

ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ
И ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ

В. Л. БОНЧ-БРУЕВИЧ, И. П. ЗВЯГИН,
А. Г. МИРОНОВ

ДОМЕННАЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ
НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
В ПОЛУПРОВОДНИКАХ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках.
В. Л. Бонч-Бруевич, И. П. Звягин, А. Г. Миронов. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972 г.

Книга посвящена изложению современных представлений о доменной электрической неустойчивости, возникающей при определенных условиях в полупроводниках с горячими электронами. Это явление, открытое и исследованное в последние семь лет, вызывает широкий интерес как в связи с возможными практическими приложениями (генераторы Ганна и т. п.), так и в принципиальном отношении: речь идет здесь о поведении существенно неравновесной макроскопической системы. В книге рассматриваются механизмы, ответственные за возникновение электрических доменов и токовых шнуров, сообщаются необходимые сведения из теории горячих электронов в полупроводниках (в том числе и пространственно неоднородных), подробно излагаются основы теории доменов и шнуров. В частности, изучается флуктуационная и статическая устойчивость полупроводника с горячими электронами, причем даются явные критерии абсолютной и конвективной неустойчивости применительно к рассматриваемой системе. Исследуются статические неоднородные распределения электрического поля («статические домены»); решается задача о стационарном движении доменов и шнуров; вычисляется импеданс образца, содержащего покоящиеся или движущиеся домены или токовые шнуры. Одна глава посвящена физике звуко-электрических доменов, возникающих в условиях усиления звука электронным потоком в полупроводниках — пьезоэлектриках. Дается сравнение теории с опытом.

Книга рассчитана на научных работников и студентов-физиков (теоретиков и экспериментаторов), а также на радиоинженеров, интересующихся полупроводниковой электроникой.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список основных обозначений	7
Введение	9

ГЛАВА I

ПОЛУПРОВОДНИКИ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

§ 1. Некоторые опытные факты	14
§ 2. Дифференциальная проводимость	18
§ 3. Полупроводники с несколькими экстремумами	24
§ 4. Концентрационная нелинейность	31
§ 5. Перегревные механизмы	38
§ 6. Механизм температурно-электрической неустойчивости	44
§ 7. Флуктуации в пространственно однородной системе с отрицательной дифференциальной проводимостью	49

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТЫ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Функция распределения и кинетические коэффициенты	59
§ 2. Кинетическое уравнение	61
§ 3. Уравнения непрерывности	66
§ 4. Плотность тока	72
§ 5. Роль межэлектронных столкновений. Два предельных случая	78
§ 6. Локальные аппроксимации	82
§ 7. Внутреннее поле. Граничные условия	96

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ СЛАБОГО СИГНАЛА

§ 1. Электрическая устойчивость цепи	105
§ 2. Малые отклонения от однородности	107
§ 3. Импеданс образца	113
§ 4. Флуктуационная неустойчивость	124

§ 5.	Абсолютная и конвективная неустойчивость	130
§ 6.	Флуктуационная устойчивость в системе с электронной температурой	138

ГЛАВА IV

СТАТИЧЕСКИЕ ДОМЕНЫ

§ 1.	Введение. Основные уравнения	142
§ 2.	Пространственно однородное решение	146
§ 3.	Затравочные неоднородности	148
§ 4.	Критерий статической устойчивости	151
§ 5*.	Биполярный случай	158
§ 6*.	Возможность пространственно неоднородных решений. Гистерезис	161
§ 7*.	Статические домены в коротких образцах	168
§ 8.	Статические домены в длинных образцах	173
§ 9*.	Метод «псевдокатода»	188

ГЛАВА V

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДОМЕНОВ

§ 1.	Постановка задачи	196
§ 2.	Риманово решение	200
§ 3.	Дрейфовая нелинейность (качественное исследование). Условия существования периодических решений	206
§ 4.	Форма домена. Правило площадей	217
§ 5.	Вольтамперная характеристика образца с доменом. Некоторые возможные приложения	226
§ 6*.	Нелинейные волны малой амплитуды	234
§ 7.	Рекомбинационная нелинейность. Качественное исследование модели с одним типом ловушек	239
§ 8*.	Форма рекомбинационного домена	246
§ 9.	Влияние прилипания на характеристики рекомбинационных доменов	251

ГЛАВА VI

ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫЕ СОСТОЯНИЯ
ПОЛУПРОВОДНИКА С S-ОБРАЗНОЙ
ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

§ 1.	Вводные замечания и основные уравнения	256
§ 2*.	Дисперсионное уравнение для волн малой амплитуды. Приближение несжимаемого электронного газа	259
§ 3.	Токовые слои и шнуры	262
§ 4.	Некоторые особенности поведения полупроводников с S-образной вольтамперной характеристикой	267

ГЛАВА VII

**УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ
РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОЛЯ И ЗАРЯДА.
ИМПЕДАНС СИСТЕМЫ С ДОМЕНАМИ**

§ 1.	Введение	271
§ 2.	Малые флуктуации в образце с доменами	273
§ 3.	Устойчивость стационарного движения доменов	283
§ 4*.	Абсолютная и конвективная неустойчивость системы с движущимися доменами	291
§ 5.	Гистерезис, связанный с образованием стационарно движущегося домена. Усиление	296
§ 6*.	Резонансные свойства образца с доменами	299
§ 7*.	Устойчивость стационарно движущихся доменов относительно вариации граничных условий	304
§ 8.	Устойчивость статических доменов	307
§ 9.	Устойчивость токовых слоев и шнуров	314
§ 10.	Режим ограниченного накопления объемного заряда	319

ГЛАВА VIII

ЗВУКОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ДОМЕНЫ

§ 1.	Введение. Некоторые экспериментальные данные	327
§ 2.	Возможные механизмы отрицательной дифференциальной проводимости	330
§ 3.	Гидродинамическое приближение	332
§ 4.	Пространственно однородное решение	339
§ 5.	Статическое распределение силы звука в макроскопически однородных образцах	341
§ 6.	Статическая устойчивость пространственно однородного распределения силы звука	343
§ 7.	Стационарное движение звукоэлектрических доменов	345
§ 8.	Нестационарные решения	350

ГЛАВА IX

**НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ
ДОМЕНОВ**

§ 1.	Нерешенные задачи	354
§ 2.	Нелокальная трактовка задачи о малых флуктуациях вблизи пространственно однородного состояния	356
§ 3.	Доменные и шнуровые распределения различных физических величин	358

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Распространение низкочастотной электромагнитной волны в пространственно однородной среде с отрицательной дифференциальной проводимостью	365
II. Распределение температуры и концентрации в полупроводнике в условиях температурного гашения фотопроводимости	368
III. Формула для плотности тока при произвольном виде изоэнергетических поверхностей	370
IV. Кинетическое уравнение в слабом внешнем поле при наличии тонкого контакта	372
V. Оператор, сопряженный с $\hat{\mathcal{L}}$	377
VI. Некоторые сведения из качественной теории дифференциальных уравнений	378
VII. Вычисление инкремента нарастания малых флуктуаций в бесконечно длинном образце с широким доменом	394
Литература	399
Предметный указатель	413

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- a — величина, определяющая «перенормировку» подвижности носителей за счет термоэлектрического тока, $a = (\mu^* - \mu) / (\rho - \rho_0)$
 $a = ql_D$ — (гл. VIII)
 c — модуль упругости (гл. VIII)
 $c(E)$ — коэффициент захвата носителей заряда в электрическом поле напряженности E
 c_0 — равновесное значение коэффициента захвата
 d — ширина домена
 D — коэффициент диффузии носителей заряда
 e — заряд носителя
 E — напряженность электрического поля
 E_i ($i = 1, 2, \dots$) — величина напряженности поля в i -й особой точке
 E_p, E_v — величины напряженности поля в максимуме и в минимуме вольтамперной характеристики однородного образца
 E_{th} — пороговое значение напряженности электрического поля
 \mathcal{E} — эдс в цепи, содержащей образец
 f, f_s, f_a — функция распределения носителей заряда, ее симметричная и антисимметричная (по импульсам) части
 j — плотность тока, связанного с переносом частиц
 j_p, j_v — величина плотности тока в максимуме и в минимуме вольтамперной характеристики однородного образца (рис. 3)
 j_s — плотность тока насыщения
 j_{ac} — плотность звукоэлектрического тока
 $J = j + \frac{e}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}$ — плотность полного тока
 l — длина свободного пробега по импульсу
 $l_D = \sqrt{\frac{\epsilon D}{4\pi en\mu}}$ — длина Дебая
 $l_{эн}$ — длина свободного пробега по энергии
 L — длина образца
 m — эффективная масса носителя заряда
 $n = \rho_e/e$ — концентрация свободных носителей заряда
 $n_t = \rho_t/e$ — концентрация связанных носителей заряда
 n_1 — величина, имеющая размерность концентрации и равная $(N - n_{t0})/n_{t0}$ в отсутствие оптической генерации
 N — концентрация центров захвата
 $N^0, N^-, N^=, \dots$ — концентрации нейтральных, одно-, дву-...кратно заряженных центров
 N_d — концентрация мелких доноров

- p — квазимпульс носителей заряда
 p — надкритичность (VIII. 3.9)
 P — мощность, теряемая носителями заряда в единице объема
 q — плотность потока энергии
 q — волновой вектор фонона
 R — сопротивление нагрузки
 s — скорость звука
 T — температура носителей (в энергетических единицах), определяемая через их среднюю энергию
 T_0 — температура носителей заряда, отвечающая пространственно однородному их распределению
 T_l — температура решетки
 T — период колебаний, связанных с движением доменов
 u_0 — скорость стационарно движущегося домена
 V — напряжение, приложенное к образцу
 W — плотность потока звуковой энергии (сила звука)
 W — энергия носителя заряда, отсчитанная от соответствующего края зоны
 $z = x - u_0 t$
 $Z(\omega)$ — дифференциальный импеданс
 α — термо-эдс носителей заряда
 $\alpha = \alpha_e + \alpha_i$ — коэффициент поглощения звука
 α_e — электронный коэффициент поглощения звука
 α_i — решеточный коэффициент поглощения звука
 β — пьезомодуль
 ϵ — диэлектрическая проницаемость
 $\eta = 4\pi\beta^2/\epsilon c$ — безразмерная постоянная пьезовзаимодействия
 θ — коэффициент, имеющий смысл средней энергии, переносимой одной частицей в потоке

$$\Theta = \int \kappa(T') dT'$$
 $\kappa = \chi\omega/c$ — безразмерный коэффициент вязкости
 κ — теплопроводность газа носителей
 κ_l — теплопроводность решетки
 μ — подвижность носителей заряда
 $\mu^* = \mu + a(\rho - \rho_0)$ — подвижность, «перенормированная» с учетом термоэлектрического тока
 $v(E) = c(E)/c_0$
 ρ — плотность пространственного заряда носителей
 ρ_e — плотность подвижного заряда
 ρ_l — плотность связанного заряда
 ρ_0 — плотность компенсирующего заряда
 σ — дифференциальная проводимость
 τ — время свободного пробега по импульсу
 τ_c — время захвата (IV. 1.12)
 τ_g — время генерации (IV. 1.13)

$$\tau_M = \frac{\epsilon}{4\pi n_0 \mu_0}$$
 — максвелловское время релаксации
 χ — коэффициент вязкости решетки

ВВЕДЕНИЕ

Явление доменной электрической неустойчивости, обнаруженное и подробно исследованное в последние годы, вызывает интерес с нескольких точек зрения.

Во-первых, оно дает давно искавшийся и принципиально простой способ преобразования электромагнитной энергии с помощью полупроводников, не содержащих ни электронно-дырочных переходов, ни каких-либо других искусственно созданных макроскопических неоднородностей. С точки зрения радиотехники образец, в котором имеются покоящиеся или движущиеся домены, представляет собой систему с существенно нелинейной вольтамперной характеристикой. В зависимости от условий опыта здесь возможны генерация и усиление электромагнитных колебаний, стабилизация тока, эффекты «памяти» и т. д. Соответственно велико прикладное значение явления. Особый интерес в этой связи вызывает доменная неустойчивость в арсениде галлия и некоторых других материалах («эффект Ганна»), ибо здесь оказываются достижимыми довольно высокие частоты колебаний (вплоть до 10^2 ГГц) и сравнительно большая мощность генерации (например, на частоте 1,5 ГГц достигнута импульсная мощность 3,1 кВт при КПД 9,5% [20]).

Во-вторых, механизмы, ответственные за возникновение доменной неустойчивости, отражают те или иные специфические особенности твердого тела. Последние могут быть связаны или со своеобразным видом закона дисперсии носителей заряда, или с особым характером процессов захвата и генерации их, или, наконец, со спецификой процессов обмена энергией между различными степенями свободы твердого тела. По этой причине исследование доменной неустойчивости представляет интерес и с точки зрения физики твердого тела как таковой.

Наконец, в-третьих, мы имеем здесь случай, когда физика вплотную столкнулась со свойствами существенно неравновесной макроскопической системы. Как и следовало ожидать, эти свойства оказались отнюдь не тривиальными и не всегда привычными. Выяснилось, что здесь имеется гораздо большее разнообразие свойств (следовательно, и возможностей управления процессами), чем в условиях, близких к равновесию. Не лишне заметить в связи с этим, что явление доменной неустойчивости, открытое при исследовании электрических свойств полупроводников, по-видимому, вовсе не ограничено названной областью, а носит гораздо более общий характер. Соответственно исследование рассматриваемого явления представляет и известный принципиальный, общефизический интерес.

Насколько нам известно, первое ясное утверждение об образовании статических доменов в условиях, когда вольтамперная характеристика соответствующего однородного образца содержит падающий участок, можно найти в работах [1, 2]; в них рассматривалась конкретная модель, предложенная для описания электронных процессов в сульфиде кадмия. В работах [3] было обращено внимание на возможную флуктуационную неустойчивость пространственно однородного распределения электрического поля и заряда при отрицательной дифференциальной проводимости.

Первая четкая формулировка представления о движении доменов в направлении дрейфа основных носителей и об универсальности этого явления была дана, насколько нам известно, в работе [4].

Нелинейная трактовка задачи о стационарном движении доменов была впервые предложена в работах [5—7].

Колебания тока в образцах германия с золотом, впоследствии объясненные с помощью представления о движении доменов, были, по-видимому, впервые описаны в работах [8, 9].

Первые прямые наблюдения движения доменов в электронном германии с золотом и в проводящем и полупроводящем арсениде галлия содержатся соответственно в работах [10—12].

Эта книга возникла как развитие небольшого курса лекций, прочитанного одним из нас осенью 1967 г. в Мо-

сковском университете и весной 1969 г. в Киевском университете. Первоначально имелась в виду полная монография, в которой были бы отражены все указанные выше стороны дела. Быстро выяснилось, однако, что такая попытка была бы столь же рискованной, сколь и бессмысленной. Рискованной — потому, что исследование прикладного аспекта явления превратилось сейчас, в сущности, в самостоятельный раздел радиофизики, в котором авторы никак не могут считать себя специалистами. Бессмысленной — потому, что за время, требуемое для написания одного параграфа, в наши дни появляется больше работ, чем в нем можно отразить *). Вместе с тем суть дела сейчас, по-видимому, уже выяснена с известной степенью законченности. По этой причине было решено ограничиться рассмотрением физической картины и математической теории явления в наиболее простых условиях: в однородных материалах в отсутствие магнитного поля.

Авторы стремились к тому, чтобы книгу можно было читать, не обращаясь к дополнительной литературе. В связи с этим в нее включены необходимые сведения из кинетической теории, а также из качественной теории дифференциальных уравнений. Лицам, желающим получить лишь общее представление о явлении доменной неустойчивости и о возможных его приложениях, достаточно ознакомиться лишь с главой I и §§ 1—3 главы III. Глава II содержит материал, владение которым необходимо для ясного понимания постановки задачи в современной математической теории электрических доменов, равно как и для понимания пределов применимости последней. Эта теория излагается в главах III—VII с расчетом как на теоретиков, так и на экспериментаторов в данной области. Звездочками в оглавлении отмечены параграфы этих глав, которые при первом чтении можно пропустить. Главы VIII и IX охватывают наименее «устоявшиеся» вопросы теории доменов; последняя из них рассчитана в основном на теоретиков. При первом

*) Отметим, что, помимо оригинальных статей, число которых лавинообразно нарастает (см., например, библиографию [13]), уже появилось и несколько обзоров как физического [14—16], так и более прикладного [17—19] характера.

чтении обе эти главы можно опустить (гл. VIII — если читатель не интересуется специально звукоэлектрическими явлениями в полупроводниках).

Списки литературы к каждой главе отнюдь не носят исчерпывающего характера: указаны лишь те работы, которые были фактически использованы при составлении текста.

Все уравнения в книге пишутся для носителей заряда положительного знака. В случае униполярной проводимости это обычно не может повести к недоразумениям, если только помнить о необходимости в нужный момент изменить знак дрейфовой скорости (или подвижности) при переходе к образцу n -типа. Исключение составляет лишь § 5 главы IV, где рассматривается биполярная задача — в этом случае электронам и дыркам приписываются свойственные им знаки заряда. По повторяющимся векторным индексам α , β , ... производится суммирование, если не оговорено обратное.

Мы пользуемся гауссовой системой единиц. Постоянная Больцмана полагается равной единице, так что температура имеет размерность энергии. Площадь сечения образца также считается единичной. К сожалению, несмотря на эту экономию, букв все равно не хватило и неизбежным злом оказалось употребление одинаковых символов для различных величин. По возможности мы старались избежать путаницы, употребляя такие символы возможно дальше друг от друга в тексте. Для облегчения судьбы читателя в книге помещен список основных обозначений. Ссылки на параграфы и формулы в пределах одной главы даются с указанием лишь их номера (например, § 3, формула (3.2)). При ссылках на параграфы и формулы других глав добавляется (римской цифрой) номер главы (например, формула (2.3) главы III обозначается так: (III.2.3), а § 7 главы V — так: § V.7).

* * *

Эту книгу оказалось возможным написать только благодаря широкой постановке исследований доменной неустойчивости, проводившихся в Московском университете и в ИРЭ АН СССР под руководством С. Г. Калашникова и В. С. Вавилова. Им, а также М. С. Кагану,

И. А. Куровой и Ю. Ф. Соколову мы признательны за обсуждение ряда аспектов теории доменов и экспериментальных результатов.

Авторы очень благодарны Ф. Г. Бассу и М. И. Каганову, прочитавшим рукопись книги, за многочисленные ценные замечания.

И. А. Курова и П. С. Серебренников любезно согласились прочитать соответственно главы I и III книги и сделали ряд полезных замечаний, за что мы весьма им благодарны.

Авторы искренне признательны Э. И. Рашбе, прочитавшему главу II, за интересную дискуссию и ряд важных замечаний.

Несмотря на отмеченные благоприятные обстоятельства, эта книга все же, наверное, не появилась бы, если бы авторы не имели удовольствия работать в семинаре по теории электрической неустойчивости. Его участникам, Ю. В. Гуляеву, П. Е. Зильберману, П. С. Серебренникову и Э. М. Эпштейну, мы приносим глубокую благодарность.

Последнее, — по счету, но не по важности, — авторы считают приятным долгом отметить, что редактор книги В. Я. Дубнова очень много сделала для улучшения рукописи.

Апрель 1970 г.

Авторы

ГЛАВА I

ПОЛУПРОВОДНИКИ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

§ 1. Некоторые опытные факты

Особенности поведения существенно неравновесных систем исследовались во многих полупроводниках в чрезвычайно разнообразных условиях. Рассматриваемая нами доменная неустойчивость характеризуется тем, что при больших отклонениях от равновесия в однородно легированном образце возникают области сильного (или слабого) электрического поля — *электрические домены*, свойства которых существенно отличаются от свойств остальной части образца (в дальнейшем для краткости мы будем говорить просто о доменах). Эти области могут быть как покоящимися, так и движущимися. Статические домены обычно располагаются вблизи контактов или макроскопических неоднородностей. Движение доменов сильного поля происходит в том же направлении, в котором движутся основные носители заряда; весьма часто форма домена при перемещении его внутри образца почти не меняется, а скорость остается практически постоянной. Как правило, появление движущихся доменов приводит к возникновению колебаний тока в цепи, содержащей образец. Эти колебания связаны с процессами исчезновения домена на одном из контактов и возникновения нового домена вблизи другого контакта. Если характерные времена исчезновения и возникновения домена малы по сравнению со временем прохождения его по образцу («временем пролета»), то период колебаний тока в цепи определяется именно последним временем и равен отношению длины образца к скорости домена. В некоторых материалах в сильных электриче-

ских полях наблюдалось также образование токовых шнуров (нитей). Они представляют собой вытянутые вдоль направления тока области, величина плотности тока внутри которых существенно отличается от плотности тока в остальной части образца.

Очевидно, генерация колебаний при движении доменов может представить немалый технический интерес. Вместе с тем рассматриваемые явления весьма примечательны и с принципиальной точки зрения. Мы имеем здесь дело с ситуацией, когда неравновесные распределения величин, характеризующих состояние системы, резко отличаются от равновесных. В самом деле, в условиях, близких к термодинамическому равновесию, распределение напряженности поля в макроскопически однородном образце само является пространственно однородным. С другой стороны, при достаточно сильном отклонении от равновесия однородное распределение поля может стать неустойчивым, в результате чего система перейдет в другое, резко неоднородное состояние (с этим и связано название явления — *доменная неустойчивость*). Эта ситуация в известном смысле напоминает фазовый переход; переход в неоднородное состояние происходит скачком при некоторых заданных значениях внешних параметров (электрическом напряжении на образце, интенсивности подсветки и т. д.) *).

Рассмотрим несколько типичных опытов, принципиальная схема которых изображена на рис. 1. Через образец, включенный последовательно с некоторым нагрузочным сопротивлением R , пропускается постоянный ток. Если увеличивать эдс в цепи, то при некотором критическом значении напряжения на образце происходит резкое изменение режима. При этом может наступить «срыв» режима постоянного тока и в цепи возникнут колебания, период которых приближенно пропорционален длине образца L . Изменение режима может проявиться и в виде излома или скачка на вольтамперной характеристике исследуемого образца. Для одной и той же принципиальной схемы опыта (рис. 1) конкретные

*) Разумеется, аналогия с фазовыми переходами не полна: в случае доменной неустойчивости резкое отклонение от термодинамического равновесия играет принципиальную роль.

условия и поведение системы могут существенно различаться. Рассмотрим ряд примеров.

1) В арсениде галлия n -типа при комнатной температуре возникают СВЧ-колебания [1]. Частота их (при $L \approx 0,1$ мм) составляет $5 \cdot 10^8 \div 5 \cdot 10^9$ гц (и выше), а критическая напряженность постоянного поля (определяемая как отношение критического напряжения к длине образца) — порядка 3 кв/см. Этот эффект генерации СВЧ-колебаний получил название *эффекта Ганна*.

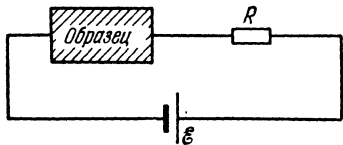


Рис. 1. Принципиальная схема включения образца в цепь.

2) В германии n -типа, легированном золотом, возникают колебания тока [2—5] с частотами, меняющимися в разных образцах от долей герца до нескольких килогерц (при $L \approx 1$ см),

если концентрации золота N и мелких доноров N_d удовлетворяют неравенствам

$$2N < N_d < 3N. \quad (1.1)$$

Колебания имеют место в области температур $15 \div 35$ °К, а критическая напряженность поля составляет около 10 в/см.

Аналогичные колебания наблюдаются и в германии n -типа, легированном медью [6, 7] при температурах порядка 80 °К; критическая напряженность поля близка к 100 в/см*). Отметим, что даже в указанных условиях колебания возникают не всегда. В некоторых образцах германия с медью колебаний не было, а на вольтамперной характеристике наблюдался излом и насыщение тока при напряжениях, превышающих критическое [10, 11]. Кроме того, в диодах из германия с золотом при нескольких иных условиях легирования ($N < N_d < 2N$) и при $T = 77$ °К в полях порядка 10^3 в/см на вольтамперной характеристике наблюдался скачок (характер его зависел от освещения) [12].

*) Сравнительно низкочастотные колебания подобного типа наблюдались также в высокоомном арсениде галлия [8], в сульфиде кадмия [9] и в ряде других материалов,

3) В сульфиде кадмия *n*-типа при температурах 300 °К и 77 °К наблюдаются колебания тока с частотой порядка 0,2 Мгц (при длине образца 0,1 см) [13—17]. Колебания имеют место в образцах, ось *c* которых перпендикулярна направлению плотности тока. Пороговая

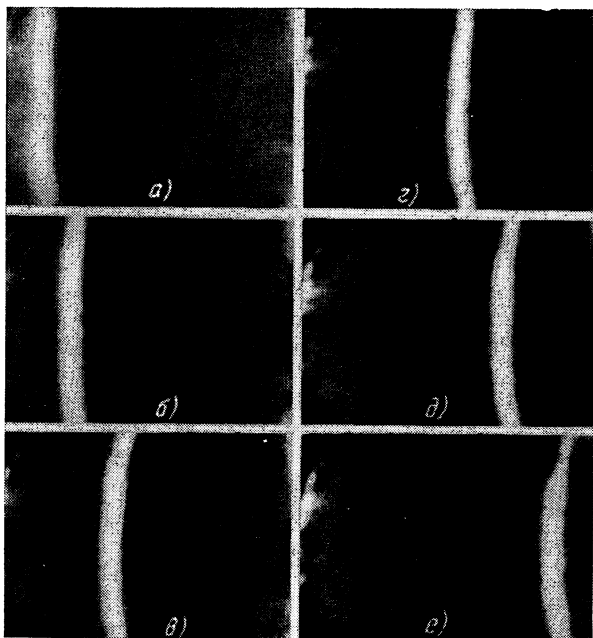


Рис. 2. Движение домена сильного поля в высокоомном GaAs.

Светлые полосы отвечают положениям домена в последовательные моменты времени.

напряженность поля лежит вблизи 600 в/см (при 300 °К). Колебания с частотой того же порядка наблюдаются также в *p*-GaSb [18], GaAs [19] и в ряде других пьезоэлектрических полупроводников.

Во всех перечисленных выше случаях возникновение колебаний в цепи, содержащей образец, оказалось связанным с возникновением движущихся доменов. Появление доменов было подтверждено экспериментально

путем измерения распределения потенциала в образце. Для этой цели были использованы различные зондовые методы: емкостный, оптический и потенциальный зонды (см., например, [20—22, 5]); электронная микроскопия [23]; бриллюэновское рассеяние [24]; электрооптические методы [25—31]. Использование тех или иных методов определяется спецификой системы; в ряде случаев удается «визуально наблюдать» неоднородное распределение поля в домене. Для этой цели в работах [25—28] был использован эффект Келдыша — Франца, состоящий в изменении поглощения монохроматической волны в областях сильного поля.

Для примера кратко остановимся на методе, описанном в работе [29] и использующем линейный электрооптический эффект в пьезоэлектрических полупроводниках. Если, например, ориентировать поляризатор и анализатор так, чтобы в слабых полях образец выглядел темным, то возникновение домена становится заметным по появлению светлой области, причем степень «просветления» определяется величиной напряженности поля.

На рис. 2, взятом из работы [31]*), приведены фотографии образца высокоомного n -GaAs, полученные с использованием электроннооптического преобразователя ($T = 80^\circ\text{K}$, плотность тока в образце направлена по оси [111], а выбор длины волны света ($\lambda \sim 1 \text{ мк}$) обеспечивает возбуждение заметной фотопроводимости). Серия фотографий, приведенных на рис. 2, отвечает перемещению домена сильного поля от катода к аноду.

§ 2. Дифференциальная проводимость

При теоретическом исследовании распределения поля и заряда в образце в условиях нарушенного равновесия нам понадобится выражение для плотности электрического тока, j . В нелинейной системе часто удобно характеризовать связь плотности тока и напряженности поля тензором *дифференциальной проводимости* $\sigma_{\alpha\beta}$.

*) Мы признательны авторам за предоставление препринта и фотографий.

В пространственно однородной (но, вообще говоря, анизотропной) среде он определяется равенством

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{dj_{\alpha}}{dE_{\beta}}. \quad (2.1a)$$

Здесь α, β — векторные индексы, принимающие значения x, y, z .

Равенство (2.1a) предполагает наличие алгебраической связи между векторами \mathbf{j} и \mathbf{E} , что и ограничивает буквальную область его применимости пространственно однородной статической задачей. Можно, однако, формально сохранить его и в случае слабого переменного поля, если интересен лишь линейный отклик на него (постоянное поле при этом может быть и сильным). Именно, в этом случае равенство (2.1a) сохраняет смысл для соответствующих компонент Фурье

$$\delta j_{\alpha}(\omega) = \sigma_{\alpha\beta}(\omega) \delta E_{\beta}(\omega), \quad (2.1б)$$

причем величины $\sigma_{\alpha\beta}(\omega)$ могут зависеть от напряженности постоянного поля.

В пространственно неоднородной системе (в частности, в случае, когда \mathbf{E} зависит от координат) оба соотношения, (2.1a) и (2.1б), вообще говоря, теряют смысл, ибо связь между векторами \mathbf{j} и \mathbf{E} может оказаться нелокальной. В дальнейшем, говоря о дифференциальной проводимости, мы будем иметь в виду то ее значение, которое было бы в однородной системе.

Для «одномерного» случая, когда векторы \mathbf{j} и \mathbf{E} коллинеарны, равенство (2.1a) или (2.1б) можно переписать в скалярной форме

$$\sigma = \frac{dj}{dE}. \quad (2.1в)$$

Для дальнейшего особый интерес представляют системы, в которых дифференциальная проводимость в определенной области значений E меняет знак, становясь отрицательной. Причину этого можно понять, заметив, что возникновение колебаний тока в цепи означает трансформацию части энергии постоянного поля, поставляемой батареей, в энергию электромагнитных волн. При феноменологической трактовке, принятой в макроскопической электродинамике (см. [32] и Приложение I), это явление

непосредственно связывается как раз с наличием *отрицательной дифференциальной проводимости* (ОДП *).

В интересующем нас случае доменной неустойчивости ситуация оказывается несколько более сложной. Действительно, в отличие от обычных радиотехнических генераторов, период колебаний которых определяется резонансной частотой контура, период колебаний, связанных с движением доменов, определяется свойствами

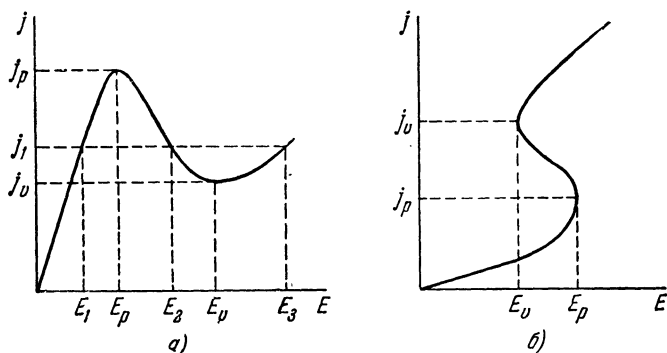


Рис. 3. Вольтамперные характеристики:
а) N-типа, б) S-типа.

самого образца. Как мы увидим, суть дела в том, что само по себе изменение знака дифференциальной проводимости пространственно однородной системы может привести не прямо к незатухающим колебаниям тока, а к изменению самого состояния системы — образованию доменов; колебания же при этом возникают лишь в результате движения последних.

Типичные примеры вида зависимости плотности тока j в пространственно однородной системе от напряженности поля E в условиях, когда на вольтамперной характеристике имеется падающий участок, изображены на рис. 3.

*) Исторически именно попытки создать пространственно однородную систему с ОДП привели к предсказанию и обнаружению движущихся доменов [33]. Отметим, однако, сразу же, что наличие участка с ОДП на статической вольтамперной характеристике однородного образца, вообще говоря, не является необходимым для возникновения электрических доменов (см., например, гл. VIII).

Существенная особенность характеристики на рис. 3, а, состоит в том, что в определенной области значений токов, $j_v < j < j_p$, напряженность поля есть многозначная функция плотности тока. В интервале $j_v < j < j_p$ при заданном значении плотности тока система может находиться в одном из трех пространственно однородных состояний, в двух из них (при $E = E_1$ и при $E = E_3$) дифференциальная проводимость (2.1в) положительна, в третьем (при $E = E_2$) — отрицательна. Вольтамперная характеристика такого вида называется N-образной. Очевидно, в этом случае дифференциальная проводимость меняет знак, проходя через нуль в точках ($E = E_p, j = j_p$) и ($E = E_v, j = j_v$).

На рис. 3, б представлена вольтамперная характеристика другого типа, называемая S-образной. Она соответствует случаю, когда в некотором интервале значений напряженности поля плотность тока j есть неоднозначная функция E , а дифференциальная проводимость (2.1в) меняет знак, обращаясь в бесконечность в точках ($E = E_p, j = j_p$) и ($E = E_v, j = j_v$) (рис. 3, б). Характеристики типа изображенных на рис. 3 наиболее часто встречаются в системах с ОДП; в отдельных случаях, однако, они могут иметь и более сложный вид. Например, возможны характеристики с несколькими падающими участками или «гибриды» N- и S-образных характеристик.

В изотропной пространственно однородной системе с униполярной проводимостью вектор плотности тока можно записать в виде

$$\mathbf{j} = en\mu\mathbf{E}, \quad (2.2)$$

где e — величина заряда подвижного носителя, n и μ — концентрация носителей заряда и их подвижность; вообще говоря, n и μ зависят от напряженности поля.

Подставляя (2.2) в (2.1в), получим

$$\sigma = en\mu \left(1 + \frac{d \ln \mu}{d \ln E} + \frac{d \ln n}{d \ln E} \right). \quad (2.3)$$

Таким образом, дифференциальная проводимость становится отрицательной, если либо подвижность носителей заряда, либо их концентрация (либо и то, и другое) достаточно резко зависят от напряженности поля, уменьшаясь с увеличением ее. Соответственно тому,

какой из названных факторов играет главную роль, мы можем говорить о дрейфовой ($\mu = \mu(E)$) или о концентрационной ($n = n(E)$) нелинейности.

Полевая зависимость подвижности и/или концентрации носителей заряда обусловлена в конечном счете действием следующих хорошо известных факторов.

а) Во-первых, благодаря сравнительной малости массы электрона обмен энергией между носителями заряда и решеткой протекает значительно медленнее, чем обмен импульсом. По этой причине средняя энергия электронов (дырок) в достаточно сильном электрическом поле может заметно отличаться от термодинамически равновесной. Определим «температуру электронов» равенством

$$\langle W \rangle = \frac{3}{2} T, \quad (2.4)$$

где $\langle W \rangle$ — средняя энергия электронного газа. Тогда мы можем сказать, что электрическое поле «нагревает» электронный газ:

$$T > T_l,$$

где T_l — температура решетки *).

б) Во-вторых, вероятность индивидуального акта рассеяния, равно как и вероятность захвата носителя заряда какой-либо ловушкой (а также вероятность ее ионизации), зависит, вообще говоря, от его энергии (и, может быть, от положения в зоне Бриллюэна при данной энергии). Соответственно при перераспределении носителей по энергиям меняются усредненные характеристики этих процессов — подвижность, рекомбинационное время жизни и скорость ионизации. В сочетании с пунктом а) это приводит к зависимости всех статистических характеристик системы: подвижности, коэффициента диффузии, концентрации свободных носителей заряда и других — от напряженности электрического поля в образце.

*) Подчеркнем, что величина T отнюдь не обладает всеми свойствами обычной температуры. Так, например, неправильной (в общем случае) была бы попытка написать обычное соотношение Эйнштейна между подвижностью μ и коэффициентом диффузии D , заменив в нем T_l на T . Дело в том, что в электрическом поле функция распределения носителей по энергиям, вообще говоря, не имеет больцмановского (или фермиевского) вида.

Не лишне заметить, что полевая зависимость концентрации носителей есть характерное свойство именно неравновесной системы.

Действительно, в условиях термодинамического равновесия степень заполнения любого энергетического уровня определяется только его статистическим весом и положением относительно уровня Ферми. Это обусловлено тем, что вероятности прямых и обратных переходов (например, захвата электрона ловушкой и обратного выброса его в зону) не независимы, а связаны принципом детального равновесия. Соответственно, независимо от конкретных значений названных вероятностей, баланс прямых и обратных процессов в условиях равновесия предопределен заранее.

В неравновесной системе последнее уже не справедливо, и, следовательно, степень заполнения любого уровня (а потому и концентрация свободных электронов) определяется конкретными соотношениями между вероятностями переходов в тех или иных экспериментальных условиях. По этой причине могло бы показаться, что лучше говорить о зависимости концентрации носителей не от поля, а от силы тока, протекающего через образец, или от мощности, потребляемой образцом и выделяющейся в виде джоулева тепла. В пространственно однородной системе, однако, все эти величины взаимосвязаны и выбор той или иной из них в качестве аргумента безразличен и диктуется лишь соображениями удобства. В пространственно неоднородной системе вопрос об аргументах, от которых зависят кинетические коэффициенты, весьма сложен и требует более подробного рассмотрения (см. § II.6).

Существует много разных физических механизмов, приводящих к появлению падающей ветви на вольтамперной характеристике. В следующих параграфах мы рассмотрим некоторые из них. Заметим, однако, что использование самого представления о дифференциальной проводимости имеет определенные пределы применимости. Действительно, это представление имеет смысл, коль скоро процессы, ответственные за полевую зависимость подвижности и/или концентрации носителей заряда, протекают значительно быстрее, нежели происходит движение доменов. Именно так обстоит дело в случаях 1) и 2)

из § 1 (соответствующие механизмы ОДП рассматриваются в следующих двух параграфах). С другой стороны, в случае 3) из § 1 ситуация может быть и иной. Дело в том, что в первых двух случаях характерные времена установления ОДП отвечают только электронным процессам (домены «чисто электрического» происхождения). В третьем же случае решающую роль играет, по-видимому, взаимодействие электронов с пьезоэлектрическими колебаниями кристаллической решетки («звуко-электрические» домены, гл. VIII); соответственно характерные времена могут оказаться не слишком малыми.

§ 3. Полупроводники с несколькими экстремумами [34, 35]

Возможность резкого изменения подвижности, требуемого для возникновения ОДП (см. (2.3)), может быть связана с особенностями энергетического спектра носителей заряда. Действительно, к требуемому эффекту может привести переход части носителей под действием электрического поля в ту область энергетической зоны, где подвижность их значительно меньше, чем вблизи ее дна. На возможность возникновения ОДП в системе, закон дисперсии носителей в которой $W(\rho)$ (W — энергия носителя, а ρ — квазиимпульс) схематически изображен на рис. 4, по-видимому, впервые было указано в работах [34] и [35]; подобный механизм создания ОДП получил название *механизма Ридли — Уоткинса — Хилсума*. В дальнейшем было установлено [36], что именно этот механизм ответствен за возникновение колебаний в эффекте Ганна, о котором мы уже упоминали в § 1.

Поясним сущность действия механизма Ридли — Уоткинса — Хилсума на примере электронного арсенида галлия, закон дисперсии электронов в котором, как хорошо известно, имеет подходящий вид *) (рис. 4). Поскольку побочный минимум лежит не в центре зоны Бриллюэна, а на оси [100], он не один — имеется шесть эквивалентных минимумов, в соответствии с кубической

*) Иногда для краткости полупроводники, структура энергетической зоны которых имеет вид, схематически изображенный на рис. 4, называют «полупроводниками с двумя минимумами» (точнее было бы говорить о двух системах неэквивалентных минимумов).

симметрией кристалла. Закон дисперсии вблизи главного минимума изотропен, и скалярная эффективная масса вблизи дна зоны составляет примерно $m_1 \approx 0,07 m_0$. Для нас в данном случае несущественна анизотропия (по-видимому, не очень значительная) закона дисперсии электронов в верхних минимумах; наиболее важная его особенность состоит в том, что эффективная масса носителей в верхних минимумах m_2 значительно больше, чем в основном: $m_2 \gg m_1$ (для GaAs эффективная масса плотности состояний $m_2 \approx 15 m_1$).

Поскольку энергетическое расстояние между минимумами Δ сравнительно велико ($\Delta = 0,34 \text{ эв} \gg T_l$, где T_l — температура решетки), в условиях термодинамического равновесия наличие верхних минимумов практически не влияет на статистику электронов проводимости. Однако при достаточно сильном разогреве газа электронов часть их переходит в верхний минимум. Этот процесс значительно облегчается большим статистическим весом состояний верхних минимумов по сравнению с соответствующими состояниями нижнего минимума (напомним, что статистический вес пропорционален соответствующей эффективной массе в степени $3/2$).

Поскольку эффективная масса электронов в верхних минимумах велика по сравнению с m_1 , подвижность их значительно меньше, чем в основном минимуме, и практически они почти не участвуют в переносе тока. Это проявляется в уменьшении экспериментально измеряемой дрейфовой подвижности с ростом напряженности поля. Картина становится особенно наглядной, если приписать нижнему и верхним минимумах отдельные значения подвижности μ_1 и μ_2 *). Тогда, обозначив

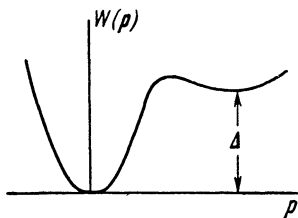


Рис. 4. Закон дисперсии носителей заряда в полупроводнике с двумя системами неэквивалентных экстремумов (схематически).

Для электронов в GaAs закон дисперсии такого вида отвечает направлениям $\langle 100 \rangle$ в зоне Бриллюэна.

*) Заметим, что это можно сделать лишь тогда, когда частота столкновений с переходами электронов в пределах одного минимума велика по сравнению с частотой межминимумных переходов.

концентрацию электронов в нижнем и верхних минимумах соответственно через n_1 и n_2 , можем переписать формулу (2.2) в виде

$$j = en_1\mu_1 E + en_2\mu_2 E. \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) можно также представить в виде

$$j = en\mu(E) E, \quad (3.2)$$

где $n = n_1 + n_2$ — полная концентрация электронов в зоне, а $\mu(E)$ — их эффективная подвижность, равная

$$\mu(E) = \frac{n_1(E)\mu_1(E) + n_2(E)\mu_2(E)}{n}. \quad (3.3)$$

Поскольку зависимость подвижностей μ_1 и μ_2 от напряженности поля не слишком сильна и $\mu_1 \gg \mu_2$, существенное уменьшение населенности основного минимума приведет к резкому падению эффективной подвижности (рис. 5). Описание системы с двумя минимумами с помощью эффективной подвижности достаточно хорошо отражает истинное положение вещей, если характерные времена межминимумных переходов малы по сравнению с характерными временами изменения напряженности поля и других параметров системы.

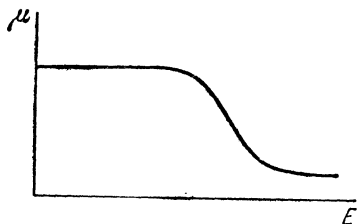


Рис. 5. Примерный ход эффективной подвижности носителей в модели с двумя минимумами.

ное уменьшение населенности основного минимума приведет к резкому падению эффективной подвижности (рис. 5). Описание системы с двумя минимумами с помощью эффективной подвижности достаточно хорошо отражает истинное положение вещей, если характерные времена межминимумных переходов малы по сравнению с характерными временами изменения напряженности поля и других параметров системы.

В GaAs (а также в других полупроводниках с аналогичной зонной структурой) времена межминимумных переходов порядка 10^{-12} сек, и названное условие, как правило, хорошо выполняется.

ОДП описанного типа, связанная с переходами носителей в верхние минимумы с большой эффективной массой, наблюдалась не только в GaAs, но и в ряде других полупроводников, структура зоны проводимости которых имеет вид, представленный на рис. 4: в InP [37], CdTe [38—40], ZnSe [41], GaAsP [42], InAs [43], InSb [44], $Ga_xIn_{1-x}Sb$ [45] (в InAs и InSb ОДП появляется лишь под давлением, когда минимумы «тяжелых» и «легких»

электронов сближаются настолько, что неустойчивость возникает еще до начала ударной ионизации зона — зона). Заметим, что из-за возникающей неустойчивости измерение хода падающей ветви вольтамперной характеристики представляет собой в экспериментальном отношении весьма сложную задачу. Качественный ход измеренных характеристик совпадает с рассчитанным теоретически в работах [46—51]. Однако даже для такого хорошо исследованного полупроводника, как арсенид галлия, существует заметное расхождение между экспериментальными результатами разных авторов. Это относится как к напряженности поля в максимуме E_p , так и к «отрицательной подвижности» — $d(\mu E)/dE$ на падающем участке, а также к другим величинам [52—60]. Одна особенность GaAs, однако, выявляется в большинстве экспериментов — вплоть до напряженностей поля порядка 10—15 кВ/см не удается наблюдать выход на вторую возрастающую ветвь (область $E > E_v$ на рис. 3, а). «Насыщение» тока в области сильных полей может быть объяснено при дополнительном учете акустического рассеяния внутри минимума и рассеяния с переходами между верхними минимумами [47]. Отмеченная особенность вольтамперной характеристики арсенида галлия существенно сказывается на форме домена (см. § V. 4).

Проявления механизма ОДП, аналогичного механизму Ридли — Уоткинса — Хилсума, можно ожидать и в германии p -типа, подвергнутом деформации [34]. Действительно, как известно, валентная зона Ge состоит из двух вырожденных при $p = 0$ зон «легких» и «тяжелых» дырок. При одноосном сжатии вырождение зон снимается и зависимость энергии от квазиимпульса принимает вид, схематически изображенный на рис. 6. «Разогреваясь» под действием электрического поля, дырки начинают переходить в состояние с большей эффективной массой и меньшей подвижностью. Связанная с такими переходами ОДП действительно наблюдалась в p -Ge при низких температурах [61].

До сих пор мы не учитывали возможной анизотропии энергетических зон. В некоторых случаях, однако, анизотропия может играть существенную роль [62]. В самом деле, для эффекта ОДП существенны не только плотно-

сти начальных и конечных состояний, входящих в вероятность межминимумных переходов, но и значения эффективных масс в направлении поля. Для появления ОДП эффективная масса в направлении поля в верхних минимумах должна быть намного больше, чем в нижних. В Ge эффективная масса электронов, находящихся в четырех эквивалентных минимумах зоны проводимости,

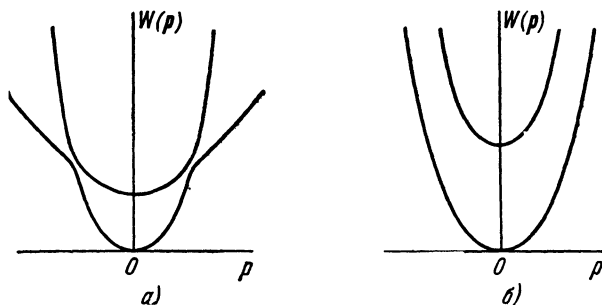


Рис. 6. Закон дисперсии, $W(p)$ для валентных зон германия, подвергнутого одноосному сжатию:

а) вектор p параллелен направлению сжатия, б) вектор p перпендикулярен направлению сжатия.

сильно анизотропна — отношение продольной эффективной массы m_{\parallel} к поперечной m_{\perp} (m_{\parallel}^{-1} и m_{\perp}^{-1} — компоненты тензора обратных эффективных масс в главных осях) составляет примерно 19,1 [63]. В отсутствие деформации названные минимумы, расположенные вдоль осей $\langle 111 \rangle$ в p -пространстве, вырождены по энергии. Напряжение, направление которого не совпадает ни с одной из осей $\langle 100 \rangle$, приводит к снятию вырождения, и при надлежащем выборе направления электрического поля и направления сжатия электроны ведут себя так, как если бы зонная структура имела вид, изображенный на рис. 4.

Пусть, например, механическое напряжение приложено вдоль оси $[111]$, а ток протекает в перпендикулярном направлении, $[11\bar{2}]$. На рис. 7, а схематически показаны величины эффективных масс в направлении тока и относительное положение различных минимумов для этого случая. Еще сильнее различаются эффективные массы вдоль тока для случая, когда ток протекает в направлении $[111]$, а сжатие направлено вдоль оси $[\bar{2}11]$

(рис. 7, б). При этом энергетические минимумы разделяются на три группы — в одном нижнем и двух средних минимумах эффективные массы вдоль тока примерно в 1,1 раза превосходят поперечную массу m_{\perp} , а в верхнем минимуме эффективная масса вдоль тока равна $19,1 m_{\perp}$. Для рассмотренных направлений тока и деформации возрастание числа носителей в верхнем минимуме «тяжелых» электронов, вызванное разогревом

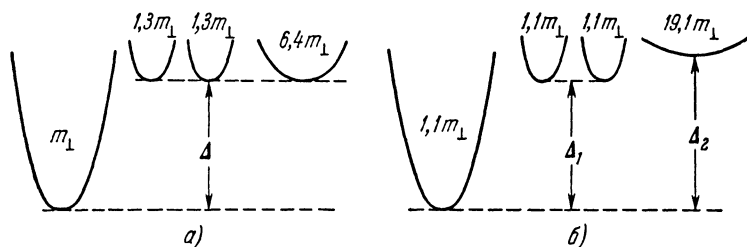


Рис. 7. Минимумы зоны проводимости в деформированном Ge (схематически):

а) направление тока $[11\bar{2}]$, направление сжатия $[111]$, б) направление тока $[111]$, направление сжатия $[\bar{2}11]$.

электронного газа в сильном электрическом поле, может привести к появлению ОДП и к колебаниям тока. Колебания указанного типа действительно наблюдались в одноосно деформированном германии *n*-типа для конфигураций типа рассмотренных выше, когда минимумы с большой эффективной массой в направлении тока оказывались верхними [62, 64].

Изменение населенностей различных минимумов возможно не только в том случае, когда эти минимумы лежат при разных энергиях. В сильных электрических полях могут измениться вероятности переходов между минимумами. В результате минимумы, эквивалентные в состоянии равновесия, могут стать существенно различными за счет разного изменения свойств газа разогретых носителей; это также может привести к созданию ОДП [65].

Для того чтобы пояснить сказанное выше, рассмотрим, например, полупроводник с несколькими эквивалентными, но сильно анизотропными минимумами (рис. 8). Если электрическое поле приложено в направлении оси

ρ_x , то подвижность электронов в минимумах 2 и 4 заметно больше, чем в минимумах 1 и 3. Соответственно нагрев электронов в минимумах 1 и 3 значительно слабее, чем в минимумах 2 и 4. В результате различного разогрева электронов по-разному изменятся и вероятности межминимумных переходов. Действительно, в чистых материалах межминимумные переходы, как правило,

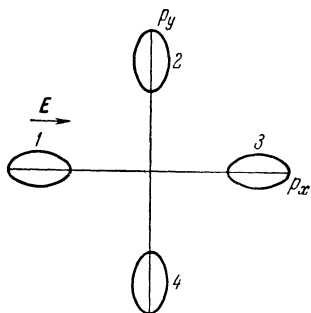


Рис. 8. Поверхности постоянной энергии в p -пространстве вблизи эквивалентных минимумов (схематически).

Электрическое поле E нагревает электроны в минимумах 1 и 3 слабее, чем в минимумах 2 и 4.

связаны с испусканием и поглощением коротковолновых акустических фононов. При низких температурах вероятности названных процессов весьма малы, так как, с одной стороны, мало число фононов, а с другой стороны, мало число электронов, способных испустить фонон. При нагревании электронов возрастает число переходов с испусканием фононов, т. е. возникает дополнительный поток электронов из «нагретых» минимумов в «холодные». Поскольку подвижность электронов в «холодных» минимумах значительно меньше, чем в «горячих», указанное перераспределение электронов может привести к ОДП, как и в случае полупроводника со стандартной структурой зоны (см. рис. 4). Подобного механизма ОДП можно, например, ожидать в германии n -типа, минимумы зоны проводимости которого сильно анизотропны.

Если, например, к образцу германия n -типа приложить электрическое поле в направлении главной оси эллипсоида эффективной массы [111], то эффективная масса вдоль поля в одном из эллипсоидов просто равна m_{\parallel} , а в остальных она существенно меньше (около $1,1 m_{\perp}$). Разумеется, появление ОДП возможно лишь в очень чистых образцах с малой концентрацией электронов (электрон-электронное взаимодействие выравнивает температуры различных минимумов). Численный расчет вольтамперной характеристики германия n -типа (при

температуре 30°K и концентрации доноров 10^{12} см^{-3}) [65] показал, что в указанных условиях действительно появляется участок с ОДП. Связанная с описанным механизмом неустойчивость экспериментально наблюдалась в очень чистом *n*-германии при температуре около 20°K и при напряженностях поля, превышающих 2 в/см [66].

§ 4. Концентрационная нелинейность [3, 67 — 71]

Рассмотрим механизм возникновения ОДП в пространственно однородном изотропном полупроводнике с униполярной проводимостью, связанный с резкой зависимостью концентрации носителей заряда (для определенности — электронов) от напряженности электрического поля. Такая зависимость обусловлена перераспределением электронов между зоной проводимости и связанными состояниями при разогреве электронного газа. Механизмы именно такого типа ответственны за появление «медленных» колебаний в *n*-Ge, легированном золотом или медью, и в высокоомном GaAs (§ 1). Изменение заполнения ловушек определяется зависимостью усредненных вероятностей переходов электронов на ловушки и обратно от вида функции распределения электронов в зоне проводимости. Названное усреднение проводится с помощью неравновесной функции распределения, которая, собственно, и зависит от напряженности электрического поля.

Часто можно пренебречь непосредственным влиянием электрического поля на микроскопические вероятности переходов между связанным состоянием электрона на ловушке и каким-либо фиксированным состоянием в зоне проводимости. Это пренебрежение оправдано в той области напряженностей поля, в которой еще не играет роли эффект Штарка и не наступает заметная автоионизация. Как правило, внешнее электрическое поле невелико по сравнению с полем самой ловушки (последнее обычно порядка 10^4 — 10^5 в/см). Соответственно в дальнейшем мы будем считать, что внешнее электрическое поле непосредственно не воздействует на электронную структуру ловушки. В указанных условиях достаточно учитывать лишь эффекты, связанные с изменением функции распределения по энергиям под действием электри-

ческого поля. Очевидно, это изменение приведет и к полевой зависимости подвижности, но мы будем для простоты в данном параграфе пренебрегать этим обстоятельством. Тем самым предполагается, что подвижность зависит от поля гораздо слабее, чем коэффициенты захвата электронов на ловушки, а с ними и концентрация свободных электронов. Такой подход, по-видимому,

достаточно хорошо оправдан в ряде случаев, к описанию которых мы сейчас перейдем.

Рассмотрим n -Ge, легированный золотом с соблюдением условия (1.1). Его зонная схема в интересующей нас области энергий изображена на рис. 9. Мелкие доноры будем считать сво-

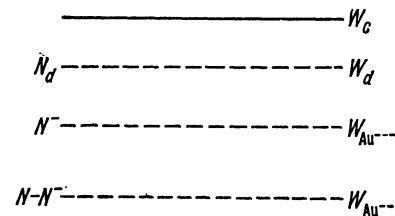


Рис. 9. Энергетическая схема n -Ge, легированного золотом и мелкими донорами.

бодными, что практически выполняется в рассматриваемых условиях ($T \sim 20 \div 35$ °К). Наличие небольшого заполнения доноров несущественно для выяснения основных характерных черт рассматриваемого механизма концентрационной нелинейности, и мы для упрощения не будем его учитывать, если это специально не оговорено. Роль мелких доноров, таким образом, ограничивается только поставкой электронов на компенсирующие акцепторы — ионы золота. Как известно, в решетке германия последние могут находиться в нескольких зарядовых состояниях — от однократно положительного до трехкратно отрицательного. При низких температурах и в условиях (1.1) атомы золота будут отрицательно заряжены — двукратно (в концентрации $3N - N_d$, где N — концентрация золота и N_d — концентрация доноров) и трехкратно (в концентрации $N_d - 2N$). Свободные электроны при этом появляются за счет тепловой или оптической генерации с трехкратно заряженных атомов золота.

Таким образом, в стационарном (но неравновесном) состоянии концентрация электронов n определяется условием равенства скоростей генерации и обратного захвата электронов примесными центрами. Существенно,

что захват происходит на двукратно отрицательно заряженные ионы, т. е. в условиях, когда на больших расстояниях между электроном и ловушкой действуют силы отталкивания. Иначе говоря, захват связан с необходимостью проникновения сквозь кулоновский потенциальный барьер. Точное вычисление вероятности такого захвата в кристаллической решетке представляет серьезные трудности. Очевидно, однако, что вероятность туннельного просачивания сквозь барьер (и тем более вероятность надбарьерного перехода) повышается с увеличением энергии электрона. Можно ожидать поэтому, что уже в сравнительно слабых полях, далеких от области пробоя, коэффициент захвата будет зависеть от напряженности поля, возрастая с увеличением ее. С другой стороны, вероятность выброса электронов в зону, определяющая скорость генерации, в рассматриваемых условиях (пока не наступила заметная автоионизация) практически не должна зависеть от поля (если только не сказывается вырождение электронного газа, что мы исключаем из рассмотрения).

В результате при наложении электрического поля равновесие между процессами генерации и захвата носителей заряда сдвигается так, что концентрация свободных носителей уменьшается с ростом напряженности поля: $n = n(E)$, $dn/dE < 0$.

Действительно, пусть концентрации центров рекомбинации, находящихся в состояниях «после захвата» и «до захвата» равны N^- и $(N - N^-)$ (в рассмотренном выше примере N^- и $(N - N^-)$ суть соответственно концентрации трехкратно и двукратно отрицательно заряженных ионов золота в решетке германия). Тогда среднее число свободных электронов в единице объема, ежесекундно захватываемых центрами рассматриваемого типа, составит

$$c(E)(N - N^-)n, \quad (4.1)$$

где $c(E)$ — соответствующий коэффициент захвата.

Обратный выброс захваченных носителей в зону проводимости может быть обусловлен как термической активацией, так и неравновесной «фоновой» подсветкой. Средние числа электронов, ежесекундно генерируемых

в единице объема за счет этих двух процессов, равны соответственно

$$gN^- \text{ и } IS,$$

где g — коэффициент пропорциональности, I — плотность потока фотонов должной частоты, S — сечение захвата фотона примесным центром*).

Таким образом, уравнение рекомбинационной кинетики имеет вид

$$\frac{\partial N^-}{\partial t} = c(E)(N - N^-)n - gN^- - IS. \quad (4.2)$$

В условиях термодинамического равновесия процессы захвата и термической генерации носителей должны взаимно уравновешиваться. Соответственно

$$g = c_0 \frac{N - N^-}{N_0^-} n_0,$$

где нижний индекс «0» обозначает равновесное значение; в частности, c_0 есть коэффициент захвата в отсутствие электрического поля.

С учетом последнего соотношения уравнение (4.2) принимает вид

$$\frac{\partial N^-}{\partial t} = c_0 [v(E)n(N - N^-) - n_1 N^-], \quad (4.3)$$

где

$$v(E) = \frac{c(E)}{c_0}, \quad n_1 = \frac{N - N_0^-}{N_0^-} n_0 + \frac{IS}{c_0}. \quad (4.4)$$

Приравнивая правую часть (4.3) нулю, получаем условие рекомбинационного равновесия в электрическом поле напряженности E :

$$v(E)n(N - N^-) - n_1 N^- = 0. \quad (4.5)$$

Равенство (4.5) следует дополнить условием локальной нейтральности, которое имеет место в макроскопически однородном образце при однородном распределении

*) Простоты ради мы рассматриваем только примесную оптическую генерацию. Учет междузонных переходов потребовал бы биполярного рассмотрения задачи, что повело бы в дальнейшем к серьезным вычислительным осложнениям, мало что изменив по существу.

носителей в пространстве. В рассматриваемом случае это условие имеет вид

$$N_d - 2N = n + N^- \quad (4.6)$$

Комбинируя равенства (4.5) и (4.6) и принимая во внимание, что в рассматриваемых условиях концентрация свободных электронов n мала по сравнению с N , легко находим

$$n = \frac{n_1 N_d^*}{N - N_d^*} v^{-1}(E). \quad (4.7)$$

Здесь через N_d^* обозначена эффективная концентрация доноров

$$N_d^* = N_d - 2N; \quad (4.8)$$

согласно условию (1.1) эта величина положительна.

В соответствии со сказанным ранее коэффициент рекомбинации в данном случае растет с увеличением напряженности поля: $dv/dE > 0$, что и оправдывает сделанное нами утверждение о виде зависимости $n(E)$. Для дифференциальной проводимости мы получаем, пренебрегая в формуле (2.3) зависимостью подвижности от поля:

$$\sigma = en\mu \left(1 - \frac{d \ln v}{d \ln E} \right). \quad (4.9)$$

Аналогично обстоит дело и в случае n -Ge, легированного медью [6, 7] (при этом опыт следует вести при азотных температурах)*).

В области достаточно сильных полей рост коэффициента захвата с увеличением напряженности поля замедляется, поскольку значительная часть носителей уже «не чувствует» кулоновского барьера. Это приводит к возрастанию σ с ростом E и последующей перемене знака σ , так что вольтамперная характеристика снова приобретает положительный наклон. Другая возможная причина появления второй восходящей ветви связана с ударной ионизацией глубоких примесных уровней.

) Рассматриваемая схема охватывает довольно широкий класс рекомбинационных задач. Специализация сводится, в сущности, лишь к конкретизации выражения для N_d^ и к указанию соответствующей области температур.

Действительно, в результате этого явления концентрация носителей заряда может начать резко возрастать с ростом напряженности поля, коль скоро последняя станет достаточно большой. По-видимому, так обстоит дело в опытах [2, 72].

В описанной модели мы приходим к N-образной характеристике (рис. 3, а). Ход кривой $j(E)$ дается на основании равенства (4.7) формулой

$$j(E) = e\mu \frac{n_1 N_d^*}{N - N_d^*} \frac{E}{v(E)}. \quad (4.10)$$

Экспериментальное определение вида вольтамперной характеристики $j(E)$ действительно приводит к кривым типа рис. 3, а [68, 11, 74]. Так, коэффициент захвата на дважды отрицательный ион золота возрастает примерно на три порядка — до 10^{-9} см³/сек в полях порядка нескольких тысяч в/см по сравнению с его значением ($\sim 10^{-12}$ см³/сек) в слабом поле при температуре 30°К. Вид функции $v(E)$, определяющей согласно (4.10) ход вольтамперной характеристики, может быть рассчитан теоретически с использованием функции распределения электронов, описывающей их разогрев. Такой расчет, качественно согласующийся с экспериментальными данными, был проведен в работах [69, 70] применительно к модели, в которой энергетическая зависимость вероятности захвата на отталкивающий кулоновский центр определяется главным образом соответствующей зависимостью его проникновения сквозь кулоновский барьер.

Другой механизм, который приводит к сильному изменению концентрации носителей заряда, может быть обусловлен резким возрастанием степени ионизации мелких доноров или акцепторов при разогреве свободных носителей. Это возрастание может быть связано как с ростом темпа ударной ионизации при нагреве носителей заряда, так и с полевой зависимостью вероятности их захвата одноименно заряженными ловушками. Действительно, последняя вероятность падает с ростом энергии носителей [74]. Оба указанных фактора приводят к тому, что при достижении некоторого критического значения напряженности поля E_c (порядка нескольких в/см в германии и кремнии при гелиевых температурах) на-

ступает низкотемпературный пробой мелких примесей. В полях порядка 10^2 в/см происходит практически полное высвобождение носителей заряда с ловушек, что приводит к резкой суперлинейности вольтамперной характеристики. В компенсированных образцах при этом наблюдаются и характеристики S-типа; в настоящее время, однако, еще нет полной ясности относительно конкретного механизма происхождения участка, отвечающего ОДП [75—77]. Можно предположить, что с ростом концентрации свободных носителей становится менее эффективным один из механизмов рассеяния энергии носителями заряда [78]. В результате стационарному состоянию отвечает меньшее значение плотности тока, чем в отсутствие упомянутого типа рассеяния, что и проявляется в виде участка с ОДП. Соответствующая модель была предложена в [79], где указывалось на возможность отдачи энергии на возбуждение квазимолекулы, образованной парой донор — акцептор и захваченным ею электроном.

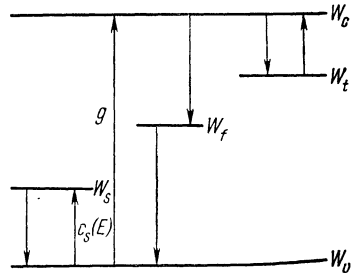


Рис. 10. Уровни ловушек и возможные электронные переходы в CdS (трехуровневая модель).

Число возможных механизмов рекомбинационной нелинейности, естественно, увеличивается при одновременном действии ловушек нескольких типов. Одна из такого рода моделей предложена в работах [71, 80] для объяснения N-образной характеристики n -CdS, проявляющейся при комнатной температуре в области полей порядка 10^4 в/см. В этой модели рассматриваются ловушки трех типов; возможные процессы переходов электронов и дырок между уровнями ловушек и зонами свободных носителей изображены на рис. 10. Ловушки, создающие глубокий уровень W_f , служат центрами рекомбинации электронно-дырочных пар, оптически возбуждаемых (переход типа g на рис. 10) в зонах. Ловушки, дающие уровень W_s , действуют как центры прилипания для дырок. Они опустошаются в достаточно сильных полях за

счет уменьшения коэффициента захвата дырок $c_s(E)$ при их разогреве, а также за счет увеличения коэффициента выброса захваченных дырок в силу эффекта автоионизации. Наконец, ловушки с уровнем W_l обмениваются электронами только с зоной проводимости, и их роль состоит в накоплении связанного (отрицательного) объемного заряда достаточной величины. При высвобождении дырок с уровня W_s резко возрастает темп рекомбинации через уровень W_f , что и приводит к падению концентрации электронов, ответственных за проводимость полупроводника.

Модификация описанного механизма, также связанная с перезарядкой различных уровней под действием электрического поля, была рассмотрена в работе [81] для объяснения наличия ОДП в полуизолирующем GaAs при температурах ниже 200°K в области полей порядка нескольких десятков в/см .

§ 5. Перегревные механизмы [82—84]

Рассмотренные выше механизмы приводили к появлению падающего участка на вольтамперной характеристике в основном за счет особенностей энергетического спектра носителей заряда. В самом деле, и при дрейфовой, и при рекомбинационной нелинейностях появление ОДП было связано с переходом части носителей в некоторые особые состояния (например, на локальные уровни или в те области энергетических зон, где велики эффективные массы). Вместе с тем ряд особенностей поведения системы горячих носителей может быть связан и с изменением характера рассеяния энергии и импульса основной части носителей. Так, специальный вид зависимости времен рассеяния энергии и импульса от средней энергии газа носителей заряда также может приводить к неустойчивости системы, называемой в этом случае *перегревной* (неустойчивость такого рода в газовой плазме обсуждалась в работах [85, 86]).

Для иллюстрации механизма возникновения перегревной неустойчивости рассмотрим электронный газ достаточно большой плотности, когда функцию распределения электронов по энергиям можно считать максвелловской с электронной температурой T (об условиях применимо-

сти этого приближения более подробно см. ниже § II. 5). Электронная температура T находится из уравнения баланса мощности. В пространственно однородной системе и в стационарном случае последнее имеет вид

$$en\mu(T)E^2 = nP(T), \quad (5.1)$$

где подвижность $\mu(T)$ и мощность $nP(T)$, передаваемая электронами решетке в единице объема, суть функции электронной температуры (температуру решетки мы считаем неизменной и равной T_l). Левая часть равенства (5.1), очевидно, есть не что иное, как мощность, получаемая системой от электрического поля в единице объема (джоулева мощность). Поскольку плотность тока в рассматриваемом случае униполярной проводимости равна

$$j = en\mu(T)E, \quad (5.2)$$

мы можем построить вольтамперную характеристику пространственно однородной системы, находя зависимость $T(E)$ из уравнения (5.1).

С учетом (5.2) и (5.1) дифференциальная проводимость (2.1в) такой системы равна

$$\begin{aligned} \sigma &= en\mu(T) \frac{\frac{d[nP(T)]}{dT} + \frac{P(T)}{\mu(T)} \frac{d[n\mu(T)]}{dT}}{\frac{d[nP(T)]}{dT} - \frac{P(T)}{\mu(T)} \frac{d[n\mu(T)]}{dT}} \equiv \\ &\equiv \frac{e}{n\mu(T)} \frac{\frac{d}{dT} [n^2P(T)\mu(T)]}{\frac{d}{dT} \left[\frac{P(T)}{\mu(T)} \right]}. \quad (5.3) \end{aligned}$$

Знаменатель в формуле (5.3) представляет собой разность между изменением мощности, отдаваемой электронами решетке, и изменением джоулевой мощности в заданном электрическом поле при малом изменении электронной температуры. Видно, что при определенных условиях он может изменить знак, проходя через нуль.

Таким образом, перегревный механизм может привести к S-образной характеристике; действительно, при изменении знака знаменателя дифференциальная проводимость обращается в бесконечность (см. § 1).

Рассмотрим теперь условия, при которых знаменатель в формуле (5.3) может изменить знак. Очевидно, это имеет место при наличии специальной зависимости рассеиваемой мощности и проводимости от электронной температуры, когда может выполняться неравенство

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{P(T)}{\mu(T)} \right] < 0. \quad (5.4)$$

Дифференциальная проводимость может изменить знак и за счет изменения знака числителя; при этом

$$\frac{d}{dT} [n^2 P(T) \mu(T)] < 0, \quad (5.5a)$$

или при $n = \text{const}$

$$\frac{d}{dT} [P(T) \mu(T)] < 0. \quad (5.5b)$$

Для того чтобы выяснить, в каких физических ситуациях могут выполняться неравенства (5.4), (5.5), рассмотрим явный вид зависимостей $P(T)$ и $\mu(T)$ для различных механизмов рассеяния. Во многих случаях указанные зависимости можно аппроксимировать степенными функциями, пренебрегая, например, малыми изменениями логарифмических множителей. Соответственно положим

$$\mu(T) = \mu(T_1) \left(\frac{T}{T_1} \right)^q, \quad (5.6a)$$

$$P(T) = P(T_1) \frac{T - T_1}{T_1} \left(\frac{T_1}{T} \right)^s, \quad (5.6b)$$

где множители q и s определяются доминирующим механизмом рассеяния. При одновременном действии нескольких механизмов рассеяния, очевидно, складываются соответствующие вероятности перехода, т. е. обратные времена релаксации энергии и импульса (до усреднения), зависящие от энергии.

Заметим также, что, вообще говоря, главную роль в рассеянии энергии и импульса могут играть различные механизмы. Для полупроводников с изотропным параболическим законом дисперсии значения параметров q и s нетрудно найти из обычной кинетической теории (см. табл. 1). Черточки в таблице отвечают рассеянию на примесных атомах в решетке, которое практически яв-

Т а б л и ц а 1

Характеристики некоторых механизмов рассеяния энергии и импульса носителей заряда с параболическим законом дисперсии [59]

Механизм рассеяния	s	q
Акустические фононы	$-1/2$	$-1/2$
Оптические фононы . .		
$\left\{ \begin{array}{l} T_l > T_D \text{ *)} \\ T_l < T_D \end{array} \right. \dots \dots$	$3/2$	$1/2$
$\left\{ \begin{array}{l} T_l > T_D \text{ *)} \\ T_l < T_D \end{array} \right. \dots \dots$	0	0
Пьезоэлектрические . .		
фононы	$1/2$	$1/2$
Заряженные примеси	$-$	$3/2$
Нейтральные примеси	$-$	0

*) T_D — температура Дебая.

ляется чисто упругим. Пользуясь этой таблицей, нетрудно найти те сочетания механизмов рассеяния энергии и импульса, для которых возможно появление ОДП.

Найдем сейчас условия, налагаемые на показатели степеней q и s неравенствами (5.4) и (5.5б). Комбинируя (5.4), (5.6а) и (5.6б), получим, что знаменатель выражения (5.3) становится отрицательным при

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{T - T_l}{T^{s+q}} \right) < 0,$$

т. е. при

$$q + s > \frac{T}{T - T_l} > 1. \quad (5.7a)$$

Числитель выражения (5.3) меняет знак, если

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{T - T_l}{T^{s-q}} \right) < 0,$$

т. е. если

$$s - q > \frac{T}{T - T_l} > 1. \quad (5.7b)$$

Как следует из выражения (5.3), дифференциальная проводимость отрицательна, если либо

$$q + s > 1, \quad s - q \leq 1, \quad (5.8a)$$

либо

$$q + s \leq 1, \quad s - q > 1. \quad (5.86)$$

В первом случае вольтамперная характеристика S-образна ($1 - q < s \leq 1 + q$), во втором она N-образна ($1 + q < s \leq 1 - q$).

Физическая причина появления ОДП состоит в уменьшении вероятности рассеяния горячих электронов с увеличением их энергии. В случае (5.4) или (5.8а) $q > 0$,

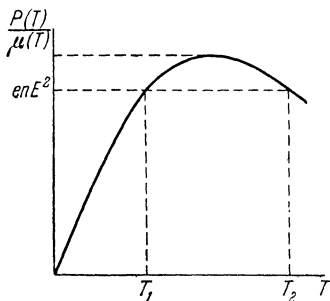


Рис. 11. Примерный ход кривой $P(T)/\mu(T)$ в условиях действия перегревного механизма.

т. е. подвижность возрастает с увеличением электронной температуры. В то же время электронная температура падает с ростом напряженности поля. Действительно, как следует из уравнения (5.1), значения электронной температуры при заданном E определяются точками пересечения кривой $P(T)/\mu(T)$ горизонтальной прямой $enE^2 = \text{const}$ (рис. 11). На участке с отрицательным наклоном точка $T_2(E)$ сдвигается влево при возрастании E .

В случае же (5.5а), (5.8б) $q < 0$, т. е. подвижность падает с ростом температуры электронов, причем последняя в силу первого из неравенств (5.8б) не убывает с ростом поля. Достаточно быстрое уменьшение подвижности при нагревании электронов полем и может привести к вольтамперной характеристике N-типа.

При больших степенях разогрева электронного газа главную роль будут, очевидно, играть механизмы рассеяния, для которых вероятность рассеяния возрастает с возрастанием энергии носителей. По этой причине (в рамках рассматриваемой модели) характеристика рано или поздно вновь выйдет на возрастающую ветвь, т. е. будет иметь стандартный S- или N-образный вид. Ясно, что если указанные механизмы рассеяния вступают в игру еще до того, как характеристика вышла на падающую ветвь, то ОДП может и не появиться вообще.

В заключение отметим несколько важных примеров механизмов рассеяния, приводящих к падающему участ-

ку на вольтамперной характеристике S-типа. Пусть энергия рассеивается на пьезоэлектрическом потенциале ($s = 1/2$), а импульс — на заряженной примеси ($q = 3/2$). В этом случае неравенства (5.8а) выполняются и можно ожидать появления ОДП. Последняя действительно была обнаружена в опытах с n -InSb при низких температурах ($T_l < 2,5^\circ\text{K}$), когда названные механизмы рассеяния играют, по-видимому, определяющую роль [87, 88]. Аналогичный механизм объяснения характеристики S-типа в p -InSb при $T_l \sim 20^\circ\text{K}$ был предложен в [82], где приняты во внимание два механизма рассеяния энергии и импульса электронов на тяжелых дырках, которые затем быстро отдают энергию фононам ($q = 3/2$, $s = 3/2$), и на акустических фононах ($q = -1/2$, $s = -1/2$). Из табл. 1 видно, что неравенства $1 + q < < s < 1 - q$ не выполняются ни для одной из комбинаций перечисленных в ней механизмов рассеяния: отвечающую этому случаю ситуацию, по-видимому, довольно трудно наблюдать экспериментально.

При наложении на полупроводник наряду с электрическим еще и магнитного поля, возникают новые возможности для получения падающей характеристики [83, 84, 89—92]; однако, как было указано выше, рассмотрение влияния магнитного поля не входит в цели настоящей книги.

Механизмы ОДП, описанные в §§ 2—4, не исчерпывают всех возможностей получения вольтамперной характеристики с падающей ветвью. Отметим, например, механизм ОДП, предложенный в работе [93] для объяснения процессов переключения в халькогенидных стеклах. Резкий рост концентрации при таком механизме вызывается высвобождением электронов с атомов примеси из-за исчезновения локальных уровней в результате экранирования.

Учет трех систем неэквивалентных минимумов при определенных условиях также может привести к ОДП. Такой механизм был предложен в работе [94] для объяснения доменных колебаний, наблюдавшихся в [95, 96] при температурах 77°K и ниже *).

*) Несколько иной механизм возникновения колебаний в n -Ge предложен в работе [97].

§ 6. Механизм температурно-электрической неустойчивости [98—103]

Механизмы ОДП, рассмотренные в §§ 2—4, относились к тому случаю, когда под действием электрического поля существенно нарушалось равновесие в системе носителей заряда, а разогрев решетки не играл принципиальной роли. Однако разогрев решетки за счет выделяющегося джоулева тепла может оказать заметное влияние на форму вольтамперной характеристики. Учет этого обстоятельства открывает дополнительные возможности получения характеристик с падающим участком, возникающим вследствие определенной зависимости концентрации носителей и/или подвижности от температуры решетки [98, 99]. Из всего многообразия механизмов указанного типа мы рассмотрим один — концентрационный, когда повышение температуры кристалла при разогреве его в электрическом поле вызывает уменьшение концентрации неравновесных носителей, создаваемых освещением образца. Именно этот механизм, по-видимому, ответствен за явления неустойчивости, наблюдавшиеся в CdSe и некоторых других полупроводниковых соединениях типа $A_{II}B_{VI}$ [100—103].

Схема энергетических уровней и энергетических переходов, удовлетворительно описывающая процессы в CdSe, аналогична изображенной на рис. 10 [104]. Уровень W_f — акцепторный рекомбинационный уровень (по-видимому, связанный с вакансиями кадмия [104]), а W_s и W_t — сравнительно мелкие локальные уровни соответственно акцепторного и донорного типов. При условии $N_s < N_t < N_s + N_f$ (N_s , N_t и N_f — концентрации соответствующих центров) уровень W_f в равновесии заполняется электронами лишь частично, а уровень W_s — полностью.

При освещении образца ситуация, однако, может существенно измениться. Пусть, например, вероятности захвата таковы, что

$$c_{ps} \gg c_{pf} \gg c_{nf} \gg c_{ns}, \quad (6.1)$$

где c_{ps} и c_{pf} — коэффициенты захвата дырок центрами s - и f -типа, уже захватившими электрон, а c_{ns} и c_{nf} — коэффициенты захвата электронов свободными центра-

ми. В силу этого условия центры с уровнем W_s захватывают дырки гораздо быстрее, чем центры с уровнем W_f , а электроны — гораздо медленнее. По этой причине при наличии подсветки, генерирующей электронно-дырочные пары, основная часть дырок оказывается локализованной на уровнях прилипания W_s , что приводит к возрастанию времени жизни электронов и к увеличению фоточувствительности. При повышении температуры решетки тепловая генерация дырок с уровня W_s может привести к его опустошению; скорость рекомбинации через уровень W_f при этом возрастает, а концентрация фотоэлектронов и фоточувствительность падают (температурное гашение фотопроводимости).

Ясно, что механизм температурного гашения фотопроводимости может привести к появлению участка с ОДП на вольтамперной характеристике освещенного образца. Действительно, при увеличении напряженности поля и плотности тока через образец выделяемая в нем джоулева мощность растет; увеличивается и температура образца. Рост температуры может привести к резкому убыванию концентрации фотоэлектронов, и, в силу (2.3), к изменению знака дифференциальной проводимости.

Наблюдаемые на опыте зависимости, отвечающие температурному гашению фотопроводимости, удовлетворительно описываются полуэмпирическим соотношением [105]

$$n = \frac{n_0}{1 + B \exp\left(-\frac{W_s - W_v}{T_l}\right)}, \quad (6.2)$$

где n_0 и B — некоторые постоянные, W_v — потолок валентной зоны.

Примем сейчас формулу (6.2) для концентрации и для простоты будем считать подвижность μ постоянной. Тогда в пренебрежении током диффузии (что оправдано для плавно меняющихся в пространстве неоднородностей) имеем в одномерном случае

$$j = e\mu n(x) E(x), \quad (6.3)$$

$$\kappa_l \frac{d^2 T_l}{dx^2} = -jE(x) + \beta(T_l - T_\infty). \quad (6.4)$$

Здесь κ_l — теплопроводность решетки, $jE(x)$ — джоулева мощность, а слагаемое $\beta(T_l - T_\infty)$ отражает теплообмен через боковую поверхность образца с внешней средой, температура которой равна T_∞ .

Такой феноменологический учет отдачи энергии через поверхность оправдан, если размеры образца в направлении соответствующего потока тепла достаточно малы. При этом температура в указанном направлении меняется мало, и усреднение по длине образца в данном направлении во всех членах, не содержащих производных от температуры, сводится просто к замене температуры ее усредненным значением.

Член с производной в уравнении баланса мощности после названного усреднения принимает вид

$$\frac{\kappa_l}{L_t} \int_{-\frac{L_t}{2}}^{\frac{L_t}{2}} \frac{\partial^2 T_l}{\partial x_\alpha^2} dx_\alpha = \frac{2\kappa_l}{L_t} \frac{\partial T_l}{\partial x_\alpha} \Big|_{x_\alpha = \frac{L_t}{2}}$$

(без суммирования по α). Здесь мы предположили для простоты, что образец имеет вид тонкой плоскопараллельной пластинки толщины L_t , x_α — координата в направлении нормали к поверхности пластины и

$$T_l(x_\alpha) = T_l(-x_\alpha).$$

На поверхности пластины естественно наложить смешанные граничные условия вида

$$\left[\frac{\partial T_l}{\partial x_\alpha} + \frac{\beta L_t}{2\kappa_l} (T_l - T_\infty) \right]_{x_\alpha = L_t/2} = 0.$$

При $x_\alpha = y$ (т. е. если вектор плотности тока параллелен поверхности пластины) мы сразу получаем «квазиодномерное» уравнение баланса мощности (6.4). Если же длина образца в направлении плотности тока мала, $x_\alpha = x$, то уравнение баланса мощности принимает вид

$$\kappa_l \left(\frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial z^2} \right) = -jE(y, z) + \beta(T_l - T_\infty). \quad (6.4')$$

Уравнения (6.4), (6.4') допускают решение, отвечающее однородному распределению плотности тока, напря-

женности поля и температуры в образце. Найдем вольт-амперную характеристику, отвечающую такому решению. Поскольку, как следует из (6.4), температура T_l есть функция от джоулевой мощности jE , мы имеем

$$\frac{dT_l}{dE} = \frac{dT_l}{d(jE)} \left(j + E \frac{dj}{dE} \right) = \frac{j}{\beta} \left(1 + \frac{\sigma}{en\mu} \right). \quad (6.5)$$

Используя (6.4), находим дифференциальную проводимость

$$\sigma = en\mu \frac{1 + \frac{jE}{\beta T_l} \frac{d \ln n}{d \ln T_l}}{1 - \frac{jE}{\beta T_l} \frac{d \ln n}{d \ln T_l}}. \quad (6.6)$$

При $dn/dT_l < 0$ возможно обращение в нуль числителя выражения (6.6), т. е. получится N-образная вольтамперная характеристика.

Явные условия, при которых $\sigma < 0$, для рассматриваемой модели нетрудно получить с помощью выражения (6.2).

Например, в области температурного гашения

$$B \exp\left(-\frac{W_s - W_v}{T_l}\right) \gg 1 \quad (6.7)$$

и мы имеем

$$\frac{d \ln n}{dT_l} \approx -\frac{W_s - W_v}{T_l^2}. \quad (6.8)$$

Используя (6.7), перепишем условие $\sigma < 0$ в виде

$$T_l^2 - (W_s - W_v) T_l + T_\infty (W_s - W_v) < 0. \quad (6.9)$$

Из последнего уравнения легко найти область значений параметров $W_s - W_v$ и T_∞ , при которых на характеристике появляется падающая ветвь, а также найти интервал напряженностей поля, в котором дифференциальная проводимость отрицательна.

Возможна также ситуация, когда изменение знака дифференциальной проводимости связано с изменением знака знаменателя выражения (5.6) и характеристика S-образна. Очевидно, это имеет место, если концентрация носителей в зоне достаточно быстро возрастает при изменении температуры кристалла за счет джоулева тепла («тепловой пробой» [106, 107]). Из простой модели,

принимающей стандартную зависимость концентрации носителей от температуры решетки

$$n(T_l) \sim T_l^{3/2} e^{-W_0/T_l},$$

следует, что в этом случае знаменатель выражения (6.6) может изменять знак лишь один раз; соответственно величина j_v , определяемая на рис. 3, б, обращается в бесконечность. Последнее, разумеется, не означает отсутствия ветви $j > j_v$; выход характеристики на вторую ветвь с положительной дифференциальной проводимостью может быть обусловлен действием какого-либо другого, не рассматриваемого сейчас механизма. Однако если в широкой области токов описанный механизм теплового пробоя играет главную роль, то $j_v \gg j_p$ и участок с ОДП довольно широк. Именно так обстоит дело, например, в кремнии n -типа, легированном золотом. В таких образцах (с удельным сопротивлением $\sim 10^4$ ом·см при комнатной температуре) наблюдались явления, связанные с тепловым пробоем [108].

Заметим, что, строго говоря, описанные механизмы ОДП не являются чисто объемными — теплоотвод через поверхности играет здесь принципиальную роль. Это обстоятельство, однако, не очень существенно, коль скоро размеры образца в соответствующем направлении достаточно малы, и справедливо «квазиобъемное» описание с помощью уравнений (6.4), (6.4').

В случае, когда теплоотвод через боковую поверхность образца пренебрежимо мал, распределения температуры, концентрации и напряженности поля оказываются неоднородными. Явный вид этих распределений можно найти, используя тот факт, что изменения температуры малы; на вольтамперной характеристике и в этом случае появляется участок с ОДП в области больших напряжений (см. Приложение II).

Поведение образцов с характеристикой такого вида имеет ряд особенностей: в них возникают сильно неоднородные распределения температуры — температурно-электрические домены как неподвижные, так и изменяющиеся во времени и сопровождающиеся колебаниями тока [100—103, 109]. Мы, однако, не будем подробнее останавливаться на теории температурно-электрической неустойчивости, сосредоточив основное внимание на про-

цессах, связанных с нарушением равновесия в электронной системе. При этом, как правило, благодаря наличию объемных механизмов отвода энергии пространственно однородное состояние оказывается одним из возможных решений исходной системы уравнений.

§ 7. Флуктуации в пространственно однородной системе с отрицательной дифференциальной проводимостью [110—113]

Как правило, получить на опыте пространственно однородные состояния системы, в которых дифференциальная проводимость отрицательна, не удается — образец переходит в существенно неоднородное состояние (возникают домены). Как показывает опыт [52], однородное состояние с ОДП существует лишь в течение очень малых отрезков времени (порядка 10^{-10} сек в условиях, отвечающих наблюдению эффекта Ганна). Это указывает на то, что однородное состояние с ОДП неустойчиво и распадается за времена порядка указанных.

Причину этого можно понять, замечая, что представление о пространственно однородной системе имеет смысл только в среднем по времени: мгновенные значения концентрации носителей заряда и других физических величин испытывают флуктуации. В условиях термодинамического равновесия последние быстро затухают, — в сущности, по определению самого понятия «равновесие», — благодаря чему и имеет смысл представление об однородности системы в среднем. Однако в неравновесных условиях, с которыми мы сейчас имеем дело, это а priori не очевидно. В условиях, близких к равновесным, электрические флуктуации затухают с максвелловским временем релаксации $\tau_M = \epsilon/4\pi\sigma$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость системы, σ — проводимость. Но в условиях, когда наблюдаются заметные отклонения от закона Ома, становится существенным то обстоятельство, что затухание малых флуктуаций определяется не полной, а дифференциальной проводимостью (подробнее см. ниже, в гл. III). При переходе на падающую ветвь характеристики дифференциальная проводимость σ , а с ней и постоянная затухания меняют знак и малые флуктуации из затухающих могут стать нарастающими.

Рост флуктуаций физических величин может привести к распаду однородного состояния.

Рассмотрим подробнее поведение малых флуктуаций физических величин в бесконечной однородной изотропной среде с ОДП. Временная эволюция распределений напряженности поля, плотности заряда и плотности тока в системе описывается системой уравнений Максвелла, дополненных феноменологическими соотношениями, связывающими основные векторы поля, и соответствующими граничными условиями.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением квазистационарного приближения. Действительно, для интересующих нас процессов, связанных с развитием и движением доменов, изменение состояния системы можно считать происходящим достаточно медленно, так что за время распространения процесса в пределах системы ее состояние не успевает заметно измениться [114]. В квазистационарном приближении из уравнений Максвелла мы получаем следующие уравнения, определяющие плотность тока проводимости \mathbf{j} , плотность подвижного заряда ρ и напряженность электрического поля \mathbf{E} (в пренебрежении дисперсией диэлектрической проницаемости ϵ , не существенной при интересующих нас частотах):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} (\rho - \dot{\rho}_t), \quad (7.1a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (7.1b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (7.1v)$$

Здесь ρ_t — плотность связанных зарядов, которая в принципе также может зависеть от координат и от времени. Если ρ_t не зависит от времени, то уравнение непрерывности (7.1б) можно переписать, используя уравнение Пуассона (7.1а):

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (7.2)$$

где

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} + \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.3)$$

есть плотность полного тока. Еще одно уравнение определяет связь плотности тока проводимости \mathbf{j} , плотности

заряда и напряженности поля. В пространственно однородном случае мы имеем (см. ниже § II.4)

$$j_{\alpha} = \rho \mu_{\alpha\beta} E_{\beta} - \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (D_{\alpha\beta} \rho), \quad (7.1г)$$

где $\rho \mu_{\alpha\beta}$ — тензор полной проводимости системы, $D_{\alpha\beta}$ — тензор коэффициентов диффузии (в неравновесных системах $\mu_{\alpha\beta}$ и $D_{\alpha\beta}$, вообще говоря, нельзя считать постоянными).

В изотропном случае, когда тензоры $\mu_{\alpha\beta}$ и $D_{\alpha\beta}$ становятся скалярами, уравнение (7.1г) принимает вид

$$j = \rho \mu E - \text{grad} (D \rho).$$

Уравнения (7.1а) — (7.1г) образуют полную систему для определения величин E , j , ρ . Вопрос о граничных условиях к этой системе мы обсудим несколько позже (гл. II); сейчас же мы приведем лишь два простых примера, показывающих, каким образом может вести себя однородная система с ОДП в сильном электрическом поле. Эти примеры отличаются друг от друга характером зависимости кинетических коэффициентов μ и D от степени нарушения равновесия.

Рассмотрим сначала так называемую полевую модель с дрейфовой нелинейностью, пределы применимости которой будут установлены в главе II. Именно, будем считать, что и в неоднородной системе подвижность и коэффициент диффузии — заданные функции локального и мгновенного значения напряженности электрического поля $E(x, t)$. При достаточно быстром убывании подвижности с полем мы имеем

$$\mu + E \frac{d\mu(E)}{dE} < 0$$

и появляется участок с ОДП. Рассмотрим поведение малых флуктуаций в таких условиях.

В однородном стационарном состоянии напряженность поля E_0 , плотность тока j_0 и плотность заряда ρ_0 определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \rho_t, \\ \text{div } j_0 &= 0, \text{ rot } E_0 = 0, j_0 = \rho_0 \mu(E_0) E_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Будем пока для простоты считать коэффициент диффузии постоянным. Тогда малые флуктуации δE , δj и $\delta \rho$ определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \delta \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{\epsilon} \delta \rho, \\ \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \delta \mathbf{j} &= 0, \\ \operatorname{rot} \delta \mathbf{E} &= 0, \\ \delta j_{\alpha} &= \sigma_{\alpha\beta} \delta E_{\beta} - D \frac{\partial \delta \rho}{\partial x_{\alpha}} + \mu(E_0) E_{0\alpha} \delta \rho, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

получаемых линеаризацией уравнений (7.1a) — (7.1г) около однородного решения (7.4).

В уравнениях (7.5) величина $\sigma_{\alpha\beta}$ есть не что иное, как тензор дифференциальной проводимости однородного образца, определяемый соотношением

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \left. \frac{\partial}{\partial E_{\beta}} [\rho_0 \mu(E) E_{\alpha}] \right|_{E=E_0} = \\ &= \rho_0 \left[\mu(E_0) \delta_{\alpha\beta} + \frac{E_{0\alpha} E_{0\beta}}{E_0} \frac{d\mu(E_0)}{dE_0} \right]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Из выражения (7.6) видно, что при условии $\mu(E_0) + E_0 \frac{d\mu(E_0)}{dE_0} < 0$ составляющая тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ в направлении вдоль постоянного электрического поля отрицательна, а в направлениях, нормальных к полю, — положительна и равна просто $\rho_0 \mu(E_0)$. Структура тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ определяет поведение малых флуктуаций в образце — поперечные флуктуации, вектор напряженности поля которых нормален вектору \mathbf{E}_0 , ведут себя так же, как и в среде с положительной дифференциальной проводимостью $\rho_0 \mu(E_0)$.

Действительно, из системы (7.5) нетрудно получить уравнение, описывающее временную эволюцию флуктуации плотности:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \mu(E_0) E_{0\alpha} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x_{\alpha}} - D \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x_{\alpha}^2} = - \sigma_{\alpha\beta}(E_0) \frac{\partial \delta E_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}. \quad (7.7a)$$

Пусть, например, флуктуация, возникающая в образце, сопровождается появлением электрического поля, на-

правленного по оси Oy (за ось Ox мы выбираем направление приложенного постоянного поля $E_0 = E_{0x}$), $\delta E = \delta E_y$; в этом случае плотность заряда меняется только в направлении оси Oy :

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \delta E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \delta E_x}{\partial y} = \frac{\partial \delta \rho}{\partial z} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial y^2} = -\sigma_{yy} \frac{\partial \delta E}{\partial y},$$

т. е.

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial y^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho_0 \mu(E_0) \delta \rho. \quad (7.76)$$

Уравнение (7.76) описывает обычный процесс эволюции малой флуктуации в среде с проводимостью $\rho_0 \mu(E_0)$ при наличии диффузии (роль последней мала, если флуктуация достаточно плавная). Мы видим, что в направлении, перпендикулярном оси Ox , происходит рассасывание флуктуаций плотности заряда; характерное время этого процесса есть $\tau_M = \epsilon / 4\pi \rho_0 \mu(E_0)$.

Иначе обстоит дело, если возникающая флуктуация сопровождается изменением поля вдоль оси Ox (в этом направлении дифференциальная проводимость отрицательна, $\sigma_{xx} < 0$).

Пусть в образце возникла флуктуация, плотность пространственного заряда в которой меняется вдоль оси Ox (рис. 12, а). В соответствии с уравнением Пуассона распределение электрического поля будет иметь вид, схематически показанный на рис. 12, б, — напряженность поля внутри флуктуации оказывается большей, чем вне ее. Поскольку дифференциальная проводимость отрицательна, относительное возрастание поля внутри флуктуации приведет к уменьшению тока (рис. 12, в). Таким образом, ток, «вытекающий» из области повышенной концентрации, окажется меньше тока, «втекающего» в нее, и флуктуация будет нарастать. Уравнение, описывающее поведение малой флуктуации, направленной вдоль оси Ox , получается прямо из уравнения (7.7а):

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \mu(E_0) E_0 \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \sigma_{xx} \delta \rho. \quad (7.7в)$$

Плавная («длинноволновая») флуктуация, для которой члены с пространственными производными в (7.7в) малы, нарастает с инкрементом $4\pi|\sigma_{xx}|/\epsilon$.

Учет диффузии приводит к уменьшению инкремента нарастания. В самом деле, для возмущений типа плоских волн, когда $\delta\rho \sim e^{ikx}$, инкремент нарастания равен

$$4\pi|\sigma_{xx}|/\epsilon - Dk^2.$$

Мы видим, что максимальным инкрементом обладают возмущения с малыми k («длинноволновые»); минимальное значение k определяется, очевидно, длиной образца $k \sim 1/L$, где L — размер образца. По этой причине может оказаться, что в коротких образцах нарастание малых флуктуаций не имеет места даже при наличии ОДП, если абсолютная величина ее мала. Отметим также, что второй член в левой части уравнения (7.7в) описывает снос флуктуации как целого со скоростью $\mu(E_0)E_0$.

Таким образом, для системы с характеристикой N -типа однородное состояние с ОДП оказывается неустойчивым относительно продольных флуктуаций. Малые флуктуации в виде плоских «стенок» пространственного заряда, нормальных к направлению тока, сносятся со скоростью $\mu(E_0)E_0$ и одновременно нарастают с инкрементом

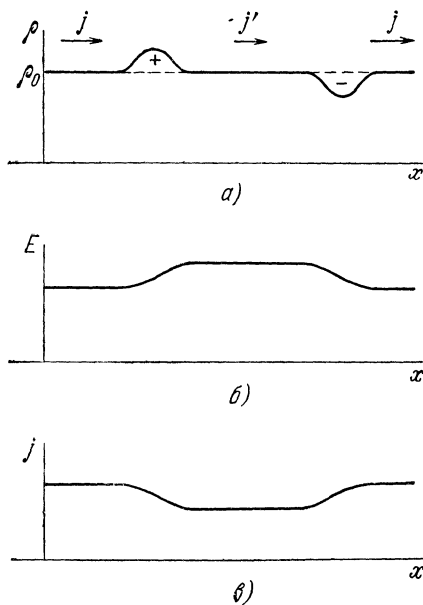


Рис. 12. Развитие малых флуктуаций напряженности поля и плотности заряда в однородном образце с ОДП.

флуктуаций. Малые флуктуации в виде плоских «стенок» пространственного заряда, нормальных к направлению тока, сносятся со скоростью $\mu(E_0)E_0$ и одновременно нарастают с инкрементом

$$4\pi|\sigma_{xx}|/\epsilon - Dk^2$$

а напряженность поля в области между стенками заряда разных знаков возрастает или уменьшается, в зависимости от вида начальной флуктуации плотности. Описанная картина позволяет качественно понять некоторые особенности начальной стадии процесса возникновения и развития движущегося домена конечной амплитуды, хотя свойства и характеристики последнего, строго говоря, должны даваться нелинейной теорией, построенной на основе записанной нами выше полной системы уравнений задачи.

Проведенное рассмотрение позволяет также предположить, что основные особенности явления описываются уже одномерной моделью, ибо плотность заряда и напряженность поля стремятся выровняться в направлении, перпендикулярном току; другими словами, поверхности постоянной напряженности поля и плотности заряда в процессе релаксации принимают форму плоскостей, нормальных к оси Ox .

По-иному ведут себя малые флуктуации в системе с ОДП, соответствующей падающей ветви характеристики S -типа.

Рассмотрим пример такой системы, когда появление ОДП связано с перегревной неустойчивостью (§ 5). Будем считать электронную температуру единственным параметром, характеризующим отклонение системы электронов от состояния равновесия; соответственно μ , D и P будем полагать функциями локального и мгновенного значений электронной температуры. Если характерный размер неоднородностей и времена их нарастания достаточно велики, то электронный газ можно считать несжимаемым (к обсуждению этого приближения мы еще вернемся в гл. VI). Тогда $\rho \approx \text{const}$, и вместо уравнений (7.1a) — (7.1r) имеем систему

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{j} &= \rho \mu(T) \mathbf{E} - \rho \mu(T) \alpha(T) \operatorname{grad} T, \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

где мы обозначили

$$\alpha(T) = \frac{1}{\mu(T)} \frac{dD(T)}{dT}.$$

Условие баланса энергии даст нам дополнительное уравнение для определения электронной температуры:

$$\frac{3}{2} n \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \mathbf{j} \mathbf{E} + nP(T) = 0. \quad (7.9)$$

Здесь $3nT/2$ — плотность энергии носителей ($\rho = en$), \mathbf{q} — плотность потока энергии, равная

$$\mathbf{q} = \frac{1}{e} \theta \mathbf{j} - \kappa \operatorname{grad} T; \quad (7.10)$$

θ — средняя энергия, переносимая одним носителем в потоке, а κ — электронная теплопроводность. Уравнения (7.8) — (7.10) определяют распределение плотности тока и электронной температуры в образце. В однородном состоянии с напряженностью поля \mathbf{E}_0 (задаваемой внешним источником) электронная температура T_0 и плотность тока \mathbf{j}_0 определяются уравнениями

$$n_0 P(T_0) = \mathbf{j}_0 \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{j}_0 = \rho_0 \mu(T_0) \mathbf{E}_0. \quad (7.11)$$

Поведение малых флуктуаций относительно однородного состояния (7.11) описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \delta \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \delta \mathbf{j} = 0, \\ \delta \mathbf{j} &= \rho_0 \frac{d\mu_0}{dT_0} \mathbf{E}_0 \delta T - \rho_0 \mu_0 \alpha_0 \operatorname{grad} \delta T + \rho_0 \mu_0 \delta \mathbf{E}, \\ \frac{3}{2e} \rho_0 \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \operatorname{div} \delta \mathbf{q} - \mathbf{E}_0 \delta \mathbf{j} - \mathbf{j}_0 \delta \mathbf{E} + \\ &\quad + \frac{\rho_0}{e} \frac{dP_0}{dT_0} \delta T = 0, \\ \delta \mathbf{q} &= \frac{1}{e} \theta_0 \delta \mathbf{j} + \frac{1}{e} \frac{d\theta_0}{dT_0} \mathbf{j}_0 \delta T - \kappa_0 \operatorname{grad} \delta T, \end{aligned} \right\} \quad (7.12a)$$

где $\mu_0 = \mu(T_0)$, $P_0 = P(T_0)$, $\theta_0 = \theta(T_0)$ и т. д., дополненными одним скалярным уравнением, описывающим способ включения образца в цепь (закон Кирхгофа), и соответствующими граничными условиями. Систему

(7.12a) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} \rho_0 \frac{\partial \delta T}{\partial t} - e \kappa_0 \nabla^2 \delta T + \rho_0 \mu_0 \left[\alpha_0 + \frac{1}{e} \frac{d\theta_0}{dT_0} \right] \times \\ \times (\mathbf{E}_0 \text{grad } \delta T) + \left(\rho_0 \frac{dP_0}{dT_0} - e \rho_0 E_0^2 \frac{d\mu_0}{dT_0} \right) \delta T - \\ - 2e \rho_0 \mu_0 (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{E}) = 0, \\ \text{rot } \delta \mathbf{E} = 0, \\ \text{div } \delta \mathbf{E} - \alpha_0 \nabla^2 \delta T - \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu_0}{dT_0} (\mathbf{E}_0 \text{grad } \delta T) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.12б)$$

Пусть возникла малая продольная флуктуация температуры $\delta T = \delta T(x)$, $\nabla \delta T \parallel \mathbf{E}_0$. Тогда из уравнений (7.12б) получаем

$$\frac{3}{2} \rho_0 \frac{\partial \delta T}{\partial t} - e \kappa_0 \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x^2} + e \left[\frac{1}{e} \frac{d\theta_0}{dT_0} - \alpha_0 \right] \rho_0 \mu_0 E_0 \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \\ + \rho_0 \left[\frac{dP_0}{dT_0} + e E_0^2 \frac{d\mu_0}{dT_0} \right] \delta T = 0. \quad (7.13)$$

Из уравнения (7.13) видно, что «длинноволновая» продольная флуктуация температуры затухает, если

$$\frac{dP_0}{dT_0} + e E_0^2 \frac{d\mu_0}{dT_0} > 0. \quad (7.14)$$

Поперечная флуктуация описывается уравнением

$$\frac{3}{2} \rho_0 \frac{\partial \delta T}{\partial t} - e \kappa_0 \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x^2} = - \rho_0 \left[\frac{dP_0}{dT_0} - e E_0^2 \frac{d\mu_0}{dT_0} \right]. \quad (7.15)$$

Эта флуктуация нарастает, если

$$\frac{dP_0}{dT_0} - e E_0^2 \frac{d\mu_0}{dT_0} < 0, \quad (7.16)$$

и затухает в обратном случае. Согласно (5.3а) условие (7.16) есть не что иное, как условие отрицательности дифференциальной проводимости на падающем участке S-образной характеристики.

Итак, когда выполнены условия (7.14) и (7.16) и характеристика S-образна, продольные флуктуации температуры затухают, а поперечные — нарастают. Из-за «рассасывающего» действия теплопроводности наибольшим инкрементом нарастания обладают плавные,

«длинноволновые» флуктуации, характерный размер которых определяется поперечным размером образца.

Нарастание поперечных флуктуаций позволяет предположить, что новое состояние, в которое перейдет система, будет существенно неоднородным в направлениях, перпендикулярных направлению электрического поля. Действительно, более строгая нелинейная теория, которая будет изложена в главе VI, показывает, что результирующее неоднородное состояние имеет вид шнура, вытянутого вдоль тока; внутри шнура степень разогрева электронов и плотность тока существенно отличаются от остальной части образца.

Г Л А В А II

ЭЛЕМЕНТЫ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Функция распределения и кинетические коэффициенты

Задача микроскопического подхода в теории электрических доменов состоит в вычислении кинетических коэффициентов — подвижности, дифференциальной проводимости, коэффициента диффузии, коэффициентов захвата и т. д. — в зависимости от параметров, характеризующих свойства вещества и условия опыта. К числу таких параметров относятся эффективные массы носителей заряда, энергии ионизации примесных уровней температура решетки, напряжение, приложенное к образцу, и т. д.

Кинетические коэффициенты получаются в результате усреднения по статистическому ансамблю частиц. Как правило, в интересующих нас задачах достаточен квазиклассический подход, при котором ансамбль характеризуется функцией распределения, $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, зависящей от импульсов (или квазиимпульсов) частиц \mathbf{p} и координат \mathbf{r} . Мы будем нормировать функцию распределения условием

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = n(\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

где $n(\mathbf{r})$ — концентрация электронов в точке \mathbf{r} ; множитель 2 в (1.1) отражает наличие спина (мы ограничимся только таким учетом спиновых эффектов). В пространственно однородной системе функция распределения не зависит от \mathbf{r} , а n есть константа. Интегрирование в (1.1) и в других аналогичных выражениях производится по зоне Бриллюэна. При этом плотность электрического тока \mathbf{j} дается выражением

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \mathbf{v}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad (1.2)$$

где \mathbf{v} — групповая скорость носителей. Вычислив плотность тока, мы можем затем найти тензоры подвижности $\mu_{\alpha\beta}$ и коэффициентов диффузии $D_{\alpha\beta}$, выделив в \mathbf{j} слагаемые вида

$$j_{\text{dr}, \alpha} = e\mu_{\alpha\beta}nE_{\beta}, \quad j_{\text{dif}, \alpha} = -e \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (D_{\alpha\beta}n). \quad (1.3)$$

Член j_{dr} в (1.3) называется *дрейфовой составляющей плотности тока*, j_{dif} — *диффузионной* *).

В дальнейшем мы ограничимся случаем изотропной системы (или кубического кристалла в отсутствие магнитного поля). При этом тензоры $\mu_{\alpha\beta}$ и $D_{\alpha\beta}$ сводятся к скалярам и мы имеем

$$j_{\text{dr}} = en\mu\mathbf{E}, \quad j_{\text{dif}} = -e\nabla(Dn). \quad (1.4)$$

Функция f в уравнении (1.1) представляет собой решение кинетического уравнения Больцмана, удовлетворяющее очевидным условиям ограниченности и нормируемости. При этом мы сразу сделаем одно упрощающее предположение: будем считать, что процессы захвата носителей заряда примесными центрами протекают гораздо медленнее, нежели обмен энергией и квазимпульсом между ними и их окружением в решетке **). Это предположение хорошо выполняется в широком интервале условий и потому часто делается в теории кинетических коэффициентов. Оно позволяет полностью пренебречь в кинетическом уравнении членами, описывающими процессы захвата и генерации носителей, вычисляя функцию распределения при заданной их концентрации. Последняя определяется затем из уравнений кинетики захвата (или, в статическом случае, из условия рекомбинационного равновесия типа (I.4.5)). Коэффициент

*) Иногда принимается другое определение: плотностью диффузионного тока называют только выражение $-eD_{\alpha\beta}(\partial n/\partial x_{\beta})$, а слагаемое $-en(\partial D_{\alpha\beta}/\partial x_{\beta})$ именуют плотностью термоэлектрического тока (см. ниже, § 4).

***) Количественный критерий применимости этого предположения очевиден: средние времена свободного пробега по квазимпульсу и по энергии должны быть малы по сравнению со «временем захвата» $(cN)^{-1}$, где c и N — коэффициент захвата и концентрация соответствующих центров.

захвата при этом дается выражением [11]

$$c = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3 n} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) S(\mathbf{p}) v(\mathbf{p}), \quad (1.5)$$

где $S(\mathbf{p})$ — эффективное сечение захвата электрона рассматриваемым примесным центром, а v есть абсолютная величина скорости электрона. Само сечение захвата подлжит вычислению из механики (квантовой или классической) с последующим усреднением по состояниям решетки. Функцию $S(\mathbf{p})$ мы будем считать известной.

В условиях термодинамического равновесия функция распределения f_0 зависит только от энергии электрона $W_{\mathbf{p}}$. При наложении внешнего поля это уже не так. Удобно представить $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ в виде

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f_s + f_a, \quad (1.6)$$

где f_s и f_a суть соответственно симметричная и антисимметричная функции квазиимпульса:

$$f_s(-\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f_s(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad f_a(-\mathbf{p}, \mathbf{r}) = -f_a(\mathbf{p}, \mathbf{r}). \quad (1.7)$$

В условиях равновесия симметричная функция f_s превращается в $f_0(W_{\mathbf{p}})$ *, а антисимметричная — в нуль.

Поскольку $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{p}} W_{\mathbf{p}}$ есть нечетная функция \mathbf{p} , только слагаемое f_a дает отличный от нуля вклад в правую часть (1.2). С другой стороны, концентрация электронов и коэффициент захвата, согласно (1.1) и (1.5), выражаются только через функцию f_s .

§ 2. Кинетическое уравнение

Кинетическое уравнение имеет вид [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla f) + (\mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{p}} f) = J[f], \quad (2.1)$$

Здесь F — результирующая сила, действующая на электрон со стороны внешних полей, $J[f]$ — интеграл столкновений, который можно представить в виде

$$J[f] = J_{el}[f] + J_{ee}[f], \quad (2.2)$$

*) Напомним, что энергия есть всегда четная функция квазиимпульса: $W_{\mathbf{p}} = W_{-\mathbf{p}}$.

где первое слагаемое в правой части, J_{ei} , описывает рассеяние электронов на фононах, на примеси и на иных несовершенствах решетки, а второе слагаемое, J_{ee} — рассеяние электронов друг на друге.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением невырожденного электронного (дырочного) газа. Очевидно, при этом функционал J_{ei} линеен, а J_{ee} — квадратичен по функции распределения $f(\mathbf{p})$. Именно,

$$J_{ei}[f] = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}' \{ \mathcal{P}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) f(\mathbf{p}') - \mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f(\mathbf{p}) \}, \quad (2.3)$$

где $\mathcal{P}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ и $\mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — величины, пропорциональные соответственно вероятностям рассеяния с изменением импульса $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$ и $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$, а множитель $2/(2\pi\hbar)^3$ выделен как и в (1.1) для удобства *).

Вероятности $\mathcal{P}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ и $\mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ подлежат вычислению из механики — квантовой или классической. Заметим, однако, что они не независимы. Действительно, согласно принципу детального равновесия, выражение, стоящее в фигурных скобках в (2.3), в условиях термодинамического равновесия должно тождественно обращаться в нуль. Это указывает на существование следующей связи:

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \exp \left\{ \frac{W_{\mathbf{p}'} - W_{\mathbf{p}}}{T_l} \right\}, \quad (2.4)$$

где T_l — температура решетки. Разумеется, при вычислении вероятностей перехода для того или иного конкретного механизма рассеяния соотношение (2.4) получается автоматически.

Далее, для межэлектронного интеграла столкновений мы имеем (с учетом принципа детального равновесия)

$$J_{ee}[f] = \int d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'' d\mathbf{p}''' Q(\mathbf{p}', \mathbf{p}'''; \mathbf{p}, \mathbf{p}'') \times \\ \times \{ f(\mathbf{p}') f(\mathbf{p}''') - f(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}'') \}. \quad (2.5)$$

Здесь Q — величина, пропорциональная вероятности рассеяния электронов друг на друге, причем начальные импульсы их равны \mathbf{p} и \mathbf{p}'' , а конечные — равны \mathbf{p}' и \mathbf{p}''' .

*) При таком определении $\mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ есть произведение эффективного сечения рассеяния на скорость электрона в состоянии с квазиимпульсом \mathbf{p} .

В силу законов сохранения энергии и импульса *) Q содержит множитель

$$\delta(W_p + W_{p''} - W_{p'} - W_{p'''}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}'' - \mathbf{p}' - \mathbf{p}'''). \quad (2.5')$$

Наконец, сила \mathbf{F} в отсутствие магнитного поля дается выражением

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (2.6)$$

где \mathbf{E} и φ — напряженность и потенциал электрического поля.

Рассмотрим сначала случай термодинамического равновесия. Поскольку

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = J[f_0] = 0, \quad (2.7)$$

уравнение (2.1) принимает вид

$$(\mathbf{v}, \nabla f_0) + e(\mathbf{E}, \nabla_p f_0) = 0. \quad (2.1')$$

Вспоминая, что $\mathbf{v} = \nabla_p W_p$, видим, что уравнению (2.1') удовлетворяет любая функция от аргумента

$$W_p + e\varphi. \quad (2.8)$$

Второе из равенств (2.7) определяет при этом явный вид f_0 — это есть, разумеется, функция Больцмана с температурой решетки T_l :

$$f_0 = N \exp\left(-\frac{W_p + e\varphi}{T_l}\right), \quad (2.9)$$

где N — нормировочный множитель. Зависимость f_0 от аргумента (2.8) естественна: в принятом нами квазиклассическом приближении выражение (2.8) есть не что иное, как полная энергия электрона.

Распределение (2.9) может реализоваться, например, вблизи поверхности образца или у контакта двух полупроводников с различными значениями работы выхода. Область, в которой напряженность контактного поля, $-\nabla\varphi$, заметно отлична от нуля, как правило, невелика: она простирается в глубь образца на расстояние порядка

*) Мы не рассматриваем процессов переброса, мало существенных в интересующих нас задачах (почему и употребляем термин «импульс» вместо более точного «квазиимпульс»).

длины Дебая, зависящей от концентрации примеси ($\sim 10^{-4} \div 10^{-5}$ см). Значение $|\nabla\phi|$ вблизи контакта может оказаться довольно большим. Так, при разности работ выхода порядка 0,1 эв и толщине приконтактного слоя порядка 10^{-5} см мы имеем $|\nabla\phi| \sim 10^4$ в/см.

Заметим, что в силу (2.6) функция $f_0(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ зависит от значений напряженности поля не только в самой точке \mathbf{r} , но и в других точках образца: потенциал ϕ дается криволинейным интегралом от \mathbf{E} .

Заранее очевидно, что средний ток в состоянии, описываемом функцией распределения (2.9), равен нулю. Формально в этом легко убедиться, вычисляя интеграл в правой части (1.2). Суть дела состоит в том, что дрейфовая составляющая плотности тока точно компенсируется диффузионной. Действительно, в условиях, близких к равновесным, величины μ и D связаны соотношением Эйнштейна

$$D = \frac{\mu}{e} T_l. \quad (2.10)$$

Пользуясь соотношениями (1.1), (2.6) и (2.10), мы получаем

$$\mathbf{j}_{\text{dif}} = -\mu T_l \frac{\nabla n}{n} n = -e\mu n \mathbf{E} = -\mathbf{j}_{\text{dr}}.$$

Средняя энергия газа (в расчете на один электрон) составляет, разумеется, $(3/2)T_l$. Таким образом, в условиях термодинамического равновесия контактное поле не вызывает тока и соответственно не нагревает электронный газ. Оба эти утверждения, разумеется, совершенно тривиальны и, в сущности, вытекают из определения понятия «равновесие». Следует, однако, ясно представлять себе конкретный механизм явления — взаимную компенсацию двух потоков, вызванных соответственно полем и градиентом концентрации частиц.

Возвращаясь к неравновесному случаю, удобно переписать уравнение (2.1) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla f) + \frac{T}{n} (\nabla n, \nabla_{\mathbf{p}} f) + \left(e\mathbf{E} - T \frac{\nabla n}{n}, \nabla_{\mathbf{p}} f \right) = J[f]. \quad (2.11)$$

Здесь T — «электронная температура», определяемая через среднюю энергию хаотического движения,

отнесенную к одному электрону *):

$$\langle W \rangle = \frac{3}{2} T. \quad (2.12)$$

Выражение

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} - \frac{T}{e} \frac{\nabla n}{n} \quad (2.13)$$

при $T = T_l$ представляет собой градиент электрохимического потенциала. В условиях, далеких от равновесия, последнее понятие теряет однозначный смысл. Мы будем называть \mathbf{E}^* эффективной напряженностью поля (в условиях равновесия $\mathbf{E}^* = 0$).

При достаточно малых значениях \mathbf{E} и ∇n только величина \mathbf{E}^* и ответственна за нарушение равновесия. Действительно, из стандартной теории кинетических явлений (см., например, [1]) известно, что в указанных условиях отношения $(f - f_0)/f_0$ и $(T - T_l)/T_l$ представляют собой величины соответственно первого и второго порядка малости по величинам \mathbf{E} и ∇n . Заменим в левой части (2.11) f на f_0 и T на T_l (оставляя, конечно, функцию f отличной от f_0 в интеграле столкновений, не содержащем малых величин \mathbf{E} и ∇n). Тогда последнее слагаемое останется конечным (и будет равно $-e(\mathbf{E}^*, \mathbf{v})(f_0/T)$), в то время как второе и третье в сумме дадут нуль: в силу (2.9) и (1.1)

$$\frac{\nabla n}{n} = \frac{\nabla f_0}{f_0}, \quad \nabla_p f_0 = -\frac{\mathbf{v}}{T_l} f_0,$$

и следовательно,

$$(\mathbf{v}, \nabla f_0) + \frac{T_l}{n} (\nabla n, \nabla_p f_0) = (\mathbf{v}, \nabla f_0) - \frac{T_l}{f_0} (\nabla f_0, \mathbf{v}) \frac{f_0}{T_l} \equiv 0.$$

При большом отклонении от равновесия (в частности, при учете нагрева электронного газа) это рассуждение уже не проходит и контактное поле участвует как в создании тока, так и в нагреве носителей заряда. При этом

*) Точный смысл этого понятия выясняется в § 3. Принятое определение отнюдь не означает, что функция распределения непременно имеет вид (2.9). Сама величина T зависит от напряженности внешнего поля и не обладает всеми свойствами обычной температуры. Так, например, попытка записать соотношение Эйнштейна в виде (2.10) с заменой T_l на T была бы, вообще говоря, неправильной (есть одно важное исключение — см. ниже, § 5).

удобнее пользоваться кинетическим уравнением непосредственно в форме (2.1), либо в виде, переписанном относительно симметричной и антисимметричной функций:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla f_a) + (\mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{p}} f_a) = J_{ei} [f_s] + J_{ee} [f_s f_s] + J_{ee} [f_a f_a], \quad (2.14a)$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla f_s) + (\mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{p}} f_s) = J_{ei} [f_a] + J_{ee} [f_s f_a]. \quad (2.14б)$$

Мы написали здесь два функциональных аргумента у межэлектронного интеграла столкновений, дабы явно отразить его квадратичную зависимость от f . Разумеется, эта запись носит символический характер, ибо функции распределения, входящие в J_{ee} , зависят от разных импульсов.

§ 3. Уравнения непрерывности

Из кинетического уравнения вытекают уравнения непрерывности, выражающие макроскопические законы сохранения. Это, в сущности, есть уравнения моментов. Для вывода их умножим уравнение (2.1) на

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \Phi(\mathbf{p}),$$

где $\Phi(\mathbf{p})$ — некоторая функция импульса, такая, что произведение $\Phi(\mathbf{p})f(\mathbf{p})$ достаточно быстро стремится к нулю при $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$, и проинтегрируем результат по \mathbf{p} . Введем обозначения

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} J[f] \Phi(\mathbf{p}) = J[\Phi], \quad (3.1)$$

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \Phi(\mathbf{p}) = n \langle \Phi(\mathbf{r}) \rangle. \quad (3.2)$$

В силу условия нормировки (1.1) величина $\langle \Phi(\mathbf{r}) \rangle$ есть локальное среднее значение Φ , отнесенное к одному электрону.

Замечая, что *)

$$\int d\mathbf{p} (\mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{p}} f) \Phi = - \int d\mathbf{p} f (\mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{p}}) \Phi, \quad (3.3)$$

*) Легко убедиться, что равенство (3.3) справедливо и в присутствии магнитного поля.

получим

$$\frac{\partial n \langle \Phi \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (n \langle v_\alpha \Phi \rangle) - n F_\alpha \langle \frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha} \rangle = J[\Phi]. \quad (3.4)$$

Исследуем уравнение (3.4) для трех случаев.

а) $\Phi = 1$.

При этом интеграл $J[\Phi]$ отличен от нуля лишь при наличии процессов генерации и рекомбинации носителей заряда. Полагая

$$J[1] \equiv \dot{n}_{\text{гес}},$$

получим из (3.4) с учетом (1.2)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{\mathbf{j}}{e} \right) = \dot{n}_{\text{гес}}. \quad (3.5)$$

Удобно ввести среднюю (дрейфовую) скорость носителей заряда, полагая

$$\langle \mathbf{v} \rangle \equiv \mathbf{u} = \frac{\mathbf{j}}{ne}. \quad (3.6)$$

Тогда вместо (3.5) получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \mathbf{nu} = \dot{n}_{\text{гес}}. \quad (3.5')$$

б) $\Phi = v_\beta$.

Согласно (3.6), в этом случае первое слагаемое в левой части (3.4) будет равно $\partial(nu_\beta)/\partial t$. Во втором слагаемом появится выражение

$$\langle v_\alpha v_\beta \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 n} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) v_\alpha v_\beta.$$

Под знаком интеграла удобно представить компоненты скорости в виде

$$v_\alpha = u_\alpha + c_\alpha(\mathbf{p}), \quad \langle c_\alpha \rangle = 0. \quad (3.7)$$

Очевидно, вектор \mathbf{c} есть не что иное, как скорость хаотического («теплового») движения частиц.

Пользуясь (3.7), получаем

$$\langle v_\alpha v_\beta \rangle = u_\alpha u_\beta + \langle c_\alpha c_\beta \rangle. \quad (3.8)$$

Второе слагаемое здесь представляет собой корреляционную функцию

$$c_{\alpha\beta} = \langle c_\alpha c_\beta \rangle \equiv \frac{2}{(2\pi\hbar)^3 n} \int d\mathbf{p} c_\alpha c_\beta f(\mathbf{p}). \quad (3.9)$$

В классической кинетической теории газов (см., например, [10]) она связана с тензором напряжений $P_{\alpha\beta}$ соотношением

$$nc_{\alpha\beta} = m^{-1}P_{\alpha\beta}, \quad (3.10)$$

где m — масса частицы.

При замене истинной массы на эффективную соотношение (3.10) в буквальном виде, вообще говоря, уже не имеет места. Действительно, тензор напряжений по определению связан с потоком импульса (а не квазиимпульса); оператор же импульса получается из оператора скорости умножением на массу свободного электрона. Для дальнейшего, однако, это обстоятельство несущественно: в интересующие нас уравнения непрерывности будет входить именно корреляционная функция (3.9).

Наконец, последнее слагаемое в левой части (3.4) в рассматриваемом случае принимает вид

$$nF_{\alpha}m_{\alpha\beta}^{-1},$$

где

$$m_{\alpha\beta}^{-1} = \left\langle \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial p_{\beta}} \right\rangle \quad (3.11)$$

есть средний тензор обратных эффективных масс. Заметим, что при неквадратичном законе дисперсии компоненты $m_{\alpha\beta}^{-1}$ зависят от вида функции распределения и, следовательно, от таких параметров, как температура, напряженность поля и т. д.

Собирая формулы, получим вместо уравнения (3.4)

$$\frac{\partial (nu_{\beta})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} [n(u_{\alpha}u_{\beta} + c_{\alpha\beta})] = nm_{\beta\alpha}^{-1}(F_{\alpha} + \Gamma_{\alpha}). \quad (3.12)$$

Здесь введено обозначение

$$J[v_{\beta}] = nm_{\beta\alpha}^{-1}\Gamma_{\alpha}.$$

Очевидно, Γ_{α} есть эффективная сила трения, обусловленная взаимодействием носителей заряда с колебаниями и дефектами решетки. Отметим, что в пренебрежении процессами переброса межэлектронные столкновения не дают вклада в Γ_{α} : в силу закона сохранения полного импульса системы электронов $J_{ee}[v_{\beta}] \equiv 0$.

Принимая во внимание (3.5'), уравнение (3.12) можно переписать в виде

$$n \frac{\partial u_\beta}{\partial t} + n u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (n c_{\alpha\beta}) - u_\beta \dot{n}_{\text{rec}} + n m_{\beta\alpha}^{-1} (F_\alpha + \Gamma_\alpha). \quad (3.13)$$

Последнее равенство есть аналог гидродинамического уравнения Навье — Стокса.

в) $\Phi = W_p$.

В этом случае уравнение (3.4) принимает вид

$$\frac{\partial n \langle W \rangle}{\partial t} + \text{div } \mathbf{q} - n (\mathbf{F}, \mathbf{u}) = - n P. \quad (3.14)$$

Здесь введены обозначения

$$\mathbf{q} = n \langle \mathbf{v} W \rangle \quad (3.15)$$

и

$$n P = - J [W]. \quad (3.16)$$

Очевидно, вектор \mathbf{q} есть не что иное, как полная плотность потока энергии, а величина $n P$ представляет собой мощность, выделяющуюся в единице объема решетки за счет столкновений. При этом следует иметь в виду, что в силу закона сохранения полной энергии системы электронов при межэлектронных столкновениях последние не дают вклада в P : интеграл столкновений $J_{\text{ee}}[W] \equiv 0$.

Обозначим через \bar{W} локальную среднюю кинетическую энергию (отнесенную к одному электрону) в системе отсчета, в которой $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0$. (Это есть, очевидно, энергия хаотического движения носителей заряда.) Разность

$$\langle W \rangle - \bar{W} = W_d(\mathbf{u})$$

будем называть *энергией дрейфа*; она, очевидно, связана с наличием систематического потока частиц.

Таким образом, первое слагаемое в левой части (3.14) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \{n (\bar{W} + W_d)\}.$$

Второе слагаемое будет содержать выражение

$$\begin{aligned} n \langle W_p v_\alpha \rangle &= n u_\alpha (\bar{W} + W_d) + n \langle c_\alpha W_p \rangle \equiv \\ &\equiv n u_\alpha (\bar{W} + W_d) + n \langle c_\alpha W_p \rangle_0 + n \{ \langle c_\alpha W_p \rangle - \langle c_\alpha W_p \rangle_0 \}, \end{aligned} \quad (3.17a)$$

где символ $\langle \dots \rangle_0$ обозначает локальное среднее, вычисленное в системе отсчета, в которой $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0$.

Введем обозначение

$$\langle c_\alpha W_p \rangle_0 = Q_\alpha. \quad (3.17б)$$

Очевидно, это есть плотность потока энергии (в расчете на одну частицу), связанная с теплопроводностью электронного газа.

Выражение в фигурных скобках в правой части (3.17а) определяет плотность потока энергии Q_d , связанную с наличием дрейфа [10]:

$$Q_d = \langle cW_p \rangle - \langle cW_p \rangle_0. \quad (3.17в)$$

Полная плотность потока энергии есть

$$\mathbf{q} = n\mathbf{u}(\bar{W} + W_d) + n(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_d). \quad (3.17г)$$

В случае квадратичного и изотропного закона дисперсии

$$W_p = \frac{p^2}{2m} = \frac{m\sigma^2}{2}$$

мы имеем, очевидно,

$$Q_{d\alpha} = m u_\beta c'_{\alpha\beta}. \quad (3.18)$$

В анизотропном (но квадратичном) случае, когда

$$W_p = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta}^{-1} p_\alpha p_\beta,$$

для Q_d также получается выражение типа (3.18):

$$Q_{d\alpha} = m_{\beta\gamma} u_\beta \langle c_\alpha c_\gamma \rangle,$$

где $m_{\beta\gamma}$ — компоненты тензора, обратного тензору $m_{\alpha\beta}^{-1}$. С другой стороны, при учете непараболичности в $Q_{d\alpha}$ входят и высшие корреляционные функции типа

$$\langle c_\alpha c_\beta c_\gamma \rangle.$$

Таким образом, собирая формулы, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \{n(\bar{W} + W_d)\} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{n u_\alpha (\bar{W} + W_d) + n Q_\alpha + n Q_{d\alpha}(\mathbf{u})\} - n(\mathbf{F}, \mathbf{u}) = J[W]. \quad (3.19)$$

С учетом (3.5) это дает уравнение непрерывности для плотности энергии

$$n \frac{\partial}{\partial t} (\bar{W} + W_d) + n(\mathbf{u}, \text{grad}(\bar{W} + W_d)) + \text{div} n(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_d) = \\ = n(\mathbf{F}, \mathbf{u}) - nP - \dot{n}_{\text{гес}}(\bar{W} + W_d). \quad (3.20)$$

Уравнения (3.5'), (3.12) и (3.20) не образуют замкнутой системы, ибо содержат корреляционную функцию (3.9). Подставляя в качестве Φ в (3.4) произведения трех, четырех и т. д. компонент квазиимпульса, можно получить бесконечную систему зацепляющихся уравнений, определяющих функцию (3.9) и корреляционные функции более высокого порядка. Явное решение этой системы (эквивалентное вычислению самой функции распределения f) оказывается, однако, исключительно трудным. Как правило, используют приближенный подход, либо обрывая бесконечную цепочку уравнений на некотором этапе, либо задавая вид функции распределения а priori. Неизвестными при этом остаются лишь некоторые входящие в нее параметры, которые и определяются из уравнений (3.5'), (3.12) и (3.20) (при известной функции $f(\mathbf{p})$ выражение (3.9) явно вычисляется в зависимости от названных параметров).

Пусть, например, закон дисперсии квадратичен, а функция распределения в системе координат, в которой газ как целое покоится, имеет вид

$$f = N \exp \left\{ - \frac{m_{\alpha\beta} c_{\alpha} c_{\beta}}{2T} \right\}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}. \quad (3.21)$$

Здесь N — нормирующий множитель, T — величина размерности энергии, не зависящая от c_{α} . Тогда, как легко убедиться, в системе главных осей тензора $m_{\alpha\beta}$ мы имеем

$$c_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{T}{m_{\alpha}} \quad (3.22)$$

(без суммирования по α). Здесь m_{α} есть соответствующее главное значение тензора $m_{\alpha\beta}$.

Формально распределение (3.21) не отличается от обычного максвелловского. Соответственно его и называют *сдвинутым максвелловским* или *максвелловским с дрейфом*. Величина T при этом играет роль температуры,

почему и называется *электронной температурой*. Она зависит, вообще говоря, от ряда экспериментально варьируемых параметров. Распределение (3.21) фактически реализуется в некоторых экспериментально интересных случаях (см. ниже, § 5).

§ 4. Плотность тока

Рассмотрим выражение для плотности тока горячих электронов в стационарных условиях. Ограничимся при этом изотропным и квадратичным законом дисперсии, полагая

$$W_p = p^2/2m.$$

Фактически для многих кристаллов это предположение не справедливо. Однако в интересующих нас задачах переход к более сложному закону дисперсии не играет принципиальной роли, приводя лишь к усложнению выкладок (см. Приложение III).

Будем также считать силу \mathbf{F} постоянной в пространстве. (Задача о плотности тока с учетом пространственной неоднородности поля рассматривается ниже, в § 6.)

Подставляя (1.6) в (1.2), мы имеем

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \mathbf{v}(\mathbf{p}) f_a(\mathbf{p}, \mathbf{r}). \quad (4.1)$$

Функцию f_a удобно выразить через f_s . Для этой цели введем оператор $\hat{\tau}$, определяя его равенством

$$\hat{\tau} \{J_{ei}[f_a] + J_{ee}[f_s f_a]\} = -f_a. \quad (4.2)$$

Тогда уравнение (2.14б) дает при $\partial f_a / \partial t = 0$

$$f_a = -\hat{\tau} \{(\mathbf{v}, \nabla f_s) + (\mathbf{F}, \nabla_p f_s)\}. \quad (4.3)$$

Во многих интересных случаях действие оператора $\hat{\tau}$ сводится просто к умножению на число τ — обычное время свободного пробега по импульсу. Исследование [2—5] показывает, что так может обстоять дело, если средняя дрейфовая скорость u , определяемая равенством (3.6), мала по сравнению со средней скоростью хаотического движения $v_T = (T/m)^{1/2}$:

$$u \ll v_T. \quad (4.4)$$

Этот вывод получается после довольно длинных вычислений, однако суть дела здесь очень проста. Рассмотрим, например, интеграл $J_{ei}[f]$. В отсутствие тока, когда $u=0$, антисимметричная часть функции распределения равна нулю, в то время как симметричная конечна. Можно думать поэтому, что в условиях (4.4) справедливо неравенство

$$f_a \ll f_s.$$

С другой стороны, большинство процессов рассеяния, описываемых интегралом столкновений $J_{ei}[f]$, носит, как известно [1], почти упругий характер. Поскольку функция f_a уже мала, мы вправе при вычислении $J_{ei}[f_a]$ вообще пренебречь неупругостью рассеяния. Тогда выражение (2.3) с учетом соотношения (2.4), закона сохранения энергии (скрытого в величинах $\mathcal{P}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$, $\mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$) и закона дисперсии (4.1) преобразуется к виду

$$J_{ei}[f_a] = -\frac{f_a}{\tau(W_{\mathbf{p}})}. \quad (4.5)$$

Здесь $\tau(W_{\mathbf{p}})$ — функция энергии, выражающаяся через $\mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ *).

Более тонкие рассуждения требуются лишь в случае существенно неупругого рассеяния. Так обстоит дело при взаимодействии электронов с оптическими фононами при не слишком высоких температурах и не слишком сильных полях: энергия фонона здесь сравнима со средней энергией электрона (или даже превосходит ее). Однако и в этом случае все же удастся ввести время свободного пробега [5].

С учетом (4.3) и (4.4) получаем из (4.1) для плотности тока

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2,$$

где

$$\mathbf{j}_1 = -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \tau(\mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{p}} f_s), \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{j}_2 = -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \tau(\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{p}} f_s). \quad (4.6b)$$

*) Выражение (4.5) остается в силе и для непараболического закона дисперсии, если только он изотропен, т. е. если энергия зависит лишь от абсолютной величины квазимпульса.

Очевидно, j_1 есть не что иное, как дрейфовая составляющая плотности тока. В рассматриваемом случае $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, и мы получаем, интегрируя по углам в правой части (4.6а):

$$\mathbf{j}_1 \equiv \mathbf{j}_{\text{др}} = -\frac{2e^2 \sqrt{2m}}{3 \tau \hbar^3} \mathbf{E} \int_0^\infty W^{3/2} \tau \frac{df_s}{dW} dW.$$

Удобно проинтегрировать здесь по частям, а также ввести множитель n с помощью (1.1). Получим окончательно (ср. (1.4))

$$\mathbf{j}_{\text{др}} = en\mu\mathbf{E}, \quad (4.7a)$$

где подвижность μ определяется равенствами

$$\mu = \frac{e\tilde{\tau}}{m}, \quad (4.8)$$

$$\tilde{\tau} = \frac{\int_0^\infty W^{1/2} \tau \left(1 + \frac{2}{3} \frac{d \ln \tau}{d \ln W}\right) f_s dW}{\int_0^\infty W^{1/2} f_s dW}.$$

Величины μ и $\tilde{\tau}$ зависят, вообще говоря, от координат и от напряженности поля \mathbf{E} .

Обратимся теперь к составляющей j_2 . Интегрируя в (4.6б) по углам, находим

$$\mathbf{j}_2 = -\frac{4e}{3m^2 (2\pi\hbar)^3} \left\{ \nabla \int_0^\infty p^4 \tau f_s d\mathbf{p} - \int_0^\infty p^4 f_s \nabla \tau d\mathbf{p} \right\}. \quad (4.9)$$

Введем обозначение

$$D = \frac{2}{3m} \frac{\int_0^\infty W^{3/2} f_s \tau dW}{\int_0^\infty W^{1/2} f_s dW}. \quad (4.10)$$

Тогда, принимая во внимание (1.1), можем переписать равенство (4.9) в виде

$$j_2 = -e\nabla(nD) + \frac{2en}{3m} \frac{\int_0^\infty W^{3/2} f_s \nabla \tau dW}{\int_0^\infty W^{1/2} f_s dW}. \quad (4.76)$$

Последнее слагаемое в правой части (4.76) отлично от нуля, лишь если неусредненное (по распределению электронов) время свободного пробега τ зависит от координат. Это может быть обусловлено, например, неравномерным распределением рассеивающей примеси в пространстве либо нарушением равновесия в газе фононов. В отсутствие эффектов указанного типа выражение (4.76) превращается в уже известную нам формулу (1.4) для плотности диффузионного тока j_{dif} . При этом величина D имеет смысл коэффициента диффузии горячих электронов.

Комбинируя равенства (4.8) и (4.10), получим обобщенное соотношение Эйнштейна:

$$\frac{\mu}{D} = \frac{3e}{2} \frac{\int_0^\infty W^{1/2} \tau \left(1 + \frac{2}{3} \frac{d \ln \tau}{d \ln W}\right) f_s dW}{\int_0^\infty W^{3/2} \tau f_s dW} \equiv \frac{e}{T^*}, \quad (4.11)$$

где T^* есть «эффективная температура», определяемая этим соотношением. Вообще говоря, она не совпадает с температурой T , определяемой равенством (2.12).

В стандартной теории кинетических коэффициентов в слабом поле диффузионный ток обычно определяют иначе, выделяя из (1.4) слагаемое, связанное с градиентом D . Именно, в слабом поле функция f_s имеет равновесный вид (2.9), причем нормировочный множитель удобно выразить через химический потенциал ζ , полагая

$$N \exp\left(-\frac{e\varphi}{T_l}\right) = \exp\left(\frac{\zeta}{T_l}\right). \quad (4.12)$$

Формула (1.1) дает, с учетом (4.12):

$$n = N_c \exp\left(\frac{\xi}{T_l}\right), \quad N_c = \frac{2(2\pi m T_l)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4.13)$$

Очевидно, плотность тока \mathbf{j}_{dif} можно изменять, независимо варьируя величины T_l и ξ . По этой причине формулу (4.76) (при $\nabla\tau = 0$) естественно переписать в виде

$$\mathbf{j}_2 = \mathbf{j}'_{\text{dif}} + \mathbf{j}_{\text{th}},$$

где

$$\mathbf{j}'_{\text{dif}} = -eD(\nabla n)_{T_l}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{j}_{\text{th}} = -eD \frac{\partial n}{\partial T_l} \nabla T_l - en \nabla D. \quad (4.15)$$

Выражение \mathbf{j}'_{dif} может служить определением «собственно диффузионного» тока, а \mathbf{j}_{th} называют плотностью термоэлектрического тока.

Легко убедиться, что формула (4.15) действительно приводит к стандартному [1] выражению для термо-эдс системы электронов. В самом деле, по определению дифференциальной термо-эдс α

$$\mathbf{j}_{\text{th}} = -en\mu\alpha\nabla T_l.$$

Приравнявая это правой части (4.15) и пользуясь формулами (4.12), (4.13) и соотношением Эйнштейна, легко находим

$$\alpha = -\frac{1}{e} \left\{ \frac{\xi}{T_l} - \frac{5}{2} - \frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln T_l} \right\}. \quad (4.16)$$

Это и есть формула стандартной теории. В частности, если $\tau \sim W^r$, где r — некоторое число, то

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln T_l} = r.$$

При учете нагрева электронного газа выделение термоэлектрической составляющей, вообще говоря, теряет однозначный смысл, ибо в неравновесных условиях такого смысла не имеет и само понятие температуры. Мо-

жет оказаться удобным, однако, сохранить указанную классификацию, полагая по определению

$$\mathbf{j}'_{\text{dif}} = -eD(\nabla n)_{T_l}, \quad (4.17a)$$

$$\mathbf{j}_{\text{th}} = -eD \frac{\partial n}{\partial T_l} \nabla T_l - en \nabla D. \quad (4.17б)$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай постоянной температуры решетки; соответственно будем опускать значок T_l в формуле (4.17a), равно как и первое слагаемое в правой части (4.17б).

Заметим, что принятое определение — не единственно возможное: можно было бы определить плотность диффузионного тока и равенством

$$\mathbf{j}''_{\text{dif}} = -eD(\nabla n)_T, \quad (4.17в)$$

где T — «электронная температура» (1.12). Соответственно и в формуле (4.17б) первое слагаемое в правой части надо было бы писать, заменяя T_l на T . Это оказывается удобным, например, если f_s есть функция Максвелла с эффективной температурой T (см. ниже (5.3)). При этом для плотности тока формально остаются в силе выражения, полученные в пренебрежении нагревом электронного газа, если заменить в них T_l на T (а температуру решетки считать постоянной). Комбинируя равенства (4.7a), (4.7б), (4.14) и (4.15) и пользуясь соотношением Эйнштейна с температурой T , мы получаем в этом случае

$$\mathbf{j} = en\mu(T) \left\{ \mathbf{E} - \frac{T}{en} \nabla n - \alpha(T) \nabla T \right\}. \quad (4.18)$$

Равным образом и для плотности потока энергии (3.15) мы имеем здесь

$$\mathbf{q} = \frac{\theta}{e} \mathbf{j} - \kappa(T) \nabla T, \quad (4.19)$$

где $\kappa(T)$ — электронная теплопроводность, деленная на постоянную Больцмана, а коэффициент θ имеет смысл средней энергии, переносимой одной частицей в потоке. Мощность P , входящая в уравнения (3.14), (3.20), здесь также представляет собой функцию T .

§ 5. Роль межэлектронных столкновений. Два предельных случая

Рассмотрим стационарные решения уравнений (2.14а), (2.14б), полагая $\partial \dot{f}_s / \partial t = \partial \dot{f}_a / \partial t = 0$. (Очевидно, это имеет смысл, если характерное время изменения поля велико по сравнению с временами релаксации.) Задача о вычислении функции распределения при этом несколько упрощается, но все же в общем случае остается чрезвычайно трудной: как видно из выражений (2.3) и (2.5), уравнения (2.14а), (2.14б) — интегро-дифференциальные и, вообще говоря, нелинейные. Для явного их решения приходится использовать аппроксимации того или иного типа. Характер аппроксимаций зависит от природы доминирующего механизма рассеяния энергии. При этом удобно выделить два принципиально различных случая.

а) Перераспределение энергии происходит в основном путем испускания и поглощения фононов — акустических или оптических, или и тех и других; взаимодействие между электронами несущественно. Очевидно, так всегда обстоит дело при достаточно малых *) концентрациях носителей заряда.

б) Перераспределение энергии обусловлено в основном межэлектронными столкновениями; роль фононов сравнительно несущественна. Очевидно, так всегда обстоит дело при достаточно большой концентрации носителей заряда.

В первом случае интегралы J_{ee} в правых частях (2.14а) и (2.14б) можно опустить, и мы получаем систему линейных уравнений, описывающих стационарное (но, вообще говоря, неравновесное) распределение носителей заряда по энергиям и импульсам:

$$(\mathbf{v}, \nabla f_a) + (\mathbf{F}, \nabla_p f_a) = J_{ei} [f_s], \quad (5.1a)$$

$$(\mathbf{v}, \nabla f_s) + (\mathbf{F}, \nabla_p f_s) = J_{ei} [f_a]. \quad (5.1б)$$

Во втором случае имеются две возможности — соответственно тому, что взаимодействие с фононами (и строго говоря, с другими несовершенствами решетки)

*) Точный смысл слов «достаточно малая» и «достаточно большая» концентрация будет указан ниже (см. текст после формулы (5.10)).

характеризуется не одним, а двумя временами свободного пробега — по энергии $\tau_{эН}^*$) и по импульсу τ , причем либо $\tau \ll \tau_{эН}$ (например, рассеяние на акустических фононах), либо $\tau \sim \tau_{эН}$ (например, рассеяние на оптических фононах).

Обозначим через $\tau_{ее}$ характерное время межэлектронных столкновений. При выполнении неравенства $\tau_{ее} \ll \tau$ можно исходить и непосредственно из уравнения (2.1). В первом приближении в нем можно отбросить все слагаемые, кроме межэлектронного интеграла столкновений. Тогда для функции распределения получается уравнение

$$J_{ее}[f] = 0, \quad (5.2)$$

решение которого, согласно (2.5) и (2.5'), имеет вид сдвинутого максвелловского распределения

$$f = N \exp\{-W_{v-u}/T\}. \quad (5.3)$$

Величины N , u и T в принципе могут зависеть от координат. Заметим, что электронная температура T отнюдь не обязана совпадать с температурой решетки, ибо уравнение (5.2) не учитывает никаких процессов, описывающих установление равновесия между электронами и решеткой. Тем не менее во всех расчетах, касающихся только электронной системы, мы вправе рассматривать T как термодинамическую температуру; в частности, в этом случае справедливо соотношение Эйнштейна (2.10) с заменой T_l на T .

Значения u и T определяются в следующих приближениях, когда в рассмотрение включается взаимодействие электронов с их окружением в решетке. Проще всего воспользоваться для этой цели уравнениями непрерывности (3.5'), (3.12) и (3.20). При этом определяется и величина N , связанная с концентрацией электронов условием нормировки (1.1).

С другой стороны, при выполнении неравенств $\tau \ll \tau_{ее} \ll \tau_{эН}$ всеми слагаемыми, кроме $J_{ее}[f]$, можно пренебречь только в уравнении (2.14а). Тогда для симметричной части функции распределения в системе координат, в которой газ носителей как целое покоится,

*) В случае рассеяния на несовершенствах решетки, рассматриваемых как статические, $\tau_{эН} = \infty$.

находим (ср. 3.21))

$$f_s = N \exp \{-W_p/T\}. \quad (5.4)$$

Антисимметричная часть f_a определяется из уравнения (2.14б), в левую часть которого надо подставить выражение (5.4). Найдя f_a , можем вычислить плотность тока, после чего уравнения (3.5') и (3.20) позволяют определить N и T .

Мы видим, таким образом, что между случаями а) и б) имеется глубокая разница. Во втором из них электроны можно рассматривать как термодинамическую подсистему, равновесие внутри которой устанавливается сравнительно быстро (за счет частых межэлектронных столкновений). Вид функции распределения при этом навязывается сразу, и последующие медленные процессы взаимодействия носителей заряда с решеткой лишь определяют параметры T и u , входящие в $f(p)$. С другой стороны, в первом случае представление об электронном газе как о самостоятельной подсистеме несостоятельно; сам вид функции распределения по импульсам (в неравновесных условиях а priori неизвестный) задается теми же процессами взаимодействия носителей заряда с их окружением в решетке, которые определяют и средние значения энергии и импульса системы электронов.

Критерий, отделяющий первый случай от второго, можно получить, сравнивая независимо вычисленные времена свободного пробега по энергии за счет столкновений электронов друг с другом и с фононами: τ_{ee} и $\tau_{эф}$. При этом неизбежно приходится делать какие-то предположения относительно закона дисперсии электронов. Мы ограничимся, следуя [3] и [9], изотропной параболической аппроксимацией.

Как и раньше, обозначим через $v_T = \sqrt{T/m}$ среднюю скорость хаотического движения электронов. Очевидно,

$$\tau_{ee} \sim (v_T n \sigma_{tr})^{-1}, \quad (5.5a)$$

где σ_{tr} — транспортное сечение рассеяния электрона на электроне. Поскольку массы электронов одинаковы, за время τ_{ee} в среднем передается энергия порядка T . С другой стороны,

$$\tau_{эф} \sim \frac{T}{eEu}. \quad (5.5б)$$

Действительно, правая часть (5.5б) есть время, за которое электрон, двигаясь в электрическом поле E , набирает энергию порядка T ; в стационарном состоянии это же должно быть и время, за которое энергия порядка T передается фононам.

Отношение двух рассматриваемых времен есть

$$\gamma \equiv \frac{\tau_{\text{эп}}}{\tau_{\text{ее}}} \sim \frac{T n \sigma_{\text{тр}} v_T}{e E u}. \quad (5.6)$$

Имея в виду только порядковую оценку, можем, как и в § 4, ввести время свободного пробега по импульсам τ и длину свободного пробега $l = \tau v_T$. Тогда, очевидно,

$$u = \frac{e E l}{m v_T}$$

и, следовательно,

$$\gamma \sim \frac{n \sigma_{\text{тр}} T^2}{e^2 E^2 l}. \quad (5.7)$$

В соответствии со сказанным сечение рассеяния $\sigma_{\text{тр}}$ надо вычислять так, как если бы никаких других механизмов рассеяния, кроме электрон-электронного, вообще не было. Следует лишь принять во внимание, что энергия взаимодействия между двумя электронами U экранирована благодаря присутствию остальных. Приближенно ее можно описать формулой Дебая:

$$U = \frac{e^2}{\epsilon r} \exp(-r/r_0). \quad (5.8)$$

Здесь r — расстояние между электронами, ϵ — диэлектрическая проницаемость решетки,

$$r_0 = \sqrt{\frac{\epsilon T}{8 \pi n e^2}}$$

— дебаевский радиус. Формула (5.8) справедлива, если

$$l \gg r_0, \quad T \gg \frac{e^2}{\epsilon} n^{1/3}, \quad r_0 \gg n^{-1/3}. \quad (5.9)$$

Как известно из механики, задача о движении двух частиц сводится к совокупности двух задач — о свободном движении центра инерции и о движении одной частицы с приведенной массой в центральном поле U .

Последняя задача формально не отличается от случая рассеяния электронов на заряженной примеси, что и позволяет воспользоваться соответствующим значением для σ_{tr} [1]:

$$\sigma_{tr} \approx \frac{\pi e^4}{\varepsilon^2 T^2} \ln \frac{\varepsilon T r_0}{e^2}.$$

Таким образом,

$$\gamma \approx \frac{\pi n e^2}{\varepsilon^2 l E^2} \ln \frac{\varepsilon T r_0}{e^2}. \quad (5.10)$$

При $\gamma \ll 1$ рассеяние электронов друг на друге не существенно (случай а)), при $\gamma \gg 1$ оно доминирует (случай б)).

Выражение для γ удобно переписать в виде

$$\gamma = 0,3 \frac{n}{10^{15}} \frac{10^{-5}}{l} \left(\frac{4,8 \cdot 10^3}{\varepsilon E} \right)^2 \ln \left[30 \left(\frac{\varepsilon T}{4,8 \cdot 10^3} \right)^{3/2} \left(\frac{10^{15}}{n} \right)^{1/2} \right], \quad (5.10')$$

где величины n , l , E и T выражаются соответственно в $см^{-3}$, $см$, $в/см$ и $^{\circ}К$. При $\varepsilon = 16$, $n = 10^{15} см^{-3}$, $l = 10^{-5} см$, $E = 300 в/см$ и $T = 300^{\circ}К$ эта формула дает $\gamma \sim 1$. Таким образом, критическая концентрация, разделяющая случаи а) и б), в указанных условиях составляет примерно $10^{15} см^{-3}$.

§ 6. Локальные аппроксимации

Задача о явном вычислении функции распределения (и, следовательно, кинетических коэффициентов) встречается с большими трудностями. Даже в однородном поле, когда пространственными производными в уравнениях (2.14а), (2.14б) можно пренебречь, аналитическое решение удастся получить только с помощью некоторых упрощающих предположений, не всегда адекватных истинному положению вещей. Для более сложных систем приходится либо прибегать к численному решению кинетического уравнения (см., например, книгу [5]), либо а priori задаваться каким-то видом функции распределения, основываясь на соображениях полуинтуитивного характера (часто берут функцию (5.3), определяя N , T и u из уравнений (3.5'), (3.12) и (3.20) — независимо от того, какой именно механизм рассеяния энергии доминирует; величина возникающей при этом ошибки заранее

не ясна). В пространственно неоднородном (и тем более нестационарном) случае ситуация еще более усложняется, а расчеты становятся еще менее надежными. К счастью, однако, важнейшие принципиальные черты явления доменной неустойчивости удастся исследовать, не специализируя явно конкретного вида кинетических коэффициентов, а указывая лишь некоторые качественные их особенности (вроде наличия падающего участка на вольтамперной характеристике однородного образца).

Одним из важнейших здесь является вопрос об аргументах, от которых зависят кинетические коэффициенты нагретого электронного газа. В пространственно однородном случае ответ на этот вопрос очевиден: $\mu = \mu(\mathbf{E})$, $D = D(\mathbf{E})$, $c = c(\mathbf{E})$, где \mathbf{E} — постоянная напряженность однородного электрического поля, созданного в образце каким-либо внешним источником. (Последнее обстоятельство отражено в том, что величина \mathbf{E} подчиняется уравнению Кирхгофа для контура, состоящего из рассматриваемого образца, нагрузки и источника эдс.) Однако при нарушении пространственной однородности задача становится гораздо менее тривиальной, ибо кинетическое уравнение содержит производные по координатам. Это означает, что связь между \mathbf{E} и f_s будет, вообще говоря, нелокальной. Соответственно нелокальной будет и зависимость кинетических коэффициентов от напряженности поля (неизбежно возникающая при учете нагрева электронного газа).

Подчеркнем, что рассматриваемая неоднородность системы может быть связана не только с макроскопически неоднородным легированием, наличием контактов и т. п., но и с менее тривиальными причинами. Как мы видели в главе I, система носителей заряда, пространственно однородная в условиях термодинамического равновесия, может перейти в неоднородное состояние, если это равновесие нарушено и отклонение от него достаточно велико. То же относится и к зависимости напряженности поля и других аналогичных величин от времени: при нарушении равновесия такая может появиться, даже если внешние условия — статические (колебания тока в цепи рис. 13 возникают при постоянной эдс батареи). Неоднородность такого типа мы будем называть неравновесной.

Теория горячих электронов в общем случае произвольной пространственно неоднородной системы связана с большими математическими трудностями. В системе, содержащей только неравновесную неоднородность, эти трудности обычно обходят, полагая, что координатная и временная зависимости кинетических коэффициентов входят только через мгновенные и локальные значения той или иной макроскопической величины. Это предположение

удается приближенно оправдать, если временная зависимость рассматриваемых величин не слишком сильна и пространственная неоднородность не слишком велика. Именно, такие величины, как концентрация частиц, напряженность поля и т. д., должны мало изменяться за время свободного пробега по энергии $\tau_{\text{ЭН}}$ и мало меняться на длине свободного пробега по энергии $l_{\text{ЭН}}$. В дальнейшем мы всегда будем считать соответствующее

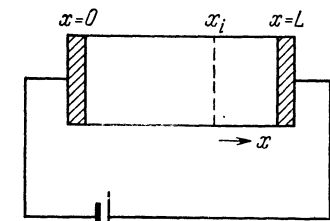


Рис. 13. К выводу условия нейтральности.

Заштрихованы приконтактные области, которые могут содержать объемный заряд. Пунктиром указано сечение одной из плоскостей разрыва индукции.

неравенство выполненным (тем самым считается, что и длина образца $L \gg l_{\text{ЭН}}$).

Аппроксимации указанного типа мы будем называть *локальными*. Различные такие аппроксимации («модели») отличаются друг от друга выбором соответствующей макроскопической величины*). В разных условиях справедливы разные локальные аппроксимации.

Проще всего обстоит дело в случае, когда рассеяние энергии происходит в основном за счет межэлектронных столкновений (случай б) § 4). Именно, пользуясь по-прежнему аппроксимацией (4.5) и функцией распределения (5.4), легко убедиться, что все кинетические коэффициенты локально выражаются здесь только через

*) Очевидно, представление о локальной и мгновенной зависимостях имеет смысл лишь по отношению к тому или иному аргументу: кинетические коэффициенты, как и сама функция распределения, могут локально зависеть от одной величины и нелокально — от другой. Так, например, функция (2.9) нелокально зависит от напряженности поля и локально — от потенциала $\varphi(\mathbf{r})$.

электронную температуру T . Действительно, коль скоро функция f_s явно задана выражением (5.4), для антисимметричной части f_a получается формально та же задача, что и в слабом поле, только с заменой T_l на T . Соответственно для подвижности и коэффициента диффузии можно воспользоваться просто формулами стандартной теории [1], производя в них указанную замену. Сказанное справедливо и в применении к коэффициенту захвата (1.3), если можно пренебречь явной зависимостью сечения захвата $S(\mathbf{p})$ от напряженности поля. Последняя аппроксимация означает, что электрическое поле принимается во внимание только в «статистической» части задачи — при вычислении функции распределения, но не в динамической части. Это допустимо, если величина E мала по сравнению с характерной «кристаллической» напряженностью поля (последняя обычно не бывает меньше $10^3 \div 10^4$ в/см).

В случае, когда межэлектронные столкновения несущественны и главную роль в рассеянии энергии играют фононы (случай а) § 4), ситуация оказывается более сложной. Здесь были предложены три аппроксимации — «полевая», «токовая» и «мощностная», в которых кинетические коэффициенты локально зависят соответственно от напряженности электрического поля*), от плотности тока [7] и от мощности, потребляемой в образце [8].

Мы выясним сейчас, в каких условиях оправдана полевая аппроксимация. Подчеркнем прежде всего, что термин «полевая» надлежит употреблять с осторожностью, относя его только к той части поля, которая связана с эдс батареи.

Определим прежде всего сами понятия «внутреннего» и «внешнего» полей. Простоты ради ограничимся потенциальным полем (это ограничение не принципиально). Заметим, что электрическое поле, потенциал которого $\varphi_0(x)$ всюду ограничен, допускает равновесное распределение (2.9) (с заменой φ на φ_0). Это означает, что в статических условиях нарушение равновесия может быть вызвано только полем, потенциал которого где-либо

*) Полевая аппроксимация использовалась в большинстве работ по теории доменной электрической неустойчивости (в частности, во всех работах, упоминаемых в главах 3—5); по всей видимости, она была предложена независимо многими авторами.

расходится. Действительно, в этом случае функция (2.9) становится ненормируемой, и, следовательно, реальная физическая ситуация описывается другим решением кинетического уравнения, зависящим от напряженности поля не только через потенциал, но и непосредственно. По этой причине в функции распределения и появляется отличная от нуля антисимметричная часть f_a . Соответственно отличной от нуля оказывается и плотность тока. Так, например, обстоит дело в случае постоянного поля, потенциал которого расходится на бесконечности *).

Представим теперь полную напряженность поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t), \quad (6.1)$$

где слагаемые \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}_1 удовлетворяют условиям

$$\oint \mathbf{E}_0 d\mathcal{L} = 0, \quad (6.2a)$$

$$\int \mathbf{E}_1 d\mathcal{L} = V, \quad \mathbf{E}_1 \rightarrow 0 \text{ при } \mathcal{L} \rightarrow 0. \quad (6.2b)$$

Здесь $d\mathcal{L}$ — элемент длины, интеграл в (6.2б) берется по длине образца, V — напряжение на образце, равное $\mathcal{E} - RJ$, \mathcal{E} — эдс внешнего источника, R — сопротивление нагрузки (может быть, нелинейное), J — сила тока в нагрузке.

Мы ограничиваемся случаем $T_l = \text{const}$, чтобы исключить несущественные для наших целей осложнения, связанные с возникновением термо-эдс. Заметим, что поле \mathbf{E}_0 по определению статическое. Флуктуационное поле удобно включить в \mathbf{E}_1 , понимая под \mathcal{L} сумму эдс батареи и случайных эдс, возникающих либо в цепи нагрузки, либо в самом образце.

Условия (6.1), (6.2а, б) однозначно определяют напряженность потенциального поля $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$. При $L \rightarrow \infty$ и $0 < V/L < \infty$ величина \mathbf{E}_1 остается конечной, откуда явствует, что соответствующий потенциал условию ограни-

*) Образец считается бесконечным, если его длина в направлении тока, L , значительно превышает все другие характерные длины. В образце конечных размеров функция (2.9) остается нормируемой и в постоянном поле; однако она, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям, накладываемым на контактах. Дальнейшие рассуждения можно распространить и на случай конечного образца.

ченности не удовлетворяет. Величина $E_0(\mathbf{r})$ есть среднее по времени значение напряженности поля, которое было бы в точке \mathbf{r} в отсутствие внешней эдс. Мы будем называть это поле внутренним, а поле E_1 — внешним. Эти названия носят несколько условный характер, так как в E_1 включены и тепловые флуктуации. Для нас, однако, интересен случай нагретого электронного газа, когда главную роль играет поле, создаваемое эдс батареи. При этом существенно, что в пространственно неоднородной системе влияние батареи проявляется не только прямо, но и косвенно — через перераспределение носителей заряда, в свою очередь создающих поле, которое дает вклад в E_1 . Говоря в дальнейшем о локальной модели, мы всегда будем иметь в виду локальность применительно к так определенному внешнему полю. Индекс «1» при этом, как правило, будет опускаться, если это не приведет к недоразумениям.

В условиях равновесия функция распределения может зависеть от координат только через аргумент

$$\tilde{W} = W_p + e\varphi_0(\mathbf{r}). \quad (6.3)$$

При нарушении равновесия может появиться еще и дополнительная координатная зависимость f . Локальная полевая аппроксимация состоит в предположении, что эта «неравновесная» зависимость входит только через напряженность внешнего поля.

Чтобы выяснить, когда именно реализуется указанная ситуация, обратимся вновь к кинетическому уравнению и исследуем, при каких условиях существенны члены с пространственными производными [6].

Рассмотрим сначала систему с только неравновесной неоднородностью*). При этом внутреннее поле вообще отсутствует и рассматриваемая в дальнейшем сила F обусловлена только внешним полем: $F = eE_1$. Простоты ради ограничимся той же параболической и изотропной моделью (4.1), что и в предыдущем параграфе; кроме того, пренебрежем возможной в принципе явной

*) Примером такой системы может служить внутренняя область достаточно длинного образца, получающаяся из последнего исключением приконтактных слоев объемного заряда (роль последних при этом сводится к заданию определенных граничных условий — см. следующий параграф).

зависимостью τ от координат и будем рассматривать только стационарную задачу. (Последнее оправдано, если характерные времена велики по сравнению со временем свободного пробега по энергии $\tau_{\text{эн}}$. Это предположение уже было сделано ранее; заметим, однако, что в теории доменов оно может оказаться довольно жестким, ибо требует, например, малости $\tau_{\text{эн}}$ по сравнению с дифференциальным максвелловским временем релаксации.) Таким образом, приходим к уравнениям (5.1а) и (5.1б). При этом, интересуясь лишь порядковой оценкой различных слагаемых, мы заведомо можем воспользоваться аппроксимацией (4.5), и тогда уравнение (5.1б) дает

$$\dot{f}_a = -\tau(\mathbf{v}, \nabla f_s) - \tau(\mathbf{F}, \nabla_p f_s). \quad (6.4)$$

Подставляя это в (5.1а), получим

$$\begin{aligned} & -\tau \left[v_\alpha v_\beta \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(F_\beta \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} \right) \right] - \\ & - F_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left[\tau \left(v_\beta \frac{\partial f_s}{\partial x_\beta} + F_\beta \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} \right) \right] = J_{\text{ei}} [f_s]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Наша задача состоит в оценке порядка величины различных слагаемых в уравнении (6.5). Для этой цели обозначим через l_0 характерную «длину неоднородности» — наименьшее расстояние, на котором заметно меняется напряженность поля или концентрация частиц, или и то и другое.

Как и раньше, обозначим через l длину свободного пробега по импульсу:

$$l = \tau v_T,$$

где время свободного пробега надлежит вычислять при $W_p = T$. Наконец, обозначим через $p_T = \sqrt{mT}$ характерное значение импульса частиц. Будем измерять значения координат, скоростей, импульсов и энергии соответственно в единицах l_0 , v_T , p_T и T . Следует ожидать, что при этом безразмерные производные (в существенной области значений рассматриваемых переменных) будут порядка единицы. Таким образом, для четырех последовательных слагаемых в левой части (6.5)

получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \tau v_\alpha v_\beta \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &\sim \frac{l^2}{l_0^2} \frac{f_s}{\tau}, \\ \tau v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(F_\beta \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} \right) &\sim \frac{l}{l_0} \frac{Fl}{T} \frac{f_s}{\tau}, \\ \tau F_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\tau v_\beta \frac{\partial f_s}{\partial x_\beta} \right) &\sim \frac{l}{l_0} \frac{Fl}{T} \frac{f_s}{\tau}, \\ \tau F_\alpha F_\beta \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\tau \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} \right) &\sim \left(\frac{Fl}{T} \right)^2 \frac{f_s}{\tau}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

(Разумеется, здесь всюду имеется в виду абсолютная величина F .) Мы видим, что результат существенно зависит от соотношения между двумя параметрами

$$\beta_1 = \frac{Fl}{T}, \quad \beta_2 = \frac{l}{l_0}. \quad (6.7)$$

Первый из них представляет собой (с точностью до несущественного множителя) отношение работы поля, совершаемой на длине свободного пробега l , к средней энергии носителя заряда. В соответствии с условием (4.4) это отношение должно быть мало по сравнению с единицей:

$$\beta_1 \ll 1. \quad (6.8)$$

Второй параметр, очевидно, дает меру неоднородности системы. Согласно (6.6) и (6.7), слагаемыми с пространственными производными в кинетическом уравнении можно пренебречь, если

$$\beta_2 \ll \beta_1,$$

т. е. если

$$\frac{Fl_0}{T} \equiv \frac{eE_1 l_0}{T} \gg 1. \quad (6.9)$$

Величину

$$l_E = \frac{\beta_2}{\beta_1} l_0 = \frac{T}{eE_1} \quad (6.10)$$

можно назвать длиной нелокальности. Неравенство (6.9) означает условие малости ее по сравнению с длиной неоднородности l_0 . Коль скоро это условие выполняется,

уравнение (6.6) принимает формально тот же вид, что и в пространственно однородном случае:

$$-F_\alpha F_\beta \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\tau \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} \right) = J_{ei} [f_s]. \quad (6.11)$$

Подчеркнем, однако, что здесь напряженность поля может и зависеть от координат — лишь бы эта зависимость была достаточно плавной (в смысле неравенства (6.9)). Решение уравнения (6.11) $f_s^{(0)}$ содержит величину E_1 параметрически. Это означает, что в рассматриваемом случае функция $f_s^{(0)}$ связана с напряженностью поля локально: значение ее в некоторой точке пространства \mathbf{r} выражается лишь через напряженность поля в той же самой точке. То же относится, очевидно, и к коэффициенту захвата c . Для функции f_a это уже не так: согласно (6.4), она содержит и пространственные производные от f_s . Тем не менее с точностью до высших степеней малого параметра β_2/β_1 удается ввести кинетические коэффициенты — тензоры подвижности и диффузии, локально зависящие от напряженности внешнего поля $E_1(\mathbf{r})$. Чтобы убедиться в этом, надо рассмотреть поправки следующего приближения к (6.11).

Положим

$$f_s = f_s^{(0)} + f_s^{(1)}, \quad (6.12)$$

где $f_s^{(0)}$ — решение уравнения (6.11), а $f_s^{(1)}$ — поправка первого порядка малости по параметру β_2/β_1 .

Введем линейные операторы \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 и \mathcal{L} , определив их равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0[f] &= F_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\tau F_\beta \frac{\partial f}{\partial p_\beta} \right), \\ \mathcal{L}_1[f] &= \tau v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(F_\beta \frac{\partial f}{\partial p_\beta} \right) + F_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\tau v_\beta \frac{\partial f}{\partial x_\beta} \right), \\ \mathcal{L}[f] &= -\mathcal{L}_0[f] - J_{ei}[f]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

На основании (6.5), (6.11) и (6.13) получаем

$$\mathcal{L}[f_s^{(0)}] = 0, \quad (6.14)$$

$$\mathcal{L}[f_s^{(1)}] = \mathcal{L}_1[f_s^{(0)}]. \quad (6.15)$$

Заметим, что неоднородное дифференциальное уравнение (6.15) (с соответствующими граничными условиями) разрешимо лишь при условии

$$\int \tilde{f}_s^{(0)} \mathcal{L}_1 [f_s^{(0)}] d\mathbf{p} = 0, \quad (6.16)$$

где $\tilde{f}_s^{(0)}$ — решение однородной краевой задачи, сопряженной задаче (6.14). Легко показать, что в рассматриваемом случае условие (6.16) сводится к уравнению непрерывности.

Оператор \mathcal{L} действует только на импульсы, но не на координаты — последние входят в \mathcal{L} лишь параметрически. По этой причине решение уравнения (6.14) определено лишь с точностью до произвольного множителя, зависящего от координат. Соответственно можем написать

$$f_s^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \eta(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (6.17)$$

где $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — решение уравнения (6.14), локально зависящее от напряженности поля $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$, а $\eta(\mathbf{r})$ — некоторая функция координат. С точностью до нормировки $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ получится из функции распределения в однородном поле напряженности \mathbf{E}_0 заменой вектора \mathbf{E}_0 на $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$. Если $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — некоторое решение уравнения (6.14), локально зависящее от $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$, то и $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) / \int \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}$ также будет решением, локально зависящим от $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$. По этой причине можно выбрать $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = 1. \quad (6.18)$$

Тогда из условия нормировки функции распределения

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} (f_s^{(0)} + f_s^{(1)}) = n(\mathbf{r}) \quad (6.19)$$

находим, что множитель $\eta(\mathbf{r})$ связан с локальным значением концентрации частиц:

$$\eta(\mathbf{r}) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} n(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{p} f_s^{(1)}. \quad (6.20)$$

Поскольку условие (6.16) предполагается выполненным, в рассматриваемом пространстве функций можно ввести обратный оператор \mathcal{L}^{-1} и записать решение уравнения (6.15) в виде

$$f_s^{(1)} = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L} f_s^{(0)}. \quad (6.21)$$

Согласно равенству (6.4) с требуемой степенью точности имеем

$$f_a = -\tau(\mathbf{F}, \nabla_p f_s^{(0)}) - \tau(\mathbf{v}, \nabla f_s^{(0)}) - \tau(\mathbf{F}, \nabla_p f_s^{(1)}). \quad (6.22)$$

Соответственно общее выражение для плотности тока (4.1) можно разделить на дрейфовую и диффузионную составляющие:

$$j_a = j_{dr, a} + j_{dif, a}, \quad (6.23)$$

где

$$j_{dr, a} = en(\mathbf{r}) e \int d\mathbf{p} v_a \tau \frac{\partial}{\partial p_\beta} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) E_{1\beta}(\mathbf{r}) = \\ = en(\mathbf{r}) \mu_{\alpha\beta} [\mathbf{E}_1(\mathbf{r})] E_{1\beta}(\mathbf{r}), \quad (6.24)$$

а

$$j_{dif, a} = -e \frac{\partial}{\partial x_\beta} \{n(\mathbf{r}) D_{\alpha\beta} [\mathbf{E}_1(\mathbf{r})]\} - \\ - en(\mathbf{r}) \tilde{\alpha}_{\alpha\beta\gamma} [\mathbf{E}_1(\mathbf{r})] \frac{\partial E_{1\gamma}(\mathbf{r})}{\partial x_\beta}. \quad (6.25)$$

Здесь

$$D_{\alpha\beta} [\mathbf{E}_1(\mathbf{r})] = \int d\mathbf{p} v_\alpha v_\beta \tau \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \\ - e \int d\mathbf{p} \left\{ e \frac{\partial}{\partial p_\gamma} (\tau v_\alpha) + \mu_{\alpha\gamma} [\mathbf{E}_1(\mathbf{r})] \right\} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\tau v_\beta \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial p_\delta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial p_\delta} [\tau v_\beta \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \right\} E_{1\gamma} E_{1\delta}, \quad (6.26)$$

а член с $\tilde{\alpha}_{\alpha\beta\gamma} [\mathbf{E}_1(\mathbf{r})]$ — соответствующая часть термоэлектрического тока. Выражение для $\tilde{\alpha}_{\alpha\beta\gamma}$ весьма громоздко, и мы не будем его явно выписывать.

Компоненты $D_{\alpha\beta}$ не зависят от n и локально зависят от напряженности поля $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$. Заметим, однако, что они не сводятся к стандартному выражению типа (4.10), отличаясь от него наличием дополнительных членов, отношение которых к основным членам — порядка

$(eE_1 l / T)^2 \tau_{\text{ЭН}} / \tau$; последнее определяет степень разогрева и, вообще говоря, отнюдь не мало в условиях заметного разогрева.

Таким образом, пользуясь локальной полевой моделью, следует иметь в виду, что появляющийся в ней коэффициент диффузии горячих электронов в общем случае не совпадает с тем, который получается в однородном поле.

Далее, из (6.25) видно, что обычно используемое выражение для плотности диффузионного тока типа $-e \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (n D_{\alpha\beta}(\mathbf{E}_1))$ учитывает, вообще говоря, не весь термоэлектрический ток, а лишь часть его. Это обстоятельство, однако, мы не будем далее специально оговаривать, ибо конкретный вид функций $D_{\alpha\beta}(\mathbf{E}_1)$ и $\alpha_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{E}_1)$ не будет специализироваться.

В дальнейшем мы будем интересоваться в основном одномерной задачей, считая все величины изменяющимися только вдоль оси Ox , вдоль которой направлен и вектор \mathbf{F} . При этом тензорный характер $D_{\alpha\beta}$, разумеется, не играет роли, а плотность тока дается выражением

$$j_x = en\mu [E_1(x)] E_1(x) - e \frac{\partial}{\partial x} \{nD[E_1(x)]\} - en\tilde{\alpha} [E_1(x)] \frac{\partial E_1}{\partial x}, \quad (6.27)$$

где $D = D_{xx}$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_{xxx}$. При этом напряженность поля может зависеть и от времени (достаточно слабо — в указанном выше смысле).

В условиях, когда параметр (6.9) мал, различные локальные аппроксимации удается связать между собой. Так, от выражения типа (6.27) можно перейти к аналогичному выражению, в котором подвижность и коэффициент диффузии представляют собой функции $\omega = jE_1/\rho$ — удельной мощности, получаемой электронами от поля (в расчете на один электрон). Положим $\mu(E) \equiv \mu^{(\omega)}(\mu^{(\omega)}E^2)$, тогда

$$j_x = en\mu^{(\omega)} \left(\omega - \frac{j_{\text{dif},x} E_{1x}}{\rho} \right) E_{1x} + j_{\text{dif},x} \approx \approx en\mu^{(\omega)}(\omega) E_{1x} + \left(1 - \frac{d \ln \mu^{(\omega)}(\omega)}{d \ln \omega} \right) j_{\text{dif},x}. \quad (6.28')$$

Если вольтамперная характеристика N-образна, то множитель

$$1 - \frac{d \ln \mu^{(\omega)}(\omega)}{d \ln \omega}$$

всегда положителен и его наличие не приводит к качественному изменению свойств системы.

Для «токовой» модели аналогичное преобразование дает

$$\begin{aligned} j_x &\approx en\mu^{(u)}(u) E_{1x} + \left(1 - \frac{d \ln \mu^{(u)}(u)}{d \ln u}\right) j_{\text{dif}, x} = \\ &= en\mu^{(u)}(u) E_{1x} + \frac{\rho_0 \mu^{(u)}(u)}{\sigma} j_{\text{dif}, x}, \end{aligned} \quad (6.28'')$$

где $u = j/\rho$, $\mu(E) \equiv \mu^{(u)}(\mu^{(u)}E)$. Мы видим, что в данном случае пренебрежение множителем $\rho_0 \mu^{(u)}(u)/\sigma$, появляющимся, в частности, перед коэффициентом диффузии и меняющим знак при изменении знака σ , может привести к ошибочным результатам.

Заметим, что в условиях, когда параметр β_2/β_1 не мал, ни одна из рассмотренных локальных аппроксимаций, строго говоря, не применима. Использование их в таких условиях может привести к ошибкам, различным для разных моделей.

В рамках локальной полевой аппроксимации учет термоэлектрического тока в одномерной задаче сводится к введению эффективной подвижности μ^* , локально зависящей как от напряженности поля, так и от концентрации носителей заряда. Согласно (6.27) «термоэлектрическую» составляющую можно записать в виде

$$j_{\text{th}, x} = -en [\dot{D} [E(x)] 2E + \tilde{\alpha}] \frac{\partial E}{\partial x} \equiv -en\alpha\mu \frac{\partial E}{\partial x}, \quad (6.29)$$

где α — множитель, определяемый этим соотношением, и

$$\dot{D} = \frac{dD}{dE^2}. \quad (6.30)$$

(Из соображений симметрии ясно, что ψ , а следовательно, и D должны зависеть только от $E^2(x)$.)

Согласно уравнению Пуассона

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{4\pi e}{\epsilon} (n - n_0),$$

где $-en_0$ есть суммарная плотность заряда компенсирующих центров и, может быть, связанных электронов. Из формул (6.25), (6.28) с учетом уравнения Пуассона видно, что в рассматриваемом случае учет термоэлектрического тока формально сводится к введению эффективной подвижности

$$\mu^*[E(x), n(x)] \equiv \mu + \frac{4\pi e}{\epsilon} \frac{\alpha\mu}{E} (n - n_0) \equiv \mu + ae(n - n_0), \quad (6.31)$$

где

$$a = \frac{4\pi}{\epsilon} \frac{\alpha}{E}.$$

Выражение для плотности тока теперь следует писать в виде

$$j = j_{\text{др}} + j_{\text{диф}}, \quad (6.32)$$

где

$$j_{\text{др}} = en\mu^*E, \quad j_{\text{диф}} = -eD[E(x)] \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (6.33)$$

Учет термоэлектрического тока оказывается существенным, если отношение $ae(n - n_0)/\mu$ оказывается сравнимым с единицей (или превышает ее).

Если же

$$\frac{4\pi e}{\epsilon} \frac{\alpha}{E} |n - n_0| \ll 1, \quad (6.34)$$

то термоэлектрическим током можно пренебречь. Заметим, что это неравенство может как совпадать, так и не совпадать с условием малости диффузионного тока по сравнению с дрейфовым.

В случае, когда неравенство (6.9) не выполняется, пространственные производные из кинетического уравнения исключать нельзя. Соответственно функция распределения в некоторой точке пространства (а с ней и кинетические коэффициенты) будет зависеть от напряженности поля во всех остальных точках.

Заметим, что неравенство (6.9) есть, в сущности, не что иное, как условие малости диффузионного тока по сравнению с дрейфовым. Отсюда, однако, еще не следует, что в рамках полевой аппроксимации диффузионным током можно вообще пренебречь. Действительно, есть задачи, в которых существенно соотношение не между самими значениями $j_{\text{др}}$ и $j_{\text{диф}}$, а между их

вариациями при изменении, например, напряженности поля и плотности заряда. В условиях нагрева электронного газа последнее соотношение определяется, вообще говоря, другими параметрами. К задачам такого типа относится, например, теория малых флуктуаций в электронном газе, рассматриваемая в следующей главе.

§ 7. Внутреннее поле. Граничные условия

Обратимся теперь к случаю системы, пространственно неоднородной уже в состоянии термодинамического равновесия. Здесь неизбежно имеется внутреннее поле $\mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi_0$, и сила \mathbf{F} , фигурирующая в кинетическом уравнении, дается выражением

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1). \quad (7.1)$$

Как и в предыдущем параграфе, задача состоит в выяснении возможности использовать ту или иную локальную аппроксимацию. Вновь для этого достаточно определить аргументы, от которых зависит функция распределения.

Как правило, внутреннее поле локализовано лишь в некоторой ограниченной части образца. В дальнейшем мы будем для определенности рассматривать конкретный случай, когда роль неоднородности играет контакт. При этом напряженность поля \mathbf{E}_0 практически отлична от нуля только в контактном слое объемного заряда. Там же происходит и изменение равновесной концентрации носителей заряда от ее граничного значения, зависящего от природы контакта, до ее значения в объеме образца. Толщину контактного слоя обозначим через l_k . Как известно (см., например, [13]), в зависимости от соотношения между l_k и длиной свободного пробега l следует различать два предельных случая: «тонкого» и «толстого» слоев. В первом из них мы имеем [13]

$$l \gg l_k \frac{T}{\psi_0}, \quad (7.2a)$$

где ψ_0 — разность работ выхода контактирующих материалов. Так обстоит дело, например, в германии и в других полупроводниках с достаточно большой подвижностью носителей заряда.

Во втором случае справедливо обратное неравенство

$$l \ll l_k \frac{T}{\psi_0}. \quad (7.26)$$

При этом контактный слой макроскопически велик. Так обстоит дело в веществах с достаточно малой подвижностью носителей заряда.

Рассмотрим сначала случай (7.2а). Кинетическое уравнение здесь удобно писать отдельно для двух областей — контактной и «внутренней». В пренебрежении экспоненциально малыми величинами во внутренней области образца $E_0 = 0$; с другой стороны, в контактной области можно пренебречь интегралом столкновений. Пусть для определенности контакт совпадает с плоскостью $x = -l_k$, $E_1 \parallel E_0 \parallel Ox$ и система однородна вдоль осей Oy и Oz . Тогда мы имеем:

а) при $-l_k \leq x \leq 0$ (контактная область)

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + F \frac{\partial f}{\partial p_x} = 0, \quad (7.3)$$

б) при $x \geq 0$ (внутренняя область)

$$(v, \nabla f) + eE_1 \frac{\partial f}{\partial p_x} = J[f]. \quad (7.4)$$

При $x = 0$ должны выполняться условия непрерывности функции f и ее производной по x ; при $x = -l_k$ накладываются граничные условия, характерные для данного контакта (например, фиксируется концентрация), при $x \rightarrow \infty$ *) функция f должна быть ограниченной. Сверх того, функция распределения должна быть нормируемой в пространстве импульсов.

Решая уравнения (7.3) и (7.4) с этими граничными условиями, можно убедиться (см. Приложение IV), что наличие тонкого контактного слоя приводит к появлению явной координатной зависимости функции распределения. Эта зависимость существенна во всей области $-l_k \leq x \leq l_{эн}$, где $l_{эн}$ — длина свободного пробега по энергии.

При рассеянии энергии на акустических фононах (и при любом упругом или почти упругом механизме

*) См. примечание на стр. 86.

рассеяния импульса) мы имеем (см. [3—5])

$$l_{\text{эн}} \approx \sqrt{l_{\phi}} \sqrt{T_l/ms^2}, \quad (7.5)$$

где l_{ϕ} — длина свободного пробега по импульсу при рассеянии только на акустических фонах, s — скорость звука.

Как правило, $l_{\text{эн}} \gg l$; соотношение между $l_{\text{эн}}$ и l может быть любым — в зависимости от соотношения между двумя различными большими величинами: ψ_0/T и T_l/ms^2 . Очевидно, любая локальная модель здесь может быть оправдана лишь при $x > l_{\text{эн}}$.

Обратимся теперь к случаю (7.2б). Здесь можно ввести представление о кинетических коэффициентах в контактном слое; однако локальная полевая аппроксимация в применении к ним, вообще говоря, не оправдана. Действительно, в условиях равновесия, как мы знаем, дрейфовый и диффузионный токи в точности компенсируются. Следовательно, неравенство (6.9), обозначающее малость второго по сравнению с первым, может выполняться, лишь если внешнее поле по напряженности значительно превосходит контактное. В реальных условиях опыта обычно справедливо обратное соотношение.

Итак, локальная полевая аппроксимация, как правило, неприменима в областях, где имеется достаточно сильное внутреннее поле (в этом случае концентрация частиц слишком быстро изменяется в пространстве). Причина этого очевидна: при уже нарушенном равновесии внутреннее поле также вызывает нагрев носителей заряда, что приводит к дополнительной координатной зависимости кинетических коэффициентов; последняя входит через напряженность поля, вообще говоря, нелокально. Отсюда следует, что, пользуясь в дальнейшем локальной аппроксимацией, мы должны исключить из явного рассмотрения области с сильным внутренним полем. Это удастся сделать, если размеры названных областей достаточно малы: тогда их влияние можно отобразить просто с помощью граничных условий того или иного типа. Иногда это даже обязательно. Действительно, теория, излагаемая в последующих главах, основана на феноменологических уравнениях, содержащих только величины, усредненные по ансамблю частиц, —

среднюю концентрацию, среднюю плотность тока и т. д. Такие уравнения имеют смысл, лишь если характерные расстояния и промежутки времени значительно превышают соответственно длину и время свободного пробега как по импульсу, так (в условиях нагрева) и по энергии.

Влияние контактов при такой постановке задачи описывается через те или иные феноменологические граничные условия. Для случая «тонкого» контакта контактную область следует просто заменить плоскостью (или, при сложной геометрии контакта, поверхностью более сложной формы). Некоторые физические величины на этой плоскости могут испытывать разрыв, заменяющий в рамках данного подхода быстрое изменение их в контактном слое. Рассматривая контакт металла с полупроводником, естественно принять граничное условие, связывающее потоки носителей через эту плоскость [13]. Именно, пренебрегая процессами захвата внутри контактного слоя, потребуем выполнения условия

$$J = j_1 - j_2, \quad (7.6)$$

где J — результирующая плотность полного тока через контакт, складывающаяся из плотностей токов, связанных с потоками носителей из металла в полупроводник и обратно (в случае, когда условие (7.6) относится к контакту полупроводника n -типа с металлическим катодом, первая равна j_1 , а вторая ($-j_2$)). Наложение внешнего поля практически не сказывается на потоке носителей из металла в полупроводник и, наоборот, существенно меняет обратный поток.

В условиях, когда нагрев существен, выражение для тока j_2 пока не удается строго вывести из какой-либо конкретной теории контакта. Соответственно не представляется возможным с полной определенностью связать те или иные феноменологические граничные условия со свойствами реальных контактов. Более тщательное исследование этого вопроса методами микроскопической теории составляет одну из актуальных задач физики электрических доменов.

По этой причине один из возможных подходов состоит в исследовании задачи при разных типах граничных условий с последующим сравнением с опытом. Как

мы увидим в дальнейшем, в некоторых случаях результаты слабо зависят от конкретного вида граничных условий или же определяются лишь качественными особенностями последних.

Так, под словом «образец» можно понимать внутреннюю его часть, получающуюся исключением приконтактного слоя толщины порядка l_k (мы считаем, что наряду с условием (7.2а) выполнено и неравенство $l_{эв} \gg l_k$). При этом «образец» естественно считать нейтральным в целом, что приводит к специальному типу граничных условий, накладываемых на напряженность поля*). Именно, обозначим через $\rho(r)$ абсолютное значение плотности заряда свободных и связанных электронов и дырок, а через ρ_0 — плотность неподвижного компенсирующего заряда примеси. Ограничимся для простоты одномерным случаем, показанным выше на рис. 13 (стр. 84). Тогда условие полной объемной нейтральности образца можно записать в виде

$$\int_0^L dx (\rho - \rho_0) = 0. \quad (7.7)$$

Подчеркнем, что объемный заряд в контактном слое здесь не учитывается.

Равенство (7.7) удобно скомбинировать с уравнением Пуассона, которое в рассматриваемом сейчас одномерном случае гласит:

$$\frac{\partial \varepsilon E}{\partial x} = 4\pi (\rho - \rho_0).$$

Здесь E — напряженность внешнего поля (внутреннее поле нам более не встретится, соответственно чему индекс «1» можно опустить). При наличии неоднородностей, связанных с внутренним полем, функция εE может испытывать разрывы не только на контактах, но и внутри образца. Пусть эти разрывы расположены в точках $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots$, рис. 13) и пусть соответствующие плотности поверхностного заряда равны s_i . Тогда, интегрируя уравнение Пуассона по длине образца

*) В соответствии с определением понятия «образец» речь идет только о внешнем поле.

с учетом (7.7), получим (в любой момент времени t)

$$\varepsilon E(L+0, t) - \varepsilon E(-0, t) = 4\pi \sum_i s_i \quad (7.8a)$$

или

$$\varepsilon E(L-0, t) - \varepsilon E(+0, t) = 4\pi \sum_i' s_i. \quad (7.8б)$$

Штрих у знака суммы в (7.8б) означает, что разрывы на контактах следует исключить. Равенство (7.8б) особенно удобно в случае, когда $\sum_i' s_i = 0$ (так, в частности, обстоит дело в макроскопически однородном образце). Дополнив его еще требованием равенства соответствующего числа производных, мы получаем условие периодичности *):

$$\begin{aligned} E(L-0, t) &= E(+0, t), \\ \rho(L-0, t) &= \rho(+0, t), \quad \rho_t(L-0, t) = \rho_t(+0, t). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Последнее из этих условий следует особо накладывать в случае рекомбинационной нелинейности, когда мы имеем систему уравнений третьего порядка. Заметим, что второе из условий (7.9) логически не связано с первым и может и не иметь места.

Часто употребляется также условие фиксированной граничной концентрации носителей заряда:

$$\rho(0, t) = \rho_1, \quad \rho(L, t) = \rho_2. \quad (7.10)$$

Отметим еще один тип граничного условия, которым удобно пользоваться, если желательно отразить наличие пространственной неоднородности в образце (в частности, речь может идти и о контакте **). Ограничимся случаем, когда рассматриваемая область неоднородности локализована в пространстве, причем так, что сохраняется одномерная геометрия рис. 13. Иначе

*) Здесь принято, что величина ρ_0 одна и та же у обеих гранц. В дальнейшем мы вообще ограничимся случаем макроскопически однородного образца, когда $\rho_0 = \text{const}$.

**) Речь идет сейчас о неоднородности, имеющейся и в состоянии термодинамического равновесия и связанной с теми или иными макроскопическими несовершенствами структуры образца.

говоря, будем считать, что данную область неоднородности можно аппроксимировать плоскостью $x = x_i$ (в частности, возможен случай $x_i = 0$ или $x_i = L$). Заранее очевидно, что наличие неоднородности приводит к появлению диффузионной (и «термоэлектрической») составляющей плотности тока. Следовательно, можно положить

$$\left. \frac{\partial (\rho_e D)}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \zeta j(x_i), \quad (7.11)$$

где ρ_e — абсолютная величина плотности заряда свободных носителей, j — плотность тока, ζ — новый феноменологический параметр. Очевидно, при $\zeta = 0$ неоднородность отсутствует. Задача о вычислении ζ из микроэлектрической теории требует специализации природы неоднородности. В принципе этот параметр может и сам зависеть, например, от напряженности поля; для качественного исследования задачи, однако, часто бывает достаточно знать лишь, отличен ли этот параметр от нуля.

Поскольку $\rho_e = en$, выражение для плотности тока в рассматриваемом одномерном случае можно переписать в виде

$$j = \rho_e \mu E - \frac{\partial (\rho_e D)}{\partial x}. \quad (7.12)$$

Комбинируя равенства (7.11) и (7.12), получим следующее граничное условие:

$$\left. \frac{\partial (\rho_e D)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\zeta}{1 + \zeta} \rho_e \mu E \Big|_{x=0}. \quad (7.13)$$

В силу зависимости μ от E это условие нелинейно.

Иногда задачу о распределении поля и заряда в образце с горячими электронами ставят для бесконечного образца, соответственно заменяя условия (7.7) — (7.10) требованиями ограниченности ρ и E на бесконечности:

$$\rho(x) < \infty \text{ при } x \rightarrow \pm \infty, \quad E(x) < \infty \text{ при } x \rightarrow \pm \infty. \quad (7.14)$$

Такая постановка задачи принята, например, в обзоре

[14]. Следует, однако, заметить, что (в отличие от того, что сделано у нас в Приложении IV, где рассмотрен лишь слабо неравновесный случай) аппроксимация бесконечного образца в применении к системе с горячими электронами требует известной осторожности. Так, в главе IV мы увидим, что есть задачи, в которых она — в силу характерных особенностей существенно неравновесной системы — оказывается недостаточной даже при $L \gg l_{\text{эн}}$.

Возможен и другой подход, когда используется непосредственно условие (7.6), причем берется то или иное конкретное выражение для потока носителей из полупроводника в металл. Этот поток вычисляется, например, без учета нагрева носителей контактным полем. Можно думать, что для случая «тонких» контактов пренебрежение нагревом оправдано. Действительно, размер области l_k , в которой напряженность поля велика, по определению мал по сравнению с длиной свободного пробега l .

Насколько нам известно, этот подход лишь начинает использоваться в теории электрических доменов (см., например, гл. III).

Есть важные задачи, для исследования которых не нужно знать точного вида граничных условий, а нужно лишь иметь некоторые сведения о характере поведения системы вблизи контакта. Так, иногда достаточно знать лишь знаки производных dE/dx и $d\rho/dx$ на контактах.

Однако в ряде случаев контакты могут оказывать существенное влияние на процессы, происходящие в объеме полупроводника. Например, для некоторых типов контактов плотность тока из металла в полупроводник может оказаться сравнимой с плотностью тока в объеме полупроводника. Это может привести к тому, что в достаточно сильных полях ток через образец будет ограничен эмиссионной способностью электрода (катода в образце n -типа) [15]. Действительно, в условиях, когда напряженность поля станет достаточно большой, из приконтактной области будет уходить больше электронов, чем поступать в нее из контакта; в результате вблизи контакта возникнет область сильного поля, обедненная электронами.

В предельном случае большого напряжения на образце граничное условие в такой ситуации можно написать в виде

$$j|_{\text{на контакте}} = j_0, \quad (7.15)$$

где j_0 — плотность тока эмиссии из металла в полупроводник, заданная свойствами металла на контакте. Таким образом, контакт в этом случае фактически играет роль ограничителя тока, включенного в цепь; аналогичную роль могут играть и некоторые врожденные или искусственно созданные в образце неоднородности (см., например, § IV. 9).

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ СЛАБОГО СИГНАЛА

§ 1. Электрическая устойчивость цепи

Как отмечалось в главе I, однородный образец с падающей ветвью на вольтамперной характеристике при определенных условиях может использоваться как активный элемент в усилителях и генераторах электрических колебаний. Соответственно возникает вопрос об описании свойств такого образца как элемента электрической цепи. Следует, однако, обратить внимание на одну особенность рассматриваемой системы, отличающую ее от более привычных радиотехнических устройств типа лампы или туннельного диода. Именно, в § I.5 было указано, что подобная система может оказаться неустойчивой относительно развития малых флуктуаций объемной плотности заряда и напряженности электрического поля. Это приводит к постановке вопроса о возможности хотя бы в принципе реализовать на опыте пространственно однородную систему с отрицательной дифференциальной проводимостью (ОДП).

Начнем с рассмотрения первого из поставленных выше вопросов.

Как известно из радиотехники, свойства образца как элемента электрической цепи удобно характеризовать с помощью понятия импеданса $Z(\omega)$.

Пусть на образец подано (помимо, может быть, постоянного поля) малое переменное напряжение

$$\delta V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \delta V(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.1)$$

Представим соответствующее изменение полного тока δJ в виде такого же разложения Фурье; тогда по определению

$$Z(\omega) \delta J(\omega) = \delta V(\omega), \quad (1.2)$$

где $Z(\omega)$ — дифференциальный импеданс на частоте ω (в дальнейшем для краткости мы будем говорить просто об импедансе).

Полный ток есть сумма токов проводимости и смещения:

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} + \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость образца (для простоты мы пренебрегаем дисперсией ϵ : учет ее в случае слабых сигналов не представляет труда — см. примечание на стр. 118). В силу уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (1.4)$$

Отсюда сразу следует, что величина $\delta \mathbf{J}$ есть не что иное, как изменение силы тока в последовательной нагрузке.

Подчеркнем, что по определению (1.2) понятие импеданса вводится для описания реакции системы на слабое воздействие (вычисляется малое изменение полного тока при малом же изменении напряжения на образце). Иначе говоря, мы ограничиваемся здесь рассмотрением слабых сигналов.

Три вопроса представляют для нас особый интерес в связи с вычислением импеданса. Первый из них относится к знаку вещественной его части (при $\operatorname{Im} \omega = 0$): при $\operatorname{Re} Z(\omega) < 0$ образец может работать как усилитель сигналов соответствующей частоты. Второй и третий вопросы касаются исследования полюсов и нулей импеданса, рассматриваемого как функция комплексной переменной ω . Значение этих особенностей становится ясным при рассмотрении двух предельных случаев.

а) Режим заданного тока: $\delta J = 0$.

При этом, вообще говоря, и $\delta V = 0$. Исключение составляет случай

$$Z^{-1}(\omega) = 0, \quad (1.5a)$$

когда, согласно (1.2), величина $\delta V(\omega)$ может быть произвольной

Очевидно, корни уравнения (1.5а), т. е. полюсы импеданса, определяют собственные частоты колебаний напряжения на образце. Из формулы (1.1) явствует, что эти колебания — затухающие или нарастающие, в зависимости от того, лежат ли полюсы импеданса в нижней или верхней полуплоскостях комплексной переменной ω .

б) Режим заданного напряжения: $\delta V = 0$.

При этом, вообще говоря, и $\delta J = 0$. Исключение составляет случай

$$Z(\omega) = 0, \quad (1.5б)$$

когда, согласно (1.2), величина $\delta J(\omega)$ может быть произвольной.

Очевидно, корни уравнения (1.5б), т. е. нули импеданса, определяют собственные частоты колебаний тока в контуре, содержащем рассматриваемый образец. Эти колебания — затухающие или нарастающие, в зависимости от того, лежат ли нули импеданса в нижней или верхней полуплоскостях комплексной переменной ω .

Таким образом, обращение импеданса в нуль или в бесконечность хотя бы в одной точке верхней полуплоскости комплексной переменной ω может привести к самопроизвольной генерации колебаний. Частота последних определяется вещественной частью соответствующего нуля функции $Z^{-1}(\omega)$ или $Z(\omega)$. Это явление естественно назвать *электрической неустойчивостью цепи*, содержащей данный образец. (Иногда говорят о неустойчивости по импедансу.)

§ 2. Малые отклонения от однородности

Для вычисления импеданса по формулам (1.1), (1.2) заметим, что изменение напряжения на образце очевидным образом связано с изменениями напряженности поля, $\delta E(x, t)$, в различных его точках:

$$\delta V(t) = \int_0^L \delta E(x, t) dx. \quad (2.1)$$

Здесь, как обычно, L — длина образца; мы ограничиваемся одномерным случаем, считая, что δE может

зависеть только от координаты x , $0 \leq x \leq L$. Варьируя равенство (1.3), получаем

$$\delta J(t) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \delta E(x, t)}{\partial t} + \delta j(x, t). \quad (2.2)$$

В рамках полевой модели (см. стр. 51), которой мы будем часто пользоваться и в дальнейшем, для плотности тока проводимости имеем

$$j = e\mu En - e \frac{\partial}{\partial x} (Dn)$$

(напомним, что согласно § II.6 в условиях (II.6.9) это выражение учитывает лишь часть термоэлектрического тока). Отсюда

$$\delta j = e\mu_0 E_0 \delta n + \sigma \delta E - e \frac{\partial}{\partial x} \left(D_0 \delta n + n_0 \frac{dD}{dE} \delta E \right), \quad (2.3)$$

где

$$\sigma = en_0 \left(\frac{d(\mu E)}{dE} \right)_{E=E_0}, \quad (2.4)$$

n_0 и E_0 — значения концентрации свободных электронов и напряженности поля в отсутствие сигнала, $\mu_0 = \mu(E_0)$, $D_0 = D(E_0)$. В принципе концентрация и напряженность поля в отсутствие сигнала могут и сами зависеть от координат и времени (см. главы IV, V); в настоящей главе, однако, мы будем интересоваться импедансом однородного образца, когда n и E в отсутствие сигнала постоянны (n_0 равна концентрации компенсирующих зарядов, E_0 — средней напряженности поля в образце).

В случае модели с электронной температурой на основании (II.4.18) получаем

$$\begin{aligned} \delta j = en_0 \mu_0 \left\{ \delta E + \frac{T}{en_0} \nabla \delta n - \alpha \nabla \delta T \right\} + \\ + en_0 E_0 \frac{d\mu}{dT} \delta T + e\mu_0 E_0 \delta n, \quad (2.3') \end{aligned}$$

где α — дифференциальная термо-эдс (см. (II.4.16)).

Таким образом, вычисление импеданса сводится к нахождению функций δE , δn и (в модели с электронной температурой) δT .

Рассмотрим сначала постановку задачи в рамках полевой модели [1, 2]. Заметим, что характерные длины и

промежутки времени, на которых заметно изменяются величины $\delta n(x, t)$ и $\delta E(x, t)$, велики по сравнению с длиной и временем свободного пробега соответственно. Тогда для решения поставленной задачи можно воспользоваться обычными уравнениями феноменологической электродинамики. Обозначим через ρ абсолютную величину объемной плотности заряда электронов, а через ρ_0 — плотность неподвижного компенсирующего заряда. В случае дрейфовой нелинейности $\rho = en$, в случае рекомбинационной нелинейности

$$\rho = e(n + n_t),$$

где n_t — концентрация электронов, связанных на ловушках (в частности, в модели § 1.3 $n_t = N^-$). Тогда уравнение непрерывности и уравнение Пуассона примут вид *)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{e} (\rho - \rho_0). \quad (2.6)$$

В одномерном случае отсюда следует, что полный ток, определяемый соотношением (1.3), зависит только от t :

$$J = J(t) \quad (2.5')$$

(ср. с (1.4)). В случае рекомбинационной нелинейности сюда надо добавить еще уравнение рекомбинационной кинетики.

Будем рассматривать случай центров одного типа. Тогда, согласно (1.4.3), указанное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial n_t}{\partial t} = c_0 \{n(N - n_t) \nu(E) - n_t n_t\}. \quad (2.7)$$

В соответствии со сказанным выше положим

$$E = E_0 + \delta E, \quad n = n_0 + \delta n, \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad n_t = n_{t,0} + \delta n_t, \quad (2.8)$$

где $\delta E, \dots$ — сравнительно малые добавки, по которым будет производиться линеаризация уравнений (2.5) — (2.7). В соответствии с (1.1) эти величины удобно искать в виде разложений Фурье. При этом, однако, следует иметь в виду, что представление вида (1.1) справедливо

*) Разумеется, уравнение (2.5) не независимое. Оно вытекает из (1.3), (1.4) и (2.6).

лишь для функций, обращающихся в нуль при $t \rightarrow \pm\infty$. Как мы увидим, в условиях неустойчивости это уже не так: функции $\delta E(x, t)$, ... могут экспоненциально возрастать. Стандартный способ избежать этих осложнений состоит в рассмотрении вспомогательных величин вида (при $t \geq 0$)

$$\delta \tilde{E} = \delta E e^{-\gamma t},$$

где $\gamma (> 0)$ — достаточно большая величина, или просто в использовании преобразования Лапласа.

Подставляя (2.8) в (2.3) — (2.7) и производя линеаризацию и преобразование Фурье, получим уравнение для фурье-компонент напряженности поля:

$$\mathcal{L}(\omega) \delta E(x, \omega) = \beta \delta J(\omega). \quad (2.9)$$

Здесь β — число, а $\mathcal{L}(\omega)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами; он определен в пространстве функций, удовлетворяющих указанным ниже граничным условиям, и имеет вид

$$\mathcal{L}(\omega) = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0, \quad (2.10)$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные коэффициенты. Явный вид их и чисел β различен в случаях дрейфовой и рекомбинационной нелинейности и вытекает из приведенных ниже формул, а именно:

а) в случае дрейфовой нелинейности

$$\begin{aligned} a_0 &= i\omega - \frac{4\pi}{\epsilon} \sigma, & a_1 &= -\mu_0 E_0 + \frac{8\pi}{\epsilon} E_0 \rho_0 \dot{D}, \\ a_2 &= D_0, & \beta &= \beta' = -\frac{4\pi}{\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.11a)$$

где, как и в главе II, $\dot{D} = \frac{dD}{d(E^2)}$.

б) В случае рекомбинационной нелинейности

$$\begin{aligned} a_0 &= \tau_g^{-1} \left\{ \omega^2 \tau_g^2 + i\omega \tau_g \left(\frac{\tau_g}{\tau_M} + \frac{\tau_g}{\tau_r} \right) + \frac{\tau_g^2}{\tau_M \tau_c} \left(\frac{d \ln v}{d \ln E} - 1 \right) + \frac{\tau_g}{\tau_M} \right\}, \\ a_1 &= -\mu_0 E_0 \left[\frac{D \tau_g}{\mu_0 E_0 \tau_M \tau_c} \frac{d \ln v}{d \ln E} + 1 - i\omega \tau_g \right], \\ a_2 &= D (1 - i\omega \tau_g), & \beta &= \beta'' = -\frac{4\pi}{\epsilon} \left(\frac{\tau_g}{\tau_r} - i\omega \tau_g \right). \end{aligned} \quad (2.11б)$$

Здесь

$$\tau_M = \frac{\varepsilon}{4\pi en_0 \mu} \quad (2.12)$$

есть максвелловское время релаксации, а τ_g , τ_c и τ_r — характерные «рекомбинационные» времена:

$$\begin{aligned} \tau_g &= n_{t,0} [c_0 v(E_0) N n_0]^{-1} — \text{время генерации;} \\ \tau_c &= [c_0 v(E_0) (N - n_{t,0})]^{-1} — \text{время захвата;} \\ \tau_r &= \frac{\tau_c \tau_g}{\tau_c + \tau_g} — \text{время жизни свободных носителей} \\ &\quad \text{заряда.} \end{aligned} \quad (2.13)$$

По определению (1.2) величины δJ и $\delta E(x, \omega)$ связаны равенством

$$\delta J(\omega) = Z^{-1}(\omega) \int_0^L \delta E(x, \omega) dx. \quad (2.14)$$

Таким образом, уравнение (2.9) — интегро-дифференциальное. В задаче о вычислении импеданса, однако, это обстоятельство не усложняет дела.

Уравнение (2.9) следует дополнить граничными условиями. Если флуктуации поля и плотности заряда происходят при заданных условиях на контактах (граничные условия для E_0 и $E(x, t)$ одни и те же), то граничные условия для малых вариаций $\delta E(x, t)$ оказываются однородными:

$$\delta E(0, t) = \delta E(L, t) = 0. \quad (2.15a)$$

Фактически, однако, сами условия на контактах также могут флуктуировать. Кроме того, интересующее нас сейчас пространственно однородное решение само является только приближенным. По этим причинам граничные условия для вариаций напряженности поля, плотности заряда и т. д. не следует писать формально, просто производя стандартную линеаризацию граничных условий для соответствующих величин.

Как уже указывалось в § II.7, в рамках феноменологической теории можно указать несколько разумных типов граничных условий, проверяя их последующим сопоставлением с опытом. Аналогичный подход может быть

принят и при написании граничных условий для флуктуаций. Так, помимо соотношений (2.15а), мы будем рассматривать еще следующие типы условий:

условие периодичности (полной объемной нейтральности при флуктуациях):

$$\delta E(L, t) = \delta E(0, t), \quad \delta \rho(L, t) = \delta \rho(0, t)$$

или

$$\delta E(L, \omega) = \delta E(0, \omega), \quad \delta \rho(L, \omega) = \delta \rho(0, \omega); \quad (2.15б)$$

условия фиксированной концентрации носителей: если на контакте имеют место условия (II. 7. 10), то, согласно уравнению Пуассона,

$$\left. \frac{\partial \delta E}{\partial x} \right|_{x=0, L} = 0. \quad (2.15в)$$

Очевидно, соотношения (2.15б) и (2.15в) представляют собой частные случаи однородных граничных условий вида

$$\begin{aligned} \left(\alpha_1 \delta E + \beta_1 \frac{\partial \delta E}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0, \\ \left(\alpha_2 \delta E + \beta_2 \frac{\partial \delta E}{\partial x} \right)_{x=L} &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — некоторые постоянные.

Более общие граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \left(g_1 \delta E + \frac{\partial \delta E}{\partial x} \right)_{x=0} + h_1 \delta J &= 0, \\ \left(g_2 \delta E + \frac{\partial \delta E}{\partial x} \right)_{x=L} + h_2 \delta J &= 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где g_1, g_2, h_1, h_2 — некоторые коэффициенты, определяемые свойствами контактов. Условия (2.17) получаются вариацией граничного условия (II. 7.6) в предположении, что плотность тока из полупроводника в металл зависит (локально) от напряженности поля и ее производной (т. е. от концентрации — в случае дрейфовой модели). К сожалению, использование граничных условий (2.17) затруднено, ибо оно требует знания коэффициентов g_i, h_i . По этой причине в дальнейшем мы часто будем пользо-

ваться более простыми граничными условиями типа (2.15а—в) и (2.16).

Задача (2.9) с указанными выше граничными условиями, вообще говоря, не эрмитова (см. Приложение V). Сопряженный с \mathcal{L} оператор имеет вид

$$\mathcal{L}^* = a_2 \frac{d^2}{dx^2} - a_1 \frac{d}{dx} + a_0, \quad (2.10')$$

а граничные условия, сопряженные с (2.16), суть

$$\begin{aligned} (a_1\beta_2 - a_2\alpha_2) \varphi(L) - a_2\beta_2 \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=L} &= 0, \\ (a_2\alpha_1 - a_1\beta_1) \varphi(0) + a_2\beta_1 \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} &= 0, \end{aligned} \quad (2.16')$$

где $\varphi(x)$ — функции, в пространстве которых определен оператор \mathcal{L}^* .

Обращаясь теперь к постановке задачи в модели с электронной температурой [3—5], следует, помимо (2.3) и (2.5)—(2.7), воспользоваться еще уравнениями (II.3.20) и (II.4.18).

Линеаризуя эту систему по δE , δn , δT , где δT — малое изменение электронной температуры, вновь получим уравнение вида (2.9); при этом, однако, оператор $\mathcal{L}(\omega)$ будет уже более высокого порядка, а граничные условия следует дополнить соотношениями, описывающими поведение электронной температуры на контактах. Мы не будем здесь рассматривать эту задачу более подробно.

§ 3. Импеданс образца

Рассмотрим теперь решения уравнения (2.9) при различных граничных условиях.

1) *Условие периодичности* (2.15б). Общее решение уравнения (2.9) с учетом (2.15б) имеет вид

$$\delta E(x, \omega) = \frac{\beta}{a_0} \delta J + \sum_k A_k e^{ikx}, \quad (3.1)$$

где

$$k = \frac{2\pi}{L} l, \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.2)$$

A_k — произвольные коэффициенты.

В силу (3.2) второе слагаемое в правой части в (3.1) не дает вклада в интеграл (2.1); таким образом,

$$\delta V(\omega) = \frac{\beta L}{a_0} \delta J \equiv Z \delta J. \quad (3.3)$$

Согласно (2.11а), (2.11б) и (2.13) для импеданса образца, мы получаем*):

а) в случае дрейфовой нелинейности

$$Z = -\frac{4\pi L}{\epsilon} \frac{1}{i\omega - \frac{4\pi}{\epsilon} \sigma}; \quad (3.4a)$$

б) в случае рекомбинационной нелинейности

$$Z = \frac{4\pi L}{\epsilon} \frac{\tau_g^2 (i\omega - \tau_r^{-1})}{\omega^2 \tau_g^2 + i\omega \tau_g \left(\frac{\tau_g}{\tau_M} + \frac{\tau_g}{\tau_r} \right) + \frac{\tau_g^2}{\tau_M \tau_c} \left(\frac{d \ln v}{d \ln E} - 1 \right) - \frac{\tau_g}{\tau_M}}. \quad (3.4б)$$

Выражение (3.4а) имеет полюс при

$$\omega = -\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} i.$$

При $\sigma < 0$ этот полюс расположен в верхней полуплоскости; соответственно в режиме заданного тока следует ожидать появления электрической неустойчивости.

При вещественной частоте вещественная часть импеданса, (3.4а), становится отрицательной при $\sigma < 0$; образец в этих условиях может работать как активный элемент.

Выражение (3.4б) имеет нуль при

$$\omega = -i\tau_r \quad (3.5)$$

и полюсы при

$$\omega \tau_g = -\frac{i}{2} \left(\frac{\tau_g}{\tau_M} + \frac{\tau_g}{\tau_r} \right) \pm \pm \sqrt{-\frac{1}{4} \left(\frac{\tau_g}{\tau_M} + \frac{\tau_g}{\tau_r} \right)^2 + \frac{\tau_g}{\tau_M} - \frac{\tau_g^2}{\tau_M \tau_c} \left(\frac{d \ln v}{d \ln E} - 1 \right)}. \quad (3.6)$$

*) Напомним, что площадь поперечного сечения принята за единицу.

Поскольку $\tau_r > 0$, нуль (3.5) расположен в нижней полуплоскости. Он отвечает затуханию электрических колебаний благодаря рекомбинации избыточных носителей заряда.

Мнимая часть одного из полюсов (3.6) становится положительной при

$$\frac{\tau_g}{\tau_c} \left(\frac{d \ln v}{d \ln E} - 1 \right) > 1. \quad (3.7)$$

Левую часть неравенства (3.7) можно выразить через дифференциальную проводимость пространственно однородного образца. Так, в модели § I.3 мы имеем

$$\sigma = en_0\mu \left(1 - \frac{d \ln v}{d \ln E} \right)$$

и, следовательно, неравенство (3.7) можно переписать в виде

$$\sigma < 0, \quad |\sigma| > \sigma'_c = \frac{en_0\mu}{1 - \frac{n_{t,0}}{N}} \frac{n_0}{n_{t,0}}, \quad (3.7')$$

или, с учетом (I.4.7)

$$\frac{d \ln v}{d \ln E} - 1 \geq \frac{n_1 v^{-1} (E_0)}{N (1 - N_d^*/N)^2}. \quad (3.7'')$$

Видно, таким образом, что и в случае рекомбинационной нелинейности при $\sigma < 0$ может возникнуть электрическая неустойчивость в режиме заданного тока. Надо лишь, чтобы абсолютная величина дифференциальной проводимости превышала критическое значение σ'_c ; в условиях опытов с n -Ge, легированным золотом или медью,

$$\sigma'_c \ll en_0\mu.$$

2) Нулевые условия (2.15а). Обозначим через $\mathcal{L}(\omega, k)$ многочлен, получающийся из оператора $\mathcal{L}(\omega)$ заменой $d/dx \rightarrow ik$, где k — число:

$$\mathcal{L}(\omega, k) = -a_2 k^2 + ika_1 + a_0. \quad (3.8)$$

Корни этого многочлена обозначим через k_1 и k_2 :

$$k_{1,2} = \frac{1}{2a_2} (ia_1 \pm \sqrt{-a_1^2 + 4a_2 a_0}). \quad (3.9)$$

Наконец, введем характерные значения (комплексной) частоты, $\omega = \omega_m$, определяя их равенством

$$\exp ik_1 L = \exp ik_2 L,$$

т. е.

$$k_1 - k_2 = \frac{2\pi}{L} m, \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (3.10)$$

Рассмотрим сначала случай $\omega \neq \omega_m$. Тогда решение уравнения (2.9) с граничными условиями (2.15а) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta E(x, \omega) &= \\ &= \frac{\beta}{a_0} \delta J(\omega) \left\{ 1 + \frac{(\exp ik_2 L - 1) \exp ik_1 x - (\exp ik_1 L - 1) \exp ik_2 x}{e^{ik_1 L} - e^{ik_2 L}} \right\} \equiv \\ &\equiv f(x, \omega) \delta J(\omega). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Интегрируя это выражение по x , находим импеданс

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{\beta}{a_0 (\exp ik_1 L - \exp ik_2 L)} \left\{ L (\exp ik_1 L - \exp ik_2 L) + \right. \\ &\quad \left. + (\exp ik_1 L - 1) (\exp ik_2 L - 1) \frac{k_2 - k_1}{ik_1 k_2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Легко убедиться, что при $a_0 \rightarrow 0$ выражение (3.12) остается конечным. Иначе говоря, полюсы импеданса могут быть связаны только с условием (3.10), которое пока исключается из рассмотрения. Возможно, однако, обращение импеданса в нуль при некоторой комплексной частоте, а также перемена знака вещественной его части при вещественной частоте. В общем случае определение соответствующих условий приводит к довольно громоздким выкладкам. Положение, однако, заметно упрощается при условии $a_2 \ll La_1$, т. е. при

$$\frac{D_0}{L \left| \mu_0 E_0 - \frac{8\pi}{\epsilon} E_0 \rho_0 \dot{D} \right|} \ll 1. \quad (3.13)$$

Действительно, в этом случае выражение (3.12) принимает вид

$$Z(\omega) = \frac{\beta}{ia_0 k(\omega)} \{-1 + iLk(\omega) + \exp[-iLk(\omega)]\}, \quad (3.12')$$

где

$$k(\omega) = -i \frac{a_0}{a_1}. \quad (3.14)$$

В случае дрейфовой нелинейности принятая аппроксимация означает, в сущности, пренебрежение диффузией при вычислении импеданса *). В случае рекомбинационной нелинейности это, однако, не так: коэффициент диффузии входит еще в a_1 (см. 2.11б)), причем параметр

$$b - 1 = \frac{D\tau_g}{\mu_0^2 E_0^2 \tau_M \tau_c} \frac{d \ln v}{d \ln E}$$

относительно не обязан быть малым — даже при условии (3.13).

Нули импеданса определяются теперь сравнительно простым уравнением

$$e^{-iLk(\omega)} + iLk(\omega) - 1 = 0, \quad (3.15)$$

которое было численно исследовано в работе [2]. Полагая

$$iLk(\omega) = \xi + i\eta, \quad (3.16)$$

где ξ и η — вещественные числа, и подставляя (3.16) в (3.15), получим

$$e^{-\xi} \cos \eta + \xi - 1 = 0, \quad e^{-\xi} \sin \eta - \eta = 0. \quad (3.17)$$

Очевидно, эта система имеет вещественные решения только при $\xi < 0$. Корни ее, ξ_l, η_l ($l = 1, 2, \dots$) были вычислены в работе [2]. В частности, алгебраически наибольшая вещественная часть есть $\xi_1 = -2,09$. Подставляя значения ξ_l и η_l в правую часть (3.16) и пользуясь далее равенством (3.14), можем получить явные выражения для нулей импеданса ω_l . Для этого, однако, надо задать явный вид коэффициентов a_0, a_1, a_2 , различных в случаях дрейфовой и рекомбинационной нелинейности.

а) Дрейфовая нелинейность

Комбинируя выражения (2.11а), (3.8) и (3.16), получаем для нулей импеданса в комплексной плоскости ω

$$\omega_l = -i \left(\frac{4\pi}{\epsilon} \sigma - \frac{|u|}{L} \xi_l \right) - \frac{|u|}{L} \eta_l. \quad (3.18)$$

*) Заметим, однако, что «пренебрегать диффузией» надо аккуратно: нельзя просто вычеркнуть первое слагаемое в операторе (2.11а) (или (2.11б)), ибо при этом понизится порядок уравнения и (при произвольной частоте ω) не удастся удовлетворить двум граничным условиям.

Здесь (см. (2.11a))

$$u = \mu_0 E_0 - \frac{8\pi}{\varepsilon} E_0 \rho_0 \dot{D}, \quad (3.19)$$

а индекс $l = 1, 2, \dots$ нумерует решения системы (3.17).

Таким образом, условие неустойчивости электрического режима в цепи ($\text{Im } \omega_l > 0$) имеет вид

$$\sigma + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{|u|}{L} |\xi_l| < 0. \quad (3.20)$$

Очевидно, неравенство (3.20) может выполняться только при условии

$$\sigma < 0, \quad |\sigma| > \sigma_c'' \equiv \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{|u|}{L} |\xi_l|. \quad (3.21)$$

Замечая, что в рассматриваемом случае

$$\sigma = en_0 \mu_0 \gamma, \quad \gamma = 1 + \frac{d \ln \mu_0}{d \ln E_0},$$

можем переписать второе из условий (3.21) в виде

$$n_0 L > \frac{2,09 \varepsilon E_0}{4\pi e |\gamma|} \left| 1 - \frac{8\pi}{\varepsilon \mu_0} \rho_0 \dot{D} \right|. \quad (3.22)$$

При заданном значении напряженности постоянного поля E_0 это неравенство определяет нижнюю границу концентрации носителей заряда n_c , при которой наступает электрическая неустойчивость. Поскольку фактически существенным оказывается произведение концентрации на длину образца, неравенство (3.22) часто называют *критерием* $n_0 L$ [6]. Для оценки в качестве E_0 (в числителе) можно подставить просто значение порогового поля, при котором дифференциальная проводимость меняет знак (действительно, мы ограничиваемся сейчас только слабыми сигналами). В случае n -GaAs [7] эта величина — порядка $3 \cdot 10^3$ в/см, а $\varepsilon = 12,5^*$).

) Строго говоря, следовало бы взять величину $\varepsilon(\omega^)$ при $\omega^* = \frac{|u|}{L} |\eta_l|$. Однако в области фактически интересных частот достаточно ограничиться статическим значением ε .

Таким образом (в пренебрежении зависимостью D от E),

$$n_0 L \geq 4 \cdot 10^{10} |\gamma|^{-1} \text{ см}^{-2}, \quad (3.23)$$

т. е. $n_c \approx (4 \cdot 10^{10} \text{ см} / |\gamma| L) \text{ см}^{-3}$.

Первое из неравенств (3.21) находится в очевидном соответствии с качественными соображениями главы I: электрическая неустойчивость связана с изменением знака дифференциальной проводимости.

Согласно второму из этих неравенств (т. е. согласно (3.22)), электрическая неустойчивость возникает лишь при достаточно большой величине произведения $n_0 L$. Этот вывод был проверен экспериментально в ряде работ (см., например, [8—10]) и оказался в разумном согласии с опытом. При этом для критического значения $n_c L$ в GaAs получается примерно $5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$.

Заметим, что при других граничных условиях «критерий $n_0 L$ » может и не появиться. Так, в частности, обстоит дело в случае периодических граничных условий (ср. (3.4а)). Таким образом, в данном случае существенными оказываются флуктуации, происходящие при фиксированных условиях на контактах.

Наконец, нетрудно получить и явное выражение для импеданса при вещественной частоте ω . Полагая

$$\frac{L}{|u|} \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} - i\omega \right) = s' - is'', \quad (3.24)$$

где

$$s' = \frac{4\pi\sigma L}{\varepsilon |u|}, \quad s'' = \frac{L\omega}{|u|} \quad (3.25)$$

— вещественные величины, легко находим

$$\text{Re } Z = \frac{L\sigma}{\sigma^2 + \left(\frac{\varepsilon\omega}{4\pi} \right)^2} \left\{ 1 + \frac{e^{-s'} (\cos s'' - 1) - e^{-s'} s'' \sin s''}{s'^2 + s''^2} - \frac{\frac{\varepsilon\omega}{4\pi\sigma} [s'' (e^{-s'} \cos s'' - 1) + s' e^{-s'} \sin s'']}{s'^2 + s''^2} \right\}. \quad (3.26)$$

Можно без труда убедиться, что при $\sigma > 0$, $u > 0$ правая часть (3.26) положительна (чего и следовало ожидать). С другой стороны, при $\sigma < 0$ знак $\text{Re } Z$ в опре-

деленной области частот может измениться: возможен случай $\text{Re } Z < 0$. При этом образец представляет собой активный элемент цепи. При достаточно малой концентрации носителей заряда, когда неравенство (3.22) не выполняется, система электрически устойчива. Тем не менее в определенных интервалах частот (кратных обратному «пролетному времени», $L/(\mu_0 E_0)$) вещественная часть импеданса (3.12) (при $\omega \in \text{Re}$) оказывается отрицательной. Образец при этом работает как усилитель [8—10]*).

б) Рекомбинационная нелинейность

Комбинируя равенства (2.10), (2.11б), (3.8) и (3.14) и требуя, чтобы мнимая часть ω_l была положительна, находим следующее условие электрической неустойчивости (в режиме заданного напряжения):

$$\frac{\tau_g}{\tau_c} \left(\frac{d \ln v}{d \ln E} - 1 \right) - 1 \geqslant \\ \geqslant b \left(\frac{\mu E_0 \eta_l}{L} \right)^2 \tau_M \tau_r \frac{1 + \xi_1^2 / \eta_l^2 - \frac{|\xi_1| L}{\eta_l^2 \mu E_0 \tau_r} \left(1 + \frac{\tau_r}{\tau_M} \right)}{|\xi_1| \frac{\mu E_0 \tau_r}{L} + 1 + \frac{\tau_r}{\tau_M}}. \quad (3.27)$$

Поскольку правая часть этого неравенства всегда положительна, оно может выполняться, лишь если дифференциальная проводимость

$$\sigma = en_0 \mu \left(1 - \frac{d \ln v}{d \ln E} \right)$$

отрицательна и притом достаточно велика по модулю.

Соответствующее критическое значение $|\sigma|$ есть

$$\sigma_c''' = en_0 \mu \frac{\tau_c}{\tau_g} \{ 1 + \dots \}, \quad (3.28)$$

где многоточием обозначено выражение, стоящее в правой части (3.27). Для достаточно длинных образцов, когда

$$b \left(\frac{\varepsilon E_0 \eta_l}{4\pi e n_0 L} \right)^2 \ll 1, \quad (3.29)$$

*) Одновременно размеры образца должны быть ограничены также и условием флуктуационной устойчивости (см. ниже, § 4).

выражение (3.28) сводится к (3.7'); в общем случае

$$\sigma_c''' > \sigma_c'.$$

Заметим, что, в отличие от случая дрейфовой нелинейности, из неравенства (3.27) не вытекает существование некоторой критической концентрации носителей, необходимой для развития неустойчивости. Действительно, при $n_0 \rightarrow 0$ мы имеем, согласно (2.12), (2.13):

$$\frac{\tau_g}{\tau_M \tau_c} \rightarrow \frac{4\pi e \mu}{\varepsilon} \left(1 - \frac{n_{t,0}}{N}\right), \quad \tau_r \rightarrow \tau_c, \quad \frac{\tau_M}{\tau_r} \rightarrow \infty, \quad \frac{\tau_g}{\tau_c} \rightarrow \infty.$$

Следовательно, неравенство (3.27) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d \ln v}{d \ln E} - 1 &\geq \\ &\geq \left(\frac{\mu E_0 \eta_1}{L}\right)^2 \frac{\varepsilon c_0 v(E_0) \tau_c^2 N}{4\pi e \mu n_{t,0}} \frac{1 + \xi_1^2 / \eta_1^2 - \frac{|\xi_1| L}{\eta_1^2 \mu E_0 \tau_c}}{|\xi_1| \frac{\mu E_0 \tau_c}{L} + 1}. \end{aligned} \quad (3.27')$$

Видно, что при заданном значении E_0 концентрация свободных носителей заряда отсюда выпадает*).

Напомним, что до сих пор мы считали $\omega \neq \omega_m$, где ω_m — характерная комплексная частота, определяемая равенствами (3.9), (3.10).

Обратимся теперь к случаю $\omega = \omega_m$. Легко видеть, что при этом решение, удовлетворяющее однородным граничным условиям (2.15а), существует лишь при

$$\delta J(\omega_m) = 0.$$

Действительно, в противном случае на величины ω_m пришлось бы наложить еще дополнительные условия

$$\exp\{ik_i(\omega_m)L\} = 1, \quad i = 1, 2,$$

вообще говоря, несовместные с (3.9), (3.10). Справедливо и обратное утверждение: при $\delta J(\omega_m) = 0$ решения (2.9), удовлетворяющие условиям (2.15а), существуют лишь при $\omega = \omega_m$. Иначе говоря, величины $\omega = \omega_m$ представляют собой собственные значения задачи (2.9), (2.15а).

*) Строго говоря, от n_0 может зависеть функция $v(E_0)$ — через механизм рассеяния. При достаточно малых концентрациях носителей, однако, эта зависимость не существенна (см. § II.5).

Комбинируя равенства (3.9) и (3.10), мы имеем

$$\frac{\sqrt{-a_1^2 + 4a_2a_0}}{a_2} = \frac{2\pi}{L} m, \quad (3.30)$$

чем (с учетом (2.11a) и (2.11б)) и определяются частоты ω_m .

В силу (3.30) выражение (3.9) можно переписать в виде

$$k_{1,2} = i \frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{\pi}{L} m. \quad (3.31)$$

Соответственно искомое решение уравнения (3.9) (при $\delta J(\omega_m) = 0$) имеет вид

$$\delta E(x, \omega_m) = A \exp\left(-\frac{a_1 x}{2a_2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} mx\right), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.32)$$

где A — произвольная постоянная.

Для вариации напряжения на образце мы получаем

$$\delta V(\omega_m) = A \frac{2\pi m}{L} \frac{(-1)^m \exp\left(-\frac{a_1 L}{2a_2}\right) - 1}{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2}. \quad (3.33)$$

Поскольку правая часть (3.33) отлична от нуля, импеданс образца в рассматриваемых условиях бесконечно велик: $\delta J(\omega_m) = 0$ при $\delta V(\omega_m) \neq 0$. Следовательно, при $\text{Im } \omega_m > 0$ будет иметь место электрическая неустойчивость в режиме заданного тока. Явный вид условия неустойчивости легко получить с помощью соотношений (2.11a), (2.11б) и (3.30).

В случае дрейфовой нелинейности мы имеем

$$\omega_m = -i \left\{ \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} + \frac{u^2}{4D} + \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 D \right\}, \quad (3.34)$$

т. е. система неустойчива при

$$\sigma < 0,$$

$$|\sigma| > \sigma_c^{\text{IV}} = \frac{\epsilon}{4\pi} \left\{ \frac{u^2}{4D} + \frac{\pi^2}{L^2} D \right\}. \quad (3.35)$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$n_0 > n'_c = \frac{\epsilon}{4\pi|\gamma|} \left\{ \frac{u^2}{4D} + \frac{\pi^2}{L^2} D \right\}, \quad (3.35')$$

где, как и раньше,

$$\gamma = 1 + d \ln \mu_0 / d \ln E_0,$$

а n'_c — критическая концентрация носителей заряда, начиная с которой система (в данном поле и при $\sigma < 0$) обнаруживает электрическую неустойчивость в режиме заданного тока.

В случае *рекомбинационной нелинейности* общее выражение для ω_m оказывается довольно громоздким. Формулы несколько упрощаются, если

$$\frac{D\tau_g}{u^2\tau_{M\tau_c}} \frac{d \ln v}{d \ln E} \gg 1. \quad (3.36)$$

Как уже отмечалось, неравенство (3.36) действительно реализуется в ряде экспериментально интересных случаев. При этом условие электрической неустойчивости (в режиме заданного тока) принимает вид

$$\frac{d \ln v}{d \ln E} > 2, \quad (3.37)$$

т. е.

$$|\sigma| > en_0\mu. \quad (3.37')$$

Видно, что и здесь, как и при вычислении нулей импеданса, не появляется характерной для случая дрейфовой нелинейности критической концентрации носителей заряда: неравенство (3.37) может быть выполнено и при $n_0 \rightarrow 0$.

Покажем теперь, что основные рассуждения, приводящие к « n_0L -критерию» в случае дрейфовой нелинейности, не связаны однозначно со специальным выбором граничных условий (2.15а). С этой целью рассмотрим граничные условия (2.17). Тогда импеданс оказывается равным

$$Z = \frac{\beta L}{a_0} + \frac{A}{ik_1} (e^{ik_1L} - 1) + \frac{B}{ik_2} (e^{ik_2L} - 1), \quad (3.38)$$

где

$$A = \frac{(g_1\beta + a_0h_1)(g_2 + k_2)e^{k_2L} - (g_2\beta + h_2a_0)(g_1 + k_2)}{a_0 [e^{k_1L}(g_2 + k_1)(g_1 + k_2) - e^{k_2L}(g_1 + k_1)(g_2 + k_2)]}, \quad (3.39a)$$

$$B = - \frac{(g_1\beta + a_0h_1)(g_2 + k_2)e^{k_1L} - (g_2\beta + h_2a_0)(g_1 + k_1)}{a_0 [e^{k_1L}(g_2 + k_1)(g_1 + k_2) - e^{k_2L}(g_1 + k_1)(g_2 + k_2)]}. \quad (3.39б)$$

В случае (3.13) k_1 возрастает, $k_2 \rightarrow k = -ia_0/a_1$, и мы получаем вместо (3.12')

$$Z = -\frac{a_1(\varphi\psi - ikL)}{k^2(\psi + ikL)} \left[1 - i\varphi kL - e^{ikL} + i\varphi \frac{(1 + \varphi)\psi}{\varphi\psi - ikL} kL \right], \quad (3.40)$$

где

$$\varphi = \frac{4\pi}{\epsilon h_1 \mu_0 E_0}, \quad \psi = g_1 L. \quad (3.41)$$

Нули импеданса определяются теперь уравнением

$$1 - i\varphi kL - e^{ikL} + i\varphi \frac{(1 + \varphi)\psi}{\varphi\psi - ikL} kL = 0; \quad (3.42)$$

при $\psi \rightarrow \infty$ это условие переходит в (3.15). Положение нулей импеданса на комплексной плоскости ω зависит теперь от коэффициентов h_1 , g_1 . Непосредственное исследование показывает, что эта зависимость не очень сильна. Соответственно для широкой области значений h_1 и g_1 корень уравнения (3.42) с алгебраически наибольшей вещественной частью отрицателен, и мы вновь получаем критерий (3.22). Величина ξ_1 в правой части указанного неравенства зависит теперь, однако, от h_1 и h_2 (хотя и не сильно); для реальных контактов численное значение ее может несколько отличаться от вычисленного с граничным условием (2.15а) [20].

§ 4. Флуктуационная неустойчивость

В обычной радиотехнической схеме вычисление импеданса и определение его нулей и полюсов в комплексной плоскости ω полностью решает задачу об электрических свойствах системы в случае слабого сигнала. В рассматриваемом случае, однако, ситуация оказывается более сложной: как указано в § 1.5, возникает еще задача об устойчивости (или неустойчивости) пространственно однородного распределения плотности заряда и напряженности поля относительно малых флуктуаций названных величин. Неустойчивость этого типа мы будем называть *флуктуационной*.

Допустим, что характерное время развития флуктуации (оно вскоре будет выписано) велико по сравнению со временем свободного пробега, а характерный размер

области, «охваченной» флуктуацией, много больше длины свободного пробега *). Тогда для описания флуктуаций мы можем воспользоваться теми же феноменологическими уравнениями, что и при вычислении импеданса. В сущности, мы имеем здесь формально ту же задачу, что и в §§ 2, 3, только роль «сигнала» в данном случае исполняет случайная эдс, ответственная за появление флуктуаций поля и плотности заряда. Надо лишь дополнить принятую ранее постановку задачи начальными условиями для функций $\rho(x, t)$ и $\rho_t(x, t) = en_t(x, t)$:

$$(\rho - \rho_0)|_{t=0} = \xi(x), \quad (\rho_t - \rho_{t,0})|_{t=0} = \xi_t(x). \quad (4.1)$$

Здесь, как и раньше, $\rho_{t,0}$ есть значение плотности связанного заряда в пространственно однородном образце в условиях рекомбинационного равновесия; $\xi(x)$ и $\xi_t(x)$ — некоторые заданные функции координат.

Однако, в отличие от § 3, нас интересует сейчас не вариация напряжения на образце, а временная эволюция самих функций $E(x, t)$, $\rho(x, t)$, $\rho_t(x, t)$.

Рассмотрим сначала самый простой случай дрейфовой нелинейности и периодических граничных условий (2.15б). Как и раньше, представим искомые функции в виде (2.8) и линеаризуем уравнения (2.5) и (2.6) по δE , $\delta \rho$ с учетом (2.3). При этом, как и в §§ 2, 3, ограничимся одномерной задачей, считая все величины изменяющимися только вдоль оси Ox . Получим

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \frac{\partial \delta j}{\partial x} = 0, \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial \delta E}{\partial x} - \frac{4\pi}{e} \delta \rho = 0, \quad (4.2б)$$

$$\delta j = \sigma \delta E + u \delta \rho - D \frac{\partial \delta \rho}{\partial x}. \quad (4.2в)$$

(Мы пользуемся теми же обозначениями, что и в §§ 2, 3, в частности, u дается формулой (3.19).)

Решение системы (4.2a) — (4.2в) будем искать в виде суммы гармоник вида

$$\delta \rho = \rho_k e^{ikx - i\omega t}, \quad \delta E = E_k e^{ikx - i\omega t}. \quad (4.3)$$

*) Заранее очевидно — и будет строго показано в дальнейшем, — что именно такие крупномасштабные флуктуации особенно «опасны» в смысле возможной неустойчивости.

Здесь k — волновое число, возможные значения которого даются равенством (3.2), ω — частота (вообще говоря, комплексная). Вещественная часть ее дает частоту колебаний напряженности поля и плотности заряда, а мнимая — константу затухания (или нарастания) флуктуации. Условие разрешимости системы дает закон дисперсии — соотношение между ω и k :

$$\omega = -i \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma + Dk^2 \right) + ku. \quad (4.4)$$

Согласно (3.2) в системе конечных размеров величины k дискретны: $k = \frac{2\pi}{L} l$, $l = 0, \pm 1, \dots$. При этом, интересуясь флуктуациями плотности заряда, мы обязаны считать $l \neq 0$. Тогда, очевидно,

$$k^2 \geq k_0^2 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2. \quad (4.5)$$

В отсутствие постоянного поля ($E_0 = 0$) мы имели бы $u = 0$, $\sigma = \rho_0 \mu_0$ и выражения (4.3) и (4.4) описывали бы обычные флуктуации плотности объемного заряда, затухающие со временем по закону

$$\delta\rho \sim \exp \left\{ - \left(\frac{1}{\tau_M} + Dk^2 \right) t \right\}, \quad t \geq 0.$$

Здесь, как и раньше, $\tau_M = \varepsilon/4\pi\rho_0\mu_0$ есть максвелловское время релаксации. Очевидно, именно оно и характеризует время затухания флуктуации. Учет диффузии (равно как и электронной теплопроводности) при этом принципиальной роли не играет.

Нарушение равновесия, в рассматриваемом случае вызванное приложенным извне постоянным электрическим полем, приводит к двум следствиям.

Во-первых, у величины ω появляется вещественная часть. Иначе говоря, становится возможным распространение волн с частотой

$$|\operatorname{Re} \omega| = |ku|. \quad (4.6)$$

Это — волны объемного заряда. (Переходя к трехмерному случаю, легко убедиться, что они продольные.)

Во-вторых, вместо обычной омической проводимости $\rho_0\mu_0$ в максвелловском времени релаксации появляется

дифференциальная проводимость σ (соответственно чему говорят о дифференциальном максвелловском времени релаксации). Это обстоятельство особенно существенно, если значение E_0 соответствует падающему участку вольтамперной характеристики. При этом $\sigma < 0$, и в отсутствие диффузии (и/или других необратимых процессов, например, электронной теплопроводности) рассматриваемые флуктуации вообще не затухали бы, а нарастали (пока нелинейные эффекты, не учтенные в линеаризованной системе (4.2а) — (4.2в), не ограничили бы их рост). Это означало бы, что пространственно однородное распределение поля и плотности заряда неустойчиво.

Таким образом, учет диффузии (или иных необратимых процессов) становится здесь принципиальным: именно эти процессы могут при определенных условиях стабилизировать пространственно однородное состояние. В самом деле, введем обозначение

$$\sigma_1 = \frac{e}{4\pi} Dk_0^2. \quad (4.7)$$

Тогда, согласно (4.4), флуктуации поля и плотности заряда затухают, и пространственно однородное распределение устойчиво в рассматриваемом смысле, если $\sigma > 0$ или $\sigma < 0$, но

$$|\sigma| < \sigma_1. \quad (4.8)$$

Аналогично обстоит дело и в случае рекомбинационной нелинейности. Здесь следует принять во внимание, что захват носителей заряда (в отличие от рассеяния их) обычно представляет собой медленный процесс, длительность которого вполне может быть сравнима со временем развития флуктуации. По этой причине, рассматривая флуктуации напряженности поля, мы уже не вправе считать концентрацию электронов n просто известной функцией E , а должны писать для нее уравнение кинетики (2.7).

Явный учет кинетики захвата, усложняя задачу вычислительно, не меняет, однако, ее существа. Линеаризуя уравнения Пуассона, непрерывности и кинетики рекомбинации, мы вновь получим для $\delta\rho$, δE , δj и δn (или $\delta\rho_i$) систему вида (4.2), только с большим числом уравнений. Разыскивая ее решение в виде суммы гармоник

типа (4.3), вновь получим выражение для ω как функции k . Очевидно, знак $\text{Im } \omega(k)$ определяет, будет ли флуктуация затухать или нарастать во времени. Именно, рассматриваемая гармоника устойчива, если

$$\text{Im } \omega(k) < 0. \quad (4.9)$$

При этом оказываются справедливыми все сделанные ранее выводы качественного характера. Можно сохранить выражение (4.7), рассматривая его как определение k_0 ; тогда, однако, величина k_0 будет, вообще говоря, отличаться от предельного волнового числа (4.5). В результате довольно длинной выкладки мы получаем

$$k_0^2 = \frac{4\pi n_0 e^2 \tau_c}{\epsilon T \tau_g} \left\{ 1 + \frac{b \frac{\epsilon E_0^2}{4\pi n_0 T} + \frac{\pi \epsilon T}{n_0 e^2 L^2} + 1 + \tau_M / \tau_r}{1 + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 D^{-1} (\tau_M^{-1} + \tau_r^{-1})} \right\}, \quad (4.10)$$

где, как и раньше,

$$b = 1 + \frac{D \tau_g}{\mu^2 E_0^2 \tau_M \tau_c} \frac{d \ln v}{d \ln E}.$$

Формула (4.10) близка к результату [11]; однако в последней работе, по-видимому, пропущен множитель $d \ln v / d \ln E$ во втором слагаемом в формуле, эквивалентной (2.11б).

Заметим, наконец, что флуктуации могут затухать и в результате других диссипативных процессов, явно нами не рассматривавшихся. В частности, роль одного из таких процессов может играть захват носителей «посторонними» ловушками (не теми, с которыми связано возникновение ОДП).

Обратимся теперь к флуктуациям напряженности поля и плотности заряда, возникающим при однородных граничных условиях (2.15а). Общее решение системы (4.2а) — (4.2в) при этом имеет вид

$$\delta E(x, t) = \sum_m c_m \exp[-i\omega_m t - (a_1/2a_2)x] \sin\left(\frac{\pi}{L} mx\right) + \sum_l f(x, \omega_l) \exp(-i\omega_l t) \delta \mathcal{E}(\omega_l) \frac{2\pi i}{Z'(\omega_l)}. \quad (4.11)$$

Здесь ω_m — частоты, определяемые, как и раньше, равенствами (3.9), (3.10), ω_l — корни уравнения

$$R + Z(\omega) = 0, \quad (4.12)$$

Z — импеданс (3.12), Z' — его производная по ω , R — сопротивление нагрузки, $\delta \mathcal{E}(\omega)$ — фурье-образ случайной внешней эдс в цепи, функция $f(x, \omega_l)$ дается равенством (3.11), c_m — коэффициенты, определяющиеся из начальных условий.

Второе слагаемое в (4.11) получено с учетом соотношения

$$\delta J(\omega) = \frac{\delta \mathcal{E}(\omega)}{R + Z(\omega)}. \quad (4.13)$$

Таким образом, $\delta E(x, t)$ представляет собой набор гармоник с дискретными частотами, представляющими собой, во-первых, величины ω_m и, во-вторых, нули выражения $Z(\omega) + R$ (или, в режиме заданного напряжения, просто нули импеданса $Z(\omega)$)*. Следовательно, в данном случае условия электрической и флуктуационной неустойчивости оказываются идентичными. Легко видеть, что так будет обстоять дело и при многих других граничных условиях. Действительно, глубокая разница между граничными условиями (2.15а) и (2.15б) состоит в том, что во втором случае одна из собственных функций сопряженного оператора (2.10') (с периодическими граничными условиями) есть константа; в первом же случае оператор (2.10') с граничными условиями (2.16') таких собственных функций не допускает.

Следствия, отсюда проистекающие, особенно ясны в случае дрейфовой нелинейности, когда ω входит в оператор \mathcal{L} линейно. Мы имеем при этом стандартную задачу на собственные значения. Как известно, собственные функции прямой и сопряженной задач, принадлежащие сопряженным собственным значениям, взаимно

*) Обратим внимание на любопытную координатную зависимость слагаемых первой группы. При $\text{Re}(a_1/a_2) \neq 0$ это — функции, нарастающие по направлению к одному из электродов (при $m \geq 2$ они, сверх того, еще осциллируют с пространственным периодом $2L/m$).

ортогональны. Отсюда следует, что в случае (2.15б) интеграл

$$\int_0^L \delta E(x, \omega) dx$$

(где $\delta E(x, \omega)$ — решение однородной задачи (2.9) при $\delta J = 0$) равен нулю, если $\delta E(x, \omega)$ не есть постоянная (ср. (3.1) и (3.3)); в случае же (2.15а) этот интеграл может быть отличен от нуля (ср. (3.38)).

Иначе говоря, если граничные условия таковы, что одна из собственных функций сопряженной задачи (2.10') есть константа, то существуют флуктуации напряженности поля и объемной плотности заряда, не дающие вклада в падение напряжения на образце, т. е. «не выходящие» во внешнюю цепь. Очевидно, они не имеют прямого отношения к задаче об устойчивости по импедансу; в то же время система может быть неустойчива относительно развития самих этих флуктуаций.

С другой стороны, если в числе собственных функций сопряженной задачи (2.10') нет константы, то, вообще говоря, флуктуации должны выходить во внешнюю цепь, что мы и видели. В этом случае следует ожидать совпадения условий флуктуационной устойчивости и устойчивости по импедансу.

§ 5. Абсолютная и конвективная неустойчивость [1, 12, 13]

Условия флуктуационной неустойчивости, полученные в § 4, относятся к поведению каждой отдельной гармоники. Нас, однако, интересует поведение произвольной (в том числе и локализованной в малой области пространства) флуктуации плотности или напряженности поля, т. е. функции $\delta\rho(x, t)$ или $\delta E(x, t)$ в целом.

Рассмотрим сначала систему с периодическими граничными условиями. Составляя сумму гармоник вида (4.3), мы получаем

$$\delta\rho(x, t) = \operatorname{Re} \sum_k \rho_k \exp[-i\omega(k)t + ikx]. \quad (5.1)$$

Коэффициенты ρ_k определяются из начального условия (4.1) с помощью обратного преобразования Фурье.

Условие (4.9) обеспечивает устойчивость системы относительно развития малых флуктуаций произвольного вида. Действительно, при $\text{Im } \omega(k) < 0$ мы имеем, с учетом (4.1):

$$\begin{aligned} \text{Re} \sum_k \rho_k \exp[-i\omega(k)t + ikx] &\leq \\ &\leq \exp[-t \text{Min} |\text{Im } \omega|] \text{Re} \sum_k \rho_k \exp(ikx). \end{aligned}$$

Ряд по k в правой части сходится, ибо он представляет собой не что иное, как начальное значение флуктуации плотности $\delta\rho(x, 0)$. Следовательно, он ограничен некоторой функцией $C(x)$ и

$$\delta\rho(x, t) \leq C(x) \exp\{-t \text{Min} |\text{Im } \omega|\}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

С другой стороны, ситуация, возникающая при нарушении условия (4.9), нуждается в дополнительном исследовании. Действительно, каждая отдельная гармоника при этом возрастает со временем, но нас интересует поведение не отдельной гармоники, а всей суммы (5.1). Иначе говоря, при $\text{Im } \omega(k) > 0$ гармоника вида (4.3) описывает волну объемного заряда, которая распространяется в образце, постепенно нарастая по амплитуде. Однако для исследования вопроса об устойчивости пространственно однородной системы с отрицательной дифференциальной проводимостью существенно поведение флуктуаций поля и плотности заряда в малой области около некоторой заданной точки образца. Такие локализованные флуктуации описываются не отдельными гармониками, а волновыми пакетами — флуктуациями вида (5.1) с медленно меняющимися коэффициентами ρ_k . В принципе здесь возможны два случая:

а) Флуктуация в данной точке остается ограниченной (при возрастании каждой отдельной гармоники).

б) Флуктуация в данной точке неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$ *).

В первом случае неустойчивость называется *конвективной*, или *сносовой*. Смысл названия очевиден: флуктуации уносятся из образца, не успевая заметно нарасти. При этом распределение поля и плотности заряда в образце остается однородным, несмотря на нарушение условия (4.9).

Во втором случае неустойчивость называется *абсолютной*. Здесь «уход» отдельных гармонических волн не спасает дела, ибо на их место успевают приходиться новые. Очевидно, абсолютно неустойчивое стационарное состояние вообще не может быть физически реализовано: в результате флуктуаций система должна будет перейти в какое-то другое состояние, флуктуации около которого будут уже оставаться малыми.

В связи с определением понятий абсолютной и конвективной неустойчивости надлежит сделать два замечания.

Во-первых, как видно из самого определения, эти понятия возникают в рамках линейной теории и ограничены ее рамками. Так, например, констатируя факт абсолютной неустойчивости, мы можем быть уверены в том, что соответствующее состояние в стационарных условиях неосуществимо; однако никаких сведений о том, в какое именно другое состояние перейдет система, при этом не получается.

Во-вторых, условие « $t \rightarrow \infty$ », существенно используемое при определении рассматриваемых понятий, навязывается конкретной постановкой опыта, когда источник энергии, ответственный за появление неустойчивости (в случае рис. 1 — эдс батареи), действует постоянно. При работе с достаточно короткими импульсами это условие может потерять смысл. Точный смысл слов «достаточно короткие» будет ясен из дальнейшего.

Для решения вопроса о природе неустойчивости оценка, связанная с пролетным временем, разумеется, недостаточна, ибо она относится только к одной отдельной

*) Естественно, имеется в виду рост, не ограниченный в рамках рассматриваемой линейной теории. Нелинейные эффекты ограничивают рост флуктуаций, однако для этого последние должны достигнуть конечной величины.

гармонике. Надо, явно задав вид функции $\omega(k)$, исследовать асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) поведение суммы в правой части (5.1).

Ограничимся пока случаем (4.4). С учетом (4.5) из суммы (5.1) получаем

$$\begin{aligned} \delta\rho(x, t) = \\ = 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \rho_l \exp \left\{ \frac{2\pi i}{L} (x - ut) - \left(\frac{2\pi l}{L} \right)^2 Dt - \frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma t \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

При $t \rightarrow \infty$ и ограниченном значении L доминирует первый член суммы. Следовательно, с точностью до несущественного в данной связи осциллирующего множителя

$$\delta\rho(x, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \exp \left\{ - \left[\frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 D \right] t \right\}. \quad (5.3)$$

Видно, что флуктуация (в любой точке образца) либо нарастает, либо затухает в зависимости от соотношения между σ и σ_1 (см. (4.7)). В последнем случае, однако, затухает и каждая отдельная гармоника.

Таким образом, в рассматриваемом случае конвективной неустойчивости быть не может. Система, в которой частоты волн пространственного заряда даются формулой (4.4), либо устойчива (при $\sigma > 0$ или при $\sigma < 0$, но $|\sigma| < \sigma_1$), либо неустойчива абсолютно (при $\sigma < 0$ и $|\sigma| > \sigma_1$). Иначе говоря, при нарушении критерия (4.8) пространственно однородная система с отрицательной дифференциальной проводимостью в стационарных условиях существовать не может: по достижении значения $\sigma = -\sigma_1$ система носителей заряда перейдет из пространственно однородного в некоторое другое состояние, которое нам в дальнейшем предстоит исследовать *).

Заметим, что этот вывод существенно связан с конечным значением длины образца. Действительно, со-

*) Подчеркнем, что до сих пор задача об устойчивости однородного распределения заряда и поля рассматривалась только с точки зрения малых флуктуаций. Фактически, однако, эта задача имеет и другой аспект, связанный с влиянием всякого рода «затравочных» неоднородностей, неизбежно присутствующих в образце. Этот вопрос рассматривается в главе IV. Пока заметим только, что благодаря влиянию затравочных неоднородностей переход в неоднородное состояние может фактически происходить и при меньших численных значениях ОДП.

вершим формальный предельный переход $L \rightarrow \infty$. Тогда, согласно (4.5), $k_0 \rightarrow 0$, $\sigma_1 \rightarrow 0$ и каждая отдельная гармоника нарастает при любом $\sigma < 0$. Сумму (5.1) при этом можно заменить интегралом:

$$\delta\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk L \rho_k \exp \left\{ ik(x - ut) - Dtk^2 - \frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma t \right\}. \quad (5.4)$$

В соответствии с начальным условием (4.1) произведение $L\rho_k$ следует рассматривать как заданную функцию k . При рассмотрении флуктуаций, локализованных в пространстве, эту функцию надо считать плавной; при этом ее можно просто вынести за знак интеграла при некотором среднем ее значении, и, следовательно

$$\delta\rho(x, t) \sim e^{-\frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp \{ ik(x - ut) - Dtk^2 \}. \quad (5.5)$$

Фигурирующий здесь интеграл легко вычисляется, и мы получаем

$$\begin{aligned} \delta\rho(x, t) &\sim \exp \left\{ - \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma + \frac{u^2}{4D} \right) t + \frac{xu}{2D} - \frac{x^2}{4Dt} \right\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \\ &\rightarrow \exp \left\{ - \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma + \frac{u^2}{4D} \right) t + \frac{xu}{2D} \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Видно, что при

$$\sigma < 0 \quad \text{и} \quad u^2/4D > 4\pi |\sigma|/\varepsilon \quad (5.7)$$

неустойчивость оказывается конвективной.

Таким образом, в рассматриваемой задаче учет конечности размеров образца играет принципиальную роль: предельный переход $L \rightarrow \infty$ (при конечном t) приводит к изменению типа неустойчивости.

Легко указать параметр, большое или малое значение которого позволяет рассматривать образец соответственно как конечный или бесконечный. Действительно, из формул (5.2) и (3.2) сразу видно, что роль такого параметра играет величина

$$\lambda = \frac{2\pi}{L} \sqrt{Dt},$$

где под t следует подразумевать время действия источника эдс или продолжительность импульса. При $\lambda \gg 1$ образец (в рассматриваемом сейчас смысле) «конечен», при $\lambda \ll 1$ он имеет «бесконечную» длину. Очевидно, параметр λ определяет вместе с тем и смысл слов «достаточно короткий импульс». Этот термин оказывается в данном случае равнозначным понятию «бесконечно длинный образец».

Расчет импеданса, изложенный в § 3, имеет смысл, лишь если пространственно однородное распределение поля и плотности заряда флуктуационно устойчиво или неустойчиво конвективно. Действительно, только в этих условиях может быть оправдано наше основное предположение о малости $|\delta E|$ и $|\delta \rho|$ по сравнению с E_0 и ρ_0 .

Комбинируя (4.5) и (4.7), (4.8), видим, что формула (3.4а) с указанной точки зрения оправдана. Так же обстоит дело и в случае рекомбинационной нелинейности (3.4б).

Ситуация, возникающая при однородных граничных условиях, аналогична только что рассмотренной. Действительно, во всех рассуждениях этого параграфа важен был только факт дискретности собственных частот. Он остается в силе и в случае (2.15б) по тем же причинам, что и раньше.

Характер неустойчивости, возникающей в бесконечно длинном образце, можно установить и иным путем, пользуясь только законом дисперсии для волн малой амплитуды [13]. Очевидно, неустойчивость возникает, если хотя бы для одной из ветвей $k_l(\omega)$ нарушается условие (4.9), т. е. найдутся значения ω такие, что при вещественном $k(\omega)$

$$\text{Im } \omega > 0. \quad (5.8)$$

Для выяснения характера неустойчивости удобно рассмотреть закон дисперсии в области комплексных значений как частоты ω , так и волнового числа. Именно, как можно показать, неустойчивость оказывается абсолютной, если для каких-либо двух корней дисперсионного уравнения $k_l(\omega)$ и $k_m(\omega)$, отвечающих волнам, распространяющимся в разные стороны, найдется значение ω , для которого

$$\text{Im } \omega > 0, \quad k_l(\omega) = k_m(\omega). \quad (5.9)$$

В противном случае (при выполнении условия (5.8)) неустойчивость будет конвективной.

Заметим, что в случае, когда закон дисперсии рассматривается для комплексных ω и k , обычное определение направления распространения волны с помощью групповой скорости необходимо обобщить. Будем говорить, что волна $e^{ik_m(\omega)x - i\omega t}$ распространяется в данном направлении, если при достаточно быстром нарастании локализованного возмущения во времени ($\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$) она убывает в пространстве именно в этом направлении (при $\text{Im } k_m(\omega) > 0$ волна распространяется вправо, а при $\text{Im } k_m(\omega) < 0$ — влево).

В случае волн в обычной устойчивой системе, когда вещественным ω отвечают вещественные k , такое определение направления распространения совпадает с обычным определением через групповую скорость. Действительно, переходя в законе дисперсии к комплексным значениям k и ω , мы имеем при малых $\text{Im } k$

$$\text{Im } \omega \approx \text{Im } k \frac{d \text{Re } \omega}{d \text{Re } k}.$$

Согласно определению через групповую скорость, для волны, распространяющейся вправо, $\frac{d\omega}{dk} > 0$. Если при этом $\text{Im } k > 0$, то на плоскости комплексной частоты точка ω перейдет в верхнюю полуплоскость. Устремим теперь $\text{Im } \omega$ к бесконечности; при этом точка k останется в верхней полуплоскости, ибо, по предположению, нет частот, для которых $\text{Im } k = 0$ при $\text{Im } \omega > 0$. Таким образом, при $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$ мы имеем $\text{Im } k > 0$, т. е. волна распространяется вправо и согласно приведенному выше обобщенному определению.

В рассмотренном нами случае (4.4) существуют две ветви функции $k(\omega)$:

$$k_{1,2}(\omega) = -\frac{i u}{2D} \pm \sqrt{\frac{1}{D} \left(i\omega - \frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma - \frac{u^2}{4D} \right)}, \quad (5.10)$$

отвечающие волнам, распространяющимся в разные стороны (отметим, что в данном случае понятие групповой скорости нельзя ввести обычным путем, ибо нет

вещественных частот, которым отвечали бы вещественные значения k). Условие (5.8) имеет, очевидно, в этом случае вид неравенства, обратного (4.8), при $\sigma_1 = 0$, поскольку $L = \infty$. Согласно (5.9), абсолютная неустойчивость наступает лишь при выполнении условия

$$i\omega = \frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma + \frac{u^2}{4D}, \quad \text{Im } \omega > 0. \quad (5.11)$$

Последнее, естественно, совпадает с условием (5.7), полученным выше путем непосредственного рассмотрения поведения волнового пакета.

Условия (5.8) и (5.9) представляют собой условия устойчивости, полученные для бесконечно длинного образца в пренебрежении влиянием границ. В то же время даже для длинных образцов (и в пределе при $L \rightarrow \infty$) наличие границ может оказаться существенным: отражение волн от границ может вызвать появление своеобразной обратной связи, приводя к так называемой *глобальной неустойчивости* [14]. Последняя имеет место, если для двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях,

$$\text{Im } \omega > 0, \quad \text{Im } [k_l(\omega) - k_m(\omega)] = 0 \quad (5.12)$$

хотя бы для одного значения ω . Вид условия глобальной неустойчивости, связанной с прохождением волн через всю систему, определяется (асимптотически при $L \rightarrow \infty$) свойствами самой системы и не зависит от вида граничных условий (коль скоро последние локальны и соответствующая краевая задача поставлена корректно). Вообще говоря, условие (5.12) — менее жесткое, чем условие абсолютной неустойчивости (5.9). Нетрудно проверить, однако, что в рассматриваемом случае (4.4) условия глобальной и абсолютной неустойчивости совпадают.

Строгая формулировка краевой задачи показывает, что при $L \rightarrow \infty$ существуют также «односторонние» решения, для которых комплексная частота определяется граничными условиями на одном из концов. Соответственно возможна *граничная неустойчивость*, появление которой зависит от конкретного вида граничных условий.

§ 6. Флуктуационная устойчивость в системе с электронной температурой

Ограничимся здесь только случаем дрейфовой нелинейности и периодических граничных условий (2.15а)*). По-прежнему рассматриваем только одномерную задачу в невырожденном полупроводнике, характеризуя электроны скалярной эффективной массой m и временем релаксации импульса $\tau(W)$; оно зависит от энергии W .

Исходная система уравнений включает здесь формулу для тока (II.4.18), уравнение непрерывности (2.5), уравнение Пуассона (2.6) и, наконец, уравнение баланса энергии (II.3.19). Варьируя последнее, получаем (при $F = eE$)

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_0 \delta \bar{W} + \bar{W}_0 \delta n) + \frac{\partial \delta q}{\partial x} + P_0 \delta n + n_0 \delta P = E_0 \delta j + j_0 \delta E; \quad (6.1)$$

здесь $P_0 = P(T_0)$.

По определению электронной температуры

$$\bar{W}_0 = \frac{3}{2} T_0, \quad \delta \bar{W} = \frac{3}{2} \delta T. \quad (6.2)$$

Вариацию мощности δP представим в виде

$$\delta P = \frac{\partial P_0}{\partial T_0} \delta T = \frac{3}{2} \frac{\delta T}{\tau_{ЭН}}, \quad (6.3)$$

где

$$\tau_{ЭН} = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial P_0}{\partial T_0} \right)^{-1} \quad (6.4)$$

есть время релаксации электронов по энергии.

Флуктуация плотности тока δj дается формулой (2.3); для флуктуации потока энергии δq мы имеем в соответствии с (II.4.19)

$$\delta q = \frac{1}{e} \theta_0 \delta j - \kappa_0 \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \frac{j_0}{e} \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial T_0} \right) \delta T. \quad (6.5)$$

Решение системы (6.1), (6.5), (2.3), (2.5) и (2.6) будем искать в виде гармоник (4.3). Точное выражение для частоты как функции волнового числа k оказы-

*) В дальнейшем изложении мы следуем работе [5].

вается чрезвычайно громоздким (его можно найти в работе [5]). Заметим лишь, что критерий флуктуационной неустойчивости в данном случае сводится к уже известному нам неравенству

$$\operatorname{Re} \sigma(\omega, k) < 0, \quad (6.6)$$

где $\sigma(\omega, k)$ есть комплексная продольная дифференциальная проводимость системы.

Формулы заметно упрощаются в частном случае, когда

$$k\mu_0 E_0 \tau'_{\text{эн}} \ll 1, \quad \tau'_{\text{эн}}/\tau_M \ll 1, \quad (6.7)$$

где

$$(\tau'_{\text{эн}})^{-1} = \tau_{\text{эн}}^{-1} + \frac{2}{3} \kappa_0 k^2, \quad (6.8)$$

а $\tau_M = \varepsilon/4\pi en_0\mu_0$ — максвелловское время релаксации. Смысл неравенств (6.7) очевиден: первое из них означает, что мы ограничиваемся достаточно длинными флуктуационными волнами, второе — что релаксация энергии происходит гораздо быстрее, нежели рассасывание объемного заряда в условиях равновесия. Такие условия действительно могут осуществляться в некоторых экспериментально интересных системах.

В условиях (6.7) вещественная часть частоты дается уже известным нам выражением

$$\operatorname{Re} \omega = k\mu_0 E_0, \quad (6.9)$$

а критерий флуктуационной неустойчивости принимает вид (в пренебрежении членами порядка k^4)

$$\tau_M^{-1} \left(1 + eE_0^2 \frac{d\mu_0/dT_0}{dP_0/dT_0} \right) + k^2 D_0 + k^2 \frac{\kappa_0}{n_0} \tau_M^{-1} \left(\frac{dP_0}{dT_0} \right)^{-1} + k^2 D_0 \left(\frac{\theta_0}{T_0} - \frac{3}{2} \right) eE_0^2 \frac{d\mu_0/dT_0}{dP_0/dT_0} < 0. \quad (6.10)$$

Здесь $D_0 = \mu_0 T_0/e$ есть коэффициент диффузии.

Первое слагаемое в левой части (6.10), очевидно, пропорционально дифференциальной проводимости пространственно однородного образца σ , второе слагаемое описывает уже известную нам релаксацию флуктуации за счет диффузии, а третье — релаксацию за счет электронной теплопроводности.

Четвертое слагаемое связано с переносом энергии сгустками объемного заряда. Формально его можно объединить со вторым слагаемым, введя эффективный коэффициент диффузии

$$D_0^* = D_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\theta_0}{T_0} - \frac{3}{2} \right) e E_0^2 \frac{d\mu_0/dT_0}{dP_0/dT_0} \right\}. \quad (6.11)$$

При этом, однако, следует помнить, что величина D_0^* не обязана быть положительной (второе слагаемое в фигурных скобках при $\sigma < 0$ и $\theta_0/T_0 > 3/2$ заведомо отрицательно). Суть дела здесь в том, что средняя энергия, переносимая одним электроном, зависит от механизма рассеяния (в противном случае мы имели бы $\theta_0/T_0 = 3/2$ и коэффициент D^* совпадал бы с D). По этой причине энергия может либо втекать в область, охваченную флуктуацией температуры, либо вытекать из нее. При $\sigma < 0$ это будет способствовать либо нарастанию, либо рассасыванию флуктуации*).

В условиях, когда $D^* > 0$, ситуация, описываемая формулой (6.10), в сущности, не отличается от рассмотренной в §§ 4, 5: в достаточно коротких образцах пространственно однородное распределение поля, электронной температуры и плотности заряда флуктуационно устойчиво даже при $\sigma < 0$. С другой стороны, при $D^* < 0$ флуктуационная устойчивость может быть обеспечена (в рассматриваемом случае) только за счет электронной теплопроводности, причем последняя должна быть достаточно велика. Связанные с этим возможности, однако, до сих пор детально не исследованы.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением одномерной модели. Такой подход позволяет выяснить основные черты доменной электрической неустойчивости. Однако для некоторых специальных систем, весьма перспективных в техническом отношении, этот подход оказывается недостаточным и возникает вопрос о том или ином обобщении рассматриваемой модели.

*) Заметим, что диффузия может обусловить и нагрев электронного газа, ибо она вызывает ток. Этот эффект, однако, оказывается высшего порядка по параметру $k\mu_0 E_0 \tau'_{\text{Эн}}$. То же относится и к нагреву электронного газа за счет работы сил давления.

Мы уже отмечали выше (§ 1.5), что коль скоро образец макроскопически однороден, учет эффектов, связанных с конечностью его поперечных размеров, для тонких образцов может быть проведен феноменологически в рамках одномерной модели. Особенность развития неустойчивости в тонких образцах связана с тем, что электрическое поле частично «выходит» из образца и условия распространения электрических возмущений в образце изменяются [15, 16]. Эффект особенно ярко выражен, когда диэлектрическая проницаемость окружающей среды велика: условие флуктуационной неустойчивости при этом может заметно измениться [17]. В работе [18] было экспериментально обнаружено, что покрытие поверхности образца GaAs диэлектриком с большой диэлектрической проницаемостью (BaTiO_3) приводит к подавлению колебаний, связанных с движением доменов дрейфового происхождения, даже если выполнено условие (3.23). Наблюдалось также изменение времени образования доменов в тонких образцах GaAs [19].

ГЛАВА IV

СТАТИЧЕСКИЕ ДОМЕНЫ

§ 1. Введение. Основные уравнения

Характерные особенности существенно неравновесных систем проявляются не только в нестационарных процессах, рассмотренных в главе III, но и в статическом режиме. Ясные экспериментальные указания на это были получены, например, при попытке наблюдать колебания тока, связанные с отрицательной дифференциальной проводимостью в однородном n -Ge, легированном медью [1]. Именно, в условиях, когда должна была бы наблюдаться ОДП, фактически имело место насыщение плотности тока как функции напряженности электрического поля. Аналогичные явления наблюдались и в других веществах (см., например, [3, 4]).

Довольно радикальное расхождение с опытом, неуклонно наблюдающееся в различных условиях и для различных материалов, наводит на мысль, что дело здесь не в каких-то случайных причинах, а в глубокой закономерности общего характера. Поскольку ОДП, ожидаемая в пространственно однородной системе, фактически не проявляется, следует подвергнуть сомнению сам факт существования такой системы*). Подчеркнем, что речь идет здесь о распределении электронов в образце, достаточно большом (с длиной, значительно превышающей толщину приконтактного поля) и в среднем однородно легированном. Такие образцы мы будем называть технологически однородными и только их и будем рассматривать. Очевидно, именно в этом случае

*) Эта возможность, по-видимому, впервые обсуждалась в работе [2], где исследовалось влияние металлизированных контактов на распределение потенциала в образце с ОДП.

вопрос о возможной неоднородности распределения поля и заряда носит нетривиальный характер.

Для теоретического исследования распределения заряда и поля в образце надо написать уже известные нам феноменологические соотношения: уравнение Пуассона, уравнение непрерывности, выражение для плотности тока и, если речь идет о рекомбинационной нелинейности, уравнение кинетики рекомбинации.

Рассмотрим сначала систему с дрейфовой нелинейностью, ограничиваясь по-прежнему одномерной геометрией. В статическом случае основные уравнения задачи имеют вид

$$\frac{dj}{dx} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi}{\epsilon} (\rho - \rho_0), \quad (1.2)$$

$$j = \rho\mu E - \frac{d}{dx}(\rho D). \quad (1.3)$$

Согласно (1.1),

$$j = j_0, \quad (1.4)$$

где j_0 — постоянная интегрирования, равная, очевидно, силе тока в последовательной нагрузке. Комбинируя равенства (1.4) и (1.3), получаем

$$\frac{d}{dx}(\rho D) = \rho\mu E - j_0. \quad (1.5)$$

Задача свелась к исследованию системы уравнений (1.2) и (1.5). Ее следует дополнить тремя граничными условиями (исходная система (1.1) — (1.3) — третьего порядка, что и отражается наличием константы j_0). Одно из этих условий очевидно: оно выражает просто закон Кирхгофа. Считая площадь поперечного сечения образца равной единице, можем написать

$$\int_0^L E dx = \mathcal{E} - j_0 R. \quad (1.6)$$

Здесь, как и раньше, R есть сопротивление последовательной нагрузки, а \mathcal{E} — постоянная эдс батареи. Два других условия должны отражать природу контактов

(феноменологически — в смысле § II.7). В зависимости от нее следует взять ту или иную пару условий, перечисленных в § II.7. В настоящей главе мы будем пользоваться одним из следующих двух вариантов граничных условий:

1) Условие «объемной нейтральности» (II.7.7) и условие (II.7.11) с параметром ζ , заданным на одном из контактов (или в некоторой точке образца $x = x_i$):

$$\int_0^L (\rho - \rho_0) dx = 0, \quad (1.7a)$$

$$\left. \frac{d}{dx} (\rho D) \right|_{x=x_i} = \zeta j. \quad (1.7b)$$

2) Условия с параметрами ζ (вида (1.7b)) на обоих контактах. Как будет показано в § 8, в ряде практически интересных случаев достаточно знать лишь знак ζ , а его удастся связать с более привычными свойствами контактов.

В случае рекомбинационной нелинейности равенства (1.1), (1.2) и (1.4) остаются без изменений; однако объемная плотность отрицательного заряда дается теперь выражением

$$\rho = en + en_t \equiv \rho_e + \rho_t,$$

где $\rho_e = en$, $\rho_t = en_t$; n и n_t суть соответственно концентрации свободных и «захваченных» электронов. Эти величины связаны уравнением кинетики рекомбинации, которое в рассматриваемом сейчас статическом случае превращается просто в условие рекомбинационного равновесия. Явный вид его зависит от энергетической схемы вещества: в частности, в модели, рассмотренной в § I.4, это есть равенство (I.4.5). Желая распространить последнее на случай рекомбинационной модели с одним центром произвольной природы, мы должны заменить в нем концентрацию трехзарядных ионов N на n_t . Таким образом, получим

$$n_t = \frac{nN\nu(E)}{n_1 + n\nu(E)} \quad (1.8)$$

и, следовательно,

$$\rho = \rho_e \left\{ 1 + \frac{N\nu(E)}{n_1 + n\nu(E)} \right\}. \quad (1.9)$$

В выражение для тока входит только плотность заряда свободных электронов ρ_e . В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d\rho_e}{dx} = \frac{\rho_e \mu E - j_0}{D}, \quad (1.10)$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi}{e} [\rho(\rho_e, E) - \rho_0], \quad (1.11)$$

где функция $\rho(\rho_e, E)$ дается формулой (1.9).

Уравнение рекомбинационной кинетики и соотношения (1.8), (1.9) и (1.11) удобно записать, введя характерные времена:

$$\frac{1}{\tau_c} = c(E)(N - n_t), \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{\tau_g} = c(E)n_0(E) + c_0 n_1 = c_0 n_1 \frac{N}{N - n_{t,0}(E)}. \quad (1.13)$$

Здесь величины $n_0(E)$ и $n_{t,0}(E)$ определяются равенствами

$$n_0 + n_{t,0} = \frac{\rho_0}{e}, \quad (1.14a)$$

$$c(E)n_0(N - n_{t,0}) - c_0 n_1 n_{t,0} = 0. \quad (1.14b)$$

При этом уравнение кинетики рекомбинации принимает вид

$$\frac{\partial n_t}{\partial t} = \frac{n - n_0(E)}{\tau_c} - \frac{n_t - n_{t,0}(E)}{\tau_g}. \quad (1.15)$$

(Здесь, как и ранее, τ_g есть время генерации, а τ_c — время захвата.)

Как правило, условия наблюдения рекомбинационной неустойчивости таковы, что с большой точностью справедливы неравенства

$$n \ll n_t, \quad n \ll N - n_t. \quad (1.16)$$

При выполнении неравенств (1.16) время τ_g можно считать постоянным, а время τ_c — зависящим только от напряженности электрического поля.

Используя введенные выше обозначения, вместо (1.8) и (1.9) получаем соответственно

$$n_t = n_{t,0} + \frac{n - n_0}{\tau_g} \tau_g \quad (1.17)$$

и

$$\rho = \rho_0 + \frac{\tau_g}{\tau_r} (\rho_e - en_0); \quad (1.18)$$

здесь

$$\tau_r = (\tau_c^{-1} + \tau_g^{-1})^{-1}. \quad (1.19)$$

С учетом (1.18) вместо (1.11) имеем

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\tau_g}{\tau_r} [\rho_e - en_0(E)]; \quad (1.20)$$

при этом в случае (1.16) время генерации τ_g постоянно, а τ_r зависит только от E .

При рассмотрении статической задачи иногда оказывается удобным выбрать в качестве независимых переменных величины ρ и E . Тогда, наряду с уравнением (1.2), мы получаем уравнение, по виду совпадающее с (1.3), в котором, однако, вместо μ и D стоят некоторые эффективные величины.

В статической задаче систему уравнений для случая рекомбинационной нелинейности удастся привести к форме типа (1.1)—(1.3), поскольку уравнение рекомбинационной кинетики в этом случае превращается в алгебраическое. В общей нестационарной задаче это, вообще говоря, невозможно, ибо порядки систем дифференциальных уравнений для случаев рекомбинационной и дрейфовой нелинейности оказываются различными.

§ 2. Пространственно однородное решение

Рассмотрим, прежде всего, вопрос о возможности пространственно однородного распределения плотности заряда и напряженности электрического поля в образце.

В случае дрейфовой нелинейности соответствующее решение уравнений (1.2)—(1.5) дается формулами

$$\rho = \rho_0, \quad E = E_0, \quad (2.1)$$

$$j_0 = \rho_0 \mu(E_0) E_0, \quad (2.2)$$

где E_0 — постоянная.

При этом граничное условие (1.6) дает трансцендентное уравнение для определения константы E_0 :

$$LE_0 \left[1 + \frac{\rho_0}{L} R\mu(E_0) \right] = \mathcal{E}. \quad (2.3)$$

В интересующих нас задачах уравнение (2.3) всегда имеет хотя бы одно решение $E_0(\mathcal{E})$, которое и определяет напряженность поля в образце.

Подчеркнем, что при этом α и ρ_0 задается только эдс, плотность же тока j_0 однозначно выражается через E_0 согласно (2.2). С другой стороны, мы могли бы рассматривать и задачу об определении E_0 при заданном значении j_0 (с очевидным ограничением, вытекающим из закона Кирхгофа). Тогда напряженность поля в образце определялась бы из трансцендентного уравнения (2.2). Очевидно, в правой части его стоит функция, описывающая вольтамперную характеристику соответствующего однородного образца. В интересующих нас задачах это уравнение имеет либо одно, либо три решения (см. рис. 3, а).

Аналогичные формулы справедливы и в случае комбинационной нелинейности. Полагая

$$\rho = \rho_0, \quad E = E_0, \quad n = n_0, \quad (2.4)$$

получим для определения n_0 уравнение

$$\rho_0 = en_0 \left[1 + \frac{Nv(E_0)}{n_1 + n_0v(E_0)} \right]. \quad (2.5)$$

При $n_0 \ll N$ решение этого уравнения дается формулой (I. 4.7). Легко найти $n_0(E_0)$ и в других условиях.

Для плотности тока получается теперь

$$j_0 = en_0\mu E_0 \quad (2.6)$$

и закон Кирхгофа (1.6) дает

$$LE_0 \left[1 + \frac{en_0(E_0)}{L} \mu R \right] = \mathcal{E}. \quad (2.7)$$

Непосредственно видно, что одно решение $E_0(\mathcal{E})$ имеется при любых значениях параметров задачи.

Подобно случаю дрейфовой нелинейности, мы и здесь могли бы искать значение E_0 при заданной плотности тока, с теми же выводами. Ограничимся случаем,

когда уравнение (2.3) (или (2.7)) имеет единственное решение (условие этого легко написать в явном виде — оно состоит в том, чтобы вторая производная от левой части (2.3) (или (2.7)) не обращалась в нуль в рассматриваемой области полей). Тогда, как видно из предыдущего, граничное условие (1.6) полностью определяет рассматриваемое решение, не содержащее уже никаких произвольных констант. В этом нет ничего удивительного, ибо мы рассматриваем лишь частное решение уравнений (1.2) и (1.5). Однако как в этом случае удовлетворить другим граничным условиям? Условию (1.7а) решение (2.1) (или (2.2)) удовлетворяет автоматически, но ведь есть еще условие (1.7б). Если используется другая пара граничных условий, то положение еще ухудшается: каковы бы ни были граничные условия, они содержат какие-то параметры, задаваемые свойствами системы (например, ξ). Следовательно, удовлетворить им решением (2.1) (или (2.4)), вообще говоря, невозможно. Иначе говоря, пространственно однородное распределение напряженности поля и плотности заряда в образце невозможно (исключение составляет только случай $\xi = 0$).

Смысл этого вывода очевиден: наличие контактов приводит к появлению участков неоднородного поля и неравномерного распределения заряда. Заранее ясно, однако, что в условиях, достаточно близких к равновесным, эти отклонения от однородности локализованы в сравнительно малых областях вблизи контактов, почему и носят тривиальный характер. В дальнейшем мы увидим, что так обстоит дело, когда дифференциальная проводимость (однородного образца) положительна. При отрицательной дифференциальной проводимости однородного образца положение, однако, оказывается гораздо более сложным.

§ 3. Затравочные неоднородности [5]

Вопрос о малых статических отклонениях от пространственно однородного распределения поля и плотности заряда связан не только с поведением решения вблизи контактов, но имеет и более общее значение. Именно, сделанное выше предположение о постоянстве

плотности компенсирующего заряда ρ_0 во всех точках образца представляет собой, разумеется, не более чем аппроксимацию. В любых самых «хороших» образцах неизбежно имеются флуктуации в распределении, например, легирующей примеси, равно как и структурные дефекты полумакроскопического характера (двойники и т. д.). Некоторые из таких флуктуаций могут быть связаны с локальными изменениями плотности заряда ρ_0 и напряженности поля.

Таким образом, в любом образце неизбежно присутствуют случайно разбросанные «затравочные» неоднородности в распределении объемного заряда и электрического поля. В условиях термодинамического равновесия или близких к ним затравочные неоднородности, разумеется, экранируются, и влияние их сказывается лишь в прилегающих к ним областях с линейными размерами порядка дебаевского радиуса. Если последние малы по сравнению с размерами образца, то присутствие затравочных неоднородностей (при хаотическом их распределении в пространстве) в большинстве опытов оказывается несущественным. Однако в условиях, достаточно далеких от термодинамического равновесия, сама возможность экранировки не очевидна. Действительно, свободные заряды, участвующие в экранировании затравочной неоднородности, вместе с тем участвуют и в переносе тока и могут «уноситься» им. В результате затравочная неоднородность может «разбухнуть» до макроскопически заметных размеров.

Мы приходим, таким образом, к представлению об еще одном возможном типе неустойчивости пространственно однородного распределения поля и заряда в образце — неустойчивости по отношению к развитию затравочных неоднородностей. По определению система устойчива (неустойчива) в указанном смысле, если искажения поля и плотности заряда, связанные с наличием неоднородностей, остаются (не остаются) локализованными вблизи последних.

Смысл термина «вблизи» ясен из предыдущего: имеются в виду расстояния порядка длины Дебая.

Счевидно, контакт можно рассматривать как частный случай затравочной неоднородности, навязываемой, например, граничными условиями вида (1.76).

Подчеркнем, что в отличие от неустойчивостей, рассмотренных в главе III, речь идет сейчас о развитии неоднородности не во времени, а в пространстве, — мы будем называть эту неустойчивость *статической*. С формальной точки зрения мы имеем здесь дело с устойчивостью (или неустойчивостью) решения относительно вариации граничных условий. Это замечание не требует комментариев, если роль затравочных неоднородностей исполняют контакты и граничные условия имеют вид (1.76).

В общем случае влияние затравочной неоднородности также можно в известной мере отразить с помощью того же граничного условия. В самом деле, при постоянной плотности свободного заряда часть тока непременно должна иметь диффузионную природу. Соответственно мы учтем наличие неоднородности, например, в точке $x = x_i$, положив

$$\frac{d(\rho_e D)}{dx} = \zeta j, \quad (3.1)$$

где производная берется при $x = x_i$.

Заметим, что если $x_i \neq 0$, L — затравочная неоднородность расположена внутри образца, — то последний можно рассматривать как два последовательно соединенных образца, разделенных «контактом» при $x = x_i$.

При $\zeta = 0$ граничное условие (3.1) допускает существование пространственно однородного распределения заряда и поля, удовлетворяясь автоматически решениями (2.1), (2.4). При $\zeta \neq 0$ возникает отклонение от однородности, обусловленное изменением граничного условия.

Заметим, что условие (3.1), разумеется, не может описать все эффекты, связанные с наличием любых затравочных неоднородностей: оно явно предполагает, например, что дефект, обуславливающий нарушение однородности, представляет собой плоскость, перпендикулярную вектору плотности тока в образце (при другой симметрии дефекта одномерная трактовка задачи становится невозможной). Однако для исследования интересующего нас вопроса о статической устойчивости системы такой подход достаточен.

§ 4. Критерий статической устойчивости [5]

Задача о статической устойчивости пространственно однородной системы ставится в принципе так же, как и задача о флуктуационной ее устойчивости (гл. III). В случае дрейфовой нелинейности мы должны написать уравнения (1.2) и (1.5), а в случае рекомбинационной нелинейности — уравнения (1.10) и (1.11) или (1.20) с граничными условиями (1.6) и, например (1.76) (на обоих контактах)*).

При $\zeta = 0$ уравнения допускают пространственно однородное решение (2.1) (или (2.4)). При ζ , отличном от нуля, но достаточно малом, решение (в случае дрейфовой нелинейности) можно искать в виде

$$E = E_0(1 + u), \quad \rho = \rho_0(1 + v), \quad (4.1)$$

где E_0 — постоянная, а u , v — функции x , предполагаемые малыми по сравнению с единицей. Система будет статически устойчивой, если по мере удаления от контакта функции u и v убывают по абсолютной величине.

В случае рекомбинационной нелинейности ρ и ρ_0 в формулах (4.1) следует заменить на ρ_e и $\rho_{e0} = en_0$, где n_0 — решение уравнения (2.5).

При малых u , v исходные уравнения можно линеаризовать по этим переменным, в результате чего мы приходим к линейной системе формально того же типа, что и в § III.4. Следует, однако, обратить внимание на существенное различие между задачами о флуктуационной и статической неустойчивостях. Именно, в первом случае речь шла о развитии флуктуаций во времени, соответственно чему задавалось начальное условие (например, при $t = 0$) и исследовалось поведение системы при $t \geq 0$. Во втором случае нас интересует изменение поля и плотности заряда в пространстве по обе стороны от затравочной неоднородности (если она расположена

*) Аналогично ставится задача и при других граничных условиях. Из дальнейшего будет видно, что важен не столько точный вид граничных условий, не допускающих строго однородного решения, сколько сам факт их существования. По этой причине мы ограничимся лишь указанным выше примером; результаты будут носить общий характер.

внутри образца). Если роль неоднородности играет контакт, то интересно поведение поля и заряда лишь с одной стороны от него, но у обоих контактов. Соответственно и в этом случае надо исследовать поведение поля и заряда как при возрастании ($x \geq 0$), так и при убывании ($x \leq L$) координаты x . Далее, согласно (1.1), возможная добавка к плотности тока не должна зависеть от x .

Рассмотрим сначала случай дрейфовой нелинейности. Подставляя (4.1) в уравнение (1.1), (1.2) и (1.5) и линеаризуя получающуюся систему по переменным u , v , получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} - \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon E_0} v &= 0, \\ \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x_0} - \frac{\sigma E_0}{\rho_0 D_0} u &= -\frac{\delta j}{D_0 \rho_0}, \\ \frac{d\delta j}{dx} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где

$$\frac{1}{x_0} = \frac{\mu_0 E_0 - (8\pi\rho_0 E_0 / \epsilon) \dot{D}_0}{D_0}, \quad (4.3)$$

а μ_0 , D_0 и σ суть значения подвижности, коэффициента диффузии и дифференциальной проводимости при $E = E_0$.

Разыскивая решения (4.2) в стандартном экспоненциальном виде ($u \sim e^{\lambda x}$ и т. д.), видим, что имеются два случая:

1) $\lambda = 0$, $\delta\rho = 0$, $\delta j = \sigma\delta E \neq 0$ и

2) $\lambda \neq 0$, $\delta j = 0$ *).

Первый случай нас здесь не интересует, ибо возмущения данного типа не нарушают пространственной однородности образца.

Во втором случае мы имеем

$$u = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (4.4)$$

*) Условие $\delta j = 0$ означает, разумеется, что добавка к току здесь представляет собой величину не ниже второго порядка по u , v .

где A_1 и A_2 — постоянные, а λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{4\pi\rho_0}{\epsilon E_0} \\ -\frac{\sigma E_0}{\rho_0 D_0} & \lambda - \frac{1}{x_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Очевидно,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2x_0} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16\pi\sigma x_0^2}{\epsilon D_0}} \right). \quad (4.5)$$

Аналогичная формула (с теми же значениями λ_1 и λ_2) получается и для $v(x)$ *).

Решение (4.4) надо написать отдельно для каждого контакта и дважды — для затравочной неоднородности внутри образца (слева и справа от нее). При этом возможны два случая.

1) Вещественные части корней λ_1 и λ_2 — разных знаков. Тогда, полагая в каждом решении одну из констант, A_1 или A_2 , равной нулю, мы можем добиться того, чтобы искажение поля и плотности заряда убывало по мере удаления от затравочной неоднородности. Остающихся констант (с учетом условия непрерывности или заданных разрывов напряженности поля) вкуче с E_0 при этом будет как раз достаточно, чтобы удовлетворить всем граничным условиям.

Очевидно, при $L \gg x_0$ это — случай статической устойчивости: отклонение решения от пространственно однородного локализовано в некоторой области вблизи контакта (или иной «затравки»).

2) Вещественные части корней λ_1 и λ_2 — одного знака. Тогда никаким выбором констант A_1 и A_2 нельзя добиться убывания величин u и v по обе стороны от затравочной неоднородности (или у обоих контактов). Решение (4.4) при этом справедливо в ограниченной области пространства (с размерами $\sim x_0$).

Очевидно, это — случай статической неустойчивости: отклонение решения от пространственно однородного

*) При $E_0 \rightarrow 0$ мы имеем, очевидно, $\sigma \rightarrow en_0\mu_0$ и, с учетом соотношения Эйнштейна, $1/|\lambda_{1,2}| \rightarrow (\epsilon T_l / 4\pi n_0 e^2)^{1/2}$, где T_l — температура решетки. Этого, разумеется, и следовало ожидать.

распространяется на некоторую конечную область пространства. Возникающие при этом около затравочных неоднородностей области повышенной (пониженной) напряженности поля получили название статических, или локальных доменов. Исследование их требует нелинейного подхода (см. §§ 7, 8).

Как видно из формулы (4.5), первый случай реализуется при $\sigma > 0$, второй — при $\sigma < 0$ *).

Обратимся теперь к случаю рекомбинационной нелинейности. Полагая

$$E = E_0(1 + u), \quad \rho_e = en_0(1 + v)$$

и подставляя эти выражения в (1.10) и (1.11), получаем линеаризованную систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} - \frac{Au + Bv}{x_0} &= 0, \\ \frac{dv}{dx} - \frac{u + v}{x_0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где x_0 дается по-прежнему формулой (4.3),

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{4\pi en_0 D}{\epsilon \mu E_0^2} \frac{N n_1 v'_0}{(n_1 + n_0 v_0)^2}, \\ B &= \frac{4\pi en_0 D}{\epsilon \mu E_0^2} \left[1 + \frac{N n_1 v_0}{(n_1 + n_0 v_0)^2} \right], \\ v_0 &= v(E_0), \quad v'_0 = \left(\frac{dv}{d \ln E} \right)_{E=E_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения суть

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2x_0} [A + 1 \pm \sqrt{(A + 1)^2 + 4(B - A)}]. \quad (4.8)$$

Согласно (4.7),

$$4(B - A) = \frac{16\pi en_0 D}{\epsilon \mu E_0^2} \left[1 + \frac{N n_1 (v_0 - v'_0)}{(n_1 + n_0 v_0)^2} \right]. \quad (4.7')$$

*) При $\sigma < 0$ и $|\sigma| > \epsilon D_0 / 16\pi x_0^2$ величины u и v , возрастая или бывая по амплитуде, осциллируют в пространстве. Для целей настоящего параграфа это обстоятельство несущественно.

Таким образом, система оказывается статически устойчивой, если

$$1 + \frac{Nn_1(v_0 - v'_0)}{(n_1 + n_0v_0)^2} > 0, \quad (4.9)$$

и статически неустойчивой в противном случае.

Мы видим, что в рамках рассматриваемой модели статическая устойчивость может нарушаться, лишь если вероятность захвата зависит от напряженности поля, достаточно быстро возрастающая с увеличением ее.

Неравенство (4.9) легко выразить через дифференциальную проводимость пространственно однородной системы σ . Действительно, в рассматриваемом случае

$$\sigma = e\mu n_0 \left(1 + \frac{d \ln n_0}{d \ln E_0}\right) = e\mu n_0 \left(1 + v'_0 \frac{d \ln n_0}{d v_0}\right). \quad (4.10)$$

Комбинируя (4.9) и (4.10) и замечая, что в данной задаче

$$\frac{d \ln n_0}{d v_0} < 0,$$

можем убедиться, что неравенство (4.9) заведомо выполняется при $\sigma > 0$, а также при $\sigma < 0$, но $|\sigma| < \sigma_2$, где

$$\sigma_2 = e\mu n_0 k \left[\frac{(n_1 + n_0v_0)^2}{Nn_1v_0} + \frac{k-1}{k} \right], \quad (4.11)$$

$$k = |d \ln n_0 / d \ln v_0|.$$

(В частности, в случае (I.4.7) $k = 1$.) При $\sigma < 0$ и $|\sigma| > \sigma_2$ знак неравенства (4.9) меняется на обратный.

Итак, при положительной дифференциальной проводимости пространственно однородное распределение заряда и поля оказывается устойчивым относительно развития затравочных неоднородностей: последние, как и в равновесных условиях, экранируются на достаточно малой длине. При отрицательной дифференциальной проводимости эта устойчивость сохраняется, если $|\sigma|$ меньше критического значения σ_2 в (4.11). В противном случае, когда $\sigma < 0$ и $|\sigma| > \sigma_2$, затравочные неоднородности распространяются на макроскопически заметную область кристалла и образуются статические домены. В сущности, та же ситуация имела место и при дрейфовой нелинейности, с той лишь разницей, что там

$\sigma_2 = 0$. При уточнении модели изменится лишь явное выражение для критического значения дифференциальной проводимости σ_2 , но не сам факт его существования: в любом случае при достаточно большой по модулю ОДП пространственно однородная система статически неустойчива *).

Весьма существенно, что критическое значение σ_2 может оказаться относительно небольшим.

Так, в условиях применимости (I.4.7) $\sigma_2 \sim e\mu n^2/N$, в то время как согласно (III.4.7) $\sigma_1 \sim \epsilon D/L^2$ (в пренебрежении всеми необратимыми процессами, кроме диффузии). Таким образом,

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sim \frac{e^2 n_0 L^2}{\epsilon T_l} \frac{n_0}{N}. \quad (4.12)$$

Здесь использовано соотношение Эйнштейна, справедливое в случае чисто рекомбинационной нелинейности; T_l — температура решетки.

В условиях, типичных для опытов с *n*-Ge, легированным золотом, мы имеем: $T_l \approx 2,8 \cdot 10^{-15}$ эрг (что соответствует 20°K), $\epsilon = 16$, $n_0 \approx 10^8 \div 10^{10}$ см⁻³ (в зависимости от интенсивности подсветки), $N \approx 10^{15}$ см⁻³, $L \leq 1$ см. Согласно (4.12) это дает

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sim 0,5 \left(\frac{n_0}{10^{10} \text{ см}^{-3}} \right)^2.$$

Таким образом, статическая неустойчивость может наступить при меньших полях, чем флуктуационная. При этом в случае постоянного поля постановка задачи о флуктуационной неустойчивости пространственно однородной системы становится беспредметной. С другой стороны, после образования статических доменов вольт-амперная характеристика образца может и не иметь N-образного вида (см. ниже, §§ 8, 9); соответственно наличие ОДП может привести к возникновению пространственно неоднородного статического распределения плотности заряда и напряженности поля, а не к колебаниям тока.

*) В работе [6] такой же результат был получен путем численного решения уравнений типа (1.2), (1.5) при различных модельных формах функции $\mu(E)$.

Сказанное, однако, не означает, что вольтамперную характеристику с падающим участком вообще нельзя получить. Действительно, рассматривая задачу о статической неустойчивости, мы вовсе не касались вопроса о кинетике образования локальных доменов. Фактически же для соответствующей перестройки поля и объемной плотности заряда требуется некоторое конечное время t_c (порядка модуля дифференциального максвелловского времени релаксации). Если образец подвергается действию сильного поля в течение неограниченно долгого времени, то это обстоятельство, разумеется, несущественно. Если, однако, работать в импульсном режиме, то при достаточно крутом фронте импульса можно успеть

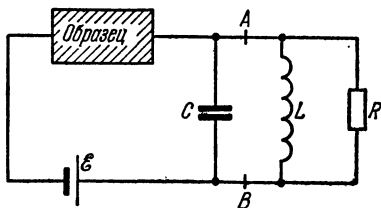


Рис. 14. Принципиальная схема включения образца в режиме ОНОЗ.

создать в однородном образце напряженность поля, отвечающую падающему участку характеристики. Далее, можно вести опыт так, чтобы сильное поле и ОДП вообще создавались в образце лишь на время t_0 , за которое образование доменов не успевает происходить.

Одна из возможных схем [7] представлена на рис. 14. Очевидно, если амплитуда колебаний напряжения между точками A и B достаточно велика, то образец будет обладать ОДП лишь в течение части периода. Обозначим через τ характерное время, необходимое для образования ОДП, а через T — период колебаний, задаваемый внешним контуром. Тогда при условии

$$\tau \ll T, \quad T \ll t_c \quad (4.13)$$

в течение части периода в образце будет создаваться ОДП, не сопровождающаяся образованием локальных доменов. В таком режиме возможно усиление колебаний с периодом T . (Режим с ограниченным накоплением объемного заряда (ОНОЗ) *).

Первое из неравенств (4.13) сравнительно легко выполняется в случае дрейфовой нелинейности, когда,

*) См. § VII.10.

в модели § 1.2, τ есть время свободного пробега относительно межминимумных переходов. В случае рекомбинационной нелинейности ситуация сложнее, ибо τ оказывается порядка рекомбинационного времени.

§ 5*. Биполярный случай [8]

Задача о статической устойчивости образца с биполярной проводимостью представляет как экспериментальный, так и известный принципиальный интерес. Действительно, в этом случае мы имеем дело с двумя дифференциальными проводимостями — электронной σ_n и дырочной σ_p . Что будет, если отрицательна одна из них?

Ограничимся для простоты случаем дрейфовой нелинейности в пренебрежении термоэлектрическим током. Основные уравнения задачи будут иметь вид

$$j_n = en\mu_n E + eD_n \frac{dn}{dx} \equiv j_{n,0}, \quad (5.1a)$$

$$j_p = ep\mu_p E - eD_p \frac{dp}{dx} \equiv j_{p,0}, \quad (5.1б)$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e}{\epsilon} (p - n + N_0). \quad (5.1в)$$

Здесь n и p — концентрации свободных электронов и дырок, N_0 — эффективная концентрация компенсирующих центров, обеспечивающих локальную нейтральность пространственно однородного образца в условиях равновесия. Величины $j_{n,0}$ и $j_{p,0}$ суть постоянные интегрирования, связанные с плотностью тока в цепи очевидным равенством

$$j_0 = j_{n,0} + j_{p,0}. \quad (5.2)$$

Граничные условия к системе (5.1a) — (5.1в) можно записать в виде

$$\int_0^L E dx = \mathcal{E} - j_0 R, \quad (5.3)$$

$$\int_0^L (p - n + N_0) dx = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{dn}{dx} = \zeta_n j_{n,0} \Big|_{x=0}, \quad \frac{dp}{dx} = \zeta_p j_{p,0} \Big|_{x=0}, \quad (5.5)$$

где ζ_n и ζ_p — феноменологические параметры, аналогичные ζ из (3.1).

К условиям (5.3)—(5.5) следует добавить еще одно, определяющее соотношение между электронной и дырочной компонентами тока на контакте:

$$j_{p,0} = \gamma j_0, \quad (5.6)$$

где γ — коэффициент инжекции *).

Дальнейший расчет полностью аналогичен проведенному в § 4. Мы должны рассмотреть пространственно однородное решение, возможное при $\zeta_n = \zeta_p = 0$, и затем исследовать отклонения от него, появляющиеся при малых, но конечных значениях ζ_n, ζ_p .

При $\zeta_n = \zeta_p = 0$ мы имеем

$$n = n_0, \quad p = p_0, \quad E = E_0, \quad (5.7)$$

причем постоянные n_0, p_0 и E_0 определяются равенствами

$$n_0 = N_0 \frac{1 - \gamma_0}{1 - \gamma_0(b_0 + 1)}, \quad p_0 = N_0 \frac{\gamma_0 b_0}{1 - \gamma_0(b_0 + 1)}, \quad (5.8)$$

$$E_0 = \frac{\mathcal{E}}{L} \left[1 + \frac{eN_0}{L} R\mu_n \frac{1}{1 - \gamma_0(b_0 + 1)} \right]^{-1}. \quad (5.9)$$

Здесь $\gamma_0 = \gamma(E_0)$, $b_0 = \mu_n/\mu_p$, значения подвижностей берутся при $E = E_0$.

Для определенности будем считать

$$n_0 \geq p_0;$$

при этом параметры b_0 и γ_0 должны удовлетворять неравенству

$$1 \geq \gamma_0(b_0 + 1).$$

Легко убедиться в том, что трансцендентное уравнение (5.9) всегда имеет хотя бы одно вещественное и положительное решение. Мы ограничимся случаем, когда это решение — единственное.

*) Можно было бы и отказаться от условий (5.4) и/или (5.6), введя вместо них условия (5.5) на обоих контактах. На основные выводы это не повлияет (ср. примечание на стр. 151).

Положим теперь

$$E = E_0(1 + u), \quad n = n_0(1 + v), \quad p = p_0(1 + w), \quad (5.10)$$

где u , v , w — величины, малые по сравнению с единицей.

Подставляя (5.10) в (5.1а)—(5.1в) и проводя линеаризацию по u , v , w , получим для этих функций систему трех линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пространственно однородное распределение поля и плотности заряда статически неустойчиво, если вещественные части корней соответствующего характеристического уравнения имеют одинаковые значения. Исследование показывает, что так обстоит дело в следующих трех случаях:

а) $\sigma_n < 0$, $\sigma_p > 0$, причем

$$|\sigma_n| > \frac{D_n}{D_p} \left(\sigma_p + \frac{\varepsilon E_0^2 \mu_n \mu_p}{4\pi D_n} \right) \quad (5.11а)$$

и

$$\frac{\mu_p}{D_p} > \frac{\mu_n}{D_n}. \quad (5.12а)$$

б) $\sigma_n > 0$, $\sigma_p < 0$, причем

$$|\sigma_p| > \frac{D_p}{D_n} \left(\sigma_n + \frac{\varepsilon E_0^2 \mu_n \mu_p}{4\pi D_p} \right) \quad (5.11б)$$

и

$$\frac{\mu_p}{D_p} < \frac{\mu_n}{D_n}. \quad (5.12б)$$

в) $\sigma_n < 0$, $\sigma_p < 0$, причем

$$D_n |\sigma_n| + D_p |\sigma_p| > \frac{\varepsilon E_0^2 \mu_n \mu_p}{4\pi D_n D_p} \quad (5.11в)$$

и либо

$$\frac{\mu_p}{D_p} > \frac{\mu_n}{D_n}, \quad |\sigma_n| > |\sigma_p| \frac{\mu_n}{\mu_p}, \quad (5.12в)$$

либо

$$\frac{\mu_p}{D_p} < \frac{\mu_n}{D_n}, \quad |\sigma_n| < |\sigma_p| \frac{\mu_n}{\mu_p}. \quad (5.12г)$$

Желая произвести в этих формулах предельный переход к случаю электронной проводимости, следует принять во внимание, что при их выводе производилось

деление на ρ_0 . Исследование показывает, что указанный переход следует выполнять по правилу « $n_0 \rightarrow \infty$, $\rho_0 \rightarrow 0$, $0 < |\sigma_n| < \infty$ ». При этом условия (5.11а), (5.11в) переходят в уже известное нам неравенство

$$\sigma_n < 0.$$

Неравенства (5.12а), (5.12б) принимают особенно прозрачный вид, если воспользоваться понятиями электронной и дырочной температур, T_n^* и T_p^* , определив их равенствами

$$\frac{\mu_{n,p}}{D_{n,p}} = \frac{e}{T_{n,p}^*}. \quad (5.13)$$

(Разумеется, величины T_n^* и T_p^* , вообще говоря, не совпадают с «температурами» T_n и T_p , определенными через средние энергии электронов и дырок.)

Действительно, в силу (5.13), неравенства (5.12а) и (5.12б) принимают вид

$$T_n^* > T_p^* \quad (5.12'a)$$

и

$$T_n^* < T_p^*. \quad (5.12'б)$$

Таким образом, носители, дифференциальная проводимость которых отрицательна, должны быть (в рассматриваемом смысле) «нагреты» сильнее.

Из формул (5.11а) и (5.11б) явствует, что, как и следовало ожидать, присутствие носителей с положительной дифференциальной проводимостью делает условия статической неустойчивости несколько более жесткими, чем в униполярном случае. Причина этого состоит, по-видимому, в том, что носители с положительной дифференциальной проводимостью продолжают экранировать затравочные неоднородности.

§ 6*. Возможность пространственно неоднородных решений. Гистерезис [5]

Обратимся теперь к пространственно неоднородным решениям системы (1.2), (1.5) или (1.10), (1.11) с граничными условиями (1.6), (1.7а), (1.7б). Для удобства перепишем исходные уравнения еще раз. В случае

дрейфовой нелинейности мы имеем (пренебрегая пока для простоты термоэлектрическим током)

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi}{\varepsilon} (\rho - \rho_0), \quad (6.1a)$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho\mu E - j_0}{D}. \quad (6.1б)$$

В случае рекомбинационной нелинейности уравнение (6.1a) остается без изменений, а в (6.1б) надо заменить ρ на ρ_e , одновременно подставляя в (6.1a) функцию $\rho(\rho_e, E)$ из (1.9).

В технологически однородном образце ρ_0 не зависит от x . При этом от уравнений (6.1a), (6.1б) можно перейти к уравнению траекторий, определяющему зависимость $\rho(E)$ или $\rho_e(E)$. В случае системы с дрейфовой нелинейностью мы имеем

$$\frac{d\rho}{dE} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\rho\mu E - j_0}{(\rho - \rho_0) D}. \quad (6.2)$$

Для системы с рекомбинационной нелинейностью получим (в переменных E, ρ_e)

$$\frac{d\rho_e}{dE} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\rho_e\mu E - j_0}{[\rho(\rho_e, E) - \rho_0] D}. \quad (6.3)$$

При $\zeta \neq 0$ существование пространственно неоднородных решений системы (6.1a), (6.1б) очевидно, и этот факт не должен вызывать удивления: отклонения от однородности навязываются здесь граничными условиями, а роль неравновесности проявляется лишь в той или иной степени локализации этих отклонений вблизи «затравочных» неоднородностей. Именно, в соответствии с §§ 4, 5 при наличии ОДП влияние, например, контактов может привести к тому, что распределение поля и заряда в образце станет макроскопически неоднородным. Этот вопрос рассматривается в следующих трех параграфах.

Замечательная особенность сильно неравновесной системы состоит, однако, в том, что в определенных условиях пространственно неоднородное распределение напряженности поля и плотности заряда может возникнуть и при $\zeta = 0$ и притом наряду с однородным — при одних и тех же граничных условиях, коль скоро последние до-

пускают решения обоих типов. Действительно, решения (2.1) и (2.4) обращают правые части уравнений (6.1a), (6.1б) в нуль, т. е. соответствуют особым точкам данной системы. По этой причине утверждать, что эти решения — единственные, вообще говоря, нельзя. Очевидно, пространственно неоднородные решения описываются отрезками интегральных кривых уравнений (6.2) или (6.3), не вырождающимися в точку (E_0, ρ_0) .

Различные точки отрезков отвечают разным значениям параметра x . При $\rho \neq \rho_0$ тождество

$$\int_0^L dx = L$$

приводит, в сочетании с (6.1a), к условию, определяющему выбор интегральной кривой:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \int \frac{dE}{\rho - \rho_0} = L. \quad (6.4)$$

Здесь интеграл берется по фазовой траектории, изображающей данное решение. Из формулы (6.4) явствует, что в образцах конечной длины рассматриваемые отрезки интегральных кривых не должны содержать особых точек*).

Для выяснения условий, при которых появляются интересные нас пространственно неоднородные решения, удобно рассмотреть по отдельности случаи заданного тока и заданного напряжения.

В первом из них константа j_0 фиксирована (она одна и та же для решений обоих типов) и остаются лишь граничные условия (1.7a) и (1.7б) (при $\zeta = 0$). При этом условие (2.2) (или (2.6)) определяет возможные значения E_0 . В зависимости от величины j_0 может получиться

*) Этот вывод удобно интерпретировать с помощью механической аналогии. Именно, уравнения (6.1a), (6.1б) можно рассматривать как «уравнения движения», описывающие эволюцию системы во «времени» x , причем величина E играет роль обобщенной координаты. Согласно (6.1a) и (6.1б) в особой точке «скорость» dE/dx и «ускорение» d^2E/dx^2 обращаются в нуль («состояние равновесия»). Следовательно, система должна пребывать в этом состоянии «бесконечно долго». Весь конечный интервал значений $0 \leq x \leq L$ соответствует при этом одной фазовой точке (E_0, ρ_0) .

либо одно, либо три решения (т. е. система может иметь либо одну, либо три особые точки); графический способ вычисления E_0 иллюстрируется рис. 3, а. Очевидно, условие (1.7а) может выполняться, лишь если функция $(\rho(x) - \rho_0)$ хотя бы один раз меняет знак на отрезке $0 \leq x \leq L$. Далее, условие (1.7б) при $\zeta = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{d\rho_e}{dE} (\rho - \rho_0) \Big|_{x=x_i} = 0. \quad (6.5)$$

(В случае дрейфовой нелинейности здесь надо положить $\rho_e = \rho$.) Для интегральных кривых, не содержащих особых точек, равенство (6.5) принимает более простую форму:

$$\frac{d\rho}{dE} \Big|_{x=x_i} = 0. \quad (6.5')$$

Иначе говоря, функция $\rho_e(E)$ должна иметь хотя бы один экстремум.

В случае заданного напряжения условие (1.6) сводится к соотношениям

$$E_0 = \mathcal{E}/L, \quad \int_0^L (E - E_0) dx = 0. \quad (6.6)$$

Это означает, что не только разность $(\rho - \rho_0)$, но и функция $(E(x) - E_0)$ должна хотя бы один раз менять знак на отрезке $0 \leq x \leq L$.

Итак, для наших целей достаточно исследовать поведение интегральных кривых $\rho(E)$ (или $\rho_e(E)$) вблизи особых точек системы (6.1а), (6.1б). Если названные кривые не обладают указанными выше свойствами или если этими свойствами обладает лишь конечное число интегральных кривых, то пространственно неоднородное решение, вообще говоря, невозможно: поставленным граничным условиям (с учетом (6.4)) удовлетворить, вообще говоря, не удастся. С другой стороны, если есть особая точка, в окрестности которой все интегральные кривые обладают указанными выше свойствами, то искомое пространственно неоднородное решение заведомо существует. При этом однородному и неоднородному распределениям поля отвечают, вообще говоря, разные зна-

чения напряжения на образце (в случае заданного тока) или разные значения плотности тока (в случае заданного напряжения) *).

Как при дрейфовой, так и при рекомбинационной нелинейности мы имеем систему второго порядка, полное исследование особых точек которой дано в Приложении VI. Как видно из рис. 72, искомые пространственно неоднородные решения существуют, наряду с однородными, если рассматриваемая особая точка есть фокус или, может быть, узел, но не седло **). Соответствующие аналитические критерии легко находятся из формул (П. VI. 8а) — (П. VI. 8в) с учетом (6.1а), (6.1б), (1.9).

В случае дрейфовой нелинейности мы имеем седло при $\sigma > 0$, узел при

$$\sigma < 0, \quad |\sigma| < \frac{\epsilon\mu_0^2 E_0^2}{16\pi D_0}, \quad (6.7)$$

фокус при

$$\sigma < 0, \quad |\sigma| > \frac{\epsilon\mu_0^2 E_0^2}{16\pi D_0}. \quad (6.8)$$

В случае рекомбинационной нелинейности особая точка есть седло при $\sigma > 0$ (или при $\sigma < 0$, $|\sigma| < \sigma_2$) и узел при

$$\sigma < 0, \quad |\sigma| > \sigma_2, \quad (6.9)$$

где σ_2 — критическое значение (4.11).

Замечая, что в условия (6.7) — (6.9) входит только квадрат подвижности, мы видим, что учет термоэлектрического тока (изменяя, может быть, некоторые численные значения) не играет в данном случае принципиальной роли.

Имея в виду возможный переход к более сложным системам, описываемым уравнениями более высокого порядка ***) , дадим здесь еще один вывод тех же

*) Как мы видели в § 4, разность между значениями плотности тока в однородном и неоднородном случаях представляет собой величину не ниже второго порядка по относительным отклонениям E и ρ от их значений в особой точке.

**) Для наших целей здесь достаточно ограничиться рассмотрением простых особых точек.

***) Пример такой системы представляет, например, образец с биполярной проводимостью (§ 5).

результатов, не связанный с рассмотрением фазовой плоскости. Ограничимся при этом случае заданного напряжения. В случае дрейфовой нелинейности мы должны исследовать непосредственно решения уравнений (6.1a) и (6.1б). В сущности, все необходимые выкладки уже были проделаны в § 4. Действительно, пространственно неоднородное решение вблизи особой точки (E_0, ρ_0) можно искать в виде (4.1). Линеаризуя уравнения (6.1a) и (6.1б) по малым добавкам u, v , получим систему (4.2), (4.3), откуда (ср. с (4.4))

$$u = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x}, \quad v = \eta A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \eta A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (6.10)$$

Здесь A_1 и A_2 — постоянные, $\eta = \varepsilon E_0 / 4\pi\rho_0$, а величины λ_1 и λ_2 даются формулой (4.5).

В отличие от § 4 здесь уже нет оснований полагать одну из констант A_1 или A_2 равной нулю: речь идет не о развитии (или затухании) затравочной неоднородности в пространстве, а о виде решения вблизи особой точки в отсутствие каких-либо затравочных неоднородностей.

Мы видим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ знакопеременны, если выполняется одно из двух условий:

а) величины λ_1 и λ_2 вещественны и одного знака, а константы A_1 и A_2 разных знаков;

б) величины λ_1 и λ_2 комплексны.

Согласно Приложению VI, случай а) отвечает узлу, а случай б) — фокусу; неравенства (6.7) и (6.8) сразу вытекают из формулы (4.5).

В условиях рекомбинационной нелинейности формулы (4.7) и (4.8) также сразу приводят к критерию (6.9).

Итак, пространственно неоднородные решения, удовлетворяющие поставленным выше граничным условиям, могут появиться лишь при $\sigma < 0$, $|\sigma| > \sigma_2$, причем в случае дрейфовой нелинейности $\sigma_2 = 0$, а при рекомбинационной нелинейности σ_2 дается формулой (4.11). Из рис. 3, а видно, что такая ситуация реализуется в ограниченной области значений j_0 : рассматриваемая особая точка должна лежать на падающей ветви вольтамперной характеристики.

Как мы видели в § 4, в этих же условиях пространственно однородная система оказывается статически неустойчивой. Иначе говоря, неоднородное распределение заряда и поля появляется именно тогда, когда однородное

(в статических условиях) существовать уже не может.

Заметим, однако, что, как мы видели в § 4, величина σ_2 может быть меньше σ_1 — критического значения модуля ОДП, определяющего границу флуктуационной устойчивости системы. Это означает, что если статическая неустойчивость по каким-либо причинам не проявляется (например, из-за работы в режиме ОНОЗ), то существует область значений ОДП, которой может соответствовать как однородное, так и неоднородное распределение заряда и поля. Вопрос о том, в каком состоянии

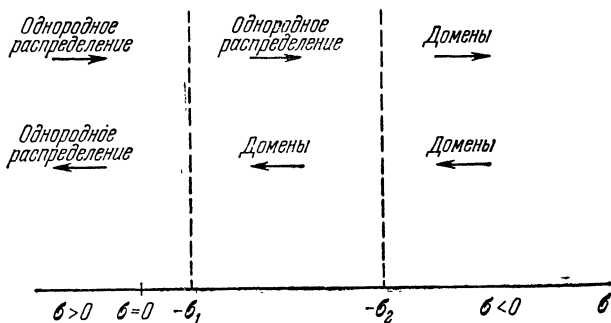


Рис. 15. Области существования однородного и неоднородного состояний.

Стрелки указывают, в какую сторону изменяется дифференциальная проводимость с ростом напряженности поля.

будет фактически находиться рассматриваемая система, решается при этом ее предысторией. Иначе говоря, здесь должен иметь место электрический гистерезис. Действительно, будем постепенно увеличивать напряжение на образце, начиная с малых значений, соответствующих положительной дифференциальной проводимости. Изменение состояния системы при этом иллюстрируется рис. 15. При повышении напряжения дифференциальная проводимость будет уменьшаться, в конце концов изменит знак и достигнет первого критического значения — σ_2 . Если, однако, статическая неустойчивость не проявляется, то распределение поля и плотности заряда в образце при этом останется пространственно однородным до тех пор, пока ОДП не достигнет второго критического значения — σ_1 . В этот момент однородное распределение становится абсолютно неустойчивым и возникают стати-

ческие домены. Пойдем теперь назад, уменьшая напряжение. При этом неоднородное распределение должно сохраняться вплоть до $\sigma = -\sigma_2$. Видим, что в интервале $-\sigma_2 > \sigma > -\sigma_1$ состояние системы зависит от того, как оно было достигнуто.

§ 7*. Статические домены в коротких образцах [9]

Явное решение нелинейных уравнений, описывающих пространственно неоднородное распределение плотности заряда и напряженности электрического поля, представляет серьезные вычислительные трудности. К тому же результат такого решения зависел бы от явного вида функций $\mu(E)$, $D(E)$, $\nu(E)$, фактически известных не слишком хорошо. По этой причине целесообразно ограничиться качественным исследованием задачи, основанном лишь на топологической картине интегральных кривых*). Такое рассмотрение удастся провести в двух диаметрально противоположных предельных случаях «короткого» и «длинного» образцов.

Мы будем называть образец «коротким», если а) $|\sigma| < \sigma_1$, где σ_1 — критическое значение (III.4.7), и б) отрезок интегральной кривой, изображающей решение рассматриваемой системы уравнений с принятыми граничными условиями, целиком лежит вблизи одной из особых точек. Слово «вблизи» означает в данном случае, что всюду в рассматриваемой области интегральные кривые топологически ведут себя примерно так, как показано на одном из рис. 72 (Приложение VI), не испытывая влияния других особых точек. Очевидно, так может обстоять дело, лишь если всюду в образце напряженность поля лежит в пределах одной ветви вольтамперной характеристики, т. е. если

$$|E - E_i| < |E_p - E_i|, \quad |E - E_i| < |E_v - E_i|. \quad (7.1)$$

Здесь E_i — напряженность поля, соответствующая рассматриваемой особой точке, а значения E_p и E_v отвечают

*) Необходимые для дальнейшего сведения из качественной теории дифференциальных уравнений можно найти в Приложении VI.

экстремальным точкам характеристики: $\sigma(E_p) = \sigma(E_v) = 0$ (рис. 3, *a* на стр. 20).

Критерий (7.1) составляет необходимое условие применимости аппроксимации короткого образца. Вопрос о его достаточности не вполне ясен и, в сущности, может быть решен лишь на основании полного исследования рассматриваемой нелинейной задачи. Поскольку мы интересуемся лишь качественным исследованием, этот вопрос, по-видимому, не так важен. Более существенным будет сопоставление результатов, получающихся в двух рассматриваемых предельных случаях. Можно думать, что вывод, получающийся в обоих (диаметрально противоположных) приближениях отражает какие-то черты действительности.

Мы будем называть образец «длинным», если а) условие (7.1) не выполняется и б) длина образца L значительно превышает характерные размеры участков, в которых распределение поля и заряда в образце существенно неоднородно. Никаких ограничений на соотношение между $|\sigma|$ и σ_1 при этом не накладывается.

Заметим, что принятое здесь определение «короткого» и «длинного» образца отличается от того, которое давалось в § III. 5. Это и не удивительно, ибо речь идет о разных задачах с разными характерными параметрами.

Рассмотрим сначала короткие образцы, ограничиваясь при этом случаем дрейфовой нелинейности. Согласно результатам § 6, пространственно неоднородное решение, удовлетворяющее всем граничным условиям, может появиться, лишь если рассматриваемая особая точка есть фокус или узел (но не седло). Пусть для определенности мы имеем дело с узлом (точка E_2 на рис. 3, *a*) и пусть граничные условия имеют вид

$$\int_0^L E dx + j_0 R = \mathcal{E}, \quad (7.2)$$

$$\varepsilon E(L+0) - \varepsilon E(-0) = 4\pi \sum_i s(x_i), \quad (7.3)$$

$$E(0) = E_a \quad (7.4)$$

или

$$\left. \frac{d(D\rho)}{dx} \right|_{x=0} = \zeta j_0.$$

Последнее равенство удобно переписать в виде

$$\frac{d(D\rho)}{dE} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\zeta j_0}{\rho - \rho_0} \Big|_{x=0}. \quad (7.4')$$

Рассмотрим сначала непрерывные *) решения, когда поверхностные заряды отсутствуют ($s(x_i) = 0$) и равенство (7.3) можно переписать в виде

$$E(L) = E(0). \quad (7.3')$$

Ход решения для этого случая иллюстрируется на рис. 16. Пусть для начала задано граничное условие (7.4) и $E_a \equiv E'_a < E_2$. Проведем через точку E'_a перпендикуляр к оси абсцисс; точки его пересечения с некоторой интегральной кривой обозначим через a и a' .

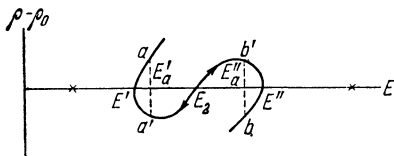


Рис. 16. Ход фазовой траектории вблизи средней особой точки (схематически).

Отмечены отрезки, отвечающие непрерывным статическим решениям.

($x = 0$), а точка a — аноду **) ($x = L$); отрезок (a, a') описывает искомое решение. Граничные условия (7.4) и (7.3) при этом удовлетворяются по построению, а условие (7.2) выбирает одну определенную интегральную кривую из бесконечного множества кривых, проходящих в окрестности узла. Если бы вместо (7.4) было наложено условие (7.4'), то поле E_a определялось бы значением производной $d\rho/dE$ в точке a .

Соответствующие распределения напряженности поля и плотности заряда схематически представлены на рис. 17, а. Мы имеем здесь домен слабого поля, кото-

*) Говоря о непрерывных или разрывных решениях, мы имеем в виду функцию $E(x)$. Объемная плотность заряда $\rho(x)$ всегда предполагается непрерывной.

**) Здесь и в аналогичных случаях в дальнейшем имеются в виду электроды в образце n -типа.

рый — в соответствии с видом функции $(\rho(x) - \rho_0)$ — естественно назвать *дипольным*.

При $E_a \equiv E_a'' > E_2$ решение строится совершенно аналогичным путем. Очевидно, оно описывается отрезком (b, b') на рис. 16, причем точка b отвечает катоду ($x = 0$), а точка b' — аноду ($x = L$). Распределение напряженности поля и плотности заряда в образце в этом случае схематически представлено на рис. 17, б. Мы имеем здесь дипольный домен сильного поля.

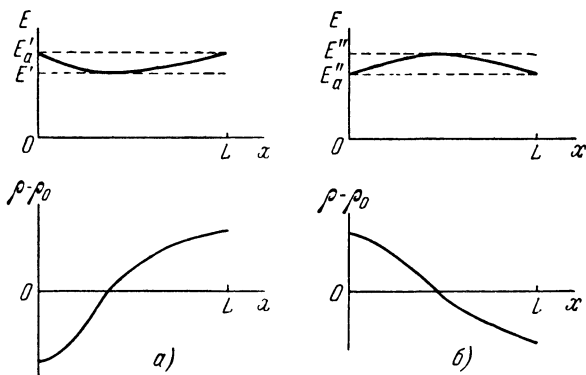


Рис. 17. Распределения напряженности поля и плотности заряда в коротком образце.

а) $E_a \equiv E_a' < E_2$, б) $E_a \equiv E_a'' > E_2$.

Перейдем теперь к разрывным решениям, считая для определенности, что функция $E(x)$ испытывает разрыв в одной только точке, $x = x_i$ (она может совпадать или не совпадать с границей образца). Положим

$$E(x_i - 0) = E', \quad E(x_i + 0) = E'';$$

очевидно,

$$E'' - E' = E_a - E_k = 4\pi s(x_i), \quad (7.5)$$

где, как и раньше, E_a есть напряженность поля на аноде, а E_k — на катоде. Коль скоро задана поверхностная плотность заряда $s(x_i)$, величина E_k определяется из условий (7.4) и (7.5).

Пусть для начала $E_a > E_2$. Тогда искомое разрывное решение изображается (рис. 18) совокупностью двух

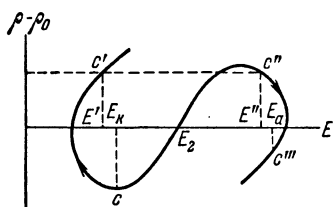


Рис. 18. Ход фазовой траектории вблизи средней особой точки (схематически).

Отмечены отрезки, совокупность которых отвечает разрывному статическому решению при $E_a > E_2$.

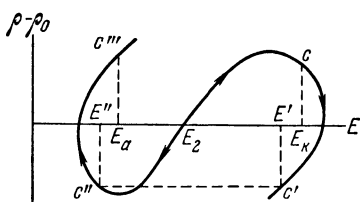
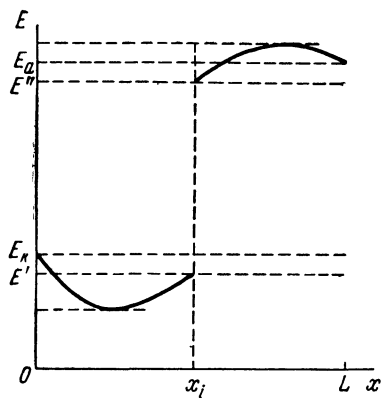
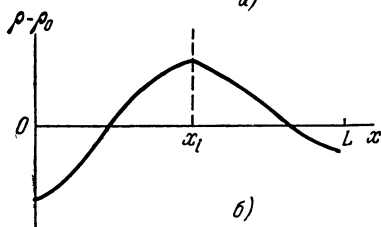


Рис. 19. Ход фазовой траектории вблизи средней особой точки (схематически).

Отмечены отрезки, совокупность которых отвечает статическому разрывному решению при $E_a < E_2$.

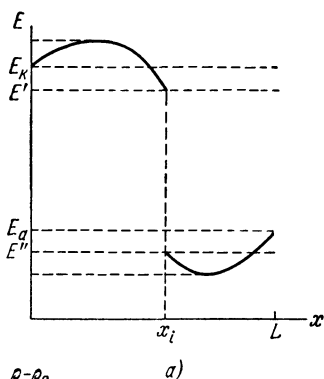


а)

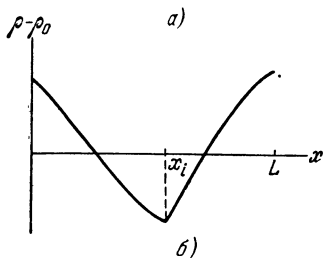


б)

Рис. 20. Распределение напряженности поля и плотности заряда в коротком образце (разрывное решение при $E_a > E_2$).



а)



б)

Рис. 21. Распределения напряженности поля (а) и плотности заряда (б) в коротком образце (разрывное решение при $E_a < E_2$).

отрезков, (c, c') и (c'', c''') . При этом точка c отвечает катоду ($x = 0$), а точка c''' — аноду ($x = L$). Точке $x = x_i$ отвечают две фазовые точки, c' и c'' , положения которых на интегральной кривой определяются условием (7.5)*). Соответствующие распределения напряженности поля и плотности заряда схематически представлены на рис. 20.

Аналогично при $E_a < E_2$ разрывное решение изображается совокупность отрезков (c, c') и (c'', c''') на рис. 19. Точки c, c', c'' и c''' отвечают при этом катоду ($x = 0$), точке, в которой поле испытывает разрыв ($x = x_i$), и аноду ($x = L$). Распределение напряженности поля и плотности заряда схематически изображено на рис. 21.

Заметим, что точка x_i может оказаться близкой к аноду или к катоду. При этом, как видно из рис. 20, 21, распределение напряженности поля в образце будет почти ступенчатым.

Переход к случаю рекомбинационной нелинейности не требует, в сущности, никаких дополнительных рассуждений. Действительно, мы пользовались только уравнением Пуассона и общей картиной поведения интегральных кривых вблизи узла, но не явным видом вольт-амперной характеристики образца. По этой причине рис. 16—21 в равной мере относятся и к системе с рекомбинационной нелинейностью.

§ 8. Статические домены в длинных образцах [10—13]

Рассмотрим сначала наиболее простой случай дрейфовой нелинейности. Тогда основные уравнения имеют вид

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi}{\epsilon} (\rho - \rho_0), \quad (8.1)$$

$$\frac{d\rho}{dE} = \frac{\epsilon}{4\pi D} \frac{\rho \mu^* E - j_0}{\rho - \rho_0}. \quad (8.2)$$

Здесь, как и раньше, через μ^* обозначена эффективная подвижность (II.6.31). Мы будем предполагать, что учет

*) При этом, разумеется, значение E' не произвольно, а определяется видом интегральной кривой, коль скоро задана точка x_i . В частности, может оказаться и что $E' > E_k$.

термоэлектрического тока не меняет характера особых точек по сравнению со случаем $a = 0$. Условия, оправдывающие это предположение, указаны в § II.6. Попытаемся перейти к пределу $L \rightarrow \infty$. При этом закон Кирхгофа надо переписать в виде

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L E dx = \bar{E}. \quad (8.3)$$

Здесь $\bar{E} = (\mathcal{E} - JR)/L$ есть средняя напряженность поля в образце. Ее мы будем считать конечной (в режиме заданного напряжения величина \bar{E} равна просто \mathcal{E}/L). Следует также потребовать ограниченности функций $\rho(x)$ и $E(x)$ (см. (II.7.14)). В силу (8.1) (при $dE/dx \neq 0$)

$$\int_0^L E dx = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \frac{E dE}{\rho - \rho_0}. \quad (8.4)$$

Кроме того, мы имеем тождество (6.4). Интеграл в правой части (8.4) (как и в (6.4)) берется по фазовой траектории. Если последняя не содержит

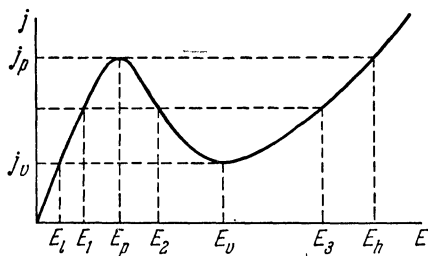


Рис. 22. Характерные точки на вольт-амперной характеристике однородного образца.

особых точек, он, очевидно, ограничен; с другой стороны, согласно условию (8.3), он должен расходиться.

Заметим, далее, что условие ограниченности (II.7.14), исключает фазовые траектории, уходящие в бесконечность. Отсюда яв-

ствует, что решение нашей задачи может описываться только интегральной кривой, имеющей хотя бы одну из особых точек в качестве предельной. Как и в главе I (см. рис. 3, a), обозначим максимальное и минимальное значения тока на вольтамперной характеристике однородного образца через j_p и j_v и рассмотрим сначала случай, когда плотность тока лежит в интервале

$$j_v < j_0 < j_p \quad (8.5)$$

(рис. 22). При этом искомая интегральная кривая представляет собой сепаратрису одного из седел (E_1, ρ_0) или (E_3, ρ_0) , примыкающую к узлу (E_2, ρ_0) *). Легко убедиться, что в первом случае кривая должна идти ниже, а во втором — выше оси E . Действительно, в одной из точек рассматриваемой кривой производная $d\rho/dE$ должна обращаться в нуль. Согласно (8.2) это дает

$$j_0 - \rho \mu E = 0. \quad (8.6)$$

Обозначим для краткости μE через u ; очевидно, $j_0 = \rho_0 \mu (E_2) E_2 \equiv \rho_0 u_2$. Тогда равенство (8.6) можно переписать в виде

$$\rho_0 (u_2 - u) = (\rho - \rho_0) u. \quad (8.7)$$

При $E_1 < E < E_2$ ($E_2 < E < E_3$) мы имеем $u > u_2$ ($u < u_2$), откуда и вытекает сделанное

утверждение. Направление перемещения точки по фазовой кривой легко установить с помощью уравнения (7.1). Таким образом, приходим к картинам, изображенным на рис. 23. Распределение поля в образце легко найти, замечая, что попадание в особую точку (E_i, ρ_0) , $i = 1, 2, 3$, отвечает «бесконечно длинному» участку с напряженностью поля $E = E_i$. Следовательно, в обоих рассматриваемых случаях распределение поля имеет вид ступеньки (рис. 24а, 25а), узкая переходная область от одной «пюльчки» к другой отвечает интегральной кривой, соединяющей особые точки. На рис. 24б, 25б представлены соответствующие распределения плотности заряда. Мы видим, что условие объемной нейтральности здесь, строго говоря, не имеет места. Заметим, однако, что в духе принятой аппроксимации размерами переходной области в рассматриваемом случае можно пренебречь. Соответственно заряд, локализованный вблизи точки L'

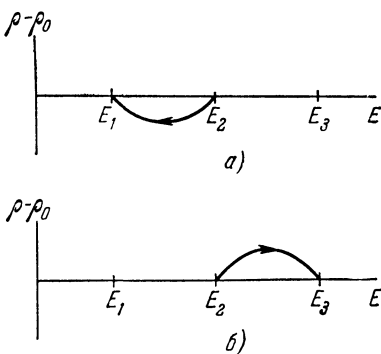


Рис. 23. Фазовые траектории, соединяющие особые точки.

*) Как мы знаем, особая точка (E_2, ρ_0) есть либо узел, либо фокус. В силу их топологической эквивалентности мы будем говорить только об узле.

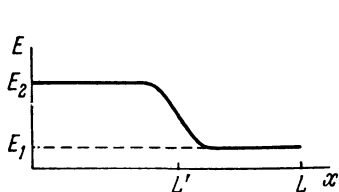
(рис. 24, б, 25, б), надо рассматривать как поверхностный; плотность его, очевидно, составляет

$$s(L') = -\frac{\varepsilon}{4\pi} (E_2 - E_1) \text{ в случае рис. 24, б}$$

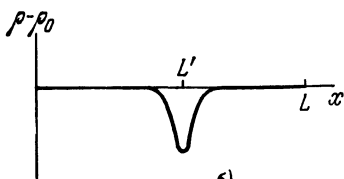
и

$$s(L') = \frac{\varepsilon}{4\pi} (E_3 - E_2) \text{ в случае рис. 25, б.}$$

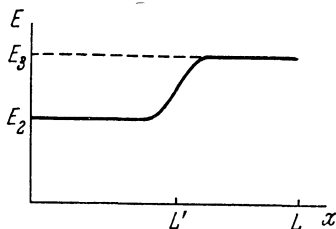
Относительную длину участка сильного (или слабого) поля легко найти из условия (8.3). Действительно, в при-



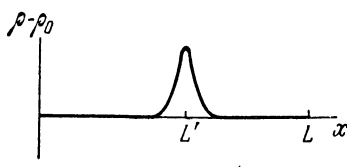
а)



б)



а)



б)

Рис. 24. Распределения напряженности поля и плотности заряда, отвечающие рис. 23, а.

Рис. 25. Распределения напряженности поля плотности заряда, отвечающие рис. 23, б.

нятом приближении интегралом $\int E dx$ по узкому переходному слою можно пренебречь; соответственно в случае рис. 24, а

$$\frac{L'}{L} = \frac{\bar{E} - E_1}{E_2 - E_1}; \quad (8.8a)$$

в случае рис. 24, б

$$\frac{L'}{L} = \frac{E_3 - \bar{E}}{E_3 - E_2}. \quad (8.8б)$$

Очевидно, первое решение (рис. 23, а, 24, а) имеет место при $\bar{E} < E_2$, а второе (рис. 23, б, 25, а) — при $\bar{E} > E_2$.

Заметим, однако, что в обоих случаях (рис. 24, *a* и 25, *a*), мы имеем в образце макроскопическую область однородного поля $E = E_2$, в которой дифференциальная проводимость $\sigma(E_2)$ отрицательна. Можно думать поэтому, что такое распределение будет флуктуационно устойчиво, лишь если $|\sigma(E_2)|$ меньше некоторого критического значения (строго говоря, это утверждение требует доказательства, ибо мы имеем дело все же с неоднородной системой). В противном случае найденные выше решения физически нереализуемы.

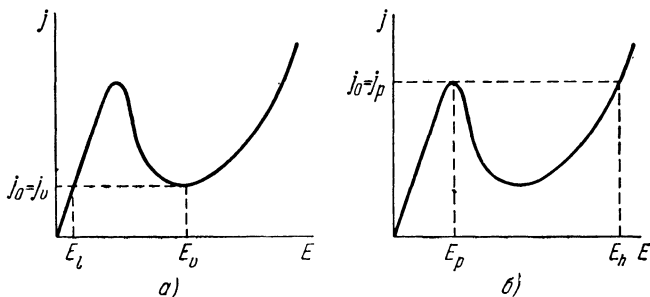


Рис. 26. Критические ситуации, отвечающие появлению сложной особой точки.

Можно надеяться, что флуктуационно устойчивое распределение заряда и поля получится, если удастся избежать появления в образце протяженного участка с отрицательной дифференциальной проводимостью. Так получится, если две из трех особых точек сольются друг с другом. Две возникающие при этом возможности иллюстрируются рис. 26. В одном случае сливаются левое седло и узел: $E_1 \rightarrow E_p$, $E_2 \rightarrow E_p$, и плотность тока равна j_p (соответствующее значение E_3 мы будем обозначать через E_h); в другом случае сливаются правое седло и узел: $E_2 \rightarrow E_v$, $E_3 \rightarrow E_v$, и плотность тока равна j_v (соответствующее значение E_1 мы будем обозначать через E_l).

В обоих случаях интегральные кривые отвечают всюду ограниченными значениям $\rho(x)$ и $E(x)$; удовлетворяется также и закон Кирхгофа, из которого определяются относительные размеры участков слабого и сильного поля. Каково же фактическое распределение заряда и поля? В рамках принятого выше подхода

ответить на этот вопрос, видимо, невозможно. Ответ, однако, можно получить, отказавшись от предельного перехода $L \rightarrow \infty$ и рассматривая образец хотя и большой, но конечной длины. При этом условия ограниченности решения заменяются другими граничными условиями, которые, как мы увидим, позволяют однозначно определить тип решения.

Заметим, что возникшая ситуация, видимо, характерна для существенно неравновесной системы. Действительно, в условиях, близких к равновесным (одна особая точка, а не три), поле в образце остается практически однородным всюду, кроме приконтактных областей. Коль скоро линейные размеры последних малы по сравнению с L , аппроксимация бесконечного образца имеет полный смысл. С другой стороны, при существенном нарушении равновесия (в данном случае при наличии трех особых точек) эта аппроксимация не позволяет однозначно определить характер распределения поля в образце. В сущности, мы имеем здесь макроскопическое проявление той же статической неустойчивости, о которой (в малом) шла речь в двух предыдущих параграфах: распределение напряженности поля и плотности заряда во всем — сколь угодно длинном — образце чувствительно к выбору граничных условий или, другими словами, влияние контактов не локализовано около них, а распространяется на весь образец.

Очевидная трудность при формулировке граничных условий состоит в том, что, как уже неоднократно упоминалось, принятая нами локальная аппроксимация ($\mu = \mu[E(x)]$ и т. д.) не позволяет рассматривать явления в собственно приконтактной области*). Поэтому буквальное использование обычных граничных условий на контактах было бы не оправдано. Для качественного исследования задачи, однако, это и не требуется: достаточно будет использовать лишь те результаты стандартной теории контактов, которые не меняются при нагреве электронного газа (в интересующем нас интервале полей) и не требуют продолжения наших уравнений в приконтактную область. Речь идет о знаках производных

*) Подчеркнем, что это относится не только к полевой, но и к другим локальным аппроксимациям.

dE/dx и $d\rho/dx$, которые навязывает контактная область в точках $x = 0$ и $x = L$.

Как указывалось в главе I, значения средней по образцу напряженности поля, с которыми приходится иметь дело в опытах по электрической неустойчивости, не

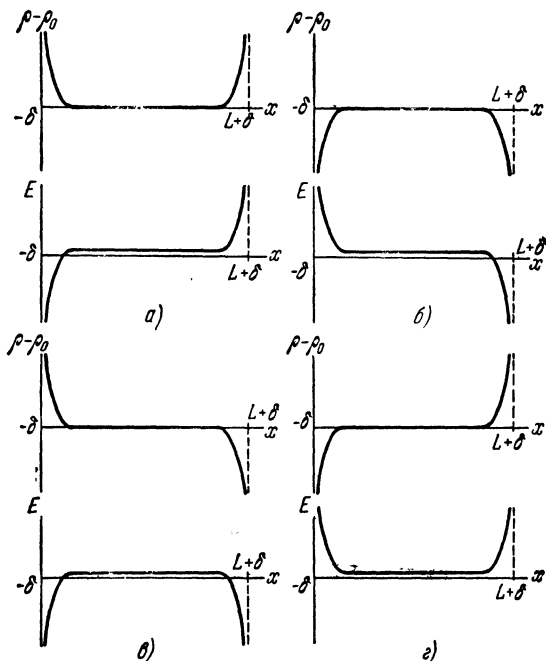


Рис. 27. Распределение напряженности поля и концентрации электронов в случае сильных контактов.

а) Оба контакта антизапорные, б) оба контакта запорные, в) контакт при $x=0$ антизапорный, а при $x=L$ запорный, г) контакт при $x=0$ запорный, а при $x=L$ антизапорный.

превышают нескольких киловольт/см. Во многих случаях это примерно на порядок меньше значений напряженности контактного поля. Тогда, даже если допустить десятикратное (по сравнению со средним) возрастание поля в самом домене, все же нет оснований ожидать качественного изменения картины поля на контактах по сравнению с термодинамически равновесным случаем. В этом случае интересующие нас знаки производных можно

взять из обычной теории контакта (см., например, [15]). Как известно, в случае полупроводника n -типа распределение напряженности поля и плотности заряда на контактах разной природы имеет вид, схематически представленный на рис. 27 (по оси абсцисс отложена координата x , через δ обозначена толщина контактного слоя; для удобства последний изображен в резко увеличенном масштабе). Пользуясь этими рисунками, можем составить таблицу знаков производных (см. табл. 2). Данные, содержащиеся в ней, и будут играть роль граничных условий, используемых при качественном исследовании системы (8.1), (8.2) *).

В образце конечной (но большой) длины интегральные кривые системы (8.1), (8.2) должны проходить вблизи особых точек (интегралы в формулах (8.4), (6.4) «почти расходятся»). При этом, в зависимости от значения силы тока j_0 , можно выделить четыре принципиально различных случая: $j_0 < j_v$ или $j_0 > j_p$, $j_0 = j_v$, $j_v < j_0 < j_p$, $j_0 = j_p$ **). Рассмотрим их поочередно.

Таблица 2

Знаки производных

	Запорный контакт	Антизапорный контакт
$x = L$ (анод)	$\frac{d\rho}{dx} < 0, \quad \frac{dE}{dx} < 0$	$\frac{d\rho}{dx} > 0, \quad \frac{dE}{dx} > 0$
$x = 0$ (катод)	$\frac{d\rho}{dx} > 0, \quad \frac{dE}{dx} < 0$	$\frac{d\rho}{dx} < 0, \quad \frac{dE}{dx} > 0$

*) Для явного количественного решения уравнений (8.1) и (8.2) этих сведений, разумеется, недостаточно. Такое решение, однако, выходит за рамки принятой нами постановки задачи. Заметим также, что мы пользуемся, в сущности, условиями (II.7.11) на обоих контактах, определяя знаки ξ из табл. 2.

**) Здесь и в дальнейшем равенства $j_0 = j_v$ и $j_0 = j_p$ в длинных, но конечных образцах следует понимать как приближенные с точностью до экспоненциально малых величин порядка $\exp(-L/l_D)$. Здесь под l_D следует понимать наибольшую из дебаевских длин, отвечающих различным участкам образца.

а) $j_0 < j_v$ или $j_0 > j_p^*$).

В этом случае имеется одна особая точка: либо седло (E_1, ρ_0), либо седло (E_3, ρ_0) (рис. 28). Выбор между этими двумя возможностями определяется законом Кирхгофа. Рассмотрим для конкретности первую из них (картина интегральных кривых, отнесенная к соответствующему седлу, оказывается одной и той же). В соответствии с Приложением VI картина интегральных кривых вблизи седла имеет вид, схематически представленный на рис. 29

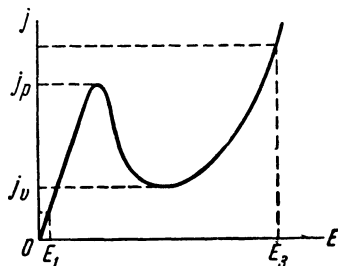


Рис. 28. Случай одной особой точки ($j_0 > j_p$ или $j_0 < j_v$).

(жирными линиями изображены сепаратрисы; стрелками указано направление перемещения изображающей точки при увеличении координаты x , легко устанавливаемое с помощью уравнения (8.1)). В зависимости от природы контактов решение изображается интегральной кривой, лежащей в одной из четырех областей, разделенных сепаратрисами (на рисунке эти области занумерованы). Сопоставляя рис. 29 с табл. 2, непосредственно получаем набор возможностей, указанный в табл. 3. (Следует помнить, что точка $x = 0$ отвечает катоду, а точка $x = L$ — аноду).

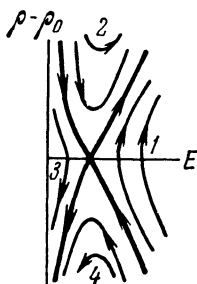


Рис. 29. Схематическая картина интегральных кривых при $j_0 < j_v$.

б) $j_0 = j_v$.

В соответствии с рис. 26, а здесь мы имеем две особые точки: седло (E_1, ρ_0) и сложную особую точку (E_v, ρ_0). Как показано в Приложении VI, последняя представляет собой седло-узел. Комбинируя рис. 29 и рис. 67, получаем картину, схематически представленную на рис. 30. Поскольку интегральные кривые не

*) Фактически значения $j_0 > j_p$ могут и не реализоваться на опыте из-за того, что в достаточно сильных полях могут начаться и другие физические процессы, не учтенные в нашей модели.

Таблица 3

Случай $j < j_0$

Тип контактов	Номер области
Оба запиорные	4
Оба антизапиорные	2
Запиорный на аноде, антизапиорный на катоде	3
Антизапиорный на аноде, запиорный на катоде	1

могут пересекаться вне особых точек, видно, что сепаратриса седла, разделяющая области 1 и 4, должна либо

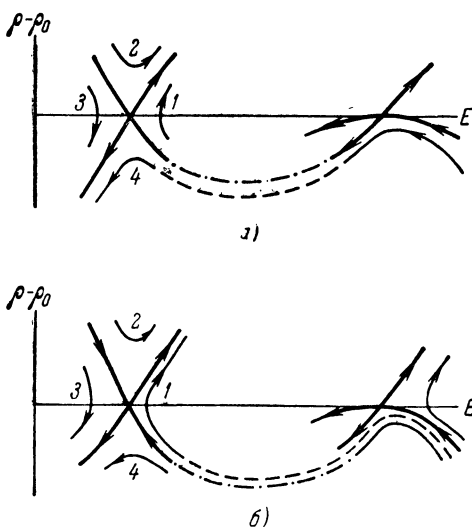


Рис. 30. Схематическая картина интегральных кривых при $j_0 = j_v$. а) Сепаратриса седла включает особую точку седло-узел, б) сепаратриса седла проходит в гиперболическом секторе особой точки седло-узел.

выйти из особой точки седло-узел, либо пройти в гиперболическом секторе этой точки. Возможный ее ход в фазовой плоскости показан штрих-пунктиром на рис. 30, а (для частного случая, когда она служит продолжением

(особой интегральной кривой, отделяющей гиперболическую область от параболической) и на рис. 30, б*). Очевидно, все интегральные кривые, проходящие вблизи седла-узла, должны пройти и вблизи седла в областях 1 и 4.

Как известно (см. Приложение VI), все интегральные кривые, попадающие в параболический сектор особой точки седло-узел, содержат ее. Это означает, что в подавляющей части образца мы имеем пространственно однородное распределение поля; при этом, вообще говоря, не удовлетворяются поставленные выше граничные условия. Пространственно неоднородным решениям, допускаемым граничными условиями, отвечают интегральные кривые типа показанных пунктиром на рис. 30. Сопоставляя эти рисунки с табл. 2, получаем набор возможностей, указанный в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

Случай $j = j_v$

Тип контактов	Тип решения	Домен сильного поля
Оба запорные	Неоднородное (пунктирная кривая на рис. 30, а)	У катода
Оба антизапорные	Однородное*) (обл. 2)	$E = E_l$ всюду
Запорный на аноде, антизапорный на катоде	Однородное (обл. 3)	$E = E_l$ всюду
Антизапорный на аноде, запорный на катоде	Неоднородное (пунктирная кривая на рис. 30, б)	У катода

*) Здесь и в дальнейшем (как и всегда) имеется в виду однородность всюду, кроме малых приконтактных областей.

Очевидно, при образовании статических доменов вольтамперная характеристика образца изменяется. Из

*) Из равенства (8.7) при $u_2 = j_v/\rho_0$, $u = j/\rho_0$ ($j > j_v$) видно, что экстремум на интегральной кривой действительно лежит в нижней полуплоскости.

сказанного ясно, что в данном случае на ней появляется участок насыщения тока, простирающийся вплоть до $\bar{E} = E_v^*$). При $\bar{E} \geq E_v$ домен сильного поля заполняет весь образец, который, таким образом, вновь становится пространственно однородным; зависимость $j_0(\bar{E})$ при этом описывается правой восходящей ветвью на рис. 3, а.

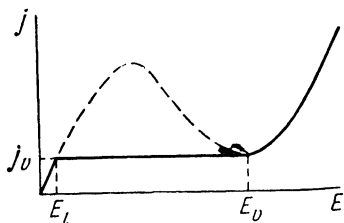


Рис. 31. Схематический вид вольт-амперной характеристики образца со статическим доменом (контакт на аноде антизапорный).

Пунктиром изображен участок характеристики однородного образца, не реализующийся в опытах с полями, плавно изменяющимися во времени.

Таким образом, мы получаем картину, изображенную на рис. 31.

Из сказанного следует, что при постепенном изменении средней напряженности поля в образце с запорным контактом на катоде**) часть вольт-амперной характеристики (однородной системы), изображенная пунктиром на рис. 31, физически нереализуема. В частности, участок с ОДП вообще не может возникнуть. Это,

однако, не относится к опытам, в которых поле включается достаточно быстро — например, в импульсном режиме, коль скоро передний фронт импульса достаточно крутой.

$$в) j_v < j_0 < j_p.$$

Согласно рис. 3, а, здесь имеются три особые точки — два седла (E_1, ρ_0) и (E_3, ρ_0) и узел (E_2, ρ_0) . Картина интегральных кривых схематически изображена на рис. 32.

Поскольку все интегральные кривые, попадающие в окрестность узла, входят в эту особую точку, здесь возможны только пространственно однородные решения. Одно из них отвечает узлу. В импульсном режиме соот-

*) Здесь и в аналогичных случаях в дальнейшем рассуждения ведутся в предположении о флуктуационной устойчивости статического неоднородного распределения заряда и поля. Условия, при которых это предположение справедливо, рассматриваются в главе VII.

**) См. вторую сноску на стр. 170.

ветствующее состояние можно было бы получить при любом типе контактов (в точку (E_2, ρ_0) могут попасть интегральные кривые либо из областей 1, 4, либо из областей 2, 3) и, очевидно, оно могло бы оказаться флуктуационно неустойчивым. При постепенном изменении среднего поля в образце, однако, это состояние вообще недостижимо — либо потому, что образуются статические домены (случай запертого контакта на катоде), либо

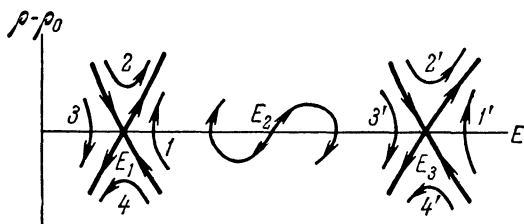


Рис. 32. Схематическая картина интегральных кривых при $j_v < j_0 < j_p$.

потому, что закон Кирхгофа отбирает однородное распределение, отвечающее седлу (E_1, ρ_0) (случай антизапертого контакта на катоде). Последняя причина исключает также в указанных условиях и возможность однородного распределения $E = E_3, \rho = \rho_0$.

Итак, при плавном изменении величины \bar{E} от нуля до E_v интервал $j_v < j_0 < j_p$ реализуется только при антизапертом контакте на катоде. Распределение плотности заряда и напряженности поля при этом оказывается пространственно однородным, а зависимость $j_0(\bar{E})$ изображается левой восходящей ветвью вольтамперной характеристики (рис. 3, а).

г) $j_0 = j_p$.

В соответствии с рис. 26, б здесь имеются две особые точки, (E_p, ρ_0) и (E_h, ρ_0) . Первая из них представляет собой седло-узел (см. Приложение VI), вторая — седло. Картины интегральных кривых схематически представлены на рис. 33. Видно, что сепаратриса, разделяющая области 2 и 3, должна либо выйти из точки седло-узел, либо пройти в гиперболическом секторе этой точки. Возможный ее ход в фазовой плоскости показан штрихпунктиром на рис. 33, а (для частного случая, когда она

служит продолжением особой интегральной кривой, отделяющей гиперболическую область от параболической) и на рис. 33, б *). Соответствующие распределения заряда пространственно неоднородны и изображаются на

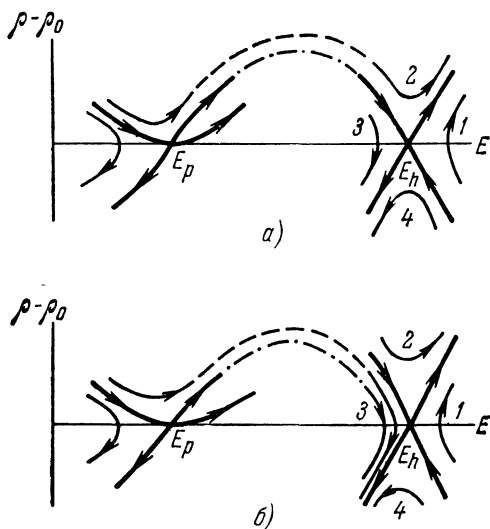


Рис. 33. Схематическая картина интегральных кривых при $j_0 = j_p$.
 а) Сепаратриса седла включает особую точку седло-узел,
 б) сепаратриса седла проходит в гиперболическом секторе
 особой точки седло-узел.

рис. 33 пунктирными кривыми. (Мы рассматриваем только случай плавного изменения поля; соответственно области 1 и 4, отвечающие запорному контакту на катоде, уже не имеют физического смысла.) Сопоставляя эти рисунки с табл. 2, получаем набор возможностей, указанный в табл. 5. Вольтамперная характеристика образца с антизапорным контактом на катоде схематически представлена на рис. 34. Мы имеем здесь участок насыщения тока ($j_0 = j_p$), простирающийся от $\bar{E} = E_p$

*) Из равенства (8.7) при $u_2 = j_p/\rho_0$, $u = j/\rho_0$ ($j < j_p$) видно, что экстремум на интегральной кривой действительно лежит в верхней полуплоскости.

Таблица 5

Случай $j = j_p$

Тип контактов	Тип решения	Домен сильного поля
Оба антизапорные	Неоднородное (пунктирная кривая на рис. 33, а)	У анода
Запорный на аноде, антизапорный на катоде	Неоднородное (пунктирная кривая на рис. 33, б)	У анода

до $\bar{E} = E_h$. При $\bar{E} \geq E_h$ домен сильного поля заполняет весь образец, который, таким образом, вновь становится пространственно однородным; зависимость $j_0(\bar{E})$ при этом описывается правой восходящей ветвью на рис. 3, а.

Учет термоэлектрического тока, равно как и переход к случаю рекомбинационной нелинейности, осложняя задачу в вычислительном отношении, не меняют сделанных выше основных выводов. В частности, при этом остается в силе содержание таблиц 2—5. Действительно, главную роль в наших рассуждениях играли уравнение Пуассона и качественная картина интегральных кривых на фазовой плоскости. Ни то, ни другое не меняется при переходе к указанным более сложным случаям.

Экспериментальное исследование статических доменов (выполнявшееся в работах [10, 12—14] как раз для систем с рекомбинационной нелинейностью), по-видимому, согласуется с изложенной выше теорией. В частности, полностью подтверждаются опытом выводы, касающиеся связи между природой контактов и значением тока насыщения.

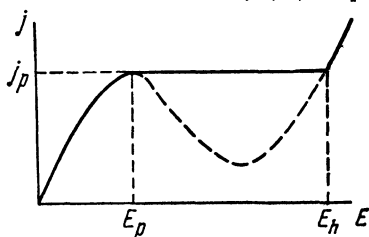


Рис. 34. Схематический вид вольт-амперной характеристики образца со статическим доменом (контакт на катоде — запорный).

Пунктиром изображен участок характеристики однородного образца, не реализующийся в опытах с полями, плавно изменяющимися во времени.

§ 9*. Метод «псевдокатода» [16]

Статические распределения поля и заряда были изучены нами в § 8 в условиях, когда напряженность контактного поля велика по сравнению с напряженностью внешнего поля в образце. Последнее условие не всегда выполняется в эксперименте, и имеет смысл рассмотреть другой случай, когда напряженности внешнего и контактного полей сравнимы друг с другом.

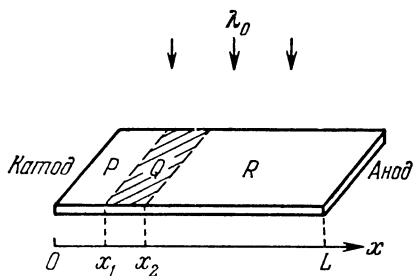
В этом случае распределение поля может отличаться от рассмотренного в предыдущем параграфе.

Один из методов экспериментального исследования роли контактов состоит в том, чтобы, используя различные металлы, изготовлять контакты с разной величиной контактного поля и следить за изменением характера распределения поля в образцах. Такой метод, однако, не очень удобен как в силу своей трудоемкости, так и по той причине, что свойства контакта нельзя менять непрерывным образом во время опыта. Кроме того, в силу указанных ранее причин, однозначная интерпретация полученных таким путем данных оказалась бы затруднительной.

Рис. 35. Схема освещения образца. Область Q закрыта полупрозрачной шторкой.

Метод «псевдокатода», предложенный в работе [16] и использовавшийся для исследования статических доменов в CdS, в известной степени свободен от указанных недостатков. Сущность этого метода сводится к созданию искусственной неоднородности (путем неоднородного освещения) в однородном образце; созданная неоднородность играет роль электрода. Оказалось, что возникающие в образце неоднородные распределения поля зависят от характеристик создаваемой неоднородности и мало чувствительны к условиям на реальных границах образца.

Принципиальная схема опыта в методе «псевдокатода» изображена на рис. 35. Образец освещается моно-



хроматическим светом (в опытах [16] длина волны света, $\lambda_0 \approx 5070 \text{ \AA}$, выбиралась близкой к краю собственного поглощения CdS). Область Q образца закрывалась полупрозрачной шторкой*), так что однородная стационарная концентрация носителей в этой области оказывалась меньшей, чем в областях P и R .

Поскольку освещенность в области Q постоянна, эта область макроскопически однородна. Следовательно, возможные формы распределения напряженности поля и плотности заряда можно найти, используя методы, изложенные в предыдущих параграфах. Пренебрегая нагревом за счет контактного поля**), можно сшить решения, полученные для однородных областей P , Q и R ; условия сшивания решений для области R с решениями в области Q и будут играть роль граничных.

Рассматривая задачу как одномерную, найдем теперь, пользуясь результатами § 8, вид распределения напряженности поля. Будем считать, что освещенность меняется скачкообразно на границах между областями P , Q и R и постоянна внутри них. Ясно, что, строго говоря, такая идеализированная постановка задачи имеет смысл не всегда. Необходимо, например, чтобы длина волны света была мала по сравнению с характерными длинами, на которых заметно изменяются напряженность поля и плотность объемного заряда. Точный учет характера изменения освещенности в переходных областях для нас, однако, несуществен, ибо он может привести лишь к некоторому изменению хода фазовых траекторий вдали от особых точек. Очевидно, что общий характер распределения напряженности поля и плотности заряда при этом существенно не изменится. Внутри областей P , Q и R возможные распределения плотности заряда и напряженности поля описываются фазовыми траекториями типа рассмотренных в § 8.

Условия «сшивания» решений на границах между областями очевидны: во-первых, естественно потребовать

*) В случае CdS наряду с освещением светом основной полосы в названных опытах использовалась инфракрасная примесная подсветка в области Q , также приводящая к уменьшению концентрации носителей (см. § I. 4).

**) Заметим, что возможность такого пренебрежения не самоочевидна (см. § II. 7).

непрерывности напряженности поля E (т. е. отсутствия поверхностного заряда на границе), во-вторых, необходимо, чтобы плотность свободного заряда $\rho_e = en$ была непрерывна (в противном случае возник бы бесконечно большой диффузионный ток). В силу малой чувствительности решения к условиям на реальных контактах, вид граничных условий на концах образца сейчас для нас не очень важен. Пусть, например, заданы концентрации электронов, $n = n_k$ при $x = 0$ и $n = n_a$ при $x = L$ *). Заметим, что в точках x_1 и x_2 на границах освещенной области фазовые траектории сливаются непрерывно, но не гладко, а испытывают излом. Действительно, найдем производную dn/dE . Производная dn/dx равна

$$\frac{dn}{dx} = \frac{dn}{dE} \frac{dE}{dx} = \frac{en\mu E - j_0}{D}$$

и, поскольку E и n непрерывны везде в образце, а плотность тока j_0 постоянна по образцу, величина $dn/dx = (dn/dE)(dE/dx)$ также непрерывна. В то же время, как видно из уравнения Пуассона, величина dE/dx испытывает скачок, связанный с изменением освещенности; отсюда вытекает, что производная dn/dE должна иметь разрыв в точках x_1 и x_2 , величина которого зависит от условий освещения.

Построение фазовой траектории, отвечающей той или иной конкретной ситуации (заданному напряжению на образце длины L), можно провести, накладывая картины фазовых траекторий для областей, освещенных по-разному, и выбирая траекторию, которая

а) удовлетворяет граничным условиям при $x = 0$ и при $x = L$,

б) отвечает образцу длины L $\left(\int dE (dE/dx)^{-1} = L \right)$,

в) дает требуемое полное падение напряжения на образце,

$$\int dE \cdot E (dE/dx)^{-1} = V,$$

г) испытывает излом в точках $x = x_1$ и $x = x_2$, причем величина излома определяется условиями непрерывности плотности свободного заряда и напряженности поля.

*) См. вторую сноску на стр. 170.

Мы не будем, однако, рисовать весь фазовый портрет в интересующих нас областях, а ограничимся рассмотрением

поля направлений, определяющего знаки производных dE/dx и dn/dx в каждой точке фазовой плоскости. Поле направлений для системы с рекомбинационной нелинейностью в случае, когда $j = j_0$, а вольтамперная характеристика изображается кривой I на рис. 36, а, показано на рис. 36, б. Сплошная линия, определяемая уравнением $j_0 - en\mu E = 0$, отвечает тем точкам плоскости (E, n) , в которых производная dn/dx обращается в нуль. Кривая $n = n_0(E)$ (функция $n_0(E)$ определяется равенствами (1.14а), (1.14б)) отделяет области положительных и отрицательных значений dE/dx : производная $dE/dx > 0$ при $n > n_0(E)$ и $dE/dx < 0$ при $n < n_0(E)$. Стрелками обозначены направления траекторий при возрастании аргумента x (имеется в виду не точное направление траектории в данной точке, а лишь соответствующий квадрант). Так, например, для любой точки, лежащей выше кривых

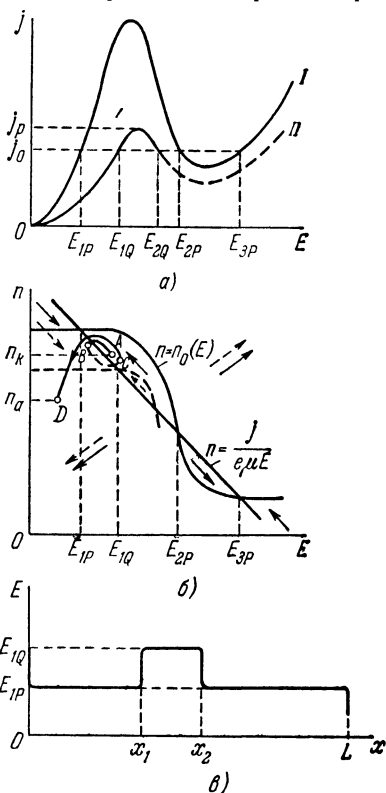


Рис. 36. К отысканию вида распределения напряженности поля в неоднородно освещенном образце при малых напряжениях.

а) Вольтамперные характеристики, отвечающие областям P и R (кривая I) и Q (кривая II), б) поле направлений при $j_0 < j_p$ (штриховые линии и стрелки отвечают области Q), в) распределение напряженности поля. Напряженность поля и концентрация отложены в логарифмическом масштабе.

в данной точке, а лишь соответствующий квадрант). Так, например, для любой точки, лежащей выше кривых

$n = n_0(E)$ и $n = j_0/e\mu E$, как dE/dx , так и $d\rho/dx$ положительны. Это означает, что при возрастании аргумента x как E , так и n возрастают вдоль траектории и $dn/dE > 0$.

Рассматриваемое поле направлений определяет лишь общий характер хода фазовых траекторий в той или иной области плоскости (E, n) , в этом отношении оно отличается от используемого иногда поля направлений, точно определяющего наклон фазовых траекторий в каждой точке фазовой плоскости. Как и в § 8, знания знаков производных dE/dx и dn/dx оказывается достаточно для того, чтобы качественно описать вид распределения напряженности поля и плотности заряда при различных напряжениях на образце.

В области Q вольтамперная характеристика проходит ниже, чем в областях P и R (кривая II на рис. 36, а). Пусть вначале ток меньше, чем соответствующий максимуму кривой II , $j_0 < j_p$. Поле направлений для этого случая изображено на рис. 36, б. Сплошная кривая на этом рисунке отвечает зависимости $n = n_0(E)$ в областях P и R . Сплошные стрелки указывают направления траекторий (т. е. знаки производных dn/dx и dE/dx), соответствующих областям P и R . Зависимость $n = n_0(E)$ и направления траекторий в области Q изображены на рисунке штриховыми линиями.

Используя известные свойства траекторий и условия сшивания, найдем фазовую траекторию, описывающую распределение напряженности поля во всем образце. Она начинается в точке A ($n = n_k$, $x = 0$), проходит в окрестности седла $(E_{1P}, n_0(E_{1P}))$, а затем, испытав излом, переходит в область Q . Участок BC отвечает области Q — траектория проходит вблизи седла $(E_{1Q}, n_0(E_{1Q}))$, поворачивает и переходит в область R . На участке CD (область R) траектория вновь проходит через окрестность седла $(E_{1P}, n_0(E_{1P}))$.

Таким образом, в длинном образце напряженность поля практически постоянна внутри областей P , Q и R и быстро меняется в тонких переходных слоях между этими областями близ границ образца (рис. 36, в). Полное падение напряжения, очевидно, при этом равно (в пренебрежении вкладом переходных слоев)

$$V \approx E_{1P}(L_P + L_R) + E_{1Q}L_Q, \quad (9.1)$$

где L_P , L_Q и L_R — длины соответствующих областей. С ростом напряжения V увеличивается и плотность тока (точки E_{1P} и E_{1Q} сдвигаются вправо с ростом j_0). Ситуация существенно меняется, когда плотность тока становится близкой к плотности тока j_p , отвечающей максимуму кривой II (рис. 37, а). В этом случае дальнейшее увеличение падения напряжения на образце за счет роста тока оказывается невозможным. Таким образом, при

$$V > E_{1P}(L_P + L_R) + E_Q L_Q = V_c, \quad (9.2)$$

где E_Q — напряженность поля в максимуме кривой II, а E_{1P} — положение особой точки в областях P и R при $j_0 = j_p$, однородные распределения в областях P , Q и R не могут обеспечить требуемого падения напряжения на образце. В этом случае фазовая траектория должна проходить в окрестности одной из особых точек, находящихся в области $E > E_Q$ (рис. 37, б). Действительно, при $j_0 \approx j_p$ такая форма фазовой траектории оказывается возможной. Начинаясь в точке А (рис. 37, б), траектория проходит

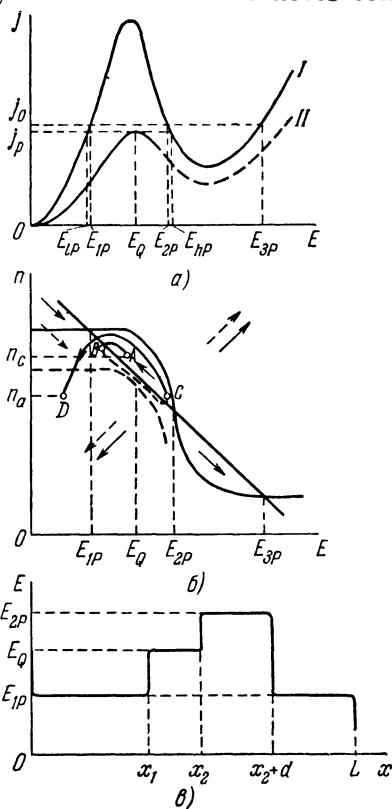


Рис. 37. К отысканию вида распределения напряженности поля в неоднородно освещенном образце при $V > V_c$.

а) Вольтамперные характеристики, отвечающие областям P и R (кривая I) и Q (кривая II), б) поле направлений при $j_0 \approx j_p$ (штриховые линии и стрелки относятся к области Q), в) распределение напряженности поля ($E_{1P} \approx E_{1P}$, $E_{2P} \approx E_{HP}$). Напряженность поля и концентрация отложены в логарифмическом масштабе.

Начинаясь в точке А (рис. 37, б), траектория проходит

в окрестности седла и попадает в область Q ; ее примерный ход в области Q показан штрихами. Затем в точке C траектория переходит в область R вблизи узла $(E_{2P}, n_0(E_{2P}))$ и, пройдя вблизи седла $(E_{1P}, n_0(E_{1P}))$, достигает прямой $n = n_a$ на аноде. Таким образом, при $V > V_c$ в области P возникает домен сильного поля, локализованный вблизи области Q — «псевдокатода». Распределение поля в этом случае показано на рис. 37, в. Полное падение напряжения при наличии домена ширины d в области R равно

$$V \approx E_{1P}(L_P + L_R - d) + E_Q L_Q + E_{hP} d. \quad (9.3)$$

Заметим, что характерная особенность распределения поля при наличии запирающего «псевдокатода», ограничивающего ток, состоит в том, что ток через образец при наличии статического домена отличается от тока в экстремуме вольтамперной характеристики основной части образца. Поэтому поле внутри домена таково, что

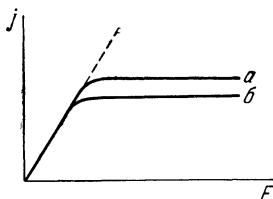


Рис. 38. Вольтамперные характеристики неоднородно освещенного образца с псевдокатодом.

Пунктирная прямая отвечает однородно освещенному образцу. Переход от кривой a к кривой b происходит при уменьшении концентрации в области «псевдокатода» Q .

дифференциальная проводимость отрицательна. Вопрос об устойчивости такого распределения будет обсуждаться в главе VII.

Посмотрим теперь, какой будет вольтамперная характеристика неравномерно освещенного образца с доменом. Очевидно, что на начальном участке вольтамперная характеристика линейна и наклон ее зависит от освещенности образца. При достижении плотности тока j_p , однако, в области R образца возникает домен, который постепенно расширяется с повышением напряжения,

плотность тока при этом остается примерно постоянной (рис. 38).

Изложенные результаты качественного анализа находятся в хорошем согласии с экспериментом. Возможность непрерывно менять освещенность «псевдокатода», т. е. ток через образец, позволяет экспериментально исследовать ход вольтамперной характеристики однородного образца на падающем участке. Действительно, для этого нужно лишь измерить зависимость напряженностей поля внутри и вне домена от плотности тока насыщения. В опытах с рекомбинационной нелинейностью отсюда можно получить кривую зависимости $n_0(E)$, если известен вид функции $\mu(E)$.

ГЛАВА V

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДОМЕНОВ

§ 1. Постановка задачи

В ряде опытов [1—5] (см. §§ I. 2, I. 3) было обнаружено, что при определенных условиях электрические домены, возникающие в полупроводниках с горячими электронами, могут перемещаться по образцу с примерно постоянной скоростью и практически не деформируясь. Такое движение мы будем называть *стационарным*.

Как мы видели в главе IV, само по себе возникновение неоднородного распределения напряженности поля и плотности заряда в условиях, когда дифференциальная проводимость макроскопически однородного образца отрицательна, бывает, как правило, связано с наличием затравочных неоднородностей. Последние, однако, могут быть достаточно сильно локализованы по сравнению с «разросшимся» доменом. При этом большая часть его расположена в области, в исходных условиях однородной, так что влияние «затравки» до некоторой степени затушевывается, и естественно поставить вопрос о возможном неоднородном распределении поля в макроскопически однородном образце. С другой стороны, в таком образце (если длина его велика по сравнению с размерами возникшей неоднородности) все точки равноправны. Это, естественно, наводит на мысль о возможности передвижения домена. Тогда интересующие нас распределения поля и плотности заряда в образце зависят как от пространственных координат, так и от времени, и надо использовать полную систему уравнений с соответствующими дополнительными условиями.

Задавая совокупность уравнений и граничных условий, мы можем часть из них сформулировать, не конкре-

тизируя модели, явно описывающей механизм возникновения ОДП. Действительно, универсальными в этом смысле являются уравнения непрерывности и Пуассона. Для одномерного случая, которым мы ограничимся, они записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{4\pi}{\varepsilon} (\rho - \rho_0). \quad (1.2)$$

Из этих уравнений вытекает закон сохранения полного тока

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} + j(x, t) = J(t). \quad (1.3)$$

Величина $J(t)$, зависящая только от t , но не от x , есть плотность полного тока. Она определяет силу тока в последовательно присоединенной нагрузке R . Мы считаем включенным в R и внутреннее сопротивление батареи и, возможно, сопротивление контактных областей слабого поля в образце гантельной формы. Помимо граничных условий обычного типа, следует использовать еще закон Кирхгофа

$$\int_0^L E(x, t) dx + J(t) R = \mathcal{E}. \quad (1.4)$$

Эти уравнения дают лишь часть требуемой полной системы, но они не зависят от выбора модели, пока не указана связь между j , E и ρ и не сказано, какие именно носители заряда дают вклад в ρ . В дальнейшем мы ограничимся случаем униполярной проводимости. При этом $\rho = \rho_e + \rho_t$, где, как и раньше, ρ_e и ρ_t суть соответственно плотности заряда свободных и связанных носителей.

Вид недостающих уравнений неизбежно связан с теми или иными предположениями модельного характера. Как и в предыдущих главах, мы будем пользоваться локальной полевой аппроксимацией (§§ II.6, II.7). Отметим, однако, что в качественном отношении это ограничение, видимо, не носит принципиального характера.

Существенно лишь, чтобы вольтамперная характеристика однородного образца имела N-образный вид *).

В указанных условиях мы имеем

$$j = \rho_e \mu E - \frac{\partial \rho_e D}{\partial x} = \rho_e \mu^* E - D \frac{\partial \rho_e}{\partial x}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \mu &= \mu(E(x, t)), \quad D = D(E(x, t)), \\ \mu^* &= \mu + a(\rho - \rho_0), \quad a = \frac{8\pi}{\epsilon} \frac{dD}{dE^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Далее, надо задать связь между ρ и ρ_e . В случае дрейфовой нелинейности захватом электронов на ловушки можно пренебречь, т. е. положить $\rho = \rho_e$; дополнительных уравнений при этом не требуется. В случае концентрационной нелинейности часть электронов связана на ловушках различных типов. Обозначим плотность заряда, соответствующую части электронов, захваченных ловушками i -го типа, через $\rho_{t, i}$. Тогда

$$\rho_e = \rho - \rho_t = \rho - \sum_i \rho_{t, i}, \quad (1.7)$$

$$-\frac{\partial \rho_{t, i}}{\partial t} = \Psi_i(\rho, \rho_j, E), \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Совокупность уравнений (1.8) для всех i определяет кинетику рекомбинации. Функции Ψ_i отвечают конкретному выбору модели. В частности, в модели § I. 4, где рассматривается один тип ловушек, концентрация которых равна N , мы имеем, опуская ненужный индекс i :

$$-\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \Psi = c_0 \left\{ (\rho - \rho_t) \left(N - \frac{\rho_t}{\epsilon} \right) v(E(x, t)) - n_1 \rho_t \right\}; \quad (1.9)$$

здесь

$$v(E) = \frac{c(E)}{c_0}$$

и $c(E)$ — коэффициент захвата электрона в условиях разогрева под действием поля E .

*) Так, в работе [51] вычисления, аналогичные нижеследующим, были выполнены в рамках модели с дрейфовой нелинейностью и электронной температурой.

Величина n_1 , входящая в обычный член генерации, есть

$$n_1 = \frac{\rho_{e0}}{\rho_{t0}} \left(N - \frac{\rho_{t0}}{e} \right) + \frac{IS}{c_0}, \quad (1.10)$$

где индексом «0» обозначены величины в условиях термодинамического равновесия, I есть плотность потока фотонов и S — сечение ионизации ловушки фотоном.

Вопрос о выборе граничных условий обсуждался в § II. 7. Ограничимся здесь пока условием нейтральности образца. Предполагая одновременно, что внутри образца функция $E(x, t)$ непрерывна, получим (ср. (II. 7.7))

$$E(L, t) = E(0, t). \quad (1.11)$$

Для интересующих нас стационарных решений это условие приведет, как мы увидим ниже, к условию периодичности, т. е. к равенству не только значений поля E , но и всех прочих величин на концах образца (в точках $x = 0$ и $x = L$). Очевидно, подобный выбор граничных условий представляет собой определенную идеализацию и позволяет выделить лишь некоторый класс частных решений нашей системы уравнений. Такой подход должен быть впоследствии обоснован с точки зрения устойчивости найденных решений относительно вариации граничных условий; к этому вопросу мы вернемся ниже, в § VII. 7. Помимо этого, следует также выяснить, какие именно реальные физические эффекты не могут быть описаны в принятой постановке задачи. Как мы увидим, к числу их относятся процессы образования и исчезновения доменов, или выход колебаний во внешнюю цепь.

Начальные условия при рассмотрении стационарной задачи задавать не следует; нас будут интересовать свойства и условия существования стационарного движения доменов, безотносительно к вопросу о том, как оно возникло и установилось. Очевидно, этот подход имеет смысл, лишь если время пробега домена по образцу намного больше времен его зарождения и исчезновения. Это имеет место в образцах, длина которых значительно больше размеров приконтактных слоев, где образуются и исчезают домены. Теоретическая оценка условий для соответствующих характерных времен, при выполнении

которых установится рассматриваемое стационарное движение, представляет немалые трудности. С другой стороны, экспериментальные данные [3, 5] показывают, что такой подход часто имеет смысл: удается наблюдать движение доменов неизменной формы в течение интервалов времени, больших по сравнению с временами их образования и исчезновения.

Постановка частной задачи о стационарном движении целесообразна еще и потому, что сформулированная система уравнений существенно нелинейна, ибо подвижность, коэффициент диффузии и коэффициенты захвата или ионизации зависят от напряженности поля. К тому же сам вид указанных зависимостей не известен достаточно надежно. В таких условиях было бы нереалистично надеяться получить общее решение и, по-видимому, удобнее следовать по пути, давно уже известному в гидродинамике, — рассматривать частные решения, отвечающие той или иной физической ситуации. Интересуясь однородными стационарными решениями системы уравнений (1.1), (1.2), (1.6) и (1.9), мы, очевидно, не можем ограничиваться линеаризацией [6] уравнений около пространственно однородного решения, что, как мы видели в главе II, приводит, вообще говоря, лишь к решениям, нарастающим или затухающим во времени. Таким образом, учет нелинейных эффектов здесь принципиален — только с их помощью может произойти, например, ограничение экспоненциального роста отклонений от однородного распределения.

§ 2. Риманово решение [5, 7—10]

Заметим, что в рамках принятой постановки задачи зависимость коэффициентов нашей системы уравнений от x и t входит только через их функциональную зависимость от аргумента $E(x, t)$. В этих условиях имеет смысл искать решения частного вида (называемого в гидродинамике римановым), для которого любые две из величин j , E и ρ суть функции только от третьей (например, $j = j(\rho(x, t))$ и $E = E(\rho(x, t))$). Заметим, что при этом вопрос о возникновении и исчезновении рассматриваемых распределений может выпасть из рассмотрения. Действительно, влияние начальных условий могло бы

привести и к явной зависимости искомых величин от времени.

Выбирая здесь в качестве независимой переменной ρ , можем переписать уравнения (1.1) и (1.2) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{dE}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{4\pi}{\varepsilon} (\rho - \rho_0). \quad (2.2)$$

Для интересующих нас нетривиальных решений величина $dE/d\rho$ не обращается в нуль тождественно, и поэтому допустимо переписать (2.2) в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{(\rho - \rho_0)}{dE/d\rho}. \quad (2.3)$$

Условие совместности уравнений (2.1) и (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dj}{d\rho} \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\rho - \rho_0}{dE/d\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\rho - \rho_0}{dE/d\rho} \right) \quad (2.4)$$

приводится к виду

$$\frac{d^2 j}{d\rho^2} = 0. \quad (2.5)$$

Отсюда получаем

$$\frac{dj}{d\rho} = u_0, \quad (2.6)$$

и

$$j = u_0 \rho + c. \quad (2.7)$$

Здесь u_0 и c — постоянные интегрирования; величина u_0 имеет размерность скорости.

Подставляя (2.6) в (2.1) и принимая во внимание, что $E = E(\rho)$, $j = j(\rho)$, получаем

$$\rho = \rho(x - u_0 t), \quad E = E(x - u_0 t), \quad j = j(x - u_0 t). \quad (2.8)$$

Выражения (2.8) описывают волну пространственного заряда и напряженности поля, распространяющуюся с постоянной фазовой скоростью u_0 . Очевидно, форма и амплитуда этой волны не меняются со временем — волна перемещается по образцу, не деформируясь, и состояние поля, наблюдающееся в некоторой точке в какой-либо момент времени, в дальнейшем в точности воспроизводится во всех последующих точках образца. Это и есть стационарное решение.

В обычной гидродинамике предположение о том, что все рассматриваемые величины (плотность и т. д.) выражаются через какую-нибудь одну из них, приводит к решениям более общего вида, нежели (2.8) [11]. Именно, имеются решения формально того же типа, но с переменной скоростью u , которая сама зависит от выбранного аргумента. Решения такого общего типа и называются *римановыми*. Как видно из предыдущего, в случае системы (1.1) — (1.2) нетривиальных решений со скоростью $u = u(\rho)$ не существует, возможен лишь частный случай $u = \text{const}$. Причина этого состоит в том, что уравнение Пуассона не однородно по производным.

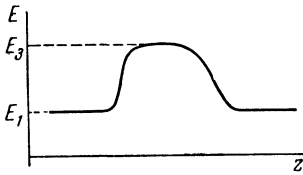


Рис. 39. Широкий домен сильного поля.

Мы увидим (см. §§ 7, 8 настоящей главы), что рассматриваемые решения, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям и закону Кирхгофа (1.4), отвечают, например, следующему распределению напряженности электрического поля (рис. 39). В части образца значение E велико (оно отвечает положительной ветви вольтамперной характеристики (см. рис. 3, а)) и приблизительно постоянно, $E \approx E_3$, в остальной же части образца, за исключением узких переходных слоев, напряженность поля невелика и также практически постоянна, $E \approx E_1$. Иначе говоря, рассматриваемая система уравнений допускает существование решений, описывающих движение областей сильного поля — доменов — с постоянной скоростью u_0 .

Итак, величины E , ρ и j зависят лишь от аргумента

$$z = x - u_0 t. \quad (2.9)$$

Граничное условие (1.11) дает

$$E(L - u_0 t) = E(u_0 t), \quad (2.10)$$

или, с учетом (2.8),

$$E(z) = E(z + L), \quad \rho(z) = \rho(z + L), \quad j(z) = j(z + L). \quad (2.10')$$

Это есть условие периодичности решения по аргументу z с периодом L . Оно должно удовлетворяться для ка-

ждой из рассматриваемых функций и для их производных. Несколько иной вид имеют граничные условия в случае достаточно длинных образцов, когда все интересующие нас неоднородности в распределениях, скажем, электрического поля могут оказаться сосредоточенными вдали от концов образца. При этом, формально рассматривая предельный переход $L \rightarrow \infty$, естественно заменить условия (2.10') требованием ограниченности решения на бесконечности и исходным условием нейтральности, что дает $E(-\infty) = E(+\infty) < \infty$. Закон Кирхгофа при этом надо заменить предельным соотношением (IV.8.3).

Возвращаясь к случаю конечных L , заметим, что ограниченные периодические решения можно рассматривать на всей оси аргумента z , т. е. когда $-\infty < z < +\infty$. При этом в каждой фиксированной точке образца процесс будет периодичен во времени с периодом

$$T = \frac{L}{|u_0|} \quad (2.11)$$

(ниже будет показано, что для отрицательных носителей заряда $u_0 < 0$).

Наглядное представление об описываемых такими решениями процессах можно получить с помощью используемой иногда картины циклически замкнутого образца. Действительно, поскольку «обрезанная» одним концом конечного образца часть домена «мгновенно» воспроизводится в области образца, прилегающей к его противоположному концу, сами границы перестают быть выделенными.

Обсудим теперь вопрос о том, какой физической ситуации отвечают римановы решения. Подставляя решение вида (2.8) в выражение для закона сохранения полного тока (1.3) и замечая, что теперь $\partial E/\partial t = -u_0(dE/dz)$, находим

$$-\frac{u_0 \varepsilon}{4\pi} \frac{dE}{dz} + j(z) = J(t). \quad (2.12)$$

Поскольку правая часть не зависит от аргумента x , от которого через комбинацию $z = x - u_0 t$ могла бы зависеть левая часть, равенство (2.12) при любых t может выполняться, лишь если обе его части постоянны, т. е.

$$J = \text{const} \quad (2.13)$$

— полный ток в цепи остается постоянным *). Именно в этом и проявляются наиболее наглядно физические следствия используемого в принятом подходе ограничения лишь периодическими решениями. Действительно, как было отмечено в главе I, в реальной ситуации колебания тока во внешней цепи как раз и свидетельствуют о прохождении домена по образцу. Однако если длина образца достаточно велика и домен движется в нем достаточно далеко от концов, то ток остается постоянным. Лишь когда область повышенного сопротивления — домен — исчезает у анода **) (появляется у катода), ток возрастает (убывает). Этот процесс выходит за рамки принятого рассмотрения, отражающего факт конечности образца только тем, что величина периода задана длиной L . В более общем рассмотрении, описывающем нестационарные решения и выход колебаний во внешнюю цепь, важную роль должно играть исследование фактической ситуации на контактах.

Отметим, что константу c , фигурирующую в формуле (2.7), можно связать с J и u_0 . В силу (2.8) уравнение Пуассона можно переписать в виде

$$\frac{dE}{dz} = \frac{4\pi}{\epsilon} (\rho - \rho_0). \quad (2.14)$$

Подставляя это выражение для dE/dz в левую часть (2.12) и используя формулу (2.7) для плотности тока j , находим

$$c = J - u_0 \rho_0. \quad (2.15)$$

Таким образом, решение рассматриваемого типа выражено через наблюдаемые на опыте величины u_0 (или T) и J .

Формулы (2.6) — (2.15) получены с помощью уравнений (1.1), (1.2), справедливых независимо от выбора той

*) Смысл этого результата можно проиллюстрировать, пользуясь вместо закона сохранения полного тока условием непрерывности тока на границе образца с учетом изменения поверхностной плотности заряда. При этом оказывается, что изменение функции $j(z)$ как раз компенсируется изменением поверхностной плотности заряда, так что плотность тока в нагрузке остается постоянной. По-видимому, неоднородные распределения такого типа наблюдались на опыте [12].

**) В образце n -типа.

или иной модели. Дальнейшая конкретизация необходима для явного вычисления функций $E(z)$ и $\rho(z)$, а также значений постоянных u_0 и c . Искомые выражения должны быть найдены из уравнения Пуассона (2.14) и уравнений (1.5) и (1.9). В соответствии с (2.7), (2.8) и (2.15) в случае римановых решений эти уравнения надо переписать в следующем виде:

$$\frac{d\rho_0}{dz} = \frac{\rho_0 \mu^* E - J - u_0 (\rho - \rho_0)}{D}, \quad (2.16)$$

$$u_0 \frac{d\rho_{t,i}}{dz} = \Psi_i(\rho, \rho_{t,j}, E(z)). \quad (2.17)$$

Здесь μ^* дается формулой (II. 6.31). Оба эти уравнения справедливы в условиях локальной связи между кинетическими коэффициентами и напряженностью поля $E(x, t)$. При этом вид правой части (2.17) отражает специфику конкретного механизма захвата горячих электронов ловушками.

Задача сводится теперь к исследованию условий существования и к явному нахождению нетривиальных решений системы (2.14), (2.16) и (2.17), удовлетворяющих соответствующим граничным условиям. Именно, ищутся периодические (с периодом L) решения $E(z)$,

$$E(z) = E(z + L), \quad (2.18)$$

удовлетворяющие закону Кирхгофа,

$$\int_0^L dz E(z) + JR = \mathcal{E}. \quad (2.19)$$

Обращает на себя внимание формальное сходство поставленной здесь задачи со статическим случаем. Действительно, уравнения (2.14) и (2.16) формально аналогичны соответствующим уравнениям (IV.1.2) и (IV. 1.5) — с заменой аргумента z на x . Однако в статическом случае, рассмотренном в главе IV, аргумент x изменялся в конечных пределах $0 \leq x \leq L$. Это отражало необходимость учета роли реальных контактов, т. е. определенной специализации граничных условий, отличающейся от принятых здесь условий периодичности (2.18). Иначе говоря, математические задачи, внешне схожие, различаются областью определения аргумента. Задача,

рассматриваемая в настоящей главе, в отличие от случая статических доменов, инвариантна относительно однопараметрической группы трансляций аргумента, что приводит к возможности произвольного выбора начала отсчета z (или начальной фазы $u_0 t_0$, см. ниже).

Как будет показано в следующем параграфе, условия периодичности в сочетании с законом Кирхгофа однозначно определяют риманово решение. Иначе говоря, мы имеем здесь лишь частные решения определенного вида. Очевидно, наличие реальных условий на контактах приведет в конечном счете к отклонению фактически осуществляющегося решения от риманова. Это вызывает необходимость дополнительных исследований условий существования и устойчивости риманова решения относительно вариации граничных условий.

§ 3. Дрейфовая нелинейность (качественное исследование).

Условия существования периодических решений [13]

В случае дрейфовой нелинейности $\rho_t = 0$, $\rho_e = \rho$ и уравнение рекомбинационной кинетики отпадает. Поскольку коэффициенты уравнений (2.14) и (2.16) не зависят от z явно, мы можем перейти к уравнению траекторий на плоскости (E, ρ) :

$$\frac{d\rho}{dE} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\rho \mu^*(E, \rho) E - J - u_0 (\rho - \rho_0)}{D(E) (\rho - \rho_0)}. \quad (3.1)$$

Из уравнения (3.1) можно найти семейство траекторий $\rho(E)$. Зная зависимость $\rho(E)$, из уравнения Пуассона (2.14) нетрудно найти $E(z)$. Таким образом, мы получим закон движения изображающей точки (E, ρ) по фазовой траектории $\rho(E)$. Поскольку различные точки этой траектории отвечают различным значениям параметра z , то тем самым мы находим и распределение напряженности поля, а также плотности заряда в образце.

Рассмотрим несколько подробнее вопрос об однозначном выделении интересующего нас решения. Переход от автономной системы уравнений (2.14), (2.16) путем «деления» их друг на друга к системе (3.1) и (2.14) математически оправдан в силу предполагающейся аналитичности правых частей уравнений (2.14) и (2.16)

как функций своих аргументов E и ρ (см. Приложение VI). В этих условиях через каждую неособую точку плоскости (E, ρ) проходит не более одной траектории $\rho(E)$. Таким образом, траектория полностью определяется заданием какой-либо одной неособой точки на ней, скажем (E^*, ρ^*) ; интегрирование уравнения первого порядка (3.1) дает нам однопараметрическое семейство кривых. Характер расположения этого семейства траекторий на фазовой плоскости определяется лишь двумя параметрами J и u_0 (они возникли при интегрировании уравнения непрерывности, содержащего две производные — как по координате, так и по времени). Величину $\rho^*(E^*)$, «нумерующую» различные траектории семейства, можно считать новой постоянной интегрирования, т. е. третьей константой, подлежащей определению. Наконец, интегрируя уравнение Пуассона с функцией $\rho(E; J, u_0, \rho^*(E^*))$, мы получим

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \int \frac{dE}{\rho - \rho_0} = z + z^*. \quad (3.2)$$

Здесь появилась еще одна константа интегрирования z^* .

Итак, всего мы имеем четыре константы: J , u_0 , ρ^* и z^* . Для определения их есть три условия: закон Кирхгофа (2.19) и условие периодичности (2.10)*). Следовательно, одна константа интегрирования остается произвольной. Легко понять, что в рамках нашей постановки задачи так и должно быть. Действительно, представим константу z^* в (3.2) в виде $u_0 t_0$, где t_0 — новая постоянная. Тогда в правой части равенства (3.2) будет стоять выражение

$$z + z^* = x - u_0(t - t_0). \quad (3.3)$$

Теперь очевидно, что постоянная z^* определяет лишь начало отсчета времени t_0 . Выбор t_0 может быть существенным, лишь когда в задаче появляются физически выделенные моменты времени. В нашей же постановке задачи таковые отсутствуют, и «фазовая постоянная» $u_0 t_0$

*) Подчеркнем, что условие (2.10) в рассматриваемом случае представляет собой фактически совокупность двух условий: решение должно быть периодически с некоторым фиксированным периодом (см. также след. параграф).

произвольна по самой сути дела. Выбор ее не влияет ни на какие наблюдаемые величины.

Рассматривая фазовую плоскость (E, ρ) , то же самое можно выразить и несколько иначе. Именно, в соответствии с условием периодичности (2.10) нас интересуют те решения уравнения (3.1), которым на фазовой плоскости отвечают замкнутые траектории. Как известно (см. Приложение VI), их положение и сам факт их существования определяются только видом уравнений и, в частности, значениями входящих в них параметров J и u_0 , но не выбором начальной точки z^* . Предельному циклу отвечает свое, отличное от других траекторий, значение постоянной $\rho^*(E^*)$, появившейся при интегрировании уравнения (3.1). Остающаяся же произвольной константа z^* определяет лишь фазовую точку на траектории, с которой начинается движение по замкнутой интегральной кривой; выбор этой точки, очевидно, совершенно несуществен, ибо все они отвечают одному и тому же решению.

Таким образом, условий (2.10) и (2.19) достаточно для выделения искомого решения. При фактическом расчете может оказаться более удобным считать заданной плотность тока во внешней цепи J . Тогда падение напряжения на образце V окажется функцией J

$$\int_0^L E(z) dz \equiv V = V(J). \quad (3.4)$$

Далее, закон Кирхгофа позволит связать J с величиной \mathcal{E} и тем самым завершить отыскание решения. Этот подход более удобен потому, что топология семейства решений уравнения (3.1) непосредственно связана именно со значением параметра J , определяющего особые точки на фазовой плоскости (E, ρ) .

В случае бесконечно длинных образцов правомерна и несколько иная, более общая, постановка задачи. Именно, здесь можно вообще отказаться от условия (2.18), требуя лишь, чтобы решение было ограничено на бесконечности. При этом в режиме заданного тока оказываются допустимыми не только периодические римановы решения, но и слоевые (рис. 40). Для последних $\rho(-\infty) = \rho(\infty) = \rho_0$, но $E(-\infty) \neq E(\infty)$, что отвечает

нарушению условия нейтральности. Распространение таких слоевых неоднородностей напряженности поля сопровождается изменением со временем разности потенциалов между фиксированными точками образца, находящимися по разные стороны от области перепада напряженности поля.

Поскольку падение напряжения на образце V в данном случае зависит от времени, римановы решения типа

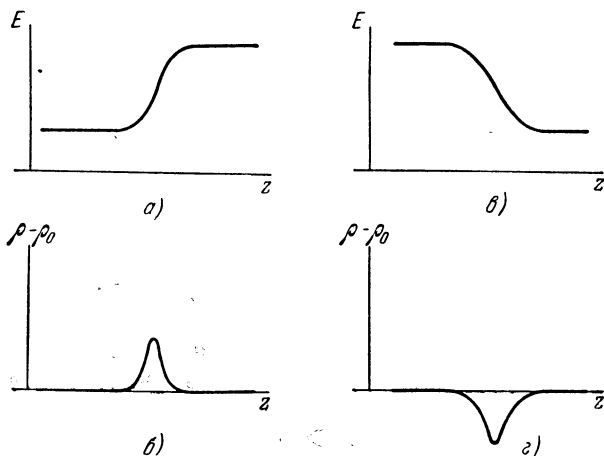


Рис. 40. Распространяющиеся слои объемного заряда:
а) и б) слой обогащения, в) и г) слой обеднения.

слоев имеет смысл рассматривать только в режиме заданного тока, когда величиной V можно пренебречь по сравнению с падением напряжения на внешней нагрузке. Даже и в этом случае фактическими отклонениями от риманова решения в длинных, но конечных образцах можно пренебречь лишь тогда, когда область перепада напряженности поля находится достаточно далеко от контактов. Включение в рассмотрение слоевых распределений приводит к тому, что не всегда возможен однозначный выбор решения: одному и тому же значению J могут отвечать, как мы увидим, два разных типа слоев, движущихся, вообще говоря, с различными скоростями u_0 .

Заметим, что к задаче о движении слоев, по сути дела, сводится и специальный предельный случай

периодического решения при $L \rightarrow \infty$. Именно, достаточно широкий домен с плоской вершиной (рис. 39) можно представить в виде совокупности двух далеко отстоящих друг от друга слоевых решений разного типа (с противоположными перепадами $E(z)$), движущихся с одинаковой скоростью.

Обратимся к исследованию условий существования периодических решений. Одно необходимое условие получим, переписав рассматриваемую систему в виде

$$\frac{dE}{dz} = \frac{4\pi}{\epsilon} (\rho - \rho_0) \equiv \mathcal{P}(E, \rho), \quad (3.5)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{(\mu^*E - u_0)\rho - J + u_0\rho_0}{D} = \mathcal{Q}(E, \rho) \quad (3.6)$$

и применив к ней критерий Бендиксона (см. Приложение VI). В данном случае

$$F_1 = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial E} + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \rho} = \frac{\mu^*E - a\rho E - u_0}{D}. \quad (3.7)$$

Если разность $\mu^* - a\rho$ не изменяет знака (например, при $a = 0$), то функция F_1 может быть знакопеременной, лишь если

$$u_0 > 0. \quad (3.8)$$

Таким образом, домены, описываемые римановым решением (2.8), движутся как основные носители заряда.

Исследуем теперь особые точки системы (3.5), (3.6). Одна из них лежит в бесконечности, другие определяются из условий одновременного обращения в нуль правых частей уравнений (3.5) и (3.6):

$$\rho = \rho_0, \quad \mu_i^* E_i \rho_0 = \mu_i E_i \rho_0 = J. \quad (3.9)$$

Здесь принято во внимание, что при $\rho = \rho_0$ имеем $\mu^* = \mu$; $\mu_i = \mu(E_i)$, индексом i нумеруются особые точки в порядке возрастания значений напряженности поля E_i .

Мы видим, что возможные значения E_i , как и при рассмотрении статических доменов, определяются через J по вольтамперной характеристике однородного образца (рис. 3, а). Так же как и в главе IV (см. также Приложение VI), проводится и исследование характера осо-

бых точек. При небольших отклонениях от особой точки положим

$$E = E_i [1 + u(z)], \quad \rho = \rho_0 [1 + v(z)], \quad (3.10)$$

где $|u|, |v| \ll 1$, и линеаризуем уравнения (3.5), (3.6) по u и v . Получим

$$\frac{du}{dz} + \frac{4\pi\rho_0}{eE_i} v = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{dv}{dz} + \frac{\sigma_i E_i}{\rho_0 D_i} u + F_{1i} v = 0. \quad (3.12)$$

Здесь

$$D_i = D(E_i), \quad \sigma_i = \rho_0 \left(\frac{d\mu E}{dE} \right) \Big|_{E=E_i} \quad (3.13)$$

и, согласно (3.7),

$$F_{1i} \equiv F_1(E_i, \rho_0) = \frac{\mu_i E_i - a_i \rho_0 E_i - u_0}{D_i}, \quad (3.7')$$

а значение $a_i \equiv a(E_i)$ определяется формулой (II.6.31) при $E = E_i$. Решения для малых отклонений $u(z)$ и $v(z)$ имеют, очевидно, вид

$$u(z) = \text{const} \cdot \exp(\lambda^{(i)} z), \quad v(z) = -\lambda^{(i)} \frac{eE_i}{4\pi\rho_0} u(z). \quad (3.10')$$

Корни характеристического уравнения, отвечающего системе (3.11), (3.12), равны

$$\lambda_{1,2}^{(i)} = \sqrt{\frac{4\pi}{eD_i}} \left\{ -\sqrt{\sigma_{ci}} \pm \sqrt{\sigma_{ci} + \sigma_i} \right\}. \quad (3.14)$$

Здесь

$$\sigma_{ci} = \frac{eD_i F_{1i}^2}{16\pi}, \quad (3.15)$$

и знак $\sqrt{\sigma_{ci}}$ в (3.14) совпадает со знаком F_{1i} .

Характер особой точки определяется знаками величин F_{1i} и σ_i , а также соотношением между $|\sigma_i|$ и σ_{ci} . Могут осуществляться следующие возможности:

а) седло, $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}$ вещественны и $\lambda_1^{(i)} > 0 > \lambda_2^{(i)}$, если $\sigma_i > 0$ (это соответствует точкам E_1 и E_3 на рис. 3, а);

б) узел, $\lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_2^{(2)}$ вещественны и одного знака (точка (E_2, ρ_0)), при этом $\sigma_2 < 0, |\sigma_2| < \sigma_{c2}$;

в) фокус, $\lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_2^{(2)}$ комплексно сопряжены, при этом $\sigma_2 < 0$, $|\sigma_2| > \sigma_{c2}$.

В последних двух случаях, не отличающихся принципиально друг от друга, особая точка (узел или фокус) оказывается устойчивой при $F_{12} = F_1(E_2, \rho_0) > 0$ и неустойчивой при $F_{12} < 0$. Напомним, что термин «устойчивость» здесь означает лишь, что движение изображающей точки по траектории с ростом z идет по направлению к особой точке.

В частном случае $\sigma_{c2} = 0$ мы имеем

$$\lambda_{1,2}^{(2)} = \pm i \sqrt{\frac{4\pi |\sigma_2|}{\epsilon D_2}}$$

и особая точка (E_2, ρ_0) нелинейной системы вырождается в центр. Как известно, в этом случае (негрубая особая точка) недостаточно линейного разложения по малым отклонениям от нее (см. Приложение VI). При учете членов более высокого порядка выясняется, что, как правило, особая точка представляет собой фокус. Важное исключение составляет случай, когда исходная система уравнений имеет аналитический интеграл [14], и это свойство сохраняется при определенном изменении параметров системы. Именно так, как мы увидим, обстоит дело в случае, когда можно считать $a(E) \equiv 0$, а значение одного из параметров системы — скорости домена u_0 — само определяется из условия существования интеграла системы.

Уже этих сведений о характере особых точек достаточно для того, чтобы сделать некоторые заключения о топологии семейства траекторий и о расположении замкнутых траекторий, если таковые существуют. Именно, замкнутая траектория должна окружать точку (E_2, ρ_0) и не может содержать внутри себя точек (E_1, ρ_0) и (E_3, ρ_0) . Очевидно, замкнутые траектории возможны лишь для значений J , находящихся в интервале (см. рис. 3, а)

$$j_v < J < j_p. \quad (3.16)$$

В окрестности особых точек ход интегральных кривых на плоскости (E, ρ) можно изобразить следующим образом.

а) Пусть точка (E_2, ρ_0) есть неустойчивый фокус (для устойчивого фокуса рассмотрение аналогично). Тогда

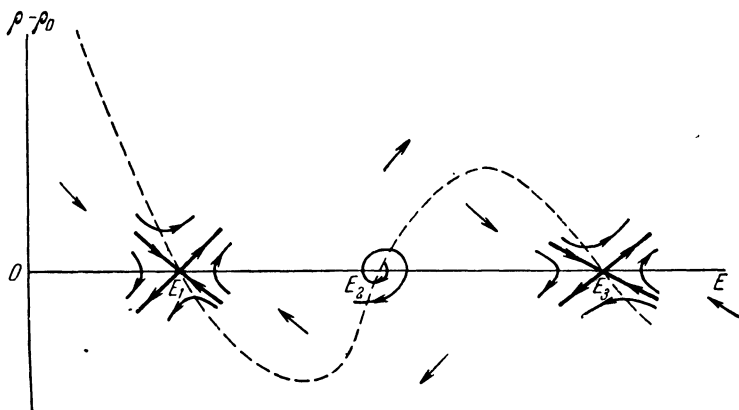


Рис. 41. Схематический ход интегральных кривых вблизи особых точек и поле направлений.

Точка (E_2, ρ_0) — неустойчивый фокус. На пунктирной кривой $dp/dz=0$.

мы имеем картину, изображенную на рис. 41. Пунктирная кривая (построенная качественно для случая $a < 0$,

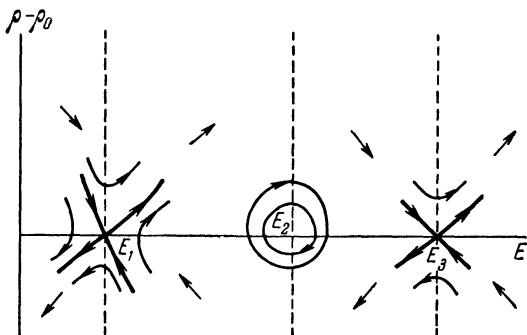


Рис. 42. Схематический ход интегральных кривых вблизи особых точек и поле направлений.

Точка (E_2, ρ_0) — центр. На пунктирных линиях dp/dz меняет знак.

$J > u_0 \rho_0$) отвечает тем значениям E и ρ , при которых меняет знак производная dp/dz , проходя через нулевое

значение. Поскольку на прямой $\rho = \rho_0$ эта производная обращается в бесконечность, можно указать области, в которых $d\rho/dE$ сохраняет знак. Эти области также указаны на рис. 41 (см. также § IV. 9).

б) Пусть точка (E_2, ρ_0) есть центр $a(E) \equiv 0$, $J = u_0 \rho_0$. Тогда мы имеем картину рис. 42.

Пользуясь полученными сведениями, мы можем теперь указать возможные типы замкнутых траекторий, отвечающих периодическим решениям, а также траекторий, расположенных в конечной области плоскости (E, ρ) и отвечающих слоевым распределениям напряженности поля.

Исходя из рис. 41, можно представить себе, например, полные картины траекторий, схематически изображенные на рис. 43. На этом рисунке сплошные кривые отвечают ограниченными на бесконечности решениям.

Они обозначены символами α , β , γ , δ .

Нетрудно построить и соответствующие им распределения напряженности поля и плотности заряда (рис. 44, см. также рис. 40).

Исходя же из картины рис. 42, мы можем получить семейство замкнутых кривых типа γ (рис. 45) и траектории типа δ (рис. 43, б) либо δ' (рис. 45, а); каждая из последних замыкается у одной из особых точек. Воз-

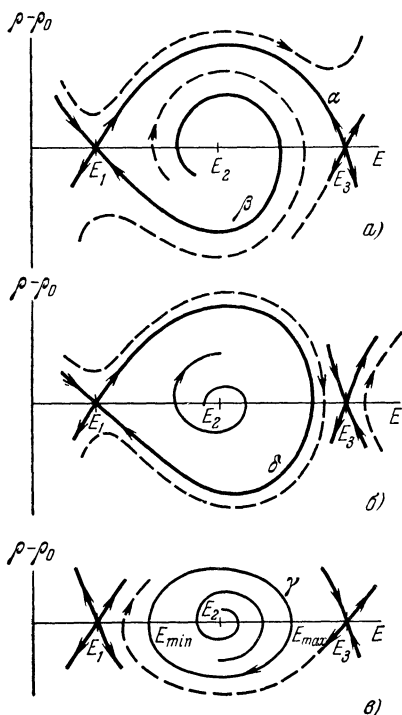


Рис. 43. Возможные фазовые портреты в случае $|\sigma_2| > \sigma_{c2}$ (дрейфовая нелинейность).

Случаи а), б) и в) осуществляются при разных значениях параметров J и u_0 .

можно также появление пары кривых α и α' , идущих из одной особой точки в другую. Таким образом, возможны фазовые портреты, приведенные на рис. 45, а и 45, б, и пространственные распределения, изображенные на рис. 46.

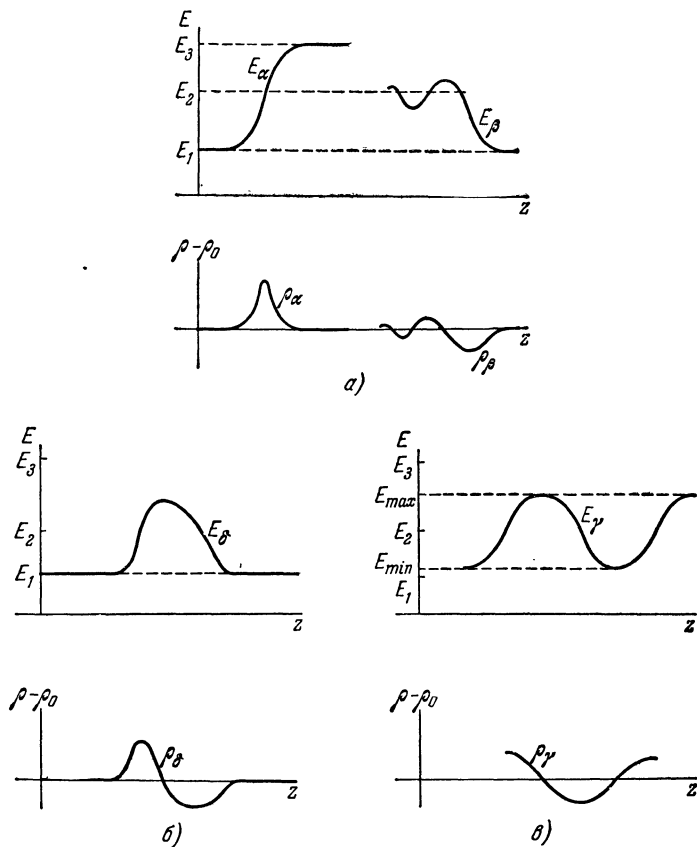


Рис. 44. Распределения напряженности поля и плотности заряда отвечающие фазовым траекториям рис. 43.

Периодическим решениям, удовлетворяющим условию (2.18), отвечают только замкнутые траектории типа γ . При переходе к пределу $L \rightarrow \infty$ фазовая траектория должна приближаться к особой точке (или к нескольким

особым точкам) — интеграл (3.2) должен расходиться (ср. с § IV. 8) *). В предельном случае бесконечного образца решениям, удовлетворяющим условию полной нейтральности, отвечают траектории типа δ , δ' и траектории, состоящие из двух частей, α и α' .

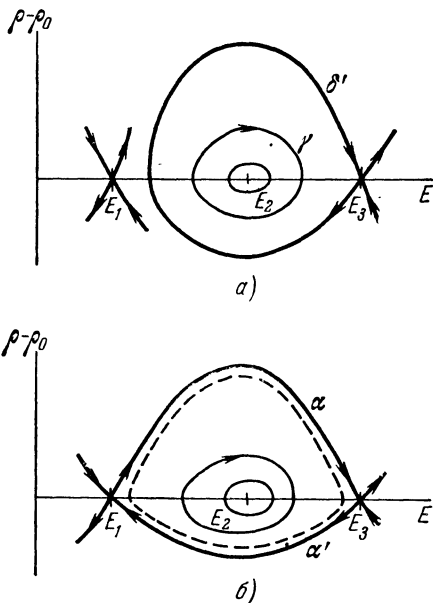


Рис. 45. Возможные фазовые портреты, когда особая точка (E_2, ρ_0) есть центр, $\sigma_{c2} = 0$.
Случаи а) и б) отвечают различным значениям параметра u_0 .

Первому случаю (траектория δ , рис. 43, б) соответствует узкий домен сильного поля (рис. 44, б): в конечной части образца напряженность поля велика, тогда как в преобладающей остальной части она практически постоянна и равна E_1 — значению напряженности

*) Можно было бы воспользоваться динамической аналогией, рассматривая плоскость (E, ρ) как фазовую плоскость некоторой механической системы, причем переменная z играет роль времени; очевидно, что в особых точках система пребывает «бесконечно долго».

в левой особой точке при данном значении плотности тока J . Траектория δ' (рис. 45, а) соответствует домену слабого поля. Для нее величина $E(z)$ почти всюду в образце равняется E_3 (рис. 46, а). Совокупность двух траекторий α и α' (или в длинном, но конечном образце — замкнутая траектория, расположенная близко от них, — пунктир на рис. 45, б) отвечает широкому домену: в образце имеются макроскопические области сильного и

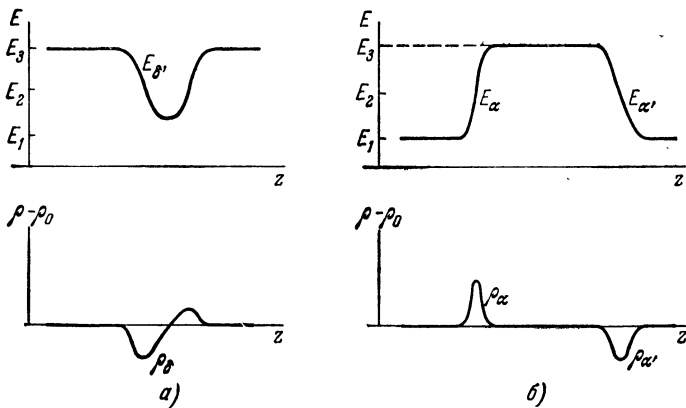


Рис. 46. Распределения напряженности поля и плотности заряда, отвечающие фазовым траекториям рис. 45.

слабого поля, отделенные друг от друга узкими переходными слоями (рис. 46, б).

Стационарно движущиеся домены, наблюдаемые экспериментально в длинных образцах, отвечают, как правило, решениям, изображаемым траекториями вида α , α' (рис. 45, б) и δ (рис. 43, б). Причины этого будут выяснены в главе VII при исследовании устойчивости решений, рассмотренных в настоящем параграфе.

§ 4. Форма домена. Правило площадей [5]

Для дальнейшего исследования условий существования римановских решений и явного нахождения их формы необходимо перейти от качественного анализа, использующего в основном лишь свойства особых точек системы уравнений (3.5), (3.6), к явному их решению.

Некоторые выводы оказывается возможным сделать посредством аналитического исследования, не обращаясь к численному интегрированию.

Перепишем уравнение (3.1) с учетом (1.6) в виде

$$\frac{\varepsilon}{4\pi D} \left\{ \mu E - u_0 + aE\rho_0 + \frac{u_0\rho_0 - J}{\rho} - aE\rho \right\} dE = \\ = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} d\rho. \quad (4.1)$$

Будем считать функцию ρ одним из решений уравнения (3.1) или (4.1), отвечающим некоторому значению постоянной интегрирования, скажем $\rho^*(E^*)$. Иначе говоря, рассмотрим траекторию на фазовой плоскости $\rho(E)$, проходящую через неособую точку $\rho^*(E^*)$. Интегрируя (4.1) вдоль некоторого отрезка этой траектории, получим

$$\frac{\varepsilon}{4\pi\rho_0} \int_{E^*}^E \frac{dE}{D} \left\{ \mu E - u_0 + aE\rho_0 + \frac{u_0\rho_0 - J}{\rho} - aE\rho \right\} = \\ = \left(\frac{\rho}{\rho_0} - \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) \Big|_{\rho^*}^{\rho}. \quad (4.2)$$

Функция, фигурирующая в правой части (4.2), схематически изображена на рис. 47. Видно, что каждому ее значению, превышающему единицу, отвечают два значения ρ , именно, $\rho_1 > \rho_0$ и $\rho_2 < \rho_0$. Отсюда следует, что, вообще говоря, уравнение (4.1) или (4.2) определяет $\rho(E)$ как двузначную функцию E .

Допустим теперь, что выбранная нами в (4.2) траектория — замкнутая, типа γ (рис. 43, в). При интегрировании по всему контуру правая часть (4.2) обратится в нуль, так же как и интеграл от первых трех слагаемых в левой части. Равенство (4.2) поэтому принимает вид

$$\oint \frac{dE}{D(E)\rho(E)} (J - u_0\rho_0 + a(E)E\rho^2(E)) = 0. \quad (4.3)$$

Поскольку функции $D(E)$ и $a(E)$ считаются известными из микроскопической теории, это условие дает связь между J и u_0 , отвечающую рассматриваемой замкнутой траектории $\rho_\gamma(E)$ на рис. 43, в. В сущности, это

есть математическая запись граничного условия периодичности (величина периода, однако, пока не определена).

Обсудим подробнее следствия условия (4.3) в частном случае $a = 0$, т. е. в пренебрежении термоэлектрическим током. Считая при этом $D = \text{const}$ и обозначив через $\rho_1(E)$ функцию, соответствующую части интегральной кривой ρ_y , лежащей выше оси абсцисс на рис. 43, в, а через $\rho_2(E)$ — функцию, описывающую нижнюю ее часть, получим, выбирая направление обхода по часовой стрелке,

$$\oint \frac{dE}{\rho(E)} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} dE \left(\frac{1}{\rho_1(E)} - \frac{1}{\rho_2(E)} \right). \quad (4.4)$$

Очевидно, E_{\min} и E_{\max} (см. рис. 43, в, 44, в) суть минимальное и максимальное значения напряженности поля в домене соответственно. Выражение в правой части (4.4) конечно и неотрицательно, ибо по условию $0 < \rho_2(E) \leq \rho_0 \leq \rho_1(E)$. Отсюда

$$J = u_0 \rho_0, \quad (4.5)$$

т. е. постоянная s (см. (2.15)) равна нулю. Согласно (3.9), это означает, что

$$u_0 = \mu_1 E_1 = \mu_2 E_2 = \mu_3 E_3 = \frac{J}{\rho_0}, \quad (4.6)$$

т. е. скорость движения домена равна дрейфовой скорости электронов в однородном поле, отвечающем заданному току. Иногда говорят, что это есть дрейфовая скорость в «слабом поле», отвечающем точке (E_1, ρ_0) ; с тем же правом, очевидно, можно говорить и о скорости в «среднем» и «сильном» полях E_2 и E_3 . Заметим, что формула (4.6) приводит к новому методу измерения дрейфовой скорости — через период колебаний тока, связанных с движением доменов [15].

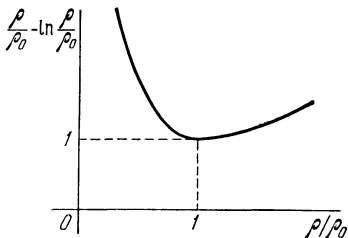


Рис. 47. График функции, фигурирующей в правой части уравнения (4.2).

Отметим еще, что в данном случае ($D = \text{const}$, $a = 0$, $J = u_0 \rho_0$) наша система, как видно из (4.2), обладает аналитическим первым интегралом

$$\frac{\rho}{\rho_0} - \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{e}{4\pi \rho_0 D} \int_{E^*}^E dE [E\mu(E) - u_0] = \\ = \frac{\rho^*}{\rho_0} - \ln \frac{\rho^*}{\rho_0} = \text{const.} \quad (4.2')$$

Следовательно, как видно из формулы (3.14) при учете определений (3.13), (3.15) и условия (3.9), в этом случае особая точка (E_2 , ρ_0) есть центр [14]. Вокруг него заведомо имеются замкнутые траектории. Таким образом, в данном случае доказано существование бесконечного множества периодических решений системы (3.5), (3.6) в условиях, когда плотность полного тока лежит в интервале $j_v < J < j_p$. Эти решения отвечают разным периодам. Действительно, «время» обхода замкнутой траектории, охватывающей центр, зависит от ее положения: оно изменяется от значения $2\pi \sqrt{\varepsilon D / 4\pi \sigma (E_2)}$ для траекторий, близких к центру (см. следующий параграф), до бесконечности — для траекторий, включающих особую точку.

Согласно (2.18), из всего множества решений надо выбрать те, для которых период равен L/m , где m — целое число. Действительно, одну и ту же длину L можно получить путем одно-, дву- ..., m -кратного обхода подходящих траекторий, в соответствии с равенством

$$L = \frac{e}{4\pi} m \oint \frac{dE}{\rho - \rho_0}. \quad (4.7)$$

Кратность обхода траектории отвечает, очевидно, числу доменов, распространяющихся в образце *).

Наличие первого интеграла (4.2) нашей системы уравнений при $a = 0$, $D = \text{const}$ решает в принципе и вопрос о форме распределений напряженности поля $E(z)$ и концентрации электронов $\rho_e(z)/e$. Однако фактическое определение ρ как функции E из (4.2) связано с вычи-

*) Вопрос об устойчивости m -доменного решения рассматривается в главе VII.

слением интеграла от функции $E\mu(E)$, аналитический вид которой известен довольно плохо.

Далее, для вычисления функции $E(z)$ надо, найдя $\rho(E)$ как корень нелинейного уравнения (4.2), подставить его в уравнение Пуассона (3.5). Без далеко идущих аппроксимаций модельного характера эта программа, по видимому, осуществима лишь путем численного расчета. Тем не менее удастся все же сделать основные качественные заключения о форме доменов.

Перепишем равенство (4.2'), полагая $E^* = E_{\min}$. Тогда $\rho^* = \rho_0$ и

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} - \ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{e}{4\pi\rho_0 D} \int_{E_{\min}}^E dE [\mu(E)E - u_0]. \quad (4.8)$$

Интеграл в правой части здесь не содержит ρ_0 и D ; очевидно, он максимален при $E = E_2$. В зависимости от значений параметров ρ_0 и D характер решений уравнения (4.8) будет различным. Допустим сначала, что произведение $\rho_0 D$ велико, так что правая часть (4.8) мала по сравнению с единицей:

$$\rho_0 D \gg \frac{e}{8\pi} \frac{d[\mu(E)E]}{dE} \Big|_{E=E_2} (\Delta E)^2,$$

где $\Delta E = E_2 - E_{\min}$. Тогда при любом заданном E значения ρ_1 и ρ_2 , определяемые уравнением (4.8), будут лежать вблизи минимума кривой, изображенной на рис. 47. Таким образом, в этом случае $\rho_1(E) - \rho_0$ и $\rho_2 - \rho_0(E)$ противоположны по знаку и примерно равны по абсолютной величине. Домен при этом имеет симметричную форму. В обратном случае, для малых $\rho_0 D$, правая часть (4.8) может значительно превышать единицу при $E \sim E_2$. Тогда одно из решений уравнения (4.8) велико: $(\rho_1(E)/\rho_0) \gg 1$, и мы приближенно имеем

$$\rho_1(E) \approx \frac{e}{4\pi D} \int_{E_{\min}}^E dE [E\mu(E) - u_0]. \quad (4.9)$$

Решение $\rho_1(E) \gg \rho_0$ отвечает резкому увеличению плотности носителей в области заднего фронта домена («обогащенный слой»).

Для второго решения $\rho_2(E) < \rho_0$ левая часть уравнения становится большой лишь при $(\rho/\rho_0) \ll 1$ (рис. 47). Это соответствует переднему фронту домена [$(dE/dz) < 0$], почти лишенному свободных носителей («обедненный

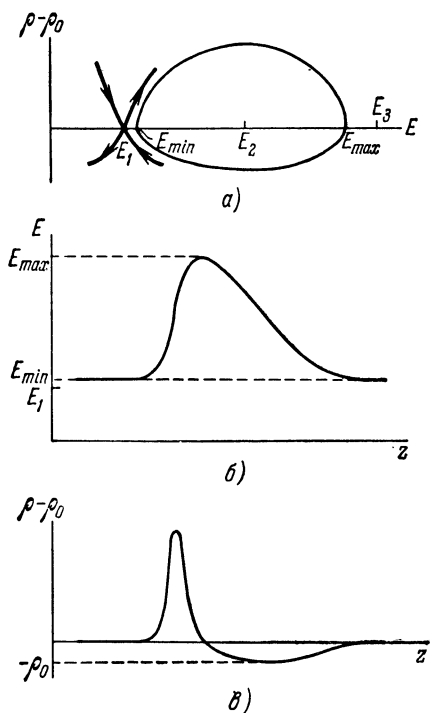


Рис. 48. Случай асимметричного треугольного домена (схематически).
 а) Фазовая траектория; б) распределение напряженности поля; в) распределение плотности заряда.

слой»). Форма домена в рассматриваемом предельном случае резко асимметрична, приближаясь к треугольной (рис. 48), или трапецидальной. Заметим, однако, что найденное выражение для формы домена в области наиболее резкого изменения его профиля, т. е. на участке обогащенного слоя, нельзя считать вполне точным. Действительно, как следует из (4.9), наименьшая характерная длина изменения напряженности поля порядка

$D/E_2\mu(E_2)$. Последняя, в свою очередь, порядка длины нелокальности, (II.6.10). Таким образом, видно, что условие применимости локальной аппроксимации (II.6.9) здесь, вообще говоря, не выполняется. Соответственно полученные выше результаты, относящиеся к областям доменных стенок, носят, строго говоря, лишь ориентировочный характер.

В силу отмеченной в § 1.2 особенности вольтамперной характеристики GaAs домены, обычно наблюдаемые при эффекте Ганна в этом материале, всегда по форме близки к треугольным (см., например, [15]).

Для случая $a = 0$, $D = \text{const}$ нетрудно указать простую связь между экстремальными значениями, E_{min} и E_{max} , напряженности поля в домене [16]. С учетом равенства (4.6) и того, что $\rho = \rho_0$ при $E = E_{\text{min}}$ и $E = E_{\text{max}}$, мы получаем из уравнения (4.2)

$$\int_{E_{\text{min}}}^{E_{\text{max}}} dE [E\mu(E) - \mu_2 E_2] = 0. \quad (4.10)$$

Это равенство имеет простой геометрический смысл (рис. 49): площади областей, заштрихованных на рисунке выше и ниже прямой $J(E) = J = \mu_2 E_2 \rho_0$, должны быть одинаковы. Таким путем можно, например, графически определять связь между E_{min} и E_{max} при известных характеристиках однородного образца (рис. 3, а) и значении плотности полного тока J . Соотношение (4.10) называют часто *правилом площадей*. Оно справедливо только в пренебрежении термоэлектрическим током, т. е. при $a = 0$, $D = \text{const}$.

Существует несложное обобщение [13] этого соотношения в виде «правила взвешенных площадей»:

$$\int_{E_{\text{min}}}^{E_{\text{max}}} dE \frac{\mu(E) E - \mu_2 E_2}{D(E)} = 0. \quad (4.11)$$

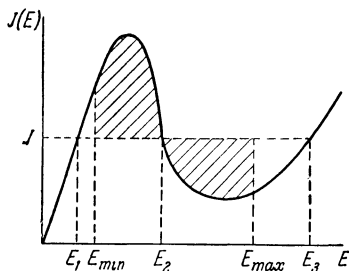


Рис. 49. Правило площадей в случае дрейфовой целинейности.

Оно основано, однако, на использовании иного выражения для плотности тока электронов, нежели (1.6). Именно, используется модель, в которой

$$j = \rho_e \mu(E) E - D(E) \frac{\partial \rho_e}{\partial x}. \quad (4.12)$$

Сравнивая эту формулу с используемым нами выражением (1.6), мы видим, что различие заключается в отсутствии в (4.11) вклада от величины $a(E)$ ($\rho - \rho_0$). Это приближение нуждается в специальном обосновании и, вообще говоря, неверно.

При последовательном учете термоэлектрического тока ситуация оказывается не столь простой. Как видно из условия (4.3), в этом случае равенства (4.5) и (4.6) не имеют места, и для исследования вопроса о существовании замкнутых траекторий надо обратиться непосредственно к уравнению (3.1) (или (4.2)).

Число замкнутых траекторий сколь угодно велико, если особая точка (E_2, ρ_0) есть центр. Согласно § 3, это может иметь место, если $\sigma_{c2} = 0$, т. е. если

$$\rho_0 u_0 - J + a_2 \rho_0^2 E_2 = 0, \quad (4.13)$$

где в соответствии с (3.9) мы положили $\rho_0 \mu_2 E_2 = J$. Подставляя это равенство в (4.3), получаем

$$\oint \frac{dE}{D(E) \rho(E)} [a(E) E \rho^2(E) - a_2 E_2 \rho_0^2] = 0. \quad (4.14)$$

Последнее соотношение представляет собой (при $a \neq 0$) дополнительное условие, связывающее параметры системы и решение $\rho(E)$. Поскольку все произвольные параметры решения определяются из граничных условий (сводящихся в данном случае к требованию (4.7) и закону Кирхгофа), условие (4.14) может удовлетвориться лишь случайно. При небольшом изменении параметров системы это условие, вообще говоря, нарушается; при этом особая точка становится фокусом или узлом.

При заданном J вид фазового портрета меняется с изменением скорости u_0 ; в частности, как видно из § 3, средняя особая точка может превращаться из узла в фокус и наоборот. Предположим, что замкнутый предель-

ный цикл типа изображенного на рис. 43, в существует в некоторой области значений u_0 . Изменение параметра u_0 меняет, вообще говоря, как положение этого предельного цикла, так и «время» его обхода, $\int dE (dE/dz)^{-1}$. При этом условию (4.7) удастся удовлетворить лишь при некотором значении u_0 , определение которого завершает выбор искомого решения. Таким образом, отличие от рассмотренного выше случая $a(E) \equiv 0$ состоит в следующем. При $a(E) = 0$ особая точка (E_2, ρ_0) представляет собой центр и условию (4.7) выбирает одну из множества замкнутых траекторий, а скорость однозначно связана с плотностью полного тока соотношением (4.5). При $a(E) \neq 0$ существует лишь конечное число замкнутых траекторий и условию (4.7) можно удовлетворить, варьируя значение параметра u_0 , который теперь уже не связан с плотностью полного тока J соотношением (4.5).

Отметим одну нестрогость рассуждения: при определенных видах зависимости $a(E)$ замкнутого предельного цикла, удовлетворяющего всей совокупности накладываемых условий, может и не быть, — мы же исходили из предположения, что он существует. Действительно, согласно (4.2), искомое решение должно удовлетворять следующим двум условиям:

$$\left. \begin{aligned} \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} dE \frac{J - u_0 \rho_0 - a(E) E \rho_1^2(E)}{D(E) \rho_1(E)} = 0, \\ \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} dE \frac{J - u_0 \rho_0 - a(E) E \rho_2^2(E)}{D(E) \rho_2(E)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

где $\rho_1(E)$ и $\rho_2(E)$ — два решения уравнения (4.2), причем $\rho_1(E_{\min}) = \rho_2(E_{\min}) = \rho_1(E_{\max}) = \rho_2(E_{\max}) = \rho_0$. Конкретный анализ формы и скорости домена с учетом условий (4.15) можно провести, лишь используя явный вид зависимостей $\mu(E)$, $D(E)$, что и было выполнено в работах [9, 16, 17] путем численного расчета в рамках определенных моделей.

До сих пор мы считали плотность полного тока J фиксированной. При произвольном электрическом режиме цепи параметр J , а с ним и конкретный вид

фазового портрета определяются из закона Кирхгофа (1.4); последний можно переписать в виде

$$JR + \frac{\varepsilon}{4\pi} \oint \frac{E dE}{\rho - \rho_0} = \mathcal{E}. \quad (4.16)$$

Интеграл в левой части (4.16) берется по замкнутой траектории, удовлетворяющей условию (4.7).

§ 5. Вольтамперная характеристика образца с доменом. Некоторые возможные приложения

Результаты предыдущих параграфов позволяют найти вид вольтамперной характеристики образца, содержащего стационарно движущийся домен. Под последней мы будем понимать зависимость плотности полного тока в образце J от средней напряженности поля \bar{E} , равной отношению падения напряжения на образце V к его длине. Будем считать, что характеристика однородного образца имеет вид, схематически представленный на рис. 3, а. Рассмотрим для простоты случай $D = \text{const}$ [$a(E) = 0$]; в рамках рассматриваемой модели учет термоэлектрического тока не составляет труда и, как правило, не приводит к существенному изменению результатов.

Удобно строить вольтамперную характеристику образца с доменом, находя значения \bar{E} , отвечающие данному J . Обозначим через j_s плотность тока, при которой сепаратрисы одного из седел попадают во второе; согласно правилу площадей (4.10) величина j_s определяется равенством

$$\int_{E_1}^{E_3} dE [\rho_0 \mu(E) E - j_s] = 0. \quad (5.1)$$

Тогда при $j_s < J < j_p$ в предельном случае длинного образца домен будет описываться траекторией, содержащей особую точку (E_1, ρ_0) (траектория типа δ на рис. 43, б). Иначе говоря, мы имеем узкий домен сильного поля. Очевидно, в таких условиях средняя напряженность поля в образце близка к E_1 , поскольку в подавляющей части образца напряженность поля почти постоянна: $E \approx E_1$. В образце конечной длины \bar{E} будет отличаться от E_1 и отличие это будет тем большим, чем

меньше плотность полного тока J . Действительно, при уменьшении J возрастают расстояние между особыми точками (E_1, ρ_0) и (E_2, ρ_0) , равно как и напряженность поля в домене (и, вообще говоря, ширина последнего). При некоторых значениях J за счет возрастания ширины домена и напряженности поля в нем избыточное падение напряжения на домене оказывается сравнимым с падением напряжения в области слабого поля; при этом величина \bar{E} начинает заметно отличаться от E_1 .

В предельном случае бесконечно длинного образца заметное различие между величинами E_1 и \bar{E} может иметь место, лишь если ширина домена, d , велика и домен занимает конечную часть образца (траектория α , α' на рис. 45, б). В этом случае, в пренебрежении малым вкладом доменных стенок, мы имеем

$$\bar{E} = \frac{E_1(L - d) + E_3d}{L}. \quad (5.2)$$

При наличии в образце широкого домена изменение приложенного напряжения вызывает лишь изменение ширины домена, а плотность стационарного полного тока, равная j_s , остается постоянной («насыщение» тока в образце со стационарно движущимся доменом). Однако в образце конечной длины отмеченное постоянство плотности полного тока может иметь место не только при наличии широкого домена с плоским верхом. Так, в арсениде галлия, в силу отмеченной в § 1.2 особенности характеристики однородного материала, плотность полного тока практически постоянна уже при напряжениях вблизи порога; форма домена при этом близка к треугольной. В работе [18] отмеченное постоянство плотности тока было предложено использовать для создания стабилизатора тока. Заметим, что в реальном кристалле, генерирующем колебания за счет появления и исчезновения доменов, речь, разумеется, идет о постоянстве тока в среднем по времени.

Вид зависимости $J(\bar{E})$ в образце большой, но конечной длины схематически изображен на рис. 50. Соответствующая характеристика однородного образца в области $E_p < E < E_v$ показана пунктиром. Ход кривой $J(\bar{E})$ в области $j_v < J < j_s$ можно исследовать с помощью рассуждений, полностью эквивалентных изложенным

выше. В дальнейшем, однако, мы будем, как правило, рассматривать явно только домены сильного поля. Движущиеся домены слабого поля, по-видимому, до сих пор не удалось наблюдать; в материалах типа n -GaAs это может быть связано с фактическим видом характеристики однородного образца.

Заметим, что различие между E_1 и \bar{E} при заданном J , вообще говоря, возрастает при уменьшении длины

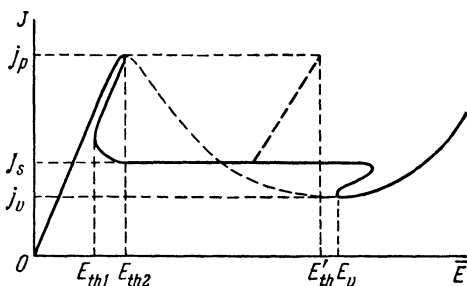


Рис. 50. Вольтамперная характеристика образца с доменом.

образца. В самом деле, траектория при этом приближается к средней особой точке, так что относительная длина участка сильного поля возрастает. В очень коротких образцах (с длинами порядка «периода» обхода траектории, близкой к средней особой точке) вольтамперная характеристика выглядит несколько иначе — с уменьшением амплитуды домена она приближается к характеристике однородного образца, поскольку $\bar{E} \rightarrow E_2$ (см. § 6). Однако в столь коротких образцах возможность даже приближенно использовать периодические граничные условия не очевидна, и получаемые при этом результаты могут иметь лишь иллюстративный характер.

При рассмотрении формы характеристики образца с доменом иногда бывает удобно воспользоваться несколько иным подходом. Найдем вначале зависимость максимального поля в домене от плотности полного тока с помощью графического метода, основанного на использовании правила площадей (4.10) [5, 9, 17]. Для длинного образца можно приближенно считать $E_{\min} = E_1$. В этих условиях максимальное поле в домене непосред-

ственно определяется с помощью построения, указанного на рис. 51, а. Равенство заштрихованных на рисунке площадей определяет E_{max} как функцию E_1 (т. е. как функцию дрейфовой скорости в слабом поле). График

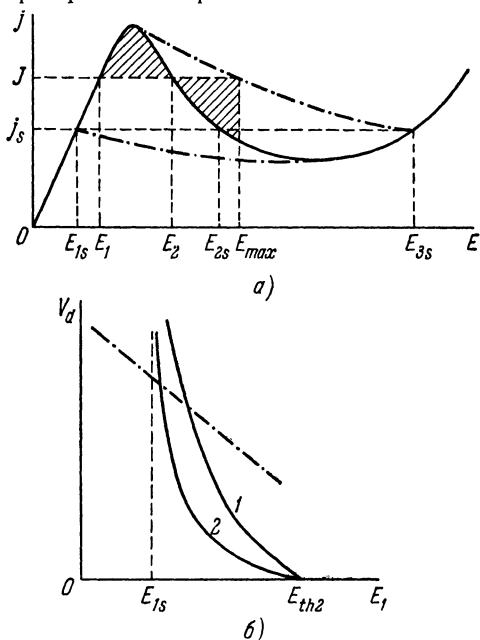


Рис. 51. К построению вольтамперной характеристики образца с доменом.

а) Графическое определение экстремальных значений напряженности поля в домене, б) зависимость избыточного падения напряжения, V_d , от напряженности поля вне домена. Кривые 1, 2 отвечают различным значениям ρ_0 , $\rho_0^{(2)} > \rho_0^{(1)}$. Штрих-пунктиром изображена прямая $V - E_1 L$.

этой зависимости изображен на рис. 51, а верхней штрих-пунктирной кривой (нижняя штрих-пунктирная кривая описывает зависимость E_{min} от дрейфовой скорости для доменов слабого поля).

Величина

$$V_d(E_1) = \int_0^L dz [E(z) - E_1] = \oint dE (E - E_1) \left(\frac{dE}{dz} \right)^{-1} \quad (5.3)$$

представляет собой избыточное напряжение на домене. Определив зависимость V_d от напряженности поля вне домена, т. е. от дрейфовой скорости, мы, по существу, найдем вольтамперную характеристику образца с доменом, поскольку

$$\bar{E} = \frac{V}{L} = E_1 + \frac{1}{L} V_d(E_1) = \bar{E}(J), \quad (5.4)$$

или

$$V_d(E_1) = V - E_1 L. \quad (5.4')$$

Зависимость $V_d(E_1)$ можно получить путем численного расчета, задавая явный вид функции $\mu(E)E$ [5, 17]. Типичные зависимости $V_d(E_1)$ приведены на рис. 51, б для различных значений ρ_0 (т. е. для различных j_s). Используя соотношение (5.4) и кривые $V_d(E_1)$, мы вновь приходим к кривой $J(\bar{E})$, изображенной на рис. 50. Для этого достаточно провести на рис. 51, б прямую $V - LE_1$. Точки пересечения ее с кривыми $V_d(E_1)$ отвечают значениям напряженности поля E_1 вне домена при средней напряженности $\bar{E} = v/L$. Экспериментальные измерения характеристики образца с доменом и зависимости $V_d(E_1)$ действительно приводят к кривым типа изображенных на рис. 50, 51, б [21].

Следует отметить, что в некотором интервале значений V возможно появление двух точек пересечения, если кривая $V_d(E_1)$ подходит к точке E_p с наклоном, меньшим наклона прямой $V - E_1 L$. Это отвечает наличию двух возможных состояний образца с доменом при некоторых V (при $E_{th1} < \bar{E} < E_{th2}$ на рис. 50). Таким образом, как видно из рис. 50, в указанном интервале значений \bar{E} возможны три различных состояния системы — однородное и два неоднородных (со стационарно движущимися доменами). (Устойчивость этих состояний и некоторые их свойства будут рассмотрены ниже в § VII. 5).

Учет термоэлектрического тока не изменяет основных качественных результатов, коль скоро не изменяется существенным образом топология фазового портрета. Действительно, в работе [19] были проведены численные расчеты с учетом зависимости коэффициента диффузии от поля на основе уравнения (4.2). Основные выводы при этом сохраняли силу, некоторое отличие сводилось лишь к небольшому ($\leq 25\%$) отличию скорости домена

u_0 от дрейфовой скорости вне домена и появлению зависимости u_0 от приложенного напряжения.

В образцах арсенида галлия с достаточно малым удельным сопротивлением максимальная напряженность поля в домене может превысить порог ударной ионизации «зона — зона» ($\geq 10^5$ в/см) [20]*). В поле с напряженностью такого порядка в образце начинается генерация электронно-дырочных пар; стационарность движения домена при этом нарушается. За счет генерации пар напряжение, падающее на домене, начинает уменьшаться, а ток через образец и напряженность поля вне домена — возрастать со временем; при этом увеличивается и уровень шумов [21]. Система при этом выходит на вторую возрастающую ветвь, обозначенную на рис. 50 штрихами. Эта ветвь соответствует наличию в образце «ослабленного» за счет генерации пар домена и последовательно соединенной однородной части образца. Когда напряженность поля в однородной части образца превысит E_{th2} , возможно появление второго домена ($E > E'_{th}$). В высокоомном GaAs максимальное поле в домене может оказаться недостаточным для начала ударной ионизации (для образцов длиной от 0,1 до 0,25 см критическое значение удельного сопротивления составляет около 1 ом·см [20]). Это связано с тем, что при уменьшении средней концентрации носителей медленнее меняется напряженность поля в области почти полного обеднения. Соответственно при заданном падении напряжения на домене меньшим будет и максимальное поле в домене, форма которого близка к треугольной.

Отметим, что вид вольтамперной характеристики образца с доменом, очевидно, не зависит непосредственно от конкретного механизма ОДП; в частности, для образца со стационарно движущимся рекомбинационным доменом вид ее будет подобным рассмотренному здесь.

Принятая выше трактовка стационарного движения доменов в ряде случаев оказывается непосредственно

*) Заметная генерация электронно-дырочных пар при эффекте Ганна имеет место и в некоторых других полупроводниках: CdTe [22, 23], ZnSe [24], InSb [25]. В некоторых случаях (например, в *n*-CdTe [26]) в условиях интенсивной генерации пар наблюдалось образование токовых шнуров, отвечающее наличию S-образного отрезка на характеристике (см. гл. VI).

применимой и к исследованию движения доменов в неоднородно легированных образцах [27]. Действительно, если характерный размер неоднородности велик по сравнению с размером домена d , т. е. если напряженность поля вне домена мало меняется на длине d , то домен ведет себя так же, как и в однородном бесконечном образце, характеристики которого отвечают точке расположения домена. Распределение поля в образце, таким образом, можно приближенно представить в виде суммы медленно меняющейся функции $E_1(x)$, отражающей профиль неоднородности, и напряженности поля, отвечающей бегущему домену. Характеристики домена, в частности максимальное поле в нем и избыточное напряжение на домене, определяются через $E_1(x)$ с помощью кривых типа изображенных на рис. 51. В области плавного изменения напряженности поля (вне домена) диффузионным током и током смещения можно пренебречь и

$$J \approx en(x) \mu E_1(x). \quad (5.5)$$

Пусть домен в некоторый момент времени t_0 находится в точке x_0 , тогда в силу постоянства плотности полного тока имеем

$$E_1(x) = \frac{n(x_0) E_1(x_0)}{n(x)}.$$

В области вне домена пространственный заряд пренебрежимо мал и концентрация свободных носителей $n(x)$ близка к концентрации легирующей примеси. Будем считать, что зависимость избыточного напряжения на домене от E_1 и n (рис. 51, б) известна. Тогда для произвольного момента времени t'_0 , когда домен находится в точке $x'_0 = x_0 + u_0(t'_0 - t_0)$ образца, величины $E_1(x'_0)$ и $V_d[E_1(x'_0), n(x'_0)]$ находятся из уравнения

$$V = V_d + n(x'_0) E_1(x'_0) \int_0^L \frac{dx}{n(x)}. \quad (5.6)$$

Заметим, однако, что в условиях, когда рабочая точка находится на участке насыщения тока вольтамперной характеристики образца с доменом, напряженность поля $E_1(x'_0)$ в точке расположения домена сла-

бо зависит от $n(x'_0)$, т. е. от величины концентрации легирующей примеси в этой точке. Действительно, коль скоро напряженность поля $E_1(x'_0)$ близка к E_{1s} , кривые $V_d(E_1)$ идут почти вертикально (рис. 51, б). По этой причине, как видно из уравнения (5.6), изменения величины $n(x'_0)$ при движении домена компенсируются в основном изменением величины V_d , а вариации величины $E_1(x'_0)$ малы. Последнее означает, что плотность полного тока приблизительно пропорциональна концентрации легирующей примеси в той точке, в которой в данный момент находится домен, т. е.

$$J(t) \approx en[x_0 + u_0(t'_0 - t_0)]\mu E_{1s}.$$

Соответствующие расчеты подтверждают, что при E не слишком близких к E_{th1} имеет место почти линейная зависимость между изменениями тока в цепи и изменениями концентрации в точке расположения домена (разумеется, мы предполагаем, что условия существования домена не нарушаются). В результате изменение тока во внешней цепи будет почти линейно повторять «рельеф» неоднородности.

Далее, нетрудно убедиться, что форма импульса тока будет отражать изменение поперечного сечения $S(x)$ однородно легированного образца. Действительно, пренебрегая по-прежнему диффузионным током и током смещения в области плавного изменения сечения, имеем

$$en_0\mu E(x)S(x) = j(x)S(x), \quad (5.7)$$

где величина $j(x)S(x)$ есть не что иное, как сила тока, не зависящая от x . Соответственно соотношение (5.7) совпадает по форме с соотношением (5.5), если ввести величину $n(x) = n_0S(x)$. Остаются в силе и все полученные ранее выводы; именно, зависимость тока от времени во внешней цепи определяется формой образца.

Неоднородность на пути движения домена может, очевидно, быть получена не только неоднородным легированием или изменением поперечного сечения образца, но и некоторыми другими способами: освещением отдельных его участков, созданием локальных электрических полей, изменением свойств поверхности. Использование указанных способов воздействия на распространение домена в образце лежит в основе действия

функциональных интегральных схем доменного типа (DOFIC — domain originated functional integrated circuits).

Отметим некоторые из приборов, основанных на данном принципе и уже описанных в литературе: генератор с частотой, зависящей от напряжения [29], генераторы импульсов тока произвольной формы [30], генераторы с изменяемой формой импульсов тока [31—33] (приборы такого типа могут быть использованы для скоростного считывания световых изображений [34]), аналого-цифровой преобразователь [35], различные устройства для реализации логических операций «и», «включающее или», «исключающее или» [36, 37] (последние существенно используют тот факт, что возникновение домена представляет собой пороговый эффект) и т. д. В цитированных работах использовались домены дрейфового происхождения (эффект Ганна); аналогичные приборы, однако, могут быть основаны и на использовании доменов другой природы, например звукоэлектрических, рассматриваемых в главе VIII.

§ 6*. Нелинейные волны малой амплитуды [10]

Аналитическое решение уравнений (2.14) и (2.16) весьма затруднительно, тем более, что явный вид функций $\mu(E)$ и $D(E)$ известен недостаточно хорошо. По этой причине известный интерес может представить приближенное исследование решений некоторого специального типа — волн малой амплитуды. В этом случае решение удастся найти с помощью, например, метода Крылова — Боголюбова [38], причем вместо неизвестных функций в ответ входят лишь несколько неизвестных параметров.

Ограничимся случаем дрейфовой нелинейности и перепишем уравнения (2.14) и (2.16) в виде

$$\frac{dE}{dz} = \frac{4\pi}{e}(\rho - \rho_0), \quad (6.1a)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho(\mu^*E - u_0)}{D} - \frac{c}{D} \equiv Q(E, \rho). \quad (6.1b)$$

Здесь, как и раньше, постоянная c дается формулой (2.15). Поскольку предельный цикл должен окружать особую точку (E_2, ρ_0) (рис. 43, в), ясно, что в рассматри-

ваемом случае напряженность поля и плотность заряда должны быть близки соответственно к E_2 и ρ_0 . Положим поэтому

$$E = E_2(1 + u), \quad \rho = \rho_0(1 + v), \quad (6.2)$$

где $u, v \ll 1$ и функции u, v — одного порядка. (Из окончательного вида решения в дальнейшем можно будет явно определить соответствующий малый параметр.) Удобно при этом измерять длину в единицах

$$z_0 = \frac{\varepsilon E_2}{4\pi\rho_0}, \quad (6.3)$$

полагая

$$z = z_0\xi. \quad (6.4)$$

Подставляя (6.2)—(6.4) в (6.1a), (6.1б), приходим к следующему уравнению второго порядка для u :

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \beta^2u = \varphi\left(u, \frac{du}{d\xi}, c\right), \quad (6.5)$$

где «частота» β дается выражением

$$\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon E_2^2}{4\pi\rho_0} \left[-\frac{d}{dE} \left(\frac{\mu E - u_0}{D} \right) - \frac{c}{\rho_0} \frac{1}{D} \frac{dD}{dE} \right]_{E=E_2}}, \quad (6.6)$$

а функция $\varphi(u, du/d\xi, c)$ очевидным образом определяется названными соотношениями.

Правую часть равенства (6.1б) (и соответственно функцию $\varphi(u, du/d\xi, c)$) можно разложить по степеням малых величин, ограничиваясь членами до третьего порядка включительно. Постоянный член в этом разложении отсутствует, поскольку $Q(E_2, \rho_0) = 0$ ((E_2, ρ_0) — особая точка), а линейный член, пропорциональный u , выделен в (6.5) явно. Таким образом, разложение функции $\varphi(u, du/d\xi, c)$ имеет вид

$$\varphi\left(u, \frac{du}{d\xi}, c\right) = \alpha_{01}v + \alpha_{20}u^2 + \alpha_{11}uv + \alpha_{02}v^2 + \\ + \alpha_{30}u^3 + \alpha_{21}u^2v + \alpha_{12}uv^2 + \dots, \quad (6.7)$$

где $\alpha_{ij} = (z_0/\rho_0)Q_{ij}$, а Q_{ij} — коэффициенты разложения функции $Q(E, \rho)$:

$$Q[E_2(1 + u), \rho_0(1 + v)] = \sum_{i,j} Q_{ij}u^i v^j.$$

Так, например, коэффициент α_{01} равен

$$\alpha_{01} = \frac{cz_0}{\rho_0 D} - \frac{4\pi}{\varepsilon} z_0 \rho_0 \frac{1}{D} \frac{dD}{dE} \Big|_{E=E_2}, \quad (6.8)$$

а $\alpha_{03} = 0$.

В соответствии с общим методом [38] будем искать решение в виде

$$u = A \cos \chi + u_1(A, \chi) + u_2(A, \chi) + \dots \quad (6.9)$$

Здесь $u_1(A, \chi)$, $u_2(A, \chi)$ — периодические функции угла χ с периодом 2π (не содержащие основной гармоники), а величины A и χ как функции ξ определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dA}{d\xi} = K_1(A) + K_2(A) + \dots, \quad (6.10a)$$

$$\frac{d\chi}{d\xi} = \beta + B_1(A) + B_2(A) + \dots \quad (6.10б)$$

Величина $B_1(A)$ линейна по амплитуде, величины $u_1(A, \chi)$, $K_1(A)$, $B_2(A)$ квадратичны, величины $u_2(A, \chi)$, $K_2(A)$ пропорциональны A^3 и т. д. Записывая подобное разложение, мы явно считаем, что член $\alpha_{01}v$ в разложении (6.7) мал по сравнению с $\beta^2 u$, т. е. что $\alpha_{01} \ll \beta^2$. Справедливость этого предположения будет проверена в дальнейшем, когда мы явно определим параметр c , входящий в выражение (6.8). Приравнявая нулю правую часть равенства (6.10a), найдем связь константы c с амплитудой стационарной волны (радиусом предельного цикла) A_0 . Подставляя ее затем в правую часть (6.10б) и интегрируя получающееся уравнение, получим выражение для периода нелинейных колебаний.

Подставляя разложение (6.9) в уравнение (6.5) и собирая члены одного порядка, приходим к следующей цепочке уравнений:

$$\begin{aligned} \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi^2} + u_1 \right) &= \varphi_0(A, \chi) + 2\omega K_1 \sin \chi + 2\omega A B_1 \cos \chi, \\ \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \chi^2} + u_2 \right) &= \varphi_1(A, \chi) + 2\omega K_2 \sin \chi + 2\omega A B_2 \cos \chi, \\ &\dots \end{aligned} \quad (6.11)$$

где

$$\varphi_0(A, \chi) = -A\beta\alpha_{01} \sin \chi + \alpha_{20}A^2 \cos^2 \chi - \\ - \alpha_{11}A^2\beta \sin \chi \cos \chi + \alpha_{02}A^2\beta^2 \sin^2 \chi, \quad (6.12a)$$

$$\varphi_1(A, \chi) = Au_1(A, \chi)(\alpha_{20} \cos \chi - \alpha_{11}\beta \sin \chi) + \\ + \left(K_1 \cos \chi - AB_1 \sin \chi + \beta \frac{\partial u_1}{\partial \chi}\right)(\alpha_{01} + \alpha_{11}A \cos \chi - \\ - 2\alpha_{02}A\beta \sin \chi) + \alpha_{30}A^3 \cos^3 \chi - \alpha_{21}A^3\beta \sin \chi \cos^2 \chi + \\ + \alpha_{12}A^3\beta^2 \sin^2 \chi \cos \chi + \left(AB_1^2 - K_1 \frac{dK_1}{dA}\right) \cos \chi + \\ + \left(2K_1B_1 + K_1 \frac{dB_1}{dA} A\right) \sin \chi - \\ - 2\omega K_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial A \partial \chi} - 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi^2}. \quad (6.12б)$$

Используя фурье-разложения функций, входящих в уравнения (6.11), можем явно найти величины K_1 , K_2 , B_1 и B_2 . Соответствующие выкладки элементарны, но несколько громоздки; мы приведем лишь окончательный результат. С точностью до членов второго порядка по A включительно уравнение для амплитуды имеет вид

$$\alpha_{01} + \frac{A_0^2}{4\beta^2} [\alpha_{11}(\alpha_{20} + \beta^2\alpha_{02}) + \beta^2\alpha_{21}] = 0, \quad (6.13)$$

а «частота» обхода предельного цикла β_i дается выражением

$$\beta_i = \beta - \frac{A_0^2}{24\beta^3} [10\alpha_{20}(\alpha_{20} + \beta^2\alpha_{02}) + \beta^2\alpha_{11}^2 + 4\beta^4\alpha_{02}^2] - \\ - \frac{1}{\beta} (\alpha_{01}^2 + 3A_0^2\alpha_{30} + A_0^2\beta^2\alpha_{12}). \quad (6.14)$$

Далее, для u_1 получается

$$u_1 = \frac{A_0^2}{2\beta^2} \left\{ (\alpha_{20} - \beta^2\alpha_{02}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} [(\alpha_{20} - \beta^2\alpha_{02}) \cos 2\chi - \beta\alpha_{11} \sin 2\chi] \right\}. \quad (6.15)$$

Из равенства (6.13) непосредственно видно, что предположение о малости α_{01} действительно выполняется, поскольку $\alpha_{01} \sim A^2$ *).

Согласно формуле (6.14), для достаточно гладкой вольтамперной характеристики «частота» β_t уменьшается с возрастанием амплитуды. Переходя вновь к размерным величинам с помощью (6.4), мы находим, что период равен

$$l = \frac{2\pi z_0}{\beta_t} \approx \frac{2\pi z_0}{\beta} \left[1 + \frac{A_0^2}{2\beta^2} \left(\frac{5}{6\beta^2} \alpha_{20}^2 + \frac{1}{12} \alpha_{11}^2 + \frac{3}{4} \alpha_{30} \right) \right]. \quad (6.16)$$

С другой стороны, согласно условию (4.7), период должен равняться L/m , где m — целое положительное число. При заданном m равенство

$$L = ml \quad (6.17)$$

определяет амплитуду A_0 . Разумеется, для того чтобы построенное разложение было справедливо, необходимо, чтобы величина A_0 , определяемая из (6.17), была мала, т. е. чтобы длина образца не сильно отличалась от ml_{\min} , где l_{\min} — минимальный период:

$$l_{\min} = 2\pi z_0/\beta. \quad (6.18)$$

Комбинируя формулы (6.16) и (6.17), мы получаем

$$A_0^2 = \left(\frac{L}{ml_{\min}} - 1 \right) \left(\frac{5}{12\beta^4} \alpha_{20}^2 + \frac{1}{24\beta^2} \alpha_{11}^2 + \frac{3}{8\beta^2} \alpha_{30} \right)^{-1}. \quad (6.19)$$

По условию применимости расчета эта величина должна быть мала. Полагая для оценки $\alpha_{11} = -\beta^2$, $\alpha_{20} \sim \alpha_{30} \sim \beta^2$, $d|\sigma|/dE \sim |\sigma|/E$, $d^2|\sigma|/dE^2 \sim |\sigma|/E^2$ и считая в соответствии с § II.2, что $(eEL/T) \gg 1$, находим соответствующий малый параметр

$$\left| \frac{L}{ml_{\min}} - 1 \right| \ll 1. \quad (6.20)$$

Используя полученные выражения, найдем теперь разность между средней напряженностью поля в образце

*) Заметим, что в пренебрежении термоэлектрическим током выражение в квадратных скобках в (6.13) тождественно обращается в нуль. Это означает, что в принятом приближении постоянная c обращается в нуль. Амплитуда A_0 при этом определяется, как и в общем случае, из условия (4.7) (см. ниже).

\bar{E} и напряженностью поля в особой точке (E_2, ρ_0) . Очевидно, эта величина определяет различие в характеристиках образца с рассматриваемыми нелинейными волнами и однородного образца. Согласно (6.15), мы имеем

$$\bar{E} = \frac{E_2}{L} \int_0^L (1 + u) dz = E_2 + \frac{A_0^2}{2\beta^2} (\alpha_{20} + \beta^2 \alpha_{02}) E_2. \quad (6.21)$$

Может оказаться, что неравенство (6.20) выполняется для нескольких соседних мод. Таким образом, в принципе возможно распространение в образце нескольких волн малой амплитуды с разными пространственными периодами. Для скорости домена мы имеем, согласно (2.15),

$$u_0 = \frac{c}{\rho_0} + \mu(E_2) E_2. \quad (6.22)$$

Мы видим, что скорости распространения различных мод отличаются друг от друга величинами второго порядка малости*). Соответственно несколько различными (и, вообще говоря, несоизмеримыми) будут и частоты колебаний.

Экспериментальные проявления этого эффекта зависят, разумеется, от решения вопроса об устойчивости рассматриваемых мод. Как будет показано в главе VII, решения с $m \geq 2$ оказываются неустойчивыми. Это означает, что они могут реализоваться только при работе в импульсном режиме, проявляясь, например, в виде повышенного уровня шумов.

§ 7. Рекомбинационная нелинейность.

Качественное исследование модели с одним типом ловушек [7, 40]

Принципиальные особенности явлений, обусловленных рекомбинационной нелинейностью, удобно выяснить на простой модели, приведенной в § 1.3. В ней предполагается, что существуют ловушки лишь одного типа, концентрация которых есть N ; в равновесии $(\rho_{t0}/e) \equiv N_0^-$ из них заполнены электронами. Коэффициент захвата

*) Из сказанного ясно, что изложение этого вопроса в обзоре [39] ошибочно.

электронов ловушкой $c(E)$ возрастает с увеличением напряженности электрического поля, в результате чего происходит перераспределение электронов между зоной проводимости и ловушками. При достаточно интенсивном захвате «разогретых» электронов это ведет к возникновению ОДП.

В принципе разогрев электронного газа сопровождается и изменением кинетических коэффициентов — подвижности и коэффициента диффузии. Однако, как показывает опыт, в Ge, легированном золотом или медью [3, 4, 41], полевая зависимость сечения захвата $c(E)$ на отрицательно заряженные центры оказывается значительно более резкой, нежели зависимости $\mu(E)$ и $D(E)$. Поэтому последними имеет смысл для начала пренебречь.

Систему уравнений, описывающих искомое римановское решение, составляют уравнения (2.14), (2.16) и (2.17). В последнем следует опустить излишний здесь индекс i и использовать определения (1.9) и (1.10). Учитывая также постоянство μ и D , мы можем перейти к следующим уравнениям траекторий в фазовом пространстве переменных (E, ρ, ρ_e) :

$$\frac{d\rho_e}{dE} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\rho_e \mu E - J - u_0(\rho - \rho_0)}{D(\rho - \rho_0)}, \quad (7.1)$$

$$\frac{u_0}{c_0} \frac{d\rho_t}{dE} = \frac{\varepsilon}{4\pi(\rho - \rho_0)} \left[n_1 \rho_t - \rho_e \left(N - \frac{\rho_t}{e} \right) v(E) \right], \quad (7.2)$$

$$\rho = \rho_t + \rho_e, \quad (7.3)$$

$$\rho_0 = \rho_{t0} + \rho_{e0}. \quad (7.4)$$

Переход от решений данной системы к распределениям интересующих нас величин в пространстве совершается, как и прежде, с помощью уравнения Пуассона. В качестве граничных условий по-прежнему будем использовать вытекающие из условия периодичности (2.18) требования замкнутости траекторий и соотношение (4.7). Удобно, также как и в §§ 3, 4, определить сначала решение при некотором значении плотности полного тока J , а затем связать его с помощью закона Кирхгофа с заданным значением эдс \mathcal{E} .

Явное решение нелинейной системы (7.1) — (7.3) весьма затруднительно, даже при известном аналитическом виде функции $v(E)$, о котором пока нет достаточно пол-

ных экспериментальных данных. С другой стороны, для понимания процессов, протекающих в объеме типичного полупроводника с доменом, нам и не требуется искать общее решение данной системы при произвольных значениях параметров задачи. Интересуясь основными свойствами доменов, такими как их форма и скорость, полезно с самого начала установить порядок различных физических величин, входящих в (7.1) — (7.4). При оценках будем ориентироваться на условия опытов [3, 42] с Ge, легированным золотом при температурах около 20°K. Тогда типичные значения параметров таковы:

$$\left. \begin{aligned} \mu &\approx 5 \cdot 10^3 \frac{\text{см}^2}{\text{в} \cdot \text{сек}}, & D &\approx 10 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}, \\ \varepsilon &= 16, & c_0 &\sim 10^{-12} \text{ см}^3/\text{сек}, \\ (\rho_{0e}/e) &\sim 10^{10} \text{ см}^{-3}, & (\rho_{t0}/e) &\sim (N - \rho_{t0}/e) \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Таким образом, с большим запасом выполняется неравенство

$$(\rho_e/\rho_t) \ll 1, \quad (7.6)$$

если только не происходит полного опустошения ловушек. В данном случае это не имеет места, в чем можно убедиться, оценив по максимуму величину $|\rho_t - \rho_{t0}|$ из уравнения (7.2). Действительно, допустим, что объемный заряд практически обеспечивается изменением концентрации только связанных электронов. Намеренно завышая оценку отбрасыванием одного из членов $(\rho_e(N - \rho_t/e)v(E))$, входящих в правую часть (7.2) с противоположными знаками, получим

$$\frac{|\rho_t - \rho_{t0}|}{\rho_{t0}} \leq \sqrt{\frac{2(E_{\max} - E_{\min})}{\rho_{t0}} \frac{e c_0 n_1}{4\pi u_0}} \approx 10^{-2} \ll 1. \quad (7.7)$$

Для скорости домена u_0 здесь взято оценочное значение 10^{-2} см/сек. Неравенства (7.6) и (7.7) позволяют нам заменить в первом приближении величины ρ_t и $(N - \rho_t/e)$ в правой части (7.2) их равновесными значениями. Кроме того, из (7.5), (7.6) вытекает, что для типичных значений скорости $u_0 \leq 10^{-1}$ см/сек ток смещения мал, т. е. можно опустить слагаемое с $u_0(\rho - \rho_0)$ в правой части уравнения (7.1)

Дальнейшие упрощения возможны, вообще говоря, уже не во всем интересующем нас интервале значений E . Для достаточно больших напряженностей электрического поля справедливо условие (II.6.9), и диффузионная составляющая плотности тока мала по сравнению с дрейфовой. При этом имеет место следующее приближенное решение уравнения (7.1) для ρ_e :

$$\rho_e \approx \frac{J}{\mu E} + \frac{4\pi D}{e} \frac{J}{\mu^2 E^3} (\rho_0 - \rho). \quad (7.8)$$

Использование выражения (7.8) [8] фактически понижает порядок исследуемой системы уравнений и позволяет свести задачу к исследованию возможных траекторий на фазовой плоскости переменных (E, ρ) , подобно тому как это делалось в § 3. При этом, однако, рассматривается не что иное, как проекция семейства траекторий системы (7.2), (7.3) в фазовом пространстве (E, ρ, ρ_e) на поверхность, определяемую равенством (7.8). В области небольших полей истинные траектории не лежат на этой поверхности, и возможна ошибка в определении характера решений различного типа и интервалов значений параметров, в которых они существуют. Поэтому исследование совокупности решений системы (7.1)—(7.3) начнем с анализа поведения траекторий вблизи особых точек системы без использования равенства (7.8) (см. Приложение VI).

Положения особых точек определяются равенствами

$$\rho = \rho_0, \quad \rho_e(E_i) \equiv \rho_{ei} = \frac{J_e}{\mu E_i}, \quad (7.9)$$

$$\frac{J}{\mu E_i} \left(N - \frac{\rho_0}{e} + \frac{J}{\mu E_i} \right) v(E_i) = n_1 \left(\rho_0 - \frac{J}{\mu E_i} \right). \quad (7.10)$$

При выполнении условия (7.6) зависимость плотности тока $J(E)$ в однородном образце от напряженности поля можно записать на основании (7.10) в виде

$$J(E) \approx \mu E \frac{n_1 \rho_0}{v(E)(N - \rho_0/e) + n_1}. \quad (7.11)$$

Значения E_i , как и прежде, можно найти графически из рис. 3, а, на котором кривую $j(E)$ следует считать заданной выражением (7.11).

Определим характер расположения траекторий вблизи особых точек (E_i, ρ_0, ρ_{ei}) , отвечающих пространственно однородным состояниям. Для этого линеаризуем систему уравнений (7.1)–(7.3), считая малыми отклонения

$$\delta E = E - E_i, \quad \delta \rho = \rho - \rho_0, \quad \delta \rho_e = \rho_e - \rho_{ei}. \quad (7.12)$$

Полагая $\delta E, \delta \rho, \delta \rho_e$ пропорциональными $\exp(kz/l_D)$, где k — число (вообще говоря, комплексное), а

$$l_D = \sqrt{\varepsilon D / 4\pi\mu\rho_{e0}}, \quad (7.13)$$

легко находим *)

$$\delta \rho = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{k}{l_D} \delta E, \quad \delta \rho_e = -\frac{\rho_{ei}}{E_i} \frac{\delta E}{1 - kD/l_D\mu E_i}, \quad (7.14)$$

а для k получается уравнение

$$k^2 + \frac{\rho_{ei}}{\rho_{e0}} \frac{k}{\kappa_i - k} - \frac{r}{\kappa_i} \frac{d \ln v(E)}{d \ln E} \Big|_{E=E_i}, \quad (7.15)$$

где

$$r = \frac{c_0(N - \rho_0/e)l_D}{u_0}, \quad \kappa_i = \frac{l_D\mu E_i}{D}. \quad (7.16)$$

При отыскании корней уравнения (7.15) удобнее рассмотреть отдельно случай сильных полей, когда $\kappa_i \gg 1$, и слабых полей, когда $\kappa_i \lesssim 1$, и можно считать $v(E_1) \approx 1$. Первому случаю отвечают особые точки E_2 и E_3 . Используя типичные значения параметров (7.5), мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \kappa_i &\approx \frac{E_i}{1,5 \text{ в/см}}, & r &\approx 13 \left(\frac{10^{-2} \text{ см/сек}}{u_0} \right), \\ l_D &\approx 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ см}. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Пренебрегая в области сильных полей малыми величинами порядка $k/\kappa_{2,3}$ и используя неравенства $(\rho_e/\rho_0) \ll 1$,

*) В пренебрежении полевой зависимостью μ и D величина l_D представляет собой не что иное, как дебаевскую длину, содержащую в качестве концентрации электронов величину $n_{e0} = \rho_{e0}/e$.

$(u_0/\mu E) \ll 1$, справедливые во всей области рассматриваемых полей, находим следующие корни уравнения (7.15) ($i = 2, 3$):

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\kappa_i} - \frac{\rho_{ei}}{\rho_{e0}} \right) \pm \sqrt{\frac{r}{\kappa_i} \left(1 - \frac{d \ln v}{d \ln E} \right) \Big|_{E=E_i}}, \quad (7.18)$$

$$k_3 \approx \kappa_i \left[1 - \frac{1}{\kappa_i^2} \left(\frac{r}{\kappa_i} - \frac{\rho_{ei}}{\rho_{e0}} \right) \right]. \quad (7.19)$$

Как следует из формул (7.18), (7.19), особая точка (E_2, ρ_0, ρ_{e2}) , отвечающая падающей ветви вольтамперной характеристики однородного образца (рис. 3, *a*), представляет собой седло-фокус (см. Приложение VI). Действительно, в этой области значений напряженности поля на основании (7.11) имеем

$$1 - \frac{d \ln v(E)}{d \ln E} = v(E) \frac{\mu n_1 \rho_0}{N - \rho_0/e} \frac{dJ(E)}{dE} < 0, \quad (7.20)$$

и корни k_1 и k_2 комплексно сопряжены. Корень k_3 положителен и велик. Это значит, что для решения с k_3 отклонения от стационарного однородного распределения $E = E_2$ затухают с ростом z на расстояниях, значительно меньших длины l_D . Для решений с k_1 и k_2 напряженность поля и концентрации осциллируют, и амплитуда колебаний заметно изменяется на характерных расстояниях порядка нескольких l_D . Отметим одновременно, что описанный характер особой точки (E_2, ρ_0, ρ_{e2}) сохраняется в широком интервале изменения параметров, в частности, скорости домена u_0 . В отличие от ситуации в модели с дрейфовой нелинейностью и постоянным коэффициентом диффузии, корни k_1, k_2 здесь могут оказаться чисто мнимыми лишь случайно.

Далее, особая точка (E_3, ρ_0, ρ_{e3}) , отвечающая значению напряженности поля E_3 на восходящей ветви $J(E)$ (см. рис. 3, *a*), представляет собой седло. Решение, соответствующее корню k_3 , ведет себя как и вблизи E_2 . Корни k_1 и k_2 вещественны, противоположны по знаку и сравнимы по величине с единицей. Для решений с характерными длинами изменения порядка $l_D/k_1, l_D/k_2$ диффузионная составляющая плотности тока пренебрежимо мала по сравнению с дрейфовой. Соответствующие траектории лежат на поверхности, определяемой уравнением (7.8).

Обратимся теперь к случаю слабых полей, т. е. к особой точке (E_1, ρ_0, ρ_{e1}) . При этом $v(E_1) \approx 1$, ρ_{e1} практически совпадает с равновесным значением ρ_{e0} , и уравнению (7.15) можно придать следующий вид:

$$k^3 - \kappa_1 k^2 - k + r = 0. \quad (7.21)$$

Это кубическое уравнение имеет или один, или три вещественных корня k_i . Соответствующие решения (7.12), (7.14) должны описывать начальные (в области слабых полей) участки фронтов доменов сильного поля. В экспериментальных условиях наблюдаются монотонные распределения $E(z)$ вблизи $E_{\min} \approx E_1$ как на переднем, так и на заднем фронтах. Это означает, что должны существовать решения как с положительными, так и с отрицательными значениями k_i .

Нетрудно найти условия, в которых уравнение (7.21) имеет три вещественных корня. Для этого должно выполняться следующее неравенство:

$$r < r^*(\kappa_1) \equiv \frac{1}{27} [2\kappa_1^3 + 9\kappa_1 + 2\sqrt{(\kappa_1^2 + 3)^3}]. \quad (7.22)$$

Если оно удовлетворяется, мы имеем особую точку типа седло, с двумя парами входящих в него полутраекторий и одной парой выходящих.

Обсудим теперь следствия, вытекающие из условия (7.22). Параметр r обратно пропорционален скорости домена, поэтому это неравенство ограничивает снизу интервал значений u_0 , при которых нарастание поля в домене начинается плавным образом, без осцилляций. На рис. 52 приведен график функции $r^*(\kappa_1)$ и заштрихована область значений параметров κ_1 и $r < r^*$, в которой имеются три вещественных корня уравнения (7.22). При значениях параметров, близких к (7.5), неравенство (7.22), как правило, не выполняется, хотя осциллирующего нарастания напряженности поля в начальных участках фронтов, по-видимому, не наблюдается. Указанное

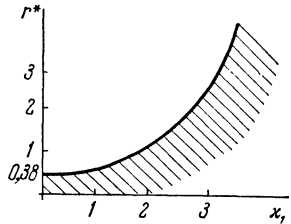


Рис. 52. Область значений параметров r^* и κ_1 , в которой особая точка (E_1, ρ_0, ρ_{e0}) есть седло (заштрихована).

противоречие, вероятно, связано с предельной идеализацией модели, учитывающей ловушки лишь одного типа. К уточнению модели в этом отношении мы вернемся ниже.

Отметим, далее, что пренебрежение диффузией при анализе характера особой точки (E_1, ρ_0, ρ_{e0}) приводит, во-первых, к потере одного корня и, во-вторых, к тому, что особая точка на фазовой поверхности $(E, \rho, J/\mu E)$ всегда оказывается седлом. При этом

$$-k_1 = k_2 = \sqrt{r/\kappa_1} \quad (7.23)$$

и не возникает никаких ограничений типа (7.22) на возможные значения параметров. Таким образом, даже если вклад диффузионной компоненты плотности тока невелик почти при всех значениях напряженности поля в домене, пренебрежение диффузией [43]*), вообще говоря, не оправдано, ибо ведет к принципиальному изменению топологии семейства траекторий. Действительно, в области значений напряженности поля вблизи E_1 вариации дрейфовой и диффузионной компонент плотности тока оказываются сравнимыми друг с другом. Используя подход, в котором влияние диффузии учитывается фактически как малое возмущение, мы должны будем помнить об ограничениях, накладываемых неравенством типа (7.22). По-видимому, приближение (7.8) можно использовать лишь для получения ориентировочных выводов при вычислении характеристик доменов, определяющихся интегралами по всей области полей в домене.

§ 8*. Форма рекомбинационного домена [40]

Будем рассматривать по-прежнему простую модель с одним типом ловушек и постоянными коэффициентами μ и D . Распределение напряженности электрического поля в пространстве, т. е. форму домена, можно считать в принципе известным, коль скоро определена зависимость ρ от E . Будем считать значения поля в домене не малыми в том смысле, что диффузионная составляющая плотности тока составляет малую часть J ; при этом допустимо использовать выражение (7.8). Комбинируя

*) См. также [39].

уравнения (7.1) и (7.2) с учетом (7.3) и (7.8) и отбрасывая слагаемые второго порядка малости по параметрам (7.6) и (7.7), получим следующее уравнение:

$$(\rho - \rho_0) \frac{d(\rho - \rho_0)}{dE} = \frac{\varepsilon c_0}{4\pi u_0} \left[n_1 \rho_0 - \left(N - \frac{\rho_0}{e} \right) \frac{J}{\mu E} v(E) \right] + \\ + (\rho - \rho_0) \left\{ \frac{\varepsilon c_0}{4\pi u_0} \left[\frac{4\pi D}{\varepsilon} \frac{J v(E)}{\mu^2 E^3} \left(N - \frac{\rho_0}{e} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{J v(E)}{e \mu E} + n_1 \right] - \frac{J}{\mu E^2} \right\}. \quad (8.1)$$

Распространяющийся домен описывается двузначным решением этого уравнения, которому на плоскости переменных (E, ρ) соответствует замкнутая траектория типа γ (рис. 43, в), пересекающая ось абсцисс в точках E_{\min} и E_{\max} , т. е.

$$\rho(E_{\min}) = \rho(E_{\max}) = \rho_0. \quad (8.2)$$

Пусть длина образца, равно как и длина области слабого поля, велика по сравнению с толщиной доменной стенки. Тогда значение E_{\min} должно практически совпадать с E_1 . Далее, в случае домена с плоской вершиной величина E_{\max} должна быть близка к E_3 .

При заданных J и u_0 экстремальные значения напряженности поля E_{\min} и E_{\max} определяются условием замкнутости фазовой траектории. Для определения параметров J и u_0 следует использовать, как и прежде условия

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint \frac{dE}{\rho(E) - \rho_0} = L, \quad (8.3)$$

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint \frac{dE E}{\rho(E) - \rho_0} = V = \mathcal{E} - JR. \quad (8.4)$$

В случае длинного образца с узким доменом сильного поля надо, очевидно, искать предельные циклы типа δ (рис. 43, б), проходящие вблизи особой точки (E_1, ρ_0) . Вместо (8.4) при этом удобно задавать величину $V_d(E_1)$ — избыточное падение напряжения на образце за счет наличия домена:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint \frac{dE (E - E_1)}{\rho(E) - \rho_0} = V_d(E_1) = V - E_1 L. \quad (8.5)$$

Для домена с плоской вершиной в длинном образце (см. рис. 46, б) интегральная кривая состоит из двух независимых траекторий (типа α и α' , рис. 45, б) — сепаратрис, соединяющих две особые точки (E_1, ρ_0) и (E_3, ρ_0) . Мы будем рассматривать в основном именно этот случай. Обозначим через $\rho_1(E)$ и $\rho_2(E)$ две ветви решения уравнения (8.1), отвечающие обогащенной и обедненной электронами областям соответственно. Функция $\rho_1(E) \geq \rho_0$ описывает задний фронт домена, а $\rho_2(E) \leq \rho_0$ — передний. Вместо условий (8.3) и (8.4) (или (8.5)) имеем

$$\rho_{1,2}(E_1) = \rho_{1,2}(E_3) = \rho_0. \quad (8.6)$$

Как $\rho_1(E)$, так и $\rho_2(E)$ могут служить решениями для бесконечно длинного образца при заданной величине плотности полного тока J . Они описывают распространение слоевых решений, которые движутся, вообще говоря, с разными скоростями. В режиме заданного напряжения необходимо существование одновременно слоев обоих типов и скорость их должна быть одинакова (фактически это и есть домен с плоской вершиной в длинном образце).

Перейдем к решению уравнения (8.1). Поскольку точное аналитическое решение его найти не удастся, воспользуемся приближенной процедурой. В первом приближении будем считать малым второй член в правой части уравнения (8.1) по сравнению с первым. Отбрасывая второй член, имеем сразу же

$$\rho_{1,2}(E) - \rho_0 = \pm [\rho^{(0)}(E) - \rho_0], \quad (8.7a)$$

$$\rho^{(0)}(E) - \rho_0 =$$

$$= \sqrt{\frac{2\epsilon c_0}{4\pi\mu_0} \int_{E_1}^E dE' \left[n_1 \rho_0 - \left(N - \frac{\rho_0}{e} \right) \frac{J}{\mu} \frac{v(E')}{E'} \right]}. \quad (8.7б)$$

Очевидно, в этом приближении домен симметричен. Используя (8.7б), можно убедиться, что рассматриваемое приближение справедливо в области не слишком малых напряженностей поля. Поскольку значения E_1 , E_3 и J связаны равенством (7.10) (или (7.11)), из условий

(8.6) непосредственно получаем последнее недостающее уравнение для определения всех указанных величин:

$$\int_{E_1}^{E_3} dE \left[n_1 \rho_0 - \left(N - \frac{\rho_0}{e} \right) \frac{J}{\mu} \frac{v(E)}{E} \right] = 0, \quad (8.8)$$

или

$$\int_{E_1}^{E_3} dE [1 - J/J(E)] = 0. \quad (8.9)$$

Последнее соотношение представляет собой аналог правила площадей (4.10). Отличие от случая дрейфовой нелинейности состоит в том, что теперь должны быть равны (см. рис. 53) площади заштрихованных участков, расположенных между кривой $1/J(E)$ и прямой, идущей на расстоянии $1/J$ от оси абсцисс. Перепишем теперь (8.8) в виде

$$J = \frac{c_0 n_1 \rho_0 (E_3 - E_1) \mu}{(N - \rho_0/e)} \left[\int_{E_1}^{E_3} \frac{c(E)}{E} dE \right]^{-1}. \quad (8.10)$$

Как E_3 , так и $c(E)$ в той области полей, которые дают основной вклад в интеграл в квадратных скобках, практически не зависят от температуры; далее, $E_1 \ll E_3$. Поэтому температурная зависимость $J(T_i)$ должна определяться поведением произведения $n_1 c_0$. В условиях опытов с германием, легированным золотом, величина n_1 в условиях тепловой генерации ведет себя как $\exp(-0,04 \text{ эв}/T_i)$, а $c_0 \sim \sim \exp(-0,017 \text{ эв}/T_i)$. Наблюдаемая зависимость отвечает, как и следует из (8.10), экспоненциальному закону с энергией активации $\sim 0,057 \text{ эв}$.

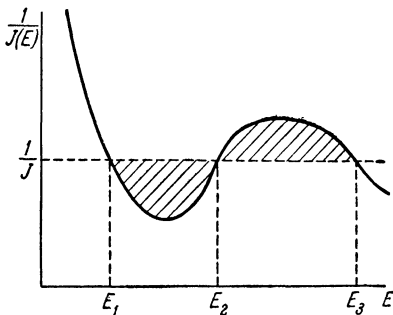


Рис. 53. Правило площадей в случае рекомбинационной нелинейности (случай длинного образца).

Заметим, что свойство симметрии рекомбинационных доменов имеет место не только для широких доменов. Действительно, выражение (8.76) с заменой в нем E_1

на E_{\min} годится и для описания периодического распределения поля с конечным периодом L . Задача в этом случае усложняется лишь необходимостью использовать для определения величин E_{\min} , E_{\max} и J интегральные соотношения (8.3), (8.4) вместо алгебраических (7.10). Это обобщение, однако, требует численного интегрирования; мы не будем в дальнейшем приводить соответствующих выражений для доменов в коротких образцах.

Для определения скорости u_0 [43—48, 40] следует учесть отброшенные ранее в (8.1) члены. Они, как видно, пропорциональны $(\rho - \rho_0)$ и имеют разный знак для двух ветвей, т. е. приводят к малой асимметрии формы домена. Представим $\rho_1(E)$ и $\rho_2(E)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\rho_1(E) - \rho_0 &= \rho^{(0)}(E) - \rho_0 + \rho^{(1)}(E), \\ \rho_2(E) - \rho_0 &= \rho_0 - \rho^{(0)}(E) + \rho^{(1)}(E).\end{aligned}\quad (8.11)$$

Вычтем одно из другого уравнения, получающиеся при подстановке (8.11) в (8.1). Получим

$$\frac{d}{dE} \{[\rho^{(0)}(E) - \rho_0] \rho^{(1)}(E)\} = [\rho^{(0)}(E) - \rho_0] A(E), \quad (8.12)$$

где через $A(E)$ обозначено выражение, стоящее в фигурных скобках в (8.1).

Решение этого уравнения для $\rho^{(1)}(E)$ должно обращаться в нуль в точках E_1 и E_3 . Отсюда легко получить следующее выражение для скорости движения домена:

$$u_0 = \frac{c_0 \int_{E_1}^{E_3} dE [\rho^{(0)} - \rho_0] \left[\frac{D}{\mu} \left(N - \frac{\rho_0}{e} \right) \frac{v(E)}{E^3} + \frac{\epsilon N}{4\pi E_1 \rho_0} \right]}{\int_{E_1}^{E_3} (\rho^{(0)} - \rho_0) \frac{dE}{E^2}}. \quad (8.13)$$

Для грубой оценки интегралов достаточно положить

$$\rho^{(0)}(E) - \rho_0 \sim \sqrt{E - E_1}$$

в области значений полей вплоть до $E \sim E_2$ и

$$\rho^{(0)}(E) - \rho_0 \sim \sqrt{E_3 - E} \quad \text{при} \quad E_2 \leq E \leq E_3,$$

где заметный вклад дает лишь член с $\epsilon N/4\pi E_1 \rho_0$. В результате находим

$$u_0 \approx \frac{c_0 D (N - \rho_0/e)}{4\mu E_1} + \frac{\epsilon c_0 E_3}{3\pi^2 e} \left(\frac{E_3}{E_1} \right)^{1/2}. \quad (8.14)$$

Если взять для численной оценки $E_1 \approx 3$ в/см, $E_3 \approx \approx 10^3$ в/см и использовать значения параметров, указанные в (6.5), то оба слагаемых в (8.14) оказываются примерно одинаковыми и дают вместе $u_0 \approx 0,1$ см/сек. Это значение на один-два порядка больше типичных данных эксперимента [42].

Далее, формула (8.14) дает лишь слабую температурную зависимость скорости домена, тогда как в условиях опытов [3, 42] u_0 зависит от температуры так же, как J , т. е. $u_0 \sim \exp(-0,057 \text{ эв}/T_1)$.

Эти факты свидетельствуют о том, что рассмотренная модель, по-видимому, неполна, хотя и позволяет получить некоторые правильные выводы относительно возможных доменных распределений для модельной системы с простейшим типом концентрационной нелинейности. При исследовании конкретного материала рассмотренная схема должна быть дополнена учетом других процессов, фактически протекающих в полупроводнике и связанных, в частности, с наличием других ловушек.

§ 9. Влияние прилипания на характеристики рекомбинационных доменов [6, 40]

В качестве примера ситуации, в которой необходимо вводить в рассмотрение дополнительные механизмы прилипания, возьмем по-прежнему конкретный случай Ge с Au, исследованный в опытах [42, 49]. Экспериментально наблюдалось прилипание на мелкие уровни в запрещенной зоне Ge; эти уровни обмениваются электронами с зоной проводимости за время, значительно меньшее характерных времен захвата и высвобождения электронов уровнями золота. Подобные уровни создаются в первую очередь самими донорами, специально вводимыми в материал для компенсации нижних акцепторных уровней золота (в таком количестве, чтобы ионы золота находились только в двух- или трехзарядных

состояниях). Таким образом, концентрация мелких ловушек достаточно велика, и несмотря на близость соответствующего уровня W_t к дну зоны проводимости, концентрация \tilde{n} электронов, находящихся на них, может заметно превосходить концентрацию свободных электронов. Так, при $N_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и $W_c - W_d = 0,01 \text{ эв}$ концентрация захваченных на доноры электронов при

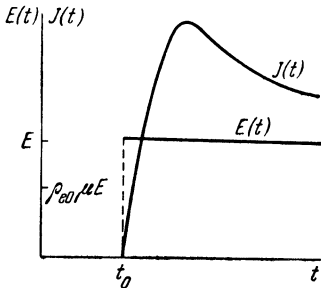


Рис. 54. Временная зависимость плотности тока в образце с центрами прилипания (схематически).

В момент $t=t_0$ подан прямоугольный импульс напряжения; $J(t) \sim \sim \exp[-(t-t_0)(N-\rho_{t0}/e)c(E)]$.

разогреве электронного газа (при напряженности греющего поля порядка нескольких десятков в/см) происходит практически полное опустошение подобных ловушек, причем почти безынерционно — по сравнению с развитием рекомбинационной неустойчивости. Это проявляется экспериментально как резкое возрастание плотности тока при подаче на образец импульса напряжения до значений, которые намного превышают величину, рассчитанную по равновесной плотности свободных электронов. Дальнейшее падение плотности тока идет медленно и связано с захватом электронов на ионы $\text{Au}^=$ (рис. 54). Поскольку установление равновесия между зоной проводимости и уровнями мелких ловушек происходит значительно быстрее, чем между зоной и уровнями Au , для описания этого эффекта достаточно ввести лишь одну величину, $\varphi(E)$, отношение суммарной концентрации электронов на всех «быстрых» ловушках \tilde{n} к concentra-

при 15°К на порядок превышает ρ_{e0}/e . При более высоких температурах аналогичную роль могут играть мелкие уровни, дальше отстоящие от дна зоны проводимости. Опыты [49] показывают, что в исследуемом материале содержалась примесь неизвестной природы с уровнем $W_t \approx W_c - 0,02 \text{ эв}$ и концентрацией порядка 10^{13} см^{-3} . При $T = 30^\circ\text{К}$ величина \tilde{n} на порядок превышает ρ_{e0}/e и растет с понижением температуры.

Сказанное относится, разумеется, к равновесным условиям. Уже при небольшом раз-

ции свободных электронов ρ_e/e . При этом не обязательно детализировать природу и относительный вклад мелких ловушек различного рода — можно использовать просто значения $\varphi(E)$, определенные из опыта. Соответственно можем положить $\varphi(0) \sim 10 - 10^3$, и $\varphi(E) = 0$ при напряженностях поля порядка десятков v/cm . Кроме того, величина \tilde{n} , по-видимому, значительно слабее зависит от температуры, нежели ρ_{e0} .

Соответствующие изменения в математической формулировке задачи сводятся к замене равенств (7.3) и (7.4) следующими:

$$\rho = \rho_t + e\tilde{n} + \rho_e = \rho_t + [1 + \varphi(E)]\rho_e, \quad (9.1)$$

$$\rho_0 = \rho_{t0} + [1 + \varphi(0)]\rho_{e0}. \quad (9.2)$$

Поскольку неравенство (7.6), которое должно теперь вместо ρ_e включать величину $[1 + \varphi(E)]\rho_e$, выполняется с большим запасом, использованные приближения по-прежнему пригодны для определения формы и скорости домена. Влияние рассматриваемого прилипания не сказывается при определении основного приближения $\rho^{(0)}(E)$, отвечающего симметричному домену, но увеличивает асимметрию и изменяет величину скорости. Чтобы учесть эффект прилипания, в выражение (8.13) для u_0 в правую часть следует добавить множитель

$$\frac{u_0\{\varphi\}}{u_0\{0\}} = \frac{\int_{E_1}^{E_3} dE (\rho^{(0)} - \rho_0) E^{-2}}{\int_{E_1}^{E_3} dE (\rho^{(0)} - \rho_0) \left[\frac{1 + \varphi(E)}{E^2} - \frac{1}{E} \frac{d\varphi(E)}{dE} \right]}. \quad (9.3)$$

Считая $\varphi(E)$ константой в той области сравнительно небольших полей, которая дает основной вклад в указанные интегралы, мы находим, что влияние прилипания уменьшает скорость домена примерно в $[1 + \varphi(0)]$ раз, т. е. на один-два порядка. По-видимому, таким путем можно объяснить расхождение между экспериментальными данными [42] и расчетами § 8 и другими оценками [40—43]. Что касается температурной зависимости скорости, то грубый характер приведенной выше оценки, связанный с необходимостью численного расчета и

отсутствием полных сведений о виде функций $v(E)$ и $\varphi(E)$, позволяет лишь сделать вывод о том, что при учете прилипания характер температурной зависимости ближе к определяемому в эксперименте, чем без него.

Далее, учет прилипания на мелкие ловушки позволяет также понять, когда возможны монотонные распределения поля в фронтах домена. Действительно, для реально наблюдаемых значений $E_{\min} = E_1$ в длинных образцах и при типичных значениях параметров (7.5) неравенство (7.22) не удовлетворяется. Казалось бы, должны наблюдаться осцилляции поля у «основания» домена. Напомним, что эта особенность теряется при приближенном учете роли диффузии.

Нетрудно учесть влияние быстрого прилипания в этой области слабых полей, когда можно считать $v(E) = 1$ и $\varphi(E) = \varphi(0)$. Вместо уравнения (7.15) получим следующее уравнение для характеристических корней k_i , определяющих ход возможных решений вблизи особой точки (E_1, ρ_0, ρ_{e0}) :

$$k^2 + k \left[\frac{1 + \varphi(0)}{\kappa_1 - k} - \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial \varphi(E)}{\partial \ln E} \right] = \frac{r}{\kappa_1 - k}. \quad (9.4)$$

Особая точка относится к классу седло (а не седло-фокус) при выполнении следующего неравенства, заменяющего (7.22):

$$r < \tilde{r}(\kappa_1) \equiv \left[\frac{1 + \varphi(0)}{3} \right]^{3/2} \left[2 + \kappa_1 \sqrt{\frac{3}{1 + \varphi(0)}} \right]. \quad (9.5)$$

Здесь для простоты было использовано неравенство

$$\kappa_1 \ll 3[1 + \varphi(0)], \quad (9.6)$$

хорошо выполняющееся в реальных условиях опыта. При значениях параметров, указанных в (7.6), $r \approx 13$. Положив $\varphi \approx 10^2$ и $E_1 \approx 3$ в/см, видим, что неравенство (9.6) выполняется с запасом на порядок.

Итак, проведенное здесь рассмотрение рекомбинационных доменов позволяет качественно выяснить роль различных физических эффектов, связанных с разогревом электронного газа (увеличение вероятности захвата на кулоновские отталкивающие центры с ростом поля и ионизация мелких ловушек), а также роль процессов диффузии в объяснении экспериментально наблюдаемых

явлений, обусловленных одним из типов рекомбинационной нелинейности.

Можно полагать, что использованный метод рассмотрения будет применим в общих чертах и к анализу других явлений подобного типа. Вместе с тем даже в разобранный конкретный пример ряд вопросов остается нерешенным. К ним относится, например, объяснение наблюдаемой зависимости скорости достаточно широкого домена с практически плоской вершиной от напряжения на образце [49]. Для их решения требуется, видимо, дальнейшее уточнение модели, связанное с учетом возможных медленных процессов прилипания или перезарядки примесных уровней в области сильного поля в домене, процессов ударной ионизации, или, возможно, джоулева нагрева.

Основные качественные закономерности, изученные в этом и предыдущем параграфах, по-видимому, характерны для всех систем с рекомбинационной нелинейностью, приводящей к вольтамперной характеристике *N*-типа. Более того, имеется глубокое сходство между принципиальными чертами задач с рекомбинационной и дрейфовой нелинейностью. Вместе с тем конкретные количественные результаты довольно сильно зависят от происхождения ОДП, числа и расположения уровней захвата, поведения сечений захвата и т. д. Отсюда ясно, что исследование рекомбинационных доменов может оказаться довольно тонким методом изучения энергетического спектра полупроводника и характеристик различных примесных центров в нем в существенно неравновесных условиях.

Г Л А В А VI

**ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫЕ
СОСТОЯНИЯ
ПОЛУПРОВОДНИКА С S-ОБРАЗНОЙ
ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ**

§ 1. Вводные замечания и основные уравнения

Мы уже видели в § I. 6, что процесс распада неустойчивого однородного состояния с ОДП протекает по-разному в полупроводниках, характеризующихся различными типами вольтамперных характеристик.

Именно, в образце с N-образной характеристикой нарастают продольные флуктуации напряженности поля и плотности заряда, а поперечные флуктуации затухают. Возникающие в результате распада однородного состояния домены электрического поля были рассмотрены в предыдущих главах.

По-иному обстоит дело, когда вольтамперная характеристика однородного образца S-образна [1]. В этом случае максимальным инкрементом нарастания обладают поперечные возмущения, а продольные, как правило, затухают. По этой причине можно ожидать, что в новом установившемся состоянии система станет существенно неоднородной в направлениях, перпендикулярных плотности тока, оставаясь однородной вдоль нее.

Несмотря на отмеченные различия в поведении систем с N- и S-образными характеристиками, существует весьма большое сходство математического формализма, используемого для описания процессов в обоих случаях (разумеется, это сходство не случайно, а служит проявлением определенных качественных закономерностей поведения рассматриваемого класса существенно неравновесных систем). Указанное обстоятельство позволит

нам при исследовании систем с S-образными характеристиками опустить часть выкладок, проводящихся в полной аналогии с рассмотренными в предыдущих главах.

Будем считать, что состояние газа горячих электронов можно характеризовать электронной температурой T ; пределы применимости этого приближения уже обсуждались в § II.5. В ряде случаев, представляющих экспериментальный интерес, названное приближение выполняется с достаточной точностью — именно так, по видимому, обстоит дело в упоминавшихся ранее опытах с антимономидом индия n -типа [2, 3]. Заметим, что некоторые качественные результаты, не очень чувствительные к точному виду функции распределения, сохраняют силу и тогда, когда, строго говоря, предположение о максвелловской ее форме не справедливо. Совокупность феноменологических уравнений, описывающих рассматриваемую систему, должна, очевидно, содержать уравнения Максвелла, выражения для плотности тока \mathbf{j} и потока энергии \mathbf{q} , а также уравнение баланса энергии (см. § II.3). Ограничиваясь, как и раньше, квазистационарным приближением, можно оставить из уравнений Максвелла только уравнение Пуассона, дополнив его требованием безвихревого характера электрического поля и уравнением непрерывности. В результате в изотропном случае мы приходим к следующей системе уравнений (ср. с §§ I. 7, II.3):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} (\rho - \rho_0), \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (1.1б)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1.1в)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial \rho T}{\partial t} + e \operatorname{div} \mathbf{q} - e \mathbf{j} \mathbf{E} + \rho P(T) = 0, \quad (1.1г)$$

$$\mathbf{j} = \rho \mu(T) \mathbf{E} - \operatorname{grad} [D(T) \rho], \quad (1.1д)$$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{e} \theta \mathbf{j} - \kappa(T) \operatorname{grad} T. \quad (1.1e)$$

Здесь, как и прежде, $\rho_0 = en_0$ — плотность компенсирующего заряда, $\rho_0 = en$ — плотность заряда подвижных носителей, $\frac{3}{2}T$ — средняя энергия газа носителей (в расчете на одну частицу), $nP(T)$ — удельная мощность,

передаваемая электронами решетке, θ — энергия, переносимая одним электроном в потоке, а $\kappa(T)$ — электронная теплопроводность.

В § 1.4 было отмечено, что при определенной зависимости кинетических коэффициентов от электронной температуры на вольтамперной характеристике однородного образца появляется падающая ветвь. Однородное состояние $\rho = \rho_0$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, $T = T_0$,

$$\begin{aligned} j_0 \mathbf{E}_0 - n_0 P_0 &= 0, \\ j_0 &= \rho_0 \mu_0 \mathbf{E}_0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $P_0 = P(T_0)$, $\mu_0 = \mu(T_0)$, характеризуется ОДП, если (см. § 1.6)

$$\sigma = \frac{dj_0}{dE_0} = \rho_0 \mu_0 \frac{\frac{dP_0}{dT_0} + eE_0^2 \frac{d\mu_0}{dT_0}}{\frac{dP_0}{dT_0} - eE_0^2 \frac{d\mu_0}{dT_0}} < 0. \quad (1.3)$$

Будем считать, что рассматриваемый перегревный механизм приводит к образованию S-образной вольтамперной характеристики. Это имеет место, если в некотором интервале значений E_0 выполнены условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_0}{dT_0} - eE_0^2 \frac{d\mu_0}{dT_0} &< 0, \\ \frac{dP_0}{dT_0} + eE_0^2 \frac{d\mu_0}{dT_0} &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Задача состоит в отыскании пространственно неоднородных состояний системы, описываемой уравнениями (1.1a) — (1.1e) с соответствующими начальными и граничными условиями.

По сравнению со случаем доменной неустойчивости при N-образной характеристике проблема граничных условий в рассматриваемой системе менее сложна. Это связано с тем, что продольные возмущения затухают и влияние неравновесных явлений в приконтактных областях локализовано вблизи контактов. Напротив, граничные условия на боковых поверхностях образца могут играть существенную роль; записать их, однако, проще. Так, в отсутствие поверхностной рекомбинации исчезает нормальная компонента тока проводимости на поверхности. Другие граничные условия так или иначе отражают

условия теплообмена образца с окружающей средой. В некоторых задачах, если поперечные размеры образца велики по сравнению с характерными длинами изменения электронной температуры, образец можно рассматривать как бесконечно протяженный. Тогда реальные граничные условия на боковых поверхностях можно просто заменить условиями ограниченности на бесконечности. Разумеется, такая замена возможна лишь тогда, когда решение устойчиво относительно вариации граничных условий; в реальных системах рассматриваемого типа подобная устойчивость, как правило, имеет место (см. гл. VII).

§ 2*. Дисперсионное уравнение для волн малой амплитуды.

Приближение несжимаемого электронного газа

Прежде чем перейти к построению нелинейной теории пространственно неоднородных распределений, рассмотрим особенности распространения возмущений малой амплитуды в электронной плазме, описываемой уравнениями (1.1a)—(1.1e) [4—7]. Мы уже касались этого вопроса в главе I, где было использовано приближение несжимаемой плазмы. Для того чтобы обсудить пределы его применимости, получим вначале общее дисперсионное уравнение $\omega = \omega(\mathbf{k})$, описывающее распространение гармонических возмущений типа $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$ в бесконечной среде без предположения о несжимаемости. Разумеется, малые возмущения фактически имеют характер распространяющихся волн, лишь если мнимая часть частоты (при вещественном \mathbf{k}) мала по сравнению с ее вещественной частью.

Амплитуды малых гармонических возмущений плотности заряда, плотностей потоков заряда и энергии, электронной температуры и напряженности электрического поля удовлетворяют уравнениям, полученным линеаризацией из системы (1.1a)—(1.1e):

$$\mathbf{k} \delta \mathbf{E} = - \frac{4\pi}{e} i \delta \rho, \quad (2.1a)$$

$$[\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}] = 0, \quad (2.1б)$$

$$\omega \delta \rho = \mathbf{k} \delta \mathbf{j}, \quad (2.1в)$$

$$-i\omega \frac{3}{2e} \rho_0 \delta T - i\omega \frac{3}{2e} T_0 \delta \rho + i(\mathbf{k} \delta \mathbf{q}) -$$

$$- (\delta \mathbf{E} \mathbf{j}_0) - (\delta \mathbf{j} \mathbf{E}_0) + \frac{\delta \rho}{e} P_0 + \frac{\rho_0}{e} \frac{dP_0}{dT_0} \delta T = 0, \quad (2.1\Gamma)$$

$$\delta \mathbf{j} = \rho_0 \left[\frac{d\mu_0}{dT_0} \mathbf{E}_0 - i\mathbf{k} \frac{dD_0}{dT_0} \right] \delta T +$$

$$+ [\mu_0 \mathbf{E}_0 - i\mathbf{k} D_0] \delta \rho + \rho_0 \mu(T_0) \delta \mathbf{E}, \quad (2.1\Delta)$$

$$\delta \mathbf{q} = \frac{1}{e} \theta_0 \delta \mathbf{j} + \left[\frac{\rho_0}{e} \mu_0 \frac{d\theta_0}{dT_0} \mathbf{E}_0 - i\chi_0 \mathbf{k} \right] \delta T. \quad (2.1\epsilon)$$

Исключая из уравнений (2.1а) — (2.1е) величины $\delta \mathbf{E}$, $\delta \mathbf{j}$ и $\delta \mathbf{q}$, мы находим

$$[\omega - \omega_1(\mathbf{k})] \delta T + [A_1(\mathbf{k}) \omega + A_2(\mathbf{k})] \frac{\delta \rho}{\rho_0} = 0, \quad (2.2)$$

$$A_3(\mathbf{k}) \delta T + [\omega - \omega_2(\mathbf{k})] \frac{\delta \rho}{\rho_0} = 0. \quad (2.3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega_1(\mathbf{k}) = i \frac{2}{3} \left\{ \frac{dP_0}{dT_0} - eE_0^2 \frac{d\mu_0}{dT_0} + \frac{e\chi_0}{\rho_0} k^2 + \right.$$

$$\left. + e(\mathbf{k} \mathbf{E}_0) \left[\frac{2(\mathbf{k} \mathbf{E}_0)}{k^2} \frac{d\mu_0}{dT_0} + \frac{i}{e} \mu_0 \frac{d\theta_0}{dT_0} - i \frac{dD_0}{dT_0} \right] \right\}, \quad (2.4a)$$

$$\omega_2(\mathbf{k}) = -i \left(\frac{1}{\tau_M} + Dk^2 \right) + \mu_0(\mathbf{k} \mathbf{E}_0), \quad (2.4б)$$

$$A_1(\mathbf{k}) = T_0 - \frac{2}{3} \theta_0 - i \frac{4e}{3} \frac{(\mathbf{k} \mathbf{E}_0)}{k^2},$$

$$A_2(\mathbf{k}) = \frac{2e}{3} (\mathbf{k} \mathbf{E}_0) \left[D_0 + 2i\mu_0 \frac{(\mathbf{k} \mathbf{E}_0)}{k^2} \right], \quad (2.5)$$

$$A_3(\mathbf{k}) = i \frac{dD_0}{dT_0} k^2 - \frac{d\mu_0}{dT_0} (\mathbf{k} \mathbf{E}_0).$$

Частота $\omega_1(\mathbf{k})$ (2.4а) представляет собой не что иное, как решение дисперсионного уравнения для волн электронной температуры в несжимаемом газе носителей, рассмотренном нами в § 1.6. Дисперсионное уравнение вида $\omega = \omega_1(\mathbf{k})$ получается для волн пространственного заряда в изотермическом случае. В общем случае, как следует из соотношений (2.2) и (2.3), дисперсионное

уравнение для волн малой амплитуды в рассматриваемой системе имеет вид

$$\omega^2 - \omega [\omega_1(\mathbf{k}) + \omega_2(\mathbf{k}) + A_1(\mathbf{k}) A_3(\mathbf{k})] + \omega_1(\mathbf{k}) \omega_2(\mathbf{k}) - A_2(\mathbf{k}) A_3(\mathbf{k}) = 0. \quad (2.6)$$

В § III.6 были рассмотрены продольные ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}_0$) возмущения в системе с электронной температурой, связанные с возникновением пространственного заряда. Обратимся теперь к поперечным возмущениям ($\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0$); именно поперечные возмущения представляют для нас сейчас интерес в связи с изучением состояний, существенно неоднородных в направлениях нормальных к вектору плотности тока.

Рассмотрим случай длинных волн и малых частот, когда длина волны значительно превышает дебаевскую длину $l_D = (\epsilon T / 4\pi e \rho_0)^{1/2}$, а частота ω мала по сравнению с обратным максвелловским временем релаксации:

$$kl_D \ll 1, \quad \omega \tau_M \ll 1. \quad (2.7)$$

При этом $\omega \sim \omega_1 \ll \omega_2$.

Тогда, пренебрегая членами порядка выше $(kl_D)^2$ и $\omega \tau_M$, мы можем получить из уравнения (2.6) следующее дисперсионное соотношение для низкочастотной ветви:

$$\omega \approx \omega_1(\mathbf{k}). \quad (2.8)$$

Равенство (2.8) совпадает с дисперсионным соотношением для поперечных волн в несжимаемом газе носителей, непосредственно получающемся из уравнения (I.7.15).

Таким образом, при рассмотрении достаточно низкочастотных ($\omega \tau_M \ll 1$) и достаточно медленно меняющихся в пространстве ($kl_D \ll 1$) состояний системы с электронной температурой допустимо пользоваться приближением несжимаемого электронного газа. Названное приближение мы будем использовать при изучении шнуров, возникающих в полупроводниках в условиях, когда перегревные механизмы приводят к появлению S-образности. Ясно, что названное приближение можно применять к пространственно неоднородным состояниям,

только если характерный масштаб неоднородности превышает дебаевскую длину. В рассматриваемой задаче о шнуре тока параметры системы меняются наиболее быстро в области стенок шнура. Соответственно условие применимости приближения несжимаемого газа выполняется везде (в том числе и внутри стенок), лишь если толщина стенок велика по сравнению с дебаевской длиной.

§ 3. Токовые слои и шнуры [7]

Обратимся теперь к изучению возможных неоднородных распределений плотности тока и электронной температуры в полупроводнике с S-образной вольтамперной характеристикой, т. е. будем искать решение системы нелинейных уравнений (1.1a)—(1.1e), ограничиваясь приближением несжимаемой плазмы.

Рассмотрим стационарный случай, когда уравнение баланса энергии (1.1г) можно переписать в виде

$$P(T) - \frac{ej^2}{\mu\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\theta}{dT} + e\alpha \right) (j \operatorname{grad} T) - \frac{e}{\rho_0} \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T) = 0. \quad (3.1)$$

Поскольку наибольшим инкрементом нарастания обладают поперечные возмущения, а продольные возмущения затухают, естественно считать, что возникающее распределение будет существенно неоднородным в поперечном сечении образца (плоскость (y, z)), а однородность вдоль оси Ox сохранится (ось Ox мы, как и раньше, считаем направленной вдоль плотности тока). Интересуясь решениями, для которых $\partial T / \partial x = 0$, из уравнения баланса энергии (3.1) можно получить следующее дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее распределение электронной температуры в поперечном сечении образца:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \rho_0 \mu(T) E^2 - \frac{\rho_0}{e} P(T) = 0, \quad (3.2)$$

где E — проекция напряженности поля на ось Ox . Вместо температуры T удобно ввести новую переменную

$$\Theta = \int^T dT' \kappa(T'). \quad (3.3)$$

Тогда уравнение (3.2) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Theta + \frac{dU(\Theta)}{d\Theta} = 0, \quad (3.4a)$$

где функция $U(\Theta)$ определяется соотношением

$$U(\Theta) = \int^{\Theta} d\Theta' \left[\rho_0 \mu(\Theta') E^2 - \frac{\rho_0}{e} P(\Theta') \right]. \quad (3.5)$$

В рассматриваемой системе кривые $U(\Theta)$ при различных значениях E имеют вид, схематически показанный

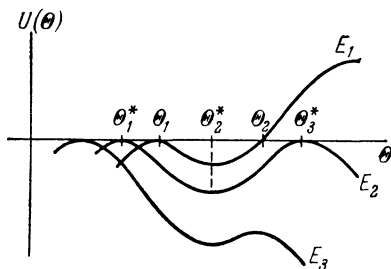


Рис. 55. Примерный ход функции $U(\Theta)$ при различных значениях напряженности поля; $E_3 < E_2 < E_1$.

на рис. 55. В некоторой области значений напряженности поля, когда $E_v < E < E_p$ (рис. 3, б), функция $U(\Theta)$ имеет три экстремума, т. е. существует три корня уравнения

$$\epsilon \mu(\Theta) E^2 = P(\Theta); \quad (3.6)$$

в областях $E > E_v$, $E < E_p$ зависимость $U(\Theta)$ монотонна.

Рассмотрим вначале статические распределения температуры в виде плоских слоев, т. е. распределения, зависящие только от одной пространственной координаты,

скажем y . Уравнение (3.4а) при этом принимает вид:

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2} + \frac{dU(\Theta)}{d\Theta} = 0. \quad (3.4б)$$

Экстремумы функции $U(\Theta)$ (см. (3.5)) отвечают особым точкам рассматриваемой динамической системы

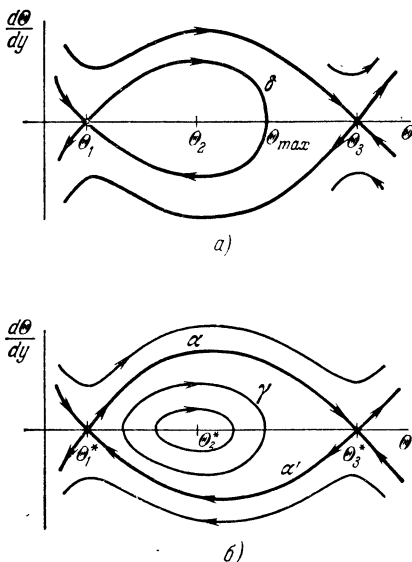


Рис. 56. Схематический ход интегральных кривых на фазовой плоскости:
 а) при $E=E_1$, б) при $E=E_2$.

второго порядка. Пользуясь общими методами исследования характера особых точек, нетрудно установить, что особая точка есть седло, если

$$\frac{dP(\Theta)}{d\Theta} - eE^2 \frac{d\mu(\Theta)}{d\Theta} > 0, \quad (3.7)$$

и центр — при выполнении обратного неравенства. Согласно формулам (1.4) неравенство (3.7) выполняется на возрастающих участках вольтамперной характеристики, на падающей же ветви выполняется неравенство, обратное (3.7). Отметим, что условие (3.7) вместе с равенством (3.6) определяет точку максимума функции

$U(\Theta)$. Таким образом, точки максимума функции $U(\Theta)$ отвечают особым точкам типа «седло», а точки минимума — особым точкам типа «центр».

Картина интегральных кривых на фазовой плоскости $(d\Theta/dy, \Theta)$, соответствующая напряженностям поля E_1 и E_2 (см. рис. 55), представлена на рис. 56. При $E = E_1$ (рис. 56, а) траектория, удовлетворяющая условиям ограниченности на бесконечности, может быть либо траекторией δ , выходящей из седла $\Theta = \Theta_1$, обходящей центр и вновь попадающей в то же седло, либо одной из замкнутых траекторий вокруг центра. В последнем случае широкому образцу отвечает многократный обход замкнутой траектории, т. е. осциллирующее распределение температуры в образце.

Распределение температуры T , связанной с Θ соотношением (3.3), отвечающее траектории δ , схематически показано на рис. 57, а. Этому распределению температуры отвечает и существенно неоднородное распределение плотности тока, $j = \rho_0 \mu [T(y)] E$ — возникает слой тока конечной ширины, аналогичный узкому домену, рассмотренному в главе V.

При напряженности поля, равной E_2 , картина интегральных кривых представлена на рис. 56, б, а возможные неосциллирующие распределения температуры — на рис. 57, б—57, г. Опять-таки имеет место довольно полная аналогия со случаем широкого домена в образце с N-образной характеристикой. Распределения температуры, изображенные на рис. 57, б—57, г, отвечают случаю, когда образец разбивается на широкие слои с отличающимися значениями плотности тока.

Уравнение (3.4а) допускает и решения в виде аксиально-симметричных распределений:

$$\Theta = \Theta(r) \equiv \Theta(\sqrt{y^2 + z^2}).$$

Действительно, переходя к цилиндрическим координатам, получаем уравнение

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} + \frac{dU(\Theta)}{d\Theta} = 0. \quad (3.4в)$$

Качественное исследование его проводится точно так же, как и описанное выше исследование уравнения (3.4б). В результате мы приходим к выводу о том, что

в образце возможно образование шнуров (нитей) различной толщины, плотность тока и электронная температура внутри которых отличаются от остальной части образца. (Ширина шнура в режиме заданного тока определяется соотношением между средней по сечению плотностью тока и плотностями тока внутри и вне шнура.)

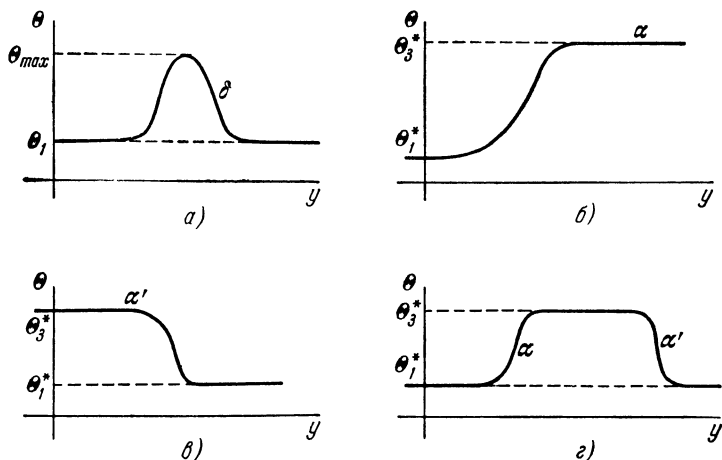


Рис. 57. Возможные виды неосциллирующих распределений температуры в широком образце:

а) узкий шнур, б) и в) слоевые распределения, г) широкий шнур.

В рассматриваемом случае бесконечно широкого образца положение слоев, отвечающих замкнутым фазовым траекториям (или шнуров), никак не определено — система инвариантна относительно сдвига начала координат в направлении оси Oy (или в плоскости xy). С другой стороны для решений, отвечающих температурным слоям типа изображенных на рис. 57, б, в, толщина слоя d и положение стенки определяются заданием полной силы тока через образец. В пренебрежении вкладом самой стенки имеем

$$d = \frac{\bar{j} - j_1}{j_3 - j_1},$$

где \bar{j} — средняя плотность тока, а j_1 и j_3 — плотности тока внутри и вне слоя. Однако, как мы увидим в

§ VII.9, таким слоевым решениям отвечает больший декремент затухания флуктуаций, чем решениям типа изображенных на рис 57, *a*, *г*. По этой причине можно ожидать, что если в системе возможно расслоение только в определенном направлении, то слой будет иметь тенденцию «локализоваться вблизи поверхности», т. е. будет осуществляться распределение типа представленного на рис. 57, *б*, *в*.

В случае, когда в образце возникает токовый шнур или слой с двумя стенками, положение его может определяться неоднородностями образца, как объемными, так и поверхностными. Последние, как неоднократно отмечалось, существенно влияют на процесс распада пространственно однородного состояния.

Таким образом, можно ожидать, что токовые шнуры и слои будут располагаться около неоднородностей или вблизи поверхности образца. Это, как правило, и имеет место в эксперименте [15, 20].

§ 4. Некоторые особенности поведения полупроводников с S-образной вольтамперной характеристикой [8, 9]

Поведение систем с S-образной вольтамперной характеристикой может обнаруживать ряд особенностей, существенно отличающих их от систем с характеристикой N-типа. К числу таких особенностей относятся скачки напряжения при некоторых значениях тока, гистерезис и наличие вертикального участка на характеристике (т. е. постоянство напряжения на образце в довольно широком интервале токов). Названные особенности непосредственно связаны с образованием токового шнура, поэтому для их объяснения мы найдем вначале вид характеристики образца со шнуром, т. е. зависимость средней плотности тока через образец \bar{j} от напряженности поля.

Построение характеристики для образца со шнуром проводится в полной аналогии с § V.5; в образце с большим поперечным сечением она имеет вид, схематически представленный на рис. 58. Участки *AB* и *EF* с положительным наклоном близки к соответствующим ветвям характеристики однородного образца. Этим участкам отвечают «горячий» и «холодный» узкие шнуры,

дающие сравнительно малый вклад в полную силу тока через образец (хотя, очевидно, плотность тока в шнуре значительно выше, чем вне его). На участке BE вклады в ток от шнура и от внешней области сравнимы. Заметим, что для реальных систем шнур, отвечающий этому участку, вообще говоря, не обязан содержать внутреннюю область с плотностью тока и температурой практически постоянными в пространстве. Наличие такой области или ее отсутствие определяется поперечным сечением образца и соотношением между величинами плотности тока на возрастающих ветвях ($j > j_v$, $j < j_p$, рис. 3, б). Участки OA и FG отвечают пространственно однородному состоянию системы.

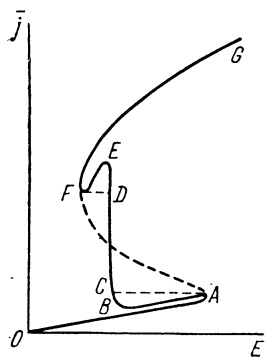


Рис. 58. Вольтамперная характеристика образца с токовым шнуром.

Вольтамперная характеристика, изображенная на рис. 58, имеет две отличительные особенности. Первая из них состоит в наличии вертикального участка BE . Этот вывод теории находится в соответствии с экспериментальными наблюдениями для систем с S-образностью. Изменение тока на вертикальном участке характеристики сопровождается лишь изменением размеров шнура; напряжение на образце при этом не меняется. Вторая особенность связана с возможностью осуществления трех различных состояний системы в некоторых интервалах значений \bar{j} . Два из них соответствуют состоянию со шнуром, третье — пространственно однородному состоянию. В § VII.9 будет показано, что состояния, отвечающие участкам AB и EF , вообще говоря, неустойчивы, а состояние, отвечающее участку BE , устойчиво. Наличие двух устойчивых состояний системы — однородного и со шнуром на участке BE — может привести к гистерезису в режиме заданного тока.

Рассмотрим теперь, как меняется состояние системы при изменении эдс \mathcal{E} в цепи, содержащей образец. Рабочая точка определяется пересечением характеристики, изображенной на рис. 58, с нагрузочной прямой,

Рассмотрим теперь, как меняется состояние системы при изменении эдс \mathcal{E} в цепи, содержащей образец. Рабочая точка определяется пересечением характеристики, изображенной на рис. 58, с нагрузочной прямой,

$\mathcal{E} = V - jR$, где $V = E \cdot L$ — напряжение на образце (площадь поперечного сечения образца мы по-прежнему считаем равной единице). При возрастании \mathcal{E} рабочая точка вначале движется по участку OA , отвечающему однородному (устойчивому, согласно результатам гл. III) состоянию системы. В точке A происходит скачкообразное изменение состояния — система переходит в новое состояние с большей проводимостью. Последнее определяется пересечением нагрузочной прямой с одной из устойчивых ветвей характеристики; в режиме заданного тока система переходит в точку C . Для некоторых механизмов ОДП (например, в стеклообразных полупроводниках) переключение происходит весьма быстро, за времена порядка 10^{-7} — 10^{-10} сек [10]. Новое состояние системы — со шнуром тока — является статическим; по этой причине, как правило, переключение в новое состояние не приводит к возникновению колебаний *).

В настоящей главе для определенности мы рассмотрели модель с перегревным механизмом ОДП. Ясно, однако, что основные особенности поведения системы будут теми же и при других механизмах ОДП, приводящих к S-образной характеристике. Действительно, токовые шнуры возникают при пробое в n -Cd Te [14], при тепловом пробое в Si, легированном золотом [15], при низкотемпературном примесном пробое в компенсированном Ge [16] и т. д.

Далее, поскольку главную роль играет нарушение пространственной однородности системы в направлениях, перпендикулярных плотности тока, то основные качественные выводы сохраняют силу и для некоторых более сложных систем. В частности, так обстоит дело для многослойных структур с S-образной характеристикой (диодов [13, 17], трехслойных [11, 18, 19] и четырехслойных [9, 20] систем). Для таких систем имеют место

*) Заметим, что в работе [11] описано возникновение колебаний в триодных структурах (на основе Ge с примесью Au) с S-образной характеристикой. Колебания могут возникать также иногда при наложении поперечного магнитного поля. Действительно, под действием поперечного магнитного поля токовый шнур начинает двигаться по образцу. Если шнур возникает на одной неоднородности, а исчезает на другой, то при включении магнитного поля на образце возникают колебания напряжения, связанные с процессами возникновения и разрушения шнура [12, 13].

те же эффекты — переключение, гистерезис и т. д., связанные с образованием шнура.

Непосредственное обнаружение токовых шнуров в полупроводниках с S-образной характеристикой проводилось несколькими различными методами. В работах [17, 18] использовались метод секционирования контактов (разделения их на малые секции) и метод подвижного светового зонда; в работе [15] измерялось распределение температуры по сечению образца. В ряде случаев при пробое возникает достаточно интенсивное рекомбинационное излучение, позволяющее «увидеть» токовые шнуры. Светящиеся шнуры наблюдались в условиях междузонной генерации пар в n -CdTe [14] и при инжекционном пробое в полуизолирующем кремнии [19] и в GaAs [21].

ГЛАВА VII

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОЛЯ И ЗАРЯДА. ИМПЕДАНС СИСТЕМЫ С ДОМЕНАМИ

§ 1. Введение

Анализ основных уравнений, описывающих рассматриваемый нами класс существенно неравновесных систем, показал, что при наличии участка с ОДП на статической вольтамперной характеристике однородного образца в нем наряду с однородным распределением поля и заряда могут существовать и пространственно неоднородные распределения. В предыдущих главах мы рассмотрели некоторые возможные виды неоднородных распределений. Возникающие неоднородные распределения в общем случае отнюдь не обязаны быть статическими; стационарно движущийся домен, отвечающий риманову решению основных уравнений, представляет собой пример зависящего от времени неоднородного распределения.

Следует, однако, отметить, что не всякие (даже точные) решения исходных уравнений могут осуществляться фактически. Например, может оказаться невозможным реализовать состояние, неустойчивое относительно малых флуктуаций. Исследование устойчивости допустимого состояния системы должно, во-первых, включать в себя анализ поведения малых динамических возмущений. Такие возмущения — случайные флуктуации распределения поля и заряда в образце, условий на границах и т. д. — всегда имеются в реальных системах. Их нарастание приведет к распаду рассматриваемого состояния за время порядка характерного времени роста флуктуаций. Во-вторых, сами исследуемые уравнения носят приближенный

характер. По этой причине их решение должно быть устойчивым по отношению к малым вариациям вида исходных уравнений, отвечающих более точному описанию физической системы. К числу таких вариаций относятся, в частности, флуктуации концентрации легирующей примеси в образце, т. е. случайные пространственные изменения величины ρ_0 .

С другой стороны, состояние, устойчивое относительно малых флуктуаций, не обязательно будет фактически осуществляться. Как будет видно из дальнейшего, при рассмотрении существенно неравновесных состояний возможна ситуация, когда флуктуационно устойчивыми оказываются несколько различных состояний. В системах, обладающих указанным свойством, может наблюдаться гистерезис (см. § IV.6, а также § 5 настоящей главы). Действительно, из предыдущего изложения (гл. IV) видно, что область неустойчивости пространственно однородного состояния попадает внутрь области существования рассмотренных нами неоднородных распределений поля и заряда.

Таким образом, когда однородное состояние неустойчиво, система допускает решение типа статического или стационарно движущегося домена. Границы области устойчивости последних, как будет показано ниже, вообще говоря, не совпадают с границами неустойчивости однородного состояния. Именно, при некоторых значениях напряжения на образце может оказаться, что два или несколько состояний системы устойчивы относительно малых флуктуаций. В этом случае состояние, в котором находится система, зависит от ее предыстории, т. е. от того, из какого состояния переходит система, от характера возмущения, вызывающего переход, от динамики самого перехода и т. д.

Неравновесная система с несколькими устойчивыми состояниями равновесия в некотором смысле аналогична системе с несколькими метастабильными состояниями в термодинамике. Каждое из таких метастабильных состояний отвечает относительному минимуму свободной энергии и, таким образом, устойчиво относительно малых флуктуаций, будучи неустойчивым относительно некоторых флуктуаций конечной амплитуды. «Время жизни» системы в метастабильном состоянии

определяется вероятностью создания такой флуктуации достаточно большой амплитуды. Абсолютно устойчивое состояние есть состояние, отвечающее абсолютному минимуму свободной энергии.

Для сильно неравновесных систем какой-либо общий принцип, аналогичный принципу минимума свободной энергии, не установлен. Попытки использовать в качестве такового принцип минимального производства энтропии [1] нельзя считать достаточно обоснованными. Действительно, этот принцип доказан [2] лишь для слабо неравновесных систем, когда термодинамические силы можно рассматривать как линейные функции соответствующих потоков. По этой причине в тех случаях, когда при одних и тех же внешних условиях несколько состояний оказываются устойчивыми относительно малых флуктуаций, мы, вообще говоря, не можем сразу сказать, какое из них является абсолютно устойчивым. Ответ на этот вопрос требует детального анализа полной системы уравнений, включая и описание переходных процессов. Даже для сравнительно простых модельных систем эта задача еще не решена до конца из-за больших математических трудностей. Однако легко видеть, что если «времена жизни» состояний, устойчивых относительно малых флуктуаций, велики по сравнению с характерными временами наблюдения, то указанное осложнение не играет существенной роли.

В настоящей главе мы рассмотрим устойчивость статических и движущихся доменов относительно малых флуктуаций и вариаций граничных условий, а также вопрос о реакции образца с доменами на малый переменный сигнал.

§ 2. Малые флуктуации в образце с доменами [3]

Математическое исследование устойчивости системы относительно малых возмущений проводится с помощью стандартной процедуры, в принципе полностью аналогичной методам, использованным нами в главе III при исследовании устойчивости пространственно однородного решения. Эта процедура сводится к линеаризации исходных уравнений по малым отклонениям от заданного распределения с последующим исследованием

получаемого (в нашем случае интегро-дифференциального) линейного уравнения. Когда заданное распределение существенно неоднородно, коэффициенты при производных в полученном уравнении довольно сложным образом зависят от координат, и исследование таких уравнений для некоторых систем наталкивается на ряд трудностей, значительно осложняющих задачу по сравнению с пространственно однородным случаем. Для систем с рекомбинационной нелинейностью, например, до сих пор отсутствует достаточно полный анализ поведения флуктуаций и устойчивости доменных распределений поля (некоторые результаты, относящиеся к таким системам, изложены в § 6).

Большая часть полученных к настоящему времени результатов исследования устойчивости относится к модельной системе с дрейфовой нелинейностью, рассмотрением которой мы в основном и ограничимся в дальнейшем. В связи с этим следует помнить, что перенесение полученных результатов на системы с рекомбинационной нелинейностью, как правило, нуждается в специальном обосновании. Не лишне также еще раз подчеркнуть модельный характер рассматриваемой системы. Если, например, получаемые в результате решения напряженность поля и плотность заряда меняются достаточно быстро, так что локальная модель оказывается неприменимой, то найденное решение может в лучшем случае претендовать лишь на качественное согласие с экспериментом.

Будем исходить из уравнений (I.7.1a—г), описывающих нашу модельную систему, и ограничимся одномерным случаем. Пусть $E(x, t)$ и $\rho(x, t)$ — какие-либо известные их решения, а $\delta E(x, t)$ и $\delta \rho(x, t)$ — малые отклонения от этих решений. Линеаризованная система уравнений для $\delta E(x, t)$ и $\delta \rho(x, t)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d}{dE} [\mu(E) E] \cdot \delta E + \mu(E) E \delta \rho - 2 \frac{\partial}{\partial x} (\dot{D} E \rho \delta E) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} (D \delta \rho) + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \delta E}{\partial t} = \delta J, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \delta E}{\partial x} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \delta \rho$$

(здесь, как и раньше, $\dot{D} = dD/dE^2$).

Исключая величину $\delta\rho$, получим уравнение, описывающее поведение малых флуктуаций напряженности поля δE :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \delta E}{\partial x} \right) - \mu E \frac{\partial \delta E}{\partial x} + \frac{8\pi}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} (\dot{D} E \rho \delta E) - \\ - \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \frac{d(\mu E)}{dE} \delta E - \frac{\partial \delta E}{\partial t} = - \frac{4\pi}{\varepsilon} \delta J(t). \quad (2.2)$$

Флуктуация полного тока в цепи $\delta J(t)$, изменение падения напряжения на образце $\delta V(t) = \int_0^L \delta E(x, t) dx$ и малая переменная эдс в цепи, $\delta \mathcal{E}(t)$, связаны законом Кирхгофа,

$$R \delta J(t) + \delta V(t) = \delta \mathcal{E}(t). \quad (2.3)$$

С учетом формулы (2.3) уравнение (2.2) представляет собой линейное интегро-дифференциальное уравнение. Его следует дополнить двумя граничными и одним начальным условиями.

При получении решения, отвечающего стационарному движению домена, мы считали граничные условия периодическими. Примем сейчас, что полная напряженность поля $E(x, t) + \delta E(x, t)$ также удовлетворяет периодическим граничным условиям, т. е. что функция $\delta E(x, t)$ периодична с периодом L . При этом следует отметить, что такой выбор оправдан в достаточно длинных образцах, когда домен находится достаточно далеко от контактов, поскольку в подобной ситуации свойства решений уравнения (2.2) вообще слабо зависят от конкретного вида граничных условий. Роль вариаций граничных условий более подробно будет обсуждаться в § 7.

При исследовании поведения малых флуктуаций в образце с движущимся стационарным доменом в уравнении (2.2) удобно перейти от переменных x, t к переменным $z = x - u_0 t, t$. Поскольку везде в дальнейшем при рассмотрении движущихся доменов мы будем пользоваться переменными z и t , сохранение за функциями новых переменных тех же обозначений, что и раньше, не может привести к недоразумениям. Уравнение (2.2)

в новых переменных принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \delta E}{\partial z} \right) - (\mu E - u_0) \frac{\partial \delta E}{\partial z} + \frac{8\pi}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\dot{D} E \rho \delta E) - \\ - \frac{4\pi\rho}{\epsilon} \frac{d(\mu E)}{dE} \delta E - \frac{\partial \delta E}{\partial t} = - \frac{4\pi}{\epsilon} \delta J(t). \quad (2.2')$$

В уравнении (2.2') удобно совершить одностороннее преобразование Лапласа по времени*). Изображение Лапласа $f(\Lambda)/\Lambda$ функции $f(t)$, удовлетворяющей неравенству $|f(t)| < M e^{at}$, где M и a — некоторые положительные постоянные, определяется соотношением

$$f(\Lambda) = \Lambda \int_0^{\infty} f(t) e^{-\Lambda t} dt.$$

В результате исследуемая краевая задача принимает вид

$$\mathcal{L} \delta E(z, \Lambda) - \Lambda \frac{\vartheta(z)}{D} \delta E(z, \Lambda) = \\ = - \frac{4\pi}{\epsilon} \frac{\vartheta(z)}{D} \delta J(\Lambda) - \Lambda \frac{\vartheta(z)}{D} \xi(z), \quad (2.4) \\ \delta E(z, \Lambda) = \delta E(z + L, \Lambda).$$

Здесь \mathcal{L} — линейный самосопряженный дифференциальный оператор, определяемый равенством

$$\mathcal{L} \delta E = \frac{d}{dz} \left[\vartheta(z) \frac{d \delta E}{dz} \right] - \\ - \frac{4\pi}{\epsilon} \frac{\vartheta(z)}{D} \left[\rho \frac{d(\mu E)}{dE} - 2 \frac{d}{dz} (\dot{D} E \rho) \right] \delta E; \quad (2.4')$$

функция $\vartheta(z)$ дается выражением

$$\vartheta(z) = \exp \left[- \int_0^z dz \frac{\mu E - u_0 - \frac{8\pi}{\epsilon} (2\rho - \rho_0) E \dot{D}}{D} \right], \quad (2.4'')$$

а

$$\xi(z) = \delta E(z, t) |_{t=0}$$

*) Для целей настоящей главы преобразование Лапласа представляется более удобным, чем использованное в главе III преобразование Фурье. Очевидно, величины Λ связаны с частотами ω соотношением $\Lambda = -i\omega$.

— малая начальная флуктуация напряженности поля. Временная эволюция такой флуктуации получается из решения краевой задачи (2.4) обратным преобразованием Лапласа:

$$\delta E(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} d\Lambda e^{\Lambda t} \frac{\delta E(z, \Lambda)}{\Lambda}. \quad (2.5)$$

Величина s выбирается так, чтобы все особые точки подынтегральной функции лежали левее прямой $\operatorname{Re} \Lambda = s$ на комплексной плоскости Λ . Из формулы (2.5) видно, что если в точке $\Lambda = \Lambda_n$ подынтегральное выражение имеет полюс, то выражение для $\delta E(z, t)$ содержит член, пропорциональный $\exp \Lambda_n t$. Поэтому наличие полюсов подынтегрального выражения в правой полуплоскости комплексного переменного Λ ($\operatorname{Re} \Lambda > 0$) приводит к неограниченному экспоненциальному (в рамках линейной теории) росту малых флуктуаций со временем, т. е. к неустойчивости системы. Исследование устойчивости сводится, таким образом, к нахождению спектра флуктуаций системы, т. е. тех значений Λ , при которых подынтегральное выражение в (2.5) имеет полюсы.

Рассмотрим вспомогательную задачу на собственные значения, соответствующую задаче (2.4):

$$\mathcal{L}\psi(z) - \lambda \frac{\vartheta(z)}{D} \psi(z) = 0, \quad \psi(z) = \psi(z + L). \quad (2.6)$$

Собственные функции этой задачи $\psi_n(z)$, соответствующие вещественным собственным значениям λ_n , образуют полную ортонормированную (с весом $\vartheta(z)/D$) систему; эти функции мы всегда будем считать вещественными.

Решение задачи (2.4) удобно искать, разложив его по собственным функциям задачи (2.6):

$$\delta E(z, \Lambda) = \sum_n C_n(\Lambda) \psi_n(z). \quad (2.7)$$

Подставляя это разложение в уравнение (2.4), умножая последнее на $\psi_m(z)$ и интегрируя по z от 0 до L , мы приходим к следующей алгебраической линейной неоднородной системе для определения коэффициентов

разложения $C_n(\Lambda)$:

$$(\Lambda - \lambda_n) C_n(\Lambda) = \frac{4\pi}{\varepsilon} \delta J(\Lambda) \int_0^L \frac{\vartheta(z)}{D} \psi_n(z) dz + \Lambda \xi_n, \quad (2.8)$$

где

$$\xi_n = \int_0^L \frac{\vartheta(z)}{D} \psi_n(z) \xi(z)$$

— коэффициент разложения начальной флуктуации напряженности поля по функциям ψ_n : $\xi(z) = \sum_n \xi_n \psi_n(z)$.

С помощью соотношения (2.8) нетрудно найти дифференциальный импеданс образца, определяемый равенством (см. гл. III):

$$Z_{\text{обр}}(\omega) = \left. \frac{\delta V(\Lambda)}{\delta J(\Lambda)} \right|_{\Lambda = -i\omega} = \frac{\int_0^L \delta E(z, -i\omega) dz}{\delta J(-i\omega)}. \quad (2.9)$$

Из формул (2.7) — (2.9) имеем

$$Z_{\text{обр}}(\omega) = - \sum_n \frac{u_{nn}}{i\omega + \lambda_n}, \quad (2.10)$$

где

$$u_{mn} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_0^L dz \frac{\vartheta(z)}{D} \psi_m(z) \int_0^L dz \psi_n(z). \quad (2.11)$$

Подставив теперь $\delta J(\Lambda)$ из выражения (2.3) в уравнение (2.8), мы можем переписать систему (2.8) в виде

$$\sum_n A_{mn}(\Lambda) C_n(\Lambda) = \Lambda \xi_m + \frac{4\pi}{\varepsilon R} \delta \mathcal{E}(\Lambda) \int_0^L \frac{\vartheta(z)}{D} \psi_m(z) dz, \quad (2.8')$$

где

$$A_{mn}(\Lambda) = (\Lambda - \lambda_m) \delta_{mn} + \frac{u_{mn}}{R}.$$

Общее решение системы (2.8) можно записать в виде

$$C_n(\Lambda) = \frac{\Lambda \text{Det } A^{(n)}}{\text{Det } A}.$$

Здесь $\text{Det } A$ — определитель матрицы с элементами A_{mn} , а $\text{Det } A^{(n)}$ — определитель той же матрицы, в которой n -й столбец элементов заменен числами

$$\xi_m + \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{1}{R\Lambda} \int_0^L \frac{\vartheta}{D} \psi_m dz \delta \mathcal{E}(\Lambda).$$

В силу произвольности формы начальной флуктуации $\xi(z)$, значения Λ , при которых $\text{Det } A$ обращается в нуль, вообще говоря, не совпадают с нулями $\text{Det } A^{(n)}$. Поэтому нули $\text{Det } A$ на комплексной плоскости Λ соответствуют полюсам коэффициентов $C_n(\Lambda)$ и, следовательно, полюсам подынтегральной функции в выражении (2.5).

Таким образом, спектр флуктуаций определяется из уравнения

$$\text{Det } A(\Lambda) = 0. \quad (2.12)$$

Определитель (2.12) можно вычислить, воспользовавшись тем, что, по определению, $u_{mn}u_{nm} = u_{mm}u_{nn}$. В результате уравнение (2.12) принимает вид

$$\frac{1}{R} \prod_n (\Lambda - \lambda_n) \left(R + \sum_n \frac{u_{nn}}{\Lambda - \lambda_n} \right) = 0. \quad (2.13)$$

Последний из сомножителей в левой части уравнения (2.13) представляет собой не что иное, как импеданс цепи, равный сумме сопротивления нагрузки R и импеданса образца (2.10). Мы видим, что, вообще говоря, условие (2.13) не совпадает с условиями, определяющими нули и полюсы полного дифференциального импеданса системы «образец плюс нагрузка» (ср. с § III.4). Действительно, полюсы импеданса системы могут и не содержаться в спектре флуктуаций из-за взаимной компенсации одного из сомножителей и соответствующего полюсного члена в левой части уравнения (2.13). С другой стороны, в спектре флуктуаций могут встречаться значения Λ , при которых импеданс системы не имеет ни нулей, ни полюсов. Эти значения Λ отвечают флуктуациям, не выходящим во внешнюю цепь. Действительно,

пусть для какой-либо из собственных функций, скажем ψ_s , справедливо равенство $\int_0^L \psi_s dz = 0$ *). В этом слу-

чае $u_{ss} = 0$ и полюс импеданса при $\Lambda = \lambda_s$ отсутствует. Из уравнения (2.13) следует, однако, что спектр флуктуаций содержит значение $\Lambda = \lambda_s$. При $\lambda_s > 0$ последнее обстоятельство означает, что система оказывается флуктуационно неустойчивой, будучи устойчивой по импедансу. Физически вполне понятно, что внешняя цепь не оказывает влияния на временную эволюцию флуктуаций,

для которых $\int_0^L \delta E dz = 0$, т. е. флуктуаций, не меняющих падения напряжения на образце (не выходящих во внешнюю цепь). Вывод об устойчивости или неустойчивости системы относительно таких флуктуаций сохраняет силу независимо от характера и величины внешней нагрузки: собственное значение λ_s в случае,

когда $\int_0^L \psi_s dz = 0$, содержится в спектре флуктуаций при любых R .

Заметим, что выражение (2.10), полученное нами для модельной системы (2.1) с периодическими граничными условиями, фактически оказывается значительно более общим. Для весьма широкого класса систем линейное уравнение для малых флуктуаций напряженности поля приводится к виду

$$[\tilde{\mathcal{L}}(x, \Lambda) - \Lambda r(x)] \delta E(x) = -\rho(x) \delta J(\Lambda) - \Lambda r(x) \xi(x), \quad (2.14)$$

где $\tilde{\mathcal{L}}(x, \Lambda)$ — линейный дифференциальный оператор с коэффициентами при производных, вообще говоря, зависящими от Λ ; $r(x)$ и $\rho(x)$ — некоторые знакопостоянные функции, а $\xi(x)$ — начальное значение флуктуации напряженности поля.

*) Мы не рассматриваем случай, когда интеграл $\int_0^L (\partial/D) \psi_s dz$ обращается в нуль. В самом деле, обращение этого интеграла в нуль может произойти только случайно — достаточно малого изменения параметров для того, чтобы он стал отличным от нуля.

Задание некоторых линейных граничных условий, число которых равно порядку дифференциального оператора $\tilde{\mathcal{L}}(x, \Lambda)$, полностью определяет задачу. Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что решение неоднородного уравнения (2.14) можно выразить через функцию Грина $G(x, x', \Lambda)$ соответствующего однородного уравнения

$$\delta E(x, \Lambda) = \int_0^L G(x, x', \Lambda) [\rho(x') \delta J(\Lambda) + \Lambda r(x') \xi(x')] dx'. \quad (2.15)$$

Отсюда для импеданса образца, определяемого по-прежнему как коэффициент пропорциональности между изменением напряжения на образце и изменением полного тока (см. (2.9)), получаем

$$Z_{\text{обр}}(i\Lambda) = \int_0^L dx \int_0^L dx' \rho(x') G(x, x', \Lambda). \quad (2.16)$$

Для важного частного случая, когда оператор $\tilde{\mathcal{L}}(x, \Lambda)$ не зависит от Λ ,

$$\tilde{\mathcal{L}}(x, \Lambda) = \mathcal{L}(x), \quad (2.17)$$

для функции Грина справедливо билинейное разложение [4]

$$G(x, x', \Lambda) = \sum_n \frac{\psi_n(x) \chi_n(x')}{\lambda - \lambda_n}, \quad (2.18)$$

где $\psi_n(x)$ и λ_n — собственные функции и собственные значения задачи

$$\mathcal{L}\psi - \lambda r\psi = 0$$

(с соответствующими граничными условиями), а χ_n — собственные функции сопряженной задачи, нормированные так, что $\int_0^L \psi_n \chi_n r dx = 1$. Из формул (2.16) и (2.18)

немедленно следует, что импеданс должен иметь полюсную структуру (2.10).

В общем случае, когда коэффициенты оператора $\tilde{\mathcal{L}}(x, \Lambda)$ параметрически зависят от Λ , однородная задача может и вообще не иметь собственных значений. Если же собственное значение существует и равно, скажем, λ_0 (а соответствующая ему собственная функция есть $\psi_0(x)$), то можно показать, что функция Грина, рассматриваемая как функция комплексного переменного Λ , имеет полюс при $\Lambda = \lambda_0$. Действительно,

$$[\tilde{\mathcal{L}}(x, \Lambda) - \Lambda r(x)] \psi_0(x) = \\ = \{[\tilde{\mathcal{L}}(x, \Lambda) - \tilde{\mathcal{L}}(x, \lambda_0)] - (\Lambda - \lambda_0) r(x)\} \psi_0(x),$$

т. е.

$$\psi_0(x) = - \int_0^L dx' G(x, x', \Lambda) \{[\tilde{\mathcal{L}}(x', \Lambda) - \tilde{\mathcal{L}}(x', \lambda_0)] - \\ - (\Lambda - \lambda_0) r(x')\} \psi_0(x'),$$

и для значений Λ , близких к λ_0 , приближенно имеем

$$\psi_0(x) \approx (\Lambda - \lambda_0) \times \\ \times \int_0^L dx' G(x, x', \Lambda) \left[r(x') - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}(x', \Lambda)}{\partial \Lambda} \Big|_{\Lambda=\lambda_0} \right] \psi_0(x').$$

Поскольку выражение в квадратных скобках, вообще говоря, не имеет особенности при $\Lambda \rightarrow \lambda_0$, отсюда вытекает наличие полюса функции Грина в точке λ_0 . Если соответствующие интегралы от собственной функции не обращаются в нуль, т. е. если флуктуация выходит во внешнюю цепь, то полюсу функции Грина соответствует и полюс импеданса.

Таким образом, в достаточно общем случае нахождение спектра собственных значений (или полюсов функции Грина) позволяет дать ответ на вопрос о флуктуационной устойчивости системы. Разумеется, для достаточно сложных систем, когда оператор $\tilde{\mathcal{L}}(x, \Lambda)$ действительно содержит Λ , не только явное нахождение полюсов функции Грина, но даже качественное исследование их положения на комплексной плоскости чрезвычайно затруднено. С этим, в частности, связаны трудности, возникающие при анализе систем с рекомбинационной нелинейностью.

§ 3. Устойчивость стационарного движения доменов [3, 5]

Конкретное исследование устойчивости решения, описывающего стационарное движение доменов, требует анализа спектра флуктуаций системы, даваемого уравнением (2.13). Наличие в спектре значений Λ , вещественная часть которых положительна, приводит, как уже отмечалось, к флуктуационной неустойчивости системы.

Очевидно, в режиме заданного тока ($\delta J = 0$) спектр флуктуаций совпадает со спектром собственных значений λ_n задачи (2.6). Наличие по крайней мере одного положительного собственного значения среди λ_n означает флуктуационную неустойчивость системы в режиме заданного тока. Условия существования положительных собственных значений в спектре задачи (2.6) можно исследовать в достаточно общем виде, не прибегая к вычислению явного вида функций, описывающих распределение поля в образце, а воспользовавшись лишь некоторыми качественными особенностями этого распределения.

Заметим прежде всего, что производная $dE(z)/dz$ удовлетворяет уравнению (2.6) при $\lambda = 0$:

$$\mathcal{L} \frac{dE}{dz} = 0. \quad (3.1)$$

Это равенство связано с инвариантностью уравнений, описывающих стационарное решение, относительно сдвига (аналогичное соотношение использовалось в работе [6]). Его можно проверить и непосредственно, воспользовавшись определением оператора \mathcal{L} и системой основных уравнений, описывающих риманово решение. Поскольку функция dE/dz удовлетворяет периодическим граничным условиям, $\lambda = 0$ есть собственное значение, а соответствующая ему собственная функция есть $\tilde{\psi} = A \frac{dE}{dz}$ (A — нормировочный множитель).

Согласно осцилляционной теореме для самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими граничными условиями [7], все собственные значения задачи (2.6) можно расположить в невозрастающую последовательность $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$

($\lambda_n \geq \lambda_{n+1}$) так, что собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n , имеет в полуоткрытом промежутке $[0, L)$ n нулей, если n четно, и $(n + 1)$ нулей, если n нечетно. Когда решение, исследуемое на устойчивость, описывает распространение k доменов, функция dE/dz имеет $2k$ нулей. В самом деле, при наличии k доменов число максимумов поля $E(z)$ равно k , а в силу периодичности функции $E(z)$ общее число ее экстремумов всегда четно и равно $2k$. Таким образом, собственное значение $\lambda = 0$ имеет номер $(2k - 1)$ (или $2k$), так что всегда существует по крайней мере $(2k - 1)$ положительных собственных значений задачи (2.6). Это означает, что в режиме заданного тока k -доменное решение ($k \geq 1$), вообще говоря, неустойчиво.

Уравнение (2.6) иногда бывает удобно исследовать, воспользовавшись формальной квантовомеханической аналогией. С этой целью перепишем уравнение (2.6) в виде

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} - \left[U(z) + \frac{\lambda}{D} \right] \beta = 0, \quad (3.2)$$

где $\beta = \vartheta^{1/2}\psi$, а

$$U(z) = \frac{4\pi}{eD} \left[\rho \frac{d(\mu E)}{dE} - 2 \frac{d}{dz} (\dot{D}E\rho) \right] + \frac{1}{2\vartheta} \frac{d^2\vartheta}{dz^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dz} \ln \vartheta \right)^2.$$

Поскольку коэффициент диффузии D всегда положителен, уравнение (3.2) аналогично одномерному уравнению Шредингера; функция β играет роль волновой функции, $U(z)$ — роль потенциальной энергии. При $D = \text{const}$ уравнение (3.2) точно совпадает с уравнением Шредингера, в которое вместо энергии входит величина $-\lambda/D \equiv W$, так что возрастанию параметра λ соответствует убывание «энергии» W . Состоянию, описываемому собственной функцией ψ_0 , не имеющей нулей, отвечает наибольшее собственное значение λ_0 , т. е. наименьшая «энергия»; такое состояние, следуя квантовомеханической терминологии, мы будем называть основным. Примерный ход «потенциальной энергии» $U(z)$ для случая, когда в образце распространяется один широкий домен с плоским верхом, показан на рис. 59, б. Функция $U(z)$ имеет вид потенциальной ямы; как внутри домена,

так и вне его она почти постоянна и положительна. При стремлении длины образца к бесконечности размеры плоских участков неограниченно возрастают. При этом, как хорошо известно, спектр собственных значений энергии, лежащих выше дна ямы, становится непрерывным.

Наряду с непрерывным спектром в бесконечном образце сохраняются и дискретные собственные значения. В частности, наибольшее собственное значение λ_0 , лежащее в области отрицательных «энергий», и собственное значение $\lambda=0$ принадлежат дискретному спектру. Собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, экспоненциально убывают при удалении от стенок ямы в глубь «подбарьерной» области, — в этом нетрудно убедиться, повторяя соответствующее рассуждение квантовой механики. Если домен достаточно широк, то функция $\tilde{\psi}$ мала внутри домена; тогда ее и знакопостоянную собственную функцию ψ_0 можно рассматривать как антисвязывающую и связывающую комбинации двух функций, локализованных вблизи стенок домена. Собственное значение λ_0 определяется степенью перекрытия этих двух функций; для широкого домена величина перекрытия экспоненциально убывает с увеличением ширины домена. Оценка величины λ_0 для домена с плоским верхом в бесконечном образце при $D \rightarrow 0$ в пренебрежении термоэлектрическим током дает (см. Приложение VII)

$$\lambda_0 \approx D \sqrt{\frac{\pi D}{e\sigma(E_{\max})} \frac{[\mu(E_{\max}) E_{\max} - u_0]^2}{D^2 (E_{\max} - E_1)}}, \quad (3.3)$$

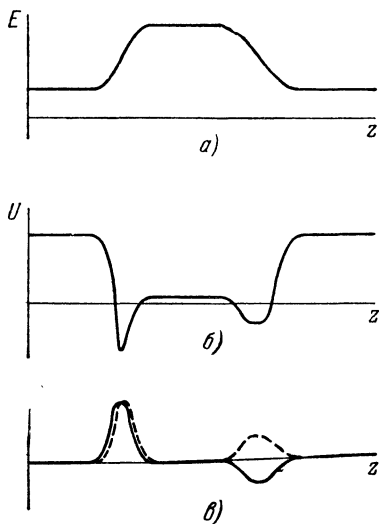


Рис. 59. Стационарно движущийся широкий домен.

а) Распределение напряженности поля, б) функция $U(z)$, в) собственные функции: ψ_0 — штриховая линия, $\tilde{\psi}$ — сплошная.

где E_1 и E_{\max} — минимальное и максимальное значения поля в образце.

Вид функций $\tilde{\psi}$ и ψ_0 схематически показан на рис. 59, в. Обе они локализованы в областях доменных стенок; функция $\tilde{\psi}$ имеет разные знаки на переднем и на заднем фронтах домена и отвечает малому смещению его как целого, а функция ψ_0 знакопостоянна, и соответствующее ей возмущение вызывает изменение ширины домена. Собственная функция $\tilde{\psi}$ не дает вклада в импеданс образца. Действительно,

$$\int_0^L \tilde{\psi}(z) dz = \int_0^L \frac{dE(z)}{dz} dz = 0,$$

и соответствующий член в сумме (2.10) обращается в нуль. Напротив, вклад основного состояния в импеданс на низких частотах существен, так как энергетический знаменатель мал. В общем случае нет оснований ожидать, что наряду с λ_0 какое-либо другое собственное значение окажется близким к $\lambda = 0$. Поэтому поведение системы на низких частотах будет главным образом определяться членом, описывающим вклад основного состояния. Его можно выделить, представив сумму (2.10) в виде

$$Z_{\text{обр}}(\omega) = -\frac{u_{00}}{i\omega + \lambda_0} + Z_e(\omega). \quad (3.4)$$

В $Z_e(\omega)$ дают вклад все отрицательные собственные значения.

Пренебрежем вкладом отрицательных собственных значений, отвечающих дискретному (при $L \rightarrow \infty$) спектру, если таковые вообще имеются. Это можно сделать в силу малости знаменателя в формуле (3.4) по сравнению со знаменателями членов, соответствующих названным собственным значениям. Тогда можно сказать, что основной вклад в $Z_e(\omega)$ дадут области, лежащие вне доменных стенок, так как локализованное вблизи стенок возмущение слабо влияет на собственные функции непрерывного спектра — последние одного порядка внутри и вне стенок. Таким образом, в длинных образцах мы можем рассматривать первый член в (3.4) как импеданс

доменных стенок, а $Z_e(\omega)$ — как импеданс остальной части образца, «включенной» последовательно.

В главе III было показано, что импеданс однородного образца испытывает дисперсию на частотах порядка обратного дифференциального максвелловского времени релаксации. Пусть рассматриваемые значения Λ и соответствующие им частоты по абсолютной величине малы по сравнению с обратным максвелловским временем вне домена (и внутри него, если домен широкий). Тогда можно вообще пренебречь частотной зависимостью $Z_e(\omega)$, полагая просто $Z_e(\omega) \approx Z_e(0)$. В этом случае из уравнения (2.13) получим

$$\frac{u_{00}}{\Lambda - \lambda_0} + R + Z_e(0) = 0, \quad (3.5)$$

откуда

$$\Lambda = \lambda_0 - \frac{u_{00}}{R + Z_e(0)}. \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) показывает, что при уменьшении нагрузочного сопротивления величина положительного собственного значения уменьшается ($u_{00} > 0$ в силу знакопостоянства функции $\psi_0(z)$). При некотором значении R , равном R_c , выражение (3.6) может изменить знак и домен станет устойчивым. Величина R_c равна

$$R_c = \frac{u_{00}}{\lambda_0} - Z_e(0) = -Z_{\text{обр}}(0), \quad (3.7)$$

где $Z_{\text{обр}}(0)$ — импеданс образца с доменом при частоте, равной нулю, который мы для краткости будем называть статическим (дифференциальным) импедансом. Для всех $R < R_c$ стационарно движущийся домен устойчив относительно малых флуктуаций.

Очевидно, при $Z_{\text{обр}}(0) > 0$ неравенство $R < R_c$ не может быть выполнено ни при каких R , и установившееся движение домена неустойчиво при любом значении активного нагрузочного сопротивления. Вспомним, что для пространственно однородного состояния система оказывается неустойчивой при условии отрицательности статического импеданса. Причину этого нетрудно понять, если заметить, что в пространственно однородном случае в длинном образце непрерывный спектр начинается сразу же от границы, равной $\Lambda_{\text{max}} = -4\pi\sigma/\epsilon$.

В этом случае изменение сопротивления нагрузки влияет лишь на верхнее собственное значение спектра, оставляя остальные неизменными.

В условиях, когда в образце образовался домен, положительное собственное значение единственно. Условие отрицательности статического импеданса определяет возможность изменения знака этого собственного значения при уменьшении сопротивления нагрузки. Положительному собственному значению λ_0 отвечает собственная функция $\psi_0(z)$, описывающая возмущение, которое изменяет ширину домена. Такое возмущение с необходимостью приводит к изменению полного падения напряжения на образце. По этой причине это возмущение, возможное в режиме заданного тока, оказывается невозможным в режиме заданного напряжения. Однако переход к «истинному» режиму заданного напряжения может оказаться вообще невозможным для данного образца, если распределенное сопротивление пассивной части образца $Z_e(0)$, играющее роль нагрузки, достаточно велико. Требование отрицательности статического импеданса как раз и ограничивает допустимую величину «включенного» последовательно сопротивлению пассивной части образца.

Рассмотрим частный случай — устойчивость решения, отвечающего распространению в образце k доменов малой амплитуды (§ V.6). Такое решение возможно, если длина образца кратна «периоду» обхода замкнутой траектории, близкой к центру, т. е. если

$$L = \frac{2\pi k}{\sqrt{\frac{4\pi |\sigma|}{\epsilon D}}} . \quad (3.8)$$

Функция $U(z)$ в уравнении (3.2) в этом случае состоит из постоянной отрицательной составляющей и малой осциллирующей добавки. Если амплитуда изменений напряженности поля будет достаточно малой, то наличие малой осциллирующей добавки несущественно и флуктуации ведут себя так же, как и в однородном образце с теми же параметрами. Именно, флуктуации плотности заряда будут нарастать, поскольку длина образца ограничена снизу минимальным размером домена и мнимая часть частоты (см. (III.4.4)) при $k \geq 2$ всегда

положительна. Это находится в соответствии с общим результатом, полученным в начале настоящего параграфа, о наличии положительных собственных значений в спектре флуктуаций при $k \geq 2$.

Отметим далее, что, поскольку собственные функции «возбужденных» собственных состояний $\psi_n(z)$ близки к гармоническим, соответствующие колебания не будут выходить во внешнюю цепь и положительные собственные значения сохраняются в спектре флуктуаций при любом значении R . Таким образом, система нескольких ($k \geq 2$) доменов малой амплитуды будет неустойчивой при любом электрическом режиме цепи.

Остановимся теперь на случае, когда в образце движется k стационарных доменов ($k \geq 2$), достаточно далеко отстоящих друг от друга. Всю длину образца можно разбить на k равных отрезков, так что на каждом из них расположен один домен. Пусть λ_0 — собственное значение задачи (2.6), соответствующее образцу длины L/k с одним доменом. Тогда в нашем случае это собственное значение, вообще говоря, расщепится на k собственных значений при учете перекрытия собственных функций, локализованных вблизи каждого из доменов. При удалении от стенок домена эти собственные функции экспоненциально убывают и близки к нулю в области между доменами. Пренебрегая их малым перекрытием, получаем, что собственное значение $\Lambda = \lambda_0$ имеет k -кратное вырождение. Из уравнения (2.13) видно, что если собственное значение вырождено, то $\Lambda = \lambda_0$ есть решение уравнения (2.13) при любом значении сопротивления нагрузки R . Поскольку, как было показано выше, для одномерной задачи наибольшее собственное значение положительно, спектр флуктуаций в образце с несколькими доменами будет всегда содержать положительное собственное значение. Иначе говоря, система k доменов ($k \geq 2$) неустойчива при любом электрическом режиме в цепи.

Для того чтобы проследить, как изменяется неустойчивое k -доменное решение, рассмотрим в качестве примера случай двух доменов. В условиях малого перекрытия две собственные функции, отвечающие двукратно вырожденному собственному значению λ_0 , представляют собой связывающую и антисвязывающую комбинации

функций, локализованных в областях первого и второго доменов. Если λ_0 — наибольшее собственное значение однодоменной задачи на отрезке длиной $L/2$, то соответствующая ему собственная функция не имеет нулей. Следовательно, собственная функция двухдоменной задачи, отвечающая связывающей комбинации, не имеет нулей, и связанное с ней возмущение вызывает одновременный рост (или уменьшение) обоих доменов. Такое изменение формы доменов неизбежно сопровождается изменением полного падения напряжения на образце; в режиме заданного напряжения такие флуктуации должны гаситься.

Нули собственной функции, отвечающей антисвязывающей комбинации, расположены в области между доменами. Возмущение, связанное с такой функцией, приводит к росту одного домена при одновременном уменьшении второго. Подобное возмущение не сопровождается изменением падения напряжения на образце, величина u_{00} для него обращается в нуль (возмущение не дает вклада в импеданс), а собственное значение не зависит от величины сопротивления нагрузки.

Таким образом, система с несколькими стационарно движущимися доменами флуктуационно неустойчива: одни из доменов растут «за счет» других. Такая система стремится перейти в состояние с меньшим числом доменов. Процесс перехода двухдоменного состояния в однодоменное экспериментально наблюдался в работе [8].

Многодоменное состояние часто возникает в макроскопически однородном образце сразу же после резкого включения постоянного напряжения [9—12]. Такое состояние получается при одновременном росте малых возмущений, связанных с наличием затравочных неоднородностей («естественных» или созданных искусственно). Как правило, в тех случаях, когда образец достаточно однороден, через небольшой промежуток времени (порядка пролетного времени) в цепи устанавливается основной колебательный режим, связанный с образованием одного домена. Возникает вопрос, нельзя ли добиться поддержания колебаний, связанных с движением нескольких доменов, при работе прибора на частоте, кратной основной. Расчет [13, 14] показывает, что с точки зрения КПД и мощности такой режим мог бы оказаться более

выгодным, чем однодоменный. В принципе такой режим при определенных условиях мог бы реализоваться, ибо, как мы знаем (гл. III), вывод о неустойчивости того или иного состояния системы еще не означает его принципиальной ненаблюдаемости. Если каким-либо образом удалось «приготовить» такое состояние, оно может оказаться наблюдаемым, коль скоро время его распада достаточно велико, и характер распределения поля в домене не меняется существенным образом за время его прохождения через образец.

§ 4*. Абсолютная и конвективная неустойчивость системы с движущимися доменами [5]

При рассмотрении вопроса о флуктуационной устойчивости неоднородного состояния, как и в однородном случае (см. § III.4), важно определить характер неустойчивости (в рамках линейной теории), т. е. найти характер временной и пространственной эволюции малых локализованных начальных возмущений. Как мы видели в главе V, риманово решение описывает движение домена во время прохождения его по образцу вне контактов. По этой причине и в задаче об устойчивости стационарного движения доменов удобно ограничиться временами, не превосходящими T — периода колебаний тока в цепи. В связи с этим критерий абсолютной и конвективной неустойчивости нуждается в некоторой модификации по сравнению с главой III.

Как и в главе III, будем называть неустойчивость конвективной, если заданное локализованное начальное возмущение изменяется во времени так, что оно остается ограниченным при возрастании t в любой заданной точке образца. В противном случае неустойчивость называется абсолютной. Результат исследования характера неустойчивости существенно зависит от того, каковы размеры образца и каковы характерные времена наблюдения.

В образце конечных размеров спектр флуктуаций в системе дискретен, и в условиях неустойчивости рост малой флуктуации, $\delta E(z, t)$, при больших t определяется членом, пропорциональным $\exp \Lambda_0 t$, где Λ_0 — собственное значение с наибольшей вещественной частью (см. формулу (2.5)). Соответствующий множитель, стоящий

перед $\exp \lambda_0 t$, представляет собой ограниченную (в конечном образце) функцию z , и при $t \rightarrow \infty$ возникшая малая флуктуация нарастает в любой точке образца. Причину этого нетрудно понять, если заметить, что периодические граничные условия не возмущают движения флуктуации — форма и размеры флуктуации, входящей в образец, определяются флуктуацией, выходящей из него.

В принципе периодические граничные условия позволяют рассматривать многократное прохождение флуктуации через образец. При неустойчивости флуктуация нарастает в процессе каждого последовательного прохождения через образец, что и приводит к абсолютной неустойчивости. Подобный подход, разумеется, не описывает реальных процессов, определяющихся особыми свойствами контактов. Для нас это обстоятельство, однако, оказывается несущественным, поскольку мы с самого начала отказались от рассмотрения времен, превышающих период колебаний тока $T = L/u_0 k$ (k — число доменов в образце, u_0 — их скорость), т. е. мы рассматриваем лишь однократное прохождение флуктуаций через образец. При такой постановке задачи мы уже не имеем права переходить к пределу $t \rightarrow \infty$, оставляя конечными размеры образца. Поэтому будем считать, что образец достаточно длинен, так что, несмотря на указанное ограничение, имеет смысл рассматривать времена, достаточно большие по сравнению со временем распада данного состояния; иначе говоря, инкремент нарастания флуктуации λ_0 должен быть велик по сравнению с частотой колебаний тока: $\lambda_0 \gg 1/T$.

Рассмотрим характер неустойчивости стационарного домена в режиме заданного тока, пренебрегая для простоты термоэлектрическим током. Пусть λ_0 — положительное собственное значение задачи (2.6), тогда возрастающая компонента малой флуктуации есть

$$\delta E(z, t) \approx A \psi_0(z) \exp \lambda_0 t, \quad (4.1)$$

где, как и раньше, $\psi_0(z)$ — собственная функция основного состояния, локализованная вблизи стенок домена и не имеющая нулей, а A — малая постоянная, определяемая начальным возмущением. В области вблизи стенок $\psi_0(z)$ ведет себя как $|E_z|$ (см. § 3), а при удалении от стенок домена в «подбарьерную» область спадает по

экспоненциальному закону,

$$\psi_0(z) \sim \exp\left(-\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon D} + \frac{\lambda_0}{D}} |z - z_s|\right), \quad (4.2)$$

как непосредственно следует из уравнения (3.2) с учетом определения функции $U(z)$. В выражении (4.2) координата z_s отвечает положению стенки домена, а значение подкоренного выражения берется при напряженности поля, равной соответственно напряженности поля вне и внутри домена, в зависимости от того, лежит ли точка z вне или внутри домена.

Рассмотрим теперь поведение нарастающей компоненты возмущения (4.1) во времени и в пространстве. Для этой цели перейдем вновь от переменных z, t к переменным x, t . Выражение (4.1) описывает флуктуацию, сносимую вдоль образца со скоростью u_0 и нарастающую с инкрементом λ_0 . Для рассмотрения поведения возмущения в фиксированной точке пространства удобно ввести скорость перемещения заданного значения флуктуации напряженности поля. Эту скорость можно получить, дифференцируя равенство $\delta E(x - u_0 t, t) = \delta E_1$:

$$v = u_0 - \frac{\frac{\partial \delta E(z, t)}{\partial t}}{\frac{\partial \delta E(z, t)}{\partial z}}. \quad (4.3)$$

Введенная скорость v , вообще говоря, различна для различных участков флуктуации*): для флуктуации, нарастающей во времени ($\frac{\partial \delta E}{\partial t} > 0$), $v > u_0$ на ее переднем фронте ($\frac{\partial \delta E}{\partial z} < 0$), и $v < u_0$ на заднем ($\frac{\partial \delta E}{\partial z} > 0$). В области заднего фронта флуктуации скорость v может менять знак. При изменении знака скорости заднего

*) Точка, в которой скорость v обращается в бесконечность ($\frac{\partial \delta E}{\partial z} = 0$), соответствует той ситуации, когда поле в максимуме (минимуме) флуктуации равно δE_1 . В предшествующие (последующие) моменты времени понятие скорости распространения заданного значения δE_1 вообще нельзя ввести, так как везде в рассматриваемой области значений $\delta E(x - u_0 t, t) < \delta E_1$ (или $\delta E(x - u_0 t, t) > \delta E_1$).

фронта флуктуации неустойчивость из конвективной становится абсолютной.

Действительно, рассмотрим, например, задний фронт флуктуации, на котором везде $\frac{\partial \delta E}{\partial z} > 0$. В фиксированной точке пространства в пределах рассматриваемого участка напряженность поля флуктуации убывала бы за

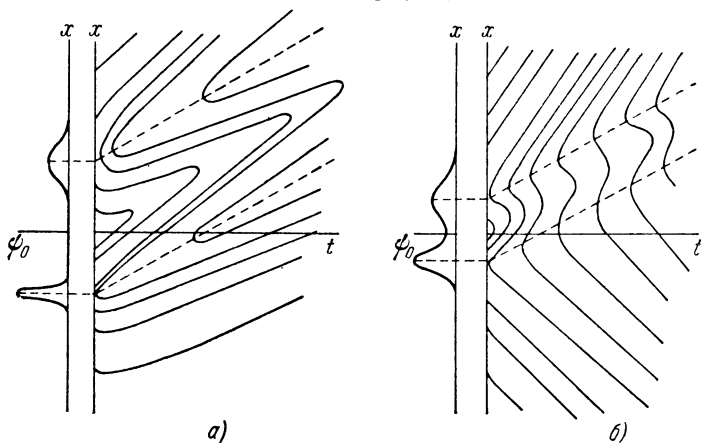


Рис. 60. Кривые постоянной напряженности поля флуктуации в случаях конвективной (а) и абсолютной (б) неустойчивости.

счет ее сноса, если бы флуктуация не нарастала со временем, а скорость v была бы постоянной и равной u_0 . Рост флуктуации приводит, однако, к тому, что характер изменения флуктуационной напряженности поля зависит от соотношения между скоростью сноса и инкрементом нарастания. В случае, когда нарастание флуктуации за счет множителя $\exp \lambda_0 t$ в какой-либо точке участка с $\frac{\partial \delta E}{\partial z} > 0$ превышает убывание ее за счет сноса, напряженность поля флуктуации в данной точке растет, что соответствует абсолютной неустойчивости. При этом точка, отвечающая заданному значению напряженности поля, смещается в направлении, противоположном направлению движения максимума флуктуации, т. е. скорость v меняет знак.

Сказанное выше можно проиллюстрировать, рассматривая рис. 60, на котором схематически изображены кри-

вые постоянного значения напряженности поля флуктуации, соответствующие различным ее участкам. Очевидно, экстремумы флуктуации смещаются по образцу со скоростью u_0 , определяющей угловой коэффициент наклона штриховых прямых на рис. 60. В области экспоненциально убывающих «хвостов» флуктуации скорость v постоянна и, в силу соотношений (4.1) — (4.3), равна

$$v = u_0 \pm \frac{\lambda_0}{\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon D} + \frac{\lambda_0}{D}}}, \quad (4.4)$$

где по-прежнему подкоренное выражение берется при соответствующей напряженности поля, а знаки плюс или минус соответствуют участкам с $\frac{\partial \delta E}{\partial z} < 0$ и $\frac{\partial \delta E}{\partial z} > 0$. По этой причине при достаточном удалении от стенок домена (и от его «середины», где сказывается влияние обеих его стенок) кривые распространения заданных значений напряженности поля превращаются в семейства параллельных прямых, наклон которых дается формулой (4.4).

Различие между рис. 60, а и 60, б состоит в том, что в случае рис. 60, а знак скорости распространения заднего фронта возмущения совпадает со знаком u_0 . Мы видим, что нарастающее возмущение сносится вместе с доменом и в любой заданной точке образца возмущение остается ограниченным при возрастании времени. Напротив, ситуация, изображенная на рис. 60, б, характеризуется тем, что задний фронт флуктуации распространяется в направлении, противоположном направлению движения ее переднего фронта (и самого домена). В любой заданной точке образца возмущение нарастает с течением времени и неустойчивость абсолютна.

Скорость «хвоста» заднего фронта флуктуации обращается в нуль при

$$\lambda_0 = \lambda_c = u_0 \left(\frac{u_0}{2D} + \sqrt{\frac{u_0^2}{4D^2} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon D}} \right). \quad (4.5)$$

Для всех $\lambda_0 > \lambda_c$ имеем $v < 0$ и неустойчивость абсолютна. Заметим, что для домена с плоским верхом значение λ_0 , даваемое формулой (3.3), экспоненциально мало и неустойчивость имеет конвективный характер.

Все сказанное выше переносится без изменений и на случай, когда в образце распространяется несколько доменов. Действительно, мы рассматриваем времена, не превышающие T . Возмущение, локализованное вблизи одного из доменов, может достичь соседнего домена за время порядка $(L/k - d)/v^*$, где d — ширина домена, а v^* — скорость перемещения фронта возмущения относительно доменов. Поскольку, как правило, $L/k - d$ порядка L/k , а v^* не превышает u_0 , время сноса возмущения от одного домена к другому превышает максимальные допустимые при нашем рассмотрении времена, и при определении характера поведения возмущений достаточно рассматривать окрестность каждого домена независимо от других. Заметим, что если по какой-либо причине скорость v^* оказывается значительно большей, чем u_0 , определение характера неустойчивости требует более детального исследования, учитывающего влияние возмущений, возникающих около соседних доменов.

§ 5. Гистерезис, связанный с образованием стационарно движущегося домена. Усиление [15—22, 39]

Согласно результатам § 3 стационарное движение домена устойчиво, когда выполнено условие

$$R < -Z_{\text{обр}}(0). \quad (5.1)$$

Статический импеданс образца $Z_{\text{обр}}(0)$ представляет собой не что иное, как дифференциальное сопротивление образца с доменом. В самом деле, по определению

$$Z_{\text{обр}}(0) = \frac{L \delta \bar{E}}{\delta J} = L \left(\frac{dJ(\bar{E})}{d\bar{E}} \right)^{-1}, \quad (5.2)$$

где функция $J(\bar{E})$ описывает зависимость стационарного тока от средней напряженности поля в образце; вид этой функции для образца с движущимся доменом был исследован нами в § V.5. Зависимость $J(\bar{E})$ схематически показана на рис. 61. Участки OA и FG отвечают однородному состоянию образца с положительной дифференциальной проводимостью; анализ, проведенный в главе III, показал, что такое состояние устойчиво. На участках AB и EF , где $dJ(\bar{E})/d\bar{E} > 0$, неравенство (5.1) не

может быть выполнено ни при каких R . Этим участком вольтамперной характеристики соответствует узкий домен (см. § V.4); он оказывается неустойчивым при любых значениях сопротивления нагрузки. Это и не удивительно, поскольку при наличии узкого домена дифференциальная проводимость в большей части образца, выступающей в роли распределенной нагрузки, положительна и режим аналогичен режиму заданного тока. Уменьшения

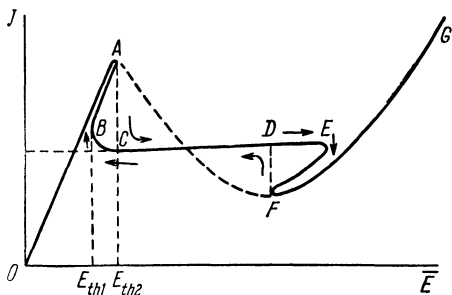


Рис. 61. К исследованию устойчивости системы со стационарно движущимся доменом.

Стрелками указано перемещение рабочей точки при плавном изменении напряжения на образце.

сопротивления $Z_e(0)$ можно добиться, уменьшая длину образца, при этом действительно, как мы видели в § V. 5, наклон участков AB и EF становится положительным *).

В образце с вольтамперной характеристикой, изображенной на рис. 61, должны наблюдаться явления гистерезиса, связанные с возникновением стационарно движущегося домена. Рассмотрим, как меняется состояние образца при плавном изменении подаваемого на него напряжения. В интервале полей (E_{th1}, E_{th2}) существуют два флуктуационно устойчивых (в режиме заданного напряжения) состояния системы: однородное и с бегущим доменом (участок BC). Вопрос о том, в каком состоянии находится система, определяется ее предысторией. При плавном увеличении приложенного к образцу напряжения

*) Напомним, что мы рассматриваем случай идеализированных периодических граничных условий.

от нуля до $V_{th2} = E_{th2}L$ в силу флуктуационной устойчивости система остается в пространственно однородном состоянии; лишь при $V > V_{th2}$ появляется домен конечной ширины и амплитуды — система переходит в точку C . При дальнейшем увеличении напряжения на образце ширина домена возрастает — точка, характеризующая состояние системы, движется вправо по участку CE на вольтамперной характеристике. При понижении напряжения домен, однако, не пропадает в точке C — вплоть до точки B флуктуационная устойчивость сохраняется. Система вновь переходит в однородное состояние только при $V < V_{th1} = E_{th1}L$. Гистерезис имеет место и на участке $DEFG$, в области сильных полей.

Отмеченная особенность образца с доменом была использована для создания элементов памяти на основе GaAs [15, 16]. Пусть, например, на образец подано напряжение V такое, что $V_{th1} < V < V_{th2}$. При подаче запускающего импульса с амплитудой $V_{зап}$ в образце возникает движущийся домен, если $V + V_{зап} > V_{th2}$ [17, 18]*). Время хранения информации в системе при этом, очевидно, просто равно времени пролета T , по истечении которого домен исчезает и система возвращается в исходное состояние. Наблюдалось и возникновение непрерывной генерации колебаний, продолжающейся и после снятия запускающего импульса [19, 20]. Для срыва генерации нужно подать на образец импульс противоположной полярности.

Возможность существования устойчивого движущегося домена при $E_{th1} < \bar{E} < E_{th2}$ может привести к заметному наблюдаемому уменьшению порогового поля при воздействии на систему достаточно «жестких» внешних воздействий, приводящих к созданию требуемых затравочных неоднородностей достаточной величины**). Пороговая напряженность поля, определяющая возможность возбуждения домена в жестком режиме, равна,

*) Роль запускающего импульса может играть и короткий радиочастотный сигнал.

**) В принципе не исключено, что в некоторых системах роль такого воздействия может играть возмущение, вызванное исчезновением домена на контакте. При этом нужно, чтобы существовал механизм достаточно быстрой передачи этого возмущения от одного контакта к другому.

очевидно, E_{th1} ; она зависит от длины образца, возрастая при уменьшении длины и приближаясь к E_{th2} в коротких образцах [21].

Рассмотрим теперь состояние системы, отвечающее участку BE на вольтамперной характеристике, когда статический импеданс образца с доменом отрицателен. В этом случае домен устойчив. Поскольку

$$-\frac{u_{00}}{\lambda_0} + \operatorname{Re} Z_e(0) = Z_{обр}(0) < 0,$$

вещественная часть импеданса, равная в силу (3.5)

$$\operatorname{Re} Z_{обр}(\omega) = -\frac{\lambda_0 u_{00}}{\lambda_0^2 + \omega^2} + \operatorname{Re} Z_e(\omega), \quad (5.3)$$

остается отрицательной на низких частотах, не превышающих некоторого предельного значения. Названное обстоятельство позволяет использовать образец с движущимися доменами для усиления колебаний, частота которых не слишком велика. Учет процессов возникновения и исчезновения доменов не меняет заметным образом характеристик такого усилителя, поскольку в течение основной части периода образец содержит сформировавшийся домен, и импеданс дается выражением (5.3). Подобный усилитель, работающий на образце, генерирующем ганновские колебания, был предложен в работе [22]. По сравнению с усилителем, использующим образцы, для которых значение произведения $n_0 L$ меньше критического (см. § III.3), описанный усилитель обладает некоторыми преимуществами. В частности, частота усиливаемых колебаний никак не связана с пролетным временем и ее можно изменять непрерывно; кроме того, можно использовать образцы большой длины, что открывает путь к получению большей выходной мощности колебаний.

§ 6*. Резонансные свойства образца с доменами [23]

При совпадении частоты внешнего воздействия с одной из собственных частот системы может наступить резонанс, т. е. будет происходить «раскачка» собственных колебаний системы внешним воздействием. Резонансный

отклик системы на внешнее воздействие можно наблюдать, если в спектре собственных частот системы есть чисто вещественные частоты или частоты с достаточно малой мнимой частью. Образец с движущимися доменами представляет собой систему с дискретным спектром, определяемым задачей типа (2.6). Для того чтобы можно было наблюдать резонансные эффекты в такой системе, нужно, чтобы среди собственных значений λ_n были такие, вещественная часть которых мала по сравнению с разностью мнимых частей соседних собственных значений. (Действительно, собственные частоты связаны с собственными значениями λ_n равенством $\lambda_n = -i\omega_n$, см. примечание на стр. 276.) При выполнении этого условия импеданс (2.10) будет иметь резонансный максимум на частоте $\omega_s = -\text{Im} \lambda_s$, ширина которого определяется вещественной частью λ_s .

Рассмотренная выше модельная система с дрейфовой нелинейностью не обнаруживает резонансного поведения. В самом деле, задача (2.6) с периодическими граничными условиями в этом случае оказывается самосопряженной, а спектр собственных значений λ_n — вещественным. Если, как это принималось выше, поведение системы слабо зависит от конкретного вида граничных условий, то изменение последних, хотя и может привести в принципе к появлению комплексных собственных значений, но, вообще говоря, не приведет к появлению наблюдаемых резонансных эффектов. Для того чтобы последние стали наблюдаемы, необходима кардинальная перестройка спектра собственных значений при изменении граничных условий, что едва ли может иметь место в длинных образцах.

Таким образом, модель с дрейфовой нелинейностью приводит к релаксационному поведению системы (в условиях, когда система устойчива); малые флуктуации напряженности поля и плотности заряда просто затухают.

Для системы с рекомбинационной нелинейностью, описываемой уравнениями (V.7.1)—(V.7.4), ситуация отличается от описанной. Поведение малых флуктуаций в системе со стационарным движущимся рекомбинационным доменом определяется линеаризованными

уравнениями:

$$\mu \rho_e \delta E + \mu E (\delta \rho - \delta \rho_t) -$$

$$- D \frac{\partial}{\partial x} (\delta \rho - \delta \rho_t) + \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \delta E}{\partial t} = \delta J(t), \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial \delta E}{\partial x} = \frac{4\pi}{\epsilon} \delta \rho, \quad (6.1b)$$

$$\frac{\partial \delta \rho_t}{\partial t} = \eta_1 \delta \rho + \eta_2 \delta E - \eta_3 \delta \rho_t - g \rho_t c_0 e^{ikx - i\omega t}. \quad (6.1v)$$

Здесь, по-прежнему, ρ_e , ρ_t , ρ , E — плотности свободных и связанных зарядов, полная плотность заряда и напряженность электрического поля, зависящие от координат и времени (точнее, от $x - u_0 t$), $\delta \rho_t(x, t)$, $\delta \rho(x, t)$, $\delta E(x, t)$ — флуктуации соответствующих величин,

$$\eta_1 = \frac{\partial \Psi(\rho, \rho_t, E)}{\partial \rho}, \quad \eta_2 = \frac{\partial \Psi(\rho, \rho_t, E)}{\partial E}, \quad \eta_3 = -\frac{\partial \Psi(\rho, \rho_t, E)}{\partial \rho_t}, \quad (6.2)$$

как и раньше (см. §§ IV.1, V.1),

$$\Psi = c_0 \left[(\rho - \rho_t) \left(N - \frac{\rho_t}{e} \right) v(E) - n_1 \rho_t \right] = \frac{\rho - \rho_0}{\tau_c} - \frac{\rho_t - \rho_{t0}}{\tau_r},$$

времена τ_r и τ_c определяются формулами (IV.1.12) и (IV.1.19), $\delta J(t)$ — флуктуация плотности полного тока в цепи, а μ и D — подвижность и коэффициент диффузии, для простоты предполагаемые постоянными.

Последний член в (6.1v) описывает один из способов внешнего воздействия на систему — через подсветку переменной интенсивности. При наличии такой подсветки

$$n_1 = n_{1,0} + g e^{ikx - i\omega t},$$

где ω — частота модуляции света, множитель e^{ikx} учитывает возможность перемещения светового пятна по образцу, а величина g пропорциональна интенсивности света. Как и в § 2, в системе (6.1a) — (6.1v) удобно перейти к координатам $z = x - u_0 t$, t и затем выполнить преобразование Лапласа по t .

В результате получаем

$$\begin{aligned}
 -D \frac{d}{dz} (\delta\rho - \delta\rho_t) + \mu E (\delta\rho - \delta\rho_t) + \mu\rho_e \delta E + \frac{e}{4\pi} \Lambda \delta E - \\
 - \frac{e}{4\pi} u_0 \frac{d \delta E}{dz} = \delta J(\Lambda) + \frac{e}{4\pi} \Lambda \xi_1, \\
 \frac{d \delta E}{dz} = \frac{4\pi}{e} \delta\rho,
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\Lambda \delta\rho_t = \Lambda \xi_2 + u_0 \frac{d\delta\rho_t}{dz} + \eta_1 \delta\rho + \eta_2 \delta E - \eta_3 \delta\rho_t - g(z) \frac{\Lambda}{\Lambda + i\omega'}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \xi_1 = \delta E(z, t)|_{t=0}, \quad \xi_2(z) = \delta\rho_t(z, t)|_{t=0}, \\
 g(z) = g_{c_0\rho_t}(z) e^{ikz},
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

а $\omega' = \omega - ku_0$ есть доплеровски смещенная частота в системе отсчета, где домен покоится.

Система дифференциальных уравнений (6.3) — третьего порядка, и соответствующая ей однородная система (получаемая при $\delta J(\Lambda) = \xi_1(z) = \xi_2(z) = g(z) = 0$) ни при каких граничных условиях не является самосопряженной, так как не существует самосопряженных линейных дифференциальных операторов третьего порядка. В общем случае спектр такой системы — комплексный, и его особенности, классификацию собственных значений и т. д. не удастся исследовать методами, аналогичными использованным в § 8.3. В частности, неприменимость обычных теорем сравнения не позволяет найти условия, при которых в спектре нет собственных значений с положительной вещественной частью, т. е. провести полный анализ устойчивости рекомбинационных доменов.

Некоторые сведения о системе (6.3) можно, однако, получить, рассматривая асимптотику больших собственных значений. Стандартные методы [24] позволяют найти асимптотические выражения для решений системы при больших значениях параметра λ :

$$\delta E = \text{const} \exp \left(-\frac{\lambda z}{u_0} + \int_0^z \frac{\eta_1 - \eta_3}{u_0} dz' \right). \tag{6.5a}$$

Собственные значения и собственные функции можно получить отсюда, накладывая соответствующие граничные

условия. При периодических граничных условиях имеем

$$\lambda_m = -\frac{2\pi i u_0}{L} m + \frac{1}{L} \int_0^L (\eta_1 - \eta_3) dz' \quad (6.6)$$

и
 $\delta E_m =$

$$= \text{const} \exp\left(2\pi i \frac{z}{L} m + \int_0^z \frac{\eta_1 - \eta_3}{u_0} dz' - \frac{z}{L} \int_0^L \frac{\eta_1 - \eta_3}{u_0} dz'\right). \quad (6.5б)$$

Здесь m — положительное или отрицательное целое число, $|m| \gg 1$.

Резонансные частоты системы даются выражением

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{2\pi u_0}{L} |m| = \frac{2\pi}{T} |m|, \quad (6.7)$$

где $T = \frac{L}{u_0}$ — период доменных колебаний тока, а ширина резонансных кривых определяется множителем затухания

$$\gamma = \frac{1}{L} \int_0^L (\eta_1 - \eta_3) dz'.$$

Условие наблюдаемости резонансных эффектов имеет вид

$$\gamma \ll \Delta\omega_{\text{рез}} = \frac{2\pi u_0}{L}. \quad (6.8)$$

Используя явное выражение для Ψ , из определений (6.2) получаем

$$\eta_3 - \eta_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t} - \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \frac{1}{e} c_0 (\rho - \rho_t) v(E) + c_0 n_1. \quad (6.9)$$

Пусть концентрация свободных носителей заряда мала по сравнению с концентрациями связанных носителей и свободных центров захвата (ср. с §§ IV.1, V.7) (это условие обычно выполняется). Тогда величины τ_r и τ_c можно считать зависящими только от напряженности поля и

$$\eta_3 - \eta_1 = \frac{1}{\tau_g}. \quad (6.10)$$

В этом случае $\gamma = 1/\tau_g$ и условие (6.8) принимает вид

$$L \ll 2\pi\mu_0\tau_g. \quad (6.11)$$

Таким образом, если выполнено условие (6.11), то при изменении подсветки с периодом, в целое число раз меньшим периода стационарных колебаний тока, в образце должны возникнуть вынужденные гармонические колебания напряженности поля и плотности заряда. Варьируя скорость перемещения светового пятна, можно в соответствии с формулой (6.4) управлять частотой колебаний при заданной частоте модуляции подсветки.

Результирующее колебание будет представлять собой модулированную синусоиду, основная частота которой дается формулой (6.7), а форма огибающей отвечает стационарному решению, т. е. собственным доменным колебаниям тока. Экспериментально это явление еще не наблюдалось, возможно, из-за недостаточно большого значения времени генерации.

Реальная система с дрейфовой нелинейностью, обусловленной переходами между неэквивалентными минимумами, при явном учете кинетики межминимумных переходов описывается уравнениями, структура которых близка к (6.1а)—(6.1в). Такая система в принципе также может обнаруживать резонансное поведение [25]. Резонансные частоты такой системы по-прежнему даются формулой (6.7), а множитель затухания γ связан с вероятностью обратного перехода из неосновного в основной минимум. Наблюдение резонансных эффектов в таких системах, однако, чрезвычайно затруднено из-за большой величины γ . Например, для GaAs величина $\gamma \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$, а частота доменных колебаний тока, как правило, не превышает нескольких гигагерц, т. е. условие (6.8) не выполняется.

§ 7*. Устойчивость стационарно движущихся доменов относительно вариации граничных условий [26]

Стационарное движение доменов рассматривалось нами в главе V в предположении, что граничные условия — периодические. Фактически, однако, как мы уже отмечали (см. § II. 7), вопрос о том, какой тип граничных условий соответствует той или иной физической ситуации на контактах, нельзя считать полностью решен-

ным. Реально ситуация на контактах может достаточно хорошо описываться и локальными граничными условиями. При этом результаты анализа, проведенного в главе V, сохраняют силу, лишь если при изменении граничных условий характер решения не изменяется существенно, т. е. если решение устойчиво относительно вариации граничных условий. Исследование устойчивости относительно изменения граничных условий представляет интерес даже для тех задач, в которых граничные условия заданы точно, поскольку условия на контактах динамически флуктуируют. Заметим, что влияние случайных локализованных флуктуаций распределения примеси также иногда можно описать с помощью соответствующей вариации граничных условий, — при этом символическая «граница» может быть выбрана так, что названная флуктуация оказывается вне «образца» и ее присутствие отражается лишь граничным условием.

Большая часть полученных ранее результатов относится к случаю, когда домен находится достаточно далеко от контактов; именно такую ситуацию мы и рассматриваем в дальнейшем. Ясно, что в таких условиях контакты расположены в области с положительной дифференциальной проводимостью. В названной области напряженность поля меняется медленно, и по существу задача аналогична задаче о граничных возмущениях в однородной среде с положительной дифференциальной проводимостью (ср. с § IV. 4). Характерные длины затухания малых возмущений даются выражением *)

$$l_{\pm} = \left\{ \left| -\frac{\mu E}{2D} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu E}{2D}\right)^2 + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon D}} \right| \right\}^{-1} \Big|_{E=E_1}, \quad (7.1)$$

где $\sqrt{\varepsilon D/4\pi\sigma}$ есть не что иное, как длина Дебая, $D/\mu E$ — дрейфовая длина, E_1 — поле вне домена, а знаки плюс и минус относятся к различным контактам. При достаточном удалении домена от контактов всегда можно выбрать решения, убывающие при удалении от контактов, т. е. мы приходим к выводу об устойчивости стационарного движения домена относительно небольшой вариации граничных условий.

*) Для сокращения записи мы положили $D = \text{const}$; это предположение не изменяет основных качественных выводов,

Нарастание возмущений может происходить лишь в тех областях образца, где дифференциальная проводимость отрицательна, т. е. внутри доменных стенок. Как правило, размеры последних малы по сравнению с длиной образца и возмущение не успевает заметно нарасти в области внутри стенок. Численные оценки, проведенные в работе [26] для GaAs, подтверждают, что присутствие малых областей с ОДП (стенок) не приводит к неустойчивости системы относительно вариации граничных условий.

Разумеется, роль граничных условий становится существенной, когда домен расположен вблизи контакта; в этом случае граничные возмущения, нарастая, могут заметно исказить картину распределения поля в домене. Последовательный анализ эволюции граничных возмущений для этого случая еще не проведен, он смыкается с задачей о динамике возникновения и исчезновения доменов на контактах.

Итак, решение, описывающее стационарно движущийся домен, оказывается устойчивым относительно малых вариаций граничных условий. Заметим, однако, что вопрос об устойчивости полученного решения относительно больших изменений граничных условий, или, что то же самое, о возможности существования решения при различных граничных условиях, весьма сложен и пока еще не решен в общем виде даже для модели с дрейфовой нелинейностью. Этот вопрос, а также проблема адекватного описания той или иной конкретной ситуации на контактах с помощью феноменологических граничных условий (см. § II. 7) очень важен для теории неустойчивости, поскольку в ряде случаев поведение полупроводников с ОДП оказывается чувствительным к свойствам контактов. С примерами поведения такого рода мы уже встречались в главе IV. В неравновесных условиях образование высокоомного слоя вблизи катода также может привести к некоторым специфическим явлениям, таким как возникновение катодного падения потенциала и насыщение тока перед началом колебаний, к уменьшению амплитуды колебаний и т. д. [27].

Некоторые результаты, относящиеся к влиянию контактов на явления неустойчивости, удалось получить путем численного решения модельной системы уравнений.

В работе [28] в качестве граничного условия выбиралось условие заданной напряженности поля на катоде. Расчет показал, что решение, отвечающее стандартной картине колебаний Ганна, получается, лишь когда напряженность поля на катоде лежит в определенном интервале; при других значениях ее наблюдалось, например, насыщение тока. Эти результаты, по-видимому, в основном согласуются с экспериментальными данными, свидетельствующими о том, что эффект Ганна можно наблюдать лишь при определенных «достаточно хороших» контактах. При «плохих» контактах в образце может возникнуть статический домен — неоднородное распределение напряженности поля, не сопровождающееся колебаниями тока в цепи.

§ 8. Устойчивость статических доменов [29—31]

Исследование устойчивости статических доменов, по существу, не отличается от аналогичного исследования, проведенного выше для случая движущихся доменов. Следует лишь обратить внимание на одно обстоятельство, связанное с важной ролью контактов. Как было показано в главе IV, контакты могут определять тип статического распределения поля и величину тока насыщения на вольтамперной характеристике. Точный вид граничных условий для флуктуаций в принципе следует находить из детальной теории контактов; поскольку вывод этих условий пока отсутствует, естественно попытаться задать их в возможно более общем виде и посмотреть, в какой мере результат исследования устойчивости зависит от конкретного вида граничных условий для флуктуаций.

Можно ожидать, что вид граничных условий оказывает влияние на устойчивость статических доменов и, в частности, играет роль при изучении перехода от статических доменов к движущимся, экспериментально наблюдавшегося в ряде работ [32—35]. Действительно, для того чтобы возмущение привело к «отрыву» домена от контакта, нужно, чтобы амплитуда возмущения была достаточно велика в приконтактной области. Влияние вида граничных условий на подобное возмущение может оказаться заметным.

Для простоты мы вновь ограничимся случаем модельной системы с дрейфовой нелинейностью. Исследование задачи о малых флуктуациях в такой системе приводит к уравнению (2.4), в котором, однако, положено $u_0 = 0$. Это означает, что переменная z заменена на x ; последняя изменяется в конечных пределах, $0 \leq x \leq L$. В качестве граничных условий примем теперь однородные смешанные граничные условия вида

$$\left. \begin{aligned} \left[\delta E(x, \lambda) + a_1 \frac{d \delta E(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=0} &= 0, \\ \left[\delta E(x, \lambda) + a_2 \frac{d \delta E(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=L} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

где a_1 и a_2 — постоянные, не зависящие от λ .

Когда $a_1 = a_2 = 0$, условия (8.1) переходят в условия нулевых флуктуаций напряженности поля на контактах, а при $a_1, a_2 \rightarrow \infty$ на границах обращаются в нуль флуктуации плотности заряда. Следует, однако, заметить, что по физическим соображениям произвольный выбор постоянных a_1 и a_2 оправдан не всегда. Естественно, например, исключить из рассмотрения граничные условия, приводящие к неустойчивости однородного распределения с положительной дифференциальной проводимостью. Можно убедиться, что подобная «нефизическая» неустойчивость имеет место, если $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, а величины $|a_1|$ и $|a_2|$ не слишком велики (в отсутствие тока, например, $|a_1|$ и $|a_2|$ не должны превышать дебаевской длины).

Преобразования, полностью аналогичные проведенным в § 2, приводят к следующему уравнению для спектра флуктуаций в рассматриваемой системе:

$$\prod_n (\Lambda - \lambda_n) \left(1 + \frac{1}{R} \sum_n \frac{u_{nn}}{\Lambda - \lambda_n} \right) = 0. \quad (8.2)$$

Здесь

$$u_{nn} = \frac{4\pi}{\epsilon} \int_0^L dx \frac{\partial}{\partial} \psi_n \int_0^L dx \psi_n,$$

а $\psi_n(x)$ и λ_n — собственные функции и собственные значения задачи

$$\mathcal{L}\psi - \lambda \frac{\partial}{\partial} \psi = 0, \quad (8.3a)$$

$$\left(\psi + a_1 \frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad (8.3б)$$

$$\left(\psi + a_2 \frac{d\psi}{dx}\right)_{x=L} = 0, \quad (8.3в)$$

причем выражения для оператора \mathcal{L} и функции ψ совпадают с соответствующими выражениями из § 2, в которых положено $u_0 = 0$. Как и в случае движущихся доменов, наличие хотя бы одного положительного значения в спектре флуктуаций отвечает неустойчивости системы.

Исследование спектра собственных значений задачи (8.3а)—(8.3в) мы проведем для случая, когда оба контакта имеют одинаковую природу (т. е. оба —запорные или оба —антизапорные) и контактное поле велико. Согласно результатам § IV. 8, для таких контактов допустимое распределение поля таково, что на одном из плоских участков дифференциальная проводимость положительна, а на другом — близка к нулю; напряженность поля на последнем участке близка к значению, соответствующему экстремуму вольтамперной характеристики.

Для исследования спектра задачи (8.3а)—(8.3в) удобно ввести характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ (см., например, [4]), нули которого совпадают с собственными значениями рассматриваемой задачи. Для граничных условий (8.3б), (8.3в) детерминант $\Delta(\lambda)$ имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \left[-\frac{d\psi_1(x, \lambda)}{dx} a_1 a_2 - \psi_1(x, \lambda) a_1 + \frac{d\psi_2(x, \lambda)}{dx} a_2 + \psi_2(x, \lambda) \right]_{x=L}, \quad (8.4)$$

где $\psi_1(x, \lambda)$ и $\psi_2(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения (8.3а), удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \psi_1(0, \lambda) &= 1, & \frac{d\psi_1(x, \lambda)}{dx} \Big|_{x=0} &= 0, \\ \psi_2(0, \lambda) &= 0, & \frac{d\psi_2(x, \lambda)}{dx} \Big|_{x=0} &= 1. \end{aligned}$$

Поскольку функция dE/dx — решение уравнения (8.3а) при $\lambda = 0$ (ср. с § 3), $\Lambda(0)$ можно выразить через функции

$$\varphi_1(x) = \psi_1(x, \lambda)|_{\lambda=0} = \left[\frac{dE}{dx} \Big|_{x=0} \right]^{-1} \frac{dE}{dx} - \frac{d^2E}{dx^2} \Big|_{x=0} \frac{dE}{dx} I(x), \quad (8.5)$$

$$\varphi_2(x) = \psi_2(x, \lambda)|_{\lambda=0} = E(0) \frac{dE}{dx} I(x),$$

где $I(x)$ дается выражением

$$I(x) = \int_0^x \frac{dx}{\vartheta} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-2} \quad (8.6)$$

(для рассматриваемого ниже случая функция dE/dx не имеет нулей).

Для общих граничных условий (8.3б), (8.3в) функция dE/dx , вообще говоря, не есть собственная функция задачи (8.3а) — (8.3в). Однако при специальном выборе граничных условий она может стать собственной функцией задачи, отвечающей собственному значению $\lambda = 0$. Именно так обстоит дело, если, например, вообще пренебречь влиянием границ и рассматривать бесконечный образец. Фазовая траектория в этом случае соединяет две особые точки и функция dE/dx удовлетворяет условиям ограниченности на бесконечности. Если исследуемое распределение представляет собой простой слой (функция dE/dx не имеет нулей), то, согласно осцилляционным теоремам [4], dE/dx будет собственной функцией основного состояния, т. е. все $\lambda_n \leq 0$. Отсюда сразу следует, что статический домен устойчив в режиме заданного тока.

Далее, флуктуация, описываемая функцией dE/dx , отвечает малому смещению стенки домена. Ясно, что такое смещение вызывает изменение полного падения напряжения на образце, и в режиме заданного напряжения подобные флуктуации оказываются невозможными, а домен устойчивым.

Заранее неясно, однако, в какой мере оправдано полное пренебрежение влиянием границ в задаче о статическом домене. Действительно, даже малое возмущение (связанное, например, с контактами) может вызвать

смещение собственного значения $\lambda = 0$ в область $\lambda > 0$, т. е. привести к неустойчивости системы в режиме заданного тока. Поэтому мы сейчас найдем число положительных нулей детерминанта $\Delta(\lambda)$, отвечающего граничным условиям (8.3б), (8.3в). Для этого нужно сначала определить значения $\Delta(0)$ и $\Delta(\infty)$, а затем воспользоваться осцилляционными теоремами для рассматриваемой задачи.

Функция

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{1}{a_1} \varphi_2$$

есть линейно независимое от dE/dx решение уравнения (8.3а), удовлетворяющее граничному условию (8.3б). Она не может иметь более одного нуля, так как в противном случае функция dE/dx обязана была бы иметь нуль. Функция φ имеет нуль, если $\varphi(0)\varphi(L) < 0$, т. е. если

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} < \frac{\varphi_1(L)}{\varphi_2(L)} = \\ = \left[\frac{dE}{dx} \Big|_{x=L} - \frac{dE}{dx} \Big|_{x=0} \frac{dE}{dx} \Big|_{x=L} \frac{d^2E}{dx^2} \Big|_{x=0} I(L) \right] \times \\ \times \left[\frac{dE}{dx} \Big|_{x=0} \frac{dE}{dx} \Big|_{x=L} I(L) \right]^{-1}. \quad (8.7) \end{aligned}$$

При выполнении неравенства (8.7) основное состояние лежит в области $\lambda > 0$ и распределение неустойчиво. При выполнении обратного неравенства детерминант $\Delta(\lambda)$ имеет положительный корень, лишь если знаки $\Delta(0)$ и $\Delta(\infty)$ различны.

Асимптотическое значение $\Delta(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ легко найти из уравнения (8.3а),

$$\Delta(\lambda) \approx \frac{e^{\sqrt{\lambda} L}}{2\sqrt{\lambda}} (1 + a_2 \sqrt{\lambda})(1 - a_1 \sqrt{\lambda}). \quad (8.8)$$

Определитель $\Delta(\lambda)|_{\lambda \rightarrow \infty}$ обращается в нуль на прямых, параллельных координатным осям и сколь угодно близко (при $\lambda \rightarrow \infty$) от них проходящих. Он положителен во II и IV квадрантах и отрицателен в I и III квадрантах. Равенство $\Delta(0) = 0$ определяет положение кривых, отделяющих области положительных и отрицательных

значений $\Delta(0)$. Области, в которых знаки $\Delta(0)$ и $\Delta(\infty)$ совпадают, заштрихованы на рис. 62; они соответствуют ситуации, когда положительных собственных значений нет и распределение устойчиво в режиме заданного тока. Мы видим, что и при граничных условиях, фиксирующих полную напряженность поля на контактах, и при граничных условиях, фиксирующих полную концентрацию, исследуемое распределение оказывается устойчивым.

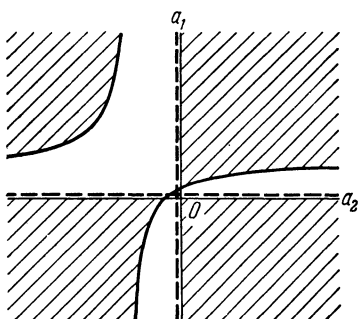


Рис. 62. Области устойчивости статического домена в режиме заданного тока (заштрихованы).

На плоскости (a_1, a_2) имеется также область неустойчивости статического ступенчатого распределения. Аналогичная «нефизическая» область появляется и в отсутствие ОДП—наличие ОДП приводит лишь к некоторому смещению границ этой области. Если реальные граничные условия имеют вид (8.1), причем значения a_1 и a_2 таковы, что точка (a_1, a_2) не лежит вблизи «нефизической» области неустойчивости, то возникающее неоднородное распределение оказывается устойчивым.

Таким образом, мы получили, что статический домен устойчив для весьма широкого класса граничных условий; можно ожидать (ср. с § 3), что устойчивость сохранится и при переходе к режиму заданного напряжения, поскольку на «включенных» последовательно участках однородного распределения поля дифференциальная проводимость неотрицательна.

В § IV.9 мы видели, что возможны и такие статические ступенчатые распределения напряженности поля и плотности заряда, когда на одном из плоских участков дифференциальная проводимость отрицательна. Этот плоский участок отвечает окрестности средней особой точки (E_2, ρ_0) системы уравнений (IV.1.1)—(IV.1.3); согласно § IV.4, эта особая точка может быть либо узлом, либо фокусом.

Пусть для начала траектории на фазовой плоскости расположены так, что функция $E(x)$ монотонна, т. е.

производная dE/dx не имеет нулей (это может случиться, когда рассматриваемая особая точка — узел). Тогда все выводы, относящиеся к режиму заданного тока, сохраняют силу, коль скоро граничные условия для флуктуаций по-прежнему выбирать в виде (8.1). Мы получаем, таким образом, что подобное распределение напряженности поля устойчиво в областях значений параметров (a_1, a_2) , заштрихованных на рис. 62.

Однако при изменении электрического режима цепи это распределение может стать неустойчивым, если длина плоского участка с ОДП достаточно велика. Действительно, дело, по-видимому, обстоит здесь в основном так же, как и при рассмотрении устойчивости однородного распределения с ОДП (см. § III.3). Отличие от ситуации, рассмотренной в § III.3, состоит теперь в том, что имеется второй плоский участок с положительной дифференциальной проводимостью. Этот участок можно рассматривать как последовательно включенное сопротивление, объединяя его с сопротивлением нагрузки R , — наличие его приводит к эффективному изменению режима цепи. Сказанное позволяет предположить, что распределение становится неустойчивым в режиме заданного напряжения, когда длина участка с ОДП превосходит некоторое критическое значение L_c . В случае, когда $R = 0$ и сопротивление плоского участка с положительной дифференциальной проводимостью невелико, величина L_c должна быть близкой к значению, даваемому формулой (III.3.22).

Заметим, что если отрицательная дифференциальная проводимость достаточно велика по абсолютной величине, то распределение поля с напряженностью, близкой к E_2 на одном из плоских участков, оказывается заведомо неустойчивым. Действительно, согласно (IV.4.5), средняя особая точка есть фокус, если при $E = E_2$ выполнено неравенство

$$\sigma(E_2) < -\frac{\varepsilon D(E_2)}{16\pi x_0^2}, \quad (8.9)$$

где x_0 дается формулой (IV.4.3). При этом напряженность поля при $E \rightarrow E_2$ осциллирует, и существует множество собственных функций исходной задачи, отвечающих положительным собственным значениям.

Как показывает эксперимент [35], переход от статических к стационарно движущимся доменам в случае, когда на одном из плоских участков дифференциальная проводимость отрицательна, имеет место, лишь если плотность тока насыщения $j_s^{(ст)}$, отвечающая статическому домену, превышает величину j_s , определяемую правилом площадей (см. § V. 4 и рис. 50). При обратном соотношении переход в состояние с движущимся доменом оказывается невозможным в силу свойств контактов. Именно, при $j_s^{(ст)} < j_s$ малые флуктуации с возрастанием плотности тока, стремящиеся перевести систему в состояние с движущимся доменом, не могут нарастать.

Полный расчет устойчивости неоднородного статического распределения при $j_v < j_0 < j_p$ с учетом влияния контактов, который мог бы подтвердить приведенные выше качественные соображения, пока не проведен и условия, определяющие переход от статических доменов к движущимся, еще не выяснены окончательно. Действительно, модельные расчеты [36] и эксперимент [35] свидетельствуют о том, что реальная ситуация может оказаться далеко не тривиальной.

§ 9. Устойчивость токовых слоев и шнуров [37, 38]

Перейдем теперь к исследованию устойчивости неоднородных распределений тока, рассмотренных в § VI. 3. Мы ограничимся здесь исследованием устойчивости относительно «наиболее опасных» поперечных возмущений, полагая $\delta\Theta = \delta\Theta(y, z, t)$.

В приближении несжимаемой электронной плазмы линейризованное уравнение для малых поперечных флуктуаций имеет вид

$$\mathcal{L} \delta\Theta - \frac{3}{2} \frac{\rho}{e\kappa} \frac{\partial \delta\Theta}{\partial t} = -2\rho\mu E \delta E. \quad (9.1)$$

Здесь

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{d^2 U(\Theta)}{d\Theta^2},$$

$$U(\Theta) = \int_0^\Theta \left[\rho\mu(\Theta') E^2 - \frac{\rho}{e} P(\Theta') \right] d\Theta',$$

$\Theta(y, z)$ — исследуемое на устойчивость статическое распределение температуры, а величины E и δE в формуле (9.1) представляют собой проекции векторов E и δE на ось Ox , по-прежнему направленную вдоль плотности тока.

В качестве граничных условий на боковой поверхности образца мы примем условие отсутствия теплового потока через поверхность; при этом, очевидно, $\partial T / \partial n = 0$, где $\partial / \partial n$ обозначает производную по нормали к поверхности. Заметим, однако, что для широкого образца с токовым шнуром или слоем, расположенным далеко от поверхности, точный вид граничных условий не очень существен. В этом можно непосредственно убедиться, замечая, что в указанном случае граница расположена в области с положительной дифференциальной проводимостью, и повторяя рассуждения § 7.

Рассмотрим сначала устойчивость слоевых решений, для которых $\Theta = \Theta(y)$. Однородная задача на собственные значения, соответствующая задаче (9.1), принимает вид

$$\mathcal{L}\psi - \frac{3}{2} \frac{\rho}{e\kappa} \lambda \psi = 0, \quad (9.2)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_S = 0,$$

где S — поверхность образца. Здесь, как и в § 2, мы провели одностороннее преобразование Лапласа. Спектр полученной задачи на собственные значения определяет устойчивость распределения в режиме заданного напряжения (при $\delta E = 0$) — наличие хотя бы одного положительного значения приводит к неустойчивости системы. Полагая

$$\psi(y, z) = \psi(y) e^{ik_z z},$$

получаем

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2 U(\Theta)}{d\Theta^2} - k_z^2.$$

Заметим, что в силу инвариантности оператора \mathcal{L} относительно сдвига функция $d\Theta/dy$ есть собственная функция задачи (9.1), отвечающая собственному значению $\lambda = 0$ при $k_z = 0$, если считать, что размер образца в направлении оси Oy велик, т. е. $L_y \rightarrow \infty$. Строго

говоря, функция $d\Theta/dy$ не удовлетворяет граничному условию задачи (9.2). Однако $d^2\Theta/dy^2|_{\mathcal{S}} \rightarrow 0$ при $L_y \rightarrow \infty$ и граничное условие приближенно удовлетворяется. Вообще говоря, наряду с задачей (9.2) можно рассмотреть и другую задачу на собственные значения, для которой граничные условия выбраны так, что $d\Theta/dy$ есть точная собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda = 0$. Различие между этими граничными условиями и граничными условиями задачи (9.2) можно рассматривать как поверхностное возмущение, приводящее к малому изменению спектра. Такое возмущение в силу его малости в длинном образце не оказывает существенного влияния на устойчивость системы, если максимальное собственное значение отлично от нуля и отделено от соседнего конечным интервалом. В противном случае необходимо провести анализ, аналогичный проделанному нами в § 8 в задаче о статических доменах.

Для слоевых решений функция $d\Theta/dy$ имеет по крайней мере один нуль, и в силу осцилляционной теоремы $\lambda = 0$ не есть максимальное собственное значение. Максимальное собственное значение λ_0 положительно и система неустойчива в режиме заданного напряжения (ср. с § 3). Исключение составляет лишь случай монотонного изменения функции Θ , соответствующий разделению образца на две области с различными значениями температуры; для такого распределения $\lambda = 0$ (при $k_z = 0$) есть максимальное собственное значение задачи (9.2) *).

Флуктуации температуры с $k_z = 0$, зависящие от y , стремятся перевести слоевое решение в решение, отвечающее наличию в образце отдельных токовых шнуров, путем образования «перетяжек». Рассмотрим теперь устойчивость аксиального симметричного распределения

*) В работе [47] проведено полное решение задачи об устойчивости токовых слоев в образце конечных размеров с учетом граничных условий. При этом оказалось, что максимальное собственное значение в рассматриваемой задаче положительно даже при монотонном изменении функции Θ , и ни одно из стационарных решений не устойчиво в режиме заданного напряжения. Монотонное решение оказывается устойчивым лишь при достаточно большом сопротивлении нагрузки (определяемом неравенством типа условия (9.10), полученного ниже).

в виде токового шнура (см. § VI.3), считая образец цилиндрическим. В силу указанных выше причин для широкого образца форма его поверхности не очень важна в силу устойчивости полученных распределений относительно вариаций формы поверхности. Для рассматриваемой геометрии можем считать

$$\psi(r, \varphi) = \psi(r) e^{im\varphi},$$

где r — радиальная координата, а φ — азимутальный угол; при этом оператор \mathcal{L} принимает вид

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) + \frac{d^2 U(\Theta)}{d\Theta^2} - \frac{m^2}{r^2}. \quad (9.3)$$

С указанной выше точностью функция $d\Theta(r)/dr$ оказывается собственной функцией задачи (9.2) с оператором $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$ ($m = 1$), отвечающей собственному значению $\lambda = 0$. Если в образце находится один токовый шнур, то функция $d\Theta/dr$ не меняет знака, т. е. все собственные значения $\lambda_n \leq 0$. Для операторов \mathcal{L}_m при $m > 1$, очевидно, все собственные значения отрицательны. Таким образом, токовый шнур оказывается устойчивым в режиме заданного напряжения относительно флуктуаций указанного типа с $m \geq 1$.

Рассмотрим теперь цилиндрически симметричные флуктуации (с $m = 0$), обладающие, согласно формулам (9.2), (9.3), наибольшим инкрементом нарастания.

Поскольку при $m = 1$ максимальное собственное значение задачи (9.2) равно нулю, то при $m = 0$ максимальное собственное значение этой задачи положительно (обозначим его через λ_0) и система неустойчива в режиме заданного напряжения. Для исследования устойчивости токового шнура при произвольной внешней нагрузке разложим распределение температуры по собственным функциям вспомогательной задачи (9.2), ψ_n , образующим полную систему:

$$\delta\Theta(r) = \sum_n C_n \psi_n(r). \quad (9.4)$$

Подставим затем разложение (9.4) в уравнение (9.1). В результате получаем

$$\frac{3}{2} \frac{\rho}{\epsilon x} \sum_n (\lambda - \lambda_n) C_n \psi_n = 2\rho\mu E \delta E, \quad (9.5)$$

где λ_n — собственные значения задачи (9.2). Очевидно,

$$\bar{j} = \rho \int_{(S_{\perp})} \mu E dS,$$

где интеграл берется по сечению образца в плоскости (y, z) , а

$$\delta \bar{j} = \rho \delta E \int_{(S_{\perp})} \mu dS + \rho E \int_{(S_{\perp})} \frac{d\mu}{dT} \delta T dS. \quad (9.6)$$

Отсюда, выражая $\delta T = \kappa^{-1} \delta \Theta$ через δE с помощью формул (9.4) и (9.5), находим дифференциальный адмитанс системы,

$$Z^{-1}(i\lambda) = \frac{\delta \bar{j}}{L \delta E} = \frac{\rho}{L} \int_{(S_{\perp})} \mu dS + \sum_n \frac{b_{nn}}{\lambda - \lambda_n}, \quad (9.7)$$

где

$$b_{nn} = \frac{2E^2}{L} \rho^2 \int_{(S_{\perp})} \mu \psi_n dS \int_{(S_{\perp})} \frac{d\mu}{dT} \frac{\psi_n}{\kappa} dS,$$

а функции ψ_n ортонормированы с весом $3\rho/2\epsilon\kappa$.

Принимая во внимание закон Кирхгофа,

$$R \delta \bar{j} + L \delta E = \delta \mathcal{E},$$

как и в § 2, нетрудно из условия нетривиальной разрешимости алгебраической системы уравнений для коэффициентов C_n получить спектр флуктуаций системы:

$$\prod_n (\lambda - \lambda_n) (1 + RZ^{-1}(i\lambda)) = 0. \quad (9.8)$$

Для широкого шнура, диаметр которого велик по сравнению с толщиной стенки, собственное значение λ_0 мало и на низких частотах основной вклад дает полюсный член адмитанса (9.7), отвечающий максимальному собственному значению задачи (9.3). Соответственно положим

$$Z^{-1}(i\lambda) = \frac{b_{00}}{\lambda - \lambda_0} + Z_e^{-1}(i\lambda); \quad (9.9)$$

$Z_e^{-1}(i\lambda)$ представляет собой не что иное, как сумму адмитансов внутренней части шнура и окружающей части образца, включенных параллельно,

На низких частотах основной вклад в адмитанс (при наличии широкого шнура) дает полюсный член, отвечающий положительному собственному значению λ_0 . Действительно, для широкого шнура величина λ_0 экспоненциально мала, и нет оснований ожидать, что какое-либо другое дискретное собственное значение попадает в окрестность точки $\lambda = 0$. По этой причине на низких частотах ($|\omega| \leq \lambda_0$) можно пренебречь вкладом всех дискретных уровней, кроме уровня λ_0 . Величина $Z_e^{-1}(\omega)$, основной вклад в которую дают собственные значения непрерывного спектра, испытывает дисперсию на частотах порядка обратных дифференциальных максвелловских времен релаксации, соответствующих различным областям образца. В указанной области низких частот дисперсией можно пренебречь, полагая $Z_e(\omega) \approx Z_e(0)$. При этом из равенств (9.8) и (9.9) мы сразу же получаем, что $\lambda < 0$, когда

$$R > |Z(0)|, \quad Z(0) < 0. \quad (9.10)$$

При выполнении условий (9.10) токовый шнур устойчив. Токовый шнур не может быть сделан устойчивым ни при каком значении сопротивления внешней нагрузки R , если $Z(0) > 0$.

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что токовый шнур устойчив лишь на падающем участке вольтамперной характеристики образца с нитью — на участке AB рис. 58 (аналогично тому, что мы имели в случае движущегося домена в § 3).

Распределение, отвечающее осциллирующей зависимости температуры от радиуса r (аксиально симметричные слои), будет, очевидно, неустойчивым при любом сопротивлении нагрузки. Доказательство этого утверждения проводится точно так же, как и в случае нескольких движущихся доменов (§ 3).

§ 10. Режим ограниченного накопления объемного заряда [40—42]

Рост малых флуктуаций в полупроводнике с ОДП приводит к коренной перестройке самой системы — образованию доменов или шнуров. В результате при использовании системы с ОДП для генерации и усиления

электрических колебаний преобразование энергии постоянного поля в энергию колебаний происходит не просто по схеме, описанной в Приложении I. Так, например, колебания тока в цепи с образцом, в котором движутся домены, обусловлены только процессами возникновения и исчезновения последних. ОДП, которая имела бы место в образце, будь он пространственно однородным, играет при этом весьма важную, но лишь косвенную роль (гл. V). В условиях движения доменов частота колебаний (при дрейфовой нелинейности) близка к обратному значению времени пролета L/u_0 . Если здесь под L понимать длину всего образца, то частота колебаний фиксирована свойствами последнего.

Для приложений, однако, часто оказывается важным изменять частоту генерируемых колебаний. В случае колебаний, обусловленных движением доменов, это можно сделать, меняя эффективную длину образца. Для этой цели было предложено несколько способов. В частности, предлагалось перемещать искусственно созданную неоднородность, вызывающую возникновение домена. Можно также изменять длину пробега домена, включая, например, параллельно образцу резонансную нагрузку. Если резонансная частота данного контура несколько превышает пролетную частоту и амплитуда колебаний напряжения на образце достаточно велика, то может иметь место «подавление» домена — домен исчезнет, не дойдя до анода. Если же контур с резонансной нагрузкой (с высокой добротностью) настроен на частоту, меньшую пролетной $2\pi u_0/L$, то может иметь место задержка образования домена — старый домен исчезает на аноде, а новый возникает не сразу, а лишь после того, как напряжение на образце превысит пороговое. Таким путем удастся перестраивать частоту диодов, генерирующих ганновские колебания, в пределах $(0,5 \div 1,5) 2\pi u_0/L$.

По-видимому, для очень высоких частот (порядка десятков гигагерц) более эффективным может оказаться другой способ генерации колебаний с помощью полупроводников с ОДП. Идея состоит в том, чтобы работать в режиме, в котором домены не появляются вообще. Очевидно, при этом условие близости периода колебаний к пролетному времени снимается автоматически. Один из

путей, позволяющий избежать появления доменов, связан с уменьшением длины образца (§ III.3). При этом возникающая флуктуация не успевает вырасти в домен до того, как она выносится за пределы образца.

Другой способ [40], осуществленный в случае дрейфовой нелинейности (в GaAs), связан с тем, что при работе на высоких частотах и при смещениях, заметно превышающих пороговое, ОДП создается лишь на очень короткое время, за которое пространственный заряд не успевает нарасти. С другой стороны, за ту часть периода, в которой дифференциальная проводимость положительна, флуктуации объемного заряда успевают рассосаться. В результате осуществляется режим с ограниченным накоплением объемного заряда (ОНОЗ)*). Работая в режиме ОНОЗ, можно получить усиление сигнала за счет ОДП, не сопровождаемое образованием доменов.

Рассмотрим условия реализации указанного режима. Поскольку в исследуемой ситуации домены не успевают образовываться, скорость роста флуктуаций можно оценить, предполагая, что флуктуации плотности заряда остаются малыми. С другой стороны, значение напряженности поля меняется в заметных пределах. По этой причине удобно воспользоваться квазилинейным приближением, считая, что однородное состояние характеризуется мгновенным значением напряженности поля, и проводя линеаризацию относительно этого состояния. Будем также считать флуктуации плотности заряда достаточно плавно изменяющимися в пространстве, пренебрегая величиной $\nabla \delta \rho$. Это можно сделать, если характерный масштаб флуктуации $\delta \rho$ значительно превышает длину $\epsilon \mu E / 4\pi |\sigma|$. Тогда эволюция малых флуктуаций плотности заряда определяется уравнением (ср. с (I.7.7в))

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \sigma \delta \rho, \quad (10.1)$$

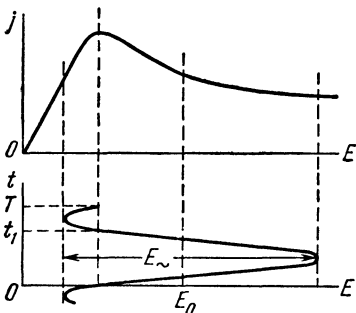
где σ есть мгновенное значение дифференциальной проводимости,

$$\sigma = \frac{d\{\mu [E(t)] E(t)\}}{dE(t)}.$$

*) В иностранной литературе употребляется термин LSA-mode— «Limited Space-Charge Accumulation mode».

Согласно (10.1) за ту часть периода, когда дифференциальная проводимость отрицательна ($0 < t < t_1$) (рис. 63), флуктуации нарастают в

$$G_1 \equiv \frac{\delta\rho(t_1)}{\delta\rho(0)} = \exp\left(\frac{h}{h_1}\right) \quad (10.2)$$



раз. Здесь $h = 2\pi n_0/\omega$, а

$$h_1 = \left[-\frac{4\pi e}{\varepsilon} \frac{1}{T} \int_0^{t_1} \frac{d(\mu E)}{dE} dt \right]^{-1}. \quad (10.3)$$

Рис. 63. Режим ОНОЗ.

В оставшуюся часть периода флуктуации будут затухать; уменьшение амплитуды определяется величиной

$$G_2 \equiv \frac{\delta\rho(T)}{\delta\rho(t_1)} = \exp\left(-\frac{h}{h_2}\right), \quad (10.4)$$

где

$$h_2 = \left[\frac{4\pi e}{\varepsilon} \frac{1}{T} \int_{t_1}^T \frac{d(\mu E)}{dE} dt \right]^{-1}. \quad (10.5)$$

Для того чтобы на протяжении многих периодов флуктуации в среднем не нарастали, должно выполняться условие

$$G_2 G_1 < 1, \quad (10.6)$$

т. е.

$$h_2 < h_1. \quad (10.6')$$

Ясно, что условие (10.6) может быть выполнено лишь для достаточно большой амплитуды напряженности переменного поля, E_ω . Это иллюстрируется рис. 64, на котором качественно представлены зависимости h_1 и h_2 от E_ω для вольтамперной характеристики, типичной для GaAs.

Далее, чтобы не допустить образования доменов*), нужно ограничить величину G_1 . Допустимая величина

*) Образование доменов (в условиях больших напряжений смещения) в достаточно длинных образцах сопровождается ионизацией [43], которая может привести к выходу образца из строя.

G_1 существенно зависит от величины затравочных флуктуаций (связанных, например, с флуктуациями концентрации легирующей примеси или с влиянием контактов); это накладывает, в частности, жесткие требования на однородность материала. Так, в работе [41] принимались ограничения

$$G_1 < e^5, \quad G_2 < e^{-6}, \quad (10.7)$$

откуда

$$6h_2 < h < 5h_1. \quad (10.8)$$

Для высококачественного арсенида галлия n -типа при

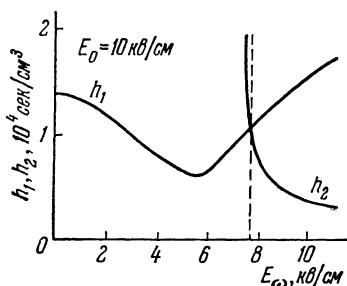


Рис. 64. Зависимость параметров h_1 и h_2 от амплитуды переменной напряженности поля E_ω [41].

Флуктуации не нарастают в среднем за много периодов, лишь если $E_\omega > (E_\omega)_{кр}$.

комнатной температуре последние неравенства принимают вид [41]

$$2 \cdot 10^4 \frac{\text{сек}}{\text{см}^3} < \frac{2\pi n_0}{\omega} < 2 \cdot 10^5 \frac{\text{сек}}{\text{см}^3}. \quad (10.8')$$

Коэффициент преобразования энергии источника в энергию колебаний, или КПД генерации, обычно определяется соотношением

$$\eta \equiv - \frac{P_{\text{полн}} - P_{\text{пост}}}{P_{\text{пост}}} = - \frac{P_{\text{перем}}}{P_{\text{пост}}} *). \quad (10.9)$$

Здесь $P_{\text{полн}}$ есть среднее за период значение полной мощности, получаемой электронами от поля (в расчете

*) Во многих случаях более высокие значения η получаются в области $h = (1 \div 5) 10^5 \text{ сек/см}^3$. Часто форма колебаний напряжения на образце при этом существенно отлична от синусоидальной.

на один электрон). Оно разбито на два слагаемых:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{пост}} &= \frac{1}{T} eE_0 \int_0^T \mu E dt, \\ P_{\text{перем}} &= \frac{1}{T} eE_\omega \int_0^T \mu E \sin \omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

При $\mu = \text{const}$ эти части отвечали бы мощностям, связанным с постоянной и переменной составляющими напряженности поля,

$$E = E_0 + E_\omega \sin \omega t.$$

Если $P_{\text{перем}} < 0$, то происходит передача энергии переменному полю, т. е. $\eta > 0$. Величина η зависит от амплитуды переменного сигнала E_ω , от постоянной составляющей напряженности поля E_0 и от величины h . Соответствующие зависимости представлены на рис. 65.

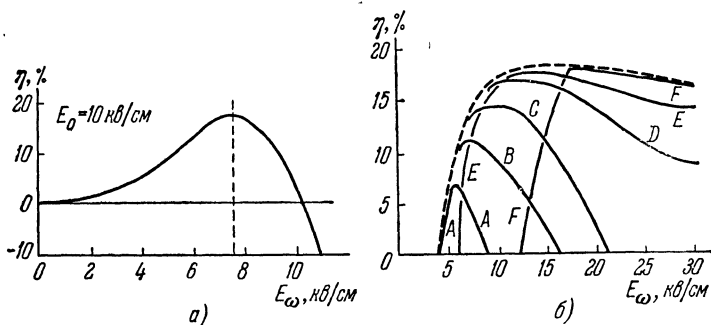


Рис. 65. Кпд генерации в режиме ОНОЗ.

а) Зависимость η от E_ω , б) Зависимость η_{max} от постоянной составляющей напряженности поля E_0 [41]. Различные кривые отвечают следующим значениям $(h/10^4)$ сек/см²: А-2; В-2,4; С-3; D-4; E-5; F-10.

Наряду с условием (10.8), имеются и условия, принципиально ограничивающие сверху возможную частоту колебаний. Эти условия связаны с конечностью времени межминимумных переходов τ_{12} , которое в GaAs составляет примерно $(1 \div 2) \cdot 10^{-12}$ сек [44], и времени релаксации энергии в основном минимуме $\tau_{\text{эн}}$, которое по данным работы [45] равно 10^{-12} сек. Соответственно изуче-

ние частотной зависимости η может дать информацию о величинах τ_{12} и $\tau_{ЭП}$.

Представляет интерес сравнение различных режимов работы полупроводника с ОДП. На рис. 66, взятом из

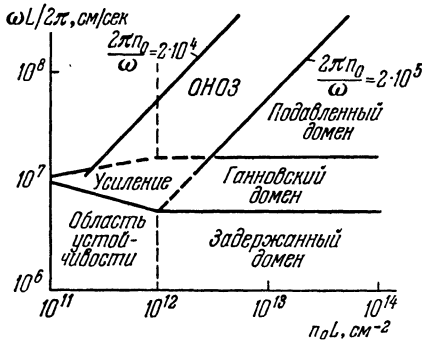


Рис. 66. Различные режимы работы полупроводника с ОДП.

работы [41], показаны области, отвечающие различным режимам. Линии, разделяющие эти области, разумеется,

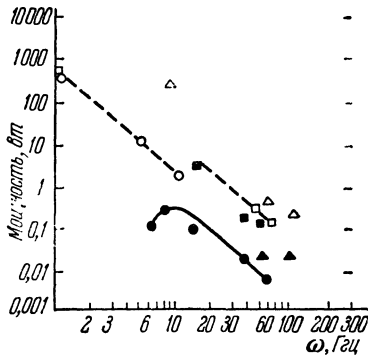


Рис. 67. Сравнение различных генераторов СВЧ на полупроводниках [46].

Лавинно-пролетные диоды: ■ — непрерывный режим (НР), □ — импульсный режим (ИР); генератор Ганна — пролетный режим: ● — НР, ○ — ИР; генератор Ганна — режим ОНОЗ: ▲ — НР, △ — ИР.

определены лишь приблизительно, их положение зависит от свойств материала и от температуры. В некоторых

областях диаграммы при одних и тех же значениях n_0 и ω возможны различные режимы работ в зависимости от типа нагрузки и от напряжения смещения.

Ганновские диоды, работающие в доменном режиме, в режиме ОНОЗ (равно как и лавиннопролетные диоды) позволяют генерировать колебания с частотами порядка десятков гигагерц. В некоторых отношениях (например, по уровню шума, по мощности на высоких частотах) диоды, работающие в режиме ОНОЗ, являются наиболее перспективными (рис. 67). Следует, однако, отметить известные технические трудности возбуждения режима ОНОЗ, связанные с необходимостью перейти к режиму с установившейся большой амплитудой колебаний поля в резонаторе, в который помещен образец.

Г Л А В А VIII

ЗВУКОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ДОМЕНЫ

§ 1. Введение. Некоторые экспериментальные данные

В настоящее время теория звукоэлектрических доменов развита значительно менее детально, нежели теория доменов рекомбинационного и тем более дрейфового происхождения. Тем не менее некоторые основные факты, по-видимому, удастся понять.

Приведем здесь основные экспериментальные данные.

Опыт показывает, что колебания тока в цепи, содержащей, например, образец CdS, также связаны с возникновением доменов. Однако, в отличие от электрических доменов в условиях дрейфовой или рекомбинационной нелинейности (см. главы I и V), в ряде случаев пространственно неоднородными оказываются распределения не только напряженности электрического поля E , но и потока звуковой энергии W^*). Домены такого типа получили название *звукоэлектрических*. Они возникают в условиях усиления звука электронным потоком, когда сила звука становится достаточно большой**). При этом могут осуществляться различные режимы усиления звука в зависимости от соотношения между длиной свободного пробега электронов l и волновым вектором q звуковой волны с максимальным коэффициентом усиления [3—11].

К настоящему времени можно указать совокупность достаточно надежно установленных фактов относительно

*) Мы будем также называть величину W более кратко силой звука.

***) По поводу усиления звука потоком электронов см., например, обзоры [1, 2].

возникновения и поведения звукоэлектрических доменов в полупроводниках.

1. Домены возникают, когда средняя напряженность электрического поля в образце достигает пороговой величины E_{th} ; последняя близка к величине

$$E_s = \frac{s}{\mu}. \quad (1.1)$$

Здесь s — скорость поперечных (сдвиговых) волн в направлении плотности тока. При этом нередко (см., например, [12])

$$E_{th} > E_s. \quad (1.1')$$

2. Магнитное поле влияет на движение доменов в основном через подвижность μ , т. е. через l [13—15]. Накладывая магнитное поле, бывает возможно перейти от режима $ql \gg 1$ к режиму $ql \ll 1$.

3. Наблюдаются как статические, так и движущиеся домены. Первые, как правило, образуются в высокоомных материалах (например, фотопроводящий CdS с удельным сопротивлением порядка 10^3 — 10^5 ом·см при комнатной температуре), вторые — в сравнительно низкоомных материалах (полупроводящие образцы CdS, GaSb, GaAs, Te, ZnO, CdS_xSe_{1-x} [16—43]).

4. Домены образуются на электрических, акустических и механических неоднородностях. Ими могут быть, в частности:

- а) электроды [13, 20—27],
- б) естественно возникшие или искусственно созданные макроскопические неоднородности в объеме образца [13, 21—23, 26, 27, 35, 44],
- в) спонтанные флуктуации плотности фононов («тепловой шум») [20, 25—27],
- г) искусственно вводимый в образец звуковой поток [26, 27, 34, 35, 45],
- д) неоднородные деформации, возникающие в пьезополупроводнике при наложении импульса электрического поля [13].

Исчезновение движущихся в образце n -типа доменов происходит, как правило, на аноде; домен может исчезать и на специально созданной неоднородности внутри образца [46].

5. Повторяющийся процесс образования домена, движения его по образцу и исчезновения сопровождается колебаниями тока в цепи. Их период T обычно можно представить в виде суммы

$$T = T_1 + T_2. \quad (1.2)$$

Здесь время «инкубации» T_1 зависит от напряженности поля, но не от длины образца L , а

$$T_2 = \frac{L}{u_0}. \quad (1.3)$$

Величина u_0 близка к скорости звука s^*).

6. Нестационарные колебания тока наблюдаются и в переходном режиме при образовании статического домена. При этом, однако,

$$T_2 = \frac{2L}{u_0}. \quad (1.3')$$

Последнюю величину можно интерпретировать как время прохождения звукового пакета по образцу в обоих направлениях [20, 47—49]. В этом случае говорят иногда об осциллирующих или «прилипающих» доменах.

7. В длинном образце во время движения домена и при наличии статического домена сила тока остается практически постоянной. При этом наблюдается эффект насыщения тока — его плотность не зависит от приложенного напряжения и равна примерно

$$j = j_s = ens. \quad (1.4)$$

8. В высокоомном GaAs наблюдаются [50] и домены, скорость которых значительно меньше скорости звука и составляет от 1 см/сек до 10^2 см/сек. Однако на звукоэлектрическое их происхождение указывает то, что значения j_s и E_{th} при этом близки к величинам (1.4) и (1.1).

9. Домен представляет собой макроскопическое образование. Его размеры обычно порядка $0,1 \div 1$ мм.

*) Исключение составляют, видимо, сильно анизотропные вещества (Te [24]), в которых заметную роль играют и волны, распространяющиеся под некоторым углом к потоку электронов.

10. В случае материалов со сравнительно хорошей электропроводностью (например, для полупроводящего CdS) пиковая напряженность поля может весьма заметно (на два порядка) превышать поле в остальной части образца. В более высокоомных материалах отношение напряженностей поля внутри и вне домена сравнительно невелико ($\sim 2 \div 3$). Напряженность поля внутри домена может лежать в пределах от единиц до нескольких десятков *кв/см*, в зависимости от материала. Существуют указания на то, что распределение напряженности поля в домене близко к треугольному или трапецидальному [51]. Измерения распределения $E(x)$ в образцах с доменами проводились как с помощью зондов, потенциальных или емкостных, так и по поглощению микроволнового излучения.

11. Спектральное распределение плотности фононов, измеряемое по эффекту Мандельштама — Бриллюэна [52—56], обнаруживает максимум на частоте, заметно меньшей частоты максимально усиливаемых звуковых колебаний, определяемой из линейной теории [57]. Так, согласно работе [58] в условиях насыщения тока интегральная сила звука W_t пропорциональна приложенному напряжению и возрастает с увеличением концентрации электронов. С изменением W_t частота максимального усиления ведет себя как $\text{const } W_t^{-1/4}$. Наряду с этим в процессе образования и движения домена спектр усиливаемых фононов может заметно расширяться [55—59].

12. В ряде случаев при прохождении по образцу звукоэлектрических доменов или при их исчезновении наблюдалось инфракрасное микроволновое излучение [60—67].

§ 2. Возможные механизмы отрицательной дифференциальной проводимости

Картина изменения плотности тока и напряженности электрического поля в опытах со звукоэлектрическими доменами в качественном отношении сходна с тем, что наблюдается в случае дрейфовых и рекомбинационных доменов. Поэтому естественно возникает вопрос о том, насколько далеко простирается эта аналогия, и, в частности, о том, какова роль ОДП в доменизации образца.

В случае $ql \ll 1$ были указаны два механизма возникновения ОДП однородного образца.

Первый из них [25] связан с учетом акустоэлектрического тока и решеточного поглощения звука *). В режиме усиления звука электронным потоком система может оставаться однородной, лишь если суммарный коэффициент поглощения звука α обращается в нуль:

$$\alpha \equiv \alpha_e + \alpha_l = 0. \quad (2.1)$$

Здесь α_e и α_l — электронный и решеточный коэффициенты поглощения (нормированные так, что они имеют размерность обратного времени). Условие (2.1) означает, что энергия, получаемая звуком от электронов, полностью передается некоторому термостату для фононов и, в конце концов, выводится из системы путем теплоотвода. В нашем случае $\alpha_e < 0$ и плотность акустоэлектрического тока, пропорциональная α_e , направлена против дрейфового тока. Это и ведет (как показано в работе [25] в предположении о постоянстве μ^{**}) к появлению ОДП.

Другой возможный механизм возникновения ОДП при $ql \ll 1$ связан с наличием ловушек в образце.

Роль ловушек состоит в том, что при наличии их сгустки пространственного заряда распространяются, как известно [1, 76], с подвижностью μ_a , меньшей обычной дрейфовой подвижности μ . Это может привести к тому, что коэффициент α_e будет менять знак при пороговом значении напряженности поля E_{th} , превышающем s/μ . Вольтамперная характеристика вплоть до E_{th} имеет обычный омический вид, а при больших значениях поля, в условиях насыщения, плотность тока есть $i_{ens} < en \mu E_{th}$. Таким образом, в переходной области полей $E \gtrsim E_{th}$ на характеристике должен существовать участок с ОДП. Однако убедительных экспериментальных данных, подтверждающих этот вывод, пока нет.

Для случая $ql \gg 1$ возможный механизм ОДП был указан в работе [77]. Он связан с тем, что E_{th} зависит

*) Важная роль этих двух факторов в теории звукоэлектрических доменов была подчеркнута в работах [68—73].

***) В работе [74] рассмотрен случай, когда ОДП возникает вследствие зависимости μ от W (задаваемой феноменологически).

от механизма рассеяния [78] и может превзойти отношение s/μ . При этом пороговая плотность тока оказывается большей j_s . Последующее уменьшение плотности тока до значения j_s означает не что иное, как наличие ОДП.

Следует заметить, что в рассматриваемых условиях ОДП обязана своим возникновением наличию (помимо электронов) второй динамической подсистемы — фононов. Рассмотренные механизмы становятся эффективными лишь при достаточно большой силе звука, т. е. ОДП не является здесь «врожденной» (как, например, в случае эффекта Ганна). Реально усиление звука связано с нарастанием силы звука в пространстве, и система может стать существенно неоднородной прежде, чем окажется возможным говорить о проявлениях ОДП. Это обстоятельство несущественно, лишь если время перестройки фононной подсистемы $|\alpha_e|^{-1}$ мало по сравнению с дифференциальным максвелловским временем релаксации,

$$|\alpha_e|^{-1} \ll \frac{\varepsilon}{4\pi|\sigma|}. \quad (2.2)$$

Неравенство (2.2), может реализоваться в достаточно высокоомных материалах (например, в фотопроводящих кристаллах CdS). В образцах с хорошей проводимостью (полупроводящий CdS, GaAs) оно, однако, не выполняется. По этой причине использование представления об ОДП в задаче о звукоэлектрических доменах, по-видимому, мало плодотворно. Здесь удобнее пользоваться непосредственно исходной системой динамических уравнений.

§ 3. Гидродинамическое приближение

Подход к задаче о звукоэлектрических доменах существенно зависит от соотношения между длиной звуковой волны $\lambda = 2\pi/q$ и ее частотой ω , с одной стороны, и длиной l и временем свободного пробега электронов τ , — с другой *). Мы будем рассматривать только случай

*) Мы имеем в виду длину и время свободного пробега как по импульсу, так и по энергии.

достаточно низких частот и длинных волн:

$$\omega t \ll 1, \quad ql \ll 1. \quad (3.1)$$

При этом справедлив гидродинамический подход, в котором поведение электронов описывается, помимо уравнения Пуассона, уравнением непрерывности для плотности электрического тока с обычными кинетическими коэффициентами μ и D , не испытывающими ни пространственной, ни временной дисперсии. Звуковое поле описывается чисто классическим образом с помощью уравнений континуальной теории упругости, энергия взаимодействия электронов со звуком рассматривается как обычная потенциальная энергия, подлежащая, однако, вычислению самосогласованным образом. Действительно, она зависит от состояния звукового поля, на которое в свою очередь влияет поведение электронов.

Примем далее несколько предположений, резко упрощающих расчет.

1) Ограничимся пьезоэлектрическими кристаллами, пренебрегая, в частности, деформационным механизмом взаимодействия носителей заряда со звуком (возможная роль последнего обсуждается в работе [71]).

2) Будем учитывать взаимодействие электронов лишь с поперечными волнами, обладающими меньшей фазовой скоростью, чем продольные.

3) Будем рассматривать лишь поведение звукового потока, введенного извне (сигнала).

4) Пренебрежем чисто решеточными нелинейностями, обусловленными взаимодействием между различными звуковыми модами [72, 73], и будем учитывать только нелинейность, обязанную своим возникновением электрон-фононному взаимодействию.

5) Не будем учитывать возможный нагрев электронного газа.

6) Пренебрежем также процессами захвата носителей заряда ловушками, считая характеристические времена всех рекомбинационных процессов большими по сравнению с периодом колебаний тока T .

7) Наконец, рассмотрим случай простейшей геометрии, когда вектор плотности тока j и волновой вектор акустической волны q коллинеарны.

Перечисленные предположения часто делаются в теории усиления звука и диктуются в основном соображениями простоты. В некоторых случаях то или иное из них может и не выполняться. Так, предположения пунктов 4) и 5), не лишённые оснований в области слабого поля, могут оказаться несостоятельными внутри домена, где как напряженность поля, так и сила звука резко повышены. Допущение пункта 6) исключает, в частности, из рассмотрения один из механизмов ОДП, рассмотренных в предыдущем параграфе. Известны случаи, когда влияние ловушек заметно изменяет процесс усиления звука (см., например, [43, 79], а также пункт 8 на стр. 329).

Далее, предположение 7) не годится в случае сильно анизотропных кристаллов; выпадают также из рассмотрения некоторые нелинейные эффекты, связанные с усилением звуковых волн, волновой вектор которых не коллинеарен плотности тока [73].

Некоторые основные особенности звукоэлектрических доменов, однако, удастся понять уже в рамках принятой выше простой модели.

Таким образом, исходная система уравнений имеет вид *)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{4\pi}{\epsilon} (\rho - \rho_0) + \frac{4\pi}{\epsilon} \beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

$$j = \rho \mu E - D \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{c}{d} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\beta}{d} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\chi}{d} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t}. \quad (3.5)$$

Здесь ξ есть x -компонента вектора смещения в звуковой волне (совпадающая в наших предположениях с абсолютной величиной этого вектора), β — пьезомодуль, c — модуль упругости, d — плотность кристалла, χ — коэффициент вязкости решетки.

Система (3.2) — (3.5), дополненная надлежащими начальными и граничными условиями, составляет осно-

*) В случае CdS считаем, что звук распространяется вдоль оси c .

ву для рассмотрения многих задач, связанных с распространением звука в веществе.

Все эти задачи можно разделить на два типа.

К первому типу относятся задачи, связанные с вычислением скорости звука, коэффициентов электронного и решеточного поглощения и т. д. Характерные расстояния и интервалы времени, отвечающие соответствующим процессам, — порядка длины и периода звуковой волны. Эти процессы мы будем называть «быстрыми».

Ко второму типу принадлежат задачи о распределении звукового и электрического полей во всем образце и об изменениях этих полей за сравнительно большие интервалы времени. Соответствующие характерные длины и промежутки времени — порядка $s/|\alpha|$ и $|\alpha|^{-1}$. Эти процессы мы будем называть «медленными».

Возможность разделения процессов на «быстрые» и «медленные» обеспечивается неравенством

$$(s/|\alpha|) \gg \lambda, \quad (3.6)$$

где λ — длина звуковой волны. Это неравенство мы всегда будем считать выполненным. Фактически оно обусловлено сравнительно малой вязкостью вещества (ответственной за решеточное поглощение звука) и относительной слабостью взаимодействия электронов со звуком (ответственного за «электронное» поглощение или испускание звуковых волн). Соответствующие малые параметры легко найти, переписывая систему (3.2) — (3.5) в подходящих безразмерных переменных. Легко убедиться, что при этом выделяются две безразмерные величины:

$$\kappa = \frac{\chi\omega}{c}, \quad \eta = \frac{4\pi\beta^2}{\epsilon c}, \quad (3.7)$$

которые как раз и характеризуют интенсивность двух указанных процессов. Параметр η , как правило, не превышает 0,1 (для CdS, например, $\eta = 3,7 \cdot 10^{-2}$). Безразмерный коэффициент вязкости κ в ряде случаев оказывается еще меньше. Так, в CdS величина $\kappa \ll \eta$ вплоть до $\omega \sim 10^{10} \text{ сек}^{-1}$.

В теории звукоэлектрических доменов как макроскопических образований непосредственный интерес представляет исследование медленных процессов; при этом мы будем иметь дело только с величинами, у же

усредненными по длине (периоду) звуковой волны. Задача о быстрых процессах носит здесь вспомогательный характер; цели ее состоят в следующем: вывод уравнения непрерывности для потока звуковой энергии W , включая явное вычисление как скорости звука s , так и коэффициентов электронного и решеточного поглощения α_e и α_l ; вывод усредненного выражения для плотности тока j , включая и определение явного вида акустоэлектрической его компоненты. Такая постановка задачи была принята в работах [69, 80—83]; наиболее полный аналитический расчет содержится, по-видимому, в статье [81], результатами которой мы и будем в дальнейшем пользоваться (они удовлетворительно совпадают с данными численного расчета [80]). Оказывается, что в зависимости от силы звука и напряженности поля имеются три предельных случая. Именно, введем характерное значение силы звука

$$W_c = \frac{\epsilon \omega^2 T^2}{4\pi e^2 s \eta} \equiv \frac{T n_0 s a^2}{\eta}, \quad a^2 = q^2 l_D^2 \equiv q^2 \frac{\epsilon T}{4\pi e \rho}. \quad (3.8)$$

Пусть, далее, безразмерная «надкритическая» напряженность поля p определена равенством

$$p = \frac{\mu E - s}{Dq}. \quad (3.9)$$

Тогда возможны следующие ситуации:

$$(W/W_c)^{1/2} \leq 1, \quad p \text{ произвольно}, \quad (3.10a)$$

$$p \gg 1, \quad p \gtrsim (W/W_c)^{1/2}, \quad (3.10б)$$

$$(W/W_c)^{1/2} \gg 1, \quad p \ll (W/W_c)^{1/2}. \quad (3.10в)$$

В условиях (3.10a) и (3.10б) для коэффициентов поглощения звука справедливы выражения

$$\alpha_e = -\eta q \frac{pa^2s}{p^2a^4 + (1+a^2)^2} (1 + \dots), \quad (3.11)$$

$$\alpha_l \approx \kappa qs (1 + \dots), \quad (3.12)$$

где точками обозначены величины порядка W/W_c (в случае (3.10a)) или порядка $W/(p^2W_c)$ (в случае (3.10б)).

Неравенства (3.10а), (3.10б) в совокупности определяют то, что можно было бы назвать случаем слабого звука.

С другой стороны, условие (3.10в) определяет случай сильного звука. Для коэффициентов поглощения при этом получается

$$\alpha_e = -\rho \frac{s^2}{W} \left(E - \frac{s}{\mu} \right) [1 + O(W_c/W)], \quad (3.13)$$

$$\alpha_l \approx \kappa q \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} s \sqrt{W/W_c} [1 + O(W_c/W)] \equiv hW^{1/2} \quad (3.14)$$

(величина h определяется этим соотношением).

Заметим, что термины «слабый» и «сильный» звук понимаются здесь не только в смысле малой или большой величины отношения W/W_c , но и в смысле малой или большой величины $(1/\rho^2)(W/W_c)$ (т. е. с учетом надкритичности). По этой причине сила звука в случае (3.10б) может оказаться и больше, нежели в случае (3.10в).

Формулы (3.12) — (3.14), как и весь расчет [81], были получены в предположении, что длина образца не слишком велика:

$$\eta^2 q L \ll 1, \quad \kappa^2 q L \ll 1, \quad (3.15)$$

кроме того, $a \gtrsim 1$.

Неравенства (3.15) могут быть несколько ограничительными, однако главный недостаток формул (3.11) — (3.14) состоит, по-видимому, в другом. Именно, эти формулы относятся к процессу распространения звуковой волны, извне запущенной в образец, в предположениях, что она:

а) достаточно интенсивна (сила звука заметно превышает уровень тепловых шумов)*),

б) монохроматична на входе.

При этом не принимаются во внимание потери энергии на генерацию субгармоник, обусловленную параметрическим смешиванием усиливаемой волны с

*) Соответственно излагаемая ниже теория носит лишь предварительный характер, ибо относится, строго говоря, лишь к доменам, развивающимся при усилении сигнала, но не к доменам, вырастающим «из шума». Отметим, однако, что принятая нами постановка задачи отвечает определенной экспериментальной ситуации [34].

флуктуациями звукового поля в образце. Экспериментально генерация субгармоник наблюдалась в работах [44, 84]; по-видимому, она может играть заметную роль в условиях образования доменов.

Для плотности акустоэлектрического тока j_{ac} получается выражение привычного [1] вида

$$j_{ac} = \frac{\mu}{s^2} \alpha_e W. \quad (3.16)$$

Заметим, что при большой силе звука правая часть (3.16) отнюдь не совпадает с $(\mu/s) (\partial W/\partial x)$.

Величина s , входящая в формулы (3.11)—(3.14) и (3.16), есть «истинная» локальная скорость звука, вычисленная как с учетом взаимодействия фононов с электронами, так и с учетом нелинейных поправок. Она же входит и в уравнение непрерывности для W . Вообще говоря, скорость s зависит и от локальной напряженности поля, и от силы звука. Эти эффекты, однако, невелики*), и для начала мы будем пользоваться более простым выражением линейной теории:

$$s = s_0 \sqrt{c(1 + \eta)/d}. \quad (3.17)$$

Итак, мы приходим к следующей системе уравнений, описывающих «медленную» задачу:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + s \frac{\partial W}{\partial x} = -(\alpha_e + \alpha_l) W, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{4\pi}{\epsilon} (\rho - \rho_0), \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad (3.20)$$

$$j = \rho \mu E - \frac{\partial}{\partial x} (\rho D) + j_{ac}. \quad (3.21)$$

Здесь, в отличие от (3.2)—(3.5), функции E, ρ, \dots представляют собой величины, усредненные по длине звуковой волны.

Систему (3.18)—(3.21) следует дополнить начальными и граничными условиями. Одно из дополнитель-

*) В случае (3.10б) поправка — порядка η/ρ^2 , в случае (3.10в) — порядка $\eta (W_c/W)^{1/2}$.

ных условий очевидно: оно выражает просто закон Кирхгофа и для схемы рис. 1 записывается в виде

$$V = \int_0^L E(x, t) dx = \mathcal{E} - RJ. \quad (3.22)$$

Другие условия зависят от постановки задачи и будут указаны ниже.

§ 4. Пространственно однородное решение

В предыдущих главах было показано, что немало важную роль в теории доменов играют особые точки системы уравнений, описывающих рассматриваемую систему. По этой причине удобно сначала рассмотреть вспомогательную задачу о пространственно однородном распределении силы звука и других величин. Соответствующее частное решение системы (3.18)—(3.21) дается равенствами

$$E = E_0, \quad \rho = \rho_0, \quad W = W_0, \quad j = j_0, \quad (4.1)$$

где E_0 , W_0 и j_0 — постоянные, определяемые из соотношений

$$W_0(\alpha_e + \alpha_l) = 0, \quad (4.2)$$

$$j_0 = \rho_0 \mu E_0 + \frac{\mu}{s^2} \alpha_l W_0 \quad (4.3)$$

с учетом закона Кирхгофа. Величины α_e и α_l в (4.2), (4.3) берутся при значениях параметров (4.1).

Используя выражения (3.11) и (3.12), видим, что в случае слабого звука имеется три пространственно однородных решения. Одно из них — тривиальное:

$$W_0 = 0, \quad j_0 = \rho_0 \mu E_0. \quad (4.4)$$

Оно описывает ситуацию, когда звук извне не вводится.

Два других решения даются равенствами

$$E_0^{(1,2)} = \frac{s}{\mu} + \frac{Tq}{e} p_{1,2}, \quad (4.5)$$

$$\frac{W_0^{(1,2)}}{W_c} = \frac{\eta}{\kappa} \frac{sl_D}{Da^2} \left(1 - \frac{j_0^{(1,2)}}{j_s} \right) + \frac{\eta}{\kappa} \frac{p_{1,2}}{a^2}. \quad (4.6)$$

Здесь

$$j_s = \rho_0 s \quad (4.7)$$

есть плотность тока насыщения и

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\eta}{2\kappa} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{2\kappa}\right)^2 - (1+a^2)^2} \right]. \quad (4.8)$$

Видно, что решения (4.5), (4.6) существуют лишь при $(1+a^2) \leq \eta/2\kappa$.

В соответствии со сказанным в § 3, наиболее интересен случай

$$1+a^2 \ll \eta/2\kappa,$$

которым мы в дальнейшем и ограничимся. Тогда формулы (4.5), (4.6) и (4.8) дают

$$\rho_1 a^2 \approx \frac{\kappa}{\eta} (1+a^2)^2, \quad \rho_2 a^2 \approx \eta/\kappa, \quad (4.9)$$

$$E_0^{(1)} = \frac{s}{\mu} \left[1 + \frac{D}{sl_D} \frac{\kappa}{\eta} \frac{(1+a^2)^2}{a} \right] \approx \frac{s}{\mu} \equiv E_s, \quad (4.10a)$$

$$W_0^{(1)} = W_c \left\{ \frac{(1+a^2)^2}{a^4} + \frac{\eta}{\kappa} \frac{1}{a^3} \frac{sl_D}{D} \left[1 - \frac{j_0^{(1)}}{j_s} \right] \right\} \quad (4.11a)$$

и

$$E_0^{(2)} = \frac{s}{\mu} \left(1 + \frac{D}{sl_D} \frac{\eta}{\kappa} \frac{1}{a} \right) \approx \frac{T}{el_D} \frac{\eta}{\kappa} \frac{1}{a}, \quad (4.10б)$$

$$W_0^{(2)} = W_c \left(\frac{\eta}{\kappa a^2} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{\kappa}{\eta} \frac{sl_D}{D} a \left[1 - \frac{j_0^{(2)}}{j_s} \right] \right\}. \quad (4.11б)$$

Очевидно, в условиях (3.10а) решение, определяемое формулами (4.10а), (4.11а), может иметь смысл лишь при $j_0^{(1)} \geq j_s$, причем $1 - j_0^{(1)}/j_s \leq \kappa/\eta$.

С другой стороны, вторым решением (4.10б), (4.11б) в условиях (3.10б) можно пользоваться в довольно широком интервале значений $j_0^{(2)}$.

Далее, в случае сильного звука мы получаем, согласно (3.13) и (3.14),

$$W_0 = \left[\frac{\rho_0 s^2}{h} \left(E_0 - \frac{s}{\mu} \right) \right]^{2/3}, \quad j_0 = j_s, \quad (4.12)$$

а значение E_0 определяется из закона Кирхгофа. Подчеркнем, что плотность тока здесь равна j_s при любой эдс батареи, лишь бы выполнялось условие (3.10в).

Ясно, что в полученных однородных распределениях имеет место компенсация электронного усиления звука

решеточным поглощением его. Эти неравновесные пространственно однородные распределения могут, однако, оказаться неустойчивыми относительно малых флуктуаций физических величин или же относительно развития затравочных неоднородностей.

Исследование устойчивости относительно нарастания малых флуктуаций нетрудно провести так же, как и в § VII. 2. В дальнейшем, однако, нас будет интересовать случай, когда в разных частях достаточно длинного образца реализуются различные однородные решения. В этих условиях использовать выводы о флуктуационной устойчивости однородного распределения, вообще говоря, нельзя.

С другой стороны, исследование устойчивости относительно развития затравочных неоднородностей имеет полный смысл для кусочно однородных распределений, ибо здесь речь идет о возмущениях локального характера.

§ 5. Статическое распределение силы звука в макроскопически однородных образцах [81, 82, 85—87]

Рассмотрим статическую задачу, полагая $E = E(x)$, $W = W(x)$, $\rho = \rho(x)$. Здесь можно выделить два основных вопроса:

а) Расчет распределения напряженности поля и силы звука в макроскопически однородном образце (не содержащем никаких макроскопических дефектов кроме контактов).

б) Исследование влияния затравочных неоднородностей на названные распределения.

Первая из этих задач исследуется в настоящем параграфе, вторая — в следующем.

Физическая причина возникновения пространственно неоднородного распределения E и W в условиях усиления звука весьма проста. Дело в том, что в указанных условиях акустоэлектрический ток (3.16) вычитается из омического ($\alpha_e < 0$). С другой стороны, в статическом случае $j = \text{const}$. Следовательно, по мере распространения волны вдоль образца с ростом W должна возрастать и напряженность поля. Иначе говоря, следует ожидать возникновения статического домена,

локализованного у анода (в образцах n -типа) или у катода (в образцах p -типа).

Явный вид функций $E(x)$ и $W(x)$ можно найти с помощью системы (3.18) — (3.21), полагая в ней временные производные равными нулю. Расчет существенно

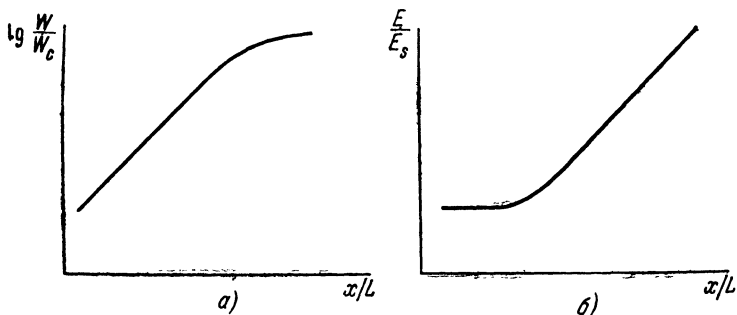


Рис. 68. Распределение силы звука (а) и напряженности поля (б) в статическом звукоэлектрическом домене.

облегчается, если принять во внимание сравнительно плавный характер рассматриваемых распределений и довольно большие значения средней напряженности поля \bar{E} . Именно, будем считать малым параметр $|\alpha|T/e\bar{E}s$. Тогда в выражении (3.21) можно пренебречь диффузионной составляющей плотности тока, и, следовательно

$$W = \frac{s^2}{\mu\alpha_e} (j - \mu\rho E). \quad (5.1)$$

Далее, пренебрежем вообще изменением плотности заряда в образце, полагая $\rho = \rho_0$ в (5.1) и в формулах для α_e . (Правильность этого предположения оправдывается а posteriori: разность $\rho - \rho_0$ можно оценить, подставляя вычисляемую ниже функцию $E(x)$ в уравнение Пуассона.) Подставляя теперь выражение (5.1) в (3.18), получаем дифференциальное уравнение для напряженности поля

$$\frac{dE}{dx} = \alpha_e \alpha \frac{j - \mu\rho_0 E}{\mu\rho_0 \alpha_e + (j - \mu\rho_0 E) \frac{d\alpha_e}{dE}}. \quad (5.2)$$

В качестве граничного условия к (5.2) можно задать, например, значение силы звука при $x = 0$ (такая постановка задачи естественна в теории усиления звука, извне вводимого в образец). Подставляя в (5.2) значения α и α_e , вычисленные в § 3, можем найти $E(x)$ и, следовательно, $W(x)$ при различных значениях плотности тока j ; последние в свою очередь определяются с помощью (3.22). На рис. 68 представлен результат такого вычисления, выполненного в [81] в рамках нелинейной теории. Как и следовало ожидать, напряженность поля оказалась возросшей на катоде (в образце p -типа). Не вполне тривиален, однако, характер зависимости E от координат: поле остается практически постоянным пока сила звука не достигнет критического значения (3.8), после чего линейно возрастает с x . Также линейно — а не экспоненциально! — растет в этой области и сила звука.

Теория приводит к сублинейной зависимости силы звука на выходе от входного ее значения. Такое «насыщение усиления» наблюдалось экспериментально в работах [88, 89].

§ 6. Статическая устойчивость пространственно однородного распределения силы звука

Возможная роль затравочных неоднородностей в задаче об усилении звука очевидна. Действительно, локальное увеличение напряженности поля может повлечь за собой и локальный рост коэффициента усиления звука. Соответственно возрастает (по абсолютной величине) и плотность акустоэлектрического тока; при заданном полном токе это поведет к дополнительному росту напряженности поля и т. д. В результате вблизи затравки может образоваться макроскопическая область повышенной напряженности поля и повышенной плотности звуковой энергии.

В общем случае задача о возникающих при этом неоднородных распределениях силы звука и других величин еще не рассмотрена. Достаточные условия их возникновения, однако, можно получить, как и в §§ IV.3, IV.4, исследуя статическую устойчивость рассматриваемой системы. Именно, будем описывать

наличие затравочной неоднородности с помощью граничного условия (II.7.11) [90]

$$\left. \frac{d\rho D}{dx} \right|_{x=x_0} = \zeta j. \quad (6.1)$$

При $\zeta = 0$ может реализоваться одно из пространственно однородных решений, изученных в § 4.

При $\zeta \ll 1$ положим

$$W = W_0 + \delta W(x), \quad E = E_0 + \delta E(x), \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho(x), \quad (6.2)$$

подставим эти выражения в уравнения (3.18) — (3.21) и выполним линеаризацию по малым добавкам δE , $\delta\rho$, δW . Тогда для названных величин получится система дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами. Решение ее имеет вид

$$\delta E = A_1 e^{\lambda_1(x-x_0)} + A_2 e^{\lambda_2(x-x_0)} + A_3 e^{\lambda_3(x-x_0)}, \quad (6.3)$$

где λ_1 , λ_2 , λ_3 — корни соответствующего характеристического уравнения, а A_1 , A_2 , A_3 — постоянные (аналогичные формулы получаются и для $\delta\rho$, δW). По определению система статически устойчива, если постоянные A_1 , A_2 , A_3 можно выбрать так, чтобы функции δE , $\delta\rho$, δW затухали по обе стороны от неоднородности (или у обоих контактов). Очевидно, так обстоит дело, если вещественные части корней λ_1 , λ_2 , λ_3 имеют разные знаки. В противном случае искажение поля, вносимое затравкой, не остается локализованным на малых расстояниях (а ограничивается лишь нелинейными эффектами).

Соответствующее исследование корней выполняется тривиально с помощью критерия Гурвица [92], и мы приведем здесь лишь результат (ограничиваясь случаем постоянных μ и D).

Оказывается, что распределения (4.10б), (4.11б) и (4.12), равно как и тривиальное решение ($W_0 = 0$), статически устойчивы. С другой стороны, решение (4.10а), (4.11а) оказывается статически неустойчивым, если

$$W_0 > W_c \frac{(1+a^2)^2}{a^4}, \quad (6.4)$$

т. е. $j_s > j_0$, и устойчивым — в случае обратного неравенства. (Заметим, что случай (6.4) лежит уже на пределе применимости формул (4.10а), (4.11а).)

По определению (3.8) мы имеем (выражая T , s и n_0 соответственно в $^{\circ}\text{K}$, см/сек и см^{-3})

$$W_c = 2,1 \cdot 10^{-4} \frac{T}{300} \frac{s}{2 \cdot 10^5} \frac{0,04}{\eta} \text{ вт/см}^2. \quad (6.5)$$

Мы видим, что в кристаллах типа фотопроводящего CdS величина W_c , определяющая при $a \sim 1$ момент наступления неустойчивости, довольно мала. Возможно, именно по этой причине статические домены возникают там до появления движущихся доменов и колебаний тока в цепи. Однако, чтобы указать, какое именно неоднородное распределение образуется, следует еще решить вопрос о флуктуационной устойчивости интересующего нас решения. Для случая слабого звука такое исследование проведено в работе [83].

§ 7. Стационарное движение звукоэлектрических доменов

Тот факт, что многие экспериментальные данные неплохо описываются формулами (1.2) и (1.3), естественно наводит на мысль о возможности стационарного движения доменов (как и в случаях дрейфовой и рекомбинационной нелинейности). Соответствующие решения должны быть римановыми, т. е. все физические величины должны зависеть лишь от аргумента

$$z = x - u_0 t, \quad (7.1)$$

где u_0 — постоянная («скорость домена»). С другой стороны, опыты по рассеянию света (эффекту Мандельштама — Бриллюэна) [52—55] довольно ясно указывают на нарастание силы звука в домене по мере его движения. Означает ли это, что в рассматриваемой задаче римановы решения вообще неосуществимы или что они просто не успевают развиться из-за слишком малых длин реально используемых образцов? Для ответа на этот вопрос надо исследовать возможные решения указанного типа. Физическая картина стационарно движущихся доменов была недавно очень ясно описана в работах [68—70]. Ниже дается несколько иная математическая трактовка задачи.

Полагая E , ρ и W зависящими только от z , получаем из (3.18) — (3.21) стандартную динамическую систему третьего порядка

$$\frac{dE}{dz} = \frac{4\pi}{\varepsilon} (\rho - \rho_0), \quad (7.2)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{D} \left[(u_0 - \mu E) \rho + C - \frac{\mu}{s^2} \alpha_e W \right], \quad (7.3)$$

$$(s - u_0) \frac{dW}{dz} = -(\alpha_e + \alpha_l) W, \quad (7.4)$$

где C есть постоянная интегрирования. Для плотности тока частиц в образце j и силы тока в последовательной нагрузке

$$J = j - \frac{\varepsilon}{4\pi} u_0 \frac{dE}{dz}$$

мы имеем, как и в случае чисто электрических доменов (ср. с гл. V):

$$j = u_0 \rho + C, \quad J = u_0 \rho_0 + C. \quad (7.5)$$

В качестве граничных условий к системе (7.2) — (7.4), помимо закона Кирхгофа, можно принять либо условие периодичности решения с периодом L , либо условие ограниченности решений на бесконечности (аппроксимация «бесконечного образца»). Как и в случае чисто электрических доменов, легко показать, что решение определяется при этом с точностью до произвольной (физически несущественной) начальной фазы. Далее, нетрудно убедиться, что в части, касающейся вычисления скорости домена u_0 , два указанных типа граничных условий асимптотически эквивалентны. Именно, для периодических решений — точно, а для ограниченных на бесконечности — в пределе при $L \rightarrow \infty$ справедливы некоторые тождества, получающиеся путем интегрирования уравнений (7.2) — (7.4) по периоду (с последующим делением на L и переходом к пределу при $L \rightarrow \infty$, коль скоро речь идет о решениях второго типа). Нам понадобятся два из них:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L dz \left[\rho (u_0 - \mu E) - \frac{\mu \alpha_e}{s^2} W \right] + C = 0 \quad (7.6)$$

и

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{L} \int_0^L dz \left[u_0 - \mu E - \frac{\mu \alpha_e}{s^2 \rho} W \right] + \frac{C}{L} \int_0^L \frac{dz}{\rho} \right\} = 0. \quad (7.7)$$

Комбинируя (7.6) и (7.7), получаем (асимптотически при $L \rightarrow \infty$)

$$C = \mu \frac{I_1 - \rho_0 I_2}{1 - \rho_0 I_3}, \quad u_0 = \mu \bar{E} + \mu \frac{I_2 - I_1 \cdot I_3}{1 - \rho_0 I_3}, \quad (7.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} &= \frac{1}{L} \int_0^L E dz, & I_1 &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\alpha_e}{s^2} W dz, \\ I_2 &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\alpha_e}{s^2 \rho} W dz, & I_3 &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{dz}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

В дальнейшем мы примем аппроксимацию «бесконечного образца». Тогда интегральные кривые должны включать особые точки системы (7.2) — (7.4), т. е. в подавляющей части образца распределения E , ρ и W должны описываться одним из решений системы (4.2), (4.3). Как и в случае чисто электрических доменов, здесь в принципе возможны решения двух типов — движущиеся слои и «собственно домены»^{*}). Рассмотрим сначала слои (очевидно, такие решения возможны только в режиме заданного тока). Они описываются интегральными кривыми, соединяющими две (какие-нибудь) особые точки, и отвечают ступенчатому (с узким переходным слоем) распределению силы звука и других величин. Все такие решения можно перебрать, комбинируя попарно различные пространственно однородные решения (4.4) и (4.10а) — (4.12) с учетом условия постоянства плотности тока в образце. При этом следует иметь в виду как условия применимости различных выражений для α_e , α_l , так и условие статической устойчивости. Действительно, последнее, как уже отмечалось, носит локальный характер, почему и может быть применено по отдельности к каждой (макроскопически большой)

^{*}) Мы не касаемся здесь вопроса об устойчивости этих решений, заслуживающего самостоятельного исследования.

части образца. Получающиеся при этом возможности перечислены в табл. 6. В этой таблице b — произвольное число порядка единицы, $E_s = \rho_0 \mu s$, значения W_0 и E_0

Т а б л и ц а 6

Возможные решения типа слоев

$\gamma = \frac{I_0 - I_s}{I_s}$	Комбинируемые решения	Значения силы звука и напряженности поля в двух частях образца
$-b < \gamma < \frac{\eta}{\kappa} \frac{D}{asl_D}$	(4.4) и (4.116)	$0, \frac{j_0}{\rho_0 \mu}; W_0^{(2)}, \frac{T}{eal_D} \frac{\eta}{\kappa}$
0	(4.4) и (4.12)	$0, E_s; W_0, E_0$
0	(4.116) и (4.12)	$W_c \left(\frac{\eta}{\kappa a^2} \right)^2, \frac{T\eta}{eal_D \kappa}, W_0, E_0$

связаны условием (3.10в) и равенством

$$W_0 = W_c \left(\frac{sl_D}{D} \frac{\eta}{\kappa} \right)^{2/3} \left(\frac{E_0}{E_s} - 1 \right)^{2/3},$$

а в остальном произвольны.

Далее, решение должно удовлетворять тождествам (7.6), (7.7). В рассматриваемом случае фигурирующие там интегралы легко берутся, ибо переходный слой дает лишь пренебрежимо малый вклад в правые части. Легко убедиться, что эти тождества удовлетворяются лишь для решения, указанного во второй строке табл. 6. Иначе говоря, теория допускает распределение в виде слоя, по одну сторону от которого имеет место режим «сильного звука» (4.12), а по другую — $W = 0$. Из формул (7.8) легко усмотреть, что при этом $C = 0$ и $u_0 = s^*$) (в пренебрежении нелинейными поправками к (3.17)).

Обратимся теперь к «собственно доменам». Решения такого типа, как известно, описываются интегральными кривыми, выходящими из некоторой особой точки и возвращающимися в нее же; если рассматриваемая кривая содержит и вторую особую точку, мы имеем «широкий» домен, в противном случае — узкий. Искомые кривые (сепаратрисы) существуют, если соответствующая осо-

*) См. сноску на стр. 338.

бая точка (точки) есть седло или седло-фокус (эти две возможности топологически эквивалентны) [91]. Из определения понятия статической устойчивости явствует, что к этому типу относятся особые точки, отвечающие статически устойчивым пространственно однородным решениям, и только они. Повторяя выкладки § 6 применительно к рассматриваемой здесь задаче, легко убедиться, что топологический характер особых точек в обоих случаях один и тот же.

Поскольку в данном случае мы имеем дело с системой третьего порядка, необходимые условия существования замкнутых интегральных кривых оказываются менее содержательными, чем в стандартной теории эффекта Ганна. По-видимому, без дополнительной конкретизации задачи здесь можно указать лишь возможные типы решений.

Поступая как и в случае «слоевых» решений, видим, что узкие домены — при том или ином значении плотности тока — формально могут отвечать любому из решений (4.10а)—(4.12) и $W_0 = 0$; широкие домены формально могут отвечать любой из комбинаций, указанных в табл. 6. При этом соображения, по которым были отвергнуты два (из трех допускаемых этой таблицей) слоевых решения, здесь уже не имеют места. Так, в случае широкого домена, представляющего собой комбинацию решений (4.10б), (4.11б) и (4.12), мы имеем, согласно (7.8):

$$C = 0, \quad u_0 = \frac{L''}{L} s,$$

где L'' — суммарная длина частей образца, в которых осуществляется режим (4.12). Следует, однако, иметь в виду, что при постепенном увеличении напряжения на образце (или плотности тока в нагрузке) прежде всего возникает домен, отвечающий меньшему значению напряжения (плотности тока) *). Таким образом, в указанных условиях можно ожидать либо узких доменов на фоне режима «сильного звука», либо широких доменов «сильного звука», вне которых сила звука равна нулю. В обоих случаях плотность тока в нагрузке равна j_s ,

*) Внимания заслуживает вопрос о возможности гистерезисных явлений, связанных с наличием нескольких доменных решений.

а скорость домена (с точностью до малых поправок к формуле (3.17)) есть скорость звука s . По-видимому, оба эти вывода отвечают опыту.

Видим, таким образом, что в рамках принятых приближений теория допускает существование стационарно движущихся доменов. Из сказанного выше ясно, что решающую роль при этом играет решеточное поглощение звука: в отсутствие его рассматриваемая система вообще не имела бы особых точек.

§ 8. Нестационарные решения

Нестационарные распределения силы звука и напряженности поля рассматривались в работах [80] и [83]. В первой из них, однако, не было принято во внимание решеточное поглощение звука, а во второй была использована аппроксимация малой нелинейности. Ниже дается трактовка, свободная от этих ограничений, но зато основанная на аппроксимации квазинейтральности и на пренебрежении диффузионным током. Это может быть оправдано, коль скоро выполняются неравенства

$$|\alpha| E \mu \tau_M s^{-1} \ll 1, \quad |\alpha| \tau_M \ll 1, \quad |\alpha| T / e s E \ll 1, \quad (8.1)$$

где $\alpha = \alpha_e + \alpha_l$, а τ_M — максвелловское время релаксации*). По-видимому, так обстоит дело в плохо проводящих материалах (типа фотопроводящего CdS). Следует, однако, иметь в виду, что за понижение порядка системы уравнений придется платить: легко показать, что даже с учетом диффузионного тока (но в аппроксимации квазинейтральности) риманово решение можно получить лишь с учетом зависимости скорости звука или/и μ и D от E , ρ , W . Характер приближения к однородному режиму нам все же удастся проследить. В принятых аппроксимациях система (3.18) — (3.21) сводится к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} + s \frac{\partial W}{\partial x} = -\alpha W, \quad (8.2)$$

$$\rho_0 \mu E + \frac{\mu}{s^2} \alpha_e (E, \rho_0, W) W = J. \quad (8.3)$$

*) Неравенства (8.1) совместны при $\alpha^2 \ll s^2 / l_D^2$.

Граничное условие к (8.2) естественно взять в виде (ср. пункт 3, стр. 333)

$$W|_{x=0} = \varphi(t), \quad (8.4)$$

где $\varphi(t)$ — достаточно гладкая ограниченная функция*). Уравнения (8.2), (8.4) определяют стандартную задачу Коши, которая легко решается (заметим при этом, что в рассматриваемых условиях закон Кирхгофа позволяет пренебречь временной зависимостью J).

Рассмотрим сначала случай слабого звука и малой надкритичности ($\rho a^2 \ll 1$, $W < W_c$). Будем измерять плотность тока, напряженность поля, силу звука, время и длину соответственно в единицах j_s , E_s , \bar{W} , \bar{t} и \bar{x} , где

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= \frac{(1+a^2)^2}{a^4} W_c, \\ \bar{t} &= \frac{\bar{W}}{s^2 \rho_0 E_s}, \\ \bar{x} = s\bar{t} &= \frac{(1+a^2)^2}{a^2 \eta} \frac{D}{s}, \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

и введем обозначение

$$b = \frac{\kappa}{\eta} \frac{(1+a^2)^2}{a} \frac{D}{sl_D}. \quad (8.6)$$

Тогда (с учетом (3.11)) решение поставленной задачи можем записать в виде

$$v(W) = x + \psi(t - x), \quad (8.7)$$

где

$$v = - \frac{1}{1+b-J} \ln \frac{bW}{|bW - b + J - 1|} - \frac{1}{b} \ln \left| W - \frac{b+1-J}{b} \right|, \quad (8.8)$$

$$\psi(t) = v[\varphi(t)].$$

Согласно (8.8), при $J < 1$ и при достаточно больших x влияние граничного условия затухает, и решение (8.7) приближается к пространственно однородному (4.10а), (4.11а). Соответствующая характерная длина есть

$$x_1 = \frac{l_D}{ax} \frac{1-J}{b+1-J}. \quad (8.9)$$

*) Аналогичные результаты получаются, если вместо (8.4) воспользоваться начальным условием, задавая функцию $W(x)$ при $t=0$.

В задаче с начальным условием выход на режим (4.10а), (4.11а) произойдет за время порядка x_1/s . Согласно результатам § 6, при $J < 1$ режим (4.10а), (4.11а) статически неустойчив; соответственно здесь следует ожидать образования статических доменов даже в отсутствие резких неоднородностей. Заметим, однако, что в условиях, задаваемых равенствами (4.10а) и (4.11а), формула (3.11) становится уже неприменимой. По этой причине результат (8.9) следует рассматривать как сугубо ориентировочный, а весь расчет надо повторить для случаев слабого звука и большой надкритичности (3.10б), сильного звука (3.10в). Последняя задача решается совершенно аналогично только что рассмотренной — надо лишь воспользоваться для коэффициента электронного поглощения звука формулой (3.11) при $pa^2 \gg 1$ или формулой (3.13) (в последнем случае для решеточного коэффициента поглощения следует взять выражение (3.14)). Характерные длины, при которых нестационарные решения выходят на пространственно однородные режимы (4.10б), (4.11б) и (4.12), суть соответственно

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{l_D}{ax} \frac{1 + \frac{1}{b} - J}{1 + \frac{1}{2b} - J}, \\ x_3 &= \frac{2(2\pi)^{2/3}}{9} \frac{l_D \left(\frac{D}{sl_D}\right)^{1/3}}{(\kappa^2 \eta)^{1/3} \left(\frac{E}{E_s} - 1\right)^{1/3}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

При этом в случае (4.10б) выход на однородный режим происходит только при $J < 1 + 1/2b$.

Заметим, наконец, что в достаточно длинном образце одно из рассмотренных пространственно однородных решений может играть роль «граничного условия» для нестационарного решения, приводящего к другому.

Итак, мы приходим к следующим выводам.

1) Сила звука может продолжать расти в условиях, когда плотность тока уже достигла насыщения.

2) Нестатическое решение получается, только если сила звука «на входе» зависит от времени ($\varphi(t) \neq$

$\neq \text{const}$) — либо в силу регулярных причин, либо в результате флуктуаций *).

3) Вплоть до насыщения силы звука распределение ее явно зависит от граничного (начального) условия **). Соответственно вид функции $W(x)$ оказывается более или менее случайным.

*) Аналогично при постановке задачи с начальным условием решение получилось бы пространственно неоднородным только при неоднородном начальном распределении силы звука.

**) Разумеется, этот факт вполне тривиален и никак не зависит от принятых приближений.

ГЛАВА IX

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ДОМЕНОВ

§ 1. Нерешенные задачи

Результаты, изложенные в предыдущих главах, позволяют думать, что современная теория доменной неустойчивости дает качественно правильную картину ряда явлений, наблюдаемых в полупроводниках с горячими электронами при достаточно сильном нарушении термодинамического равновесия*). Вместе с тем несколько важных проблем до сих пор ждут своего решения. К числу их прежде всего относится исследование кинетики возникновения и исчезновения доменов (или шнуров), а также тесно связанная с этим задача об устойчивости тех или иных распределений напряженности поля, плотности тока и заряда относительно больших флуктуаций. К тому же типу, очевидно, принадлежит и задача о превращении одних доменов в другие (например, статических — в стационарно движущиеся).

В чисто математическом плане дело сводится (в рамках локальной аппроксимации) к разысканию частных решений систем типа (V.2.14), (V.2.16), (V.2.17) или (VI.1.1a)—(VI.1.1e), удовлетворяющих соответствующим начальным условиям. В силу больших вычислительных трудностей здесь до сих пор имеются лишь отдельные расчеты, связанные с теми или иными далеко

*) Разумеется, смысл слов «достаточно сильное» зависит от природы системы. Так, в случаях дрейфовой и рекомбинационной нелинейности речь идет о том, что дифференциальная проводимость должна быть отрицательной, превосходя по модулю то или иное критическое значение — в зависимости от того, в какой системе и какое именно явление исследуется.

идущими упрощениями [1—7]; полностью же убедительная законченная трактовка пока отсутствует.

Далее, весьма существенна проблема отыскания правильных граничных условий, а также проблема устойчивости решения относительно достаточно больших вариаций граничных условий. По-видимому, несмотря на объемный характер явления доменной неустойчивости, природа контактов может играть здесь более заметную роль, чем могло бы показаться на первый взгляд. Так, в работе [8] было установлено (в рамках локальной модели), что в условиях дрейфовой нелинейности движущиеся домены возникают не при всех типах граничных условий.

Следует заметить, что фактически в рассматриваемых задачах возникают не только математические, но и серьезные физические трудности. Дело в том, что домены, как правило, возникают и исчезают на контактах или на иных затравочных неоднородностях, где, как мы знаем (гл. II), сама возможность локальной аппроксимации становится сомнительной. Таким образом, теоретическое исследование кинетики доменов и шнуров оказывается тесно связанным с еще одной важной нерешенной проблемой теории доменов — обобщением ее на случай нелокальной зависимости кинетических коэффициентов от напряженности электрического поля. Здесь тоже сделаны пока лишь первые шаги (см. следующий параграф).

Указанные проблемы представляют, по-видимому, наибольшие трудности и наибольший принципиальный интерес. Однако и в рамках принятой в предыдущих главах постановки задачи возникают вопросы, требующие своего решения. Некоторые из них указывались уже в предыдущих главах. Здесь мы отметим лишь серьезный физический интерес, вызываемый эффектами сильного поля в домене. Еще в работах [9—11] была показана возможность генерации электронно-дырочных пар в ганновском домене и было обнаружено связанное с их последующим исчезновением рекомбинационное излучение. Аналогичные явления наблюдались и в случае звукоэлектрических доменов (см. гл. VIII). Генерация неравновесных носителей может привести к дополнительным типам релаксационных автоколебаний,

характеризующихся другой частотой, нежели колебания, связанные просто с движением доменов [12, 13]. Действительно, увеличение концентрации носителей за счет указанных процессов поведет к падению напряжения на образце, что может сделать невозможным само существование домена или возникновение нового домена после исчезновения старого. В результате возникнут дополнительные колебания тока с периодом порядка времени рекомбинации неравновесных носителей заряда.

Весьма существенно, что домен представляет собой, как правило, макроскопическое образование, линейные размеры которого велики по сравнению с длиной свободного пробега носителей заряда по энергии. Эта макроскопичность домена приводит к тому, что внутри него могут иметь место различные эффекты сильного поля — в сущности, все наблюдавшиеся при наложении сильного поля на однородные образцы. Именно, во всех явлениях, в которых характерные расстояния определяются длиной волны электрона или длиной его свободного пробега, домен выступает просто как «образец» с высокой напряженностью поля. Это обстоятельство неоднократно использовалось для наблюдения доменов различной природы с помощью эффекта Келдыша — Франца и электрооптического эффекта (см. § I. 1). Отметим, далее, возможность возникновения доменов одного типа внутри доменов другого типа (например, в GaAs ганновский домен может возникать внутри звукоэлектрического [14, 15]). Сложная картина доменов и «субдоменов» различного типа наблюдалась в изолирующем CdS [20].

§ 2. Нелокальная трактовка задачи о малых флуктуациях вблизи пространственно однородного состояния [16]

Рассмотрим образец, длина которого L значительно превышает введенную в § II.6 характерную длину l_E :

$$L \gg \frac{T}{eE_0}. \quad (2.1)$$

В этих условиях легко дать формальное обобщение результатов §§ III.4 и V.3 на случай произвольной не-

локальной связи кинетических коэффициентов с напряженностью электрического поля. Ограничимся для простоты случаем дрейфовой нелинейности без термоэлектрического тока (из дальнейшего будет видно, что переход к более сложным случаям выполняется тривиально, требуя, в сущности, лишь усложнения обозначений). Тогда основные уравнения задачи будут иметь стандартный вид (III.2.5) — (III.2.6). Для исследования задачи о флуктуационной устойчивости системы положим, как и в § III.4:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta\rho(x, t), & E &= E_0 + \delta E(x, t), \\ j &= j_0 + \delta j(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

причем величины $\delta\rho(x, 0)$ и $\delta E(x, 0)$ будем считать заданными функциями координат (при $t < 0$ можем считать $\delta\rho = \delta E = \delta j = 0$).

Для вариации плотности тока по-прежнему можем написать

$$\delta j(x, t) = \mu_0 E_0 \delta\rho(x, t) + \mu_0 \rho_0 \delta E(x, t) + \rho_0 E_0 \delta\mu(x, t) + D \frac{\partial \delta\rho}{\partial x}, \quad (2.3)$$

однако вариация подвижности определяется теперь не локальным соотношением общего вида, учитывающим как пространственную, так и временную дисперсию:

$$\delta\mu(x, t) = \int_0^L dx' \int_{-\infty}^t dt' K(x - x', t - t') \delta E(x', t'). \quad (2.4)$$

Здесь выбор верхнего предела в интеграле по t' обусловлен принципом причинности; ядро K зависит только от разностей $x - x'$, $t - t'$, ибо по условию рассматриваемые флуктуации происходят около пространственно однородного состояния.

В локальном случае и в пренебрежении временной дисперсией дифференциальной подвижности

$$\mu_d = \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial j}{\partial E} \right|_{\rho=\text{const}}$$

мы имели бы

$$K(x - x', t - t') = \mu_d \delta(x - x') \delta(t - t').$$

В общем нелокальном случае явный вид ядра неизвестен (его следует определять, решая кинетическое уравнение); однако, функция $K(x - x', t - t')$ эффективно обрывается при

$$|t - t'| \sim \frac{T}{eE_0 v_T} \equiv \tau_m \quad \text{и} \quad |x - x'| \sim \frac{T}{eE_0}.$$

Последнее обстоятельство в сочетании с условием (2.1) позволяет распространить область интегрирования по x' в (2.3) до $\pm \infty$.

Положим теперь

$$\left. \begin{aligned} \delta E(x, t) &= \sum_k \delta E(k, t) e^{ikx}, \\ \delta j(x, t) &= \sum_k \delta j(k, t) e^{ikx}, \\ \delta \rho(x, t) &= \sum_k \delta \rho(k, t) e^{ikx}, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где возможные значения k определяются граничными условиями (явный вид последних не играет роли для целей настоящего параграфа). Подставляя (2.5) в (2.4) и выполняя преобразование Лапласа по t , получим

$$\delta j(k, p) = \{\rho_0 E_0 K(k, p) + \rho_0 \mu_0\} \delta E(k, p) + \{E_0 \mu_0 + ikD\} \delta \rho(k, p). \quad (2.6)$$

Здесь p — комплексный лапласов параметр, $\delta j(k, p)$ и т. д. — лапласовы образы соответствующих величин,

$$K(k, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} K(k, t) dt.$$

Замечая, что в силу уравнения Пуассона

$$\delta \rho(k, p) = \frac{ik\epsilon}{4\pi} \delta E(k, p),$$

видим, что равенство (2.6) определяет дифференциальную проводимость $\sigma(k, p)$, вычисленную с учетом как

пространственной, так и временной дисперсии:

$$\begin{aligned}\sigma(k, p) &= \mu_0 \rho_0 + \frac{\varepsilon}{4\pi} (-ik\mu_0 E_0 + k^2 D) + \rho_0 E_0 K(k, p) \equiv \\ &\equiv \frac{\varepsilon}{4\pi} (-ik\mu_0 E_0 + k^2 D) + \sigma_1(k, p),\end{aligned}\quad (2.7)$$

где величина σ_1 определяется этим соотношением.

В частности, дифференциальная проводимость в постоянном и однородном электрическом поле дается выражением

$$\sigma = \sigma(k, p)|_{k=p=0} = \left\{ \mu_0 + E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\infty} dt K(x, t) \right\} \rho_0. \quad (2.8)$$

Для комплексной частоты $\omega = -ip$ получится теперь выражение вида (III.4.4) с заменой прежней «локальной» дифференциальной проводимости на

$$\sigma_1 = \rho_0 \mu_0 \left\{ 1 + \frac{E_0}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\infty} dt e^{-ikx-pt} K(x, t) \right\}. \quad (2.9)$$

Условие флуктуационной неустойчивости получается из (III.4.4), если положить там $\text{Im } \omega = 0$ (что теперь соответствует случаю $\text{Re } p = 0$). При этом, как мы знаем, особенно «опасны» в смысле возможной неустойчивости флуктуации с малыми волновыми числами k ; в силу дисперсионного уравнения (III.4.4) это означает и малость $\text{Re } \omega = \text{Im } p$ (в рассматриваемом простейшем случае $|\text{Re } \omega| = \mu_0 E_0 |k|$).

Заметим, далее, что

$$\frac{\mu_0 E_0 \tau_m}{T} e E_0 \sim \frac{\mu E_0}{v_T};$$

коль скоро это отношение меньше единицы, мы можем разложить второе слагаемое в фигурных скобках в (2.9) по степеням p и k , ограничиваясь линейными членами по p и квадратичными по k . Тогда эффект нелокальности

сводится к перенормировке подвижности и коэффициента диффузии:

$$\left. \begin{aligned} \mu \rightarrow \mu_r &= \frac{\mu + \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x dx \int_0^{+\infty} dt K(x, t)}{1 - \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_0 E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\infty} t dt K(x, t)}, \\ D \rightarrow D_r &= \frac{D - \frac{2\pi}{\varepsilon} \rho_0 E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx \int_0^{\infty} dt K(x, t)}{1 - \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_0 E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\infty} t dt K(x, t)}. \end{aligned} \right\} (2.10)$$

По смыслу вывода вторые слагаемые в знаменателях и числителях (2.10) должны быть меньше первых; поэтому в принятом сейчас приближении учет нелокальности в задаче о флуктуационной неустойчивости не влечет за собой каких-либо нетривиальных последствий, сводясь, в сущности, к изменению обозначений. Так же обстоит дело и при вычислении импеданса пространственно однородной системы и при исследовании условий существования статических и стационарно движущихся доменов. Действительно, как мы видели в главах IV, V, последние две задачи сводятся к исследованию решений некоторых систем дифференциальных уравнений вблизи особых точек, отвечающих как раз пространственно однородным решениям.

Можно ожидать, однако, что ситуация окажется несколько иной при переходе к нелинейной трактовке задачи, а также при исследовании доменов и шнуров в пространственно неоднородной системе. Последнее относится, в частности, к поведению доменов вблизи контактов (ср. § 1). Далее, положение могло бы измениться в случае существенно нелокальных систем, в которых $\sigma(k, p)$ заметно отличается от σ и использованное выше разложение непригодно. Рассмотрение таких систем, однако, выходит за рамки настоящей книги.

§ 3. Доменные и шнуровые распределения различных физических величин

Пространственно неоднородные распределения, изучавшиеся нами в главах I—VIII, характеризовали возможные состояния неравновесной системы электронов в полупроводнике и, соответственно, относились к таким величинам, как напряженность электрического поля, плотность тока, объемная плотность свободного и связанного заряда, сила звука (гл. VIII). Легко видеть, однако, что в сущности, речь идет о явлениях более общего типа.

Прежде всего, напрашивается немедленное распространение результатов на случай нелинейной связи между плотностью дрейфового тока и напряженностью поля, а между электрической индукцией и напряженностью поля [17, 18]. Формально здесь получаются те же уравнения, что и в случае дрейфовой нелинейности; все физические особенности задачи заключены в выражении для скорости дрейфа электронов как функции индукции. В работах [17, 18], исходя из этой идеи, была построена довольно полная теория стационарно движущихся доменов электрической индукции, вполне аналогичная изложенной выше (гл. V) теории эффекта Ганна.

Суть дела здесь состоит в том, что в сегнетоэлектриках в определенной области температур электрическое поле может N -образно зависеть от индукции. При этом возможен индуцированный внешним полем фазовый переход (скачок индукции) при температуре выше точки Кюри T_c . При определенной концентрации свободных носителей n_0 новая фаза возникает благодаря движению плоского фронта волны (границы фаз), переводящей кристалл из одной фазы в другую. Так, например, обстоит дело в BaTiO_3 при концентрации свободных электронов $n_0 \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$. В этом случае задача о возможных неоднородных распределениях индукции \mathcal{D} и электрического поля E становится одномерной вдоль сегнетоэлектрической оси, нормальной границе фаз, и (в пренебрежении частотной дисперсией диэлектрической проницаемости) описывается уравнениями стандартного

вида

$$j = e\mu n E - eD \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x} = 4\pi e (n - n_0), \quad (3.2)$$

$$e \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

Специфично для данной конкретной задачи только соотношение между величинами E и \mathcal{D} :

$$\frac{1}{4\pi} E = \frac{d\Phi(\mathcal{D})}{d\mathcal{D}} - B \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

Здесь

$$\Phi(\mathcal{D}) = A_1 \mathcal{D}^2 + \frac{1}{2} A_2 \mathcal{D}^4 + \frac{1}{6} A_3 \mathcal{D}^6$$

— плотность свободной энергии при однородном распределении индукции, и для случая фазового перехода первого рода

$$A_1 = A_c + A'_c(T - T_c), \quad A'_c > 0, \quad A_2 < 0, \quad A_3 > 0, \quad B > 0.$$

Для нас существен N -образный характер зависимости E

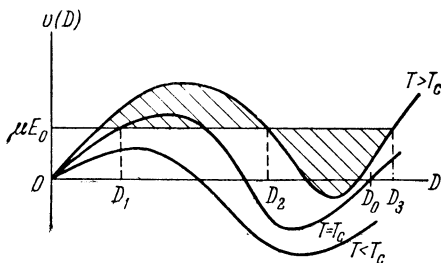


Рис. 69. Зависимость скорости электронов от индукции.

от \mathcal{D} при однородном распределении, иллюстрируемый рис. 69, на котором по оси ординат отложена величина

$$v(\mathcal{D}) = \mu E(\mathcal{D}) = 4\pi\mu \frac{d\Phi(\mathcal{D})}{d\mathcal{D}}.$$

В отсутствие внешнего поля при температуре Кюри T_c одинаковы термодинамические потенциалы парафазы ($\mathcal{D} = 0$) и сегнетофазы с $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \approx \sqrt{-4A_c/A_2}$. При наличии внешнего поля напряженности E_0 и $T > T_c$ возможным однородным распределениям индукции отвечают значения \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 и \mathcal{D}_3 .

В этих условиях можно, исследуя систему (3.1) — (3.4), поставить вопрос о возможных решениях в длинных образцах, зависящих только от аргумента $z = x - ut$. Поступая как и в главе V, легко убедиться, что указанные решения описываются уравнением

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \left[\mathcal{D}' - 4\pi en_0 \ln \left(\frac{\mathcal{D}'}{4\pi en_0} + 1 \right) \right] + 2\pi\mu B \mathcal{D}'^2 = \\ = 4\pi\mu [\Phi(\mathcal{D}) - \Phi(\mathcal{D}_1)] - u(\mathcal{D} - \mathcal{D}_1) - \\ - (u - u_0) \int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}} \frac{d\mathcal{D}}{1 + \mathcal{D}'/4\pi en_0}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $\mathcal{D}' = d\mathcal{D}/dz$, $u_0 = \mu E_0$ — дрейфовая скорость электронов в однородном поле E_0 , связанном с заданным током во внешней цепи $J = e\mu n_0 E_0$.

Уравнение (3.5) имеет вид, подобный (V.4.2); величины \mathcal{D} и \mathcal{D}' в настоящем случае играют роль, формально аналогичную E и $(\rho - \rho_0)$ в случае дрейфовой нелинейности. Как и в главе V, здесь можно получить решения типа распространяющихся слоев, или же широкий домен сегнетофазы. Последний случай возможен при

$$E_0 = E_c = 4\pi \frac{\Phi(\mathcal{D}_3) - \Phi(\mathcal{D}_1)}{\mathcal{D}_3 - \mathcal{D}_1},$$

когда выполняется правило равенства площадей, заштрихованных на рис. 69 (ср. с рис. 49 гл. V при $E_1 = E_{\min}$, $E_3 = E_{\max}$). При этом, как и в случае дрейфовой нелинейности, скорость домена оказывается равной скорости дрейфа электронов в поле $E_0 = E_c$.

Наконец, по-видимому, вообще не обязательно ограничиваться только электрическими свойствами [19] и только газом носителей заряда. Действительно, исходные феноменологические уравнения, из которых мы исходили, в равной мере могли относиться и к

термодинамическим силам и потокам другой природы, в том числе и не обязательно электрическим. В «достаточно неравновесных» условиях любой дифференциальный кинетический коэффициент в принципе может изменить знак по сравнению со случаем, близким к термодинамическому равновесию. Соответственно можно думать, что возможность доменизации по тем или иным параметрам окажется характерным свойством существенно неравновесных систем вообще.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Рассмотрим, как ведет себя электромагнитная волна, попадающая в среду с ОДП. Для этой цели надо написать уравнения Максвелла для среды, находящейся в постоянном и однородном электрическом поле напряженности \mathbf{E}_0 . Для простоты будем считать среду однородной, изотропной (в отсутствие внешнего поля \mathbf{E}_0) и немагнитной (в задаче, интересующей нас, эти упрощения не носят принципиального характера). Тогда

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (\text{П. I. 1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{E}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \quad (\text{П. I. 2})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (\text{П. I. 3})$$

При этом

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}, \quad (\text{П. I. 4})$$

где \mathbf{H}_0 — магнитное поле постоянного тока, созданного электрическим полем напряженности \mathbf{E}_0 , а $\delta\mathbf{E}$ и $\delta\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей в волне.

Ограничимся случаем низкочастотной волны, когда дисперсия проводимости еще не сказывается. Это условие сводится к неравенству

$$\omega\tau \ll 1, \quad (\text{П. I. 5})$$

где ω — частота волны, τ — среднее время свободного пробега электронов. Неравенство (П. I. 5) позволяет вычислять изменения плотности тока и вектора индукции, связанные с появлением электромагнитной волны, так, как если бы поле $\delta\mathbf{E}$ было постоянным во времени. Амплитуду поля $\delta\mathbf{E}$ будем считать малой по сравнению с \mathbf{E}_0 , линеаризуя уравнения (П. I. 1) и (П. I. 2) по $\delta\mathbf{E}$. При этом

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \delta\mathbf{j},$$

где

$$\delta j_\alpha = \frac{\partial j_\alpha}{\partial E_\beta} \delta E_\beta, \quad (\text{П. I. 6})$$

α, β — векторные индексы.

Для плотности тока мы можем написать

$$j_\alpha = \Sigma(E^2) E_\alpha,$$

где $\Sigma(E^2)$ — полная (не дифференциальная) проводимость, зависящая только от квадрата поля. В силу (П. I. 5) эта величина вещественна. Отсюда

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial E_\beta} = \delta_{\alpha\beta} \Sigma(E^2) + 2E_\alpha E_\beta \Sigma',$$

где штрих обозначает производную по всему аргументу.

Подставляя это в (П. I. 6), получим

$$\delta j_\alpha = \Sigma \delta E_\alpha + 2E_{0,\alpha} \Sigma' E_0 \delta E \cos \theta, \quad (\text{П. I. 7})$$

где θ — угол между векторами \mathbf{E}_0 и $\delta\mathbf{E}$.

По определению дифференциальной проводимости

$$\Sigma + 2E_0^2 \Sigma' = \sigma. \quad (\text{П. I. 8})$$

Таким образом, равенство (П. I. 7) дает

$$\delta\mathbf{j} = \sigma \delta\mathbf{E} \quad \text{при} \quad \delta\mathbf{E} \parallel \mathbf{E}_0, \quad (\text{П. I. 9a})$$

$$\delta\mathbf{j} = \Sigma \delta\mathbf{E} \quad \text{при} \quad \delta\mathbf{E} \perp \mathbf{E}_0. \quad (\text{П. I. 9б})$$

Видим, что в зависимости от относительной ориентации постоянного и переменного электрических полей характер распространения волны определяется либо дифференциальной, либо полной проводимостью.

Аналогично выражается и добавка к вектору индукции. Полагая

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} (E^2) \mathbf{E}, \quad (\text{П. I. 10})$$

где \mathcal{E} — вещественная величина, мы получаем

$$\delta \mathcal{D}_\alpha = \mathcal{E} \delta E_\alpha + 2E_{0,\alpha} (\mathbf{E}_0, \delta \mathbf{E}) \mathcal{E}'. \quad (\text{П. I. 11})$$

Определим дифференциальную диэлектрическую проницаемость ϵ равенством

$$\mathcal{E} + 2E_0^2 \mathcal{E}' = \epsilon. \quad (\text{П. I. 12})$$

Тогда, подобно (П. I. 9а), (П. I. 9б), получим

$$\delta \mathcal{D} = \epsilon \delta \mathbf{E} \quad \text{при} \quad \delta \mathbf{E} \parallel \mathbf{E}_0, \quad (\text{П. I. 13а})$$

$$\delta \mathcal{D} = \mathcal{E} \delta \mathbf{E} \quad \text{при} \quad \delta \mathbf{E} \perp \mathbf{E}_0. \quad (\text{П. I. 13б})$$

Для нас представляет интерес случай (П. I. 9а) и (П. I. 13а), соответствующий геометрии опыта, представленной на рис. 70.

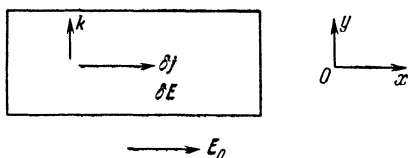


Рис. 70. К выводу формулы для коэффициента поглощения электромагнитной волны.

Направим ось Ox по напряженности поля \mathbf{E}_0 и положим

$$\delta \mathbf{E}, \delta \mathbf{H} \sim \exp(iky - i\omega t), \quad (\text{П. I. 14})$$

где k — комплексное волновое число.

Подставляя (П. I. 9а) в уравнения (П. I. 1) и (П. I. 2), получим систему уравнений, формально совпадающую с обычной системой уравнений линейной электродинамики, только с заменой диэлектрической проницаемости и омической проводимости соответствующими дифференциальными величинами. Следовательно, и соотношение

между k и ω будет иметь формально обычный вид (с той же заменой). Именно,

$$k = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa),$$

где n и κ — показатели преломления и поглощения, зависящие от ω .

Линейный коэффициент поглощения α , как известно, дается выражением

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \kappa = \frac{\sigma}{|\sigma|} \sqrt{-\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{\omega} \sigma\right)^2}} \quad (\text{П. I. 15})$$

(корень — арифметический).

Видно, что при $\sigma < 0$ коэффициент поглощения становится отрицательным. Это означает, что, распространяясь в среде с ОДП (при данной геометрии опыта), электромагнитная волна не затухает, а нарастает. Среда действует в этих условиях как преобразователь энергии батареи (создающей поле E_0) в энергию волны.

II. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ В ПОЛУПРОВОДНИКЕ В УСЛОВИЯХ ТЕМПЕРАТУРНОГО ГАШЕНИЯ ФОТОПРОВОДИМОСТИ [1]

Найдем сейчас распределения $T_l(x)$ и $n(x)$, а также вольтамперную характеристику, считая, что температуры на контактах заданы,

$$T_l(0) = T_l(L) = T_1, \quad (\text{П. II. 1})$$

а теплообменом через стенки образца можно пренебречь.

В модели § 1.6 $n(x)$ связана с температурой соотношением (1.6.2). Как правило, изменения температуры невелики

$$\frac{\delta T_l(x)}{\bar{T}_l} \equiv \frac{T_l(x) - \bar{T}_l}{\bar{T}_l} \ll 1 \quad \left(\bar{T}_l = \frac{1}{L} \int_0^L T_l(x) dx \right).$$

При этом

$$jE(x) = \frac{j^2}{\sigma_0} \left(1 + B \exp \left\{ - \frac{W_s - W_0}{\bar{T}_l} + \frac{(W_s - W_v) \delta T_l}{\bar{T}_l^2} \right\} \right) \quad (\text{П. II. 2})$$

($\sigma_0 = en_0\mu$). В области температур, где выполнено условие (I. 6.7), приближенно получаем

$$jE(x) \approx \frac{j^2}{\sigma_0} \tilde{B} \exp \left\{ \frac{(W_s - W_0) \delta T_l}{\bar{T}_l^2} \right\}, \quad (\text{П. II. 3})$$

и уравнение теплопроводности (I. 6.4) принимает вид

$$\frac{d^2 \delta T_l}{dx^2} = - \frac{j^2 \tilde{B}}{\sigma_0 \kappa_l} \exp \left\{ \frac{W_s - W_v}{\bar{T}_l^2} \delta T_l \right\}. \quad (\text{П. II. 4})$$

Уравнение (П. II. 4) можно явно проинтегрировать; его решение, удовлетворяющее условию $\delta T_l(0) = \delta T_l(L)$, есть

$$\delta T_l = \frac{\bar{T}_l^2}{W_s - W_v} \ln \left\{ \frac{2c_1 \kappa_l \sigma_0 \bar{T}_l^2}{j^2 (W_s - W_0) L^2 \tilde{B}} \operatorname{ch}^{-2} \left[\frac{\sqrt{c_1}}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right) \right] \right\}. \quad (\text{П. II. 5})$$

Постоянная c_1 определяется из второго граничного условия, получаемого из (П. II. 1).

Распределение концентрации, отвечающее (П. II. 5), имеет вид

$$n(x) = n_0 \frac{j^2 (W_s - W_v) L^2 \tilde{B}}{2c_1 \kappa_l \sigma_0 \bar{T}_l^2} \times \times \operatorname{ch}^2 \left[\frac{\sqrt{c_1}}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right) \right]. \quad (\text{П. II. 6})$$

С помощью (П. II. 5), (П. II. 6) мы можем найти характеристику образца, т. е. зависимость плотности тока j от средней напряженности поля, равной отношению приложенного напряжения V к длине образца L .

Величина приложенного напряжения V , очевидно, равна

$$V = \int_0^L dx E(x) = \frac{j}{e\mu} \int_0^L \frac{dx}{n(x)}. \quad (\text{П. II. 7})$$

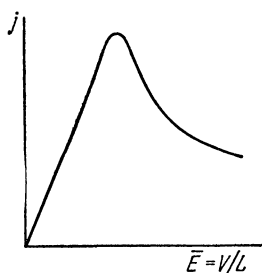


Рис. 71. Вольтамперная характеристика с падающей ветвью в условиях температурного гашения фотопроводимости (теплоотвод через контакты).

С учетом (П. II. 6) имеем отсюда

$$j = \frac{4 \sqrt{c_1} \kappa_l \bar{T}_l^2}{VL(W_s - W_v)} \operatorname{th} \frac{\sqrt{c_1}}{2}. \quad (\text{П. II. 8})$$

Постоянную c_1 определим из условия $\delta T(0) = \delta T_1 = T_1 - \bar{T}_l$ с помощью выражений (П. II. 5), (П. II. 8):

$$\frac{\sqrt{c_1}}{2} = \ln(Q + \sqrt{Q^2 + 1}), \quad (\text{П. II. 9})$$

где

$$Q = \frac{1}{2} \frac{V}{\bar{T}_l} \sqrt{\frac{\sigma_0(W_s - W_v)}{2\kappa_l \tilde{B}}} \exp\left\{-\frac{\delta T_1(W_s - W_v)}{2\bar{T}_l^2}\right\} \equiv \frac{V}{V_0}. \quad (\text{П. II. 10})$$

Следовательно,

$$j = \frac{4\kappa_l \bar{T}_l^2}{V(W_s - W_v)L} \ln(Q + \sqrt{Q^2 + 1}) \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 1}} \quad (\text{П. II. 11})$$

(см. рис. 71). При малых напряжениях на образце, когда $V \ll V_0$, вольтамперная характеристика линейна:

$$j \approx \frac{V}{L} \frac{2\sigma_0}{\tilde{B}} \exp\left\{-\frac{2(W_s - W_v)\delta T_1}{\bar{T}_l^2}\right\}, \quad (\text{П. II. 12})$$

а при $V \gg V_0$ имеем

$$j \approx \frac{4\kappa_l \bar{T}_l^2}{V(W_s - W_v)L} \ln \frac{V}{V_0}. \quad (\text{П. II. 13})$$

III. ФОРМУЛА ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВИДЕ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Будем исходить из формулы

$$j = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \mathbf{v}(\mathbf{p}) f_a(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \quad (\text{П. III. 1})$$

и введем оператор времени релаксации, согласно соотношению (II. 4.2). Определяя интегралы столкновений J_{ei} и J_{ee} равенствами (II. 2.3) и (II. 2.5), видим, что оператор $\hat{\tau}$ может содержать координаты лишь параметрически (если, например, от них зависит концентрация

рассеивающих центров), но не содержит ни производных, ни интегралов по координатам. Принимая во внимание это обстоятельство и подставляя (II.4.2) в (P.III.1), получаем

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2, \quad (\text{P. III. 2})$$

$$j_{1, \alpha} = - \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} v_{\alpha} \hat{\tau} F_{\beta} \frac{\partial f_s}{\partial p_{\beta}}, \quad (\text{P. III. 3})$$

$$j_{2, \alpha} = - \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \int d\mathbf{p} v_{\alpha} \hat{\tau} v_{\beta} f_s - \int d\mathbf{p} v_{\alpha} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial x_{\beta}} v_{\beta} f_s \right\}. \quad (\text{P. III. 4})$$

Для силы мы имеем

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}. \quad (\text{P. III. 5})$$

Подставляя это в формулу (P.III.3), находим

$$j_{1, \alpha} = en\mu_{\alpha\beta} E_{\beta}, \quad (\text{P. III. 6})$$

где n есть концентрация носителей заряда, а тензор подвижности $\mu_{\alpha\beta}$ дается выражением

$$\mu_{\alpha\beta} = e \int d\mathbf{p} v_{\alpha} \hat{\tau} \frac{\partial f_s}{\partial p_{\beta}} / \int d\mathbf{p} f_s. \quad (\text{P. III. 7})$$

В условиях, указанных в § II.4, правая часть (P.III.7), как легко убедиться, пропорциональна единичному тензору, причем коэффициент пропорциональности дается выражением (II.4.8).

В более общем случае, однако, тензор подвижности не сводится к скаляру даже в кубическом кристалле, ибо сама функция распределения f_s зависит от напряженности поля.

Рассмотрим, в частности, случай больцмановского распределения

$$f_s = N \exp\{-W_p/T\}. \quad (\text{P. III. 8})$$

(Так обстоит дело либо в омиической области, либо в аппроксимации электронной температуры.) Тогда

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{e}{T} \int d\mathbf{p} v_{\alpha} \hat{\tau} v_{\beta} f_s / \int d\mathbf{p} f_s. \quad (\text{P. III. 7'})$$

Выражение (П. III. 4) можно переписать в виде

$$j_{2, \alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (nD_{\alpha\beta}) - en \int d\mathbf{p} v_{\alpha} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial x_{\beta}} v_{\beta} f_s / \int d\mathbf{p} f_s, \quad (\text{П. III. 9})$$

где $D_{\alpha\beta}$ есть тензор коэффициентов диффузии:

$$D_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{p} v_{\alpha} \hat{\tau} v_{\beta} f_s / \int d\mathbf{p} f_s. \quad (\text{П. III. 10})$$

Комбинируя (П. III. 10) с (П. III. 7), мы видим, что «эффективная температура», фигурирующая в обобщенном соотношении Эйнштейна, есть, вообще говоря, тензор 4-ранга:

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^* \mu_{\gamma\delta} = eD_{\alpha\beta}. \quad (\text{П. III. 11})$$

В условиях, когда справедлива формула (П. III. 8), тензор $T_{\alpha\beta\gamma\delta}^*$, разумеется, сводится к скаляру:

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = T\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta},$$

т. е. мы имеем обычное соотношение Эйнштейна.

IV. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛАБОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТОНКОГО КОНТАКТА

Пусть внутренняя область образца отвечает значениям x в интервале $0 \leq x < \infty$. Положим в уравнении (II. 7.4)

$$f(\mathbf{p}, x) = f_s \left(\frac{p_{\perp}^2}{2m}, \eta, x \right) + p_x F_1 f_1 \left(\frac{p_{\perp}^2}{2m}, \eta, x \right), \quad (\text{П. IV. 1})$$

где

$$F_1 = eE_1, \quad p_{\perp}^2 = p_y^2 + p_z^2, \quad \eta = p_x^2/2m.$$

В рассматриваемых нами условиях интеграл столкновений от антисимметричной функции $p_x F_1 f_1$ сводится к произведению последней на обратное время релаксации:

$$J[p_x F_1 f_1] = -\frac{1}{\tau} p_x F_1 f_1. \quad (\text{П. IV. 2})$$

Подставляя (П. IV. 1) и (П. IV. 2) в уравнение (II. 7.4), находим

$$f_1 = -\frac{\tau}{mF_1} \left(\frac{\partial f_s}{\partial x} + F_1 \frac{\partial f_s}{\partial \eta} \right) \quad (\text{П. IV. 3})$$

и

$$-2\eta \frac{\tau}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left(F_1 \frac{\partial f_s}{\partial \eta} + \frac{\partial f_s}{\partial x} \right) - \frac{\tau}{m} F_1 \left(F_1 \frac{\partial f_s}{\partial \eta} + \frac{\partial f_s}{\partial x} \right) -$$

$$-2\eta \frac{1}{m} F_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\tau \left(F_1 \frac{\partial f_s}{\partial \eta} + \frac{\partial f_s}{\partial x} \right) \right] = J[f_s]. \quad (\text{П. IV. 4})$$

Считая внешнее поле достаточно слабым, т. е. пренебрегая нагревом электронного газа в нем, получим отсюда

$$-2\eta \frac{\tau}{m} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x^2} = J[f_s]. \quad (\text{П. IV. 4'})$$

Замечая, что $J[\exp(-\beta W_p)] = 0$, имеем

$$f_s = c \exp(-\beta W_p) + f_2 \left(\frac{p_{\perp}^2}{2m}, \eta, x \right), \quad (\text{П. IV. 5})$$

где c — постоянная, $\beta = 1/T_l$, T_l — температура решетки, f_2 — новая неизвестная функция, определяющаяся из уравнения (П. IV. 4) с заменой $f_s \rightarrow f_2$, и такая, что $(\partial f_2 / \partial x) \neq 0$.

Контактная область лежит в интервале $-l_k \leq x \leq 0$. Положим в уравнении (II. 7.3)

$$f = f_0(\tilde{W}) + \chi_2 \left(\frac{p_{\perp}^2}{2m}, \eta, x \right) + p_x F \chi_1 \left(\frac{p_{\perp}^2}{2m}, \eta, x \right), \quad (\text{П. IV. 6})$$

где

$$\tilde{W} = W_p - \int_0^x F(x') dx', \quad f_0 = \exp(-\beta \tilde{W}). \quad (\text{П. IV. 7})$$

Подставляя (П. IV. 6) в (II. 7.3) с учетом (П. IV. 7), получаем

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial x} + F_1 f_0' + F \frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{П. IV. 8})$$

$$2\eta \frac{\partial F \chi_1}{\partial x} + F^2 \chi_1 + 2\eta F^2 \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} = 0. \quad (\text{П. IV. 9})$$

Уравнения (П. IV. 8) и (П. IV. 9) можно решать независимо. Для наших целей достаточно рассмотреть

только первое из них. Решение его имеет вид

$$\chi_2 = \left\{ c_1 \exp \left[\beta \int_0^x F_1(x') dx' \right] - 1 \right\} \exp(-\beta \tilde{W}) + \\ + \chi \left(\frac{p_{\perp}^2}{2m}, \eta - \int_0^x F dx' \right), \quad (\text{П. IV. 10})$$

где c_1 — константа, χ — произвольная функция.

Таким образом, симметричная часть функции распределения в контактном слое имеет вид

$$f_s^< \equiv f_0 + \chi_2 = c_1 \exp \left(-\beta \tilde{W} + \beta \int_0^x F_1 dx' \right) + \\ + \chi \left(\frac{p_{\perp}^2}{2m}, \eta - \int_0^x F dx' \right). \quad (\text{П. IV. 11})$$

Здесь еще нельзя пренебречь интегралом $\int_0^x F_1 dx'$, так как нас будет интересовать и производная от $f_s^<$ по x .

Условия непрерывности в точке $x=0$ имеют вид

$$f_s = f_s^<, \quad \frac{\partial f_s}{\partial x} = \frac{\partial f_s^<}{\partial x}.$$

Они удовлетворяются при

$$c_1 = c, \quad \chi = f_2 \left(\frac{p_{\perp}^2}{2m}, \eta, 0 \right), \quad (\text{П. IV. 12})$$

$$F_1 \left\{ \beta c \exp(-\beta W_p) - \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \Big|_{x=0} \right\} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (\text{П. IV. 13})$$

Постоянная интегрирования c определяется из граничного условия при $x = -l_k$. Последнее можно взять из обычной теории контактов, считая, например, задан-

ной концентрацию носителей заряда $n_{\text{тр}}$ при $x = -l_{\text{к}}$. Это дает

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \left\{ c \exp(-\beta\tilde{W}(-x_0)) + f_2 \left(\frac{p_{\perp}^2}{2m}, \eta - \int_0^{-x_0} F_0 dx, 0 \right) \right\} = n_{\text{тр}}. \quad (\text{П. IV. 14})$$

(Здесь уже использована аппроксимация: $\left| \beta \int_0^{-x_0} F_1 dx \right| \ll 1$.)

Существенно, что условие (П. IV. 13), вообще говоря, не позволяет положить $f_2 = 0$. Это означает, что наличие тонкого контактного слоя приводит к явной координатной зависимости функции распределения f_s (и, следовательно, f_1) даже во «внутренней» области, в которой контактное поле E_0 практически уже отсутствует. Толщина слоя, в которой сказывается эта зависимость, естественно дается длиной свободного пробега по энергии $l_{\text{эн}}$. Она определяется явным видом интеграла столкновений.

Для иллюстрации рассмотрим случай, когда рассеяние энергии электронов обусловлено их взаимодействием с акустическими фононами, а рассеяние импульса — либо тем же взаимодействием, либо каким-то другим механизмом упругого рассеяния. При этом интеграл столкновений применительно к симметричной части функции распределения f_s сводится к следующему дифференциальному выражению [2, 3]:

$$J[f_s] = \frac{2V\sqrt{2m}s^2}{l_{\text{ф}}W^{1/2}} \frac{\partial}{\partial W} \left[W^2 \left(\frac{\partial f_s}{\partial W} + \frac{f_s}{T_l} \right) \right]. \quad (\text{П. IV. 15})$$

Здесь s — скорость звука, $l_{\text{ф}}$ — длина свободного пробега по импульсу при рассеянии на продольных акустических фононах*).

Введем собственные значения λ и собственные функции $\psi_{\lambda}(W, \eta)$ оператора J , полагая

$$\frac{m}{2\tau\eta} J[\psi_{\lambda}] = -\lambda\psi_{\lambda}(W, \eta). \quad (\text{П. IV. 16})$$

*) Равенство (П. IV. 15) справедливо в рамках простейшей модели с изотропным потенциалом деформации.

Функции ψ_λ должны быть дифференцируемы, нормируемы в p -пространстве и их первые производные не должны иметь особенностей. При этом — по смыслу интеграла столкновений — собственные значения λ должны оказаться не отрицательными (что можно проверить непосредственно в каждом конкретном случае).

Разлагая f_2 в ряд по собственным функциям ψ_λ , получаем

$$f_2 = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \psi_{\lambda} \exp(-x \sqrt{\lambda}). \quad (\text{П. IV. 17})$$

Для определения коэффициентов c_{λ} (не зависящих от x , W , η) требуется довольно тонкая специализация граничных условий. Для нас существенно лишь, что по определению функции f_2 в разложении (П. IV. 17) отсутствует собственное значение $\lambda = 0$ (ему отвечает собственная функция $\psi_0 = \exp(-\beta W_p)$). Далее, легко убедиться, что минимальное значение λ — порядка

$$\left(\frac{ms^2}{T_l}\right)^{3/2} \frac{1}{l_{\phi} \tau s},$$

где значения l_{ϕ} и τ надо брать при $W_p \approx T_l$. Соответственно

$$l_{\text{эн}} \approx \sqrt{l_{\phi} l} \left(\frac{T_l}{ms^2}\right)^{1/2}, \quad (\text{П. IV. 18})$$

где $l = \tau(T_l/m)^{1/2}$ — длина свободного пробега по импульсу.

При всех температурах вплоть до гелиевых $T_l \gg ms^2$; по определению $l_{\phi} \gg l$. Таким образом, в рассматриваемых условиях длина свободного пробега по энергии гораздо больше, нежели по импульсу. Смысл этого неравенства очевиден: рассеяние носит почти упругий характер.

При учете нагрева электронного газа внешним полем ситуация еще более осложняется: однако вывод о неоднородности, «наводимой» контактом на длине порядка $l_{\text{эн}}$, остается в силе. В формуле (П. IV. 18) при этом следует считать

$$l \approx \tau(T/m)^{1/2}.$$

V. ОПЕРАТОР, СОПРЯЖЕННЫЙ С $\hat{\mathcal{L}}$

Рассмотрим дифференциальное выражение (ср. (III. 2.10))

$$\hat{\mathcal{L}}\psi \equiv a_2\psi'' + a_1\psi' + a_0\psi, \quad (\text{П. V. 1})$$

где a_2, a_1, a_0 — некоторые постоянные, а $\psi(x)$ — дважды дифференцируемые функции, определенные в интервале $0 \leq x \leq L$. Подчинив их каким-нибудь граничным условиям, например (III. 2.15б) или (III. 2.16), получим дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{L}}$. Сопряженный дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{L}}^*$ определяется равенством

$$\int_0^L \varphi \hat{\mathcal{L}}\psi \, dx = \int_0^L (\hat{\mathcal{L}}^*\varphi) \psi \, dx. \quad (\text{П. V. 2})$$

Класс функций $\varphi(x)$, в котором он действует, выделяется сопряженными граничными условиями. Последние (как и явный вид $\hat{\mathcal{L}}^*$) легко найти, преобразуя левую часть (П. V. 2) с помощью интегрирования по частям и требуя, чтобы проинтегрированные члены обращались в нуль.

Таким путем получаем

$$\hat{\mathcal{L}}^*\varphi = a_2\varphi'' - a_1\varphi' + a_0\varphi. \quad (\text{П. V. 3})$$

Граничные условия, сопряженные с (III. 2.15б), суть также условия периодичности

$$\varphi(L) = \varphi(0), \quad \varphi'(L) = \varphi'(0). \quad (\text{П. V. 4a})$$

Условия, сопряженные с (III. 2.16), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (a_2\alpha_1 - a_1\beta_1)\varphi(0) + a_2\beta_1\varphi'(0) &= 0, \\ (a_2\alpha_2 - a_1\beta_2)\varphi(L) + a_2\beta_2\varphi'(L) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П. V. 4б})$$

где

$$\varphi'(0) = \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0}, \quad \varphi'(L) = \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=L}.$$

Вообще говоря, условия (П. V. 4б) совпадают с (III. 2.16), т. е. являются самосопряженными лишь при $a_1 = 0$; при этом условии, очевидно, и $\hat{\mathcal{L}}^* = \hat{\mathcal{L}}$, т. е. оператор $\hat{\mathcal{L}}$ — самосопряженный.

Дифференциальное выражение (П.V.1) можно формально привести к эрмитовскому виду, полагая,

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{a_1}{2a_2}x\right)\chi(x), \quad (\text{П. V. 5})$$

где $\chi(x)$ — новые функции; граничные условия для них в случае (III.2.16) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \left(\alpha_1 - \frac{a_1}{2a_2}\beta_1\right)\chi(0) + \beta_1\chi'(0) &= 0, \\ \left(\alpha_2 - \frac{a_1}{2a_2}\beta_2\right)\chi(L) + \beta_2\chi'(L) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П. V. 6})$$

Видно, таким образом, что задача (III.2.10), (III.2.16) приводится к самосопряженной лишь при $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

VI. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du}{dx} = \mathcal{P}(u, v), \quad \frac{dv}{dx} = \mathcal{Q}(u, v), \quad (\text{П. VI. 1})$$

где \mathcal{P} , \mathcal{Q} — аналитические функции аргументов u , v , не зависящие явно от x . Исключая x , получим «уравнение траекторий»

$$\frac{du}{dv} = \frac{\mathcal{P}(u, v)}{\mathcal{Q}(u, v)}. \quad (\text{П. VI. 2})$$

Оно определяет множество интегральных кривых («траекторий»*) на фазовой плоскости (u, v) . Координата x играет роль параметра, определяющего положение изображающей точки на данной кривой. При изменении x в конечных пределах $(0 \leq x \leq L < \infty)$ изображающая точка пробегает некоторый конечный участок траектории, замкнутый или незамкнутый.

Как правило, через каждую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна интегральная кривая. Ис-

*) Термин «траектория» взят из механики, в которой величины u и v суть обобщенные координаты точки, а роль переменной x играет время.

ключение составляют особые точки, отвечающие одновременно обращению в нуль функций \mathcal{P} и \mathcal{Q} . Соответствующие значения u и v определяются равенствами

$$\mathcal{P}(u_i, v_i) = 0, \quad \mathcal{Q}(u_i, v_i) = 0, \quad (\text{П. VI. 3})$$

индекс i ($i = 1, 2, 3, \dots$) нумерует различные особые точки (мы будем предполагать, что они — изолированные).

Изучение особых точек представляет особый интерес, ибо часто, зная поведение решений вблизи особых точек, удается составить себе представление о ходе интегральных кривых во всей фазовой плоскости. Последнее в свою очередь позволяет качественно исследовать характер решений, не вычисляя их явно.

Рассмотрим систему (П. VI. 1) вблизи одной из особых точек.

Очевидно, без ограничения общности можно совместить с ней начало координат в плоскости (u, v) , полагая $u = v = 0$ в данной особой точке*). Вблизи особой точки можем положить

$$\mathcal{P}(u, v) = au + bv + \dots, \quad \mathcal{Q}(u, v) = cu + dv + \dots, \quad (\text{П. VI. 4a})$$

где многоточием обозначены члены высшего порядка малости.

Допустим сначала, что детерминант коэффициентов здесь отличен от нуля:

$$\Delta \equiv ad - bc \neq 0. \quad (\text{П. VI. 5})$$

В этом случае особая точка называется простой. Подставляя (П. VI. 5) в уравнения (П. VI. 1), получим систему линейных уравнений, решения которой имеют стандартный вид (имея в виду дальнейшие применения, мы считаем $c \neq 0$):

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 \exp \lambda_1 x + A_2 \exp \lambda_2 x, \\ v &= \frac{c}{\lambda_1 - d} A_1 \exp \lambda_1 x + \frac{c}{\lambda_2 - d} A_2 \exp \lambda_2 x. \end{aligned} \right\} (\text{П. VI. 6})$$

*) Доказательства высказываемых ниже утверждений можно найти, например, в книгах [5—7].

Здесь λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + \Delta = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - \Delta} \equiv \\ &\equiv \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-d)^2}{4} + bc}. \quad (\text{П. VI. 7}) \end{aligned}$$

Вид интегральных кривых вблизи особой точки легко определить, исключая координату x из равенств (П. VI. 6) (или, что сводится к тому же, явно решая уравнение траекторий (П. VI. 2)). В зависимости от корней характеристического уравнения λ_1 и λ_2 здесь могут осуществиться следующие случаи.

1) λ_1 и λ_2 вещественны и разных знаков. Особая точка такого типа называется седлом. Согласно (П. VI. 7) так обстоит дело, если

$$\Delta < 0. \quad (\text{П. VI. 8a})$$

Вид интегральных кривых вблизи особой точки схематически представлен на рис. 72, а (стрелками указано направление перемещения по кривой при возрастании параметра x). Заметим, что ни одна из этих кривых, за исключением двух асимптот, не проходит через особую точку. Эти асимптоты называются сепаратрисами. Угловые коэффициенты их, k_1 и k_2 , даются выражением

$$k_{1,2} = \frac{1}{2b} [-(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - \Delta}]. \quad (\text{П. VI. 9})$$

2) λ_1 и λ_2 вещественны и одного знака. Особая точка такого типа называется узлом. Согласно (П. VI. 7) мы имеем узел, если

$$\frac{(a+d)^2}{4} > \Delta > 0. \quad (\text{П. VI. 8б})$$

Вид интегральных кривых вблизи узла схематически представлен на рис. 72, б. Здесь все интегральные кривые, лежащие в окрестности особой точки, попадают в нее и обладают свойством знакопеременности. Предельные значения наклона интегральных кривых к оси Ox даются выражением (П. VI. 9). Расположение стрелок на рис. 72, б соответствует отрицательным значе-

ниям λ_1 и λ_2 (устойчивый*) узел); при $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ направление, указываемое стрелками, следует заменить на обратное (неустойчивый узел).

3) λ_1 и λ_2 — комплексные. Особая точка такого типа называется фокусом. Согласно (П. VI. 7) так обстоит дело, если

$$\Delta > \frac{(a+d)^2}{4}. \quad (\text{П. VI. 8В})$$

Вид интегральных кривых вблизи фокуса схематически представлен на рис. 72, в. Здесь также все интегральные кривые, лежащие в окрестности особой точки,

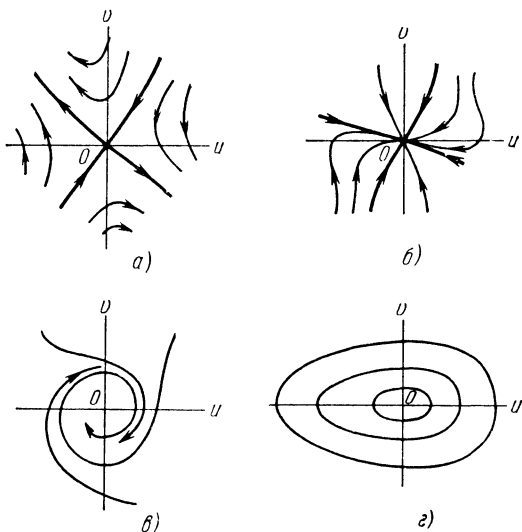


Рис. 72. Интегральные кривые вблизи простых особых точек: а) седло, жирные линии — сепаратрисы, б) узел, в) фокус, г) центр.

попадают в нее и обладают свойством знакопеременности. Расположение стрелок на рисунке соответствует отрицательному значению вещественной части λ_1, λ_2 (устойчивый фокус); при $\text{Re } \lambda_1, \text{Re } \lambda_2 > 0$ (неустойчивый

*) Название заимствовано из теории динамических систем, когда переменная x играет роль времени. При $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ система асимптотически при $x \rightarrow \infty$ приближается к состоянию равновесия.

фокус) направление, указываемое стрелками, следует изменить на обратное.

Фокус и узел топологически эквивалентны друг другу, и, как видно из рис. 72, б, в, картины интегральных кривых вблизи них весьма сходны.

4) λ_1 и λ_2 — чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i\lambda$, $\lambda \in \text{Re}$. Согласно (П. VI. 7), это имеет место, если

$$a + d = 0, \quad \Delta > 0. \quad (\text{П. VI. 8г})$$

В этом случае линейное приближение (П. VI. 4а), (П. VI. 7) недостаточно для исследования хода интегральных кривых вблизи особой точки; следует учесть члены высшего порядка малости. Положим в малой окрестности точки $u = v = 0$

$$\mathcal{P}(u, v) = bv + \tilde{\mathcal{P}}(u, v), \quad \mathcal{Q}(u, v) = -bu + \tilde{\mathcal{Q}}(u, v), \quad (\text{П. VI. 4б})$$

где $\tilde{\mathcal{P}}(u, v)$ и $\tilde{\mathcal{Q}}(u, v)$ — ряды по степеням u и v , начинающиеся с членов не ниже второй степени. Перейдем в системе (П. VI. 1) к полярным координатам по формулам

$$u = r \cos \chi, \quad v = r \sin \chi.$$

Тогда нетрудно установить, что при достаточно малых r (т. е. при всех достаточно малых u и v) $(d\chi/dx) \neq 0$ и можно делением исходных уравнений одно на другое перейти к уравнению траекторий. Получим

$$\frac{dr}{d\chi} = \frac{\tilde{\mathcal{P}}(r \cos \chi, r \sin \chi) \cos \chi + \tilde{\mathcal{Q}}(r \cos \chi, r \sin \chi) \sin \chi}{-b + \frac{1}{r} \tilde{\mathcal{P}} \cos \chi - \frac{1}{r} \tilde{\mathcal{Q}} \sin \chi}, \quad (\text{П. VI. 10})$$

причем знаменатель здесь не обращается в нуль.

Считая известным решение этого уравнения $r = f(\chi, r_0)$, обращающееся в r_0 при $\chi = 0$, так что $f(0, r_0) \equiv r_0$, мы можем построить функцию последования

$$\Phi(r_0) = f(2\pi, r_0) - r_0. \quad (\text{П. VI. 11а})$$

Очевидно, корни уравнения $\Phi(r_0) = 0$ отвечают замкнутым траекториям. Поскольку функции $\tilde{\mathcal{P}}$ и $\tilde{\mathcal{Q}}$ аналитичны, этим свойством будут обладать и $f(\chi, r_0)$ и $\Phi(r_0)$.

При малых $r_0 > 0$ можно представить функцию последования в виде

$$\Phi(r_0) = \sum_{j \geq 3} \alpha_j r_0^j \quad (\text{П. VI. 116})$$

(члены с α_1, α_2 отсутствуют в силу условия $a + d = 0$ в данном случае). Возможны следующие два случая.

а) Хотя бы один из коэффициентов α_j отличен от нуля. Тогда особая точка есть сложный фокус кратности j (j — номер наименьшего из отличных от нуля α_j).

б) Все коэффициенты α_j равны нулю. В этом случае $\Phi(r_0) \equiv 0$, $f(2\pi, r_0) \equiv r_0$ и, следовательно, все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность особой точки, замкнуты. Особая точка есть центр. Можно показать, что так обстоит дело, если система (П. VI. 1) обладает аналитическим интегралом, именно, интегралом вида

$$u^2 + v^2 + B(u, v) = \text{const},$$

где $B(u, v)$ — ряд, содержащий u и v в степени не ниже третьей.

Как мы видим, в этом случае ни одна интегральная кривая не попадает в центр, но все они — замкнутые (см. рис. 72, *г*).

Очевидно, при сколь угодно малом изменении коэффициентов a, b, c, d центр превращается в фокус. Особая точка такого типа называется негрубой (в отличие от грубых особых точек — седла, узла и фокуса, — характер интегральных кривых вблизи которых при достаточно малых вариациях a, b, c, d остается неизменным). Поскольку малые вариации параметров практически всегда неизбежны, ситуация, отвечающая негрубой особой точке, на опыте, как правило, реализоваться не может. Однако случай, интересующий нас в главе V, составляет исключение. Дело в том, что там коэффициенты в разложении типа (П. VI. 2) содержат параметр u_0 (ср. (V.3.15), (V.3.7')), определяющийся, в сущности, как раз из условия $a + d = 0$. (В данном случае $a + b \sim c$, где c — константа из (V.2.7)). Иначе говоря, при вариации параметров задачи скорость домена также изменяется («подстраивается») так, чтобы особая точка оставалась центром.

При удалении от особой точки поведение интегральных кривых, естественно, изменяется и в общем виде полностью предсказано быть не может. Отметим, однако, две фундаментальные теоремы:

1) вокруг узла или фокуса могут (хотя и не обязаны) располагаться замкнутые интегральные кривые; с другой стороны, одна только седловая особая точка не может находиться внутри какой-либо замкнутой кривой;

2) любая замкнутая интегральная кривая непременно охватывает нечетное число особых точек рассмотренного выше типа; при этом число седел на единицу меньше числа узлов и фокусов.

Замкнутые траектории играют весьма существенную роль, и важно знать, когда они могут или не могут появиться. В общем виде достаточные условия их существования в настоящее время указаны быть не могут. Можно, однако, указать некоторые критерии, при выполнении которых названных траекторий заведомо нет.

К числу наиболее важных из них относится критерий Дюлака, формулируемый следующим образом. Пусть имеется система дифференциальных уравнений (П. VI. 1). Составим выражение

$$F_B = \frac{\partial B\mathcal{P}}{\partial u} + \frac{\partial B\mathcal{Q}}{\partial v}, \quad (\text{П. VI. 12})$$

где $B(u, v)$ — любая непрерывная функция с непрерывными производными.

Если в некоторой односвязной области на плоскости (u, v) выражение F_B знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из интегральных кривых системы (П. VI. 1).

Доказательство: предположим противное и составим следующий интеграл по замкнутому контуру указанного вида:

$$J = \oint (B\mathcal{P} dv - B\mathcal{Q} du).$$

В силу уравнений (П. VI. 1)

$$J = \oint \left(B\mathcal{P} \frac{\partial v}{\partial x} - B\mathcal{Q} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \equiv 0.$$

С другой стороны, по теореме Грина мы имеем

$$J = \iint \left(\frac{\partial B\mathcal{P}}{\partial u} + \frac{\partial BQ}{\partial v} \right) du dv \equiv \iint F_B(u, v) du dv,$$

где двойной интеграл берется по площади, охватываемой данным контуром. При знакопостоянной функции F_B этот интеграл, очевидно, отличен от нуля, что противоречит предыдущему равенству. Тем самым теорема доказана.

Частный случай критерия Дюлака, получающийся при $B = 1$, называется критерием Бендиксона. Пользуясь им, легко установить, что уравнения (IV.1.2) и (IV.1.5) не допускают существования замкнутых траекторий, если только подвижность или коэффициент диффузии не зависят от ρ . Действительно, пусть мы имеем систему (IV.1.2), (IV.1.5). В данном случае

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi}{\varepsilon} (\rho - \rho_0), \quad Q = \frac{\rho\mu E - i_0}{D}, \quad u = E, \quad v = \rho.$$

Следовательно,

$$F_1 = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial E} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} = \frac{\mu E}{D}.$$

Эта величина знакопостоянна (положительна) на всей плоскости (E, ρ) . Так обстоит дело и в случае рекомбинационной нелинейности (надо лишь рассматривать плоскость E, ρ_e).

Положение может измениться при учете термоэлектрического тока. Действительно, согласно (II.6.31), учет его сводится к замене подвижности μ эффективным ее значением

$$\mu^* = \mu + a(\rho - \rho_0),$$

где функция $a(E)$ дается выражением (II.6.31). Соответственно

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho} = \frac{E(\mu - a\rho_0 + 2a\rho)}{D} \equiv F_1$$

(поскольку $\partial \mathcal{P} / \partial E = 0$). В принципе эта величина может быть и знакопеременной, если только $(dD/dE) > 0$.

Обратимся теперь к случаю

$$\Delta = ad - bc = 0. \quad (\text{П. VI. 13})$$

Соответствующая особая точка называется сложной. Как и в случае центра, разложение (П. VI. 4а) здесь недостаточно для выяснения характера интегральных кривых, и следует, как и в (П. VI. 4б), учесть члены высшего порядка малости. Положим

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P} &= au + bv + e_{11}u^2 + e_{12}uv + e_{22}v^2 + \dots, \\ \mathcal{Q} &= cu + dv + f_{11}u^2 + f_{12}uv + f_{22}v^2 + \dots \end{aligned} \right\} \text{ (П. VI. 4в)}$$

и будем предполагать при этом, что

$$a + d \neq 0.$$

Произведем линейное преобразование переменных u, v , полагая

$$\tilde{u} = \alpha u + \beta v, \quad \tilde{v} = \gamma u + \delta v. \quad \text{(П. VI. 14)}$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}}{dx} &= \alpha(au + bv) + \beta(cu + dv) + \varphi(\tilde{u}, \tilde{v}), \\ \frac{d\tilde{v}}{dx} &= \gamma(au + bv) + \delta(cu + dv) + \psi(\tilde{u}, \tilde{v}), \end{aligned} \quad \text{(П. VI. 15)}$$

где функции φ и ψ — второго порядка по \tilde{u}, \tilde{v} ; явный вид их легко устанавливается из сопоставления (П. VI. 14), (П. VI. 15) и (П. VI. 4в). В частности,

$$\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) = p_{11}\tilde{u}^2 + p_{12}\tilde{u}\tilde{v} + p_{22}\tilde{v}^2, \quad \text{(П. VI. 16)}$$

где

$$p_{11} = \frac{e_{11}\delta^2 + e_{12}\delta\gamma + e_{22}\gamma^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}. \quad \text{(П. VI. 17)}$$

Для наших целей достаточно ограничиться случаем, когда $p_{11} \neq 0$. Особая точка такого типа носит название седло-узла.

Удобно подобрать коэффициенты в (П. VI. 14) так, чтобы в одном из уравнений (П. VI. 15) (например, в первом) членов первого порядка по \tilde{u}, \tilde{v} не было вообще, а в другом линейно содержалась только одна из функций \tilde{u}, \tilde{v} (например, \tilde{v}).

Это дает

$$\alpha a + \beta c = 0, \quad \alpha b + \beta d = 0, \quad \text{(П. VI. 18)}$$

$$\gamma a + \delta c = \gamma\lambda, \quad \gamma b + \delta d = \gamma\lambda, \quad \text{(П. VI. 19)}$$

где λ — величина, определяемая из условия разрешимости системы (П. VI. 18), (П. VI. 19). Вычисляя соответствующий детерминант с учетом (П. VI. 13), легко находим,

$$\lambda = a + d. \quad (\text{П. VI. 20})$$

Решения системы (П. VI. 18), (П. VI. 19) имеют вид:

а) при $b \neq 0$

$$\alpha = -\beta d/b, \quad \gamma = \delta a/b, \quad (\text{П. VI. 21a})$$

выбор β и δ при этом произволен;

б) при $b = a = 0$

$$\beta = 0, \quad \gamma = c\delta/d, \quad (\text{П. VI. 21б})$$

выбор α и δ при этом произволен;

в) при $b = d = 0$

$$\delta = 0, \quad \alpha = -c\beta/a, \quad (\text{П. VI. 21в})$$

выбор γ и β при этом произволен.

Преобразованная система (П. VI. 15) теперь принимает вид

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = \varphi(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad \frac{d\tilde{v}}{dx} = \lambda\tilde{v} + \psi(\tilde{u}, \tilde{v}). \quad (\text{П. VI. 22a})$$

Очевидно, функция \tilde{v} изменяется значительно быстрее \tilde{u} (именно чтобы добиться этого, коэффициенты преобразования (П. VI. 14) и были выбраны в соответствии с (П. VI. 18), (П. VI. 19)). По этой причине естественно искать решение системы (П. VI. 22), заменяя $\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})$ на $\varphi(\tilde{u}, \bar{v}(\tilde{u})) \equiv \bar{\varphi}(\tilde{u})$, где $\bar{v}(\tilde{u})$ есть решение уравнения *)

$$\lambda\bar{v} + \psi(\tilde{u}, \bar{v}) = 0, \quad (\text{П. VI. 23})$$

причем

$$\bar{v}(0) = \left. \frac{d\bar{v}}{d\tilde{u}} \right|_{\tilde{u}=0} = 0.$$

Пользуясь соотношениями (П. VI. 4в) и (П. VI. 14), легко убедиться, что $\bar{v}(\tilde{u}) \sim \tilde{u}^2$, и, следовательно,

$$\bar{\varphi}(\tilde{u}) = \rho_{11}\tilde{u}^2. \quad (\text{П. VI. 24})$$

*) Законность этого приема доказывается, например, в монографии [7].

Итак, система (П. VI. 22a) принимает вид

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = \rho_{11}\tilde{u}^2, \quad \frac{d\tilde{v}}{dx} = \lambda\tilde{v}. \quad (\text{П. VI. 226})$$

Решение (П. VI. 226) имеет вид

$$|\tilde{v}| \exp\left\{\frac{\lambda}{\rho_{11}\tilde{u}}\right\} = C, \quad (\text{П. VI. 25})$$

где C — постоянная интегрирования.

Посмотрим, как зависит расположение интегральных кривых от знака отношения λ/ρ_{11} :

а) $\lambda/\rho_{11} > 0$.

Здесь имеются особые интегральные кривые, попадающие в начало координат: полуось $\tilde{u} = +0$ (при

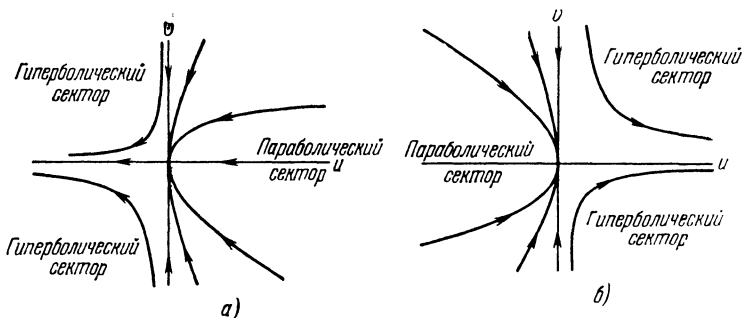


Рис. 73. Интегральные кривые вблизи сложных особых точек.

а) седло-узел, случай $\lambda/\rho_{11} > 0$, б) седло-узел, $\lambda/\rho_{11} < 0$.

$C \rightarrow +\infty$) и ось $\tilde{v} = 0$ (при $C = 0$). При $\tilde{u} > 0$ все не особые интегральные кривые входят в особую точку, при $\tilde{u} < 0$ ни одна из них не входит в особую точку. Первая из указанных областей называется параболическим спектром, вторая — гиперболическим*) (см. рис. 73, а).

б) $\lambda/\rho_{11} < 0$.

Здесь области $\tilde{u} > 0$ и $\tilde{u} < 0$ меняются местами по сравнению со случаем а) (см. рис. 73, б).

*) В сущности, здесь имеются два гиперболических сектора, разделенных особой траекторией — отрицательной полуосью абсцисс ($\tilde{v} = 0, \tilde{u} < 0$).

Проиллюстрируем полученные выше соотношения на примере уравнений (IV.1.2), (IV.1.5) и (V.2.14), (V.2.16). В первом случае мы имеем следующую систему (без учета термоэлектрического тока):

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi}{\varepsilon} (\rho - \rho_0), \quad \frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho\mu E - j_0}{D}. \quad (\text{П. VI. 26})$$

Особые точки этой системы определяются равенствами (см. рис. 3, а)

$$\rho = \rho_0, \quad j_0 - \rho_0\mu(E_i)E_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П. VI. 27})$$

Полагая

$$E = E_i(1 + u), \quad \rho = \rho_0(1 + v), \quad u, v \ll 1, \quad (\text{П. VI. 28})$$

находим, с точностью до величин высшего порядка малости:

$$\frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = cu + dv + e_{11}u^2 + e_{12}uv, \quad (\text{П. VI. 29})$$

где

$$c = e_{12} = \frac{\varepsilon E_i^2 \sigma}{4\pi\rho_0^2 D}, \quad d = \frac{\varepsilon E_i \mu(E_i)}{4\pi\rho_0 D},$$

$$e_{11} = \frac{\varepsilon E_i^3}{8\pi\rho_0^2 D} \left(\frac{d\sigma}{dE} \right) \Big|_{E=E_i}, \quad (\text{П. VI. 30})$$

$\sigma = (d\mu E/dE)$ — дифференциальная проводимость, а x измеряется в единицах $x_0 = (\varepsilon E_i/4\pi\rho_0)$.

Очевидно, это есть система (П. VI. 1), (П. VI. 4в) при $a = 0$, $b = 1$.

При $\sigma \neq 0$ особая точка — простая, а именно:

а) седло, если

$$\sigma > 0; \quad (\text{П. VI. 31а})$$

б) узел, если

$$\sigma < 0, \quad |\sigma| < \frac{\varepsilon E_i^2 \mu^2(E_i)}{16\pi}; \quad (\text{П. VI. 31б})$$

в) фокус, если

$$\sigma < 0, \quad |\sigma| > \frac{\varepsilon E_i^2 \mu^2(E_i)}{16\pi}. \quad (\text{П. VI. 31в})$$

При $\sigma = 0$ рассматриваемая особая точка — сложная (седло-узел). При этом $\delta = 0$, $\lambda = d$, и можно положить $\alpha = \gamma = 1$.

Таким образом, формулы (П. VI. 14) принимают вид

$$\tilde{u} = du + v, \quad \tilde{v} = v. \quad (\text{П. VI. 32})$$

Наконец,

$$p_{11} = \frac{e_{11}}{d^2}, \quad \frac{\lambda}{p_{11}} = \frac{d^3}{e_{11}} \quad (\text{П. VI. 33})$$

и, следовательно,

$$\text{sign} \left\{ \frac{\lambda}{p_{11}} \right\} = \text{sign} \left\{ (d\mu E/dE)_{E=E_i} \right\}. \quad (\text{П. VI. 34})$$

В результате получаем картины, изображенные на рис. 30 и 33 (гл. IV).

В случае системы (IV. 1.10), (IV. 1.11) мы получаем, после аналогичной линеаризации, учитывая соотношение (V. 1.9):

а) седло, если

$$\sigma > 0 \quad \text{или} \quad \sigma < 0, \quad |\sigma| < \sigma_2; \quad (\text{П. VI. 35a})$$

б) фокус, если

$$\sigma < 0, \quad |\sigma| > \sigma_2, \quad (\text{П. VI. 35б})$$

где σ_2 — критическое значение (IV. 4.11). Случай $\sigma = -\sigma_2$ требует дополнительного исследования, как указано в пункте 4) настоящего приложения (стр. 382).

Рассмотрим далее систему трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \mathcal{P}(u, v, w), & \frac{dv}{dx} &= \mathcal{Q}(u, v, w), \\ \frac{dw}{dx} &= \mathcal{R}(u, v, w) \end{aligned} \quad (\text{П. VI. 36})$$

в тех же, что и раньше, предположениях относительно функций \mathcal{P} , \mathcal{Q} , \mathcal{R} . Исключая переменную x , мы получили бы уже, в отличие от (П. VI. 2), не одно, а два уравнения, определяющих множество интегральных кривых — фазовых траекторий в трехмерном пространстве переменных u , v , w . Особые точки системы (u_i, v_i, w_i) отвечают одновременному обращению в нуль функций \mathcal{P} , \mathcal{Q} и \mathcal{R} :

$$\mathcal{P}(u_i, v_i, w_i) = 0, \quad \mathcal{Q}(u_i, v_i, w_i) = 0, \quad \mathcal{R}(u_i, v_i, w_i) = 0. \quad (\text{П. VI. 37})$$

Исследуем поведение решений системы (П. VI. 36) вблизи особой точки, считая для простоты, что последняя находится в начале координат в пространстве u, v, w . Вблизи особой точки можем положить

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}(u, v, w) &= A_1 u + B_1 v + C_1 w + \dots, \\ \mathcal{Q}(u, v, w) &= A_2 u + B_2 v + C_2 w + \dots, \\ \mathcal{R}(u, v, w) &= A_3 u + B_3 v + C_3 w + \dots, \end{aligned} \right\} \text{ (П. VI. 38)}$$

где многоточием обозначены члены высшего порядка по u, v, w . Решения линеаризованной системы (П. VI. 38) будем искать в виде линейных комбинаций экспонент $e^{\lambda_i x}$, где величины λ_i представляют собой корни характеристического уравнения

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0. \quad \text{(П. VI. 39)}$$

Здесь

$$p = -(A_1 + B_1 + C_1), \quad \text{(П. VI. 40)}$$

$$q = A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_1 C_3 - A_3 C_1 + B_2 C_3 - B_3 C_2, \quad \text{(П. VI. 41)}$$

$$r = - \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}. \quad \text{(П. VI. 42)}$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда уравнение (П. VI. 39) не имеет корней с равной нулю вещественной частью и кратных корней. Особая точка, обладающая этим свойством, называется грубой. При этом могут осуществиться следующие четыре случая *).

а) Все корни характеристического уравнения (П. VI. 39) вещественны и одного знака. Такая особая точка называется узлом **), устойчивым (неустойчивым), если все корни λ_i отрицательны (положительны). Все траектории в малой окрестности устойчивого узла входят в особую точку при $x \rightarrow \infty$, для неустойчивого

*) В дальнейшем изложении мы следуем работам [8, 9].

***) Точнее, ее следовало бы назвать пространственным узлом в отличие от случая двумерного фазового пространства, однако здесь и ниже подобная краткость наименования не приводит к недоразумениям.

узла направление движения фазовой точки по траекториям противоположно.

Особая точка представляет собой устойчивый узел при выполнении следующих условий:

$$pq - r > 0, \quad r > 0, \quad q > 0, \quad (\text{П. VI. 43a})$$

$$\tilde{\Delta} < 0, \quad (\text{П. VI. 44a})$$

где

$$\tilde{\Delta} = -p^2q^2 + 4p^3r + 4q^3 - 18pqr + 27r^2. \quad (\text{П. VI. 45})$$

Отметим, что поверхность в пространстве переменных p, q, r , определяемая уравнением $\tilde{\Delta} = 0$, разделяет области, в которых уравнение (П. VI. 39) имеет один вещественный корень (при $\tilde{\Delta} < 0$) и три вещественных корня (при $\tilde{\Delta} > 0$).

Неустойчивый узел реализуется при выполнении условий

$$pq - r < 0, \quad r < 0, \quad q > 0, \quad (\text{П. VI. 43б})$$

$$\tilde{\Delta} < 0. \quad (\text{П. VI. 44б})$$

б) Один из корней веществен, а два других — комплексно сопряженные. При этом две траектории стремятся к особой точке с определенной общей касательной, а все остальные представляют собой спирали. Такая особая точка называется фокусом. Фокус устойчив (неустойчив), если все траектории из малой окрестности особой точки входят в нее (выходят из нее) при $x \rightarrow \infty$. Очевидно, эти два случая отвечают соответственно отрицательным и положительным значениям вещественного корня и вещественных частей двух других корней. Легко убедиться, что фокус устойчив при выполнении условий

$$pq - r > 0, \quad r > 0, \quad q > 0, \quad (\text{П. VI. 46a})$$

$$\tilde{\Delta} > 0. \quad (\text{П. VI. 47a})$$

Неустойчивый фокус определяется условиями

$$pq - r < 0, \quad r < 0, \quad q > 0, \quad (\text{П. VI. 46б})$$

$$\tilde{\Delta} > 0. \quad (\text{П. VI. 47б})$$

Особые точки типа узел и фокус топологически эквивалентны.

в) Все корни λ_1 , λ_2 и λ_3 вещественны, но неодинаковых знаков. Такая особая точка называется седлом. Через нее проходит некоторая поверхность, называемая сепаратрисой. Все траектории на этой поверхности в малой окрестности особой точки стремятся к ней при $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$) с определенными касательными, так что на сепаратрисной поверхности будет устойчивый (неустойчивый) узел.

Существуют две траектории, лежащие по разные стороны от сепаратрисной поверхности, которые выходят при $x \rightarrow -\infty$ из особой точки (входят в нее при $x \rightarrow \infty$) с определенной общей касательной. Эти две траектории называются сепаратрисами. Все остальные траектории проходят на конечном расстоянии от седла.

Особая точка представляет собой седло при выполнении неравенства

$$\tilde{\Delta} < 0 \quad (\text{П. VI. 48})$$

и одного из следующих наборов условий:

$$r \neq 0, \quad q \leq 0; \quad (\text{П. VI. 49a})$$

$$r < 0, \quad q > 0, \quad pq - r > 0; \quad (\text{П. VI. 49б})$$

$$r > 0, \quad q > 0, \quad pq - r < 0. \quad (\text{П. VI. 49в})$$

г) Один из корней характеристического уравнения (П. VI. 39) вещественен, а два других — комплексно сопряженные, причем вещественная часть их имеет знак, противоположный знаку вещественного корня. Такая особая точка называется седлом-фокусом. Через нее проходит сепаратрисная поверхность, в которой расположены спиральные траектории, входящие при $x \rightarrow \infty$ в особую точку (выходящие из нее) соответственно чему на сепаратрисной поверхности особая точка представляет собой устойчивый (неустойчивый) фокус.

Существуют еще две сепаратрисы вне сепаратрисной поверхности, как и в пункте в). Все остальные траектории не содержат особой точки. Особые точки типа седло и седло-фокус топологически эквивалентны.

Седло-фокус реализуется при выполнении одного из наборов условий (П. VI. 49a) — (П. VI. 49в) и неравенства

$\tilde{\Delta} > 0$. В тех случаях, когда какое-либо из неравенств (П.VI.43) — (П.VI.49) заменяется равенством, особая точка оказывается негрубой, при этом возможно появление сложной особой точки. Исследование этих случаев можно провести аналогично изложенному выше в настоящем приложении, однако нам это не понадобится*).

Приведенная классификация особых точек системы трех уравнений первого порядка позволяет исследовать характер поведения решений при малых отклонениях от однородного состояния для системы с рекомбинационной нелинейностью (см. (V.2.14), (V.2.10)), а также для задачи о звукоэлектрических доменах (см. гл. VIII). Следует отметить, однако, что в случае трехмерного фазового пространства качественное исследование семейства траекторий значительно усложняется по сравнению со случаем систем второго порядка.

VII. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНКРЕМЕНТА НАРАСТАНИЯ МАЛЫХ ФЛУКТУАЦИЙ В БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОМ ОБРАЗЦЕ С ШИРОКИМ ДОМЕНОМ [10]

В качестве примера найдем величину λ_0 для широкого стационарно движущегося домена в бесконечном образце в пределе $D \rightarrow 0$. Для этого воспользуемся известными свойствами собственных функций уравнения (VII.2.6), на основании которого имеем**)

$$\mathcal{L}\psi_0 - \lambda_0 \frac{\partial}{\partial D} \psi_0 = 0, \quad (\text{П. VII. 1})$$

$$\mathcal{L} \frac{dE}{dz} = 0. \quad (\text{П. VII. 2})$$

Умножая равенство (П.VII.1) на dE/dz , а равенство (П.VII.2) на ψ_0 и вычитая одно из другого, получаем

$$-\lambda_0 \frac{\partial}{\partial D} \psi_0 \frac{dE}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\psi_0 \frac{d^2 E}{dz^2} - \frac{dE}{dz} \frac{d\psi_0}{dz} \right]. \quad (\text{П. VII. 3})$$

*) Некоторые возможные случаи негрубых особых точек указаны в [9].

**) Здесь и далее перед функциями ψ_0 и dE/dz мы для краткости записи опускаем нормировочный множитель, считая, в отличие от главы VII, что, вообще говоря,

$$\int_0^L dz (\partial/D) \psi^2 \neq 1.$$

Выберем начало отсчета координаты z в точке, где расположен единственный нуль функции dE/dz , и проинтегрируем выражение (П.VII.3) от $-\infty$ до 0. Тогда, принимая во внимание граничное условие $dE/dz \rightarrow 0$, $\psi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$, находим

$$\lambda_0 = - \frac{\frac{d^2 E}{dz^2} \Big|_{z=0} \psi_0(0)}{\int_{-\infty}^0 \frac{\psi}{D} \frac{dE}{dz} \psi_0 dz} \quad (\text{П. VII. 4})$$

Величина λ_0 , определяемая соотношением (П.VII.4), очевидно, положительна, поскольку, если в области $z < 0$ величина $dE/dz > 0$, то $d^2 E/dz^2 \Big|_{z=0} < 0$ (см. рис. 59), а функции D и $\psi_0(z)$ знакопостоянны.

Будем пренебрегать термоэлектрическим током и считать $D = \text{const}$. Тогда скорость движения домена оказывается постоянной и из уравнения (V.2.16) с учетом соотношения (V.4.5) и уравнения Пуассона получаем

$$\frac{d^2 E}{dz^2} = \frac{\mu(E) E - u_0}{D} \left(\frac{dE}{dz} + \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon} \right). \quad (\text{П. VII. 5})$$

Отсюда при $z = 0$ имеем

$$\frac{d^2 E}{dz^2} \Big|_{z=0} = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon D} [\mu(E_{\text{max}}) E_{\text{max}} - u_0], \quad (\text{П. VII. 5'})$$

где E_{max} — максимальная напряженность поля в домене (при $z = 0$ имеем $dE/dz = 0$ и $E = E_{\text{max}}$). Вспомним, что для широкого домена $\psi_0(z)$ и dE/dz можно рассматривать как «связывающую» и «антисвязывающую» комбинации двух функций, каждая из которых локализована вблизи одной из стенок домена; по этой причине можем написать

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &\rightarrow dE/dz && \text{при } z \rightarrow -\infty, \\ \psi_0 &\rightarrow \xi |dE/dz| && \text{при } z \rightarrow +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П. VII. 6})$$

Множитель ξ добавлен здесь для учета асимметрии относительно начала координат, его мы определим из условия ортогональности функций ψ_0 и dE/dz .

Для нахождения функции ψ_0 внутри домена можно воспользоваться квазиклассическим приближением. Это

приближение дает

$$\frac{dE}{dz} \approx \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon D} \frac{\mu(E_{\max}) E_{\max} - u_0}{\sqrt{\vartheta(z) q_1(z) q_1(0)}} \operatorname{sh} \int_0^z q_1 dz, \quad (\text{П. VII. 7})$$

$$\psi_0 \approx \frac{A}{\sqrt{\vartheta(z) q_0(z)}} \operatorname{ch} \left(\int_0^z q_0 dz + \eta \right), \quad (\text{П. VII. 8})$$

где

$$q_0^2(z) = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon D \vartheta(z)} + \frac{\lambda_0}{D}, \quad \text{а} \quad q_1^2(z) = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon D \vartheta(z)}.$$

Из условий (П. VII. 6) можно найти величины A и η , принимая, что

$$\lambda_0 \ll \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\vartheta}.$$

При этом $q_0(z) \approx q_1(z)$ и

$$\psi_0(z) \approx \sqrt{\xi} \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon D} \frac{\mu(E_{\max}) E_{\max} - u_0}{\sqrt{\vartheta(z) q_0(z) q_0(0)}} \operatorname{ch} \left(\int_0^z q_0 dz + \frac{1}{2} \ln \xi \right). \quad (\text{П. VII. 9})$$

Отсюда

$$\psi_0(0) = \frac{2\pi\rho_0}{\sqrt{\varepsilon D}} \frac{\mu(E_{\max}) E_{\max} - u_0}{\sqrt{4\pi\sigma}} (1 + \xi). \quad (\text{П. VII. 10})$$

Интеграл, входящий в знаменатель выражения (П. VII. 4), нетрудно оценить в пределе $D \rightarrow 0$. Основной вклад в него дает область, где $\psi_0(z) \approx dE/dz$, т. е.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\vartheta}{D} \frac{dE}{dz} \psi_0 dz \approx \frac{1}{D} \int_{-\infty}^0 \vartheta \left(\frac{dE}{dz} \right)^2 dz.$$

При $D = \text{const}$ величина $\vartheta(z)$ (см. (VII. 2.4'')) есть просто

$$\vartheta(z) = \exp \left[- \int_0^z dz \frac{\mu E - u_0}{D} \right],$$

т. е. в силу (П. VII. 5)

$$\vartheta(z) = \exp \left[- \int_0^z \frac{dz \frac{d^2 E}{dz^2}}{\frac{dE}{dz} + \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon}} \right] = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon} \frac{1}{\frac{dE}{dz} + \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon}} = \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (\text{П. VII. 11})$$

В области заднего фронта домена, как известно (см. § V.4), $dE/dz \gg 4\pi\rho_0/\epsilon$ при $D \rightarrow 0$, поэтому

$$\vartheta(z) \approx \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon} \left(\frac{dE}{dz} \right)^{-1},$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{\vartheta}{D} \frac{dE}{dz} \psi_0 dz &\approx \\ &\approx \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon D} \int_{-\infty}^0 \frac{dE}{dz} dz = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon D} (E_{\max} - E_1), \quad (\text{П. VII. 12}) \end{aligned}$$

где E_1 — напряженность поля вне домена.

Докажем теперь, что $\xi \rightarrow 0$ при $D \rightarrow 0$. Из условия ортогональности $\psi_0(z)$ и dE/dz находим

$$\xi = \frac{\int_{-\infty}^0 \frac{\vartheta}{D} \left(\frac{dE}{dz} \right)^2 dz}{\int_0^{\infty} \frac{\vartheta}{D} \left(\frac{dE}{dz} \right)^2 dz}. \quad (\text{П. VII. 13})$$

Интеграл в числителе берется по заднему фронту домена; согласно (П. VII. 12) этот интеграл пропорционален $1/D$. Передний фронт в пределе $D \rightarrow 0$ представляет собой полностью обедненный слой.

При $(\rho/\rho_0) \rightarrow 0$ имеем $\ln(\rho/\rho_0) \gg (\rho/\rho_0)$ и из формулы (V.4.2) с учетом уравнения Пуассона находим

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{4\pi\rho_0}{\epsilon} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\epsilon}{4\pi\rho_0 D} \int_{E_1}^E dE (\mu E - u_0) \right] \right\}. \quad (\text{П. VII. 14})$$

Интеграл, стоящий в знаменателе,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\vartheta}{D} \left(\frac{dE}{dz} \right)^2 dz &\approx \\ &\approx \left(\frac{4\pi\rho_0}{\epsilon} \right)^2 \frac{1}{D} \int_0^{\infty} dz \exp \left[\frac{\epsilon}{4\pi\rho_0 D} \int_{E_1}^E dE (\mu E - u_0) \right] \end{aligned}$$

при $D \rightarrow 0$ можно оценить методом Лапласа [11]. В результате получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{\vartheta}{D} \left(\frac{dE}{dz} \right)^2 dz \approx \left(\frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{2\pi\rho_0}{|\sigma(E_2)|}} \exp \left[\frac{\varepsilon}{4\pi\rho_0 D} \int_{E_1}^{E_2} dE (\mu E - u_0) \right], \quad (\text{П. VII. 15})$$

где напряженность поля E_2 отвечает средней особой точке, $\mu(E_2)E_2 - u_0 = 0$. Из (П. VII. 13), (П. VII. 14) и (П. VII. 15) следует, что при $D \rightarrow 0$ величина ξ экспоненциально мала.

Окончательно, подставляя (П. VII. 6), (П. VII. 10) и (П. VII. 12) в (П. VII. 4), находим

$$\lambda_0 \approx D \sqrt{\frac{\pi D}{\varepsilon \sigma(E_{\max})}} \frac{[\mu(E_{\max}) E_{\max} - u_0]^2}{D^2 (E_{\max} - E_1)}. \quad (\text{П. VII. 16})$$

Заметим, что величина λ_0 асимптотически стремится к нулю при $D \rightarrow 0$, поскольку при этом отношение

$$[\mu(E_{\max}) E_{\max} - u_0]/D$$

остается постоянным.

ЛИТЕРАТУРА*)

К введению

1. К. W. Воер, *Z. Phys.* **155**, 184 (1959).
2. Э. И. Адирович, *Z. Phys.* **155**, 195 (1959).
3. А. Л. Захаров, *ЖЭТФ* **38**, 665 (1960); в сб. «Полупроводниковые приборы и их применение», вып. 6, «Советское радио», 1960, стр. 103.
4. В. К. Ridley, *Proc. Phys. Soc.* **82**, 954 (1963).
5. В. Л. Бонч-Бруевич, *ФТТ* **8**, 1753 (1966); *Phys. Lett.* **20**, 249 (1965).
6. P. N. Butcher, *Phys. Lett.* **19**, 546 (1965).
7. А. Ф. Волков, *ФТТ* **8**, 3187 (1966).
8. В. И. Стафеев, *ФТТ* **5**, 3095 (1963).
9. И. А. Курова, С. Г. Калашников, *ФТТ* **5**, 3224 (1963).
10. R. G. Pratt, В. К. Ridley, *Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Paris, 1964*, p. 487.
11. J. В. Gunn, в сб. «Plasma Effects in Solids», Paris, 1964, p. 199 (см. перевод в сб. НМПЭ**); *IBM J. Res. Devel* **8**, 141 (1964).
12. А. Barraud, С. R. Acad. Sci (Paris) **265**, 3632 (1963).
13. Т. К. Gaylord, P. L. Shah, Т. А. Rabson, *IEEE Trans. ED-15*, 777 (1968); *ED-16*, 490 (1969).
14. P. N. Butcher, *Rep. Progr. Phys.* **30**, 97 (1967).
15. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, *УФН* **96**, 633 (1968).
16. W. Heinle, *Intern. Elektron. Rundschau* **22**, 279 (1968).
17. М. Е. Левинштейн, *Зарубежная радиоэлектроника* **10**, 64 (1968).
18. В. С. Андреев, В. А. Борисов, *Радиотехника* **24**, 11 (1969).
19. В. М. Кузнецов, О. К. Мокеев, О. Р. Мочалкина, В. И. Старосельский, *Изв. вузов, Радиоэлектроника* **12**, 39 (1969).
20. R. H. Chilton, W. K. Kennedy, *Proc. IEEE* **56**, 1124 (1968).

К главе I

1. J. В. Gunn, *Solid State Commun.* **1**, 88 (1963) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 51).

*) Мы весьма признательны авторам, любезно предоставившим нам препринты своих работ.

**) НМПЭ — сборник «Новые методы полупроводниковой СВЧ-электроники. Эффект Ганна и его применение», «Мир», 1968.

2. В. К. Ridley, R. G. Pratt, Phys. Lett. 4, 300 (1963).
3. R. G. Pratt, В. К. Ridley, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Paris, 1964, p. 487; Proc. Phys. Soc. 85, 293 (1965).
4. И. А. Курова, С. Г. Калашников, ФТТ 5, 3224 (1963).
5. И. А. Курова, М. Врана, В. С. Вавилов, ФТТ 8, 2374 (1966).
6. Н. Г. Жданова, М. С. Каган, С. Г. Калашников, ФТТ 8, 788 (1966); Phys. Stat. Sol. 11, 415 (1965).
7. М. С. Каган, С. Г. Калашников, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 537.
8. С. Barraud, C. R. Acad. Sci. (Paris) 265, 3632 (1963).
9. К. В. Воег, J. Phys. Chem. Sol. 22, 123 (1961).
10. М. С. Каган, С. Г. Калашников, Н. Г. Жданова, Phys. Stat. Sol. 24, 551 (1967).
11. С. Г. Калашников, М. С. Каган, В. А. Вдовенков, ФТП 1, 116 (1967).
12. В. И. Стафеев, ФТТ 5, 3095 (1963).
13. R. W. Smith, Phys. Rev. Lett. 9, 87 (1962).
14. J. H. McFee, J. Appl. Phys. 34, 1548 (1963).
15. I. Yamashita, I. Ishiguro, T. Tanaka, Jap. J. Appl. Phys. 4, 470 (1965).
16. W. H. Haydl, C. F. Quate, Appl. Phys. Lett. 7, 45 (1965).
17. К. В. Воег, Phys. Rev. 139, A 1949 (1965).
18. P. O. Sliva, R. Bray, Phys. Rev. Lett. 14, 372 (1965).
19. C. Hervouet, J. Lebaillly, P. Leroux-Hugon, R. Veillex, Solid State Commun. 3, 413 (1965).
20. J. В. Gunn, в сб. «Plasma Effects in Solids», Paris, 1964, p. 199 (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 55).
21. J. В. Gunn, IBM J. Res. Devel. 10, 300 (1966).
22. М. Kikuchi, Solid State Commun. 5, 855 (1967).
23. G. Y. Robinson, R. M. White, N. C. MacDonald, Appl. Phys. Lett. 13, 407 (1968).
24. J. Zucker, S. Zemon, J. H. Wasko, в сб. II—VI Semicond. Compounds, N. Y., 1967, p. 919.
25. К. В. Воег, Н. J. Hansch, U. Kummel, Z. Phys. 155, 460 (1959).
26. J. Shirafuji, Solid State Electron. 11, 983 (1968).
27. P. Guetin, D. Воссон-Gibod, Appl. Phys. Lett. 18, 161 (1968).
28. P. Guetin, J. Appl. Phys. 40, 4114 (1969).
29. A. W. White, Solid State Electron. 8, 833 (1965).
30. М. G. Cohen, S. Knight, J. P. Elward, Appl. Phys. Lett. 8, 269 (1966).
31. Ю. В. Воробьев, Ю. И. Карханин, О. В. Третьяк, ФТП (в печати).
32. С. Г. Калашников, Электричество, «Наука», 1964.
33. В. К. Ridley, Proc. Phys. Soc. 82, 954 (1963).
34. В. К. Ridley, Т. В. Watkins, Proc. Phys. Soc. 78, 293 (1961) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 17).
35. С. Nilsum, Proc. IRE 50, 185 (1962) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 37).

36. A. G. Chynoweth, W. L. Feldmann, D. E. McCumber, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 514 (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 79).
37. J. B. Gunn, IBM J. Res. Devel. 8, 141 (1964).
38. A. G. Foyt, A. L. McWhorter, IEEE Trans. ED-13, 79 (1966).
39. G. W. Ludwig, R. E. Halsted, M. Aven, IEEE Trans. ED-13, 671 (1966); M. R. Oliver, A. G. Foyt, IEEE Trans. ED-14, 617 (1967).
40. G. W. Ludwig, IEEE Trans. ED-14, 547 (1967).
41. G. W. Ludwig, M. Aven, J. Appl. Phys. 38, 5326 (1967).
42. J. W. Allen, M. Shyam, Y. S. Chen, G. L. Pearson, Appl. Phys. Lett. 7, 78 (1965).
43. J. W. Allen, M. Shyam, G. L. Pearson, Appl. Phys. Lett. 9, 39 (1969).
44. J. C. McGroddy, M. R. Lorentz, T. S. Plaskett, J. E. Smith, Solid State Commun. 7, 901 (1969).
45. S. Porowski, W. Paul, J. C. McGroddy, M. I. Nathan, J. E. Smith, Solid State Commun. 7, 905 (1969).
46. D. E. McCumber, A. G. Chynoweth, IEEE Trans. ED-13, 4 (1966).
47. P. N. Butcher, W. Fawcett, Phys. Lett. 21, 481 (1966).
48. E. M. Conwell, B. J. Vassel, IEEE Trans. ED-13, 22 (1966); Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 527.
49. W. Heinle, Z. Phys. 222, 301 (1969).
50. A. D. Boardman, W. Fawcett, M. D. Rees, Solid State Commun. 6, 305 (1968).
51. L. Lundgren, K. Olsson, Appl. Phys. Lett. 15, 64 (1969).
52. J. B. Gunn, B. J. Elliott, Phys. Lett. 22, 369 (1966).
53. D. M. Chang, J. L. Moll, Appl. Phys. Lett. 9, 203 (1966).
54. H. W. Thim, Electron. Lett. 2, 403 (1966).
55. A. McWhorter, A. G. Foyt, Appl. Phys. Lett. 9, 300 (1966).
56. С. Г. Калашников, В. Е. Любченко, Н. Е. Скворцова, ФТП 1, 1445 (1967).
57. G. A. Acket, Phys. Lett. 24A, 200 (1967).
58. N. Braslau, Appl. Phys. Lett. 10, 531 (1967).
59. С. Hamaguchi, Т. Kono, Y. Inuishi, Phys. Lett. 24A, 500 (1967).
60. J. G. Ruch, G. S. Kino, Appl. Phys. Lett. 10, 40 (1967); Phys. Rev. 174, 921 (1968).
61. А. А. Кастальский, С. М. Рывкин, ФТП 1, 622 (1967).
62. J. E. Smith, Appl. Phys. Lett. 12, 233 (1968).
63. B. W. Levinger, D. R. Frankl, J. Phys. Chem. Sol. 20, 281 (1961).
64. Дж. Е. Смит, Дж. К. Мак-Гроди, М. И. Нейсон, Труды Межд. конф. по физике полупр., Москва, 1968, «Наука», 1969, стр. 1004.
65. А. А. Кастальский, ФТП 2, 653 (1969).
66. А. А. Кастальский, С. М. Рывкин, Труды Межд. конф. по физике полупр., Москва, 1968, «Наука», 1969, стр. 1010.
67. B. K. Ridley, T. B. Watkins, J. Phys. Chem. Sol. 22, 155 (1961)

68. R. G. Pratt, B. K. Ridley, *J. Phys. Chem. Sol.* **26**, 21 (1965).
69. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТТ **6**, 2041 (1964).
70. В. Л. Бонч-Бруевич, С. Г. Калашников, ФТТ **7**, 750 (1965).
71. K. W. Boer, W. E. Wilhelm, *Phys. Stat. Sol.* **3**, 1718 (1963).
72. И. А. Курова, М. Врана, ФТП (в печати).
73. И. А. Курова, М. Врана, П. Берндт, ФТП **2**, 1838 (1969).
74. M. Lax, *Phys. Rev.* **119**, 1502 (1960).
75. A. L. McWhorter, R. H. Rediker, *Proc. IRE* **47**, 1207 (1959).
76. L. M. Lambert, *J. Phys. Chem. Sol.* **23**, 1481 (1962).
77. И. Акасаки, Т. Хара, Труды Межд. конф. по физике полупр., Москва, 1968, «Наука», 1969, стр. 833.
78. A. L. McWhorter, R. H. Rediker, *Proc. Int. Conf. Phys. Semicond.*, Prague, 1961, p. 134.
79. J. Callaway, F. W. Cummings, *Phys. Rev.* **126**, 5 (1962).
80. K. W. Boer, G. A. Dussel, *Phys. Rev.* **154**, 292 (1967).
81. Ю. В. Воробьев, Ю. И. Карханин, О. В. Третьак, *Phys. Stat. Sol.* **36**, 499 (1969).
82. J. Vok, *Ann. Radioelectr.* **15**, 120 (1960).
83. Ш. М. Коган, ФТТ **4**, 2475 (1962).
84. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ **48**, 275 (1965).
85. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **35**, 392 (1958); **36**, 624 (1959).
86. Б. Б. Кадомцев, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2, Атомиздат, 1963, стр. 173.
87. А. Г. Девятков, Ш. М. Коган, Т. М. Лифшиц, А. Я. Олейников, ФТТ **6**, 1657 (1964).
88. Т. М. Лифшиц, А. Я. Олейников, А. Я. Шульман, *Phys. Stat. Sol.* **14**, 511 (1966).
89. Р. Ф. Казаринов, В. Г. Скобов, ЖЭТФ **42**, 1047 (1962); **44**, 1368 (1963).
90. Ш. М. Коган, ФТТ **10**, 1536 (1968).
91. В. Н. Богомолов, С. Г. Шульман, А. Г. Аронов, Г. Е. Пикус, Письма ЖЭТФ **5**, 212 (1967).
92. Е. Ф. Шендер, ФТП **3**, 1362 (1969).
93. В. Б. Сандомирский, А. Г. Ждан, Письма ЖЭТФ **9**, 201 (1969).
94. S. Ahmad, W. S. Khokle, *Ind. J. Pure Appl. Phys.* **7**, 270 (1969).
95. J. C. McGroddy, M. I. Nathan, *IBM J. Res. Devel.* **11**, 337 (1967).
96. B. J. Elliott, J. B. Gunn, J. C. McGroddy, *Appl. Phys. Lett.* **11**, 253 (1967).
97. W. Fawcett, E. G. D. Paige, *Electron Lett.* **3**, 505 (1967).
98. E. Nebauer, E. Jahne, *Phys. Stat. Sol.* **8**, 881 (1965).
99. В. Л. Сондаевский, В. И. Стафеев, в сб. «Физика p - n -переходов», «Зинатне», 1966, стр. 83.
100. В. И. Пустовойт, С. Г. Калашников, Г. С. Падо, ФТП **3**, 832 (1969).
101. С. Г. Калашников, Г. С. Падо, В. И. Пустовойт, Е. Ф. Токарев, ФТП **3**, 1028 (1969); *Phys. Stat. Sol.* **34**, 451 (1969).

102. В. Л. Винецкий, ФТТ 11, 1402 (1969).
103. Ю. Ю. Вайткус, Ю. К. Вишикас, С. Ч. Карпинскас, А. К. Урбеллис, ФТТ 11, 2111 (1969).
104. Р. Бьюб, Фотопроводимость твердых тел, ИЛ, 1962.
105. Ф. И. Вергунас, С. Абдиев, Н. Л. Данилова, Б. И. Седунов, ФТП 1, 1330 (1967).
106. В. Франц, Пробой диэлектриков, ИЛ, 1961.
107. Г. И. Сканава, Физика диэлектриков, Физматгиз, 1958.
108. И. В. Варламов, Е. М. Шандаров, ФТП 3, 1432 (1969).
109. В. Ф. Елесин, Ю. А. Быковский, ФТП 2, 1684 (1968).
110. А. Л. Захаров, ЖЭТФ 38, 665 (1960).
111. В. Л. Бонч-Бруевич, Ш. М. Коган, ФТТ 7, 23 (1965).
112. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко, ЖЭТФ 50, 102 (1966).
113. Р. Р. Киквидзе, А. А. Рухадзе, Е. П. Фетисов, ФТТ 9, 1349 (1967).
114. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1964.

К главе II

1. А. И. Ансельм, Введение в теорию полупроводников, Физматгиз, 1962.
2. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ 6, 463 (1936).
3. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ 7, 1069 (1937).
4. Б. И. Давыдов, И. М. Шмушкевич, ЖЭТФ 10, 1043 (1940).
5. Э. Конуэлл, Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях, «Мир», 1970.
6. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТП 3, 1010 (1969).
7. K. Vlotekjaer, Proc. IEEE 55, 432 (1967)*; Preprint (1967).
8. С. И. Анисимов, В. И. Мельников, Э. И. Рашба, Письма ЖЭТФ 7, 253 (1968).
9. H. Frohlich, В. Раганяре, Proc. Phys. Soc. B69, 21 (1955).
10. А. Зоммерфельд, Термодинамика и статистическая физика, ИЛ, 1955.
11. Р. Смит, Полупроводники, ИЛ, 1962.
12. Ю. В. Гуляев, ФТП 3, 246 (1969).
13. Г. Е. Пикус, Основы теории полупроводниковых приборов, «Наука», 1965.
14. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, УФН 96, 563 (1968).
15. Ю. В. Воробьев, Ю. И. Карханин, О. В. Третьяк, Phys. Stat. Sol. 36, 499 (1969).

К главе III

1. В. Л. Бонч-Бруевич, П. С. Серебренников, Радиотехника и электроника XIV, 1648 (1969).
2. D. E. McCumber, A. G. Chynoweth, IEEE Trans. ED-13, 4 (1966).

*) Журнал Proc. IEEE полностью переводится на русский язык с 1961 г. под названием ТИРИ, а с 1963 г. — под названием ТИИЭР.

3. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко, ЖЭТФ **50**, 102 (1966).
4. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, ЖЭТФ **52**, 1647 (1967).
5. Ю. В. Гуляев, ФТП **3**, 246 (1969).
6. Н. Кроегер, Proc. IEEE **52**, 1736 (1964); Proc. IEEE **53**, 1246 (1965).
7. О. Маделунг, Физика полупроводниковых соединений III и V групп, «Мир», 1967.
8. В. Накки, J. Appl. Phys. **38**, 808 (1967) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 193).
9. Н. W. Thim, M. R. Barber, IEEE Trans. ED-13, 110 (1966) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 324).
10. Н. W. Thim, M. R. Barber, В. W. Накки, S. Knight, М. Uenohara, Appl. Phys. Lett. **7**, 167 (1965).
11. В. К. Ridley, Proc. Phys. Soc. **86**, 637 (1965).
12. В. Л. Гуревич, ЖЭТФ **46**, 354 (1964).
13. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, 1964; А. И. Ахиезер, Р. В. Половин, Препринт ИТФ-70-9Р, Киев, 1970.
14. А. Г. Куликовский, ПММ **30**, 148 (1966).
15. К. Kumabe, Proc. IEEE (Lett.) **56**, 2172 (1968).
16. G. S. Kino, P. N. Robson, Proc. IEEE **56**, 2056 (1968).
17. H. L. Hartnagel, Electron. Lett. **5**, 303 (1969).
18. S. Kataoka, H. Tateno, M. Kawashima, Electron. Lett. **5**, 48 (1968).
19. M. T. Vaardingerbroeck, G. A. Acket, L. Hofmann, P. M. Voers, Phys. Lett. **28A**, 97 (1968).
20. И. П. Звягин, Вестник МГУ (в печати).

К главе IV

1. Н. Г. Жданова, М. С. Каган, С. Г. Калашников, Phys. Stat. Sol. **11**, 415 (1965).
2. W. Shockley, Bell Syst. Techn. J. **23**, 799 (1954).
3. A. Yamashita, R. Nii, Rev. Elect. Commun. Lab. **15**, 96 (1967).
4. J. B. Gunn, IBM J. Res. Devel. **10**, 300 (1966); **10**, 310 (1966) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 344).
5. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТТ **8**, 356 (1966).
6. D. E. McCumber, A. G. Chynoweth, IEEE Trans. ED-13, 4 (1966).
7. J. A. Copeland, Proc. IEEE **54**, 1479 (1966); Journ. Appl. Phys. **38**, 3096 (1967).
8. В. Л. Бонч-Бруевич, М. Д. Хомутова, ФТП **2**, 965 (1968).
9. В. Л. Бонч-Бруевич, Phys. Stat. Sol. **23**, 761 (1967).
10. М. С. Каган, С. Г. Калашников, Н. Г. Жданова, Phys. Stat. Sol. **24**, 551 (1967).
11. Ю. Ф. Соколов, Phys. Stat. Sol. **33**, 137 (1969).
12. K. W. Boer, Phys. Rev. **139**, A1949 (1965).
13. K. W. Boer, W. E. Wilhelm, Phys. Stat. Sol. **3**, 1704 (1963).
14. K. W. Boer, P. L. Quinn, Phys. Stat. Sol. **17**, 307 (1966).

15. Г. Е. Пикус, Основы теории полупроводниковых приборов, «Наука», 1965.
16. K. W. Boer, G. Dohler, G. A. Dussel, P. Voss, Phys. Rev. **169**, 700 (1968).
17. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, «Наука», 1966.

К главе V

1. J. B. Gunn, В сб. «Plasma Effects in Solids», Paris, 1964, p. 199 (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 55).
2. A. Vagstad, C. R. Acad. Sci. (Paris) **265**, 3632 (1963).
3. И. А. Курова, М. Врана, В. С. Вавилов, ФТТ **8**, 2374 (1966).
4. Н. Г. Жданова, М. С. Каган, С. Г. Калашников, ФТТ **8**, 788 (1966).
5. P. N. Butcher, W. Fawcett, Brit. J. Appl. Phys. **17**, 841, 1425 (1966).
6. B. K. Ridley, Proc. Phys. Soc. **86**, 637 (1965).
7. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТТ **8**, 1753 (1966); **9**, 355 (1967); Phys. Lett. **20**, 249 (1966); Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 509.
8. А. Ф. Волков, ФТТ **8**, 3187 (1966); Phys. Lett. **20**, 598 (1966).
9. P. N. Butcher, W. Fawcett, C. Hilsuim, Brit. J. Appl. Phys. **17**, 84 (1966) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 131).
10. В. Л. Бонч-Бруевич, Phys. Stat. Sol. **22**, 267 (1967).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
12. J. B. Gunn, Выступление по докладу В. Л. Бонч-Бруевича, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 512.
13. B. W. Knight, G. A. Peterson, Phys. Rev. **155**, 393 (1967).
14. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
15. J. B. Gunn, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 505 (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 67).
16. P. N. Butcher, Phys. Lett. **19**, 546 (1965).
17. J. Copeland, J. Appl. Phys. **37**, 3602 (1966) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 169).
18. М. Е. Левинштейн, М. С. Шур, ФТП **3**, 1085 (1969).
19. P. N. Butcher, W. Fawcett, N. R. Ogg, Brit. J. Appl. Phys. **18**, 755 (1967).
20. J. S. Heeks, IEEE Trans. **ED-13**, 68 (1966) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 263).
21. J. B. Gunn, IBM J. Res. Devel. **10**, 300 (1966); **10**, 310 (1966) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 344).
22. G. W. Ludwig, IEEE Trans. **ED-14**, 547 (1967).
23. M. R. Oliver, A. G. Foyt, IEEE Trans. **ED-14**, 617 (1967).
24. G. W. Ludwig, M. Allen, J. Appl. Phys. **38**, 5326 (1967).
25. S. Porowski, W. Paul, J. C. McGroddy, M. I. Nathan, J. E. Smith, Solid State Commun. **7**, 905 (1969).
26. M. R. Oliver, A. L. McWhorter, A. G. Foyt, Appl. Phys. Lett. **11**, 111 (1967).

27. W. Heinle, *Brit. J. Appl. Phys.* **18**, 1537 (1967).
28. J. S. Heesks, A. D. Woode, C. P. Sandbank, *Electron. Lett.* **2**, 417 (1967).
29. M. Shoji, *Proc. IEEE (Lett.)* **55**, 130 (1967).
30. M. Shoji, *IEEE Trans.* **ED-14**, 535 (1967).
31. M. Shoji, *Proc. IEEE* **55**, 710 (1967).
32. R. S. Engelbrecht, *IEEE J., Solid State Circuits* **3**, 210 (1968).
33. R. S. Engelbrecht, *Bell Lab. Rec.* **45**, 192 (1967).
34. B. W. Hakki, *Appl. Phys. Lett.* **11**, 153 (1967).
35. C. P. Sandbank, *Solid State Electron*, **10**, 369 (1967).
36. J. A. Copeland, G. Hayoshi, M. Uenohara, *Proc. IEEE* **55**, 584 (1967).
37. H. L. Hartnagel, *Proc. IEEE* **55**, 1748 (1967).
38. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
39. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, *УФН* **96**, 633 (1968).
40. И. П. Звягин, А. Г. Миронов, *Вестник МГУ* (в печати).
41. B. K. Ridley, R. G. Pratt, *J. Phys. Chem. Sol.* **26**, 21 (1965).
42. И. А. Курова, М. Врана, *ФТП* **1**, 1095 (1967).
43. К.-Е. Kroll, *Phys. Stat. Sol.* **24**, 707 (1967).
44. С. Г. Калашников, В. Л. Бонч-Бруевич, *Phys. Stat. Sol.* **16**, 197 (1966); *Радиотехника и электроника XI*, 1719 (1966).
45. W. E. Wilhelm, *Phys. Stat. Sol.* **16**, K59 (1966).
46. B. K. Ridley, P. H. Wisbey, *Brit. J. Appl. Phys.* **18**, 761 (1967).
47. K. W. Boer, G. A. Dussel, *Phys. Rev.* **154**, 292 (1967).
48. G. Pataki, *Acta Phys. Hung.* **24**, 119 (1968).
49. И. А. Курова, М. Врана, Труды Межд. конф. по физике полупр., Москва, 1968, «Наука», 1969, стр. 971.
50. М. Врана, О. А. Киселева, И. А. Курова, *ФТП* **2**, 895 (1968).
51. С. А. Ктиторов, *ФТП* **3**, 1540 (1969).

К главе VI

1. B. K. Ridley, *Proc. Phys. Soc.* **82**, 954 (1963).
2. А. Г. Девятков, Ш. М. Коган, Т. М. Лифшиц, А. Я. Олейников, *ФТП* **6**, 722 (1964).
3. Т. М. Лифшиц, А. Я. Олейников, А. Я. Шульман, *Phys. Stat. Sol.* **14**, 511 (1966).
4. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко, *ЖЭТФ* **50**, 102 (1966).
5. В. М. Яковенко, *Укр. физ. ж.* **13**, 1490 (1968).
6. Ю. В. Гуляев, *ФТП* **3**, 246 (1969).
7. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, *ЖЭТФ* **52**, 1647 (1967).
8. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, *УФН* **96**, 633 (1968).
9. И. В. Варламов, В. В. Осипов, *ФТП* **3**, 950 (1969).
10. Б. Т. Коломиец, Э. А. Лебедев, *Радиотехника и электроника VIII*, 2097 (1963); S. K. Ovshinsky, U. S. patent № 3271—591, cl. 307—885 (1963).
11. М. М. Аверьянова, И. В. Варламов, И. А. Сондаевская, В. И. Стафеев, *ФТП* **3**, 920 (1969).

12. М. Е. Алексеев, В. П. Сондаевский, Письма ЖЭТФ **10**, 31 (1969).
13. T. Fukami, J. Homma, Jap. J. Appl. Phys. **2**, 535 (1963).
14. M. R. Oliver, A. L. McWhorter, A. G. Foyt, Appl. Phys. Lett. **11**, 111 (1967).
15. И. В. Варламов, Е. М. Шандаров, ФТП **3**, 1432 (1969).
16. I. Melngailis, A. G. Milnes, J. Appl. Phys. **33**, 995 (1962).
17. М. Е. Алексеев, И. В. Варламов, В. П. Сондаевский, Электронная техника, сер. 6, вып. 1, 8 (1968).
18. И. В. Варламов, И. А. Сондаевская, В. П. Сондаевский, В. И. Стафеев, Тезисы докл. на III Всес. совещ. по физич. явлениям в $p-n$ -переходах в полупр., Тбилиси, 1966.
19. A. M. Barnett, A. G. Milnes, J. Appl. Phys. **37**, 4215 (1966).
20. И. В. Варламов, В. В. Осипов, Э. А. Полторацкий, ФТП **3**, 1162 (1969).
21. A. M. Barnett, H. A. Jensen, Appl. Phys. Lett. **12**, 341 (1968).

К главе VII

1. В. К. Ridley, Proc. Phys. Soc. **82**, 954 (1963).
2. С. де Гроот, П. Мазур, Неравновесная термодинамика, «Мир», 1964.
3. В. W. Knight, G. A. Peterson, Phys. Rev. **155**, 393 (1967).
4. Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, ОНТИ, Харьков, 1939.
5. И. П. Звягин, ФТП **3**, 33 (1969).
6. Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, Прикл. мат. механ. **21**, 850 (1950).
7. M. Bocher, Leçons sur les methodes de Sturm, Paris, 1914.
8. J. B. Gunn, IBM J. Res. Devel. **10**, 310 (1966) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 344).
9. H. W. Thim, J. Appl. Phys. **39**, 3897 (1968).
10. Н. Кромер, IEEE Trans. **ED-13**, 27 (1966).
11. H. W. Thim, M. R. Barber, Proc. IEEE **56**, 110 (1968).
12. M. Ohtomo, Jap. J. Appl. Phys. **7**, 1368 (1968).
13. M. Barber, Proc. IEEE **56**, 752 (1968).
14. R. I. Harrison, S. P. Denker, H. Berger, Radio and Electronic Engineer **37**, 11 (1969).
15. P. L. Fleming, Proc. IEEE **56**, 2082 (1968).
16. S. H. Izadpanah, H. L. Hartnagel, Electron. Lett. **5**, 53 (1969).
17. J. S. Heeks, A. D. Woode, C. P. Sandbank, Radio and Electronic Engineer **30**, 377 (1965).
18. V. G. Bosh, H. Pollmann, IEEE Trans. (Corr.) **ED-13**, 194 (1966).
19. J. A. Copeland, T. Hayashi, M. Uenohara, Proc. IEEE (Lett.) **55**, 584 (1967).
20. H. Pollmann, V. G. Bosh, Proc. IEEE (Lett.) **56**, 2168 (1968).
21. И. П. Звягин, Вестн. МГУ № 1, 102 (1969).
22. H. Thim, IEEE Trans. **ED-14**, 517 (1967).
23. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТП **1**, 239 (1967).
24. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы. Гос-техиздат, 1954.

25. Г. Патаки, ФТП 2, 206 (1968).
26. R. Enderlein, Phys. Stat. Sol. 28, 519 (1968).
27. Н. Кромер, IEEE Trans. ED-15, 819 (1968).
28. М. Р. Shaw, Р. R. Solomon, Н. L. Grubin, IBM J. Res. Devel. 13, 587 (1969).
29. Г. Ф. Караваев, ФТТ 9, 3604 (1967).
30. И. П. Звягин, Вестн. МГУ № 2, 51 (1970).
31. Ю. Ф. Соколов, Препринт ИРЭ АН СССР (1969).
32. С. Г. Калашников, М. С. Каган, В. А. Вдовенков, ФТП 1, 116 (1967).
33. Н. Thim, Electron. Lett. 2, 403 (1966).
34. А. Yamashita, R. Nii, Rev. Electr. Comm. Lab. 15, 96 (1967).
35. К. W. Воер, Р. Voss, Phys. Stat. Sol. 30, 291 (1968).
36. G. Dohler, Phys. Stat. Sol. 30, 627 (1968).
37. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, ЖЭТФ 52, 1647 (1967).
38. Ш. М. Коган, ЖЭТФ 54, 1228 (1968).
39. М. Е. Левинштейн, М. С. Шур, Phys. Stat. Sol. 28, 827 (1968).
40. J. A. Copeland, Proc. IEEE 54, 1479 (1966).
41. J. A. Copeland, J. Appl. Phys. 38, 3096 (1967).
42. I. B. Bott, C. Hilsum, IEEE Trans. ED-11, 492 (1967).
43. Н. W. Thim, S. Knight, Appl. Phys. Lett. 11, 83 (1967).
44. E. M. Conwell, M. O. Vassell, IEEE Trans. ED-13, 22 (1966).
45. М. Т. Vlaardingerbroek, W. Kuypers, G. A. Acket, Phys. Lett. 28A, 155 (1968).
46. J. A. Copeland, Electronics 40, № 23, 131 (1967).
47. Ф. Г. Басс, В. С. Бочков, Ю. Г. Гуревич, ЖЭТФ 58, 1815 (1970).

К главе VIII

1. В. Л. Гуревич, ФТП 2, 1557 (1968).
2. В. И. Пустовойт, УФН 97, 257 (1969).
3. М. Kikuchi, Н. Hayakawa, Y. Abe, Jap. J. Appl. Phys. 5, 1259 (1966); 5, 1260 (1966).
4. А. Rannestad, Phys. Rev. 155, 744 (1957); Н. J. Fossum, А. Rannestad, J. Appl. Phys. 38, 5177 (1967).
5. Т. Ishiguro, I. Ichida, J. Phys. Soc. Japan 22, 934 (1967).
6. С. W. Turner, I. Crow, Appl. Phys. Lett. 11, 187 (1967).
7. G. S. Kino, R. K. Route, Appl. Phys. Lett. 11, 312 (1967).
8. Т. Arisumi, Т. Aoki, К. Hayakawa, J. Phys. Soc. Japan 25, 1361 (1968).
9. I. Gorelik, В. Fisher, В. Pratt, Z. Luz, А. Many, Phys. Lett. 28A, 485 (1969).
10. R. K. Route, G. S. Kino, Appl. Phys. Lett. 14, 97 (1969).
11. М. Кикучи, Х. Хаякава, Труды Межд. конф. по физике полупр., Москва, 1968, «Наука», 1969, стр. 992.
12. P. Leroux-Hugon, Phys. Stat. Sol. 31, 331 (1969).
13. R. Bray, С. S. Kumar, J. B. Ross, Р. O. Sliva, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, стр. 483.
14. J. B. Ross, R. Bray, Bull. Am. Phys. Socser. 11, 12, 119 (1967).

15. Р. Брэй, В. Долэ, Дж. Б. Росс, Труды Межд. конф. по физике полупр., Москва, 1968, «Наука», 1969, стр. 972.
16. P. O. Sliva, R. Bray, Phys. Rev. Lett. **14**, 372 (1965).
17. W. H. Haydl, C. F. Quate, Appl. Phys. Lett. **7**, 45 (1965); Phys. Lett. **20**, 463 (1966).
18. J. Yamashita, I. Ishiguro, T. Tanaka, Jap. J. Appl. Phys. **4**, 470 (1965).
19. W. Wettleing, E. Pohlendt, Phys. Lett. **19**, 298 (1965).
20. E. G. S. Paige, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 397.
21. G. S. Hobson, E. G. S. Paige, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 464.
22. A. Ishida, C. Hamaguchi, Y. Inuishi, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 469.
23. A. Many, J. Balberg, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 475.
24. G. Quentin, J. M. Thuillier, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, p. 493.
25. W. H. Haydl, K. Harker, C. F. Quate, J. Appl. Phys. **38**, 4298 (1967).
26. A. Ishida, Y. Inuishi, IEEE Trans. **ED-14**, 600 (1967).
27. A. Ishida, Y. Inuishi, J. Phys. Soc. Jap. **25**, 443 (1968).
28. C. Hervouet, J. Lebailly, P. Leroux-Hugon, R. Veilex, Solid State Commun. **3**, 413 (1965).
29. H. Ikoma, I. Kuru, K. Hatarga, J. Phys. Soc. Jap. **19**, 141 (1964).
30. I. Ishiguro, S. Nitta, A. Hotta, T. Tanaka, Jap. J. Appl. Phys. **4**, 703 (1965).
31. G. Quentin, J. M. Thuillier, Phys. Lett. **19**, 631 (1966).
32. N. I. Meyer, E. Mosekilde, M. H. Jorgensen, В сб. II—VI Semicond. Compounds, N. Y., 1967, стр. 950.
33. М. Бруун, М. Х. Йоргенсен, Н. И. Мейер, Е. Мозекильд, Труды Межд. конф. по физике полупр., Москва, 1968, «Наука», 1969, стр. 1022.
34. А. М. Дьяконов, Ю. В. Илсавский, Труды Межд. конф. по физике полупр., Москва, 1968, «Наука», 1969, стр. 1033.
35. С. Г. Калашников, А. И. Морозов, В. П. Кириллов, ФТТ **6**, 3161 (1964).
36. A. Many, J. Balberg, Phys. Lett. **80**, 463 (1966).
37. J. D. Maines, E. G. S. Paige, Solid. State Commun. **4**, 381 (1966).
38. H. Ikoma, J. Phys. Soc. Jap. **19**, 2338 (1964).
39. G. Quentin, J. M. Thuillier, L'Onde Electrique **45**, 1293 (1965).
40. A. Ishida, C. Hamaguchi, Y. Inuishi, J. Phys. Soc. Jap. **20**, 1946 (1965).
41. I. Baumberger, R. Vu Huy Dat, L'Onde Electrique **45**, 1285 (1965).
42. J. D. Maines, Appl. Phys. Lett. **8**, 67 (1968).
43. S. Yee, A. Kawai, M. L. Neudorfer, Solid State Electron. **12**, 191 (1969).
44. R. Gay, H. Hartnagel, Solid State Electron. **11**, 407 (1968).

45. С. Г. Калашников, В. В. Проклов, А. И. Морозов, ФТП **2**, 961 (1968); С. Г. Калашников, А. И. Морозов, В. В. Проклов, Phys. Stat. Sol. **23**, 49 (1967).
46. S. Fukunaga, A. Ishida, Y. Inuishi, J. Phys. Soc. Jap. **26**, 1179 (1969).
47. I. Uchida, T. Ishiguro, J. Phys. Soc. Jap. **23**, 1257 (1967).
48. В. И. Байбаков, Г. С. Падо, ФТТ **9**, 2135 (1967).
49. I. Uchida, Jap. J. Appl. Phys. **8**, 119 (1969).
50. M. Schultz, B. K. Ridley, Solid State Commun. **7**, 129 (1969).
51. G. Chartier, A. Koster, P. Leroux-Hugon, Phys. Lett. **29A**, 379 (1969).
52. J. Zucker, S. A. Zemon, J. H. Wasko, В сб. II—VI Semicond. Compounds, N. Y., 1967, стр. 919.
53. Дж. Цуккер, С. Земон, Дж. Х. Васко, Труды Межд. конф. по физике полупр., Москва, 1968, «Наука», 1969, стр. 957.
54. A. Ishida, Y. Inuishi, Phys. Lett. **27A**, 442 (1968).
55. W. Wettleing, Phys. Lett. **25A**, 193 (1967).
56. W. Wettleing, M. Bruun, Phys. Stat. Sol. **34**, 221 (1969).
57. P. L. White, J. Appl. Phys. **33**, 2547 (1962).
58. B. W. Hakki, R. W. Dixon, Appl. Phys. Lett. **14**, 185 (1969).
59. A. Ishida, Y. Inuishi, J. Phys. Soc. Jap. **26**, 957 (1969).
60. N. I. Meyer, M. H. Jorgensen, I. Balslev, Solid State Commun. **3**, 393 (1965).
61. S. S. Yee, Appl. Phys. Lett. **9**, 10 (1966).
62. A. Bonnot, Phys. Stat. Sol. **21**, 525 (1967).
63. C. S. Kumar, P. O. Sliva, R. Bray, Phys. Rev. **169**, 680 (1968).
64. T. Skettrup, N. I. Meyer, Phys. Cond. Matter **7**, 97 (1968).
65. В. Н. Смирнов, Г. Н. Талалихин, ФТТ **10**, 2806 (1968).
66. M. Bruun, W. Wettleing, N. I. Meyer, Solid State Commun. **7**, 755 (1969).
67. T. Arizumi, T. Aoki, K. Hayakawa, J. Phys. Soc. Jap. **26**, 370 (1969).
68. B. K. Ridley, J. W. Wilkinson, J. Phys. C. ser. 2, **2**, 1299 (1969).
69. B. K. Ridley, J. W. Wilkinson, J. Phys. C. ser. 2, **2**, 1307 (1969).
70. B. K. Ridley, J. W. Wilkinson, J. Phys. C. ser. 2, **2**, 1321 (1969).
71. P. Leroux-Hugon, Phys. Lett. **29A**, 267 (1969).
72. N. Mikoshiba, H. Ozaki, J. Phys. Soc. Jap. **24**, 514 (1968).
73. M. Tsui, S. Inque, Jap. J. Appl. Phys. **8**, 704 (1969).
74. В. Л. Бонч-Бруевич, Ю. В. Гуляев, ФТП **2**, 19 (1968).
75. Ю. В. Гуляев, Письма ЖЭТФ **5**, 419 (1967).
76. Р. А. Смит, Полупроводники, ИЛ, 1962.
77. П. Е. Зильберман, Э. М. Эпштейн, Письма ЖЭТФ **5**, 384 (1967).
78. Э. М. Эпштейн, ФТТ **8**, 552 (1966).
79. V. E. Henrich, G. Weinreich, Phys. Rev. **178**, 1204 (1969).
80. P. K. Tien, Phys. Rev. **171**, 970 (1968).
81. Ю. В. Гуляев, ФТП **4**, 415 (1970).

82. В. Л. Гуревич, Б. Д. Лайхтман, ЖЭТФ **49**, 966 (1965).
83. В. Л. Гуревич, Р. Катилюс, Б. Д. Лайхтман, ФТТ **10**, 2975 (1968).
84. S. A. Zemon, J. Zucker, J. H. Wasko, Proc. IEEE **56**, 778 (1968).
85. J. H. McFee, P. K. Tien, J. Appl. Phys. **37**, 2754 (1966).
86. G. Quentin, J. M. Thuillier, Phys. Lett. **23**, 42 (1966).
87. G. Quentin, J. M. Thuillier, Solid State Commun. **4**, 3 (1966).
88. F. S. Hickernell, N. G. Sakiotis, Proc. IEEE **52**, 194 (1964).
89. С. Г. Калашников, А. И. Морозов, Б. А. Станковский, Н. Н. Погорелова, Радиотехника и электроника **XII**, 537 (1967).
90. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТТ **8**, 356 (1966).
91. Р. М. Минц, в сб. «Памяти А. А. Андреева», изд-во АН СССР, 1955, стр. 499.
92. А. К. Сушкевич, Основы высшей алгебры, Гостехиздат, 1941.

К главе IX

1. D. E. McCumber, A. G. Chynoweth, IEEE Trans. **ED-13**, 4 (1966).
2. H. Kroemer, IEEE Trans. **ED-13**, 27 (1966).
3. W. Heinle, Phys. Lett. **24A**, 533 (1967); Solid State Electron. **11**, 583 (1968).
4. М. С. Шур, ФТТ **10**, 3138 (1968).
5. К. Курокава, Bell. Syst. Techn. J. **46**, 2235 (1967).
6. J. Lundstrom, Electron. Lett. **4**, 120 (1968).
7. J. Pokorny, Electron. Lett. **5**, 452 (1969).
8. M. P. Shaw, P. R. Solomon, H. L. Grubin, IBM J. Res. Devel. **13**, 587 (1969).
9. A. G. Chynoweth, W. L. Feldmann, D. E. McCumber, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto, 1966, стр. 514 (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 79).
10. J. S. Heeks, IEEE Trans. **ED-13**, 68 (1966) (см. перевод в сб. НМПЭ, стр. 263).
11. K. K. N. Chang, S. G. Liu, P. D. Southgate, H. J. Prager, Appl. Phys. Lett. **8**, 196 (1966); P. D. Southgate, H. J. Prager, K. K. N. Chang, J. Appl. Phys. **38**, 2689 (1967).
12. М. С. Шур, ФТП **3**, 1465 (1969).
13. G. A. Acket, J. J. Scheer, Electron. Lett. **5**, 999 (1969).
14. М. Е. Левинштейн, Phys. Lett. **29**, 435 (1969).
15. R. Брау, Выступление в дискуссии на конференции Европейского Физического общества по акустоэлектрическим явлениям в полупроводниках, октябрь 1969 г.
16. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТП **3**, 1010 (1969).
17. М. С. Шур, ФТТ **10**, 2652 (1968); **10**, 3560 (1968); **10**, 3684 (1968); Изв. АН СССР, сер. физ. **33**, 207 (1969).
18. Е. В. Ченский, ФТТ **11**, 666 (1969).
19. В. Л. Бонч-Бруевич, Phys. Stat. Sol. **22**, 267 (1967).
20. R. Коерр, K. Marinova, Phys. Stat. Sol. **27**, K117 (1968).

К приложениям

1. В. И. Пустовойт, С. Г. Калашников, Г. С. Падю, ФТП **3**, 832 (1969).
2. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ **7**, 1069 (1937).
3. Э. Конуэлл, Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях, «Мир», 1970.
4. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, М., 1954.
5. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959.
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
7. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, «Наука», 1966.
8. И. Г. Петровский, Математический сб. **41**, 107 (1934).
9. Р. М. Минц, в сб. «Памяти А. А. Андропова», изд-во АН СССР, 1955, стр. 499.
10. В. W. Knight, G. A. Peterson, Phys. Rev. **155**, 393 (1967).
11. М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, Физматгиз, 1962.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адмитанс 318
Акустоэлектрический ток 331, 338, 341
- Бесконечный образец, приближение 102, 134, 169, 178, 266, 347
Быстрые и медленные процессы в задаче о распространении звука 335, 338
- Возникновение и исчезновение доменов 14, 17, 20, 55, 157, 204, 320, 329
— — — токовых шнуров 15, 58
- Генерация субгармоник 337
— электронно-дырочных пар в домене 231, 355
Граничные условия 96, 150, 189, 355
— — для флуктуаций 111, 123, 129, 307
— — периодические 101, 112, 113, 119, 199, 208, 275
- Диффузионный ток 60, 75, 92, 102, 242, 246
Длина нелокальности 83
Домен ганновский внутри звукоэлектрического 356
—, методы наблюдения 17, 356
— сильного поля 14, 17, 183, 194, 202, 216, 226
— симметричный 248, 253
— слабого поля 14, 216
— температурно-электрический 48
— треугольный 222, 330
- Домен широкий 202, 210, 217, 227, 247, 348, 363
— электрической индукции в сегнетоэлектриках 361
Доменная стенка 247, 285, 306
- Задержка образования домена 320, 325
Закон дисперсии носителей заряда 25
— — — —, анизотропия 27
Затравочные неоднородности 133, 148, 161, 166, 196, 290, 343
- Излучение рекомбинационное 270, 330, 355
Импеданс, нули 107, 129
— полюсы 107, 279
Ионизация «зона — зона» 27, 231
— примесных уровней 31, 35
- Колебания напряжения 269
— тока 14, 48, 204, 320, 329
Контакт антизапорный 179, 309
— запорный 179, 309
Коэффициент захвата, полевая зависимость 33, 83, 198, 240
— инъекции 159
Кпд генерации 323
Критерий Бендиксона 210, 385
— Гурвица 344
— Дюлака 384
— n_0L 118, 123
- Легирование неоднородное 232
Локальные модели 86
- Межминимумные переходы 26, 158, 324

- Механизм Ридли — Уоткинса — Хилсума 24
 Многодоменное решение 220, 284, 288, 296
 Многослойные структуры 269
 Насыщение тока 16, 183, 194, 227, 306
 Нелокальность 83, 89, 356
 Несжимаемого газа приближение 55, 259, 314
 Осцилляционные теоремы 283, 310, 316
 Переключение 43, 269
 Подавление домена 320, 325
 Подвижность, полевая зависимость 22, 26, 51, 83, 357
 Поле направлений 191, 213
 Полевая модель 51, 86, 108, 274
 Пороговая напряженность поля для возникновения домена 297, 320, 328
 — — — для поддержания домена 297
 Правила площадей 217, 249, 363
 Предельный цикл 225, 247
 Пролетное время 120, 298, 320
 Режим заданного напряжения 107, 129, 288
 — — тока 106, 288, 347
 — сильного звука 337, 348
 — слабого звука 337
 Седло 165, 211, 264, 348, 380
 Седло-узел 181, 244, 385
 Седло-фокус 348, 393
 Сепаратриса 175, 348, 393
 Скорость домена 219, 239, 250, 253, 329, 350
 Слой обеднения 209, 222, 397
 — обогащения 209, 221
 Соотношение Эйнштейна обоб- щенное 75, 372
 Температура электронов 22, 38, 55, 64, 71, 75, 161, 257
 Температурное гашение фото- проводимости 45, 368
 Тепловой пробой 47, 269
 Термоэлектрический ток 60, 76, 93, 108
 Траектории фазовые 163, 206, 378
 — — замкнутые 212, 265, 383
 Узел 165, 211, 380, 391
 Усиление электрических колеба- ний 120, 299, 368
 Фазовая плоскость 207, 378
 Фокус 165, 212, 381
 Функциональные интегральные схемы доменного типа 234
 Функция Грина 281
 Характеристическое уравнение 153, 211, 344, 380, 391
 Центр 212, 264, 383
 Шнуры токовые 15, 58, 262, 314
 Электронная микроскопия 18
 Эффект Ганна 16, 24
 — Келдыша — Франца 18, 356
 — Мандельштама — Бриллюэна 18, 330, 345
 — электрооптический 18, 356

Виктор Леопольдович Бонч-Бруевич

Игорь Петрович Звягин

Александр Григорьевич Миронов

**Домённая электрическая неустойчивость
в полупроводниках**

(Серия: «Физика полупроводников
и полупроводниковых приборов»)

М., 1972 г., 416 стр. с илл.

Редактор *В. Я. Дубнова*

Техн. редактор *А. П. Колесникова*

Корректор *Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 26/XI 1971 г.

Подписано к печати 28/IV 1972 г.

Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 1. Физ. печ. л. 13. Условн.
печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 19,1. Тираж 4600 экз.

Т-09001. Цена книги 1 р. 86 к. Заказ 1350

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Измайловский проспект, 29.