: $\kappa_i = \frac{\partial \kappa}{\partial x^i}$, $\kappa^i = g^{\alpha i} \kappa_\alpha$. Символом $/i$ обозначено ковариантное дифференцирование по координате x^i .

Уравнения Иордана представляют собой систему очень сложных дифференциальных уравнений, число которых на единицу больше числа обычных уравнений поля ОТО. При заданном тензоре энергии-импульса искомыми являются компоненты метрического тензора и гравитационный скаляр. В случае однородной космологической модели этот скаляр представляет собой функцию одной лишь временной координаты, как и предполагалось в исходной гипотезе Дирака.

В первом приближении уравнения Иордана приводят к обычному закону обратных квадратов с коэффициентом пропорциональности, медленно убывающим со временем. Количественная оценка

показывает, что относительная убыль гравитационной постоянной составляет приблизительно $3 \cdot 10^{-11}$ в год. Если ослабление гравитации аппроксимировать линейным законом вида $\gamma - \gamma t$, где γ — современное значение, то следует принять $\dot{\gamma} \approx 6 \cdot 10^{-26} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-3}$.

В последние годы интерес к гипотезе Дирака несколько усилился в связи с обсуждением различных геофизических процессов, которые можно рассматривать как независимые аргументы в пользу этой гипотезы. Обсуждению гипотезы Дирака посвящены работы Дике [27], Бранса и Дике [28] и других авторов, а также недавнее исследование Саакяна и Мнацаканяна [29].

В настоящее время, по-видимому, еще преждевременно судить о перспективности подобного обобщения теории гравитации, тем более, что уравнения Иордана еще недостаточно изучены. Однако полезно перечислить возможные астрономические эффекты, обусловленные переменностью гравитации, и оценить их порядок. Некоторые оценки содержатся в обзоре Дике [30]. Далее рассматриваются несколько эффектов переменной гравитации согласно [31]. Вычисления выполнены в приближении Ньютона, которое только и может представить интерес для количественной оценки эффектов.

5. Эволюция звезд главной последовательности. Переходим к рассмотрению некоторых астрономических эффектов, которые могут быть вызваны ослаблением гравитации. Для количественной оценки воспользуемся первым приближением, сохраняя обычный закон обратных квадратов с коэффициентом пропорциональности, убывающим по линейному закону.

Нетрудно убедиться в том, что небесно-механические эффекты переменной гравитации вследствие их крайней малости не представляют практического интереса. Так, в задаче двух тел ослабление притяжения вызывает появление радиального возмущающего ускорения $R = \frac{\dot{\gamma} t M}{r^2}$, где M — масса центрального тела, которая предполагается достаточно большой по сравнению с массой планеты. Пользуясь методом вариации элементов, можно показать, что обусловленные этим ускорением вековые изменения большой полуоси и эксцентриситета вполне пренебрежимы.

Значительно больший интерес может представить влияние переменной гравитации на скорость звездной эволюции.

Составим приближенное выражение для светимости звезды. Предполагая равновесие звезды лучистым, воспользуемся последним из уравнений (7,4,2)

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3}{16\pi c} \frac{\alpha L(r)}{r^2 T^3}. \quad (9,5,1)$$

Источники энергии сосредоточены в центральной части звезды.

Поэтому можно принять $L(r) = L$ при $r = \frac{r_1}{2}$. Согласно (7,1,7), средние значения температуры и ее градиента с достаточной точностью определяются соотношениями

$$T_m = \frac{\gamma\mu M}{3r_1 R}; \quad \left(\frac{dT}{dr}\right)_m = -\frac{\gamma\mu M}{2r_1^2 R}.$$

Поэтому из уравнения (9,5,1) следует

$$L = \frac{2\pi ac}{3^4 R^4} \frac{\gamma^4 \mu^4 M^4}{\alpha_m r_1^3}, \quad (9,5,2)$$

где α_m — среднее значение коэффициента поглощения.

Если непрозрачность звездного вещества обусловлена фотоэлектрическим поглощением, то для коэффициента α_m , по формуле Крамерса (7,3,11), можно принять

$$\alpha_m = \frac{\alpha_0 \rho_m^2}{T^{3,5}}; \quad \alpha_0 = 4 \cdot 10^{25} (1 + x_H + x_{He}) (1 - x_H - x_{He}).$$

В этом случае светимость звезды равна

$$L = \frac{2^8 \pi^3 ac}{3^{9,5} \alpha_0 R^{7,5}} \mu^{7,5} \gamma^{7,5} M^{5,5} r_1^{-0,5}. \quad (9,5,3)$$

Можно отметить, что такая же зависимость светимости от молекулярного веса, массы и радиуса звезды имеет место и в стандартной модели Эддингтона.

Представим соотношение (9,5,3) в другом виде, исключив радиус звезды с помощью формулы (7,1,9) для центральной температуры T_c . Выполнив подстановку, получим

$$L = \frac{2^{5,5} \pi^3 ac}{3^{9,5} \alpha_0 R^7} \mu^7 \gamma^7 M^5 T_c^{0,5}. \quad (9,5,4)$$

Эти формулы пригодны для оценки светимостей большинства звезд главной последовательности, за исключением звезд ранних классов, в которых непрозрачность вещества обусловлена томсоновским рассеянием света на свободных электронах. В последнем случае $\alpha = \alpha_1 \rho$, где $\alpha_1 = 0,2 (1 + x_H)$. Согласно общей формуле (9,5,2), светимости звезд этих типов можно определить при помощи соотношения

$$L = \frac{2^3 \pi^2 ac}{3^6 \alpha_1 R} \gamma^4 \mu^4 M^3. \quad (9,5,5)$$

Продолжительность стадии главной последовательности весьма существенно зависит от массы звезды. Для звезд с солнечной массой она составляет $\sim 10^{10}$ лет, при десятикратной массе Солнца — только $\sim 10^7$ лет.

Определим убыль светимости звезды вследствие ослабления гравитации, считая для простоты, что при постоянной гравитации конфигурация звезды, а следовательно, и ее светимость, оставались бы в течение всей стадии главной последовательности неизменными.

Пусть масса звезды совпадает с M_{\odot} . При постоянной массе формула $T_c = \frac{\gamma M}{2r_1 R}$ связывает гравитационную константу с центральной температурой. Если положить $r_1 = \text{const}$, то за $\sim 10^{10}$ лет центральная температура при заданном молекулярном весе звездного вещества понизится приблизительно на 20%. Если же принять $T_c = \text{const}$, то произойдет соответствующее уменьшение радиуса. В первом случае современная светимость L и начальная L_0 будут связаны, согласно (9,5,3), соотношением $\frac{L}{L_0} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{7,5}$; во втором, согласно (9,5,4), получится $\frac{L}{L_0} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^7$, где через γ и γ_0 обозначены соответствующие значения гравитационной константы. Практически оба соотношения совпадают и дают $\approx 0,15$. За время около 10^{10} лет убыль светимости становится заметной, и потому можно ожидать, что переменность гравитации ускорит эволюцию звезды.

Для звезды с массой $\sim 10 M_{\odot}$ зависимость светимости от гравитационной константы оказывается, согласно (9,5,5), менее острой: $\frac{L}{L_0} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^4$. Поскольку же и продолжительность стадии главной последовательности для звезд с такими массами значительно короче, переменность гравитации не вызовет заметного эффекта. Таким образом, вековое ослабление гравитации должно несколько уменьшить дисперсию возрастов звезд, обусловленную различием их масс.

6. Белые карлики. В теории Чандрасекара массы и радиусы белых карликов определяются формулами (7,7,3) и (7,7,4).

$$M = -\frac{\frac{7}{2} A^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\pi^2} B^2} \gamma^{-\frac{3}{2}} \left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_1; \quad r_1 = \left(\frac{2A}{\pi\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\eta_1}{By_0}, \quad (9,6,1)$$

где A и B — известные постоянные, η_1 и $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_1$ — граничные значения, соответствующие поверхности звезды.

При увеличении параметра y_0 абсолютное значение $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_1$, монотонно возрастает, стремясь к 2,02 при $y_0 \rightarrow \infty$, когда уравнение Чандрасекара переходит в дифференциальное уравнение Эмдена для политропного шара с индексом $n = 3$. Эта политропная

конфигурация отвечает верхней границе массы белого карлика:

$$M_{\text{макс}} = \frac{2,02 \cdot 2^{\frac{7}{2}} A^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} B^2} \gamma^{-\frac{3}{2}}, \quad (9,6,2)$$

которая при обычном значении гравитационной постоянной составляет $1,44 M_{\odot}$.

Для наших целей зависимость η_1 и $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$ от y_0 удобно представить графически. С уменьшением гравитационной константы при заданной массе звезды величина $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$ убывает, отношение $\frac{\eta_1}{y_0}$ растет, радиус конфигурации увеличивается. Возрастает также предельная масса (9,6,2). Практически эти эффекты проявляются, конечно, только в том случае, если продолжительность стадии белого карлика достаточно велика.

В главе VII указывалось, что возрасты белых карликов, зависят от их светимостей. Сириус В со светимостью $3 \cdot 10^{-3} L_{\odot}$ имеет возраст $\sim 10^9$ лет, что недостаточно для проявления эффектов переменной гравитации. Звезда Ван Маанена со светимостью $1,4 \times 10^{-4} L_{\odot}$ существует в стадии белого карлика $\sim 10^{10}$ лет. За это время коэффициент пропорциональности в законе Ньютона должен был уменьшиться приблизительно на $2 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$, и в эпоху формирования звезды как белого карлика он составлял около $9 \times 10^{-8} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$. Считая, что масса звезды ($0,85 M_{\odot}$) оставалась постоянной, нетрудно найти величину $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$ по формуле (9,6,1); она составит $-1,8$. По этому значению находится y_0 , затем η_1 и, с помощью второго соотношения (9,6,1), вычисляется $r_1 \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ см}$.

Таким образом, за время существования этой звезды в стадии белого карлика ослабление гравитации вызвало увеличение радиуса от 3 тыс. км до современного — около 7 тыс. км. По формуле (9,6,2) находим, что гравитационной константе $\gamma = 9 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$ отвечает предельная масса $0,9 M_{\odot}$. Это показывает, что в эпоху формирования звезды как белого карлика ее масса не слишком отличалась от предельной.

Таким образом, при переменной гравитации долгоживущие белые карлики не могут обладать массами, близкими к предельной, так как они возникали в эпоху, когда предельное значение массы (9,6,2) было меньше современного.

7. Время релаксации системы двойных звезд. Для обоснования современных оценок возраста звезд, получивших название «короткой

шкалы времени», важное значение имела работа В. А. Амбарцумяна [32], показавшего, что наблюдаемые закономерности в системе двойных звезд противоречат гипотезе о статистическом равновесии. Поэтому возраст системы должен быть меньше времени релаксации

$$t = \frac{v}{4\pi\gamma am n \ln \left(1 + \frac{a^2 v^4}{4m^2 \gamma^2} \right)}, \quad (9,7,1)$$

где a — большая полуось относительной орбиты двойной звезды, v — средняя скорость звезд, возмущающих данную пару, n — число звезд в единице объема.

Уравнение (9,7,1) получено Амбарцумяном при учете только близких прохождений, для которых расстояние возмущаемого тела от направления начальной относительной скорости возмущающей звезды не превосходит большой полуоси орбиты двойной системы. Далекие прохождения не могут играть существенной роли, поскольку они вызывают главным образом ускорение двойной звезды в целом и почти не влияют на относительную орбиту.

При $a = \frac{1}{20} pc$, $m = m_{\odot}$ и при наблюдаемых скоростях звезд время релаксации не более 10^{10} лет. Поскольку в системе двойных звезд с указанными полуосями орбит распределение Больцмана не выполняется, можно заключить, что возраст системы не превышает 10^{10} лет.

Формулу (9,7,1) нетрудно обобщить для случая, когда коэффициент пропорциональности в законе тяготения Ньютона изменяется со временем, согласно уравнению $\gamma = \gamma_0 - \dot{\gamma}t$, где γ_0 — его современное значение.

Линейные скорости звезд в двойных системах со средними расстояниями между компонентами порядка 1000 астрономических единиц составляют около километра в секунду, тогда как средние относительные скорости звезд близки к 30 км/сек. Поэтому, вычисляя приращение кинетической энергии компонента двойной системы, можно с достаточной точностью считать возмущаемую звезду неподвижной, что значительно упрощает вычисление.

Приращение кинетической энергии, вызванное одним прохождением возмущающей звезды, равно

$$\frac{mv^2}{2} \frac{1}{1 + \frac{p^2 v^4}{4\gamma^2 m^2}},$$

где v — начальная скорость, p — расстояние возмущаемой звезды от направления начальной относительной скорости возмущающей звезды.

Допустим, что скорости возмущающих звезд одинаковы, а направления их в пространстве равновероятны. Число звезд в единице объема обозначим через n .

Умножим написанное выражение на $2\pi r v n p d t$. Выполнив затем интегрирование по переменной p в пределах от 0 до a , найдем приращение кинетической энергии, обусловленное звездными сближениями за время $d t$,

$$\frac{2\pi n \gamma^2 m^2}{v} \ln \left(1 + \frac{a^2 v^4}{4\gamma^2 m^2} \right) d t.$$

Используя соотношение $\gamma = \gamma_0 - \dot{\gamma} t$ и принимая во внимание неравенство $a^2 v^4 \gg 4\gamma^2 m^2$, можно написать

$$- \frac{2\pi n \gamma^2 m^2}{v \dot{\gamma}} \ln \left(\frac{a^2 v^4}{4\gamma^2 m^2} \right) d \gamma.$$

Приращение энергии за время τ до момента $t = 0$ составляет

$$- \frac{2\pi n m^2}{v \dot{\gamma}} \int_{\gamma_1}^{\gamma_0} \gamma^2 \left\{ \ln \left(\frac{a^2 v^4}{4m^2} \right) - 2 \ln \gamma \right\} d \gamma,$$

где для краткости принято $\gamma_1 = \gamma_0 + \dot{\gamma} \tau$.

Выполнив интегрирование, после необходимых преобразований найдем

$$\frac{2\pi n m^2 \gamma_0^3}{3v \dot{\gamma}} \left\{ \left[\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right)^3 - 1 \right] \left(\ln \frac{a^2 v^4}{4\gamma_0^2 m^2} + \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right)^3 \ln \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right)^2 \right\}.$$

Статистическое равновесие наступит при условии, что приращение энергии будет сравнимо с абсолютным значением полной энергии двойной звезды, т. е. с величиной $\frac{\gamma_0 m^2}{2a}$. Следовательно,

$$\frac{4\pi n m a \gamma_0^2}{3v \dot{\gamma}} \left\{ \left[\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right)^3 - 1 \right] \left(\ln \frac{a^2 v^4}{4\gamma_0^2 m^2} + \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right)^3 \ln \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right)^2 \right\} = 1. \quad (9,7,2)$$

Этим уравнением и определяется время релаксации системы двойных звезд при переменной гравитации. Для заданного значения большой полуоси необходимо найти отношение $\frac{\gamma_1}{\gamma_0}$, после чего время релаксации вычисляется по формуле $\tau = \frac{(\gamma_1 - \gamma_0)}{\dot{\gamma}}$.

При $a = \frac{1}{20}$ пс корнем уравнения (9,7,2) является величина $\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 1,16$, которой соответствует $\tau = 5,6 \cdot 10^9$ лет вместо значения $t = 6,4 \cdot 10^9$, вычисленного по формуле (9,7,1). При $a = \frac{1}{40}$ пс

получается $\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 1,30$, $\tau = 1,07 \cdot 10^{10}$ и $t = 1,40 \cdot 10^{10}$ лет. Таким образом, в случае принятого ослабления гравитации верхняя граница возраста системы двойных звезд практически почти не отличается от значения полученного по формуле Амбарцумяна при неизменной гравитационной константе.

8. Расширение Земли. Ослабление гравитации могло служить причиной различных геофизических процессов, представляющих интерес с точки зрения эволюции Земли и изменения биологических условий на ее поверхности. Если светимость Солнца в прошлом превосходила современную, то можно предположить, что температура на поверхности Земли была выше, облачность в атмосфере — более значительной, а условия для развития биологических процессов сильно отличались от существующих в настоящее время. Интересный обзор геофизических следствий переменной гравитации можно найти в статьях П. Иордана [33] и Р. Дике [34]. Здесь мы отметим эффект, относящийся к Земле в целом.

Расчет теоретической модели Земли как сферической конфигурации, находящейся в гравитационном равновесии, показывает, что линейные размеры земного шара должны зависеть от гравитационной постоянной. Поэтому, принимая гипотезу Дирака, следует допустить, что ослабление гравитации сопровождается расширением Земли. Относительное приращение радиуса определяется следующим приближенным соотношением:

$$\frac{\delta r}{r} \simeq -0,1 \frac{\delta \gamma}{\gamma}. \quad (9,8,1)$$

При упомянутом уменьшении гравитационной постоянной это соотношение дает $\frac{\delta r}{r} \simeq 3 \cdot 10^{-12}$ в год, откуда следует, что за миллиард лет радиус Земли должен увеличиться приблизительно на 20 км.

С расширением Земли некоторые авторы связывают различные особенности ее геологического строения. В частности, таким расширением объясняют разлом вдоль линии, образующей современное западное побережье Африки, а также последующее за этим разломом расхождение двух континентов — африканского и южноамериканского. Однако обсуждение этого и некоторых других косвенных геологических аргументов, свидетельствующих в пользу гипотезы Дирака, выходит далеко за рамки этой книги.

В заключение отметим, что приведенные оценки эффектов переменной гравитации являются лишь примерными, поскольку линейный закон может оказаться непригодным для больших промежутков времени. Возможно, что замена его более точным законом изменит количественные оценки эффектов.

9. Космология Дирака — Иордана. В релятивистской космологии большой интерес представляет разработка модели, основанной на уравнениях поля Иордана, поскольку при этом можно надеяться смягчить или даже устранить трудности, к которым приводят обычные уравнения поля ОТО. В одной из первых попыток построить космологическую модель подобного типа Бранс и Дике воспользовались частным решением, выбор которого нельзя считать убедительным [28]. Ниже мы приводим однородную космологическую модель, разработанную А. В. Манджосом [35] на основе подробного исследования уравнений (9,4,1).

Исходная квадратическая форма, отвечающая условиям однородности и изотропности, такова:

$$ds^2 = -a^2(\eta) \left[d\psi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \\ \text{sh}^2 \psi \\ \psi^2 \end{pmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - d\eta^2 \right], \quad (9,9,1)$$

где функции $\sin \psi$, $\text{sh} \psi$ и ψ отвечают положительной, отрицательной и нулевой кривизне пространства соответственно. Временная переменная η связана с собственным временем τ очевидным соотношением $c d\tau = a d\eta$.

Положив в тензоре энергии-импульса $\rho = 0$, можно получить из системы (9,4,1) следующие уравнения для радиуса кривизны, гравитационного скаляра и плотности:

$$\begin{aligned} 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} + \frac{\zeta}{2} \frac{\dot{\kappa}^2}{\kappa^2} - C_1 \frac{\kappa}{a} + 3k &= 0; \\ \frac{\ddot{\kappa}}{\kappa} - 2 \frac{\dot{\kappa}^2}{\kappa^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{C_1}{2\zeta - 3} \frac{\kappa}{a} &= 0; \end{aligned} \quad (9,9,2)$$

$$a^3 \rho = C_1,$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Точкой обозначено дифференцирование по временной переменной η . Постоянная k имеет значение ± 1 или 0 в зависимости от положительной, отрицательной или нулевой кривизны.

Последнее из написанных соотношений показывает, что, как и в обычной однородной релятивистской модели, при нулевом давлении плотность убывает обратно пропорционально кубу радиуса кривизны. Два первые уравнения определяют общее решение задачи, содержащее три произвольных постоянных, не считая указанной уже константы C_1 .

При $k = 0$ система (9,9,2) допускает простое аналитическое решение, которое мы здесь не приводим, поскольку в дальнейшем оно не используется. Если же $k \neq 0$, то система не имеет решения в элементарных функциях, и приходится довольствоваться ее численным интегрированием.

При сделанных предположениях, имеется всего семь типов решений: два — при $k = 0$, два — при $k = -1$ и три — при $k = 1$. Подробное изучение решений показывает, что с точки зрения наблюдений основной интерес представляет один из типов при $k = -1$. Этому решению, изображенному на рис. 31, соответствует расширяющаяся модель отрицательной кривизны с особенностью в точке $\tau = 0$. Вблизи особой точки радиус кривизны со временем возрастает весьма быстро, но затем скорость роста убывает и в дальнейшем расширение осуществляется по линейному закону. Гравитационный скаляр убывает с постепенно уменьшающейся скоростью, асимптотически стремясь к некоторому предельному значению, отличному от нуля.

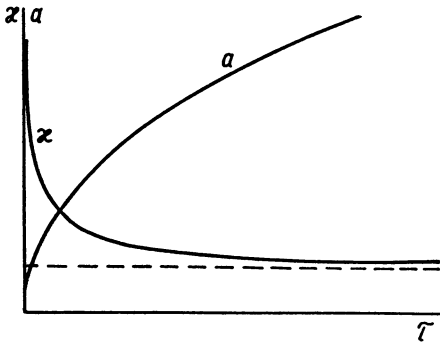


Рис. 31.

Для выбора конкретной космологической модели необходимо задать современные значения постоянной Хаббла, плотности вещества в Метагалактике, гравитационного скаляра и параметра торможения. На рис. 32 приводятся графики изменения радиуса кривизны модели и отношения гравитационного скаляра к его современному значению, вычисленные Манджосом при следующих значениях указанных параметров:

$$H = 75 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{млс}^{-1},$$

$$\rho = 10^{-31} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3},$$

$$\kappa_0 = 1,86 \cdot 10^{-27} \text{ см} \cdot \text{г}^{-1}, \quad q = 0,2.$$

Время расширения модели до современного состояния составляет около $7 \cdot 10^9$ лет. График показывает, что гравитационный скаляр сильно отличается от предельного значения только на ранних этапах расширения, тогда как в современном состоянии модели он довольно близок к этому значению.

Эти оценки существенно зависят от принятого параметра торможения. Если вместо указанного значения положить $q = 1,0$, то время расширения модели составит $5 \cdot 10^9$ лет, а относительная убыль гравитационного скаляра — около $3 \cdot 10^{-11}$ в год, как и принималось при оценках эффектов переменной гравитации.

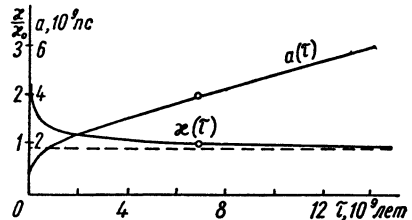


Рис. 32

При рассмотрении релятивистской космологии, основанной на обычной форме уравнений поля ОТО, мы специально подчеркнули то обстоятельство, что относительно небольшую продолжительность расширения моделей трудно согласовать с возрастом отдельных космических систем. Может показаться, что переход к уравнениям поля Иордана только усиливает эту трудность, поскольку время расширения моделей еще более сокращается. Однако такое заключение слишком поспешно. Оценки возраста звездных систем и продолжительности эволюции отдельных звезд существенно зависят от величины гравитационной постоянной и в случае ослабления гравитации со временем они могут, как мы видели, заметно сократиться. Такое сокращение может оказаться очень значительным, если отказаться от применявшейся в предыдущих параграфах линейной формулы и заменить ее более точным законом, отвечающим данной космологической модели. Поэтому, принимая определенную космологическую модель, необходимо пересмотреть всю систему оценок возрастов звезд и звездных систем, и лишь после такого пересмотра можно судить о совместимости этих возрастов со временем расширения модели.

10. Новые попытки изменить закон Ньютона. В главе II довольно подробно рассказано о многочисленных попытках изменить форму закона обратных квадратов в теории тяготения Ньютона. Эти попытки, связанные с отдельными трудностями небесной механики или с различными общими соображениями, относились главным образом к дорелятивистскому периоду в развитии теории гравитации. Однако время от времени предложения изменить форму закона тяготения продолжают высказываться.

В 1963 г. А. Финзи, обсуждая особенности наблюдаемых движений в скоплениях галактик, высказал гипотезу о том, что на расстояниях порядка килопарсека сила гравитационного притяжения убывает медленнее, чем это следует из закона обратных квадратов [36].

Если скопления галактик являются стационарными образованиями, то они должны отвечать известной теореме вириала $2K + U = 0$, где K — кинетическая энергия поступательных движений галактик, U — потенциальная энергия, обусловленная гравитационным притяжением между ними. Между тем применение этой теоремы к конкретным скоплениям приводит к противоречию.

Допустим, что массы и светимости галактик связаны соотношением $M_i = fL_i$, где f — коэффициент пропорциональности, имеющий приблизительно одну и ту же величину для всех галактик. Кинетическая и потенциальная энергия скопления выражаются в этом случае формулами:

$$K = \frac{1}{2} f \sum L_i v_i^2; \quad U = - \gamma f^2 \sum \frac{L_i L_j}{r_{ij}}.$$

Поэтому, согласно теореме вириала, имеем

$$f = \frac{\sum L_i v_i^2}{\gamma \sum \frac{L_i L_j}{r_{ij}}}. \quad (9,10,1)$$

Расстояние до скопления определяется по средней величине красного смещения, расстояния r_{ij} находятся путем измерения фотографии скопления, скорости отдельных галактик — по отклонениям их индивидуальных красных смещений от среднего. Полученные таким образом значения f слишком велики: в тех случаях, когда имеются непосредственные оценки масс галактик, величина этого коэффициента на один-два порядка меньше.

По мнению В. А. Амбарцумяна, этот результат свидетельствует о нестабильности скоплений. Однако быстрый разлет галактик и связанное с ним короткое время жизни скоплений (порядка нескольких сотен миллионов лет) трудно совместить с относительно большими оценками возраста отдельных галактик. Гипотеза о наличии большого количества неизлучающей материи, которая ускользает от наблюдений, но создает сильное поле тяготения в скоплении и тем самым обеспечивает его стационарность при быстрых движениях галактик, едва ли заслуживает внимания.

Для преодоления указанной трудности высказывается гипотеза о том, что на расстояниях порядка килопарсека и более формула обратных квадратов должна быть заменена законом, определяющим менее быстрое убывание силы тяготения. Такой закон предлагается в следующем виде:

$$F = -\frac{\gamma M_1 M_2}{\rho^2} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (9,10,2)$$

где ρ — характерная длина, равная $\frac{1}{2}$ килопарсека.

В случае закона (9,10,2) потенциальная энергия системы определяется формулой

$$U = -\frac{2\gamma}{\rho} \sum M_i M_j \left(\frac{\rho}{r_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq -2 \left(\frac{\bar{r}_{ij}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \sum \frac{\gamma M_i M_j}{r_{ij}},$$

где через \bar{r}_{ij} обозначено среднее расстояние между галактиками в скоплении. При этом теорема вириала имеет, как нетрудно убедиться, вид $4K + U = 0$. Произведя необходимые подстановки, получим, вместо (9,10,1),

$$f = \frac{\sum L_i v_i^2}{\gamma \sum \frac{L_i L_j}{r_{ij}}} : \left(\frac{\bar{r}_{ij}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9,10,3)$$

Как показывают измерения, отношение $\frac{\bar{r}_{ij}}{\rho}$ составляет около 4500. Поэтому для коэффициента f формула (9,10,3) позволяет получить вполне приемлемое значение.

Другой аргумент в пользу закона (9,10,2) связан с вопросом о массе Галактики. Если принять, что радиус галактической орбиты Солнца составляет $r = 8,2$ клс, а его орбитальная скорость $v = 220$ км сек⁻¹, то центральная масса, вычисленная по очевидной формуле $\frac{rv^2}{\gamma}$, равна $0,9 \cdot 10^{11} M_{\odot}$. Между тем масса Галактики,

определяемая по радиальным скоростям шаровых скоплений, достигает $2,3 \cdot 10^{11}$. Такое различие чрезмерно велико. Если же воспользоваться законом (9,10,2), то оба определения оказываются

очень близкими. Первое из них находится по формуле $\frac{1}{(\rho r)^2} v^2$ и составляет $0,2 \cdot 10^{11} M_{\odot}$, а второе уменьшается до $0,3 \cdot 10^{11} M_{\odot}$.

А. Финзи приводит также несколько других независимых соображений, которые, по его мнению, могут свидетельствовать в пользу гипотезы о более медленном убывании силы тяготения на больших расстояниях.

С точки зрения гипотезы Финзи, приходится признать, что и ОТО ограничена относительно небольшими расстояниями и не может применяться к Метагалактике.

11. Теория Биркгофа. Наряду с ОТО существуют так называемые линейные теории гравитации, развитые в рамках плоского пространства-времени. В этих теориях, опирающихся на общую с ОТО эмпирическую основу, гравитация рассматривается как особое силовое поле в пространственно-временном континууме Минковского. Несмотря на столь глубокое отличие в подходе к проблеме гравитации, линейные теории в случае достаточно слабого поля имеют много общего с ОТО и приводят к сходным с последней конечным результатам. В частности, они позволяют дать количественно правильное описание трех элементарных эффектов ОТО: движения линии апсид планетной орбиты, искривления световых лучей в поле тяготения Солнца и гравитационного смещения спектральных линий. Можно ожидать, что при изучении эффектов слабого поля гравитации линейная теория в известных пределах может оказаться эквивалентной ОТО, тогда как с усилением поля различие между этими теориями резко возрастает.

Рассмотрим один из вариантов линейной теории тяготения — теорию Биркгофа [37], в которой гравитация интерпретируется как некоторое поле в четырехмерном пространстве-времени ОТО с квадратической формой

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2. \quad (9,11,1)$$

Введем четырехмерный вектор скорости $u^i = \frac{dx^i}{ds}$, где через x^i обозначены пространственные $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ и временная $x^4 = t$ координаты. Распределение масс зададим тензором энергии-импульса

$$T^{ij} = \rho \left(u^i u^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} \right), \quad (9,11,2)$$

где ρ — плотность массы, σ^{ij} — контравариантные составляющие метрического тензора, совпадающие с коэффициентами квадратической формы (9,11,1):

$$\begin{aligned} & -1, \quad i = j = 1, 2, 3; \\ \delta^{ij} &= \delta_{ij} = +1, \quad i = j = 4; \\ & 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Закон движения частицы принимается в такой форме:

$$\frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = f^i; \quad i = 1, \dots, 4. \quad (9,11,3)$$

Здесь f^i — контравариантные компоненты четырехмерного вектора силы тяготения, отнесенного к единице объема и связанного с ковариантными компонентами обычным соотношением $f^i = \delta^{\alpha i} f_\alpha = \delta^{ii} f_i$. Вектор силы определяется в теории Биркгофа формулами

$$f_i = \rho \left(\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right) u^\alpha u^\beta, \quad (9,11,4)$$

где ρ — плотность движущейся частицы, u^i — четырехмерный вектор ее скорости. Десять симметричных величин h_{ij} образуют г р а в и т а ц и о н н ы й п о т е н ц и а л, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\square h_{ij} = 8\pi T_{ij}; \quad \square = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (9,11,5)$$

составленному по аналогии с уравнением Пуассона теории тяготения Ньютона.

Можно отметить, что, согласно принятому определению, сила, действующая на движущуюся в поле гравитации частицу, перпендикулярна к ее скорости, поскольку оба вектора отвечают условию $f_i u^i = 0$, следующему из (9,11,4).

Нетрудно убедиться в том, что при достаточно малых скоростях гравитирующих масс и пробной частицы теория Биркгофа совпадает с механикой Ньютона. Действительно, положив $u^1 \simeq u^2 \simeq u^3 \simeq 0$, $u^4 \simeq 1$, находим, что диагональные компоненты тензора

(9,11,2) одинаковы и равны $\frac{1}{2} \rho$, тогда как остальные компоненты исчезают. Такие значения имеют и ковариантные составляющие тензора энергии-импульса, вследствие чего уравнение (9,11,5) для гравитационных потенциалов переходит в уравнение Пуассона $\nabla^2 h_{ii} = -4\pi\rho$, решением которого служит обычный потенциал ϕ теории Ньютона. Компоненты h_{ij} с различными индексами, удовлетворяющие уравнению Лапласа во всем пространстве, имеют нулевые значения.

Вектор силы, действующий на пробную частицу с постоянной плотностью ρ , определяется формулой (9,11,4). Считая скорость частицы весьма малой по сравнению со скоростью света, находим $f_i = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ при $i = 1, 2, 3$ и $f_4 = 0$. Контравариантные компоненты силы отличаются от f_i знаком.

Левые части уравнений (9,11,3) приводятся к величинам

$$\rho \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} u^\alpha + \rho u^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = \rho \frac{du^i}{ds},$$

так как сумма $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha}$ при сделанных предположениях имеет нулевое значение.

Таким образом, в рассматриваемом приближении закон движения теории Биркгофа принимает вид $\frac{du^i}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$, совпадая с законом движения механики Ньютона.

12. Задача Кеплера в теории Биркгофа. Переходим к задаче о движении частицы в заданном центральном поле.

Пусть статическое поле гравитации обусловлено массой со сферическим распределением, симметричным относительно начала координат. Как и в предыдущем случае, гравитационный потенциал имеет компоненты $h_{ii} = \phi = \frac{m}{r}$, $h_{ij} = 0$, $i \neq j$. Однако теперь необходимо учитывать все четыре составляющие вектора скорости, вследствие чего выражение для компонент силы оказывается более сложным.

По формуле (9,11,4) находим

$$f_i = \rho \left[\phi u^i - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial x^i} (x^2 + y^2 + z^2) \right],$$

где точкой обозначено дифференцирование по s . При этом принято во внимание соотношение $\dot{t}^2 = 1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, непосредственно вытекающее из квадратической формы (9,11,1).

Контравариантные компоненты силы, составляющие правые части закона движения (9,11,3), связаны с ковариантными

соотношениями $f^i = \delta^{ii} f_i$. Левые части этого закона имеют вид $\rho \left(\dot{u}^i + u^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} \right)$.

Произведя необходимые подстановки, получим следующую систему уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{u}^i + u^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \dot{\Phi} u^i + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); & i = 1, 2, 3; \\ \ddot{i} + \dot{i} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} &= \dot{\Phi} \dot{i}. \end{aligned} \quad (9,12,1)$$

Покажем, что входящая в эти уравнения сумма $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha}$ имеет нулевое значение.

Умножим три первые уравнения (9,12,1) соответственно на \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} и сложим их. Принимая во внимание равенство $\dot{t}^2 = 1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ и вытекающее из него соотношение $\ddot{t} \dot{t} = \dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} + \dot{z} \ddot{z}$, найдем

$$\ddot{t} \dot{t} + \dot{t}^2 \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \dot{\Phi} \dot{t}^2.$$

Сравнивая это равенство с последним уравнением (9,12,1), получим $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$. Таким образом, движение частицы в статическом поле тяготения определяется в теории Биркгофа уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{u}^i &= \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \dot{\Phi} u^i + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); & i = 1, 2, 3; \\ \ddot{i} &= \dot{\Phi} \dot{i}. \end{aligned} \quad (9,12,2)$$

Последнее из них непосредственно интегрируется и дает

$$\frac{dt}{ds} = C e_\Phi, \quad (9,12,3)$$

где C — постоянная интегрирования.

На бесконечности, а также в отсутствие поля, когда можно положить $\Phi = 0$, частица движется без ускорения. В этих случаях, в согласии со СТО, имеем

$$\frac{dt}{ds} = \text{const} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где v — постоянная скорость частицы.

При наличии поля формула (9,12,3) показывает, что продолжительности физических явлений, в частности периоды циклических процессов, возрастают вместе с гравитационным потенциалом.

Для оценки результативности теории Биркгофа основной интерес представляет вопрос о движении линии апсид планетной орбиты. Как уже было сказано, вывод этой теории в соответствующем приближении совпадает с известным результатом ОТО.

Прежде всего заметим, что движение, определяемое тремя первыми уравнениями (9,12,2), является плоским. Действительно, если допустить, что в какой-либо момент движение происходило в плоскости xy , вследствие чего z и \dot{z} имели нулевые значения, то с помощью последнего из этих уравнений легко убедиться в том, что в указанный момент исчезали производные всех порядков переменной z . Поэтому при соответствующем выборе координат закон движения приводит к системе двух уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{mx}{r^3} - \frac{2mx}{r^3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\dot{x}r}{r^2}; \\ \ddot{y} &= -\frac{my}{r^3} - \frac{2my}{r^3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\dot{y}r}{r^2}.\end{aligned}\quad (9,12,4)$$

Найдем первые интегралы этой системы.

Умножая уравнения (9,12,4) на \dot{x} , \dot{y} и сложив их, получим

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = -\frac{mr}{r^2}(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

откуда непосредственно следует

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = Ae^{-\frac{2m}{r}} - 1, \quad (9,12,5)$$

где A — постоянная интегрирования.

Если те же уравнения умножить соответственно на $-y$, x , то после сложения получится соотношение

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{mr}{r^2}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

из которого следует обобщенный интеграл площадей

$$x\dot{y} - y\dot{x} = Be^{-\frac{m}{r}}, \quad (9,12,6)$$

где B — новая постоянная.

Перейдем к полярным координатам. Комбинируя первые интегралы (9,12,5) и (9,12,6) и вводя переменную $u = \frac{1}{r}$, нетрудно

составить дифференциальное уравнение орбиты

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = ae^{4mu} - be^{2mu}, \quad (9,12,7)$$

где для краткости принято $a = AB^{-2}$, $b = B^{-2}$.

Постоянные a , b легко выразить через параметры кеплеровой орбиты.

Сохраняя члены первого порядка относительно mu , представим уравнение (9,12,7) следующим образом:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = a - b + 2m(2a - b)u.$$

Оно совпадает с уравнением орбиты механики Ньютона

$$\left(\frac{du^2}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{e^2 - 1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho}u$$

при следующем выборе постоянных:

$$a = \frac{\rho + m(1 - e^2)}{m\rho^2}; \quad b = \frac{\rho + 2m(1 - e^2)}{m\rho^2}.$$

Для вывода релятивистского эффекта необходимо сохранить в правой части (9,12,7) члены второго порядка относительно переменной u . Выполнив соответствующее разложение, получим

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{e^2 - 1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho}u + \frac{6m}{\rho}u^2. \quad (9,12,8)$$

В принятом приближении это уравнение имеет решение

$$u = \frac{1}{\rho} + \frac{6m}{\rho^2} + \frac{l}{\rho} \cos\left(\varphi - \frac{3m}{\rho}\varphi\right)$$

и при $e < 1$ представляет собой эллипс с фокальным параметром $\rho - 6m$, эксцентриситетом $e\left(1 - \frac{6m}{\rho}\right)$ и переменной долготой перигелия, возрастающей пропорционально полярному углу. В течение одного обращения линия апсид орбиты поворачивается в прямом направлении на угол $\frac{6\pi m}{\rho}$. Таким образом, в ограниченной задаче двух тел теория Биркгофа приводит к эффекту, совпадающему с известным выводом ОТО, и в данном приближении не содержит других вековых эффектов.

Следует, однако, заметить, что результаты обеих теорий совпадают только в ограниченной задаче, когда масса движущейся частицы пренебрежима по сравнению с массой центрального тела. В общей задаче двух тел такого совпадения нет.

Формула теории Биркгофа в этом случае такова:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi (3m_1^2 + 7m_1m_2 + 3m_2^2)}{(m_1 + m_2)\rho},$$

тогда как ОТО приводит к величине

$$\Delta\omega = \frac{6\pi (m_1 + m_2)}{\rho}.$$

В случае одинаковых масс эти величины относятся как 13 : 12.

К сожалению, в настоящее время невозможно установить, какое из этих определений лучше отвечает действительности, поскольку наблюдения не позволяют обнаружить столь тонких эффектов в движении двойных звезд.

13. Оптические эффекты в теории Биркгофа. Распространение света в поле тяготения определяется в рассматриваемой теории законом движения (9,12,2) и условием $ds = 0$, отвечающим требованию СТО. Имея в виду случай центральносимметричного поля, воспользуемся уравнениями движения в форме (9,12,4), поскольку световой луч в таком поле является плоской кривой. Преобразуем эти уравнения, рассматривая пространственные координаты как функции временной переменной t .

С помощью соотношений

$$\dot{x} = Ce^{\frac{m}{r}} \frac{dx}{dt}; \quad \ddot{x} = C^2 e^{\frac{2m}{r}} \left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{m}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dx}{dt} \right),$$

которые непосредственно вытекают из (9,12,3), приведем первое из уравнений движения к следующему виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mx}{r^3} C^{-2} e^{-\frac{2m}{r}} - \frac{2mx}{r^3} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] + \frac{2m}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dx}{dt}.$$

Для перехода к пределу при $ds \rightarrow 0$ достаточно положить $C \rightarrow \infty$ и $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \rightarrow 1$. Следовательно, распространение света в центральном поле определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{2mx}{r^3} + \frac{2m}{r^3} \frac{dr}{dt} \frac{dx}{dt}; \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{2my}{r^3} + \frac{2m}{r^3} \frac{dr}{dt} \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \tag{9,13,1}$$

Первыми интегралами этой системы служат равенства

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 1; \quad xy - y\dot{x} = Ae^{-\frac{2m}{r}},$$

позволяющие составить дифференциальное уравнение луча. В полярных координатах это уравнение имеет вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = A^{-2}e^{4mu}, \quad (9,13,2)$$

представляя в первом приближении коническое сечение.

Обозначив через p и e фокальный параметр и эксцентриситет конического сечения, легко найдем

$$A^2 = 2mp; e^2 = \frac{p}{2m}, \quad (9,13,3)$$

убедившись в том, что луч имеет форму гиперболы с весьма большой эксцентрисичностью. Расстояние от центра поля до ближайшей точки луча составляет $\frac{p}{e} = A$.

Искривление луча определяется углом между асимптотами гиперболы, равным $\frac{2}{e}$. С помощью (9,13,3) находим $\Theta = \frac{4m}{A}$, что совпадает с известной формулой ОТО.

Остается составить формулу, определяющую гравитационное смещение спектральных линий.

Пусть источник излучения находится в точке с потенциалом φ , а наблюдатель расположен вне поля. Согласно общему уравнению (9,12,3), частоты излучения в соответствующих точках поля удовлетворяют соотношениям: $\frac{1}{\nu} \sim Ce^{\varphi}$; $\frac{1}{\nu_0} \sim C$. Следовательно, $\frac{\nu}{\nu_0} = e^{-\varphi}$. Переходя к единицам CGS, в первом приближении получим

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right), \quad (9,13,4)$$

что также совпадает с соответствующим эффектом ОТО.

Итак, все три доступные непосредственному наблюдению релятивистских эффекта, составляющие до сих пор единственное средство прямой проверки ОТО, получают простое объяснение и в линейной теории гравитации Биркгофа. В этом отношении обе теории равноценны, хотя по физическому содержанию они глубоко различны.

14. Заключение. Современное состояние проблемы гравитации отличается большим своеобразием. Как и другие разделы теоретической физики, теория гравитационного поля в принципиальном отношении подвергалась в последние десятилетия коренной перестройке. Вместе с тем для подавляющего большинства ее приложений полностью сохранил значение классический закон тяготения Ньютона, открытый около трех столетий тому назад. Наряду с общими законами динамики он составляет основу небесной механики, которая позволяет с большой точностью объяснить и предвычислить

движения естественных и искусственных небесных тел. Тот же классический аппарат механики Ньютона применяется в современной звездной динамике, в разнообразных задачах астрофизики, в теории внутреннего строения звезд, в проблемах геодезии, геологии и геофизики и во многих других областях естествознания. Все попытки улучшить форму закона тяготения, обнаружить влияние промежуточной среды или найти удовлетворительное механическое объяснение гравитации оказались, как мы видели, безрезультатными. В приложениях основы теории тяготения Ньютона остались неизменными, тогда как принципиальные трудности этой теории еще более обострились и стали несовместимыми с общепринятыми физическими воззрениями, особенно со СТО.

Важным шагом в развитии теории гравитации была работа А. Пуанкаре, который показал, что корректное релятивистское обобщение закона тяготения, отвечающее требованиям СТО, должно отличаться от обычной формулы Ньютона величиной не ниже второго порядка относительно $\frac{x}{c}$. Таким образом, установлено, что в пределах точности, принятой в небесной механике и в других приложениях, закон обратных квадратов Ньютона сохраняет значение и при отказе от гравитационного дальнего действия.

Современной теорией гравитации является ОТО, в которой гравитационное поле описывается метрикой пространственно-временного континуума. Вопрос о природе сил тяготения, который в дорелятивистской физике был центральной проблемой теории тяготения, в ОТО утратил всякое значение, поскольку гравитационные взаимодействия получили в ней принципиально новое истолкование, не нуждающееся в понятии силы в ньютоновском смысле. ОТО позволила преодолеть основные принципиальные трудности механики Ньютона и обосновать применимость последней при изучении медленных движений в относительно слабых полях гравитации. В то же время результативность ОТО в конкретных задачах оказалась, как известно, крайне ограниченной: существуют лишь три простых эффекта этой теории, допускающие ныне проверку путем непосредственных наблюдений. Необходимо при этом иметь в виду, что указанные эффекты получают количественное объяснение и в других теориях тяготения, например в линейной теории Биркгофа.

Значение ОТО далеко не исчерпывается преодолением принципиальных трудностей механики Ньютона и открытием трех гравитационных эффектов, неизвестных в дорелятивистской физике. Еще большее значение имеет новый подход к проблеме тяготения: отождествление гравитационного поля с метрикой пространства-времени и открытие связи между этой метрикой и распределением материи. Особенно важно то обстоятельство, что ОТО

применима в более широких условиях, чем теория тяготения Ньютона. Последняя применима только к слабым полям, для которых $\frac{\Phi}{c^2} \ll 1$. Как известно, это требование в обычных условиях выполняется с большой точностью, обеспечивая почти универсальную применимость теории Ньютона и малость релятивистских эффектов. Значительные отступления от этой теории возможны лишь в случае достаточно сильных полей. Как мы видели, такие поля гравитации присущи, например, сверхплотным звездным конфигурациям и Метагалактике в целом. В сильных полях ОТО должна приводить к принципиально новым результатам, которые даже качественно не могут содержаться в теории тяготения Ньютона.

Итак, ценность ОТО как теории гравитации обусловлена ее применимостью в условиях, когда механика Ньютона оказывается непригодной. При этом чем сильнее изучаемое поле гравитации, тем большую роль играет точная форма уравнений поля ОТО. Если, например, при выводе известного эффекта в движении линии апсид планетной орбиты метрический тензор достаточно задать с точностью до членов второго порядка, то понятие гравитационного радиуса частицы представляет собой следствие точного решения Шварцшильда. Поэтому при изучении сильных полей необходимо иметь в виду, что уравнения поля не могут быть однозначно выведены из физических предпосылок ОТО (см. главу V, 6), вследствие чего к точной форме этих уравнений, найденной Эйнштейном в значительной степени эвристически, следует относиться с осторожностью. Необходимо также помнить о том, что принцип эквивалентности и основанный на нем релятивистский подход к проблеме гравитации возникли при изучении *слабых* полей — земного притяжения, поля тяготения Солнца и т. п. Сохранение этого подхода в случае *сильных* гравитационных полей остается в настоящее время только экстраполяцией, поскольку оно не подтверждено непосредственными данными опыта.

Обладая по сравнению с механикой Ньютона большими преимуществами, ОТО не является, однако, законченной теорией гравитации и нуждается в разработке некоторых принципиальных вопросов. Важнейшим из них является вопрос о природе поля гравитации, в частности проблема энергии и импульса поля, гравитационных волн и гравитационного излучения. По мнению автора, этот фундаментальный вопрос не может быть убедительно разрешен в рамках существующей ОТО, ибо последняя, как и теория тяготения Ньютона, построена чисто феноменологически. Еще больший интерес представило бы открытие связи между гравитацией и электромагнетизмом. К сожалению, предлагавшиеся до сих пор варианты единой теории поля имеют только математическое значение и не содержат новых физических идей. По-видимому, успех в этом

направлении может быть достигнут лишь в том случае, если между гравитацией и электромагнетизмом будет установлена какая-либо эмпирическая взаимозависимость, найти которую стремился еще М. Фарадей. Можно думать, что с указанными вопросами связана и проблема квантования гравитации, поскольку попытки построить квантовую теорию тяготения по аналогии с материальными полями оказались неудачными.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Широков.— В кн.: Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии. «Наукова думка», К., 1965.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, гл. XI. Физматгиз, М., 1962.
3. А. З. Петров.— В кн.: Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии. «Наукова думка», К., 1965.
4. L. Rosenfeld.— Zeitschr. Phys., 65, 589, 1930.
5. М. Бронштейн.— Журн. эксперимент. теоретич. физики, 6, в. 3, 195, 1936.
6. P. G. Bergmann.— Phys. Review, 75, 680, 1949.
7. S. Gupta.— Proceedings Phys. Soc., A 65, 161, 608, 1952.
8. J. A. Wheeler.— Annales Physics, 2, 604, 1957.
9. H. Weyl.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 465, 1918; Mathem. Zeitschr., 2, 384, 1918; Annal. Phys., 59, 101, 1919; Raum — Zeit — Materie, Berlin, 1920; Gött. Nachricht., 99, 1921.
10. A. Eddington.— Proceed. Roy. Soc., 99, 104, 1921; Mathematical Theory of Relativity. Oxford, 1924.
11. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 32, 76, 137, 1923. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 2, 134, 142, 145. «Наука», М., 1966.
12. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 414, 1925. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 2, 171. «Наука», М., 1966.
13. Th. Kaluza.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 966, 1921.
14. V. Klein.— Zeitschr. Phys., 37, 855, 1926; 46, 188, 1927.
15. W. Vock.— Zeitschr. Phys., 39, 226, 1926.
16. H. Mandel.— Zeitschr. Phys., 45, 285, 1927; 54, 564, 1929; 54, 567, 1929; 56, 838, 1929.
17. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 217, 1928. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 2, 223. «Наука», М., 1966.
18. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 224, 1928. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 2, 229. «Наука», М., 1966.
19. T. Levi-Civita.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 156, 1929; 401, 1930.
20. W. Mayer.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 110, 1930; 257, 1931.
21. P. Straupe.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 110, 1930; 257, 319, 1931. Lincei Rend., 13, 695, 770, 1931; 15, 462, 1932.
22. A. Einstein, W. Mayer.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 541, 1931; 130, 1932. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 2, 366, 387. «Наука», М., 1966.
23. A. Einstein. The Meaning of Relativity. Princeton, 1953. Русск. пер.: А. Эйнштейн. Сущность теории относительности. ИЛ, М., 1955; Собр. научн. трудов, 2, 762. «Наука», М., 1966.
24. P. A. M. Dirac.— Nature, 139, 323, 1937; Proceed. Roy. Soc., A165, 199, 1938.

25. P. J o r d a n. *Schwerkraft und Weltall*. Braunschweig, 1955; *Zeitschr. Phys.*, **157**, 112, 1959.
26. Г. С. С а а к я н, М. А. М н а ц а к а н я н.— *Астрофизика*, **4**, в. 4, 1968.
27. R. H. D i c k e.— *American Scientist*, **47**, 25, 1959.
28. С. В r a n s, R. H. D i c k e.— *Phys. Review*, **124**, 925, 1961.
29. Г. С. С а а к я н, М. А. М н а ц а к а н я н.— *Астрофизика*, **3**, в. 3, 311, 1967.
30. *Gravitation and Relativity*. New-York — Amsterdam, 1964. Русск. пер.: *Гравитация и относительность*. «Мир», М., 1965.
31. А. Б о г о р о д с к и й.— *Вестник КГУ*, № 11, серия астрономии, **3**, 1969.
32. В. А. А м б а р ц у м я н.— *Астрон. журн.*, **14**, 207, 1937; *Научные труды*, **1**, 142. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1960.
33. P. J o r d a n.— *Review Modern Physics*, **34**, 596, 1962. Русск. пер. в кн.: *Гравитация и топология*, 293, «Мир», М., 1966.
34. R. M. D i c k e.— *Science*, **138**, 653, 1962.
35. А. В. М а н д ж о с.— *Астрофизика*, **5**, 649, 1969.
36. A. F i n z i.— *Month. Not. Roy. Astron Soc.*, **127**, N 1, 21, 1963.
37. G. D. B i r k h o f f.— *Proceed. Nation. Acad. Scien.*, **29**, 231, 1943; **30**, 324, 1944. В а г а j a s, B i r k h o f f, G r a e f, V a l l a r t a.— *Phys. Review*, **66**, 138, 1944. А. В а г а j a s.— *Proceed. Nation. Acad. Scien.*, **30**, 54, 1944.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
<i>Глава I. Закон тяготения Ньютона</i>	9
1. Введение	9
2. Закон тяготения Ньютона как следствие законов Кеплера	11
3. Тяготение и тяжесть	14
4. Равенство инертной и тяжелой масс	16
5. Гравитационный потенциал	21
6. Небесная механика	23
7. Принципиальные недостатки теории Ньютона	28
8. Попытки механического объяснения тяготения	30
Литература	34
<i>Глава II. Попытки уточнения закона Ньютона</i>	35
1. Закон тяготения в форме Клеро	35
2. Закон тяготения в форме $\frac{\gamma M}{r^2} e^{-hr}$	38
3. Закон тяготения Холла	40
4. Отказ от принципа дальнего действия	42
5. Поглощение гравитации	48
6. Формула Майораны	49
7. Нарушение третьего закона Кеплера	51
8. Суточная вариация силы тяжести	51
9. Вариация силы тяжести во время солнечного затмения	52
10. Влияние поглощения гравитации на приливы	55
Литература	58
<i>Глава III. Развитие закона тяготения до создания общей теории относительности</i>	59
1. Закон движения в специальной теории относительности	59
2. Задача Кеплера	61
3. Обобщение закона тяготения Ньютона	62
4. Принцип эквивалентности	66
5. Теория Абрагама	68
6. Теория Нордстрема	71
7. Теория Нордстрема (продолжение)	76
8. Теория Эйнштейна — Гроссмана	79
Литература	81
<i>Глава IV. Тензорный анализ и геометрия Римана</i>	82
1. Эвклидово пространство в криволинейных координатах	82
2. Тензоры и их свойства	87
3. Параллельный перенос тензора	89
4. Геометрия Римана	94
5. Соприкасающееся пространство Эвклида	95
6. Ковариантное дифференцирование	103

7. Кривые в пространстве Римана	107
8. Тензор кривизны	110
9. Тензор Риччи	114
10. Кривизна пространства Римана	117
11. Сигнатура квадратической формы	120
Литература	121
<i>Глава V. Общая теория относительности</i>	<i>122</i>
1. Принцип эквивалентности	122
2. Обобщение принципа эквивалентности	128
3. Принцип относительности	129
4. Тензор энергии-импульса	131
5. Уравнения поля ОТО	136
6. Неоднозначность уравнений поля	143
7. Другая форма уравнений поля	148
8. Внешнее решение Шварцшильда	152
9. Внутреннее решение Шварцшильда	157
10. Решение Эйнштейна для слабого поля	161
11. Решение уравнений поля для системы точечных масс	163
12. Уравнения поля во втором приближении	168
13. Определение величин h_{ij}	172
14. Определение величин k_{ij}	176
15. Скорость передачи гравитации	179
16. Внешнее решение для однородного вращающегося шара	181
17. Поле тяжести в ОТО	185
Литература	189
<i>Глава VI. Основные следствия общей теории относительности</i>	<i>191</i>
1. Задача Кеплера	191
2. Исследование орбит	195
3. Приближенное уравнение орбиты	205
4. Движение спутника вращающейся планеты	208
5. Задача двух тел в общей теории относительности	212
6. Распространение света в центральном поле гравитации	213
7. Принцип Доплера	222
8. Общая теория относительности и система Коперника	227
9. Импульс и энергия поля гравитации	231
10. Гравитационные волны	239
Литература	245
<i>Глава VII. Строение звезд</i>	<i>246</i>
1. Фигуры равновесия тяжелой жидкости	246
2. Политропные газовые шары	252
3. Условия внутри звезд	257
4. Уравнения строения звезды	266
5. Строение звезд главной последовательности	271
6. Белые карлики	274
7. Строение белых карликов	276
8. Сверхплотные звездные конфигурации	280
9. Гравитационный коллапс	284
Литература	287
<i>Глава VIII. Космология</i>	<i>288</i>
1. Космологические парадоксы	288
2. Вселенная Ламберта — Шарлье	292
3. Гравитационный парадокс и общая теория относительности	294
4. Космологические модели Эйнштейна и Де Ситтера	296

5. Решение А Фридмана	301
6. Расширяющаяся вселенная Леметра	303
7. Нестатическая модель Эйнштейна	307
8. Общая нестатическая модель	309
9. Сравнение космологических моделей с наблюдениями	315
Литература	318
<i>Г л а в а IX. Некоторые вопросы дальнейшего развития теории гравитации</i>	
1. Природа поля гравитации	319
2. Квантование гравитации	322
3. Единые теории поля	323
4. Переменная гравитация	324
5. Эволюция звезд главной последовательности	326
6. Белые карлики	328
7. Время релаксации системы двойных звезд	329
8. Расширение Земли	332
9. Космология Дирака — Иордана	333
10. Новые попытки изменить закон Ньютона	335
11. Теория Биркгофа	337
12. Задача Кеплера в теории Биркгофа	339
13. Оптические эффекты в теории Биркгофа	343
14. Заключение	344
Литература	347

АЛЕКСАНДР ФЕДОРОВИЧ БОГОРОДСКИЙ

Всемирное тяготение

*Публикуется по постановлению Ученого совета
Главной астрономической обсерватории АН УССР*

Редакторы *Т. З. Сардак, Н. Я. Соколова*
Художественный редактор *К. Г. Лычаковский*
Оформление художника *Р. К. Пахольюка*
Технический редактор *М. А. Притыкина*
Корректор *Л. М. Тищенко*

Сдано в набор 14.XII — 1970 г. Подписано к печати
27.V — 1971 г. БФ 03773. Зак. № 270. Изд. № 228.
Тираж 1500 Бумага № 1, 60×90^{1/16}. Условн. печ. лян-
стов 22,0. Учетно-издат. листов 22,6. Цена 2 руб. 52 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Напечатано с матриц Киевского полиграфического ком-
бината на книжной Ф-ке «Октябрь» Комитета по печа-
ти при Совете Министров УССР, Киев, ул. Артема, 23а.