

Н. БОР

ПРОХОЖДЕНИЕ  
АТОМНЫХ ЧАСТИЦ,  
ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

†  
DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB.  
MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER XVIII, 8.

---

THE PENETRATION  
OF ATOMIC PARTICLES  
THROUGH MATTER

*by*  
NIELS BOHR

KØBENHAVN

1948

**Н. БОР**

**ПРОХОЖДЕНИЕ  
АТОМНЫХ ЧАСТИЦ  
ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО**

*Перевод с английского*

**А. Д. ГАЛАНИНА**

*Под редакцией*

**Я. А. СМОРОДИНСКОГО**

**1950**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва**

## ОТ РЕДАКЦИИ

Задача о прохождении заряженных частиц через вещество и связанные с этим потери энергии принадлежит, вместе с вопросом о строении атома, к числу тех проблем, которые были поставлены при самом возникновении современных представлений об атоме и элементарных частицах. Этапы в решении этой задачи совпадали с этапами развития квантовой механики, и теоретические результаты служили весьма важными критериями для проверки справедливости новых теорий.

Трудно переоценить значение теории явлений, связанных с прохождением заряженных частиц через вещество для современной физики. Большая часть методов исследования атомных ядер и интерпретация большинства измерений с ядерными частицами в космических лучах тем или иным путем основывается на выводах этой теории. В то же время в современной физической литературе отсутствует такое изложение этого круга явлений, в котором бы было ясно очерчены различные методы исследования и пределы их применимости; в частности отсутствует ясное изложение условий применимости классической механики к рассмотрению столкновений атомных частиц. Естественно поэтому, что предлагаемая монография, написанная Нильсом Бором, сформулировавшим исходные понятия теории столкновений заряженных частиц с атомами, может представлять интерес для советских физиков.

В рассматриваемом круге вопросов автор оставляет в стороне все задачи, связанные с излучением<sup>1)</sup>, и ограничивается лишь подробным изложением задач, в которых не участвуют световые кванты. Круг изучаемых задач в конечном счете сводится к теории связи, существующей между энергией частиц и пробегом этих частиц в веществе.

Свое изложение автор начинает с обзора законов рассеяния частиц в кулоновом поле и роли экранирования в этих процессах. Далее он подробно рассматривает относительную роль, которую играет в процессах рассеяния взаимодействие с ядрами вещества и с его электронными оболочками.

---

<sup>1)</sup> Теории явлений, связанных с излучением, посвящены книги Гайтлера (Квантовая теория излучения, М., 1936), Беленького (Лавинные процессы в космических лучах, М.—Л., 1948).

После этого, в четвертой главе, автор излагает задачу о перезарядке частиц при ее прохождении через вещество. Это явление, которое раньше могло быть наблюдаемо только для  $\alpha$ -частиц, после открытия деления тяжелых ядер оказалось весьма существенным, так как оно играет важную роль в торможении тяжелых осколков. С этим же самым явлением физики столкнулись и при регистрации тяжелых ядер, входящих в состав первичной компоненты космических лучей, с помощью толстослойных фотографических пластинок (впервые такой метод был применен советскими физиками Ждановым и Мысовским).

В этой связи необходимо отметить, что первая задача в этой области—задача об определении начального заряда осколка (впервые измеренного Перфиловым<sup>1)</sup>)—была решена Мигдалом<sup>2)</sup> за год до появления работы Бора. Метод рассмотрения задачи, предложенный Мигдалом, в общих чертах отвечает методу, использованному Бором, и исходит из того, что сильно связанные электроны возмущаются во время процесса деления лишь адиабатически, а потому увлекаются осколком. Оценивая предел адиабатичности, Мигдал получает в качестве оценки для заряда осколка неравенство:  $16 < Z < 7$ . Дальнейшее развитие работа Мигдала получила в статье Лэмба, на которую ссылается Бор.

Явление перезарядки до сих пор не излагалось в монографиях, и эта глава представляет наибольший интерес.

Менее интересно изложен вопрос о флуктуациях ионизационных потерь. Здесь при работе над монографией Бору осталась неизвестной (о чем он сам сообщает в примечании на стр. 41) работа Ландау<sup>3)</sup>, который нашел решение кинетического уравнения, определяющего поведение заряженной частицы в веществе.

В своей монографии Бор оставляет практически без рассмотрения влияние поляризации вещества на торможение в нем заряженных частиц (эффект Ферми).

Так как этот эффект также весьма важен и, кроме того, органически связан с вопросами, рассмотренными Бором, то было сочтено целесообразным дать в приложении перевод вышедшего одновременно обзора сына Бора—Огэ Бора.

В отношении этой статьи надо заметить, что автор, увлекшись микроскопическим описанием явлений, совершенно оставляет в стороне более прямой вывод формулы для торможения с помощью решения уравнений Максвелла. Этот последний метод был использован Таммом<sup>4)</sup> при выводе формулы для интенсивности

<sup>1)</sup> Перфилов Н. А., ДАН СССР 28, 426 (1940).

<sup>2)</sup> Мигдал А., ЖЭТФ 10, 1964 (1939).

<sup>3)</sup> Ландау Л., Journ. of Phys. 8, 201 (1944). См. изложение результатов в сборнике «Мезон», М.—Л., 1947, стр. 119.

<sup>4)</sup> Тамм И., Journ. of Phys. 1, 439 (1939).

излучения Черенкова и может быть сравнительно легко распространен на вывод формулы для торможения.

Следует заметить, что ряд новых работ не освещен в монографии Н. Бора. Обзор этих работ можно найти в статье Кунина<sup>1)</sup>.

Как известно, в толковании основ квантовой механики Н. Бор стоит на идеалистических позициях. В настоящей монографии Бор позволил себе небольшое отступление, в котором дает идеалистическую трактовку соотношений неопределенностей.

Редакция не находит нужным помещать в русском переводе подобные рассуждения, поскольку они лишь отражают чуждые нам философские взгляды автора и к тому же не имеют ничего общего с конкретным содержанием книги, представляющим интерес для советского читателя.

---

<sup>1)</sup> Сборник «Мезон», М.—Л., 1947, стр. 114.

## ВВЕДЕНИЕ

Явления рассеяния и торможения быстрых атомных частиц при их прохождении через вещество, так же как происходящие при этом ионизация и излучение, были, как хорошо известно, одним из главных источников, откуда мы получали сведения о строении атомов. Начиная с первых опытов Томсона и Резерфорда, анализ явлений, связанных с прохождением быстрых частиц через вещество, непрерывно совершенствуясь, неоднократно давал возможность проверки постепенно уточняющихся методов атомной механики. Все эти вопросы были предметом многочисленных дискуссий группы физиков, работающих в Институте теоретической физики в Копенгагене, среди которых нужно упомянуть прежде всего Вильямса, преждевременная смерть которого явилась большой утратой. Уже около десяти лет назад Вильямсом и автором этих строк был составлен план общего рассмотрения проблемы, но в связи с военными событиями эти планы не были осуществлены.

В последние годы интерес к этим вопросам снова возрос в связи с открытием, что тяжелые ядра в так называемом процессе деления могут распадаться на два осколка сравнимой массы и заряда, разлетающихся с энергией порядка 100 MeV. Это явление дало возможность изучать прохождение через вещество частиц с массой и зарядом во много раз большими, чем у частиц, которые могли быть использованы ранее в подобных исследованиях. Благодаря этим свойствам осколков деления некоторые черты, несущественные для поведения легких частиц, имеют здесь определяющее значение для всего явления. Ряд экспериментальных и теоретических исследований, связанных с этой проблемой, был опубликован, и еще в 1942 г. автором (как это сообщалось ранее) было подготовлено более подробное рассмотрение задачи. Задержка с опубликованием, вызванная войной, дала возможность учесть важные результаты более поздних исследований в этой области.

Следуя первоначальному плану, предмет излагается с общей точки зрения, причем обращено внимание на те стороны явления, которые иллюстрируют общие принципы, особенно в отношении пределов применимости используемых методов. Поэтому многие математические детали, тщательно исследовавшиеся другими авторами, только бегло упоминаются; подробности, имеющие

менее прямое отношение к основному предмету, набраны мелким шрифтом. В некоторых местах дано только качественное решение задачи, которое, безусловно, требует дальнейшего уточнения. Относительно многих проблем читатель может получить более подробные сведения в работе Бете и Ливингстона [1], а также в выходящей монографии Платцмана, который любезно ознакомил меня со своей работой.

---



РАССЕЯНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
В АТОМНЫХ ПОЛЯХ

## 1. Кулоново взаимодействие в классической механике

При рассмотрении взаимодействия атомных частиц с веществом большое значение имеет задача о столкновении двух заряженных частиц. Хотя более подробное изучение показывает, что многие явления при прохождении частиц через вещество существенно зависят также от сил, действующих между частицами атома, и даже от взаимодействия между соседними атомами вещества, мы все же сначала более подробно рассмотрим простое кулоново взаимодействие. В настоящем разделе мы напомним хорошо известное решение задачи классическими методами и, не считая указаний в некоторых местах на те изменения, которые вносит теория относительности, будем вообще предполагать, что относительные скорости частиц малы по сравнению со скоростью света. В следующих разделах мы привлечем к этой задаче квантовую механику и специально рассмотрим предел применимости представления о движениях сталкивающихся частиц по траекториям.

В обычной механике задача о столкновении двух частиц, притягивающихся или отталкивающихся с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, имеет особенно простое решение. Как хорошо известно, в системе отсчета, где центр инерции покоится, частицы будут двигаться по гиперболическим траекториям с фокусом в центре инерции. Вводя относительные координаты, мы упрощаем задачу и сводим ее к задаче о движении одной частицы с так называемой приведенной массой

$$m_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.1)$$

в центральном поле сил с потенциалом

$$P(r) = \frac{e_1 e_2}{r}. \quad (1.2)$$

В этих выражениях  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  обозначают массы и заряды сталкивающихся частиц, а  $r$  — их взаимное расстояние.

Относительная траектория не отличается, с точностью до масштаба, от траектории движения частицы около центра инерции. Обозначая угол между асимптотами гиперболы через  $\vartheta$  (угол относительного отклонения), путем непосредственных вычислений

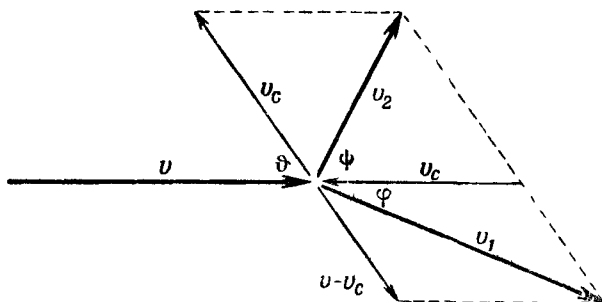
(см., например, Томсон [2] <sup>1</sup>) получим

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{b}{2p}, \quad \text{и } \vartheta \text{ ' } \vartheta \text{ ' } \quad (1.3)$$

где  $p$ —«прицельный параметр», определяемый как расстояние, на котором частицы прошли бы одна от другой, если бы между ними не было сил взаимодействия, а

$$b = \frac{2|e_1 e_2|}{m_0 v^2} \quad (1.4)$$

представляет собой длину, зависящую от относительной скорости  $v$  и равную (в случае отталкивающихся частиц) минимальному расстоянию между частицами при лобовом ударе. Как при притягивающих, так и при отталкивающих силах углу  $\vartheta \geq \pi/2$  соответствует  $p \leq b/2$ , и поперечник сечения для рассеяния назад в системе центра инерции будет, следовательно, равен  $\pi/4 b^2$ . По этой причине величину  $b$  мы будем в дальнейшем называть «диаметром соударения».



Фиг. 1.

Действительные скорости частиц получаются из скоростей в системе центра инерции простым прибавлением постоянной скорости центра инерции  $v_c$ . Обычно скорость падающей частицы (которую мы будем называть частицей <sup>1</sup>) много больше, чем тепловые скорости атомов вещества, и поэтому частицу, с которой первая соударяется (частица 2), можно во многих случаях рассматривать как находящуюся в покое. Следовательно,

$$v_c = v \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (1.5)$$

Для этого случая фиг. 1 иллюстрирует определение скоростей частиц после столкновения  $v_1$  и  $v_2$  при угле относительного отклонения  $\vartheta$ .

<sup>1</sup>) См также Ландау и Пятагорский, Механика, М—Л, 1940, § 22. (Прим. ред.)

В приложениях мы обычно интересуемся углами отклонения частиц  $\varphi$  и  $\psi$  и энергией, переданной при столкновении.

Из рисунка, принимая во внимание (1.5), легко получить, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(v - v_c) \sin \vartheta}{v_c + (v - v_c) \cos \vartheta} = \frac{m_2 \sin \vartheta}{m_1 + m_2 \cos \vartheta}; \quad (1.6)$$

а для  $\psi$  просто получаем

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}. \quad (1.7)$$

Если  $\vartheta$  изменяется от 0 до  $\pi$ , то угол  $\psi$  будет уменьшаться от  $\pi/2$  до 0. Но соотношение между  $\varphi$  и  $\vartheta$  зависит от отношения масс: если  $m_1 < m_2$ , то угол  $\varphi$  будет увеличиваться вместе с  $\vartheta$  от 0 до  $\pi$ ; если  $m_1 > m_2$ , то максимальное значение  $\varphi$  меньше, чем  $\pi/2$ . В специальном случае, когда массы равны друг другу, мы получаем просто  $\varphi = \frac{\vartheta}{2}$ .

Далее, поскольку  $v_2 = 2v_c \sin(\vartheta/2)$ , для энергии  $T$ , переданной частице 2 во время столкновения, из (1.5) получаем

$$T = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = T_m \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (1.8)$$

Здесь  $T_m$  — максимально возможная передача энергии

$$T_m = \frac{2m_0^2}{m_2} v^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E \quad (1.9)$$

[ $m_0$  определяется по (1.1);  $E$  — кинетическая энергия падающей частицы,  $E = \frac{1}{2} m_1 v^2$ ]. В случае, когда  $m_1 = m_2$ , конечно, имеем  $T_m = E$ , в то время как  $T_m \ll E$ , если  $m_1$  много больше или много меньше, чем  $m_2$ . Исключая  $\vartheta$  посредством (1.3) и используя (1.4), находим:

$$T = \frac{2e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2} \frac{1}{p^2 + \frac{b^2}{4}}. \quad (1.10)$$

При далеких столкновениях, когда  $p \gg b$  и, следовательно, в согласии с (1.3), угол относительного отклонения мал и приблизительно равен  $b/p$ , задача столкновения двух тел становится особенно простой. В частности, как это видно из (1.7), покоившаяся частица практически будет двигаться в направлении, перпендикулярном к движению первой частицы. Этот результат также немедленно следует из рассмотрения силы, действующей на частицу 2 при столь далеких столкновениях, когда движение первой частицы может приближенно считаться невозмущенным. Хотя смещение второй частицы в направлении, параллельном движению первой, и бесконечно, при чистом столкновении двух

тел оно, по соображениям симметрии, не играет роли для передачи энергии и импульса.

Полный переданный импульс  $M$  при далеком столкновении, если пренебречь смещением второй частицы во время столкновения, равен <sup>1)</sup>

$$M \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e_1 e_2| p}{(p^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{2|e_1 e_2|}{pv}, \quad (1.11)$$

откуда следует

$$T = \frac{M^2}{2m_2} \approx \frac{2e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2} \frac{1}{p^2}, \quad (1.12)$$

в соответствии с формулой (1.10) для  $p \gg b$  или  $T \ll T_m$ .

Смещение  $q$  покоившейся частицы в направлении, перпендикулярном к пути падающей частицы по порядку величины, может быть определено из величины передаваемого импульса и эффективной продолжительности столкновения. Поскольку взаимодействие частиц в основном происходит в течение времени около  $2p/v$ , для смещения из (1.4) и (1.11) находим

$$q \sim \frac{M}{m_1} \frac{2p}{v} \approx \frac{2|e_1 e_2|}{m_2 v^2} = b \frac{m_0}{m_2}, \quad (1.13)$$

т. е. при далеких столкновениях  $q$  мало по сравнению с  $p$  и в первом приближении не зависит от прицельного параметра.

В то же время это смещение вызывает небольшое изменение силы, действующей на частицу 1 со стороны частицы 2, которое является причиной потери энергии падающей частицы во время столкновения. В самом деле, изменение компоненты силы, направленной против движения частицы, приблизительно равно  $\frac{e_1 e_2}{p^3} q$ , и, действуя на расстоянии порядка  $p$ , оно вызывает потерю энергии в соответствии с (1.12). В следующих главах мы применим эти простые соображения.

В релятивистской теории строгое рассмотрение столкновения между двумя заряженными частицами представляет весьма сложную задачу. В частном случае, когда одна из частиц много тяжелее другой, задача была рассмотрена при пренебрежении радиационными силами Дарвином [3], который показал, что для прицельных параметров, меньших некоторой критической величины, равной приблизительно  $b$  для скоростей порядка половины скорости света, столкновение между зарядами противоположного знака всегда приводит к слиянию зарядов. Не считая таких сторон проблемы, которые существенно изменяются в квантовой теории, необходимо, конечно, принять во внимание, что соотношение между переданными энергией и импульсом и углом отклонения в релятивистской механике

<sup>1)</sup> Обозначение  $\approx$  будет употребляться, когда две величины асимптотически равны, если же они равны по порядку величины, будет употребляться символ  $\sim$ .

может существенно отличаться от данных выше. Обзор подобных соотношений, применяемых при изучении треков частиц больших скоростей, дан недавно Блатоном [4].

При далеких столкновениях, когда скорость второй частицы остается малой по сравнению со скоростью света, можно легко показать, что асимптотические выражения (1.11) и (1.12) для  $T$  и  $M$  справедливы также и в релятивистском случае. В самом деле, поле падающей частицы сокращается в направлении движения в отношении  $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , и, если рассматривать передачу импульса, сокращение продолжительности столкновения полностью компенсируется соответствующим увеличением силы взаимодействия во время соударения. С другой стороны, смещение  $q$  покоящейся частицы может быть существенно меньше, чем данное в (1.13). Анализ баланса энергии в этом случае несколько более сложен, так как нужно принять во внимание реакцию излучения (см. Приложение).

## 2. Статистика столкновений. Закон рассеяния Резерфорда

В классической механике дифференциальное поперечное сечение  $d\sigma$  для столкновений с прицельным параметром между  $p$  и  $p + dp$  равно  $2\pi p dp$ . Вводя посредством (1.3) угол отклонения в относительном движении, мы получим

$$d\sigma = \frac{\pi b^2}{4} \cos \frac{\vartheta}{2} \operatorname{cosec}^3 \frac{\vartheta}{2} d\vartheta. \quad (1.14)$$

Так как соответствующий телесный угол равен  $d\omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ , то из (1.4) следует

$$d\sigma = R(\vartheta) d\omega = \left( \frac{e_1 e_2}{2m_0 v^2} \right)^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\vartheta}{2} d\omega, \quad (1.15)$$

выражение, хорошо известное в связи с классическими исследованиями Резерфорда [5] по рассеянию  $\alpha$ -частиц.

Формула (1.14) может быть непосредственно применена к рассеянию  $\alpha$ -частиц тяжелыми ядрами, когда угол  $\vartheta$  приблизительно равен действительному углу отклонения  $\varphi$ . Однако если рассматриваются частицы сравнимых масс, то необходимо для сравнения с опытом ввести угол  $\varphi$ , согласно (1.6), что делает закон рассеяния несколько более сложным (Дарвин [6]). При далеких столкновениях, когда угол  $\vartheta$  мал, (1.14) сводится к простому выражению

$$d\sigma \approx 2\pi \left( \frac{2e_1 e_2}{m_0 v^2} \right)^2 \frac{d\vartheta}{\vartheta^3}, \quad (1.16)$$

и так как по (1.6)  $\varphi \approx \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vartheta$ , то, принимая во внимание (1.1), получим

$$d\sigma \approx 2\pi \left( \frac{2e_1 e_2}{m_1 v^2} \right)^2 \frac{d\varphi}{\varphi^3}. \quad (1.17)$$

Для скоростей, приближающихся к скорости света, формула (1.15) требует изменений, особенно для больших углов. Однако с помощью аргумента-

ции, подобной использованной в разделе 1, можно убедиться, что при далеких столкновениях релятивистская поправка состоит только в замене в (1.17) покоящейся массы  $m_1$  на эффективную массу  $m_1 \gamma$ .

Хотя в квантовой механике само понятие о траектории частицы и, в частности, прицельного параметра имеют ограниченное применение, несмотря на это, представление о поперечном сечении может быть весьма удобным. Если поперечное сечение нельзя представить себе просто как площадь мишени, то оно может быть определено совершенно эквивалентно как число тех столкновений в единицу времени, которые приводят к интересующему нас результату, деленному на плотность потока в пучке падающих частиц. В общем случае, конечно, поперечное сечение, вычисленное на основе квантовой механики, может существенно отличаться от результата, полученного в механике классической, но в специальном случае рассеяния в кулоновом поле хорошо известно, что, отвлекаясь от релятивистских поправок, формула (1.15) остается справедливой и дает статистическое распределение относительных углов отклонения (Гордон [7]).

Необходимо отметить, что в квантовой механике мы встречаемся со специфическими особенностями при рассмотрении столкновений между одинаковыми частицами, при которых имеют место особые явления обмена, связанные с невозможностью различить индивидуальные частицы во время их взаимодействия. Как показано Моттом [8], закон Резерфорда в этом случае должен быть заменен формулой:

$$d\sigma = \left( \frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \left\{ \operatorname{cosec}^4 \frac{\vartheta}{2} + \sec^4 \frac{\vartheta}{2} + \left[ \begin{array}{c} +2 \\ -1 \end{array} \right] \operatorname{cosec}^2 \frac{\vartheta}{2} \sec^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \left( \frac{2e^2}{\hbar v} \operatorname{Intg} \frac{\vartheta}{2} \right) \right\} d\omega, \quad (1.18)$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса частиц,  $\hbar$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ . Верхний и нижний множители в квадратных скобках относятся к частицам со спином 0 или  $1/2$ , подчиняющимся, соответственно, статистике Бозе-Эйнштейна или Ферми-Дирака. В то время как первые два члена (1.18), в согласии с законом Резерфорда, соответствуют вероятности того, что какая-либо частица будет рассеяна в телесный угол  $d\omega$ , третий член представляет обменный эффект, являющийся чисто квантовым явлением.

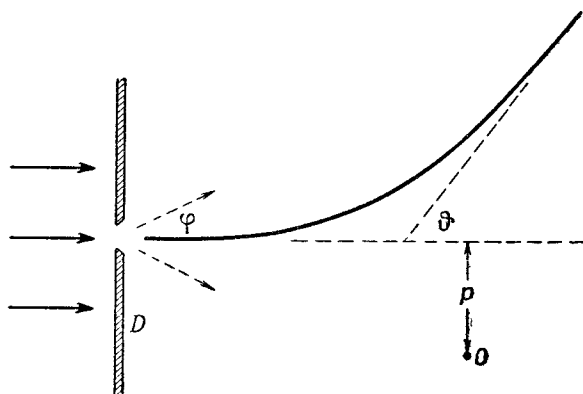
Если не принимать во внимание уточнения, вносимого теорией относительности, и обменный эффект, то благодаря тому обстоятельству, что квантовомеханическое рассмотрение задачи о столкновении двух частиц дает тот же результат, как и классическое, некоторые результаты теории прохождения частиц через вещество, полученные методом классической механики, остаются в силе далеко за пределами применимости понятия траектории. Однако существенные особенности теории рассеяния и торможения частиц связаны с тем фактом, что вещество, через которое проходит частица, состоит не из свободных частиц, а из атомов, содержащих электроны, связанные с ядрами.

Взаимодействие между частицей и веществом не может поэтому быть сведено только к простому соударению двух тел. Это связано не только с частичной компенсацией силы, действующей на падающую частицу, но, кроме того, с тем, что силы атомных связей могут влиять на весь характер столкновения. Во многих задачах поэтому необходимо принимать во внимание экранирующие эффекты статического или динамического характера, влияние которых может быть существенно различным в классической или квантовой теории.

В следующих разделах этой главы мы попытаемся достаточно полно рассмотреть различные стороны проблемы экранирования. Эти вопросы явились предметом дискуссий (Блох [9], Вильямс [10] и особенно [11]).

### 3. Критерий применимости классической механики при кулоновом рассеянии

Для того чтобы сделать изложение насколько возможно более ясным, мы начнем с рассмотрения условий неприменимости классической механики в простейшем случае рассеяния заряженной



Фиг. 2.

частицы в кулоновом поле. Пусть на фиг. 2 точка  $O$  является центром сил, а сплошная кривая представляет гиперболу, по которой, согласно классической механике, должна двигаться частица с прицельным параметром  $p$ . Буквой  $D$  обозначена неподвижная диафрагма с отверстием, обеспечивающим определенную локализацию пути частицы.

Как хорошо известно, наличие такой диафрагмы вызывает, согласно квантовой механике, дифракцию, что обозначено на фигуре пунктирными стрелками. Все дело теперь в том, будет ли

эта диффракция мала по сравнению с отклонением частицы в поле сил или она будет велика и совершенно исказит отклонение орбиты. В первом случае возможно сконструировать волновой пакет, который с большой точностью будет следовать по классической орбите, во втором — мы будем иметь дело с настоящим квантовым эффектом, анализ которого в терминах обычной механики невозможен.

Для круглого отверстия диаметра  $d$  угол диффракции по порядку величины будет равен

$$\delta\varphi \approx \frac{\lambda}{d}, \quad (1.19)$$

где

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} \quad (1.20)$$

есть длина волны де-Бройля, деленная на  $2\pi$ . Для отверстия с резкими краями задача диффракции несколько усложняется, но если мы предположим, что края отверстия полупроницаемы для пучка частиц, так что интенсивность пучка, на различных расстояниях от центра отверстия, дается гауссовым законом ошибок с средним квадратичным отклонением  $\frac{d}{2}$ , то получим (Мотт и Месси [12]) для не слишком больших углов диффракции угловое распределение, тоже гауссово, со средним отклонением (1.19).

Так как для малых углов отклонения, согласно (1.3), имеем

$$\vartheta \approx \frac{b}{p}, \quad (1.21)$$

то из (1.19) видим, что если  $b \gg \lambda$ , то возможно для каждого значения прицельного параметра  $p$  выбрать величину  $d$  малой по сравнению с  $p$ , но в то же время ограничивающую диффракцию углами, меньшими, чем  $\vartheta$ . В таких условиях мы можем, по крайней мере с известной степенью точности, представлять себе орбиту с определенным прицельным параметром. Конечно, длина волны должна быть мала по сравнению с диаметром соударения, для того чтобы можно было применять классическую механику для рассмотрения больших углов отклонения, соответствующих малым прицельным параметрам. Однако интерес приведенного выше рассуждения состоит в доказательстве того, что для кулонового поля это условие достаточно для приближенной справедливости классических вычислений также и для малых углов, соответствующих большим прицельным параметрам, которые имеют больший статистический вес и поэтому имеют решающее значение во многих явлениях.

Что касается точности, которую можно получить, применяя классическую механику, то нужно принять во внимание, что



конечные размеры отверстия в диафрагме вызывают определенную неточность в определении прицельного параметра, поэтому угол отклонения (1.3) будет размазан около среднего значения на величину  $\delta\vartheta$ . Дифференцируя (1.21) и полагая  $\delta p = \frac{d}{2}$ , получим

$$\delta\vartheta = \frac{b}{p^2} \frac{d}{2} = \frac{d}{2b} \vartheta^2. \quad (1.22)$$

В качестве меры неточности  $\Delta\vartheta$  отклонения частицы в результате влияния диафрагмы и поля мы можем взять выражение

$$\Delta\vartheta = \sqrt{(\delta\varphi)^2 + (\delta v)^2}, \quad (1.23)$$

и, следовательно, используя (1.19) и (1.22), получим критерий для степени точности классического описания явления:

$$\Delta\vartheta \geq \sqrt{\frac{\hbar}{b}} \vartheta. \quad (1.24)$$

Вводя обозначение

$$\kappa = \frac{b}{\hbar} \quad (1.25)$$

или, согласно (1.4) и (1.20),

$$\kappa = \frac{[2|e_1 e_2|]}{\hbar v}, \quad (1.26)$$

получим неравенство

$$\kappa \gg 1 \quad (1.27)$$

как необходимое и достаточное условие для справедливости классического рассмотрения, приводящего к формуле Резерфорда (1.15). По мере уменьшения  $\kappa$  представление о движении по орбите постепенно теряет свою применимость и для значения  $\kappa$  порядка единицы или меньше не имеет никакого физического смысла.

Примером, иллюстрирующим непригодность представления об орбите, может служить типично квантовомеханический эффект обмена при столкновении одинаковых частиц, когда, согласно формуле (1.18), как раз для  $\kappa \lesssim 1$ , рассеяние в широкой области углов может быть, смотря по статистике частиц, существенно больше или меньше, чем должно быть по обычной механике. Кажущийся парадокс, что даже при  $\kappa \gg 1$  дифференциальное поперечное сечение не совпадает с формулой Резерфорда, а быстро осциллирует [согласно (1.18)] при изменении  $\vartheta$  около классического значения, находит свое разрешение в том, что любая попытка разделить посредством подходящих диафрагм орбиты сталкивающихся частиц и исключить, таким образом явление обмена вызовет диффракцию, которая помешает наблюдению квантовомеханических особенностей в законе рассеяния (ср. Мотт [8]). В самом деле, неопределенность в угле отклонения (1.24) при  $\kappa \gg 1$  превышает интервал углов, внутри которого осциллирует величина поперечного сечения (1.18).

Подобные обстоятельства имеют место в явлениях, обусловленных такими квантовомеханическими свойствами частиц, как спин и магнитный

момент, которые не могут быть интерпретированы в классических терминах и которые приобретают особое значение, когда скорость частицы приближается к скорости света. Интересно, что критерий (1.27) применим также в релятивистской теории. В самом деле, единственное изменение в приведенных выше рассуждениях состоит в замене покоящейся массы на  $m_0\gamma$ , что не влияет на результат, так как, согласно (1.26), величина  $\kappa$  не зависит от массы. Нужно, однако, отметить, что условие  $\kappa \gg 1$  при  $v \sim c$  может выполняться, только если заряды  $e_1, e_2$  много больше, чем элементарный электрический заряд.

В последующем рассмотрении прохождения частицы через вещество особенно важно то, что в случае невыполнения условия (1.27) невозможно посредством классической картины вывести какое-нибудь заключение о поправках к закону рассеяния Резерфорда, обусловленных отклонением действительного поля от чисто кулонового вследствие экранирования.

#### 4. Влияние экранирования на закон Резерфорда

Для того чтобы рассмотреть характерные особенности, вызванные экранированием рассеивающего поля, мы выберем для потенциальной энергии падающей частицы следующее простое выражение:

$$P_a(r) = \frac{e_1 e_2}{r} e^{-r/a}, \quad (1.28)$$

где  $r$  — расстояние частицы от центра,  $a$  — постоянная длина, которую мы будем называть параметром экранирования. Потенциал такого типа оказывается достаточным для большинства представляющих для нас интерес задач, связанных с экранированием, в частности выражение (1.28) с большой степенью точности воспроизводит электростатическое поле внутри атома. Действительное значение  $a$  для различных случаев будет рассмотрено в следующей главе, когда общие соображения будут применяться к конкретным вопросам.

Как мы увидим, характер задачи существенно зависит от отношения  $a$  и диаметра соударения  $b$  неэкранированного поля, определенного по (1.4), и поэтому удобно ввести обозначение

$$\zeta = \frac{b}{a}. \quad (1.29)$$

Во многих задачах  $\zeta \ll 1$ , и в этом случае, который мы и будем рассматривать в настоящем разделе, закон Резерфорда, вообще говоря, будет справедлив в широком интервале углов.

Если условие (1.27) выполнено и классическая механика применима к столкновению в неэкранированном кулоновом поле, то предел для применимости резерфордового рассеяния может быть легко установлен. В самом деле, если прицельный параметр мал по сравнению с  $a$ , отклонение будет происходить прак-

тически только в неэкранированной части поля, и, следовательно, с большой степенью точности будет даваться формулой (1.3). Мы должны ожидать, что закон рассеяния (1.15) будет приближенно справедлив для углов, больших чем  $\vartheta'_a$ , причем  $\vartheta'_a$  получается из (1.3) при  $p = a$ . Так как при  $\zeta \ll 1$  этот угол мал, мы имеем просто

$$\vartheta'_a \approx \zeta. \quad (1.30)$$

Для больших значений  $p$  угол отклонения  $\vartheta$  из-за экранирования поля будет уменьшаться быстрее, чем требуется по (1.3.) Как следует из соображений, подобных развитым в разделе 3, это последнее обстоятельство может нарушить законность применения классической механики при  $\vartheta \ll \vartheta'_a$ , но если (1.27) выполнено, то указанный предел не будет, очевидно, достигаться раньше, чем число рассеянных частиц резко уменьшится по сравнению с (1.15). Для многих целей поэтому мы можем просто пренебречь рассеянием на углы, меньшие, чем  $\vartheta'_a$ , и считать этот угол за эффективную нижнюю границу области, где справедлив закон Резерфорда.

Как уже упоминалось, для скоростей, близких к скорости света, закон рассеяния необходимо изменить, особенно если рассматривать близкие столкновения, но интересно отметить, что если  $\vartheta'_a$  мало, то соотношение (1.30) сохраняется, причем нужно в (1.4)  $m_0$  заменить на  $m_0\gamma$ , благодаря чему, согласно (1.29), величины  $\zeta$  уменьшаются в  $\gamma$  раз.

Если (1.27) не выполнено, учет влияния экранирования представляет собой типично квантовомеханическую задачу, полное рассмотрение которой требует решения соответствующего волнового уравнения. Для целей настоящего исследования нет необходимости рассматривать точное решение; как увидим, мы можем ограничиться приближенным методом Борна. Действительно, если мы будем интересоваться только слабым рассеянием, когда плоская волна, представляющая состояние движения падающей частицы, проходит почти невозмущенной через поле сил, то диффракция может быть описана обычным путем, как суперпозиция отдельных волн, возникающих во всех элементах пространства около центра сил. Правда, подобная процедура не сходится в неограниченном кулоновом поле, но этой трудности не существует как раз для задачи с экранированным полем, которой мы и интересуемся.

Для поля (1.28) получается (ср. Мотт [13]) следующее выражение для амплитуды рассеяния под углом  $\vartheta$  на большом расстоянии  $\rho$  от центра сил:

$$A_s(\vartheta) = \frac{A_1}{\rho} \frac{e_1 e_2}{2m_0 v^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}, \quad (1.34)$$

где  $A_i$ —амплитуда, а  $\lambda$ —длина волны, деленная на  $2\pi$  падающей плоской волны. Для дифференциального поперечника рассеяния получим

$$d\sigma = R(\vartheta) \left[ 1 + \left( \frac{\lambda}{2a \sin \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 \right]^{-2} d\omega, \quad (1.32)$$

где  $R(\vartheta)$  определено формулой Резерфорда (1.15).

Как уже указывалось, приближенные вычисления, приведшие к формуле (1.32), справедливы только тогда, когда рассеяние столь мало, что падающая волна проходит через силовое поле почти без возмущений. Для того чтобы выяснить, как это условие зависит от заряда и скорости падающей частицы, мы рассмотрим полное сечение

$$\sigma = \pi a^2 \frac{x^2}{1 + \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}, \quad (1.33)$$

полученное интегрированием (1.32) по всем углам, причем  $x$  определено формулой (1.25). Формула (1.33) показывает, что при

$$x \ll 1 \quad (1.34)$$

поперечное сечение для всех значений  $a$  мало по сравнению с  $\pi a^2$ , т. е. с числом частиц, которые входят в единицу времени в незранированную часть поля. Если (1.34) выполнено, то только малая часть этих частиц отклонится. Таким образом, в этом случае метод, приводящий к (1.32), оказывается справедливым.

Что касается соотношения между формулой (1.32) и простым резерфордовым рассеянием, то сразу видно, что только в случае, когда  $a$  велико по сравнению с  $\lambda$ , существует такая область углов, при которых  $d\sigma$  совпадает с формулой Резерфорда.

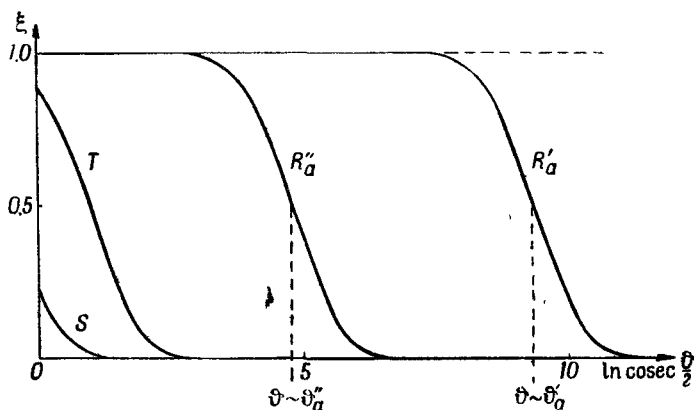
Если же  $a \ll \lambda$ , то мы имеем симметричное рассеяние по всем направлениям, что следует также и непосредственно из простых соображений. Далее, если  $a \gg \lambda$ , то эффективный предел для области резерфордового рассеяния будет

$$\vartheta_a^* \approx \frac{\lambda}{a} = \zeta x^{-1}. \quad (1.35)$$

Интересно отметить, что оценки (1.30) и (1.35) дают одинаковый результат для  $x \sim 1$ , когда, строго говоря, несправедлива ни картина орбит классической механики, ни приближенный метод Борна. Ввиду такого совпадения эти два взаимно исключаящих метода при  $\zeta \ll 1$  практически исчерпывают все возможные случаи.

На фиг. 3 сравнивается действительное угловое распределение рассеяния с формулой Резерфорда при постоянном малом значе-

нии  $\zeta$  и различных  $x$ . На этой фигуре отношение дифференциального поперечника рассеяния в экранированном и неэкранированном поле  $\xi$  дано как функция  $\ln \operatorname{cosec} \frac{\vartheta}{2}$ . Кривая  $R'$  соответствует случаю  $x \gg 1$ , когда  $\xi$  практически равно единице вплоть до области углов  $\vartheta = \vartheta'_a$ , где  $\xi$  резко падает до исчезающе малой величины. Случай  $x \ll 1$  представлен кривыми  $R''_a$ ,  $T$  и  $S$ . Кривая  $R''_a$  также имеет область, где  $\xi$  близко к единице, и крутой спад в области углов  $\vartheta = \vartheta''_a$ . Согласно (1.35) (и 1.36), область спада  $R''_a$  смещена относительно области спада  $R'_a$  на величину  $\ln x$ . Крутизна



Фиг. 3.

наклона кривой на фигуре соответствует  $\zeta \sim 10^{-4}$ , значение  $x$  для кривой  $R''_a$  выбрано около  $\sqrt{\zeta}$ . Кривая  $T$ , которая соответствует случаю  $x \sim \zeta$  или  $a \sim \lambda$ , представляет переходный случай, когда рассеяние при всех углах начинает существенно отличаться от закона Резерфорда. Наконец, кривая  $S$  соответствует сферически симметричному рассеянию, которое имеет место, когда  $x$  еще меньше, и, следовательно,  $a \ll \lambda$ .

Необходимо особо подчеркнуть, что результаты, представленные на фиг. 3, не могут быть интерпретированы даже отдаленной ссылкой на картину классических траекторий. Так, любая попытка приписать разницу между  $R'_a$  и  $R''_a$  очевидной несостоятельности этой картины по отношению к столкновениям с параметрами удара, меньшим, чем  $\lambda$ , совершенно неправильна. В самом деле, этот аргумент приводил бы к различию между двумя распределениями при больших углах рассеяния, в то время как в действительности расхождение имеется только при малых углах. При  $x \ll 1$  закон рассеяния фактически определяется всеми участками поля, что совершенно чуждо классической механике. В частности, инте-

ресно отметить, что центральная область поля размером порядка  $b$ , которая в классической механике ответственна за всю область рассеяния на большие углы, при  $x \ll 1$ , как видно из (1.33), если в этой формуле положить  $a \sim b$ , дает только весьма малую долю резерфордового рассеяния по порядку величины, равную  $x^4$ . Для кулонового потенциала существенный вклад в рассеяние вносят только области поля с размерами, сравнимыми или большими, чем  $\lambda$ .

Интересной иллюстрацией характерных особенностей рассеяния при различных значениях  $x$  является явление обмена, которое появляется при столкновении между одинаковыми частицами. Задача особенно проста для двух частиц со спином нуль, если начальное состояние представлено в системе координат центра инерции двумя скалярными волновыми пакетами одинаковой амплитуды и противоположного направления, фазы которых совпадают в центре поля. При  $x \ll 1$  эти волны будут проходить через поле, практически не возмущаясь, и рассеянные в любом направлении волны от любого волнового пакета будут иметь ту же фазу, что и исходящие из центра. Мы должны, таким образом, ожидать, что полное рассеяние на угол  $\vartheta$  будет даваться квадратом суммы амплитуд, соответствующих отклонению на углы  $\vartheta$  и  $\pi - \vartheta$  одной частицы в неподвижном поле. Этот результат соответствует формуле (1.18) при  $x$ , стремящемся к нулю. В случае  $x \gg 1$  волны не в состоянии проникнуть через поле, но будут, напротив, сильно отклоняться на расстоянии от центра, которое при угле порядка  $\frac{\pi}{2}$  приблизительно равно классическому диаметру соударения  $b$ . При отклонении точно под прямым углом обе отраженные волны будут в фазе, но при отклонении от этого направления на угол  $\varepsilon$  возникает разность фаз порядка  $\varepsilon \frac{b}{\lambda} = \varepsilon x$ , которая вызовет резкие максимумы и минимумы в интенсивности рассеяния соответственно формуле (1.18).

В задаче о рассеянии в неподвижном поле возникают аномалии, связанные с величиной  $x$ , если скорость частицы приближается к скорости света. Как упоминалось в разделе 1, классическое релятивистское рассмотрение приводит к некоторым особенностям, если прицельный параметр равен по порядку величины  $b$ , в то время как при  $x \ll 1$  не наблюдается отклонений от формулы Резерфорда, поскольку, как указывалось выше, центральная часть поля размером меньше, чем  $\lambda$ , не дает существенного вклада в рассеяние. В этом случае, если отвлечься от эффектов, связанных со спином, единственная поправка состоит в замене  $m_0$  на  $m_0 \gamma$ . Согласно (1.26), эта поправка не повлияет на рассуждения, приводящие к (1.34); только в оценке (1.35) величина  $\zeta$  должна быть уменьшена в  $\gamma$  раз.

## 5. Сильное экранирование

В случае  $\zeta \ll 1$ , который соответствует слабому экранированию кулонового поля, мы нашли в предыдущем разделе, что рассеяние в значительной области углов совпадает с резерфордовым. Если  $\zeta$  одного порядка или даже больше единицы, мы должны для всех значений  $x$  ожидать рассеяния с существенно другим угловым распределением, чем для неэкранированного поля. В частности, сильное преобладание малых углов будет менее резко

выражено, и рассеяние будет приближаться к сферически симметричному распределению

$$d\sigma = \frac{\sigma}{4\pi} d\omega, \quad (1.36)$$

где  $\sigma$  — полное сечение.

В проблеме сильного экранирования успешно применяются оба приближенных метода — метод классической механики и упрощенный расчет дифракции волн (метод Борна), но эти методы не исчерпывают с той же полнотой все возможности, как при  $\zeta \ll 1$ . При  $\zeta \geq 1$  мы должны ожидать, что области, где справедливы приближенные рассуждения, разделены областью, где необходимо применять более общие квантовомеханические методы. Особая простота, которой отличается задача в случае слабого экранирования, обусловлена тем, что только в чисто кулоновом поле оба приближенных метода, несовместимые по своей физической интерпретации, приводят к одному результату для закона рассеяния.

Чтобы получить условия применимости классической механики к потенциалу (1.28), нужно поступать аналогично изложенному в разделе 3. Так как в этом случае поле существенно изменяется на расстояниях порядка  $a$ , одного условия  $\lambda \ll b$  уже недостаточно, а нужно еще потребовать  $\lambda \ll a$ . Даже если эти условия выполнены, рассеяние можно рассматривать по классической механике только в ограниченной области углов. Действительно, в противоположность кулонову полю, где при  $x \gg 1$  классическая механика применима ко всем углам, из (1.19) следует, что попытка с помощью диафрагмы выделить прицельный параметр меньше, чем  $a$ , сделает невозможной наблюдать отклонения, меньшие чем

$$\vartheta^* \approx \frac{\lambda}{a} = \frac{\zeta}{x}. \quad (1.37)$$

Однако во многих задачах с сильным экранированием основную роль играют отклонения на большие углы [например, когда применима формула (1.36)]. В этих условиях применение классической механики законно, если  $\vartheta^* \ll 1$  или, по (1.37), если

$$x \gg \zeta. \quad (1.38)$$

Это условие при  $\zeta > 1$  сильнее, чем (1.27).

Хорошо известным примером применимости классической механики в широкой области, где все же нарушение ее методов для малых углов отклонения имеет существенное значение для некоторых целей, является рассеяние от твердого шарика радиуса  $r$ , большого по сравнению с длиной волны  $\lambda$  падающей частицы или излучения. В то время как классическая механика (и геометрическая оптика) приводит в этом случае к равномерному рассеянию по всем углам с полным эффективным сечением  $\pi r^2$ , строгое квантовомеханическое рассмотрение обнаруживает дополни-

тельное рассеяние на углы, сравнимые с  $\lambda/\rho$ . Рассеяние только на малые углы оказывается равным рассеянию, вычисленному без учета диффракции, и полный поперечник рассеяния оказывается равным  $2\pi\rho^2$  (см. Мессии и Мор [14] и Вергеланд [15]).

Происхождение этого «теневого» эффекта можно весьма просто установить, используя рассуждения обычной оптики (см. Друде [16]), согласно которой две дополнительные системы диафрагм дают одинаковую диффракционную картину. Заменяя непрозрачный шарик диафрагмой с круглым отверстием радиуса  $\rho$ , мы убеждаемся, что интенсивности диффракционной картины, образованной теперь волнами, проходящими через отверстие, при  $\lambda \ll \rho$  соответствует поперечное сечение, в точности равное  $\pi\rho^2$ . Можно добавить, что эти простые рассуждения показывают, что удвоение поперечного сечения не зависит от геометрической формы тела.

В том случае, когда  $\lambda > a$  и классическая механика совершенно несправедлива, условие (1.34) не является необходимым условием для применимости метода Борна. В самом деле, из (1.33) следует, что поперечное сечение будет меньше, чем  $\pi a^2$ , если  $x < \frac{\lambda}{2a}$ , или, согласно (1.25) и (1.29), если

$$x \ll \sqrt{\zeta}, \quad (1.39)$$

что в случае сильного экранирования, когда  $\zeta \gg 1$ , существенно слабее, чем (1.34).

В то время как в случае выполнения условия (1.39) дифференциальное поперечное сечение дается общей формулой (1.32), в противоположном случае при выполнении условия (1.38), когда применима классическая механика, удобно бывает сравнивать экранированное поле с потенциалом, обратно пропорциональным  $r^n$ :

$$P_n(r) = \frac{k_n}{r^n}. \quad (1.40)$$

На расстоянии  $r$  от центра потенциал (1.28), как видно из его логарифмической производной, изменяется согласно (1.40), при

$$n = 1 + \frac{r}{a}, \quad k^n = e_1 e_2 a^{n-1} \left( \frac{n-1}{e} \right)^{n-1}. \quad (1.41)$$

В то время как при  $r \ll a$  мы, конечно, получаем с большой точностью кулоново поле, на больших расстояниях сказывается влияние экранирования, так что поле соответствует (1.40) с возрастающим  $n$  по мере увеличения  $r$ .

В некоторых приложениях основную роль для рассеяния играет область поля около точки  $r = a$ , где, согласно (1.41), эффективное значение  $n = 2$ . Для такого поля обычная теория движения в центральном поле (ср. Томсон [2]<sup>1)</sup>) дает следующее

<sup>1)</sup> См. также Ландау и Пятагорский, Механика, М.—Л, 1940. (Прим. ред.)



выражение для угла отклонения  $\vartheta$  при прицельном параметре  $p$ :

$$\vartheta = \pi \left| \left( 1 + \frac{2k_2}{m_0 v^2 p^2} \right)^{-1/2} - 1 \right|. \quad (1.42)$$

В случае сил притяжения  $k_2 < 0$ , и величина  $\vartheta$  становится бесконечно большой при  $p = p_c$ , где

$$p_c^2 = \frac{2 |k_2|}{m_0 v^2}. \quad (1.43)$$

При  $p < p_c$  движение происходит по спирали, которая через бесконечное количество оборотов приближается к центру. Конечно, не нужно производить точных вычислений для всех  $p$ , поскольку поле имеет такой вид только в области  $r = a$ .

Для малых углов из (1.42) [вводя  $k_2$  из (1.41) и используя (1.4) и (1.29)] получим

$$\vartheta \approx \frac{\pi}{2e} \zeta \frac{a^2}{p^2}, \quad (1.44)$$

что для дифференциального поперечника сечения приводит к выражению

$$d\sigma \approx \frac{\pi}{4e} \zeta a^2 \frac{d\omega}{\vartheta^3}. \quad (1.45)$$

Нужно только помнить, что эта формула не может быть применена для произвольно малых углов. Действительно, при  $p \gg a$  поле падает быстрее, чем при  $n = 2$ , и, кроме того, классическую механику можно применять даже при  $x \gg \zeta$ , только если угол отклонения больше, чем величина  $\vartheta^*$ , даваемая формулой (1.37).

Важно, что сечение (1.45) изменяется не так быстро с  $\vartheta$ , как по формуле Резерфорда; во многих приложениях это приводит к тому, что влиянием малых отклонений можно пренебречь. В этих случаях, согласно (1.36) и (1.42), можно приближенно считать, что

$$\sigma \sim \pi p_c^2 = \frac{\pi}{e} \zeta a^2. \quad (1.46)$$

Из (1.43) видно, что здесь  $\sigma$  пропорционально  $v^{-2}$ , а не  $v^{-4}$ , как следует из (1.15).

Общие соображения о рассеянии в поле, обратно пропорциональном расстоянию в степени  $n$ , могут быть получены на основании соображений размерности. Так, в области, где справедлива классическая механика, поперечник рассеяния пропорционален  $b_n^2$ , где

$$b_n = \left( \frac{2 |k_n|}{m_0 v^2} \right)^{1/n}, \quad (1.47)$$

что при  $n = 1$  соответствует (1.4) и при отталкивающих силах дает минимальное расстояние сближения. Таким образом, имеем:

$$d\sigma = b_n^2 \cdot f_n(\vartheta) d\omega, \quad (1.48)$$

где при увеличении  $n$  угловое распределение  $f_n(\theta)$  стремится к сферически симметричному, описываемому формулой (1.36).

С другой стороны, в квантовой механике поперечное сечение, кроме величин, содержащихся в (1.47), зависит от  $\hbar$ , и соображения размерности, в общем случае, не дают однозначного результата. Однако, когда применима теория возмущений, поперечное сечение для поля (1.40) пропорционально  $k_n^2$ , и из (1.47) тогда следует:

$$d\sigma = \frac{\hbar^{2n}}{n!} \lambda^{2-2n} g_n(\theta) d\omega, \quad (1.49)$$

где  $\hbar$  входит через  $\lambda$ . Только в случае, когда  $n=1$ , этот закон рассеяния может совпадать с классическим, поскольку (1.49) не содержит тогда постоянной Планка.

Что касается сравнения формул (1.48) и (1.49), то нужно отметить, что в то время как приближенный метод, приведший к последней формуле, дает тот же результат для притягивающих и отталкивающих сил, подобная симметрия появляется в классическом выводе только при  $n=1$ ; при  $n \geq 2$  в случае сил притяжения мы получаем бесконечность. С другой стороны, применение метода Борна для поля типа (1.40) приводит к конечному результату только при  $1 < n < 3$ .

Что касается зависимости рассеяния от  $\zeta$ , то заметим, что, согласно классической механике, минимальное расстояние сближения для поля типа (1.28) определяется из соотношения

$$\frac{\rho}{a} = \zeta e^{-v/a}. \quad (1.50)$$

При  $\zeta \sim 1$  отсюда следует:  $\rho \sim a$ , и основное отклонение происходит в той части поля, где  $n=2$ . Для больших  $\zeta$  мы найдем большие значения  $\rho$  и, следовательно, большие эффективные значения  $n$ . При увеличении  $\zeta$  величина  $\rho$  возрастает медленно, и эффективный поперечник не будет практически зависеть от  $v$ , оставаясь сравнимым с  $\pi a^2$ .

Как уже упоминалось, при сильном экранировании имеем промежуточную область, где не применимы ни классическая механика, ни метод Борна. В этой области, соответствующей, согласно (1.38) и (1.39), неравенству

$$\sqrt{\zeta} < x < \zeta, \quad (1.51)$$

мы должны быть готовы к новым особенностям рассеяния, которые требуют для своего рассмотрения более общих квантово-механических методов.

Случай отталкивающих сил относительно прост, потому что волна, представляющая падающую частицу, только незначительно сможет проникнуть в потенциальный барьер, быстро возрастающий, начиная с расстояний порядка  $a$ . Так как при (1.51) мы имеем  $\lambda > a$ , то рассеяние будет равномерным по всем углам и поперечное сечение во всей области будет по порядку величины  $\pi a^2$ , что соответствует, как мы видели, значениям, при обоих пределах,

где  $\kappa = \zeta$  и  $\kappa = \sqrt{\zeta}$ . Примером, иллюстрирующим неприменимость в промежуточной области как классической механики, так и квантовомеханической теории возмущений, является рассеяние от непроницаемой сферы радиуса  $a$  частиц с длиной волны, сравнимой с  $a$ . Как хорошо известно, в этом случае мы получаем равномерное распределение по углам, и полное сечение будет равно  $4\pi a^2$ . Этот результат следует из граничного условия в квантовой механике, которое в силу исчезновения волновой функции внутри сферы требует на всей поверхности сферы  $r = a$  одинакового значения для амплитуд падающей волны и отраженной сферической волны, представляющей рассеянные частицы.

Для притягивающих сил положение существенно иное. Здесь волновая функция внутри поля будет приблизительно совпадать с волновой функцией «атома», состоящего из частиц с зарядом  $e_1$  и  $e_2$  и приведенной массой  $m_0$ . Расстояние, на котором волновая функция в центральном поле сил существенно изменяет свою фазу, сравнимо с «атомным радиусом»:

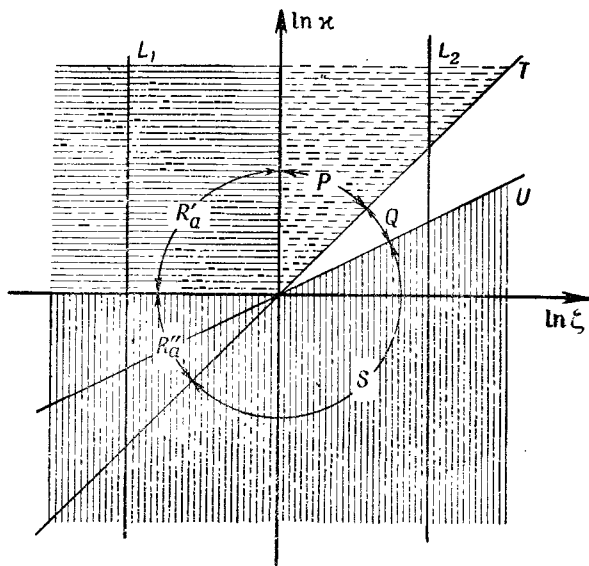
$$r_0 = \frac{\hbar^2}{m_0 |e_1 e_2|} \sim \frac{\lambda^2}{b} = a \zeta x^{-2} \quad (1.52)$$

Хотя в области (1.51) имеем  $\lambda > a$ , соответственно тому, что  $\kappa < \zeta$ , все же будет  $r_0 < a$ , потому что  $\kappa > \sqrt{\zeta}$  и, следовательно, фаза волновой функции претерпевает сильные изменения между  $r = 0$  и  $r = a$ . Поэтому существует возможность чисто квантовомеханических резонансных явлений, зависящих от поведения внутренней волновой функции в области около  $r = a$ ; на указанной границе она должна быть сшта с падающей и расходящейся волнами. При этих обстоятельствах поперечное сечение рассеяния может очень сильно изменяться со скоростью падающей частицы; в принципе, может принимать любое значение между нулем и  $4\pi \lambda^2$ .

Эти эффекты иллюстрируются рассеянием электронов на тяжелых атомах. Так, эффективное сечение столкновений медленных электронов с атомами инертных газов оказывается (Рамзауер [17]) исчезающе малым по сравнению с геометрическим сечением атома. Детальное исследование явления (Факсен и Хольцмарк [18]) выявило далеко идущую аналогию с акустическим резонансом. Для больших скоростей электрона, когда  $\lambda$  сравнимо с  $a$ , наблюдается более сложное рассеяние, показывающее характерные максимумы и минимумы в угловом распределении (Арно [19]). Эти аномалии, весьма чувствительные к скорости электрона (Вернер [20, 21]), происходят из-за отклонения волновой функции от сферической симметрии при появлении зональных гармоник высоких порядков (Калькар [22]). При еще больших скоростях, когда  $\lambda \ll a$  и  $\kappa \gg \zeta$ , мы вступаем в область, где приближенно справедлива классическая механика.

### 6. Сводка различных задач рассеяния

Схема различных случаев рассеяния в экранированном кулоновом поле представлена на фиг. 4. Каждой точке на диаграмме соответствуют значения  $x = \frac{b}{k}$  и  $\zeta = \frac{b}{a}$ . Для удобства на осях отложены  $\ln x$  и  $\ln \zeta$ . Линия  $T$  соответствует равенству  $x = \zeta$ , линия



Фиг. 4.

$U$ —равенству  $x = \sqrt{\zeta}$ . Горизонтальная и вертикальная штриховки обозначают области применимости классической механики и метода Борна в квантовой механике соответственно. Области, обозначенные посредством  $R'_a$ ,  $R''_a$ ,  $S$ ,  $P$ ,  $Q$ , соответствуют различным типам столкновений, рассмотренным в предыдущих разделах.

Вертикальная линия  $L_1$ , на которой  $\zeta$  имеет постоянное (и притом малое) значение, иллюстрирует рассуждения раздела 4; отрезки, на которые  $L_1$  делится осью абсцисс и линиями  $T$  и  $U$ , соответствуют фиг. 3, на которой кривые  $T$  и  $R''_a$  отвечают точкам пересечения  $L_1$  с линиями  $T$  и  $U$  соответственно.

Вертикальная линия  $L_2$  соответствует большим значениям  $\zeta$ , т. е. проблеме сильного экранирования, рассмотренной в разделе 5. Отрезок ниже линии  $U$  представляет область сферически симметричного рассеяния, когда применима теория возмущений квантовой механики; отрезок выше линии  $T$ , заштрихованный

пунктиром, представляет область, где классическая механика применима с известными ограничениями; наконец, в области  $Q$  не применима ни классическая механика, ни теория возмущений квантовой механики; в этой области могут происходить резонансные явления.

Как мы увидим в дальнейшем, области  $R_a''$  и  $R_a'$  соответствуют прохождению быстрых частиц через вещество ( $\alpha$ -,  $\beta$ -частицы и осколки деления), область  $P$  соответствует медленным частицам, например атомам отдачи при радиоактивных распадах. Для ориентировки можно сказать, что при всех постоянных параметрах изменению скорости на диаграмме соответствует смещение вдоль линии, параллельной  $U$ . Такая линия при  $x < \sqrt{\zeta}$  проходит только в области, заштрихованной вертикально, а при  $x > \sqrt{\zeta}$  она проходит через области применимости классической механики, область применимости квантовомеханической теории возмущения, а также через область, где не применимы ни один из этих двух, взаимно исключающих друг друга методов.

---

## ЯВЛЕНИЯ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ЯДЕРНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

## 1. Характеристики ядерных столкновений

Применяя простые вычисления, подобные выполненным в гл. I, к реальной задаче прохождения частиц через вещество, нужно, вообще говоря, принимать во внимание, что столкновение частицы с атомом, состоящим из ядра и электронов, представляет собой сложную задачу многих тел. Однако ввиду большой массы ядра по сравнению с массой электрона можно с большой степенью точности провести различие между «ядерными столкновениями», при которых импульс и кинетическая энергия частицы переходят в поступательное движение атома как целого (упругие столкновения), и «электронными столкновениями», при которых энергия передается одному электрону атома и происходит возбуждение или ионизация атома (неупругое столкновение). Последний эффект, который часто несет главную ответственность за торможение, мы рассмотрим подробно в гл. III, теперь же мы рассмотрим сравнительно более простые ядерные столкновения, в которых присутствие электронов в атоме сказывается только в электростатическом экранировании поля сил ядра.

В ядерных столкновениях достаточно, таким образом, пользоваться упрощенной моделью атома, в которой особенности связи отдельных электронов пренебрегаются, а распределение заряда в атоме определяется каким-либо упрощенным статистическим путем, скажем, посредством метода Томаса-Ферми. Хотя в специальных задачах часто необходимо рассматривать детально это распределение и результирующее поле сил, здесь достаточно будет заметить, что этот метод приводит в большей части атома к потенциалу того же типа, что и рассмотренный в предыдущей главе [формула (1.28)]. Выразим параметр экранирования  $a$  в «радиусах» водородного атома

$$a_0 = \frac{\hbar}{\mu s^2}, \quad (2.1)$$

где  $\mu$  и  $e$  — масса и заряд электрона, и обозначим

$$a = \frac{a_0}{s}, \quad (2.2)$$

тогда, как хорошо известно, для атома с зарядом  $z$  приближенно справедливо соотношение

$$s = z^{1/3}. \quad (2.3)$$

Для осколков деления, которые несут большое количество связанных электронов на всем своем пробеге, полный экранирующий эффект зависит, конечно, не только от присутствия электронов в атомах тормозящего вещества, но также от экранирующего действия электронов осколка, и поэтому вообще представляет сложную проблему. Однако во многих случаях возможно производить расчеты с потенциалом (1.28) и параметром экранирования (2.2), положив

$$s = \sqrt{z_1^{2/3} + z_2^{2/3}}, \quad (2.4)$$

где  $z_1$ ,  $z_2$  обозначают атомные номера соударяющихся атомов.

Можно показать, что это простое симметричное выражение приближенно справедливо для взаимодействия между двумя распределенными зарядами, соответствующими потенциалу (1.28) при  $s$ , равном  $z_1^{1/3}$  и  $z_2^{1/3}$  соответственно.

Рассматривая ядерные столкновения, мы можем, таким образом, непосредственно применить результаты гл. I, согласно которым, как иллюстрировано на фиг. 4, различные типы столкновений характеризуются величиной  $\kappa$  и отношением  $\zeta$  диаметра столкновения  $b$  и параметра экранирования  $a$ . Вводя «скорость» электрона в атоме водорода

$$v_0 = \frac{s^2}{\hbar}, \quad (2.5)$$

из (1.26) получим

$$\kappa = 2z_1z_2 \frac{v_0}{v}, \quad (2.6)$$

а из (1.4), (1.29), (2.1), (2.2)

$$\zeta = 2z_1z_2s \frac{\mu}{m_0} \left(\frac{v_0}{v}\right)^2. \quad (2.7)$$

Исключая  $v$  из этих двух выражений, имеем

$$\frac{\kappa^2}{\zeta} = \frac{2z_1z_2 m_0}{s \mu}. \quad (2.8)$$

Это показывает (вместе с данным выше определением  $s$ ), что  $\kappa$  всегда больше, чем  $\sqrt{\zeta}$ , и, следовательно, при ядерных столкновениях мы всегда имеем дело с задачами, соответствующими области выше линии  $U$  на фиг. 4. Отвлекаясь на время от того случая, когда падающей частицей является электрон, мы видим из (2.4) и (2.7), что если не выполняется условие  $v \ll v_0$ , то  $\zeta \ll 1$ . Действительно, даже наибольшие возможные значения  $z_1$  и  $z_2$  полностью компенсируются малым (по сравнению с ядерной массой) значением  $\mu$ .

Для быстрых частиц на большей части пробега столкновения принадлежат к типам, обозначенным на фиг. 4 посредством  $R'_a$

и  $R'_a$ , соответственно случаю  $x > 1$  или  $x < 1$ . Из (2.6) видно, что при  $v < v_0$  мы всегда имеем дело с первым случаем, а для больших скоростей в зависимости от величины  $z_1$  и  $z_2$  будет выполняться или не выполняться условие применимости классической механики  $x > 1$ . В обоих случаях рассеяние будет совпадать с резерфордовым для углов, больших, чем величина  $\vartheta_a$ , данная по (1.30) или (1.35) для  $x > 1$  или  $x < 1$  соответственно.

Если скорость частицы мала по сравнению с  $v_0$ , имеем  $\zeta \gg 1$ , что соответствует рассеянию, отличному от резерфордового для всех углов. За исключением очень малых скоростей, из (2.6) и (2.7) следует, что  $x > \zeta$ , и задача принадлежит к области, обозначенной на фиг. 4 буквой  $P$ , и, как было выяснено в разделе 5 гл. I, столкновения могут рассматриваться с помощью классической механики. При увеличении величины  $\zeta$  рассеяние приближается к равномерному распределению по всем углам с сечением  $\pi \rho^2$ , где  $\rho$  того же порядка, что и  $a$ . Однако нужно заметить, что при очень малых скоростях соотношения (2.3) и (2.4) теряют силу, поскольку атомы уже не в состоянии проникать друг через друга, и подобно тому, как это делается в кинетической теории газов, мы должны считать, что  $\rho$  равно сумме атомных радиусов, каждый из которых сравним с  $a_0$ .

Если падающая частица является электроном ( $z_1 = 1$  и  $m_0 = \mu$ ), из (2.7) и (2.3) получим

$$\zeta = 2z_2^{4/3} \left( \frac{v_0}{v} \right)^2. \quad (2.9)$$

Для быстрых  $\beta$ -частиц, когда  $v \gg z_2^{1/3} v_0$ , мы имеем  $\zeta \ll 1$ , и, подобно тому, как при соударении ядерных частиц, столкновения принадлежат к типу  $R'_a$  или  $R''_a$ , в зависимости от того, больше или меньше единицы величина

$$\gamma = 2z_2 \frac{v_0}{v}. \quad (2.10)$$

Для малых скоростей электрона, когда  $\zeta \gg 1$ , столкновения не принадлежат к типу  $P$ , как то было для тяжелых частиц. Действительно, при  $v < v_0 z_2^{1/3}$ , когда  $\lambda > a_0 z_2^{-1/3} = a$ , мы имеем  $x < \zeta$ , что соответствует области  $Q$  фиг. 4, где, как сказано в разделе 5 гл. I, происходят типично квантовые резонансные явления.

## 2. Частота индивидуальных столкновений. Распределение $\delta$ -частиц

Статистические законы, определяющие индивидуальные столкновения между атомными частицами, находят свое прямое применение в явлениях, подобных рассеянию  $\alpha$ -частиц тонкой фольгой вещества. Здесь частицы (за исключением тех сравнительно



редких случаев, когда происходит значительное отклонение в результате отдельного близкого ядерного столкновения) проходят через фольгу практически без изменения направления или скорости.

Однако в общем случае при прохождении частиц через вещество, кроме индивидуальных эффектов сильных столкновений, необходимо принимать во внимание совокупный результат очень большого числа столкновений, которые каждый в отдельности производят очень малый эффект, но все вместе ответственны, например, за непрерывное искривление пути (называемое многократным рассеянием) и постепенное замедление частицы.

Такие совокупные эффекты составляют главную тему последующих рассуждений, но в этом разделе мы сначала рассмотрим вопросы, зависящие от отдельных столкновений. В предыдущей главе уже рассматривалось рассеяние на больших углах, изучение которых столь важно для исследования структуры атомов. Здесь же мы кратко рассмотрим образование  $\delta$ -частиц, которые возникают, когда атом тормозящего вещества получает энергию, достаточную, чтобы произвести видимый трек в камере Вильсона. Частота и распределение их является характерной чертой различных типов проникающих частиц.

Из рассуждений раздела 1 следует, что для быстрых частиц, для которых  $\zeta \ll 1$ , закон Резерфорда справедлив в большой области углов отклонения  $\vartheta$ . Характеризуя  $\delta$ -частицу углом  $\psi$ , который она образует с треком пролетающей частицы и переданной при столкновении энергией  $T$ , в области, где справедлив закон Резерфорда для дифференциального поперечного сечения, выраженного через  $\psi$ , из (1.7) и (1.14) получим

$$d\sigma = \frac{\pi}{2} b^2 \sin \psi \sec^3 \psi d\psi, \quad (2.11)$$

а для дифференциального поперечного сечения, выраженного через  $T$ , из (1.8), (1.9) и (1.15) имеем

$$d\sigma = B_{\nu} \frac{dT}{T^2}, \quad (2.12)$$

где (индекс  $\nu$  обозначает ядерное столкновение)

$$B_{\nu} = 2\pi \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{m_2 v^3}. \quad (2.13)$$

Интегрирование (2.12) приводит к выражению

$$\sigma = B_{\nu} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad (2.14)$$

для поперечного сечения ядерного столкновения с величиной, переданной энергии, лежащей между  $T_1$  и  $T_2$ , если  $T_2 < T_m$  и

$T_1 > T_a$ , где  $T_m$  — максимальное значение передаваемой энергии (1.9) и  $T_a$  — значение  $T$ , соответствующее предельному углу  $\vartheta_a$ , зависящему от экранирования поля. Поскольку предполагается, что в рассматриваемых условиях  $\vartheta_a$  мало, то, согласно (1.8),  $T_a \ll T_m$ .

Рассмотрим прохождение частицы через слой вещества толщиной  $\Delta R$ , содержащий  $N$  атомов в  $1 \text{ см}^3$ . Из (2.14) мы можем получить статистическое распределение числа ядерных столкновений, испытываемых частицей. В самом деле, выберем  $\Delta R$  столь малым, что почти каждая частица будет проходить через слой вещества без заметного изменения скорости; среднее число столкновений дается выражением

$$\omega = N\Delta R\sigma = N\Delta RB_v \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right). \quad (2.15)$$

Конечно, частота столкновений будет испытывать статистические флуктуации, и вероятность того, что произойдет  $n$  столкновений в интервале  $T$ , в котором среднее число столкновений равно  $\omega$ , дается законом Пуассона

$$P(n) = \frac{\omega^n}{n!} e^{-\omega}, \quad (2.16)$$

справедливым для задач, содержащих эффекты, зависящие от практически бесконечно большого числа событий, причем вероятность появления каждого из них исчезающе мала. В рассматриваемой задаче этими событиями являются случайные столкновения с ядрами атомов вдоль отрезка пути, большого по сравнению с атомными размерами.

Написанные выше формулы непосредственно применимы к быстрым частицам, подобным  $\alpha$ -частицам, испускаемым радиоактивными веществами, или осколкам деления ядер.

В самом деле, при  $v \sim 5v_0$  формула (2.7) дает для осколков деления ( $z_1 \sim 50$ ) значение  $\zeta$  порядка  $10^3$  во всех тормозящих веществах, а для  $\alpha$ -частиц ( $z_1 = 2$ ) — значение порядка  $10^3 - 10^4$  (в зависимости от  $z_2$ ). Поскольку  $B_v$  пропорционально  $z_1^2$ , согласно (2.15), имеется заметная разница в частоте образования  $\delta$ -частиц  $\alpha$ -частицами (в этом случае  $\delta$ -частицы образуются очень редко) и осколками деления (в этом случае каждый трек имеет большое количество  $\delta$ -частиц). Изучая распределение  $\delta$ -частиц на единицу длины трека осколка деления в камере Вильсона, возможно из (2.15) сделать заключение о соотношении между скоростью и пробегом (см. [23]). Более того, существование двух групп осколков с различными массами и зарядами было обнаружено посредством наблюдений, что распределение  $\delta$ -частиц в треках заметно отличается от (2.16), но может быть представлено суммой двух таких выражений с различными значениями  $\omega$ , соответствующими заряду и массе частиц в двух группах.

Интересно, далее, отметить, что изучение распределения  $\delta$ -частиц дает непосредственный способ обнаружить разницу между законом рассеяния Резерфорда и более равномерным распределением, которое ожидается для более медленных частиц при  $\zeta \geq 1$ . В самом деле, из (1.7) и (1.36) найдем

$$d\tau = \sigma \sin 2\psi d\psi, \quad (2.17)$$

что существенно отличается от (2.11), особенно для менее сильных столкновений, когда  $\psi \sim \frac{\pi}{2}$ . В то время как для осколков деления большинство  $\delta$ -частиц, в согласии с (2.11), образуют прямой угол с треком,  $\delta$ -частицы, образованные атомами отдачи при  $\sigma$ -распаде, имеющими намного меньшую скорость, дают распределение типа (2.17), что действительно установлено наблюдениями Жолио [24] в камере Вильсона. Последний результат находится в согласии с тем фактом, что для подобных частиц, скорость которых порядка  $\frac{1}{10} v_0$ , мы имеем из (2.7) значение  $\zeta$  порядка единицы.

В области сферически симметричного рассеяния из (1.8) и (1.36) получим

$$d\tau = \sigma \frac{dT}{T_m}, \quad (2.18)$$

и для числа столкновений, при которых  $T_1 < T < T_2$ , имеем

$$\omega = N \Delta R \sigma \frac{T_2 - T_1}{T_m}. \quad (2.19)$$

В частности, эта формула дает полное число  $\delta$ -частиц на пути  $\Delta R$ , если мы положим  $T_2 = T_m$  и  $T_1 = T_c$ , где  $T_c$  — наименьшая энергия, достаточная, чтобы  $\delta$ -частица могла бы быть наблюдаема.

Если, как, например, при столкновении между твердыми упругими шариками,  $\sigma$  не зависит от скорости, мы должны, согласно (2.19), ожидать уменьшения числа  $\delta$ -частиц вдоль трека, когда  $T_m$  уменьшается и приближается к  $T_c$ .

Однако в своих опытах Жолио нашел, — отвлекаясь от необъясненных особенностей картины в непосредственной близости от той точки, где произошел радиоактивный распад, — постепенное увеличение числа  $\delta$ -частиц вдоль трека. Эти наблюдения хорошо согласуются с формулой (1.46), которая вместе с (1.43) показывает, что  $\sigma$  пропорционально  $v^2$ . Последнее соответствует предположению, что при столкновении между атомом отдачи и ядрами тормозящего вещества силы отталкивания изменяются приблизительно обратно пропорционально кубу расстояния. Как упоминалось в разделе 5 гл. I, силовое поле такого вида нужно ожидать при  $\zeta \sim 1$ , что, как мы видели, приблизительно выполняется для ядер отдачи  $\alpha$ -частиц. В дальнейшем мы покажем, что эта простая оценка поперечного сечения важна для определения соотношения между скоростью и пробегом этих частиц.

### 3. Тормозной эффект ядерных столкновений

Кроме столкновений с отклонением на большие углы и образования  $\delta$ -частиц при близких столкновениях, частица, проходящая через вещество, испытывает большое число менее сильных столкновений, совместный эффект которых, как уже упоминалось, вызывает постепенное торможение и рассеяние частиц. Хотя, как мы увидим, явления торможения и рассеяния тесно связаны между собой, будет удобно, для того чтобы сделать статистическое рассмотрение как можно более ясным, сначала рассмотреть более детально проблему торможения.

Разобьем столкновения, испытываемые частицей на некотором интервале пробега, в котором ее движение в среднем изменяется лишь незначительно, на большое число групп, соответствующих малым интервалам передаваемой энергии. Полная потеря энергии может быть записана в следующем виде:

$$\Delta E = \sum_i T_i n_i, \quad (2.20)$$

где  $n_i$  — число столкновений в  $i$ -ом интервале, причем  $n_i$  распределены около среднего значения  $\omega_i$  согласно формуле (2.16).

Среднее значение  $\Delta E$  поэтому будет равно

$$\overline{\Delta E} = \sum_i T_i \omega_i, \quad (2.21)$$

а средний квадрат флуктуаций дается выражением

$$\Omega^2 = \overline{(\Delta E - \overline{\Delta E})^2} = \sum_i T_i^2 \overline{(n_i - \omega_i)^2} = \sum_i T_i^2 \omega_i, \quad (2.22)$$

поскольку из (2.16) следует, что средний квадрат флуктуаций  $n_i$  равен  $\omega_i$ . Переходя к пределу бесконечно малых интервалов  $T$ , вводя дифференциальное поперечное сечение  $d\sigma$ , используя обозначения раздела 2 для тормозной способности и ее флуктуации в малом интервале пробега  $\Delta R$ , соответственно получим

$$\text{и} \quad \overline{\Delta E} = N \Delta R \int T d\sigma \quad (2.23)$$

$$\Omega^2 = N \Delta R \int T^2 d\sigma. \quad (2.24)$$

Рассмотрим сначала случай быстрых частиц, для которых  $\zeta \ll 1$  и дифференциальное поперечное сечение для  $T_a < T < T_m$  дано формулой (2.12). Поскольку  $T_a \ll T_m$  и, сверх того, вероятность столкновений с  $T < T_a$  при уменьшении  $T$  быстро становится пренебрежимо малой по сравнению с (2.12), мы можем, устанавливая влияние ядерных столкновений на тормозную способ-

ность вещества, в первом приближении пренебречь столкновениями, для которых  $T < T_a$ . Таким образом, из (2.23) получим

$$\overline{\Delta_{\nu} E} = N \Delta R B_{\nu} \ln \frac{T_m}{T_a}, \quad (2.25)$$

а из (2.24)

$$\Omega_{\nu}^{\ddagger} = N \Delta R B_{\nu} T_m. \quad (2.26)$$

В то время как выражение для  $\overline{\Delta_{\nu} E}$  существенно зависит от  $T_a$ , мы просто положили  $T_a = 0$  в выражении для  $\Omega_{\nu}^{\ddagger}$ , в котором, в случае  $T_a \ll T_m$ , экранирование вызывает лишь малую поправку.

Что касается аргумента в логарифмическом члене (2.25), то, принимая во внимание (1.30) и (1.35), из (1.8) получим

$$\frac{T_m}{T_a} = \left( \frac{2}{\vartheta_a} \right)^2 = \begin{cases} \left( \frac{2}{\zeta} \right)^2 & \text{для } \kappa > 1, \\ \left( \frac{2}{\zeta} \kappa \right)^2 & \text{для } \kappa < 1. \end{cases} \quad (2.27)$$

Для частиц с большим зарядом (например, осколки деления) из (2.6) видно, что  $\kappa > 1$  практически для всех скоростей, но для быстрых частиц с малым зарядом (протоны,  $\alpha$ -частицы, электроны) в легких веществах может оказаться, что  $\kappa < 1$ . Однако в случае  $\zeta \ll 1$  из (2.8) следует, что (2.27) даже при  $\kappa < 1$  всегда велико по сравнению с единицей.

Благодаря большому значению аргумента логарифма формула (2.25) обладает хорошей точностью, несмотря на использование при ее выводе грубых приближений. В самом деле, более детальное определение  $T$  вблизи  $T_a$  может привести к поправкам только в логарифмическом члене, которые по порядку величины близки к единице. Подобным образом более детальное исследование перехода при  $\kappa \sim 1$  от функции распределения  $R'_a$  к  $R''_a$  при  $\zeta \ll 1$  дает только малую поправку к полученному выражению для тормозной способности. Более того, заметим, что поскольку логарифм велик, он очень слабо зависит от скорости, хотя его аргумент зависит от  $v$ . Для быстрых частиц, таким образом, быстрая потеря энергии в ядерных столкновениях, согласно (2.13), с хорошим приближением пропорциональна  $v^{-2}$ . При уменьшении скорости аргумент логарифма постепенно становится меньше, и  $\overline{\Delta_{\nu} E}$  будет изменяться менее быстро при изменении скорости. Выражение (2.26) для  $\Omega_{\nu}$  в этом смысле значительно проще, поскольку, согласно (1.9), оно не зависит от скорости частицы.

В случае медленных частиц, для которых  $\zeta \gg 1$ , приближенно можно определить тормозную способность, предполагая рассеяние сферически симметрическим, в соответствии с формулой (2.18) для дифференциального поперечника. Поскольку малые

отклонения от этого распределения для слабых столкновений не имеют существенного значения для определения  $\overline{\Delta_\nu E}$  и  $\Omega_\nu$ , из (2.23) и (2.24) получим

$$\overline{\Delta_\nu E} = \frac{1}{2} N \Delta R \sigma T_m \quad (2.28)$$

и

$$\Omega_\nu^2 = \frac{1}{3} N \Delta R \sigma T_m^2. \quad (2.29)$$

В частном случае, когда  $\zeta \sim 1$  и сечение  $\sigma$ , согласно (1.43) и (1.46), приблизительно пропорционально  $v^{-2}$ , выражение (2.28) почти не зависит от скорости. В гл. V мы увидим, что подобная скорость потери энергии действительно имеет место для ядер отдачи при  $\alpha$ -распаде. В этой связи мы заметим, что в той области скоростей, когда  $\zeta \gtrsim 1$ , ядерные столкновения составляют главный источник потери энергии, в противоположность случаю  $\zeta \ll 1$ , когда электронные столкновения играют главную роль для торможения. В предельном случае  $\zeta \gg 1$  поперечное сечение, в согласии с рассуждениями раздела 5, в значительном интервале скоростей остается того же порядка величины, что и газокинетическое поперечное сечение, и (2.28) дает тормозную способность, пропорциональную  $v^2$ . Подобные условия нужно ожидать для ядер отдачи при  $\beta$ -распаде, когда для средних атомных номеров мы имеем  $v \sim 10^{-2} v_0$  и  $\zeta \sim 10^3$ .

#### 4. Потери энергии при ядерных столкновениях

Как показано в разделе 3, элементарная теория ядерной тормозной способности позволяет определить среднее значение  $\overline{\Delta E}$  и средний квадрат флуктуаций  $\Omega^2$  потери энергии при прохождении частицей некоторого слоя вещества. Если значения  $\Delta E$  распределены по закону ошибок

$$W_0(\Delta E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Omega_0} e^{-\frac{(\Delta E - \Delta E_0)^2}{2\Omega_0^2}} \quad (2.30)$$

с максимумом  $\Delta E_0$  и полушириной  $\Omega_0$ , то теория в состоянии полностью описать явление, поскольку, очевидно, мы просто имеем  $\Delta E_0 = \overline{\Delta E}$  и  $\Omega_0 = \Omega$ .

В какой степени распределение  $\Delta E$  в действительности дается формулой типа (2.30), зависит прежде всего от толщины слоя вещества, через который проходит частица. Так, для очень тонких слоев торможение будет совершенно нерегулярным, поскольку оно будет определяться малым числом столкновений. Однако, даже если  $\Delta E$  есть результат очень большого числа

отдельных столкновений, из теории вероятности известно, что нормальный закон ошибок справедлив, только если индивидуальные столкновения дают малый вклад в  $\Delta E$  по сравнению с  $\Omega$ , т. е. если

$$\Omega > T_m, \quad (2.31)$$

где  $T_m$  — максимум переданной в индивидуальном столкновении энергии. Если это условие не выполнено, то отдельные соударения могут оказывать заметное влияние на явление, и распределение может тогда существенно отличаться от гауссового закона.

В этих условиях наиболее вероятное значение  $\Delta E$ , которое, вообще говоря, получается в результате измерений, не обязано совпадать со средним значением  $\bar{\Delta E}$ , а разброс пробегов не будет определяться величиной  $\Omega$ . Таким образом, в этих случаях интерпретация результатов эксперимента требует более детального изучения статистического распределения  $\Delta E$ .

Эта проблема впервые встретилась при изучении торможения  $\beta$ -частиц, когда при соударении с электронами  $m_1 = m_2 = \mu$  и, следовательно, значение  $T$  может быть равным полной кинетической энергии падающей частицы. При подобных обстоятельствах условие (2.31), очевидно, не выполняется даже для толщин вещества, сравнимых с полным пробегом. При анализе распределения  $\Delta E$  для пучка  $\beta$ -частиц делалось (Бор [25]) различие между большинством частиц, которые испытывают только слабые столкновения и торможение которых зависит от большого числа столкновений, и небольшим количеством частиц, для которых значение  $\Delta E$  в основном определяется одним сильным столкновением.

Будем различать столкновения, для которых  $T$  меньше или больше, чем некоторое значение  $T^*$ , определенное таким образом, что частицы в среднем испытывают около одного столкновения, для которого  $T > T^*$ . Что касается столкновений, для которых  $T < T^*$ , то было показано, что результирующая потеря энергии  $\Delta^* E$  распределена приблизительно по закону Гаусса, в то время как случайные, более сильные столкновения дают в основном «хвост» в распределении  $\Delta E$ , простирающийся далеко за ширину гауссового пика. Детальное исследование проблемы (Вильямс [26]) привело к результатам, замечательно совпадающим с полученными такими приближенными рассуждениями, и мы можем поэтому здесь ограничиться лишь грубым качественным рассмотрением<sup>1)</sup>.

Для того чтобы исследовать, в какой степени условие (2.31) выполнено для явлений ядерного торможения, мы сначала рас-

<sup>1)</sup> Внимание автора было привлечено к работе Л. Ландау [44], который существенно улучшил теорию посредством более строгого математического рассмотрения задачи, в результате чего ему удалось получить аналитическое выражение для  $W(\Delta E)$

смотрим наиболее важные проблемы, когда  $\zeta \ll 1$ . В этом случае, как следует из (2.26), условие (2.31) эквивалентно следующему:

$$N\Delta RB_v > T_m \quad (2.32)$$

или, согласно (2.25),

$$\overline{\Delta_v E} > T_m \ln \frac{T_m}{T_a}. \quad (2.33)$$

Вклад, вносимый ядерными столкновениями в  $\overline{\Delta E}$ , не может даже для  $\Delta R$ , сравнимых с полным пробегом, быть больше, чем  $E = \frac{1}{2} m_1 v^2$ , а во многих случаях благодаря передаче энергии электронам оказывается значительно меньшим. Поскольку, далее, в рассматриваемом случае логарифм много больше единицы, необходимое условие для выполнения (2.33) будет  $T_m \ll E$  или, согласно (1.9),  $m_1$  должно быть либо много больше, либо много меньше, чем  $m_2$ . Только в случае  $m_1 \gg m_2$  мы имеем дело с простым торможением частицы, поскольку при  $m_1 \ll m_2$ , как мы увидим в следующем разделе, при выполнении условия (2.32) рассеяние будет столь велико, что мы будем иметь дело с типичным диффузным явлением. Если  $m_1 \sim m_2$ , положение совершенно аналогично с тем, которое имеет место при торможении быстрых электронов при столкновениях с электронами, когда, как мы отмечали выше, мы встречаемся с более сложным статистическим распределением результирующей потери энергии.

Анализируя распределение  $\Delta_v E$  в тех случаях, когда (2.31) не выполняется, будем делать различие между столкновениями, для которых  $T$  меньше или больше  $T^*$ , причем

$$T^* = N\Delta RB_v, \quad (2.34)$$

что меньше, чем  $T_m$  именно тогда, когда (2.32) не выполнено. Поскольку мы предполагаем, что среднее количество столкновений велико, то из (2.15) следует при  $T_1 = T_a$  и  $T_2 = T_m$ , что  $T_a \ll T^*$ .

Рассматривая сначала эффект таких столкновений, для которых  $T < T^*$ , по аналогии с (2.25) получим среднее значение потери энергии  $\Delta_v^* E$  в этих соударениях:

$$\Delta_v^* E = N\Delta RB_v \ln \frac{T^*}{T_a}, \quad (2.35)$$

и, согласно (2.26) и (2.34),

$$\Omega_v^* = N\Delta RB_v = \mathcal{T}^*. \quad (2.36)$$

Поскольку  $T^* \gg T_a$ , из (2.35) и (2.36) получим, что  $\overline{\Delta_v^* E} \gg \Omega_v^*$ ; далее, поскольку из (2.36) следует, что ни в одном индивидуальном акте потеря энергии не больше, чем  $\Omega_v^*$ , мы можем заключить,

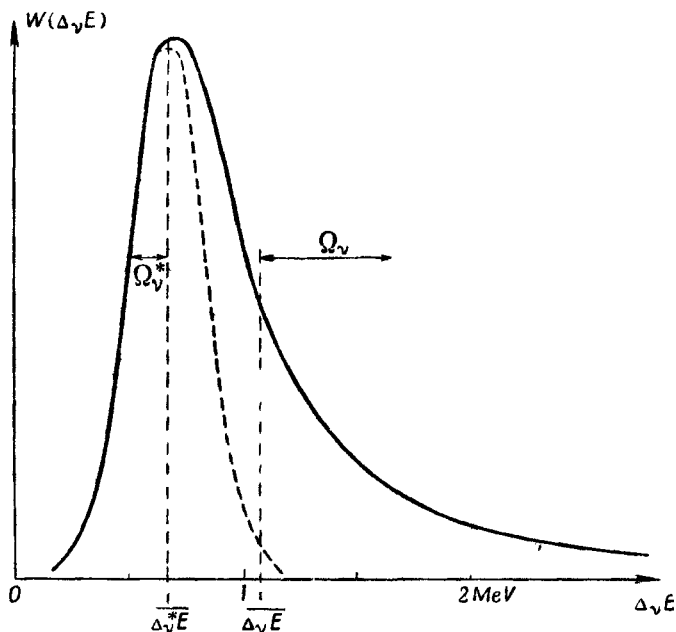


что распределение  $\Delta_{\nu}^*E$  будет даваться нормальным законом ошибок (2.30) с  $\Delta E_0$ , приблизительно равным  $\Delta_{\nu}^*E$ , и шириной  $\Omega_0$  одного порядка величины с  $\Omega_{\nu}^*$ .

Что касается столкновений, для которых  $T > T^*$ , то их среднее число, согласно (2.15) и (2.34), меньше, чем единица, хотя и может приближаться к единице в случае  $T^* \ll T_m$ , когда условие (2.32) далеко от выполнения и распределение  $\Delta_{\nu}E$  существенно отличается от закона Гаусса. При этих обстоятельствах некоторые частицы будут испытывать потерю энергии, в несколько раз большую, чем  $T^*$ , и хотя вероятность таких сильных соударений очень мала, она все же много больше, чем вероятностей с  $T < T^*$ . Однако огромное большинство частиц либо не испытывает столкновений с  $T > T^*$ , либо испытывает одно или несколько столкновений с  $T$ , лишь немного большим, чем  $T^*$ . Следовательно, распределение  $\Delta_{\nu}E$  состоит из узкого максимума и длинного хвоста, простирающегося далеко за ширину максимума. Далее, хотя максимум слегка не симметричный, он похож на гауссово распределение  $\Delta_{\nu}^*E$ . В частности, полуширина максимума сравнима с  $\Omega_{\nu}^*$ , положение которого отличается от  $\Delta_{\nu}^*E$  только на величину порядка  $\Omega_{\nu}^*$ . Что касается хвоста, то, как следует из распределения (2.12) для потери энергии при отдельном столкновении, вероятность  $W(\Delta_{\nu}E)$  уменьшается обратно пропорционально квадрату величины  $\Delta_{\nu}E - \Delta_{\nu}^*E$  в области, где эта разность велика по сравнению с  $\Omega_{\nu}^*$ .

Типичная кривая разброса потерь энергии дана на фиг. 5, на которой представлено распределение  $\Delta_{\nu}E$  для осколков деления, принадлежащих к легкой группе ( $Z \sim 38$ ,  $A \sim 96$ ), обладающих скоростью  $v \sim v_0$  и проходящих слой аргона 2 мм толщиной при нормальных условиях, что приблизительно соответствует половине остаточного пробега. В этом случае мы имеем  $\zeta \sim 0,09$ , как следует из (2.7), и, следовательно, из (2.27), поскольку  $x \gg 1$ , получаем для  $T_m/T_a$  значение около 500. Из (1.9) и (2.13), далее, следует, что  $N\Delta RB_{\nu} \sim 0,08 T_m$ , так что из (2.34) мы получаем:  $40 T_a \sim T^* \sim 0,08 T_m$ . Распределение  $\Delta_{\nu}E$  дано сплошной кривой, а  $W(\Delta_{\nu}^*E)$  — пунктирной. Что касается деталей этих кривых, то мы отсылаем читателя к более точному анализу, данному Вильямсом [26]. Наиболее вероятное значение  $\Delta_{\nu}E$  представлено максимумом  $W(\Delta_{\nu}E)$ , который приблизительно совпадает с  $\Delta_{\nu}^*E$ , в то время как  $\Delta_{\nu}E$  существенно больше из-за хвоста в кривой распределения. На фигуре  $\Delta_{\nu}^*E$  меньше, чем  $\Delta_{\nu}E$ , приблизительно на 40%. Далее, полуширина максимума одного порядка с  $\Omega_{\nu}^*$ , в то время как  $\Omega_{\nu}$  не имеет такой простой связи с кривой распределения.

В противоположность случаю  $\zeta \ll 1$ , когда большинство столкновений приводит к потере энергии, малой в сравнении с  $T_m$ , для случая  $\zeta \geq 1$  различные значения  $T$ , согласно (2.18), равновероятны, и результирующие потери энергии носят существенно другой характер. Мы рассмотрим только случай  $m_1 \gg m_2$ , поскольку при  $m_1 \ll m_2$  падающая частица испытывает большие отклонения почти при каждом столкновении, и поэтому торможение и флуктуации сильно маскируются диффузией. Однако если  $m_1 \gg m_2$ ,



Фиг. 5.

то из (1.9) следует, что частицы могут потерять при отдельном столкновении лишь очень малую часть своей энергии, и  $\Delta\nu E$  будет распределено по нормальному закону ошибок, если рассматривается участок пробега, на котором среднее число столкновений велико. В самом деле, если  $N\Delta R\sigma$  — число столкновений — велико по сравнению с единицей, то из (2.29) следует:  $\Omega \gg T_m$ , в согласии с условием (2.31).

### 5. Многократное рассеяние

Как уже упоминалось, явление многократного рассеяния, обусловленное совместным эффектом большого числа отдельных малых отклонений, близко связано с явлением ядерного тормо-

жения. Далее мы увидим, что многократное рассеяние часто представляет возможность определить долю ядерных столкновений в общей тормозной способности вещества.

В тех случаях, когда можно разделить рассеяние на большие углы от многократного рассеяния, углы отклонения  $\varphi$  в индивидуальных столкновениях в большинстве случаев весьма малы. Считая, что и средний квадрат результирующего угла  $\Phi$ , на который частица рассеется при прохождении слоя вещества, также мал, получим

$$\Psi^2 = \overline{\Phi^2} = \sum_i \varphi_i^2 \omega_i, \quad (2.37)$$

где столкновения разбиты на группы, соответствующие малым интервалам  $\varphi$ , и где  $\omega_i$ , как и в (2.24), обозначает среднее число столкновений в  $i$ -ом интервале. Вводя дифференциальный поперечный сечения  $d\sigma$ , по аналогии с (2.23) можем также написать

$$\Psi^2 = N\Delta R \int \varphi^2 d\sigma. \quad (2.38)$$

Для того чтобы установить связь с явлением торможения, удобно выразить угол отклонения при столкновении  $\varphi$  через потерю энергии  $T$ . Рассмотрим сначала случай  $m_1 \gg m_2$ , когда могут быть лишь малые значения  $\varphi$ . Тогда из (1.6) приближенно имеем:

$$\varphi = \frac{m_2}{m_1} \sin \vartheta \quad (2.39)$$

или, вводя  $T$  посредством (1.8),

$$\varphi^2 = \frac{4m_2^2}{m_1^2} \frac{T}{T_m} \left( 1 - \frac{T}{T_m} \right). \quad (2.40)$$

Из (2.38) с помощью (2.23) и (2.24) находим

$$\Psi_{\nu}^2 = \frac{4m_2^2}{m_1^2} \left( \frac{\Delta_{\nu} E}{T_m} - \frac{\Omega_{\nu}^2}{T_m^2} \right), \quad (2.41)$$

где, как и в предыдущих разделах, индекс  $\nu$  означает, что мы рассматриваем ядерные столкновения.

В случае слабого экранирования ( $\zeta \ll 1$ ) отношение первого и второго членов в скобках (2.41) равно  $\ln \frac{T_m}{T_a}$ , как это следует из (2.25) и (2.26). Поскольку  $T_m \gg T_a$ , мы можем в первом приближении пренебречь вторым членом, и тогда, используя (1.9) и пренебрегая  $m_2$  в сравнении с  $m_1$ , получим

$$\Psi_{\nu}^2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{\Delta_{\nu} E}{E}. \quad (2.42)$$

В случае сильного экранирования ( $\zeta \geq 1$ ), когда можно для  $\Delta_{\nu}E$  и  $\Omega_{\nu}^2$  применить формулы (2.28) и (2.29), получим

$$\Psi_{\nu}^2 = \frac{1}{3} \frac{m_2}{m_1} \frac{\Delta_{\nu}E}{E}, \quad (2.43)$$

поскольку второй член в скобках (2.41) равен двум третям первого. В частности, из этих формул для  $\Psi_{\nu}^2$  следует, что, даже если  $\Delta_{\nu}E$  сравнимо с  $E$ , результирующий угол отклонения при  $m_1 \gg m_2$  действительно мал, как и предполагалось в (2.37).

Подобно тому, как в разделе 4 рассматривалось статистическое распределение потерь энергии, необходимо более подробно остановиться на статистическом распределении углов отклонения; для этой цели мы используем критерий, аналогичный (2.31). Поскольку наибольший угол отклонения в индивидуальном столкновении равен  $m_2/m_1$ , то из (2.42) и (2.43) следует, что многократное рассеяние будет гауссового типа, если  $\frac{\Delta_{\nu}E}{E}$  велико по сравнению с  $m_2/m_1$ . Несмотря на то, что для очень тонких слоев вещества, соответствующих малому числу столкновений, мы не можем ожидать столь простой статистической закономерности, мы все же видим, что в случае  $\Delta_{\nu}E \sim E$  распределение углов отклонения  $\Phi$  для случая  $m_1 \gg m_2$  дается нормальным законом ошибок со средним квадратом угла отклонения, равным  $\Psi_{\nu}^2$ .

Если  $m_1$  сравнимо или меньше, чем  $m_2$ , могут происходить большие отклонения при отдельных столкновениях, и явление, в первую очередь, зависит от относительной частоты больших и малых углов отклонения. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, мы встречаемся в этом случае с существенным различием между задачами при  $\zeta \ll 1$  и при  $\zeta \geq 1$ . В самом деле, в последнем случае распределение по углам  $\Phi$  близко к сферически симметричному, и поэтому заметная доля столкновений будет приводить к большим углам отклонения  $\varphi$ . Если среднее число столкновений на рассматриваемом участке пробега велико, то мы будем иметь дело с полной диффузией пучка падающих частиц. В случае  $\zeta \ll 1$  из (2.15) следует, что большие отклонения будут часты или редки, смотря по тому, выполняется условие (2.32) или нет. В то время как в первом случае мы опять имеем дело с диффузией пучка, в последнем случае, вообще говоря, возможно делать различие между однократным и многократным рассеянием.

Эта последняя проблема, рассматривавшаяся Боте [27] и Вильямсом [28, 29], весьма аналогична задаче о потере энергии, рассмотренной в предыдущем разделе. В согласии с правилом, употреблявшимся для разделения максимума в распределении

$\Delta_{\nu}E$  от «хвоста», мы и теперь в задаче рассеяния будем различать отклонения на угол, меньший или больший, чем угол  $\varphi^*$ , который соответствует столкновению с передаваемой энергией  $T^*$ .

Для приближенного рассмотрения многократного рассеяния при ядерных столкновениях, в которых  $m_1 \leq m_2$ , можно в этих условиях воспользоваться тем же способом вычислений, с помощью которого было получено  $\Psi_{\nu}$  для случая  $m_1 \gg m_2$ . Поскольку угол отклонения при столкновениях с  $T < T^*$  мал, из (4.6) с большой степенью точности имеем

$$\varphi = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vartheta, \quad (2.44)$$

и, таким образом, из (1.8) и (1.9) получим

$$\varphi^2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{T}{E}. \quad (2.45)$$

Предполагая, что результирующее отклонение, возникающее благодаря отдельным столкновениям с  $\varphi < \varphi^*$ , также остается малым, для среднего квадрата этого отклонения из (2.23) и (2.38) получим

$$(\Psi_{\nu}^*)^2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{\Delta_{\nu}^* E}{E}, \quad (2.46)$$

где  $\overline{\Delta_{\nu}^* E}$  — среднее значение потери энергии в рассматриваемых столкновениях. Поскольку из рассуждений раздела 4 следует, что  $\overline{\Delta_{\nu}^* E} \gg T^*$ , если число столкновений большое, то из (2.45) и (2.46) видим, что в этом случае  $\Psi_{\nu}^* \gg \varphi^*$ . Следовательно, можно уверенно отличать отклонение, вызванное многократным рассеянием, от однократного рассеяния по закону Резерфорда.

Воспользовавшись формулой (2.35) для  $\overline{\Delta_{\nu}^* E}$  и учитывая еще (2.34), из (2.46) получим выражение для  $\Psi_{\nu}^*$ , почти совпадающее с результатом Боте [27], который применял его к изучению многократного рассеяния  $\alpha$ -частиц различными веществами. Задача рассеяния  $\beta$ -частиц рассматривалась Боте [30] и особенно Вильямсом [28, 29], который детально исследовал влияние на среднее результирующее отклонение отклонений в отдельных столкновениях на угол, больший чем  $\varphi^*$ . Особенно интересно отметить, что явление многократного рассеяния предоставляет возможность произвести проверку эффекта экранирования ядерного поля, ожидаемого для случаев  $\kappa < 1$  или  $\kappa > 1$ . Как указал Вильямс [41], измерения рассеяния  $\alpha$ -частиц в тяжелых веществах, когда, по (2.6),  $\kappa$  велико, оказались в согласии с вычислениями, основанными на классической механике, в то время как для быстрых  $\beta$ -частиц, когда  $\kappa < 1$ , измерения оказались в согласии с вычислениями, основанными на квантовомеханической теории возмущений.

В то время как в задаче о ядерном торможении нет необходимости рассматривать релятивистские эффекты, поскольку при больших скоростях электронное торможение существенно сильнее, в задаче о многократном рассеянии важно рассмотреть поправки, которые нужно внести при  $v \sim c$ . Эта проблема, которая детально рассматривалась Вильямсом [28], оказывается сравнительно простой благодаря тому, что очень сильные столкновения, при которых играют роль специфические релятивистские эффекты, не оказывают большого влияния на многократное рассеяние. Основное изменение, которое необходимо ввести в приведенные выше формулы, заключается в увеличении инерции частицы и состоит в простой замене  $m_1$  на  $m_1 \gamma$  в формулах (2.42) и (2.46). Далее, для очень быстрых частиц, длина волны которых становится меньше размеров ядра, необходимо принять во внимание отклонение от закона Кулона из-за конечных размеров ядра. Как показано Вильямсом [28], последний эффект, — который может рассматриваться так же, как рассматривалась в разделе 4 гл. I задача об экранировании, — вызовет обрезание распределения Резерфорда для углов, больших некоторого предельного угла.

Близкая связь между многократным рассеянием и торможением при ядерных столкновениях даст, как уже упоминалось, средство установить ту роль, которую играют эти столкновения при прохождении частицы через вещество. Для этой цели существенно, что электронные столкновения, хотя часто и оказывают доминирующее влияние на торможение, обычно играют второстепенную роль для рассеяния. В самом деле, для очень быстрых частиц вклад от каждого атомного электрона в  $\Psi^2$  будет (отвлекаясь от незначительного изменения логарифмического члена) даваться выражениями (2.42) или (2.46) для ядра с единичным зарядом, и поэтому результирующее значение  $\Psi^2$  может быть приближенно получено простой заменой  $z^2$  на  $z^2 + z$ . Для частиц с малыми скоростями, как вытекает из рассуждений, которые будут приведены в гл. III, влияние атомных электронов сводится к экранированию ядерного поля, что было уже учтено при определении  $\Psi_v$ .

Из измерений многократного рассеяния и уменьшения энергии частицы на данном интервале пробега можно с помощью уравнений (2.42), (2.43) или (2.46) непосредственно определить вклад ядерных столкновений в торможение частицы. В частности, хорошо известный факт, что треки  $\alpha$ -частиц представляют из себя, за исключением самих концов, прямые линии, соответствует тому, что почти вся потеря энергии обусловлена электронными столкновениями. Напротив, изучение заметного искривления треков осколков деления в камере Вильсона (см. [23]) дало доказательство того, что торможение в результате ядерных столкновений не может быть игнорировано и даже, наоборот, становится преобладающим на последней части пробега, где скорость осколка сравнима с  $v_0$ . К этой проблеме об относительной роли ядерных и электронных столкновений в явлении торможения и разброса пробегов мы возвратимся в гл. V.

## Глава III

### ВОЗБУЖДЕНИЕ И ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ

#### 1. Ионизация и электронное торможение по классической механике

При столкновениях между атомами и быстро движущейся частицей необходимо, как уже упоминалось, кроме передачи энергии и импульса атому как целому, учитывать также взаимодействие между частицей и отдельными атомными электронами. Это взаимодействие, которое часто составляет главный источник торможения, может вызвать ионизацию или возбуждение атомов вдоль пути частицы. Как уже упоминалось во введении, рассмотрение этих явлений дает важное средство для проверки методов атомной механики и представляет поучительные примеры, когда применение классической механики, законное в известных областях, в определенных случаях должно быть заменено квантовомеханическим анализом. Для того чтобы сделать принципиальные вопросы насколько возможно более ясными, будет удобно напомнить основные моменты развития теории. Для этой цели мы начнем рассмотрение задачи с точки зрения классической механики.

Задача впервые была поставлена Томсоном [2], который еще за несколько лет до открытия атомного ядра исследовал торможение быстрых частиц из-за столкновений с электронами атомов среды. Предполагая, что скорость этих электронов мала по сравнению со скоростью частицы, пренебрегая действием внутриатомных сил во время соударения и используя простые соображения, аналогичные приведенным в разделе 1 гл. I, Томсон получил для статистического распределения потери энергии выражение, эквивалентное (2.12). В наших обозначениях дифференциальный поперечник столкновений между электроном с зарядом  $e$ , массой  $\mu$ , первоначально покоившимся, и частицей с зарядом  $z_1e$  и скоростью  $v$  оказывается равным

$$d\sigma = B_e \frac{dT}{T^2}, \quad (3.1)$$

где

$$B_e = 2\pi \frac{z_1^2 e^4}{\mu v^2}, \quad (3.2)$$

причем индекс  $e$  обозначает электронные столкновения в отличие от ядерных столкновений, рассмотренных в гл. II.

Формула (3.1) использовалась Томсоном [31] для определения ионизации, вызываемой быстрой частицей, при предположе-

нии, что ионизация происходит, если передаваемая энергия превосходит так называемый ионизационный потенциал. Обозначим отдельные электроны атома индексом  $s$ , энергию, необходимую для того, чтобы удалить электрон  $s$  из атома, обозначим посредством  $I_s$ , тогда среднее число ионов, в согласии с (2.15), определяется формулой

$$\omega_I = N \Delta R B_e \sum_s \left( \frac{1}{I_s} - \frac{1}{T_m} \right), \quad (3.3)$$

где суммирование производится по тем электронам атома, для которых ионизационная энергия  $I_s$  меньше, чем максимально возможная передача энергии в свободном столкновении  $T_m$ . Из (1.9) имеем

$$T_m = \left( \frac{1}{4} \right) 2\mu v^2, \quad (3.4)$$

где множитель в скобках должен быть опущен для тяжелых частиц ( $m_1 \gg m_2 = \mu$ ) и сохранен только в случае, если падающая частица является электроном ( $m_1 = m_2 = \mu$ ). Такой способ написания формул для различных типов частиц будет нами употребляться и в дальнейшем.

Средняя энергия, затраченная на ионизацию, в предположениях, сформулированных выше, как следует из (2.23) и (3.1), равна

$$(\overline{\Delta_e E})_I = N \Delta R B_e \sum_s \ln \frac{T_m}{I_s}, \quad (3.5)$$

причем суммирование, как и в (3.3), производится по электронам, для которых  $I_s < T_m$ . Согласно классической механике, мы должны ожидать, что энергия может быть передана атому и в таких столкновениях, при которых не происходит ионизации. Однако очевидно, что при определении энергии, передаваемой атому при таком соударении, нельзя игнорировать внутриатомное поле сил, поскольку интеграл (2.23) расходится, если нижний предел стремится к нулю. В первоначальном рассмотрении задачи Томсоном предполагалось, что формула (3.1) справедлива только при таких значениях  $T$ , которым соответствуют прицельные параметры, меньшие, чем среднее расстояние между электронами в атоме, поскольку при более далеких столкновениях средняя передаваемая энергия весьма мала из-за экранирования. В последующей попытке Дарвина [32] применить теорию к ядерной модели атома предполагалось, что только те соударения сопровождаются потерей энергии, при которых частица проходит внутри атома.

В то время как обмен импульсом между частицей и атомом как целым ограничивается экранированием ядерного поля окружающими электронами, предел для передачи энергии атомному электрону



трону в основном не зависит от пространственного распределения заряда в невозмущенном атоме. В самом деле, торможение, вызванное отдельным электроном атома, зависит в первую очередь от его смещения в атоме во время соударения. Несмотря на то, что при  $T < I_s$  состояние электрона после соударения определяется влиянием атомных сил, мы должны в обычной механике ожидать, что силы связи не оказывают заметного влияния на передачу энергии, если взаимодействие между частицей и электроном происходит в течение промежутка времени, малого по сравнению с периодом колебания электрона в атоме. Соударения, длительность которых велика по сравнению с атомными периодами, практически имеют характер адиабатических процессов, когда в каждый данный момент атом можно рассматривать как находящийся в статическом поле сил, и, если смещение электрона во время удара не приведет к его отрыву от атома, состояние электрона после соударения будет такое же, как было до него.

Силы связи в атоме приводят, таким образом, к определенному экранированию не статической, но динамической природы. Для того чтобы определить эффект этого экранирования, мы сравним атом с набором гармонических осцилляторов, каждый из которых состоит из электрона в квазиупругом поле сил. Как меру протяженности этого поля возьмем величину

$$a_s \sim \frac{u_s}{\omega_s}, \quad (3.6)$$

где  $\omega_s$  — циклическая частота  $s$ -го электрона,  $u_s$  — его «орбитальная» скорость, определенная посредством

$$I_s = \frac{1}{2} \mu u_s^2. \quad (3.7)$$

Для наиболее слабо связанных электронов в атоме  $a_s$  и  $u_s$  того же порядка величины, что и  $a_0$  и  $v_0$ , введенные в разделе 1 гл. II, в то время как для наиболее сильно связанных электронов  $a_s$  значительно меньше, чем  $a_0$  и  $u_s \gg v_0$ .

С точки зрения классической механики задача о столкновении особенно проста, если  $v \gg u_s$  и, кроме того,  $b \ll a_s$ , где  $b$  — диаметр столкновения, определенный по (1.4). В самом деле, длительность столкновения с прицельным параметром  $p$ , большим по сравнению с  $b$ , по порядку величины равна  $p/v$ , и эта длительность сравнима с  $1/\omega_s$  для значений  $p$ , равных

$$d_s = \frac{v}{\omega_s}. \quad (3.8)$$

Для  $v \gg u_s$  мы видим, что  $d_s \gg a_s$ ; для  $a_s \gg b$  мы имеем также  $d_s \gg b$ . В этом случае мы можем пренебречь влиянием сил связи для  $p \ll d_s$ , и статистическое распределение  $T$  в таких столкновениях следует определять согласно (3.1).

Обозначая посредством  $i_s$  значение  $p$ , для которого  $T = I_s$ , из (1.4), (1.10) и (3.7) получим

$$i_s = \left(\frac{1}{2}\right) b \frac{v}{u_s} \quad (3.9)$$

при  $v \gg u_s$  и  $a_s \gg b$ , откуда имеем  $b \ll i_s \ll d_s$ . Действие на атом ударов с  $p \gtrsim d_s$  сводится только к малым возмущениям, поскольку при  $d_s \gg a_s$  сила, действующая на атом, практически одинакова во всех его точках. Механизм передачи энергии при таких столкновениях, таким образом, делает задачу аналогичной задаче о дисперсии и поглощении электромагнитного излучения с длиной волны, превышающей атомные размеры.

Таким образом, в случае  $v \gg u_s$  и  $a_s \gg b$  можно разделить столкновения на две группы и применить в каждой свои упрощения; благодаря известной свободе в разделении между группами с помощью такого простого анализа достигается хорошая точность. Подробные вычисления (Бор [33]) приводят к следующему выражению для полной переданной энергии:

$$\overline{\Delta_s E} = N \Delta R B_s \sum_s \ln \left( k \frac{T_m}{D_s} \right), \quad (3.10)$$

где  $k$  — численный множитель, равный  $1,261^1$ ,  $D_s$  — энергия, переданная при свободном столкновении с прицельным параметром  $d_s$ . Поскольку  $d_s \gg b$ , имеем

$$\frac{T_m}{D_s} = \left(\frac{2d_s}{b}\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\mu v^3}{z_1^2 \omega_s}\right)^2, \quad (3.11)$$

причем использованы формулы (1.4), (1.10), (3.8).

Если для некоторых электронов атома  $u_s \gtrsim v$ , то задача принимает более сложный характер, и столкновения не могут быть разделены на две простые группы, как это было сделано выше. Однако вклад этих электронов в тормозную способность вообще невелик. В самом деле, в случае  $u_s \gg v$ , когда, согласно (3.4) и (3.7), мы имеем  $I_s \gg T_m$ , силы связи препятствуют удалению электрона из атома и делают даже самые близкие столкновения практически адиабатическими. Следовательно, определяя электронное торможение быстрых частиц, мы можем в первом приближении просто ограничиться суммированием в (3.10) по таким электронам, для которых  $I_s < T_m$ .

Однако существенные изменения формулы для торможения и ионизации необходимо внести, если для некоторых электронов с  $u_s < v$  значение  $a_s$  меньше, чем  $b$ . В самом деле, в этом слу-

<sup>1</sup>) Это число можно выразить через постоянную Эйлера  $C$  следующим образом:  $k = 4e^{-2C}$ .

чае  $i_s$  больше  $d_s$ , и последняя величина уже не будет представлять собой эффективного предела для адиабатических столкновений. При этих условиях потери энергии могут быть несколько больше, чем дается по (3.10), но в то же время ионизация может быть значительно меньше, чем это дается формулой (3.3). К этой проблеме впервые поставленной Лембом [34] при исследовании прохождения через вещество осколков деления с большим зарядом, мы возвратимся в разделе 3, в котором рассмотрим теорию более детально. Необходимо, однако, отметить, что условие  $a_s > b$  всегда выполняется для быстрых частиц, если их заряд не очень велик по сравнению с зарядом электрона.

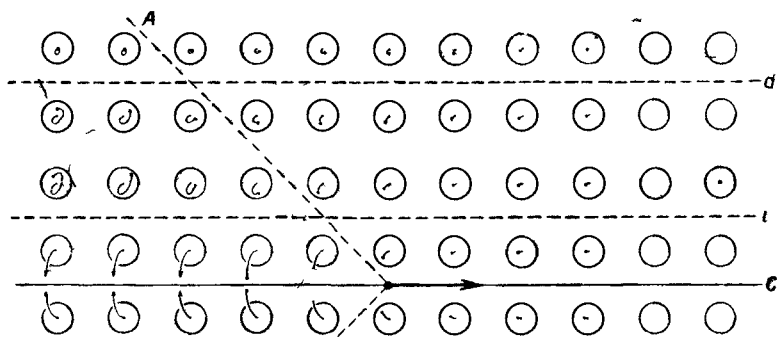
В формуле (3.10) релятивистские уточнения не приняты во внимание; не представляет труда распространить вычисления на скорости, близкие к скорости света. В самом деле, при столкновении, в котором электрон может рассматриваться как свободный, передаваемая энергия, согласно результатам раздела 1 гл. I, в случае  $p \gg b$  дается формулой (1.12) даже

для  $v \sim c$ , поскольку сокращение поля в отношении  $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  как раз компенсируется увеличением интенсивности поля. Сокращение времени соударения приводит, однако, к увеличению эффективного адиабатического предела обрезания  $d_s$  (3.8) на множитель  $\gamma$ . Из более подробных вычислений (Бор [25]), подобных тем, которые привели к (3.10), когда принималась во внимание не только компонента силы, перпендикулярная движению падающей частицы, но также и параллельная, следует, что кроме множителя  $\gamma$  в  $d_s$ , вызывающего уменьшение  $D_s$  в  $\gamma^2$  раз, аргумент логарифма должен быть умножен на  $e^{-v^2/c^2}$ .

В случае  $v \sim c$  требуется специальное рассмотрение для столкновении с  $p \leq b$ . Однако такие столкновения не играют большой роли для полной потери энергии, если только логарифм в (3.10) велик. С другой стороны, в наиболее важном случае, когда  $v \sim c$ , в случае быстрых  $p$ -частиц необходимо, так же как в Проблема ядерного торможения, рассмотренной в разделе 5 гл. II, различать между средней потерей энергии и наиболее вероятной потерей энергии. Эта последняя, играющая основную роль для анализа экспериментов, не зависит от очень близких столкновений. К этой задаче о распределении потерь энергии мы возвратимся в разделе 4.

Механизм торможения частицы при прохождении через вещество может быть выяснен, если рассмотреть электрическое поле, возникающее из-за поляризации среды, которое действует как некоторый тормоз на проходящую частицу. Это действие иллюстрируется на фиг. 6, где линия  $S$  представляет собой путь положительно заряженной тяжелой частицы, положение которой в рассматриваемый момент обозначено основанием стрелки. Маленькие кружки обозначают атомы, которые содержат для простоты только один электрон с размерами орбиты  $a$  и скоростью  $u$ . Предполагается, что адиабатический предел  $d$  велик по сравнению с  $a$  соответственно случаю  $v \gg u$ , а также предполагается, что  $a > b$  и, следовательно,  $d$  больше, чем ионизационный предел  $i$ . На фигуре показаны траектории электронов, хотя в случае ионизации эти траектории начерчены позади прошедшей частицы

не полностью. Вне адиабатического предела положение электронов полностью симметрично относительно плоскости, проходящей через частицу перпендикулярно к линии  $C$ , и эти электроны, следовательно, не дают результирующей силы, которая действовала бы на частицу. Однако внутри адиабатического предела (т. е. при  $p < d$ ) электроны приближаются к линии  $C$  более близко позади частицы, чем впереди, и эти электроны, таким образом, создают электрическое поле, направленное против движения частицы.



Фиг. 6.

Чтобы определить силу этого поля, можно просто подсчитать электрический заряд, образовавшийся позади прошедшей частицы в конусе, ограниченном линией  $A$  и содержащем атомы, для которых столкновение практически закончено. Поскольку мерой смещения свободного электрона при столкновении с  $p \gg b$ , согласно результатам раздела 1 гл. I, служит величина  $b$ , излишек заряда в слое конуса толщиной  $dx$  на расстоянии  $x$  позади частицы будет приблизительно равен  $2\pi\epsilon Nbx dx$ , где  $N$  означает число атомов в единице объема. Для притягивающей силы этого заряда, действующей на частицу при  $x \gg b$ , приближенно получим

$$dF \approx 2\pi z_1 \epsilon^2 b N \frac{dx}{x}. \quad (3.12)$$

Для малых  $x$  смещение, перпендикулярное к пути частицы, будет меньше, чем  $b$ , и для силы, действующей на частицу, приближенно получим

$$F \approx \int_{b/2}^d dF \approx 2\pi z_1 \epsilon^2 b N \ln \frac{2d}{b}, \quad (3.13)$$

что, как следует из (1.4), (3.2) и (3.11), близко совпадает с (3.10).

Более точный анализ проблемы торможения с этой точки зрения дан О. Бором (см. Приложение).

До сих пор мы предполагали, что отдельные столкновения между частицей и атомным электроном могут рассматриваться независимо. Так же, как в хорошо известной оптической задаче, мы должны, однако, учитывать, что поляризация среды при определенных условиях может существенно изменить величину поля, действующего на электрон во время прохождения частицы. Этот эффект, впервые указанный Сванном [35], был подробно рассмотрен Ферми [36], который показал, что, тогда как при  $v \sim c$  этот эффект может вызывать существенное уменьшение тормозной способности, при  $v \ll c$  поправки, вообще говоря, очень малы. Однако, как указал Крамерс [37], мы встречаемся с интересным исключением для веществ, подобных металлам, содержащим свободные электроны. В этом случае, который соответствует  $\omega_s = 0$ , адиабатический предел (3.8) должен быть заменен расстоянием, на котором поляризация эффективно экранирует поле частицы. В трактовке Ферми и Крамерса влияние поляризации определяется, исходя из представления о веществе, как о непрерывной среде. Интересно, что, как показал О. Бор, явление может быть рассмотрено также с микроскопической точки зрения; это делает более ясной его связь с обычной теорией прохождения частиц через вещество. При этом релятивистские эффекты принимаются во внимание при рассмотрении запаздывающих полей и обсуждается тесная связь между поляризационными эффектами и своеобразным излучением, обнаруженным Черенковым [38]. Теория этого явления была дана Франком и Таммом [39] и Таммом [40], который показал, что электрон излучает, когда его скорость превышает фазовую скорость света в некоторой спектральной области.

## 2. Квантовая теория торможения и ионизации

Простые механические соображения, развитые в предыдущем разделе, объясняют в общих чертах зависимость ионизации и тормозной способности от заряда и скорости  $\alpha$ - и  $\beta$ -частиц. Более близкое изучение ионизационной формулы в первое время было невозможно из-за экспериментальной трудности провести различие между первичной ионизацией и вторичными ионизационными эффектами, произведенными быстрыми электронами, выбитыми из атома при наиболее сильных столкновениях. В дальнейшем было определено установлено, что формула (3.3) дает для числа первичных процессов ионизации значение, во многих случаях в несколько раз меньшее действительного. Также и формула для тормозной способности (3.10) оказалась не в полном согласии с измерениями над  $\alpha$ - и  $\beta$ -частицами (особенно в случае послед-

них), причем эта формула давала заметно большее значение для тормозной способности, чем получаемое из опыта.

После развития квантовой теории строения атомов было естественно искать причину неточности классической формулы в неприменимости обычной механики к атомным реакциям и, в частности, в том факте, что передача энергии в этих реакциях может происходить только дискретными порциями, хотя электрон полностью отрывается от атома. Поскольку энергия возбуждения никогда не бывает много меньше, чем ионизационный потенциал, была сделана попытка изменить формулу (3.10), предположив (Гендерсон [41]), что за нижний предел передаваемой энергии можно взять  $I_s$ , и, таким образом, выражение (3.5) давало бы полную потерю энергии. Было найдено, однако (Фаулер [42]) что эта формула дает для тормозной способности  $\alpha$ -частиц значение, примерно в два раза меньшее экспериментальной величины.

Из простых соображений, основанных на принципе соответствия, можно понять, что подобные способы изменить (3.10) не могут быть удовлетворительны (Бор [43]). В самом деле, положение аналогично тому, которое имеет место с оптической дисперсией, где среднее поглощение излучения атомным осциллятором данной частоты и силы в точности одно и то же в квантовой теории и в классической электродинамике, за исключением того обстоятельства, что, согласно классической теории, любое количество энергии может быть передано от поля излучения атомному осциллятору, в то время как в квантовой теории такая передача может иметь место только благодаря поглощению отдельных световых квантов.

Аналогия между столкновением и явлением дисперсии была исследована Ферми [45], который предложил определять тормозную способность быстрой частицы, основываясь на эмпирических данных о поглощении излучения большой частоты. Для этой цели возмущающая сила, действующая на атом со стороны частицы, раскладывается как функция времени на гармонические составляющие, и действие каждой составляющей сравнивается с поглощением электромагнитной волны соответствующей частоты. Хотя этот метод приводит к трудностям по отношению к близким столкновениям, он, по крайней мере в принципе, является удачным для более далеких столкновений, когда внутриатомные силы оказывают существенное влияние на передачу энергии. В частности, очевидно, что, если прицельный параметр больше, чем (3.8), столкновения приобретают адиабатический характер, так как возмущающее поле не содержит больше компонент, которые могли бы возбудить атомные уровни.

Вскоре после возникновения квантовой механики проблема передачи энергии при далеких столкновениях подробно рас-

сма тривалась Гонтом [46], вычисления которого для водорода привели почти к тем же результатам, как и классическое рассмотрение задачи, приведшее к формуле (3.10). В самом деле, единственное изменение, требуемое квантовой механикой, состоит в замене суммирования по отдельным атомным электронам, с определенными периодами колебаний, суммой членов, соответствующих различным виртуальным осцилляторам, которые приводят к атомным резонансам. Так как статистика передачи энергии при свободных столкновениях такая же в квантовой механике, как и в классической, то соблазнительным является заключение, что формула (3.10), за исключением уточнения, связанного с виртуальными осцилляторами, совершенно правильная. Что касается ионизационного эффекта, то классическая формула (3.3) нуждается в исправлении. Как обратил внимание Вильямс [47], значительная часть возбуждения и ионизации возникает из-за резонанса при далеких столкновениях, когда по классической механике передача энергии мала по сравнению с  $I_s$ .

Тем временем значительный успех был достигнут Бете [48], который произвел квантовомеханические вычисления, основанные на методе Борна, и получил не только ионизационную формулу, отличную от (3.3), но также формулу для  $\overline{\Delta_e E}$ , которая существенно отличается от (3.10). В тех обозначениях, которые употреблялись выше, формула Бете может быть написана так:

$$\overline{\Delta_e E} = 2N \Delta R B_e \sum_i f_i \ln \frac{\left(\frac{1}{2}\right) 2\mu v^2}{\hbar \omega_i}, \quad (3.14)$$

где суммирование распространено на различные виртуальные атомные осцилляторы с силой  $f_i$  и частотой  $\omega_i$ . Отметим, что логарифм в (3.14), в противоположность (3.10), не зависит от заряда падающей частицы, и из (3.2) следует, что тормозная способность пропорциональна  $z_1^2$ , что является прямым следствием примененного приближенного метода. Было найдено, что формула (3.14) находится в весьма удовлетворительном согласии с экспериментами по торможению  $\alpha$ -частиц, в особенности в легких веществах, где атомные константы, входящие в (3.14), могут быть вычислены с большой точностью.

Для целей сравнения с предыдущими формулами результат Бете может быть несколько упрощен. В самом деле, пренебрегая незначительным взаимодействием между электронными связями, мы можем сопоставить осцилляторы вероятностям перехода отдельных атомных электронов. Поскольку полная сила осциллятора для каждого электрона близка к единице и поскольку для наиболее существенного перехода  $s$ -го электрона мы

и имеем  $\hbar\omega_s \sim I_s$ , формула (3.14) может быть приближенно записана так:

$$\overline{\Delta_s E} = 2N\Delta RB_s \sum_s \ln(2) \frac{T_m}{I_s}, \quad (3.15)$$

что почти в два раза больше, чем (3.5). Сравнивая (3.15) и (3.10), удобно ввести величину  $x$ , определенную формулой (1.26), которая для электронных соударений, согласно (2.6), может быть записана в виде

$$x = 2 \frac{z_1 s^2}{\hbar v} = 2z_1 \frac{v_0}{v}. \quad (3.16)$$

Для  $T_m \gg I_s$ , что предполагается в обеих формулах, из (3.4) и (3.11), полагая  $\hbar\omega_s = I_s$ , получим

$$\left(\frac{2T_m}{I_s}\right)^2 = \frac{T_m}{D_s} x^2. \quad (3.17)$$

Мы видим, таким образом, что, отвлекаясь от множителя  $k$ , который может быть опущен в рассматриваемом приближении, две формулы совпадают при  $x=1$ , а (3.14) дает значение, меньшее или большее, чем (3.10), смотря по тому:  $x < 1$  или  $x > 1$ .

Что касается соотношения между двумя формулами, то необходимо подчеркнуть, что речь идет не о замене формулы (3.10) на (3.14): каждая из них имеет свою область применения. С одной стороны, условие  $x \ll 1$  является необходимым и достаточным условием для применимости квантовомеханической теории возмущений, примененной при выводе (3.14); с другой стороны, условие  $x \gg 1$ , как мы видели в разделе 3 гл. I, означает возможность применить классическую механику при рассмотрении столкновения двух зарядов, и в этом случае рассуждения раздела 1 гл. III, дополненные простыми соображениями принципа соответствия, могут считаться правильными.

Из формулы (3.16) видно, что для быстрых  $\alpha$ - и  $\beta$ -частиц  $x$  мало по сравнению с единицей. Однако интерес к классической формуле вновь был привлечен в связи с изучением прохождения через вещество сильно заряженных осколков деления, для которых  $\gamma$  велико (Бор [49, 50]). Для частиц с таким большим зарядом, как уже упоминалось в разделе 1 гл. III, необходимо некоторое специальное уточнение, так как для некоторых атомных электронов с  $u_s < v$  может быть  $a_s < b$  и ионизация происходит при критических параметрах, больших чем  $d_s$  (Лемб [34]).

Торможение релятивистских электронов, для которых всегда  $x \ll 1$ , было исследовано Бете [51] и особенно Меллером [52]. Поправки к формуле (3.14) оказались такими же, что и вводимые при  $v \sim c$  в формулу (3.10). Этот результат тесно связан с тем фактом, что релятивистское изменение классической формулы состоит в добавлении членов, пропорциональных  $z_1^2$ , в соответствии с результатом, получаемым с помощью приближенного метода Борна. Кроме того, специальные квантовомеханические особенности —



спиновые силы и эффект обмена, — играющие роль при очень сильных столкновениях, здесь не существенны, поскольку эти столкновения не вносят заметного вклада в выражение для наиболее вероятной потери энергии.

Поскольку при  $\kappa \sim 1$  мы находимся вне той области, где законен какой-либо из приближенных методов, то близкое совпадение (3.14) и (3.10) при  $\kappa = 1$  нужно рассматривать в известном смысле как случайное. Поэтому весьма важно для теории, что Блоху [9] удалось развить такое рассмотрение проблемы торможения, из которой можно получить формулу для  $\overline{\Delta_e E}$ , применимую для всех значений  $\kappa$ , если только  $v > u_s$  и  $b < a_s$ . При малых  $\kappa$  формула Блоха асимптотически приближается к (3.14), в то время как при  $\kappa \gg 1$  она практически совпадает с (3.10). Для промежуточных значений  $\kappa$  она никогда заметно не отличается ни от одной, ни от другой формулы, которые, таким образом, дополняют друг друга с большой точностью. Этот результат особенно важен потому, что в большинстве наиболее важных приложений  $\kappa$  не является ни очень большим, ни очень малым, и, следовательно, ни один из предыдущих выводов не может претендовать на большую точность.

Трактовка задачи Блохом основана на обобщенном методе прицельного параметра, когда столкновения классифицируют по удаленности пути частицы от ядра атома. Что касается взаимодействия частицы с электроном, связанным в атоме, то этот метод, который сводит столкновение к задаче одного тела, эквивалентен обычному квантовомеханическому рассмотрению в конфигурационном пространстве, если только передаваемый импульс мал по сравнению с полным импульсом падающей частицы (Мотт [53], см. также О. Бор). Такое разделение соударений дает возможность (как и в классическом рассмотрении) делать различие между далекими столкновениями, когда возмущающая сила одинакова во всех точках атома, и близкими столкновениями, длительность которых мала по сравнению с атомными периодами.

В то время как далекие столкновения можно, во всяком случае при  $b < a_s$ , рассматривать как задачу дисперсии, в близких столкновениях возможно, как показал Блох, пренебречь атомными связями при определении средней передачи энергии. Это обстоятельство позволило вычислить  $\overline{\Delta_e E}$  без детального изучения статистического распределения потерь энергии в индивидуальных столкновениях, как это требовалось при выводе формул (3.10) и (3.14). Такой анализ, однако, необходим при изучении других явлений, связанных с прохождением частицы через вещество, в частности, ионизационных эффектов.

### 3. Статистика электронных столкновений

Как мы уже видели ранее, при рассмотрении столкновений между быстрыми частицами и атомными электронами мы встре-

чаемся с двумя особенно простыми случаями, которые можно назвать соответственно «свободными столкновениями» и «резонансными эффектами». В первом случае мы имеем в основном задачу двух тел, в последнем—задачу с малым возмущением, аналогичную той, которая встречается в теории дисперсии. Хотя, строго говоря, мы имеем здесь дело с предельными случаями, возможно, как мы увидим, классифицировать столкновения по этим двум простым типам в довольно широких пределах и найти, таким образом, общий вид статистического распределения передачи энергии, в частности получить зависимость этого распределения от заряда и скорости падающей частицы.

Для уточнения терминологии заметим следующее. Если длительность соударения мала по сравнению с атомными периодами и если, кроме того, энергия, передаваемая электрону, велика по сравнению с ионизационным потенциалом, то влиянием атомных связей с хорошим приближением можно пренебречь. При этих условиях мы говорим о свободном столкновении, для которого статистическое распределение передаваемой энергии в отдельных столкновениях дается формулой (3.1). Большинство проблем, которыми мы будем интересоваться, состоит в изучении области  $T$ , внутри которой при различных обстоятельствах выполнено условие применимости этой формулы.

Резонансные явления происходят, если поле падающей частицы практически однородно, в объеме атома, а его интенсивность настолько слаба, что вероятность возбуждения или ионизации атома при одном столкновении мала. В этом случае статистическое распределение отдельных квантовомеханических переходов всегда может быть получено по методу теории возмущений, применяемому Бете, и его результат может быть использован в различных случаях, включая и такие, для которых подобный подход несправедлив для проблемы прохождения частицы через вещество в целом. Из рассуждений раздела 2, далее, следует, что при этом типе столкновений средняя передаваемая энергия, определяющая торможение частицы, совпадает с вычисленной по классической механике, когда атом рассматривается как набор гармонических осцилляторов.

Чтобы не усложнять рассуждения, мы сначала не будем принимать во внимание деталей структуры атома и будем характеризовать связь  $s$ -го электрона циклической частотой  $\omega_s$ , связанной с ионизационным потенциалом  $I_s$ ,

$$I_s = \hbar \omega_s, \quad (3.18)$$

и длиной  $a_s$ , определяемой так:

$$a_s = \frac{\hbar}{\mu \omega_s}, \quad (3.19)$$

где  $u_s$  есть «орбитальная» скорость, данная формулой (3.7). В то время как  $\rho u_s$  того же порядка величины, что и квантовомеханическое среднее значение импульса электрона в невозмущенном состоянии, величина  $a_s$  представляет собой точность, с которой электрон может быть локализован без того, чтобы неопределенность в его энергии превысила  $I_s$ , и измеряет (для связей с эффективным квантовым числом, сравнимым с единицей) протяженность той области, где проходит его «орбита».

Как уже упоминалось выше, электронные столкновения быстрых частиц существенно зависят от величины  $\kappa$  (3.16); поэтому удобно отдельно рассматривать случаи  $\kappa > 1$  и  $\kappa < 1$ , чтобы сделать возможно более ясным как различие, так и сходство между задачами о прохождении частицы через вещество в этих двух случаях.

При  $\kappa > 1$  отдельные столкновения между падающей частицей и свободным электроном могут быть приближенно описаны классической механикой, и для целей классификации столкновений могут быть использованы соображения раздела 1. Для прицельного параметра  $i_s$ , соответствующего свободному столкновению с  $T = I_s$ , из (3.9), используя (1.4), (3.16) и (3.19) при  $v \gg u_s$ , имеем

$$i_s = \kappa a_s. \quad (3.20)$$

Для адиабатического предела, определенного формулой (3.8), из (3.7), (3.18) и (3.19) имеем

$$d_s = \frac{v}{\omega_s} = \eta_s a_s, \quad (3.21)$$

где для удобства обозначено

$$\eta_s = \frac{2v}{u_s}. \quad (3.22)$$

Далее, из (3.9) и (3.20)<sup>1</sup> получим

$$\frac{d_s}{i_s} = 2 \frac{a_s}{b} = \eta_s \kappa^{-1}. \quad (3.23)$$

Для  $\kappa < \eta_s$  из (3.23) следует, что  $i_s < d_s$ , и в этом случае столкновения с  $p < i_s$  могут рассматриваться как «свободные», поскольку  $T > I_s$ , а длительность столкновения мала по сравнению с  $1/\omega_s$ . Кроме того, согласно (3.20),  $i_s > a_s$ , и столкновения, для которых  $p > i_s$ , принадлежат, таким образом, к типу резо-

<sup>1</sup> В формулах, область применимости которых ограничена условием  $\kappa > 1$ , мы опускаем численные множители, вводившиеся для того случая, когда падающая частица есть электрон, поскольку при  $v \gg v_0$  для электрона всегда  $\kappa \ll 1$ .

нансных. В первом приближении вклад  $s$ -го электрона в тормозную способность дается суммой двух членов:

$$(\overline{\Delta_s E})_f = N\Delta RB_s \ln \frac{T_m}{I_s} \quad (3.24)$$

и

$$(\overline{\Delta_s E})_r = N\Delta RB_s \ln \frac{I_s}{D_s}, \quad (3.25)$$

соответствующих потери энергии при свободном столкновении и резонансном эффекте.

Таким образом, передача энергии в свободных столкновениях соответствует (3.5); разницу между (3.10) и (3.5) следует приписать резонансным эффектам. Выражая аргумент логарифма в величинах  $\eta_s$  и  $\kappa$ , а также используя формулы (3.4), (3.7), (3.17) и (3.22), получим

$$\frac{T_m}{I_s} = \eta_s^2, \quad \frac{I_r}{D_s} = \eta_s^2 \kappa^{-2}, \quad (3.26)$$

откуда, в частности, следует, что  $(\overline{\Delta_s E})_f$  больше, чем  $(\overline{\Delta_s E})_r$ , при  $\kappa > 1$ . При увеличении  $\kappa$  резонансные эффекты дают все меньший вклад в торможение; при  $\kappa = \eta_s$  для  $s$ -го электрона он равен нулю.

Если  $\kappa > \eta_s$ , то  $\nu_s > d_s$  и значения  $p$ , при которых соударение может рассматриваться как «свободное», не достигают  $\nu_s$ , так как для  $p > d_s$  длительность столкновения превышает  $1/\omega_s$ . С другой стороны, взаимодействие с  $p > d_s$  не может рассматриваться как чисто адиабатическое, поскольку во время столкновения могут быть разорваны связи электрона с атомом. Это обнаруживается также в том обстоятельстве, что при  $\kappa > \eta_s$  смещение электрона, которое в течение свободного столкновения по порядку величины равно  $b$ , не мало по сравнению с атомными размерами и, как видно из (3.23), может превысить  $a_s$ .

Чтобы определить предельное значение прицельного параметра  $d_s^*$ , для которого вероятность ионизации при прохождении частицы все еще порядка единицы, мы можем считать эффективной длительностью столкновения при  $p > d_s$  вместо  $p/v$  величину  $1/\omega_s$ . После простых вычислений при  $v > u_s$  и  $d_s^* > b$  получим

$$(d_s^*)^2 = \nu_s d_s. \quad (3.27)$$

При  $i = d_s$  это выражение дает  $d_s^* = d_s$ , и две области  $\kappa < \eta_s$  и  $\kappa > \eta_s$  соприкасаются без разрыва. Ионизационные процессы вне  $d_s$  можно сравнить с так называемой холодной эмиссией, когда электрон вырывается из атома статическим полем сил ([Лемб 134]). Поскольку, согласно (1.4), (3.9) и (3.21),  $d_s^*$  не зависит от  $v$ , такое рассмотрение дает в основном тот же результат, что приведенное выше, основанное на динамике столкновения.

Так как при  $p < d_s^*$  ионизация имеет место на сравнительно ранней стадии столкновения, полная передача энергии будет практически такой же, как если бы электрон был свободен. Таким образом, обозначая посредством  $D_s^*$  передачу энергии в свободном столкновении при  $p = d_s^*$ , в первом приближении имеем

$$\overline{\Delta_s E} = (\overline{\Delta_s E})_f = N \Delta R B_s \ln \frac{T_m}{D_s^*}, \quad (3.28)$$

где, согласно (1.10), (3.9), (3.23) и (3.27),

$$\frac{T_m}{D_s^*} = \eta_s^2 \kappa^{-1}, \quad (3.29)$$

что справедливо при  $T_m \gg D_s^*$  или  $\kappa \ll \eta_s^3$ .

Для еще больших значений  $\kappa$ , когда  $d_s^* \ll b$ , вся проблема становится более сложной, поскольку имеется большая вероятность того, что в результате столкновения электрон будет захвачен частицей. Непрерывный захват и потеря электронов частицей вдоль пути будут в этом случае определять все явление прохождения частицы через вещество. Мы рассмотрим эту проблему в гл. IV.

При  $\kappa < 1$  представления классической механики (вроде представления об орбитах частиц во время столкновения) не применимы по отношению к индивидуальным столкновениям. Как упоминалось в разделе 2, в этом случае столкновения все же можно характеризовать обобщенным прицельным параметром  $P$ , который равен расстоянию пути падающей частицы от атомного ядра и может быть определен с неопределенностью, малой по сравнению с атомами размерами. Поэтому, как мы увидим, также и при  $\kappa < 1$  возможно приближенное разделение между «свободными» столкновениями и «резонансными» эффектами, причем эти два случая соответствуют столкновениям, когда частица проходит через область, занятую атомом, или вне ее, т. е.  $P < a_s$  или  $P > a_s$ .

В случае близких столкновений между падающей частицей и атомным электроном задача по существу аналогична задаче рассеяния, рассмотренной в разделе 4 гл. I. В самом деле, при  $v \gg u_s$  начальное состояние падающей частицы в относительных координатах описывается волновой функцией, которую в интервале времени, сравнимом со временем прохождения частицы через атом, можно представить волновым пакетом с радиальной протяженностью  $a_s$  и вполне определенной скоростью  $v$ . Конечность размеров волнового пакета имеет такое же влияние на рассеяние, как экранирование поля сил между сталкивающимися частями типа (1.28) при  $a \sim a_s$ . Поскольку  $\lambda \ll a_s$ , то, согласно (1.20) и (3.19), угловое распределение в относительных координатах будет

типа  $R_a''(\vartheta)$ , что соответствует закону Резерфорда для углов, больших чем  $\vartheta_a''$  (1.35).

Для передачи энергии будет справедливо статистическое распределение (3.1) при  $T > A_s''$ , причем, согласно (1.8),

$$A_s'' = T_m \left( \frac{\vartheta_{a_s}''}{2} \right)^2 = I_s, \quad (3.30)$$

как то следует из (3.4) и (3.19)<sup>1)</sup>. Поскольку передачи энергии, меньшие чем  $I_s$ , очень мало вероятны, то отсюда следует, что силы атомных связей не оказывают существенного влияния на распределение  $T$ , и столкновения могут, следовательно, рассматриваться как «свободные». Таким образом, вклад столкновений с  $P < a_s$  в тормозную способность приближенно равен

$$(\overline{\Delta_s E})_f = N \Delta R B_e \ln \frac{T_m}{I_s}, \quad (3.31)$$

что совпадает с формулой (3.24), которая была справедлива при  $1 < x < \eta_s$ .

При далеких столкновениях, когда  $P > a_s$ , сила, действующая на атомный электрон, приблизительно постоянна по всему объему атома. Кроме того, при таких столкновениях мы имеем дело с задачей с малым возмущением; это соответствует тому обстоятельству, что при  $x < 1$  из (3.20) следует  $l_s < a_s$ , и классические вычисления приводят к передачам энергии, меньшим чем  $I_s$ . В квантовой механике мы имеем дело с типичными «резонансными» эффектами, которые дают среднюю передачу энергии, равную получающейся при классическом взаимодействии между частицей и атомными осцилляторами. Вклад столкновений с  $P > a_s$  в тормозную способность, таким образом, равен

$$(\overline{\Delta_s E})_r = N \Delta R B_e \ln \frac{A_s'}{D_s}, \quad (3.32)$$

где  $A_s'$  — передаваемая энергия, вычисленная по классической механике при  $p = a_s$ .

Из (3.30), (1.30) и (1.35) следует

$$A_s' = I_s x^2, \quad (3.33)$$

и посредством формулы (3.17) мы находим

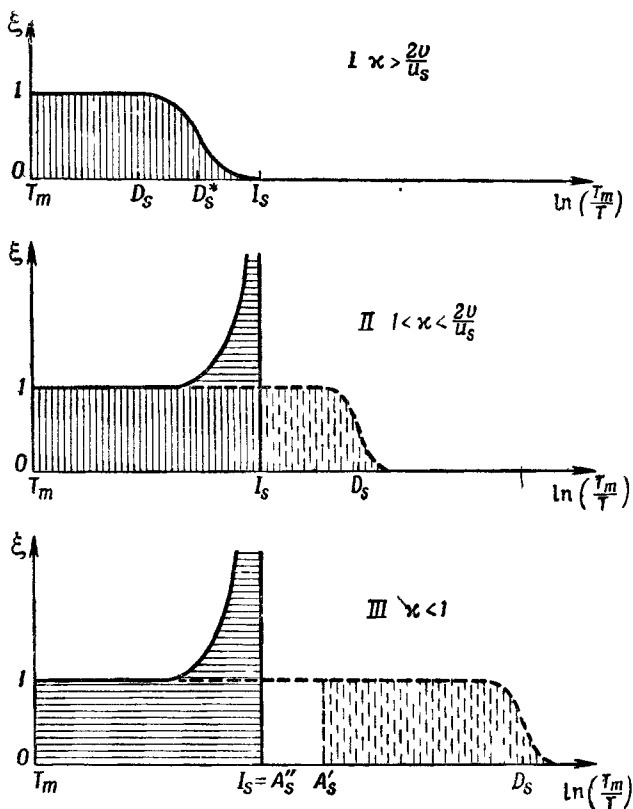
$$(\overline{\Delta_s E})_r = N \Delta R B_e \ln \frac{({}^4) T_m}{I_s}, \quad (3.34)$$

где, как обычно, множитель в скобках под знаком логарифма

<sup>1)</sup> Нужно заметить, что (3.30) и, следовательно, (3.31) справедливы и в случае, если падающей частицей является электрон, причем в этом случае угол  $\vartheta_a''$ , зависящий от приведенной массы, удваивается, а  $T_m$  уменьшается в четыре раза.

относится к тому случаю, когда падающей частицей является электрон.

Сумма (3.31) и (3.34) как раз соответствует выражению Бете для  $\overline{\Delta_s E}$  в упрощенной форме (3.15). В то время как для  $\kappa > 1$ ,



Фиг. 7.

как отмечалось выше,  $(\overline{\Delta_s E})_r$  всегда меньше, чем  $(\overline{\Delta_s E})_f$ , при  $\kappa < 1$  оба члена в основном равны, в согласии с тем обстоятельством, как уже отмечалось в разделе 2, что формула Гендерсона, в которой резонансные эффекты не были приняты во внимание, дала для потери энергии значение, примерно равное половине значения Бете.

Для иллюстрации рассуждений этого раздела на фиг. 7 собраны характерные черты статистического распределения потери энергии для различных значений  $\kappa$ . Случаи I, II и III соответствуют

различным значениям заряда падающей частицы, в то время как скорость  $v$  и сила связи электрона, характеризуемая величиной  $I_s$ , вваны одинаковыми во всех трех случаях. Так же как и в диаграммах, использованных для подобной задачи Вильямсом [47], на абсциссе отложен  $\ln(T_m/T)$ , а на ординате — отношение  $\xi$  между действительным поперечным сечением для передачи энергии  $T$  и поперечным сечением (3.1), справедливым при столкновении со свободным электроном. Такой выбор координат удобен потому, что, как следует из (2.23), доля  $\Delta_s \bar{E}$ , происходящая от столкновений при  $T_1 < T < T_2$ , просто пропорциональна площади между кривой, осью абсцисс и ординатами, соответствующими  $T_1$  и  $T_2$ .

Диаграммы I и II относятся к задачам, для которых  $x > 1$ . На диаграмме I значение  $x$  выбрано больше, чем  $\eta_s = 2v/u_s$  и, таким образом,  $D_s > I_s$ ; в этом случае все эффекты столкновения могут, по крайней мере приближенно, рассматриваться по классической механике. Это обозначено вертикальной штриховкой всей площади ниже кривой, простирающейся от  $T_m$  в основном до  $D_s^*$ . В иллюстрированном случае  $D_s \ll T_m$ , и абсцисса, соответствующая  $D_s^*$ , лежит на половине расстояния между  $D_s$  и  $I_s$ , как следует из (3.27).

На диаграмме II представлен случай  $1 < x < 2v/u_s$ , когда  $I_s > D_s$ . Сплошная кривая соответствует действительному распределению  $T$  с тем упрощением (чтобы не усложнять рисунок), что не делается различия между резонансными линиями, отвечающими возбуждению и ионизации при  $T \sim I_s$ . Площадь ниже кривой разделена на две области, соответствующие различию между свободными столкновениями и резонансными эффектами. В первой области можно применять классическую механику, что показано вертикальной штриховкой; горизонтальная штриховка показывает, что область резонансных эффектов обусловлена квантовыми явлениями. Пунктирная кривая представляет распределение, получающееся, если передачу энергии при всех индивидуальных столкновениях вычислять по классической механике. Поскольку, как отмечалось выше, такое вычисление дает правильный результат для полной потери энергии, то площадь, заштрихованная вертикальным пунктиром, как раз равна площади, представляющей потери энергии в резонансном эффекте и обозначенной горизонтальной штриховкой, частично выходящей за пределы рисунка.

Диаграмма III иллюстрирует случай  $x < 1$ . Здесь вся площадь ниже сплошной кривой соответствует, как показано горизонтальной штриховкой, эффектам, где не применима классическая механика. Пунктирная кривая дает распределение, которое получится, если применить классическую механику. В противоположность случаю  $x > 1$  площадь вне  $T = I_s$  представляет потери энер-



гии, которые больше, чем вклад резонансных эффектов, в соответствии с неприменимостью классической формулы (3.10) при  $\kappa < 1$ . Как вытекает из рассуждений, приведенных выше, только часть этой площади при  $D_s < T < A'_s$ , обозначенная пунктирной штриховкой, согласно теории дисперсии, эквивалентна вкладу резонансных эффектов. Площадь, соответствующая  $A'_s < T < A''_s = I_s$  представляет разность в значении  $\overline{\Delta_s E}$  между формулой (3.10) и (3.14).

Диаграмма ясно показывает относительную важность резонансных эффектов при различных значениях  $\kappa$ . В то время как в случае III вклад этих эффектов в полную потерю энергии примерно равен части, обусловленной свободными столкновениями, в случае II при  $\kappa > 1$  резонансные явления значительно менее важны для торможения. В крайнем случае  $\kappa > 2c/u_s$  вообще нет вопроса о каких-либо резонансных эффектах.

Рассуждения этого раздела, которые в первую очередь имеют целью дать представление о распределении потерь энергии в отдельных столкновениях и о зависимости их от величины  $\kappa$ , носят, конечно, несколько качественный характер. В частности, необходимо особенно подчеркнуть, что различие между свободными столкновениями и простыми резонансными эффектами содержат значительный произвол. Высокая степень точности в определении средней потери энергии внутри большой области изменения  $\kappa$  в методе Блоха зависит именно от возможности избежать такого разделения. В самом деле, как уже упоминалось, в этом методе необходимо только отделить такие расстояния соударений, при которых имеется полная аналогия с явлениями дисперсии, от близких столкновений, длительность которых мала по сравнению с атомными периодами, когда атомные силы, хотя и оказывают влияние на распределение потерь энергии в отдельных столкновениях, не существенны для определения средней переданной энергии. Во многих других задачах существенны, однако, детали в распределении потерь энергии при отдельном столкновении, и тогда данный выше анализ, в котором мы в основном следовали Вильямеу [54], идет значительно дальше метода Блоха.

В частности, различие между свободными столкновениями и резонансными эффектами позволяет, по крайней мере приближенно, определить для всех значений  $\kappa$  число ионов, произведенных вдоль пути. Для этой цели, конечно, необходимо разделить резонансные эффекты на такие, в результате которых происходит ионизация, и такие, при которых происходит только возбуждение атома. Поскольку, однако, для большинства резонансных эффектов длительность столкновений мала по сравнению с атомными периодами (которые для данного электрона все одного порядка величины), то относительная вероятность переходов

в первом приближении не зависит от заряда и скорости падающей частицы. Основываясь на этом, мы в следующем разделе, используя результаты Бете для  $\kappa \ll 1$ , рассмотрим проблему ионизации для всех значений  $\kappa$ .

Распространить рассуждения настоящего раздела на скорости, близкие к скорости света, не представляет существенной трудности. Так как  $c = 137v_0$ , то из (3.10) следует, что при  $v \sim c$  всегда  $\kappa \ll 1$  даже для наибольших зарядов  $z_1$ , и поэтому достаточно рассматривать только этот случай. Как указывалось в разделах 1 и 2, запаздывание поля падающей частицы не оказывает заметного влияния на передачу энергии в свободных столкновениях, но сказывается на увеличении адиабатического предела в  $\gamma$  раз. Следовательно, формула (3.31) для  $\overline{\Delta_e E}$  при свободных столкновениях справедлива также при  $v \sim c$ ; вклад в торможение из-за резонансных эффектов (3.34) несколько увеличивается. Поскольку увеличение  $d_e$  в  $\gamma$  раз вызывает уменьшение  $D_e$  в  $\gamma^2$  раз, мы получим:

$$(\overline{\Delta_e E})_r = N \Delta R B_e \ln \left( \frac{(4) T_m}{I_s} \gamma^2 \right), \quad (3.35)$$

что приближенно соответствует релятивистским поправкам в формулах Бете и Меллера. Что касается распределения отдельных резонансных процессов по различным возможностям переходов, то по тем же причинам, что и упоминавшиеся выше, мы можем использовать вычисление Бете также и в релятивистской области.

#### 4. Прохождение быстрых частиц через легкие вещества

Рассмотрение электронных столкновений, проведенное в предыдущем разделе, позволяет определить торможение частиц и производимую ими ионизацию, если их скорость велика по сравнению с «орбитальными скоростями» электронов в атомах среды. В легких веществах, как водород и гелий, где все электронные скорости сравнимы с  $v_0$ , рассмотрение исчерпывается случаем, когда скорость частицы  $v \gg v_0$ . В настоящем разделе мы увидим, что различные явления в этих условиях можно анализировать весьма просто, используя разделение на свободные столкновения и резонансные явления (см. раздел 3).

Формулы для средней потери энергии могут быть записаны так:

$$(\overline{\Delta_e E})_f = N \Delta R B_e \sum_s \ln \left\{ \left( \frac{1}{4} \right) \eta_s^2 \left[ \frac{x}{\eta_s} \right]^{-1} \right\}, \quad (3.36)$$

$$(\overline{\Delta_e E})_r = N \Delta R B_e \sum_s \ln \{ \eta_s^2 [x]^{-2} \}, \quad (3.37)$$

где выражения в квадратных скобках должны быть заменены единицей, если они становятся меньше единицы; множитель в круглых скобках, как всюду ранее, нужно опустить для тяжелых частиц и сохранить для электрона; суммирование распространяется на все электроны в атоме, дающие положительное значе-

ние логарифму. В этих обозначениях полная потеря энергии может быть записана в следующей форме:

$$\overline{\Delta_e E} = N\Delta RB_e \sum_s \ln \left\{ \left( \frac{1}{4} \right) \eta_s^4 [x]^{-2} \left[ \frac{x}{\eta_s} \right] \right\}. \quad (3.38)$$

Как упоминалось в разделах 1 и 2, величина  $\overline{\Delta_e E}$  в широкой области  $x$  может быть вычислена более точно без того, чтобы проводить резкое разделение между свободными столкновениями и резонансными эффектами, но нужно заметить, что (3.38) при  $x < \eta_s$  практически совпадает с формулой Блоха.

Для  $v \sim c$ , когда  $x$  всегда меньше единицы, из раздела 3 следует, что, в то время как  $(\overline{\Delta_e E})_r$  существенно не изменяется, величина  $(\overline{\Delta_e E})_r$ , согласно (3.35), увеличивается:

$$(\overline{\Delta_e E})_r = N\Delta RB_e \sum_s \ln \eta_s^2 \gamma^2. \quad (3.39)$$

Эта формула приближенно соответствует формулам Бете [51] и Меллера [52].

Однако при больших  $\gamma$  необходимо принять во внимание (Ферми [30]), что взаимодействие атомов среды уменьшает резонансные эффекты, и тормозная способность перестает зависеть от сил связи, а определяется только плотностью электронов в среде.

Так же как в случае ядерных столкновений, важно рассмотреть статистическое распределение  $\Delta_e E$ . В частности, мы рассмотрим средний квадрат флуктуации  $\Omega_e^2$ , определяющий так называемый разброс пробегов, который более детально будет рассматриваться в гл. V. Первое подробное рассмотрение этого явления было дано независимо Фламмом [55, 56] и Бором [25] на основании простых соображений классической механики. Предположив, что индивидуальные потери энергии распределены согласно (3.1) из (2.24), пренебрегая нижним пределом  $T_1$  в сравнении с  $T_2 = T_m$  и суммируя по  $z_2$  электронам атома, получим

$$\Omega_e^2 = N\Delta RB_e T_m z_2. \quad (3.40)$$

Согласно (3.2) и (3.4), это выражение не зависит от  $v$ .

Так как в квантовой механике распределение индивидуальных потерь энергии также дается при больших  $T$  формулой (3.1), то нужно ожидать, что формула (3.40) в первом приближении правильна. При более точном рассмотрении нужно принять во внимание (Вильямс [54]), что распределение  $T$  дается формулой (3.1) только при  $T \gg I_s$ , тогда как столкновения, которые по классической механике сопровождаются малой передачей энергии, на самом деле приводят к резонансным явлениям, при которых  $T \sim I_s$ . Эта проблема была в случае  $x < 1$  детально рассмотрена Ливингстоном и Бете [1], а Титейка [57] с помощью метода Блоха распространил их исследования на все значения  $x$ . Поправки к (3.40) оказались, однако, малыми; поскольку дополнительные члены имеют высокий порядок по  $\eta_s^{-1}$ , величины этих поправок

вряд ли превышают пределы точности, получаемые современными методами<sup>1)</sup>.

При рассмотрении статистического распределения энергетических потерь  $\Delta_\epsilon E$  мы можем идти точно таким же путем, как при рассмотрении ядерного торможения в разделе 4 гл. II. Единственное изменение соответствующих формул состоит в замене одного логарифмического члена в  $\Delta_\epsilon E$  суммой таких членов  $\overline{\Delta_\epsilon E}$ . В случае тяжелых падающих частиц ( $m_1 \gg m_2 = \mu$ ) мы можем, таким образом, заключить, что для не слишком малых толщин вещества потери энергии при электронных столкновениях распределены согласно простому закону Гаусса с полушириной  $\Omega_\epsilon$ . Если, однако, падающей частицей является электрон, то распределение носит более сложный характер и состоит в основном из приблизительно гауссового пика и хвоста, простирающегося далеко за ширину пика. Вводя, совершенно аналогично с рассуждениями раздела 4 гл. II, величину

$$T^* = N \Delta R B_\epsilon z_2, \quad (3.41)$$

для наиболее вероятной потери энергии  $\overline{\Delta_\epsilon^* E}$  и ширины гауссового пика  $\Omega_\epsilon^*$  находим

$$\overline{\Delta_\epsilon^* E} = N \Delta R B_\epsilon \sum_s \ln \left\{ \frac{1}{4} \eta_s^* \frac{T^*}{T_m} \right\}, \quad (3.42)$$

$$(\Omega_\epsilon^*)^2 = N \Delta R B_\epsilon z_2 T^*. \quad (3.43)$$

Простая трактовка явлений ионизации может быть получена, если использовать разделение на свободные столкновения и резонансные эффекты. Часть ионизации, обусловленная свободными столкновениями, которые, по их определению, все ведут к ионизации, дается формулой Томсона (3.3), справедливой при  $x < \eta_s$ . При больших значениях  $x$  число свободных столкновений получается интегрированием  $N \Delta R d\sigma$  от  $D_s^*$  до  $T_m$ . Пренебрегая членами высших порядков, получаем число ионов

$$(\omega_I)_f = N \Delta R B_\epsilon \sum_s \frac{1}{I_s} \left[ \frac{x}{\eta_s} \right]^{-1}. \quad (3.44)$$

Обращаясь к резонансным эффектам, из фиг. 7 видим, что  $T$  имеет узкий максимум около  $I_s$ , и общее число процессов ионизации и возбуждения, происходящих с  $s$ -м электроном, будет всегда

<sup>1)</sup> В этой связи интересно, что в то время как прежние опыты определения разброса пробега  $\alpha$ -частиц давали значения  $\Omega$  несколько большие, чем (3.40), последние исследования [85] разброса энергии протонов, основанные на измерениях с помощью ядерных резонансов, дали близкое согласие с этой простой формулой.

близко к  $(\overline{\Delta_s E})_r / I_s$ . Для числа ионов мы можем поэтому написать

$$(\omega_I)_r = N \Delta R B_e \sum_s \delta_s \frac{1}{I_s} \ln (\eta_s^2 [x]^{-2}), \quad (3.45)$$

где  $\delta_s$  — численный множитель. Значение  $\delta_s$  зависит от распределения резонансных эффектов на возбуждения и ионизацию и, как следует из аргументов раздела 3, в первом приближении не зависит от заряда и скорости частицы (а также, в частности, от  $x$ ).

Для атома водорода Бете [48] вычислил  $\delta$  и получил значение, равное 0,28. Он сделал также попытку определить ионизацию атомов, содержащих несколько электронов, специально учитывая их взаимную связь. Поскольку, однако, при этом вычислении не учитывалось отклонение от кулонова поля из-за экранирования, оно не может быть точным. На это обстоятельство обратил недавно внимание Фано [58], который показал, что  $\delta_s$  может очень существенно зависеть от экранирования. В частности, Фано нашел, что для наиболее слабо связанных электронов в атоме, которые определяют в основном ионизацию, изменение  $\delta_s$  приблизительно компенсирует различие в  $I_s$ . Таким образом, было найдено основание для объяснения замечательного сходства явления ионизации в различных веществах с меняющимися в широких пределах потенциалами ионизации.

Для полного числа столкновений, приводящих к ионизации, из (3.44) и (3.45) получим

$$\omega_I = N \Delta R B_e \sum_s \frac{1}{I_s} \left\{ \left[ \frac{x}{\eta_s} \right]^{-1} + 2\delta_s \ln (\eta_s [x]^{-1}) \right\}. \quad (3.46)$$

Интересно отметить, что хотя из-за резонансных явлений при  $x \ll \eta$  ионизация может быть в несколько раз больше, чем требуется по формуле Томсона (3.3), при  $x \sim \eta$  (что соответствует осколкам деления в значительной части их пробега) формула Томсона весьма точна. При  $x \gg \eta$  ионизация существенно меньше, чем дается формулой (3.3).

При  $v \sim c$ , когда всегда  $x < 1$ , из раздела 3 следует, что поправки к (3.46) возникают, согласно (3.35), только из-за увеличения  $(\overline{\Delta_s E})_r$ . Таким образом, имеем:

$$\omega_I = N \Delta R B_e \sum_s \frac{1}{I_s} (1 + 2\delta_s \ln \gamma \eta_s), \quad (3.47)$$

что для водорода соответствует выражению, полученному Меллером [52].

Что касается сравнения ионизационной формулы с экспериментом, то обычно невозможно прямо отличить первичную ионизацию, состоящую в вырывании электрона при столкновении с падающей частицей, от вторичной ионизации, произведенной электро-

нами, которые получили скорость, большую, чем наименьший ионизационный потенциал среды. Электроны таких энергий практически могут возникать только при свободных столкновениях, но, конечно, ионизация, которую они производят, обусловлена как резонансными эффектами, так и свободными столкновениями. Точное определение вторичной ионизации представляет собой очень сложную задачу, которая может быть рассмотрена существующей теорией лишь приближенно, поскольку значительная часть эффекта обусловлена столкновениями атомов с электронами, скорость которых одного порядка с  $v_0$ .

Эта проблема анализировалась Бете [48], Вильямсом [54], Багге [59] и особенно Фано [58], который смог дать объяснение тому экспериментальному результату, что общая ионизация соответствует затрате энергии в 30—40 электрон-вольт на образование одного иона почти вне зависимости от рода вещества. Можно ожидать, что это число очень медленно изменяется с изменением заряда и скорости падающей частицы, но оно может зависеть от относительной доли свободных столкновений и резонансных эффектов в первичной ионизации. В частности, нужно заметить, что средняя энергия, затраченная на образование одного иона, может не быть точно одинаковой для осколков деления и быстрых  $\alpha$ -частиц из-за значительно меньшей роли резонансных эффектов в первом случае. Некоторое указание на то, что разница сравнительно мала, было получено Лассеном [60], который показал, что отношения ионизации к потере энергии в различных веществах для осколков деления и  $\alpha$ -частиц близки друг к другу.

### 5. Прохождение быстрых частиц в тяжелых веществах

Проблема взаимодействия между быстрыми частицами и тяжелыми атомами сложнее, чем задача о прохождении частицы через вещество, состоящее из легких атомов, рассмотренная в предыдущем разделе. Усложняется не только анализ атомных осцилляторов. Поскольку даже при  $v \gg v_0$  орбитальные скорости наиболее сильно связанных электронов могут быть сравнимы или даже превышать  $v_0$ , в этом случае простая теория, рассмотренная ранее, больше не применима. В случае  $z < 1$  обширная дискуссия экспериментального материала проведена Ливингстоном и Бете [1], которые получили полуэмпирические формулы и дали в этой связи также теоретическое рассмотрение роли атомных электронов с  $u_s \approx v$  в тормозной способности.

Интересная попытка получить общую формулу для тормозной способности была сделана Блохом [61], рассматривавшим методом Томаса-Ферми атом при далеких столкновениях, когда атомные постоянные наиболее существенны. В то время как для скоростей, превышающих наибольшую скорость  $u_s$ , этот метод может

быть применен, применить его к малым скоростям значительно труднее. Для настоящих целей, которые в первую очередь заключаются в получении зависимости различных эффектов от заряда и скорости частицы, мы будем пытаться на основе формул предыдущих разделов и посредством простой модели атома дать приближенные выражения для тормозной способности тяжелых атомов при всех значениях  $x$ . В частности, такое рассмотрение должно годиться для сравнения тормозной способности быстрых  $\alpha$ -частиц, для которых  $x < 1$ , и осколков деления, для которых  $x$  существенно больше чем единица.

При установлении распределения электронных скоростей  $u_s$ , которые входят в формулы раздела 4, удобно написать

$$u_s = \frac{z_s^*}{v_s} v_0, \quad (3.48)$$

где  $z_s^*$  представляет собой меру силы поля в области нахождения электрона по сравнению с полем ядра водорода;  $v_s$  — так называемое эффективное квантовое число. В случае тяжелых атомов наиболее сильно связанные электроны, принадлежащие к оболочкам  $K$ ,  $L$  и т. д., двигаются в поле приблизительно кулонового типа,  $z_s^* \sim z_2$ , и имеют значения  $v_s$ , очень близкие к 1, 2 и т. д. соответственно. Далее, наиболее слабо связанные электроны, для которых  $z_s^* \sim 1$ , опять имеют значения  $v_s$  порядка единицы. В большой промежуточной области  $v_s$  имеет плоский максимум, достигающий значения, близкого к  $z_2^{1/3}$ , что согласуется с результатами применения метода Томаса-Ферми.

Так как  $z_s^*$  приближенно представляет число  $n(u_s)$  атомных электронов со скоростями, меньшими чем  $u_s$ , то имеем

$$n(u_s) \sim z_2^{1/3} \frac{u_s}{v_0}. \quad (3.49)$$

Эта формула законна при  $v_0 < u_s < z_2^{1/3} v_0$ . Для значений  $u_s$  вне этой области мы должны считать  $n$  некоторой функцией  $z_2$  и  $u_s$ , которая для  $u_s \sim v_0$  порядка единицы и приближается к  $z_2$  для  $u_s \sim z_2 v_0$ . Для того чтобы избежать усложнений, мы в настоящем обзоре ограничимся простым выражением (3.49) и отложим вопрос о его границах применимости до рассмотрения специальных задач в следующих главах.

Что касается тормозной способности, то мы сначала рассмотрим более простое выражение для той ее части, которая связана с резонансными эффектами. Из (3.22) и (3.37) получим

$$(\overline{\Delta_e E})_r = 2N\Delta RB_e \int \ln \left\{ \frac{2v}{u_s} [x]^{-1} \right\} dn(u_s). \quad (3.50)$$

При вычислении этого интеграла мы можем в первом приближении использовать простое выражение (3.49) и интегрировать от  $u_s = 0$  до значения  $u_s$ , при котором логарифм исчезает. Роль

наиболее сильно связанных электронов, для которых соответствующие члены в (3.50) неправильны, невелика, если  $v \gg v_0$ . Таким образом, получим

$$(\overline{\Delta_e E})_r = 2N\Delta RB_e n_e [x]^{-1}, \quad (3.51)$$

где

$$n_e = z_2^{1/3} \frac{2v}{v_0}, \quad (3.52)$$

согласно (3.49), может рассматриваться как мера числа атомных электронов, играющих существенную роль в торможении.

Вклад свободных столкновений в тормозную способность может быть определен из (3.36). Ограничиваясь случаем частиц с массой, много большей, чем масса электрона, интегрируя для  $x < 1$  от  $u_s = 0$  до  $u_s = 2v$ , а для  $x > 1$  разбивая промежуток интегрирования на две части — от 0 до  $2vx^{-1}$  и от  $2vx^{-1}$  до  $2vx^{-1/2}$  (ср. стр. 62), получим

$$(\overline{\Delta_e E})_f = N\Delta RB_e n_e (3 [x]^{-1/3} - [x]^{-1}). \quad (3.53)$$

Складывая это выражение с (3.51), получим выражение для полной потери энергии

$$(\overline{\Delta_e E}) = NRB_e n_e (3 [x]^{-1/3} + [x]^{-1}). \quad (3.54)$$

Интересно отметить, что, несмотря на поверхностный характер рассуждений, формула (3.54) при  $x < 1$  дает зависимость  $\overline{\Delta_e E}$  от  $v$  и  $z_2$ , приблизительно согласующуюся с наблюдениями над  $\alpha$ -частицами, для которых тормозная способность в тяжелых веществах в значительном интервале энергии приблизительно пропорциональна  $v^{-1}$  и некоторой (слегка отличающейся от  $1/3$ ) степени  $z_2$ . Даже если численное значение (3.54) окажется неточным, мы все же можем использовать это выражение при сравнении тормозной способности  $\alpha$ -частиц и осколков деления.

Что касается относительной роли в торможении свободных столкновений и резонансных эффектов, то, в то время как при  $x < 1$  они одинаковы, при  $x > 1$  роль свободных столкновений становится преобладающей даже в большей степени, чем в легких веществах. Так, при  $x = 8$ , что приблизительно соответствует осколкам деления на значительной части пробега (ср. раздел 3 гл. V), доля резонансных эффектов составляет только 15%.

При  $v \sim c$  необходимо ввести изменения в приведенную выше формулу. Дело не только в том, что должны быть введены релятивистские поправки, но и в том, что сами предположения, на которых основывался вывод (3.54), не выполняются, так как при очень больших  $u_s$  не выполняется формула (3.49). В этой области скоростей упомянутый выше анализ Блоха [61] становится более подходящим. Интересно, что в основном те же результаты могут быть получены из простых соотношений, несколько более общих, чем (3.49), для зависимости  $n$  от  $u_s$  и  $z_2$ . Таким способом (см. Прило-



жение) возможно также определить влияние взаимодействия между атомами, которое при больших  $\gamma$  становится существенным для торможения.

Для среднего квадрата флюктуации  $\Delta_e E$  вместо формулы (3.40), справедливой для легких атомов, мы получим следующее выражение:

$$\Omega_e^2 \sim N \Delta R B_e T_m n_e [x]^{-1/3}, \quad (3.55)$$

так как  $n_e [x]^{-1/3}$  приблизительно равно числу электронов, дающих существенный вклад в потерю энергии при свободных столкновениях, как это следует из рассуждений, приведших к формуле (3.53).

Можно, конечно, попытаться таким же образом определить ионизационный эффект, но поскольку, в противоположность торможению, ионизация зависит в первую очередь от наиболее слабо связанных электронов, мы находимся в этом случае вне области применимости этого простого приближенного способа.

Во всех оценках этой главы скорость частицы  $v$  предполагалась большой по сравнению с  $v_0$ . Для меньших скоростей, когда  $v \lesssim v_0$ , теория прохождения частиц через вещество наталкивается на большие трудности; в частности, явление усложняется процессами захвата и потери электрона падающей частицей. Эти процессы не только изменяют эффективный заряд частицы при столкновениях с атомными электронами, но при уменьшении скорости сами составляют источник передачи энергии. К этим вопросам мы вернемся в гл. IV в связи с вопросами перезарядки.

## Глава IV

# ПЕРЕЗАРЯДКА ПРИ АТОМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

### 1. Постановка проблемы

Первое доказательство того, что быстрая частица при прохождении через вещество захватывает электроны, было получено Гендерсоном [62], установившим, что пучок  $\alpha$ -частиц частично состоит из однократно заряженных ионов, число которых быстро увеличивается при уменьшении скорости. Это явление детально изучалось Резерфордом [63], который показал, что непрерывный захват и потеря электронов происходит на протяжении всего пробега, причем даже возможно измерить частоту перезарядки на различных участках пробега.

Так, было найдено, что эффективное сечение  $\sigma_1$  для потери электрона в воздухе изменяется приблизительно обратно пропорционально скорости, в то время как поперечное сечение  $\sigma_c$  для захвата изменяется приблизительно как  $v^{-5}$ . Кроме того, отношение вероятностей захвата и потери электрона оказалось приблизительно одинаковым для всех исследованных веществ.

В противоположность потере электрона, которую можно сравнивать с обычной ионизацией, захват электрона представляет собой более сложное явление, в котором принимают участие по крайней мере три взаимодействующие частицы. Первая попытка теоретического объяснения явления была сделана Фаулером [64], который сравнил баланс между захватом и потерей электронов  $\alpha$ -частицами с термодинамическим равновесием между  $\text{He}^{++}$  и  $\text{He}^-$  в электронной атмосфере с температурой, соответствующей средней скорости электронов  $v$ , и плотностью, сравнимой с плотностью распределения электронов в атомах. Хотя такое рассмотрение оказалось в согласии с экспериментальными результатами, сравнение с термодинамическим равновесием не может быть использовано полностью, особенно по отношению к взаимодействию между  $\alpha$ -частицей и легкими атомами, орбитальные скорости электронов в которых малы в сравнении с  $v$ . В самом деле, в этом случае скорости электронов по отношению к  $\alpha$ -частице практически все имеют одно и то же направление, в противоречие с требованиями термодинамического равновесия.

Более детальное изучение механизма захвата показало, что влияние взаимодействия электронов в атоме мало по сравнению с эффектом изменения импульса, происходящего в поле ядра. Первоначальное качественное рассмотрение (Бор [43]) показало, в частности, что соотношение между захватом и потерей должно

быть существенно различным в наиболее легких и в наиболее тяжелых веществах. Это было подтверждено Якобсеном [65], который нашел, что  $\sigma_c$  для быстрых  $\alpha$ -частиц в водороде исчезающе мало по сравнению с  $\sigma_c$  в воздухе, в то время как  $\sigma_l$  в водороде того же порядка величины как в других веществах и может быть определено с хорошей точностью. Подробная теория захвата электронов  $\alpha$ -частицами в легких и тяжелых веществах была развита Томасом [66] на основе классической механики; после развития квантовой механики проблема была пересмотрена Оппенгеймером [67] и особенно Бринкманом и Крамерсом [68]. Различие между результатами последних авторов и Томсона, как мы увидим, иллюстрирует область применения различных приближенных методов в атомной механике.

В следующих разделах будет дан общий обзор явления захвата и потери электрона проходящей частицей и специально обращено внимание на зависимость явления от заряда и скорости частицы. Для этой цели мы сначала рассмотрим случай  $\alpha$ -частиц в различных тормозящих веществах, а после этого рассмотрим баланс между потерей и захватом электрона сильно заряженной частицей. Последняя проблема особенно интересна в связи с поведением осколков деления, которые на всем пробеге несут значительное число связанных электронов, причем это число постепенно увеличивается по мере замедления осколка. Таким образом, эффективный заряд при электронных столкновениях существенно изменяется вдоль пути. Поэтому соотношение между пробегом и скоростью осколков деления обнаруживает существенное отличие от аналогичного соотношения для легких частиц.

## 2. Поперечное сечение для потери электрона легкими ядрами

Явление потери электрона, как уже упоминалось, близко к явлению ионизации быстрыми частицами, и может быть рассмотрено теми же методами, которые использовались в гл. III. Аналогия особенно очевидна, если мы пользуемся системой отсчета, в которой  $\alpha$ -частица находится в покое и подвергается бомбардировке атомами тормозящего вещества. Проблема особенно проста в случае водорода и гелия, где размеры электронных орбит больше или сравнимы с радиусом  $a_\alpha$  связанного состояния электрона около  $\alpha$ -частицы.

В самом деле, в этом случае мы можем для близких столкновений, когда атомы проникают друг в друга, рассматривать ионизацию ядром и электронами приблизительно независимо друг от друга. Для скоростей, больших по сравнению с  $v_0$ ,  $x < 1$ , и, таким образом, согласно гл. III раздел 3, рассматриваемые столкновения принадлежат к так называемым «свободным столкновениям» ( $P < a_\alpha$ ; ср. стр. 63), при которых можно пренебречь силами

связи. При более далеких столкновениях ( $P > a_a$ ), когда атом проходит вне области, где расположен электрон, связанный  $\alpha$ -частицей, эффект отдельных атомных частиц на нейтральный атом в сильной степени компенсируется. «Резонансные эффекты», которые при  $\kappa < 1$  составляют значительную часть ионизации отдельной заряженной частицей, здесь, таким образом, играют незначительную роль.

В обозначениях гл. III в первом приближении получим

$$\sigma_I = \frac{1}{N\Delta R} \sum (\omega_I)_f, \quad (4.1)$$

где сумма распространяется на эффекты, зависящие от ядер и электронов атомов тормозящего вещества. Из (3.44) и (3.2) получим

$$\sigma_I = \frac{2\pi s^4}{\mu v^2} (z_1^2 + z_2) \frac{1}{I}, \quad (4.2)$$

где  $I$  — энергия, необходимая для удаления электрона от частицы,  $z_2$  — атомный номер вещества, через которое частица проходит. Полагая  $I = \frac{1}{2} \mu z_1^2 v_0^2$  и вводя  $a_0^2$  из (2.1) как удобную меру для поперечного сечения, формулу (4.2), используя еще (2.5), можно переписать так:

$$\sigma_I = 4\pi a_0^2 z_1^{-2} (z_1^2 + z_2) \left(\frac{v_0}{v}\right)^2. \quad (4.3)$$

В случае  $\alpha$ -частицы] ( $z_1 = 2$ ) и водорода ( $z_2 = 1$ ) мы найдем

$$\sigma_I = 2\pi a_0^2 \left(\frac{v_0}{v}\right)^2, \quad (4.4)$$

что удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. Так, Якобсен [65] нашел при  $v \sim 8v_0$  средний путь для потери электрона около  $6 \cdot 10^{-3}$  см при нормальных условиях, чему соответствует  $\sigma_I = 3 \cdot 10^{-18}$  см<sup>2</sup>, в то время как (4.4) дает  $\sigma_I = 2,5 \cdot 10^{-18}$  см<sup>2</sup>.

Для веществ с большими атомными номерами, где для наиболее сильно связанных электронов  $a_s < a_a$ , эти электроны и ядро даже в близких столкновениях действуют не независимо на электрон  $\alpha$ -частицы. Полный эффект будет уменьшен экранировкой ядерного поля, в результате чего  $\sigma_I$  будет значительно меньше, чем (4.3). Несправедливость рассмотренной формулы для очень больших значений  $z_2$  очевидна также из того обстоятельства, что  $\sigma_I$  становится, по (4.3), велико по сравнению с размерами атома. В предельном случае большого  $z_2$  определение  $\sigma_I$  особенно просто, так как поле внутри атома столь интенсивно, что почти каждое столкновение, при котором  $\alpha$ -частица проходит через атом (если только  $v \gg v_0$ ), приводит к отрыванию связанного электрона.

В этом случае мы должны ожидать, что  $\sigma_I$  того же порядка, как  $\pi a_0^2$ , и в основном не зависит от  $z_2$  и от  $v$ .

Для промежуточных значений  $z_2$  необходим более подробный анализ влияния атомного поля. Здесь мы имеем проблему, относящуюся к вопросам сильного экранирования, рассмотренным в разделе 5 гл. I и упомянутым в разделе 1 гл. II в связи с рассеянием быстрых электронов при ядерных столкновениях.

В настоящем случае из (2.9) следует, что, например, для воздуха ( $z_2 \sim 8$ )  $\zeta \sim 1$  для  $v \sim 6v_0$ . Для таких значений  $\zeta$  поле может быть представлено в основной области потенциалом типа (1.40) при  $n=2$ , что соответствует экранированному потенциалу (1.28) при расстояниях, близких к  $r = a = a_0 z_2^{-1/3}$ . Таким образом, согласно (1.44), для значения  $k$  имеем

$$k = e^{-1} z_2^{2/3} a^2 a_0. \quad (4.5)$$

Как показано в разделе 5 гл. I, отклонение в таком поле можно рассматривать по классической механике для углов, больших чем (1.37):

$$\vartheta^* = z_2^{1/3} \frac{v_0}{v}. \quad (4.6)$$

Для наших целей важно сравнить этот угол с углом  $\vartheta_I$ , соответствующим передаче энергии, равной энергии ионизации  $I = \frac{1}{2} \mu z_1^2 v_0^2$ . Из (1.8) и предполагая  $z_1 v_0 < v$ , получим

$$\vartheta_I = z_1 \frac{v_0}{v}, \quad (4.7)$$

откуда видно, что при  $z_1 \ll z_2^{1/3}$  мы можем приближенно рассматривать процесс ионизации с помощью классической механики.

Таким образом, поперечное сечение потери электрона можно записать формулой  $\sigma_I = \pi \iota^2$ , где  $\iota$  — прицельный параметр, соответствующий  $\vartheta = \vartheta_I$ . Используя формулы (1.42), (4.5) и (4.7), получим

$$\sigma_I \sim \pi a_0^2 z_2^{2/3} z_1^{-1} \left( \frac{v_0}{v} \right). \quad (4.8)$$

Это выражение пропорционально  $v^{-1}$  в согласии с опытами Резерфорда, который получил такую зависимость для  $\alpha$ -частиц в воздухе на большой части пробега. При  $v \sim 8v_0$  Резерфорд получил средний путь для потери электрона равным 0,011 мм при нормальных условиях, что дает  $\sigma_I = 1,6 \cdot 10^{-17}$  см<sup>2</sup>, в то время как формула (4.8) дает  $\sigma_I \sim 2 \cdot 10^{-17}$  см<sup>2</sup>. Принимая во внимание приближения, допущенные при вычислениях, согласие нужно считать удовлетворительным.

### 3. Поперечное сечение для захвата электрона $\alpha$ -частицей

В то время как потеря электрона в основном есть задача двух тел, захват электрона представляет собой явление, в котором происходит обмен энергией и импульсом по крайней мере между тремя частицами. При рассмотрении проблемы с точки зрения классической механики (Томас [66]) захват электрона в легких веществах описывался как двойной процесс. Сначала происходит столкновение между падающей частицей и атомным электроном, в котором последний получает скорость, равную по величине  $v$ , затем происходит столкновение этого электрона с атомным ядром, в результате которого происходит отклонение, после чего скорость электрона не только по величине, но и по направлению близко совпадает со скоростью захватывающей частицы. Поскольку в каждом из этих процессов мы имеем дело с отклонениями на большие углы, мы могли бы ожидать, что такие вычисления приведут в основном к правильному результату, даже когда  $\kappa$  мало по сравнению с единицей, и применение классической механики незаконно для описания деталей столкновения.

Нужно, однако, представлять себе, что в явлении захвата мы имеем дело не просто с двумя отдельными столкновениями, индивидуальный эффект которых, как в проблемах, рассмотренных в гл. I, определится волновыми функциями на больших расстояниях от рассеивающего центра. Напротив, процесс захвата электрона представляет из себя сложный процесс столкновения, для результата которого может быть решающей интерференция рассеянных волновых пакетов в то время, когда атомные поля перекрываются. Как показали Бринкман и Крамерс [68], при детальном рассмотрении явления с помощью приближенного метода Борна вероятность захвата пренебрежимо мала, за исключением тех столкновений, когда два ядра проходят друг от друга на расстояниях, сравнимых с длиной волны  $\lambda$ , соответствующей электрону со скоростью  $v$ . Поэтому неудивительно, что их вычисления привели к зависимости  $\sigma_c$  от заряда ядер и их скорости, существенно отличающейся от результата, полученного по классической механике.

Для поперечного сечения захвата ядром  $z_1$  электрона, связанного у ядра  $z_2$ , Бринкман и Крамерс получили выражение, которое при  $v$ , больших по сравнению с  $z_1 v_0$  и  $z_2 v_0$ , может быть приближенно записано так:

$$\sigma_c = \frac{2^{18}}{5} \pi a_0^2 z_1^5 z_2^5 \left( \frac{v_0}{v} \right)^{12}. \quad (4.9)$$

Для меньших скоростей вычисления не могут претендовать на какую-либо точность, поскольку приближения законны только

в случае малости величин  $x_1 = 2z_1 \frac{v_0}{v}$  и  $x_2 = 2z_2 \frac{v_0}{v}$ . Из-за очень быстрого изменения со скоростью сечение  $\sigma_c$  становится особенно малым при  $v \gg v_0$ , что объясняет отрицательный результат Якобсена, пытавшегося измерить поперечное сечение для быстрых  $\alpha$ -частиц в водороде.

Для скорости частицы того же порядка величины, что орбитальные скорости электрона до и после его захвата, ни классическая механика, ни приближение Борна не могут дать точного результата. Однако при  $x_1 \sim x_2 \sim 1$  вычисления Томаса, а также Бринкмана и Крамерса дают поперечное сечение захвата того же порядка, что площадь орбиты. В этом случае поперечное сечение захвата будет сравнимо с поперечным сечением для потери, и частица будет в течение значительной доли своего пути нести связанный электрон. Это согласуется с экспериментом над медленными протонами или  $\alpha$ -частицами в водороде и гелии, когда для скоростей порядка  $v_0$  было доказано, что средние значения зарядов частиц заметно отличаются от 1 или 2 соответственно.

Недавно эти измерения обсуждались Книппом и Теллером [69], которые пытались из эмпирического значения среднего квадрата заряда частицы определить поправки, которые должны быть введены из-за явления захвата в формулы для торможения медленных  $\alpha$ -частиц или протонов. Однако, применяя такие поправки, нужно помнить не только то, что приближения, использованные при выводе формулы для торможения, не справедливы при  $v \sim v_0$ , но также и то, что сам процесс захвата в этих условиях представляет собой источник передачи энергии.

Для захвата электрона  $\alpha$ -частицей в тяжелых веществах  $\sigma_c$  оценивалось Томасом [66] на основе классической механики, а на основе квантовой механики — Бринкманом и Крамерсом [68]. Хотя оба метода дали приблизительное согласие с экспериментальными результатами, подобные вычисления не могут претендовать на большую точность. В самом деле, основную роль для захвата в тяжелых веществах, атомы которых содержат электроны с различными энергиями связи, играют электроны с орбитальными скоростями, сравнимыми с  $v$ , и как раз в этом случае процесс захвата не может рассматриваться ни по классической механике, ни с помощью приближенного метода Борна. Для целей последующей дискуссии поучительно показать, как качественное определение  $\sigma_c$  может быть получено из простых статистических соображений.

Мы заметим, что электроны с орбитальными скоростями  $u \sim v$  благодаря действию атомного поля изменяют импульс на величину, сравнимую с  $mv$ , за время, соответствующее прохождению частицы через область орбиты электрона. Следовательно, изменение скорости, для которого в легких атомах требуется специальное

двойное столкновение, здесь происходит при каждом столкновении, в котором энергия порядка  $\frac{1}{2} \mu v^2$  передается электрону с орбитальной скоростью, сравнимой с  $v$ . Совершенно независимо от величины  $x$  поперечное сечение такого столкновения, согласно (3.1) и (3.2), теперь приближенно равно

$$\sigma \sim 4\pi a_0^2 z_1^2 \left(\frac{v_0}{v}\right)^4. \quad (4.10)$$

Поскольку размеры области, занятой электронами с орбитальной скоростью  $u \sim v$ , малы по сравнению с радиусом орбиты электрона после захвата  $a_1 = a_0 z_1^{-1}$ , вероятность  $f$  того, что после первого столкновения произойдет захват, будет того же порядка величины, как и доля пространства скоростей, соответствующая относительным скоростям падающей частицы, сравнимым с  $z_1 v_0$ , т. е.

$$f \sim z_1^3 \left(\frac{v_0}{v}\right)^3. \quad (4.11)$$

Далее, для  $v \gg v_0$  число  $n$  атомных электронов с орбитальной скоростью  $u$ , сравнимой с  $v$  (скажем,  $\frac{1}{2} v < u < \frac{3}{2} v$ ), будет, согласно (3.49), приблизительно равно

$$n = z_2^{1/3} \left(\frac{v}{v_0}\right), \quad (4.12)$$

и, следовательно, имеем

$$\sigma_c \sim \sigma f n \sim 4\pi a_0^2 z_1^5 z_2^{1/3} \left(\frac{v_0}{v}\right)^8. \quad (4.13)$$

Этот результат согласуется с экспериментами Резерфорда, который получил, что  $\sigma_c$  для  $\alpha$ -частицы в воздухе пропорционально  $v^{-8}$ . Более того, для  $\alpha$ -частицы с  $v = 1,8 \cdot 10^9$  см·сек<sup>-1</sup>  $\sim 8v_0$ . Резерфорд нашел средний путь захвата в воздухе при нормальном условии равным 2,2 мм, что соответствует  $\sigma_c = 8 \cdot 10^{-20}$  см<sup>2</sup>, в то время как (4.13) дает  $\sigma_c \sim 10^{-19}$  см<sup>2</sup>. Близкое согласие, конечно, более или менее случайно ввиду грубых приближений, сделанных при выводе. Далее интересно отметить, что сравнение формулы (4.13) с результатом для  $\tau_1$ , полученным в разделе 2, показывает, что отношение  $\sigma_c$  и  $\tau_1$  в тяжелых веществах, в согласии с наблюдениями, лишь медленно изменяется с изменением  $z_2$ .

#### 4. Захват и потеря электрона сильно заряженными частицами

В то время как быстрые протоны или  $\alpha$ -частицы на большей части пробега лишь редко несут электрон, положение существенно другое для тяжелых ядер, подобных осколкам деления, которые даже в начале своего пробега несут большое число связанных электронов. Эта разница объясняется тем обстоятельством, что



сильно заряженное ядро способно связать электроны с орбитальными скоростями, большими, чем первоначальная скорость частицы  $v$ . При столкновениях с атомами тормозящего вещества отрыв от частицы электронов с  $u \gg v$  невозможен или, во всяком случае, очень мало вероятен, в то время как менее сильно связанные электроны легко отрываются при таких столкновениях. Что касается захвата электронов, то здесь положение обратное. Тогда как электроны легко захватываются в состоянии с орбитальными скоростями  $u \gtrsim v$ , захват электронов в состоянии с  $u \ll v$  весьма мало вероятен в сравнении с потерей. Таким образом, без какого-либо детального рассмотрения поперечного сечения захвата и потери электрона мы можем заключить, что ядро с большим зарядом в среднем будет нести столько связанных электронов, сколько приблизительно содержит нейтральный атом, для которого  $u > v$ .

В первой дискуссии вопроса о торможении осколков деления (Бор [49, 50]) было показано, что общий характер зависимости между пробегом и скоростью может быть объяснен, если определить эффективный заряд  $z_1^*$  на основе вышеуказанных предположений. Подобная точка зрения была использована Лембом [34], который считал  $z_1^*$  равным заряду иона, образованного удалением всех электронов, энергия связи которых меньше чем  $\frac{1}{2} \mu v^2$ . Простая формула для  $z_1^*$  (Бор [50]), согласно (3.49), выглядит так:

$$z_1^* \sim z_1^{1/2} \frac{v}{v_0} \quad (4.14)$$

и может применяться в области  $v_0 < v < z_1^{1/2} v_0$ . На основании более детального изучения распределения скоростей атомных электронов посредством метода Томаса-Ферми в работах [69, 70] была сделана попытка более точного определения  $z_1^*$ , основанная на отыскании полуэмпирическими методами отношения между скоростью частицы и орбитальной скоростью наименее сильно связанных электронов в ионе. Однако, как указывается в этих работах, само предположение о критической орбитальной скорости, при которой захват и потеря электрона равновероятны, содержит заметные элементы произвола.

Первое непосредственное измерение заряда осколков деления было произведено Перфиловым [71], который, измеряя кривизну пути осколка в магнитном поле, определил, что первоначальный заряд приблизительно равен 20. Поскольку для двух главных групп осколков деления урана величины  $z_1$  равны около 38 и 54, а начальная скорость порядка  $6v_0$  и  $4v_0$  соответственно, результат Перфилова приблизительно согласуется с (4.14). Более подробное изучение было недавно предпринято Лассеном [72, 60], который был в состоянии измерить заряд каждой группы в отдельности,

а также смог сделать заключение об изменении  $z_1^*$  вдоль части пробега. Начальное значение заряда оказалось равным 20 и 22 для легкой и тяжелой группы соответственно. Эти числа опять того же порядка величины, что и получаемые по (4.14), хотя, исходя из этой простой формулы, следует ожидать несколько большего значения для легкой, чем для тяжелой группы (ср. [72]). Экспериментальные результаты легко объясняются тем фактом, что в начале пробега у легких осколков недостает более чем половины электронов, и мы находимся в такой области, где эффективное квантовое число не может считаться постоянным и близким к  $z_1^{1/2}$  (см. стр. 73). Это обстоятельство также объясняет наблюдения Лассена, согласно которым изменение  $z_1^*$  со скоростью для легких осколков в начале пробега происходит медленнее, чем должно быть по (4.14).

В гл. V мы рассмотрим соотношение между скоростью и пробегом осколков деления и, в частности, исследуем, что можно сказать об эффективном заряде осколков на основании измерений пробега и ионизации. Как мы увидим, экспериментальные результаты хорошо согласуются с той зависимостью  $z_1^*$  от  $z_1$  и  $v$ , которая получается из намеченных здесь простых соображений. Хотя эта зависимость получилась одинаковая для всех тормозящих веществ, имеются некоторые указания, что  $z_1^*$  при данной скорости немного больше для легких веществ. Это обстоятельство может быть объяснено таким же образом, как аномальное поведение  $\alpha$ -частиц в водороде по отношению к захвату электронов. Однако, чтобы исследовать этот вопрос, необходимо несколько детальнее рассмотреть проблему захвата и потери электрона.

В случае легких веществ мы можем применить соображения разделов 2 и 3. По аналогии с (4.2) и (4.1), найдем

$$\sigma_1 \sim 4\pi a_0^2 z_1^{1/2} z_2^2 \left(\frac{v_0}{v}\right)^3, \quad (4.15)$$

если примем во внимание, что число оторванных электронов приблизительно равно  $z_1^{1/2} \frac{v}{v_0}$ , а их ионизационный потенциал порядка  $\frac{1}{2} \mu v^2$ . Для определения  $\sigma_2$  используем принцип детального равновесия, согласно которому поперечное сечение для передачи электрона от одного иона к другому в определенное квантовое состояние должно быть такое же, как поперечное сечение обратного процесса, что иллюстрируется симметрией выражения (4.9). В действительности захват электрона тяжелым ионом от легкого атома не в точности обратен процессу захвата электрона легким ионом при столкновении с тяжелым нейтральным атомом. Тем не менее недостаток внешних электронов в ионе сказывается

главным образом в увеличении числа пустых состояний, в которые может захватываться электрон, и этот эффект в основном компенсируется числом электронов, которые могут быть захвачены в обратном процессе. Таким образом, приблизительно мы можем написать

$$\sigma_c \sim 4\pi a_0^2 z_1^{1/3} z_2^5 \left(\frac{v_0}{v}\right)^6, \quad (4.16)$$

в соответствии с (4.13), если там поменять местами  $z_1$  и  $z_2$ .

Процессы захвата и потери электрона в тяжелых веществах очень трудно исследовать в деталях, однако очевидно, что имеется заметная вероятность обмена электронами между ионом и тормозящими атомами в каждом столкновении, при котором ион проходит через область атома, содержащую электроны с орбитальными скоростями, сравнимыми с  $v$ . Как следует из соображений, аналогичных использованным в (3.48), размеры иона приблизительно равны

$$a_1^* \sim a_0 \frac{v_s^2}{z_1^*} \sim a_0 z_1^{1/3} \frac{v_s}{v}, \quad (4.17)$$

где мы положили  $v_s \sim z_1^{1/3}$  и заменили  $z_1^*$  согласно (4.14).

Подобное же выражение справедливо для размеров атомной области, ответственной за процесс обмена. Поскольку  $\sigma_1$  и  $\sigma_c$  в рассматриваемом случае одного порядка величины, мы получаем симметричное выражение

$$\sigma_1 \sim \sigma_c \sim \pi a_0^2 (z_1^{1/3} + z_2^{1/3})^2 \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 \quad (4.18)$$

в качестве грубого приближения.

Сравнивая формулу (4.18) с (4.15) и (4.16), мы отмечаем значительно более слабую зависимость поперечных сечений от  $z_2$  и  $v$  в тяжелых веществах, чем в легких. В частности, отношение  $\sigma_c/\sigma_1$ , которое в первом случае всегда порядка единицы, в последнем случае быстро уменьшается при увеличении скорости, и, особенно в случае водорода ( $z_2=1$ ), очень мало при  $v \gg v_0$ . Как уже упоминалось, для таких скоростей мы должны ожидать, что средний заряд иона несколько больше в легких веществах, чем в тяжелых, хотя он всегда остается того же порядка величины, как то следует по (4.14).

Для дискуссии вопроса о торможении осколков деления (гл. V) существенно рассмотреть, до каких пор осколок может рассматриваться как точечный заряд. Мы отметим прежде всего, что для столкновения между свободным электроном и быстрым ионом с зарядом (4.14) из (3.16) имеем

$$\kappa = 2z_1^* \frac{v_0}{v} \sim 2z_1^{1/3}, \quad (4.19)$$

что для осколков деления всегда существенно больше, чем единица. Такие столкновения, поэтому, могут с хорошим приближением рассматриваться классической механикой, и, согласно гл. I, диаметр столкновения  $b$ , соответствующий соударению между зарядами  $z_1^* e$  и  $-e$ , является подходящей мерой минимального прицельного параметра, существенного для торможения. Сравнивая (1.4) и (4.17), мы видим, что  $b \sim 2a_1^*$ , и поэтому внутренняя структура иона играет только очень малую роль.

В то время как свойства и поведение осколков деления могут быть рассмотрены с помощью простых соображений, если  $v$  велико по сравнению с  $v_0$ , проблема становится значительно более сложной при скоростях, близких к  $v_0$ . Не только определение  $z_1^*$  становится очень неопределенным, когда частица приближается к нейтральной, но, кроме того, эта частица не может больше рассматриваться как точечный заряд в электронных столкновениях. Однако, как мы увидим, большая неопределенность в определении электронного торможения становится несущественной благодаря преобладающему влиянию ядерных столкновений на торможение таких тяжелых частиц по мере приближения к концу пробега.

---

,

## Глава V

### СВЯЗЬ МЕЖДУ СКОРОСТЬЮ И ПРОБЕГОМ

#### 1. Общая постановка задачи

Как хорошо известно, измерения пробега часто представляют удобное средство для определения первоначальной скорости быстрых частиц. В самом деле, во многих случаях большинство частиц постепенно тормозится, не испытывая больших отклонений, и, таким образом, все частицы пучка с одинаковой скоростью проходят почти одно и то же расстояние от источника. Как раз в этом отношении имеется существенная разница между поведением электронов и тяжелых частиц. В то время как в последнем случае совместный эффект слабых отдельных столкновений приводит к торможению, аналогичному торможению движущегося тела в вязкой среде, в первом случае благодаря частым сильным столкновениям мы имеем дело с явлением, аналогичным поглощению пучка электромагнитного излучения, который затухает по экспоненциальному закону.

Такое типичное поглощение особенно ясно выступает при прохождении быстрых электронов через тяжелые вещества, где отклонения на большие углы происходят с большой вероятностью даже на таком участке пробега, на котором потеря энергии составляет только малую долю полной кинетической энергии. В самом деле, тормозная способность для быстрых  $\beta$ -частиц приблизительно пропорциональна атомному номеру вещества  $z_2$ , в то время как вероятность ядерного рассеяния внутри данного участка пробега пропорциональна  $z_2^2$ . Таким образом, простые рассуждения показывают (Бор [25]), что с вероятностью порядка единицы пучок электронов будет рассеян прежде, чем частицы потеряют заметную часть своей кинетической энергии. Это согласуется с экспериментами, согласно которым в наиболее легких веществах  $\beta$ -частицы имеют вполне определенный пробег, тогда как в тяжелых веществах интенсивность пучка падает почти экспоненциально. Эта проблема подробнее рассматривалась Боте [30] на основе изучения многократного рассеяния.

Если использовать анализ, произведенный в гл. II и III, главные результаты могут быть представлены следующим образом. Если ввести наиболее вероятную потерю энергии при электронном столкновении, то из формулы (2.46) для многократного рассеяния получим

$$(\Psi^*)^2 = z_2^2 \frac{L_\nu}{L_e} \frac{\overline{\Delta_e^* E}}{E}, \quad (5.1)$$

где  $L_\nu$  и  $L_e$  — логарифмы в формулах (2.35) и (3.42) для ядерной и электронной тормозной способности соответственно. Так как  $L_e$  сравнимо с  $z_2 L_\nu$ , то для больших значений  $z_2$  имеем  $\Psi^* \sim 1$  даже при  $\Delta_e^* E \ll E$ , и только для легчайших веществ, как то следует из более подробного вычисления логарифмических членов,  $\Psi^*$  остается мало при  $\Delta_e^* E \sim E$ .

В случае тяжелых частиц эффект рассеяния, вообще говоря, играет несущественную роль, и мы имеем дело с вполне определенным пробегом, за исключением некоторого разброса благодаря статистическим флуктуациям. Предполагая  $v \ll c$  и используя обозначения (5.1), из формул, приведенных во второй и третьей главах, получим

$$\frac{dv}{dR} = 2\pi N \frac{(z_1^*)^2 e^4}{m_1 \mu v^3} L_e + 2\pi N \frac{z_1^2 z_2^2 c^4}{m_1 m_2 v^3} L_\nu, \quad (5.2)$$

где  $z_1^*$  в первом члене представляет эффективный атомный номер частицы при электронном столкновении, который, особенно в случае сильно заряженных частиц, из-за электронных захватов может быть существенно меньше, чем  $z_1$ .

Первый член в (5.2) благодаря присутствию  $\mu$  в знаменателе, вообще говоря, велик по сравнению со вторым членом при скоростях, превышающих  $v_0$ . Для меньших скоростей простая теория электронного торможения становится несправедливой, но благодаря тому обстоятельству, что в этой области ядерное торможение играет главную роль, особенно для больших  $z_1$ , мы можем в первом приближении просто совершенно пренебречь первым членом. Значение скорости  $v$ , при которой ядерное торможение становится решающим благодаря наличию множителя  $z_1^2$  во втором члене (5.2), существенно больше для осколков деления, чем для протонов или  $\alpha$ -частиц.

В то время как для  $\alpha$ -частиц влияние ядерных столкновений, обнаруживаемое по изломам треков в камере Вильсона в непосредственной близости от их конца, несущественно для определения пробега, в случае осколков деления ядерное торможение существенно на значительной части пробега, что проявляется в заметной кривизне треков (ср. стр. 48). Для рассмотрения проблемы пробега существенно, что второй член в (5.2) сохраняет свою справедливость до скоростей, значительно меньших, чем  $v_0$ . Однако, как показано в разделе 3 гл. II, при очень малых скоростях нужно применять выражения типа (2.28).

Главной целью последующих разделов будет получить соотношение между скоростью и пробегом частиц различных зарядов и скоростей. В разделе 2 мы коротко рассмотрим задачу для частиц, подобных протону или  $\alpha$ -частице, когда явление захвата электрона играет малую роль. В разделе 3 будут рассмотрены частицы с большим зарядом (применительно к осколкам деления). Наконец,

в разделе 4 мы коротко рассмотрим проблемы торможения для частиц с малыми начальными скоростями (например, для атомов отдачи при ядерных превращениях).

## 2. Пробег легких ядер, обладающих большой скоростью

Благодаря своей практической важности для ядерных исследований проблема связи между пробегом и скоростью для протонов и  $\alpha$ -частиц неоднократно обсуждалась и специально подробно рассматривалась Ливингстоном и Бете [1], которые на основе теории Бете получили полуэмпирические формулы для зависимости тормозной способности от скорости для различных веществ. Мы ограничимся, поэтому, обзором наиболее важных результатов, используя соображения, изложенные во второй и третьей главах.

Для большей части пробега мы можем здесь положить  $z_1^* = z_1$ , а также пренебречь ядерным торможением. Основным вопросом является, таким образом, зависимость  $L_e$  от  $z_2$  и  $v$ . В очень легких веществах и для  $v \gg v_0$  величина  $L_e$  приблизительно пропорциональна  $z_2$  и только слабо зависит от  $v$ . Положив  $L_e = z_2 L$  и вводя из (2.1) и (2.5) величины  $a_0$  и  $v_0$ , согласно (5.2), получим

$$\frac{dv}{dR} = 2\pi N a_0^2 \frac{\mu}{m_1} z_1^2 z_2 \frac{v_0^4}{v^3} L. \quad (5.3)$$

Для водорода формула (3.38) дает (поскольку  $x \ll 1$ ) для  $L$  значения 12,0 и 9,2 при  $v$ , равном  $10v_0$  и  $5v_0$ , в то время как экспериментальные значения  $\bar{L}$  равны 11,7 и 8,9 соответственно. Эта малая разница, несущественная для наших целей, возникает благодаря тому, что значение  $u_s$ , нужное для определения  $\eta_s$  в (3.38), необходимо взять несколько большим, чем  $v_0$ , как то следует из подробных вычислений Бете. Из (5.3) простым интегрированием можно получить выражение для величины пробега

$$R = \frac{1}{8\pi N a_0^2} \frac{m_1}{\mu} \frac{1}{z_1^2 z_2} \left(\frac{v}{v_0}\right)^4 \frac{1}{L}, \quad (5.4)$$

где  $\bar{L}$  — некоторое среднее значение  $L$ , которое для начальных скоростей, больших по сравнению с  $v_0$ , лишь незначительно меньше, чем значение  $L$  в начале пробега. Так, для  $v = 10v_0$  экспериментальное значение, которое надо подставить в (5.4), в случае водорода равно  $L = 9,6$ .

Для тяжелых веществ, содержащих электроны с орбитальными скоростями, большими, чем  $v$ , согласно (3.52) и (3.54) и поскольку  $x \ll 1$ , найдем, что  $L_e$  пропорционально  $v$ . Полагая  $L_e = f \frac{v}{v_0}$ , из (5.2) получим

$$R = \frac{1}{6\pi N a_0^2} \frac{m_1}{\mu} \frac{1}{z_1^2} \left(\frac{v}{v_0}\right)^3 \frac{1}{f}, \quad (5.5)$$

что по отношению к зависимости от  $v$  согласуется с эмпирическим правилом Гейгера. Величина  $f$ , согласно результатам раздела 5 гл. III, при больших  $z_2$  приближенно равна  $8z_2^{1/3}$ . Для ксенона это дает  $f \sim 30$ , что близко к экспериментальному значению.

Явление разброса пробегов для протонов и  $\alpha$ -частиц также практически не зависит от ядерных столкновений, хотя здесь необходимо несколько ближе рассмотреть возникающую статистическую задачу. В самом деле, сравнение выражений (2.26) и (3.40) для среднего квадрата флуктуаций потери энергии на данном отрезке пробега показывает, что  $\Omega_v^2$  и  $\Omega_E^2$  одного порядка величины. Однако, в то время как распределение  $\Delta_E E$  — гауссового типа для каждой не слишком малой части пробега, распределение  $\Delta_v E$ , вообще говоря, как следует из рассуждений раздела 4 гл. II, имеет существенно другой вид: оно содержит большие флуктуации величины потери энергии лишь для малой доли частиц.

Что касается  $\Delta_E E$ , то мы имеем статистические распределения типа (2.30), для которого удобно написать

$$\Omega^2(\Delta_E E) = P_E \Delta R. \quad (5.6)$$

Для того чтобы определить соответствующий разброс пробегов, мы поступим следующим образом (Бор [25]). Флуктуации в  $\Delta_E E$  приводят к гауссовому распределению пробега  $\Delta R$ , соответствующего определенной, фиксированной потере энергии  $\Delta E$ , со средним квадратичным отклонением

$$\Omega_E^2(\Delta R) = \Omega^2(\Delta_E E) \left(\frac{\Delta R}{\Delta E}\right)^2 = P_E \Delta E \left(\frac{\Delta E}{\Delta R}\right)^{-2}. \quad (5.7)$$

Для результирующего разброса полного пробега, таким образом, получим

$$\Omega_E^2(R) = \int_0^E P_E \left(\frac{dE}{dR}\right)^{-2} dE. \quad (5.8)$$

Так как  $P_E$  в легких веществах, согласно формуле (3.40), не зависит от  $v$ , а в тяжелых веществах, согласно (3.55), приблизительно пропорционально  $v$ , то из (5.8) следует, что в тех случаях, когда соотношения между пробегом и скоростью подобны (5.4) или (5.5), разброс пробегов в основном будет определяться начальной частью пути, где скорость частицы велика.

Вычислив интеграл и используя введенные выше обозначения, в случае легких веществ получим

$$\frac{\Omega_E^2(R)}{R^2} = 4 \frac{\mu}{m_1} \frac{1}{L}, \quad (5.9)$$



где значение  $L$  с хорошим приближением соответствует начальной скорости. Для  $\alpha$ -частиц в водороде мы должны ожидать, что относительный разброс пробега  $\Omega_e(R)/R$  будет несколько меньше 1%. Для тяжелых веществ, проделав такие же вычисления и воспользовавшись общей формулой раздела 5 гл. III, справедливой для не слишком быстрых частиц, получим

$$\frac{\Omega_e^*(R)}{R^2} = \frac{3}{4} \frac{\mu}{m_1}, \quad (5.10)$$

что для  $\alpha$ -частиц соответствует относительному разбросу пробегов около 1%, независимо от тормозящего вещества и начальной скорости.

Для того чтобы определить роль ядерных столкновений для величины разброса пробегов, мы поступим совершенно аналогично рассуждениям раздела 4 гл. II о распределении потери энергии  $\Delta_\nu E$ . Обозначим посредством  $\delta R^*$  изменение пробега, обусловленное отдельным столкновением, и выберем его таким образом, что среднее число столкновений в течение всего пробега, вызывающих изменение пробега больше чем на  $\delta R^*$ , было бы равно 1. Соответствующая потеря энергии  $T^*$  будет, конечно, различна на различных участках пробега; она дается следующим выражением:

$$T^* = \delta R^* \left( \frac{dE}{dR} \right). \quad (5.11)$$

Из определения  $\delta R^*$  и из (2.15), а также учитывая, что  $T^* \ll \mathcal{W}_m$  практически на всем пробеге, имеем

$$1 = \int_0^R NB_\nu \frac{1}{T^*} dR = \frac{1}{\delta R^*} \int_0^E NB_\nu \left( \frac{dR}{dE} \right)^{-2} dE. \quad (5.12)$$

Для флуктуации величины пробега, обусловленной потерями энергии, меньшими, чем  $T^*$ , которые дают приблизительно гауссово распределение, из выражения, аналогичного (5.8), и вводя  $P_\nu^* = Nb_\nu T^*$ , получим [ср. (2.36) и (5.6)]

$$\Omega_\nu^*(R) = \delta R^* = \int_0^E NB_\nu \left( \frac{dE}{dR} \right)^{-2} dE \quad (5.13)$$

[здесь мы также использовали (5.11) и (5.12)].

Используя связь между скоростью и величиной пробега для быстрых  $\alpha$ -частиц и принимая во внимание (2.13), из (5.13) находим

$$\frac{\Omega_\nu^*(R)}{R} = \frac{z_2}{L} \frac{\mu}{m_2} \quad (5.14)$$

в случае легких веществ и

$$\frac{\Omega_\nu^*(R)}{R} = \frac{3}{16} \frac{\mu}{m_2} z_2^{5/3} \left( \frac{v_0}{v} \right) \quad (5.15)$$

в случае тяжелых веществ. Из сравнения с (5.9) и (5.10) видно, что  $\Omega^*(R)$  составляет только несколько процентов от  $\Omega_e(R)$  даже для наибольших значений  $z_2$ . Отвлекаясь от таких редких случаев, в которых  $\alpha$ -частица испытывает столь сильное столкновение с ядром, что теряет значительную часть своей энергии, можно, таким образом, совершенно пренебречь влиянием ядерных столкновений на величину разброса пробегов  $\alpha$ -частиц.

Экспериментальное исследование разброса пробегов быстрых протонов или  $\alpha$ -частиц наталкивается на трудность сохранения неизменными всех условий; получаемые значения, таким образом, обычно слишком велики. Изучение разброса пробегов  $\alpha$ -частиц в камере Вильсона (см. [73]) дало, однако, величины, только слегка превышающие значения, получаемые по (5.9) и (5.10). Недавно Беггильд [74], изучая в камере Вильсона треки протонов, испущенных в ядерных реакциях, получил результаты, близко совпадающие с теоретической формулой. Дальнейшая интересная проверка теории разброса пробегов получена при измерениях пробега мезонов в фотографических эмульсиях (Латтес, Оккиалини и Поуэлл [75]). Для частиц с массой около 200  $\mu$  и энергиями около 4 MeV для относительного разброса пробега экспериментально получено значение около 4%. Так как в этом случае  $L$  приблизительно равно 18 для водорода, то формула (5.9) дает  $\Omega/R = 3,3\%$ , в то время как в тяжелых веществах формула (5.10) дает около 6%. Учитывая, что эмульсия состоит из смеси тяжелых и легких веществ, согласие нужно считать удовлетворительным.

При определении пробега и разброса легких ядерных частиц выше предпологалось, что электронные столкновения определяют торможение практически на всем пробеге. В то время как в случае  $v \gg v_0$  это имеет место, положение, конечно, существенно изменяется, если начальная скорость приближается к  $v_0$ . При этом конечный отрезок пробега, где ядерные столкновения становятся существенными, может уже составлять не пренебрежимо малую часть всего пробега, а иногда может быть даже существенным при определении разброса пробегов. В самом деле, выражение для относительного разброса на этой последней части пробега будет вместо отношения между массами электрона и атомного ядра содержать только отношение между ядерными массами и поэтому может быть порядка единицы. Указание на то, что относительные разбросы заметно увеличиваются для скоростей, в несколько раз больших, чем  $v_0$ , было получено Беггильдом [74], который, измеряя в камере Вильсона треки легких ядерных частиц, испущенных при реакциях с медленными нейтронами, нашел разброс пробега, значительно больший, чем можно ожидать для электронных столкновений согласно формулам (5.9) или (5.10).

### 3. Пробег быстрых тяжелых ионов

Прохождение через вещество сильно заряженных частиц, подобных осколкам деления, заметно отличается от прохождения протонов или  $\alpha$ -частиц. Так, измерение скорости осколков деления вдоль пути посредством счета  $\delta$ -частиц (см. раздел 2 гл. II) показало, что в начальном участке пробега скорость потерь энергии приблизительно постоянна, в противоположность соотношению между пробегом и скоростью  $\alpha$ -частиц, которое, как видно из раздела 2, характеризуется быстрым возрастанием  $dv/dR$  при уменьшении скорости.

Измерения ионизации, производимой осколками деления вдоль пути (см. [76] и особенно [77,78]), показали спадание ионизации на начальном участке пробега, причем это спадание сильно отличается от уменьшения ионизационной способности  $\alpha$ -частиц при уменьшении скорости.

Теория прохождения осколков деления через вещество была разработана несколькими авторами (Бек и Гавас [79], Бор [49,50], Лемб [34,80], Книш и Теллер [69], Бранингс, Книш и Теллер [70]). Характерная разница между осколками деления и  $\alpha$ -частицами в первую очередь определяется влиянием захвата электронов на эффективный заряд  $z_1^*$ . В то время как на конце пробега ядерные столкновения играют большую роль для торможения, в начале пробега второй член в (5.2) пренебрежимо мал по сравнению с первым, и изменение  $z_1^*$  вдоль этой части пути, таким образом, непосредственно устанавливается из измерений  $dv/dR$ . В тяжелых веществах, в случае которых  $L_e$  приблизительно пропорционально  $v$ , из постоянства  $dv/dR$  следует, что  $z_1^*$  примерно пропорционально  $v$  в согласии с формулой (4.14). Однако для более точного определения  $z_1^*$  необходимо рассмотреть зависимость  $L_e$  от параметра  $\kappa$ , который (в противоположность случаю  $\alpha$ -частиц, когда  $\kappa \ll 1$ ) здесь велик по сравнению с единицей, как то следует из (4.19). Из этой формулы получается  $\kappa \sim 8$  и приблизительно не зависит от скорости, если только  $v \gg v_0$ .

С помощью выражений для  $L_e$  (3.38) и (3.54), которые относятся к легким и тяжелым веществам соответственно, и используя ионизационные измерения Лассена, можно определить начальное значение  $z_1^*$ , которое для всех тормозящих веществ приблизительно одинаково и в пределах теоретических и экспериментальных погрешностей совпадает с непосредственным измерением полного заряда осколков (раздел 4 гл. IV). В согласии с этими же экспериментами оказывается и изменение  $z_1^*$  при изменении скорости  $v$ . Это изменение для тяжелой группы почти линейно, а для легкой группы изменение происходит несколько менее быстро в области больших скоростей. Последняя особенность очевидна из ионизационной кривой, полученной Лассеном, которая для

легких осколков (в противоположность тяжелым) при уменьшении скорости сначала имеет увеличивающийся наклон, а затем постепенно становится линейной.

Как упоминалось в разделе 1, определение полного пробега как функции начальной скорости для осколков деления представляет более сложную проблему, чем для  $\alpha$ -частиц, так как для них часть пробега, соответствующая  $v \leq v_0$ , составляет заметную долю всего пути. Ввиду приближительной линейности кривой зависимости пробега от скорости при  $v > v_0$ , удобно ввести величину  $R_{ex}$ , определенную от простой экстраполяцией этой зависимости до  $v = 0$ .

Выражение для  $R_{ex}$  может быть получено из (5.2), если подставить для  $z^*$  и  $L_e$  выражения, полученные в предыдущей главе. Таким образом, в том приближении, когда мы можем употреблять (4.14) для  $z_1^*$  и (3.54) для  $L_e$ , для величины пробега осколка с массовым числом  $A_1$  и начальным зарядом  $z_1^*$  получим простое выражение

$$\frac{R_{ex}}{R_\alpha} = 3 \frac{A_1}{(z_1^*)^2} g_x, \quad (5.16)$$

где  $R_{ex}$  мы сравниваем с пробегом  $R_\alpha$   $\alpha$ -частицы ( $x \leq 1$ ) с той же начальной скоростью, чтобы, насколько возможно, исключить неопределенность в определении  $L_e$ .

В (5.16) предполагается, что, как указано в (4.19),  $x$  постоянно вдоль пути пробега и что  $L_e$  в согласии с (3.52) пропорционально  $v$ . Значение величины  $g_x$  (определяющая уменьшение  $L_e$  для осколков по сравнению с той же величиной для  $\alpha$ -частиц) близко к 2,5 для  $x \sim 8$ .

Приближения, содержащиеся в (5.16), хорошо выполняются для тяжелой группы осколков в веществах не очень малых атомных номеров [для них было найдено хорошее согласие (5.16) с экспериментальными данными]. Для легкой группы осколков, в случае которой  $z_1^*$  изменяется в начальной части пробега несколько медленнее, чем требуется по (4.14), мы должны ожидать, что  $R_{ex}$  будет несколько меньше, чем получается по (5.16), что также согласуется с опытом. В случае тормозящего вещества малого атомного номера отношение  $R_{ex}$  и  $R_\alpha$  несколько иначе зависит от начальной скорости, поскольку, в противоположность случаю быстрых  $\alpha$ -частиц, для которых  $L_e$ , согласно (3.38), медленно изменяется с  $v$ , для осколков деления из-за большого значения  $x$  и относительно малых значений  $v$  логарифм изменяется со скоростью более быстро. Тем не менее, вводя в (5.2) значение (3.38) для  $L_e$ , при интегрировании получим значение  $R_{ex}$ , приблизительно согласующееся с экспериментальными данными (см. Лассен [78]).

Зависимость  $L_e$  от  $x$  в значительной степени обуславливает отличие тормозящей способности осколков деления по сравнению

с  $\alpha$ -частицами в различных веществах. Так, предполагая, что  $z_1^*$  при данном  $z_1$  и  $v$  в первом приближении одно и то же во всех веществах, в случае осколков деления с  $v \sim 6v_0$  (легкая группа) для отношения между величинами тормозной способности гелия и водорода по (3.38) и (3.54) получим значение около 1,5, а для аргона и гелия—около 4,2. Для  $\alpha$ -частиц той же скорости соответствующие отношения равны 1,7 и 5,2. Это приблизительно согласуется с измерениями Лассена [78], который нашел, что для легкой группы осколков деления в начале пробега эти отношения равны 1,35 и 4,2 соответственно. В то время как последнее число весьма близко согласуется с теоретическим значением, отношение тормозной способности гелия и водорода несколько меньше, чем получается из теории, если  $z_1^*$  считать одинаковым для этих двух веществ.

Несмотря на то, что эти данные недостаточно надежны, все же этот результат указывает, что число захваченных электронов несколько меньше в водороде, чем в других веществах, как можно было также ожидать на основании рассуждений раздела 4 гл. IV.

Когда осколки деления замедлились до скоростей, сравнимых или меньших, чем  $v_0$ , оценка (4.14) для  $z^*$  больше не справедлива, и эффективный заряд для электронных столкновений будет уменьшаться еще быстрее. Поэтому торможение становится очень слабым, а так как осколок еще обладает большой энергией, то, если бы увеличивающееся влияние ядерных столкновений не изменило бы картину, должен был бы на кривой зависимости пробега от скорости появиться длинный хвост. Отвлекаясь в первом приближении от электронных столкновений при  $v < v_0$ , мы получим, что потеря скорости в этой области определяется вторым членом в (5.2), который справедлив при скоростях, значительно меньших, чем  $v_0$ . Интегрируя, мы получим величину остаточного пробега  $R_0$ , соответствующего скорости  $v$ :

$$R_0 = \frac{1}{8\pi N} \frac{m_1 m_2}{z_1^2 z_2^2 v^4} \frac{1}{L_v}, \quad (5.17)$$

где  $\bar{L}_v$ —среднее значение логарифма, близкое к значению  $L_v$ , соответствующему скорости  $v$ .

Нужно отметить, что формула (5.17) не справедлива при  $v \ll v_0$ , поскольку, как отмечалось в разделе 3 гл. II, для справедливости последнего члена в (5.2) необходимо, чтобы величина  $\zeta$  была бы мала по сравнению с единицей. Для осколков деления формула (2.7) дает  $\zeta \sim 1/10$  для  $v = v_0$  и  $\zeta \sim 1$  для  $v = \frac{1}{3} v_0$ ; эти соотношения верны приближенно вне зависимости от тормозящего вещества. Для еще меньших скоростей ядерное торможение дается по (2.28); однако, полагая  $v \sim v_0$ , получим, что результативная поправка к  $R_0$  пренебрежимо мала. Для частиц с малыми началь-

ными скоростями соотношение между пробегом и скоростью будет существенно другого типа (см. следующий раздел).

В противоположность пробегу, обусловленному электронными столкновениями, формула (5.17) показывает, что  $R_0$  существенно зависит от  $m_2$ , и поэтому относительную роль ядерных столкновений можно определить путем сравнения пробегов осколков деления в водороде и дейтерии. Согласно измерениям (см. [81]), пробег в дейтерии при нормальных условиях больше, чем в водороде, на 7 мм. Из выражения (5.17) для  $R_0$  находим, что этой разнице между дейтерием и водородом соответствует  $v = v_0$ . Таким образом, в первом приближении мы можем считать, что при скоростях, больших, чем  $v_0$ , торможение обусловлено электронными столкновениями, а при скоростях, меньших  $v_0$ , — ядерными. Этот результат хорошо согласуется с измерениями полного пробега в различных веществах, который приблизительно совпадает (см. [78]) с суммой  $R_{ex}$  и  $R_0$ , если в (5.17) положить  $v = v_0$ .

Чтобы определить разброс пробегов осколков деления, мы можем воспользоваться рассуждениями раздела 2. Что касается доли, происходящей от электронных столкновений, то из (5.8) и используя (5.16) получим выражение для  $\Omega_e(R_{ex})/R_{ex}$ , совершенно аналогичное (5.9) и (5.10), за исключением несколько измененного численного множителя, возникающего из-за другой связи между пробегом и скоростью. Таким образом, благодаря большой массе  $m_1$  в случае осколков деления для относительного разброса получим величину порядка 0,1%, что пренебрежимо мало по сравнению с долей разброса, обусловленной ядерными столкновениями.

Чтобы определить величину разброса пробега, обусловленного ядерными столкновениями, нужно сначала рассмотреть задачу о статистическом законе распределения  $\Delta_\nu E$ . Согласно результатам раздела 4 гл. II, для легких веществ, когда  $m_1 \gg m_2$ , для  $\Delta_\nu E$  будет простое гауссово распределение, во всяком случае в той части пробега, где ядерные столкновения играют роль для торможения. В этом случае, аналогично (5.8) и поскольку  $P_\nu$  (2.26) не зависит от  $v$ , получим

$$\Omega_\nu^2(R) = P_\nu \frac{1}{m_1^2} \int_0^v \left( \frac{dv}{dR} \right)^{-2} \frac{1}{v^2} dv. \quad (5.18)$$

Для скоростей, больших по сравнению с  $v_0$ , при которых  $dv/dR$  для осколков деления приблизительно постоянно, подинтегральное выражение изменяется как  $v^{-2}$ , а для  $v < v_0$ , при которых  $dv/dR$  приблизительно пропорционально  $v^{-3}$ , подинтегральное выражение изменяется как  $v^7$ . Отсюда следует, что разброс существенно зависит от области скоростей, соответствующей  $v \sim v_0$ . Для того чтобы получить простую оценку  $\Omega_\nu^2(R)$ ,

мы разделим область интегрирования на две части, соответственно скоростям, большим или меньшим, чем  $v_0$ , и заменим  $dv/dR$  в первой части на  $(dv/dR)_e$ , а во второй—на  $(dv/dR)_v$  соответственно первому и второму члену (5.2). Вычислив интегралы, мы найдем, что второй член является главным. Аналогично (5.9) и вводя значение  $R_0$  по (5.18), при  $v = v_0$  получим

$$\frac{\Omega_v^2(R)}{R_0^2} = 4 \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{L_v}, \quad (5.19)$$

где  $L_v$  представляет логарифм в формуле для ядерного торможения при  $v \sim v_0$ . В случае водорода эта формула для относительного разброса в последней части пробега дает величину около 10%, что эквивалентно примерно 3% полного пробега, поскольку  $R_0$  составляет около одной трети всего пробега. Для более тяжелых веществ должен быть еще больший разброс пробегов<sup>1)</sup>, но если  $m_2$  сравнимо с  $m_1$ , необходимо специальное рассмотрение, поскольку статистическое распределение пробегов не будет больше следовать закону Гаусса.

#### 4. Пробег атомов с малыми начальными скоростями

При прохождении через вещество частиц со скоростями, меньшими  $v_0$ , мы должны ожидать существенно отличную картину, чем для очень быстрых частиц. За исключением случая медленных электронов, в случае которых могут происходить своеобразные квантовомеханические резонансные эффекты, в этой области скоростей в основном будут происходить ядерные столкновения, к которым в широкой степени можно применять простые механические соображения (см. раздел 1 гл. II). Поскольку величина  $\zeta$  сравнима или больше, чем единица, рассеяние будет практически сферически симметричным в относительной системе координат, и, как указывалось в разделах 4 и 5 гл. II, будет диффузное рассеяние, за исключением случаев  $m_1 \gg m_2$ . Только при  $m_1 \gg m_2$  мы будем иметь вполне определенный пробег. Примером подобных частиц являются атомы отдачи при радиоактивных распадах в среде, состоящей из не очень тяжелых атомов.

При естественном  $\alpha$ -распаде атом отдачи с  $z_1 \sim 90$  имеет начальную скорость около  $v_0/5$ , что соответствует  $\zeta \sim 5$  (практически

<sup>1)</sup> Недавно Катков, Мискел и Стенли [86] изучали средствами радиохимического анализа торможение в воздухе различных изотопов, встречающихся среди осколков деления. Было найдено, что пробег изменяется с зарядом, массой и начальной энергией в приблизительном согласии с развитой выше простой теорией. Более того, разброс пробегов, который в прежних исследованиях не мог быть отделен от вариаций в пробеге различных изотопов внутри каждой из двух легко различимых групп, оказался равным около 5% для всех осколков, что также согласуется с теоретическими ожиданиями.

независимо от  $z_2$ ). Здесь мы имеем типичный случай сильного экранирования, эффективное поперечное сечение  $\sigma$  при  $\zeta \gg 1$  будет одного порядка величины с  $\pi a^2$  (см. раздел 5 гл. I). Более того, при не очень больших  $\zeta$  в эффективной части поля его интенсивность изменяется обратно пропорционально кубу расстояния, а значение  $\sigma$  приближенно дается формулой (1.46). Используя (2.2) и (2.7), из формулы торможения (2.28) при  $m_1 \gg m_2$  получим

$$\frac{dE}{dR} \sim \pi N a_0 z_1^{2/3} z_2 \varepsilon^2, \quad (5.20)$$

что приводит к следующему соотношению между пробегом и скоростью:

$$R \sim \frac{1}{2\pi N a_0^2} \frac{1}{z_1^{2/3} z_2} \frac{m_1}{\mu} \left(\frac{v}{v_0}\right)^3. \quad (5.21)$$

Здесь мы ввели  $a_0$  и  $v_0$  по (2.1) и (2.5).

Для ядер отдачи при  $z_1 \sim 90$ , соответствующих энергии  $\alpha$ -частицы 6 MeV, из выражения (5.21) для величины пробега в водороде при нормальных условиях получается значение около 0,4 мм, что согласуется с опытом, который в среднем дает значение около 0,5 мм. В водяном паре при нормальном давлении, по измерениям Жолио [24], пробег равен около 0,08 мм, откуда получается, что тормозная способность кислорода приблизительно в 8 раз больше, чем водорода, в согласии с формулой (5.21).

Для разброса пробегов при  $m_1 \gg m_2$  имеем примерно гауссово распределение для потери энергии, и из (2.29) и (5.8) получим

$$\frac{\Omega^2(R)}{R^2} = \frac{4m_2}{3m_1}, \quad (5.22)$$

что для относительного разброса пробегов в водороде дает значение около 10%, а в кислороде — 25%. Эти значения по порядку величины совпадают с наблюдениями Жолио в парах воды.

Для еще меньших скоростей, когда  $\zeta$  становится много больше единицы, формула (5.21) перестает быть справедливой, и, как упомянуто в разделе 3 гл. II, эффективное поперечное сечение приближается к газокинетическому, а скорость потери энергии становится пропорциональной энергии частицы. Для ядер отдачи при  $\alpha$ -распаде это обстоятельство повлияет на связь между пробегом и скоростью только на самом конце пробега, но для ядер отдачи при  $\beta$ -распаде, где начальная скорость порядка  $\frac{1}{1000} v_0$ , это обстоятельство проявляется на всем пробеге. Эта проблема исследовалась подробнее Якобсоном [82], который учел также влияние тепловых скоростей атомов газа на торможение ядер отдачи. Эксперименты очень трудны, тем не менее их результаты в пределах погрешности опыта находятся в согласии с ожиданиями теории.



Доказательство характерной разницы в механизмах торможения частиц со скоростями, большими или малыми по сравнению с  $v_0$ , можно также получить из измерений ионизации. Как упомянуто в разделе 4 гл. III, для быстрых частиц, когда существенными для торможения являются электронные столкновения, энергия, затраченная на один ион, в основном не зависит от заряда и скорости ионизирующей частицы. Положение совершенно иное, если значительная часть или даже вся энергия передается прямо атомному ядру, как это имеет место на конце пробега осколков или на всем пробеге ядер отдачи. Как показывает эксперимент, и здесь потеря энергии сопровождается ионизацией, происходящей благодаря тому обстоятельству, что ни первичное столкновение, ни вторичные столкновения между выбитым атомом и другими атомами тормозящей среды не являются строго адиабатическими. Однако измерения энергии, затраченной на один ион для ядер отдачи при  $\alpha$ -распаде (см. [83] и особенно [84]), дали значения, в несколько раз большие, чем для  $\alpha$ -частиц. При этом величина энергии быстро возрастает с уменьшением скорости частицы. Для скорости ядер отдачи около  $\frac{1}{20} v_0$  наступает почти полное исчезновение ионизации [84], что соответствует атомным столкновениям, в которых электронная структура испытывает практически адиабатические изменения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Livingston M. S., Bethe H. A., *Rev. Mod. Phys.* **9**, 245 (1937).
2. Thomson J. J., *Conduction of Electricity through Gases*, Cambridge, 1906.
3. Darwin C. G., *Phil. Mag.* **25**, 201 (1913).
4. Blaton J., *Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-fys. Medd.*, København **24**, № 20 (1948).
5. Rutherford E., *Phil. Mag.* **21**, 669 (1911).
6. Darwin C. G., *Phil. Mag.* **27**, 499 (1914).
7. Gordon W., *Zs. f. Phys.* **48**, 180 (1928).
8. Mott N. F., *Proc. Roy. Soc. A* **126**, 253 (1930).
9. Bloch F., *Ann. d. Phys.* (5) **16**, 285 (1933).
10. Williams E. J., *Proc. Roy. Soc. A* **139**, 163 (1933).
11. Williams E. J., *Rev. Mod. Phys.* **17**, 217 (1945).
12. Мотт и Мессси, *Теория атомных столкновений*, М.—Л., 1936.
13. Mott N. F., *An Outline of Wave Mechanics*, Cambridge, 1930.
14. Massey H. S. W., Mohr C. B. O., *Proc. Roy. Soc. A* **141**, 434 (1933).
15. Wergeland H., *Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-fys. Medd.*, København **23**, № 14 (1945).
16. Друде, *Оптика*, М.—Л., 1935.
17. Ramsauer A., *Ann. d. Phys.* (5) **72**, 345 (1923).
18. Faxen H., Holtsmark J., *Zs. f. Phys.* **45**, 307 (1927).
19. Arnot F. L., *Proc. Roy. Soc. A* **130**, 655 (1931).
20. Werner S., *Proc. Roy. Soc. A* **134**, 202 (1931).
21. Werner S., *Nature* **131**, 726 (1933).

22. Kalkar F., Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-fys. Medd., København 12, № 12 (1934).
23. Bøggild J. K., Brostrøm K. J., Lauritsen T., Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-fys. Medd., København 18, № 4 (1940).
24. Joliot F., Journ. de phys. (7) 5, 219 (1934).
25. Bohr N., Phil. Mag. (6) 30, 581 (1915).
26. Williams E. J., Proc. Roy. Soc. A 125, 420 (1929).
27. Bothe W., Zs. f. Phys. 4, 300 (1921).
28. Williams E. J., Proc. Roy. Soc. A 169, 531 (1939).
29. Williams E. J., Phys. Rev. 58, 292 (1940).
30. Bothe W., Zs. f. Phys. 13, 368 (1923).
31. Thomson J. J., Phil. Mag. (6) 23, 449 (1912).
32. Darwin C. G., Phil. Mag. (6) 23, 901 (1912).
33. Bohr N., Phil. Mag. (6) 25, 10 (1913).
34. Lamb W. E., Jr., Phys. Rev. 58, 696 (1940).
35. Swann W. F. G., Journ. Frankl. Inst. 226, 598 (1938).
36. Fermi E., Phys. Rev. 57, 485 (1940).
37. Kramers H. A., Physica 13, 401 (1947).
38. Черенков П. А., ДАН СССР 2, 451 (1934); 20, 653 (1938); 21, 117, 323 (1938).
39. Франк И. М., Тамм И. Е., ДАН СССР 14, 107 (1937); Труды ФИАН 2, вып. 4, 63 (1944).
40. Тамм И. Е., Journ. of Phys. 1, 439 (1939).
41. Henderson G. H., Phil. Mag. (6) 44, 680 (1922).
42. Fowler R. H., Proc. Cambr. Phil. Soc. 21, 521 (1923).
43. Bohr N., Zs. f. Phys. 34, 142 (1925).
44. Ландау Л. Д., Journ. of Phys. 8, 201 (1944).
45. Fermi E., Zs. f. Phys. 29, 315 (1924).
46. Gaunt J. A., Proc. Cambr. Phil. Soc. 23, 732 (1927).
47. Williams E. J., Proc. Roy. Soc. A 130, 328 (1931).
48. Bethe H. A., Ann. d. Phys. (5) 5, 325 (1930).
49. Bohr N., Phys. Rev. 58, 654 (1940).
50. Bohr N., Phys. Rev. 59, 270 (1941).
51. Bethe H. A., Zs. f. Phys. 76, 293 (1932).
52. Møller C., Ann. d. Phys. (5) 14, 531 (1932).
53. Mott N. F., Proc. Cambr. Phil. Soc. 27, 553 (1931).
54. Williams E. J., Proc. Roy. Soc. A 135, 108 (1932).
55. Flamm L., Akad. d. Wiss. Wien (math.-naturwiss. Kl.) 123, 1393 (1914).
56. Flamm L., Akad. d. Wiss. Wien (math.-naturwiss. Kl.) 124, 597 (1915).
57. Titeica S., Bull. Soc. Roumaine Phys. 33, 81 (1937).
58. Fano U., Phys. Rev. 70, 44 (1946).
59. Bagge E., Ann. d. Phys. (5) 30, 72 (1937).
60. Lassen N. O., Phys. Rev. 69, 137 (1946).
61. Bloch F., Zs. f. Phys. 31, 363 (1933).
62. Henderson G. H., Proc. Roy. Soc. A 102, 496 (1922).
63. Rutherford E., Phil. Mag. (6) 47, 277 (1924).
64. Fowler R. H., Phil. Mag. (6) 47, 416 (1924).
65. Jacobsen J. C., Nature 117, 853 (1926).
66. Thomas L. H., Proc. Roy. Soc. A 114, 561 (1927).
67. Oppenheimer J. R., Phys. Rev. 31, 66, 349 (1928).
68. Brinkman H. C., Kramers H. A., Proc. Akad. Amsterdam 33, 973 (1930).
69. Knipp J., Teller E., Phys. Rev. 59, 659 (1941).
70. Brunings J. H., Knipp J. K., Teller E., Phys. Rev. 60, 657 (1941).
71. Перфилов Н. А., ДАН СССР 28, 425 (1940).

72. Lassen N. O., Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-fys. Medd., København 23, № 2 (1945).
  73. Rayton W. M., Wilkins T. R., Phys. Rev. 51, 818 (1937).
  74. Bøggild J. K., Nature 161, 810 (1948).
  75. Lattes C. M. G., Occhialini G. P. S., Powell C. F., Nature 160, 453 (1947)
  76. Jentschke W., Prankl F., Phys. Zs. 40, 706 (1939).
  77. Lassen N. O., Phys. Rev. 70, 577 (1946).
  78. Lassen N. O., Phys. Rev. 75, 1762 (1949).
  79. Beck G., Havas P., Compt. rend. 208, 1643 (1939).
  80. Lamb W. E., Jr., Phys. Rev. 59, 687 (1941).
  81. Bøggild J. K., Arøe O. H., Sigurgeirsson T., Phys. Rev. 71, 281 (1947).
  82. Jacobsen J. C., Dissertation, København, 1928.
  83. Wertenstein L., Dissertation, Paris, 1913.
  84. Madsen B. S., Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-fys. Medd., København 23, № 8 (1945).
  85. Madsen C. B., Venkateswarlu P., Phys. Rev. 74, 1782 (1948).
  86. Katcoff S., Miskel J. A., Stanley C. W., Phys. Rev. 74, 631 (1948).
-

# ПРИЛОЖЕНИЕ

# ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТОМОВ НА ПРОХОЖДЕНИЕ АТОМНЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО <sup>1)</sup>

О. Бор

## 1. Введение

Теория прохождения быстрых заряженных частиц через вещество была первоначально развита на основе изучения столкновений между движущейся частицей и отдельными атомами <sup>2)</sup>. В этой трактовке задачи пренебрегается взаимодействием различных атомов, соударяющихся с частицей. Такое приближение часто достаточно, но имеются явления, для которых эффект взаимодействия атомов весьма существенен.

Так, Черенков [1] обнаружил, что при прохождении через вещество очень быстрого электрона возникает своеобразное излучение, свойства которого показывают, что мы имеем дело не с независимым излучением индивидуальных возбужденных атомов, а когерентным излучением атомов большого объема вещества. Теория этого явления была развита Франком и Таммом [2] и Таммом [3], которые показали его непосредственную связь с тем обстоятельством, что скорость электрона превышает скорость распространения электромагнитных волн в окружающей среде. Именно в результате взаимодействия атомов фазовая скорость этих волн в некоторой спектральной области оказывается меньше, чем скорость света в вакууме.

Проблема влияния атомного взаимодействия на торможение быстрых частиц и ионизацию, ими производимую, была сформулирована Сванном [4], причем он указал, что поляризация вещества, через которое проходит частица, вызывает некоторый экранирующий эффект, что может при некоторых обстоятельствах уменьшить скорость потери энергии. Вопрос был исследован детально Ферми [5, 6], который нашел, что это явление может иметь большое значение для очень быстрых частиц, но, вообще говоря, несущественно для нерелятивистских скоростей <sup>3)</sup>. Имеется, однако, исключения из этого правила, в частности, Крамерсом [7] было показано, что тормозная способность металлов всегда существенно зависит от поляризационного эффекта.

<sup>1)</sup> Aage Bohr, Atomic Interaction in Penetration Phenomena. Det Kgl. Danske Videnskab, Mat-fis, Medd., København, 24, № 19 1948.

<sup>2)</sup> Подробное изложение этой теории дано в работе Н. Бора «Прохождение атомных частиц через вещество». В последующем мы часто будем отсылать к этому обзору за более подробным освещением общих вопросов теории.

<sup>3)</sup> Вопрос о прохождении частиц через ферромагнетик и возникающем при этом излучении был рассмотрен в работе Д. Иваненко и В. Гургенидзе, ДАН СССР 67, 997 (1949). (Прим. ред.)

В вышеупомянутых исследованиях вещество рассматривается макроскопически, как континуум; чтобы учесть существенные здесь дисперсионные свойства вещества, электромагнитные поля разлагаются на гармонические компоненты. В результате простая теория атомных столкновений совершенно неприменима. По этой причине мы предпримем попытку исследовать связь между атомами вещества с микроскопической точки зрения, стараясь сделать как можно более ясным точки соприкосновения с обычной теорией прохождения частиц через вещество. Такой подход позволит получить простые обобщения формул Ферми.

Предварительно мы коротко рассмотрим в разделе 2 соображения, оправдывающие разделение столкновений частицы с атомами вещества на близкие и далекие. Взаимодействие атомов существенно только для далеких столкновений, рассмотрение которых особенно просто, так как может быть основано на классической механике. Некоторые главные принципы обычной теории торможения, используемые в дальнейшем, рассмотрены в разделе 3, в частности будет рассмотрено влияние атомных связей, которые ограничивают радиус действия проходящей частицы, придавая столкновениям вне некоторого расстояния адиабатический характер.

В разделе 4 будет показано с микроскопической точки зрения, что на взаимодействие атомов можно смотреть как на дополнительный экранирующий фактор, и особенно в нерелятивистском случае это взаимодействие можно рассмотреть по аналогии с влиянием связи электронов в атомах вещества. Кроме того, будет дана такая трактовка потери энергии частицей, в которой торможение описывается силой, действующей на движущуюся частицу со стороны атомов среды.

Специальный случай веществ, содержащих свободные электроны, рассмотрен в разделе 5, причем принято во внимание также «трение» электронов. Для частиц, скорость которых близка к скорости света, взаимодействие атомов нужно рассмотреть еще с другой стороны, связанной с запаздыванием сил. Эта проблема рассмотрена в разделе 6, где получена простая интерпретация главных результатов Ферми.

Излучение Черенкова и его связь с торможением рассмотрено в разделе 7. С микроскопической точки зрения, явление состоит в том, что часть энергии, передаваемой частицей атомным электроном, затем излучается в виде когерентных электромагнитных волн. При макроскопическом описании потери энергии частицей, естественно, распадаются на две части: первая часть поглощается в веществе в непосредственной близости от пути частицы, а вторая проходит большие расстояния в виде излучения. Это разделение приводит к некоторым общим соотношениям для торможения релятивистских и нерелятивистских частиц. В этой связи

в дополнении II показано, как проблема торможения может быть рассмотрена с помощью формализма теории излучения, хорошо известного из квантовой электродинамики.

В то время как в первой части работы атомы рассматриваются как простые осцилляторы с одной частотой, в разделе 8 рассматривается более общая модель атома. В этом случае точные вычисления весьма сложны. Однако в разделе 8 показано, как результаты раздела 6 делают возможным получить общую характеристику явления и приводят к простым приближенным формулам. В разделе 9 сделана попытка вывести общие выражения для влияния атомных взаимодействий на тормозную способность тяжелых веществ. Наконец, в разделе 10 обсуждаются некоторые экспериментальные данные. Среди наиболее важных приложений теории нужно упомянуть вычисления тормозной способности металлов и торможения и ионизации очень быстрых частиц. Повидимому, эти вычисления находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

## 2. Близкие и далекие соударения

Столкновения между заряженной частицей и атомом можно, конечно, рассматривать в конфигурационном пространстве с помощью подходящих квантовомеханических методов, но во многих задачах законно употреблять более простой способ, когда частица списывается как центр сил, движущийся по определенному пути. Этот способ, как показал Мотт [8], приводит к той же вероятности возбуждения атома, как и более общий, для частиц, масса которых велика по сравнению с массой электрона и энергия велика по сравнению с энергией связи электрона в атоме. Действительно, достаточным условием законности этого простого способа является незначительность изменения импульса во время столкновения по сравнению с импульсом падающей частицы. Эффект соударения с атомом в этих условиях приблизительно не зависит от инертных свойств частицы, которая действует в этом случае, как если бы она была бесконечно тяжелой. Рассматриваемое условие эквивалентно требованию, чтобы длина волны частицы была бы мала по сравнению с размерами атома, тогда ее можно представить волновым пакетом, откуда и видно, что обеспечена законность указанного простого способа.

Что касается проблемы взаимодействия атомов тормозящего вещества, то сильными столкновениями, сопровождающимися большими передачами импульсов, можно пренебречь, и тогда мы можем считать, что проникающая частица двигается по заданному пути. В этом случае атомы могут быть характеризованы их расстоянием от указанного пути, так называемым прицельным параметром  $p$ . Как мы увидим дальше, взаимодействие атомов существенно только

в случае, если  $p \gg a_0$ , где  $a_0$  обозначает «радиус» водородного атома, который является подходящей мерой атомных размеров.

В таких далеких столкновениях эффект удара сводится только<sup>1)</sup> к малому возмущению; поскольку, кроме того, при  $p \gg a_0$  возмущающее поле приблизительно постоянно на протяжении атомных размеров, то к столкновению можно применять обычные механические соображения. Как хорошо известно (например, из теории дисперсии), атом будет себя вести по отношению к поглощению и излучению электромагнитных волн как набор классических осцилляторов, соответствующих различным возможностям возбуждения и ионизации.

Чтобы оправдать пренебрежение близкими столкновениями, мы определим порядок величин расстояний, на которых эффект взаимодействия атомов становится значительным. Это взаимодействие возникает в результате смещения атомных электронов во время столкновения, которое превращает нейтральный атом в диполь; очевидно, что возникающая при этом сила  $K$ , действующая на атомный электрон, будет по порядку величины равна дипольному моменту единицы объема, умноженному на заряд электрона ( $-e$ ). Если  $z_1 e$  и  $v$  обозначают заряд и скорость частицы, а  $\mu$  — массу электрона, то смещение электронов во время соударения будет для свободных электронов по порядку величины равно  $z_1 e^2 / \mu v^2$  (см. [5]), а для связанных электронов — несколько меньше. Таким образом,

$$K \ll \frac{z_1 e^2}{\mu v^2} n e^2, \quad (1)$$

где через  $n$  обозначено число электронов в единице объема; даже в плотных веществах  $n$  никогда не превышает  $a_0^{-3}$ . Вводя  $e^2/a_0 = \mu v_0^2$ , где  $v_0$  есть «скорость» электрона в водородном атоме, получим, что сила  $K$  будет мала по сравнению с силой, непосредственно действующей на частицу,  $z_1 e^2 / p^2$ , во всяком случае, если

$$p < a_0 \frac{v}{v_0}. \quad (2)$$

Таким образом, для  $v$ , больших по сравнению с  $v_0$ , поляризационный эффект существенен только при  $p \gg a_0$ . Скорость  $v_0$  по порядку величины равна «орбитальной скорости» наиболее слабо связанных электронов в атоме. В этом случае (т. е. при  $v \gg v_0$ ) мы можем разделить столкновения на две группы: когда

<sup>1)</sup> При очень больших зарядах падающей частицы, в сочетании с относительной малой скоростью, необходимо особое рассмотрение, так как условие  $p \gg a_0$  может быть недостаточно для применения теории возмущения. Хотя в этом случае можно поступать теми же методами (см. Н. Бор), мы не будем рассматривать такие случаи, поскольку они совершенно не существенны в тех условиях, когда играют роль явления, связанные с взаимодействием атомов.



$p < q$  и когда  $p > q$ , где  $q$  выбрано так, что для первой группы взаимодействием атомов можно пренебречь и применять обычную теорию прохождения заряженных частиц через вещество, а во второй группе мы имеем дело только с далекими столкновениями, которые можем рассматривать методами классической механики.

Для частиц со скоростями, сравнимыми или меньшими  $v_0$ , характер взаимодействия частицы с веществом существенно изменяется (см. Н. Бор, раздел 4 гл. V). В этих проблемах необходимо в первом приближении рассматривать взаимодействие частицы только с теми атомами, через которые она действительно проходит; взаимодействие же данного атома с другими составляет малую поправку, учет которой был бы даже излишним уточнением ввиду трудностей точного рассмотрения задачи о прохождении через вещество очень медленных частиц. Поэтому всюду в дальнейшем мы будем ограничиваться случаем  $v \gg v_0$ .

### 3. Столкновения между частицей и отдельным атомом

Прежде чем обратиться к проблеме взаимодействия атомов, будет полезно коротко рассмотреть основные черты процесса столкновения между быстрой частицей и изолированным атомом. Если сначала пренебречь силами связи атомного электрона, то мы получим чистую задачу двух тел, которая в случае далеких столкновений упрощается еще потому, что смещение электрона за время соударения мало по сравнению с прицельным параметром. Более того, в таких столкновениях передача импульса всегда мала по сравнению с  $\mu c$  ( $c$  — скорость света), и поэтому мы можем пренебречь релятивистскими эффектами для электрона.

По соображениям симметрии следует, что конечная скорость электрона будет практически перпендикулярна к пути частицы. Для движения электрона в этом направлении получим (используя хорошо известное выражение для электрического поля, окружающего равномерно движущийся точечный заряд)

$$\ddot{\eta} = \frac{z_1 e^2 p \dot{\gamma}}{(p^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (3)$$

где  $\eta$  обозначает смещение и  $\dot{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ . Интегрирование (3) дает

$$\dot{\eta} = \frac{z_1 e^2}{\mu p v} \left(1 + \frac{\gamma v t}{\sqrt{p^2 + \gamma^2 v^2 t^2}}\right) \quad (4)$$

и

$$\eta = \frac{z_1 e^2}{\gamma \mu v^2} \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2 v^2 t^2}{p^2}} + \frac{\gamma v t}{p}\right). \quad (5)$$

Как видно из этих выражений, столкновение можно приближенно характеризовать эффективным «временем столкновения» порядка  $p/\gamma v$ ; в течение этого промежутка времени действующая сила сравнима с  $z_1 e^2 \gamma / p^2$ .

Для выражения энергии, переданной электрону в свободном столкновении, по (4) имеем

$$T = \frac{1}{2} \mu (\dot{\eta})_{t \rightarrow \infty}^2 = 2 \frac{z_1^2 e^4}{\mu v^2} \frac{1}{p^2}. \quad (6)$$

Так как тормозная способность вещества пропорциональна интегралу от  $T p dp$  и выражение (6) не может быть использовано для любых значений  $p$ , то в теории существенно принять во внимание факторы, препятствующие свободному движению электрона. Эти факторы, действующие как определенного рода экранирование, определяют «радиус действия» частицы, приводя к появлению верхнего предела прицельного параметра  $p_{\max}$ , ниже которого может применяться простое выражение (6). При больших расстояниях соударение постепенно приобретает благодаря экранированию адиабатический характер, и передаваемая энергия становится малой по сравнению со свободным соударением. Таким образом, потеря энергии частицей на единицу пути, обусловленная столкновениями с атомами, для которых  $p > q$ , равна

$$S_q = n \int_q^{p_{\max}} T 2\pi p dp = B \ln \frac{p_{\max}}{q}. \quad (7)$$

Это соотношение может служить определением эффективного значения  $p_{\max}$ . Величина  $B$  введена для краткости записи:

$$B = 4\pi \frac{z_1^2 e^4}{\mu v^2} n. \quad (8)$$

В последующем основной задачей будет изучение различных экранирующих факторов и соответствующих пределов, внутри которых передача энергии может быть вычислена, исходя из представления о свободном электроне.

При столкновении частицы с изолированным атомом единственный экранирующий эффект возникает из-за наличия сил связи электрона с атомом. Как упоминалось в разделе 2, мы можем в этом случае представить атом как набор осцилляторов, частоты которых соответствуют различным возможным переходам. Для простоты, однако, мы будем сначала предполагать, что все осцилляторы обладают одинаковой циклической частотой  $\omega_a$ ; в разделе 8 мы вернемся к этой задаче для более общей модели атома.

Таким образом, помимо силы взаимодействия с частицей, на электрон действует сила связи, равная  $\mu \omega_a^2 \eta$ . Конечно, эта

последняя сила полностью определяет состояние движения электрона, когда частица уже прошла, но ею можно пренебречь во время самого столкновения, и, следовательно, она не влияет на величину переданной энергии, если только

$$\mu\omega_a^2\eta \ll \mu\ddot{\eta} \quad (9)$$

для  $|t| \ll \frac{p}{\gamma v}$  или, согласно (3) и (5), если

$$p \ll d_a = \frac{v}{\omega_a} \gamma. \quad (10)$$

Предельное расстояние  $d_a$  соответствует столкновению, длительность которого сравнима с периодом осциллятора. Очевидно, что в случае менее длительного взаимодействия баланс энергии не зависит от сил связи. С другой стороны, для столкновений с большей длительностью эти силы существенно уменьшают передаваемую энергию. В предельном случае  $p \gg d_a$  электрон будет проходить через ряд положений равновесия и в конце концов вернется в свое первоначальное положение.

Более подробное вычисление передачи энергии связанному квазиупругими силами электрону ведет к следующему выражению для тормозящего действия далеких столкновений (Н. Бор [9, 10]):

$$S_q = B \left( \ln \frac{k\gamma v}{q\omega_a} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (11)$$

где  $k$  — численный множитель, равный 1,123. Формула (11), как мы видим, совпадает с (7) для значений  $p_{\max}$ , близких к  $d_a$  (10). Нужно заметить, что при выводе (11) предполагалось, что  $q$  может быть выбрано малым по сравнению с  $d_a$ . При рассмотрении взаимодействия атомов тормозящего вещества мы требовали (см. раздел 2), чтобы  $q \gg a_0$ . Эти два условия совместимы только в случае если  $d_a \gg a_0$ . Однако большими частотами  $\omega_a$ , при которых  $d_a \ll a_0$ , можно не интересоваться, потому что в этом случае силы связи электрона с атомом производят экранирование на таких расстояниях, при которых эффекты, связанные с взаимодействием атомов, уже пренебрежимо малы.

#### 4. Влияние взаимодействия атомов на торможение частиц с нерелятивистскими скоростями

Возвращаясь к задаче взаимодействия атомов тормозящего вещества, видим, что в основном это явление сводится к некоторому экранирующему эффекту. В самом деле, когда электрон смещается из своего положения равновесия во время прохождения частицы, окружающая среда поляризуется, и, следовательно,

на каждый атомный электрон со стороны окружающей среды действует дополнительная сила.

Вначале удобно ограничиться более простым случаем нерелятивистских скоростей частицы, когда задачу можно рассматривать таким же способом, как в разделе 3 рассматривалось влияние связи электрона в атоме. Введем векторы поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  и заметим, что в квазиэлектростатическом приближении, когда  $v \ll c$ , имеем  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , и, следовательно,  $\text{rot } \mathbf{D} = 0$ , если среда однородна и изотропна. Последнее равенство справедливо вне зависимости от дисперсионных свойств среды. Среднее электрическое поле в среде равно  $\mathbf{E} = \mathbf{D} - 4\pi\mathbf{P}$ , где  $\mathbf{P}$  — дипольный момент единицы объема; сила, действующая на электрон из-за поляризации среды, равна  $4\pi e\mathbf{P}$ .

Так как  $\mathbf{P}$  дается выражением  $-ne\xi$ , где  $\xi$  — вектор смещения электрона и  $n$  — плотность электронов, то очевидно, что поляризационная сила является квазиупругой силой с пиклической частотой  $\nu$ , равной

$$\nu^2 = \frac{4\pi ne^2}{\mu}. \quad (12)$$

Эта частота  $\nu$  есть частота колебаний «свободного» электрона в среде. Влияние атомного взаимодействия может рассматриваться таким же способом, как и влияние сил связи электрона в атоме, в частности, оно приводит к экранированию на расстояниях  $d_\nu$ , равных

$$d_\nu = \frac{v}{\nu} \quad (13)$$

по аналогии с (10) при  $\gamma = 1$ .

Нужно заметить, что сила, с которой среда действует на электрон, может отличаться от  $4\pi e\mathbf{P}$  в соответствии с хорошо известным различием между средним полем  $\mathbf{E}$  и действующим полем  $\mathbf{F}$ . В газах, в которых нейтральные молекулы могут рассматриваться как независимые, можно показать, что  $\mathbf{F}$  равно  $\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}$ ; в некоторых случаях такое же соотношение между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{F}$  сохраняется и в плотных веществах. Однако особенно интересно для последующих рассуждений заметить, что если электрон не связан с каким-либо определенным положением, а может двигаться через все пространство (как в металлах),  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{F}$  должны совпадать (см. Дарвин [11]). В более общем случае можно положить  $\mathbf{F} = \mathbf{E} + 4\pi\alpha\mathbf{P}$ , где  $\alpha$  — численная постоянная, характеризующая строение вещества. Поскольку дополнительная сила  $\mathbf{F} - \mathbf{E}$  может быть приписана влиянию атомов, находящихся в непосредственном соседстве с рассматриваемым электроном, будет удобнее включить ее в силу, связывающую электрон с атомом ( $-\mu\omega_0^2\xi$ ). Таким обра-

зом, если  $\omega'_a$  есть частота колебаний изолированного атома, то имеем

$$\omega_a^2 = \omega_a'^2 - \alpha v^2, \quad (14)$$

где  $v$  дано формулой (12). Как хорошо известно из теории дисперсии,  $\omega_a$  представляет собой частоту линии поглощения вещества.

Совокупное влияние атомной связи и поляризации среды можно описывать, введя эффективную частоту  $\omega_A$ , определенную по формуле

$$\omega_A^2 = \omega_a^2 + v^2, \quad (15)$$

и заменив  $\omega_a$  на  $\omega_A$  в формулах, полученных для изолированного атома. В частности, тормозная способность вещества может быть таким способом получена из нерелятивистского приближения (11).

Чтобы оценить значение взаимодействия атомов для теории прохождения частиц через вещество, мы должны сравнить  $v$  с атомной частотой  $\omega_a$ . Вводя скорость электрона  $v_0$  и радиус орбиты  $a_0$  в водородном атоме, из (12) получим

$$v^2 = 4\pi n a_0^3 \left( \frac{v_0}{a_0} \right)^2. \quad (16)$$

Так как  $v_0/a_0$  по порядку величины равно частоте колебаний наиболее слабо связанных электронов в атомах и так как даже в плотных веществах  $n a_0^3$  всегда меньше единицы, то  $v$  не может быть очень большой по сравнению с  $\omega_a$ , а напротив, в большинстве случаев весьма мала. По этой причине для нерелятивистских скоростей, которыми мы ограничивались до сих пор, взаимодействие атомов среды играет второстепенную роль для определения тормозной способности вещества. Однако, как уже упоминалось в разделе 1, имеются исключения из этого правила. В самом деле, для свободных электронов в металле или плазме частоты связи исчезнут, и в этом случае (мы рассмотрим его подробно в разделе 5) поляризационный эффект приобретает решающее значение.

В настоящем разделе мы покажем, как тормозная сила вещества может быть непосредственно определена как сила, с которой вещество действует на движущуюся частицу<sup>1)</sup>. Этот второй приближенный способ позволяет так же просто получать формулу для тормозной способности, соответствующую (11), с учетом поляризационного эффекта. В целях иллюстрации мы сначала ограничимся аналогичной задачей для соударения двух тел.

Вместо того, чтобы вычислять потерю энергии частицы по передаче импульса электрону, можно непосредственно определить

<sup>1)</sup> Несколько более качественные соображения приведены Н. Бором (раздел 1 гл. III).

силу, действующую со стороны электрона на движущуюся частицу. Смещение электрона во время соударения таково, что, предполагая частицу положительно заряженной, сила, замедляющая частицу в последней половине столкновения, больше, чем ускоряющая сила в первой. Компонента тормозящей силы вдоль направления движения частицы, вызванная смещением электрона, дается следующим выражением:

$$\delta K = -\eta \frac{\partial}{\partial p} \frac{z_1 e^2 vt}{(p^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{3z_1 e^2 \eta p vt}{(p^2 + v^2 t^2)^{5/2}} \quad (17)$$

Вводя  $\eta$  по (5) и положив  $\gamma = 1$ , получим выражения для величины уменьшения кинетической энергии частицы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta K v dt = 3 \frac{z_1^2 e^4}{\mu v^2} v^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(p^2 + v^2 t^2)^{5/2}} = \mathcal{V}, \quad (18)$$

что совпадает с формулой (6).

При прохождении частицы через вещество возникает поляризация, вызывающая дополнительное торможение частицы. Если среда однородная и изотропная, то нигде не возникает свободных зарядов ( $\text{div } \mathbf{P} = 0$ ), кроме как около самой частицы. Поэтому внутри среды каждый элемент объема останется нейтральным и не действует на проходящую частицу; только вдоль пути частицы появляется заряд противоположного знака. Конечно, такие расхождения, связанные с использованием средних величин, не применимы в непосредственной близости к частице. Однако если мы рассматриваем взаимодействие между частицей и средой на расстояниях, больших по сравнению с атомными размерами, то мы можем себе представить цилиндрическую трубу радиуса  $q \gg a_0$ , внутри которой лежит путь частицы. Сила  $S_q$ , с которой более далекая область среды действует на частицу, может быть вычислена как величина притяжения свободным зарядом, индуцированным на внутренней поверхности этой цилиндрической трубы.

Поверхностная плотность  $\sigma$  этого заряда равна  $-\epsilon n \eta$ . Однако для величины  $\eta$  мы не можем использовать простую формулу (5), так как мы должны принять во внимание квазиупругую силу с частотой  $\omega_A$ . Но если мы выберем  $q \ll \frac{v}{\omega_A}$ , то электрон на поверхности в течение времени, когда действующая со стороны частицы сила имеет существенное значение, ведет себя как свободный. Предполагая, что до удара электрон покоился, из (5) получим

$$\sigma(x) - \sigma(-x) = 2en \frac{z_1 e^2}{\mu v^2} \frac{x}{q}, \quad (19)$$

где  $x = -vt$  обозначает расстояние электрона от положения частицы в данный момент, измеренное в направлении  $v$ . Выражение

(19) справедливо, пока  $|x| \ll \frac{v}{\omega_A}$ ; на больших расстояниях уже будет сказываться сила связи.

Поскольку при таких больших расстояниях непосредственное влияние частицы на движение электрона перпендикулярно к пути частицы пренебрежимо мало, формулу (19) можно обобщить:

$$\sigma(x) - \sigma(-x) = 2en \frac{z_1 e^2 \cdot v}{\mu v^2 \omega_A q} \sin\left(\frac{x\omega_A}{v}\right). \quad (20)$$

Таким образом, для силы, действующей на частицу, получим:

$$S_q = z_1 e \int_0^{\infty} \frac{\sigma(x) - \sigma(-x)}{(x^2 + q^2)^{3/2}} 2\pi q x dx = B \frac{v}{\omega_A} \int_0^{\infty} \frac{x \sin\left(\frac{x\omega_A}{v}\right)}{(x^2 + q^2)^{3/2}} dx, \quad (21)$$

где  $B$  дано формулой (8). Этот интеграл может быть выражен через функцию Ханкеля, и при  $q \ll \frac{v}{\omega_A}$  асимптотическое его выражение будет следующим:

$$S_q = B \ln \frac{kv}{\omega_A q}, \quad (22)$$

что находится в согласии с (11) при  $v \ll c$ , если только  $\omega_a$  заменить на  $\omega_A$ .

Результаты этого раздела, заключенные в формулах (12), (15) и (22), для нерелятивистских скоростей соответствуют результатам, полученным более общим методом Ферми [6], который с целью рассмотрения также области  $v \sim c$  применил формально совсем другой метод (в его методе величина  $S_q$  определялась как поток энергии через поверхность цилиндра радиуса  $q$ ).

### 5. Тормозная способность вещества, содержащего свободные электроны

Как было указано, эффекты взаимодействия атомов для частиц с нерелятивистскими скоростями особенно существенны, если вещество содержит свободные электроны. В этом отношении представляет особый интерес тормозная способность металлов, в которых электроны проводимости можно рассматривать в широких пределах как свободные (см. раздел 10).

Необходимо сделать ряд замечаний по поводу возможности применения рассуждений предыдущих разделов к проблеме свободных электронов. В данном случае приходится иметь дело в некотором смысле с бесконечно большими атомами, и само определение далеких столкновений как столкновений с прицельным параметром, большим по сравнению с атомными размерами,

поэтому, строго говоря, становится бессмысленным. Однако для наших целей не существенно, что электроны могут свободно передвигаться по всему пространству; мы можем считать их заключенными в ограниченном объеме линейных размеров  $a$ , если только соответствующая частота колебаний, которая должна быть порядка  $\hbar/\mu a^2$ , будет мала по сравнению с  $\omega_A$ . Это условие может быть выполнено и  $a$  выбрано в то же время достаточно малым по сравнению с расстоянием экранирования  $v/\omega_A$ , если только  $\mu v^2 \gg \hbar \omega_A$ . Для частиц меньших скоростей рассматриваемый нами механизм торможения имеет второстепенное значение.

При оценке тормозной способности нужно принять во внимание, что, кроме поляризации, имеется ряд эффектов, которые будут препятствовать свободному движению электронов. Действительно, во время соударения с падающей частицей электрон может сталкиваться с ионами и электронами среды. Влияние этих соударений может быть сравнено с эффектом силы трения, определяемым величиной  $-\mu \omega_0 \dot{\xi}$ , где  $\dot{\xi}$  — вектор скорости, а  $1/\omega_0$  — мера интервала времени, в течение которого импульс электрона существенно меняется; в частности, как известно из теории проводимости, для металлов

$$\omega_0 = \frac{ne^2}{\mu} \rho \quad (23)$$

( $\rho$  — удельное сопротивление).

При рассмотрении тормозной способности металлов Вейдзекер [12] предполагал, что предел эффективного взаимодействия между частицей и свободными электронами определяется сопротивлением. Однако, как показал Крамерс [7], этот эффект, вообще говоря, играет очень малую роль по сравнению с поляризацией среды. Действительно, так как импульс, передаваемый частицей свободному электрону, по порядку величины равен силе, умноженной на эффективное время соударения  $p/v$ , то сила трения может влиять на столкновения только при  $p \gtrsim d_p = \frac{v}{\omega_p}$ . В металлах же при обычной температуре  $\omega_0 \ll v$  и  $d_0 \gg d_p$ , где  $d_0$  дано формулой (13). Следовательно, эффективный адиабатический предел будет в первую очередь определяться поляризацией.

Более точную оценку влияния трения на тормозную способность можно получить по аналогии с рассуждениями, приведенными к формуле (22), с той единственной разницей, что выражение (20) должно представлять теперь затухающие колебания. Нужно только добавить множитель  $\exp\left\{-\frac{\omega_p}{2v}x\right\}$  и подставить вместо  $\omega_A$  эффективную частоту колебаний, которая для  $\omega_a = 0$  равна  $\sqrt{v^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2}$ . Для  $q$ , малых по сравнению с адиабатическим пре-



делом, находим асимптотическое выражение для  $S_q$ :

$$S_q = B \left\{ \ln \frac{kv}{qv} - \frac{\omega_p}{\sqrt{4v^2 - \omega_p^2}} \arctg \frac{\sqrt{4v^2 - \omega_p^2}}{\omega_p} \right\}. \quad (24)$$

Эта формула эквивалентна формуле, полученной Крамерсом несколько другим методом, а также совпадает с нерелятивистским приближением формулы Ферми<sup>1)</sup>. Для  $\omega_p \ll v$  последний член в скобках в (24) приближенно равен  $-\frac{\pi}{4} \frac{\omega_p}{v}$ , и формула переходит в (22) для  $\omega_A = v + \frac{\pi}{4} \omega_p$ . Для противоположного случая  $\omega_p \gg v$  последний член в скобках в (24) асимптотически выражается как  $\ln v/\omega_p$ , так что выражение (24) совпадает в этом случае с (22) при  $\omega_A = \omega_p$  в соответствии с результатом Вейцекера.

Надо отметить, что в приведенных выше вычислениях мы предполагали электроны покоящимися перед соударением с частицей, в то время как в металлах или плазме электроны имеют значительные скорости, часто превосходящие по величине изменение скорости, вызванное частицей. Однако это обстоятельство не должно иметь существенного значения для средней передачи энергии. Действительно, если обозначить через  $w$  начальную скорость и через  $u$  — изменение скорости, то увеличение кинетической энергии определится следующей формулой:

$$T = \frac{1}{2} \mu (w + u)^2 - \frac{1}{2} \mu w^2 = \frac{1}{2} \mu u^2 + \mu wu; \quad (25)$$

при усреднении по всем направлениям  $w$  последний член пропадает.

Конечно, надо предполагать, что электроны во время соударения не перемещаются на расстояние, сравнимое с прицельным параметром, так что  $w$  должно быть мало по сравнению со скоростью частицы. В большинстве важнейших случаев это условие хорошо выполняется, но, например, в плазме при высокой температуре тепловые скорости могут превышать  $v$  даже для «быстрых» частиц, и тогда явление торможения приобретает существенно иной характер. Однако не будем здесь рассматривать этот вопрос более подробно.

## 6. Влияние атомных взаимодействий на торможение частиц с релятивистскими скоростями

В предыдущем рассмотрении поляризационного эффекта мы ограничились скоростями, малыми по сравнению со скоростью

<sup>1)</sup> В случае связанных электронов тоже можно учесть затухание. В этом более общем случае  $S_q$  выражается формулой (24), в которой нужно заметить  $v$  на  $\omega_A$  и  $\omega_p$  — коэффициентом затухания (см. [6]).

света. В то время как в этом случае атомные взаимодействия, за малым исключением, рассмотренным в разделе 5, оказываются незначительными по сравнению с внутренними силами связи, положение существенно меняется для релятивистских скоростей. Действительно, для больших значений  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  радиус действия частицы, как было показано Ферми [6], всегда определяется поляризационными эффектами.

Если рассматривать соударение с отдельными атомами, то изменения, необходимые при  $v \approx c$ , оказываются очень простыми. Так, до тех пор пока мы остаемся внутри адиабатического предела, передача энергии в далеких столкновениях, согласно (6), не зависит от релятивистских эффектов. В самом деле, учет запаздывания вызывает только сжатие поля падающей частицы в  $\gamma$  раз в направлении движения и увеличение поля в том же отношении и тем самым не влияет на полное изменение импульса. За счет сжатия поля и вызываемого им уменьшения времени соударения адиабатический предел, однако, возрастает в  $\gamma$  раз, как то следует из формулы (10).

Можно добавить, что влияние сил трения, рассмотренное в разделе 5, изменяется подобным же образом. Поскольку сила трения  $-\mu\omega_p \dot{x}$  сравнима с силой, действующей со стороны частицы, только в случае, когда время соударения порядка или больше, чем  $1/\omega_p$ , расстояние экранирования, соответствующее этому эффекту, дается выражением

$$d_p = \frac{v}{\omega_p} \gamma, \quad (26)$$

которое для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, совпадает с результатом раздела 5.

Анализ атомных взаимодействий в релятивистском случае представляет в некотором отношении более сложную проблему. В частности, мы не можем уже, как в случае  $v \ll c$ , сравнивать поляризационные силы с простой квазиупругой силой. В отличие от экранирующего эффекта для сил последнего типа адиабатический предел для сред со свободными электронами, в которых поляризация является определяющей для торможения, не зависит от запаздывания.

Этот результат, который следует как из формулы Ферми, так и из более элементарных соображений, показывает, что в релятивистском случае взаимодействие электронов значительно сильнее, чем под влиянием электростатических сил, рассмотренных в разделе 4. Действительно, все эффекты взаимодействия приобретают при  $\gamma \gg 1$  в основном электромагнитный характер.

Чтобы пояснить последнее обстоятельство, поучительно рассмотреть соударение двух тел с точки зрения реакции электрона на падающую частицу. Этот вопрос был рассмотрен в разделе 4 для

$v \ll c$ , но он существенно изменяется благодаря запаздыванию. Действительно, частица не будет «знать», что движение электрона возмущено раньше, чем импульс, вызванный этим возмущением, будет воспринят частицей; для скоростей, близких к  $c$ , это произойдет через сравнительно большое время после начала соударения. Так, импульс, испущенный электроном в момент наибольшего сближения, дойдет до частицы, когда она пройдет расстояние  $p\gamma$ . Периоды, характеризующие электронные движения, будут сравнимы с временем удара  $\frac{p}{v} \frac{1}{\gamma}$ , и при  $v \approx c$  поля, которые возникают в результате этого движения, будут содержать в основном гармонические компоненты с длиной волны порядка  $p/\gamma$ . Так как эти длины волн малы по сравнению с рассматриваемым расстоянием  $p\gamma$ , то реакция электрона на частицу определяется в первую очередь электромагнитными волнами, излученными ускоренным электроном. Электростатическая часть поля, зависящая от смещения электрона и определявшая в нерелятивистском случае реакцию, в данном случае имеет лишь второстепенное значение.

Следующая оценка может пояснить, что ускорение электрона при  $\gamma \gg 1$  действительно является определяющим для реакции. Интенсивность электрического поля, производимого электроном, движущимся с ускорением, на больших расстояниях  $r$  асимптотически выражается следующим образом:

$$E(t) = \frac{e\eta(t')}{c^2 r} \sin \varphi, \quad (27)$$

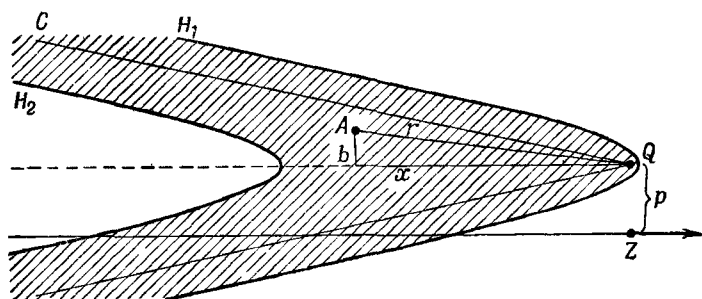
где  $\varphi$  — угол между направлением ускорения и радиус-вектором, а  $\eta$  нужно брать для запаздывающего времени  $t' = t - \frac{r}{c}$ . Так как это поле поперечное, т. е. перпендикулярно к  $r$ , сила, действующая на частицу против направления движения, равна

$$\delta K(t) = \frac{z_1 e^3}{c^2} \frac{\eta(t')}{r} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (28)$$

В течение соударения величина  $\eta$ , согласно (3), будет порядка  $z_1 e^2 \gamma / p^2 \mu$ , а так как рассматриваемые значения  $r$  имеют порядок  $p\gamma$ , то для  $\gamma \gg 1$  мы можем положить  $\sin \varphi = 1$  и  $\cos \varphi = 1/\gamma$ . Хотя электромагнитный импульс, излученный ускоренным электроном, имеет пространственное протяжение порядка  $p/\gamma$ , он будет действовать на частицу на расстоянии, сравнимом с  $p\gamma$ , так как скорости импульса и частицы отличаются только на величину порядка  $\gamma^{-2}$ . Таким образом, видно, что компонента силы (28) обуславливает потерю энергии, по порядку величины как раз равную  $T$  [формула (6)].

Более точный анализ реакции при соударении двух тел дан в дополнении I, но и приведенное выше беглое рассмотрение достаточно для того, чтобы пояснить решающую роль излучения.

Подобным же образом можно получить оценку взаимодействия между электронами в той среде, через которую проходит частица. С этой целью рассмотрим электрон в точке  $Q$  (см. фиг. 8), который соударяется с частицей  $Z$ , проходящей на расстоянии  $p$ . В то же самое время электрон испытывает влияние окружающих электронов, причем большая часть этого влияния будет исходить от тех электронов, которые в момент  $t' = t - \frac{r}{c}$  были сами ускорены, т. е. испытали столкновение с частицей.



Фиг. 8.

Электрон в точке  $A$  в момент  $t'$  находился в такой фазе соударения, которая опережает на время  $\tau$  фазу соударения рассматриваемого в данный момент электрона в точке  $Q$ , которое равно

$$\tau = \frac{r}{c} - \frac{x}{v}, \quad (29)$$

где  $x$  — проекция расстояния от  $Q$  до  $A$  на направление движения частицы.

Вводя  $r^2 = x^2 + b^2$  (см. фиг. 8), из (29) получаем

$$\frac{(x + v\tau\gamma^2)^2}{v^2\tau^2\gamma^2(\gamma^2 - 1)} - \frac{b^2}{c^2\tau^2(\gamma^2 - 1)} = 1, \quad (30)$$

откуда ясно, что точки с постоянным значением  $\tau$  расположены на гиперboloиде. В частности, электроны, которые в момент  $t'$  были в той же фазе соударения, что электрон в точке  $Q$ , будут находиться на конической поверхности, распространяющейся назад от  $Q$  с углом раствора  $\vartheta$ , определяемого условием  $\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\gamma}$ .

Эта поверхность пересекает путь частицы на расстоянии  $x = \frac{v}{c} \gamma p$ .

На фигуре электрон в  $Q$  в рассматриваемый момент находится на наименьшем расстоянии от частицы. Электроны, которые в момент  $t'$  «начали» или «закончили» соударение, будут распо-

ложены приблизительно на гиперболоидах  $H_1$  и  $H_2$ , соответствующих  $\tau = -\frac{p}{2\gamma v}$  и  $\tau = +\frac{p}{2\gamma v}$  (так как  $\frac{p}{\gamma v}$  по порядку величины равно времени соударения<sup>1)</sup>). Таким образом, основная часть силы, с которой вещество действует на электрон, возникает от электронов, расположенных в заштрихованной области между  $H_1$  и  $H_2$ . Для  $\gamma \gg 1$  основная часть этой области расположена позади электрона на расстоянии, сравнимом или меньшем, чем  $rv$ . В самом деле, вне этой области находятся электроны, движущиеся с ускорением по всем направлениям, так что вызванное ими суммарное поле невелико.

Согласно (27), поле от каждого электрона обратно пропорционально  $r$ . Далее, так как  $\sin \varphi \sim 1$  и большинство рассматриваемых электронов имеет ускорения, сравнимые с ускорением электрона в  $Q$ , результирующая поляризационная сила  $K$  по порядку величины равна

$$K \sim \frac{e^2}{c^2} \ddot{\eta} p^2 n \quad (31)$$

и направлена против  $\eta$ . Очевидно, что эта сила мала по сравнению с силой  $\mu\eta$ , действующей на электрон, если только

$$p \ll \frac{c}{v}, \quad (32)$$

где  $v$  дается формулой (12). Этот верхний предел определяет расстояние экранирования, обусловленного атомным взаимодействием. Данная оценка поляризационных сил весьма груба, но из-за сложности вычислений мы не будем проводить детального анализа с микроскопической точки зрения. Однако и приведенных выше соображений достаточно, чтобы выявить важную особенность, состоящую в том, что при  $v \rightarrow c$  расстояние  $d_v$  приближается к постоянной величине порядка  $c/v$ .

При оценке тормозной способности вещества мы должны сравнить  $d_v$  с адиабатическим пределом  $d_a$ , который определяется связью электрона внутри атома и дан формулой (10). Что касается первого из упомянутых расстояний, то оно определяется выражением (13), которое было первоначально выведено для  $v \ll c$ , но, как мы видели, приближенно применимо для всех скоростей.

Если даже  $\omega_a \gg v$ , то только для  $\gamma < \frac{\omega_a}{v}$  поляризационными эффектами можно пренебречь и применять формулу (11). Для больших

<sup>1)</sup> Строго говоря, надо было бы принять во внимание, что время соударения зависит от прицельного параметра. Однако для оценки порядка величины достаточно приближенного рассмотрения, поскольку основная часть поляризационных сил возникает от атомов с прицельным параметром, сравнимым с прицельным параметром атома в точке  $Q$ .

значений  $\gamma$  влияние связи электрона в атоме на величину  $S$  невелико, и  $p_{\max}$  в (7) будет порядка  $d_\gamma$ . Более точное определение  $p_{\max}$  можно получить, учтя, что тормозная способность вещества, содержащего свободные электроны (см. раздел 7), не зависит от запаздывания. Для больших  $\gamma$  мы имеем, таким образом, асимптотическое выражение

$$S_q = B \ln \frac{kv}{p\nu}, \quad (33)$$

что находится в соответствии с (22) при  $\omega_A = \nu$ .

Мы пренебрегли влиянием сил трения, которое может стать существенным, если  $d_p$ , определяемое формулой (26), будет меньше чем  $d_a$  и  $d_\gamma$ . При этих условиях формула для тормозной способности получается из (11) подстановкой  $\omega_p$  вместо  $\omega_a$ . Эти результаты находятся в полном согласии с формулой Ферми [6], выведенной более строгим способом. Только в том случае, когда ни одно из трех расстояний —  $d_a$ ,  $d_\gamma$  и  $d_o$  — не будет много меньше, чем два остальные, необходимо ввести некоторые поправки по аналогии с более детальными выражениями, данными в разделах 4 и 5 для нерелятивистских скоростей. Однако эти поправки составляют по большей мере несколько процентов от общей величины тормозной способности.

## 7. Эффект Черенкова и его связь с проблемой торможения

Как уже было упомянуто в разделе 1, прохождение очень быстрых частиц через конденсированное вещество сопровождается особым излучением (эффект Черенкова). Анализ этого явления был впервые дан Франком и Таммом [2], которые показали его непосредственную связь с тем обстоятельством, что фазовая скорость света в веществе может быть меньше, чем скорость частицы. Действительно, излучение Черенкова представляет близкую аналогию с известными акустическими и гидродинамическими явлениями, происходящими при движении со скоростями, превосходящими волновую скорость в среде (Тамм [3]).

Так как фазовая скорость электромагнитных волн равна  $c/\sqrt{\epsilon}$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная, излучение будет иметь место в той спектральной области, где

$$\sqrt{\epsilon} > \frac{c}{v}. \quad (34)$$

Кроме того, так как волны должны быть стационарными по отношению к движущейся частице, то угол излучения для частот, удовлетворяющих условию (34), определится выражением

$$\cos \theta = \frac{c}{v\sqrt{\epsilon}}, \quad (35)$$

где  $\theta$  измеряется от направления движения частицы.

В настоящем разделе мы обсудим некоторые черты эффекта Черенкова и, в частности, его связь с теорией торможения. Представляет интерес рассмотреть эффект как с микроскопической, так и макроскопической точки зрения. В первом случае мы получим непосредственную связь с рассуждениями в разделе 6, вторая же точка зрения аналогична развитой Франком, Таммом и Ферми.

С микроскопической точки зрения эффект Черенкова возникает из-за того, что часть энергии, передаваемой проникающей частицей электрону среды, может впоследствии быть испущена как когерентное излучение. В предыдущем разделе не было необходимости учитывать этот эффект, поскольку в проблеме тормозной способности в первом приближении нужно рассматривать поведение электрона только во время соударения с частицей. Действительно, можно сказать, что потеря энергии частицей происходит в течение этого короткого промежутка времени, и на нее не влияет дальнейшее распределение энергии, переданной электрону. Из этих соображений становится очевидным, что эффект Черенкова соответствует части тормозной способности, оцененной в разделе 6, и не должен рассматриваться как дополнительный источник потерь энергии (см. Ферми [6]).

Некоторые из главных особенностей излучения могут быть поняты из анализа, подобного проведенному в разделе 6. Так, когерентность излучения требует выполнения фазовых соотношений между волнами, происходящими от отдельных электронов, что немедленно приводит к условию (35). Кроме того, спектральное распределение связано со скоростью, с которой энергия электронного колебания переходит в радиацию. Для изолированного атома эта скорость очень мала, но под влиянием окружающих атомов она может сильно возрасти. Действительно, благодаря соотношению фаз суперпозиция электромагнитных полей отдельных осцилляторов приводит к резкому увеличению радиационных эффектов.

Чтобы оценить влияние атомных взаимодействий на спектр излучения Черенкова, можно рассмотреть два крайних случая:  $d_v \gg d_a$  и  $d_v \ll d_a$ . В этих случаях, согласно разделу 6, силы взаимодействия можно считать соответственно очень слабыми и очень сильными по сравнению с силами связи электрона внутри атома. В первом случае можно ожидать, что атомы успеют совершить большое число колебаний, прежде чем их энергия будет излучена, и излучаемый спектр будет состоять из узкой полосы вокруг собственной частоты колебания. Во втором случае атомы не смогут совершить ни одного колебания, и спектральное распределение не будет похоже на резкую спектральную линию.

Эти свойства излучения находятся в согласии с условием (34) для спектральной области. Действительно, закон дисперсии для

простейшей атомной модели с одной собственной частотой можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon = 1 + \frac{\nu^2}{\omega_a^2 - \omega^2}, \quad (36)$$

где  $\nu$  определяется формулой (12). Далее, согласно (10) и (13), два рассматриваемых случая соответствуют условиям  $\nu\gamma \ll \omega_a$  и  $\nu\gamma \gg \omega_a$ . Отсюда видно, что в первом случае условие (34) выполняется только в узкой области вокруг  $\omega_a$ , в то время как во втором случае оно выполняется для всех частот, меньших  $\omega_a$ .

С макроскопической точки зрения, потеря энергии частицей происходит двумя различными способами. Действительно, если пренебречь поглощением, обусловленным затуханием, может происходить либо излучение энергии, либо поглощение ее веществом, причем в последнем случае в среде возникают колебания, которые сохраняются и после прохождения частицы. Для различия между этими двумя механизмами удобно разделить электромагнитное поле, возникающее в среде при прохождении частицы, на поперечную (с равной нулю дивергенцией) и продольную (с равным нулю ротором) компоненты. Радиационная часть поля имеет, очевидно, поперечный характер, в то время как остаточные колебания, возникшие там, где прошла частица, соответствуют продольной компоненте поля. В самом деле, в отсутствие электрического тока поперечное поле состоит из электромагнитного излучения, распространяющегося бесконечно далеко.

Продольная компонента представляет поле, вычисленное без учета эффектов запаздывания, и поэтому совпадает с полем, рассмотренным в разделе 4, когда скорость света считалась бесконечной. Таким образом, видно, что энергия, поглощаемая веществом вблизи пути частицы, определяется нерелятивистской формулой торможения<sup>1)</sup>.

Релятивистское возрастание потери энергии обусловлено поперечным полем и поэтому представляет собой энергию излучения. Кроме того, из этих рассуждений видно, что в то время как энергия, остающаяся в веществе, передана атомам на расстояниях, меньших, чем расстояние, определяемое релятивистским адиабатическим пределом, излучение обусловлено атомами, расположенными на больших расстояниях от пути частицы.

Представляет интерес отметить, что для вещества, содержащего свободные электроны ( $\omega_a = 0$ ), из (36) следует, что  $\varepsilon$  всегда меньше единицы, и поэтому условие (34) никогда не может быть

<sup>1)</sup> Надо отметить, что если учитывать затухание, то часть поперечной компоненты поля может быть также поглощена веществом вблизи пути частицы (см. раздел 8).



выполнено. Следовательно, излучение не происходит, и тормозная способность, как уже было упомянуто в разделе 6, для всех скоростей может быть определена выражением, первоначально выведенным для  $v \ll c$ .

Для поля, остающегося в веществе после прохождения частицы, мы имеем, конечно,  $\mathbf{D} = 0$ , так как с макроскопической точки зрения «истинных» зарядов в нем не существует. Диэлектрическая постоянная вещества должна исчезать для рассматриваемых частот колебаний, что, согласно (36), будет выполнено для  $\omega = \omega_A$ , где  $\omega_A$  определено формулой (15) и представляет собой, как то явствует из раздела 4, собственную частоту вещества. Следует добавить, что, поскольку приходится иметь дело с возбуждением осцилляторов, собственная частота которых соответствует  $\varepsilon = 0$ , можно заключить, что поглощаемая ими энергия не зависит от эффектов запаздывания. Действительно, как хорошо известно, эта энергия зависит от резонансной компоненты возбуждающего поля, для которой фазовая скорость света  $c/\sqrt{\varepsilon}$  бесконечна.

При оценке получаемой энергии Франк и Тамм [2] и Ферми [6] раскладывали вызываемое частицей электромагнитное поле как функцию времени на гармонические составляющие. Однако здесь возможно применить также и хорошо известный в теории излучения метод разложения поля на плоские волны. В дополнении II мы рассмотрим применение этого формализма к проблеме тормозной способности и эффекта Черенкова. С помощью этого метода можно несколько по-иному рассмотреть явление и, кроме того, показать разницу между приемами классической электромагнитной теории и формализмом, обычно применяемым в квантовой электродинамике.

## 8. Атом как дисперсионная система

Предыдущие рассуждения были основаны на весьма упрощенной атомной модели, в которой все виртуальные осцилляторы имеют одну и ту же частоту. Это упрощение было сделано для того, чтобы выявить как можно яснее принципиальные черты эффекта атомного взаимодействия. При более детальном рассмотрении атом нужно сравнивать с системой осцилляторов с разными вероятностями возбуждения (см. раздел 2). Собственные частоты этих осцилляторов обозначим посредством  $\omega_i$ , а их относительные силы, нормированные на электрон, — посредством  $f_i$  ( $\sum f_i = 1$ ). Если атомы связаны, то эта модель все же применима, если только осцилляторы отвечают возможным переходам электронов в молекулах или в решетке.

Эти уточнения легко могут быть учтены в обычной теории торможения. Действительно, если осцилляторы можно рассматри-

вать как независимые, то формула (11) просто заменяется формулой

$$S_q = B \sum_i f_i \left( \ln \frac{kv\gamma}{q\omega_i} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (37)$$

где электронная плотность  $n$ , входящая в выражение (8) для  $B$ , равна  $z_2 N$  ( $z_2$  обозначает атомный номер вещества,  $N$  — число атомов в единице объема).

Однако поляризация приводит к взаимодействию между различными осцилляторами. Принципиально подсчет этого эффекта не представляет трудности, поскольку метод Ферми [6] или метод, подобный изложенному в дополнении II, могут быть обобщены на этот случай, если заменить упрощенную дисперсионную формулу (36) формулой

$$\epsilon = 1 + \sum_i \frac{f_i v^2}{\omega_i^2 - \omega^2}, \quad (38)$$

соответствующей той атомной модели, на которой основано выражение (37).

Однако точные вычисления этими методами приводят к довольно сложным выражениям<sup>1)</sup>. Поэтому представляет интерес на основе соображений, аналогичных приведенным в разделе 6, получить простую формулу, степень точности которой достаточна почти для всех целей.

В таком микроскопическом рассмотрении влияние поляризации на тормозную способность может быть оценено при сравнении расстояния  $d_v$  с адиабатическим пределом  $d_i$ , соответствующим различным атомным частотам  $\omega_i$  и определяемым для  $\omega_a = \omega_i$  формулой (10). Величина  $d_v$  определится выражением типа (13).

<sup>1)</sup> Случай двух дисперсионных частот был рассмотрен Гальперном и Холлом [13]. Более общая модель, соответствующая (38), была рассмотрена Штернхеймером [14]; однако оценка полученных им выражений трудна и была сделана только при упрощающих предположениях. Точность полученных выражений едва ли превышает точность более простого анализа, приведенного здесь, результаты же последнего в основном совпадают с результатами Штернхеймера. Вик [39] распространил вычисления Ферми на модель со многими частотами (см раздел 8) и на основе дисперсионной формулы типа (38) получил выражение для изменения тормозной способности, допускающее численные вычисления для любого набора дисперсионных частот. Тот же результат был получен независимо Гальперном и Холлом [40], опубликование работы которых было задержано из-за войны. Последние авторы получили явную формулу для тормозной способности, справедливую при некоторых упрощающих предположениях, законных в большинстве интересных случаев. Эта формула совпадает с (41), использованные приближения эквивалентны использованным в разделе 8. Нужно отметить, что авторы исходят из закона дисперсии, который, в противоположность (38), принимает во внимание поправку Лоренц-Лоренца, хотя в рассматриваемом приближении этой поправкой можно пренебречь.

Существенным будет оценка эффективной электронной плотности, которая определяет поляризацию. Действительно, благодаря влиянию сил связи электронов в атоме эта плотность будет уменьшаться с увеличением расстояния от пути частицы.

На расстоянии, сравнимом с  $d_i$ , число электронов (на единицу объема), существенных для поляризации, будет равно  $nF_i$ , где  $F_i$  есть сумма сил осцилляторов, соответствующих атомным частотам, равным или меньшим, чем  $\omega_i$ . Согласно оценкам, сделанным в разделе 6, атомные взаимодействия существенны при условии  $\gamma v F_i^{1/2} > \omega_i$ , где  $\gamma$  определяется формулой (12) для  $n = z_2 N$ . Для дальнейшего удобно ввести критическую частоту  $\omega_c$ , определенную равенством

$$\omega_c = \gamma v F_c^{1/2}, \quad (39)$$

где

$$F_c = \sum_{\omega_i \leq \omega_c} f_i. \quad (40)$$

Вообще говоря, мы будем предполагать, что уравнение (39) имеет только один корень. К этому вопросу мы коротко возвратимся в разделе 9, где будет рассмотрено приближенное выражение для распределения частот осцилляторов.

При наличии одного корня положение особенно просто; предел для свободной передачи энергии определяется либо силами связи электрона в атоме, либо поляризацией, смотря по тому, что  $\omega_i > \omega_c$  или  $\omega_i < \omega_c$  соответственно. Вклад в тормозную способность, обусловленный силами связи электрона в атоме, приближенно дается соответствующими членами формулы (37), а обусловленный поляризационными силами — формулой (33) при эффективной электронной плотности  $nF_c$ .

Полная тормозная способность далеких столкновений может быть записана так:

$$S_q = B \left\{ F_c \ln \frac{kv}{q v F_c^{1/2}} + \sum_{\omega_i > \omega_c} f_i \left( \ln \frac{kv\gamma}{q \omega_i} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \right\}. \quad (41)$$

В частности, при очень больших скоростях, для которых  $\gamma v$  превышает наибольшую из играющих существенную роль атомных частот,  $F_c \approx 1$ , и в этом случае формула для торможения особенно проста, поскольку она практически не зависит от атомных частот. Неопределенность, содержащаяся в (41), возникает главным образом из-за осцилляторов с частотами  $\omega_i \sim \omega_c$ , для которых, конечно, играют роль как поляризация, так и атомные силы связи. Тем не менее точность примененных выше приближений достаточно высока, потому что, как упоминалось в разделе 6, даже в том случае, когда все частоты равны и поэтому все могут попасть

в эту промежуточную область, необходимые поправки составляют только несколько процентов<sup>1)</sup>).

Часть потери энергии, излучаемой на большие расстояния, может быть определена в соответствии с рассуждениями в разделе 7, если предположить, что можно пренебречь поглощением из-за затухания. В этом случае излученная энергия просто равна разности между (41) и тормозной способностью, полученной в пренебрежении релятивистскими эффектами. Однако в действительности имеется заметное поглощение в широкой спектральной области, так что большая часть энергии поглощается на небольшом расстоянии от пути частицы. Таким образом, действительно излученная энергия, легко доступная наблюдению, относится к области частот ниже первой полосы поглощения. Для таких частот, которые большей частью совпадают с видимой и инфракрасной областью и, возможно, частично с ультрафиолетовой, спектр излучения может быть вычислен по формуле (12) Дополнения II, если в нее подставить соответствующее значение диэлектрической постоянной.

Наконец, мы коротко рассмотрим влияние взаимодействия атомов на число ионов, произведенных частицей вдоль своего пути. В принципе эта проблема содержит детальное исследование распределения потерь энергии по различным атомным осцилляторам. Однако оказывается, что соотношение между тормозной способностью и ионизацией не существенно изменяется поляризационными эффектами, и поэтому можно прибегнуть к помощи обычной теории прохождения частиц через вещество. При анализе этой проблемы мы будем использовать соображения, развитые в разделах 6 и 7, в частности будем разбивать поле, окружающее частицы, на продольную и поперечную части.

Правая часть, соответствующая потере энергии, вычисленной при пренебрежении запаздыванием, только незначительно (см. раздел 4) изменяется поляризацией, особенно в случае таких разреженных веществ, как газы, для которых проблема ионизации имеет наибольшее значение. Для этой части взаимодействия между частицей и веществом мы можем немедленно воспользоваться тем результатом, полученным для столкновений с изолированными атомами, согласно которому при далеких столкновениях вклад каждого связанного электрона в число первичных про-

<sup>1)</sup> Гальперн и Холл [40] рассмотрели также влияние конечного сопротивления металлов и указали, что эффект, хотя вообще пренебрежимо мал, в специальных случаях может играть заметную роль (например, в случае углерода, сопротивление которого особенно велико). Согласно рассуждениям раздела 8, этот эффект уже принят во внимание. В самом деле, из (26) следует, что, с точки зрения торможения, электроны проводимости эквивалентны осцилляторам эффективной частоты  $\omega_p$ . Таким образом, это явление уже учтено в формуле (41).

цессов ионизации приблизительно пропорционален соответствующему вкладу в тормозную способность. В простейшем случае водорода из подробных вычислений Бете [15] следует, что число ионов, произведенных на единице пути в столкновениях с прицельным параметром  $q$ , дается выражением

$$P_q = S_q \frac{0,285}{\hbar \omega_j}. \quad (42)$$

Можно сделать обобщение на более тяжелые вещества и получить приближенные выражения, справедливые и в этом случае (см. Н. Бор, раздел 4 гл. III).

Как мы видели, релятивистское увеличение потерь энергии связано с поперечной частью поля. Существенно, что, в согласии с приведенными выше соображениями, только очень малая часть энергии, переданной ионизационным осцилляторам, будет излучена на большие расстояния, так как эта энергия сосредоточена главным образом в областях сильного поглощения.

Детальное исследование энергии поперечного поля, поглощенной различными осцилляторами, вообще говоря, весьма трудно благодаря тому, что радиация, излученная одним типом осцилляторов, может содержать частоты в широком интервале (см. раздел 7) и, следовательно, поглощаться осцилляторами другого типа.

Однако как раз в случае газов, для которых  $\nu$  весьма мало по сравнению с атомными частотами, такой эффект «смешения» совершенно незначителен. В самом деле, даже в случае  $d_1 \gg d_0$ , когда интервал частот излучения наиболее широк, можно показать, что при  $\nu \ll \omega_i$  основная часть энергии концентрируется около частот, отличающихся от  $\omega_i$  на величину, малую по сравнению с самой  $\omega_i$ . Перемешивание, таким образом, будет иметь место между очень близко лежащими уровнями и не будет оказывать влияния на число процессов ионизации.

Соотношения типа (42), вообще говоря, испытывают лишь незначительное влияние от эффектов атомного взаимодействия. Что касается полной ионизации, включая первичные и вторичные процессы, то можно таким же образом заключить, что средняя энергия, затраченная на один ион, почти не зависит от скорости частицы. Этот вывод базируется на рассуждениях, подобных применяемым при рассмотрении столкновений с изолированным атомом (см., например, Фано [16]).

## 9. Оценка тормозной способности тяжелых веществ

Из результатов предыдущего раздела следует, что учет атомного взаимодействия может внести существенные упрощения в формулу торможения, так как для очень больших значений  $\nu \nu_j$ , когда  $F_c \approx 1$ , торможение перестает зависеть от атомных частот

и определяется только электронной плотностью вещества. Чтобы вычислить  $S_q$  в промежуточной области, где поляризация становится все более существенной, необходимо исследовать распределение частот атомных осцилляторов, входящих в формулу (41). В случае тяжелых веществ детальный анализ этой проблемы достаточно сложен<sup>1)</sup>, но более грубое приближение, достаточное для многих целей, может быть получено на основе простых предположений о распределении частот атомных осцилляторов.

В теории прохождения частиц через вещество часто (см. Н. Бор, раздел 5 гл. III) заменяют сумму сил осцилляторов  $F$ , соответствующую  $\omega_i \ll \omega$ , простым выражением

$$F = \left( \frac{\omega}{z_2^s \omega_0} \right)^{1/2}, \quad (43)$$

где  $\omega_0$  означает ридбергову частоту. Конечно, такое соотношение нуждается в изменении в предельных случаях как наиболее легко связанных, так и наиболее сильно связанных электронов в атоме. Поскольку исправления в области малых частот для настоящих целей не имеют существенного значения, то необходимо сделать изменения только в области больших частот с целью учета, что полная сила осциллятора равна единице. Для этой цели кажется естественным предположить

$$F = \frac{(\omega/z_2^s \omega_0)^{1/2}}{1 + (\omega/z_2^s \omega_0)^{1/2}}, \quad (44)$$

поскольку это выражение переходит в (43) при  $F \ll 1$  и дает  $F = 1$  при больших  $\omega$ .

Нужно отметить, что при распределении типа (43) или (44) уравнение (39) имеет только один корень, который и определяет эффекты взаимодействия атомов. Итак, тормозная способность дается формулой (41), откуда [после замены суммы интегралом и подстановки (44)] получим

$$S_q = B \left\{ \ln \frac{kvF_c^{3/2}}{qv} - \frac{1}{2}(1 - F_c) \frac{v^2}{c^2} \right\}, \quad (45)$$

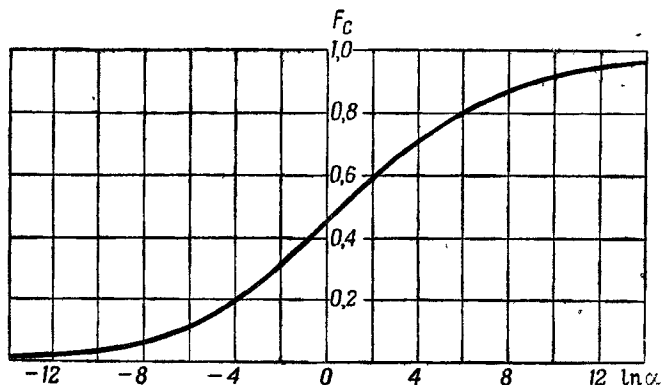
т. е. простую приближенную формулу, содержащую только  $F_c$ . Изменение последней величины в переходной области показано

<sup>1)</sup> Влияние поляризации на тормозную способность подсчитано Гальперном и Холлом [40] для различных веществ на основе приближенной дисперсионной модели, полученной из данных по ионизации рентгеновскими лучами. Как указано авторами, этот способ содержит некоторый произвол, но благодаря известной нечувствительности торможения к точности модели можно ожидать, что результаты справедливы с точностью до нескольких процентов. Более детальные вычисления произведены для некоторых веществ Виком [39], который для определения совокупности осцилляторов рассматриваемых атомов использовал данные по рентгеновским лучам и результаты вычислений по методу Хартри.

на фиг. 9, где  $F_c$  дано как функция  $\ln \alpha$ , причем  $\alpha$  определено соотношением

$$\alpha = \left( \frac{\gamma v}{z_2^2 \omega_0} \right)^2 = 16\pi\gamma^2 N a_0^3 z_2^{1-2s}. \quad (46)$$

Здесь отношение  $v$  [формула (12)] к ридберговой частоте для удобства выражено через  $N$  и  $a_0$  (радиус водородного атома).



Фиг. 9.

Для малых значений  $F_c$  формула (45) переходит в следующую:

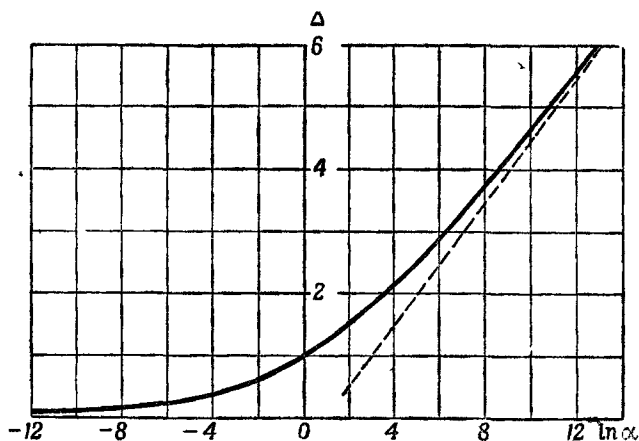
$$S_q = B \left\{ \ln \frac{kv\gamma}{q\omega_0 z_2^2} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right\}, \quad (47)$$

и разница между (47) и (45) представляет, таким образом, уменьшение тормозной способности как результат взаимодействия атомов вещества. Это уменьшение  $\Delta$ , в единицах  $B$ , показано на фиг. 10, где для простоты отношение  $v/c^2$  в последних членах (47) и (45) положено равным единице, поскольку задача представляет интерес только при больших  $\gamma$ . Прямая линия, к которой  $\Delta$  приближается асимптотически при больших  $\alpha$ , представляет уменьшение тормозной способности, согласно простой формуле (33), применимой, когда поляризационные эффекты достигли полной силы.

Чтобы подобрать показатель  $s$  в (44), дающий наилучшее совпадение с действительным распределением частот атомных осцилляторов, мы сравним (47) с теоретическим и экспериментальным определением тормозной способности тяжелых атомов в том случае, когда влиянием поляризации можно пренебречь. Выражение (47) соответствует (37) с  $\bar{\omega} = \omega_0 z_2^s$ , где  $\bar{\omega}$  представляет среднюю частоту возбуждений, определенную равенством

$$\ln \bar{\omega} = \sum_i f_i \ln \omega_i. \quad (48)$$

Эта величина была вычислена на основании модели Томаса-Ферми Зоммерфельдом [37], который нашел, что  $\bar{\omega}$  пропорционально  $z_2^{4/3}$ ; это соответствует  $s = 4/3$ , хотя коэффициент пропорциональности несколько меньше, чем  $\omega_0$ . Для того чтобы оценить влияние экранирования ядерного поля на энергии возбуждения внутренних электронов, в этих вычислениях использовалось общее соотношение между средней кинетической и потенциальной энергиями, справедливое для газа Ферми при абсолютном нуле. Однако такое усреднение (арифметическое) существенно отличается от усреднения, которым определено  $\bar{\omega}$  (геометрическое).



Фиг. 10.

Тормозная способность при больших  $z_2$  рассматривалась также Блохом [17], который тоже сравнивал атом с газом Ферми, но специально учитывал его динамические свойства. Хотя выяснение деталей распределения связано с очень сложными вычислениями, было найдено, что  $F$  зависит только от отношения  $\omega z_2^{-1}$ , так что  $\bar{\omega}$  пропорционально  $z_2$ . Позднее проблема рассматривалась Иенсеном [18]; он внес небольшие исправления в результаты Блоха, эти уточнения не существенны для рассматриваемых вопросов. Результат Блоха подтверждается экспериментами Вильсона [19], определявшего тормозную способность протонов и установившего удовлетворительное согласие с теорией в области, где поляризационные эффекты не существенны, при  $\bar{\omega}$  пропорциональной  $z_2$ . Коэффициент пропорциональности оказался очень близким к  $\omega_0$ ; таким образом, результат соответствует (47) при  $s = 1$ . Это обстоятельство можно, вероятно, рассматривать как указание на справедливость приближенных способов, использованных в настоящем разделе для определения поляризационного эффекта в промежуточной области, где его влияние еще не очень велико.



## 10. Сравнение с экспериментальными данными

а) **Нерелятивистские скорости.** Рассмотрим сначала случай скоростей, малых по сравнению со скоростью света. В разделах 4 и 5 мы показали, что эффект взаимодействия атомов особенно велик, если вещество содержит свободные электроны. Специально интересны в этом отношении металлы.

Согласно теории дисперсии металлов (см., например, Крониг [20, 21]), поведение валентных электронов может быть представлено набором осцилляторов, первый из которых имеет частоту, равную нулю, что соответствует свободным электронам, а остальные представляют переходы электрона между различными зонами. Наиболее существенный из этих переходов имеет частоту порядка

$$\omega_b = \frac{\pi^2 \hbar}{2_r b^2} \quad (49)$$

(для простоты мы ограничиваемся рассмотрением решетки кубической структуры с постоянной решетки  $b = N^{-1/3}$ ). Обозначая число валентных электронов на атом через  $z_2 F_v$ , из (12) имеем

$$\frac{F_v v^2}{\omega_b^2} = \frac{16}{\pi^3} \frac{b}{a_0} z_2 F_v. \quad (50)$$

Так как, вообще говоря, величина  $b$  порядка двух или трех ангстрем, в то время как  $a_0 = \frac{1}{2} \text{ \AA}$ , то отсюда следует, что даже для одновалентных металлов взаимодействие между валентными электронами сильнее, чем связи в решетке. Далее, поскольку для электронов внутренних слоев в атоме поляризация несущественна, формула (41) дает хорошее приближение, если  $F_c$  просто положить равным  $F_v^1$ .

Для эффективного среднего потенциала возбуждения  $I = \hbar \bar{\omega}$ , таким образом, имеем [ср. формулу (48)]

$$I = F_v \ln \hbar v F_v^{1/2} + \sum_i' f_i \ln \hbar \omega_i, \quad (51)$$

где суммирование распространено на переходы электронов, связанных в атомных оболочках, лежащих ниже полосы проводимости.

Наиболее благоприятные обстоятельства для проверки этой формулы мы находим в наиболее легких металлах, как литий и бериллий, в которых относительное число электронов проводимости наибольшее. Для лития  $F_v = \frac{1}{3}$  и  $\hbar v F_v^{1/2} = 7,6 \text{ eV}$ , для берил-

<sup>1)</sup> См., впрочем, примечание на стр. 128.

для  $F_v = \frac{1}{2}$  и  $\hbar\nu F_v^{1/2} = 18 \text{ eV}$ . Для сравнения отметим, что  $\hbar\omega_p$  равно около 4,5 eV для Li и около 9 eV для Be; поправки на эффективную частоту валентных электронов из-за связи в решетке, согласно выражению типа (15), составят только около 5%. Интересно отметить, что в газообразном состоянии, когда поляризацияй можно пренебречь, мы должны считать эффективную энергию возбуждения валентного электрона по порядку величины совпадающей с ионизационным потенциалом, который равен 5,4 eV для Li и 9,3 eV для Be. Таким образом, тормозная способность на один атом в металле заметно меньше, чем в газе.

Вычисление суммы в (51) включает, конечно, детальное исследование связей внутренних электронов, но как раз в случае Li и Be проблема сравнительно проста, так как нужно рассмотреть только термы, относящиеся к возбуждению  $K$ -электронов. Определение среднего потенциала возбуждения для  $K$ -оболочки было выполнено Ливингстоном и Бете [22], которые для Li получили значение 110 eV, а для Be — значение 205 eV. Эти цифры приводят к  $I_{Li} = 45 \text{ eV}$  и  $I_{Be} = 60 \text{ eV}$ . Нужно заметить, что здесь мы предполагаем полную силу осциллятора  $\sum' f_i$  для  $K$ -электронов равной  $2/z_2$ . Это значение в действительности должно быть несколько уменьшено, так как присутствие внешних электронов может запретить некоторые переходы из  $K$ -оболочки (см. [22]). Однако для Li и Be этим обстоятельством можно пренебречь. В самом деле, не только число  $L$ -электронов очень мало по сравнению со случаем, рассмотренным в [22], но, кроме того, эффект вообще исчезает в том приближении, когда связь внешних электронов может быть представлена  $s$ -состоянием.

Тормозная способность Li была определена Розенблумом [23], который нашел для  $I$  значение около 40 eV (см. [24]). Однако экспериментальная погрешность в тормозной способности в 10% соответствует неопределенности в  $I$  около 50%. Для Be нет надежных измерений, хотя экспериментальные данные были бы интересны, так как благодаря большой плотности валентных электронов нужно ожидать сравнительно малую величину для тормозной способности<sup>1)</sup>.

Нужно добавить, что влияние сопротивления металла, вообще говоря, совершенно ничтожно (см. [7]). Так, для  $\omega_p$  [формула (23)] в случае Li при нормальной температуре получаем значение, равное  $0,01\nu F_v^{1/2}$ . Используя (24) для валентных электронов, убеждаемся, что увеличение вышеприведенного значения для  $I_{Li}$  будет меньше 1%. С другой стороны, теория Вейцекера, по кото-

<sup>1)</sup> Недавнее исследование [38] торможения протонов в металлическом Be дало  $I_{Be} = 64 \pm 5 \text{ eV}$ , что находится в хорошем согласии с числом, полученным выше.

рой предполагается, что  $\omega_0$  определяет адиабатический предел для осциллятора с нулевой частотой, приводит к  $I_{L1} = 10 \text{ eV}$ . Такой результат, несомненно, расходится с экспериментальными данными. Далее, эта теория предсказывает температурную зависимость тормозной способности, согласно которой уменьшение сопротивления в 100 раз должно увеличить тормозную способность на 20%, в случае быстрых  $\alpha$ -частиц. Эксперименты [25] показали, что такой зависимости нет.

Также и в других веществах (не только в таких, которые действительно содержат свободные электроны) поляризационный эффект имеет некоторое значение для торможения уже при  $v \ll c$ . В самом деле, в твердых телах и в жидкостях значение  $\hbar v F^{1/2}$  даже для  $z_2 F \sim 1$  наиболее часто по порядку величины равно  $10 \text{ eV}$ , что превышает энергию возбуждения наиболее слабо связанных электронов. Во многих случаях в (41) можно положить  $z_2 F_c$  равным числу связанных электронов. Интересно отметить, что это приводит не только к уменьшению тормозной способности, но и упрощает теоретическое определение  $S$ . В самом деле, при этом нет необходимости рассматривать весьма сложный механизм молекулярных связей или структуру решетки, так как находящиеся там электроны практически дадут такой же вклад в  $S$ , как если бы они были свободны.

**б) Релятивистские скорости.** В предыдущем изложении часто упоминалось, что явление поляризации становится особенно важным для области релятивистских скоростей, где при достаточно больших значениях  $\gamma$  оно вызывает заметное изменение тормозной способности. В первоначальной работе Ферми внимание было привлечено к интерпретации измерений с быстрыми частицами космических лучей.

Прямая экспериментальная проверка влияния атомных взаимодействий на торможение затруднялась необходимостью применять большие энергии. Некоторые данные были получены при измерении торможения в углероде электронов с энергией  $10 \text{ MeV}$  [26]. Эти измерения показали, что потери энергии заметно меньше, чем следует из формулы (37), но находятся в хорошем согласии (см. [13]) с выражением (33), которое может быть использовано для применявшихся скоростей. В самом деле, мы имеем  $F_c \approx 1$ , так как значение  $\hbar v \gamma$  равно приблизительно  $900 \text{ eV}$  и, следовательно, превышает наибольшую энергию возбуждения в графите, по порядку величины равную  $z_2^2 \hbar \omega_0 \sim 500 \text{ eV}$ .

Кроме того, влияние поляризационных эффектов наблюдалось при ионизационных измерениях. Хазеном [27] в экспериментах с электронами космических лучей было показано, что при не очень больших значениях  $\gamma$  ионизация логарифмически возрастает с  $\gamma$ , что находится в согласии с (37). В работе [28] были получены указания, что при очень больших  $\gamma$  ионизация

достигает постоянного значения. По сравнению с минимумом ионизации при  $\gamma \sim 1$  предельное значение дает некоторое увеличение, которое совпадает в пределах экспериментальных погрешностей с теоретически ожидаемым увеличением тормозной способности согласно (33) и (37).

Эти данные согласуются с рассуждениями раздела 8, согласно которым взаимодействие атомов хотя и важно для определения абсолютного значения ионизации и тормозной способности, но отношение этих двух величин только слабо зависит от явления поляризации. Нужно отметить, что это утверждение основано на предположении, что большая часть радиационной потери энергии, связанной с ионизацией, поглощается вблизи пути частицы. Наблюдения [27,28] подтверждают наличие такого сильного поглощения.

Что касается интерпретации измерений ионизации, то необходимо принимать во внимание, что средняя энергия, затраченная на образование одного иона, хотя почти не зависит от скорости, все же должна несколько возрастать с увеличением  $\gamma$  благодаря увеличению роли далеких столкновений по отношению к близким (см. Фано [16]). Однако, как показали измерения [28], увеличение величины потери энергии на один ион при изменении от  $\gamma \sim 1$  до очень больших  $\gamma$  составляет только около 1% для газообразного He при нормальном давлении.

Наконец, нужно напомнить, что взаимодействие атомов обнаруживается весьма заметно в излучении, сопровождающем прохождение быстрых частиц. Это явление детально исследовано со времени его открытия Черенковым [1]. Общие свойства излучения, такие, как поляризация и соотношение (35) между частотой и направлением излучения, исследовались Черенковым [29,30] и Коллинзом и Рейлингом [31]. Интенсивность излучения также оказалась в согласии с теорией. Недавно была сделана попытка использовать это излучение для определения скорости путем применения соотношения (35), которое связывает направление излучения и скорость частицы [32,33,34].

## ДОПОЛНЕНИЕ I

### Реакция при релятивистском столкновении двух тел

В разделе 6 было коротко показано, как можно проанализировать столкновение между двумя заряженными частицами с точки зрения классической механики, учитывая реакцию со стороны неподвижной (перед ударом) частицы на падающую. Теперь мы рассмотрим эту проблему более детально, ограничиваясь, так же как и в разделе 6, рассмотрением далеких столкновений или,

более точно, случаем  $p \gg \frac{z_1 e^2}{v^2}$ . В этом приближении смещение первой частицы, под которой мы будем подразумевать электрон, за время столкновения мало по сравнению с  $p$ , и ее скорость остается много меньше, чем  $c$ . Кроме того, мы можем пренебречь изменением скорости падающей частицы.

Сила, которая действует на частицу в момент времени  $t$ , зависит от положения электрона в момент времени  $t'$ , для которого, с учетом упомянутых упрощений, мы имеем

$$t' = t - \frac{r}{c} = t - \frac{1}{c} \sqrt{p^2 + v^2 t^2}. \quad (I.1)$$

В первом приближении эта сила просто дается статистическим полем покоящегося электрона в его первоначальном положении. Поскольку, однако, это поле не приводит к результирующей потере энергии частицей, мы не будем его учитывать. В следующем приближении мы имеем силу реакции, зависящую от смещения электрона и его движения. В случае далеких столкновений мы должны учитывать только линейные члены в  $\eta$ . Среди этих членов, во-первых, будет сила, соответствующая равномерному движению электрона. Выражение для указаний силы может быть получено из (17) путем замены  $\eta(t)$  на  $\eta(t') + (t-t')\dot{\eta}(t')$  (что дает положение, которого достиг бы электрон в момент  $t$ , если он двигался равномерно с момента  $t'$ ). Во-вторых, среди этих членов будет поле, созданное ускорением электрона в момент  $t'$ ; это поле дается формулой (27).

Таким образом, полная эффективная сила реакции имеет следующий вид:

$$\delta K(t) = \frac{z_1 e^2}{r^2} v t p \left\{ \frac{3\eta}{r^2} + \frac{3\dot{\eta}}{rc} + \frac{\ddot{\eta}}{c^2} \right\}, \quad (I.2)$$

где  $\eta$  и ее производные берутся в момент времени  $t'$ .

Конечно, это выражение может быть получено из общей формулы для поля, производимого точечным зарядом в произвольном движении (см., например, [35]). Уменьшение энергии частицы дается следующим выражением:

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta K v dt = T_1 + T_2 + T_3. \quad (I.3)$$

в соответствии с тремя членами в (I.2).

Интегрируя по частям, получим

$$T_1 = z_1 e^2 p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^3} \frac{d\eta}{dt} dt = z_1 e^2 p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^3} \dot{\eta} \frac{dt'}{dt} dt, \quad (I.4)$$

где, согласно (I.1),

$$\frac{dt'}{dt} = 1 - \frac{v}{c} \frac{vt}{r}. \quad (\text{I.5})$$

Следовательно, имеем

$$T_1 + T_2 = z_1 e^2 p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{r^3} \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \frac{vt}{r} \right) dt. \quad (\text{I.6})$$

Интегрируя еще раз по частям и используя (I.5), получим

$$T_1 + T_2 = \frac{z_1 e^2}{p} \left[ \eta \frac{t}{r} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - T_3 - \frac{z_1 e^2}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \frac{t - \frac{r}{c}}{r} dt. \quad (\text{I.7})$$

Теперь из (I.1) следует, что  $\frac{dt}{r} = \gamma dt' (\gamma^2 v^2 t'^2 + p^2)^{-1/2}$ , откуда видно, что после преобразования последнего члена в (I.7) в интеграл по  $t'$  указанный член исчезает, поскольку  $\eta$  есть четная функция  $t'$  и  $t - \frac{r}{c} = t'$ . Используя (4) для  $\eta$ , мы найдем из (I.7), что  $T = T_1 + T_2 + T_3$  совпадает с (6).

Вычисление  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  в отдельности более длинно и приводит к более сложным выражениям, указывающим, что разделение  $T$  на три части не имеет глубокого смысла. Положив  $\beta = v/c$ , получим

$$\begin{aligned} T_1 &= T(1 - \beta), \\ T_2 &= T \left[ -\frac{3}{\beta} (1 - \beta^2) + \frac{3}{2} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right], \\ T_3 &= T \left[ \frac{1}{\beta} (3 - 2\beta^2) - \frac{3}{2} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

В частности, отсюда видно, что (как подчеркнуто в разделе 6) член  $T_3$ , зависящий от ускорения электронов, становится преобладающим при  $\beta \rightarrow 1$ .

До сих пор мы рассматривали только проблему передачи энергии; теперь мы кратко рассмотрим также передачу импульса при столкновении. Относительно компоненты, перпендикулярной к пути падающей частицы, нет особой проблемы. В самом деле, передача импульса электрону в этом направлении уже рассматривалась в разделе 3. Соответствующая сила реакции есть просто электростатическая сила электрона, который приближенно рассматривается как покоящийся. Интересно отметить, что отсюда уже можно показать, что в далеких столкновениях передача импульса в этом направлении и, следовательно, полная передача энергии не зависят от релятивистских эффектов.

Что касается компоненты импульса, параллельной пути частицы, то здесь требуется более подробное рассмотрение. При далеких столкновениях передача импульса в этом направлении очень мала по сравнению с передачей в перпендикулярном направлении. В согласии с величиной замедления частицы, величина передаваемого в этом направлении импульса будет порядка  $\frac{1}{v} T$ . С точки зрения рассмотрения взаимодействия электрона с частицей, этот импульс как раз и переносится силой  $\delta K$ , определяемой формулой (1.2).

В нерелятивистском случае передача импульса от частицы к электрону обусловлена разностью электрических сил, возникших благодаря смещению электрона в процессе столкновения. В релятивистском случае эта сила в направлении, параллельном пути частицы, дается выражением

$$-eE_x = \frac{z_1 e^2 \gamma v t}{(p^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (1.9)$$

так что, используя (5), получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e \frac{\partial E_x}{\partial p} \eta dt = \frac{1}{v} T (1 - \beta^2), \quad (1.10)$$

где  $T$  дается формулой (6).

Таким образом, при  $\beta \approx 1$  электрическое поле ответственно только за малую долю передаваемого импульса. Основную часть передачи импульса обуславливает магнитное взаимодействие. Магнитное поле частицы, направленное перпендикулярно к плоскости, содержащей электрон и путь частицы, равно  $\beta E_y$ , где  $E$  — компонента электрического поля — перпендикулярна к  $v$ . Передача импульса, обусловленная магнитными полями, равна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e\eta}{c} \beta E_y dt = \frac{1}{v} T \beta^2 \quad (1.11)$$

(поскольку интеграл от  $e E_y \dot{\eta} dt$  представляет собой передачу энергии).

Основную роль в замедлении частицы играет поле, связанное с ускорением электрона, но нужно подчеркнуть, что это обстоятельство не означает, конечно, что энергия, действительно излученная при столкновении, составляет главную часть передачи энергии. В самом деле, эта энергия равна

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} |\ddot{\xi}|^2 dt, \quad (1.12)$$

если пренебречь ускорением падающей частицы, масса которой для простоты может считаться очень большой. Вводя вместо  $\xi$  силу, деленную на  $\mu$ , после интегрирования получим

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 z_1^2 e^4 \gamma^4}{c^3 \mu^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^2 + v^2 t^2}{(p^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^3} dt = T \frac{\pi}{8} \frac{e^4}{\mu c^2 p} \beta \gamma \left(1 + \frac{1}{3\gamma^2}\right). \quad (I.13)$$

Поскольку в далеких столкновениях  $p$  гораздо больше классического электронного радиуса  $e^2/\nu c^2$ , то  $W$  пренебрежимо мало по сравнению с  $T$ . Для чрезвычайно больших значений  $\gamma$ , когда поле частицы на расстоянии  $p$  сокращается до размеров, сравнимых с  $e^2/\nu c^2$ , положение изменяется. Однако такая проблема не может рассматриваться в рамках классической механики.

## ДОПОЛНЕНИЕ II

### Применение формализма теории излучения

Как упоминалось в разделе 7, при исследовании торможения частицы и излучения Черенкова можно применить метод разложения поля на плоские волны, хорошо известный из квантовой электродинамики (см., например, [36]). Этот метод использует разложение поля в ряд Фурье по пространственным переменным и поэтому не всегда может быть применен в случае диспергирующей среды. Однако поле равномерно движущегося заряда как раз таково, что его пространственные компоненты Фурье гармонически изменяются во времени.

Сначала рассмотрим эффект Черенкова, который более подходит к этому формализму<sup>1)</sup>. Характеризуем поперечную часть поля вектор-потенциалом, который разложим обычным способом,

$$\mathbf{A}_{\perp r} = \sum_{\lambda} q_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda} + q_{\lambda}^* \mathbf{A}_{\lambda}^*, \quad \mathbf{A}_{\lambda} = \sqrt{4\pi c^2} \Omega^{-1/2} \mathbf{e}_{\lambda} e^{i(\mathbf{x}_{\lambda} r)}, \quad (II.1)$$

где величины со звездочкой означают комплексно сопряженные величины. Мы предполагаем, что поле заключено в объеме  $\Omega$ ; единичный вектор  $\mathbf{e}_{\lambda}$  дает направление поляризации. Мы следуем обычной записи, когда оба члена — с  $\mathbf{x}_{\lambda}$  и  $-\mathbf{x}_{\lambda} \equiv \mathbf{x}_{-\lambda}$  — содержатся в сумме по  $\lambda$ . Амплитуды  $q$  формулой (II.1) определяются

<sup>1)</sup> В. Л. Гинзбург [41] рассмотрел эффект Черенкова с помощью формализма Гамильтона. Этот формализм допускает квантование обычным способом. Гинзбург развил квантовую электродинамику, которая феноменологически описывает поле излучения в произвольной среде. В частности, Гинзбург показал, что излученная энергия в среднем практически совпадает с результатом, полученным по классическим формулам, что можно было ожидать из самых общих аргументов (см. раздел 2). [См также [42]. *Прим. ред.*]



неполностью; они удовлетворяют еще некоторым условиям, наложенным на их зависимость от времени.

Имея в виду вышеупомянутые трудности, возникающие в наиболее общем случае диспергирующей среды, мы предположим сначала, что  $\varepsilon$  для вещества имеет постоянное значение. Пренебрегая магнитными свойствами среды, имеем

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi i}{c}, \quad (\text{II.2})$$

где  $i$  означает плотность тока, соответствующего движущейся частице. Умножая это уравнение на  $\mathbf{A}_\lambda^*$  и интегрируя по  $\Omega$ , получим

$$(\ddot{q}_\lambda + \ddot{q}_{-\lambda}^*) + \omega_\lambda^2 (q_\lambda + q_{-\lambda}^*) = \frac{z_1 e}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_\lambda^*(\mathbf{x})), \quad (\text{II.3})$$

где  $\mathbf{x}$  означает положение частицы, которую будем считать точечным зарядом. Частоты даются формулой

$$\omega_\lambda = \frac{z_\lambda c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{II.4})$$

Используя оставшийся произвол в определении  $q_\lambda$ , потребуем, чтобы зависимость  $q_\lambda$  от времени была вида  $\exp(-i\omega_\lambda t)$ . В результате получим следующее уравнение:

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \frac{z_1 e}{2c} \left(1 + \frac{i}{\omega_\lambda} \frac{d}{dt}\right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_\lambda^*(\mathbf{x})) \quad (\text{II.5})$$

(уравнение вынужденных колебаний осциллятора).

Если частица движется с постоянной скоростью, то положим  $\mathbf{x} = \mathbf{v}t$ , и правая часть (II.5) будет тогда гармонически [с частотой  $(z_\lambda \cdot \mathbf{v})$ ] зависеть от времени. Уравнение (II.5) сведется к следующему:

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \frac{z_1 e}{2c \cdot i(z_\lambda \cdot \mathbf{v})} \left(1 + \frac{(z_\lambda \cdot \mathbf{v})}{\omega_\lambda}\right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_\lambda^*(\mathbf{v}t)). \quad (\text{II.6})$$

Итак, в этом частном случае нетрудно учесть дисперсию среды. Согласно (II.6), для этого нужно только подставить для  $\varepsilon$  значение, соответствующее частоте  $(z_\lambda \cdot \mathbf{v})$ .

Как следует из (II.4), в вакууме значение  $\omega_\lambda$  всегда больше, чем  $(z_\lambda \cdot \mathbf{v})$ , так как  $v < c$ . Решением (II.6) будут вынужденные колебания с постоянной амплитудой. Однако в среде (или в воображаемом случае  $v > c$ ) для некоторых волновых чисел мы можем получить и  $\omega_\lambda = (z_\lambda \cdot \mathbf{v})$ , что соответствует резонансу между внешней силой и осциллятором. В этом случае осциллятор будет непрерывно поглощать энергию, что и соответствует реальному излучению. Этот эффект и представляет собой излучение Черенкова. Обращаясь к формуле (II.4), видим, что условие резонанса совпадает с формулой (35).

Рассмотрение осциллятора в резонансе представляет некоторые математические трудности, которые можно устранить, формально вводя бесконечно малое затухание. Более удобный способ состоит, однако, в использовании функции Дирака. Общее решение (II.6) может быть символически записано так:

$$q_{\lambda} = \frac{z_1 e}{2c\omega_{\lambda}} \frac{1}{\varepsilon\{(\mathbf{x}_{\lambda} \cdot \mathbf{v})\}} \left[ \frac{1}{\omega_{\lambda} - (\mathbf{x}_{\lambda} \cdot \mathbf{v})} + i\pi\delta(\omega_{\lambda} - \mathbf{x}_{\lambda} \cdot \mathbf{v}) \right] \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_{\lambda}^*(\mathbf{v}t), \quad (\text{II.7})$$

что можно легко проверить<sup>1)</sup>.

Мы используем выражение (II.7) для определения силы  $S_{tr}$ , действующей на частицу. По соображениям симметрии, член, связанный с магнитным полем, исчезнет, и мы получим

$$S_{tr} = -\frac{z_1 e}{c} \dot{\mathbf{A}}_{tr}(\mathbf{v}t) = -\frac{z_1 e}{c} \sum_{\lambda} \dot{q}_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{v}t) + \dot{q}_{\lambda}^* \mathbf{A}_{\lambda}^*(\mathbf{v}t), \quad (\text{II.8})$$

что дает, в силу (II.7) и (II.1),

$$S_{tr} = -4\pi^2 z_1^2 e^2 \Omega^{-1} \sum_{\lambda} e_{\lambda} (\mathbf{e}_{\lambda} \cdot \mathbf{v}) \frac{(\mathbf{x}_{\lambda} \cdot \mathbf{v})}{\omega_{\lambda} \varepsilon\{(\mathbf{x}_{\lambda} \cdot \mathbf{v})\}} \delta(\omega_{\lambda} - (\mathbf{x}_{\lambda} \cdot \mathbf{v})). \quad (\text{II.9})$$

Суммируя сначала по двум направлениям поляризации, вводя  $(\mathbf{x}_{\lambda} \cdot \mathbf{v}) = x_{\lambda} v y$  и переходя обычным образом к бесконечно большому объему  $\Omega$ , мы получим

$$S_{tr} = z_1^2 e^2 \int_0^{+\infty} x^2 dx \int_{-1}^{+1} dy \frac{xv^2 y}{\omega \varepsilon(xvy)} (1 - y^2) \delta(\omega - xvy), \quad (\text{II.10})$$

где  $S_{tr}$  — компонента  $S_{tr}$  в направлении  $\mathbf{v}$ . Другая компонента исчезает по соображениям симметрии.

При вычислении интеграла (II.10) удобно взять за новые переменные  $\omega$  и  $z = \frac{v}{c} y \sqrt{\varepsilon(xvy)}$ . Так как  $v dx dy = d\omega dz$ , то находим

$$S_{tr} = \frac{z_1^2 e^2}{c^2} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int z dz \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega z)} \right) \delta(1 - z), \quad (\text{II.11})$$

<sup>1)</sup> Можно показать, что уравнение  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = k(t)$  с начальными условиями  $x = \dot{x} = 0$  при  $t = -\infty$  в компонентах Фурье  $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$

[и аналогично для  $k(t)$ ], имеет следующее решение:

$$x(\omega) = k(\omega) \frac{1}{2\omega_0} \left[ \frac{1}{\omega_0 - \omega} + i\pi\delta(\omega_0 - \omega) + \frac{1}{\omega_0 + \omega} - i\pi\delta(\omega_0 + \omega) \right].$$

где последний интеграл распространен на такие значения  $z$ , для которых  $-1 < \frac{cz}{v\sqrt{\varepsilon(\omega z)}} < 1$ . Этот интеграл исчезает всюду, за исключением области частот, где значение  $z=1$  содержится в промежутке интегрирования, т. е. для которых  $v\sqrt{\varepsilon(\omega)} > c$ .

Таким образом, окончательно имеем

$$S_{tr} = \frac{z_1^2 e^2}{c^2} \int_{v\sqrt{\varepsilon} > c} \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon v^2}\right) \omega d\omega, \quad (\text{II.12})$$

что совпадает с выражением, полученным Франком и Таммом [2] для излучения Черенкова и его спектрального распределения. Для простой дисперсионной формулы (36) выражение (II.12) легко может быть вычислено, и мы получим тогда значение, данное Ферми [6], которое, как упомянуто в разделе 7, представляет собой релятивистское увеличение тормозной способности.

Нерелятивистская часть тормозной способности, как указано в разделе 7, определяется продольной частью поля. Нужно сказать, что применение к этой задаче формализма, аналогичного примененному к эффекту Черенкова, выглядит несколько искусственным, но в целях полноты изложения мы все же коротко проведем вычисления.

Выбирая потенциалы так, чтобы вектор-потенциал был бы чисто поперечным, мы выразим продольную часть поля через скалярный потенциал  $\varphi$ , удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad (\text{II.13})$$

где  $\rho$  — плотность заряда частицы. Так же как для поперечного поля, мы сначала рассмотрим случай постоянного  $\varepsilon$ . Разлагая  $\varphi$  в ряд, по аналогии с (II.1) имеем

$$\varphi = \sum_{\sigma} q_{\sigma} \Phi_{\sigma} + q_{\sigma}^* \Phi_{\sigma}^*, \quad \Phi_{\sigma} = \sqrt{4\pi c^2} \Omega^{-1/2} e^{i(x_{\sigma} \cdot \mathbf{r})}; \quad (\text{II.14})$$

поступая так же, как при выводе формулы (II.5), получим

$$\varepsilon q_{\sigma} = \frac{z_1 e}{2x_{\sigma}^2 c^2} \left(1 + \frac{i}{\omega_A} \frac{d}{dt}\right) \Phi_{\sigma}^*(\mathbf{x}), \quad (\text{II.15})$$

где  $\omega_A$  представляет эффективную частоту, определенную формулой (15). Как указано в разделе 7, в среде могут существовать свободные колебания только этой частоты, и мы поэтому определили переменные  $q_{\sigma}$  так, что они содержали члены, соот-

ветствующие свободным волнам только типа  $e^{-i\omega_A t}$ . В случае равномерного движения частицы из (II.15) получим

$$\varepsilon \{(\mathcal{K}_\sigma \cdot \mathbf{v})\} q_\sigma = \frac{z_1 e}{2\kappa_\sigma^2 c^2} \left( 1 + \frac{(\kappa_\sigma \cdot \mathbf{v})}{\omega_A} \right) \Phi_\sigma^*(\mathbf{v}t), \quad (\text{II.16})$$

где, так же как в (II.6), мы приняли во внимание дисперсию.

Сила, действующая на частицу, равна

$$S_{\text{long}} = -z_1 e \text{grad } \varphi = -z_1 e \sum_{\sigma} i\kappa_{\sigma} (q_{\sigma} \Phi_{\sigma}(\mathbf{v}t) - q_{\sigma}^* \Phi_{\sigma}^*(\mathbf{v}t)), \quad (\text{II.17})$$

следовательно, исчезают все члены, за исключением тех, волновые числа которых соответствуют  $\varepsilon = 0$ . Очевидно, что только эти компоненты ответственны за тормозную силу, поскольку передача энергии среде происходит при частотах  $\omega_A$ , для которых  $\varepsilon = 0$  (см. раздел 7).

Для частот, близких к  $\omega_A$ , формулу дисперсии (36) мы можем переписать с помощью (15) в следующем виде:

$$\varepsilon \approx -\frac{\omega_A^2 - \omega^2}{v^2}, \quad (\text{II.18})$$

и в полной аналогии с символическим методом, использованным при выводе формулы (II.7), получим

$$q_{\sigma} \approx -\frac{z_1 e}{2\omega_A} \frac{v^2}{\kappa_{\sigma}^2 c^2} \left[ \frac{1}{\omega_A - (\kappa_{\sigma} \cdot \mathbf{v})} + i\pi \delta(\omega_A - (\kappa_{\sigma} \cdot \mathbf{v})) \right] \Phi_{\sigma}^*(\mathbf{v}t). \quad (\text{II.19})$$

Подставляя последнее выражение в (II.17), находим

$$S_{\text{long}} = z_1^2 e^2 v^2 \int_0^{+1} \kappa d\kappa \int_{-1}^{+1} y dy \frac{1}{\omega_A} \delta(\omega_A - \kappa v y) = \frac{z_1^2 e^2 v^2}{v^2} \int_{\frac{1}{v} \omega_A}^{\frac{1}{v} \omega_A} \frac{d\kappa}{\kappa}. \quad (\text{II.20})$$

Эта формула перестает быть справедливой при очень больших  $\kappa$ , поскольку весь вывод справедлив только для далеких столкновений. По аналогии с разделом 4, где мы рассматривали среду вне некоторого расстояния  $q$  от пути частицы, мы здесь обрежем интеграл на некотором волновом числе  $\kappa_{\text{max}}$ . Выбирая  $\kappa_{\text{max}} \sim \frac{1}{q}$  и используя (8) и (12), видим, что (II.20) совпадает с (22) настолько полно, насколько можно требовать при известной произвольности обрезания.

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Существует более прямой способ вывода формулы торможения (Ландау), основанный непосредственно на уравнениях Максвелла.

Уравнения в среде с дисперсией для компонент Фурье от потенциалов поля имеют вид

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{\varepsilon(\omega) \omega^2}{c^2}\right) \varphi_\omega &= \frac{4\pi z_1 e}{\varepsilon(\omega)} \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - ikv t], \\ \left(k^2 - \frac{\varepsilon(\omega) \omega^2}{c^2}\right) \mathbf{A}_\omega &= \frac{4\pi z_1 e}{c^2} \mathbf{v} \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - ikv t]. \end{aligned}$$

Здесь  $v$  — скорость частицы,  $\varepsilon(\omega)$  определяется формулой, связывающей компоненты Фурье поля и индукции  $D_\omega = \varepsilon(\omega) E_\omega$ . Очевидно,  $\omega = (k v)$ . В правые части входит компонента Фурье от  $\delta$ -функции  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ , определяющей движение частицы. Определив из этих уравнений  $\varphi_\omega$  и  $\mathbf{A}_\omega$ , можно легко вычислить величину электрического поля в месте нахождения частицы ( $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$ ). Энергия, потерянная частицей на единицу пути, очевидно, будет равна скалярному произведению силы, действующей на частицу, и скорости частицы, деленному на абсолютную величину скорости частицы. Имеем

$$\frac{e}{v} (\mathbf{v} E_\omega) = - \frac{4i\pi z_1^2 e^2}{v} \frac{1}{k^2 - \frac{\varepsilon(\omega) \omega^2}{c^2}} \frac{(k v) - (k v) \frac{v^2}{c^2}}{c^2}.$$

Вводя в пространстве  $\mathbf{k}$  цилиндрическую систему координат, обозначая компоненту  $\mathbf{k}$ , перпендикулярную  $\mathbf{v}$ , через  $x$  и заменяя  $k v$  на  $\omega$ , получим для полной потери энергии

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^x \int_0^\infty \frac{4i\pi e^2 z_1^2}{v} (\mathbf{v} E_\omega) 2\pi x dx \frac{d\omega}{v} = \\ &= \frac{iz^2 e^2 c^2}{\pi v^4} \int_0^x \int_0^\infty \frac{\omega \left( \frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \frac{v^2}{c^2} \right) x d\omega}{\omega^2 \left[ \frac{c^2}{v^2} - \varepsilon(\omega) \right] + x^2 c^2}. \end{aligned}$$

Интеграл берется до некоторого предела  $x$ , после которого роль поляризации уже мала, и мы переходим к обычной ионизационной формуле.

Это выражение можно сразу проинтегрировать по  $x$ , и мы получим интегральную связь между  $S_x$  и  $\varepsilon(\omega)$ .

При скоростях, близких к скорости света,  $v \sim c$ , интегрирование можно провести до конца. В этом случае возьмем сначала интеграл по  $\omega$  с помощью теории вычетов. Считая  $\varepsilon$  теперь функцией комплексного переменного, можно доказать, что ни  $\varepsilon$ , ни  $1/\varepsilon$  не имеют полюсов в верхней полуплоскости (а следовательно, не имеют и нулей). Это следует из того, что в уравнениях  $D_\omega = \varepsilon(\omega) E_\omega$  и  $E_\omega = \frac{1}{\varepsilon(\omega)} D_\omega$  величина  $\varepsilon(\omega)$

может обратиться соответственно в нуль или бесконечность, только если левая часть будет затухать со временем. С другой стороны, зависимость ее от времени определяется множителем  $\exp(-i\omega t)$ ; для того, чтобы происходило затухание, должно быть  $\text{Im } \omega < 0$ . Следовательно,  $\varepsilon(\omega)$   $\left[ \text{и } \frac{1}{\varepsilon(\omega)} \right]$  может обращаться в нуль только в нижней полуплоскости. Тогда полюса в верхней полуплоскости у подынтегральной функции будут только там, где обращается в нуль знаменатель, т. е. в точках, где

$$\omega^2 \left[ \frac{c^2}{v^2} - \varepsilon(\omega) \right] + x^2 c^2 = 0.$$

При больших  $\omega$  ( $|\omega| \gg \omega_0$ , где  $\omega_0$  — частота, характерная для электронов в атоме)  $\varepsilon$  определяется известным выражением  $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi n e^2}{m\omega^2}$ . Тогда условие полюса запишется в виде

$$\omega^2 = \frac{\frac{4\pi n e^2}{\mu} + x^2 c^2}{1 - \frac{c^2}{v^2}}.$$

Условие  $|\omega| \gg \omega_0$  выполняется при всех  $x$ , если  $v$  близко к  $c$ , т. е. если

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \ll \frac{\omega_0^2 \mu}{4\pi n e^2}.$$

При этом в верхней полуплоскости будет только один полюс

$$\omega_1 = i \left( \frac{\frac{4\pi n e^2}{\mu} + x^2 c^2}{\frac{c^2}{v^2} - 1} \right)^{1/2}.$$

Вычет в нем при определенном выше  $\varepsilon(\omega)$  равен

$$\frac{\frac{1}{\varepsilon(\omega_1)} - \frac{v^2}{c^2}}{2 \left( \frac{c^2}{v^2} - 1 \right)}.$$

Беря с помощью вычетов интеграл по контуру, состоящему из действительной оси и большой полуокружности и вычитая из него интеграл, взятый только по полуокружности, найдем выражение для потери энергии в виде интеграла уже только по  $x$ . Последний интеграл берется элементарно, и мы получаем для потери энергии

$$S_x = \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{\mu v^4} \ln \frac{x^2 \mu v^2}{4\pi n e^2}.$$

Это выражение надлежит считать с формулой для обычных ионизационных потерь (справедливой для больших  $x$ ). Тогда при очень больших скоростях  $v \rightarrow c$  мы придем к формуле для потерь

$$S = \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{\mu c^2} \left( \ln \frac{\mu^2 c^2 \Gamma m}{4\pi n e^2 \hbar^2} - 1 \right),$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черенков П. А., ДАН 2, 451 (1934); Труды Физического института АН СССР 2, вып. 4 (1944).
2. Франк И. М., Тамм И. Е., ДАН 14, 107 (1937).
3. Тамм И. Е., Journ. of Phys. 1, 439 (1939).
5. Swann W. F. G., Journ. Frankl. Inst. 226, 598 (1938).
5. Fermi E., Phys. Rev. 56, 1242 (1939).
6. Fermi E., Phys. Rev. 57, 485 (1940).
7. Kramers H. A., Physica 18, 401 (1947).
8. Mott N. F., Proc. Cambr. Phil. Soc. 27, 553 (1931).
9. Bohr N., Phil. Mag. 25, 10 (1913).
10. Bohr N., Phil. Mag. 30, 581 (1915).
11. Darwin C. G., Proc. Roy. Soc. A 146, 17 (1934).
12. Weizsäcker C. F., Ann. d. Phys. 17, 869 (1933).
13. Halpern O., Hall H., Phys. Rev. 57, 459 (1940).
14. Sternheimer R. M., Dissertation, Univ. of Chicago, 1946.
15. Bethe H. A., Ann. d. Phys. 5, 325 (1930).
16. Fano V., Phys. Rev. 70, 44 (1946).
17. Bloch F., Zs. f. Phys. 81, 363 (1933).
18. Jensen H., Zs. f. Phys. 106, 620 (1937).
19. Wilson R. R., Phys. Rev. 60, 749 (1941).
20. Kronig R., Proc. Roy. Soc. A 124, 409 (1929).
21. Kronig R., Proc. Roy. Soc. A 133, 255 (1931).
22. Livingston M. S., Bethe H. A., Rev. Mod. Phys. 9, 245 (1937).
23. Rosenblum S., Phys. Zs. 29, 737 (1928).
24. Mano M. G., Compt. rend. 197, 319 (1933).
25. Gerritsen A. N., Physica 12, 311 (1946).
26. Crane H. R., Oleson N. L., Chao K. T., Phys. Rev. 57, 555 (1946).
27. Hasen W. E., Phys. Rev. 67, 269 (1945).
28. Hayward E., Phys. Rev. 72, 937 (1947).
29. Черенков П. А., Phys. Rev. 52, 378 (1937).
30. Черенков П. А., ДАН 20, 651; 21, 116, 339 (1938).
31. Collins G. B., Reiling V. G., Phys. Rev. 54, 490 (1938).
32. Getting I. A., Phys. Rev. 71, 123 (1947).
33. Furry W. H., Phys. Rev. 72, 171 (1947).
34. Dicke R. H., Phys. Rev. 71, 737 (1947).
35. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1948, § 63.
36. Гайтлер В., Квантовая теория излучения, М., 1940.
37. Sommerfeld A., Zs. f. Phys. 78, 288 (1932).
38. Madsen C. B., Venkateswaren P., Phys. Rev. 74, 648 (1948).
39. Wick G. C., Ric. Scient. 11, 273 (1940), 12, 858 (1941); Il Nuovo Cimento 9, № 3 (1943).
40. Halpern Q. and Hall H., Phys. Rev. 73, 477 (1948).
41. Гинзбург В. Л., Journ. of Physics 2, 441 (1940)
42. Соколов А. А., ДАН 28, 415 (1940).

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  | Стр.      |
|--|-----------|
| От редакции . . . . .  | 5         |
| Введение . . . . .   | 9         |
| <b>Глава I. Рассеяние заряженных частиц в атомных полях . . . . .</b>            | <b>11</b> |
| 1. Кулоново взаимодействие в классической механике . . . . .                     | 11        |
| 2. Статистика столкновений. Закон рассеяния Резерфорда . . . . .                 | 15        |
| 3. Критерий применимости классической механики при кулоновом рассеянии . . . . . | 17        |
| 4. Влияние экранирования на закон Резерфорда . . . . .                           | 20        |
| 5. Сильное экранирование . . . . .   | 24        |
| 6. Сводка различных задач рассеяния . . . . .                                    | 30        |
| <b>Глава II. Явления, зависящие от ядерных столкновений . . . . .</b>            | <b>32</b> |
| 1. Характеристики ядерных столкновений . . . . .                                 | 32        |
| 2. Частота индивидуальных столкновений. Распределение $\delta$ -частиц . . . . . | 34        |
| 3. Тормозной эффект ядерных столкновений . . . . .                               | 38        |
| 4. Потери энергии при ядерных столкновениях . . . . .                            | 40        |
| 5. Многократное рассеяние . . . . .  | 44        |
| <b>Глава III. Возбуждение и ионизация атомов . . . . .</b>                       | <b>49</b> |
| 1. Ионизация и электронное торможение по классической механике . . . . .         | 49        |
| 2. Квантовая теория торможения и ионизации . . . . .                             | 55        |
| 3. Статистика электронных столкновений . . . . .                                 | 59        |
| 4. Прохождение быстрых частиц через легкие вещества . . . . .                    | 68        |
| 5. Прохождение быстрых частиц в тяжелых веществах . . . . .                      | 72        |
| <b>Глава IV. Перезарядка при атомных столкновениях . . . . .</b>                 | <b>76</b> |
| 1. Постановка проблемы . . . . .   | 76        |
| 2. Поперечное сечение для потери электрона легкими ядрами . . . . .              | 77        |
| 3. Поперечное сечение для захвата электрона $\alpha$ -частицей . . . . .         | 80        |
| 4. Захват и потеря электрона сильно заряженными частицами . . . . .              | 82        |
| <b>Глава V. Связь между скоростью и пробегом . . . . .</b>                       | <b>87</b> |
| 1. Общая постановка задачи . . . . .   | 87        |
| 2. Пробег легких ядер, обладающих большой скоростью . . . . .                    | 89        |



|   |     |
|---|-----|
| 3. Пробег быстрых тяжелых ионов . . . . .   | 93  |
| 4. Пробег атомов с малыми начальными скоростями . . . . .   | 97  |
| Литература . . . . .  | 99  |
| Приложение. Влияние взаимодействия атомов на прохождение<br>атомных частиц через вещество ( <i>О. Бор</i> ) . . . . . | 105 |
| 1. Введение . . . . .   | 105 |
| 2. Близкие и далекие соударения . . . . .   | 107 |
| 3. Столкновения между частицей и отдельным атомом . . . . .   | 109 |
| 4. Влияние взаимодействия атомов на торможение частиц<br>с нерелятивистскими скоростями . . . . .                     | 111 |
| 5. Тормозная способность вещества, содержащего свободные<br>электроны . . . . .                                       | 115 |
| 6. Влияние атомных взаимодействий на торможение частиц<br>с релятивистскими скоростями . . . . .                      | 117 |
| 7. Эффект Черенкова и его связь с проблемой торможения . . . . .  | 122 |
| 8. Атом как дисперсионная система . . . . .   | 125 |
| 9. Оценка тормозной способности тяжелых веществ . . . . .   | 129 |
| 10. Сравнение с экспериментальными данными . . . . .  | 133 |
| Дополнение I. Реакция при релятивистском столкновении двух тел . . . . .  | 136 |
| Дополнение II. Применение формализма теории излучения . . . . .   | 140 |
| Литература . . . . .  | 147 |

Редактор *К. Гуров*

Технический редактор *А. Дронов*

Корректор *Р. Шайхет*

\*

Сдано в производство 14/XI 1949 г.

Подписано к печати 25/I 1950 г.

А-00105. Печ. л. 9<sup>1</sup>/<sub>2</sub>. Уч.-издат. л. 9,8.

Формат 60×92<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Издат. № 2/677

Цена 10 руб. Зап. № 1817.

\*

16-я тип. Главполиграфиздата при  
Совете Министров СССР, Москва,  
Трехпрудный, 9.

## КНИГИ,

выпущенные издательством иностранной литературы  
по физике

и имеющиеся в продаже в книжных магазинах

**БЕТЕ Г.** Лекции по теории ядра. Перевод с английского. 154 стр. Ц. 9 р. 80 к.

Книга посвящена изложению основных вопросов теории атомного ядра. Особое внимание уделено взаимодействию ядерных частиц. Теоретические проблемы и экспериментальные данные излагаются с использованием современных сведений. Книга представляет интерес для широкого круга физиков.

**ГЕРЦБЕРГ Г.** Спектры и строение двухатомных молекул. Перевод с английского, 403 стр. Ц. 35 р.

В книге обобщен обширный экспериментальный материал по спектрам двухатомных молекул, подробно освещены вопросы идентификации спектров и изучения строения молекул согласно имеющимся спектроскопическим данным.

В книге приведены также все основные спектроскопические данные для важнейших двухатомных молекул.

Книга рассчитана на научных работников: физиков-экспериментаторов и химиков, работающих в области изучения структуры молекул, молекулярной спектроскопии и приложения этих вопросов к практическим проблемам.

**ГЕРЦБЕРГ Г.** Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул. Перевод с английского. 647 стр. Ц. 64 р.

Книга посвящена изучению спектров многоатомных молекул; подробно изложены теория и методика идентификации молекул и изучения их структуры по результатам спектроскопических исследований. В книге весьма полно рассмотрены спектры наиболее важных многоатомных молекул (от трехатомных до двенадцатиатомных включительно).

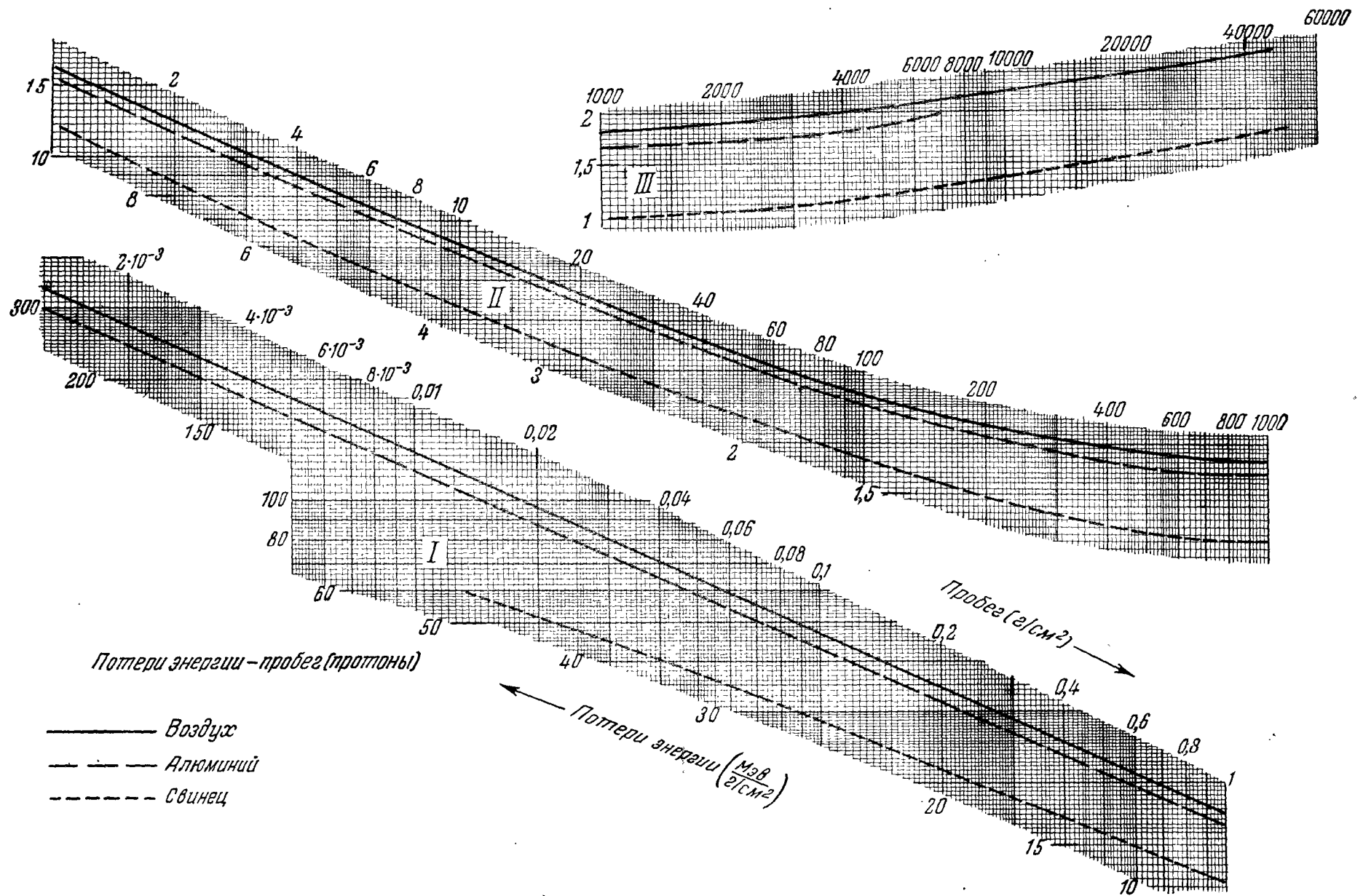


Рис. I.

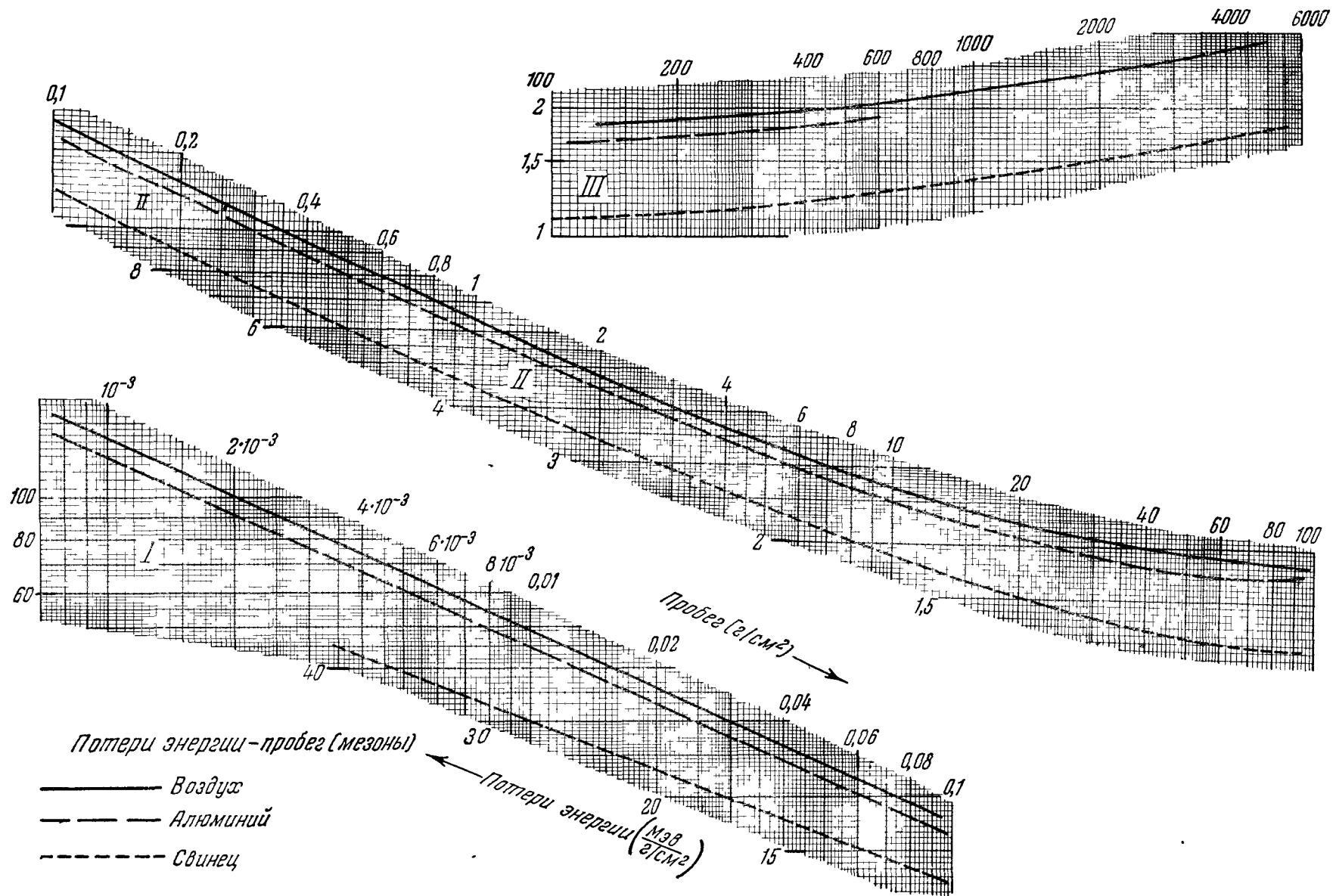


Рис. II.

Зак 1589 Н А Добротин

III

Рис. IV.

Зак 1589 Н А Добротин

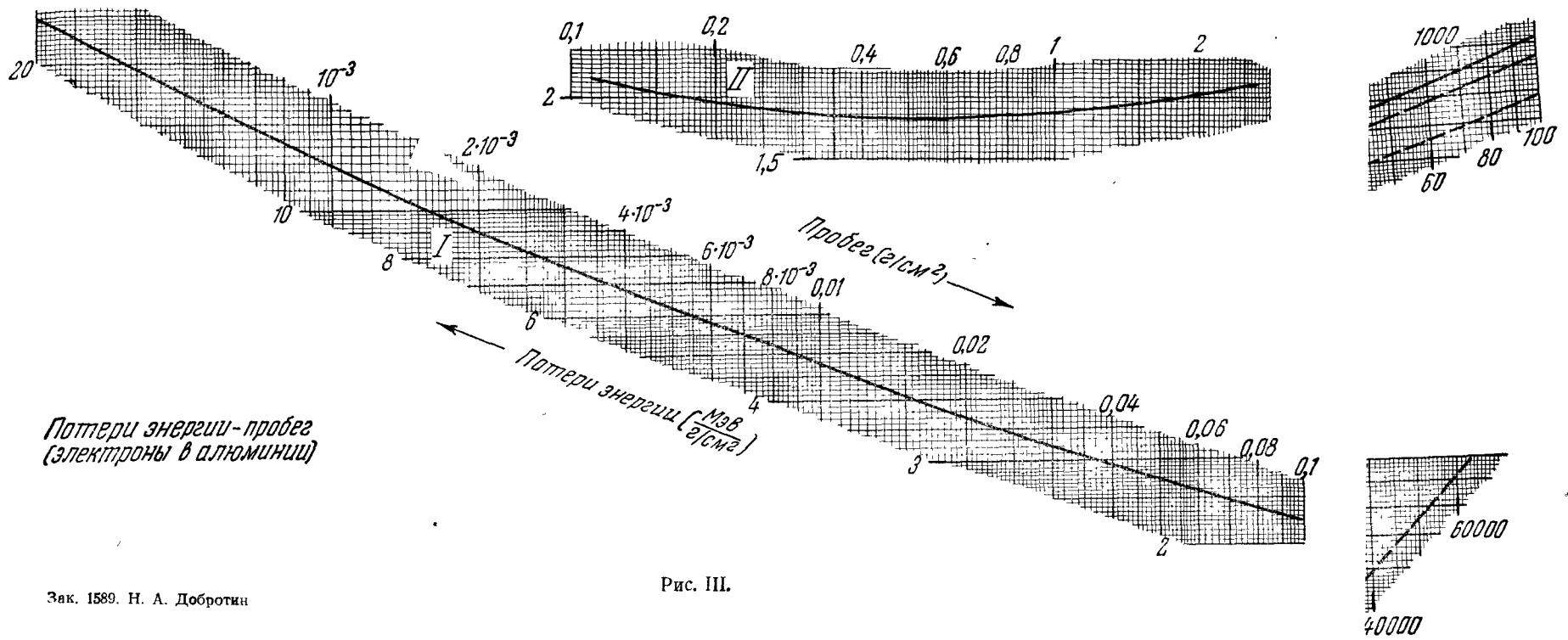


Рис. III.

Зак. 1589. Н. А. Добротин

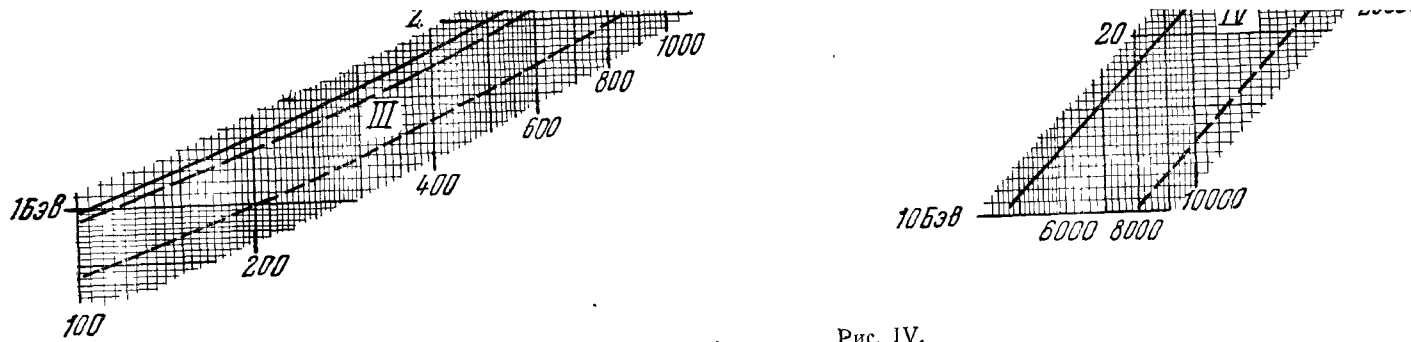


Рис. IV.

Зак. 1589. Н. А. Добротин

Пробег-импульс (протоны)

- Воздух
- - - - - Алюминий
- - - - - Свинец

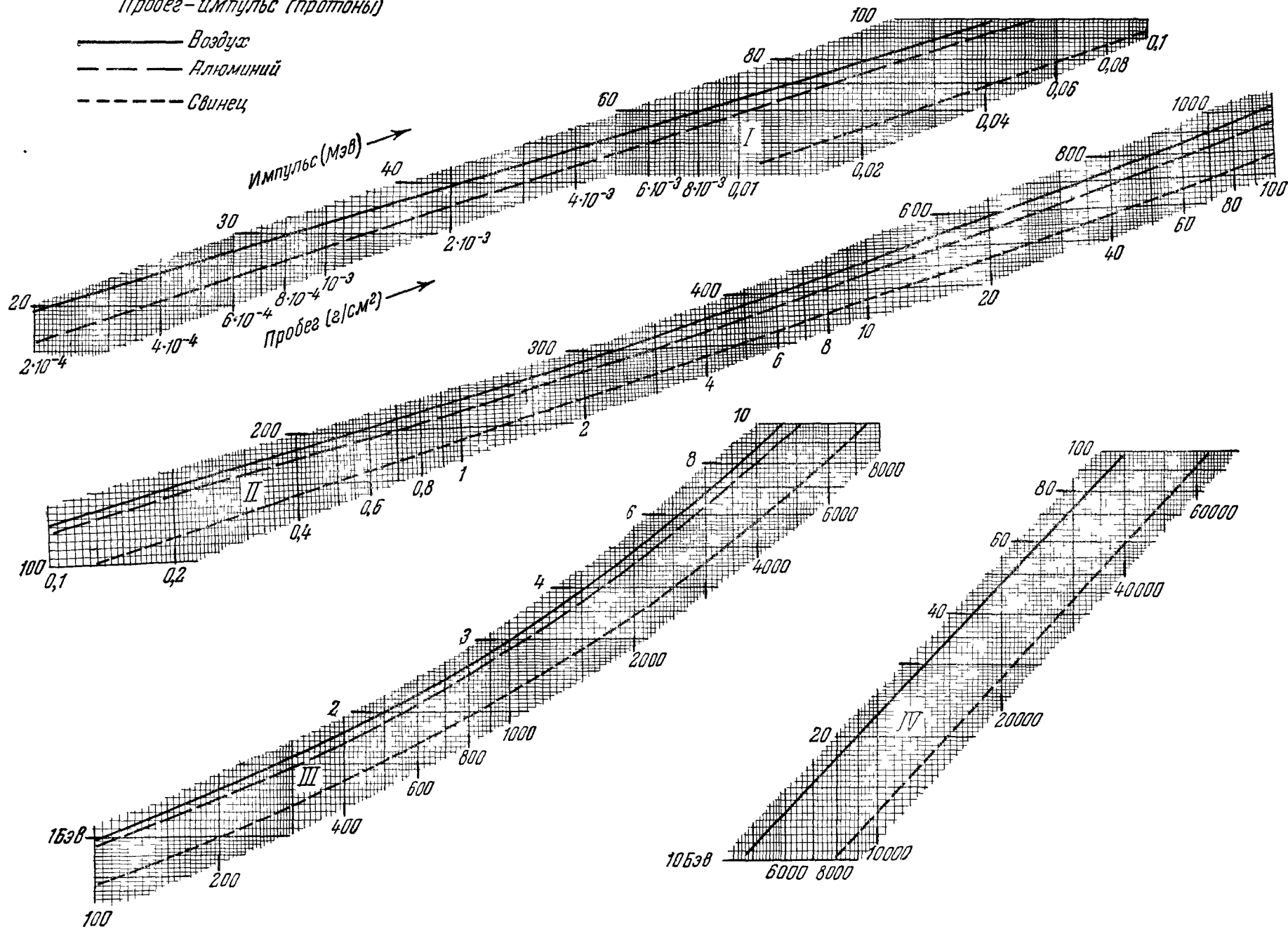


Рис IV.

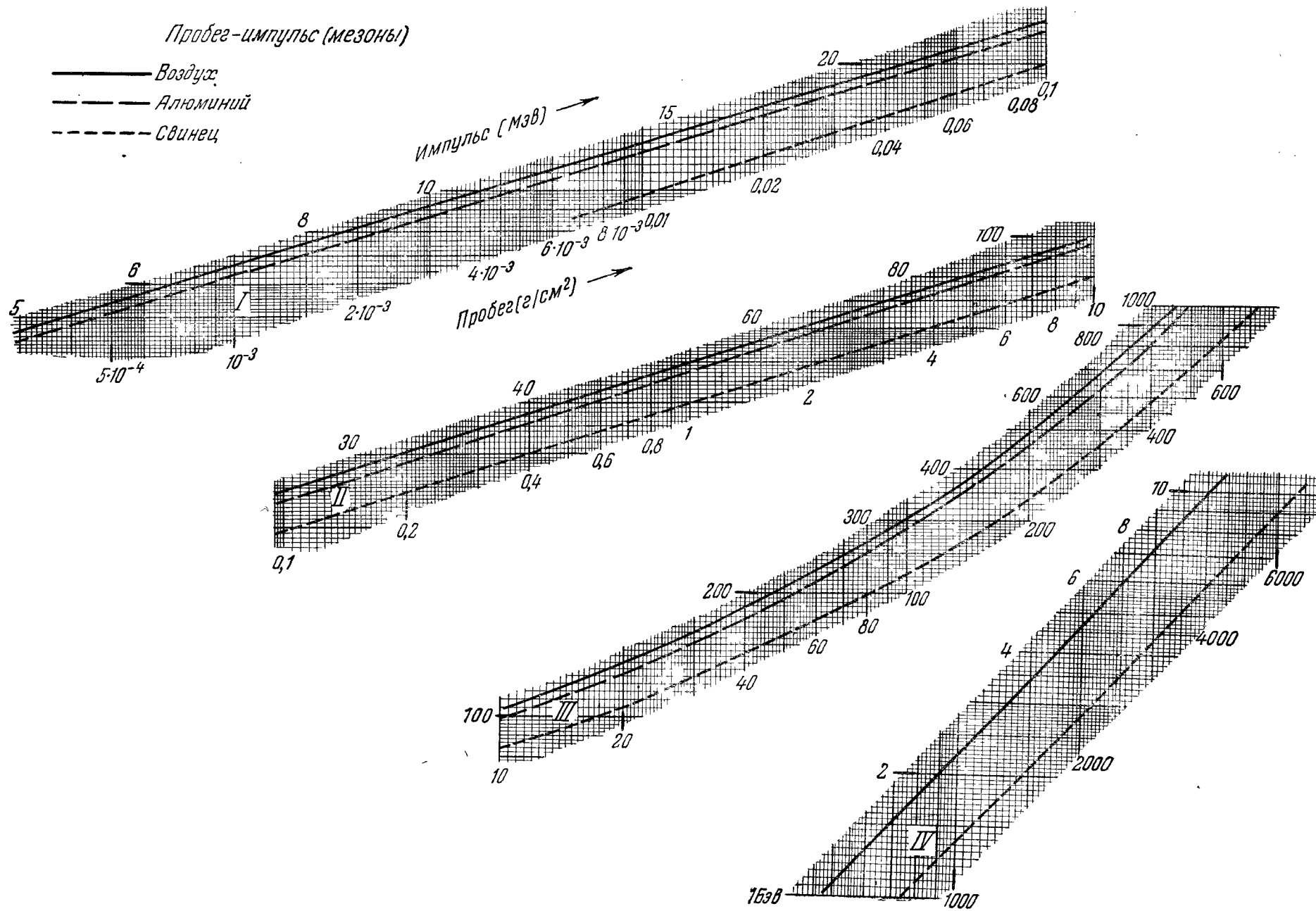


Рис. 5.



Пробег-импульс  
(электроны в алюминии)

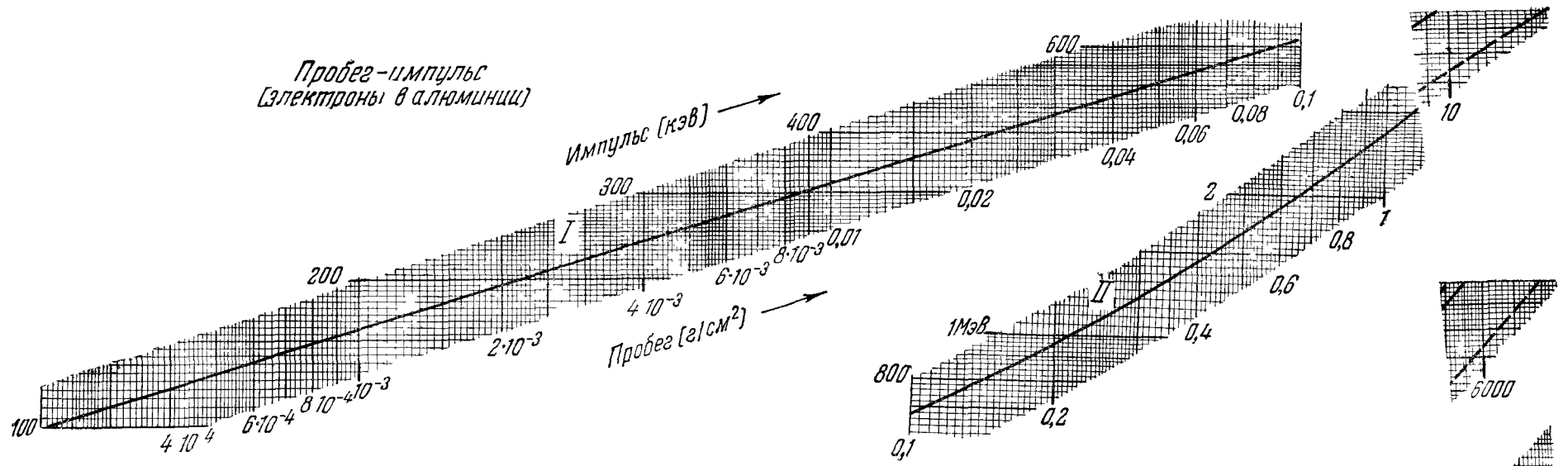


Рис VI

Зак 1589 Н А Доброгин

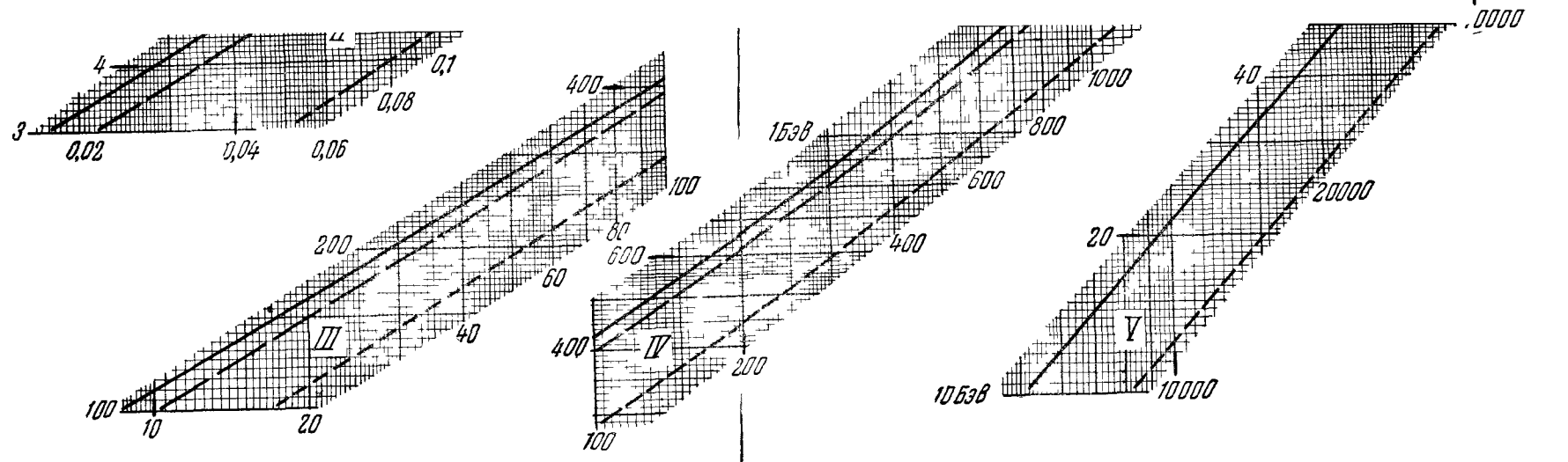


Рис VII

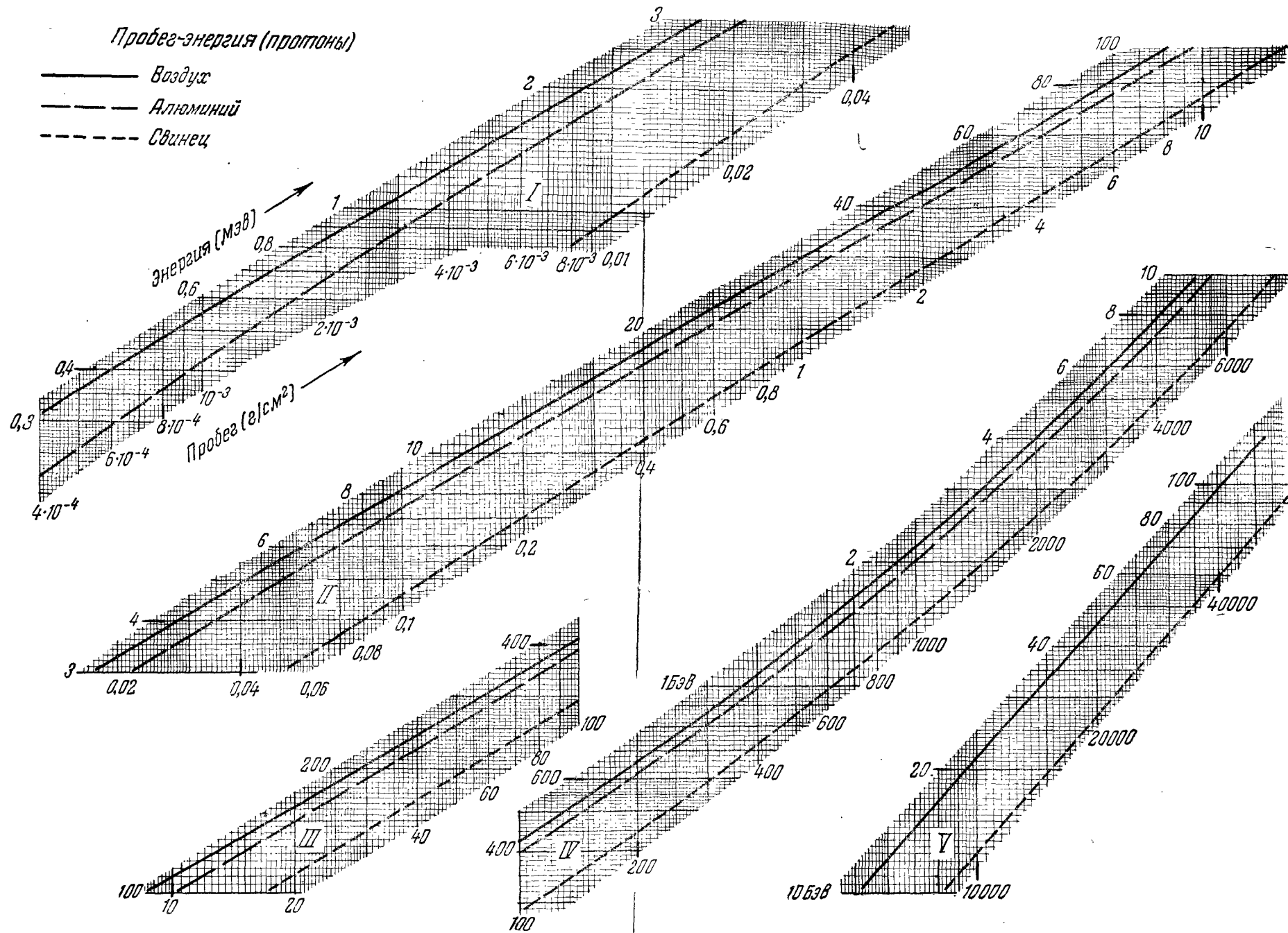


Рис. VII.

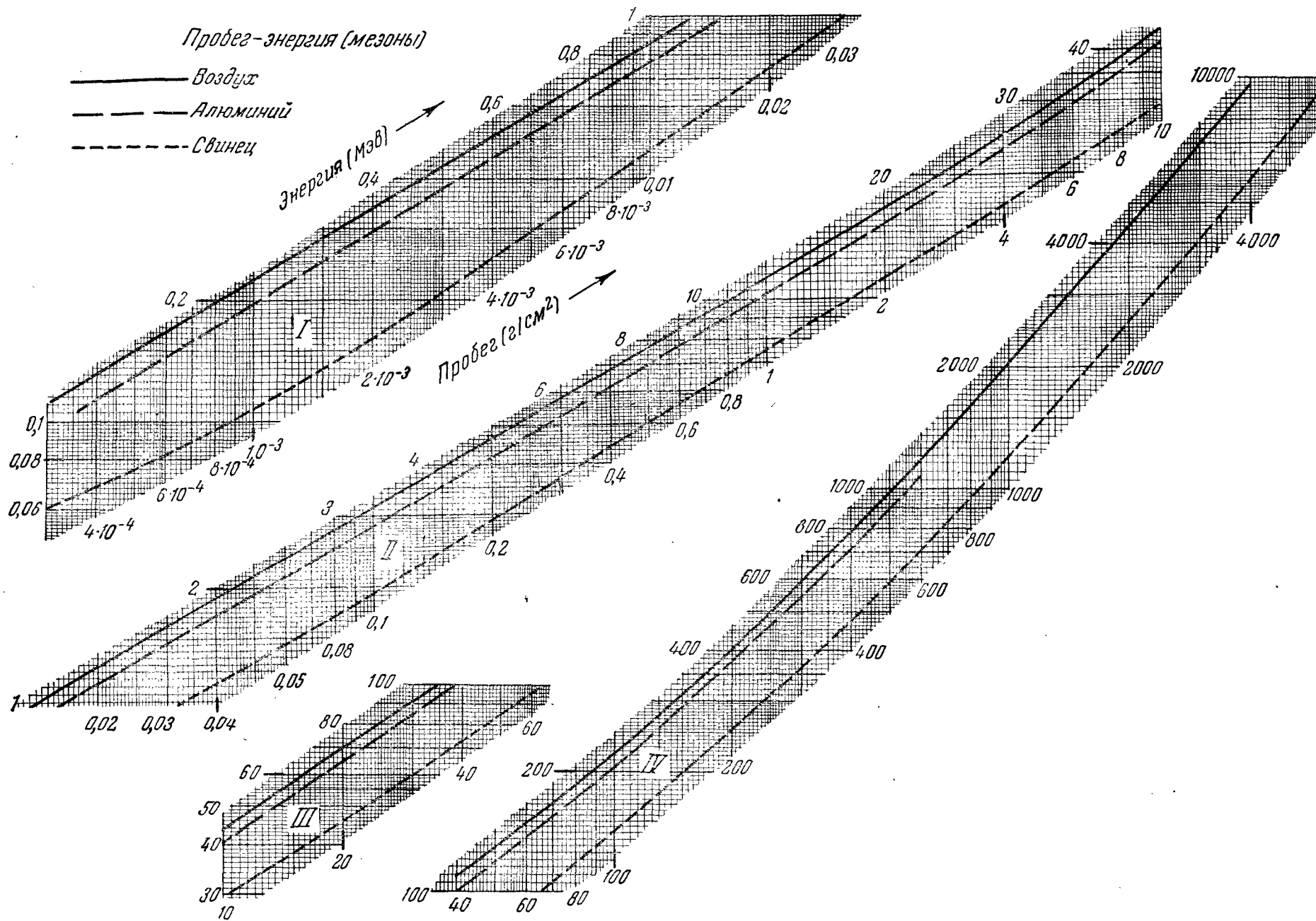


Рис. VIII.

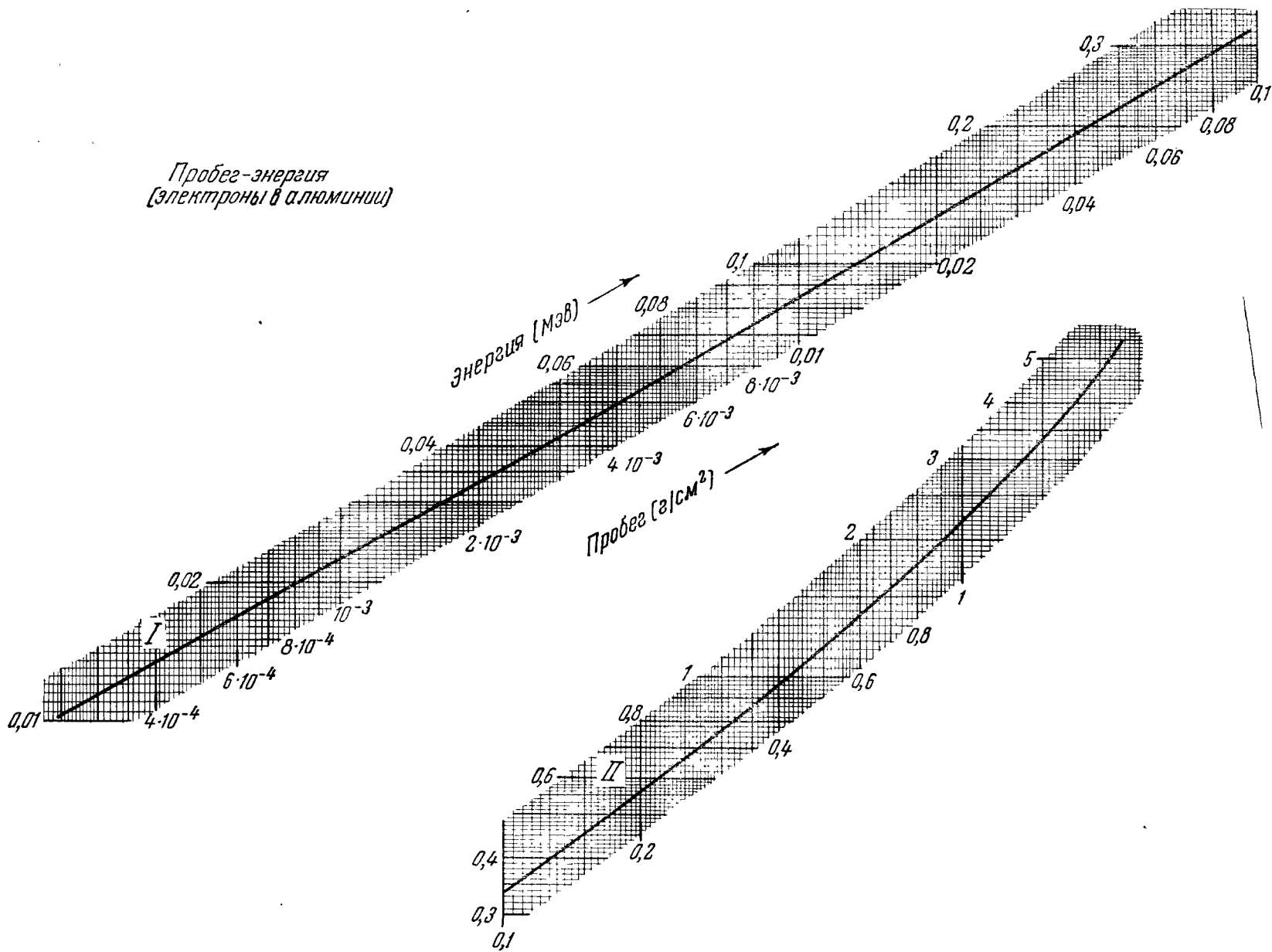


Рис. IX.

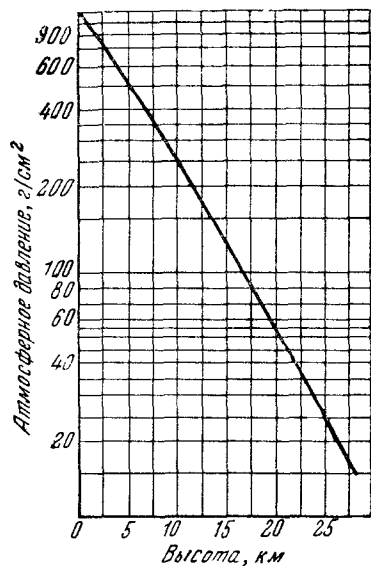


Рис. X. Кривая зависимости давления воздуха в атмосфере (в г/см<sup>2</sup>) от высоты (в км).

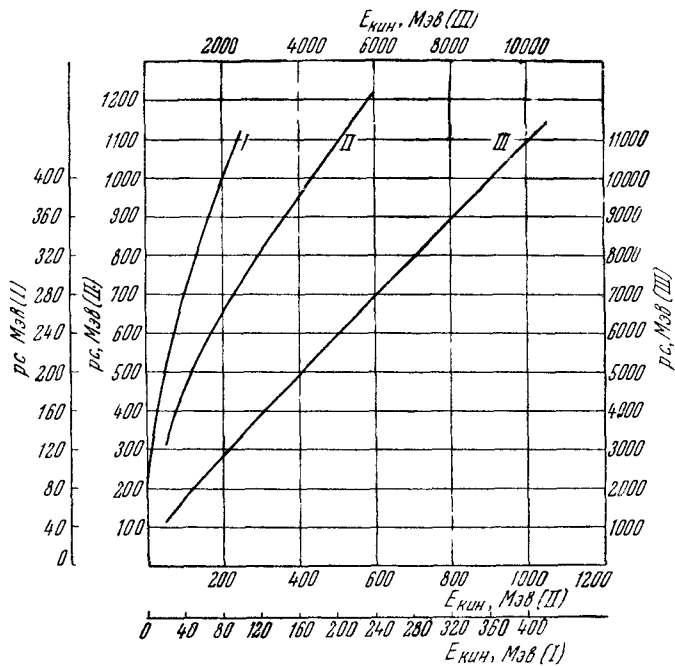


Рис. XI. Кривые «импульс — кинетическая энергия» для протонов.

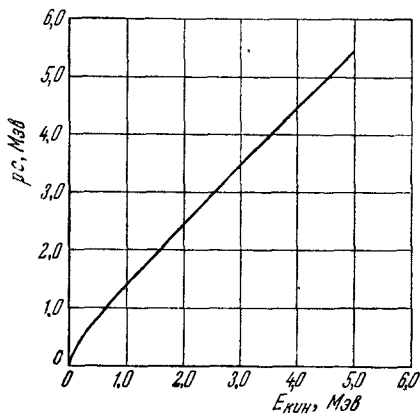


Рис. XII. Кривая «импульс — кинетическая энергия» для электронов.

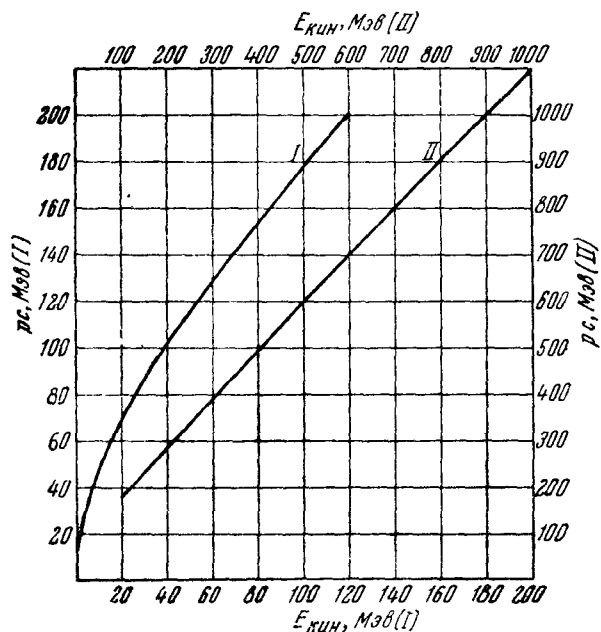


Рис. XIII. Кривые «импульс — кинетическая энергия» для  $\mu$ -мезонов.

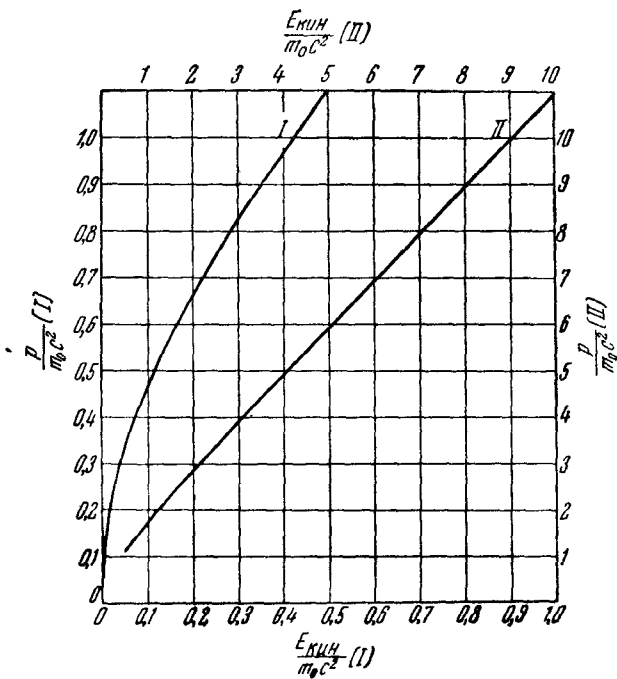


Рис. XIV. Кривые  $\frac{p}{m_0 c^2} = f\left(\frac{E_{\text{кин}}}{m_0 c^2}\right)$ , где  $m_0$  — масса покоя частицы.