LINEAR ALGEBRAIC GROUPS

ARMAND BOREL

Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey

Notes taken by Hyman Bass, Columbia University

W. A. BENJAMIN
New York · Amsterdam
1969

А. БОРЕЛЬ

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Перевод с английского
А. Е. ЗАЛЕССКОГО

Под редакцией
В. П. ПЛАТОНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1972

УДК 519.4

Монография известного американского математика А. Бореля содержит изложение основ теории линейных алгебраических групп, занимающей одно из центральных мест в современной математике благодаря глубоким связям с различными ее разделами (например, с алгебраической геометрией и теорией чисел, функциональным анализом и топологией).

Книга будет интересна широкому кругу математиков различных специальностей. Ясное и четкое изложение, столь характерное для стиля автора, делает ее вполне доступной для студентов университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. $\frac{2\text{-}2\text{-}3}{72\text{-}4}$

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория линейных алгебраических групп в настоящее время занимает одно из важных мест в современной математике. Ее чрезвычайно интенсивное развитие в последние 10 — 15 лет характеризуется глубокими связями с различными разделами математики, в частности с алгебраической геометрией, теорией чисел, функциональным анализом и топологией. Уже давно назрела необходимость в обстоятельном изложении основ теории линейных алгебраических групп. Однако такого изложения на русском языке до сих пор не существовало. Известные книги Шевалле [1], сыгравшие существенную роль, не соответствуют современному развитию теории.

Этот пробел в определенной степени восполняет книга А. Бореля, перевод которой предлагается вниманию советского читателя. Написанная выдающимся математиком, одним из создателей теории, книга представляет собой введение в современную теорию линейных алгебраических групп. Она содержит, как отмечает автор, изложение только первой части теории, которую составляет исследование общей структуры линейных алгебраических групп, главным образом над алгебраически замкнутыми полями и полями нулевой характеристики. Такие важные разделы теории линейных алгебраических групп, как представления, классификация полупростых групп и т. д., не вошли в книгу (см. послесловие автора). Их включение потребовало бы увеличить объем книги в несколько раз. В книге совсем не затрагивается арифметическая теория алгебраических групп, в которой в последние годы было получено много глубоких и красивых результатов. Здесь также ощущается потребность в соответствующей книге.

В целом книга А. Бореля написана четко и ясно. Для ее чтения требуется сравнительно небольшая математическая подготовка. Правда, внимательный читатель заметит некоторое несоответствие в стиле написания основной части и вводной главы АГ, содержащей изложение необходимого материала из алгебраической геометрии. По-видимому, здесь сказалось то обстоятельство, что в этой главе, написанной Бассом, язык аффинных схем используется в несколько большем объеме, нежели он фактически применяется в дальнейшем (хотя, вероятно, Н. Бурбаки сказал бы: «Разве это схемы?!»).

Указатель литературы в оригинале содержал только те источники, ссылки на которые имеются непосредственно в тексте. Для русского издания автор прислал расширенный список литературы вместе с кратким комментарием, который помещен в качестве послесловия к книге. При переводе исправлены мелкие неточности и опечатки, часть которых была любезно сообщена нам автором. Пользуясь случаем, выражаем профессору А. Борелю искреннюю благодарность.

Мы надеемся, что книга А. Бореля будет интересной и полезной широкому кругу советских математиков.

В. П. Платонов

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Эти заметки представляют собой введение в теорию линейных алгебраических групп. В первую очередь излагается основной материал об алгебраических группах над произвольным полем (гл. I, II), а затем обсуждается строение разрешимых и редуктивных групп над алгебраически замкнутым полем (гл. III, IV). Для полноты картины включены некоторые факты о группах рациональных точек алгебраических групп (§ 15, 16) и ряд результатов об алгебраических группах над конечными полями (§ 16) и над полями характеристики нуль (§ 7).

Для чтения книги необходимо знакомство с некоторыми фактами из теории алгебр Ли и, кроме того, — в сравнительно небольшом объеме — с алгебраической геометрией. Подавляющее большинство используемых понятий и результатов алгебраической геометрии собрано, иногда с доказательствами, в предварительной главе АГ. В качестве основного источника приняты лекции Мамфорда [1] [1]), однако мы старались, чтобы наше изложение по возможности не зависело от них. Отдельные результаты из алгебраической геометрии, которые оказываются необходимыми при каких-либо специфических обстоятельствах, сформулированы с соответствующими ссылками там, где они используются. Мы придерживаемся здесь, в сущности, теоретико-множественной точки зрения, отождествляя многообразие с множеством его точек над алгебраическим замыканием основного поля (наделенным топологией Зарисского), хотя и с признаками схемной точки зрения.

Эти заметки основываются на курсе лекций, прочитанном автором в Колумбийском университете весной 1968 года по инициативе Басса. За исключением главы V, которая была добавлена позднее, записи лекций выполнены Бассом при некотором

---

1) См. сноску на стр. 11. — *Прим. ред.*

содействии Стейна и воспроизводятся здесь с небольшими изменениями и дополнениями. Басс проделал это весьма квалифицированно, часто расширяя или улучшая устное изложение. В частности, ему принадлежит удачное использование двойных чисел в § 3; Бассом написана также глава АГ — в лекциях был дан лишь беглый обзор этого предмета. С большим удовольствием я выражаю ему признательность за содействие, без которого эти заметки едва ли появились бы так скоро.

А. Борель

Принстон, февраль 1969 г.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Везде в этих заметках k — поле, K — алгебраически замкнутое расширение поля k, k_s (соответственно $\bar{k}$) — сепарабельное (соответственно алгебраическое) замыкание поля k в поле K и p — характеристика поля k. Иногда через p обозначается характеристическая экспонента поля k, равная 1, если $\mathrm{char}(k) = 0$, и совпадающая с характеристикой в остальных случаях.

Все кольца предполагаются коммутативными и с единицей, если не оговорено противное, а все гомоморфизмы колец и все модули — унитарными.

Через A^* обозначается группа обратимых элементов кольца A.

Через $\mathbf{Z}$ обозначается кольцо целых чисел, через $\mathbf{Q}$ (соответственно $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) — поле рациональных (соответственно вещественных или комплексных) чисел.

2. *Ссылки.* Ссылка на пункт х. у главы АГ обозначается через АГ. х. у. Для остальных глав х. у означает ссылку на пункт х. у соответствующей главы. Имеется две библиографии, одна — для главы АГ — на стр. 65, другая — для глав I — V — на стр. 261. Ссылки на оригинальные источники даны, как правило, в библиографических замечаниях в конце некоторых параграфов. Они, однако, не претендуют на полноту, и результат, который в них не упомянут, не обязан быть новым.

3. Пусть G — некоторая группа. Если (X_i) $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — семейство множеств и $f_i\colon X_i \to G$ — отображения, то отображение $f\colon X_1 \times \ldots \times X_m \to G$, заданное формулой

$$(x_1, \ldots, x_n) \to f_1(x_1) \cdot \ \ldots \ \cdot f_m(x_m), \qquad (x_i \in X_i;\ 1 \leqslant i \leqslant m),$$

часто называется произведением отображений f_i (или отображением-произведением).

Пусть N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — нормальные делители группы G. Группа G называется *почти прямым произведением* нормальных делителей N_i, если произведение вложений $N_i \to G$ является гомоморфизмом прямого произведения $N_1 \times \ldots \times N_m$ на всю группу G и ядро его конечно.

Пусть M, N — подгруппы группы G. Через (M, N) обозначается подгруппа группы G, порожденная всеми коммутаторами $(x, y) = x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}$ $(x \in M,\ y \in N)$.

4. Пусть V — некоторое k-многообразие и k' — расширение поля k в K. Через $V(k')$ обозначается множество k'-рациональных

точек многообразия V. Через $k'[V]$ мы обозначаем k'-алгебру определенных над k' регулярных функций на многообразии V, а через $k'(V)$ обозначаем k'-алгебру определенных над k' рациональных функций на многообразии V. Если W — некоторое k-многообразие и f: $V \to W$ — некоторый k-морфизм, то отображение $k[W] \to k[V]$, заданное правилом $\varphi \to \varphi \circ f$, называется *коморфизмом* морфизма f и обозначается через f_0.

5. Ниже мы даем список обозначений, часто употребляемых в тексте без пояснений, после того как они введены в одной из глав I — V.

[1]) Символ ρ_g употребляется автором в двух смыслах (см., например, п. 3.9, 7,5 и др.). — *Прим. перев.*

Глава АГ

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Материал этой главы нужен нам исключительно для ссылок в последующих главах. Здесь приведены результаты и обозначения из алгебраической геометрии, которые используются в этой книге. Практически мы принимаем здесь точку зрения, сформулированную в гл. 1 лекций Мамфорда[1]) [1]. Таким образом, наши многообразия отождествляются с множествами их точек над фиксированным алгебраически замкнутым полем (произвольной характеристики). Однако по техническим соображениям нам важно не требовать (как это делает Мамфорд), чтобы многообразия были неприводимыми.

Как правило, по поводу определений и теорем мы ограничиваемся ссылкой на литературу, лишь изредка снабжая теоремы кратким указанием о доказательстве. Однако имеется два существенных исключения. Мы даем почти полное изложение содержащихся в § 11—14 результатов по вопросам рациональности (т. е. о полях определения) и фактов о касательных пространствах в § 15—16. Это представляется желательным как ввиду отсутствия в литературе изложения этого материала в нужной нам форме, так и из-за той важной роли, которую эти две темы играют в настоящих заметках.

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

(См. Семинар Шевалле [1], сообщение 1, п. 1.)[2])

1.1. Неприводимые компоненты. Топологическое пространство X называется *неприводимым*, если оно непусто и не является объединением двух собственных замкнутых подмножеств. Последнее условие эквивалентно требованию, чтобы каждое непустое открытое подмножество было плотным в X или чтобы каждое непустое открытое подмножество было связным.

---

[1]) В русском переводе почти все ссылки на лекции Мамфорда [1] заменены ссылками на источники, имеющиеся на русском языке. — *Прим. ред.*

[2]) См. также Шафаревич [1], гл. I, или Капланский [1], гл. IV. — *Прим. ред.*

Если Y — подпространство топологического пространства X, то Y неприводимо тогда и только тогда, когда его замыкание $\bar{Y}$ неприводимо. По лемме Цорна каждое неприводимое подпространство пространства X содержится в максимальном, так что максимальные неприводимые подпространства замкнуты. Они называются неприводимыми компонентами пространства X. Так как замыкание точки — неприводимое подпространство и, следовательно, содержится в некоторой неприводимой компоненте, то X — объединение своих неприводимых компонент.

Если подпространство Y пространства X имеет лишь конечное число неприводимых компонент $Y_1, \ldots, Y_n$, то $\bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_n$ — неприводимые компоненты подпространства $\bar{Y}$ (без повторений).

1.2. Нётеровы пространства. Топологическое пространство X называется *квазикомпактным* („квази" — ибо пространство не предполагается хаусдорфовым), если из каждого покрытия пространства X открытыми множествами можно выбрать конечное покрытие. Если каждое открытое подмножество пространства X квазикомпактно или, эквивалентным образом, открытые подмножества удовлетворяют условию максимальности, то X называется *нётеровым*. Легко видеть, что каждое подпространство нётерова пространства само нётерово.

Предложение. *Пусть X — нётерово пространство. Тогда*

(a) *X имеет лишь конечное число неприводимых компонент, скажем, $X_1, \ldots, X_n$;*

(b) *открытое подмножество U пространства X тогда и только тогда плотно в X, когда $U \cap X_i \neq \varnothing$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$;*

(c) *для каждого i множество $X_i' = X_i - \bigcup_{j \neq i} (X_j \cap X_i)$ открыто в X; кроме того, $U_0 = \bigcup_i X_i'$ — открытое плотное подмножество пространства X и $X_1', \ldots, X_n'$ — неприводимые и связные компоненты подмножества U_0.*

Доказательство. Утверждение (a) следует из стандартного рассуждения, использующего нётерову индукцию.

Так как множество X_i неприводимо, то множество $X_i' = X - \left(\bigcup_{j \neq i} X_j\right)$ открыто в X и плотно в X_i. Следовательно, каждое открытое множество U, плотное в X, должно иметь непустое пересечение с X_i'. Обратно, если множество U открыто и пересечение $U \cap X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ непусто, то множество $U \cap X_i$ плотно в X_i, так что $\bar{U} \supset X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и, следовательно, $\bar{U}$ совпадает с X. Отсюда вытекает, в частности, что $U_0 = \bigcup_i X_i'$ — открытое плотное подмножество пространства X. Так как множества X'_i открыты, неприводимы и попарно не пересекаются, то они являются неприводимыми связными компонентами подмножества U_0.

1.3. Конструктивные множества. Подмножество Y топологического пространства X называется *локально замкнутым* в X, если Y открыто в $\overline{Y}$, или, эквивалентным образом, если Y — пересечение открытого и замкнутого множеств. Ясно, что пересечение двух локально замкнутых множеств снова является локально замкнутым множеством. *Конструктивное множество* — это конечное объединение локально замкнутых множеств. Дополнение локально замкнутого множества есть объединение открытого и замкнутого множеств и, следовательно, является конструктивным множеством. Отсюда следует, что дополнение конструктивного множества является конструктивным множеством. Таким образом, конструктивные множества образуют булеву алгебру (т. е. операции конечных объединений, пересечений и взятия дополнения не выводят за пределы совокупности конструктивных множеств). Другими словами, конструктивные множества можно определить как элементы булевой алгебры, порожденной открытыми и (или) замкнутыми подмножествами.

Если f: $X \to X'$ — непрерывное отображение, то f^{-1} — гомоморфизм булевых алгебр, переводящий открытые и замкнутые подмножества пространства X' в открытые и замкнутые подмножества пространства X соответственно. Следовательно, f^{-1} переводит локально замкнутые и конструктивные множества пространства X' в локально замкнутые и конструктивные множества пространства X соответственно.

Предложение. *Пусть X — нётерово пространство и Y — его конструктивное подмножество. Тогда Y содержит открытое плотное подмножество своего замыкания $\overline{Y}$.*

Замечание. Используя нётерову индукцию, можно доказать обратное: если Y — подмножество, пересечение которого с каждым неприводимым замкнутым подмножеством пространства X обладает указанным свойством, то Y конструктивно.

Доказательство. Представим Y в виде конечного объединения локально замкнутых подмножеств L_i, $Y = \bigcup_i L_i$. Тогда $\overline{Y} = \bigcup_i \overline{L}_i$ и, если множество $\overline{Y}$ неприводимо, то $\overline{Y} = \overline{L}_i$ для некоторого i. Кроме того, подмножество L_i открыто в $\overline{L}_i$ (и содержится в Y).

Предположим теперь, что множество Y приводимо, и пусть $Y = \bigcup_j Y_j$, где Y_j — неприводимые компоненты множества Y. Каждое множество Y_j замкнуто в Y и, следовательно, является конструктивным подмножеством пространства X. Как мы видели выше, Y_j содержит плотное открытое подмножество своего замыкания $\overline{Y}_j$. Так как $\overline{Y}_j$ — неприводимые компоненты множества $\overline{Y}$ (п. АГ. 1.1), то из предложения п. АГ. 1.2 вытекает, что $Y = \bigcup Y_j$ содержит плотное открытое подмножество множества $\overline{Y}$.

1.4. (Комбинаторная) размерность. *Размерностью* топологического пространства X мы называем наибольшую длину n цепей $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$ различных неприводимых замкнутых подмножеств и обозначаем ее через

$$\dim X.$$

Через

$$\dim_x X$$

обозначается наименьшая размерность открытых окрестностей точки $x \in X$.

Из определения и свойств неприводимых замкнутых множеств легко следует, что

$$\dim X = \sup_{x \in X} \dim_x X$$

и что формула $x \to \dim_x X$ задает полунепрерывную сверху функцию. Кроме того, если X имеет конечное число неприводимых компонент (например, если X — нётерово пространство), то $\dim X$ равна максимуму размерностей этих компонент.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ ИЗ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ

2.1. Расширение основного поля. (См. Картан и Шевалле [1], сообщения 13, 14 [1]).) Пусть F — некоторое поле, содержащее поле k. Для любого поля k', содержащего поле k, положим

$$F_{k'} = k' \otimes_k F.$$

Тогда $F_{k'}$ есть k'-алгебра, которая уже может не быть ни полем, ни даже областью целостности. Тем не менее каждый ее простой идеал минимален (т. е. между простыми идеалами нет отношения включения) и их пересечение — идеал, состоящий из нильпотентных

[1]) См. также Зарисский и Самюэль [1], гл. II, § 15, Ленг [1], гл. X. — *Прим. ред.*

элементов алгебры $F_{k'}$ (см. п. АГ. 3.3 ниже). Кольцо, не содержащее нильпотентных элементов, называется *приведенным*.

Здесь могут представиться следующие основные возможности:

(a) *k' — сепарабельное алгебраическое расширение поля k.*

Тогда $F_{k'}$ — приведенное кольцо, которое может, однако, иметь более одного простого идеала.

(b) *Расширение k' алгебраическое и чисто несепарабельное над k.*

Тогда $F_{k'}$ обладает единственным простым идеалом (состоящим из нильпотентных элементов), но кольцо $F_{k'}$ не обязано быть приведенным.

(c) *k' — чисто трансцендентное расширение поля k.*

Тогда, очевидно, $F_{k'}$ — область целостности.

2.2. Сепарабельные расширения. Поле F называется *сепарабельным* над k, если выполняется любое из следующих эквивалентных друг другу условий (здесь p — характеристическая экспонента поля k, т. е. $p=1$, если $\operatorname{char}(k)=0$, и $p=\operatorname{char}(k)$ в остальных случаях):

(1) Поля F^p и k линейно разделены над k^p.

(2) $F_{(k^{1/p})}$ — приведенное кольцо.

(3) $F_{k'}$ — приведенное кольцо для всякого расширения k' поля k.

Предположим, что для некоторого расширения L поля k алгебра F_L есть область целостности и (F_L) — ее поле частных. Тогда

поле F сепарабельно над $k \Leftrightarrow$ поле (F_L) сепарабельно над L.

Импликация $\Rightarrow$ следует, по существу, из ассоциативности тензорного произведения, с учетом условия (3). Чтобы доказать обратное, включим данное расширение k' поля k в большее расширение k'', содержащее также и L. Так как $F_{k'} \subset F_{k''}$, то достаточно показать, что $F_{k''}$ — приведенное кольцо. Но по предположению $(F_L)_{k''}$ — приведенное кольцо. Следовательно, кольцо $F_{k''} = F_L \otimes_L k'' \subset (F_L)_{k''}$ также является приведенным.

2.3. Дифференцирования. (См. Бурбаки [1], § 9, Зарисский и Самюэль [1], т. 1, гл. II, § 17, или Картан — Шевалле [1], сообщение 13.) Мы называем k-дифференцированием поля F всякое k-линейное отображение D: $F \to F$, такое, что $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ для всех $a, b \in F$. Совокупность

$$\operatorname{Der}_k(F, F)$$

всех k-дифференцирований образует векторное пространство над F.

Теорема. *Предположим, что F — конечно порожденное расширение поля k, и пусть n — степень трансцендентности поля F*

над k. Положим

$$m = \dim_F \mathrm{Der}_k(F, F).$$

Тогда $m \geqslant n$, и равенство имеет место тогда и только тогда, когда поле F сепарабельно над k.

Пусть $D_1, \ldots, D_m$ — базис пространства $\mathrm{Der}_k(F, F)$ и $a_1, \ldots, a_m \in F$. Поле F является сепарабельным алгебраическим расширением поля $k(a_1, \ldots, a_m)$ тогда и только тогда, когда $\det(D_i(a_j)) \neq 0$.

Если $m = n$ и $\det(D_i(a_j)) \neq 0$, то множество $\{a_1, \ldots, a_m\}$ называется *сепарабельным базисом трансцендентности*.

2.4. Предложение. *Пусть G — группа автоморфизмов поля F. Тогда F — сепарабельное расширение поля $k = F^G$ тех элементов поля F, которые остаются неподвижными при действии группы G.*

Докажем, что поля F и $k^{1/p}$ линейно разделены над k, т. е. что если элементы $a_1, \ldots, a_n \in k^{1/p}$ линейно независимы над k, то они линейно независимы над F. Действие группы G единственным образом продолжается на $F^{1/p}$, причем G действует тривиально на $k^{1/p}$. Предположим, что $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимы над F, но независимы над k; мы можем предполагать, что n минимально. Пусть $a_1 + b_2 a_2 + \ldots + b_n a_n = 0$ — соответствующее соотношение. Если некоторое b_i, скажем b_n, не принадлежит полю $F^G = k$, то b_n изменяется под действием некоторого элемента $g \in G$. Вычитая $a_1 + g(b_2) a_2 + \ldots + g(b_n) a_n = 0$ из соотношения, написанного выше, получаем более короткое соотношение; это противоречит минимальности n.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ ИЗ КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ

3.1. Локализация. (См. Бурбаки [2].) Подмножество S кольца A называют *мультипликативным*, если S не содержит нуля и соотношение $s, t \in S$ влечет за собой $st \in S$. Пусть S — мультипликативное подмножество кольца A. Тогда существует единственное кольцо $A[S^{-1}]$ (состоящее из дробей a/s ($a \in A$, $s \in S$)), такое, что естественное отображение $A \to A[S^{-1}]$ универсально среди гомоморфизмов кольца A, при которых образы элементов множества S становятся обратимыми. Кольцо $A[S^{-1}]$ называется *локализацией кольца A относительно S*.

Всякому A-модулю M можно сопоставить локализованный $A[S^{-1}]$-модуль $M[S^{-1}] = A[S^{-1}] \otimes_A M$. *Если модуль M конечно порожден, то $M[S^{-1}] = 0$ тогда и только тогда, когда $tM = 0$ для некоторого $t \in S$.*

Функтор $M \to M[S^{-1}]$ из категории A-модулей в категорию $A[S^{-1}]$-модулей является точным и обладает следующими свойствами: для любых A-модулей M и N естественное отображение

$$(M \otimes_A N)[S^{-1}] \to M[S^{-1}] \otimes_{A[S^{-1}]} N[S^{-1}]$$

является изоморфизмом, а естественное отображение

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)[S^{-1}] \to \mathrm{Hom}_{A[S^{-1}]}(M[S^{-1}], N[S^{-1}])$$

является изоморфизмом при условии, что модуль M конечно представим [1]).

Примеры. (1) Пусть S — множество всех элементов кольца A, не являющихся делителями нуля. Тогда гомоморфизм $A \to A[S^{-1}]$ инъективен и $A[S^{-1}]$ называется *полным кольцом частных кольца* A. Если A — область целостности, то $A[S^{-1}]$ — поле частных.

(2) Если $S = \{f^n \mid n \geqslant 0\}$ для некоторого $f \in A$, то мы будем писать A_f (или $A[1/f]$) или M_f для обозначения соответствующих локализаций.

(3) Идеал P кольца A является простым, если $S_P = A - P$ — мультипликативное множество. Соответствующие локализации обозначаются через A_P и M_P. В этом случае A_P имеет единственный максимальный идеал PA_P, т. е. A_P — *локальное кольцо*.

3.2. Локальные кольца. Пусть A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$. Пусть M — конечно порожденный A-модуль.

(a) *Если* $\mathfrak{m}M = M$, *то* $M = 0$.

В самом деле, пусть $x_1, \ldots, x_n$ — минимальное множество образующих модуля M, и предположим, что $n > 0$. Запишем $x_1 = \sum a_i x_i$ $(a_i \in \mathfrak{m})$. Тогда $(1 - a_1) x_1 = \sum_{i>1} a_i x_i$. Но элемент $1 - a_1$ обратим, так что уже $x_2, \ldots, x_n$ порождают M; противоречие.

(b) *Элементы* $x_1, \ldots, x_n \in M$ *порождают* M *тогда и только тогда, когда они порождают* M *по модулю* $\mathfrak{m}M$. *Следовательно, минимальное число образующих модуля* M *равно* $\dim_k(M/\mathfrak{m}M)$.

Для доказательства применяем утверждение (a) к модулю M/N, где N — подмодуль, порожденный элементами $x_1, \ldots, x_n$.

(c) *Если модуль* M *проективен, то* M *свободен.* Мы можем записать $A^n = M \oplus N$, так что $k^n = (M/\mathfrak{m}M) \oplus (N/\mathfrak{m}N)$. Поднимем

[1]) Для нётерова кольца A понятия конечно порожденного и конечно представимого модулей эквивалентны. — *Прим. перев.*

базис k^n в A^n так, чтобы он лежал в $M \cup N$. Согласно утверждению (b), мы получим тогда множество образующих модуля A^n. Ясно, что эти образующие будут базисом модуля A^n. Следовательно, модуль M свободен, так как он натянут на часть базиса модуля A^n.

3.3. Ниль-радикал; приведенные кольца. Нильпотентные элементы кольца A образуют идеал, который мы будем называть ниль-радикалом и обозначать через $\operatorname{nil} A$. Мы будем называть A *приведенным кольцом*, если $\operatorname{nil} A = \{0\}$.

Для любого идеала J мы следующим образом определим идеал $\sqrt{J}$: $\sqrt{J}/J = \operatorname{nil}(A/J)$. Тогда $\operatorname{nil} A = \sqrt{0}$. Кроме того, $\sqrt{J}$ совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих J, а если кольцо A нётерово, то $\sqrt{J}$ представим в виде пересечения конечного числа простых идеалов, содержащих J.

Если S — мультипликативное множество, то $\sqrt{J} \cdot A[S^{-1}] = \sqrt{J \cdot A[S^{-1}]}$. В частности, отсюда следует, что *A — приведенное кольцо тогда и только тогда, когда его полное кольцо частных является приведенным.*

3.4. $\operatorname{spec}(A)$. (См. Мамфорд [1] [1].) *Спектром* $X = \operatorname{spec}(A)$ кольца A называется множество всех простых идеалов кольца A, снабженное *топологией Зарисского*, в которой замкнутыми являются множества вида

$$V(J) = \{P \in X \mid J \subset P\}$$

для произвольного идеала J кольца A. Для подмножества Y пространства X положим $I(Y) = \bigcap_{P \in Y} P$. Как легко видеть, $\overline{Y} = V(I(Y))$. Кроме того, если J — идеал кольца А, то из п. АГ. 3.3 следует, что

$$I(V(J)) = \sqrt{J}.$$

Таким образом, замкнутые множества находятся во взаимно однозначном соответствии (при котором включения меняются на обратные) с теми идеалами J, для которых $J = \sqrt{J}$. Отсюда вытекает, что если кольцо A нётерово, то $\operatorname{spec}(A)$ — нётерово пространство.

Отображение $P \to \overline{\{P\}}$ — биекция множества X в множество неприводимых замкнутых подмножеств множества X. Таким образом, неприводимые компоненты пространства X соответствуют минимальным простым идеалам кольца A. (Комбинаторная) размерность пространства X (определяемая длиной цепей неприво-

[1]) См. также Шафаревич [1], гл. 5. — *Прим. ред.*

димых замкнутых множеств) называется *размерностью* Крулля кольца A и обозначается через $\dim A$. Таким образом,

$$\dim A = \dim X.$$

Если $f \in A$ и $P \in X$, то мы будем использовать запись $f(P)$ для обозначения образа элемента f в поле вычетов кольца A_P (которое, очевидно, является полем частных кольца A/P). В этих обозначениях дополнением множества $V(f)$ [1]) является множество

$$X_f = \{P \in X \mid f(P) \neq 0\}.$$

Оно называется *главным открытым множеством.* Для любого идеала J кольца A имеем $V(J) = \bigcap_{f \in J} V(f)$, так что главные открытые множества образуют базис открытых множеств рассматриваемой топологии.

Предположим, что α_0: $A \to B$ — гомоморфизм колец. Тогда α_0 индуцирует непрерывное отображение α: $Y = \operatorname{spec}(B) \to X$, где $\alpha(P) = \alpha_0^{-1}(P)$. В действительности $\alpha^{-1}(V(J)) = V(\alpha_0(J))$ [2]).

Примеры. (1) Если J — идеал кольца A, то гомоморфизм $A \to A/J$ индуцирует гомеоморфизм $\operatorname{spec}(A/J) \to V(J) \subset X$.

(2) Пусть S — мультипликативное множество кольца A. Тогда отображение $\operatorname{spec}(A[S^{-1}]) \to \operatorname{spec}(A)$ является гомеоморфизмом на подмножество $X_S = \{P \in X \mid P \cap S = \varnothing\}$.

(i) При $f \in A$ мы имеем гомеоморфизм $\operatorname{spec}(A_f) \to X_f$.

(ii) Если $P \in X$, то $\dim_P X = \dim \operatorname{spec}(A_P) = \dim A_P$ (размерность Крулля).

3.5. Носитель модуля. Пусть $X = \operatorname{spec}(A)$, где A — нётерово кольцо, и пусть M — конечно порожденный A-модуль. Тогда из п. АГ. 3.1 следует, что *носитель модуля* M

$$\operatorname{supp}(M) = \{P \mid M_P \neq 0\}$$

совпадает с замкнутым множеством $V(\operatorname{ann} M)$ [3]). В частности, $M = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp}(M) = \varnothing$.

Пусть f: $L \to M$ — гомоморфизм A-модулей. Для простого идеала P кольца A обозначим через f_P: $L_P \to M_P$ соответствующий гомоморфизм локализованных модулей. Так как функтор локализации является точным (см. п. АГ. 3.1), то множество тех простых идеалов, для которых гомоморфизм f_P сюръективен, есть (открытое) дополнение в X к множеству $\operatorname{supp}(M/\operatorname{im}(f))$. Применяя

---

[1]) Здесь $V(f) = V(fA)$. — *Прим. перев.*

[2]) Точнее, $\alpha^{-1}(V(J)) = V(\alpha_0(J)B)$. — *Прим. ред.*

[3]) Если M — некоторый A-модуль, то $\operatorname{ann} M = \{a \in A \mid aM = 0\}$. — *Прим. перев.*

это к гомоморфизму $\mathrm{Hom}_A(M, L) \to \mathrm{Hom}_A(M, M)$ и используя тот факт, что локализация сохраняет Hom'ы (п. АГ. 3.1), мы можем заключить, что множество U тех $P \in X$, для которых f_P — расщепляемый эпиморфизм [1]), открыто, и f — расщепляемый эпиморфизм тогда и только тогда, когда $U = X$.

Предположим, что гомоморфизм f сюръективен и модуль L свободен. Тогда из последнего замечания и утверждения (c) п. АГ. 3.2 вытекает, что множество

$$U = \{P \in X \mid M_P \text{ — свободный } A_P\text{-модуль}\}$$

открыто и M — проективный A-модуль тогда и только тогда когда $U = X$.

3.6. Целые расширения. (См. Бурбаки [2], гл. II, Зарисский и Самюэль [1], т. 1, гл. V.)

Пусть A — подкольцо кольца B. При $b \in B$ обозначим через $A[b]$ наименьшее подкольцо кольца B, содержащее кольцо A и элемент b. Элемент $b \in B$ называется *целым* над A, если $A[b]$ — конечно порожденный A-модуль, или, другими словами, если b — корень полинома с коэффициентами из A и старшим коэффициентом, равным 1. Целые над A элементы кольца B образуют подкольцо B', называемое *целым замыканием* кольца A в кольце B. Мы называем кольцо B *целым над* A, если $B' = B$. Будем говорить, что A *целозамкнуто* в B, если $B' = A$, и что кольцо A *нормально*, если A — приведенное кольцо, целозамкнутое в своем поле частных.

Предположим, что A и B — подкольца кольца C и $A \subset B \subset C$. Тогда C цело над A в том и только том случае, когда C цело над B и B цело над A.

Предположим, что кольцо B цело над A. Тогда отображение $\mathrm{spec}(B) \to \mathrm{spec}(A)$ *сюръективно и замкнуто*. Если B — конечно порожденная A-алгебра, то B — конечно порожденный A-модуль. Если B — область целостности, то каждый ненулевой идеал кольца B имеет ненулевое пересечение с A.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим для некоторого $0 \neq b \in B$ уравнение минимальной степени над A, которому удовлетворяет b, $b^n + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$. Тогда $a_0 = -b(a_{n-1}b^{n-2} + \ldots + a_1) \in$ $\in bB \cap A$, причем $a_0 \neq 0$, ибо в противном случае мы могли бы понизить степень уравнения.

3.7. Нётерова нормализация. (См. Зарисский и Самюэль [1], Ленг [1].) Будем называть k-алгебру A *аффинной*, если она конечно

[1]) Эпиморфизм $f\colon L \to M$ называется *расщепляемым*, если $\ker(f)$ — прямое слагаемое модуля L. Эпиморфизм f расщепляем тогда и только тогда, когда отображение $\mathrm{Hom}_A(M, L) \to \mathrm{Hom}_A(M, M)$, индуцированное эпиморфизмом f, является сюръективным. — *Прим. перев.*

порождена как k-алгебра. Такая алгебра является нётеровым кольцом.

Теорема. *Пусть $R=k[y_1, \ldots, y_m]$—аффинная область целостности над k, поле частных $k(y_1, \ldots, y_m)$ которой имеет степень трансцендентности n над k. Тогда существуют алгебраически независимые над k элементы $x_1, \ldots, x_n \in R$, такие, что кольцо R является целым над кольцом полиномов $k[x_1, \ldots, x_n]$. Если поле $k(y_1, \ldots, y_m)$ сепарабельно над k, то эти элементы $x_1, \ldots, x_n$ можно выбрать так, чтобы они образовывали сепарабельный базис трансцендентности поля $k(y_1, \ldots, y_m)$ над k.*

Доказательство[1]. Предположим, что имеется нетривиальное соотношение между $y_1, \ldots, y_m$

$$\sum a_{j_1, \ldots, j_m} y_1^{j_1} \ldots y_m^{j_m} = 0$$

с отличными от нуля коэффициентами из поля k. Пусть $d>0$ — целое число. Положим $x_2 = y_2 - y_1^d, \ldots, x_m = y_m - y_1^{d^{m-1}}$. После подстановки в предыдущее уравнение $y_i = x_i + y_1^{d^{i-1}}$ $(i=2, \ldots, n)$ получим $\sum a_{j_1, \ldots, j_m} y_1^{j_1+j_2d+ \ldots +j_m d^{m-1}} + f(y_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$, где f — многочлен, не содержащий чистых степеней y_1. Выберем теперь d достаточно большим (скажем, d больше любого показателя j, входящего в указанное выше уравнение). Тогда коэффициент при старшем относительно y_1 члене предыдущего уравнения отличен от нуля и принадлежит полю k, так что мы получаем целое уравнение для y_1 над $k[x_1, \ldots, x_m]$. Так как каждый из y_i $(i>1)$ содержится в $k[y_1, x_1, \ldots, x_m]$, то кольцо $k[y_1, \ldots, y_m]$ целое над кольцом $k[x_2, \ldots, x_m]$. Учитывая транзитивность целых расширений, мы можем уменьшать число y'ов до тех пор, пока не дойдем до алгебраически независимого множества y'ов.

Переходя ко второму утверждению, напомним, что сепарабельный базис трансцендентности поля $k(y_1, \ldots, y_m)$ над k можно выбрать уже среди элементов $y_1, \ldots, y_m$ (см. Зарисский и Самюэль [1], гл. II, § 13, теорема 30). Можно считать без ограничения общности, что $y_1, \ldots, y_n$ — упомянутый базис. Будем считать, что число d в предыдущем доказательстве является степенью числа p — характеристической экспоненты поля k (если $p=1$, то доказывать нечего). Тогда образ элемента x_i относительно любого k-дифференцирования совпадает с образом y_i. Следовательно, элементы $y_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют сепарабельный базис трансцендентности (см. п. АГ. 2.3), так что и элементы, полученные

[1]) При переводе добавлено доказательство первой части теоремы, которое было опущено в оригинале. — *Прим. перев.*

при доказательстве первой части теоремы образуют сепарабельный базис трансцендентности.

3.8. Теорема о нулях. (См. Мамфорд [1], гл. 1 [1]).) Пусть A — аффинная K-алгебра и $X = \max A$ — подпространство максимальных идеалов в $\operatorname{spec}(A)$.

Если e: $A \to K$ — гомоморфизм K-алгебр, то $\ker(e) \in X$, так что мы имеем естественное отображение [2]) φ: $\mathrm{Mor}_{K\text{-алг}}(A, K) \to X$.

Теорема о нулях (Nullstellensatz).

(1) φ — *биективное отображение.*

(2) *Подпространство* X *плотно в* $\operatorname{spec}(A)$. *Кроме того,* $F \to F \cap X$ — *биективное отображение множества замкнутых подмножеств пространства* $\operatorname{spec}(A)$ *на множество замкнутых подмножеств пространства* X. *Аналогичное утверждение справедливо также и для открытых множеств.*

Если $x \in X$, то через e_x мы будем обозначать такой гомоморфизм $A \to K$, что $x = \ker(e_x)$. Мы будем использовать также и функциональное обозначение: при $f \in A$ положим $f(x) = e_x(f)$. Таким образом, каждый элемент $f \in A$ определяет функцию $X \to K$. Если элементу $f \in A$ отвечает нулевая функция, то $f \in I(X) = \bigcap\limits_{x \in X} x$. Из части (2) теоремы вытекает, что $I(x) = I(\operatorname{spec}(A)) = \operatorname{nil} A$. Это означает, что функция на множестве X, соответствующая f, определяет f по модулю $\operatorname{nil} A$. Если A — приведенное кольцо, то мы можем, следовательно, рассматривать A как кольцо функций на X со значениями в K.

Мы будем использовать для X те же обозначения, что и для $\operatorname{spec}(A)$. Например, если $f \in A$, то $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Эти главные открытые множества составляют базис топологии пространства X.

Если M — некоторый A-модуль, то мы будем также использовать запись $\operatorname{supp}_X(M) = \{x \in X \mid M_x \neq 0\}$ или просто $\operatorname{supp} M$. Ввиду части (2) теоремы о нулях все замечания из п. АГ. 3.5 остаются справедливыми, если вместо $\operatorname{spec}(A)$ взять X.

Соответствие, установленное в части (2) теоремы о нулях, сопоставляет неприводимым замкнутым множествам неприводимые замкнутые множества и, следовательно, неприводимым компонентам — неприводимые компоненты. Если $x \in X$, то $\dim_x X = \dim_x(\operatorname{spec}(A)) = \dim A_x$. Кроме того, $\dim X = \dim \operatorname{spec}(A)$.

---

[1]) В другой форме теорема о нулях имеется у Ленга [1], гл. X, § 2, у Зарисского и Самюэля [1], т. 2, гл. VII. — *Прим. ред.*

[2]) Здесь через $\mathrm{Mor}_{K\text{-алг}}(A, K)$ автор обозначает множество K-гомоморфизмов алгебры A в K (иначе, $\mathrm{Hom}_{K\text{-алг}}(A, K)$). — *Прим. перев.*

3.9. Регулярные локальные кольца. (См. Зарисский и Самюэль [1], т. 1, гл. VIII, § 11.) Пусть A — нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$. Тогда минимальное число образующих идеала $\mathfrak{m}$ равно (см. п. АГ. 3.2) размерности факторкольца $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ над k. Имеет место следующее важное соотношение:

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \geqslant \dim A,$$

где $\dim A$ определяется как в п. АГ. 3.4. Если же в этом соотношении имеет место равенство, то локальное кольцо называется *регулярным*.

Из регулярности вытекают довольно сильные следствия, например в регулярном кольце *разложение на множители однозначно*.

Мы увидим в § АГ. 17, что если A — локальное кольцо точки x на многообразии V, то регулярность кольца A означает, что x — простая точка; это показывает важность понятия регулярности. Минимальное число образующих идеала $\mathfrak{m}$ оказывается равным числу локальных параметров многообразия V в точке x, а $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — это кокасательное пространство (см. ниже § АГ. 16) многообразия V в точке x.

§ 4. ПУЧКИ

(См. Мамфорд [1], гл. I, § 4[1].)

4.1. Предпучки[2]. Пусть X — топологическое пространство. Образуем категорию $\operatorname{top}(X)$, принимая в качестве объектов открытые множества пространства X, а в качестве морфизмов — естественные вложения одного множества в другое. Пусть, кроме того, C — некоторая категория. *Предпучком F на X со значениями в C* мы называем любой контравариантный функтор $U \to F(U)$, определенный на $\operatorname{top}(X)$ и принимающий значения в C. Иначе говоря, каждой паре открытых множеств $V \subset U$ сопоставляется C-морфизм

$$\operatorname{res}_V^U\colon F(U) \to F(V),$$

называемый „ограничением“, причем выполняются следующие условия: res_U^U является тождественным отображением для каждого открытого множества $U \subset X$, и если $W \subset V \subset U$ — открытые множества, то

$$\operatorname{res}_W^U = \operatorname{res}_V^U \circ \operatorname{res}_W^V.$$

[1]) См. также Годеман [1], гл. I, § 19, и гл. II. — *Прим. ред.*

[2]) При переводе в изложение этого пункта внесены небольшие изменения. — *Прим. ред.*

Морфизм предпучков $\varphi\colon F \to F'$ определяется как морфизм соответствующих функторов. Другими словами, φ есть совокупность всех морфизмов $\varphi_U\colon F(U) \to F'(U)$, для которых коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & F'(U) \\ {\scriptstyle \mathrm{res}_V^U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}_V^U} \\ F(V) & \xrightarrow[\varphi_V]{} & F'(V) \end{array}$$

Предположим теперь, что C — категория множеств, наделенных некоторой структурой, например структурой группы, кольца, модуля и т. п. Если отображения res_V^U для любых открытых множеств $V \subset U$ являются гомоморфизмами группы, кольца, модуля ... $F(U)$ в группу, кольцо, модуль ... $F(V)$ соответственно, то мы будем говорить, что F — *предпучок* групп, колец, модулей и т. п. В этом случае для каждого элемента $s \in F(U)$ имеет смысл выражение $\mathrm{res}_V^U(s) \subset F(V)$, и $\mathrm{res}_V^U(s)$ называется *ограничением* элемента $s \in F(U)$ на V. Соответствующим образом определяется морфизм $\varphi\colon F \to F'$ предпучков групп, колец, модулей и т. п., так что имеет смысл выражение $\varphi_U(s)$ при $s \in F(U)$.

Условие транзитивности, наложенное на морфизмы ограничения, позволяет для всякого $x \in X$ определить индуктивный предел

$$F_x = \operatorname*{ind\,lim}_{\substack{U\text{ — окрестности}\\ \text{точки } x}} F(U),$$

называемый *слоем* предпучка F над точкой x.

Если U — открытое множество в пространстве X, то $\mathrm{top}(U)$ — подкатегория категории $\mathrm{top}(X)$, что позволяет рассмотреть ограничение предпучка F на множество U. Полученный предпучок на U обозначается через $(U, F \mid U)$.

4.2. Пучки. Пусть F — предпучок на X со значениями в некоторой категории C „множеств со структурой". Тогда F называется *пучком*, если выполняется следующая „аксиома пучка": для любого покрытия открытого множества $U \subset X$ открытыми множествами $(U_i)_{i \in I}$ последовательность множеств

$$F(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_i F(U_i) \overset{\beta}{\underset{\gamma}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

является точной [1]).

---

[1]) Здесь и в дальнейшем произведение $\prod$ понимается в смысле теории категорий (см. Ленг [1], гл. I, § 7). — *Прим. перев.*

Разъяснение. „Точность“ означает, что α индуцирует биекцию множества $F(U)$ на множество элементов, на которых отображения β и γ согласованы. Таким образом, если, например, F — предпучок абелевых групп, то $\alpha(F(U))$ есть ядро отображения $\beta-\gamma$.

Здесь отображение α индуцируется ограничениями $F(U)\to F(U_i)$ $(i \in I)$. Подобным же образом ограничения $F(U_i)\to F(U_i \cap U_j)$ $(j \in I)$ индуцируют отображение $F(U_i)\to \prod_j F(U_i \cap U_j)$. Произведение этих отображений по всем $i \in I$ дает отображение β. Аналогично, исходя из отображений $F(U_j)\to F(U_i \cap U_j)$, получаем отображения $F(U_j)\to \prod_i F(U_i \cap U_j)$, произведение которых по всем $j \in I$ дает отображение γ.

В явном виде аксиома пучков гласит, что для любых элементов $s_i \in F(U_i)$, таких, что $s_i \mid U_i \cap U_j = s_j \mid U_i \cap U_j$ при всех $i, j \in I$, существует один и только один элемент $s \in F(U)$, для которого $s \mid U_i = s_i$ при всех $i \in I$.

Пример. Пусть $F(U)$ — кольцо всех непрерывных функций на U с вещественными значениями. Тогда, очевидно, F является пучком (коммутативных колец) относительно ограничения функций.

4.3. Ассоциированный пучок. Пусть F — предпучок на X со значениями в некоторой категории C „множеств со структурой“. Тогда имеется пучок F', называемый пучком, *ассоциированным с* F, и морфизм f: $F\to F'$, такой, что всякий морфизм предпучка F в произвольный пучок единственным образом пропускается через морфизм f.

Иначе говоря, индуцированное морфизмом f отображение

$$\mathrm{Mor}(F', G)\to \mathrm{Mor}(F, G)$$

биективно, каков бы ни был пучок G.

Грубо говоря, пучок F' можно построить в два шага. Сначала строим предпучок $F_1(U)$, профакторизовав предпучок $F(U)$ по модулю отношения эквивалентности, в котором элементы $s, t \in F(U)$ считаются эквивалентными, если их ограничения согласованы на каком-либо покрытии множества U открытыми множествами. Затем образуем пучок F', добавляя к каждому множеству $F_1(U)$ все элементы, полученные из элементов $s_i \in U_i$ при некотором покрытии множества U открытыми подмножествами U_i, согласованными в том смысле, что $s_i \mid U_i \cap U_j = s_j \mid U_i \cap U_j$. Эта процедура имеет смысл благодаря шагу 1.

Если $x \in X$, то морфизм слоев $F_x \to F'_x$ биективен.

Предпучки абелевых групп или модулей образуют абелеву категорию — с очевидным образом определенными понятиями ядра, коядра, точной последовательности и т. п. Так, если

$f: F \to G$ — морфизм предпучков, то $(\ker(f))(U) = \ker(F(U) \to G(U))$ и $(\operatorname{coker} f)(U) = \operatorname{coker}(F(U) \to G(U))$. Если F и G — пучки, то $\ker(f)$ — также пучок. Однако $\operatorname{coker}(f)$ уже не обязан быть пучком. Коядро морфизма f в категории пучков есть по определению пучок, ассоциированный с предпучком коядра.

Можно показать, что категория пучков абелевых групп абелева. Последовательность пучков $F \to G \to H$ точна тогда и только тогда, когда последовательность слоев $F_x \to G_x \to H_x$ точна для всех $x \in X$.

§ 5. АФФИННЫЕ K-СХЕМЫ И ПРЕДМНОГООБРАЗИЯ [1]

5.1. Топологическое пространство X вместе с пучком $\mathfrak{O}_X$ K-алгебр на X, слои которого — локальные кольца, называется *K-пространством*. При $x \in X$ слой над x мы обозначаем через $\mathfrak{O}_{X,x}$ или просто $\mathfrak{O}_x$, когда из контекста ясно, о каком пространстве X идет речь. Максимальный идеал слоя $\mathfrak{O}_x$ обозначается через $\mathfrak{m}_x$, а его поле вычетов — через $K(x)$. Часто вместо $(X, \mathfrak{O}_X)$ мы будем писать просто X, коль скоро это не приводит к путанице.

Морфизм K-пространств $(Y, \mathfrak{O}_Y) \to (X, \mathfrak{O}_X)$ состоит из непрерывных функций $\alpha: Y \to X$ вместе с гомоморфизмами K-алгебр

$$\alpha_V^U: \mathfrak{O}_X(U) \to \mathfrak{O}_Y(V)$$

для всех открытых множеств $U \subset X$ и $V \subset Y$, таких, что $\alpha(V) \subset U$. При этом требуется, чтобы эти отображения были совместимы с соответствующими гомоморфизмами ограничений в $\mathfrak{O}_X$ и $\mathfrak{O}_Y$. При $y \in Y$ можно перейти к пределу по окрестностям V точки y и окрестностям U точки $x = f(y)$ и получить гомоморфизм слоев $\alpha_y: \mathfrak{O}_x \to \mathfrak{O}_y$. Кроме того, требуется, чтобы это был всегда „локальный гомоморфизм“, т. е. чтобы $\alpha_y(\mathfrak{m}_x) \subset \mathfrak{m}_y$.

5.2. Аффинная K-схема $\operatorname{spec}_K(A)$. Напомним, что K-алгебра называется *аффинной*, если она конечно порождена как алгебра. Подпространство максимальных идеалов $X = \max(A)$ ее спектра $\operatorname{spec}(A)$ обозначается через $\operatorname{spec}_K(A)$. Из теоремы о нулях (п. АГ. 3.8) вытекает, что имеет место каноническая биекция $x \to \ker(e_x)$

$$X = \operatorname{spec}_K(A) \quad \text{на} \quad \operatorname{Hom}_{K\text{-алг}}(A, K).$$

Мы используем также функциональное обозначение

$$f(x) = e_x(f) \qquad (x \in X, f \in A).$$

[1]) **См. Шафаревич [1], гл. V, § 3.** — ***Прим. ред.***

Полученная функция f: $X \to K$ (при $f \in A$) определяет f по модулю ниль-радикала алгебры A (см. п. АГ. 3.8), так что если A — приведенное кольцо, то его можно отождествить с кольцом функций на X со значениями в K.

Рассмотрим теперь K-пространство $(X, \tilde{A})$, где $\tilde{A}$ — пучок, ассоциированный с предпучком $U \to A[S(U)^{-1}]$. Здесь множество U открыто в X и $S(U)$ — множесто всех функций $f \in A$, отличных от нуля в каждой точке множества U. Легко видеть, что слой пучка $\tilde{A}$ в точке $x \in X$ совпадает с локальным кольцом A_x, так что $(X, \tilde{A})$ — действительно K-пространство. Символом $\operatorname{spec}_K(A)$ будет обозначаться как X, так и K-пространство $(X, \tilde{A})$; K-пространство, изоморфное пространству такого типа, будем называть *аффинной K-схемой*.

В случае когда A — область целостности с полем частных L, локальные кольца A_x содержатся в L и пучок $\tilde{A}$ можно описать следующим образом: $\tilde{A}(U) = \bigcap\limits_{x \in U} A_x$.

Гомоморфизм α: $A \to B$ аффинных K-алгебр индуцирует непрерывную функцию α': $Y \to X$, где $Y = \operatorname{spec}_K(B)$. Если $U \subset X$ и $V \subset Y$ — открытые множества, причем $\alpha'(V) \subset U$, то $\alpha(S(U)) \subset \subset S(V)$, так что имеет место естественный гомоморфизм $A[S(U)^{-1}] \to \to B[S(V)^{-1}]$. Такие гомоморфизмы индуцируют морфизм соответствующих K-пространств $(Y, \tilde{B}) \to (X, \tilde{A})$; таким образом, отображение $A \to \operatorname{spec}_K(A)$ оказывается контравариантным функтором из категории аффинных K-алгебр в категорию K-пространств.

5.3. K-схемы и предмногообразия. Под *K-схемой* мы понимаем K-пространство $(X, \mathfrak{O}_X)$, такое, что X имеет *конечное* покрытие открытыми множествами U, причем $(U, \mathfrak{O}_X | U)$ — аффинная K-схема. Отметим, что при этих условиях X — нётерово пространство. Если $(X, \mathfrak{O}_X)$ — приведеннное K-пространство, т. е. если для каждого $x \in X$ локальное кольцо $\mathfrak{O}_{X, x}$ не имеет отличных от нуля нильпотентных элементов, то мы называем $(X, \mathfrak{O}_X)$ *предмногообразием*. Аффинное K-пространство $X = \operatorname{spec}_K(A)$ тогда и только тогда является предмногообразием, когда A — приведенное кольцо; в этом случае мы называем K-пространство $\operatorname{spec}_K(A)$ *аффинным многообразием*.

Предостережения. (1) K-схема *не* является схемой в обычном смысле. Она была бы схемой, если бы (в аффинном случае) вместо $\operatorname{spec}_K(A) = \max(A)$ мы использовали весь $\operatorname{spec}(A)$. После этого изменения определение K-схемы соответствовало бы понятию „схемы конечного типа над K“ (или над $\operatorname{spec}(K)$).

(2) Наше понятие предмногообразия, в сущности, то же самое, что и у Мамфорда [1], гл. I; однако мы не требуем, чтобы пространство X было неприводимым.

Рассмотрим теперь аффинную K-схему $\operatorname{spec}_K(K)$, состоящую из одной точки со структурным пучком K. Морфизм $\operatorname{spec}_K(K) \to X$ выделяет в X точку x и согласованные гомоморфизмы K-алгебр $\mathfrak{O}_X(U) \to K$ для всех окрестностей U точки x. Последнее соответствует гомоморфизму K-алгебры $\mathfrak{O}_x$ в K, причем такой гомоморфизм имеется только один, а именно $f \to f(x)$. Таким образом, точка x полностью определяет этот морфизм, т. е. мы можем отождествить $\operatorname{Mor}_{K\text{-схем}}(\operatorname{spec}_K(K), X)$ с X (как множества).

5.4. Теорема. *Пусть $X = \operatorname{spec}_K(A)$ — аффинная K-схема и Y — произвольная K-схема. Тогда естественное отображение $A \to \tilde{A}(X)$ является изоморфизмом, и отображение*

$$\operatorname{Mor}_{K\text{-схем}}(Y, X) \to \operatorname{Mor}_{K\text{-алг}}(A, \mathfrak{O}_Y(Y))$$

биективно. В частности, $A \to \operatorname{spec}_K(A)$ — контравариантная эквивалентность из категории аффинных K-алгебр в категорию аффинных K-схем.

По поводу этой эквивалентности см. Мамфорд [1], гл. II, § 1—2.

5.5. Квазикогерентные модули. (См. Мамфорд [1], гл. III, § 1—2 [1]).) Пусть A — аффинная K-алгебра. Если M — произвольный A-модуль, то пучок $\tilde{M}$ на $\operatorname{spec}_K(A)$, ассоциированный с предпучком $U \to A[S(U)^{-1}] \otimes_A M$, есть пучок $\tilde{A}$-модулей, или просто $\tilde{A}$-модуль. Более того, $M \to \tilde{M}$—точный функтор из категори A-модулей в категорию $\tilde{A}$-модулей.

Пусть Y — некоторая K-схема. Мы говорим, что $\mathfrak{O}_Y$-модуль (или пучок $\mathfrak{O}_Y$-модулей) F *квазикогерентен*, если схема Y может быть покрыта аффинными K-схемами $U = \operatorname{spec}_K(A)$, на которых ограничение $F \mid U$ изоморфно некоторому пучку $\tilde{M}$. Если K-схемы U можно выбрать так, что каждый A-модуль M конечно порожден (соответственно свободен), то мы говорим, что F — *когерентный* (соответственно *локально свободный*) $\mathfrak{O}_Y$-модуль. Если $\mathfrak{O}_Y$-модуль F когерентен, то из п. АГ. 3.5 легко следует, что множество

$$\operatorname{supp}(F) = \{y \in Y \mid F_y \neq 0\}$$

замкнуто и, кроме того, множество $\{y \in Y \mid F_y$ — свободный $\mathfrak{O}_y$-модуль$\}$ открыто.

[1]) См. также Шафаревич [1], гл. VI, § 3. — *Прим. ред.*

Теорема. *Пусть* $X = \operatorname{spec}_K(A)$ — *аффинная* K-*схема и* $f \in A$. *Тогда для любого* A-*модуля* M *естественное отображение* $M_f \to \tilde{M}(X_f)$ — *изоморфизм. В частности,*

$$(\operatorname{spec}_K(A_f),\ \tilde{A}_f) \to (X_f,\ \tilde{A}\,|\,X_f)$$

является изоморфизмом K-*схем. Более того,* $M \to \tilde{M}$ — *эквивалентность из категории* A-*модулей в категорию квазикогерентных* $\tilde{A}$-*модулей. Далее,* $\tilde{A}$-*модуль* $\tilde{M}$ *когерентен тогда и только тогда, когда* A-*модуль* M *конечно порожден. В этом случае* $\tilde{M}$ *локально свободен тогда и только тогда, когда* M — *проективный* A-*модуль.*

5.6. Замкнутые вложения [1]. (См. Мамфорд [1], гл. II, § 5.) Морфизм K-схем $\alpha\colon Y \to X$ называется *замкнутым вложением*, если α отображает Y гомеоморфно в замкнутое подпространство пространства X и если локальные гомоморфизмы $\mathfrak{O}_{X,\,\alpha(y)} \to \mathfrak{O}_{Y,\,y}$ сюръективны для каждого $y \in Y$.

Если $\mathfrak{J}$ — квазикогерентный пучок идеалов в $\mathfrak{O}_X$ и $Y = \operatorname{supp}(\mathfrak{O}_X/\mathfrak{J})$, то множество Y замкнуто, и пучок $\mathfrak{O}_X/\mathfrak{J}$ получается путем „присоединения нулей“ к пучку $\mathfrak{O}_Y$ на Y, для которого имеется естественное замкнутое вложение $(Y, \mathfrak{O}_Y) \to (X, \mathfrak{O}_X)$. Мы называем Y *замкнутой подсхемой* схемы X, определенной пучком $\mathfrak{J}$.

В случае когда схема $X = \operatorname{spec}_K(A)$ аффинна, каждый такой пучок $\mathfrak{J}$ имеет вид $\tilde{I}$ для подходящего идеала I кольца A, и Y оказывается в точности аффинной подсхемой:

$$\operatorname{spec}_K(A/I) \hookrightarrow \operatorname{spec}_K(A).$$

Теорема. *Отображение* $I \to \operatorname{spec}_K(A/I)$ — *биекция множества идеалов кольца* A *в множество замкнутых подсхем схемы* $\operatorname{spec}_K(A)$. *В частности, каждая замкнутая подсхема аффинной схемы аффинна.*

Открытое вложение есть морфизм, изоморфный морфизму вида $(U, \mathfrak{O}_X\,|\,U) \to (X, \mathfrak{O}_X)$, где X — некоторая K-схема и U — открытое множество. Мы называем $(U, \mathfrak{O}_X\,|\,U)$ *открытой подсхемой* схемы $(X, \mathfrak{O}_X)$. Замкнутая подсхема открытой подсхемы называется *локально замкнутой подсхемой.*

§ 6. ПРОИЗВЕДЕНИЯ; МНОГООБРАЗИЯ

6.1. Произведения существуют. (См. Мамфорд [1], гл. I, § 6 [2].) Пусть X и Y — произвольные K-схемы. *Произведение* $X \times Y$ характеризуется как K-схема с парой морфизмов $\operatorname{pr}_X\colon X \times Y \to X$ и $\operatorname{pr}_Y\colon X \times Y \to Y$, таких, что, каковы бы ни были K-схема Z и мор-

[1]) В оригинале „immersion“, что иногда переводят термином „погружение“. — *Прим. перев.*

[2]) См. также Шафаревич [1], гл. V, § 4, гл. VI, § 1. — *Прим. ред.*

физмы $\varphi: Z \to X$ и $\psi: Z \to Y$, найдется единственный морфизм $h: Z \to X \times Y$, удовлетворяющий условиям $\varphi = \mathrm{pr}_X \circ h$, $\psi = \mathrm{pr}_Y \circ h$. Если взять $Z = \mathrm{spec}_K(K)$, то легко увидеть, что произведение $X \times Y$ как множество является обычным декартовым произведением множеств X и Y. Из теоремы п. АГ. 5.4 вытекает, что произведение аффинных K-схем существует и равно

$$\mathrm{spec}_K(A \otimes_K B)$$

— следует использовать тот факт, что $\otimes_K$ является копроизведением [1]) в категории аффинных K-алгебр.

Имеет место более общее утверждение:

Теорема. *Произведение $X \times Y$ существует и обе проекции являются открытыми отображениями. Если $U \subset X$ и $V \subset Y$ — открытые подсхемы, то $U \times V \to X \times Y$ — открытое вложение.*

Используя эту теорему и описание произведения в аффинном случае, легко показать, что локальное кольцо произведения $X \times Y$ в точке (x, y) является локализацией кольца $\mathfrak{O}_x \otimes_K \mathfrak{O}_y$ относительно идеала $\mathfrak{m}_x \otimes \mathfrak{O}_y + \mathfrak{O}_x \otimes \mathfrak{m}_y$.

6.2. Многообразия. Пусть X — некоторая K-схема. Пара $(1_X, 1_X)$ определяет диагональный морфизм $d: X \to X \times X$, и мы называем схему X *отделимой*, если d — замкнутое вложение. Отделимое предмногообразие называется (*алгебраическим*) *многообразием.*

Например,

(a) аффинное многообразие является многообразием;

(b) локально замкнутое подпредмногообразие многообразия является многообразием;

(c) произведение двух многообразий является многообразием.

Пусть $\alpha, \beta: Y \to X$ — два морфизма K-схем X и Y, и пусть

$$\Gamma^Y_{\alpha,\beta} = \{y \in Y \mid \alpha(y) = \beta(y)\}.$$

Пара (α, β) определяет морфизм $\gamma: Y \to X \times X$, и ясно, что $\Gamma^Y_{\alpha,\beta} = \gamma^{-1}(d(X))$. Следовательно, если схема X отделима, то множество $\Gamma^Y_{\alpha,\beta}$ замкнуто. В частности, если морфизмы α и β совпадают на плотном подмножестве, то они совпадают во всех точках.

Применив эти замечания к морфизмам $\alpha \circ \mathrm{pr}_Y$, pr_X схемы $Y \times X$, придем к выводу, что если X — отделимая K-схема, то график морфизма α

$$(y, \alpha(y)) = \{(y, x) \in Y \times X \mid \alpha \circ \mathrm{pr}_Y(y) = \mathrm{pr}_X(x)\} = \Gamma^{Y \times X}_{\alpha \circ \mathrm{pr}_Y,\, \mathrm{pr}_X}$$

замкнут.

6.3. Регулярные функции и подмногообразия. Пусть $(X, \mathfrak{O}_X)$ — алгебраическое многообразие. Если U — открытое подмножество

[1]) См. Ленг [1], гл. I, § 7. — *Прим. перев.*

в X, то вместо $\mathfrak{O}_X(U)$ мы будем писать $K[U]$. Элементы f кольца $K[U]$ можно отождествить с функциями на U со значениями в K, которые мы будем называть *регулярными функциями*. Тогда морфизм res_V^U: $K[U] \to K[V]$ соответствует ограничению функций. При $x \in U$ отображение $f \to f(x) = e_x(f)$ является композицией гомоморфизма $K[U] \to \mathfrak{O}_x$ с гомоморфизмом кольца $\mathfrak{O}_x$ в его поле вычетов $K(x) = K$.

Если множество U открыто в X, то $(U, \mathfrak{O}_X | U)$ является многообразием, которое называется *открытым подмногообразием* многообразия X. В том случае, когда U аффинно, $U = \operatorname{spec}_K(K[U])$.

Каждому подпространству Y пространства X однозначно соответствует *приведенная* подсхема $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ схемы X. Именно, $\mathfrak{O}_Y$ есть пучок, ассоциированный с предпучком $(U \cap Y) \to K[U]/I_U(Y)$, где $I_U(Y)$ — идеал всех тех функций на U, которые обращаются в нуль на $Y \cap U$. (Таким образом, если подмногообразие U аффинно, $Y \cap U$ — это в точности $\operatorname{spec}_K(K[U]/I_U(Y))$.) Это позволяет нам рассматривать замкнутое подпространство Y многообразия X как *замкнутое подмногообразие*.

Тогда *локально замкнутым многообразием* естественно называть замкнутое подмногообразие открытого многообразия.

Пусть α: $Y \to X$ — морфизм многообразий. Тогда α — непрерывная функция, и всякий раз, когда U и V — открытые подмножества многообразий X и Y соответственно и $\alpha(V) \subset U$, существует коморфизм

$$\alpha_V^U: K[U] \to K[V],$$

такой, что

$$\alpha_V^U(f)(y) = f(\alpha(y)),$$

или

$$\alpha_V^U(f) = f \circ \alpha$$

для любых $f \in K[U]$ и $y \in V$. Так как мы здесь имеем дело с кольцами функций, то морфизм α (рассматриваемый как отображение пространств) определяет гомоморфизмы пучков α_V^U. Мы будем обозначать их просто через α_0 (для всех U и V) и называть α_0 *коморфизмом* (коморфизмами) морфизма α.

Отметим, что подобным образом коморфизмы α_0 на кольцах всех функций со значениями в K могут быть определены для любого отображения α множества Y в множество X. Условие, что α — морфизм многообразий, можно сформулировать в следующем виде: (i) отображение α непрерывно и (ii) для открытых подмножеств $U \subset X$ и $V \subset Y$, таких, что $\alpha(V) \subset U$, имеет место включение $\alpha_0 K[U] \subset K[V]$.

6.4. Локальные кольца на многообразии. Рассмотрим локальное кольцо $\mathfrak{O}_x$ точки x на многообразии V. Оно отражает

„локальные свойства“ многообразия V вблизи точки x. Например, если взять в качестве окрестности точки x аффинное многообразие $V = \operatorname{spec}_K(A)$, то $\mathfrak{O}_x$ — локальное кольцо кольца A относительно максимального идеала $\mathfrak{m} = \ker(e_x)$, и из свойств локализации вытекает, что простые идеалы кольца $\mathfrak{O}_x$ взаимно однозначно соответствуют простым идеалам кольца A, содержащимся в $\mathfrak{m}$, т. е. неприводимым подмногообразиям многообразия V, содержащим точку x. Отсюда следует, что $\dim_x V$ (в смысле п. АГ. 1.4) равна размерности Крулля кольца $\mathfrak{O}_x$.

Заметим еще, что неприводимые компоненты многообразия V, содержащие точку x, соответствуют минимальным простым идеалам кольца $\mathfrak{O}_x$. Таким образом, точка x принадлежит лишь одной неприводимой компоненте многообразия V тогда и только тогда, когда $\mathfrak{O}_x$ — область целостности.

§ 7. ПРОЕКТИВНЫЕ И ПОЛНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

7.1. Аффинные пространства V и K^n. Пусть V — конечномерное векторное пространство (над K). Тогда симметрическая алгебра $A = S_K(V^*)$ двойственного пространства V^* пространства V является градуированной алгеброй „полиномиальных функций“ на V, порожденной линейными функциями первой степени. Из универсального свойства симметрической алгебры вытекает, что

$$\operatorname{Hom}_{K\text{-алг}}(S_K(V^*), K) = \operatorname{Hom}_{K\text{-мод}}(V^*, K) = (V^*)^* = V.$$

Это позволяет отождествить V с точками аффинного многообразия $\operatorname{spec}_K(A)$.

Если $V = K^n$, то алгебра A изоморфна кольцу полиномов $K[T_1, \ldots, T_n]$ от n переменных, где $T_i(t) = t_i$ при $t = (t_1, \ldots, t_n) \in K^n$.

7.2. Проективные пространства $\mathcal{P}(V)$ и $\mathbf{P}_n$. (См. Мамфорд [1], гл. I, § 5[1].) На множестве прямых в пространстве V можно задать структуру многообразия, которое мы будем называть проективным пространством на V и обозначать через $\mathcal{P}(V)$. Часто вместо $\mathcal{P}(K^{n+1})$ мы будем писать $\mathbf{P}_n$.

Удобно описывать множество $\mathcal{P}(V)$ как множество классов эквивалентности $[x]$ ненулевых векторов $x \in V$, если принять $[x] = [y]$, когда $y = tx$ для некоторого $t \in K^*$. Пусть $\pi\colon V - \{0\} \to \mathcal{P}(V)$ — соответствующая проекция, т. е. $\pi(x) = [x]$. Топологизируем проективное пространство $\mathcal{P}(V)$ так, чтобы отображение π было непрерывно и открыто, когда $V - \{0\}$ рассматривается как открытое подмногообразие многообразия V; именно, будем считать множество $U \subset \mathcal{P}(V)$ открытым тогда и только тогда, когда множество $\pi^{-1}(U)$ открыто.

---

[1]) См. также Шафаревич [1], гл. I, § 4, 5. — *Прим. ред.*

Пусть, как и выше, $A = S_K\ (V^*)$ — симметрическая алгебра на пространстве V^*, и S — мультипликативное множество отличных от нуля однородных элементов в алгебре A. Тогда $A[S^{-1}]$ — также градуированное кольцо, в котором члены нулевой степени можно описать следующим образом:

$$L = \left\{ f/g \ \middle|\ \begin{array}{l} f \text{ и } g \text{ — однородные элементы кольца } A \\ \text{одинаковой степени и } g \neq 0. \end{array} \right\}$$

При $[x] \in \mathscr{P}(V)$ положим

$$\mathfrak{O}_{[x]} = \{f/g \in L \mid g(x) \neq 0\}.$$

Заметим сначала, что условие $g(x) \neq 0$ зависит только от $[x]$, ибо если d — степень элемента g, то $g(tx) = t^d g(x)$ для всех $t \in K^*$. Отсюда следует, что $f(x)/g(x)$ зависит только от $[x]$, так как f также имеет степень d. Таким образом, элементы f/g кольца L можно считать функциями на множестве тех $[x] \in \mathscr{P}(V)$, для которых $g(x) \neq 0$. При этом $\mathfrak{O}_{[x]}$ — *локальное* кольцо всех таких функций, определенных в точке $[x]$.

Пусть U — открытое множество пространства $\mathscr{P}(V)$. Положим

$$\mathfrak{O}_{\mathscr{P}(V)}(U) = \bigcap_{[x] \in U} \mathfrak{O}_{[x]}$$

и определим отображения ограничения как вложения, если $U' \subset U$. Мы получаем пучок на пространстве $\mathscr{P}(V)$, и $(\mathscr{P}(V), \mathfrak{O}_{\mathscr{P}(V)})$ — проективное многообразие, которое мы хотели построить.

Пусть $V = K^{n+1}$, так что $A = K[T_0, T_1, \ldots, T_n]$, где $T_i(t) = t_i$ при $t = (t_0, \ldots, t_n) \in K^{n+1}$. Хотя T_i и не являются функциями на пространстве $\mathbf{P}_n = \mathscr{P}(K^{n+1})$, выражение $\mathbf{P}_{n, T_i} = \{[t] \in \mathbf{P}_n \mid T_i(t) \neq 0\}$ имеет смысл.

Более того, имеет место биекция $\mathbf{P}_{n, T_i} \to K^n$, сопоставляющая элементу $[t_0, \ldots, t_n] \in \mathbf{P}_{n, T_i}$ элемент

$$\left(\frac{t_0}{t_i}, \ldots, \frac{\hat{t}_i}{t_i}, \ldots, \frac{t_n}{t_i}\right) = (s_1, \ldots, s_n) \in K^n\,[1]).$$

Легко показать, что это изоморфизм открытого подмногообразия $\mathbf{P}_{n, T_i}$ многообразия $\mathbf{P}_n$ на аффинное пространство K^n. Из того факта, что множества $\mathbf{P}_{n, T_i}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ покрывают $\mathbf{P}_n$, вытекает, что $\mathbf{P}_n$ — по меньшей мере предмногообразие.

7.3. Проективные многообразия. Многообразие, изоморфное замкнутому подмногообразию проективного пространства,

[1]) $\hat{t}_i$ означает исключение i-й координаты. — *Прим. перев.*

называется *проективным*. Многообразие, изоморфное открытому подмногообразию проективного многообразия, называется *квазипроективным*. Так как аффинные пространства являются открытыми подмногообразиями проективных пространств, то все аффинные многообразия квазипроективны.

Произведения проективных многообразий являются проективными многообразиями. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что каждое произведение $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_m$ является проективным многообразием. Это в свою очередь вытекает из того очевидного факта, что имеется замкнутое вложение

$$\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_m \to \mathbf{P}_{(n+1)(m+1)-1} = \mathbf{P}_{nm+n+m},$$

задаваемое формулой

$$([x_i], [y_i]) \to ([x_i y_i]).$$

7.4. Полные многообразия. (См. Мамфорд [1], гл. I, § 9[1]).) Многообразие V называется *полным*, если для любого многообразия X проекция pr_X: $X \times V \to X$ является замкнутым отображением. (В категории хаусдорфовых топологических пространств аналогичное свойство характеризует компактные пространства. Таким образом, „полнота“ является для многообразий аналогом „компактности“ для топологических пространств.)

Непосредственно из определения следует, что *замкнутое подмногообразие полного многообразия является полным многообразием и что произведение полных многообразий является полным многообразием.*

Пусть V — полное многообразие и α: $V \to X$ — морфизм многообразий. Тогда график $\Gamma_\alpha \subset V \times X$ морфизма α есть замкнутое множество, так что его проекция в X, которая совпадает с $\alpha(V)$, — замкнутое подмножество многообразия X. Если α — сюръективный морфизм, то, как следует из определения, X — также полное многообразие. Применяя этот факт к $\alpha(V)$, заключаем, что *образ морфизма полного многообразия замкнут и является полным многообразием.*

Аффинная прямая K есть открытое, но не замкнутое подмножество проективной прямой $\mathbf{P}_1$, так что K не является полным многообразием. Так как остальные замкнутые подмножества в K конечны, то всякое связное полное подмногообразие многообразия K состоит из одной точки.

Если V — связное полное многообразие, то $K[V] = K$, т. е. каждая регулярная функция f на V постоянна. Это следует из того факта, что $f(V)$ — связное полное подмногообразие многообразия K.

---

[1]) См. также Шафаревич [1], гл. I, § 5. — *Прим. ред.*

Из сделанных замечаний легко вытекает, что *морфизм связного полного многообразия в аффинное многообразие обязан быть константой*. В самом деле, его образ, будучи замкнутым множеством, является одновременно и полным и аффинным многообразием, а аффинное многообразие, регулярные функции на котором постоянны, состоит из одной точки.

Полные многообразия существуют; более того, справедлива

Теорема. *Всякое проективное многообразие является полным.*

§ 8. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

8.1. Рациональные функции. Пусть V — алгебраическое многообразие. Открытые плотные подмножества $U \subset V$ образуют относительно включения обратный спектр[1]), так что их кольца функций $K[U]$ образуют прямой спектр. Предел прямого спектра[1])

$$K(V) = \operatorname{ind} \lim_{\substack{U \text{ открыто и} \\ \text{плотно в } V}} K[U]$$

называется кольцом *рациональных функций* на V. Легко установить следующие свойства:

(a) Если U — открытое плотное подмножество в V, то отображение $K[U] \to K(V)$ инъективно; мы будем рассматривать его как вложение. Кроме того, $K(U) = K(V)$.

(b) Функция $f \in K(V)$ называется *регулярной в точке* x, если $f \in K[U]$ для подходящей окрестности U точки x (окрестность U открыта и плотна в V). Множество U_0 всех точек x, в которых определена функция f, называется областью определения функции f. Ясно, что U_0 — открытое плотное подмножество в V, для которого $f \in K[U_0]$, и что U_0 содержит всякое открытое плотное подмножество с этим свойством.

(c) Предположим, что многообразие V неприводимо. Тогда каждое его открытое плотное подмножество U само неприводимо. Если функция $f \in K[U]$ отлична от нуля, то $U_f = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ — непустое открытое множество, плотное в V (ввиду неприводимости), и $1/f \in K[U_f]$. Отсюда следует, что $K(V)$ — поле; оно называется *полем функций* на V.

(d) В общем случае пусть $V_1, \ldots, V_n$ — неприводимые компоненты многообразия V. Из п. АГ. 1.2 вытекает существование

---

[1]) Употребляются также термины «индуктивный» и «проективный» спектры, «индуктивный» и «проективный» пределы. Определение индуктивного предела можно найти, например, у Годемана [1], § 1, п. 6. См. также Картан, Эйленберг [1], стр. 130. — *Прим. перев.*

открытого плотного подмножества $U \subset V$, такого, что $U_i = U \cap V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — попарно непересекающиеся открытые в V подмножества. Используя утверждения (a) и (c), получаем, что

$$K(V) = K(U) = \prod K(U_i) = \prod K(V_i),$$

т. е. $K(V)$ — произведение полей функций неприводимых компонент многообразия V.

(e) Если $V = \operatorname{spec}_K(A)$ — аффинное многообразие, $A = K[V]$, то $K(V)$ — полное кольцо частных кольца A,

8.2. Доминантные морфизмы. Кольцо $K(V)$ рациональных функций на V зависит от V нефункториально. Дело в том, что если $\alpha\colon V \to W$ — морфизм многообразий и множество U открыто и плотно в W, то $\alpha^{-1}(U)$ не обязано быть плотным в V. Если же это всегда справедливо и если $\overline{\alpha(V)} = W$, то мы называем морфизм α *доминантным*. Такой морфизм α индуцирует *инъективный* коморфизм $\alpha_0\colon K(W) \to K(V)$.

Если многообразие V неприводимо, то W также неприводимо, и тогда поле $K(V)$ можно рассматривать как расширение поля $K(W)$. Мы будем называть морфизм α *сепарабельным*, если это расширение сепарабельно, и *чисто несепарабельным*, если $K(V)$ — алгебраическое чисто несепарабельное расширение поля $K(W)$; если же $K(V) = \alpha_0 K(W)$, то будем говорить, что α — *бирациональный* морфизм.

Локальные кольца многообразий V и W можно рассматривать как подкольца колец $K(V)$ и $K(W)$ соответственно, и коморфизм α_0 индуцирует инъективное отображение $\alpha_0\colon \mathfrak{O}_x \to \mathfrak{O}_{\alpha(x)}$ для каждого $x \in V$. Отождествляя $K(W)$ с $\alpha_0 K(W)$, мы видим, что соответствующий морфизму α морфизм пучков индуцируется вложениями локальных колец в кольцо $K(V)$.

В том случае, когда многообразие V не является неприводимым, но $\overline{\alpha(V)} = W$, легко показать, что морфизм $\alpha\colon V \to W$ является доминантным тогда и только тогда, когда для каждой неприводимой компоненты V' многообразия V множество $W' = \overline{\alpha(V')}$ — неприводимая компонента многообразия W. Мы будем говорить, что морфизм α сепарабелен (чисто несепарабелен, бирационален), если соответствующие доминантные морфизмы $V' \to W'$ обладают таким свойством.

Если V' — неприводимая компонента многообразия V, то $\overline{\alpha(V')} = W'$ — неприводимое подмногообразие многообразия W, и если W' содержит непустое открытое в W подмножество, то W' — неприводимая компонента многообразия W. Так как V' содержит упомянутое множество, то это замечание показывает, что *если α — сюръективный и открытый морфизм, то α доминантен.*

§ 9. РАЗМЕРНОСТЬ

(См. Мамфорд [1], гл. I, § 7[1]).)

9.1. Размерность многообразия V. В п. АГ. 1.4 мы ввели комбинаторную размерность $\dim V$ многообразия V. Она равна максимуму размерностей неприводимых компонент многообразия V. Если V неприводимо и $K(V)$ — поле функций на V, то основной результат состоит в том, что в этом случае $\dim V$ равна степени трансцендентности поля $K(V)$ над K.

9.2. Гиперповерхности. Пусть V — неприводимое многообразие и $f \in K[V]$ — непостоянная функция, множество нулей которой не пусто, т. е. $Z(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\} \neq \varnothing$. Тогда размерность каждой неприводимой компоненты подмногообразия $Z(f)$ равна $\dim V - 1$.

9.3. Произведения. Размерность многообразия $V \times W$ равна $\dim V + \dim W$.

§ 10. ОБРАЗ И СЛОИ МОРФИЗМА

(См. Мамфорд [1], гл. I, § 8.)

10.1. Основная теорема. Пусть α: $X \to Y$ — морфизм многообразий. *Слоем* морфизма α над точкой $y \in Y$ называют подмногообразие $\alpha^{-1}(\{y\})$ многообразия X. При изучении непустых слоев без ограничения общности можно предполагать, что $\alpha(X)$ плотно в Y. В случае когда X (и Y) — неприводимые многообразия, это означает, что α — доминантный морфизм.

Теорема. *Пусть α: $X \to Y$ — доминантный морфизм неприводимых многообразий и $r = \dim X - \dim Y$. Пусть W — неприводимое замкнутое подмногообразие многообразия Y и Z — неприводимая компонента многообразия $\alpha^{-1}(W)$.*

(1) *Если $\alpha \mid Z$ — доминантный морфизм, то $\dim Z \geqslant \dim W + r$. В частности, если $W = \{y\}$, то $\dim Z \geqslant r$.*

(2) *Существует открытое плотное подмножество $U \subset Y$ (зависящее лишь от α), такое, что*

(i) $U \subset \alpha(X)$,

(ii) *если $Z \cap \alpha^{-1}(U) \neq \varnothing$, то*

$$\dim Z = \dim W + r.$$

В частности, если $W = \{y\} \subset U$, то $\dim Z = r$.

10.2. Следствие (Шевалле). *Пусть α: $X \to Y$ — морфизм многообразий. Тогда образ конструктивного множества — снова*

[1]) См. Шафаревич [1], гл. I, § 6. — *Прим. ред.*

конструктивное множество. В частности, $\alpha(X)$ *содержит открытое плотное подмножество множества* $\overline{\alpha(X)}$.

Последнее утверждение вытекает из первого, если учесть предложение п. АГ. 1.3. Доказательство первого утверждения легко сводится к случаю доминантных морфизмов неприводимых многообразий.

10.3. Следствие. *Пусть* α: $X \to Y$ — *морфизм многообразий. При* $x \in X$ *обозначим через* $e(x)$ *максимум размерности содержащих* x *неприводимых компонент слоя морфизма* α, *определенного точкой* x, *т. е. слоя* $(\alpha^{-1}(\alpha(x))$. *Тогда функция* $x \to e(x)$ *полунепрерывна сверху, т. е. множества* $\{x \in X \mid e(x) \geqslant n\}$ *замкнуты для каждого целого* n.

§ 11. k-СТРУКТУРЫ НА K-СХЕМАХ

Этот и два следующих параграфа содержат основные понятия, необходимые для изложения вопросов рациональности. Напомним, что через k обозначается подполе алгебраически замкнутого поля K.

11.1. k-структуры на векторных пространствах. Задать *k-структуру* на (не обязательно конечномерном) векторном пространстве V над полем K — значит выделить в V k-подмодуль V_k, такой, что индуцированный естественным вложением $V_k \subset V$ гомоморфизм $K \otimes_k V_k \to V$ является изоморфизмом. Сюръективность означает, что V_k порождает V над K, а инъективность требует, чтобы элементы пространства V_k, линейно независимые над k, оставались линейно независимыми также над K. Элементы пространства V_k называются *рациональными над* k.

Пусть U — подпространство пространства V. Положим $U_k = U \cap V_k$; будем говорить, что подпространство U *определено* (или *рационально*) *над* k, если U_k является k-структурой на U. Это равносильно тому, что U_k порождает U.

Пусть $W = V/U$. Обозначим через W_k проекцию k-пространства V_k на W; если W_k есть k-структура пространства W, то мы будем говорить, что W *определено над* k. Это имеет место тогда и только тогда, когда U определено над k, или тогда и только тогда, когда элементы k-пространства W_k, линейно независимые над k, линейно независимы над K.

Пусть f: $V \to W$ есть K-линейное отображение векторных пространств с k-структурой. Мы говорим, что отображение f *определено над* k, или что f есть *k-морфизм*, если $f(V_k) \subset W_k$. Очевидно, что k-морфизмы пространства V в пространство W образуют k-подмодуль $\mathrm{Hom}_K(V, W)_k$ модуля $\mathrm{Hom}_K(V, W)$, и первый является k-структурой второго при условии, что пространство W

конечномерно. В частности, если $W = K$, то мы получаем k-структуру на двойственном пространстве V^* пространства V.

Аналогично, k-пространство $V_k \otimes_k W_k$ является k-структурой на $V \otimes_K W$; имеются также естественные k-структуры на внешней и симметрической алгебрах пространства V.

11.2. k-структуры на K-алгебрах. Под k-структурой K-алгебры A понимают k-структуру A_k ее основного пространства, которая является одновременно k-алгеброй.

Идеал J алгебры A определен над k тогда и только тогда, когда $J_k (= J \cap A_k)$ порождает J как идеал.

Пусть S — мультипликативное множество в A_k. Тогда, как легко видеть, $A_k[S^{-1}]$ будет k-структурой на $A[S^{-1}]$.

Пусть B — другая K-алгебра с k-структурой B_k. Обозначим через

$$\mathrm{Mor}_{K\text{-алг}}(A, B)_k$$

множество определенных над k гомоморфизмов соответствующих K-алгебр. Тогда $f \to 1_K \otimes f$ — биективное отображение множества $\mathrm{Mor}_{k\text{-алг}}(A_k, B_k)$ на множество $\mathrm{Mor}_{K\text{-алг}}(A, B)_k$.

11.3. k-структуры на K-схемах. k-структуру K-схемы $(X, \mathfrak{O}_X)$ составляют:

(1) k-топология $k\text{-top}(X) \subset \mathrm{top}(X)$;

(2) k-структуры K-алгебр $\mathfrak{O}_X(U)$ для каждого k-открытого множества U, такого, что гомоморфизм ограничения определен над k.

(Условие (2) означает, что ограничение пучка $\mathfrak{O}_X$ на $k\text{-top}(X)$ является пучком K-алгебр с k-структурами.) При этом требуется, чтобы индуцированные k-структуры на k-открытых аффинных подсхемах были следующего типа: k-структура на аффинной K-схеме $X = \mathrm{spec}_K(A)$ определяется посредством k-структуры A_k на A таким образом: множество называется *k-замкнутым*, если оно имеет вид $\mathrm{supp}(A/J)$ для подходящего идеала J, определенного над k. Например, если $f \in A_k$, то множество X_f является k-открытым, и любое k-открытое множество покрывается конечным числом таких множеств. Кроме того, K-алгебра $A_f = \tilde{A}(X_f)$ обладает k-структурой $(A_k)_f$ (см. п. АГ. 11.2). Пусть U — некоторое k-открытое множество и $\{X_{f_i}\}$ $(f_i \in A_k)$ — его конечное покрытие. Учитывая, что $X_{f_i} \cap X_{f_j} = X_{f_i f_j}$, получаем, согласно аксиоме пучков, точную последовательность

$$\tilde{A}(U) \to \prod_i \tilde{A}(X_{f_i}) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \tilde{A}(X_{f_i f_j}).$$

Следовательно, алгебра $\tilde{A}(U)$ наделяется естественным образом k-структурой, которая получается как ядро отображения

$$\prod_i A_{f_i} \xrightarrow{\alpha-\beta} \prod A_{f_i f_j},$$

являющегося k-морфизмом векторных пространств с k-структурой.

Нетрудно проверить, что эта k-структура на $\tilde{A}(U)$ определена корректно и что предложенная выше конструкция удовлетворяет требованиям (1) и (2).

Отметим, что полученная таким образом k-структура на $\tilde{A}(X)$ совпадает с A_k.

Пусть α: $X \to Y$ — морфизм K-схем с k-структурой. Будем говорить, что морфизм α *определен над* k, или что α есть *k-морфизм*, если (i) α непрерывен относительно k-топологий, (ii) для любых k-открытых множеств $U \subset Y$ и $V \subset X$, таких, что $\alpha(V) \subset U$, гомоморфизм ограничения α_V^U: $\mathfrak{O}_Y(U) \to \mathfrak{O}_X(V)$ определен над k. Множество всех определенных над k морфизмов k-схемы X в k-схему Y обозначим через

$$\mathrm{Mor}(X, Y)_k.$$

Гомоморфизм α_0: $B \to A$ K-алгебр с k-структурой индуцирует морфизм α: $\mathrm{spec}_K(A) \to \mathrm{spec}_K(B)$, и ясно, что морфизм α определен над k тогда и только тогда, когда гомоморфизм α_0 определен над k. Таким образом, категория аффинных K-схем с k-структурой и k-морфизмами контравариантно эквивалентна категории аффинных K-алгебр с k-структурой и k-морфизмами, а последняя, очевидно, эквивалентна категории аффинных k-алгебр.

11.4. Подсхемы, определенные над k. Пусть $(X, \mathfrak{O}_X)$ — K-схема с k-структурой. Если U является k-открытым множеством, то подсхема $(U, \mathfrak{O}_X | U)$ обладает индуцированной k-структурой.

Предположим, что $(Z, \mathfrak{O}_Z)$ — замкнутая подсхема схемы X. Будем говорить, что она определена над k, если (i) множество Z является k-замкнутым, (ii) пучок $\mathfrak{J}$ идеалов, такой, что $\mathfrak{O}_X/\mathfrak{J}$ — расширение с помощью нулей пучка $\mathfrak{O}_Z$, определен над k, т. е. идеал $\mathfrak{J}(U) \subset \mathfrak{O}_X(U)$ определен над k для любого k-открытого множества U. Условие (ii) эквивалентно тому, что для любого k-открытого аффинного множества U ядро $(\mathfrak{J}(U))$ эпиморфизма аффинных колец $\mathfrak{O}_X(U) \to \mathfrak{O}_Z(U \cap Z)$ определено над k. Таким образом, мы видим, что подсхема $(Z, \mathfrak{O}_Z)$ обладает единственной k-структурой, такой, что замкнутое вложение $Z \to X$ определено над k.

Отсюда легко следует, что замкнутая подсхема $(Z, \mathfrak{O}_Z)$ определена над k тогда и только тогда, когда для подходящего покрытия многообразия X k-открытыми аффинными множествами U подсхемы $(Z \cap U, \mathfrak{O}_Z \mid Z \cap U)$ схемы $(U, \mathfrak{O}_X \mid U)$ определены над k для каждого U.

§ 12. k-СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

12.1. Аффинные k-многообразия. Многообразие V с k-структурой называется *k-многообразием*. Пусть $V = \operatorname{spec}_K(A)$ — аффинное k-многообразие с k-структурой, определенной k-подалгеброй $A_k = k[V]$ алгебры $A = k[V]$.

Пусть $Z = \operatorname{spec}_K(A/J)$ — замкнутое подмногообразие многообразия V, где J — идеал всех функций, равных нулю над Z. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \to J_k \to k[V] \to k[Z] \to 0,$$

где $J_k = J \cap k[V]$ и где $k[Z]$ — ограничение алгебры функций $k[V]$ на Z. Таким образом, $k[Z]$ — приведенная аффинная k-алгебра; обозначим через $k(Z)$ ее полное кольцо частных. Так как $K \otimes_k k[Z] = K[V]/J_k \cdot K[V]$, то $J/J_k \cdot K[V]$ — ядро эпиморфизма $K \otimes_k k[Z] \to K[Z]$.

Подмногообразие Z будем называть k-замкнутым, если Z — множество нулей некоторого идеала, определенного над k. Из сказанного выше следует, что

$$\text{многообразие } Z \quad k\text{-замкнуто} \Leftrightarrow J = \sqrt{J_k \cdot K[V]}.$$

В этом случае ядро эпиморфизма $K \otimes_k k[Z] \to K[Z]$ будет ниль-радикалом алгебры $K \otimes_k k[Z]$.

Теперь мы можем сделать вывод, что для k-замкнутого многообразия Z эквивалентны следующие условия:

(a) Z определено (как подмногообразие) над k, т. е. $J = J_k \cdot K[V]$;

(b) $k[Z]$ и K линейно разделены над k в $K[Z]$;

(c) $K \otimes_k k[Z]$ — приведенное кольцо;

(d) $K \otimes_k k(Z)$ — приведенное кольцо.

Эквивалентность (c) и (d) вытекает из п. **АГ. 3.3**, ибо $K \otimes_k k(Z)$ — кольцо частных кольца $K \otimes_k k[Z]$ относительно мультипликативного множества всех неделителей нуля.

Мы можем рассматривать эти условия также и с другой точки зрения. Предположим, что B_k — аффинная k-алгебра. Тогда B_k является k-структурой на алгебре $B = K \otimes_k B_k$ и, следовательно, B_k определяет k-структуру на аффинной K-схеме $Z = \operatorname{spec}_K(B)$. Схема Z тогда и только тогда является многообразием, когда B — приведенная алгебра. Таким образом, k-замкнутые подмножества многообразия V можно считать замкнутыми и определенными над k *подсхемами* многообразия V; при выполнении упомянутых условий эти подсхемы становятся подмногообразиями.

Предположим, что $\operatorname{char}(k) = p > 0$. Тогда нули функций $f \in A$ и $f^p \in A$ совпадают. Если $f \in k^{1/p}[V]$, то $f^p \in k[V]$, так что всякое $k^{1/p}$-замкнутое множество является k-замкнутым. Отсюда следует, что *k-топология совпадает с $k^{p^{-\infty}}$-топологией.*

12.2. Подмногообразия, определенные над k. Пусть V — произвольное (не обязательно аффинное) k-многообразие и Z — k-замкнутое подмногообразие. Если множество U k-открыто в V, то ограничение алгебры $k[U]$ на $Z \cap U$ мы будем обозначать через $k[Z \cap U]$. Переходя к индуктивному пределу по k-открытым множествам U, для которых пересечение $Z \cap U$ плотно в Z, получаем кольцо $k(Z)$ „рациональных функций на Z, определенных над k". В том случае, когда многообразие V аффинно, это понятие согласуется с понятием, введенным ранее в п. АГ.12.1 (ср. п. АГ.8.1). Из п. АГ.11.4 и п. АГ.12.1 вытекает, что *многообразие Z определено над k тогда и только тогда, когда $K \otimes_k k(Z)$ — приведенное кольцо.*

Кольцо $k(Z)$ является произведением конечного числа полей, конечно порожденных над полем k. Используя результаты п. АГ.2.2, мы можем сделать вывод об эквивалентности следующих условий:

(a) многообразие Z определено над k;

(b) $K \otimes_k k(Z)$ — приведенное кольцо;

(c) $k^{p^{-\infty}} \otimes_k k(Z)$ — приведенное кольцо;

(d) каждый множитель кольца $k(Z)$ — сепарабельное расширение поля k.

В частности, мы видим, что

k-замкнутые подмногообразия определены над $k^{p^{-\infty}}$, и, следовательно, над k, если поле k совершенно.

12.3. Неприводимые компоненты определены над k_s. Рассмотрим неприводимые компоненты k-многообразия V. При доказательстве того факта, что каждая из них определена над k_s, можно предполагать, не теряя общности, что $k = k_s$. Кроме того, так как V покрывается аффинными k-открытыми подмногообразиями, можно считать аффинным само многообразие V. Итак, требуется доказать, что если $P_1, \ldots, P_n$ — минимальные простые идеалы алгебры $k[V]$, то $P_i \cdot K[V]$ — простой идеал для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Так как поле k сепарабельно замкнуто, то из п. АГ. 2.1 следует, что кольцо $K[V]/(P_i \cdot K[V]) = K \otimes_k (k[V]/P_i)$ имеет только один минимальный простой идеал; поэтому достаточно показать, что $K \otimes_k (k[V]/P_i)$ — приведенное кольцо.

Так как $k[V]$ — приведенное кольцо, то $k[V] \subset \prod (k[V]/P_i)$, и оба эти кольца имеют одно и то же полное кольцо частных, а именно $k(V)$. Но $K\otimes_k k(V)=K(V)$ — приведенное кольцо. Следовательно, кольца $K\otimes_k (k[V]/P_i)$ также приведенные, что и требовалось.

§ 13. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

13.1. Функтор точек. Пусть V — некоторое k-многообразие, B — аффинная K-алгебра. Положим

$$V(B)=\mathrm{Mor}_{K\text{-схем}}(\mathrm{spec}_K(B),\ V).$$

Если B имеет k-структуру B_k, то через $V(B_k)=V(B)_k$ мы будем обозначать множество морфизмов из $V(B)$, определенных над k.

Если $V=\mathrm{spec}_K(A)$ — аффинное многообразие, то

$$V(B)=\mathrm{Mor}_{K\text{-алг}}(A,\ B)=\mathrm{Mor}_{k\text{-алг}}(A_k,\ B)$$

и

$$V(B_k)=\mathrm{Mor}_{k\text{-алг}}(A_k,\ B_k).$$

Это позволяет придать смысл выражениям $V(B)$ и $V(B_k)$ для любой K-алгебры B, не обязательно аффинной. (Можно было бы, например, взять в качестве B расширение поля K.) На этом пути мы получаем функтор $B_k\to V(B_k)$ из категории k-алгебр в категорию множеств. Он называется *функтором точек* k-многообразия V.

Множество $V(B_k)$ также функториально зависит от V: если α: $V\to W$ есть k-морфизм k-многообразий, то α индуцирует отображение $V(B_k)\to W(B_k)$.

В частном случае $B=K$ имеем

$$V(K)=\mathrm{Mor}_{K\text{-схем}}(\mathrm{spec}_K(K),\ V);$$

множество $V(K)$ мы можем и будем отождествлять с множеством точек многообразия V. Кроме того, для любого подполя $k'\supset k$ поля K имеем $V(k')\subset V$. Точки множества $V(k')\subset V$ называются *k'-рациональными точками* многообразия V. В частности, $V(k)\subset V(k_s)\subset V(\bar{k})\subset V$. Точки множества $V(k_s)$ называются *сепарабельными точками* многообразия V.

Если W — локально замкнутое подмногообразие многообразия V, не обязательно определенное над k, то мы позволяем себе писать $W(k')$ для обозначения множества $W\cap V(k')$.

Примеры. Если $V=K^n=\mathrm{spec}_K(K[t_1,\ \ldots,\ t_n])$ со стандартной k-структурой, задаваемой кольцом $k[t_1,\ \ldots,\ t_n]$, то $V(k)=k^n$.

Если V — векторное пространство с k-структурой V_k, то проективное пространство $\mathscr{P}(V)$ можно снабдить k-структурой, принимая за $\mathscr{P}(V)(k)$ образ множества $V_k - \{0\}$ при каноническом отображении $V - \{0\} \to \mathscr{P}(V)$.

Отметим, наконец, что введенные выше определения без всяких изменений применимы к любой K-схеме (соответственно K-схеме с k-структурой) V.

13.2. Теорема. *Пусть* α: $V \to W$ — *доминантный сепарабельный* k-*морфизм* k-*многообразий. Тогда* W *содержит открытое плотное подмножество* W_0, *такое, что* $W_0 \subset \alpha(V)$, *и для каждого* $w \in W_0(k_s)$ *слой* $\alpha^{-1}(w)$ *содержит плотное подмножество сепарабельных точек.*

Мы проведем доказательство в несколько шагов.

(a) Без ограничения общности можем считать, что $k = k_s$.

(b) Тогда, согласно п. АГ.12.3, неприводимые компоненты всякого k-многообразия определены над k.

(c) Очевидно, что без ограничения общности можно заменить W на плотное k-открытое множество W', а V — на $\alpha^{-1}(W')$. Таким образом, дело сводится к случаю, когда многообразие W неприводимо и аффинно. Теперь покроем многообразие V неприводимыми k-открытыми аффинными подмногообразиями V_i, что можно сделать на основании шага (b). Если множество W_{0i} отвечает требованию теоремы для морфизма α_i: $V_i \to W$, то множество $W_0 = \bigcap W_{0i}$ удовлетворяет требованиям теоремы для морфизма α. Следовательно, мы можем предполагать, что многообразия V и W *неприводимы и аффинны*. Более того, используя теорему п. АГ. 10.1, мы можем заменить W на некоторое открытое подмножество и предполагать, что морфизм α сюръективен и что *все неприводимые компоненты всех слоев имеют одинаковую размерность*.

(d) Морфизм α индуцируется коморфизмом $k[W] \to k[V]$, который мы будем рассматривать как вложение. Так как поле $K(V)$ сепарабельно над полем $K(W)$ — по предположению — и так как поле K линейно разделено над k с полем $k(W)$ и с полем $k(V)$, то поле $k(V)$ сепарабельно над полем $k(W)$. Следовательно, мы можем применить лемму о (сепарабельной) нормализации п. АГ. 3.7 к аффинной $k(W)$-алгебре $k(W) \otimes_{k[W]} k[V]$. Это позволяет нам рассматривать последнюю как конечное целое расширение некоторого кольца полиномов $k(W)[t_1, \ldots, t_n]$, над полем частных которого поле $k(V)$ сепарабельно (и конечно). Так как алгебра $k[V]$ имеет конечное число образующих, то в кольце $k[W]$ имеется „общий знаменатель“ $f \neq 0$ для коэффициентов уравнений целой зависимости для образующих кольца $k[V]$ над кольцом полиномов. Если теперь заменим, используя шаг (c), кольцо $k[W]$ на $k[W]_f = k[W_f]$ и многообразие V на $V_f = \alpha^{-1}(W_f)$, то мы сможем считать кольцо $k[V]$ конечным целым расширением кольца полиномов $k[W][t_1, \ldots, t_n] = k[W \times K^n]$. Таким образом, наша задача свелась к случаю, когда морфизм α допускает разложение

$$V \xrightarrow{\beta} W \times K^n \xrightarrow{\pi} W.$$

Здесь π — координатная проекция, а β — конечный целый морфизм[1]), такой, что поле $k(V)$ сепарабельно над полем $k(W \times K^n)$.

(e) Покажем, что существует открытое плотное подмножество $U_0 \subset W \times K^n$, такое, что морфизм β_0: $V_0 = \beta^{-1}(U_0) \to U_0$ обладает следующим свойством: каждый слой морфизма β_0 над сепарабельной точкой состоит целиком из сепарабельных точек.

Положим $A = k[W \times K^n]$, и пусть $k[V] = A[b_1, \ldots, b_m]$. Пусть $P_i(b_i) = 0$ — минимальное полиномиальное уравнение элемента b_i над полем частных $k(W \times K^n)$ кольца A. Так как полином P_i сепарабелен, то его производная P_i' отлична от нуля в точке b_i.

Все коэффициенты полиномов P_i принадлежат кольцу A_g для подходящего $0 \neq g \in A$. Положим $b = \prod\limits_i P_i'(b_i)$. Так как кольцо $k[V]_g$ является целым над кольцом A_g, то из п. АГ. 3.6 вытекает, что существует отличное от нуля кратное h элемента b в кольце A_g. Тогда кольцо $k[V]_{gh}$ является целым над кольцом A_{gh}, и каждое поле вычетов поля $k[V]_{gh}$ порождается корнями полиномов, сепарабельных над соответствующими полями вычетов кольца A_{gh}. Таким образом, множество $U_0 = (W \times K^n)_{gh}$ обладает описанным выше свойством.

(f) Для завершения доказательства покажем, что множество $W_0 = \pi(U_0)$ удовлетворяет требованиям теоремы. Так как π — открытое отображение, то множество W_0 открыто в W. Требуется показать, что для любого $w \in W(k)$ (напомним, что $k = k_s$) множество $\alpha^{-1}(w)$ обладает плотным множеством сепарабельных точек.

Так как неприводимые компоненты многообразия $\alpha^{-1}(w)$ имеют одинаковую размерность и так как β — замкнутое сюръективное отображение, то β: $\alpha^{-1}(w) \to \beta(\alpha^{-1}(w)) = \pi^{-1}(w)$ — доминантный морфизм. Ясно, что $\pi^{-1}(w)$ — подмногообразие, определенное над k и k-изоморфное многообразию K^n; следовательно, β отображает каждую неприводимую компоненту X многообразия $\alpha^{-1}(w)$ *на* $\pi^{-1}(w)$. Пусть X' — замыкание множества сепарабельных точек в X. Из (d) следует, что множество $\beta(X')$ содержит все сепарабельные точки множества $U_0 \cap \pi^{-1}(w)$, которое плотно и открыто в (неприводимом) многообразии $\pi^{-1}(w)$. Так как отображение β замкнуто, то $\beta(X') = \pi^{-1}(w)$. Следовательно, так как β — конечный морфизм, то $\dim X' = \dim \pi^{-1}(w) = \dim X$. Но множество X неприводимо, так что $X' = X$, что и требовалось доказать.

---

[1]) Морфизм многообразий (аффинных) α: $V_1 \to V_2$ называется конечным (или конечным целым), если $\alpha(V_1)$ плотно в V_2 и $K[V_1]$ — конечное целое расширение поля $K[V_2]$. — *Прим. ред.*

13.3. Следствие. *Пусть V — произвольное k-многообразие. Тогда множество $V(k_s)$ плотно в V.*

Применяем теорему к проекции многообразия V в точку.

§ 14. КРИТЕРИИ ГАЛУА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНОСТИ

Мы будем обозначать через Γ группу Галуа поля k_s над k.

14.1. Действие группы Галуа на векторном пространстве. Пусть V — векторное пространство с k-структурой V_k. Распространим действие группы Галуа Γ на поле k_s на векторное пространство $V_{k_s} = k_s \otimes_k V_k$; ясно, что V_k совпадает с множеством $V_{k_s}^{\Gamma}$ неподвижных относительно Γ точек. Если W — другое векторное пространство с k-структурой, то Γ действует на пространстве

$$\mathrm{Hom}_K(V, W)_{k_s} = \mathrm{Hom}_{k_s}(V_{k_s}, W_{k_s})$$

по формуле

$$(\sigma f)(v) = \sigma(f(\sigma^{-1}v)).$$

Здесь $\sigma \in \Gamma$, отображение $f: V \to W$ определено над k_s и $v \in V_{k_s}$. Легко видеть, что следующие условия равносильны:

(i) отображение f определено над k;

(ii) отображение f: $V_{k_s} \to W_{k_s}$ является Γ-эквивариантным [1]);

(iii) $f \in \mathrm{Hom}(V, W)_{k_s}^{\Gamma}$.

14.2. k-структура, задаваемая действием группы Галуа. Рассмотрим векторное пространство V с k_s-структурой V_{k_s}, на которой Γ действует как группа полулинейных преобразований, т. е.

$$\sigma(ax) = \sigma(a)\,\sigma(x) \qquad (a \in k_s,\ x \in V_{k_s}).$$

Предположим далее, что стабилизатор каждого $x \in V_{k_s}$ — открытая подгруппа (конечного индекса) группы Γ. Оказывается, что тогда k-пространство

$$V_k = V_{k_s}^{\Gamma}$$

является k-структурой на V.

Ясно, что естественное отображение $k_s \otimes_k V_k \to V_{k_s}$ является Γ-эквивариантным. Следовательно, его ядро — Γ-инвариантное k_s-подпространство, имеющее нулевое пересечение с множеством $1 \otimes V_k$. Используя импликацию (ii)$\Rightarrow$(i) п. АГ.14.1, заключаем, что это отображение является мономорфизмом.

---

[1]) Напомним, что если на множествах M и N действует группа Γ автоморфизмов, то отображение f множества M в множество N называется Γ-*эквивариантным*, если $f({}^{\gamma}m) = {}^{\gamma}(f(m))$ для любых $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$. — *Прим. перев.*

Остается показать, что V_k порождает V_{k_s}. Пусть $x \in V_{k_s}$ и Γ_x — стабилизатор точки x. Тогда Γ_x содержит открытый нормальный делитель Γ' группы Γ. Множество k' фиксированных точек поля k_s относительно Γ' является конечным расширением Галуа поля k. Пусть

$$\Gamma'' = \Gamma/\Gamma' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \cong \mathrm{Gal}(k'/k),$$

и пусть $a_1, \ldots, a_n$ — базис поля k' над k. Ясно, что элементы $y_i = \sum_j \sigma_j(a_i x)$ принадлежат V_k. Так как элементы Γ' линейно независимы над k' [1]), то матрица $(\sigma_j(a_i))$ обратима; обозначим обратную матрицу через (b_{rs}). Тогда

$$\sum_i b_{ih} y_i = \sum_i b_{ih} \sum_j \sigma_j(a_i)\sigma_j(x) =$$
$$= \sum_j \Big(\sum_i \sigma_j(a_i) b_{ih}\Big) \sigma_j(x) = \sum_j \delta_{jh}\sigma_j(x) = \sigma_h(x).$$

Так как для некоторого h элемент σ_h действует на k' тривиально, то x — линейная комбинация над k' элементов $y_i \in V_k$, и отсюда следует наше утверждение.

Предложение. *Пусть W — подпространство векторного пространства V с k-структурой. Тогда W определено над k тогда и только тогда, когда* (i) *W определено над k_s и* (ii) *W_{k_s} инвариантно относительно группы* Γ.

Доказательство. Часть „только тогда“ очевидна, а часть „тогда“ будет установлена, коль скоро мы докажем, что подпространство W', натянутое на W_k, совпадает с W. Переходя к факторпространствам V/W' и W/W', сводим рассмотрение к случаю $W_k = 0$. Покажем, что $W = 0$. Выберем в пространстве V k-базис (e_i), и если $W \neq 0$, выберем в W_{k_s} элемент $w \neq 0$, такой, что w — линейная комбинация наименьшего возможного числа базисных элементов e_i. Можно считать, что w имеет вид $w = e_1 + a_2e_2 + \ldots$, $a_2 \notin k$, $a_i \in k_s$. Тогда существует элемент $\sigma \in \Gamma$, такой, что $\sigma(a_2) \neq a_2$, так что $w - \sigma w \in W_{k_s}$ — отличный от нуля элемент, выражающийся в виде линейной комбинации меньшего числа базисных элементов e_i, чем элемент w. Это противоречит выбору элемента w.

14.3. Действие группы Галуа на k-многообразиях. Пусть V — некоторое k-многообразие. Согласно п. АГ. 13.3, множество $V(k_s)$ плотно в V. Мы хотим определить действие группы Γ на $V(k_s)$. Группа Γ будет оставлять инвариантным каждое множество $U(k_s)$, когда множество U является k-открытым, так что доста-

[1]) См., например, Ленг [1], гл. VIII, § 4. — *Прим. перев.*

точно описать действие группы Γ в случае, когда многообразие V аффинно. Мы можем установить взаимно однозначное соответствие множества $V(k_s)$ и множества $\mathrm{Mor}_{k_s\text{-алг}}(k_s[V], k_s)$, сопоставляя каждому $x \in V(k_s)$ гомоморфизм алгебр e_x: $k_s[V] \to k_s$. При $\sigma \in \Gamma$ определим операцию $\sigma(x)$ по формуле

$$e_{\sigma(x)} = \sigma \circ e_x \circ \sigma^{-1}.$$

Здесь элемент $\sigma \in \Gamma$ в левой части действует на поле k_s, а правая часть — на алгебре $k_s[V] = k_s \otimes_k k[V]$. Если обозначить это последнее действие через $f \to {}^\sigma f$ при $f \in k_s[V]$, то написанное выше уравнение можно переписать в виде

$$f(\sigma(x)) = \sigma\left({}^{\sigma^{-1}}f\right)(x)$$

или

$$\left({}^\sigma f\right)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}x)).$$

Обозначим через $V(f)$ многообразие нулей функции f. Тогда отображение σ сопоставляет сепарабельные точки многообразия $V(f)$ сепарабельным точкам многообразия $V\left({}^\sigma f\right)$. Это справедливо и для многообразия $V(J)$ при любом идеале J кольца $k_s[V]$. Таким образом мы можем определить *сопряженное многообразие* ${}^\sigma W$ для любого определенного над k_s подмногообразия W многообразия V. Такое определение корректно ввиду плотности множества сепарабельных точек. В аффинном случае ${}^\sigma W$ совпадает с многообразием, полученным в результате применения оператора σ к коэффициентам уравнений, определяющих многообразие W над k_s.

Пусть α: $V \to W$ — морфизм k-многообразий; предположим, что α определен над k_s. Тогда для любого $\sigma \in \Gamma$ можно определить k_s-морфизм ${}^\sigma a$: $V \to W$ следующим образом:

$$({}^\sigma a)(x) = \sigma(a(\sigma^{-1}x)) \qquad (x \in V(k_s)).$$

Плотность множества сепарабельных точек обеспечивает единственность k_s-морфизма с этим свойством. Чтобы удостовериться в его существовании, достаточно для каждой пары k-открытых множеств $V' \subset V$, $W' \subset W$, таких, что $\alpha(V') \subset W'$, указать коморфизм $({}^\sigma a)_0$: $k_s[W'] \to k_s[V']$. Он определен в силу коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} k_s[V'] \arrow[d, "\sigma"'] & k_s[W'] \arrow[l, "({}^\sigma a)_0"'] \arrow[d, "\sigma"] \\ k_s[V'] & k_s[W'] \arrow[l, "\alpha_0"] \end{tikzcd}$$

т. е. $({}^\sigma a)_0 = \sigma^{-1} \circ a_0 \circ \sigma$. Таким образом, $({}^\sigma a)_0(f) = \sigma^{-1}\left(a_0\left({}^\sigma f\right)\right)$ при $f \in k_s[W']$. Тем самым указано действие группы Γ на множестве $\mathrm{Mor}(V, W)_{k_s}$.

Легко видеть, что следующие условия эквивалентны:

(i) морфизм α определен над k;

(ii) морфизм $\alpha: V(k_s) \to W(k_s)$ эквивариантен относительно группы Γ;

(iii) $\alpha \in \operatorname{Mor}(V, W)_{k_s}^{\Gamma}$.

14.4. Теорема. *Пусть V — некоторое k-многообразие и Z — замкнутое подмногообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *подмногообразие Z определено над k;*

(2) *подмногообразие Z определено над k_s, и множество $Z(k_s)$ инвариантно относительно Γ;*

(3) *имеется инвариантное относительно группы Γ плотное в Z подмножество $E \subset Z \cap V(k_s)$.*

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ очевидна; импликация $(2) \Rightarrow (3)$ вытекает из плотности множества $Z(k_s)$ в Z (п. АГ.13.3).

$(3) \Rightarrow (1)$. Покрывая многообразие V k-открытыми аффинными многообразиями, мы можем свести доказательство к случаю, когда V аффинно. Тогда $J = \bigcap\limits_{x \in E} \mathfrak{m}_x = I(\bar{E}) = I(Z)$ — идеал функций, обращающихся в нуль на Z. Так как $E \subset V(k_s)$, то идеал J (как подпространство алгебры $K[V]$) определен над k_s. При $\sigma \in \Gamma$ имеем

$$^{\sigma}J_{k_s} = \bigcap_{x \in E} {}^{\sigma}\mathfrak{m}_{x, k_s} = \bigcap_{x \in E} \mathfrak{m}_{\sigma(x), k_s} = J_{k_s};$$

здесь последнее равенство следует из того факта, что множество E инвариантно относительно Γ. Следовательно, ввиду п. АГ. 14.1 идеал J определен над k, что и требовалось.

14.5. Следствие. *Пусть $\alpha: V \to W$ есть k-морфизм k-многообразий. Тогда подмногообразие $\overline{\alpha(V)}$ определено над k.*

Доказательство. Так как $V(k_s)$ плотно в V (п. АГ.13.3), то $\alpha(V(k_s))$ плотно в $\overline{\alpha(V)}$, так что мы можем применить критерий (3).

14.6. Следствие. *Пусть (Z_i) — семейство определенных над k подмногообразий многообразия V и $Z = \bigcup\limits_i Z_i$. Тогда многообразие Z определено над k.*

Доказательство. Применяем критерий (3) к множеству $E = \bigcup\limits_i Z_i(k_s)$.

14.7. Следствие. *Пусть α: $V \to W$ — доминантный и сепарабельный k-морфизм k-многообразий. Тогда существует плотное открытое множество W_0 в W, такое, что каждый слой морфизма α над k-рациональной точкой множества W_0 определен над k.*

Доказательство. Пусть W_0 имеет тот же смысл, что и в п. АГ. 13.2. Если $w \in W_0(k)$, то множество E сепарабельных точек в слое $\alpha^{-1}(w)$ инвариантно относительно Г. Кроме того, из п. АГ. 13.2 вытекает, что E плотно в слое $\alpha^{-1}(w)$, так что следствие вытекает из критерия (3) п. АГ. 14.4.

§ 15. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

(См. Гротендик и Дьедонне [1].)

Этот параграф содержит сведения из алгебры, которые потребуются при изложении раздела о касательных пространствах (§ АГ.16).

15.1. $\Omega_{A/k}$. Мы будем иметь дело с алгебрами над полем k, хотя большая часть рассуждений проходит в предположении, что k — коммутативное кольцо.

Так как k-алгебра A коммутативна, то мы можем рассматривать A-модуль M как бимодуль, полагая $ax = xa$ при $x \in M$, $a \in A$. При этом соглашении *k-дифференцирование* из модуля A в модуль M — это k-линейное отображение X: $A \to M$, такое, что

$$X(ab) = (Xa)\,b + a\,(Xb) \qquad (a,\ b \in A).$$

Так как $X(ab) = aX(b)$ при $a \in k$, то, полагая $b = 1$, получаем $Xa = 0$ при $a \in k$.

Множество

$$\mathrm{Der}_k(A,\ M)$$

всех таких k-дифференцирований образует A-модуль, зависящий от M функториально.

Существует *универсальное* k-дифференцирование

$$d\,(= d_{A/k})\colon\ A \to \Omega\,(= \Omega_{A/k}),$$

которое получается, если принять в качестве Ω A-модуль, задаваемый образующими da $(a \in A)$ и соотношениями $d(ab) = (da)\,b + a\,(db)$ $(a,\ b \in A)$, $dc = 0$ $(c \in k)$. Его универсальность выражается естественным изоморфизмом

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-мод}}(\Omega,\ M) \to \mathrm{Der}_k(A,\ M),$$

переводящим f в $f \circ d$ [1]).

[1]) В дальнейшем (п. АГ. 16.3) Ω называется *модулем k-дифференциалов модуля A*. — *Прим. перев.*

(Хорошо известна конструкция модуля Ω, которая, впрочем, нам не потребуется: пусть J — ядро гомоморфизма $A \otimes_k A \to A$, $a \otimes b \to ab$. Тогда $a \otimes 1 - 1 \otimes a \to da$ индуцирует изоморфизм $J/J^2 \to \Omega$.)

Пусть f: $A \to B$ — гомоморфизм k-алгебр. Тогда f индуцирует полулинейное отображение df: $\Omega_A \to \Omega_B$, которое переводит $d_A(a)$ в $d_B f(a)$. (В обозначениях мы опустили букву k, ибо в нашем рассуждении поле k остается фиксированным.) Тогда можно определить отображение

$$\mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Der}_k(A, M)$$

по формуле

$$X \to X \circ f$$

для любого B-модуля (и, следовательно, A-модуля) M. Отсюда следует, что модуль Ω_A зависит от A функториально.

15.2. Кольца полиномов. Если $A = k[T_1, \ldots, T_n]$ — кольцо полиномов, то Ω — свободный модуль с базисом $dT_1, \ldots, dT_n$. Дифференцирование d: $A \to \Omega$ задается формулой

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial T_i} dT_i$$

при $f \in A$. Эти утверждения отражают тот факт, что дифференцирование X: $A \to M$ определяется значениями $X(T_i)$, которые можно задавать произвольно.

15.3. Кольца вычетов. Пусть $A' = A/J$ для некоторого идеала J, и пусть M — произвольный A'-модуль (или A-модуль, аннулируемый идеалом J). Тогда, так как $JM = 0$, то

$$\mathrm{Der}_k(A, M) = \mathrm{Hom}_{A\text{-мод}}(\Omega_A, M) = \mathrm{Hom}_{A'\text{-мод}}(\Omega_A/J\Omega_A, M).$$

Мы можем отождествить $\mathrm{Der}_k(A', M)$ с множеством тех k-дифференцирований $A \to M$, которые переводят J в 0, т. е.

$$\mathrm{Der}_k(A', M) = \mathrm{Hom}_{A'\text{-мод.}}(\Omega_A/A \cdot d_A J, M)$$

Таким образом, $\Omega_{A'}$ — фактормодуль модуля Ω_A по A-подмодулю, порожденному всеми df $(f \in J)$. Достаточно даже, чтобы элемент f пробегал множество образующих идеала J.

Пусть, например, $A = k[T_1, \ldots, T_n]$ — кольцо полиномов, t_i — образ T_i в A', $A' = k[t_1, \ldots, t_n]$. Тогда если элементы $f_1, \ldots, f_m$ порождают J, то ввиду сказанного выше мы можем заключить, что модуль $\Omega_{A'}$ определяется образующими dt_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и соотношениями

$$\sum_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial T_i}\right)(t)\, dt_i = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant m).$$

Здесь $g(t)$ — образ в A' полинома $g(T) = g(T_1, \ldots, T_n)$ из кольца A.

15.4. Предложение. *Предположим, что $A = k \oplus J$, т. е. k отображается на $A' = A/J$. Тогда d_A индуцирует изоморфизм A'-модулей*

$$J/J^2 \to \Omega_A/J \cdot \Omega_A.$$

Доказательство. Достаточно показать, что у этих модулей совпадают гомоморфизмы в любой A'-модуль M, т. е. что $\mathrm{Der}_k(A, M) \cong \mathrm{Hom}_{A'\text{-мод}}(J/J^2, M)$. Если $X\colon A \to M$ есть k-дифференцирование, то $X(k) = 0$; так как $A = k \oplus J$, то дифференцирование X полностью определяется своим ограничением $X \mid J$. Но $JM = 0$; следовательно, $X(J^2) = 0$ и X определяется гомоморфизмом $h\colon J/J^2 \to M$. Обратно, такой гомоморфизм h индуцирует отображение $J \to J/J^2 \to M$, и, следовательно, дифференцирование $X\colon A \to M$, такое, что $X(k) = 0$. Стандартное вычисление показывает, что X есть k-дифференцирование.

15.5. Локализация. Пусть S — мультипликативное множество в A. Тогда $\Omega_{A[S^{-1}]} = \Omega_A[S^{-1}]$ и

$$d\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{(da)\,s - a\,(ds)}{s^2} \qquad (a \in A,\ s \in S)\,[1].$$

В частности, отсюда следует, что если M есть $A[S^{-1}]$-модуль, то

$$\mathrm{Der}_k(A, M) = \mathrm{Der}_k(A[S^{-1}], M).$$

Например, если M — модуль над одним из локальных колец A_p кольца A, то $\mathrm{Der}_k(A, M) = \mathrm{Der}_k(A_p, M)$.

Другое важное следствие формулы $\Omega_{A[S^{-1}]} = \Omega_A[S^{-1}]$ состоит в следующем. Предположим, что V есть K-схема. Тогда существует когерентный пучок $\Omega_{V/K}$ $\mathfrak{O}_V$-модулей, такой, что для любой открытой аффинной подсхемы $U = \mathrm{spec}_K(A)$ пучок $\Omega_{U/K} = \Omega_{V/K} \mid U$ совпадает с пучком $\widetilde{\Omega}_{A/K}$, соответствующим модулю $\Omega_{A/K}$ (см. п. АГ.5.5). При $x \in U$ слой Ω_x пучка $\Omega_{V/K}$ совпадает с локализацией модуля $\Omega_{A/K}$ относительно локального кольца $\mathfrak{O}_x$ кольца A, т. е. с модулем $\Omega_{\mathfrak{O}_x/K}$.

15.6. Сепарабельные расширения полей (см. п. АГ.2.3). Предположим, что A — конечно порожденное расширение поля k, степень трансцендентности которого равна n. Тогда

$$\dim_A \Omega_A \geqslant n$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда поле A сепарабельно над k. В этом случае элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$ тогда

---

[1]) Здесь через $\frac{a}{s}$ обозначается элемент $f(a)\,f(s)^{-1}$, где $f\colon A \to A[S^{-1}]$ — каноническое отображение. Выражение справа следует понимать аналогичным образом. — *Прим. перев.*

и только тогда образуют сепарабельный базис трансцендентности поля A над k, когда элементы $da_1, \ldots, da_n$ образуют A-базис модуля Ω_A.

Если B — конечно порожденное расширение поля A, сепарабельное над k, то из точности последовательности

$$0 \to \mathrm{Der}_A(B, B) \to \mathrm{Der}_k(B, B) \to \mathrm{Der}_k(A, B)$$

в результате подсчета B-размерностей следует, что поле B сепарабельно над A тогда и только тогда, когда отображение $\mathrm{Der}_k(B, B) \to \mathrm{Der}_k(A, B)$ сюръективно; последнее эквивалентно условию, что отображение $B \otimes_A \Omega_A \to \Omega_B$ инъективно.

15.7. Тензорные произведения. Предположим, что $A = A_1 \otimes_k A_2$, и положим $\Omega_i = \Omega_{A_i}$. Тогда

$$\Omega_A \cong (\Omega_1 \otimes_k A_2) \oplus (A_1 \otimes_k \Omega_2).$$

Эквивалентным образом, если M — произвольный A-модуль, то

$$\mathrm{Der}_k(A, M) \cong \mathrm{Der}_k(A_1, M) \oplus \mathrm{Der}_k(A_2, M).$$

Отображение слева направо индуцируется гомоморфизмами $A_i \to A$. Чтобы получить обратное отображение, необходимо построить k-дифференцирование X: $A \to M$ по заданной паре k-дифференцирований X_i: $A_i \to M$. Его можно определить следующим образом:

$$X(a_1 \otimes a_2) = (X_1 a_1 \otimes a_2) + (a_1 \otimes X_2 a_2).$$

15.8. Расширение поля. Для любого поля $k' \supset k$ имеет место естественный изоморфизм

$$k' \otimes_k \Omega_{A/k} \to \Omega_{(k' \otimes_k A)/k'}.$$

15.9. Лемма о касательном расслоении. Пусть A и D — k-алгебры, причем D имеет вид $D = B \oplus M$, где B — подалгебра, а M — идеал, квадрат которого равен нулю. Если f: $A \to B$ — гомоморфизм алгебр, то через M_f мы обозначим A-модуль M, когда алгебра A действует при помощи гомоморфизма f.

Проекция $D \to B = D/M$ индуцирует отображение

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-алг}}(A, D) \xrightarrow{p} \mathrm{Hom}_{k\text{-алг}}(A, B).$$

Мы утверждаем, что *имеет место каноническая биекция*

$$\mathrm{Der}_k(A, M_f) \to p^{-1}(f).$$

В самом деле, любой элемент множества $p^{-1}(f)$ можно однозначно представить в виде $f + X$ для подходящего k-линейного отображения X: $A \to M$, причем

$$(f + X)(a) = f(a) + X(a) \in D = B \oplus M.$$

Наше утверждение можно переформулировать следующим образом: отображение $f+X$ мультипликативно тогда и только тогда, когда X — дифференцирование. Этот факт получается в результате простого вычисления. Действительно, пусть $a, b \in A$. Тогда

$$(f(a)+X(a))(f(b)+X(b)) =$$
$$= f(a)f(b)+X(a)f(b)+f(a)X(b)+X(a)X(b) =$$
$$= f(ab)+(X(a)f(b)+f(a)X(b)),$$

ибо f — мультипликативное отображение и $M^2=0$.

§ 16. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

16.1. Касательное пространство Зарисского. Пусть x — точка на многообразии (или даже на K-схеме) V. Напомним, что через $K(x)=\mathfrak{O}_x/\mathfrak{m}_x$ обозначается поле вычетов локального кольца точки x. Разумеется, оно совпадает с K, но нам необходимо рассматривать его как $\mathfrak{O}_x$-модуль.

Касательное пространство многообразия V в точке x определяется формулой

$$T(V)_x = \mathrm{Der}_K(\mathfrak{O}_x, K(x)).$$

Из предложения п. АГ.15.4 вытекает, что касательное пространство канонически изоморфно пространству

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-мод}}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, K).$$

При $f\in\mathfrak{O}_x$ мы будем использовать запись $(df)_x$ для обозначения элемента $f-f(x)$ по модулю идеала $\mathfrak{m}_x^2$. Тогда соответствующий гомоморфизму h: $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to K(x)$ „касательный вектор“ $X\in T(V)_x$ определяется формулой $Xf=h((df)_x)$.

Предположим, что многообразие V обладает k-структурой $V(k)$. При $x\in V(k)$ кольцо $\mathfrak{O}_x$ обладает естественной k-структурой $\mathfrak{O}_{x,k}$ и поле вычетов кольца $\mathfrak{O}_{x,k}$ является k-структурой на $K(x)$. Тогда $\mathrm{Der}_k(\mathfrak{O}_{x,k}, k(x))$ является k-структурой на касательном пространстве $T(V)_x$. Она изоморфна k-структуре

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-мод}}(\mathfrak{m}_{x,k}/\mathfrak{m}_{x,k}^2, k).$$

Пусть α: $V\to W$ — морфизм многообразий (или K-схем); тогда имеет место комоморфизм

$$\alpha_0\colon \mathfrak{O}_{\alpha(x)} \to \mathfrak{O}_x,$$

причем $\mathfrak{O}_x$-модуль $K(x)$, рассматриваемый как $\mathfrak{O}_{\alpha(x)}$-модуль, изоморфен модулю $K(\alpha(x))$. Следовательно, мы получаем естественное отображение

$$\mathrm{Der}_K(\mathfrak{O}_x, K(x)) \to \mathrm{Der}_K(\mathfrak{O}_{\alpha(x)}, K(\alpha(x))),$$

которое обозначим через

$$(d\alpha)_x\colon\ T(V)_x \to T(W)_{\alpha(x)}.$$

В явном виде оно задается правилом

$$(d\alpha)_x(X)(f) = X(\alpha_0(f)) \qquad (X \in T(V)_x,\ f \in \mathfrak{O}_{\alpha(x)}).$$

Если α является k-морфизмом относительно k-структур на V и W, так что $\alpha(x) \in W(k)$ при $x \in V(k)$, то, как легко видеть, дифференциал $(d\alpha)_x$ определен над k относительно описанных выше k-структур на касательных пространствах.

Дифференциал $(d\alpha)_x$ ведет себя функториально в том смысле, что

$$(d1_V)_x = 1_{T(V)_x}$$

и что если $\beta\colon W \to Z$ — морфизм многообразий, то

$$d(\beta\circ\alpha)_x = (d\beta)_{\alpha(x)} \circ (d\alpha)_x \text{ (цепное правило).}$$

Предположим, что $V = V_1 \times V_2$ — *произведение* многообразий и что $x = (x_1, x_2)$. Определим морфизмы $\alpha_i\colon V_i \to V$ $(i = 1, 2)$ формулами $\alpha_1(u) = (u, x_2)$ и $\alpha_2(y) = (x_1, y)$. Мы утверждаем, что отображение

$$(d\alpha_1)_{x_1} + (d\alpha_2)_{x_2}\colon\ T(V_1)_{x_1} \oplus T(V_2)_{x_2} \to T(V)_x$$

является изоморфизмом. Так как это утверждение является локальным, то мы можем считать многообразия V_i аффинными, скажем, $V_i = \operatorname{spec}_K(A_i)$. Тогда $V = \operatorname{spec}_K(A)$, где $A = A_1 \otimes_K A_2$. Из п. АГ.15.5 вытекает, что касательные пространства можно представить в виде $T(V)_x = \operatorname{Der}_K(A, K(x))$ и $T(V_i)_{x_i} = \operatorname{Der}_K(A_i, K(x_i))$. Имеет место равенство A-модулей $K(x) = K(x_1) \otimes_K K(x_2)$ (обе части изоморфны полю K). Следовательно, согласно п. АГ.15.7, $T(V)_x = T(V_1)_{x_1} \oplus T(V_2)_{x_2}$, и, как легко проверить, это отождествление дает нужный изоморфизм.

16.2. Касательное расслоение. Мы сопоставили касательное пространство каждой точке K-схемы V; построим теперь *касательное расслоение* $T(V)$, которое объединяет все эти векторные пространства в когерентное семейство, параметризованное многообразием V.

Пусть $K[\delta] = K \oplus K\delta$ — *алгебра двойных чисел* с одной образующей δ и с одним соотношением $\delta^2 = 0$. Обозначим через i и p соответственно вложение поля K в алгебру $K(\delta)$ и проекцию p алгебры $K(\delta)$ на поле K, которая определяется соотношением $p(\delta) = 0$;

$$K[\delta] \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} K,$$

Пусть $V(K[\delta])$ — множество точек многообразия V в $K[\delta]$ (см. п. АГ.13.1). Положим $T(V) = V(K[\delta])$ и будем рассматривать множество $T(V)$ вместе с отображениями p_V и i_V:

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[d, shift right, "p_V"'] \arrow[r, phantom, "="] & V(K[\delta]) \arrow[d, shift right] \\ V \arrow[u, shift right, "i_V"'] & V(K) \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$

индуцированными отображениями p и i. Соответствие $V \to T(V)$ функториально: если α: $V \to W$ — морфизм многообразий, то

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "p_V"'] & T(W) \arrow[d, "p_W"] \\ V \arrow[r, "\alpha"] & W \end{tikzcd}$$

— коммутативная диаграмма. Она остается коммутативной при замене отображения p на i.

Напомним, что

$$V(K[\delta]) = \mathrm{Mor}_{K\text{-схем}}(\mathrm{spec}_K(K[\delta]), V).$$

Ясно, что схема $\mathrm{spec}_K(K[\delta])$ состоит из одной точки с локальным кольцом $K[\delta]$. Следовательно, точка множества $V(K[\delta])$ соответствует точке $x \in V$ и коморфизму $\mathfrak{O}_x \to K[\delta]$. Последний можно записать в виде $e_x + \delta X$ для подходящего K-линейного отображения X: $\mathfrak{O}_x \to K$. Элементу $f \in \mathfrak{O}_x$ оно ставит в соответствие элемент $f(x) + \delta X(f)$ алгебры $K[\delta]$. Согласно п. АГ.15.9, полученные таким образом отображения X пробегают множество $\mathrm{Der}_K(\mathfrak{O}_x, K(x)) = T(V)_x$. Мы будем обозначать элемент $e_x + \delta X$ также через

$$e_x^{\delta X}$$

и рассматривать его одновременно и как гомоморфизм $\mathfrak{O}_x \to K[\delta]$, и как точку множества $T(V)$. Исходя из последней точки зрения, мы видим, что проекция p_V задается формулой

$$p_V\colon\ e_x^{\delta X} \to x.$$

(Кроме того, отображение i_V переводит точку x в точку $e_x = e_x^{\delta 0}$.) Таким образом, сказанное выше можно сформулировать следующим образом: *имеет место естественная биекция*

$$T(V)_x \to p_V^{-1}(x),$$

задаваемая соотношением

$$X \to e_x^{\delta X},$$

Предположим, что $\alpha\colon V \to W$ — морфизм многообразий. Тогда $T(\alpha)\left(e_x^{\delta X}\right) = e_x^{\delta X} \circ \alpha_0$, где $\alpha_0\colon \mathfrak{O}_{\alpha(x)} \to \mathfrak{O}_y$. Раскрывая правую часть, получаем $(e_x + \delta X) \circ \alpha_0 = e_x \circ \alpha_0 + \delta X \circ \alpha_0 = e_{\alpha(x)} + \delta (d\alpha)_x X$. Таким образом,

$$T(\alpha)\left(e_x^{\delta X}\right) = e_{\alpha(x)}^{\delta (d\alpha)_x X}.$$

Другими словами, отображение, индуцированное отображением $T(\alpha)$ на слое над точкой x, соответствует дифференциалу $(d\alpha)_x$.

16.3. $T(V)$ „является" K-схемой. Чтобы наделить касательное расслоение $T(V)$ структурой K-схемы, достаточно сделать это в случае, когда многообразие V аффинно, и убедиться, что указанная конструкция обладает надлежащими функториальными свойствами. Однако прежде мы напомним некоторые свойства симметрических алгебр.

Пусть M — модуль над (коммутативным) кольцом A. *Симметрическая алгебра* $S_A(M)$ определяется как наибольшая коммутативная факторалгебра тензорной алгебры модуля M. Обе эти A-алгебры градуированы, причем A имеет степень 0, M — степень 1. Универсальное свойство симметрической алгебры выражается отождествлением

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-алг}}(S_A(M),\ B) = \mathrm{Hom}_{A\text{-мод}}(M,\ B)$$

для всякой (коммутативной) A-алгебры B. Иначе говоря, гомоморфизм A-модулей $M \to B$ единственным образом продолжается до гомоморфизма A-алгебр $S_A(M) \to B$.

Легко установить следующие факты:

(a) Если M — свободный модуль с базисом $t_1, \ldots, t_n$, то $S_A(M) = A[t_1, \ldots, t_n]$ — кольцо полиномов.

(b) $S_A(M \oplus N) = S_A(M) \otimes_A S_A(N)$.

(c) При замене кольца $A \to A'$ имеем $S_{A'}(A' \otimes_A M) = A' \otimes_A S_A(M)$.

Пусть теперь $V = \mathrm{spec}_K(A)$ — аффинная K-схема, и пусть $\Omega = \Omega_{A/K}$ есть A-модуль K-дифференциалов (см. п. АГ.15.1). Наша цель — построить биективное отображение

$$\varphi\colon T(V) \to \mathrm{spec}_K(S_A(\Omega)),$$

которое было бы функториально по A, так чтобы отображения p_V и i_V, примененные к левой части, соответствовали в правой части вложению $A \to S_A(\Omega)$ и проекции $S_A(\Omega) \to A$, преобразующей Ω в нуль. Кроме того, если многообразие V обладает k-структурой, определенной k-алгеброй $A_k \subset A$, то отображение φ должно быть совместимо с k-структурой на $\mathrm{spec}_K(S_A(\Omega))$, определенной k-алгеброй $S_{A_k}(\Omega_k)$, где $\Omega_k = \Omega_{A_k/k}$ (см. п. АГ.15.8 и утверждение (c) выше).

Пусть

$$\varphi\left(e_x^{\delta X}\right)\colon S_A(\Omega) \to K$$

— гомоморфизм K-алгебр, определяемый следующим образом: гомоморфизм e_x: $A \to K(x)$, рассматриваемый как гомоморфизм замены колец, индуцирует гомоморфизм

$$e_x\colon\ S_A(\Omega) \to S_K(\Omega(x)),$$

где $\Omega(x) = K(x) \otimes_A \Omega$; гомоморфизм $\varphi(e_x^{\delta X})$ определим теперь как композицию гомоморфизма e_x с некоторым гомоморфизмом

$$h\colon\ S_K(\Omega(x)) \to K,$$

который будет введен ниже. Имеет место равенство

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-алг}}(S_K(\Omega(x)),\ K) = \mathrm{Hom}_{K\text{-мод}}(\Omega(x),\ K).$$

Если Ω_x — локализация модуля Ω относительно подкольца $\mathfrak{O}_x$, то $\Omega(x) = K(x) \otimes_A \Omega = K(x) \otimes_{\mathfrak{O}_x} \Omega_x = \Omega_x/\mathfrak{m}_x\Omega_x$. Кроме того, на основании п. АГ. 15.5 и п. АГ. 15.3 имеем

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-мод}}(\Omega(x),\ K) = \mathrm{Der}_K(\mathfrak{O}_x,\ K(x)) = T(V)_x.$$

Комбинируя эти отождествления, мы можем теперь выбрать элемент $h \in \mathrm{Hom}_{K\text{-алг}}(S_K(\Omega(x)),\ K)$ так, чтобы он соответствовал элементу $X \in T(V)_x$.

Легко проверить все упомянутые выше свойства отображения φ, в частности, тот факт, что отображение φ биективно.

Предположим теперь, что V является многообразием. Из нашей конструкции не вытекает, что $T(V)$ — многообразие, ибо алгебра $S_A(\Omega)$ может и не быть приведенной. Однако если модуль Ω свободен, то (см. утверждение (а) выше) $S_A(\Omega)$ является кольцом полиномов над A, так что $T(V)$ — многообразие вида $V \times K^n$ для подходящего n. Имеет место следующий более общий факт:

Если V — многообразие и если модуль Ω локально свободен, то $T(V)$ есть многообразие, локально изоморфное произведению многообразия V и аффинного пространства.

§ 17. ПРОСТЫЕ ТОЧКИ

17.1. Точка x многообразия V называется *простой* на V, если $\mathfrak{O}_x$ есть регулярное локальное кольцо (см. п. АГ.3.9). Если все точки многообразия V являются простыми, то мы называем многообразие V *гладким*.

В следующей теореме через Ω_x обозначается модуль дифференциалов $\Omega_{\mathfrak{O}_x/K}$ (см. п. АГ.15.5).

Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *x — простая точка многообразия V;*

(2) $\dim_K T(V)_x = \dim_x V$;

(3) *точка x принадлежит только одной неприводимой компоненте многообразия V и Ω_x — свободный $\mathfrak{O}_x$-модуль.*

Из предложения п. АГ.15.4 вытекает, что

$$T(V)_x = \mathrm{Der}_K(\mathfrak{O}_x,\ K(x)) = \mathrm{Hom}_{K\text{-мод}}(\Omega_x/\mathfrak{m}_x\Omega_x,\ K)$$

и

$$\Omega_x/\mathfrak{m}_x\Omega_x \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$

Кроме того (см. п. АГ. 3.9),

$$\dim_K(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) \geqslant \dim \mathfrak{O}_x\ (= \dim_x V),$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда кольцо $\mathfrak{O}_x$ регулярно. Эти замечания показывают эквивалентность условий (1) и (2).

Точка x принадлежит только одной неприводимой компоненте тогда и только тогда, когда $\mathfrak{O}_x$ — область целостности. Так как регулярные локальные кольца являются областями целостности, то в оставшейся части доказательства можно считать V неприводимым многообразием, ибо в противном случае в качестве V можно было бы взять неприводимую открытую окрестность точки x.

Пусть S — минимальное множество образующих $\mathfrak{O}_x$-модуля Ω_x. Из п. АГ. 3.2 вытекает, что $\mathrm{card}\, S = \dim_K(\Omega_x/\mathfrak{m}_x\Omega_x)$, и модуль Ω_x свободен тогда и только тогда, когда S — базис. Последнее эквивалентно тому, что $1 \otimes S$ — базис $K(V)$-модуля $K(V) \otimes_{\mathfrak{O}_x} \Omega_x$, где $K(V)$ — поле частных кольца $\mathfrak{O}_x$. Так как множество $1 \otimes S$ порождает модуль $K(V) \otimes_{\mathfrak{O}_x} \Omega_x$, то модуль Ω_x тогда и только тогда свободен над кольцом $\mathfrak{O}_x$, когда $\mathrm{card}\, S = \dim_{K(V)}(K(V) \otimes_{\mathfrak{O}_x} \Omega_x)$.

Поскольку $\Omega_x/\mathfrak{m}_x\Omega_x \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, то

$$\mathrm{card}\, S = \dim T(V)_x \geqslant \dim_x V.$$

С другой стороны, из п. АГ. 15.5 и п. АГ. 15.6, если использовать сепарабельность поля $K(V)$ над K, вытекает, что

$$K(V) \otimes_{\mathfrak{O}_x} \Omega_x = \Omega_{K(V)/K} \quad \text{и} \quad \dim_{K(V)} \Omega_{K(V)/K} =$$
$$= (\text{степень трансцендентности над } K \text{ поля } K(V)) = \dim_x V.$$

Комбинируя эти замечания, получаем:

$$\text{модуль } \Omega_x \text{ свободен над кольцом } \mathfrak{O}_x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{card}\, S = \dim_x V \Leftrightarrow \dim_K T(V)_x = \dim_x V.$$

Это показывает, что (2) $\Leftrightarrow$ (3), а это завершает доказательство теоремы.

17.2. Следствие. *Пусть V — многообразие. Тогда множество U простых точек многообразия V есть открытое плотное подмногообразие, неприводимые компоненты которого совпадают со связными компонентами.*

Из п. АГ.1.2 следует, что множество U_0 точек многообразия V, принадлежащих только одной неприводимой компоненте, открыто и что неприводимые компоненты множества U_0 совпадают с его связными компонентами. Так как $U \subset U_0$, то дело сводится к случаю, когда многообразие V неприводимо. Если Ω — когерентный пучок дифференциалов на многообразии V (см. п. АГ. 15.5), то из условия (3) теоремы вытекает, что $U = \{x \in V \mid \Omega_x$ — свободный $\mathfrak{O}_x$-модуль$\}$.

Доказывая, что множество U открыто и плотно, мы можем предполагать, что многообразие V аффинно, скажем $V = \operatorname{spec}_K(A)$, а Ω является A-модулем $\Omega_{A/K}$. В этом случае, как следует из п. АГ.3.5, множество $U' = \{x \in \operatorname{spec}(A) \mid \Omega_x$ — свободный A_x-модуль$\}$ открыто в $\operatorname{spec}(A)$. Принимая в качестве x нулевой простой идеал и учитывая, что в этом случае кольцо A_x является полем, заключаем, что множество U' непусто. Так как множество $\operatorname{spec}(A)$ неприводимо, то множество U' плотно в $\operatorname{spec}(A)$, и, следовательно, множество $U = U' \cap \operatorname{spec}_K(A)$ плотно в $\operatorname{spec}_K(A) = V$.

17.3. Теорема. *Пусть α: $V \to W$ — морфизм многообразий. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *морфизм α является (доминантным и) сепарабельным;*

(2) *существует плотное открытое подмногообразие V_0 многообразия V, такое, что отображение $(d\alpha)_x$ сюръективно для всех $x \in V_0$;*

(3) *каждая неприводимая компонента многообразия V содержит простую точку x (многообразия V), такую, что $\alpha(x)$ — простая точка многообразия W, и отображение $(d\alpha)_x$ сюръективно.*

Пусть $V' \subset V$ и $W' \subset W$ — открытые плотные подмногообразия, такие, что α индуцирует сюръективный морфизм α': $V' \to W'$. Ясно ввиду плотности множества простых точек, что теорему достаточно доказать для морфизма α'. Это позволяет свести дело к случаю, когда V и W — гладкие неприводимые аффинные многообразия. Тогда модули $\Omega_V = \Omega_{K[V]/K}$ и $\Omega_W = \Omega_{K[W]/K}$ локально свободны. После дальнейшего уменьшения многообразий V и W мы можем предполагать, что эти модули глобально свободны.

Коморфизм α_0: $K[W] \to K[V]$ индуцирует гомоморфизм модулей $\Omega_W \to \Omega_V$, и дифференциал $(d\alpha)_x$ соответствует тогда индуцированному гомоморфизму кольца

$$\operatorname{Hom}_{K[V]\text{-мод}}(\Omega_V,\ K(x))$$

в кольцо

$$\operatorname{Hom}_{K[V]\text{-мод}}(K[V] \otimes_{K[W]} \Omega_W,\ K(x)).$$

Пусть d: $M \to N$ — гомоморфизм модулей $K[V] \otimes_{K[W]} \Omega_W \to \Omega_V$. Модули M и N — свободные модули ранга $\dim W$ и $\dim V$ соответственно; пусть (f_{ij}) — матрица гомоморфизма d над кольцом $K[V]$. Ввиду изложенного выше дифференциалу $(d\alpha)_x$ соответствует матрица $(f_{ji}(x))$ над полем K. Следовательно, гомоморфизм $(d\alpha)_x$ сюръективен тогда и только тогда, когда ранг матрицы $(f_{ji}(x))$ равен $\dim W$. Отсюда вытекает, что множество таких точек x открыто, и это множество непусто в том и только том случае, когда ранг матрицы (f_{ji}) над полем $K(V)$ равен $\dim W$. Последнее в свою очередь эквивалентно инъективности гомоморфизма $\Omega_W \to \Omega_V$. Это, далее, эквивалентно условиям: (i) гомоморфизм α_0 инъективен (т. е. α — доминантный морфизм) и (ii) отображение $\mathrm{Der}_K(K(V), K(V)) \to \mathrm{Der}_K(K(W), K(V))$ сюръективно. Последнее условие означает, что K-дифференцирования подполя $K(W)$ в поле $K(V)$ продолжаются до дифференцирований $K(V)$, а это условие (см. п. АГ.15.6) характеризует сепарабельность поля $K(V)$ над полем $K(W)$.

17.4. Следствие. *Если α_i: $V_i \to W_i$ $(i = 1, 2)$ — два сепарабельных морфизма, то морфизм $\alpha_1 \times \alpha_2$: $V_1 \times V_2 \to W_1 \times W_2$ также сепарабелен.*

Это вытекает из условия (2).

§ 18. НОРМАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В этом разделе содержатся основные результаты, которые потребуются нам в § 6 гл. II для конструкции однородных пространств.

18.1. Определение. Пусть x — точка многообразия V. Говорят, что *x нормальна на V*, если нормально локальное кольцо $\mathfrak{O}_x$, т. е. если $\mathfrak{O}_x$ — область целостности, целозамкнутая в своем поле частных. В частности, такая точка x принадлежит только одной из неприводимых компонент многообразия V, т. е. точка x обладает неприводимой открытой окрестностью. Поэтому вопросы, связанные с нормальностью, обычно легко сводятся к случаю неприводимых многообразий.

Многообразие V называется *нормальным*, если каждая его точка нормальна на V.

Так, например, каждая простая точка $x \in V$ нормальна на V (ибо регулярное локальное кольцо нормально). Из следствия АГ.17.2 вытекает, что множество нормальных точек на V содержит плотное открытое подмножество; на самом деле оно само открыто.

Произведение двух нормальных многообразий само нормально (Шевалле [1], гл. V, I, предложение 3).

18.2. Нормализация. Пусть V — неприводимое алгебраическое многообразие, и пусть L — конечное (алгебраическое) расширение поля $K(V)$. Тогда существуют нормальное неприводимое многообразие V', сюръективный морфизм α: $V' \to V$ с конечными слоями и изоморфизм $K(V)$-алгебр $K(V') \to L$. Многообразие V' и морфизм α, по существу, единственны. Обычно мы отождествляем $K(V')$ с L и называем морфизм α: $V' \to V$ *нормализацией многообразия* V *в поле* L. Морфизм α определяется следующим свойством: если U — открытое аффинное подмногообразие многообразия V, то $U' = \alpha^{-1}(U)$ совпадает с $\operatorname{spec}_K(K[U]')$, где $K[U]'$ — целое замыкание $K[U]$ в L, и морфизм α индуцируется вложением $K[U] \subset K[U]' = K[U']$. Если $L = K(V)$, то мы просто говорим, что α: $V' \to V$ — *нормализация многообразия* V.

Отметим, что *нормализация аффинного многообразия будет снова аффинным многообразием; нормализация проективного* (*соответственно полного*) *многообразия будет проективным* (*соответственно полным*) *многообразием.* По поводу проективности см. Мамфорд [1], гл. III, § 8, теорема 4. Чтобы установить это утверждение для полного многообразия, необходимо показать, что морфизм $V' \times X \to X$ замкнут для любого X, коль скоро этот факт верен для многообразия V. Достаточно убедиться, что морфизм $V' \times X \to V \times X$ замкнут. Но это локальное свойство, которое нуждается в проверке лишь для аффинных многообразий V и X, а в этом случае оно вытекает из того факта (см. п. АГ. 3.6), что морфизм $\operatorname{spec}_K(B) \to \operatorname{spec}_K(A)$ сюръективен и замкнут, если B — конечное целое расширение кольца A.

Следующая теорема заимствована нами из Семинара Шевалле [1], сообщение 5, п. 2, раздел об основной теореме Зарисского.

Теорема. *Пусть* α: $V \to W$ — *доминантный морфизм неприводимых нормальных многообразий. Предположим, что слои морфизма* α *имеют одинаковую конечную размерность* n. *Тогда морфизм* α *есть нормализация многообразия* W *в поле* $K(V)$, *и* n — *сепарабельная степень поля* $K(V)$ *над полем* $K(W)$. *В частности, если* α — *бирациональный морфизм, то* α — *изоморфизм, а если морфизм* α *биективен, то поле* $K(V)$ *чисто несепарабельно над полем* $K(W)$.

Из этой теоремы можно получить следующий результат (Семинар Шевалле [1], сообщение 8, предложение 1):

Предложение. *Пусть* α: $V \to W$ — *доминантный морфизм неприводимых многообразий, и предположим, что функция* $f \in K[V]$ *постоянна на слоях морфизма* α. *Тогда элемент* f *чисто несепарабелен над полем* $K(W)$.

18.3. Предложение. *Пусть* α: $V \to W$ — *биективный морфизм многообразий, и предположим, что многообразие* W *нормально.*

Тогда

(1) *если многообразие W полно, то многообразие V также полно*;

(2) *если многообразие V аффинно, то W также аффинно.*

Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда многообразие W неприводимо. Тогда многообразие V также должно быть неприводимым, ибо морфизм α является биективным и доминантным на каждой неприводимой компоненте многообразия V.

Предположим, что множество W открыто в W, и положим $V'=\alpha^{-1}(W')$. Мы утверждаем, что включение $\alpha_0 K[W'] \subset K[V'] \cap \cap \alpha_0 K(W)$ является равенством. Так как морфизм α': $V' \to W'$ удовлетворяет всем условиям теоремы, то достаточно рассмотреть случай $W'=W$. Итак предположим, что $f \in K[V]$ и что $f=\alpha_0 h$ для некоторого $h \in K(W)$. Требуется доказать, что $h \in K[W]$, т. е. что функция h всюду определена на W. Воспользуемся следующей леммой (Семинар Шевалле [1], сообщение 8, лемма 1):

Лемма. *Пусть x — нормальная точка неприводимого многообразия W, и предположим, что функция $h \in K(W)$ не определена в точке x. Тогда существует точка $y \in W$, в которой функция $1/h$ определена и принимает значение нуль.*

Обратимся к нашему рассужденню: если функция h не определена в точке $x \in W$, выберем точку y согласно лемме. Положив $y=\alpha(z)$, мы видим, что функция $1/f=\alpha_0(1/h)$ определена и обращается в нуль в точке $z \in V$, что противоречит предположению о том, что $f \in K[V]$. Таким образом, мы показали, что

$$\alpha_0 K[W'] = K[V'] \cap \alpha_0 K[W]$$

для всех открытых множеств W' в W, и $V'=\alpha^{-1}(W')$. Предложение п. АГ.18.2 показывает, что поле $K(V)$ чисто несепарабельно над полем $\alpha_0 K(W)$. Отсюда и из только что доказанного результата следует, что кольцо $K[V']$ является целым над кольцом $\alpha_0 K[W']$. Поэтому, если β: $\tilde{W} \to W$ — нормализация многообразия W в поле $K(V)$, то β представляется в виде $\tilde{W} \xrightarrow{\gamma} V \xrightarrow{\alpha} W$, и отображение γ сюръективно.

Если теперь W — полное многообразие, то, согласно п. АГ.18.2, многообразие $\tilde{W}$ также полно, откуда следует, что полно многообразие V.

Предположим теперь, что V — аффинное многообразие. Так как кольцо $\alpha_0 K[W]$ содержит кольцо $K[V]^{p^n}$ для некоторого n ($p=\mathrm{char}(K)$), то, как легко видеть, $K[W]$ является аффинной K-алгеброй. Следовательно, имеется морфизм δ: $W \to \mathrm{spec}_K(K[W])$, и мы утверждаем, что δ — изоморфизм. Так как многообразие W нормально, то нормально и многообразие $\mathrm{spec}_K(K[W])$. Следовательно, согласно теореме п. АГ.18.2, достаточно доказать, что морфизм δ бирационален. Но это легко следует из доказанного выше факта, что кольцо $\alpha_0 K[W]$ содержит кольцо $K[V] \cap \alpha_0 K(W)$, и того факта, что $K(V)$ — поле частных кольца $K[V]$ (ибо многообразие V аффинно).

18.4. Предложение (Шевалле [1], гл. V, V, предложение 3). *Пусть α: $V \to W$ — доминантный морфизм неприводимых многообразий, и пусть $r = \dim V - \dim W$. Пусть, далее, x — точка многообразия V, такая, что точка $y = \alpha(x)$ нормальна на многообразии W. Предположим, что каждая содержащая точку x неприводимая компонента слоя морфизма α над точкой y имеет размерность r. Тогда если U — окрестность точки x в V, то $\alpha(U)$ — окрестность точки y в W*

Следствие. *Пусть α: $V \to W$ — доминантный морфизм многообразий, причем многообразие W нормально. Предположим, что размерности неприводимых компонент слоев морфизма α равны между собой. Тогда α — открытое отображение.*

18.5. Алгебраические кривые. (См. Мамфорд [1], гл. III, § 8 [1]).)

Алгебраической кривой называется алгебраическое многообразие размерности 1. В этом пункте мы будем предполагать, что все алгебраические многообразия неприводимы.

(a) *Алгебраическая кривая является гладкой тогда и только тогда, когда она нормальна.*

(b) *Пусть L — конечно порожденное расширение поля K степени трансцендентности 1. Тогда имеется, в сущности, одна полная гладкая кривая C, поле функций которой изоморфно (как K-алгебра) полю L. Кроме того, C — проективное многообразие.*

(c) *Если V — гладкая алгебраическая кривая, то доминантные морфизмы взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам K-алгебр α_0: $K(C) \to K(V)$. Если α_0 — изоморфизм, то α — открытое вложение.*

Применяя утверждение (b) к $K(V)$ и (c) к тождественному отображению $K(V) \to K(V)$, получаем:

(d) *Гладкая кривая V есть открытое подмножество единственной полной гладкой кривой $\overline{V}$.*

Из (c) вытекает также:

(e) *Если C — полная гладкая кривая, то антиизоморфизм*

$$\mathrm{Aut}_{\text{алг. мног! }}(C) \to \mathrm{Aut}_{K\text{-алг}}(K(C))$$

биективен.

1) Доказательство большинства утверждений этого пункта можно найти также у Шафаревича [1], гл. II, § 5, п. 3. — *Прим. ред.*

(f) *Пусть* α: $V \to W$ — *морфизм гладкой кривой* V *в полное многообразие* W. *Тогда* α *продолжается до морфизма* $\bar{\alpha}$: $\bar{V} \to W$.

Для доказательства мы сначала заменим многообразие W на $\overline{\alpha(V)}$ и будем предполагать, что α — доминантный морфизм. Оставляя в стороне тривиальный случай, когда W состоит из одной точки, мы можем считать, что W — (полная) кривая. Пусть π: $\tilde{W} \to W$ — ее нормализация (в поле $K(W)$). Тогда (см. п. АГ.18.2 и утверждение (а) выше) $\tilde{W}$ — полная гладкая кривая. Так как V — гладкое (и, следовательно, нормальное) многообразие, то $\alpha = \pi \circ \beta$, где β: $V \to \tilde{W}$. Согласно утверждению (с), коморфизм β_0: $K(\tilde{W}) \to K(V) = K(\bar{V})$ индуцируется морфизмом $\bar{\beta}$: $\bar{V} \to \tilde{W}$. Тогда $\pi \circ \bar{\beta} = \bar{\alpha}$ есть искомое продолжение морфизма α.

ЛИТЕРАТУРА [1]

Бурбаки (Bourbaki N.)
1. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. «Наука», М., 1965.
2. Коммутативная алгебра, «Мир», М., 1971.

Годеман (Godeman R.)
1*. Алгебраическая геометрия и теория пучков. ИЛ, М., 1961.

Гротендик, Дьедонне (Grothendick A., Dieudonné J.)
1. Eléments de géométrie algébrique, Publ. Math. IHES.

Зарисский, Самюэль (Zariski O., Samuel P.)
1. Коммутативная алгебра, т. 1, 2, ИЛ, М., 1963.

Капланский (Kaplansky I.)
1*. Введение в дифференциальную алгебру, ИЛ, М., 1959.

Ленг (Lang S.)
1*. Алгебра, «Мир», М., 1968.

Мамфорд (Mamford D.)
1. Introduction to algebraic geometry, Harvard notes.

Семинар Картана—Шевалле (Séminaire Cartan Chevalley)
1. Geometrie algebrique, Paris, 1955/1956.

Семинар Шевалле (Séminaire C. Chevalley)
1. Classifications des groupes de Lie algebriques, Paris, 1956/1958.

Шафаревич И. Р.
1*. Основы алгебраической геометрии, «Наука», М., 1972.

Шевалле (Chevalley C.)
1. Fondaments de la géométrie algébrique, Paris, 1958.

[1]) Звездочкой отмечена литература, добавленная при переводе.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ

§ 1. ПОНЯТИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

1.1. Алгебраические группы. Под *алгебраической группой* понимают множество G, снабженное согласованными структурами группы и алгебраического многообразия. Иначе говоря, отображения

(mult) $\mu\colon G \times G \to G, \quad \mu(x, y) = xy.$

(inv) $i\colon G \to G, \quad i(x) = x^{-1}$

обязаны быть морфизмами соответствующих многообразий. Если G есть k-многообразие и морфизмы μ и i определены над k [1]), то G называется *k-группой* или *группой, определенной над k* (см. § АГ.12). Из п. АГ.13.1 вытекает, что множество $G(k)$ является группой и $e \in G(k)$, где e — единица группы G.

Морфизм алгебраических групп — это гомоморфизм групп, который одновременно является морфизмом алгебраических многообразий. Утверждение „α: $G \to G'$ есть k-морфизм k-групп“ означает, что G и G' являются k-группами, и α — морфизм, определенный над k.

1.2. Через G^0 мы будем обозначать связную компоненту единицы e алгебраической группы G.

Предложение. *Пусть G — алгебраическая группа. Тогда:*

(a) *G — гладкое многообразие.*

(b) *G^0 — нормальный делитель конечного индекса группы G; смежные классы группы G относительно G^0 — это одновременно связные и неприводимые компоненты групп G. Если группа G определена над k, то и группа G^0 определена над k.*

(c) *Каждая замкнутая подгруппа конечного индекса группы G содержит G^0.*

Доказательство. (a) Многообразие группы G „однородно“, т. е. обладает транзитивной группой автоморфизмов (а именно группой движений $x \to xy$). Из того факта, что G обладает простой точкой (п. АГ.17.2), вытекает, что все точки группы G являются простыми. Кроме того, из п. АГ.17.2 следует также, что

[1]) Имеется в виду, что многообразие $G \times G$ снабжено k-структурой, которая естественным образом индуцирована k-структурой многообразия G (см. п. АГ. 6.1). — *Прим. перев.*

неприводимые компоненты группы G совпадают с ее связными компонентами.

(b) Если $x \in G^0$, то $x^{-1}G^0$ — связная компонента многообразия G, содержащая e, и потому $x^{-1}G^0 = G^0$. Отсюда следует, что $G^0 = (G^0)^{-1}$ и $G^0G^0 = G^0$, так что G^0 — подгруппа. Ясно, что левые смежные классы относительно G^0 являются связными компонентами многообразия G, и число их конечно, ибо пространство G нётерово. Наконец, если $y \in G$, то yG^0y^{-1} — связная компонента группы G, содержащая e, и, значит, совпадающая с G^0. Следовательно, G^0 — нормальный делитель группы G. Предположим, что группа G определена над k. Тогда группа G^0 и ее смежные классы определены над k_s (п. АГ.12.3). Они перемещаются между собой группой Галуа Γ поля k_s над полем k, действующей на группе G так, как описано в п. АГ.14.3. Ввиду того что $e \in G(k)$ (см. п. 1.1), группа $G^0(k_s)$ инвариантна относительно Γ, и, следовательно, группа G^0 определена над k (п. АГ.14.4).

(c) Если H — замкнутая подгруппа конечного индекса группы G, то дополнение группы H, будучи конечным объединением отличных от H смежных классов, также замкнуто. Это означает, что группа H одновременно открыта и замкнута; следовательно, группа H обязана содержать G^0.

Таким образом, понятия связности и неприводимости для алгебраических групп равносильны. Мы предпочитаем использовать термин „связная группа", ибо слово „неприводимая" употребляется в совершенно ином смысле в теории представлений групп (в том числе и алгебраических).

1.3. Предложение. *Пусть G есть k-группа и H — ее подгруппа, не обязательно замкнутая. Пусть U, V — плотные открытые подмножества в G.*

(a) $U \cdot V = G$.

(b) *$\overline{H}$ — подгруппа группы G. Если H лежит в $G(k_s)$ и инвариантна относительно группы $\mathrm{Gal}(k_s/k)$, то $\overline{H}$ определена над k.*

(c) *Если множество H конструктивно, то $H = \overline{H}$.*

Доказательство. (a) При любом $x \in G$ плотные открытые множества U и xV^{-1} должны иметь общую точку, скажем, $u = xv^{-1}$. Тогда $x = uv \in U \cdot V$.

(b) Так как $x \to x^{-1}$ — гомеоморфизм, то $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$. При $x \in H$ имеем $x\overline{H} = \overline{xH} = \overline{H}$, так что $H\overline{H} = \overline{H}$. Если $y \in \overline{H}$, то $Hy \subset \overline{H}$ и $\overline{H}y = \overline{Hy} \subset \overline{H}$. Таким образом, $\overline{H}\,\overline{H} = \overline{H}$, откуда следует, что $\overline{H}$ — подгруппа.

Утверждения, касающиеся рациональности над k, вытекают из п. АГ.14.4.

(c) Если множество H конструктивно, то из п. АГ.10.2 вытекает, что H содержит открытое плотное подмножество множества $\bar{H}$. Согласно (b), $\bar{H}$ — замкнутая подгруппа; применяя (a), получаем, что $\bar{H} = H \cdot H = H$.

1.4. Следствие. *Пусть* α: $G \to G'$ — *морфизм k-групп. Тогда*
(a) $\alpha(G)$ — *замкнутая подгруппа группы* G'; *если морфизм* α *определен над k, то группа* $\alpha(G)$ *определена над* k.
(b) $\alpha(G^0) = (\alpha(G))^0$.
(c) $\dim G = \dim \ker(\alpha) + \dim \alpha(G)$.

Доказательство. (a) Согласно п. АГ.10.2, множество $\alpha(G)$ конструктивно и, следовательно, замкнуто ввиду утверждения (c) предложения 1.3. Второе утверждение вытекает теперь из п. АГ.14.5.

(b) В силу утверждения (a) $\alpha(G^0)$ — замкнутая подгруппа. Кроме того, она связна и имеет конечный индекс в группе $\alpha(G)$. Применив утверждение (c) предложения п. 1.2, получим, что $\alpha(G^0) = (\alpha(G))^0$.

(c) Из п. АГ.10.1 следует, что для каждого x из плотного открытого подмножества множества $\alpha(G)$ имеет место равенство $\dim G - \dim \alpha(G) = \dim \alpha^{-1}(x)$. Однако, как легко видеть, $\dim \alpha^{-1}(x) = \dim \ker(\alpha)$.

1.5. Аффинные группы. Пусть $G = \mathrm{spec}_K(A)$ — аффинная алгебраическая группа, $A = K[G]$. Мы хотим выразить структуру алгебраической группы G с помощью алгебры A.

$$e \in G \quad : \quad e\colon A \to K, \quad e(f) = f(e).$$

(Этот гомоморфизм ранее обозначался через e_e.)

$$\mu\colon G \times G \to G \quad : \quad \mu_0\colon A \to A \otimes_K A.$$

Если $\mu_0 f = \sum g_i \otimes h_i$, то $f(xy) = \sum g_i(x) h_i(y)$.

$$i\colon G \to G \quad : \quad i_0\colon A \to A,$$

где $(i_0 f)(x) = f(i(x)) = f(x^{-1})$. Чтобы выразить аксиомы группы, рассмотрим отображения

$$p\colon G \to G \quad : \quad p_0\colon A \to A,$$

задаваемые формулами

$$p(x) = e, \quad (p_0 f)(x) = f(e).$$

Групповые аксиомы выражаются тем фактом, что следующие диаграммы коммутативны:

(I)
$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "\mu\times 1"] \arrow[d, "1\times\mu"'] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G\times G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A & A\otimes A \arrow[l, "\mu_0\otimes 1"'] \\ A\otimes A \arrow[u, "1\otimes\mu_0"] & A \arrow[l, "\mu_0"] \arrow[u, "\mu_0"'] \end{tikzcd}.$$

(II)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(p,\,1)}"] \arrow[d, "{(1,\,p)}"'] \arrow[dr, "1"] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G\times G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & A\otimes A \arrow[l, "{(r_0,\,1)}"'] \\ A\otimes A \arrow[u, "{(1,\,p_0)}"] & A \arrow[l, "\mu_0"] \arrow[u, "\mu_0"'] \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd}$$

(III)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(i,\,1)}"] \arrow[d, "{(1,\,i)}"'] \arrow[dr, "p"] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G\times G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & A\otimes A \arrow[l, "{(i_0,\,1)}"'] \\ A\otimes A \arrow[u, "{(1,\,i_0)}"] & A \arrow[l, "\mu_0"] \arrow[u, "\mu_0"'] \arrow[ul, "p_0"'] \end{tikzcd}$$

Отметим, что p_0 есть композиция отображения $e\colon A\to K$ и вложения $K\subset A$. Таким образом, группа G определяется алгеброй A и гомоморфизмами e, μ_0, i_0, удовлетворяющими выписанным трем аксиомам.

Если задана алгебра A и гомоморфизмы e и μ_0, удовлетворяющие аксиомам (I) и (II), то говорят об ассоциативной *алгебре Хопфа* с единицей и μ_0 называют *диагональным отображением.*

Пусть C — произвольная K-алгебра; на множестве

$$G(C)=\mathrm{Hom}_{K\text{-алг}}(A,\ C)$$

можно задать структуру группы, сопоставляя каждой паре элементов $x,\ y\in G(C)$ их произведение xy, равное композиции отображений

$$A\xrightarrow{\mu_0}A\otimes A\xrightarrow{x\otimes y}C\otimes C\xrightarrow{m_C}C,$$

где гомоморфизм m_C соответствует умножению в C. Здесь единицей группы $G(C)$ оказывается отображение $A\xrightarrow{e}K\to C$, где $K\to C$ — естественное вложение, а обратным к элементу $x\in G(C)$ является сквозное отображение $A\xrightarrow{i_0}A\xrightarrow{x}C$. Если $C\to C'$ — гомоморфизм алгебр, то $G(C)\to G(C')$ — гомоморфизм групп. Вообще для любой (не обязательно аффинной) алгебраической группы ее функтор точек $C\to G(C)$ является функтором из категории колец в категорию групп [1]).

[1]) Этот функтор называется *групповой схемой над* K. Аналогичным образом он может быть определен для любого подкольца $R\subset K$, в частности для кольца целых чисел $\mathbf{Z}$. В последнем случае иногда говорят просто о групповой схеме. — *Прим. ред.*

1.6. Примеры[1]). (1) *Аддитивная группа* $\mathbf{G}_a$. Ее аффинное кольцо $k[\mathbf{G}_a]$ является кольцом полиномов от одной переменной $k[\mathbf{G}_a] = k[T]$.

$$\mu_0(T) = (T \otimes 1) + (1 \otimes T); \; i_0(T) = -T, \; e(T) = 0.$$

(2) *Полная линейная группа* $\mathbf{GL}_n$. Ее аффинное кольцо имеет вид

$$k[\mathbf{GL}_n] = k\left[T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{nn}, D^{-1}\right],$$

где $D = \det(T_{ij})$. Таким образом, $\mathbf{GL}_n$ — главное открытое подмножество $(K^{n^2})_D$ в аффинном n^2-мерном пространстве. Имеем

$$e(T_{ij}) = \delta_{ij}, \; \mu_0(T_{ij}) = \sum_h T_{ih} \otimes T_{hj}$$

и

$$i_0(T_{ij}) = (-1)^{i+j} D^{-1} \det(T_{rs})_{r \neq i,\, s \neq j}.$$

(3) *Мультипликативная группа* $\mathbf{GL}_1$ в литературе иногда обозначается через $\mathbf{G}_m$. В качестве частного случая выписанных формул получаем

$$k[\mathbf{GL}_1] = k\left[T, T^{-1}\right],$$
$$e(T) = 1, \; \mu_0(T) = T \otimes T, \; i_0(T) = T^{-1}.$$

(4) *Специальная линейная группа* $\mathbf{SL}_n$ является ядром морфизма

$$\det\colon \mathbf{GL}_n \to \mathbf{GL}_1,$$

так что $k[\mathbf{SL}_n] = k[T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{nn}]/(\det(T_{ij}) - 1)$. Отображения μ_0 и i_0 индуцируются отображениями μ_0 и i_0 для $k[\mathbf{GL}_n]$. Подобное замечание справедливо для любых замкнутых подгрупп группы $\mathbf{GL}_n$, в частности подгрупп, перечисленных в следующих примерах.

(5) Группа *верхних треугольных матриц*

$$\mathbf{T}_n = \{g \in \mathbf{GL}_n \mid g_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad j < i\}$$

и группа *верхних унипотентных треугольных матриц*

$$\mathbf{U}_n = \{g \in \mathbf{T}_n \mid g_{ii} = 1 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)\}.$$

$\mathbf{T}_n$ — полупрямое произведение группы $\mathbf{U}_n$ и *диагональной* группы

$$\mathbf{D}_n = \{g \in \mathbf{GL}_n \mid g_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j)\}.$$

(6) *Симплектическая группа*

$$\mathbf{Sp}_{2n} = \{g \in \mathbf{GL}_{2n} \mid {}^t g J g = J\},$$

[1]) В этих примерах все группы определены над простым подполем; автор везде указывает k-структуру аффинного кольца группы G. — *Прим. ред.*

где ${}^tg$ обозначает матрицу, транспонированную к g, и

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

(7) Если S — невырожденная симметричная $(n\times n)$-матрица, то группа

$$\mathbf{O}(S)=\{g\in \mathbf{GL}_n \mid {}^tgSg=S\}$$

называется *ортогональной группой* матрицы S.

(8) Пусть V — конечномерное векторное пространство и $S_K(V^*)$ — симметрическая алгебра его двойственного пространства V^*. Тогда мы можем отождествить V с аффинным многообразием $\operatorname{spec}_K(S_K(V^*))$. В самом деле, для любой K-алгебры B имеем

$$\operatorname{Hom}_{K\text{-алг}}(S_K(V^*),\ B)=\operatorname{Hom}_{K\text{-мод}}(V^*,\ B)=B\otimes_K V.$$

В том случае, когда $B=K$, это приводит к биективному отображению $V\to\operatorname{spec}_K(S_K(V^*))$, в результате чего V становится многообразием, причем точки многообразия V в алгебре B — это в точности элементы B-модуля

$$V(B)=B\otimes_K V,$$

полученного заменой кольца $K\to B$. Можно превратить многообразие V в алгебраическую группу, если использовать естественное сложение $V\times V\to V$.

Пусть V_k — некоторая k-структура векторного пространства V; тогда k-структура пространства V как многообразия задается k-подалгеброй $S_k(V_k^*)$ алгебры $S_K(V^*)$. В том случае, когда B есть k-алгебра, мы точно так же, как и выше, получаем, что $V(B)=B\otimes_k V_k$.

Векторное пространство $E=\operatorname{End}_{K\text{-мод}}(V)$ также можно превратить в многообразие, и тогда

$$E(B)=B\otimes_K E=B\otimes_K \operatorname{End}_{K\text{ мод}}(V)=$$
$$=\operatorname{End}_{B\text{-мод}}(B\otimes V)=\operatorname{End}_{B\text{-мод}}(V(B))\ ^{1}).$$

Тем самым действие алгебры E на V продолжается естественным образом до функтора точек.

По отношению к любому базису пространства V определитель $\det$ есть полином с целыми коэффициентами от матричных координат кольца эндоморфизмов E. Таким образом, если пространство V имеет k-структуру V_k, то $E_k=\operatorname{End}_{k\text{-мод}}(V_k)$ является k-структурой на алгебре E, и, очевидно, определитель $\det\in S_K(E^*)$ определен над k. Главное k-открытое множество

$$E_{\det}=\{g\in E \mid \det(g)\neq 0\}$$

---

[1]) См., например, Кэртис и Райнер [1], лемма (26.5). — *Прим. перев.*

обозначается через $GL(V)$ или GL_V. Оно является группой относительно умножения в алгебре E. Так как коэффициенты обратной матрицы выражаются в виде полиномов от коэффициентов исходной матрицы и $\det^{-1}$, то, очевидно, $GL(V)$ — алгебраическая группа. Кроме того, если B — произвольная K-алгебра, то

$$GL_V(B) = \{g \in E(B) \mid \text{определитель } \det(g) \text{ обратим}\},$$

где мы отождествили $E(B)$ с кольцом эндоморфизмов свободного B-модуля $V(B)$. Таким образом,

$$GL_V(B) = \mathrm{Aut}_{B\text{-мод}}(B \otimes_K V).$$

Замкнутая подгруппа группы GL_V называется *линейной алгебраической группой*[1]. Морфизм $\alpha: G \to GL_V$ алгебраических групп называется *рациональным* (*линейным*) *представлением* группы G. Если G является k-группой, то мы говорим, что представление α *определено над* k или *k-рационально*, если это представление является k-морфизмом относительно k-структуры на GL_V, индуцированной указанным выше способом какой-либо k-структурой пространства V. Это означает, что относительно какого-либо k-рационального базиса пространства V матричные элементы $\alpha(g)_{ij}$ являются k-рациональными функциями $G \to K$. Так как все эти функции имеют вид $g \to h(\alpha(g)(v))$ для подходящих $v \in V_k$ и $h \in V_k^*$, то отсюда следует, что *представление* $\alpha: G \to GL_V$ *будет k-рациональным тогда и только тогда, когда соответствующее отображение* $G \times V \to V$ *является k-морфизмом многообразий.*

Представление $\alpha: G \to GL(V)$ называется *точным*, если оно является изоморфизмом группы G с замкнутой подгруппой $\alpha(G)$ группы GL_V, или, другими словами, если α — замкнутое вложение.

(9) *Мультипликативная группа алгебры.* Пусть Λ — конечномерная (не обязательно коммутативная) K-алгебра, и пусть N — норма $N_{\Lambda/K}: \Lambda \to K$ алгебры Λ (т. е. N — определитель регулярного представления). Рассматривая Λ как аффинное пространство, мы видим, что группа $\mathbf{GL}_1(\Lambda)$ обратимых элементов алгебры Λ является главным открытым множеством, определенным нормой N. Следовательно, $\mathbf{GL}_1(\Lambda)$ — аффинная алгебраическая группа, являющаяся „рациональным многообразием“. Последнее означает, что многообразие $\mathbf{GL}_1(\Lambda)$ неприводимо и что его поле функций $K(\mathbf{GL}_1(\Lambda))$ является полем рациональных функций (от $\dim_K \Lambda$ переменных).

---

[1]) Начиная с этого момента автор переходит полностью на теоретико-множественную точку зрения, и в дальнейшем схемная техника почти не используется. Это в особенности относится к последующим главам. С учетом характера предыдущего изложения этот переход представляется слишком резким, хотя для этого имеется определенное объяснение (см. предисловие редактора).— *Прим. ред.*

Если Λ обладает k-структурой, заданной k-подалгеброй Λ_k, то норма N определена над k и $\mathbf{GL}_1(\Lambda)$ становится k-группой (см. п. АГ. 12.1). В этом случае поле $k(\mathbf{GL}_1(\Lambda))$ является чисто трансцендентным расширением поля k, т. е. группа $\mathbf{GL}_1(\Lambda)$ „k-рациональна“. Для любой k-алгебры k' точки $\mathbf{GL}_1(\Lambda)(k')$ образуют мультипликативную группу $\mathbf{GL}_1(\Lambda(k'))$ алгебры $\Lambda(k') = \Lambda_k \otimes_k k'$.

1.7. Действия групп на многообразиях. *Пространство алгебраических преобразований* есть тройка (G, V, α), где G — алгебраическая группа, V — многообразие и $\alpha: G \times V \to V$, $(g, x) \to gx = \alpha(g, x)$, — морфизм, удовлетворяющий условиям

$$ex = x \text{ и } g(hx) = (gh)x$$

для всех $x \in V$ и всех $g, h \in G$. Имея в виду эту ситуацию, мы иногда будем говорить, что „G действует рационально на многообразии V“. Если группа G и многообразие V определены над k, то мы говорим, что G действует „*k-рационально*“, если морфизм α определен над k. Обычно мы будем использовать обозначение gx, $g \cdot x$ или $g(x)$, опуская символ α.

Пусть M и N — подмножества многообразия V. Введем обозначение

$$\mathrm{Tran}_G(M, N) = \{g \in G \mid gM \subset N\}.$$

Подгруппа группы G

$$N_G(M) = \mathrm{Tran}_G(M, M)$$

называется *нормализатором* множества M в группе G. Если M состоит из одной точки x, то

$$G_x = N_G(\{x\})$$

называется *стабилизатором* или *стационарной подгруппой* точки $x \in V$ в группе G, а множество

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

называется *орбитой* точки x (относительно G). Множество

$$Z_G(M) = G^M = \bigcap_{x \in M} G_x$$

называется *централизатором* множества M в группе G.

Предложение. *Пусть k-группа G действует k-рационально на k-многообразии V, и пусть M и N — подмножества многообразия V. Тогда*

(a) $\mathrm{Tran}_G(M, N) \subset \mathrm{Tran}_G(\overline{M}, \overline{N})$, *и если множество N замкнуто, то имеет место равенство;*

(b) *если множество N является k-замкнутым и $M \subset V(k)$, то множество* $\mathrm{Tran}_G(M, N)$ *является k-замкнутым;*

(c) *если* $M \subset V(k)$, *то* $Z_G(\overline{M}) = Z_G(M)$ *и группа* $N_G(\overline{M})$ *является* k*-замкнутой.*

Доказательство. (a) Если $g(M) \subset N$, то $g\overline{M} = \overline{gM} \subset \overline{N}$. Если $\overline{N} = N$, то $g\overline{M} \subset \overline{N}$ влечет за собой $gM \subset N$.

(b) Определим морфизм $\alpha_x : G \to V$, полагая $\alpha_x(g) = gx$ при $x \in V$. Тогда если $x \in V(k)$, то морфизм α_x определен над k, так что $\alpha_x^{-1}(N) = \mathrm{Tran}_G(\{x\}, N)$ есть k-замкнутое множество. Так как $M \subset V(k)$, то $\mathrm{Tran}_G(M, N) = \bigcap_{x \in M} \alpha_x^{-1}(N)$ — также k-замкнутое множество.

(c) Для любого $g \in G$ множество точек многообразия V, неподвижных относительно g, замкнуто [ибо многообразия отделимы (см. п. АГ. 6.2)]. Следовательно, $Z_G(M) = Z_G(\overline{M})$. Согласно утверждению (b), при $x \in V(k)$ множество G_x является k-замкнутым; тогда и множество $Z_G(M) = \bigcap_{x \in M} G_x$ также k-замкнуто.

Наконец, $N_G(\overline{M}) = \mathrm{Tran}_G(\overline{M}, \overline{M}) = \mathrm{Tran}_G(M, \overline{M})$ (см. (a)), а множество $\mathrm{Tran}_G(M, \overline{M})$ является k-замкнутым ввиду утверждения (b).

Замечания. (1) Множество $\mathrm{Tran}_G(M, N)$ в утверждении (b) не всегда определено над k, даже если множество N определено над k и $M \subset V(k)$.

(2) Предложение применяют обычно к действию группы G на себе посредством внутренних автоморфизмов.

1.8. Лемма о замкнутых орбитах. Следующий простой результат является важным техническим инструментом в теории алгебраических групп.

Предложение. *Пусть* G — *алгебраическая группа, действующая рационально на непустом многообразии* V. *Тогда каждая орбита является гладким многообразием, открытым в своем замыкании в* V. *Ее граница есть объединение орбит строго меньшей размерности. В частности, орбиты минимальной размерности замкнуты.*

Доказательство. Пусть $M = G(x)$ — орбита элемента $x \in V$. Так как M — образ морфизма $g \to gx$, то из п. АГ.10.2 следует, что M содержит плотное открытое подмножество своего замыкания $\overline{M}$. Из транзитивности действия группы G вытекает теперь, что сама орбита M открыта в $\overline{M}$. Следовательно, граница $\overline{M} - M$ замкнута, меньшей размерности и инвариантна относительно G, ибо множество $\overline{M}$ инвариантно относительно G. Гладкость M вытекает из однородности множества относительно действия группы G.

Следствие. *Существуют замкнутые орбиты.*

1.9. Сдвиги. Пусть (G, V, α) — пространство алгебраических преобразований, причем группа G действует k-рационально на многообразии V. Тогда морфизму $\alpha: G \times V \to V$ соответствует коморфизм α_0 аффинных колец

$$\alpha_0: K[V] \to K[G] \otimes_K K[V],$$

причем $\alpha_0 k[V] \subset k[G] \otimes_k k[V]$, и коморфизм α_0 полностью определяется своим ограничением на $k[V]$.

Обозначим через λ_g коморфизм морфизма $x \to g^{-1}x$, $g \in G$. Тогда

$$f \to \lambda_g f, \qquad (\lambda_g f)(x) = f(g^{-1}x)$$

является линейным автоморфизмом алгебры $K[V]$, который мы будем называть *левым сдигом* функций на элемент g. Показатель -1 требуется для того, чтобы отображение $g \to \lambda_g$ было гомоморфизмом, т. е. чтобы $\lambda_g \cdot \lambda_h = \lambda_{gh}$ [1]).

Предложение. *Пусть F — конечномерное векторное подпространство алгебры $K[V]$. Тогда существует конечномерное подпространство E, которое* (i) *содержит F,* (ii) *определено над k и* (iii) *инвариантно относительно левых сдвигов на элементы $g \in G$. Кроме того, для того чтобы F было инвариантным относительно левых сдвигов, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_0 F \subset K[G] \otimes_K F.$$

Доказательство. Расширив F, мы можем считать его определенным над k. Кроме того, можно считать, что F порождается одной функцией $f \in k[V]$, так как для перехода к общему случаю следует просто взять сумму пространств E, построенных для каждого элемента k-базиса пространства F.

Пусть $\alpha_0 f = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes h_i \in k[G] \otimes_k k[V]$, и предположим, что число n слагаемых в этой сумме минимально. Тогда при $g \in G$

$$(\lambda_g f)(x) = f(g^{-1}x) = \sum f_i(g^{-1}) h_i(x), \quad \lambda_g f = \sum f_i(g^{-1}) h_i,$$

т. е. функция $\lambda_g f$ является линейной комбинацией функций h_i с коэффициентами $f_i(g^{-1}) \in K$. Следовательно, существует конечномерное подпространство алгебры $K[V]$, определенное над k и содержащее все элементы $\lambda_g f$ $(g \in G)$; оно, очевидно, удовлетворяет всем трем условиям.

Остается доказать последнее утверждение. Пусть F — подпространство алгебры $K[V]$, и пусть $\{f_i\} \cup \{h_j\}$ — базис алгебры $K[V]$, такой, что $\{f_i\}$ — базис F. При $f \in F$ и $g \in G$ имеем

$$\lambda_g f = \sum r_i(g^{-1}) f_i + \sum s_j(g^{-1}) h_j,$$

[1]) См. также Шевалле [1], т. 2, гл. II, § 1. — *Прим. ред.*

где

$$\alpha_0 f = \sum r_i \otimes f_i + \sum s_j \otimes h_j.$$

Следовательно, $\lambda_g f \in F \Leftrightarrow s_j(g^{-1}) = 0$ для всех j. Варьируя $g \in G$ и $f \in F$, видим, что $\lambda_g F \subset F$ для всех $g \in G \Leftrightarrow \alpha_0 F \subset K[G] \otimes_K F$. Предложение доказано.

Рассмотрим частный случай, когда $V = G$ и группа G действует на себе посредством левых и правых сдвигов. Более точно, элемент $(g, h) \in G \times G$ действует на элемент $x \in G$ по формуле $x \to gxh^{-1}$. Таким образом, мы получаем два действия группы G на функциях $f \in K(G)$:

$$\textit{левые сдвиги: } (\lambda_g f)(x) = f(g^{-1}x),$$
$$\textit{правые сдвиги: } (\rho_g f)(x) = f(xg).$$

Отображения $g \to \lambda_g$, $g \to \rho_g$ — гомоморфизмы группы G: $\lambda_{gh} = \lambda_g \lambda_h$, $\rho_{gh} = \rho_g \rho_h$, и, кроме того, $\lambda_g \rho_h = \rho_h \lambda_g$ для всех $g, h \in G$, т. е. операторы λ_g и ρ_h перестановочны.

Из доказанного предложения вытекает

Следствие. *Каждое конечномерное подпространство F алгебры $K[G]$ содержится в конечномерном подпространстве E, определенном над k, которое инвариантно относительно левых и правых сдвигов на элементы группы G.*

1.10. Предложение. *Пусть G — аффинная k-группа. Тогда она k-изоморфна определенной над k замкнутой подгруппе группы $\mathbf{GL}_n$ (для подходящего n).*

Доказательство. Из п. 1.9 следует, что мы можем выбрать инвариантное относительно правых сдвигов подпространство $E \subset K[G]$ и базис $f_1, \ldots, f_n$ в нем так, что $k[G] = k[f_1, \ldots, f_n]$. Тогда, согласно п. 1.9, $\mu_0 E \subset E \otimes_K K[G]$. Таким образом, для каждого i

$$\mu_0 f_i = \sum_j f_j \otimes m_{ji}$$

при подходящих $m_{ji} \in k[G]$. При $g \in G$

$$(\rho_g f_i)(x) = f_i(xg) = \sum f_i(x) m_{ji}(g),$$

т. е.

$$\rho_g f_i = \sum_j m_{ji}(g) f_i.$$

Отсюда вытекает, что

$$\alpha\colon G \to \mathbf{GL}_n, \quad \alpha(g) = (m_{ji}(g)),$$

— морфизм алгебраических групп, очевидно, определенный над k, ибо $m_{ji} \in k[G]$. В самом деле, коморфизм

$$\alpha_0\colon\ k[\mathbf{GL}_n] = k[T_{11}, \ldots, T_{nn}, D^{-1}] \to k[G]$$

определяется соотношениями $\alpha_0(T_{ji}) = m_{ji}$.

Далее, так как $f_i(x) = f_i(ex) = \sum\limits_j f_j(e)\, m_{ji}(x)$, то $f_i = \sum\limits_j f_j(e)\, m_{ji} \in \operatorname{im}(\alpha_0)$ для каждого i. Следовательно, коморфизм α_0 сюръективен, так что α — замкнутое вложение. Известно (см. п. 1.4), что группа $G' = \alpha(G)$ определена над k, так что морфизм α является k-изоморфизмом $G \to G'$, что доказывает предложение.

Замечание. Из аналогичных соображений легко следует, что если E — любое конечномерное правоинвариантное подпространство алгебры $K[G]$, то гомоморфизм $\alpha\colon G \to GL(E)$, индуцированный правыми сдвигами, является рациональным представлением группы G.

1.11. Действия групп на группах; полупрямые произведения. Пусть G и H — произвольные k-группы, и пусть $\alpha\colon G \times H \to H$ — действие группы G на H. (Это означает, что элементы группы G действуют как автоморфизмы группы H.) Характерный пример такой ситуации возникает, когда G и H являются подгруппами некоторой большей группы, причем G нормализует H, и действие индуцируется сопряжением: $\alpha(g, h) = ghg^{-1}$. Более частный пример доставляет конструкция *полупрямого произведения*

$$H \cdot G,$$

которое получается следующим образом: на многообразии $H \times G$ зададим умножение по формуле

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1\alpha(g_1, h_2), g_1g_2).$$

Легко проверить, что при этом $H \cdot G$ становится группой. Например,

$$(h, g)^{-1} = \left(\alpha(g^{-1}, h)^{-1}, g^{-1}\right).$$

Кроме того, мы имеем точную последовательность морфизмов

$$1 \to H \xrightarrow{i} H \cdot G \xrightarrow{p} G \to 1$$

и сечение $s\colon G \to H \cdot G$ морфизма p, задаваемые формулами:

$$i(h) = (h, e), \quad p(h, g) = g, \quad s(g) = (e, g).$$

Если морфизм α определен над k, то группа $H \cdot G$ обладает естественной k-структурой, такой, что i, p и s оказываются k-морфизмами. Морфизм i является изоморфизмом группы H

с нормальным делителем iH группы $H \cdot G$, а морфизм α индуцируется сопряжением группы iH с помощью группы sG:

$$(e, g)(h, e)(e, g)^{-1} = (\alpha(g, h), e).$$

Предположим, что G' — алгебраическая группа, и пусть G и H — ее замкнутые подгруппы, причем G нормализует H. Будем говорить, что группа G' — *полупрямое произведение подгрупп* G и H, если отображение умножения

$$H \times G \to G', \qquad (h, g) \to hg$$

является изоморфизмом многообразий [1]). Тогда отображение $\alpha(g, h) = ghg^{-1}$ задает действие группы G на группе H, так что группа G' изоморфна построенной выше группе $H \cdot G$.

§ 2. ГРУППОВОЕ ЗАМЫКАНИЕ. РАЗРЕШИМЫЕ И НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

2.1. Групповое замыкание. Пусть M—подмножество k-группы G. Обозначим через $\mathscr{A}(M)$ пересечение всех замкнутых подгрупп группы G, содержащих M; следовательно, $\mathscr{A}(M)$ — замкнутая подгруппа группы G, содержащаяся во всякой замкнутой подгруппе, содержащей M. Из п. 1.3 получаем

(a) *Если M — подгруппа группы G, то* $\mathscr{A}(M) = \overline{M}$.

Положим $N = M \cup e \cup M^{-1}$ и обозначим через N_m образ произведения вложений α_m: $N \times \ldots \times N \to G$. Тогда $H = \bigcup_m N_m$ — подгруппа, порожденная множеством M, и из (а) следует, что $\mathscr{A}(M) = \overline{H}$.

Если M — определенное над k подмногообразие многообразия G, то и N — подмногообразие, определенное над k. Так как морфизм α_m определен над k, то, согласно п. АГ.14.5, многообразие $\overline{N}_m$ определено над k. Из п. АГ.14.6 вытекает теперь, что многообразие $\mathscr{A}(M) = \overline{H}$ также определено над k, ибо является замыканием объединения $\bigcup_m \overline{N}_m$. Таким образом, мы доказали утверждение

---

[1]) Если $GH = G'$ и $G \cap H = (e)$, то, вообще говоря, G' не является полупрямым произведением G и H в смысле теории алгебраических групп. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы алгебраическая группа G' была полупрямым произведением подгрупп G и H, состоит в трансверсальности алгебр Ли $L(G)$ и $L(H)$, т. е. $L(G) \cap L(H) = (0)$. Это легко следует из определения алгебры Ли алгебраической группы п. 3.3 и АГ.16.1. В случае полей нулевой характеристики $G \cap H = (e) \Leftrightarrow L(G) \cap L(H) = (0)$ (см. ниже п. 6.12), следовательно, в этом случае требование изоморфности многообразий $G \times H \to G'$ всегда выполнено. — *Прим. ред.*

(b) *Если M — подмногообразие, определенное над k, то группа $\mathscr{A}(M)$ определена над k.*

(c) *Если M_i — подмножество алгебраической группы G_i $(i=1, 2)$, то $\mathscr{A}(M_1 \times M_2) = \mathscr{A}(M_1) \times \mathscr{A}(M_2)$.*

Действительно, $\mathscr{A}(M_1) \times \mathscr{A}(M_2)$ — замкнутая подгруппа группы $G_1 \times G_2$, содержащая $M_1 \times M_2$, и, следовательно, $\mathscr{A}(M_1 \times M_2)$. С другой стороны, $\mathscr{A}(M_1 \times M_2)$ содержит $M_1 \times \{e\}$ и, следовательно, содержит $\mathscr{A}(M_1 \times \{e\}) = \mathscr{A}(M_1) \times \{e\}$. Аналогичным образом, $\mathscr{A}(M_1 \times M_2) \supset \{e\} \times \mathscr{A}(M_2)$. Отсюда вытекает, что $\mathscr{A}(M_1 \times M_2) \supset \supset \mathscr{A}(M_1) \times \mathscr{A}(M_2)$.

(d) *Пусть M и N — такие подмножества группы G, что N нормализует (соответственно централизует) M. Тогда группа $\mathscr{A}(N)$ нормализует (соответственно централизует) группу $\mathscr{A}(M)$.*

Обозначим через $C(X)$ нормализатор (соответственно централизатор) подмножества $X \subset G$ в группе G. По предположению $N \subset C(M)$ и, очевидно, $C(M) \subset C(\mathscr{A}(M))$. Из п. 1.7 вытекает, что $C(\mathscr{A}(M))$ — замкнутая подгруппа; следовательно, $\mathscr{A}(N) \subset C(\mathscr{A}(M))$.

(e) *Если M и N — подгруппы группы G, то замыкания групп (M, N) и $(\overline{M}, \overline{N})$ совпадают.*

Пусть c: $G \times G \to G$, $c(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$. Так как группа $M \times N$ плотна в группе $\overline{M} \times \overline{N}$, то множество $c(M \times N)$ плотно в $c(\overline{M} \times \overline{N})$, так что $\mathscr{A}(c(M \times N)) = \mathscr{A}(c(\overline{M} \times \overline{N}))$. Однако, из (a) вытекает, что эти группы являются замыканиями групп (M, N) и $(\overline{M}, \overline{N})$ соответственно.

(f) *Если α: $G \to G'$ — морфизм алгебраических групп, то*

$$\alpha(\mathscr{A}(M)) = \mathscr{A}(\alpha(M)).$$

Имеем $\alpha(\mathscr{A}(M)) \supset \alpha(M)$, и, согласно п. 1.4, группа $\alpha(\mathscr{A}(M))$ замкнута. Следовательно, $\alpha(\mathscr{A}(M)) \supset \mathscr{A}(\alpha(M))$. С другой стороны, множество $\alpha^{-1}\mathscr{A}(\alpha(M))$ замкнуто (ибо α непрерывен), содержит M и, следовательно, $\mathscr{A}(M)$. Применяя морфизм α, получаем

$$\mathscr{A}(\alpha(M)) \supset \alpha(\alpha^{-1}\mathscr{A}(\alpha(M))) \supset \alpha(\mathscr{A}(M)),$$

что доказывает утверждение.

2.2. Предложение. *Пусть f_i: $V_i \to G$ $(i \in I)$ — семейство k-морфизмов неприводимых k-многообразий V_i в k-группу G, и предположим, что $e \in f_iV_i = W_i$ для каждого $i \in I$. Положим $M = \bigcup W_i$, $i \in I$. Тогда $\mathscr{A}(M)$ — связная подгруппа группы G, определенная над k. Кроме того, существует такое конечное подмножество $(\alpha(1), \ldots, \alpha(n))$ множества I, что $\mathscr{A}(M) = W^{e_1}_{\alpha(1)} \ldots W^{e_n}_{\alpha(n)}$, где все $e_i = \mp 1$.*

Доказательство. Расширив, если необходимо, множество I, мы можем считать, что среди f_i имеются морфизмы

$x \to f_i(x)^{-1}$. Если $\alpha = (\alpha(1), \ldots, \alpha(n))$ — конечное подмножество в I, то положим $W_\alpha = W_{\alpha(1)} \ldots W_{\alpha(n)}$. Множество W_α является образом k-морфизма

$$V_{\alpha(1)} \times \ldots \times V_{\alpha(n)} \xrightarrow{f_{\alpha(1)} \times \cdots \times f_{\alpha(n)}} G \times \ldots \times G \xrightarrow{\text{mult}} G.$$

Отсюда следует, что W_α — конструктивные множества и что $\overline{W}_\alpha$ — неприводимое k-многообразие (см. п. АГ.10.2). Поэтому для подходящего α многообразие $\overline{W}_\alpha$ максимально (ибо топологическое пространство группы G нётерово).

Если α и β — две конечные последовательности, то

$$\overline{W}_\beta \cdot \overline{W}_\gamma \subset \overline{W}_{(\beta, \gamma)}. \tag{1}$$

В самом деле, при $x \in W_\gamma$ отображение $y \to y \cdot x$ переводит W_β в $W_{(\beta, \gamma)}$ и, следовательно, $\overline{W}_\beta$ в $\overline{W}_{(\beta, \gamma)}$. Поэтому $x \cdot \overline{W}_\gamma \subset \overline{W}_{(\beta, \gamma)}$ для каждого $x \in \overline{W}_\beta$, откуда и вытекает соотношение (1). Так как многообразие $\overline{W}_\alpha$ максимально, то, в частности, это приводит при любом β к соотношению

$$\overline{W}_\alpha \subset \overline{W}_\alpha \cdot \overline{W}_\beta \subset \overline{W}_{(\alpha, \beta)} = \overline{W}_\alpha.$$

Таким образом, $\overline{W}_\alpha$ инвариантно относительно умножения, и подбирая β так, чтобы $W_\beta = W_\alpha^{-1}$, мы видим также, что $\overline{W}_\alpha = \overline{W}_\alpha^{-1}$. Следовательно, $\overline{W}_\alpha$ — замкнутая подгруппа, содержащая W_β для каждого β. Теперь ясно, что $\overline{W}_\alpha = \mathscr{A}(M)$.

Замечание. Из доказательства следует, что в предложении 2.2 в качестве n можно принять $2 \dim G$.

2.3. Групповое замыкание коммутанта

Следствие 1. *Пусть G' — некоторая k-группа, G и H — определенные над k замкнутые подгруппы группы G'. Предположим, что G связна. Тогда коммутант (G, H) является связной замкнутой подгруппой, определенной над k.*

Доказательство. При $h \in H$ определим морфизм $f_h \colon G \to G'$, полагая $f_h(g) = (g, h) = ghg^{-1}h^{-1}$. Так как группа G связна и множества $f_h(G)$ $(h \in H)$ содержат единицу e группы G, то, согласно предложению 2.2, порожденная ими группа, а именно группа (G, H), замкнута.

Отсюда следует, что $(G, H) = \mathscr{A}(M)$, где M — образ коммутаторного отображения $G \times H \to G'$. Последнее является k-морфизмом, так что множество $\overline{M}$ определено над k, и утверждение (b) п. 2.1 показывает, что группа $\mathscr{A}(\overline{M})$, которая совпадает с $\mathscr{A}(M)$, определена над k.

Если ни одна из групп G и H не является связной, то коммутант (G, H) не обязательно замкнут. Можно, например, рассмотреть бесконечную группу, порожденную двумя конечными подгруппами G и H, скажем модулярную группу $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})/\{\mp 1\}$ в $\mathbf{PGL}_2$. Этого, однако, не может случиться, если группа G либо группа H является нормальным делителем в G'.

Предложение. *Пусть G — некоторая k-группа и H и N — замкнутые подгруппы, определенные над k и такие, что N нормализуется подгруппой H. Тогда (H, N) — замкнутая подгруппа группы G, определенная над k и являющаяся нормальным делителем в HN.*

Следствие 2. *Наименьший нормальный делитель группы G, содержащий подгруппу H, замкнут и определен над k.*

В самом деле, так как (H, G) — нормальный делитель группы G, то группа $H(H, G)$ является наименьшим нормальным делителем, содержащим группу H. Очевидно, группа $H(H, G)$ замкнута.

Доказательство предложения. Не теряя общности, мы можем считать, что $G = HN$. Коль скоро мы покажем, что коммутант (H, N) замкнут, тот факт, что он определен над k, будет получаться в результате рассуждения, которое мы уже использовали выше при доказательстве следствия 1. Кроме того, из следствия 1 вытекает, что группы (H^0, N) и (H, N^0) замкнуты и связны. Этими же свойствами, следовательно, обладает группа L, порожденная этими группами и всеми их сопряжениями в G. Теперь мы воспользуемся теоремой Бэра из добавления в конце § 2. Прежде всего, группа (H, N) — нормальный делитель группы G, так что L как наименьший нормальный делитель, содержащий (H^0, N) и (H, N^0), содержится в (H, N). Так как L — замкнутая подгруппа, то достаточно показать, что L имеет конечный индекс в (H, N); последняя группа будет тогда объединением конечного числа смежных классов по L.

Переходя к группе $G' = G/L$, обозначим через M' образ в G' подгруппы $M \subset G$. Тогда $H^{0\prime}$ централизует N' и $N^{0\prime}$ централизует H' (по определению L). Следовательно, число различных коммутаторов, составленных из элементов группы H' и группы N', не превосходит числа элементов конечного множества $(H'/H^{0\prime}) \times (N'/N^{0\prime})$. Теперь конечность группы (H', N') вытекает из теоремы Бэра (см. добавление).

2.4. Разрешимые и нильпотентные группы. Пусть G — абстрактная группа. *Ряд коммутантов* $\{D^nG\}$ $(n \geqslant 0)$ и *нижний центральный ряд* $\{C^nG\}$ $(n \geqslant 0)$ следующим образом определяются по индукции:

$$D^0G = G, \quad D^{n+1}G = (D^nG, D^nG) \quad (n \geqslant 0),$$
$$C^0G = G, \quad C^{n+1}G = (G, C^nG) \quad (n \geqslant 0).$$

Иногда мы используем обозначения $D^{\infty}G=\bigcap D^nG$ и $C^{\infty}G=\bigcap C^nG$. Все эти подгруппы характеристичны (т. е. инвариантны относительно внешних автоморфизмов группы G). Говорят, что группа G *разрешима* (соответственно *нильпотентна*), если для некоторого n $D^nG=\{e\}$ (соответственно $C^nG=\{e\}$).

Предположим теперь, что G — алгебраическая группа. Было бы естественно ввести понятия „алгебраической разрешимости" и „алгебраической нильпотентности" для G, используя ряды $\mathscr{A}(D^nG)$ и $\mathscr{A}(C^nG)$ соответственно. Однако из результатов п. 2.3 вытекает, что группы D^nG и C^nG замкнуты, так что эти понятия совпадают с „абстрактными" понятиями разрешимости и нильпотентности.

Предложение. *Пусть G — алгебраическая группа, а M и N — не обязательно замкнутые подгруппы группы G, причем M нормализует N. Тогда $\overline{M}$ нормализует $\overline{N}$ и $\overline{(M, N)}=(\overline{M}, \overline{N})$.*

Доказательство. Ясно, что $\overline{M}$ нормализует $\overline{N}$ (см. п. 1.7) Сославшись на утверждение (e) п. 2.1, заключаем, что группы (M, N) и $(\overline{M}, \overline{N})$ имеют одинаковое замыкание, а ввиду п. 2.3 группа $(\overline{M}, \overline{N})$ замкнута (ибо $\overline{N}$—нормальный делитель группы $\overline{M}\overline{N}$).

Пользуясь индукцией по n, получаем отсюда

Следствие 1. *Для любого $n\geqslant 0$*

$$\overline{D^nM}=D^n\overline{M} \quad \text{и} \quad \overline{C^nM}=C^n\overline{M}.$$

В частности, если группа M замкнута, то все группы ее ряда коммутантов и нижнего центрального ряда также замкнуты.

Следствие 2. *Если N — нормальный делитель группы M и факторгруппа M/N абелева (соответственно нильпотентна, разрешима), то группа $\overline{M}/\overline{N}$ также абелева (соответственно нильпотентна, разрешима).*

Следствие 3. *Для k-группы G следующие условия равносильны:*

(1) *группа G разрешима;*

(2) *существует убывающая цепочка определенных над k замкнутых подгрупп группы G, таких, что $(G_i, G_i)\subset G_{i+1}$ $(0\leqslant i\leqslant n)$.*

Доказательство. Из условия (2) следует, что $D^iG\subset G_i$, так что группа G разрешима. Полагая $G_i=D^iG$ и применяя следствие 1, получаем импликацию $(1)\Rightarrow(2)$; тот факт, что G_i определены над k, вытекает из п. 2.3.

Следствие 4. *Для k-группы G следующие условия эквивалентны:*

(1) *группа G нильпотентна;*

(2) *существует убывающая цепочка* $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = \{e\}$ *определенных над* k *замкнутых подгрупп группы* G, *такая, что* $(G, G_i) \subset G_{i+1}$ $(0 \leqslant i < n)$.

Доказательство. Из (2) вытекает, что $C^iG \subset G_i$, так что группа G нильпотентна. Обратно, если группа G нильпотентна, то следствие 1 и результаты п. 2.3 позволяют заключить, что группы C^iG удовлетворяют условию (2).

Добавление

Мы приведем здесь принадлежащее Розенлихту доказательство следующего результата Бэра (см. Розенлихт [6]).

Предложение. *Пусть* H *и* N — *подгруппы группы* G, *причем* H *нормализует* N. *Тогда коммутант* (H, N) *является нормальным делителем в группе* HN. *Если множество коммутаторов*

$$\{hnh^{-1}n^{-1} \mid h \in H,\ n \in N\}$$

конечно, то группа (H, N) *также конечна.*

Начнем с частного случая.

Если центр $Z(G)$ *имеет конечный индекс в* G, *то группа* (G, G) *конечна.*

Достаточно показать, что любое произведение коммутаторов элементов группы G может быть представлено в виде произведения не более чем n^3 множителей (здесь n — индекс центра группы G). Учитывая, что имеется не более n^2 различных коммутаторов и что в любом произведении коммутаторов любые два множителя можно поставить рядом путем замены промежуточных множителей сопряженными (также являющихся коммутаторами), мы видим, что нам достаточно представить $(n+1)$-ю степень коммутатора в виде произведения n коммутаторов. Но при $a, b \in G$ элемент $(aba^{-1}b^{-1})^n$ принадлежит центру, так что

$$(aba^{-1}b^{-1})^{n+1} = b^{-1}(aba^{-1}b^{-1})^n\, b\,(aba^{-1}b^{-1}),$$

что можно переписать в виде произведения n коммутаторов:

$$b^{-1}\left((aba^{-1}b^{-1})^{n-1}(ab^2a^{-1}b^{-2})\right) b.$$

Вернемся теперь к рассмотрению общего случая. Стоит заметить, что если обе группы H и N являются нормальными делителями в G, то все сложные места в этом доказательстве становятся тривиальными.

Мы можем считать, что $G = HN$; рассмотрим множество S всех коммутаторов, образованных элементами, которые сопряжены с элементами группы H при помощи элементов группы N. Любой такой сопряженный имеет вид nhn^{-1}, $n\in N$, $h\in H$, так что элементы множества S имеют вид

$$(nhn^{-1})\,n_1\,(nhn^{-1})^{-1}\,n_1^{-1}=(hnh^{-1}n^{-1})^{-1}\,(h\,(n_1n)\,h^{-1}\,(n_1n)^{-1})$$

при $n_1\in N$, откуда ясно, что S — конечное подмножество группы $(H,\ N)$. Но S порождает группу $(H,\ N)$, а внутренние автоморфизмы группы G переставляют между собой элементы множества S. Отсюда вытекает, что (H, N) — *нормальный делитель* группы G, а также что существует нормальный делитель G_0 конечного индекса группы G, централизующий S, и, следовательно, (H, N). Поэтому $G_0\cap(H,\ N)$ — центральная подгруппа конечного индекса группы $(H,\ N)$, так что группа $((H,\ N),\ (H, N))$ конечна. Так как эта последняя — нормальный делитель группы G, то профакторизовав по ней, мы можем *предполагать, что группа* (H, N) *коммутативна.*

Покажем теперь, что подгруппа $(H,\ (H,\ N))$ группы $(H,\ N)$ является нормальным делителем в G. Ясно, что она инвариантна относительно сопряжения элементами группы H, так что остается проверить, что $n\,(hmh^{-1}m^{-1})\,n^{-1}\in(H,(H,\ N))$ при $h\in H$, $m\in(H,\ N)$, $n\in N$. Но

$$n\,(hmh^{-1}m^{-1})\,n^{-1}=hn(n^{-1}h^{-1}nh)\,mh^{-1}m^{-1}n^{-1}.$$

Последнее выражение в силу коммутативности группы $(H,\ N)$ можно переписать в виде

$$hnm\,(n^{-1}h^{-1}nh)\,h^{-1}m^{-1}n^{-1}=h\,(nmn^{-1})\,h^{-1}\,(nmn^{-1})^{-1}\in(H,(H,\ N)).$$

Заметим, что всякий коммутатор, образованный элементом группы H и элементом группы (H, N), принадлежит группе $(H,\ N)$, так что имеется лишь конечное число таких коммутаторов и все они попарно перестановочны. Кроме того, возведя в квадрат любой такой коммутатор, скажем $hmh^{-1}m^{-1}$, получим

$$(hmh^{-1}m^{-1})^2=(hmh^{-1})^2\,m^{-2}=hm^2h^{-1}m^{-2},$$

а это снова коммутатор. Таким образом, группа $(H,\ (H,\ N))$ конечна. Профакторизовав группу G по этой подгруппе, мы можем *считать, что группа H централизует группу* $(H,\ N)$.

Напомним, что группа (H, N) коммутативна и порождается конечным числом коммутаторов $hnh^{-1}n^{-1}$, причем квадрат такого коммутатора — снова коммутатор:

$$(hnh^{-1}n^{-1})^2=(hnh^{-1}n^{-1})\,(nh^{-1}n^{-1}h)=hnh^{-2}n^{-1}h=h^2nh^{-2}n^{-1}.$$

Таким образом, группа $(H,\ N)$ конечна.

§ 3. АЛГЕБРА ЛИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ [1])

3.1. Ограниченные алгебры Ли. Пусть p — характеристическая экспонента поля k ($p = \operatorname{char}(k)$, если $\operatorname{char}(k) > 0$ и $p = 1$, если $\operatorname{char}(k) = 0$). *Ограниченной алгеброй Ли* над полем k называют алгебру Ли $\mathfrak{g}$, снабженную „p-операцией“ $X \to X^{[p]}$, которая при $p = 1$ тривиальна, $X^{[p]} = X$, а при $p > 1$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) $\operatorname{ad}(X^{[p]}) = \operatorname{ad}(X)^p \qquad (X \in \mathfrak{g})$,

(ii) $(tX)^{[p]} = t^p X^{[p]} \qquad (t \in k,\ X \in \mathfrak{g})$,

(iii) $(X + Y)^{[p]} = X^{[p]} + Y^{[p]} + \sum\limits_{i=1}^{p-1} i^{-1} s_i(X, Y)$,

где $s_i(X, Y)$ есть коэффициент при t^i в разложении полинома $\operatorname{ad}(tX + Y)^{p-1}$ по степеням t. Как обычно, здесь

$$\operatorname{ad}(X)(Y) = [X, Y].$$

Нам не понадобится сама формула (iii), мы используем лишь ее частный случай:

(iii′) Если $[X, Y] = 0$, то $(X + Y)^{[p]} = X^{[p]} + Y^{[p]}$.

По поводу общих фактов об ограниченных алгебрах Ли и, в частности, по поводу приводимых ниже примеров мы отсылаем читателя к книге Джекобсона [1], стр. 185.

Примеры. (1) Всякая ассоциативная k-алгебра A становится ограниченной алгеброй Ли, если ввести на ней операции

$$[X, Y] = XY - YX, \quad X^{[p]} = X^p.$$

(2) Пусть E — векторное пространство над полем k и $A = \operatorname{End}_k(E)$. Соответствующая ограниченная алгебра Ли обозначается через $\mathfrak{gl}(E)$.

(3) Предположим, что E — произвольная, не обязательно ассоциативная k-алгебра. Тогда

$$\operatorname{Der}_k(E, E) = \{X \in \mathfrak{gl}(E) \mid X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg) \quad \text{для всех } f, g \in E\}$$

— ограниченная подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{gl}(E)$.

Пусть F — множество k-автоморфизмов алгебры E. Тогда

$$L = \{X \in \operatorname{Der}_k(E, E) \mid Xs = sX \qquad (s \in F)\}$$

— ограниченная подалгебра Ли алгебры $\operatorname{Der}_k(E, E)$.

[1]) См. также Шевалле [1], т. II, гл. 2, § 8, 9. *Прим. ред.*

(4) Пусть $\mathfrak{g}$ — ограниченная алгебра Ли, и пусть $\mathfrak{h}$ и S — подалгебра и подмножество алгебры $\mathfrak{g}$ соответственно. Тогда

$$\mathfrak{h}^S = \{X \in \mathfrak{h} \mid [X, Y] = 0 \quad \text{для всех} \quad Y \in S\}$$

— ограниченная подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{h}$, называемая *централизатором множества S в $\mathfrak{h}$*.

3.2. Дифференцирование произведений. Пусть G — алгебраическая группа и α_i: $V_i \to G$ — морфизм многообразий; пусть v_i — точка многообразия V_i, такая, что $\alpha_i(v_i) = e$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Положим

$$v = (v_1, \ldots, v_n) \in V = V_1 \times \ldots \times V_n$$

и морфизм α: $V \to G$ определим следующим образом:

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1(x_1) \ldots \alpha_n(x_n).$$

Определим морфизм β_i: $V_i \to V$, полагая

$$\beta_i(x) = (v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

Так как $\alpha_i(v_i) = e$, то $\alpha_i = \alpha \circ \beta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Согласно п. АГ.16.1, имеет место канонический изоморфизм

$$T(V)_v \cong T(V_1)_{v_1} \oplus \ldots \oplus T(V_n)_{v_n},$$

так что

$$(d\alpha)_v(X_1, \ldots, X_n) = \sum_i (d\alpha \circ d\beta_i)_{v_j} X_i = \sum_i (d\alpha_i)_{v_i} X_i.$$

Применяя это к морфизму μ: $G \times G \to G$, получаем

$$T(G \times G)_{(e,\, e)} = T(G)_e \oplus T(G)_e$$

и

$$(d\mu)_{(e,\, e)}(X, Y) = X + Y.$$

(Оба морфизма α_i $(i = 1, 2)$ в этом случае являются тождественными морфизмами $G \to G$.) Рассмотрим теперь сквозное отображение

$$G \xrightarrow{(1,\, i)} G \times G \xrightarrow{\mu} G,$$

переводящее x в $xx^{-1} = e$. Его дифференциал, очевидно, равен нулю, так что мы получаем

$$\begin{aligned} 0 &= d(\mu \circ (1, i))_e(X) = \\ &= (d\mu)_{(e,\, e)}(d(1, i)_e X) = \\ &= (d\mu)_{(e,\, e)}(X, (di)_e X) = \\ &= X + (di)_e X. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(di)_e X = -X.$$

3.3. Алгебра Ли алгебраической группы. Пусть отображение $\alpha: G \to G'$ является k-морфизмом аффинных k-групп, и пусть $\alpha_0: A' \to A$ — его коморфизм. Вместо

$$(d\alpha)_e : T(G)_e \to T(G')_e$$

мы будем писать

$$L(\alpha) : L(G) \to L(G').$$

Рассмотрим множество

$$\mathrm{Lie}(G) = \{D \in \mathrm{Der}_K(A, A) \mid D\lambda_g = \lambda_g D \quad \text{для всех } g \in G\}$$

всех *левоинвариантных дифференцирований* алгебры A. Согласно примерам (3) и (4) п. 3.1, $\mathrm{Lie}(G)$ является *ограниченной алгеброй Ли* с операциями

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1, \quad D^{[p]} = D \circ D \circ \ldots \circ D \ (p \text{ множителей}).$$

Мы покажем ниже, что

$$\mathrm{Lie}(G)_k = \mathrm{Der}_k(A_k, A_k) \cap \mathrm{Lie}(G) = \{D \in \mathrm{Lie}(G) \mid DA_k \subset A_k\}$$

является k-структурой на алгебре Ли $\mathrm{Lie}(G)$. Если $D \in \mathrm{Lie}(G)$, то $e \circ D \in \mathrm{Der}_K(A, K(e)) = L(G)$ и

$$e \circ : \mathrm{Lie}(G) \to L(G)$$

— линейное отображение, переводящее, очевидно, $\mathrm{Lie}(G)_k$ в $L(G)_k$ [1]).

Предложение. $\mathrm{Lie}(G)_k$ *является k-структурой на* $\mathrm{Lie}(G)$, *и* $e \circ : \mathrm{Lie}(G) \to L(G)$ — *определенный над k линейный изоморфизм. Отображение* $L(\alpha) : L(G) \to L(G')$ *является гомоморфизмом ограниченных алгебр Ли.*

В двух последних утверждениях имеется в виду, что на $L(G)$ посредством отображения $e \circ$ задается структура ограниченной алгебры Ли, которая называется *алгеброй Ли группы G*.

Следствие. $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G^0)$ *и* $\dim_K \mathrm{Lie}(G) = \dim G$.

Предложение будет доказано в п. 3.4 ниже. Оно отражает тот факт, что „левоинвариантное векторное поле на G однозначно определяется (с помощью левых сдвигов) своим значением в точке e“.

В дальнейшем мы будем рассматривать отображение $G \to L(G) = T(G)_e$ как функтор из категории (аффинных) алгебраических групп в категорию ограниченных алгебр Ли. Алгебры Ли групп G, H, M, N, ... часто обозначаются соответствующими готическими

---

[1]) Не следует забывать, что здесь $e \circ$ — гомоморфизм A-модулей (а не алгебр!). — *Прим. перев.*

буквами $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, ... Так, например, вместо $L(\alpha)$: $L(G) \to L(G')$ мы будем писать $L(\alpha)$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, употребляя иногда вместо $L(\alpha)$ символ $(d\alpha)_e$ или просто $d\alpha$.

Примеры. (1) Пусть $G = \mathbf{G}_a$ — аддитивная группа, так что $K[G] = K[T]$ — кольцо полиномов. Если $D \in \mathrm{Lie}(G)$, то D полностью определяется полиномом $f(T) = DT$. Левая инвариантность требует, чтобы для всех $x \in G$ $(= K)$ выражение $\lambda_{-x} DT = f(T + x)$ было равно $D(\lambda_{-x}(T)) = D(T + x) = DT + Dx = f(T)$. Но равенство $f(T + x) = f(T)$ для всех x означает, что функция f постоянна, следовательно, алгебра Ли $\mathrm{Lie}(G)$ состоит из всех K-кратных дифференцирования $D = d/dT$. Так как $D^{[p]}T^n = n(n-1)\ldots$ $\ldots(n-(p-1))\,T^{n-p}$ (или нулю, если $n < p$), то, как легко видеть, p-операция на $\mathrm{Lie}(G)$ является нулевой при $p = \mathrm{char}(k) > 0$ (ибо произведение p подряд стоящих натуральных чисел делится на p).

(2) Пусть $G = \mathbf{GL}_1$, так что $K[G] = K[T, T^{-1}]$. Если $D \in \mathrm{Lie}(G)$, то D определяется полиномом Лорана $DT = f(T)$. На этот раз требование левой инвариантности означает, что для всех $x \in G$ $(= K^*)$ имеет место равенство $f(xT) = xf(T)$. Отсюда, как легко видеть, вытекает, что $f(T) = aT$ для некоторого $a \in K$, так что $D^{[p]}T = a^pT$. Таким образом, алгебра Ли $\mathrm{Lie}(G)$ изоморфна одномерной алгебре Ли K с p-операцией $a \to a^p$. Следовательно, p-операции на алгебрах Ли аддитивной и мультипликативной групп при $p = \mathrm{char}(k) > 0$ различны.

3.4. Конволюции. В ходе доказательства предложения из п. 3.3 мы введем структуру алгебры Ли непосредственно на касательном пространстве $L(G)$. Мы сохраним здесь обозначения

$$\alpha\colon G \to G', \quad \alpha_0\colon A' \to A$$

п. 3.3. Для векторного подпространства V над полем K положим

$$A(V) = \mathrm{Hom}_{K\text{-мод}}(A, V); \quad A'(V) = \mathrm{Hom}_{K\text{-мод}}(A', V).$$

Пусть W — другое векторное пространство. Определим K-билинейное отображение

$$\begin{gathered} A(V) \times A(W) \to A(V \otimes_K W) \\ (X, Y) \to X \cdot Y \end{gathered}$$

формулой

$$X \cdot Y = (X \otimes Y) \circ \mu_0.$$

Пример. Если $g, h \in G$, то

$$e_g \cdot e_h = e_{gh} \qquad (\text{в } A(K)).$$

Более того, если учесть, что для любой K-алгебры B группа $G(B)$ точек многообразия G в алгебре B совпадает (как множество) с $\mathrm{Hom}_{K\text{-алг}}(A, B) \subset A(B)$, и если при $g, h \in G(B)$ обозначить через e_g, e_h соответствующие элементы множества $A(B)$, то получим формулу (см. п. 1.5)

$$e_{gh} = m \circ (e_g \cdot e_h),$$

где m: $B \otimes_K B \to B \otimes_B B = B$ — каноническое отображение. Без специальных оговорок мы будем отождествлять $K \otimes_K V$ и $V \otimes_K K$ с V.

Лемма 1. *Пусть U, V и W — векторные пространства, и пусть $X \in A(U)$, $Y \in A(V)$ и $Z \in A(W)$. Тогда*

(a) $e \cdot X = X = X \cdot e$.

(b) $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$.

(c) $A(K)$ *— ассоциативная K-алгебра с единицей e, и $A(V)$ является $A(K)$-бимодулем. Отображение $g \to e_g$ является мономорфизмом группы G в группу обратимых элементов алгебры $A(K)$.*

(d) *Имеет место соотношение*

$$(X \cdot Y) \circ \alpha_0 = (X \circ \alpha_0) \cdot (Y \circ \alpha_0),$$

где произведение справа определяется согласно формуле μ_0': $A' \to A' \otimes_K A'$. В частности, отображение $\circ\, \alpha_0$: $A(K) \to A'(K)$ — гомоморфизм алгебр, индуцирующий морфизм α: $G \to G'$ при помощи вложения, определенного в (c).

(e) *Если пространства U и V имеют такую k-структуру, что отображения X и Y определены над k, то произведение $X \cdot Y$ также определено над k.*

Доказательство. При $f \in A$ представим $\mu_0 f$ в виде $\mu_0 f = \sum_i f_i \otimes h_i$. Тогда

$$f(x) = f(ex) = \sum_i f_i(e)\, h_i(x) = f(xe) = \sum_i f_i(x)\, h_i(e).$$

Следовательно,

$$f = \sum_i f_i(e)\, h_i = \sum_i f_i h_i(e).$$

(a) Так как отображение X является K-линейным, то

$$(e \cdot X)(f) = (e \otimes X)\, \mu_0 f = \sum_i f_i(e)\, X(h_i) = X\left(\sum f_i(e)\, h_i\right) = X(f).$$

Таким образом, $e \cdot X = X$ и, аналогично, $X \cdot e = X$.

(b) Обозначая через I: $A \to A$ тождественное отображение, мы можем выразить ассоциативность умножения μ: $G \times G \to G$ в терминах алгебры A соотношением

$$(I \otimes \mu_0) \circ \mu_0 = (\mu_0 \otimes I) \circ \mu_0$$

(или $I \cdot \mu_0 = \mu_0 \cdot I$ в обозначениях этого пункта). Тогда

$$(X \otimes Y \otimes Z) \circ (I \otimes \mu_0) \circ \mu_0 = (X \otimes ((Y \otimes Z) \circ \mu_0)) \circ \mu_0 = X \cdot (Y \cdot Z)$$

и, аналогично,

$$(X \otimes Y \otimes Z) \circ (\mu_0 \otimes I) \circ \mu_0 = (X \cdot Y) \cdot Z.$$

Утверждение (c) является непосредственным следствием утверждений (a) и (b), если принять во внимание приведенный выше пример.

(d) Тот факт, что $\circ\, \alpha_0$ — гомоморфизм, выражается равенством

$$\mu_0 \circ \alpha_0 = (\alpha_0 \otimes \alpha_0) \circ \mu_0'.$$

Тогда

$$(X \cdot Y) \circ \alpha_0 = (X \otimes Y) \circ \mu_0 \circ \alpha_0 = (X \otimes Y) \circ (\alpha_0 \otimes \alpha_0) \circ \mu_0' = (X \circ \alpha_0) \cdot (Y \cdot \alpha_0).$$

Остальные утверждения из (d) очевидны.

Утверждение (e) вытекает из формулы $X \cdot Y = (X \otimes Y) \circ \mu_0$ и того факта, что гомоморфизм μ_0 определен над k. Лемма полностью доказана.

Пусть, как и выше, $I \in A(A)$ — тождественное отображение. При $X \in A(K)$ определим *правую конволюцию*

$$* X = I \cdot X\colon\ A \to A$$

и *левую конволюцию*

$$X * = X \cdot I\colon\ A \to A.$$

Пусть $f \in A$ и $\mu_0 f = \sum f_i \otimes h_i$; тогда

$$f * X = \sum f_i X(h_i), \quad X * f = \sum X(f_i)\, h_i.$$

Так как

$$(f * X)(g) = \sum f_i(g)\, X(h_i) = X\left(\sum f_i(g)\, h_i\right) = X(\lambda_{g^{-1}} f),$$

то

$$(f * X)(g) = X(\lambda_{g^{-1}} f).$$

Аналогично,

$$(X * f)(g) = X(\rho_g f).$$

Мы установим теперь некоторые формулы для этих операций. Пусть $g \in G$, X, $Y \in A(K)$ и $\mu_0 f = \sum f_i \otimes h_i$. Тогда

(1) $$* e_g = \rho_g \quad \text{и} \quad e_g * = \lambda_{g^{-1}}.$$

В самом деле, $f * e_g = \sum f_i h_i(g) = \rho_g f$; аналогичное вычисление приводит к формуле $e_g * = \lambda_{g^{-1}}$.

(2) $$X \circ (* Y) = X \cdot Y \quad \text{и} \quad X \circ (Y *) = Y \cdot X.$$

Имеем $X \circ (I \otimes Y) \circ \mu_0 = (X \otimes Y) \circ \mu_0$ и, аналогично, $X \circ (Y \otimes I) \circ \mu_0 = (Y \otimes X) \circ \mu_0$. Используя утверждение (a) леммы 1, получаем

(3) $$e \circ (* X) = X = e \circ (X *).$$

Комбинируя (2) и (3), находим, что

(4) $$e \circ ((*X) \circ (*Y)) = X \cdot Y.$$

Простая проверка показывает, что

$$(I \otimes X) \circ \mu_0 \circ (I \otimes Y) = ((I \otimes X) \circ \mu_0) \otimes Y,$$

поэтому $(*X) \circ (*Y) = (*X) \circ Y$. Последнее выражение можно записать в виде $(I \cdot X) \cdot Y$, и, согласно утверждению (b) леммы 1, оно равно $I \cdot (X \cdot Y)$. Таким образом, получаем

(5) $$(*X) \circ (*Y) = *(X \cdot Y).$$

Если исходить из формул

$$(I \otimes X) \circ \mu_0 \circ (Y \otimes I) = Y \otimes ((I \otimes X) \circ \mu_0),$$

$$(Y \otimes I) \circ \mu_0 \circ (I \otimes X) = ((Y \otimes I) \circ \mu_0) \otimes X,$$

то в результате подобных вычислений получим $(*X) \circ (Y*) = Y \cdot (*X) = Y \cdot (I \cdot X)$ и $(Y*) \circ (*X) = (Y \cdot I) \cdot X$, откуда

(6) $$(*X) \circ (Y*) = (Y*) \circ (*X).$$

Лемма 2. *Композиция $X \to e \circ (I \cdot X) = e \cdot (*X)$ K-линейных отображений*

$$A(K) \xrightarrow{I\cdot} A(A) \xrightarrow{e\circ} A(K)$$

есть тождественное отображение. Кроме того, $I\cdot$ является мономорфизмом K-алгебры $A(K)$ на K-подалгебру тех элементов алгебры $A(A)$, которые коммутируют со всеми левыми сдвигами λ_g, $g \in G$. В частности, $I\cdot$ отображает изоморфно $L(G)$ на $\mathrm{Lie}(G)$. Наконец, как $e\circ$, так и $I\cdot$ сохраняют свойство элемента быть определенным над k.

Доказательство. Первое утверждение равносильно формуле (3) и позволяет утверждать, что $I\cdot$ является изоморфизмом пространства $A(K)$ *на* его образ, а его обратное отображение индуцируется отображением $e\circ$. Из формулы (4), кроме того, вытекает, что $e\circ$ — гомоморфизм алгебр. Формула (6) выражает тот факт, что левые и правые конволюции коммутируют. Следовательно, все $*X$ коммутируют со всеми $\lambda_{g^{-1}} = e_g *$ (см. формулу (1)). Чтобы показать, что $I\cdot$ отображает алгебру $A(K)$ *на все* множество левоинвариантных элементов алгебры $A(A)$, достаточно убедиться, что отображение $e\circ$ инъективно на левоинвариантных элементах. Итак, пусть $D \in A(A)$ — левоинвариантный элемент, и предположим, что $e \circ D = 0$. Тогда $(Df)(g) = (\lambda_{g^{-1}}(Df))(e) = (D(\lambda_{g^{-1}}f))(e) = (e \circ D)(\lambda_{g^{-1}}f) = 0$ для всех $g \in G$, так что $Df = 0$ для всех $f \in A$.

Мы знаем, что $e\circ$ преобразует дифференцирования в дифференцирования, так что остается проверить, что $I\cdot$ также преобразует дифференцирования в дифференцирования. Пусть $X \in A(K)$ — дифференцирование $A \to K(x)$. Тогда $I \otimes X$: $A \otimes_K A \to A \otimes_K K(x)$ является дифференцированием, полученным из X заменой кольца $K \to A$, так что $*X = (I \otimes X)\circ \mu_0$ — также дифференцирование, ибо μ_0 — гомоморфизм алгебр.

Ясно, что свойство элемента быть определенным над k сохраняется при гомоморфизме $e\circ$ (ибо элемент e определен над k). Тот факт, что этим свойством обладает также отображение $I\cdot$, вытекает из утверждения (e) леммы 1. Это завершает доказательство леммы 2.

Лемма 3. *$L(G)$ — ограниченная подалгебра Ли алгебры $A(K)$, т. е. при $X, Y \in L(G)$ имеем*

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X, \quad X^{[p]} = X \cdot X \ldots X \ (p \text{ множителей}).$$

Как мы видели в части (d) леммы 1, коморфизм α_0: $A' \to A$ индуцирует гомоморфизм алгебр $\circ\alpha_0$: $A(K) \to A'(K)$. Поэтому его ограничение $L(\alpha)$: $L(G) \to L(G')$ есть гомоморфизм ограниченных алгебр Ли.

Тем самым доказаны все утверждения предложения п. 3.3.

3.5. Присоединенное представление. Пусть G — аффинная k-группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Каждому элементу $g \in G$ сопоставим внутренний автоморфизм

$$\operatorname{Int}(g)\colon\ G \to G, \quad x \to {}^{g}x = gxg^{-1},$$

дифференциал $L(\operatorname{Int}(g))$ которого мы обозначим через

$$\operatorname{Ad}(g)\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Это гомоморфизм ограниченных алгебр Ли; из функториальности дифференцирования вытекает, что

$$\operatorname{Ad}\colon\ G \to GL(\mathfrak{g})$$

— гомоморфизм групп. Мы будем называть его *присоединенным представлением* группы G. Кроме того, мы утверждаем, что представление Ad является k-морфизмом k-групп.

Чтобы убедиться в этом, вычислим Ad в касательном расслоении (п. АГ.16.2):

$$\begin{array}{ccc} T(G) & = & G(K[\delta]) \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle s} & & {\scriptstyle p}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle s} \\ G & = & G(K) \end{array}$$

Напомним, что $K[\delta]$ — алгебра двойных чисел ($\delta^2=0$) и что гомоморфизмы p и s индуцируются отображениями $K[\delta]\to K$ ($\delta\to 0$) и $K\to K[\delta]$ соответственно.

Общий элемент группы $T(G)$ записывается в виде (см. п. АГ. 16.2)

$$e_g^{\delta X}=e_g+\delta X \qquad (g\in G,\ X\in T(G)_g).$$

Это гомоморфизм алгебр $K[G]\to K[\delta]$, преобразующий f в $f(g)+ +\delta X(f)$. Согласно п. 3.4, групповое умножение в $T(G)$ задается формулой

$$(e_g+\delta X)(e_h+\delta Y)=m\circ((e_g+\delta X)\otimes(e_h+\delta Y))\circ\mu_0,$$

где $m\colon K[\delta]\otimes K[\delta]\to K[\delta]$ — умножение в K-алгебре $K[\delta]$.

Таким образом, используя введенное в п. 3.4 обозначение $X\cdot Y=(X\otimes Y)\circ\mu_0$, получаем

$$\begin{aligned}(e_g+\delta X)(e_h+\delta Y)=m\cdot(e_g\cdot e_h+(1\otimes\delta)\,e_g\cdot Y&+\\ +(\delta\otimes 1)\,X\cdot e_h+(\delta\otimes\delta)\,X\cdot Y)&=e_{gh}+\delta(e_g\cdot Y+X\cdot e_h)\end{aligned}$$

или

(1) $$e_g^{\delta X}e_h^{\delta Y}=e_{gh}^{\delta(e_g\cdot Y+X\cdot e_h)}.$$

Отображение p преобразует $e_g^{\delta X}$ в g, и отображение s преобразует g в $e_g(=e_g^{\delta 0})$. Так как композиция $p\circ s$ этих отображений является тождественным отображением на G, то группа $T(G)$ является полупрямым произведением групп sG и $\ker(p)=p^{-1}(e)$. Вместо $e_e^{\delta X}$ будем писать просто $e^{\delta X}$. Из п. АГ.16.2 следует, что $X\to e^{\delta X}$ — биекция касательного пространства $T(G)_e=\mathfrak{g}$ на $\ker(p)$. Кроме того, из формулы (1) и леммы 1 п. 3.4 вытекает, что это гомоморфизм групп:

$$e^{\delta X}e^{\delta Y}=e^{\delta(X+Y)}.$$

Таким образом, мы имеем расщепляемое расширение

$$0\to\mathfrak{g}\xrightarrow{e^{\delta(\cdot)}}T(G)\xrightarrow{p}G\to 1,$$

в котором все отображения определены над k.

Если $\mathrm{Int}\colon G\times G\to G$ — действие группы G на себе с помощью внутренних автоморфизмов, то коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{\mathrm{Int}} & G\\ \downarrow & & \downarrow\\ T(G)\times T(G) & \xrightarrow{T(\mathrm{Int})} & T(G)\end{array}$$

показывает, что $T(\mathrm{Int}(g))=\mathrm{Int}(e_g)$. Ограничение отображения $T(\mathrm{Int}(g))\colon T(G)\to T(G)$ на $\mathfrak{g}=\ker(p)$ в точности совпадает (см.

п. АГ.16.2) с отображением $d(\mathrm{Int}(g)) = \mathrm{Ad}(g)$. Точнее, $\mathrm{Ad}(g)$ определяется формулой

(2) $$\mathrm{Int}(e_g)(e^{\delta X}) = e^{\delta\,\mathrm{Ad}(g)\,X}.$$

Рассматривая G и $\mathfrak{g}$ как подгруппы группы $T(G)$, обе определенные над k, мы видим, что отображение $T(\mathrm{Int})$: $G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ индуцирует действие группы G на $\mathfrak{g}$, совпадающее с присоединенным представлением Ad. В частности, последнее является k-морфизмом. Так как действие группы G на $\mathfrak{g}$ линейно, то отсюда, кроме того, следует (см. пример (8) п. 1.6), что Ad: $G \to GL(\mathfrak{g})$ — морфизм, определенный над k.

Наконец, предположим, что α: $G \to G'$ — морфизм алгебраических групп. Тогда отображение $T(\alpha)$: $T(G) \to T(G')$ индуцирует морфизм α на подгруппах $G \subset T(G)$ и $G' \subset T(G')$, так что $\mathrm{Int}(\alpha(g))(T(\alpha)(x)) = T(\alpha)(gxg^{-1}) = T(\alpha)\,\mathrm{Int}(g)(x))$, т. е.

$$\mathrm{Int}(\alpha(g)) \circ T(\alpha) = T(\alpha) \circ \mathrm{Int}(g).$$

При ограничении на алгебры Ли эта формула принимает вид

(3) $$\mathrm{Ad}_{G'}(\alpha(g)) \circ d\alpha = (d\alpha) \circ \mathrm{Ad}_G(g).$$

3.6. Алгебра Ли группы $GL(V)$ совпадает с $\mathfrak{gl}(V)$. Рассмотрим конечномерное векторное пространство V как многообразие $\mathrm{spec}_K(S_K(V^*))$. Его точки в K-алгебре B задаются формулой:

$$V(B) = \mathrm{Hom}_{K\text{-алг}}(S_K(V^*),\ B) = \mathrm{Hom}_{K\text{-мод}}(V^*,\ B) = B \otimes_K V.$$

Таким образом, $V(B)$ — модуль, полученный из V заменой кольца $K \to B$.

Применяя это к $E = \mathrm{End}_{K\text{-мод}}(V)$, получаем

$$E(B) = B \otimes_K E = \mathrm{End}_{B\text{-мод}}(V(B)).$$

Кроме того, легко видеть, что структура этого кольца естественна в следующем смысле: если умножение μ в кольце E рассматривать как морфизм многообразий μ: $E \times E \to E$, то μ можно продолжить на образ функтора точек: $\mu(B)$: $E(B) \times E(B) \to E(B)$, и это умножение совпадает с естественным умножением в $E(B)$, кольце эндоморфизмов B-модуля $V(B)$.

Такое же замечание можно сделать и по отношению к открытому подмногообразию $GL_V \subset E$. Можно отождествить $GL_V(B)$ с группой обратимых элементов алгебры $E(B)$, т. е. с группой $\mathrm{Aut}_{B\text{-мод}}(V(B))$.

Беря в качестве B алгебру $K[\delta]$ двойных чисел, мы получаем изоморфизм алгебры Ли $L(GL_V)$ с ядром гомоморфизма, „уничтожающего“ δ, $GL_V(K[\delta]) \to GL_V(K)$. Очевидно, что это ядро совпадает с множеством всех элементов вида $1 + \delta X$, $X \in \mathfrak{gl}_V$. Тем самым устанавливается естественный изоморфизм $\mathfrak{gl}_V \cong L(GL_V)$.

При таком отождествлении по определению Ad мы имеем

$$\operatorname{Ad}(g)(X) = g \circ X \circ g^{-1}$$

для любых $g \in GL_V$ и $X \in \mathfrak{gl}_V$.

Оказывается, что эта идентификация алгебры Ли $L(GL_V)$ с $\mathfrak{gl}_V$ согласована с соответствующими структурами ограниченных алгебр Ли. Чтобы удостовериться в этом, уточним эту идентификацию в случае группы $\mathbf{GL}_n$.

Пусть $K[\mathbf{GL}_n] = K[T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{nn}, D^{-1}]$, где $D = \det(T)$ — определитель матрицы $T = (T_{ij})$. Тогда элемент $g \in \mathbf{GL}_n$ отождествляется с матрицей $(g_{ij}) = e_g(T) = (T_{ij}(g))$, а элемент $X \in L(\mathbf{GL}_n)$ отождествляется с матрицей $(X_{ij}) = X(T) = (X(T_{ij})) \in \mathfrak{gl}_n$.

Структура алгебры Ли в $L(\mathbf{GL}_n)$ вводится с помощью ассоциативного умножения $X \cdot Y = (X \otimes Y) \circ \mu_0$ (см. п. 3.4), а структура алгебры Ли в $\mathfrak{gl}_n$ — с помощью ассоциативного матричного умножения. Тот факт, что эти структуры согласованы, вытекает из следующего соотношения:

$$(X \cdot Y)(T_{ij}) = (X \otimes Y)\left(\sum_h T_{ih} \otimes T_{hj}\right) = \sum X_{ih} Y_{hj}.$$

Отметим, кстати, следующие формулы для правых сдвигов и конволюций:

$$\rho_g(T) = Tg, \quad T * X = TX,$$

где в правых частях стоят произведения матриц. Здесь имеется в виду, что

$$\rho_g(T) = (\rho_g(T_{ij})) \quad \text{и} \quad T * X = (T_{ij} * X).$$

Эти две формулы устанавливаются простым вычислением.

3.7. Дифференциал присоединенного представления Ad есть ad. Пусть α: $G \to G'$ — морфизм алгебраических групп. Тогда

$$\alpha(e^{\delta X}) = e^{\delta\, d\alpha(X)} \qquad (X \in \mathfrak{g}),$$

где α в левой части мы отождествляем с отображением $T(\alpha)$: $T(G) \to T(G')$, допуская некоторую вольность в обозначениях.

Предположим теперь, что $G' = GL_V$, так что $\mathfrak{g}' = \mathfrak{gl}_V$. Тогда группа $T(GL_V)$ действует на группе $T(V)$ и

$$\alpha(e^{\delta X})(v) = e^{\delta\, d\alpha(X)}(v) \qquad (v \in V).$$

Применяя это к случаю, когда $\alpha = \operatorname{Ad} = \operatorname{Ad}_G$, получаем

$$\operatorname{Ad}(e^{\delta X})(Y) = e^{\delta d \operatorname{Ad}(X)}(Y) \qquad (X,\ Y \in \mathfrak{g}).$$

Напомним определение присоединенного представления Ad (мы используем другой экземпляр $K[\delta']$ алгебры двойных чисел, чтобы избежать путаницы в обозначениях). А именно Ad определяется формулой

$$\operatorname{Int}(e_g)(e^{\delta' Y}) = e^{\delta' \operatorname{Ad}(g)(Y)}$$

при $g \in G$ и $Y \in \mathfrak{g}$. Подставляя в эту формулу $e^{\delta X}$ вместо e_g получаем

$$\operatorname{Int}(e^{\delta X})(e^{\delta' Y}) = e^{\delta' \operatorname{Ad}(e^{\delta X})(Y)} =$$
$$= e^{\delta' e^{\delta d \operatorname{Ad}(X)}(Y)} = e^{\delta' (Y + \delta d \operatorname{Ad}(X)(Y))}.$$

Преобразуем первый член этой формулы:

$$e^{\delta X} e^{\delta' Y} e^{-\delta X} = (e + \delta X + \delta' Y + \delta\delta' X \cdot Y)(e^{-\delta X}) =$$
$$= e + \delta X + \delta' Y + \delta\delta' X \cdot Y - \delta X - \delta'\delta Y \cdot X =$$
$$= e + \delta' (Y + \delta (X \cdot Y - Y \cdot X)).$$

Сравнивая это с последним членом формулы, написанной выше, мы убеждаемся в том, что

$$d \operatorname{Ad}(X)(Y) = X \cdot Y - Y \cdot X = [X, Y],$$

т. е. что $d \operatorname{Ad}(X) = \operatorname{ad}(X)$.

3.8. ker(Ad) может не совпадать с $Z(G)$. Ясно, что $Z(G) \subset \ker(\operatorname{Ad})$. В случае когда $\operatorname{char}(k) = 0$ или когда группа G полупроста, имеет место равенство. Следующий пример, принадлежащий Шевалле, показывает, что это бывает не всегда.

Предположим, что $\operatorname{char}(k) = p > 0$, и положим $G = \{g(a, b) \mid a \in K^*, b \in K\}$, где

$$g(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^p & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $g(a, b) g(a', b') = g(aa', a^p b' + b)$, так что G — замкнутая подгруппа группы $\mathbf{GL}_3$. Она является полупрямым произведением нормального делителя $H = \{g(1, b) \mid b \in K\} \cong \mathbf{G}_a$ и группы $\{g(a, 0) \mid a \in K^*\} \cong \mathbf{GL}_1$, действующей на H как гомоморфизм Фробениуса. В частности, группа G *не коммутативна*; более того, $Z(G) = \{e\}$. Элементы группы $T(G)$ можно записать в виде $g(u + \delta v, r + \delta s)$, где $u \in K^*$ и $v, r, s \in K$. В частности, элементы алгебры $\mathfrak{g}$ соответствуют элементам вида $g(1 + \delta v, \delta s)$ и $\operatorname{Ad}(g(a, b))$ действует на них путем сопряжения:

$$g(a, b) g(1 + \delta v, \delta s) g(a, b)^{-1} = g(a + \delta a v, \delta a^p s + b) g(a^{-1}, -a^{-p} b) =$$
$$= g(1 + \delta v, -(a + \delta a v)^p a^{-p} b + \delta a^p s + b) = g(1 + \delta v, \delta a^p s).$$

Следовательно, это действие тривиально тогда и только тогда, когда $a = 1$, так что $\ker(\operatorname{Ad}) = H$.

Скобку[1]) в $\mathfrak{g}$ можно вычислить, используя коммутатор элементов $g(1+\delta r, \delta s)$ и $g(1+\delta u, \delta v)$, а именно

$$\begin{aligned} & g(1+\delta r, \delta s)\, g(1+\delta u, \delta v) = \\ & = g(1+\delta r+\delta u+\delta\delta ru, \quad (1+\delta r)^p \delta v+\delta s) = \\ & = g(1+\delta r+\delta u, \delta v+\delta s). \end{aligned}$$

Ясно теперь, что эти элементы коммутируют, так что их скобка равна нулю. Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ абелева, в то время как $Z(G)=\{e\}$ и $(G, G)=H$ (ср. п. 3.12 ниже).

3.9. Некоторые формулы дифференцирования. Пусть G — алгебраическая группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

(1) При $a \in G$ отображение $g \to ag^{-1}a^{-1}$ является композицией отображений $\mathrm{Int}(a)$ и i, так что его дифференциал равен $-\mathrm{Ad}(a)$. Умножая его на отображение $g \to g$ (см. обозначения, п. 3), мы получим коммутаторное отображение c_a: $g \to (g, a)=gag^{-1}a^{-1}$, так что $dc_a=\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(a)$. Отображение $g \to gag^{-1}$ группы G на класс сопряженности элемента a есть композиция коммутаторного отображения c_a и правого умножения на элемент a. Следовательно, дифференциал отображения $g \to gag^{-1}$ есть композиция отображения $\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(a)$ и дифференциала $d(\rho_a)_e$: $\mathfrak{g} \to T(G)_a$, где $\rho_a(g)=ga$.

(2) При $A \in \mathfrak{g}$ определим морфизм α_A: $G \to \mathfrak{g}$ формулой: $\alpha_A(g)=\mathrm{Ad}(g)(A)-A$. Тогда морфизм α_A является композицией отображений $G \xrightarrow{\mathrm{Ad}-\mathrm{Id}} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\cdot(A)} \mathfrak{g}$, так что $(d\alpha_A)_e=d(\cdot(A))_0 \circ (d(\mathrm{Ad}-\mathrm{Id})_e)=\cdot(A)\circ \mathrm{ad}$. Мы использовали тот факт, что отображение $\cdot(A)$ линейно и, следовательно, совпадает со своим дифференциалом, что $d(\mathrm{Ad})_e=\mathrm{ad}$ и что $(d(\mathrm{Id}))_e=0$, ибо Id — постоянная функция. Таким образом, при $X \in \mathfrak{g}$ мы имеем $(d\alpha_A)_e(X)=\mathrm{ad}(X)(A)=[X, A]$, так что

$$(d\alpha_A)_e=-\mathrm{ad}(A).$$

(3) Обозначим через $\mathscr{V}$ категорию конечномерных K-модулей; пусть F: $\mathscr{V}\times \ldots \times\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ — функтор от n переменных, K-мультилинейный относительно Hom'ов. Пусть α_i: $G \to GL(V_i)$ — рациональное представление алгебраической группы G $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда $\alpha=F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$: $G \to GL(V)$ — рациональное представление на пространстве $V=F(V_1, \ldots, V_n)$. Кроме того,

$$d\alpha(X)=\sum_{i=1}^{n} F(1_{V_1}, \ldots, d\alpha_i X, \ldots, 1_{V_n}) \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

[1]) Здесь скобкой автор называет операцию умножения в алгебре $\mathfrak{g}$. — *Прим. перев.*

Это выводится из формулы $\alpha(e^{\delta X}) = e^{\delta\, d\alpha(X)}$ с помощью следующего вычисления:

$$\alpha(e^{\delta X}) = F(\alpha_1(e^{\delta X}), \ldots, \alpha_n(e^{\delta X})) =$$
$$= F\left(e^{\delta\, d\alpha_1 X}, \ldots, e^{\delta\, d\alpha_n X}\right) = F\left(1_{V_1} + \delta\, d\alpha_1 X, \ldots, 1_{V_n} + \delta\, d\alpha_n X\right) =$$
$$= F\left(1_{V_1}, \ldots, 1_{V_n}\right) + \delta\left(\sum_{i=1}^{n} F\left(1_{V_1}, \ldots, d\alpha_i X, \ldots, 1_{V_n}\right)\right).$$

(4) Если α_i: $G \to GL(V_i)$ $(i = 1, 2)$ — рациональные представления и β: $V_1 \to V_2$ — гомоморфизм G-представлений, т. е. β линейно и $\beta(\alpha_1(g)v) = \alpha_2(g)\beta(v)$ при $g \in G$ и $v \in V$, то β — также гомоморфизм $\mathfrak{g}$-представлений, т. е.

$$\beta(d\alpha_1(X)v) = d\alpha_2(X)\beta(v)$$

при $X \in \mathfrak{g}$ и $v \in V$. В самом деле, первая формула, примененная к касательным расслоениям, дает

$$\beta(\alpha_1(e^{\delta X})v) = \alpha_2(e^{\delta X})\beta(v).$$

Но левая часть ее есть $\beta(e^{\delta\, d\alpha_1 X}(v)) = \beta(v) + \delta(d\alpha_1 X(v))$, в то время как правая часть равна $\beta(v) + \delta\, d\alpha_2 X(\beta(v))$. Отсюда следует нужная формула.

(5) Пусть α_i: $G \to GL(V_i)$ $(i = 1, 2)$ — рациональное представление. Применяя формулу (3) к представлению $\alpha = \alpha_1 \otimes \alpha_2$: $G \to GL(V_1 \otimes_K V_2)$, получаем

$$d(\alpha_1 \otimes \alpha_2)(X) = (d\alpha_1 X \otimes 1_{V_2}) + (1_{V_1} \otimes d\alpha_2 X).$$

(6) Пусть α: $G \to GL(V)$ — рациональное представление. Тогда $T^n(\alpha) = G \to GL(T^n(V))$, где $T^n(V) = V \otimes_K \ldots \otimes_K V$ (n множителей) и $T^n(\alpha) = \alpha \otimes \ldots \otimes \alpha$. Используя формулу (3), получаем

$$d(\alpha \otimes \ldots \otimes \alpha) = \sum_{i=1}^{n} 1_V \otimes \ldots \otimes \overset{i\text{-е место}}{d\alpha} \otimes \ldots \otimes 1_V.$$

Таким образом, мы видим, что дифференциал действия группы G как группы автоморфизмов тензорной алгебры $\coprod_n T^n(V)$ совпадает с действием $\mathfrak{g}$ как алгебры дифференцирований.

От тензорной алгебры к симметрической алгебре $S(V)$ и внешней алгебре $\Lambda(V)$ можно перейти, если рассмотреть эпиморфизмы G-представлений в каждой из степеней. Таким образом, из формулы (4) вытекает, что дифференциалы действия группы G как группы автоморфизмов алгебр $S(V)$ и $\Lambda(V)$ совпадают с действиями алгебры $\mathfrak{g}$ как алгебры дифференцирований, полученными продолжением действия дифференциала $d\alpha$ на степени 1. Точнее, если $e_1, \ldots, e_n \in V$, то соответствующие формулы имеют вид

$$dS^n(\alpha)(X)(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} e_1 \ldots d\alpha X(e_i) \ldots e_n$$

и

$$d\Lambda(\alpha)(X)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \sum_{i=1}^{n} e_1 \wedge \ldots \wedge d\alpha X(e_i) \wedge \ldots \wedge e_n.$$

(7) Если $\dim V = n$, то $\Lambda^n(\alpha) = \det \circ \alpha$, и из сделанных замечаний вытекает, что

$$d(\det \circ \alpha) = \operatorname{Tr} \circ d\alpha.$$

Прямое доказательство этого факта в группе $\mathbf{GL}_n$ можно провести следующим образом: пусть $X = (X_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n$. Тогда $\det(e^{\delta X}) = e^{\delta d(\det X)}$, т. е. $\det(I + \delta X) = 1 + \delta d(\det)(X)$. Вычисляя определитель

$$\det \begin{pmatrix} 1+\delta X_{11} & \delta X_{12} & \ldots & \delta X_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta X_{n1} & \delta X_{n2} & \ldots & 1+\delta X_{nn} \end{pmatrix}$$

и используя тот факт, что $\delta^2 = 0$, легко находим, что $\det(1 + \delta X) = 1 + \delta(X_{11} + \ldots + X_{nn})$. Таким образом,

$$d(\det)(X) = \operatorname{Tr}(X) \quad (X \in \mathfrak{gl}_n).$$

(8) Пусть α: $G \to GL(V)$ — рациональное представление, и предположим, что V — не обязательно ассоциативная алгебра. Тогда, если G действует как группа автоморфизмов алгебры V (при помощи гомоморфизма α), то $\mathfrak{g}$ действует при помощи дифференциала $d\alpha$ как алгебра дифференцирований алгебры V. В этом можно убедиться, раскрывая формулу $\alpha(e^{\delta X})(uv) = \alpha(e^{\delta X})(u)\,\alpha(e^{\delta X})(v)$ при $X \in \mathfrak{g}$ и u, $v \in V$.

3.10. Предложение. *Пусть G — аффинная алгебраическая группа, и пусть $V \subset A = K[G]$ — конечномерное векторное пространство, инвариантное относительно правых сдвигов ρ_g для всех $g \in G$. Пусть ρ: $G \to GL(V)$ — рациональное представление $g \to \rho_g | V$. Тогда при $X \in \mathfrak{g}$ и $f \in V$*

$$(d\rho)(X)(f) = f * X.$$

Доказательство. Напомним, что по формуле (1) из п. 3.4 имеем $\rho_g = * e_g$, где $* e_g = I \cdot e_g = (I \otimes e_g) \circ \mu_0$ и I: $A \to A$ — тождественное отображение. Мы видим теперь, что $I + \delta(d\rho)(X)$ является ограничением на $K[\delta] \otimes_K V \subset K[\delta] \otimes_K A$ отображения $I \cdot e^{\delta X} = I \cdot (e + \delta X) = I \cdot e + \delta(I \cdot X) = I + \delta(* X)$. Таким образом, $(d\rho)(X) = * X$, что и требовалось.

Следствие 1. *Всякое подпространство алгебры $K[G]$, инвариантное относительно правых сдвигов ρ_g, остается инвариантным относительно $\mathfrak{g}$, когда $\mathfrak{g}$ действует на $K[G]$ правыми конволюциями.*

Пусть $D \in K[\mathbf{GL}_n]$ — детерминант. При $g, h \in \mathbf{GL}_n$ имеем $(\rho_g D)(h) = D(hg) = D(h) D(g)$, так что

$$\rho_g D = \det(g) D.$$

Таким образом, одномерное пространство, натянутое на D, является правоинвариантным. Применяя предложение из п. 3.10 и формулу (7) из п. 3.9, получим

Следствие 2. *Если $D = \det \in K[\mathbf{GL}_n]$ и $X \in \mathfrak{gl}_n$, то $D * X = \mathrm{Tr}(X) D$.*

3.11. Предложение. *Пусть G — аффинная алгебраическая группа, и пусть H — замкнутая подгруппа с аффинной алгеброй $K[H] = K[G]/J$. Если j: $H \to G$ — вложение, то дифференциал dj отождествляет алгебру Ли $\mathfrak{h} = L(H)$ с подалгеброй Ли $\{X \in \mathfrak{g} \mid X(J) = 0\}$. При этом отождествлении мы можем охарактеризовать $\mathfrak{h}$ следующим образом: $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid J * X \subset J\}$.*

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{Der}_K(K[G]/J, K(e))$ отождествляется (при помощи отображения dj) с множеством тех $X \in \mathrm{Der}_K(K[G], K(e))$, которые „уничтожают“ J. Отсюда следует первое утверждение.

Пусть $\mathfrak{h}' = \{X \in \mathfrak{g} \mid J * X \subset J\}$. Предположим, что $X \in \mathfrak{h}$, $f \in J$ и $h \in H$. Тогда $(f * X)(h) = X(\lambda_{h^{-1}} f) = 0$, ибо $\lambda_{h^{-1}} J \subset J$, и $X(J) = 0$. Таким образом, $f * X \in J$, так что $X \in \mathfrak{h}'$.

Обратно, мы должны проверить, что $X(f) = 0$ при $X \in \mathfrak{h}'$ и $f \in J$. Но $X(f) = X(\lambda_{e^{-1}} f) = (f * X)(e) = 0$, ибо $f \in J$, $J * X \subset J$, и $e \in H$.

Следствие. *Пусть $G \subset \mathbf{GL}_n$ — замкнутая подгруппа и J — идеал всех полиномов из $A = K[T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{nn}]$, обращающихся в 0 на G. Тогда*

$$G = \{g \in \mathbf{GL}_n \mid \rho_g J = J\}$$

и

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mid J * X \subset J\}.$$

Доказательство. Положим $A' = K[\mathbf{GL}_n] = A(D^{-1})$, где $D = \det(T_{ij})$, и пусть J' — идеал функций из A', обращающихся в нуль на G. Предложение утверждает, что $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mid J' * X \subset J'\}$; тот факт, что $G = \{g \in \mathbf{GL}_n \mid \rho_g J' = J'\}$, очевиден.

Теперь легко видеть, что $J' = A'J$ и $J' \cap A = J$. Предположим, что $f \in J$ и $f' \in A'$. Тогда $\rho_g(ff') = \rho_g(f)\rho_g(f')$ и $(ff') * X = (f * X) f' + f(f' * X)$. Следовательно,

$$\rho_g J = J \Rightarrow \rho_g J' = J' \quad \text{и} \quad J * X \subset J \Rightarrow J' * X \subset J'.$$

Для доказательства обратного утверждения достаточно убедиться в том, что подалгебра $A \subset A'$ инвариантна относительно всех сдвигов ρ_g и всех конволюций $*X$.

Так как $*X = (I \otimes X) \circ \mu_0$, то $(T_{ij} * X) = (I \otimes X)\left(\sum_h T_{ih} \otimes T_{hj}\right) = \sum_h T_{ih} X(T_{hj}) \in A$. Аналогично, если $g, h \in \mathbf{GL}_n$, то $(\rho_g T_{ij})(h) = T_{ij}(hg) = \sum_m T_{im}(h) T_{mj}(g)$, так что $\rho_g T_{ij} = \sum_m T_{im} \cdot T_{mj}(g) \in A$. Таким образом, $A * X \subset A$ и $\rho_g A \subset A$, что и требовалось.

Замечание. Это следствие составляет основу одного из классических подходов к алгебрам Ли матричных групп, использующего только полиномиальные функции от элементов матриц.

3.12. Предложение. *Пусть M и N — замкнутые подгруппы аффинной алгебраической группы G, и пусть H — замыкание коммутанта (M, N). Тогда $\mathfrak{h} = L(H)$ содержит все элементы вида*

$$[X, Y] \qquad (X \in \mathfrak{m},\ Y \in \mathfrak{n}),$$

$$\mathrm{Ad}(m)(Y) - Y \qquad (m \in M), \qquad \mathrm{Ad}(n)(X) - X \qquad (n \in N).$$

Доказательство. При $m \in M$ определим морфизм α_m: $N \to H$ формулой $\alpha_m(n) = mnm^{-1}n^{-1}$. Тогда (см. формулу (1) из п. 3.9) $(d\alpha_m)_e = (\mathrm{Ad}(m) - \mathrm{Id})$: $\mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$. Это дает все элементы второго типа, а элементы третьего типа могут быть получены подобным же образом.

При $A \in \mathfrak{n}$ определим морфизм α_A: $M \to \mathfrak{h}$ формулой $\alpha_A(m) = \mathrm{Ad}(m)(A) - A$. В соответствии со сказанным выше элементы $\alpha_A(m)$ принадлежат $\mathfrak{h}$. Согласно формуле (2) из п. 3.9 $(d\alpha_A)_e = -\mathrm{ad}(A)$, так что все элементы вида $[A, X]$, $X \in \mathfrak{m}$, принадлежат $\mathfrak{h}$.

Замечание. Элементы, указанные в предложении 3.12, вообще говоря, не порождают $\mathfrak{h}$ как пространство; однако они порождают $\mathfrak{h}$, если $\mathrm{char}(k) = 0$.

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ЖОРДАНА

4.1. Нильпотентные, унипотентные и полупростые эндоморфизмы. Пусть V — конечномерное векторное пространство над K с k-структурой $V(k)$. Тогда алгебра $E = \mathrm{End}_K(V)$ также обладает k-структурой, задаваемой k-алгеброй $E(k) = \mathrm{End}_k(V(k))$. Эндоморфизм $a \in E$ называется *нильпотентным*, если $a^r = 0$ для подходящего целого $r > 0$, и *унипотентным*, если $a - 1$ — нильпотентный элемент, где 1 — тождественный эндоморфизм пространства V. Иначе говоря, эндоморфизм a нильпотентен (соответственно унипотентен), если все его собственные значения равны 0 (соответственно 1).

(a) *Если* $\operatorname{char}(k)=p>0$, *то эндоморфизм a тогда и только тогда унипотентен, когда* $a^{p^r}=1$ *для подходящего целого* $r\geqslant 0$.

В самом деле, если $a=1+n$ и n нильпотентен, то $a^{p^r}=1+n^{p^r}=1$ при достаточно большом r. Обратно, из равенства $a^{p^r}=1$ вытекает, что минимальный полином эндоморфизма a делит полином $T^{p^r}-1=(T-1)^{p^r}$, так что все собственные значения эндоморфизма a равны 1.

(b) *Эндоморфизм* $a\in E(k)$ *называется полупростым, если выполняются следующие эквивалентные друг другу условия:*

(i) *Собственные векторы эндоморфизма a в* $V(\bar k)$ *порождают* $V(\bar k)$; *другими словами, эндоморфизм a диагонализируем над k.*

(ii) *Алгебра* $\bar k[a]\subset E(\bar k)$ *полупроста, т. е.* $\bar k[a]$ — *произведение конечного числа экземпляров полей* $\bar k$[1]).

Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) становится очевидной, как только мы приведем a к диагональному виду. Обратно, если $\bar k[a]$ — произведение конечного числа экземпляров поля $\bar k$, то любой модуль над $\bar k[a]$, например $V(\bar k)$, будет прямой суммой одномерных подмодулей.

(c) *Если эндоморфизм* $a\in E(k)$ *полупрост, то его собственные значения сепарабельны над k. Следовательно, a диагонализируем над* k_s.

В самом деле, $k[a]\cong k[T]/(P(T))$, где P — минимальный полином эндоморфизма a. Так как $a\in E(k)$, то алгебра $\bar k[a]=\bar k\otimes_k k[a]$ не имеет нильпотентных элементов, так что полином P не имеет кратных корней, т. е. P — сепарабельный полином.

(d) *Предположим, что эндоморфизмы* $a, b\in E$ *коммутируют. Тогда*

(i) a, b — *нильпотентные эндоморфизмы* $\Rightarrow a+b$ — *нильпотентный эндоморфизм;*

(ii) a, b — *унипотентные эндоморфизмы* $\Rightarrow ab$ — *унипотентный эндоморфизм;*

(iii) a, b — *полупростые эндоморфизмы* $\Rightarrow ab$ *и* $a+b$ — *полупростые эндоморфизмы.*

Если $a^n=b^m=0$, то $(a+b)^{n+m}=0$, откуда следует утверждение (i). Так как $ab-1=(a-1)b+(b-1)$, то утверждение (ii) вытекает из утверждения (i). Доказательство утверждения (iii) предоставляется читателю в качестве упражнения (ср. п. 4.6).

Отметим еще следующее очевидное утверждение:

(e) *Если эндоморфизм a одновременно полупрост и нильпотентен (соответственно унипотентен), то* $a=0$ *(соответственно* $a=1$*).*

---

[1]) См. сноску на стр. 24. — *Прим. перев.*

4.2. Предложение. *Мы сохраняем принятые выше обозначения. Пусть $a \in E$.*

(1) *Существуют единственные эндоморфизмы a_s, $a_n \in E$, такие, что эндоморфизм a_s полупрост, эндоморфизм a_n нильпотентен, $a_s a_n = a_n a_s$ и $a = a_s + a_n$. Мы называем эту формулу (аддитивным) разложением Жордана эндоморфизма a.*

(2) *Существуют полиномы $P(T)$ и $Q(T)$ из $K[T]$ с нулевыми постоянными членами, такие, что $a_s = P(a)$ и $a_n = Q(a)$.*

(3) *Централизатор эндоморфизма a в E централизует a_s и a_n. Если подпространства $A \subset B \subset V$ таковы, что $aB \subset A$, то $a_s B \subset A$ и $a_n B \subset A$.*

(4) *Если $A \subset V$ — инвариантное относительно эндоморфизма a подпространство пространства V, то разложение Жордана эндоморфизма a индуцирует разложения Жордана эндоморфизмов $a|A$ и $a_{V/A}$; здесь $a_{V/A}$ — эндоморфизм, индуцированный эндоморфизмом a на пространстве V/A.*

(5) *Если $a \in E(k)$, то a_s, $a_n \in E(k^{p^{-\infty}})$. Кроме того, полиномы P и Q можно выбрать из кольца $k^{p^{-\infty}}[T]$.*

Доказательство. (1) Пусть $\det(T - a) = \prod (T - \alpha_i)^{m_i}$, где α_i различны; положим $V_i = \ker(a - \alpha_i \cdot 1)$. Легко видеть тогда, что $V = \coprod V_i$. Предположим, что $a = b + c$, где b — полупростой, а c — нильпотентный эндоморфизмы, $bc = cb$. Тогда b коммутирует с эндоморфизмом a и, следовательно, с эндоморфизмом $(a - \alpha_i \cdot 1)^{m_i}$, так что каждое подпространство V_i инвариантно относительно b. Так как эндоморфизм $a - b = c$ нильпотентен, то a и b имеют одни и те же собственные значения на V_i. Так как a имеет только одно собственное значение, скажем α_i, и так как b — полупростой эндоморфизм, то $b|V_i = \alpha_i \cdot 1|V_i$. Следовательно, эндоморфизм b, а вместе с ним и эндоморфизм $c = a - b$, определяется однозначно. С другой стороны, если определить эндоморфизм a_s формулой $a_s|V_i = a_i 1|V_i$ и положить $a_n = a - a_s$, то, очевидно, эндоморфизмы a_s и a_n удовлетворяют нашим требованиям.

(2) Подберем полином $P(T)$ таким образом, чтобы имели место сравнения:

$$P(T) \equiv \alpha_i (\mathrm{mod}\, (T - \alpha_i)^{m_i}) \quad \text{и} \quad P(T) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, (T)).$$

Сравнение слева в случае, когда $\alpha_i = 0$, согласуется со сравнением справа. Следовательно, эта система сравнений имеет решение („китайская теорема об остатках")[1]. В качестве $Q(T)$ возьмем полином $T - P(T)$.

(3) Непосредственно вытекает из (2).

(4) Обозначим через a' и a'' эндоморфизмы, индуцированные эндоморфизмом a на пространствах A и V/A соответственно.

[1]) См. Ленг [1], стр. 82.— *Прим. ред.*

Согласно утверждению (3), пространство A инвариантно относительно a_s и a_n, так что можно определить аналогичным образом эндоморфизмы a'_s, a''_s и a'_n, a''_n. Вполне очевидно теперь, что формулы $a' = a'_s + a'_n$, $a'' = a''_s + a''_n$ дают разложения Жордана эндоморфизмов a' и a'' соответственно.

(5) Если $a \in E(k)$, то $\alpha_i \in \bar{k}$, и по построению эндоморфизмов a_s и a_n в доказательстве утверждения (1) имеем a_s, $a_n \in E(\bar{k})$. Группа Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ естественным образом действует как группа автоморфизмов алгебры $E(\bar{k})$. Тогда при $s \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ выполняются равенства $a = s(a) = s(a_s) + s(a_n)$, причем эндоморфизм $s(a_n)$ нильпотентен и коммутирует с $s(a_s)$. Кроме того, так как $\bar{k}[a_s]$ — полупростая алгебра (см. п. 4.1), то $s(\bar{k}[a_s]) = \bar{k}[s(a_s)]$ — также полупростая алгебра, откуда следует, что эндоморфизм $s(a_s)$ также полупрост. Из единственности разложения Жордана вытекает теперь, что $s(a_s) = a_s$ и $s(a_n) = a_n$. Но множество элементов алгебры $E(\bar{k})$, неподвижных относительно группы $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, совпадает с $E(k^{p^{-\infty}})$. В частности, a_s, $a_n \in \bar{k}[a] \cap E(k^{p^{-\infty}}) = k^{p^{-\infty}}[a]$, так что полиномы P и Q в утверждении (2) можно выбрать так, чтобы их коэффициенты принадлежали полю $k^{p^{-\infty}}$.

Следствие 1. *При $g \in GL(V)$ положим $g_u = 1 + g_s^{-1} g_n$.*

(1) *$g = g_s g_u = g_u g_s$, причем автоморфизм g_s полупрост, а g_u унипотентен. Такое разложение автоморфизма g единственно. (Его называют мультипликативным разложением Жордана эндоморфизма g.)*

(2) *Если A — инвариантное относительно g подпространство пространства V, то A инвариантно относительно g_s и g_u; мультипликативное разложение Жордана автоморфизма g индуцирует соответствующие разложения автоморфизмов, индуцированных автоморфизмом g на A и V/A.*

(3) *Если автоморфизм g рационален над k, то автоморфизмы g_s и g_u также рациональны над $k^{p^{-\infty}}$.*

Доказательство. (1) Так как g_s и g_n коммутируют, то автоморфизм $g_u = 1 + g_s^{-1} g_n$ унипотентен и $g = g_s g_u = g_u g_s$. Предположим, что $g = bc = cb$, где эндоморфизм b полупрост, а $n = c - 1$ нильпотентен. Тогда эндоморфизм bn нильпотентен и коммутирует с b, так что $g = b + bn$ — аддитивное разложение Жордана эндоморфизма g. Следовательно, $b = g_s$ и $bn = g_n$, откуда вытекает утверждение (1).

С учетом формулы $g_u = 1 + g_s^{-1} g_n$ утверждения (2) и (3) непосредственно следуют из утверждений (4) и (5) предложения.

Следствие 2. *Предположим, что эндоморфизмы $a, b \in E$ перестановочны. Тогда $a+b=(a_s+b_s)+(a_n+b_n)$ — аддитивное разложение Жордана эндоморфизма $a+b$. Если a и b, кроме того, обратимы, то $ab=(a_sb_s)(a_ub_u)$ — мультипликативное разложение Жордана автоморфизма ab. Все возникающие здесь элементы коммутируют между собой.*

Доказательство вытекает из утверждения (с) п. 4.1 и части (3) предложения.

Следствие 3. *Если $g \in GL(V)$ и $h = GL(W)$, то $g \otimes h = (g_s \otimes h_s)(g_u \otimes h_u)$ — разложение Жордана автоморфизма $g \otimes h$.*

Доказательство. Достаточно применить следствие (2) к автоморфизмам $g \otimes 1_W$ и $1_V \otimes h$.

Соглашения. Предположим, что пространство V не обязательно конечномерно. Будем говорить, что эндоморфизм $a \in E(V)$ *локально конечен*, если V порождается конечномерными инвариантными относительно a подпространствами. Мы будем называть локально конечный эндоморфизм a *локально нильпотентным* (*локально унипотентным*, *локально полупростым*), если ограничения его на каждое конечномерное инвариантное относительно a подпространство нильпотентно (унипотентно, полупросто). Единственность аддитивного и мультипликативного разложений Жордана в конечномерных пространствах позволяет определить для локально конечного эндоморфизма a аддитивное $a=a_s+a_n$ и, если a обратим, мультипликативное $a=a_sa_u$ разложения Жордана, которые индуцируют на конечномерных инвариантных относительно a подпространствах обычные разложения Жордана. В этих разложениях эндоморфизм a_s локально полупрост, a_n локально нильпотентен, a_u локально унипотентен и $a_sa_n=a_na_s$, $a_sa_u=a_ua_s$. Эти свойства определяют a_s, a_n и a_u однозначно.

Иногда, допуская вольность речи, мы опускаем в подобной ситуации слово „локально“.

Пусть G — аффинная алгебраическая группа. При $g \in G$ и $X \in \mathfrak{g}$ эндоморфизмы ρ_g и $*X$ пространства $A=K[G]$ локально конечны (см. п. 1.9 и п. 3.10). Поэтому можно говорить об их разложениях Жордана

$$\rho_g = (\rho_g)_s(\rho_g)_u$$

и

$$*X = (*X)_s + (*X)_n.$$

Основной результат этого раздела состоит в том, что эти разложения можно реализовать уже в G и $\mathfrak{g}$ соответственно.

4.3. Сохраним обозначения и терминологию п. 4.2.

Предложение. *Пусть $g \in GL(V)$, $X \in \mathfrak{gl}(V)$ и $A=K[GL(V)]$.*

(1) *Автоморфизм g полупрост (соответственно унипотентен) тогда и только тогда, когда ρ_g полупрост (соответственно унипотентен).*

(2) *Эндоморфизм X полупрост (соответственно нильпотентен) тогда и только тогда, когда $*X$ полупрост (соответственно нильпотентен).*

Доказательство. Имеем $A = B[D^{-1}]$, где $B = K[\mathrm{End}(V)]$, и D: $\mathrm{End}(V) \to K$ — определитель. Очевидно, что подпространство $(\mathrm{End}(V))^* \subset A$ инвариантно относительно правых сдвигов ρ_g. Согласно п. 3.10, это подпространство инвариантно также относительно дифференциала $*X$ правого сдвига ρ_g. Следовательно, подалгебра B алгебры A инвариантна относительно ρ_g и $*X$; их продолжения на алгебру A определяются при $f \in B$ формулами

$$\rho_g(fD^{-n}) = \rho_g(f)\,\rho_g(D)^{-n} = D(g)^{-n}\,\rho_g(f)\,D^{-n},$$

$$(fD^{-n}) * X = (f * X)\,D^{-n} - nfD^{-n-1}(D * X) = (f * X)\,D^{-n} - n\,\mathrm{Tr}(X)\,fD^{-n}.$$

Здесь был использован тот факт, что $\rho_g(D) = D(g)\,D$ и $(D * X) = (XD)\,D = \mathrm{Tr}(X)\,D$ (см. п. 3.10). Эти формулы показывают, что если f — собственный вектор для ρ_g (соответственно для $*X$), то fD^{-n} — также собственный вектор при любом $n \geqslant 0$. Отсюда следует, что эндоморфизм ρ_g (соответственно $*X$) полупрост тогда и только тогда, когда его ограничение на B полупросто.

Предположим, что автоморфизм ρ_g на B унипотентен. Тогда, так как $\rho_g D = D(g)\,D$, то $D(g) = 1$. Следовательно, $(\rho_g - 1)(fD^{-n}) = ((\rho_g - 1)(f))\,D^{-n}$, откуда следует, что ρ_g унипотентен на A. Обратное очевидно.

Аналогично, если эндоморфизм $*X$ на B нильпотентен, то равенство $(D * X) = \mathrm{Tr}(X)\,D$ влечет за собой $\mathrm{Tr}(X) = 0$, так что $(fD^{-n}) * X = (f * X)\,D^{-n}$. Это показывает, что $*X$ нильпотентен на A. Обратное очевидно.

Из этих замечаний вытекает, что достаточно доказать аналог предложения для алгебры $B = K[\mathrm{End}(V)]$. Положим $E = \mathrm{End}(V)$. Алгебра B является симметрической алгеброй $S(E^*)$ двойственного пространства $E^* = \mathrm{Hom}_K(E, K)$ пространства E. Кроме того, ρ_g и $*X$ являются соответственно автоморфизмом и дифференцированием алгебры $S(E^*)$, индуцированными правым умножением в E на элемент $g \in GL(V)$ и коммутированием с помощью элемента $X \in \mathfrak{gl}(V) \subset E$ соответственно.

Если мы отождествим E с $V^* \otimes V$ ($f \otimes v$: $x \to f(x)\,v$), то правое умножение на $a \in E$ соответствует применению эндоморфизма

$a^* \otimes 1$. Достаточно проверить это в случае, когда a имеет вид $g \otimes w$. Именно,

$$(f \otimes v)(g \otimes w)\colon\ x \to f(w)\, g(x)\, v = (f(w)\, g \otimes v)(x)$$

и

$$(a^* \otimes 1)(f \otimes v) = a^*(f) \otimes v = f(w)\, g \otimes v.$$

Так как a нильпотентен (соответственно унипотентен, полупрост) тогда и только тогда, когда $a^* \otimes 1$ нильпотентен (соответственно унипотентен, полупрост), то для завершения доказательства достаточно сослаться на следующую лемму, в которой роль E^* играет V.

Лемма. *Пусть* $g \in GL(V)$ *и* $X \in \mathfrak{gl}(V)$.

(1) *Элемент* g *полупрост* (*соответственно унипотентен*) *тогда и только тогда, когда автоморфизм* $S(g)$ *алгебры* $S(V)$, *индуцированный автоморфизмом* g *пространства* V, *полупрост* (*соответственно унипотентен*).

(2) *Эндоморфизм* X *полупрост* (*соответственно нильпотентен*) *тогда и только тогда, когда дифференцирование* $s(X)$ *алгебры* $S(V)$, *индуцированное эндоморфизмом* X *пространства* V, *полупросто* (*соответственно нильпотентно*).

Доказательство. Ограничения автоморфизма $S(g)$ и дифференцирования $s(X)$ на подпространство $V = S^1(V)$ совпадают с g и X соответственно, откуда следует утверждение „только тогда".

Так как автоморфизм $S^n(g)$ индуцируется автоморфизмом $T^n(g)$ пространства $T^n(V) = V \otimes \ldots \otimes V$ путем перехода к соответствующему факторпространству, то утверждение „тогда" в части (1) вытекает из следствия 2 п. 4.2.

Аналогично, дифференцирование $s^n(X)$ индуцируется при переходе к факторпространству $S^n(V)$ пространства $T^n(V)$ эндоморфизмами вида

$$\sum_i 1 \otimes \ldots \otimes \overset{i\text{-е место}}{X} \otimes \ldots \otimes 1.$$

Эти слагаемые перестановочны и полупросты (соответственно нильпотентны), если эндоморфизм X полупрост (соответственно нильпотентен), так что их сумма — полупростой (соответственно нильпотентный) эндоморфизм. Отсюда следует (2).

4.4. Разложение Жордана в аффинных группах. Пусть G — аффинная k-группа с координатным кольцом $A = K[G]$. При $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ правый сдвиг ρ_g и правая конволюция $*X$ обладают разложениями Жордана в смысле соглашения из п. 4.2.

Теорема. *Пусть* $g \in G$ *и* $X \in \mathfrak{g}$.

(1) *Существует единственное разложение на сомножители* $g = g_s g_u$ (g_s, $g_u \in G$), *такое, что* $\rho_g = \rho_{g_s}\rho_{g_u}$ *является* (*мультипли-*

кативным) разложением Жордана автоморфизма ρ_g. *Если* $g \in G(k)$, *то* g_s, $g_u \in G(k^{p^{-\infty}})$.

(2) *Существует единственное разложение* $X = X_s + X_n$, X_s, $X_n \in \mathfrak{g}$, *такое, что* $*X = (*X_s) + (*X_n)$ — *аддитивное разложение Жордана дифференцирования* $*X$. *Если* $X \in \mathfrak{g}(k)$, *то* X_s, $X_n \in \mathfrak{g}(k^{p^{-\infty}})$.

(Эти разложения мы будем называть *разложениями Жордана* элемента g в группе G и элемента X в алгебре $\mathfrak{g}$ соответственно.)

(3) *Если* $G = GL(V)$ (*так что* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$), *то введенные выше понятия совпадают с понятиями, введенными в п.* 4.2.

(4) *Пусть* α: $G \to G'$ — *морфизм аффинных групп. Тогда* α *и* $d\alpha$ *сохраняют разложения Жордана в группах и алгебрах Ли соответственно.*

Доказательство. *Случай* 1. $G = GL(V)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$. Пусть $g = g_s g_u$ и $X = X_s + X_n$ — разложения Жордана в смысле п. 4.2. Тогда из утверждения (1) предложения из п. 4.3 следует, что ρ_{g_s} — полупростой, а ρ_{g_u} — унипотентный автоморфизмы. Так как отображение $g \to \rho_g$ — гомоморфизм, то ρ_{g_s} и ρ_{g_u} перестановочны, так что $\rho_g = \rho_{g_s}\rho_{g_u}$ — разложение Жордана. Подобным же образом, согласно утверждению (2) предложения п. 4.3, $*X_s$ — полупростой, а $*X_n$ — нильпотентный эндоморфизмы. Так как отображение $X \to *X$ — гомоморфизм алгебр Ли, то $*X_s$ и $*X_n$ коммутируют, так что $*X = (*X_s) + (*X_n)$ — разложение Жордана эндоморфизма $*X$. Оба гомоморфизма $g \to \rho_g$ и $X \to *X$ совместимы с k-структурой; поэтому утверждения о рациональности вытекают из соответствующих утверждений п. 4.2.

Единственность в этом, а также в общем случае, вытекает из инъективности отображений $g \to \rho_g$ (см. п. 1.10) и $X \to *X$ (см. п. 3.4).

Общий случай. Рассмотрим какое-либо k-рациональное вложение $G \subset GL(V)$ для подходящего V (см. п. 1.10), так что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$. Тогда операторы ρ_g и $*X$ индуцируются при переходе к фактор-алгебре A алгебры $B = K[GL(V)]$ соответствующими операторами на B, следовательно, имеют место, согласно случаю 1, разложения $g = g_s g_u$ (в $GL(V)$) и $X = X_s + X_n$ (в $\mathfrak{gl}(V)$). Чтобы доказать желаемый результат, достаточно убедиться, что g_s, $g_u \in G$ и X_s, $X_n \in \mathfrak{g}$. Единственность и свойства рациональности этих разложений могут быть установлены точно так же, как в случае 1.

Пусть J — идеал алгебры B, определяющий группу G. Согласно п. 3.11,

$$G = \{g \in GL(V) \mid \rho_g J = J\}$$

и

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid J * X \subset J\}.$$

Из предложения п. 4.2 вытекает, что при $g \in G$ и $X \in \mathfrak{g}$ идеал J инвариантен относительно $(\rho_g)_s$, $(\rho_g)_u$, $(*X)_s$ и $(*X)_n$. Но, согласно случаю 1, эти операторы совпадают с ρ_{g_s}, ρ_{g_u}, $*X_s$ и $*X_u$ соответственно. Это завершает доказательство утверждений (1) — (3).

Доказательство утверждения (4). Представляя морфизм α в виде $G \to \alpha(G) \to G'$, мы видим, что достаточно рассмотреть два случая:

(i) морфизм α — вложение замкнутой подгруппы,

(ii) морфизм α сюръективен.

В случае (i) $G \subset G'$ и совместимость разложений Жордана вытекает из утверждения (3), если использовать вложение группы G' в линейную группу.

В случае (ii) коморфизм α_0: $A' \to A$ инъективен, так что A' можно считать подалгеброй алгебры A. Тогда при $g \in G$ и $X \in \mathfrak{g}$ получаем $\rho_{\alpha(g)} = \rho_g \,|\, A'$ и $*d\alpha(X) = *X \,|\, A'$. Следовательно, согласно п. 4.2, имеют место соответствующие соотношения между разложениями Жордана.

Следствие. (1) *Если элементы g, $h \in G$ перестановочны, то $gh = (g_s h_s)(g_u h_u)$ — разложение Жордана элемента gh; все возникающие здесь элементы перестановочны друг с другом.*

(2) *Если элементы X, $Y \in \mathfrak{g}$ перестановочны (т. е. $[X, Y] = 0$), то $X + Y = (X_s + Y_s) + (X_n + Y_n)$ — разложение Жордана элемента $X + Y$; все возникающие элементы перестановочны друг с другом.*

Доказательство вытекает из следствия 2 п. 4.2, если использовать вложение $G \to GL(V)$.

4.5. Полупростые и унипотентные элементы в аффинных группах. В аффинной k-группе G множества полупростых и унипотентных элементов задаются формулами

$$G_s = \{g \in G \mid g = g_s\}$$

и

$$G_u = \{g \in G \mid g = g_u\}$$

соответственно. Соответствующие множества полупростых и нильпотентных элементов в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задаются формулами

$$\mathfrak{g}_s = \{X \in \mathfrak{g} \mid X = X_s\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}_n = \{X \in \mathfrak{g} \mid X = X_n\}.$$

Из утверждения (4) теоремы п. 4.4 вытекает, что если α: $G \to G'$ — морфизм аффинных k-групп, то

$$\alpha(G_s) \subset G'_s, \qquad \alpha(G_u) \subset G'_u,$$
$$(d\alpha)(\mathfrak{g}_s) \subset \mathfrak{g}'_s, \qquad (d\alpha)\,\mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{g}'_n.$$

В действительности $\alpha(G_s) = \alpha(G)_s$ и $\alpha(G_u) = \alpha(G)_u$, $(d\alpha)(\mathfrak{g}_s) = ((d\alpha)(\mathfrak{g}))_s$, $(d\alpha)(\mathfrak{g}_n) = ((d\alpha)(\mathfrak{g}))_n$. Кроме того, следствие теоремы из п. 4.4 показывает, что произведение двух перестановочных элементов множества G_s (соответственно G_u) принадлежит G_s (соответственно G_u). Аналогичный факт имеет место для сумм перестановочных элементов множества $\mathfrak{g}_s$ (соответственно $\mathfrak{g}_n$). В частности, *если группа G коммутативна, то G_s и G_u являются подгруппами, а $\mathfrak{g}_s$ и $\mathfrak{g}_n$ — подпространствами*, причем, как следует из утверждения (е) п. 4.1,

$$G_s \cap G_u = \{e\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}_s \cap \mathfrak{g}_n = 0.$$

Если вложить группу G в $GL(V)$, то элементы множества G_u (соответственно $\mathfrak{g}_n$) можно определить уравнением $(g-e)^n = 0$ (соответственно $X^n = 0$) в $\operatorname{End}(V)$ (для достаточно большого n). Коэффициенты этих уравнений в k-рациональном базисе пространства V принадлежат $\mathbf{Z}$; таким образом,

G_u является k-замкнутым подмножеством группы G

и

$\mathfrak{g}_u$ является k-замкнутым подмножеством алгебры $\mathfrak{g}$.

4.6. Приведение к треугольному и диагональному видам. Пусть M — подмножество алгебры $\mathfrak{gl}_n$. Будем говорить, что множество M *триангулируемо* (над k) (или что M *приводится* (над k) *к треугольному виду*), если для подходящего $g \in \mathbf{GL}_n$ (соответственно $g \in \mathbf{GL}_n(k)$) множество gMg^{-1} состоит из верхних треугольных матриц (т. е. содержится в $L(\mathbf{T}_n)$). Множество M будем называть *диагонализируемым* (над k) (или *приводящимся* (над k) *к диагональному виду*), если для подходящего $g \in \mathbf{GL}_n$ (соответственно $g \in \mathbf{GL}_n(k)$) множество gMg^{-1} имеет диагональный вид (т. е. содержится в $L(\mathbf{D}_n)$).

Вообще, если V — конечномерное векторное пространство с k-структурой $V(k)$, то можно говорить о триангуляции или диагонализации над k семейства эндоморфизмов пространства V. Это означает, что все эндоморфизмы семейства имеют треугольный или диагональный вид соответственно в подходящем k-рациональном базисе пространства V.

Предложение. *Пусть $M \subset \mathfrak{gl}_n(k)$ — семейство попарно перестановочных эндоморфизмов и L — расширение поля k, полученное присоединением к k собственных значений элементов множества M. Тогда*

(a) *множество M триангулируемо над L;*

(b) *если M состоит из полупростых эндоморфизмов, то $L \subset k_s$ и множество M диагонализируемо над L.*

Доказательство. Тот факт, что $L \subset k_s$, вытекает из утверждения (с) п. 4.1. В остальной части доказательства мы можем, следовательно, заменить k на L и считать, что все собственные значения элементов множества M принадлежат k.

При $X \in M$ и $a \in k$ пространство $W = \ker(X - a \cdot 1)$, очевидно, определено над k и инвариантно относительно всех эндоморфизмов Y, перестановочных с X, в частности, относительно всех $Y \in M$.

Если множество M состоит не только из скалярных матриц (иначе нечего было бы доказывать), то мы можем выбрать эндоморфизм X так, что $0 \neq W \neq V$.

Пользуясь индукцией по размерности, находим вектор $e_1 \in W(k)$, который порождает одномерное инвариантное относительно M подпространство. Применяя индуктивное предположение к V/Ke_1, мы можем дополнить множество, состоящее из одного вектора e_1, до k-рационального базиса $e_1, \ldots, e_n$, такого, что подпространства $Ke_1 + \ldots + Ke_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ инвариантны относительно множества M. Отсюда следует утверждение (a).

При доказательстве утверждения (b) мы опять можем предполагать, что множество M содержит нескалярный эндоморфизм X. Пусть $a_1, \ldots, a_r$ — различные собственные значения эндоморфизма X и $V_i = \ker(X - a_i \cdot 1)$. Тогда $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$; каждое подпространство V_i определено над k и инвариантно относительно M, так что, используя индукцию по $\dim V$, мы можем диагонализировать над k действие M на каждом V_i. Это приводит к искомой диагонализации множества M на всем пространстве V.

4.7. Теорема. *Пусть G — коммутативная k-группа. Тогда G_s и G_u — замкнутые подгруппы, и морфизм-произведение*

$$\alpha: G_s \times G_u \to G$$

является изоморфизмом алгебраических групп.

Доказательство. Как мы уже видели в п. 4.5, G_u — замкнутая подгруппа группы G и $G_s \cap G_u = \{e\}$. Следовательно, α является изоморфизмом абстрактных групп.

Вкладывая G в подходящую группу $\mathbf{GL}_n$ и используя предложение п. 4.6, мы можем считать, что $G_s = G \cap \mathbf{D}_n$. Отсюда, в частности, следует, что G_s — замкнутая подгруппа, так что α является, очевидно, морфизмом алгебраических групп [1]).

Пусть $K^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, где V_i — различные однородные относительно группы G_s подпространства. Тогда каждое подпространство V_i инвариантно относительно группы G_u, так что ввиду утверждения (a) предложения п. 4.6 мы можем привести G_u на каждом V_i к треугольному виду. Таким образом, мы можем предполагать, что $G \subset \mathbf{T}_n$ и что $G_s = G \cap \mathbf{D}_n$.

Если $g \in G$, то $g_s \in G_s \subset \mathbf{D}_n$, откуда легко следует (из того факта, например, что g имеет треугольный вид и что g_s — полином от g), что g_s — проекция матрицы g на свою диагональную

[1]) См. примечание на стр. 78. — *Прим. ред.*

компоненту $g \to \operatorname{diag}(g_{11}, \ldots, g_{nn})$. Ясно, что это морфизм; следовательно, отображение $g \to g_u = g_s^{-1}g$ — также морфизм, так что $g \to (g_s, g_u)$ — нужный нам обратный к α морфизм.

Замечание. В п. 4.5 мы видели, что множество G_u является k-замкнутым. Позднее в § 10 мы покажем, что множество G_s определено над k. Впрочем, в случае когда $\operatorname{char}(k) = 0$, это вытекает из очевидной инвариантности множества $G_s(\bar{k})$ относительно группы Галуа $\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$. Если же $\operatorname{char}(k) = p > 0$, то при $G \subset \mathbf{GL}_n$ для всех $g \in G$ имеет место равенство $g_u^{p^n} = e$. Следовательно, отображение β: $G \to G$, задаваемое формулой $\beta(g) = g^{p^n}$, является k-морфизмом k-групп, образ которого содержится в G_s. Более того, как мы увидим в § 8, отображение $g \to g^{p^n}$ является сюръективным уже на множестве G_s. Отсюда следует, что множество $G_s = \beta(G)$ определено над k.

4.8. Треугольные унипотентные группы. Пусть Λ — алгебра верхних треугольных матриц

$$\begin{bmatrix} * & & & * \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & * \end{bmatrix},$$

и пусть N — идеал алгебры Λ, образованный матрицами с нулевой диагональю. Тогда $N^n = 0$, так что $\mathbf{U}_n = 1 + N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & & * \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \right\}$

является *унипотентной группой*, т. е. группой, состоящей из унипотентных элементов. Нетрудно проверить, что группы $1 + N^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются нормальными делителями группы $\mathbf{U}_n$, причем справедлива следующая коммутаторная формула:

$$(1 + N^i, 1 + N^j) \subset 1 + N^{i+j}.$$

В частности, фиксируя $i = 1$ и варьируя j, находим, что группа $\mathbf{U}_n$ нильпотентна. Ее алгебра Ли $\mathfrak{u}$ совпадает с множеством всех верхних треугольных матриц с нулевой диагональю; таким образом, элементы алгебры $\mathfrak{u}$ являются нильпотентными матрицами.

Теорема. *Пусть G — не обязательно замкнутая унипотентная подгруппа группы $\mathbf{GL}_n(k)$. Тогда G сопряжена над k с подгруппой группы $\mathbf{U}_n$. В частности, G — нильпотентная группа, а ее алгебра Ли состоит из нильпотентных элементов.*

Доказательство. С учетом сделанных выше замечаний ясно, что требует доказательства лишь первое утверждение. Очевидно, достаточно показать, что существует одномерное подпространство L пространства V, точки которого неподвижны относительно G. В этом случае множество W неподвижных относительно G точек будет ненулевым определенным над k подпространством пространства V, так что для завершения доказательства останется применить индукцию по $\dim V$ к действию G на факторпространстве V/W.

Таким образом, мы можем считать, что поле k алгебраически замкнуто. Кроме того, индуктивное предположение позволяет ограничиться случаем, когда V — неприводимый G-модуль. Тогда векторное пространство, натянутое на элементы группы G, по теореме Веддербёрна обязано совпадать с $\operatorname{End}(V)$.

С другой стороны, при $1 \neq g \in G$ и любом $g' \in G$ имеем $\operatorname{Tr}((g-1)g' = \operatorname{Tr}(gg') - \operatorname{Tr}(g') = 0$, ибо все следы элементов группы G равны $\dim V$. Следовательно, $\operatorname{Tr}((g-1)x) = 0$ для любого $x \in \operatorname{End}(V)$, откуда вытекает, что $g - 1 = 0$, ибо G порождает $\operatorname{End}(V)$. Это означает, что $G = \{1\}$ и, значит, $\dim V = 1$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть G — унипотентная алгебраическая группа (т. е. $G = G_u$). Тогда группа G изоморфна замкнутой подгруппе группы $\mathbf{U}_n \subset \mathbf{GL}_n$ для подходящего n. Следовательно, $L(G)$ состоит из нильпотентных элементов.*

Доказательство. Применяя теорему к какому-либо точному представлению $\pi: G \to \mathbf{GL}_n$ (см. п. 1.10), получаем вложение группы G в $\mathbf{U}_n$. При этом $L(G)$ вкладывается в $L(\mathbf{U}_n)$; последняя состоит из верхних треугольных матриц с нулевой диагональю.

4.9. Замечание. Мы покажем позднее, что элемент $X \in \mathfrak{g}$ нильпотентен (соответственно полупрост) тогда и только тогда, когда он является касательным вектором к некоторой замкнутой унипотентной подгруппе (соответственно к тору, см. § 8).

Библиографические замечания. Разложение Жордана в алгебраических группах обсуждалось в статье Бореля [1]. Однако существование его эквивалентно теореме 4.7 о коммутативных алгебраических группах, доказанной ранее Колчиным [1]. Приведенное здесь доказательство следует рассуждению Шпрингера для случая алгебр Ли. Разложение Жордана в алгебрах Ли было введено Борелем и Шпрингером [1]. Однако принятое там (а также в статье Бореля и Шпрингера [2]) определение является более тонким, а доказательство существования — менее элементарным. У нас оно превращается в теорему, упомянутую в п. 4.9 и доказанную в пп. 11.8 и 14.7.

Глава II

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 5. ПОЛУИНВАРИАНТЫ

В этом параграфе все алгебраические группы являются аффинными. Полученные здесь результаты подготавливают средства для построения факторов в § 6.

5.1. Теорема. *Пусть G — произвольная k-группа и H — замкнутая подгруппа, определенная над k. Тогда существуют определенное над k точное представление $\alpha : G \to GL(E)$ и определенное над k одномерное подпространство $D \subset E$, такие, что*

$$H = \{g \in G \mid \alpha(g) D = D\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\alpha(X) D \subset D\}.$$

Доказательство. Пусть I — идеал алгебры $A = K[G]$, состоящий из функций, обращающихся в нуль на H; он порождается подалгеброй $I_k = I \cap k[G]$ и, более того, даже конечным подмножеством алгебры I_k. Следовательно, согласно п. 1.9, существует конечномерное определенное над k инвариантное относительно правых сдвигов подпространство V алгебры A, такое, что если $W = V \cap I$, то идеал I_k порождается k-подпространством W_k.

Подпространство W определено над k и инвариантно относительно правых H-сдвигов, поскольку этими свойствами обладают пространства V и I. Мы утверждаем теперь, что

$$H = \{g \in G \mid \rho_g W = W\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid W * X \subset W\}.$$

Из результатов п. 3.11 следует, что эти соотношения имеют место, если заменить W на I.

Как мы уже отмечали, пространство W инвариантно относительно правых H-сдвигов и, следовательно, $\mathfrak{h}$-инвариантно, ибо конволюция является дифференциалом правого сдвига (см. п. 3.10).

Обратно, предположим, что $g \in G$ и $\rho_g W = W$. Так как ρ_g — автоморфизм алгебры A, то $\rho_g I = \rho_g (WA) = \rho_g (W) A = WA = I$, так что $g \in H$. Аналогично, если $X \in \mathfrak{g}$ и $W * X \subset W$, то

$$I * X = (WA) * X \subset (W * X) A + W (A * X) WA = I,$$

так что $X \in \mathfrak{h}$.

Положим теперь $E = \Lambda^d V$, где $d = \dim W$, и пусть $D = \Lambda^d W \subset E$. Представление $\rho : G \to GL(V)$ индуцирует представление $\alpha = \Lambda^d \rho : G \to GL(E)$, определенное над k. В случае, когда α не является точным, заменим E на $E \oplus F$, используя какое-либо точное определенное над k представление $G \to GL(F)$. Тогда все условия теоремы будут выполнены благодаря следующей лемме из линейной алгебры:

Лемма. *Пусть W — подпространство размерности d векторного пространства V, и пусть $D = \Lambda^d W \subset E = \Lambda^d V$. Если $g \in GL(V)$ и $X \in \mathfrak{gl}(V)$, то*

$$(1) \qquad (\Lambda^d g) D = D \Leftrightarrow gW = W,$$

$$(2) \qquad (d\Lambda^d)(X) D \subset D \Leftrightarrow XW \subset W.$$

Доказательство. В обоих случаях импликация $\Leftarrow$ тривиальна. Пусть (e_i) $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — базис пространства V, выбранный так, что $e_1, \ldots, e_d$ — базис пространства W. В случае (1) можно перенумеровать e_i так, что для подходящего $n \geqslant 1$ элементы $e_n, \ldots, e_{n+d-1}$ образуют базис пространства gW. Тогда вектор $(\Lambda^d g)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_d)$ кратен вектору $e_n \wedge \ldots \wedge e_{n+d-1}$, так что условие $(\Lambda^d g) D = D$ влечет за собой $n = 1$, т. е. $gW = W$.

В случае (2) мы можем заменить X на $X - Y$ для подходящего Y, оставляющего W инвариантным, с тем, чтобы добиться выполнения условия $W \cap XW = 0$. Тогда можно выбрать базис (e_i) так, чтобы вектор Xe_i был кратен вектору e_{d+i} $(1 \leqslant i \leqslant d)$. В этом случае

$$(d\Lambda^d)_e (X)(e_1 \ldots e_d) = \\ = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d} e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge Xe_i \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_d.$$

Так как векторы $e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge e_{d+i} \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_d$ составляют часть базиса пространства $\Lambda^d V$, который содержит вектор $e_1 \wedge \ldots \wedge e_d$, то выписанная сумма может быть кратна $e_1 \wedge \ldots \wedge e_d$ только тогда, когда каждое Xe_i равно 0, т. е. когда $X = 0$.

5.2. Характеры и полуинварианты. Пусть G и G' — группы, определенные над k. Обозначим через $\mathrm{Mor}(G, G')$ множество морфизмов алгебраической группы G в алгебраическую группу G' и через $\mathrm{Mor}(G, G')_k$ — множество морфизмов, определенных над k.

В п. АГ. 14.3 мы определили действие группы Галуа $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ на $\mathrm{Mor}(G, G')_{k_s}$, а именно при $s \in \Gamma$ и $\alpha \in \mathrm{Mor}(G, G')_{k_s}$ элемент ${}^s\alpha$ характеризуется следующим образом:

$$({}^s\alpha)(g) = s(\alpha(s^{-1}(g))), \qquad g \in G(k_s).$$

Кроме того,

$$\mathrm{Mor}(G, G')_k = \mathrm{Mor}(G, G')_{k_s}^{\Gamma},$$

т. е. морфизм α определен на k тогда и только тогда, когда α определен над k_s и является Γ-эквивариантным гомоморфизмом группы $G(k_s)$ в $G'(k_s)$.

Заметим, что если группа G' коммутативна, то $\mathrm{Mor}(G, G')$ — абелева группа, и подгруппа $\mathrm{Mor}(G, G')_{k_s}$ является Г-модулем. Произведение в группе $\mathrm{Mor}(G, G')$ определяется формулой $(\alpha\alpha')(g) = \alpha(g) \cdot \alpha'(g)$.

В том случае, когда $G' = \mathbf{GL}_1$, мы будем пользоваться обозначением

$$\mathrm{X}(G) = \mathrm{Mor}(G, \mathbf{GL}_1)$$

и называть элементы группы $\mathrm{X}(G)$ *характерами* группы G. Таким образом, запись $\chi \in \mathrm{X}(G)$ означает, что $\chi \in K[G]$, $\chi(g) \neq 0$ и $\chi(gg') = \chi(g)\chi(g')$ для любых $g, g' \in G$. Условие $\chi \in \mathrm{X}(G)_k$ означает, кроме того, что $\chi \in k[G]$.

Пусть $\alpha: G \to GL(V)$ — некоторое k-рациональное представление. *Полуинвариантом* группы G в пространстве V называется ненулевой вектор, порождающий одномерное G-инвариантное подпространство. Таким образом, если $v \in V$ — полуинвариант, то

$$\alpha(g)v = \chi(g)v$$

для некоторой функции $\chi: G \to K^*$, являющейся, очевидно, характером группы G, определенным над k, если $v \in V(k)$. Этот характер называется *весом* полуинварианта v.

Термин „полуинвариант“ будет использоваться и в том случае, когда V — пространство функций на многообразии, на котором действует группа G, причем действие G на V индуцировано действием G на многообразии.

При $\chi \in \mathrm{X}(G)$ положим

$$V_\chi = \{v \in V \mid \alpha(g)v = \chi(g)v \quad \text{для всех } g \in G\}.$$

Здесь можно ограничиться требованием, чтобы элемент g принадлежал $G(k_s)$, ибо $G(k_s)$ плотно в G (см. п. АГ. 13.3). Далее, если характер χ определен над k_s, то уравнение $\alpha(g)v = \chi(g)v$ является линейным уравнением относительно v, определенным над k_s; отсюда следует, что если $\chi \in \mathrm{X}(G)_{k_s}$, то подпространство V_χ определено над k_s.

Предположим, что $\chi \in \mathrm{X}(G)_{k_s}$, $g \in G(k_s)$, $v \in V_\chi(k_s)$ и $s \in \Gamma$. Тогда

$$\begin{aligned}({}^s\chi)(g)(sv) &= (s(\chi(s^{-1}g)))(sv) = \\ &= s(\chi(s^{-1}g)(v)) \qquad \text{(группа } \Gamma \text{ действует полулинейно)} = \\ &= s(\alpha(s^{-1}g)(v)) \qquad (v \in V_\chi) = \\ &= ({}^s\alpha(g))(sv) = \\ &= \alpha(g)(sv) \qquad \text{(представление } \alpha \text{ определено над } k).\end{aligned}$$

Это показывает, что $sV_\chi(k_s) \subset V_{({}^s\chi)}(k_s)$; обратное включение получается в результате применения к этому соотношению автоморфизма s^{-1}. Таким образом,

$$sV_\chi(k_s) = V_{({}^s\chi)}(k_s)$$

при любом $\chi \in X(G)_{k_s}$ и $s \in \Gamma$. В частности (см. п. АГ. 14.1).

Если характер χ определен над k, то подпространство V_χ определено над k.

Весом группы G в пространстве V называется всякий такой характер $\chi \in X(G)$, что $V_\chi \neq 0$.

Лемма. *Подпространства $V_\chi (\chi \in X(G))$ пространства V линейно независимы. В частности, в конечномерном пространстве группа G может иметь лишь конечное число весов.*

Доказательство. Рассуждая от противного, выберем наименьшее такое n, что существуют различные характеры χ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и ненулевые векторы $v_i \in V_{\chi_i}$, для которых $v_1 + \ldots + v_n = 0$. Ясно, что $n > 1$, так что существует элемент $g \in G$, такой, что $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$. Так как $\sum \chi_i(g) v_i = 0$, то, вычитая из этого уравнения умноженное на $\chi_1(g)^{-1}$ уравнение $v_1 + \ldots + v_n = 0$, получим нетривиальное соотношение, связывающее менее чем n векторов из подпространств V_{χ_i}. Это противоречие доказывает лемму.

5.3. Следствие. *В обозначениях теоремы п. 5.1 существует характер $\chi \in X(H)_k$ и функции $f_1, \ldots, f_n \in k[G]$, которые являются полуинвариантами одинакового веса χ для группы H, действующей на $k[G]$ правыми сдвигами, такие, что*

(1) $$H = \{g \in G \mid \rho_g f_i \in K f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

(2) $$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid f_i * X \in K f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Доказательство. Пусть E и D означают то же, что и в теореме п. 5.1, $e_1, \ldots, e_n$ — такой k-рациональный базис пространства E, что $D = Ke_1$, и пусть T_{ij} — координатная функция алгебры Ли $\mathfrak{gl}(E) \cong \mathfrak{gl}_n$, соответствующая позиции (ij) (матричный элемент с номером (ij)); имеется в виду, что изоморфизм $\mathfrak{gl}(E) \cong \mathfrak{gl}_n$ определен относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$.

В этой системе координат можно переформулировать теорему 5.1 следующим образом:

(*) $$H = \{g \in G \mid T_{i1}(\alpha(g)) = 0 \quad \text{для всех } i > 1\},$$

(**) $$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid T_{i1}((d\alpha)X) = 0 \quad \text{для всех } i > 1\}.$$

Из формулы (*) следует, что $\chi = T_{11} \circ \alpha$ — характер группы H, определенный над k. Положим $f_i = T_{i1} \circ \alpha$ $(1 < i \leqslant n)$. Тогда

$f_i \in k[G]$, и при $g \in G$ и $h \in H$ получаем

$$(\rho_h f_i)(g) = f_i(gh) = T_{i1}(\alpha(gh)) =$$
$$= \sum_j T_{ij}(\alpha(g)) T_{j1}(\alpha(h)) = T_{i1}(\alpha(g)) T_{11}(\alpha(h)) = \chi(h) f_i(g).$$

Таким образом, каждая функция f_i является полуинвариантом веса χ группы H. Если $g \in G$ и $\rho_g f_i \in K f_i$, то число $\rho_g f_i(e)$ кратно $f_i(e) = T_{i1}(\alpha(e)) = 0$ для каждого $i > 1$. Из соотношения (*) следует тогда, что $g \in H$. Это доказывает формулу (1).

Остается показать, что если $X \in \mathfrak{g}$ и $f_i * X \in K f_i$ для всех $i > 1$, то $X \in \mathfrak{h}$. Отождествление алгебры Ли группы $\mathbf{GL}_n$ с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}_n$ сопоставляет касательному вектору Y матрицу $(Y(T_{ij}))$ (см. п. 3.6). Рассматривая T_{ij} как координатную функцию на алгебре Ли, получаем, что $T_{ij}(Y) = Y(T_{ij})$. Применяя это к элементу $X \in \mathfrak{g}$, приходим к соотношению $T_{i1}(d\alpha)(X) = (d\alpha)(X)(T_{i1}) = X(T_{i1} \circ \alpha) = X f_i = (f_i * X)(e) =$ (кратное числа $f_i(e)$) $=$ (кратное числа $T_{i1}(\alpha(e))) = 0$ для всех $i > 1$. Следовательно, формула (**) дает $X \in \mathfrak{h}$.

5.4. Следствие. *Пусть $G \subset \mathbf{GL}_n$ — алгебраическая матричная группа, определенная над k. Тогда существует характер $\chi \in \mathrm{X}(G)_k$ и полиномы $f_1, \ldots, f_m \in k[T_{11}, \ldots, T_{nn}]$, которые являются полуинвариантами веса χ группы G по отношению к правым сдвигам, такие, что*

$$G = \{g \in \mathbf{GL}_n \mid \rho_g f_i \in K f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m\},$$
$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mid f_i * X \in K f_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant m\}.$$

Доказательство. Имеет место равенство $k[\mathbf{GL}_n] = k[T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{nn}, D^{-1}]$, где $D = \det(T_{ij})$. Согласно п. 5.3, существуют функции $f_i' \in k[\mathbf{GL}_n]$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, которые являются полуинвариантами некоторого веса $\chi' \in X(G)_k$ и удовлетворяют условиям $\rho_g f_i' \in K f_i'$ и $f_i' * X \in K f_i'$. При достаточно большом r имеем $f_i' = D^{-r} f_i$, где f_i — полином $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Очевидно, что D — полуинвариант веса D группы $\mathbf{GL}_n$. Следовательно, функции f_i являются полуинвариантами веса $\chi = (D \mid G)^r \chi'$ группы G. Ясно, что функции χ и $f_1, \ldots, f_m$ удовлетворяют нужным условиям.

5.5. Инварианты. Не следует думать, что в общем случае теорему 5.1 и ее следствия можно усилить таким образом, чтобы вместо полуинвариантов появлялись инварианты (т. е. $\chi = 1$). Однако это оказывается возможным в двух важных частных случаях. Первый случай, — когда $\mathrm{X}(H)_k = \{1\}$. Второй получается следующим образом: пусть α: $G \to GL(E)$ — такое же, как в теореме 5.1, и χ — характер, соответствующий действию группы H на D. Предположим, что мы нашли другое представление α': $G \to GL(E')$ и $D' \subset E'$ с аналогичными свойствами, но с той разницей, что характер, соответствующий действию группы H на D', равен χ^{-1}. Тогда представление $\alpha \otimes \alpha'$ группы G в пространстве $E \otimes_K E'$ таково, что группа H действует тривиально на пространстве $D \otimes_K D'$. Более того, если $D = Kv$ и $D' = Kv'$, то легко видеть, что группа H в точности совпадает со стабилизатором вектора $v \otimes v'$ в группе G и $\mathfrak{h}$ — стабилизатор вектора $v \otimes v'$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Как найти такие E' и D'? Попытаемся использовать контрагредиентное представление α^*: $G \to GL(E^*)$. Тогда одномерному H-инвариантному подпространству D веса χ соответствует одномерное *факторпространство* D^* пространства E^*, на котором H действует с характером χ^{-1}. Чтобы получить в E^* нужное одномерное подпространство, достаточно, чтобы группа H была вполне приводима на E. В случае ненулевой характеристики это имеет место, когда H — редуктивная группа.

5.6. *Пусть G — определенная над k группа и N — нормальный делитель, определенный над k. Тогда существует определенное над k линейное представление* α: $G \to GL(V)$, *такое, что* $N = \ker(\alpha)$ *и* $\mathfrak{n} = \ker(d\alpha)$.

Доказательство. Согласно теореме 5.1, существует представление α: $G \to GL(E)$ и одномерное подпространство $D \subset E$, определенные над k, такие, что N — стабилизатор D в группе G, а $\mathfrak{n}$ — стабилизатор D в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть группа N действует на D с характером $\chi \in X(N)_k$. Обозначим через F сумму всех подпространств E_φ, когда φ пробегает $X(N)_{k_s}$. Согласно лемме п. 5.2, F — прямая сумма этих подпространств. Если $x \in E_\varphi$, $g \in G(k_s)$, $n \in N$, то

$$\alpha(n)\alpha(g)x = \alpha(g)\alpha(g^{-1}ng)x = \varphi(g^{-1}ng)\alpha(g)x.$$

Таким образом, если мы определим характер $g\varphi \in X(N)$ формулой $(g\varphi)(n) = \varphi(g^{-1}ng)$, то $g\varphi \in X(N)_{k_s}$ и

$$\alpha(g)E_\varphi = E_{(g\varphi)} \qquad (g \in G(k_s), \quad \varphi \in X(N)_{k_s}).$$

Отсюда следует, что пространство F инвариантно относительно G. Кроме того, F определено над k_s и инвариантно относительно группы Галуа $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ (см. п. 5.2), так что F определено над k. Наконец, так как $D \subset F$, то можно считать, что $E = F$ или же принять в качестве α ограничение представления α на F.

Итак, пусть $E = F$ и $V \subset \mathfrak{gl}(E)$ — множество всех эндоморфизмов пространства $E = \coprod E_\varphi$ $(\varphi \in X(N)_{k_s})$, относительно которых инвариантно каждое E_φ. Очевидно, что $V = \coprod \mathfrak{gl}(E_\varphi)$. Тогда при $g \in G(k_s)$, $v \in V$ для каждого $\varphi \in X(N)_{k_s}$ имеем

$$\alpha(g)\, v\alpha(g)^{-1} E_\varphi = \alpha\ (g)\, vE_{(g^{-1}\varphi)} = \alpha(g)\, E_{(g^{-1}\varphi)} = E_\varphi.$$

Таким образом, группа $\alpha(G)$ нормализует множество V, так что мы можем определить отображение β: $G \to GL(V)$, полагая $\beta(g)\, v = \alpha(g)\, v\alpha(g)^{-1}$. Так как β — ограничение на V морфизма $\mathrm{Ad}_{GL(E)} \circ \alpha$, то β — морфизм. Чтобы убедиться, что множество V, а следовательно, и морфизм β определены над k, при $s \in \mathrm{Gal}(k_s/k)$ и $v \in V(k_s)$ вычислим

$$({}^s v)\, E_\varphi(k_s) = (s \cdot v \cdot s^{-1})\, E_\varphi(k_s) = svE_{(s^{-1}\varphi)}(k_s) = sE_{(s^{-1}\varphi)}(k_s) = E_\varphi(k_s).$$

Таким образом, подпространство V определено над k_s, и $V(k_s)$ инвариантно относительно группы Галуа $\mathrm{Gal}(k_s/k)$; следовательно, V определено над k (см. п. АГ. 14.1).

При $n \in N$ на каждом подпространстве E_φ автоморфизм $\alpha(n)$ кратен единичному, так что $\alpha(n)$ централизует V, и, следовательно, $\beta(n) = e$. Обратно, если $\beta(g) = e$, то автоморфизм $\alpha(g)$ обязан оставлять каждое подпространство E_φ инвариантным и индуцировать скалярное умножение на каждом из них (в этом легко убедиться, если проделать простое вычисление в $\mathfrak{gl}(E)$). Так как $D \subset E_\chi$, то подпространство D инвариантно относительно $\alpha(g)$, так что $g \in N$. Отсюда следует, что $N = \ker(\beta)$ и $\mathfrak{n} \subset \ker(d\beta)$.

Так как β — ограничение на V морфизма $\mathrm{Ad}_{GL(E)} \circ \alpha$, то $d\beta$ — ограничение на V дифференцирования $\mathrm{ad} \circ d\alpha$. Следовательно, $X \in \ker(d\beta) \Rightarrow \mathrm{ad}((d\alpha)(X))\, V = 0 \Rightarrow (d\alpha)(X)$ централизует $V \Rightarrow$ каждое подпространство E_φ инвариантно относительно $(d\alpha)(X)$ и $(d\alpha)(X)$ индуцирует умножение на скаляр в каждом из них (такое же вычисление, как и выше) $\Rightarrow D \subset E_\chi$ инвариантно относительно $(d\alpha)(X) \Rightarrow X \in \mathfrak{n}$.

§ 6. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть G — алгебраическая группа и H — ее замкнутая подгруппа. Мы собираемся ввести естественным образом на пространстве смежных классов G/H структуру многообразия, например, так, чтобы проекция π: $G \to G/H$ была морфизмом, обладающим надлежащими свойствами универсального отображения. Мы проделаем это для аффинной группы G. Наш метод использует результаты § 5 для реализации многообразия G/H в качестве орбиты точки, стабилизатор которой совпадает с H, при подходящем действии группы G в проективном пространстве. Чтобы убедиться в том, что эта конструкция многообразия G/H обладает нужными свойствами, мы воспользуемся некоторыми результатами из алгебраической геометрии, приведенными в гл. АГ.

Поспешим отметить, что термин „фактор“ используется здесь отнюдь не в категорном смысле, так что его следует рассматривать как „местный“.

6.1. Факторный морфизм. Пусть π: $V \to W$ — определенный над k морфизм k-многообразий. Будем говорить, что π — *факторный морфизм* (над k), если

(1) π сюръективен и открыт;

(2) если U — открытое подмножество многообразия V, то коморфизм π_0 индуцирует изоморфизм алгебры $K[\pi(U)]$ на множество тех функций $f \in K[U]$, которые постоянны на слоях отображения $\pi | U$.

Напомним (см. п. АГ. 8.2), что из условия (1) следует, что π — доминантный морфизм.

Свойство универсальности отображения. Пусть π: $V \to W$ — *факторный морфизм над k. Если α: $V \to Z$ — произвольный морфизм, постоянный на слоях морфизма π, то существует один и только один морфизм β: $W \to Z$, такой, что $\alpha = \beta \circ \pi$. Если α есть k-морфизм k-многообразий, то β — также k-морфизм k-многообразий.*

Доказательство. Ясно, что существует единственное непрерывное отображение β, поскольку морфизм π открыт. Остается показать, что если множество U открыто в Z, то отображение $f \to f \circ \beta$ преобразует $K[U]$ в $K[\beta^{-1}(U)]$. Но коморфизм π_0 отождествляет алгебру $K[\beta^{-1}(U)] = K[\pi(\alpha^{-1}(U))]$ с множеством тех функций $h \in K[\alpha^{-1}(U)]$, которые постоянны на слоях морфизма $\pi | \alpha^{-1}(U)$. Так как коморфизм α_0 отображает алгебру $K[U]$ в кольцо таких функций в $K[\alpha^{-1}(U)]$ (ибо морфизм α постоянен на слоях морфизма π), то $\beta_0 K[U] \subset K[\beta^{-1}(U)]$. Таким образом, β — морфизм многообразий.

В этом рассуждении, как мы видели, β_0 — единственное отображение, при котором диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & K[\alpha^{-1}(U)] \\
K[U] \arrow[ur, "\alpha_0"] \arrow[dr, "\beta_0"'] & \\
 & K[\beta^{-1}(U)] \arrow[uu, "\pi_0"'] \\
 & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

оказывается коммутативной. Если множество U k-открыто, то $\alpha^{-1}(U)$ и $\beta^{-1}(U) = \pi(\alpha^{-1}(U))$ — k-открытые множества (см. АГ. 14.5).

Кроме того, α_0 и π_0 определены над k, откуда следует, что β_0 также определено над k.

Следствие. *Биективный факторный морфизм является изоморфизмом.*

В самом деле, если факторный морфизм π биективен, то мы получим π^{-1}, применив свойство универсальности отображения к морфизму $\alpha = 1_V$.

6.2. Лемма. *Пусть π: $V \to W$ — сюръективный открытый сепарабельный морфизм неприводимых многообразий, и предположим, что многообразие W нормально. Тогда π — факторный морфизм.*

Доказательство. Нам необходимо проверить условие (2) определения факторного морфизма для каждого открытого множества $U \subset V$. Так как отображение $\pi | U$: $U \to \pi(U)$ наследует все свойства морфизма π, то достаточно рассмотреть случай $U = V$. Требуется доказать, что каждая функция $f \in K[V]$, постоянная на слоях морфизма π, принадлежит алгебре $\pi_0 K[W]$. Согласно предложению п. АГ. 18.2, элемент $f \in K[V]$ чисто несепарабелен над $\pi_0 K(W)$, значит, из сепарабельности морфизма π вытекает, что $f = \pi_0 f'$ для подходящего $f' \in K(W)$. Остается показать, что функция f' всюду определена. Предположим, что f' не определена в некоторой точке $\pi(x)$. Тогда ввиду нормальности многообразия W из леммы п. АГ. 18.3 следует, что существует точка $\pi(y)$, в которой функция $1/f'$ определена и обращается в нуль. Но функция $1/f = \pi_0(1/f')$ определена и обращается в нуль в точке y, что противоречит тому факту, что $f \in K[V]$.

6.3. Фактор многообразия V относительно группы G. Зафиксируем на несколько ближайших пунктов (до п. 6.7) k-группу G, действующую k-рационально на k-многообразии V. *Орбитным отображением* будем называть сюръективный морфизм π: $V \to W$, такой, что слои морфизма π являются орбитами группы G в V. *Фактором* многообразия V относительно G над k называется орбитное отображение π: $V \to W$, являющееся факторным морфизмом над k в смысле п. 6.1[1]). В частности, такое отображение π обладает следующим свойством:

Свойство универсальности отображения. *Если α: $V \to Z$ — произвольный морфизм, постоянный на орбитах группы G, то существует единственный морфизм β: $W \to Z$, такой, что $\alpha = \beta \circ \pi$. Если α — k-морфизм k-многообразий, то и β — также k-морфизм k-многообразий.*

---

[1]) В этом параграфе автор использует тормин „фактор“ как для отображения π, так и для многообразия W и для пары (W, π). — *Прим. ред.*

Отсюда следует, что фактор, если только он существует, является *единственным с точностью до k-изоморфизма*. Это обстоятельство дает возможность обозначить фактор символом $G\backslash V$. Если действие группы G на V определено таким образом, что G действует на V посредством правых сдвигов в большей группе, содержащей группу G, то будет использоваться символ V/G.

Факторы, вообще говоря, не всегда существуют. Как показывает следующее предложение, из существования фактора вытекает, что размерности всех орбит одинаковы. Кроме того, *если орбитное отображение π: $V \to W$ существует, то орбиты группы G в многообразии V замкнуты* по той причине, что они являются прообразами точек относительно морфизма π.

6.4. Предложение. *Пусть π: $V \to W$ — доминантное орбитное отображение; предположим, что многообразие W неприводимо.*

(a) *Группа G транзитивно действует на множестве неприводимых компонент многообразия V. В частности, если группа G связна, то многообразие V неприводимо.*

Предположим, кроме того, что неприводимые компоненты многообразия V открыты. Тогда

(b) *Орбиты группы G в V имеют одну и ту же размерность* $d = \dim V - \dim W$.

(c) *Если многообразие W нормально, то отображение открыто.*

Доказательство. (a) Пусть F и F' — неприводимые компоненты многообразия V. Из того, что π — доминантный морфизм и многообразие W неприводимо, следует, что множества πF и $\pi F'$ содержат плотные открытые в W подмножества. Следовательно, множество $\pi^{-1}(\pi F') = G \cdot F'$ содержит непустое и, значит, плотное открытое в F подмножество. Но $G \cdot F'$ — объединение тех неприводимых компонент многообразия V, в которые F' преобразуется группой G. В частности, множество $G \cdot F'$ замкнуто, так что $G \cdot F' \supset F$, и, следовательно, $F = gF'$ для подходящего $g \in G$, ибо F — неприводимая компонента. Стабилизатор H множества F в группе G — замкнутая подгруппа конечного индекса, так что H содержит G^0 (см. п. 1.2). Это доказывает (a).

Чтобы доказать (b) и (c), заменим V на F и G на H; тем самым дело сведется к случаю, когда многообразие V неприводимо. Эта редукция возможна ввиду утверждения (a) и условия, что неприводимые компоненты многообразия V попарно не пересекаются.

Однако в случае когда многообразие V неприводимо, утверждение (c) в силу п. АГ. 18.4 является следствием утверждения (b), так что остается доказать (b). Мы будем использовать теорему п. АГ. 10.1 о размерности слоев морфизма. Орбиты однородны, так что неприводимые компоненты одной орбиты имеют одинаковую размерность. Кроме того, $\dim G(x) \geqslant d$ и если $\pi(x) \in U$, где U — некоторое плотное открытое в W подмножество, то имеет место равенство.

Введем в рассмотрение график действия группы G на многообразии V: $\Gamma = \{(g, x, gx) \in G \times V \times V\}$. Пусть D — диагональ многообразия $V \times V$. Положим $Z = \Gamma \cap (G \times D)$; пусть p: $Z \to D$ — проекция многообразия Z на D. При $x \in V$ имеем $p^{-1}(x, x) = \{(g, x, x) \mid g \in G, gx = x\} = G_x \times \{(x, x)\}$. Следовательно, все неприводимые компоненты слоя отображения p над точкой (x, x) имеют одинаковую размерность. Пусть Z_0 — неприводимая компонента многообразия Z, содержащая множество $\{e\} \times D$, и пусть p_1: $Z_0 \to D$ — ограничение проекции p на Z_0. Тогда отображение p_1 сюръективно, и $p_1^{-1}(x, x)$ — непустое объединение неприводимых компонент многообразия $p^{-1}(x, x)$. Применив теперь к морфизму p_1 теорему о слоях морфизмов (п. АГ. 10.1), получим

$$\dim G_x \geqslant d' = \dim Z_0 - \dim D,$$

где равенство имеет место всякий раз, когда $x \in U'$, U' — некоторое открытое плотное подмножество многообразия V. Комбинируя это с неравенством $\dim G(x) \geqslant d$, для всех $x \in V$ получаем

$$d \leqslant \dim G(x) = \dim G - \dim G_x \leqslant \dim G - d'.$$

Множество $U' \cap \pi^{-1}(U)$ открыто и плотно в V; пусть $x \in U' \cap \pi^{-1}(U)$. Тогда неравенства превращаются в равенства, так что $d = \dim G - d'$. Следовательно, $\dim G(x) = d$ для всех $x \in V$.

6.5. Поле функций на факторе многообразия V относительно группы G. Пусть U — плотное открытое подмножество многообразия V и $g \in G$. Тогда множество $g^{-1}(U)$ также открыто и плотно, и имеет место коморфизм λ_g: $K[g^{-1}U] \to K[U]$ (где $(\lambda_g f)(x) = f(g^{-1}x)$). Перебирая всевозможные множества U, мы получаем автоморфизм прямых спектров алгебр $K[U]$ и, следовательно, их прямого предела $K(V)$. Если U — область определения функции $f \in K[V]$, то gU — область определения функции $\lambda_g f$. Таким образом, G действует посредством левых сдвигов как группа автоморфизмов алгебры функций $K(V)$ над K. Обозначим через $K(V)^G$ подалгебру неподвижных точек алгебры $K(V)$ относительно G.

Предложение. *Предположим, что фактор π: $V \to W$ многообразия V относительно группы G существует. Тогда π — сепарабельный морфизм и коморфизм π_0 индуцирует изоморфизм алгебры $K(W)$ на алгебру $K(V)^G$. Если многообразие V неприводимо, то для каждого $x \in V$ отображение π_0 является изоморфизмом локального кольца $\mathfrak{O}_{W, \pi(x)}$ на локальное кольцо $\mathfrak{O}_{V, x} \cap K(V)^G$.*

Доказательство. Так как π — доминантный морфизм, то коморфизм π_0 индуцирует мономорфизм алгебры $K(W)$ в алгебру $K(V)$, образ которого лежит, очевидно, в $K(V)^G$. С другой стороны, при $f \in K(V)^G$ область определения U функции f инвариантна относительно G, и функция f постоянна на слоях морфизма $\pi \mid U$. Из определения фактора следует тогда, что функция f принадлежит образу морфизма π_0: $K[\pi(U)] \to K[U]$.

Для доказательства того факта, что морфизм π сепарабелен, достаточно показать, что если F — конечная прямая сумма полей и H — группа автоморфизмов кольца F, то кольцо F сепарабельно над $E = F^H$. Разложению кольца E в прямую сумму полей соответствует разложение кольца F, которое, очевидно, является G-инвариантным, так что дело сводится к случаю, когда E — поле. Тогда G действует транзитивно на прямых слагаемых кольца F; в противном случае разложение кольца F на G-орбиты приводило бы к соответствующему разложению поля $E = F^G$.

Пусть поле L — одно из прямых слагаемых кольца F. Мы хотим показать, что поле L сепарабельно над E. Из сказанного выше следует, что $E \cong L^{H'}$, где H' — стабилизатор поля L в H. Наше утверждение вытекает теперь из предложения п. АГ. 2.4.

Если многообразие V неприводимо, то поле $K(V)$ содержит все локальные кольца $\mathfrak{O}_{V,x}$ $(x \in V)$. Отождествляя поле $K(W)$ с подполем $K(V)^G$, получаем $\mathfrak{O}_{W,\pi(x)} \subset (\mathfrak{O}_{V,x} \cap K(V)^G)$, так что отображение π_0: $\mathfrak{O}_{W,\pi(x)} \to \mathfrak{O}_{V,x}$ является вложением. Остается показать, что каждая функция $f \in \mathfrak{O}_{V,x} \cap K(V)^G = \mathfrak{O}_{V,x} \cap K(W)$ принадлежит кольцу $\mathfrak{O}_{W,\pi(x)}$. Если U — открытая окрестность точки x, в которой определена функция f, то из определения фактора вытекает, что функция f как элемент алгебры $K[U]$ содержится в алгебре $\pi_0 K[\pi(U)]$. В частности, как рациональная функция на многообразии W функция f определена в точке $\pi(x)$, т. е. $f \in \mathfrak{O}_{W,\pi(x)}$.

6.6. Предложение. *Предположим, что π: $V \to W$ — сепарабельный орбитный морфизм, что многообразие W нормально и что неприводимые компоненты многообразия V открыты. Тогда (W, π) — фактор многообразия V относительно G.*

Доказательство легко сводится к случаю, когда многообразие W связно и, следовательно, неприводимо (ибо W нормально). Из утверждения (с) предложения п. 6.4 следует тогда, что морфизм π открыт, а из утверждения (а) предложения п. 6.4 — что G действует транзитивно на компонентах многообразия V. Так как эти компоненты не пересекаются, то мы можем заменить V одной из них, а G заменить стабилизатором этой компоненты, сохраняя при этом все наши предположения. Таким образом, достаточно доказать предложение в случае, когда многообразие V также неприводимо. Но тогда тот факт, что π — факторный морфизм, вытекает из леммы 6.2.

Следствие. *Пусть G_1, G_2 — группы, V_1, V_2 — многообразия, все определенные над k. Предположим, что G_i действует k-рационально на V_i и что фактор V_i/G_i существует и является нормальным многообразием ($i=1, 2$). Тогда фактор $(V_1 \times V_2)/(G_1 \times G_2)$ существует и канонически изоморфен $(V_1/G_1) \times (V_2/G_2)$.*

Произведение $V_1/G_1 \times V_2/G_2$ нормально (см. п. АГ. 18.1). Проекции $V_i \to V_i/G_i$ являются сепарабельными морфизмами (п. 6.5), так что их произведение является сепарабельным морфизмом (см. п. АГ. 17.3, следствие). Слои этого последнего — орбиты группы $G_1 \times G_2$; теперь мы можем применить предложение.

6.7. Предложение. *Предположим, что $x \in V(k)$. Пусть π: $G \to G(x)$—k-морфизм $g \to g \cdot x$. Тогда $G(x)$—гладкое определенное над k многообразие, локально замкнутое в V. Кроме того, π — орбитное отображение относительно действия группы G_x на G посредством правых сдвигов. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *π — фактор группы G относительно G_x;*

(b) *морфизм π сепарабелен, т. е. $(d\pi)_e$: $L(G) \to T(G(x))_x$ — сюръективное отображение;*

(c) *ядро отображения $(d\pi)_e$ содержится в $L(G_x)$.*

Если эти условия имеют место, то группа G_x определена над k и, следовательно, π — фактор группы G относительно G_x, определенный над k.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из п. 1.8, а второе является очевидным.

Ввиду однородности пространств G и $G(x)$ данная в утверждении (b) интерпретация сепарабельности корректна в силу п. АГ. 17.3. Импликация (a)$\Rightarrow$(b) следует из п. 6.5, а (b)$\Rightarrow$(a) — из п. 6.6. Так как $\dim G = \dim G_x + \dim G(x)$ и так как касательные пространства к гладкому многообразию имеют ту же размерность, что и многообразие, то эквивалентность утверждений (b) и (c) следует из очевидного включения $L(G_x) \subset \ker (d\pi)_e$.

Если морфизм π сепарабелен, то из п. АГ. 13.2 следует, что существует плотное открытое множество $W \subset G(x)$, такое, что если $w \in W(k_s)$, то слой $\pi^{-1}(w)$ обладает плотным подмножеством, состоящим из сепарабельных точек. Так как W содержит некоторую сепарабельную точку w (см. п. АГ. 13.3), то мы можем сдвигать точку w, чтобы получить соответствующее свойство для каждой сепарабельной точки многообразия $G(x)$. Так как точка x рациональна над k, то группа $G_x = \pi^{-1}(x)$ обладает плотным множеством сепарабельных точек, инвариантным относительно действия группы Галуа. Из п. АГ. 14.4 следует теперь, что группа G_x определена над k.

Замечание. Это рассуждение показывает, что ядро сепарабельного k-морфизма k-групп определено над k.

6.8. Теорема. *Пусть G — аффинная k-группа и H — ее замкнутая определенная над k подгруппа. Тогда фактор π: $G \to G/H$ существует и определен над k, и G/H — гладкое квазипроективное многообразие. Если H — нормальный делитель группы G, то G/H — аффинная k-группа и π — k-морфизм k-групп.*

Доказательство. Согласно теореме п. 5.1, существует k-рациональное представление α: $G \to GL(E)$ и одномерное определенное над k подпространство $D \subset E$, такие, что

$$H = \{g \in G \mid \alpha(g) D = D\}, \quad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\alpha(X) D \subset D\}.$$

Пусть q: $E - \{0\} \to P$ — проекция на проективное пространство $P = \mathscr{P}(E)$ прямых пространства E, и пусть $x = q(D - \{0\}) \in P(k)$. Группа G действует k-рационально на P при помощи отображения $q \circ \alpha$. Мы построим фактор G/H, исходя из орбитного отображения π: $G \to G(x)$, $\pi(g) = gx$. Так как H — стабилизатор точки x, то, очевидно, остается лишь проверить ввиду предложения 6.7, что $\ker(d\pi)_e = \mathfrak{h}$.

Выберем вектор $v \in D$, $v \neq 0$, и определим отображение β: $G \to E - \{0\}$, полагая $\beta(g) = \alpha(g) v$. Тогда $\pi = q \circ \beta$ и $(d\beta)_e(X) = (d\alpha)(X) v$, где, как обычно, мы отождествляем $T(E - \{0\})_v = T(E)_v$ с E. Ясно, что $\mathfrak{h} = (d\beta)_e^{-1}(D)$. Из того факта, что ядро отображения $(dq)_v$: $T(E - \{0\})_v \to T(P)_{q(v)}$ совпадает с D, вытекает теперь, что $\ker(d\pi)_e = \mathfrak{h}$.

Пусть, наконец, H — нормальный делитель из G. Тогда по теореме 5.6 можно выбрать представление α: $G \to GL(E)$ так, что $H = \ker(\alpha)$ и $\mathfrak{h} = \ker(d\alpha)$. Из следствия 1.4 вытекает, что $G' = \alpha(G)$ — замкнутая определенная над k подгруппа группы $GL(E)$. Пусть группа G действует на группе $GL(E)$ по правилу $x \to \alpha(g) x$, $x \in GL(E)$; тогда отображение π: $G \to G'$, $\pi(g) = \alpha(g) (= \alpha(g) e)$, можно рассматривать как орбитное отображение на орбиту точки e. Так как $\ker(d\pi)_e = \mathfrak{h}$ и так как H — стабилизатор точки e относительно указанного действия группы G, то из предложения 6.7 снова следует, что π — фактор группы G относительно H. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Предостережение. Даже если $G \to G/H$ — сюръективный k-морфизм, отображение $G(k) \to (G/H)(k)$ не обязано быть сюръективным. Оно сюръективно при $k = k_s$; общее изучение проблемы приводит к вопросам, связанным с когомологиями Галуа, которые мы здесь обсуждать не будем (см., например, Серр [1]).

6.9. Следствие. *Пусть α: $G \to G'$ — морфизм алгебраических групп. Если группа G аффинная, то группа $\alpha(G)$ также аффинная.*

Доказательство. Пусть $N = \ker(\alpha)$. Тогда α индуцирует биективный морфизм β: $G/N \to \alpha(G)$, а мы знаем, что G/N —

аффинная группа. Из п. АГ. 18.3 следует теперь, что $\alpha(G)$ — аффинная группа.

6.10. Следствие. *Пусть G — аффинная k-группа, действующая k-рационально на k-многообразии V, и пусть N — замкнутый нормальный делитель группы G, определенный над k.*

(1) *Если фактор V/N существует, определен над k и является нормальным многообразием, то группа G/N действует k-рационально на V/N (естественным образом). В частности, если N действует на V тривиально, то G/N действует на V k-рационально.*

(2) *Если, кроме того, фактор V/G существует и является нормальным многообразием, то фактор многообразия V/N относительно группы G/N существует и канонически изоморфен V/G.*

Доказательство. Пусть α: $G \times V \to V$ — действие группы G на V, а π: $V \to V/N$ и p: $G \to G/N$ — факторные морфизмы. Согласно следствию в п. 6.6, вертикальные стрелки в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} G \times V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_G \times \pi"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\ G \times (V/N) \arrow[r, dotted, "\alpha'"] \arrow[d, "p \times 1_{(V/N)}"'] & V/N \\ (G \times N) \times (V/N) \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

являются факторными морфизмами.

Используя свойство универсальности отображения п. 6.1 для факторов, мы можем дополнить диаграмму стрелкой α' и затем стрелкой β. Тогда k-действие группы G/N на многообразии V/N задается отображением β. В случае когда группа N действует на V тривиально, то $V/N = V$, что доказывает утверждение (1).

Чтобы доказать утверждение (2), предположим, что π_G: $V \to V/G$ — фактор. Согласно свойству универсальности отображения, для π существует отображение π', такое, что треугольник

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi_G"] & \\ V/N \arrow[r, dotted, "\pi'"] & V/G \end{tikzcd}$$

коммутативен. Ясно, что π' — орбитное отображение относительно действия группы G/N на V/N. Так как морфизм $\pi_G = \pi' \circ \pi$ сепарабелен, то морфизм π' также сепарабелен. Тогда из предложения 6.6 вытекает, что π' — фактор, ибо многообразие V/G нормально.

6.11. Следствие. *Пусть G — аффинная k-группа и $N \subset M$ — замкнутые определенные над k подгруппы группы G, такие, что N — нормальный делитель группы M. Тогда группа M/N действует k-рационально на G/N и фактор существует и совпадает с G/M. Если M и N — нормальные делители группы G, то эти многообразия совпадают, как k-группы.*

Доказательство. Первое утверждение получим, если в следствии 6.10 возьмем в качестве (V, G, N) тройку (G, M, N). Второе утверждение очевидно.

6.12. Предложение. *Пусть G — аффинная k-группа и M, N — замкнутые определенные над k подгруппы. Пусть π: $G \to G/N$ — факторный морфизм. Тогда $L(M) \cap L(N) = L(M \cap N)$ в том и только том случае, когда π индуцирует сепарабельный морфизм π': $M \to \pi(M)$. При этом группа $M \cap N$ определена над k.*

Отсюда непосредственно получаем

Следствие. *Если* $\operatorname{char}(k) = 0$, *то* $L(M) \cap L(N) = L(M \cap N)$ *и группа $M \cap N$ определена над k.*

Доказательство. Отображение π' преобразует M на M-орбиту точки $\pi(e) \in G/N$, и стабилизатор точки $\pi(e)$ в M есть группа $M \cap N$. Кроме того, $\ker(d\pi')_e = L(M) \cap \ker(d\pi)_e = L(M) \cap L(N)$, так что утверждение следует из предложения 6.7.

6.13. Замечания. Следствие 6.10 справедливо, даже если факторы V/N и V/G не являются нормальными многообразиями (см. Розенлихт [3], предложение 2). Подобным же образом, из леммы 3 и предложения 2 статьи Розенлихта [3] вытекает, что следствие п. 6.6 справедливо и в том случае, когда многообразия V_i/G_i не являются нормальными ($i = 1, 2$). Эти факты, однако, не понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 6.8 доказана здесь для аффинных групп. Однако она сохраняет силу, если аффинную k-группу заменить алгебраической k-группой: существование k-структуры на факторе G/H было доказано Розенлихтом [1] для алгебраически замкнутого поля k и Вейлем [1] в общем случае. Тот факт, что G/H — квазипроективное многообразие, принадлежит Шоу [1].

§ 7. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

В этом параграфе предполагается, что G — аффинная k-группа и $\operatorname{char}(k) = 0$. Наша цель — получить некоторые основные результаты Шевалле [1] об *алгебраических алгебрах Ли* $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g} = L(G)$, т. е. алгебрах Ли вида $\mathfrak{h} = L(H)$ для подходящей замкнутой подгруппы H группы G.

7.1. Операторы $\mathscr{A}$ и $\mathfrak{a}$. Напомним (см. п. 6.12), что *если H и N — замкнутые подгруппы группы G, то*

$$L(H \cap N) = L(H) \cap L(N). \tag{1}$$

Отсюда следует, что *если группа H связна, то*

$$H \subset N \Leftrightarrow L(H) \subset L(N). \tag{2}$$

По аналогии с понятием группового замыкания, введенным в § 2, мы сопоставляем каждому подмножеству M алгебры Ли $L(G)$ пересечение всех замкнутых подгрупп H группы G, таких, что $M \subset L(H)$, и обозначаем его через $\mathscr{A}(M)$. Группа $\mathscr{A}(M)$ связна и, согласно определению, является наименьшей замкнутой подгруппой группы G, алгебра Ли которой содержит M; ее алгебра Ли

$$\mathfrak{a}(M) = L(\mathscr{A}(M))$$

является, следовательно, наименьшей алгебраической подалгеброй Ли алгебры $\mathfrak{g}$, содержащей M.

Разумеется, группу $\mathscr{A}(M)$ можно определить и для ненулевой характеристики, однако алгебра $L(\mathscr{A}(M))$ не обязана тогда содержать M и может быть нулевой, даже если множество M непусто, так что в этом случае, по-видимому, группа $\mathscr{A}(M)$ не представляет интереса.

7.2. Предложение. *Пусть π: $G \to G'$ — сюръективный морфизм алгебраических групп, и пусть $M \subset L(G)$. Тогда*

$$\pi(\mathscr{A}(M)) = \mathscr{A}(d\pi(M)) \quad \text{и} \quad d\pi(\mathfrak{a}(M)) = \mathfrak{a}(d\pi(M)).$$

Доказательство. Если H — замкнутая подгруппа группы G, то морфизм π: $H \to \pi(H)$ сепарабелен, ибо $\operatorname{char}(k) = 0$. Следовательно, $d\pi(L(H)) = L(\pi(H))$.

Из предложения 6.7 вытекает, что как образ, так и прообраз относительно отображения $d\pi$ алгебраической алгебры Ли снова является алгебраической алгеброй Ли. В частности, $d\pi(\mathfrak{a}(M))$ — алгебраическая алгебра Ли, содержащая $d\pi(M)$, и, следовательно, $\mathfrak{a}(d\pi(M))$. Обратно включение вытекает из того факта, что $d\pi^{-1}(\mathfrak{a}(d\pi(M)))$ — алгебраическая алгебра Ли, содержащая M и, следовательно, $\mathfrak{a}(M)$.

Ясно теперь, что $\pi(\mathscr{A}(M))$ и $\mathscr{A}(d\pi(M))$ — связные подгруппы группы G' с одинаковой алгеброй Ли; следовательно, они совпадают (см. п. 7.1).

7.3. Строение группы $\mathscr{A}(X)$ при $X \in \mathfrak{gl}(V)$.

(1) *Эндоморфизм X нильпотентен*, $X \neq 0$. Определим отображение α: $\mathbf{G}_a \to G = GL(V)$, полагая

$$\alpha(t) = \exp(tX) = \sum_{n \geqslant 0} (n!)^{-1} (tX)^n.$$

Так как эндоморфизм X нильпотентен, то α — полиномиальное отображение, которое, очевидно, является гомоморфизмом. Минимальный полином эндоморфизма X мономиален, откуда следует, что ненулевые степени эндоморфизма X линейно независимы. Поэтому при $X \neq 0$ отображение α инъективно. Следовательно, α индуцирует изоморфизм $\mathbf{G}_a \cong \alpha(\mathbf{G}_a) = H$ алгебраических групп, ибо характеристика поля равна 0. Так как $d\alpha\colon L(\mathbf{G}_a) \to \mathfrak{gl}(V)$ имеет вид $t \to t \cdot X$, то из соображений размерности $H = \mathscr{A}(X)$. Следовательно,

$$\mathscr{A}(X) \cong \mathbf{G}_a.$$

(2) $X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n) \in L(\mathbf{D}_n)$. Этот случай мы излагаем для полноты — он не понадобится нам в дальнейшем. Нам потребуются некоторые элементарные результаты о торах, которые будут доказаны далее в § 8. В частности, мы увидим в п. 8.2, что группа $H = \mathscr{A}(X)$ совпадает с пересечением ядер $\ker \chi$ всех тех характеров $\chi \in X(\mathbf{D}_n)$, для которых $\chi(H) = 1$; последнее условие эквивалентно условию $d\chi(L(H)) = 0$. Если $\chi(\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n)) = t_1^{m_1} \ldots t_n^{m_n}$, то $d\chi(\operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n)) = \sum m_i s_i$, где мы отождествляем алгебру Ли $L(\mathbf{D}_n)$ с алгеброй Ли диагональных матриц из $\mathfrak{gl}_n$. Таким образом, если

$$L = \left\{(m_i) \in \mathbf{Z}^n \mid \sum m_i x_i = 0\right\},$$

то

$$\mathscr{A}(X) = \left\{\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n) \,\middle|\, \prod t_i^{m_i} = 1 \text{ для всех } (m_i) \in L\right\}$$

и

$$\mathfrak{a}(X) = \left\{\operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n) \mid \sum m_i s_i = 0 \text{ для всех } (m_i) \in L\right\}.$$

(3) *Если $X = X_s + X_n$ — разложение Жордана эндоморфизма X, то $\mathscr{A}(X) = \mathscr{A}(X_s) \cdot \mathscr{A}(X_n)$ и $\mathfrak{a}(X) = \mathfrak{a}(X_s) + \mathfrak{a}(X_n)$.*

Это утверждение очевидно; более того, эти произведение и сумма являются прямыми. Тем самым строение группы $\mathscr{A}(X)$ для произвольного X полностью определено.

Замечание. В качестве группового аналога утверждения (1) можно сформулировать следующее утверждение: *если $u \in GL(V)$, $u \neq 1$, u — унипотентный элемент, то $\mathscr{A}(u) \cong \mathbf{G}_a$.* В самом деле, пусть $x = 1 - u$. Это нильпотентное преобразование; следовательно, $X = \log u = \sum_{i > 0} i^{-1}(-x)^i$ — полином от x с нулевым постоянным членом; значит, X — также нильпотентное преобразование. Согласно утверждению (1), группа $\mathscr{A}(X)$ изоморфна $\mathbf{G}_a$ и содержит элемент $u = \exp X$; следовательно, $\mathscr{A}(u) \subseteq \mathscr{A}(X)$. Но элемент $u \in GL(V)$ имеет бесконечный порядок, так что $\dim \mathscr{A}(u) \geqslant 1$ и $\mathscr{A}(u) = \mathscr{A}(X)$.

7.4. Лемма. *Пусть* π: $G \to GL(E)$ — *рациональное представление, и пусть* $N \subset M$ — *векторные подпространства пространства* E. *Положим*

$$H = \{g \in G \mid \pi(g) N = N,\ \pi(g) M = M,\ \pi(g)_{M/N} = e\}.$$

Тогда

$$L(H) = \mathfrak{tran}(M, N) = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\pi(X) M \subset N\}.$$

В частности, $\mathfrak{tran}(M, N)$ — *алгебраическая алгебра Ли.*

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{b} = \mathfrak{tran}(M, N)$ — алгебра Ли, содержащая $L(H)$. Обратно, предположим, что $X \in \mathfrak{b}$. Достаточно показать, что $\mathscr{A}(X) \subset H$. Так как $\pi(\mathscr{A}(X)) = \mathscr{A}(d\pi(X))$ (согласно предложению 7.2), то можно заменить G на $\pi(G)$. Так как X_s и X_n — полиномы от X без постоянного члена, то X_s, X_n принадлежат $\mathfrak{b}$ вместе с X, так что дело сводится к случаям $X = X_s$ и $X = X_n$.

Если $X = X_n$, то (см. п. 7.3 (1)) $\mathscr{A}(X) = \{\exp(tX)\}$, и ясно, что группа $\mathscr{A}(X)$ содержится в H. Если же $X = X_s$, то пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис пространства M, такой, что $e_1, \ldots, e_n$ порождает N, а $e_{n+1}, \ldots, e_m$ порождает подпространство $M' \subset \subset \ker(X)$. Ясно тогда, что $\mathscr{A}(X)$ содержится в группе диагональных матриц $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_m, \ldots)$, удовлетворяющих условию $d_{n+1} = \ldots = d_m = 1$. Эти матрицы, очевидно, принадлежат группе H, что и требовалось.

7.5. Предложение. *Пусть* $(H_i)_{i \in I}$ — *семейство замкнутых гладких неприводимых подмногообразий группы* G, *таких, что для каждого* $i \in I$, $H_i^{-1} = H_j$ *для подходящего* j. *Пусть* H — *подгруппа, порожденная множествами* H_i. *Тогда группа* H *замкнута и алгебра Ли* $\mathfrak{h} = L(H)$ *порождается как пространство векторными подпространствами.*

$$\operatorname{Ad}(h) T(x^{-1}H_i)_e \qquad (h \in H,\ x \in H_i,\ i \in I).$$

Доказательство. Согласно предложению п. 2.2, группа H замкнута, и существует конечная последовательность $i_1, \ldots, i_s$ элементов множества I, такая, что отображение-произведение p: $W = H_{i_1} \times \ldots \times H_{i_s} \to H$ сюръективно. Для упрощения обозначений будем писать вместо H_{i_j} просто H_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Так как морфизм p сепарабелен (ибо $\operatorname{char}(k) = 0$), то для подходящего $w = (w_1, \ldots, w_s) \in W$ отображение $(df)_w$: $T(W)_w \to T(H)_v$, где $v = p(w) = w_1 \ldots w_s$, сюръективно.

Положим теперь $v_j = w_1 \ldots w_j$, $H'_j = w_j^{-1} H_j$ и $H''_j = v_j H'_j v_j^{-1}$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Определим морфизм α: $W' = H'_1 \times \ldots \times H'_s \to W$ формулой $\alpha(x_1, \ldots, x_s) = (w_1 x_1, \ldots, w_s x_s)$ и положим

$$\beta = \operatorname{Int}(v_1) \times \ldots \times \operatorname{Int}(v_s)\colon\ W' \to W'' = H''_1 \times \ldots \times H''_s.$$

Покажем, что прямоугольник

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & W \arrow[r, "p"] & H \arrow[d, "\rho_{v^{-1}}"] \\ W'' \arrow[rr, "p''"] & & H \end{tikzcd}$$

коммутативен (здесь p'' — отображение-произведение). В самом деле,

$$p''\beta(x_1, \ldots, x_s) = v_1x_1v_1^{-1}v_2x_2v_2^{-1} \ldots v_{s-1}^{-1}v_sx_sv_s^{-1} =$$
$$= w_1x_1w_2x_2 \ldots w_sx_sv^{-1}$$

(ибо $v_{j-1}^{-1}v_j = w_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ и $v_s = v$); следовательно,

$$p''\beta(x_1, \ldots, x_s) = (p\alpha(x_1, \ldots, x_s))\,v^{-1}.$$

Обозначая элемент $(e, \ldots, e) \in W'$ через e, получаем $\alpha(e) = w$. Так как α и $\rho_{v^{-1}}$ — изоморфизмы многообразий и так как отображение $(dp)_w$ сюръективно, то дифференциал

$$d(p'' \circ \beta)_e\colon\ T(W')_e \to T(H)_e = \mathfrak{h}$$

отображения $p'' \circ \beta = \rho_{v^{-1}} \circ p \circ \alpha$ в точке e также сюръективен. Если $X = (X_1, \ldots, X_s) \in T(W')_e$, то $d(p'' \circ \beta)_e(X) = \sum d(\operatorname{Int}(v_j))_e(X_j) = \sum \operatorname{Ad}(v_j)(X_j)$. Таким образом, $\mathfrak{h} = \sum \operatorname{Ad}(v_j)\,T(H_j')_e$. Так как $v_j \in H$ и так как $H_j' = w_j^{-1} \cdot H_j$, где $w_j \in H_j$, то предложение доказано.

7.6. Теорема. *В обозначениях предложения* 7.5 *предположим, что H_i — замкнутая подгруппа группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}_i$. Тогда $\mathfrak{h}$ порождается как векторное пространство подпространствами* $\operatorname{Ad}(h)(\mathfrak{h}_i)$ $(h \in H,\ i \in I)$ *и как алгебра Ли — подалгебрами $\mathfrak{h}_i$* $(i \in I)$.

Доказательство. Так как H_i — группа, то при $x \in H_i$ имеем $x^{-1}H_i = H_i$. Значит, $T(x^{-1}H_i)_e = \mathfrak{h}_i$. Теперь первое утверждение содержится в предложении 7.5.

Пусть M — подалгебра Ли, порожденная подалгебрами $\mathfrak{h}_i$ $(i \in I)$. Требуется доказать, что включение $M \subset \mathfrak{h}$ является на самом деле равенством. С учетом первого утверждения теоремы достаточно показать, что подалгебра M инвариантна относительно $\operatorname{Ad}(H)$, т. е. что $H \subset N_G(M) = \operatorname{Tr}(M, M)$. Так как $\operatorname{Tr}(M, M)$ — группа, то достаточно показать, что она содержит каждую группу H_i $(i \in I)$. Но группа H_i связна, поэтому наше последнее утверждение будет доказано, если убедиться, что $\mathfrak{h}_i \subset L(\operatorname{Tr}(M, M))$. Согласно лемме 7.4 (примененной к Ad при $M = N$), $L(\operatorname{Tr}(M, M)) =$

$=\mathfrak{t}\,\mathfrak{a}\mathfrak{n}(M, M)$. Так как M — алгебра Ли, содержащая $\mathfrak{h}_i$, то $[\mathfrak{h}_i, M] \subset M$, что и требовалось.

7.7. Следствие. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{h}$ — алгебраическая алгебра Ли;*

(2) *$\mathfrak{a}(X) \in \mathfrak{h}$ для любого $X \in \mathfrak{h}$;*

(3) *$\mathfrak{h}$ порождается алгебраическими алгебрами Ли как векторное пространство;*

(4) *$\mathfrak{h}$ порождается алгебраическими алгебрами Ли как алгебра Ли.*

Импликация $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ очевидна, а импликация $(4) \Rightarrow (1)$ является непосредственным следствием теоремы 7.6.

7.8. Предложение. *Пусть $H = (M, N)$, где M и N — замкнутые связные нормальные делители группы G. Тогда $\mathfrak{h} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$, где $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — алгебры Ли групп H, M, N соответственно.*

Доказательство. При $x, y \in G$ положим

$$c_x(y) = c'_y(x) = (x, y) = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Тогда группа H порождается множествами $H_a = c_a(N)$ и $H'_a = c'_a(N) = H_a^{-1}$, где a пробегает группу M. Эти множества удовлетворяют условиям теоремы 7.5, ибо N — связная замкнутая подгруппа. Следовательно, алгебра $\mathfrak{h}$ порождается подпространствами вида

$$\operatorname{Ad}(h)\, T\left(c_a(b)^{-1} H_a\right)_e \quad \text{и} \quad \operatorname{Ad}(h)\, T\left(c'_a(b)^{-1} H'_a\right)_e,$$

где $h \in H$, $a \in M$, $b \in N$.

Включение $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{h}$ вытекает из предложения п. 3.12, а инвариантность алгебры $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$ относительно действия группы $\operatorname{Ad}(G)$ следует из того факта, что M, N — нормальные делители группы G. Таким образом, остается показать, что при $a \in M$ и $b \in N$

$$T\left(c_a(b)^{-1} H_a\right)_e, \quad T\left(c'_a(b)^{-1} H'_a\right)_e \subset [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}].$$

Рассмотрим отображение $f\colon N \to G$, определенное формулой $f(x) = c_a(b)^{-1} c_a(bx)$. Тогда $f(e) = e$ и $(df)_e(\mathfrak{n}) = T\left(c_a(b)^{-1} c_a(N)\right)_e$. Так как

$$f(x) = bab^{-1}a^{-1}abxa^{-1}(bx)^{-1} = baxa^{-1}b^{-1}bx^{-1}b^{-1},$$

$$f(x) = (ba) \cdot x \cdot (ba)^{-1} \cdot bx^{-1}b^{-1},$$

то $(df)_e = \operatorname{Ad}(ba) - \operatorname{Ad}(b) = \operatorname{Ad}(b)(\operatorname{Ad}(a) - 1)$. Поскольку относительно оператора $\operatorname{Ad}(b)$ алгебра $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$ инвариантна, то достаточно показать, что

$$(\operatorname{Ad}(a) - 1)(\mathfrak{n}) \subset [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}] \quad \text{при} \quad a \in M.$$

(Мы опускаем аналогичное рассуждение в случае $c'_a(b)^{-1}c'_a(N)$.) Пусть π: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}/[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$ — естественная проекция. Зафиксируем элемент $X\in\mathfrak{n}$ и определим морфизм α: $M\to\mathfrak{g}'$, полагая $\alpha(a)=\pi((\mathrm{Ad}(a)-1)(X))$. Требуется доказать, что $\alpha=0$.

Так как идеал $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$ инвариантен относительно $\mathrm{Ad}\, G$, то факторалгебра $\mathfrak{g}'$ также является G-модулем. При $a, a'\in M$ имеем $\mathrm{Ad}(aa')-1=\mathrm{Ad}(a)(\mathrm{Ad}(a')-1)+(\mathrm{Ad}(a)-1)$, откуда следует, что $\alpha(aa')=\mathrm{Ad}(a)\alpha(a')+\alpha(a)$. Поэтому множество $P=\{a\in M\,|\,\alpha(a)=0\}$ является замкнутой подгруппой группы M и $\alpha(aP)=\alpha(a)$ при $a\in M$. Следовательно, морфизм α разлагается следующим образом:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & \mathfrak{g}' \\ & M/P \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

где β — факторный морфизм. Так как морфизм γ инъективен, то γ — изоморфизм фактора M/P на его образ (ибо $\mathrm{char}(k)=0$). Так как многообразие $\alpha(M)=M/P$ связно, то мы сможем доказать, что оно состоит из одной точки, если покажем, что $(d\alpha)_e=0$.

Имеем $\alpha=\pi\circ\delta$, где $\delta(a)=(\mathrm{Ad}(a)-1)(X)$, так что $(d\alpha)_e=(d\pi)_0\circ(d\delta)_e=\pi\circ(d\delta)_e$. (Так как отображение π линейно, то $(d\pi)_0=\pi$.) Используя теперь формулу (2) п. 3.9, получаем $(d\delta)_e(Y)=\mathrm{ad}(Y)(X)=[Y, X]$, так что $(d\delta)_e(\mathfrak{m})=[\mathfrak{m}, X]\subset[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$. Таким образом, $\pi\circ(d\delta)_e(\mathfrak{m})=0$, а это и требовалось доказать.

7.9. Следствие. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]=[\mathfrak{a}(\mathfrak{h}), \mathfrak{a}(\mathfrak{h})]$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ — алгебраическая алгебра Ли.*

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{tran}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$; последняя алгебра является алгебраической, согласно лемме 7.4. Следовательно, $\mathfrak{a}(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{tran}(\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$, т. е. $[\mathfrak{a}(\mathfrak{h}), \mathfrak{h}]\subset[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Следовательно, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{tran}(\mathfrak{a}(\mathfrak{h}), [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$, так что мы снова видим, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{h})\subset\subset\mathfrak{tran}(\mathfrak{a}(\mathfrak{h}), [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$, т. е. $[\mathfrak{a}(\mathfrak{h}), \mathfrak{a}(\mathfrak{h})]\subset[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Обратное включение очевидно.

Из предложения 7.8 следует, что $[\mathfrak{a}(\mathfrak{h}), \mathfrak{a}(\mathfrak{h})]$ совпадает с алгеброй Ли группы $(\mathscr{A}(\mathfrak{h}), \mathscr{A}(\mathfrak{h}))$, и это показывает, что алгебра $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ алгебраична.

Библиографические замечания. Линейные алгебраические группы над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ изучались в конце XIX века Маурером в серии статей (особенно Маурер [1]). Один из основных его результатов состоит в том, что такая группа является рациональным многообразием. Позднее Э. Картан [1] анонсировал несколько дальнейших результатов об алгебраических группах, в частности следствие п. 7,9, однако нигде не опубликовал доказательства. Затем алгебраические группы были преданы забвению. Они обрели новую жизнь в работе Шевалле и Туана а затем Шевалле [1]. Основные результаты этого параграфа, в частности результаты пп. 7.6—7.9, были доказаны Шевалле [1].

Основной инструмент Шевалле — формальные экспоненциалы, которые он использует для установления аналога известного соответствия между алгебрами Ли и группами Ли в теории групп Ли. По этой причине он вынужден был ограничиться основным полем характеристики 0. Здесь нам удалось избежать использования экспоненциалов за счет введения структуры многообразия на пространстве смежных классов G/H алгебраической группы G по ее замкнутой подгруппе H и понятия сепарабельности морфизма в случае нулевой характеристики. Разумеется, это последнее также использовалось в книге Шевалле, так что основная особенность нашего подхода состоит, по существу, в возможности рассматривать G/H как алгебраическое многообразие. Различие между этими подходами к теории алгебраических групп можно уяснить конкретнее, если сравнить доказательство утверждения (2) в п. 7.1 с доказательством Шевалле [1], т. 2, стр. 175.

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

В этой главе все алгебраические группы (если противное особо не оговорено) предполагаются аффинными, а G обозначает k-группу.

§ 8. ДИАГОНАЛИЗИРУЕМЫЕ ГРУППЫ И ТОРЫ

8.1. Лемма. *Пусть H — абстрактная группа, а X — множество гомоморфизмов $H \to K^*$. Тогда X линейно независимо как множество функций из H в K.*

Доказательство. Если это не так, то пусть $n > 0$ — наименьшее число, такое, что существуют линейно зависимые $\chi_1, \ldots$ $\ldots, \chi_n \in X$, скажем, $f = \left(\sum_{i<n} a_i\chi_i\right) + \chi_n = 0$. Выберем $h_0 \in H$ так, чтобы $\chi_n(h_0) \neq \chi_1(h_0)$ (ясно, что $n > 1$). Тогда для всех $h \in H$

$$0 = f(h_0h) - \chi_n(h_0) f(h) = \sum_{i<n} a_i (\chi_i(h_0) - \chi_n(h_0)) \chi_i(h).$$

Это нетривиальное соотношение между $\chi_i(h)$, содержащее менее n членов, что противоречит минимальности n.

8.2. Диагонализируемые группы. Пусть $A = K[G]$. Тогда группа характеров $X(G)$ содержится в алгебре A. Группа G называется *диагонализируемой*, если $X(G)$ порождает A (как K-модуль). Кроме того, если $X(G)_k$ порождает A, то мы будем говорить, что группа G *разложима* над k. Так как $A = K \otimes_k A_k$, то последнее условие эквивалентно тому, что $X(G)_k$ порождает $A_k = k[G]$ как k-модуль.

Предложение. *Предположим, что множество $Y \subset X(G)_k$ порождает A_k.*

(a) $Y = X(G)$. *В частности, все характеры группы G рациональны над k.*

(b) $A_k = k[X(G)]$, *т. е. A_k — групповая алгебра конечно порожденной абелевой группы $X(G)$. Кроме того, диагональное отображение $X(G) \to X(G) \times X(G)$ и инверсное отображение $X(G) \to X(G)$ индуцируют на A_k структуру алгебры Хопфа.*

(c) *Пусть H — замкнутая подгруппа группы G; тогда H — диагонализируемая группа, которая определена и разложима над k и может быть задана уравнениями характеров (т. е. представима в виде пересечения ядер некоторых характеров) в G. Кроме того, каждый характер группы H продолжается до характера группы G.*

(d) *Если представление π: $G \to \mathbf{GL}_n$ является k-рациональным, то группа $\pi(G)$ сопряжена над k с подгруппой группы $\mathbf{D}_n$. В частности, группа G k-изоморфна замкнутой подгруппе группы $\mathbf{D}_n$.*

Доказательство. Утверждение (a) следует непосредственно из леммы 8.1, примененной к $\mathrm{X}(G) \subset A$. Кроме того, лемма 8.1 показывает, что множество $\mathrm{X}(G)$ линейно независимо над k, так что A_k является групповой алгеброй группы $\mathrm{X}(G)$. Наличие структуры алгебры Хопфа непосредственно следует из определений, т. е. мы рассматриваем $\mathrm{X}(G)$ как подалгебру алгебры Хопфа $A = K[G]$ (см. п. 1.5).

Из того факта, что A_k — конечно порожденная k-алгебра, легко следует, что $\mathrm{X}(G)$ обязана быть конечно порожденной абелевой группой. Это доказывает (b).

Для доказательства утверждения (c) заметим сначала, что $B = K[H]$ есть кольцо вычетов алгебры A и, следовательно, B порождается образом группы $\mathrm{X}(G)$. Элементы этого образа — ограничения на H характеров группы G; отсюда вытекает, что группа H диагонализируема, так что $B = K[\mathrm{X}(H)]$. Так как отображение p: $A \to B$ сюръективно и переводит $\mathrm{X}(G)$ в $\mathrm{X}(H)$, то p оказывается в точности гомоморфизмом групповой алгебры, индуцированным сюръективным отображением $\mathrm{X}(G) \to \mathrm{X}(H)$. Соотношение $\mathrm{X}(G) = \mathrm{X}(G)_k$ показывает, что группа H определяется уравнениями характеров над k и что $\mathrm{X}(H) = \mathrm{X}(H)_k$. Это доказывает (c).

(d) Если характеры $\{\chi_i\}$, $i = 1, \ldots, d$, порождают группу G, то отображение $(\chi_1, \ldots, \chi_d)$: $G \to (\mathbf{GL}_1)^d$ — инъективный морфизм. Следовательно, G — коммутативная группа, состоящая из полупростых элементов. Поэтому из предложения п. 4.6 вытекает, что для любого рационального линейного представления π: $G \to GL(V)$ группа $\pi(G)$ диагонализируема. Тогда элементы на диагонали являются характерами группы G. Предположим теперь, что представление π определено над k. Тогда, так как каждый характер $\chi \in \mathrm{X}(G)$ определен над k, собственное подпространство $V_\chi = \{x \in V \mid \pi(g)x = \chi(g)x \ \forall g \in G\}$ также определено над k (см. п. 5.2). Таким образом, группа $\pi(G)$ диагонализируема над k в $GL(V)$. В случае если представление π точно, группа G изоморфна над k замкнутой подгруппе группы $\mathbf{D}_n$; существование k-рационального точного представления обеспечивает предложение 1.10.

Следствие. *Пусть группа G диагонализируема. Тогда G разложима над k в том и только том случае, когда $\mathrm{X}(G) = \mathrm{X}(G)_k$.*

Для любого $g \in G$

$$\mathcal{A}(g) = \{h \in G \mid \chi(g) = 1 \Rightarrow \chi(h) = 1 \text{ для каждого } \chi \in \mathrm{X}(G)\}.$$

Алгебра Ли группы G состоит только из полупростых элементов.

Пример. Предположим, что $k = \mathbf{Q}$, и пусть $m > 2$ — целое число. Обозначим через μ_m ядро морфизма $x \to x^m$ в $\mathbf{GL}_1$; таким образом, $\mu_m(k')$ — группа m-х корней из единицы в k' для любой k-алгебры k'. Из определения легко следует, что μ_m — разложимая над k диагонализируемая k-группа. Точнее, $k[\mu_m] = k[t] = k[T]/(T^m - 1)$. Кроме того, $\mathrm{X}(\mu_m) = \{1, t, \ldots, t^{m-1}\}$.

Пусть $\pi\colon \mu_m \to \mathbf{GL}_n$ — точное рациональное представление, определенное над k. Тогда, согласно доказанному выше предложению, группа $\pi(\mu_m)$ сопряжена *над* k с диагональной группой. На первый взгляд это кажется невероятным, ибо k не содержит собственных значений образующей x группы $\pi(\mu_m)$. Все дело в том, что $x \in \mathbf{GL}_n$ *не* принадлежит $\mathbf{GL}_n(k)$, даже если π определено над k; тем не менее матрица x сопряжена с некоторой диагональной матрицей при помощи элемента из $\mathbf{GL}_n(k)$.

8.3. Следствие. *Контравариантный функтор $G \to \mathrm{X}(G)$ является вполне точным функтором* (определение дано в доказательстве) *из категории разложимых над k диагонализируемых групп и их морфизмов как алгебраических групп в категорию конечно порожденных $\mathbf{Z}$-модулей. В частности, все морфизмы между такими группами определены над k.*

Доказательство. Пусть G, G' — две k-разложимые диагонализируемые группы с аффинными кольцами A, A' соответственно. Рассмотрим коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Mor}_{\text{алг. групп}}(G, G')_k \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\mathrm{X}"] & \\
\mathrm{Mor}_{\text{алг. Хопфа}}(A'_k, A_k) & & \mathrm{Mor}_{\mathbf{Z}\text{-мод}}(\mathrm{X}(G'), \mathrm{X}(G)) \arrow[ll, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

Непосредственно из определения (см. п. 1.5) вытекает, что отображение α биективно. Существование и инъективность отображения β следуют из утверждения (b) предложения из п. 8.2. Поэтому все три стрелки обозначают биективные отображения. Первое утверждение следствия заключается в том, что отображение X биективно. Последнее вытекает из того факта, что образ, а следовательно и прообраз, отображения X не зависит от k.

Замечание. Если X — конечно порожденная абелева группа, то $A = K[\mathrm{X}]$ — алгебра Хопфа, и, следовательно, A определяет диагонализируемую группу с группой характеров X, если A не содержит нильпотентных элементов. Алгебра A содержит нильпотентные элементы тогда и только тогда, когда $\operatorname{char}(k) = p > 0$ и группа X обладает элементами порядка p.

8.4. Предложение. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *группа G диагонализируема;*

(2) *группа G изоморфна подгруппе группы $\mathbf{D}_n$ для некоторого $n > 0$;*

(3) *для любого рационального представления π: $G \to \mathbf{GL}_n$ группа πG сопряжена с подгруппой группы $\mathbf{D}_n$;*

(4) *группа G содержит плотную коммутативную подгруппу, состоящую из полупростых элементов.*

В разложимом случае имеет место такое утверждение:

Предложение*. *Следующие условия эквивалентны:*

(1*) *группа G диагонализируема и разложима над k;*

(2*) *группа G k-изоморфна подгруппе группы $\mathbf{D}_n$ для некоторого $n > 0$;*

(3*) *если π: $G \to \mathbf{GL}_n$ — рациональное представление, определенное над k, то группа πG сопряжена над k с подгруппой группы $\mathbf{D}_n$.*

Доказательство предложения*. Импликация (1*) $\Rightarrow$ (2*) вытекает из утверждения (d) предложения из п. 8.2, (2*) $\Rightarrow$ (1*) — из утверждения (c) предложения из п. 8.2, (1*) $\Rightarrow$ (3*) — из утверждения (d) предложения из п. 8.2 и (3*) $\Rightarrow$ (2*) — из существования точного k-рационального представления π: $G \to \mathbf{GL}_n$ (см. п. 1.10).

Доказательство предложения. Эквивалентность утверждений (1), (2) и (3) мы получим, положив $k = K$ в предложении*. Импликация (2) $\Rightarrow$ (4) очевидна, а (4) $\Rightarrow$ (3) вытекает из п. 4.6.

Следствие. *Предположим, что группа G диагонализируема (и разложима над k). Тогда то же самое справедливо для каждой подгруппы группы G и каждого образа группы G при любом морфизме (определенном над k).*

Доказательство. Для подгрупп сошлемся на утверждение (c) предложения из п. 8.2. Если π: $G \to G'$ — морфизм (определенный над k), то, вложив G' в $\mathbf{GL}_n$ (над k) и применив условие (3) (соответственно (3*)), получим, что группа $\pi(G)$ сопряжена (над k) с подгруппой группы $\mathbf{D}_n$. Затем применим (2) (соответственно (2*)).

8.5. Торы. Диагональная группа $\mathbf{D}_n$ является замкнутой подгруппой группы $\mathbf{GL}_n$, очевидно, изоморфной над простым подполем группе $(\mathbf{GL}_1)^n$. Алгебраическая группа, изоморфная группе $\mathbf{D}_n$, называется *n-мерным тором.*

Происхождение этого термина обусловлено тем фактом, что эти группы играют роль, аналогичную той, которую играют топологические торы (т. е. произведения групп вращений окружности) в теории компактных групп Ли. Заметим, однако, что при $K = \mathbf{C}$ рассматриваемые здесь торы некомпактны. Если они определены над $\mathbf{R}$, то их группы вещественных точек могут быть как компактными, так и некомпактными (см. п. 8.15).

Предложение. *Пусть T — алгебраическая группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *T есть n-мерный тор;*

(2) *T — связная диагонализируемая группа размерности n;*

(3) *T — диагонализируемая группа и $X(T) = \mathbf{Z}^n$.*

Доказательство. Импликация (1)$\Rightarrow$(2) вытекает из утверждения (2) предложения 8.4. Покажем, что (2)$\Rightarrow$(3). Так как группа $\mathbf{GL}_1$ связна и размерности 1, то ее связные замкнутые подгруппы исчерпываются группами $\{e\}$ и $\mathbf{GL}_1$. Применяя это замечание к образам характеров, мы видим, что группа характеров связной группы T не имеет элементов конечного порядка. Кроме того, поскольку группа T диагонализируема, то $K[T] = K[X(T)]$, так что $\dim T$ (т. е. степень трансцендентности поля $K(T)$ над K) равняется рангу свободной абелевой группы $X(T)$.

(3)$\Rightarrow$(1). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — базис группы $X(T)$. Тогда $K[T] = K[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]$, так что отображение α: $t \to \operatorname{diag}(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$ дает нужный изоморфизм $T \to \mathbf{D}_n$ (ибо, очевидно, коморфизм α_0: $K[\mathbf{D}_n] \to K[T]$ сюръективен, и обе группы связны и имеют размерность n).

Следствие. *Замкнутая связная подгруппа S тора T является тором и выделяется в T прямым множителем.*

Согласно предложению, S — тор, и группа $X(S)$ свободна. Гомоморфизм ограничения $X(T) \to X(S)$ сюръективен (см. утверждение (с) предложения п. 8.2) и, следовательно, расщепляем. Согласно следствию п. 8.3, S — прямой множитель группы T.

8.6. *Мультипликативными однопараметрическими подгруппами k-группы G* называются элементы множества

$$X_*(G) = \operatorname{Mor}(\mathbf{GL}_1, G).$$

Так как $X(G) = \operatorname{Mor}(G, \mathbf{GL}_1)$, то мы имеем отображение

$$X(G) \times X_*(G) \to \mathbf{Z} = X(\mathbf{GL}_1),$$

задаваемое формулой

$$\langle \chi, \lambda \rangle = m, \quad \text{если} \quad (\chi \circ \lambda)(x) = x^m.$$

Если группа G коммутативна, то это отображение является билинейным отображением абелевых групп. Из следствия п. 8.3 и предложения п. 8.4 (или даже непосредственно) получаем

Предложение. *Если T — тор, то отображение*

$$X(T) \times X_*(T) \to \mathbf{Z}$$

является двойственностью над $\mathbf{Z}$.

8.7. Предложение. *Пусть группа G диагонализируема и разложима над k. Тогда G является прямым произведением $G = F \times G^0$ конечной группы F и тора G^0, определенного и разложимого над k.*

Доказательство. Ввиду утверждения (d) предложения в п. 8.2 мы можем предполагать, что G — замкнутая подгруппа некоторой группы $\mathbf{D}_n$. Кроме того, из предложения п. 8.4 и утверждения (c) предложения в п. 8.2 следует, что все замкнутые подгруппы группы $\mathbf{D}_n$ определены и разложимы над k, так что, согласно предложению из п. 8.5, G^0 — тор.

Согласно утверждению (c) предложения из п. 8.2, гомоморфизм ограничения $X(\mathbf{D}_n) \cong \mathbf{Z}^n \to X(G^0)$ сюръективен. Так как группа G^0 связна, то, как отмечалось в п. 8.5, группа $X(G^0)$ свободна, так что этот эпиморфизм расщепляем. Иными словами, имеется базис $\chi_1, \ldots, \chi_n$ группы $X(\mathbf{D}_n)$, такой, что $\chi_1, \ldots, \chi_d$ порождает группу характеров, которая аннулирует группу G^0. Тогда k-автоморфизм $x \to \operatorname{diag}(\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x))$ группы $\mathbf{D}_n$ отображает G^0 на группу $\{\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i = 1, 1 \leqslant i \leqslant 0\}$. Таким образом, $\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_d \times G^0$. Отсюда следует, что G — прямое произведение абстрактных групп F и G^0, где $F = G \cap \mathbf{D}_d$. Ясно теперь, что $F \cong G/G^0$, так что F — конечная группа, и отображение-произведение α: $F \times G^0 \to G$ — изоморфизм групп. Тот факт, что α — изоморфизм многообразий, следует из того, что α является таковым на парах соответствующих связных компонент.

8.8. Предложение. *Если k не является алгебраическим расширением конечного поля, то группа $T = (\mathbf{GL}_1)^n$ содержит элемент t, рациональный над k и порождающий плотную подгруппу группы T.*

Доказательство. Пусть $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Тогда t порождает плотную подгруппу в том и только том случае, когда $\chi(t)$ отлично от нуля для каждого нетривиального характера $\chi \in X(T)$. Так как все характеры группы T имеют вид $t \to t_1^{m_1} \ldots t_n^{m_n}$, то это требование в точности эквивалентно мультипликативной независимости элементов $t_1, \ldots, t_n$. Следовательно, нам необходимо, чтобы группа k^* содержала свободную абелеву группу сколь угодно большого ранга. Если $\operatorname{char}(k) = 0$, то этот факт вытекает из бесконечности множества простых чисел. Если $\operatorname{char}(k) = p > 0$ и если элемент $x \in k$ трансцендентен над простым подполем $\mathbf{F}_p$, то это следует из бесконечности множества простых идеалов в кольце полиномов $\mathbf{F}_p[x]$.

Замечание. Предложение 8.8 справедливо без предположения о том, что тор T разложим над k; однако в этом общем случае доказательство оказывается гораздо более тонким (см. Титс [1]).

8.9. Элементы конечного порядка в торах. Пусть p — характеристическая экспонента поля k и T — определенный над k тор размерности d. При $m \in \mathbf{Z}$ определим морфизмы

$$\alpha_m: T \to T, \qquad \alpha_m(x) = x^m.$$

Предложение. *Предположим, что* $m > 0$.

(a) *Морфизм* α_m *сюръективен.*

(b) *Если* m *— степень числа* p, *то морфизм* α_m *биективен.*

(c) *Если* $(m, p) = 1$, *то* α_m *— сепарабельный морфизм,* $\ker(\alpha_m) \cong (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^d$ *(как группы) и* $\ker(\alpha_m) \subset T(k_s)$.

(d) *Если* m *не является степенью числа* p, *то объединение групп* $\ker(\alpha_{m^n})$ $(n > 0)$ *— плотная подгруппа группы* T.

Доказательство. Утверждения (a) и (b) следуют из того факта, что в группе K^* уравнение $x^n = t$ $(t \in K^*)$ всегда разрешимо и что отображение $x \to x^p$ взаимно однозначно.

(c) Так как $(d\alpha_m)$: $X \to mX$, то сепарабельность морфизма α_m вытекает из того, что $(m, p) = 1$. Отсюда следует, что многообразие $\ker(\alpha_m)$ определено над k (см. п. 6.7, замечание) и множество его k_s-рациональных точек плотно в нем. Тот факт, что все точки многообразия $\ker(\alpha_m)$ рациональны над k_s, будет следовать из конечности множества $\ker(\alpha_m)$. Последнее утверждение, а также изоморфизм $\ker(\alpha_m) \cong (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^d$ становится очевидным, если учесть, что множество корней из 1 степени m в группе K^* образует циклическую группу порядка m.

Утверждение (d), как легко видеть, достаточно доказать для случая $d = 1$, когда $T = \mathbf{GL}_1$ — неприводимое многообразие размерности 1, так что множество $\bigcup_{n>0} \ker(\alpha_{m^n})$ плотно в T, коль скоро оно бесконечно, а, согласно (c), это имеет место всякий раз, когда m не является степенью числа p.

Следствие. *Пусть* G *— диагонализируемая группа. Тогда для каждого* $m > 0$ *элементы группы* G, *порядок которых делит* m, *образуют конечную подгруппу. Подгруппа, образованная элементами конечного порядка, плотна в* G.

Это вытекает из предложения 8.7 и предложения, доказанного выше.

8.10. Жесткость диагонализируемых групп. Жесткость означает отсутствие нетривиальных связных семейств автоморфизмов. Это свойство имеет место и для абелевых многообразий; по этой причине мы не требуем, чтобы в следующем предложении алгебраические группы были аффинными.

Предложение. *Пусть* $\alpha\colon V \times H \to H'$ — *морфизм многообразий, такой, что*

(i) H' — *алгебраическая группа, содержащая для каждого* $m > 0$ *лишь конечное число элементов порядка* m;

(ii) H — *алгебраическая группа и множество элементов конечного порядка в ней плотно*;

(iii) V — *связное многообразие, и для каждого* $x \in V$ *отображение* $\alpha_x\colon h \to \alpha(x, h)$ *является гомоморфизмом групп.*

Тогда отображение $x \to \alpha_x$ *постоянно.*

Доказательство. При $h \in H$ положим $\beta_h(x) = \alpha(x, h)$. Тогда $\beta_h\colon V \to H'$ — морфизм из связного многообразия V; если элемент h — конечного порядка, то ввиду предположений (i) и (iii) его образ конечен, так что β_h — постоянный морфизм. Следовательно, при $x, y \in V$ морфизм $\gamma\colon H \to H'$, заданный формулой $\gamma(h) = \alpha_x(h)\,\alpha_y(h^{-1})$, преобразует каждый элемент конечного порядка в e. Условие (ii) влечет за собой равенство $\gamma(h) = e$ для каждого h.

Следствие 1. *Пусть* $H \subset H'$ — *замкнутые подгруппы группы* G, *и пусть* V — *связная компонента единицы* e *в многообразии* $\operatorname{Tran}(H, H') = \{g \in G \mid gHg^{-1} \subset H'\}$. *Предположим, что* H' *и* H *удовлетворяют условиям* (i) *и* (ii) *предложения. Тогда* $V = Z_G(H)^0$.

Доказательство. Применяя предложение к морфизму α, $\alpha(x, h) = xhx^{-1}$, заключаем, что $\alpha(x, h) = \alpha(e, h)$ для всех $x \in V$. Это показывает, что $V \subset Z_G(H^0)$. Обратное включение очевидно.

В случае когда группа $H = H'$ диагонализируема, из п. 8.9 выводим

Следствие 2. *Пусть* H — *диагонализируемая подгруппа алгебраической группы* G. *Тогда* $N_G(H)^0 = Z_G(H)^0$.

8.11. Предложение. *Пусть* G — *диагонализируемая группа. Тогда группа* G *разложима над конечным сепарабельным расширением поля* k.

Доказательство. Рассмотрим какое-либо k-вложение $G \subset \mathbf{GL}_n$. Тогда достаточно привести группу $G(k_s)$ к диагональному виду с помощью элемента из группы $\mathbf{GL}_n(k_s)$, ибо группа $G(k_s)$ плотна в G. Возможность этого непосредственно вытекает из п. 4.6.

Замечание. Предложение 8.11 можно доказать, используя элементы конечного порядка группы G. Из п. 8.9 следует, что последние образуют плотное подмножество в группе G и принадлежат группе $G(k_s)$.

Следствие 1. *Пусть T — определенный над k тор, и пусть* $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$.

(a) $$\mathrm{X}(T) = \mathrm{X}(T)_{k_s} \quad \text{и} \quad \mathrm{X}_*(T) = \mathrm{X}_*(T)_{k_s}.$$

Следовательно, $\mathrm{X}(T)_k = \mathrm{X}(T)^\Gamma$ *и* $\mathrm{X}_*(T)_k = \mathrm{X}_*(T)^\Gamma$.

(b) *Естественное отображение*

$$\mathrm{X}(T) \times \mathrm{X}_*(T) \to \mathbf{Z}$$

превращает $\mathrm{X}(T)$ *и* $\mathrm{X}_*(T)$ *в пару двойственных* Γ*-модулей.*

Доказательство. Так как тор T разложим над k_s, то $\mathrm{X}(T) = \mathrm{X}(T)_{k_s}$. Отсюда следует (см. следствие 8.3), что $\mathrm{Mor}(G, T) = \mathrm{Mor}(G, T)_{k_s}$ для любой диагонализируемой группы G, разложимой над k_s. При $G = \mathbf{GL}_1$ это дает $\mathrm{X}_*(T) = \mathrm{X}_*(T)_{k_s}$, что доказывает утверждение (a).

Очевидно, что отображение в утверждении (b) является двойственностью над $\mathbf{Z}$ (см. п. 8.6), так что необходимо проверить лишь его совместимость с действием каждого элемента $s \in \Gamma$. Требуется доказать, что $\langle {}^s\alpha, {}^s\lambda \rangle = \langle \alpha, \lambda \rangle$ при $\alpha \in \mathrm{X}(T)$ и $\lambda \in \mathrm{X}_*(T)$. Для любого $x \in k_s^*$ имеем

$$x^{\langle {}^s\alpha,\, {}^s\lambda \rangle} = ({}^s\alpha \circ {}^s\lambda)(x) = ({}^s\alpha)(s\lambda(s^{-1}x)) = s\alpha(s^{-1}s\lambda(s^{-1}x)) =$$
$$= s(\alpha \circ \lambda)(s^{-1}x) = s(s^{-1}x)^{\langle \alpha, \lambda \rangle} = x^{\langle \alpha, \lambda \rangle}.$$

Следствие 2. *Пусть T — тор, определенный над k. Тогда тор T разложим над k тогда и только тогда, когда* $\mathrm{X}_*(T) = \mathrm{X}_*(T)_k$.

Доказательство. Группа $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ тривиально действует на свободной абелевой группе $\mathrm{X}(T)$ тогда и только тогда, когда она действует тривиально на двойственной группе $\mathrm{X}_*(T)$.

8.12. Категория диагонализируемых k-групп. Как мы видели в п. 8.11, диагонализируемая k-группа G разложима над k_s. Поэтому, если $A = K[G]$—кольцо регулярных функций на G, то из п. 8.2 следует, что $A_{k_s} = k_s[\mathrm{X}(G)]$ — групповая алгебра группы $\mathrm{X}(G)$. При $s \in \Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ действие элемента s на этой групповой алгебре зададим формулой:

$${}^s\left(\sum a_\alpha \alpha\right) = \sum {}^s a_\alpha {}^s\alpha \qquad (\alpha \in \mathrm{X}(G),\ a_\alpha \in k_s).$$

Тогда $A_k = A_{k_s}^\Gamma$, так что G как k-группа полностью определяется группой $\mathrm{X}(G)$ со структурой Γ-модуля на ней. В самом деле, зная последнюю, мы можем построить алгебру A_{k_s} и действие группы Γ на A_{k_s}, и, следовательно, алгебру A_k. Группу $\mathrm{X}(G)$ можно рассматривать как конечно порожденный $\mathbf{Z}$-модуль, и действие группы Γ на $\mathrm{X}(G)$ непрерывно, т. е. некоторая открытая подгруппа конечного индекса группы Γ действует на $\mathrm{X}(G)$ тривиально (ибо G разложима над конечным расширением поля k). Кроме того, если $p = \operatorname{char}(k) > 0$, то группа $\mathrm{X}(G)$ не имеет элементов порядка p, ибо $K[\mathrm{X}(G)]$ — приведенная алгебра.

Пусть α: $G \to G'$ — морфизм диагонализируемых k-групп. Из следствия 8.3 вытекает, что морфизм α определен над k_s. Кроме того, следующие условия эквивалентны:

(1) морфизм α определен над k;

(2) гомоморфизм алгебр α_0: $A'_{k_s} \to A_{k_s}$ (где $A' = K[G']$) Γ-эквивариантен;

(3) гомоморфизм групп $X(\alpha)$: $\mathrm{X}(G') \to \mathrm{X}(G)$ Γ-эквивариантен. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из п. АГ. 14.3, а эквивалентность условий (2) и (3) вытекает из описанного выше действия группы Γ на аффинных алгебрах, получаемого из ее действия на группе характеров.

Мы можем теперь рассматривать X как (контравариантный) функтор

$$\mathrm{X}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B},$$

где категории $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ определяются следующим образом:

объекты категории $\mathscr{A}$: диагонализируемые k-группы;

морфизмы категории $\mathscr{A}$: k-морфизмы;

объекты категории $\mathscr{B}$: конечно порожденные $\mathbf{Z}$-модули без p-кручения, если $\operatorname{char}(k) = p > 0$, на которых группа Γ действует непрерывно;

морфизмы категории $\mathscr{B}$: Γ-эквивариантные гомоморфизмы.

Из следствия 8.3 и сделанных выше замечаний вытекает, что функтор X вполне точен. Более того,

Предложение. *Функтор* X: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — *эквивалентность категорий.*

Остается показать, что каждый объект M категории $\mathscr{B}$ является модулем характеров некоторой группы G из категории A. Групповая алгебра $A = K[M]$ является алгеброй Хопфа и, кроме того, приведенной аффинной K-алгеброй, ибо модуль M конечно порожден и без p-кручения. Следовательно, $G = \operatorname{spec}_K(A)$ — аффинная группа. При этом M естественным образом оказывается группой характеров группы G, так что G — диагонализируемая группа с группой характеров M (см. п. 8.2). Теперь нам нужно снабдить группу G k-структурой, индуцирующей данное действие группы Γ на M. Прежде всего мы наделяем алгебру A k_s-структурой $k_s[M]$.

Пусть, далее, элемент $s \in \Gamma$ действует на $k_s[M]$ по формуле

$$^s(a\alpha) = {}^s a {}^s \alpha \qquad (a \in k_s, \ \alpha \in M).$$

Тем самым определяется непрерывное действие группы Γ на алгебре $k_s[M]$, т. е. действие, относительно которого стабилизатор каждого элемента алгебры $k_s[M]$ является открытой подгрупой в Γ. Из п. АГ. 14.2 вытекает теперь, что $A_k = k_s[M]^\Gamma$ является k-структурой на алгебре A. Ясно, что эта k-структура удовлетворяет нашим условиям.

8.13. Примеры. (1) Предположим, что $M = \mathbf{Z}[\Gamma/U]$ [1]), где U — открытая подгруппа группы Γ. Тогда для любого Γ-модуля N имеем

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma\text{-мод}}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}\text{-мод}}(M, N)^\Gamma = N^U.$$

Пусть k' — произвольная k-алгебра, и пусть действие группы Γ на алгебре $k_s \otimes_k k'$ индуцируется ее действием на k_s. Ясно тогда, что $(k_s \otimes_k k')^U = L \otimes_{k'} k'$, где $L = k_s^U$, так что $(k_s \otimes_k k')^{*U} = (L \otimes_k k')^*$, где символ * означает переход к группе обратимых элементов соответствующей алгебры.

Положим теперь $A = K[M]$ [2]), и пусть $A_k = k_s[M]^\Gamma$ — k-структура на A. Тогда $G = \mathrm{spec}_K(A)$ — диагонализируемая k-группа с модулем характеров M. Функтор точек группы G описывается следующим образом:

$$G(k') = \mathrm{Hom}_{k\text{-алг}}(A_k, k') = \mathrm{Hom}_{k_s\text{-алг}}\left(A_{k_s}, (k_s \otimes_k k')\right)^\Gamma =$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}\text{-мод}}\left(M, (k_s \otimes_k k')^*\right)^\Gamma = (k_s \otimes_k k')^{*U} = (L \otimes_k k')^*,$$

где k' — переменная k-алгебра.

Мы видим, таким образом, что G — мультипликативная группа $\mathbf{GL}_1(L)$ k-алгебры L (см. п. 1.6, пример (9)). Отсюда следует, в частности, что группа G рациональна над k, т. е. что поле функций $k(G)$ является чисто трансцендентным расширением поля k (см. там же).

(2) Для k-тора T положим $N = \mathrm{X}(T)$. Так как некоторый открытый нормальный делитель U группы Γ действует тривиально на N, то N является $\mathbf{Z}$-свободным [3]) представлением конечного ранга конечной группы $\Gamma' = \Gamma/U$. Следовательно, имеется мономорфизм α_0: $N \to M$, где M — свободный $\mathbf{Z}[\Gamma']$-модуль. (Мы можем принять, например, $M = N''$ — здесь мы используем обозначение $H' = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}\text{-мод}}(H, \mathbf{Z}[\Gamma'])$, где H есть Γ'-модуль.)

---

[1]) $\mathbf{Z}[\Gamma/U]$ — групповая алгебра группы Γ/U над кольцом $\mathbf{Z}$. — *Прим. перев.*

[2]) $K[M]$ — групповая алгебра группы M над K, так что аддитивная группа M получает мультипликативную запись. — *Прим. перев.*

[3]) То есть N — свободный $\mathbf{Z}$-модуль конечного типа. — *Прим. ред.*

Мономорфизм α_0 соответствует эпиморфизму $\alpha\colon S \to T$, где S — тор с модулем характеров M. Таким образом, имеет место вложение полей функций $\alpha_0\colon k(T) \to k(S)$. Из примера (1) следует, что поле $k(S)$ чисто трансцендентно над k. Это показывает, что *k-тор T унирационален над k, т. е. поле $k(T)$ содержится в чисто трансцендентном расширении поля k. В частности, если поле k бесконечно, то множество $T(k)$ плотно в T.*

8.14. Анизотропные торы. Обозначим через $\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}$ категорию конечномерных $\mathbf{Q}$-модулей, на которых группа Γ действует непрерывно, т. е. посредством конечных факторгрупп. Тогда (см., например, Кэртис и Райнер [1]) $\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}$ — полупростая категория, т. е. категория, в которой всякая короткая точная последовательность расщепляется. Рассмотрим точный функтор $\mathscr{B} \to \mathscr{B}_{\mathbf{Q}}$ (см. п. 8.12 относительно обозначений), который переводит M в $M_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} M$. Если M без кручения, то его можно рассматривать как решетку в $M_{\mathbf{Q}}$. Таким образом,

$$M^{\Gamma} = M \cap M_{\mathbf{Q}}^{\Gamma},$$

$$M^{\Gamma} = 0 \Leftrightarrow M_{\mathbf{Q}}^{\Gamma} = 0$$

и

$$M^{\Gamma} = M \Leftrightarrow M_{\mathbf{Q}}^{\Gamma} = M_{\mathbf{Q}}.$$

Будем называть k-тор T *анизотропным* над k, если $X(T)_k = \{1\}$, т. е. если $X(T)^{\Gamma} = \{1\}$. Это эквивалентно отсутствию нетривиальных неподвижных относительно группы Γ точек в $\mathbf{Q}$-модуле $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} X(T)$ ввиду сделанного выше замечания. Из полупростоты категории $\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}$ следует, что функтор „неподвижные точки“ точен на $\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}$. Таким образом, получаем

Следствие. *Пусть $e \to T' \to T \to T'' \to e$ — точная последовательность над k определенных над k торов. Тор T разложим (соответственно анизотропен) над k тогда и только тогда, когда торы T' и T'' разложимы (соответственно анизотропны) над k.*

8.15. Подторы T_a и T_d. Пусть T — тор, определенный над k. Подторы тора T соответствуют ввиду пп. 8.5, 8.12 фактормодулям без кручения Γ-модуля $X(T)$.

Таким, очевидно, является фактормодуль

$$X(T_a) = X(T)/X(T)_k = X(T)/X(T)^{\Gamma},$$

где (см. п. 8.2 (c))

$$(a) \qquad T_a = \bigcap_{\alpha \in X(T)_k} \ker(\alpha).$$

По построению $X(T_a)^{\Gamma} = \{1\}$, т. е. T_a — анизотропный тор и даже максимальный анизотропный подтор тора T.

Существует также максимальный разложимый подтор T_d тора T. Чтобы получить T_d, следовало бы, как и выше, рассмотреть наибольший фактормодуль Г-модуля $X(T)$, на котором группа Г действует тривиально, а затем профакторизовать его по периодическому подмодулю. Однако нам представляется более естественным работать с двойственным модулем $X_*(T)$ (см. п. 8.11, следствие 1). В этом случае T_d можно описать следующим образом:

$$X_*(T_d) = X_*(T)_k = X_*(T)^\Gamma.$$

(d) T_d является подгруппой, порожденной элементами

$$\{\mathrm{im}(\lambda) \mid \lambda \in X(T)_k\}.$$

Отсюда следует, что тор T_d разложим над k и что он содержит все k-разложимые подторы тора T.

Всякий подтор группы $T_a \cap T_d$ одновременно разложим и анизотропен (см. п. 8.14) и, следовательно, тривиален. Таким образом, подтор $(T_a \cap T_d)^0$ тривиален, так что $T_a \cap T_d$ — конечная группа.

Пусть r — ранг группы $X(T)^\Gamma$, а r_* — ранг группы $X_*(T)^\Gamma$. Тогда $\dim T_a = n - r$ (где $n = \dim T$) и $\dim T_d = r_*$. Эти ранги равны размерностям $\mathbf{Q}$-модулей $X(T)^\Gamma \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ и $X_*(T)^\Gamma \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ соответственно. Кроме того, $X(T)_{\mathbf{Q}}$ и $X_*(T)_{\mathbf{Q}}$ образуют пару двойственных $\mathbf{Q}$-Г-модулей. Отсюда следует, что $X(T)^\Gamma_{\mathbf{Q}}$ и $X_*(T)^\Gamma_{\mathbf{Q}}$ образуют пару двойственных $\mathbf{Q}$-модулей (по той причине, что они являются полупростыми Г-модулями). Следовательно, $r = r_*$, так что $\dim T_a + \dim T_d = \dim T$. Отсюда следует, с учетом результата § 7, что морфизм-произведение $T_a \times T_d \to T$ сюръективен.

Суммируя все сказанное, получаем

Предложение. *Пусть T—тор, определенный над k, и пусть T_a и T_d — подторы, определенные приведенными выше условиями* (a) *и* (d).

(1) (a) *T_a — наибольший анизотропный подтор тора T, определенный над k;* (b) *T_d — наибольший разложимый подтор тора T, определенный над k.*

(2) *$T_a \cap T_d$ — конечное множество и $T = T_a \cdot T_d$.*

(3) *Если α: $T \to T'$ — некоторый k-морфизм k-торов, то $\alpha T_a \subset T'_a$ и $\alpha T_d \subset T'_d$. Другими словами, $T \to T_a$ и $T \to T_d$ — функторные отображения.*

Последнее утверждение следует непосредственно из определений, а все остальные уже доказаны выше.

8.16. Примеры для случая $k = \mathbf{R}$. Порядок группы $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ равен двум.

(1) Если $\dim T = 1$, то представляются две возможности: (a) Тор T *разложим*. Тогда $T(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^*$ и $X(T) = \mathbf{Z}$ с тривиальным действием

группы Γ. (b) Тор T *анизотропен.* Тогда $X(T)=\mathbf{Z}$ и образующая группы Γ преобразует χ в $-\chi$. Группа T оказывается специальной ортогональной группой $\mathbf{SO}(2)$ над $\mathbf{R}$ от двух переменных, и $T(\mathbf{R})$ — *компактная* группа вращений плоскости.

(2) В общем случае тор T анизотропен тогда и только тогда, когда группа $T(\mathbf{R})$ компактна (в евклидовой топологии). Этот факт легко извлечь из примера (1), если учесть п. 8.15 и использовать то обстоятельство, что существует только два неприводимых $\mathbf{Q}$-Γ-модуля.

8.17. Веса и корни диагонализируемых групп. Пусть T — диагонализируемая группа. Мы будем записывать группу характеров $X(T)$ и группу $X_*(T)$ однопараметрических подгрупп аддитивно и использовать экспоненциальные обозначения, а именно

$$t^{\alpha}=\alpha(t) \qquad (t\in T,\ \alpha\in X(T)),$$
$$x^{\lambda}=\lambda(x) \qquad (x\in \mathbf{GL}_1,\ \lambda\in X_*(T)),$$
$$(x^{\lambda})^{\alpha}=x^{\langle\alpha,\lambda\rangle} \qquad (\text{см. п. } 8.5).$$

Пусть $T\to GL(V)$ — рациональное представление группы T. При $\alpha\in X(T)$ положим

$$V_{\alpha}=\{v\in V\mid t\cdot v=\alpha(t)\,v \quad \text{для всех} \quad t\in T\}.$$

Так как группа T диагонализируема, то V — прямая сумма подпространств V_{α}. Те характеры α, для которых $V_{\alpha}\neq 0$, называются *весами* группы T в пространстве V.

Предположим, что T действует на группе G. Тогда группа T действует естественным образом на алгебре Ли $\mathfrak{g}=L(G)$ и множество $\Phi(T, G)$ *ненулевых весов* группы T на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется множеством *корней* группы G относительно группы T. Таким образом[1]),

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{T}\oplus \coprod_{\alpha\in\Phi(T,\ G)}\mathfrak{g}_{\alpha}.$$

В том случае, когда T и G являются подгруппами некоторой большей группы, причем T нормализует группу G, в записи $\Phi(T, G)$ всегда имеется в виду, что T действует на G с помощью сопряжения. Разумеется, дело сводится к случаю, когда бо́льшая группа совпадает с G либо является полупрямым произведением $T\cdot G$.

Предположим, что группа H действует на группе G и что H — замкнутая подгруппа группы G, инвариантная относительно T. Тогда подалгебра Ли $\mathfrak{h}=L(H)$ алгебры $\mathfrak{g}$ также инвариантна относительно T. Для каждого $\alpha\in\Phi(T, G)$ можно записать $\mathfrak{g}_{\alpha}=\mathfrak{h}_{\alpha}\oplus\mathfrak{g}'_{\alpha}$ для подходящего дополнения $\mathfrak{g}'_{\alpha}$ подпространства $\mathfrak{h}_{\alpha}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_{\alpha}$ в пространстве $\mathfrak{g}_{\alpha}$.

[1]) Напомним, что через $\mathfrak{g}^{T}$ обозначается множество неподвижных относительно T точек алгебры $\mathfrak{g}$ — *Прим. ред.*

Положим

$$\Phi(T, G/H) = \{\alpha \in \Phi(T, G) \mid \mathfrak{g}'_\alpha = 0\} = \{\alpha \in \Phi(T, G) \mid \mathfrak{h}_\alpha \neq \mathfrak{g}_\alpha\}.$$

Тогда

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^T + \mathfrak{h}) \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi(T, G/H)} \mathfrak{g}'_\alpha.$$

Если $H \subset G^T$, то $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^T$ и, следовательно, $\Phi(T, G/H) = \Phi(T, G)$. Иногда множество $\Phi(T, G/H)$ мы будем называть множеством *корней группы G вне группы H* (относительно T), *или корнями группы G, дополнительными по отношению к H*.

8.18. Предложение. *Сохраняем обозначения п.* 8.17. *Предположим, что группа T связна и поле k бесконечно. Тогда существует элемент $t \in T(k)$, такой, что*

$$Z_H(t) = Z_H(T), \qquad Z_{\mathfrak{h}}(t) = Z_{\mathfrak{h}}(T).$$

Доказательство. Можно считать, что $G = GL(V)$ для некоторого векторного пространства V, определенного над k. Пусть $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, где V_i — собственные подпространства, отвечающие различным весам $\chi_1, \ldots, \chi_n$ группы T на пространстве V. Так как группа T унирациональна над k (см. п. 8.13, пример (2)) и поле k бесконечно, то множество $T(k)$ плотно в T и можно выбрать элемент $t \in T(k)$ так, что $\chi_i(t) \neq \chi_j(t)$ при $i \neq j$. Несложное вычисление показывает, что

$$Z_H(t) = Z_H(T) = M \cap H,$$
$$Z_{\mathfrak{h}}(t) = Z_{\mathfrak{h}}(T) = L(M) \cap \mathfrak{h},$$

где $M = GL(V_1) \times \ldots \times GL(V_n)$.

Библиографические замечания. Торы были введены в статье Бореля [1], группы характеров и однопараметрические подгруппы — в книге Семинар Шевалле [1]. Разложимость k-тора T над конечным сепарабельным расширением поля k была доказана Розенлихтом [1] с использованием того факта, что тор T унирационален над k. Другое доказательство, принадлежащее Тейту, можно найти в статье Бореля и Титса [1]. Эквивалентность категорий (см. п. 8.12), по крайней мере для торов, обнаружена Оно [1]. Результаты этого параграфа в основном содержатся в упомянутых источниках.

§ 9. КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ ПОЛУПРОСТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В этом параграфе мы покажем, что классы сопряженных элементов замкнуты (п. 9.2) и что их глобальные и инфинитезимальные централизаторы соответствуют друг другу (п. 9.1). Затем мы изучим действие полупростого элемента s на связной унипотентной группе U и покажем (п. 9.3), что $Z_U(s)$ — связная подгруппа.

9.1. Морфизмы классов сопряженных элементов. Пусть H — (фиксированная). замкнутая подгруппа группы G, определенная над k; обозначим через $C_H(s)$ орбиту элемента $s \in G$, когда H действует на G по формуле $g \to hgh^{-1}$, $g \in G$, $h \in H$. Орбита $C_H(s)$ называется *H-классом* (*сопряженности*) элемента s. Тогда

$$\alpha: \qquad H \to C_H(s), \quad \alpha(h) = hsh^{-1},$$

— орбитное отображение, и стабилизатор точки s в группе H совпадает с *централизатором* $Z_H(s)$ элемента s в группе H. Используем предложение 6.7, чтобы выяснить, когда α — факторный морфизм. Определим сначала $(d\alpha)_e$. Так как $\alpha(h)s^{-1} = (h, s)$ — коммутатор, то формула (1) п. 3.9 показывает, что дифференциал $d(\alpha(h)s^{-1})$ равен $(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(s)) | \mathfrak{h}$ и отображает $\mathfrak{h}$ в $T(C_H(s)s^{-1})_e$. Таким образом, его ядро равно $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(s)$, где $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(s) = \ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(s))$. Так как сдвиг является изоморфизмом, то ядро дифференциала $(d\alpha_e)$: $\mathfrak{h} \to T(C_H(s))_s$ совпадает с подалгеброй $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(s)$. Обозначая эту последнюю через $\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(s)$, получаем

$$\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(s) = \{X \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{Ad}(s)X = X\},$$

хотя мы и не предполагали, что алгебра $\mathfrak{h}$ инвариантна относительно $\mathrm{Ad}(s)$. В любом случае, конечно,

$$L(Z_H(s)) \subset \mathfrak{z}_\mathfrak{h}(s),$$

так что, применяя предложение 6.7 приходим к утверждению

(*) *Предположим, что $s \in G(k)$. Тогда $C_H(s)$ — гладкое многообразие, определенное над k, и α является k-морфизмом, индуцирующим биективный k-морфизм*

$$\alpha': H/Z_H(s) \to C_H(s).$$

Следующие условия эквивалентны: (a) α' — *изоморфизм;* (b) *морфизм α сепарабелен;* (c) $L(Z_H(s)) = \mathfrak{z}_\mathfrak{h}(s)$. *Если эти условия имеют место, то подгруппа $Z_H(s)$ определена над k.*

Рассмотрим теперь инфинитезимальный аналог этой ситуации. Именно, предположим, что группа H действует на $\mathfrak{g}$ посредством оператора Ad_G, и обозначим H-орбиту элемента $X \in \mathfrak{g}$ через $\mathfrak{c}_H(X)$. Пусть

$$\beta: H \to \mathfrak{c}_H(X), \qquad \beta(h) = \mathrm{Ad}(h)X$$

— орбитное отображение. Стабилизатор элемента X обозначается через $Z_H(X)$; мы называем группу $Z_H(X)$ *централизатором* элемента X в H. Используя формулу (2) п. 3.9, убеждаемся, что дифференциал отображения β в точке e равен $-\mathrm{ad}(X)$.

Таким образом,

$$\ker (d\beta)_e = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(X) = \{Y \in \mathfrak{h} \mid [X, Y] = 0\}$$

и, очевидно, содержит $L(Z_H(X))$. Используя теперь предложение 6.7, получаем:

(**) *Предположим, что* $X \in \mathfrak{g}(k)$. *Тогда* $\mathfrak{c}_H(X)$ — *гладкое многообразие, определенное над* k, *и* β *есть* k-*морфизм, индуцирующий биективный* k-*морфизм*

$$\beta'\colon H/Z_H(X) \to \mathfrak{c}_H(X).$$

Кроме того, следующие условия эквивалентны: (a) β' — *изоморфизм*; (b) *морфизм* β *сепарабелен*; (c) $L(Z_H(X)) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(X)$. *Если эти условия выполняются, то группа* $Z_H(X)$ *определена над* k.

Отметим, что если $\mathrm{char}(k) = 0$, то условия (b) утверждений (*) и (**) выполняются автоматически. Кроме того, они имеют место в том случае, когда элементы s и X полупросты и нормализуют H.

Предложение. (1*) *Условия* (a), (b) *и* (c) *в утверждении* (*) *выполняются, если элемент* s *полупрост и нормализует группу* H.

(1**) *Условия* (a), (b) *и* (c) *в утверждении* (**) *выполняются, если элемент* X *полупрост и нормализует группу* H.

Выражение „X *нормализует группу* H" означает, что $\mathrm{Ad}(h)X - X \in \mathfrak{h}$ для всех $h \in H$. Отсюда следует, что X нормализует алгебру Ли $\mathfrak{h}$, т. е. $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ (см. формулу (2) п. 3.9).

Доказательство. Выбрав k-рациональное точное представление группы G, мы можем предполагать, что $G = GL(V)$ для некоторого векторного пространства V с k-структурой.

Случай 1. $H = G$.

(1*) Представим пространство V в виде $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_t$, где V_i — собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям эндоморфизма s (s полупрост). Непосредственное вычисление показывает, что $Z_G(s) = GL(V_1) \times \ldots \times GL(V_t)$. Если $Y \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$, то $\mathrm{Ad}(s)Y = sYs^{-1}$; аналогично предыдущему имеем $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(s) = \mathfrak{gl}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{gl}(V_t)$, что совпадает с $L(Z_G(s))$; отсюда следует условие (c).

(1**) Доказывается совершенно аналогично — с использованием разложения пространства V относительно полупростого эндоморфизма $X \in \mathfrak{gl}(V)$.

Общий случай. Пусть $c\colon G \to M$, где $M = C_G(s) \cdot s^{-1}$ и $c(g) = gsg^{-1}s^{-1}$, и пусть $c'\colon H \to M'$, где $c' = c/H$ и $M' = C_H(s)s^{-1}$. Тогда c' — композиция отображения α и правого сдвига на s^{-1}, так что остается доказать, что $(dc')_e\colon \mathfrak{h} \to T(M')_e$ — сюръективное отображение (условие (b) утверждения (*)). Рассматривая случай 1, мы показали, что отображение $(dc)_e\colon \mathfrak{g} \to T(M)_e$ сюръективно. Так как $(dc)_e = \mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(s)$, то $T(M)_e = \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(s) \oplus \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}$ — сумма собственных подпространств преобразования $\mathrm{Ad}(s)$, соответствующих отличным от 1 собственным значениям. Так как s нормализует H, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(s) \oplus \mathfrak{m}'$, где $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$. Так как $(dc')_e = (dc)_e \mid \mathfrak{h}$, то $(dc')_e(\mathfrak{h}) = \mathfrak{m}'$. Следовательно, для завершения доказательства сюръективности отображения $(dc')_e$ достаточно показать, что $T(M')_e \subset \mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$. Очевидно, что $T(M')_e \subset \mathfrak{m} = T(M)_e$. С другой стороны, так как s нормализует группу H, то $M' = C_H(s)\, s^{-1} \subset H$, так что и $T(M')_e \subset \mathfrak{h}$.

Доказательство утверждения (1^{**}) аналогично доказательству утверждения (1^*). Рассмотрим морфизм $a\colon G \to \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_G(X) - X$ и $a(g) = \mathrm{Ad}(g)X - X$, и морфизм $a'\colon H \to \mathfrak{c}' = \mathfrak{c}_H(X) - X$, где $a' = a \mid H$. Мы намерены показать, что $(da')_e$ — сюръективное отображение, исходя из того факта (случай 1), что отображение $(da)_e = -\mathrm{ad}(X)\colon \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{c})_0$ сюръективно; отсюда следует, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m} = T(\mathfrak{c})_0$ — сумма собственных подпространств оператора $\mathrm{ad}(X)$, отвечающих отличным от 0 собственным значениям. Так как элемент X нормализует алгебру Ли $\mathfrak{h}$, то аналогично предыдущему можно записать $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(X) \oplus \mathfrak{m}'$, где $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$. Так как $(da')_e = (da)_e \mid \mathfrak{h}$, то $(da')_e(\mathfrak{h}) = \mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{m}'$. Следовательно, сюръективность отображения $(da')_e$ будет доказана, если мы покажем, что $T(\mathfrak{c}')_0 \subset \mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$. Очевидно, $T(\mathfrak{c}')_0 \subset \mathfrak{m} = T(\mathfrak{c})_0$. С другой стороны, так как элемент X нормализует группу H, то $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}_H(X) - X \subset \mathfrak{h}$, так что $T(\mathfrak{c}')_0 \subset \mathfrak{h}$.

Замечание. Пусть $p\colon M' \times Z_H(s) \to H$ — морфизм-произведение с дифференциалом $(dp)_{(e,e)}\colon \mathfrak{m}' \oplus L(Z_H(s)) \to \mathfrak{h}$. Приведенное доказательство показывает, что $L(Z_H(s)) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(s)$, откуда следует, что $(dp)_{(e,e)}$ — изоморфизм. Кроме того, дифференциал отображения $c \mid M'\colon M' \to M'$ в точке e совпадает с отображением $\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(s) \mid \mathfrak{m}'\colon \mathfrak{m}' \to \mathfrak{m}'$, которое, очевидно, также является изоморфизмом.

9.2. Теорема. *Сохраняем обозначения п. 9.1.*

(1^*) *Если элемент $s \in G$ полупрост и нормализует H, то $C_H(s)$ — замкнутая орбита.*

(1^{**}) *Если элемент $X \in \mathfrak{g}$ полупрост и нормализует H, то $\mathfrak{c}_H(X)$ — замкнутая орбита.*

Напомним, что X нормализует H, если $\mathrm{Ad}(h)X - X \in \mathfrak{h}$ для всех $h \in H$.

Доказательство. Выбрав какое-либо точное представление группы G, мы можем считать, не теряя общности, что $G = GL(V)$. Пусть $A \in \mathrm{End}(V)$; через $C(A, T)$ мы будем обозначать характеристический полином эндоморфизма A и через $M(A, T)$ — его минимальный полином. Положим

$$W = \{x \in N_G(H) \mid M(s, x) = 0 \quad \text{и} \quad C(\mathrm{Ad}(x) \mid \mathfrak{h}, T) = C(\mathrm{Ad}(s) \mid \mathfrak{h}, T)\}.$$

Ясно, что $s \in W$ и множество W инвариантно относительно H, когда H действует на G по формуле $g \to hgh^{-1}$. При $x \in W$ полином $M(x, T)$ делит полином $M(s, T)$; так как элемент s полупрост, то полином $M(s, T)$ разлагается в произведение различных линейных множителей; следовательно, элемент x также полупрост. Из п. 9.1 следует, что

$$\dim C_H(x) = \dim H - \dim Z_H(x) = \\ = \dim H - \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(x) = \dim H - m_1(x),$$

где $m_1(x)$ — кратность 1 как собственного значения эндоморфизма $\mathrm{Ad}(x) \mid \mathfrak{h}$. Но второе условие в определении W приводит к равенству $m_1(x) = m_1(s)$. Поэтому все орбиты $C_H(x)$ имеют одну и ту же размерность. Из леммы о замкнутых орбитах (п. 1.8) следует, что эти орбиты замкнуты в W. В свою очередь множество W замкнуто в $N_G(H)$, а $N_G(H)$ — замкнутая подгруппа группы G (см. п. 1.7). Это доказывает, что орбита $C_H(s)$ замкнута.

Аналогично доказывается, что $C_H(X)$ — замкнутая орбита. Следует рассмотреть множество

$$W = \{Y \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(H) \mid M(X, Y) = 0 \quad \text{и} \quad C(\mathrm{ad}(Y) \mid \mathfrak{h}, T) = C(\mathrm{ad}(X) \mid \mathfrak{h}, T)\}.$$

Здесь $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(H)$ — подмножество тех $Y \in \mathfrak{g}$, которые „нормализуют H" в смысле п. 9.1. Множество W замкнуто в $\mathfrak{g}$, содержит X и инвариантно относительно группы H, действующей при помощи оператора Ad. Используя результаты п. 9.1, мы можем рассуждать так же, как и выше; в результате оказывается, что все H-орбиты в W имеют одинаковую размерность и, следовательно, замкнуты.

Следствие. *Пусть L — (не обязательно замкнутая) коммутативная подгруппа группы G, состоящая из полупростых элементов и нормализующая группу H. Тогда*

$$L(Z_H(L)) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(L).$$

Если группа L либо содержится в $G(k)$, либо замкнута и определена над k, то группа $Z_H(L)$ определена над k.

Доказательство. Можно считать, что $G = H$. Ясно, что правая часть содержит левую; в том случае, когда $G^0 \subset Z_G(L)$, левая часть совпадает с $\mathfrak{g}$ и равенство становится очевидным. Мы будем вести доказательство индукцией по $\dim G$. Выберем $s \in L$ так, чтобы группа $G' = Z_G(s)$ не содержала G^0 и чтобы, следовательно, $\dim G' < \dim G$. Из утверждения (1) предложения п. 9.1 вытекает, что $\mathfrak{g}' = L(Z_G(s)) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(s)$, откуда получаем равенство $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(L) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}'}(L)$. Кроме того, ясно, что $Z_G(L) = Z_{G'}(L)$ и $L \subset G'$, ибо группа L коммутативна. По предположению индукции $L(Z_{G'}(L)) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}'}(L)$, что доказывает первое утверждение. Если $L \subset G(k)$, то, используя подобное индуктивное рассуждение и результаты п. 9.1, получаем, что группа $Z_H(L)$ определена над k. Пусть теперь группа L замкнута и определена над k. Тогда, как и выше, получаем, что группа $Z_H(L(k_s))$ определена над k_s. Но множество $L(k_s)$ плотно в L в топологии Зарисского (п. АГ.13.3), следовательно, $Z_H(L(k_s)) = Z_H(L)$. С другой стороны, группа $Z_H(L)$, очевидно, k-замкнута. Значит, она определена над k.

9.3. Предложение. *Пусть группа G определена над k и U — связная унипотентная определенная над k подгруппа группы G. Пусть $s \in G(k)$ — полупростой элемент, нормализующий группу U. Положим $M = C_U(s)s^{-1}$ и $c_s(g) = gsg^{-1}s^{-1}$ при $g \in G$, так что $M = c_s(U)$.*

(1) *$Z_U(s)$ и M — замкнутые подмногообразия группы U, определенные над k.*

(2) *Морфизм-произведение α: $M \times Z_U(s) \to U$ является изоморфизмом многообразий; следовательно, группа $Z_U(s)$ связна.*

(3) *Отображение c_s индуцирует изоморфизм многообразия M на себя.*

Доказательство. Из утверждения (1) предложения п. 9.1 следует, что $Z_U(s)$ и M — гладкие многообразия, определенные над k; ясно, что группа $Z_U(s)$ замкнута. Тот факт, что многообразие M замкнуто, вытекает из утверждения (1*) теоремы п. 9.2. Это доказывает утверждение (1).

Далее, из замечания после доказательства предложения п. 9.1 вытекает, что α и c_s: $M \to M$ — сепарабельные морфизмы при условии, что эти морфизмы доминантные. Следовательно, для завершения доказательства достаточно показать, что морфизмы α и c_s: $M \to M$ биективны. Разобьем рассуждение на несколько этапов. Будем писать Z вместо $Z_U(s)$.

(a) $c_s(u) = c_s(v) \Leftrightarrow uZ = vZ$ *при* $u, v \in U$.

В этом легко убедиться непосредственно, если учесть, что Z — стабилизатор элемента s при действии группы G по формуле $s \to gsg^{-1}$.

(b) *При $u, v \in U$ имеем $c_s(uv) = uc_s(v)u^{-1}c_s(u)$. Следовательно, при $u \in Z(U)$ получаем $c_s(uv) = c_s(v)c_s(u) = c_s(vu)$ и $c_s(u^{-1}) = c_s(u)^{-1}$.*

В самом деле, $c_s(uv) = uvs(uv)^{-1}s^{-1} = u(vsv^{-1}s^{-1})u^{-1}(usu^{-1}s^{-1})$. Если $u \in Z(U)$, то $uc_s(v)u^{-1} = c_s(v)$ и $uv = vu$, так что второе утверждение следует из первого. Третье утверждение следует, очевидно, из второго.

(c) $M \cap Z = \{e\}$.

Предположим, что $z = c_s(u) \in Z$, где $u \in U$. Тогда $zs = usu^{-1}$ — разложение Жордана полупростого элемента usu^{-1}, так что унипотентная часть z равна e.

(d) *Если группа U абелева, то морфизм α: $M \times Z \to U$ биективен.*

Из (b) вытекает, что морфизм c_s: $U \to U$ является в этом случае гомоморфизмом. Согласно (a), ядро гомоморфизма c_s совпадает с Z, а его образ — с группой M. Поэтому $\dim U = \dim M + \dim Z$. Кроме того, утверждение (c) влечет за собой инъективность морфизма α. (Заметим, что ввиду (b) α — групповой морфизм.) Так как группа U связна, то выписанная выше формула для размерностей показывает, что морфизм α сюръективен.

(e) *Морфизм α биективен.*

Так как группа U нильпотентна, то она содержит связную центральную подгруппу $N \neq \{e\}$, инвариантную относительно s (например, последний нетривиальный член нижнего центрального ряда группы U). Если $N = U$, то можно применить (d). В противном случае, используя индукцию по размерности, мы можем считать, что аналог нашего утверждения справедлив для пар (s, N) и (s', U'), где $U' = U/N$ и s' — образ элемента s в фактор-группе по N нормализатора группы N. Обозначим через π соответствующий факторный морфизм.

Положим $Z' = Z_{U'}(s')$ и $M' = c_{s'}(U') = \pi(M)$. Согласно предположению индукции, морфизм-произведение α': $M' \times Z' \to U'$ биективен. Аналогично, морфизм $c_s(N) \times Z_N(s) \to N$ также биективен.

Покажем, что морфизм α инъективен. Предположим, что $xa = yb$ при $a, b \in Z$ и $x, y \in M$. Заменяя a на ab^{-1}, мы можем считать, что $b = e$. Из инъективности морфизма α' вытекает, что $\pi(a) = e$, значит, $a \in N$. Если $x = c_s(u)$ и $y = c_s(v)$, то $usu^{-1}s^{-1}a = vsv^{-1}s^{-1}$ и $a (\in N \cap Z)$ централизует U и s. Поэтому $(usu^{-1})a = vsv^{-1}$, и это является разложением Жордана полупростого элемента vsv^{-1}, так что унипотентная часть a этого разложения совпадает с e. Отсюда следует, что *морфизм α инъективен.*

Заметим теперь, что включение $c_s(N) \subset M \cap N$ является равенством. По предположению индукции любой элемент $n \in N$ можно представить в виде ma, $m \in c_s(N)$ и $a \in Z_N(s)$. Если, кроме того, $n \in M$, то инъективность морфизма α влечет за собой равенство $a = e$.

Покажем теперь, что морфизм π: $Z \to Z'$ сюръективен. Пусть $x \in U$ и $\pi(x) = Z'$. Тогда $c_{s'}(\pi(x)) = e$, так что

$$c_s(x) \in \ker(\pi) \cap M = N \cap M = c_s(N),$$

согласно замечанию в предыдущем абзаце. Пусть, скажем, $c_s(x) = c_s(n)$, $n \in N$. Так как $N \subset Z(U)$, то из (b) следует, что $c_s(n^{-1}x) =$

$= c_s(x)\,c_s(n^{-1}) = c_s(x)\,c_s(n)^{-1} = e$. Таким образом, $n^{-1}x \in Z$ и $\pi(n^{-1}x) = \pi(x)$, так что $\pi(x)$ оказывается образом некоторого элемента группы Z, что и требовалось доказать.

Мы можем теперь показать, что морфизм α сюръективен:

$$
\begin{aligned}
U &= MZN \qquad (\text{ибо } U' = M'Z',\ \pi M = M' \text{ и } \pi Z = Z') = \\
&= MNZ \qquad (\text{ибо } N \subset Z(U)) = \\
&= Mc_s(N)\,Z_N(s)\,Z \qquad (\text{по индукции}) = \\
&= MZ \qquad (\text{ибо } Z_N(s) \subset Z \text{ и } Mc_s(Z(U)) = M \text{ согласно (b)}).
\end{aligned}
$$

(f) *Отображение* c_s: $M \to M$ *биективно.*

Используя утверждение (a) и сюръективность морфизма α, получаем $M = c_s(U) = c_s(MZ) = c_s(M)$. Если $u, v \in M$ и $c_s(u) = c_s(v)$, то, согласно утверждению (a), для подходящего элемента $z \in Z$ имеем $u = vz$. Таким образом, $\alpha(u, e) = \alpha(v, z)$, и так как морфизм α инъективен, то $z = e$, что и требовалось.

9.4. Групповые действия диагонализируемых групп. Зафиксируем диагонализируемую группу T и ее рациональное действие на группе G. Пусть H — замкнутая инвариантная относительно T подгруппа группы G, содержащая группу $G^T = Z_G(T)$. По отношению к действию группы T на алгебрах Ли $\mathfrak{g} = L(G)$ и $\mathfrak{h} = L(H)$ имеют место разложения (по поводу обозначений см. п. 8.17):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^T \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi(T,\ G)} \mathfrak{g}_\alpha,$$

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^T + \mathfrak{h}) \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi(T,\ G/H)} \mathfrak{a}_\alpha,$$

где $\mathfrak{a}_\alpha$ — дополнение к подпространству $\mathfrak{h}_\alpha$ в пространстве $\mathfrak{g}_\alpha$. Наконец, положим $T_\alpha = \ker(\alpha)$ $(\alpha \in \mathrm{X}(T))$.

Предложение. (1) $L(G^T) = \mathfrak{g}^T$ *и, следовательно,* $\mathfrak{g}^T \subset \mathfrak{h}$. *Если* G *— связная унипотентная группа, то группа* G^T *связна.*

(2) *Для подгруппы* S *группы* T *следующие условия эквивалентны*: (a) $(G^S)^0 \subset H$; (b) $\mathfrak{g}^S \subset \mathfrak{h}$; (c) *группа* S *не содержится ни в какой группе* T_α *при* $\alpha \in \Phi(T,\ G/H)$.

(3) *Если группа* G^S *связна, то* $G^S = G^T$ *тогда и только тогда, когда группа* S *не содержится ни в какой группе* T_α $(\alpha \in \Phi(T,\ G))$.

(4) *Если группа* G *связна и если* $G \neq G^T$, *то группа* G *порождается подгруппами* $Z_G(T^\alpha)$ $(\alpha \in \Phi(T,\ G))$.

Доказательство. (1) Первое утверждение есть частный случай следствия в п. 9.2 (которое следует применить к полупрямому произведению групп T и G).

Второе утверждение в (1) доказывается индукцией по $\dim G$. Если $G = G^T$, то по предположению группа G^T связна. Если

$G \neq G^T$, то выберем элемент s таким образом, чтобы группа G не содержалась в $Z_G(s)$. Согласно утверждению (2) предложения 9.3, группа G^S связна. Далее рассуждаем, как при доказательстве следствия в п. 9.2.

(2) (a)$\Rightarrow$(b). Если $(G^S)^0 \subset H$, то $L(G^S) \subset \mathfrak{h}$ и, согласно (1), получаем $L(G^S) = \mathfrak{g}^S$.

(b)$\Rightarrow$(a). Так как $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, то, очевидно, $\mathfrak{h}^S \subset \mathfrak{g}^S$ и включение $\mathfrak{g}^S \subset \mathfrak{h}$ влечет за собой равенство $\mathfrak{h}^S = \mathfrak{g}^S$. С учетом (1) ввиду совпадения размерностей получаем $(H^S)^0 = (G^S)^0 \subset H$.

(b)$\Leftrightarrow$(c). Запишем

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{a}_\alpha \qquad (\Phi = \Phi(T,\ G/H)).$$

Тогда

$$\mathfrak{g}^S = \mathfrak{h}^S \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{a}_\alpha^S = \mathfrak{h}^S \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi,\ \alpha(S) = \{1\}} \mathfrak{a}_\alpha.$$

Таким образом, $\mathfrak{g}^S \subset \mathfrak{h} \Leftrightarrow \alpha(S) \neq \{1\}$ для всех $\alpha \in \Phi$, что и требовалось.

(3) Так как $G^T \subset G^S$, то, применяя (1) и утверждение ((a)$\Leftrightarrow$(c)) из (2) в ситуации $H = G^T$, получаем (3).

(4) Обозначим через G' подгруппу, порожденную всеми группами G^{T_α} $(\alpha \in \Phi(T, G))$. Из условия $G^T \neq G$ следует, что множество $\Phi(T, G)$ непусто. Так как, согласно (1), алгебра $L(G^{T_\alpha})$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{g}^{T_\alpha}$ и, следовательно, содержит алгебру $\mathfrak{g}^T + \mathfrak{g}_\alpha$, то алгебра $L(G')$ содержит алгебру $\mathfrak{g}^T + \sum_{\alpha \in \Phi(T,\ G)} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}$. Поэтому $G' \supset G^0 = G$. Это завершает доказательство.

9.5. Следствие. *Сохраняем обозначения п.* 9.4.

(1) *Если* $\lambda \in X_*(T)$ *и если* $S = \operatorname{im}(\lambda)$, *то* $(G^S)^0 \subset H$ *тогда и только тогда, когда* $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ *для всех* $\alpha \in \Phi(T, G/H)$. *В частности,* $(G^S)^0 = (G^T)^0$ *тогда и только тогда, когда* $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ *для всех* $\alpha \in \Phi(T, G)$.

(2) *Предположим, что* T — *тор и что* $G \neq G^T$. *Тогда группа* G^0 *порождается подгруппами* $\left(G^{T_\alpha^0}\right)^0$. *Кроме того, если поле* k *бесконечно, то существует элемент* $t \in T(k)$, *такой, что* $t^\alpha \neq 1$ *для всех* $\alpha \in \Phi(T, G)$, *и для всякого такого* t *имеет место равенство* $Z_G(t)^0 = (G^T)^0$.

Утверждение (1) вытекает непосредственно из утверждения (2) предложения 9.4. Так как централизатор тора T_α^0 содержит централизатор группы T_α, то первая часть утверждения (2) вытекает из утверждения (4) предложения 9.4. Существование t следует из того факта, что множество $T(k)$ плотно в T (см. пример (2) п. 8.13). Последнее равенство утверждения (2) вытекает из утверждения (2) предложения 9.4, где следует взять в качестве H группу G^T и в качестве S — группу, порожденную элементом t.

9.6. Предложение. *Пусть π: $G \to G'$ — сюръективный и T-эквивариантный морфизм k-групп, на которых действует диагонализируемая группа T. Тогда индуцированный гомоморфизм $(G^T)^0 \to (G'^T)^0$ сюръективен.*

Доказательство. Так как группа $N = \ker(\pi)$ является T-инвариантной, то можно рассматривать действие группы T на G/N, и морфизм π пропускается через T-эквивариантный и биективный морфизм $G/N \to G'$. Следовательно, мы можем считать, что $G' = G/N$. В этом случае отображение $(d\pi)_e$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ сюръективно. Так как группа T диагонализируема, то отображение $\mathfrak{g}^T \to \mathfrak{g}'^T$ также сюръективно. Однако, согласно утверждению (1) предложения 9.4, последнее является дифференциалом морфизма $G^T \to G'^T$, откуда и следует предложение.

Замечание. Доказательство показывает даже, что если π — факторный морфизм, то отображение $(G^T)^0 \to (G'^T)^0$ — также факторный морфизм.

Библиографические замечания. Предложение п. 9.1 и теорема п. 9.2 доказаны Борелем и Титсом [1] (см. § 10) для групп и Борелем и Шпрингером [1], [2] для алгебр Ли. Предложение 9.3 доказано в статье Бореля [1] (лемма 9.6), когда группа коммутативна, и в общем виде — в статье Бореля и Титса [1] (см. § 11). В статье Бореля [1] обсуждается случай, когда s — унипотентный элемент, а группа U является тором, что, однако, нам не понадобится. Следствие 9.5 обобщает результат о действии торов на унипотентных группах, имеющийся в книге Семинар Шевалле [1], сообщение 9, п. 1.

§ 10. СВЯЗНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

Исследование произвольных аффинных групп основывается на изучении их связных разрешимых подгрупп. Последние обладают рядом замечательных свойств, которые значительно облегчают работу с ними. Основные результаты о связных разрешимых группах сформулированы в теореме о неподвижной точке (п. 10.4) и структурной теореме (п. 10.6).

10.1. Полные многообразия. Мы соберем здесь некоторые факты о полных многообразиях, которые потребуются нам в дальнейшем. Напомним, что (см. п. АГ.7.4) многообразие V называется полным, если для любого многообразия X проекция $V \times X \to X$

является замкнутым отображением. Приведенные здесь свойства взяты из п. АГ.7.4.

(1) *Замкнутое подмногообразие полного многообразия является полным многообразием.*

(2) *Морфизм связного полного многообразия в аффинное многообразие есть константа.*

(3) *Проективное многообразие полно.*

(4) *Пусть* $\alpha\colon V \to W$ — *биективный морфизм. Если* W — *нормальное полное многообразие, то* V — *также полное многообразие* (см. п. АГ.18.3).

Наконец, из утверждения (d) п. АГ.18.5 получаем

(5) *Пусть* $\alpha\colon V \to W$ — *морфизм неприводимой гладкой кривой* V *в полное многообразие* W. *Тогда* α *можно продолжить до морфизма* $\bar{\alpha}\colon \bar{V} \to W$ *полной гладкой кривой* $\bar{V}$, *содержащей кривую* V.

10.2. Композиционные ряды группы $\mathbf{T}_n$. Напомним определение некоторых подгрупп группы $\mathbf{GL}_n$:

$$\mathbf{T}_n = \{g = (g_{ij}) \mid g_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad j < i\} =$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{bmatrix} \in \mathbf{GL}_n \right\}.$$

$$\mathbf{U}_n = \{g \in T_n \mid g_{ii} = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{D}_n = \{g \in \mathbf{GL}_n \mid g_{ij} = 0 \ \text{при} \ i \neq j\} = \{\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n) \mid t_i \in K^*\}.$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{U}_n = (\mathbf{T}_n)_u = (\mathbf{T}_n, \mathbf{T}_n),$$
$$\mathbf{D}_n \cong (\mathbf{GL}_1)^n, \quad \mathbf{T}_n = \mathbf{D}_n \mathbf{U}_n.$$

Группа $\mathbf{T}_n$ является группой обратимых элементов алгебры A всех нижних треугольных матриц. Множество N матриц с нулевой диагональю образует идеал (точнее, радикал) алгебры A. Двусторонний идеал N^h порождается как подпространство теми матрицами e_{ij}, для которых $j \geqslant i + h$. Кроме того, образ матрицы $e_{i,\,i+h}$ в N^h/N^{h+1} порождает одномерный двусторонний идеал в алгебре A/N^{h+1}, ибо $Ne_{i,\,i+h} \subset N^{h+1}$ и $e_{i,\,i+h}$ является собственным вектором для множества диагональных матриц. Таким образом, векторное пространство A_{hl}, натянутое на векторы $\{e_{ij} \mid j > i + h$ или $j = i + h \leqslant l\}$, является двусторонним идеалом в A при $0 \leqslant h < n$ и $1 \leqslant l \leqslant n - h$. Если пары (h, l) упорядочить лексикографически, то мы получаем убывающий ряд двусторонних идеалов, начинающийся с $A = A_{0,0}$ и заканчивающийся $A_{n-1,1} = Ke_{nn}$, причем факторы соседних членов этого ряда имеют размерность 1. Полагая $\mathbf{T}_{hl} = \{g \in \mathbf{T}_n \mid g \equiv 1 \pmod{A_{h,l}}\}$, мы получаем убывающий ряд нормальных делителей группы $\mathbf{T}_n$. Заметим, что $N = A_{1,n-1}$ и, следовательно, $\mathbf{T}_{1,n-1} = \mathbf{U}_n$. Мы видим, таким образом, что первые n факторов изоморфны группе $\mathbf{GL}_1$, а остальные факторы изоморфны группе $\mathbf{G}_a$. Суммируем:

Группа $\mathbf{T}_n$ фильтруется рядом нормальных делителей, причем последовательные факторы ряда изоморфны группам $\mathbf{GL}_1$ или $\mathbf{G}_a$.

10.3. Грассманианы и многообразия флагов. Пусть V — векторное пространство размерности n. Мы хотим ввести на множестве $G_d(V)$ подпространств размерности d пространства V структуру проективного многообразия. Положим

$$f\colon\ G_d(V) \to \mathscr{P}(\Lambda^d V),$$

сопоставляя d-мерному подпространству W точку проективного пространства $\mathscr{P}(\Lambda^d V)$, соответствующую прямой $\Lambda^d W \subset \Lambda^d V$. Легко проверить (и хорошо известно), что отображение f инъективно (см. лемму в п. 5.1), так что нужно лишь показать, что образ отображения f замкнут.

Пространство $\mathscr{P}(\Lambda^d V)$ покрывается (аффинными) открытыми множествами U следующего вида: каждому базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства V сопоставим множество U всех точек, однородные координаты которых в базисе пространства $\Lambda^d V$, определенном базисом $e_1, \ldots, e_n$, таковы, что коэффициент при $e = e_1 \wedge \ldots \wedge e_d$ отличен от нуля. Таким образом, множество U является дополнением линейного многообразия.

Пусть $V = W_0 \oplus W_0'$, где пространства W_0 и W_0' натянуты на векторы $e_1, \ldots, e_d$ и $e_{d+1}, \ldots, e_n$ соответственно, и p — проектирование пространства V на W_0, такое, что $p(W_0') = 0$ и $p(x) = x$ при $x \in W_0$. При $W \in G_d(V)$ включение $f(W) \subset U$ имеет место тогда и только тогда, когда $p \mid W$ — изоморфизм. В этом случае пространство W имеет единственный базис вида $e_1 + x_1(W), \ldots, e_d + x_d(W)$, такой, что $x_i(W) \subset W_0'$. Пусть, например, $x_i(W) = \sum_{j>d} a_{ij} e_j$. Тогда $f(W)$ совпадает с проекцией в $\mathscr{P}(\Lambda^d V)$ вектора

$$e + \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant d} e_1 \wedge \ldots \wedge x_i(W) \wedge \ldots \wedge e_d \right) + (*),$$

где на месте $(*)$ стоят базисные векторы, в записи которых отсутствуют два или более множителей $e_1, \ldots, e_d$. Но

$$e_1 \wedge \ldots \wedge x_i(W) \wedge \ldots \wedge e_d = \sum_{j>d} a_{ij} e_1 \wedge \ldots \wedge \underset{i\text{-е место}}{e_j} \wedge \ldots \wedge e_d,$$

так что при разложении вектора $(e_1 + x_1(W)) \wedge \ldots \wedge (e_d + x_d(W))$ по базису a_{ij} оказывается коэффициентом при базисном векторе $e_1 \wedge \ldots \wedge e_j \wedge \ldots \wedge e_d$ ($1 \leqslant i \leqslant d$; $j > d$, на i-м месте стоит e_j) и эти определяющие пространство W коэффициенты можно задавать произвольно. Коэффициенты остальных векторов пространства $\Lambda^d V$ являются полиномиальными функциями от a_{ij}. Таким образом, $f(G_d(V))$ — это, в сущности, график морфизма из пространства коэффициентов (a_{ij}) в другое линейное пространство. В частности, он замкнут. Предположим, что $W \subset G_d(V)$ и $W' \in G_{d'}(V)$, причем $d \leqslant d'$. Тогда тот факт, что $W \subset W'$, можно выразить в виде алгебраических уравнений с координатами в $\mathscr{P}(\Lambda^d V) \times \mathscr{P}(\Lambda^{d'} V)$. Следовательно, $\{(W, W') \in G_d(V) \times G_{d'}(V) \mid W \subset W'\}$ — замкнутое подмногообразие. *Многообразие флагов* $\mathscr{F}(V)$ определяется следующим образом:

$$\{(V_1, \ldots, V_n) \in G_1(V) \times \ldots \times G_n(V) \mid V_i \subset V_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Как показывает наше рассуждение, $\mathscr{F}(V)$ — *проективное многообразие*. В соответствии с утверждением (3) п. 10.1 многообразие $\mathscr{F}(V)$ *полно*.

Последующие замечания иллюстрируют на примере группы $GL(V)$ некоторые теоремы, которые позднее будут доказаны для произвольных связных групп.

Для произвольного базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства V рассмотрим отображение

$$\varphi\colon GL(V) \to \mathscr{F}(V),$$

задаваемое формулой $\varphi(g) = (V_1, \ldots, V_n)$, где V_i — пространство, натянутое на векторы $ge_1, \ldots, ge_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$). Ясно, что группа $GL(V)$ действует на флагах пространства V транзитивно, причем отображение φ эквивариантно. Следовательно, φ индуцирует биективный морфизм $\alpha\colon GL(V)/B \to \mathscr{F}(V)$, где B — стабилизатор флага $\varphi(e)$. Легко усматривается, что при изоморфизме $GL(V) \to \mathbf{GL}_n$, определенном базисом $e_1, \ldots, e_n$, группа B сопоставляется группе $\mathbf{T}_n$. Обозначим через U^- группу унипотентных нижних треугольных матриц. Нетрудно убедиться, что множество $U^- \cdot B$ открыто. В самом деле, оно состоит из всех тех $g = (g_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ в группе $\mathbf{GL}_n$, для которых $\det(g_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant d} \neq 0$ для каждого $d \leqslant n$, а это множество, очевидно, открыто.

Элемент $\varphi(g)$ в проективных координатах, введенных на каждом пространстве $G_d(V)$, записывается в виде $(ge_1, ge_1 \wedge ge_2, \ldots$ $\ldots, ge_1 \wedge \ldots \wedge ge_n)$. Если $g \in U^-$, то $ge_i = e_i + \sum\limits_{j>i} a_{ij} e_j$, так что

$$ge_1 \wedge \ldots \wedge ge_i = (ge_1 \wedge \ldots \wedge ge_{i-1} \wedge e_i) + \Big(\sum_{j>i} a_{ij} ge_1 \wedge \ldots \wedge ge_{i-1} \wedge e_j\Big)$$

Таким образом, с помощью индукции по i мы убеждаемся, что ge_i при $g \in U^-$ можно выразить алгебраически через проективные координаты элемента $\varphi(g)$. Отсюда следует, что морфизм φ индуцирует изоморфизм группы U^- на ее образ. Из сказанного выше вытекает, что $\varphi(U^-)$ содержит множество, открытое в $\varphi(GL(V))$; следовательно, дифференциал морфизма φ сюръективен, т. е. морфизм φ сепарабелен. Мы доказали следующее утверждение:

Морфизм φ: $GL(V) \to \mathcal{F}(V)$ *индуцирует изоморфизм многообразий* α: $GL(V)/B \to \mathcal{F}(V)$. *В частности,* $GL(V)/B$ — *проективное многообразие.*

Наше доказательство не слишком подробно; независимое доказательство гораздо более общего утверждения будет дано в п. 11.1.

10.4. Теорема. *Пусть* G — *связная разрешимая группа, действующая рационально на непустом полном многообразии* V. *Тогда на* V *имеется точка, неподвижная относительно группы* G.

Доказательство. Используем индукцию по $d = \dim G$. При $d = 0$ доказывать нечего. Итак, предположим, что $d > 0$. Тогда группа $N = (G, G)$ связна, и ее размерность меньше размерности группы G, так что множество F неподвижных относительно группы N точек многообразия V непусто и замкнуто. Следовательно, F — полное многообразие. Так как группа N — нормальный делитель группы G, то многообразие F инвариантно относительно G. Согласно лемме о замкнутых орбитах (п. 1.8), существует точка $x \in F$, такая, что множество $G(x)$ замкнуто. Так как $N \subset G_x$, то G_x — нормальный делитель группы G. Следовательно,

$$G/G_x \to G(x)$$

— биективный морфизм связного аффинного многообразия в полное многообразие. Так как $G(x)$ гладкое и, следовательно, нормальное, многообразие, то, согласно утверждению (4) п. 10.1, многообразие G/G_x является полным. Из утверждения (2) п. 10.1 следует теперь, что G/G_x состоит иа одной точки, что и требовалось доказать.

10.5. Следствие 1. (Теорема Ли — Колчина.) *Если* π: $G \to GL(V)$ — *линейное представление связной разрешимой группы, то существует некоторый флаг в пространстве* V, *инвариантный относительно группы* $\pi(G)$, *т. е. группа* $\pi(G)$ *приводится к треугольному виду.*

Доказательство. На многообразии $\mathcal{F}(V)$ имеется точка, неподвижная относительно группы G, ибо, согласно п. 10.3, многообразие $\mathscr{F}(V)$ полно, а действие группы G индуцируется отображением π.

Следствие 2. *Пусть M — разрешимая (не обязательно замкнутая) подгруппа группы $GL(V)$. Тогда некоторая подгруппа конечного индекса группы M приводится к треугольному виду.*

Доказательство. Пусть $H = \mathscr{A}(M)$. Известно (см. п. 2.4, следствие 2), что группа H разрешима. Применим предыдущее следствие к группе H^0. Тогда группа $H^0 \cap M$ имеет конечный индекс в группе M и приводится к треугольному виду.

10.6. Теорема. *Пусть G — связная разрешимая группа.*

(1) *G_u — связный k-замкнутый нормальный делитель группы G, содержащий группу $DG = (G, G)$.*

(2) *Группа G/G_u является тором, а группа G_u обладает рядом замкнутых связных нормальных делителей, последовательные факторы которого одномерны.*

(3) *Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда множество G_s является подгруппой. В этом случае G_s — определенная над k замкнутая подгруппа группы G и группа G является прямым произведением $G_s \times G_u$* [1]).

(4) *Максимальные торы группы G сопряжены. Если T — максимальный тор, то $G = T \cdot G_u$ — полупрямое произведение* [2]). *Алгебра $L(G_u)$ совпадает с объединением нильпотентных элементов алгебры $L(G)$.*

(5) *Пусть S — не обязательно замкнутая подгруппа группы G, состоящая из полупростых элементов. Тогда:*

(i) *группа S содержится в некотором торе;*

(ii) *группа $G^S = Z_G(S)$ связна и совпадает с группой $N_G(S)$.*

Доказательство. (1) Используя теорему Ли — Колчина, вложим группу G в $\mathbf{T}_n$. Тогда $\mathbf{U}_n = (\mathbf{T}_n)_u = D\mathbf{T}_n$ — замкнутый нормальный делитель группы $\mathbf{T}_n$, так что G_u — замкнутый связный нормальный делитель группы G, содержащий DG. Из п. 4.5 следует, что группа G_u является замкнутой. Пусть $\pi\colon G \to G' = G/DG$ — каноническая проекция. Согласно п. 4.7, $G' = G'_s \times G'_u$, так что группа G'_u связна. Мы утверждаем, что $G_u = \pi^{-1}(G'_u)$. Если $x \in G_u$, то $\pi(x) = G'_u$ ввиду п. 4.4. Пусть теперь $x \in \pi^{-1}(G'_u)$ и $x = x_s \cdot x_u$ —его разложение Жордана. Тогда, согласно п. 4.4, x_s, $x_u \in \pi^{-1}(G'_u)$ и $x_s \in DG$. Но $DG \subset G_u$, так что $x_s = e$ и $x \in G_u$, откуда

---

[1]) На самом деле в этом утверждении связность группы G несущественна; достаточно также требовать только расщепляемости группы G ($g \in G \Rightarrow g_s, g_u \in G$) (см. Платонов [1]). — *Прим. ред.*

[2]) Относительно обобщения утверждения (4) на несвязный случай см. Платонов [2]. — *Прим. перев.*

следует, что $G_u = \pi^{-1}(G'_u)$. Так как группы DG и G'_u связны, то группа G_u также связна.

(2) Группа G/G_u вкладывается в группу $\mathbf{T}_n/\mathbf{U}_n \cong \mathbf{D}_n$, так что G/G_u — коммутативная связная подгруппа, состоящая из полупростых элементов; согласно пп. 8.4 и 8.5, группа G/G_u — тор. Исходя из ряда связных нормальных делителей N_i группы $\mathbf{T}_n$, содержащихся в $\mathbf{U}_n$ (последовательные факторы такого ряда изоморфны группе $\mathbf{G}_a$ (см. п. 10.2)), получаем ряд $(N_i \cap G)^0$ связных нормальных делителей группы G, содержащихся в G_u, последовательные факторы которого имеют размерность $\leqslant 1$. После исключения повторяющихся членов ряда все факторы будут иметь размерность 1.

(3) Предположим сначала, что G_s — подгруппа группы G. Группа G_s коммутативна, ибо ее проектирование в группу G/G_u является инъективным отображением. Следовательно, выбрав точное рациональное представление группы G в $GL(V)$, мы можем на основании п. 4.6 привести группу G_s к диагональному виду. Ясно тогда, что замыкание группы G_s есть диагонализируемая подгруппа группы G, очевидно, совпадающая с G_s. Учитывая свойство жесткости диагонализируемых групп (см. п. 8.10), имеем $Z_G(G_s) = N_G(G_s)^0$. Но так как, очевидно, G_s — нормальный делитель группы G и так как группа G связна, то группа G_s центральна в G. Факторгруппа G/G_s унипотентна и, следовательно, нильпотентна (см. п. 4.8), откуда вытекает, что группа G нильпотентна, что и требовалось.

Обратно, предположим, что группа G нильпотентна. Покажем, что G_s лежит в центре группы G.

Положим $a \in G_s$, и пусть $U = G_u$. Пусть $c_a(x) = xax^{-1}a^{-1}$, где $x \in G$, и положим $M = c_a(U)$. Согласно утверждению (3) предложения 9.3, отображение c_a индуцирует биекцию $M \to M$, так что $M \subset C^\infty C$. Так как группа G нильпотентна, то $C^\infty G = \{e\}$ и $M = \{e\}$, т. е. элемент a централизует группу U. Следовательно, группа G^a содержит группу DG, так что G^a — нормальный делитель. Для доказательства того факта, что $G^a = G$, достаточно ввиду пп. 4.4 и 4.7 показать, что $G^a \supset G_s$.

Предположим, что $t \in G_s$. Тогда $c_a(t) \in U$, так что a коммутирует с $c_a(t)$. Следовательно, $c_a(t)\, a = tat^{-1}a^{-1}a = tat^{-1}$ — разложение Жордана полупростого элемента tat^{-1}, так что его унипотентная часть $c_a(t)$ равна e. Центральность группы G_s следует теперь из рассуждения, которое уже применялось для доказательства того факта, что G_s — замкнутая диагонализируемая подгруппа группы G. Разложения Жордана в G и в $L(G)$ показывают, что $G = G_s \times G_u$ (прямое произведение абстрактных групп) и что $L(G_s) \cap L(G_u) = 0$. Таким образом, G — прямое произведение групп G_s и G_u как алгебраических групп, ибо морфизм $G_s \times G_u \to G$ биективен и сепарабелен.

Остается показать, что группа G_s определена над k.

(a) $p = \operatorname{char}(k) = 0$. Факторы разложения Жордана элемента $g \in G(\bar{k})$ лежат в $G_s(\bar{k}) \times G_u(\bar{k})$, и действие группы $\Gamma = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ сохраняет, очевидно, разложение Жордана. Следовательно, группы G_s и G_u содержат плотные инвариантные относительно группы Γ подмножества $\bar{k}$-точек, так что они определены над k.

(b) $p > 0$. Для подходящего $q = p^r$ $(r > 0)$ имеем $u^q = e$ для всех $u \in G_u$. (Если $G \subset \mathbf{GL}_n$, то можно принять $r = n - 1$.) Тогда разложение Жордана показывает, что отображение $g \to g^q$ определяет морфизм $G \to G_s$, очевидно, определенный над k. Из утверждения (b) предложения п. 8.9 вытекает, что ограничение этого морфизма на G_s биективно. Следовательно, группа G_s, будучи образом k-морфизма, определена над k.

(4) Покажем сначала индукцией по $\dim G$, что *существует тор T группы G, который проектируется на G/G_u*. Отсюда будет следовать, что $G = T \cdot G_u$ — полупрямое произведение алгебраических групп, ибо, как показывают разложения Жордана, $T \cap G_u = \{e\}$ и $L(T) \cap L(G_u) = 0$.

Если группа G нильпотентна, то положим $T = G_s$, как в (3). В противном случае существует нецентральный элемент $s \in G_s$, такой, что $\dim G^s < \dim G$, где $G^s = Z_G(s)$. Кроме того, из п. 9.6 следует, что отображение $(G^s)^0 \to (G/G_u)^s = G/G_u$ сюръективно. Поэтому нужный нам тор T можно найти по предположению индукции уже в группе $(G^s)^0$.

Далее,

(*) *Пусть, как и выше, $G = T \cdot G_u$. Тогда каждый элемент $s \in G_s$ сопряжен с помощью элемента из $C^\infty G$ с некоторым элементом тора T.*

Мы будем доказывать это утверждение индукцией по $\dim G$. Если группа G нильпотентна, то из утверждения (3) теоремы вытекает, что G_s — единственный максимальный тор; итак, мы можем предполагать, что группа G не нильпотентна, т. е. что $C^\infty G \neq \{e\}$. Пусть N — компонента единицы центра группы $C^\infty G$. Тогда $N \neq \{e\}$, ибо группа $C^\infty G$ связна и унипотентна, и N содержит последний нетривиальный член нижнего центрального ряда группы $C^\infty G$, который также является связной группой (см. п. 2.3).

Пусть π: $G \to G' = G/N$ — естественная проекция. Тогда $G' = T' \cdot G'_u$ — полупрямое произведение, где $T' = \pi(T)$. По предположению индукции имеется элемент $g' \in C^\infty G'$, такой, что $g'\pi(s)g'^{-1} \in T'$. Выбирая $g \in C^\infty G$ так, чтобы $\pi(g) = g'$, и заменяя s на gsg^{-1}, мы можем, следовательно, предполагать, что $s \in T \cdot N$. Мы хотим подобрать элемент $u \in U$ таким образом, чтобы $usu^{-1} \in T$.

Положим $s=nt$, где $n\in N$, $t\in T$. Согласно п. 9.3, можно записать $n=c_t(u)z$, где $u\in N$, $c_t(u)=utu^{-1}t^{-1}$ и $z\in Z_N(t)$. Таким образом, $s=utu^{-1}t^{-1}zt=utu^{-1}z$. Так как элемент z унипотентен и коммутирует с t и u, то равенство $s=(utu^{-1})z$ есть разложение Жордана полупростого элемента s и, следовательно, $z=e$. Таким образом, $u^{-1}su=t\in T$, что доказывает утверждение (*).

Для завершения доказательства первой части утверждения (4) предположим, что T' — другой максимальный тор в группе G. Выберем $s\in T'$ так, чтобы $s^{\alpha}\neq 1$ для всех $\alpha\in\Phi(T', G)$. Из п. 9.4 тогда следует, что связные компоненты централизаторов в группе G элемента s и тора T' совпадают. На основании утверждения (*) с помощью некоторого элемента группы $C^{\infty}G$ мы можем сопрячь s с элементом тора T. Сопрягая этим элементом группы $C^{\infty}G$ тор T', мы сведем дело к случаю, когда $T\subset(G^s)^0=(G^{T'})^0$. Из утверждения (*) получаем, что каждый элемент тора T' сопряжен в $(G^{T'})^0$ с некоторым элементом тора T. Но тор T' централен в $(G^{T'})^0$, так что $T'\subset T$ и, следовательно, ввиду максимальности тора T' имеем $T=T'$.

Пусть π: $G\to G/G_u$ — каноническая проекция. Ее ограничение на T есть изоморфизм тора T на G/G_u. В частности, алгебра Ли $L(G/G_u)$ состоит из полупростых элементов, и п. 4.4 показывает, что если элемент $X\in\mathfrak{g}$ нильпотентен, то $X\in\ker(d\pi)=L(G_u)$. Но алгебра Ли $L(G_u)$ состоит из нильпотентных элементов (см. п. 4.8), что завершает доказательство утверждения (4).

(5) Пусть S — подгруппа группы G, состоящая из полупростых элементов, и пусть π: $G\to G/G_u$ — каноническая проекция. Тогда ограничение отображения π на S инъективно, так что группа S коммутативна, ибо коммутативна группа G/G_u. Кроме того, если элемент $n\in G$ нормализует группу S, то элемент $\pi(n)$ централизует группу $\pi(S)$ и, следовательно (так как отображение π_S инъективно), элемент n централизует группу S. Это доказывает равенство $Z_G(S)=N_G(S)$. Группа $\overline{S}=\mathcal{A}(E)$ есть замкнутая диагонализируемая подгруппа группы G, причем $Z_G(\overline{S})=Z_G(S)$, что сводит доказательство оставшихся утверждений к случаю, когда группа S замкнута. Пусть T — максимальный тор группы G.

Случай 1. *Группа S центральна.* Согласно утверждению (4), при $s\in S$ некоторый сопряженный с s элемент принадлежит тору T; следовательно, $s\in T$. Таким образом, $S\subset T$ и группа $G^S=G$ связна.

Случай 2. *Группа S нецентральна.* Выберем нецентральный элемент $s\in S$. Заменяя тор T сопряженным, мы можем считать, что $s\in T$. Тогда $T\subset G^s=T\cdot G_u^s$ и ввиду п. 9.3 группа G_u^s связна. Следовательно, группа G^s связна, имеет меньшую размерность, чем группа G, и содержит группу S. По предположению индукции группа S сопряжена в G^s с подгруппой тора T, и группа $(G^s)^S = G^S$ связна.

Это завершает доказательство утверждения (5).

Теорема полностью доказана.

10.7. Кривые, обладающие связной группой автоморфизмов [1]. Структурной теореме п. 10.6 явно недостает классификации групп размерности 1, которые появляются там в качестве „композиционных факторов" группы G_u.

Как мы увидим в п. 10.9, единственными одномерными связными группами являются группы $\mathbf{GL}_1$ и $\mathbf{G}_a$. Мы установим это, основываясь на следующем предложении, которое в свою очередь вытекает из классификации одномерных групп.

В доказательстве предложения мы будем использовать некоторые факты о якобианах кривых, доказательства которых выходят за рамки этой книги.

Предложение. *Пусть X — гладкая полная неприводимая алгебраическая кривая. Предположим, что связная группа G размерности $\geqslant 1$ действует на X нетривиально и на X существует неподвижная относительно нее точка. Тогда кривая X изоморфна проективной прямой* $\mathbf{P}_1$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что род $\operatorname{gen} X$ кривой X равен нулю. Пусть $f\colon X \to J$ — канонический морфизм кривой X в ее якобиан J (см. Ленг [2], гл. II, § 2). Якобиан J есть абелево многообразие (= полная связная алгебраическая группа), размерность которого равна $\operatorname{gen} X$, причем образ $f(X)$ порождает группу J. Кроме того (там же, теорема 9), любое рациональное отображение $h\colon X \to A$, где A — абелево многообразие, индуцирует единственный гомоморфизм $\alpha\colon J \to A$, такой, что $h(x) = \alpha(f(x)) + a$ для некоторого элемента $a \in A$, не зависящего от $x \in X$. (Здесь мы используем знак $+$ для обозначения групповой операции на абелевых многообразиях.) Очевидно, это „свойство универсальности отображения" определяет морфизм f однозначно с точностью до сдвига на элемент из J. Мы хотим нормализовать морфизм f так, чтобы $f(p) = 0$, где $p \in X$ — одна из неподвижных относительно G точек (которая, как предполагалось, существует). При $g \in G$ свойство универсальности отображения показывает, что морфизм $f \circ g\colon X \to J$ имеет вид $\alpha_g \circ f + a_g$ для подходящего морфизма групп $\alpha_g\colon J \to J$ и некоторого $a_g \in J$.

---

[1] Этот и следующий пункты содержат подготовительный материал для доказательства теоремы 10.9. Более простое доказательство теоремы 10.9 можно найти в лекциях Титса [1]. — *Прим. ред.*

Условие $p=g(p)$ влечет за собой $a_g=0$, так что $f\circ g=\alpha_g\circ f$. Можно было бы показать, что морфизм $G\times J\to J$ дает связное семейство автоморфизмов абелева многообразия J, а затем использовать жесткость абелевых многообразий (см. п. 8.10).

Предпочтительнее, однако, рассуждать непосредственно: при $a\in J$ определим морфизм β_a: $G\to J$ формулой $\beta_a(g)=\alpha_g(a)$. Если $a=f(x)$ для некоторого $x\in X$, то β_a есть сквозное отображение $G\xrightarrow{\beta_x}X\xrightarrow{f}J$, где $\beta_x(g)=g(x)$; очевидно, отображение β_a — морфизм. В общем случае элемент $a\in J$ представим в виде $a=\sum f(x_i)$ для подходящих элементов $x_i\in X$, так что отображение $\beta_a=\sum\beta_{f(x_i)}$ также является морфизмом.

Пусть ${}_mJ=\ker(a\to ma)$ в J, где m — целое положительное число. Тогда группа ${}_mJ$ конечна (Ленг [2]) и, очевидно, инвариантна относительно каждого морфизма α_g. Следовательно, множество $\beta_a(G)$ конечно для каждого $a\in{}_mJ$. Так как группа G связна и $\beta_a(e)=a$, то отсюда следует, что $\beta_a(G)=\{a\}$.

Итак, при $g\in G$ морфизм α_g: $J\to J$ оставляет неподвижными все элементы конечного порядка. Но последние образуют плотное подмножество многообразия J (Ленг [2]), так что $\alpha_g=1_J$.

Таким образом, f: $X\to J$ является G-эквивариантным отображением, причем группа G действует на J тривиально. Следовательно, f сжимает каждую G-орбиту на кривой X в точку. Так как группа G действует на неприводимой кривой X нетривиально, то одна из G-орбит должна содержать открытое плотное подмножество. Дополнение последнего конечно, так что множество G-орбит на X конечно. Отсюда следует, что якобиан J порождается *конечным* множеством $f(X)$. Это возможно лишь в том случае, когда $J=\{0\}$, т. е. когда $\dim J\,(=\operatorname{gen}X)=0$.

10.8. Группа автоморфизмов многообразия $\mathbf{P}_1$ есть $\mathbf{PGL}_2$. Пусть

$$G=\mathbf{PGL}_2=\mathbf{GL}_2/S,$$

где

$$S=Z(\mathbf{GL}_2)=\{aI\mid a\in K^*\}$$

— группа скалярных (2×2)-матриц. Обозначим через

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

проекцию $\mathbf{GL}_2\to G$. Чтобы избежать путаницы, проекцию

$$\mathfrak{gl}_2\to\mathfrak{g}=\mathfrak{pgl}_2=\mathfrak{gl}_2/K\cdot I$$

мы будем обозначать

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}_L.$$

Рассмотрим тор $T = \mathbf{D}_2/S$ группы G. Имеет место изоморфизм

$$\lambda\colon\ \mathbf{GL}_1 \to T, \qquad a \to a^\lambda = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть элемент $\alpha \in X(T)$ таков, что $\langle \alpha, \lambda \rangle = 1$, т. е. $(a^\lambda)^\alpha = a$ при $a \in \mathbf{GL}_1$. Рассмотрим морфизмы

$$u_\alpha,\ u_{-\alpha}\colon\ \mathbf{G}_a \to G,$$

задаваемые формулами

$$u_\alpha(b) = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad u_{-\alpha}(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix},$$

и обозначим через U_α и $U_{-\alpha}$ образы группы $\mathbf{G}_a$ при морфизмах u_α и $u_{-\alpha}$ соответственно. В результате непосредственного вычисления получаем

$$(1) \qquad \begin{aligned} tu_\alpha(b)\, t^{-1} &= u_\alpha(t^\alpha b), \\ tu_{-\alpha}(c)\, t^{-1} &= u_{-\alpha}(t^{-\alpha} c) \end{aligned}$$

при $t \in T$ и $b, c \in \mathbf{G}_a$. Коммутаторные формулы

$$(t, u_\alpha(b)) = u_\alpha((t^\alpha - 1)\, b)$$

и

$$(t,\ u_{-\alpha}(c)) = u_{-\alpha}((t^{-\alpha} - 1)\, c)$$

показывают, что коммутант DG содержит группы U_α и $U_{-\alpha}$. Ясно, что подгруппа, порожденная группами U_α и $U_{-\alpha}$, имеет размерность >2. Учитывая, что $\dim G = 3$ и группа G связна, получаем

(2) *$G = DG$ и группа G порождается подгруппами U_α и $U_{-\alpha}$.*

Алгебры Ли $L(T)$, $L(U_\alpha)$ *и* $L(U_{-\alpha})$ порождаются элементами

$$(3) \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_L, \quad X_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_L, \quad X_{-\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_L$$

соответственно. Кроме того, из формул (1) следует, что векторы X_α и $X_{-\alpha}$ являются полуинвариантами весов α и $-\alpha$ соответственно для тора T в представлении Ad_G. Следовательно, выражение

$$\mathfrak{g} = L(T) \oplus L(U_\alpha) \oplus L(U_{-\alpha}) = \mathfrak{g}^T \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

является разложением алгебры $\mathfrak{g}$ на корневые подпространства относительно тора T, и

$$\Phi(T, G) = \{\alpha, -\alpha\}.$$

Записывая элементы пространства K^2 как вектор-столбцы, рассмотрим проекцию

$$K^2 - 0 \to \mathbf{P}_1,$$

заданную соответствием

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Естественное действие группы $\mathbf{GL}_2$ на K^2 индуцирует действие группы $\mathbf{GL}_2$ на $\mathbf{P}_1$, относительно которого упомянутая проекция эквивариантна. Учитывая, что группа S действует на $\mathbf{P}_1$ тривиально, мы можем записать действие группы G на $\mathbf{P}_1$ в виде формулы

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}.$$

Вложим K в $\mathbf{P}_1$, полагая

$$x \to \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$$

и запишем $\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Тогда

$$\mathbf{P}_1 = K \cup \{\infty\}.$$

Рассмотрим, далее, открытое множество

$$V = \{(x,\ y,\ z) \in (\mathbf{P}_1)^3 \mid x,\ y \text{ и } z \text{ различны}\}$$

и определим морфизм $\varphi\colon G \to V$ формулой

$$\varphi(g) = (g(0),\ g(1),\ g(\infty)).$$

Таким образом, $\varphi(G)$ есть орбита точки $(0,\ 1,\ \infty) \in V$ при действии группы G.

Утверждение. *Морфизм φ есть изоморфизм многообразий. В частности, группа G действует однотранзитивно*[1]) *на тройках различных точек в* $\mathbf{P}_1$.

Если $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, то

$$\varphi(g) = \left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &g(\infty) = \infty \Leftrightarrow b = 0, \\ (4) \qquad &g(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0, \\ &g(1) = 1 \Leftrightarrow a+b = c+d. \end{aligned}$$

---

[1]) Действие группы G на множестве M называется однотранзитивным, если стабилизатор точки является единицей группы G. Употребителен также термин „регулярное действие". — *Прим. перев.*

Следовательно, равенство $\varphi(g)=(0,\ 1,\ \infty)$ влечет за собой $g=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}=e$, так что отображение φ инъективно.

Покажем, что отображение φ сюръективно. Пусть $(x,\ y,\ z)\in V$. Легко видеть, что группа $\mathbf{GL}_2$ действует на множестве прямых пространства K^2 дважды транзитивно. Поэтому мы можем сначала привести элемент $(x,\ y,\ z)$ к виду $\left(0,\ \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix},\ \infty\right)$. Тот факт, что элемент $\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix}$ отличен от 0 и ∞, означает, что $a\neq 0\neq d$. Следовательно, используя элемент $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1}$, мы можем привести элемент $\left(0,\ \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix},\ \infty\right)$ к виду $(0,\ 1,\ \infty)$.

Для завершения доказательства достаточно убедиться, что отображение $(d\varphi)_e$: $\mathfrak{g}\to T(V)_{(0,\ 1,\ \infty)}$ сюръективно. Имеем

$$u_{-\alpha}(c)(0,\ 1,\ \infty)=(c,\ 1+c,\ \infty).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $du_{-\alpha}(1)=X_{-\alpha}$, получаем $(d\varphi)_e(X_{-\alpha})=(1,\ 1,\ 0)$. Аналогично, $du_\alpha(1)=X_\alpha$, так что $(d\varphi)_e(X_\alpha)=(0,\ 1,\ 1)$.

$$a^\lambda(0,\ 1,\ \infty)=(0,\ a^{-1},\ \infty).$$

Поскольку $d\lambda(1)=H$, то $(d\varphi)_e(H)=(0,\ -1,\ 0)$, что и требовалось.

Замечание. В том случае, когда вместо группы $\mathbf{GL}_2$ мы рассматриваем группу $\mathbf{SL}_2$, отображение $\mathbf{SL}_2\to\mathbf{PGL}_2$ все еще сюръективно. Однако в характеристике 2 оно уже не будет сепарабельным. Дело в том, что группу T мы должны заменить образом группы T' матриц вида $\operatorname{diag}(a,\ a^{-1})$ из $\mathbf{SL}_2$. При этом алгебра $L(T')$ порождается элементом вида $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, однако $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_L$ в характеристике 2 обращается в нуль.

Предложение. *Пусть H — некоторая k-группа, действующая k-рационально на проективной прямой $\mathbf{P}_1$. Тогда это действие индуцируется единственным k-морфизмом α: $H\to\mathbf{PGL}_2$.*

Доказательство. Определим морфизм β: $H\to V$ правилом $\beta(h)=(h(0),\ h(1),\ h(\infty))$, и пусть $\alpha=\varphi^{-1}\circ\beta$. Тогда $\alpha(h)(i)=h(i)$ $(i=0,\ 1,\ \infty)$, и ясно, что морфизм α определен над k. Чтобы убедиться, что морфизмы $\alpha(h)$ и h действуют на $\mathbf{P}_1$ одинаково, достаточно проверить, что всякий автоморфизм g проективной прямой $\mathbf{P}_1$, оставляющий неподвижными точки 0, 1 и ∞, является тождественным.

Но $K(\mathbf{P}_1)=K(x)$, где x — единственная рациональная функция на $\mathbf{P}_1$, имеющая нуль порядка один в точке 0, полюс порядка один в точке ∞ и не имеющая других особых точек и такая, что $x(1)=1$. Функция $x\circ g$ должна обладать теми же самыми свойствами; поэтому g индуцирует тождественный автоморфизм поля $K(\mathbf{P}_1)$. Следовательно, автоморфизм g — тождественный.

10.9. Теорема. *Пусть G — связная аффинная группа размерности один. Тогда G изоморфна либо группе* $\mathbf{GL}_1$, *либо группе* $\mathbf{G}_a$.

Доказательство. Группа G является плотным открытым подмножеством в единственной полной гладкой кривой $\overline{G}$ (см. АГ. 18.5, утверждение (d)). Из утверждения (f) п. АГ. 18.5 следует, что действие группы G на самой себе посредством правого умножения однозначно продолжается до действия группы G на кривой $\overline{G}$. Так как $\overline{G}-G$ — конечное множество, инвариантное относительно связной группы G, то группа G действует на нем тривиально. Это множество непусто, ибо группа G аффинна. Из предложения п. 10.7 тогда следует, что $\overline{G}\cong\mathbf{P}_1$. Отождествим кривую $\overline{G}$ с $\mathbf{P}_1$ так, что $\infty\notin G$. Согласно предложению п. 10.8, существует вложение группы G в группу $\mathbf{PGL}_2$, такое, что группа G содержится в стабилизаторе $\left\{\begin{bmatrix} a & 0\\ c & d\end{bmatrix}\right\}$ точки ∞ (п. 10.8, формула (4)). Кроме того, из п. 10.8 следует, что группа G оставляет неподвижными не более двух точек многообразия $\mathbf{P}_1$. Обозначим число таких точек через m.

Случай 1. $m=2$. Выберем проективные координаты таким образом, чтобы неподвижной точкой, отличной от точки ∞, была точка 0. Тогда группа G содержится в торе $T=\left\{\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}\right\}\cong\mathbf{GL}_1$. По соображениям размерности $G=T$.

Случай 2. $m=1$. Тогда G действует на аффинной прямой $K=\mathbf{P}_1-\{\infty\}$ как группа преобразований вида $x\to ax+c$. Последняя разрешима, значит, разрешима и группа G. Так как группа DG связна и $\dim DG<\dim G=1$, то группа G абелева. Согласно п. 4.7, $G=G_s\times G_u$. Снова из размерностных соображений вытекает, что либо $G=G_s$, либо $G=G_u$. Если $G=G_s$, то группа G — одномерный тор (см. пп. 8.4 и 8.5), т. е. $G\cong\mathbf{GL}_1$. Пусть теперь $G=G_u$. Если $g(x)=a_gx+c_g$, то отображение $g\to a_g$ есть морфизм $G\to\mathbf{GL}_1$. Он обязан быть тривиальным, ибо группа G унипотентна. Следовательно, отображение $g \to c_g$ является вложением $G \to \mathbf{G}_a$, и подсчет размерностей вновь показывает, что оно должно быть изоморфизмом.

Замечание. Если группа G изоморфна группе $\mathbf{GL}_1$, то из п. 8.11 следует, что существует изоморфизм этих групп над полем k_s. Предположим, с другой стороны, что $G \cong \mathbf{G}_a$. Пусть $\overline{G}$ — содержащая группу G полная гладкая кривая, определенная над полем k. Проведенное рассуждение показывает, что множество $\overline{G} - G$ состоит из одной точки P, так что точка P должна быть рациональной над полем $L = k^{p^{-\infty}}$. Известно (см. Серр [3], гл. X, § 6, упр. 1), что кривая $\overline{G}$ изоморфна над полем L проективной прямой $\mathbf{P}_1$, и мы можем выбрать этот изоморфизм так, чтобы точка P преобразовывалась в точку ∞ на $\mathbf{P}_1$. Коль скоро это сделано, полученный выше изоморфизм группы G с группой $\mathbf{G}_a$, как легко видеть, рационален над L.

10.10. Действия групп на $\mathbf{G}_a$. Точки группы $\mathbf{G}_a$ и ее алгебры Ли $\mathfrak{g}_a$ можно отождествить с точками поля K. Эндоморфизм группы $\mathbf{G}_a$ как кривой определяется эндоморфизмом ее аффинной алгебры $K[T]$, который в свою очередь определяется полиномом $f(T)$. Этот эндоморфизм будет морфизмом групп тогда и только тогда, когда полином f аддитивен, $f(T+H) = f(T) + f(H)$. Пусть $p = \operatorname{char}(K)$.

(i) Если $p = 0$, то $f(T) = cT$ для подходящего $c \in K$.

(ii) Если $p > 0$, то $f(T) = \sum_i c_i T^{p^i}$.

Применяя производную $\frac{d}{dT}$ к формуле сложения, заключаем, что $f'(T)$ — постоянная функция. Удаляя из $f(T)$ линейный член, получаем в случае (ii) полином $g(T^p)$, который является аддитивным полиномом меньшей степени, так что формула (ii) вытекает из индуктивного предположения.

В обоих случаях легко видеть, что автоморфизм алгебраической группы $\mathbf{G}_a$ определяется полиномом вида $f(T) = cT$ $(c \in K^*)$, так что мы получаем изоморфизм группы $\mathbf{GL}_1$ с группой автоморфизмов группы $\mathbf{G}_a$.

Если рассматривать группу $\mathbf{G}_a$ как подмножество $\mathbf{P}_1 - \{\infty\}$ в $\mathbf{P}_1$ и принять во внимание, что группа автоморфизмов группы $\mathbf{G}_a$ оставляет неподвижной точку $0 \in \mathbf{G}_a$, то мы можем получить группу автоморфизмов группы $\mathbf{G}_a$ как пересечение в группе $\mathbf{PGL}_2$ стабилизаторов точек 0 и ∞. Это пересечение есть тор $T = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, введенный в п. 10.8.

Пусть G — произвольная группа, действующая на $\mathbf{G}_a$ как группа автоморфизмов. Из сделанных выше замечаний вытекает, что существует характер α: $G \to \mathbf{GL}_1$, при помощи которого группа G действует на $\mathbf{G}_a$:

$$g(x) = g^\alpha x \qquad (g \in G,\ x \in \mathbf{G}_a).$$

Ясно, что индуцированное действие группы G на алгебре Ли $\mathfrak{g}_a$ задается тем же самым характером:

$$g(X) = g^\alpha \cdot X \qquad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g}_a).$$

Библиографические замечания. Теоремы пп. 10.4 и 10.6 были доказаны Борелем [1]. Классическая теорема Ли гласит: связная разрешимая линейная группа Ли над полем комплексных чисел приводится к треугольному виду. Ее обобщение на алгебраические группы принадлежит Колчину [1]. Приведенное здесь доказательство взято из статьи Бореля [1].

Может показаться удивительным, что мы приводим не слишком элементарное и даже не замкнутое в себе доказательство того факта, что G изоморфна $\mathbf{GL}_1$ или $\mathbf{G}_a$, если G — связная одномерная группа[1]). Разумеется, этот результат давно известен. Было бы, однако, затруднительно привести здесь ссылку на полное доказательство, более раннее, чем доказательство Гротендика (см. Демазюр и Гротендик [1], сообщение 7). Последнее гораздо алгебраичнее приведенного здесь, но оно опирается на некоторые результаты § 10, 11, и его эскиз будет дан в п. 11.6.

[1]) См. примечание на стр. 169. — *Прим. ред.*

Глава IV

ПОДГРУППЫ БОРЕЛЯ; РЕДУКТИВНЫЕ ГРУППЫ

На протяжении этой главы все алгебраические группы предполагаются аффинными; G — связная аффинная группа.

§ 11. ПОДГРУППЫ БОРЕЛЯ

11.1. *Подгруппой Бореля* группы G мы называем максимальную среди связных разрешимых подгрупп. Простые соображения о размерности связных подгрупп позволяют сделать вывод, что подгруппы Бореля существуют.

Теорема. *Пусть B — подгруппа Бореля группы G. Тогда каждая подгруппа Бореля сопряжена в G с группой B и G/B — проективное многообразие.*

Доказательство. Пусть R — подгруппа Бореля максимальной размерности. По теореме 5.1 существует точное представление π: $G \to GL(V)$, такое, что группа R является стабилизатором некоторого одномерного подпространства $V_1 \subset V$ в группе G, а алгебра Ли $L(R)$ — стабилизатором подпространства V_1 в алгебре Ли $L(G)$.

Применяя следствие 1 п. 10.5 к индуцированному представлению группы R на факторпространстве V/V_1, получаем флаг $F=(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ в пространстве V, инвариантный относительно R. Пусть $\mathscr{F}(V)$ — многообразие флагов на V, на котором действует группа $\pi(G)$. Тогда каноническое отображение многообразия G/R на орбиту $G(F)$ флага F в многообразии $\mathscr{F}(V)$ является изоморфизмом многообразий. Это следствие того факта, что отображение многообразия G/R на орбиту точки V_1 в проективном пространстве $\mathscr{P}(V)$ — всегда изоморфизм многообразий (см. теорему 6.8 и ее доказательство).

Предположим, что R' — стабилизатор флага $F \in \mathscr{F}(V)$ в G. Так как флаг инвариантен относительно R', то R' — разрешимая группа. Так как размерность группы R максимальна, то $\dim R' \leqslant \dim R$ и, следовательно, $\dim G/R \leqslant \dim G/R'$. Таким образом, $G(F)$ — орбита минимальной размерности в многообразии $\mathscr{F}(V)$; по лемме о замкнутой орбите (п. 1.8) множество $G(F)$ замкнуто. Следовательно, G/R — проективное многообразие.

Группа B естественным образом действует на многообразии G/R; в соответствии с теоремой 10.4 G/R обладает неподвижной точкой относительно B, т.е. $BxR \subset xR$ для некоторого $x \in G$. Это означает, что $x^{-1}BxR \subset R$ и $x^{-1}Bx \subset R$. Так как B — максимальная связная разрешимая подгруппа, то $x^{-1}Bx = R$.

11.2. Замкнутая подгруппа P группы G называется *параболической*, если фактор G/P является полным многообразием. Так как многообразие G/P всегда квазипроективно (см. п. 6.8), то G/R полно тогда и только тогда, когда G/R — проективное многообразие.

Следствие. *Замкнутая подгруппа P группы G тогда и только тогда является параболической, когда она содержит подгруппу Бореля.*

Доказательство. Если группа P содержит подгруппу Бореля B, то $G/B \to G/P$ — сюръективный морфизм полного многообразия, так что G/P — также полное многообразие. Обратно, по теореме 10.4 подгруппа Бореля B в полном многообразии G/P имеет неподвижную точку, откуда следует, что P содержит некоторую сопряженную с B подгруппу.

11.3. Следствие. (1) *Каждый максимальный тор группы G содержится в некоторой подгруппе Бореля. Максимальные торы группы G сопряжены.*

(2) *Каждая максимальная связная унипотентная подгруппа группы G является унипотентной частью некоторой подгруппы Бореля. Все максимальные связные унипотентные подгруппы группы G сопряжены.*

Доказательство. (1) Максимальный тор T является связной разрешимой группой и, следовательно, содержится в некоторой группе Бореля B. Очевидно, T является максимальным тором в группе B. По теореме 10.6 $B = T \cdot B_u$ (полупрямое произведение), и все максимальные торы группы B сопряжены. Утверждение (1) вытекает теперь из сопряженности подгрупп Бореля.

(2) Так как связная унипотентная группа U нильпотентна (см. п. 4.8), то U содержится в некоторой подгруппе Бореля B. Согласно теореме п. 10.6, B_u — связная подгруппа группы B, содержащая, очевидно, группу U; если группа U максимальна, то $U = B_u$. Сопряженность групп B_u — прямое следствие сопряженности подгрупп Бореля.

11.4. Следствие. (1) *Если автоморфизм α группы G оставляет неподвижными все элементы некоторой подгруппы Бореля B, то α — тождественный автоморфизм.*

(2) *Если элемент $x \in G$ централизует группу B, то $x \in Z(G)$.*

Доказательство. Второе утверждение следует из первого, если принять $\alpha = \operatorname{Int}(x)$. Рассмотрим морфизм $f\colon G \to G$,

$f(g) = a(g)g^{-1}$. Тогда f представляется в виде $G \to G/B \to G$, так что $f(G)$ — полное аффинное многообразие; следовательно, $f(G)$ — точка (см. п. 10.1).

11.5. Следствие 1. *Пусть B — подгруппа Бореля группы G.*

(1) *Если $B = B_s$, то G — тор.*

(2) *Если группа B не содержит отличных от $\{e\}$ торов, то группа G унипотентна. В обоих случаях $G = B$.*

(3) *Следующие условия равносильны:*

(a) *группа G обладает только одним максимальным тором;*

(b) *некоторый максимальный тор содержится в $Z(G)$;*

(c) *группа G нильпотентна;*

(d) *группа B нильпотентна.*

Доказательство. (1) На основании теоремы 10.6 имеем $B = T \cdot B_u$, где T — максимальный тор группы B. Если $B = B_s$, то группа $B = T$ коммутативна и ввиду следствия 11.4 содержится в центре группы G. Но тогда G/B — аффинная связная группа, многообразие которой является полным. Следовательно, $G/B = \{e\}$.

(2) Условие $T = \{e\}$ влечет за собой нильпотентность группы $B = B_u$. Тогда связная компонента H центра группы B отлична от $\{e\}$ и, согласно следствию 11.4, H содержится в центре группы G. Так как B/H — унипотентная подгруппа Бореля группы G/H, то, используя индукцию по $\dim G$, заключаем, что $G/H = B/H$, т.е. что $B = G$.

(3) (a)$\Rightarrow$(b). Если T — единственный максимальный тор, то он — нормальный делитель группы G, и жесткость торов (п. 8.10) позволяет сделать вывод, что T содержится в центре группы G.

(b)$\Rightarrow$(c). Пусть T — центральный максимальный тор, и пусть T' — прообраз в G некоторого тора в группе G/T. Так как торы T и T'/T состоят из полупростых элементов, то T' также состоит из полупростых элементов. Из утверждения (1) вытекает, что T' является тором. (Мы использовали здесь связность группы T', которая является следствием связности групп T и T'/T.) Максимальность тора T влечет за собой равенство $T' = T$. Поэтому группа G/T не содержит нетривиальных торов и, согласно (2), является унипотентной группой. Следовательно, группа G/T нильпотентна, и так как T содержится в центре группы G, то группа G также нильпотентна.

(c)$\Rightarrow$(d) очевидно.

(d)$\Rightarrow$(a). Если группа B нильпотентна, то по теореме 10.6 $B = T \times B_u$, где $T = B_s$ — максимальный тор группы G. Тогда $T \subset Z(B)$ и, согласно следствию 11.4, $Z(B) \subset Z(G)$. Единственность тора T вытекает теперь из утверждения (1) следствия 11.3.

Следствие 2. *Предположим, что тор T является нормальным делителем в группе G и группа G/T также является тором. Тогда группа G является тором.*

Доказательство. Очевидно, что $G = G_s$, так что следствие вытекает из утверждения (1) следствия 1 п. 11.5.

11.6. Следствие. *Если* $\dim G \leqslant 2$, *то группа G разрешима.*

Доказательство. Если $B \neq G$, то $\dim B \leqslant 1$. Записывая B в виде $B = T \cdot B_u$, получаем, что $B = T$, либо $B = B_u$. Но тогда следствие 1 п. 11.5 влечет за собой равенство $G = B$.

Замечание. Мы дадим теперь набросок доказательства теоремы 10.9, упомянутого в конце § 10 (Демазюр и Гротендик [1], сообщение 7). Пусть G — группа размерности 1. Согласно следствию п. 11.6, группа G разрешима. Тогда $\dim (G,G) < \dim G$, откуда следует, что группа G *коммутативна*. По теореме 10.6, $G = T \cdot G_u$, где T — максимальный тор группы G. Так как $\dim G = \dim T + \dim G_u$, то либо $G = T$ и тогда $G \cong \mathbf{GL}_1$, либо $G = G_u$. Из доказательства утверждения (2) теоремы 10.6 (использующего вложение группы G_u в унипотентную часть группы $\mathbf{T}_n$) вытекает, что G обладает нетривиальным морфизмом π: $G \to \mathbf{G}_a$. Так как $\mathbf{G}_a$ — связная группа размерности 1, то π — *изогения*, т. е. морфизм π сюръективен и его ядро $N = \ker(\pi)$ конечно.

Пусть p — характеристическая экспонента поля K. Тогда порядок каждого элемента унипотентной группы G есть степень числа p. Отсюда следует, что при $p = 1$, т. е. когда $\mathrm{char}(K) = 0$, изогения π является изоморфизмом. При $p > 1$ группа N является конечной группой порядка p^n для подходящего $n \geqslant 0$. Чтобы доказать, что $G \cong \mathbf{G}_a$, воспользуемся индукцией по n.

Если $n = 0$, т. е. если отображение π взаимно однозначно, то, согласно п. АГ. 18.2, поле функций $K(G)$ является чисто несепарабельным расширением поля $K(\mathbf{G}_a) = K(x)$. Отображение $x \to x^{p^r}$ при достаточно большом r дает изоморфизм поля $K(G)$ на подполе поля $K(x)$. По теореме Люрота (см., например, Ван-дер-Варден [1], т. 1) поле $K(G)$ — чисто трансцендентное расширение поля K. Таким образом, многообразие группы G изоморфно открытому подмножеству проективной прямой, и доказательство завершается вложением G в $\mathbf{PGL}_2$, как в доказательстве теоремы 10.9.

При $n > 0$ можно профакторизовать группу G по подгруппе индекса p в группе N и применением индукции свести дело к случаю $n = 1$. Принимая во внимание случай $n = 0$, получаем $G/N \cong \mathbf{G}_a$, так что можно считать морфизм π сепарабельным. В этом случае поле $K(G)$ есть расширение Галуа степени p поля $K(x)$, к которому можно применить теорию Артина —

Шрейера (подробнее см. Демазюр и Гротендик [1], сообщение 7, лемма 3).

11.7. Следствие. *T — максимальный тор группы G. Тогда группа $C = Z_G(T)^0$ нильпотентна, и $C = N_G(G)^0$.*

Теорема сопряженности (п. 11.3) показывает, что T — единственный максимальный тор группы C; тогда, согласно следствию 1 п. 11.5, группа C нильпотентна. Кроме того, T — нормальный делитель группы $N_G(C)$; согласно следствию 2 п. 8.10, T содержится в центре группы $N_G(C)^0$.

11.8. Предложение. *Элемент $X \in L(G)$ полупрост тогда и только тогда, когда X — касательный вектор к некоторому тору группы G.*

Так как тор изоморфен некоторой диагональной группе, то его алгебра Ли состоит из полупростых элементов, что доказывает часть „тогда".

Предположим теперь, что X — полупростой элемент. Согласно п. 9.1, алгебра Ли $\mathfrak{h}$ группы $H = Z_G(X)$ совпадает с $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X)$; в частности, $\mathfrak{h}$ содержит X. Пусть T — максимальный тор группы H и $C = Z_H(T)^0$. Тогда $L(C) = \mathfrak{z}(T)$ (см. следствие в п. 9.2), поэтому $X \in L(C)$. Ввиду следствия п. 11.7 группа C нильпотентна, откуда следует, что $C = T \times C_u$ (теорема 10.6). Так как алгебра Ли $L(C_u)$ состоит из нильпотентных элементов, то $X \in L(T)$.

11.9. Лемма. *Пусть H — замкнутая подгруппа группы G. Положим*

$$X = {}^G H = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

(1) *Если многообразие G/H полно, то множество X замкнуто.*

(2) *Предположим, что некоторый элемент $h \in H$ обладает лишь конечным числом неподвижных точек на G/H, т. е. что множество $\{x \in G \mid h \in xHx^{-1}\}$ состоит из конечного числа смежных классов по H. Тогда X содержит плотное открытое в G множество.*

Доказательство. Рассмотрим морфизмы

$$G \times G \xrightarrow{\alpha} G \times G \xrightarrow{\beta} (G/H) \times G,$$

где $\alpha(x, y) = (x, xyx^{-1})$ и $\beta = \pi \times 1_G$ и π: $G \to G/H$ — факторный морфизм. Положим $M = \beta(\alpha(G \times H)) = \{(\pi(x), z) \mid x \in G, x^{-1}zx \in H\}$.

(i) *Множество M замкнуто.* Если $x^{-1}zx \in H$, то $(xh)^{-1} z (xh) \in H$ для всех $h \in H$, откуда следует, что $\beta^{-1}(M) = \alpha(G \times H)$. Так как α—изоморфизм многообразий и так как β: $G \times G \to (G \times G)/(H \times \{e\})$ — факторный и, следовательно, открытый морфизм, то M — замкнутое множество, ибо $\beta^{-1}(M)$ — замкнутое множество.

(ii) $X = \mathrm{pr}_G(M)$, *так что множество X замкнуто, если многообразие G/H полно. В самом деле,* $\mathrm{pr}_G(M) = \{y \mid x^{-1}yx \in H$ *для некоторого* $x \in G\} = X$.

(iii) $\dim M = \dim G$ *в каждой точке множества* M.

Слой над точкой $\pi(x)$ сюръективного морфизма $\mathrm{pr}_{G/H}\colon M \to G/H$ изоморфен xHx^{-1}, так что размерность каждого слоя равна $\dim H$. Следовательно, $\dim M = \dim G/H + \dim H = \dim G$ в каждой точке (см. п. 10.3). Слой морфизма $\mathrm{pr}_G\colon M \to G$ над точкой y равен

$$\{\pi(x) \mid x^{-1}yx \in H\} = \{\pi(x) \mid y \in xHx^{-1}\} = \{\pi(x) \mid y \cdot \pi(x) = \pi(x)\}.$$

(В последней скобке точкой обозначается естественное действие группы G на G/H.) Поэтому предположение утверждения (2) попросту означает, что слой морфизма $\mathrm{pr}_G\colon M \to G$ над некоторой точкой $h \in H$ конечен (и непуст). Следовательно, если N — неприводимая компонента множества M, такая, что $h \in \mathrm{pr}_G(N)$, то слои морфизма pr_G конечны над каждой точкой некоторого плотного открытого множества в $\overline{\mathrm{pr}_G(N)}$ (см. п. АГ. 10.1). Согласно теореме п. АГ. 10.1, $\dim N = \dim G = \overline{\mathrm{pr}_G(N)}$. Следовательно, $G = \overline{\mathrm{pr}_G(N)}$, ибо группа G связна. Множество X содержит $\mathrm{pr}_G(N)$ и, следовательно, содержит плотное и открытое в G подмножество.

11.10. Теорема. *Пусть B — подгруппа Бореля, а T — максимальный тор группы G и $C = Z_G(T)^0$. Тогда объединение подгрупп, сопряженных с группой B (соответственно с группой B_u, группой T, группой C), совпадает с G (соответственно совпадает с G_u, совпадает с G_s, содержит плотное и открытое в G подмножество).*

Согласно следствию 11.7, группа C нильпотентна. Так как T — максимальный тор, то из теоремы 10.6 вытекает, что $C = T \times C_u$.

Согласно предложению 8.8, существует элемент $t \in T$, такой, что $Z(t)^0 = Z(T)^0 = C$. Пусть g — такой элемент группы G, что $gtg^{-1} \in C$. Тогда $gtg^{-1} \in T$ и $Z(gtg^{-1}) \supset Z(T)$. Так как $\dim Z(gtg^{-1})^0 = \dim Z(t)^0$, то $Z(gtg^{-1})^0 = C$, откуда следует, что $g \in N(C)$. Так как $N(C)^0 = C$ (п. 11.7), то множество элементов группы C, сопряженных с t, конечно. Согласно утверждению (2) леммы 11.9 (роль группы H играет группа C), множество ${}^GC$ содержит плотное открытое подмножество группы G. Будучи нильпотентной, группа C содержится в некоторой подгруппе Бореля B' группы G, так что ${}^GB'$ также содержит плотное открытое подмножество группы G. Но многообразие G/B' полно (п. 11.1); следовательно (лемма 11.9, утверждение (1)), многообразие ${}^GB'$ замкнуто и $G = {}^GB'$. Ввиду сопряженности подгрупп Бореля $G = {}^GB$. Оставшаяся часть теоремы вытекает из теоремы п. 10.6.

11.11. Следствие. *Центр $Z(G)$ группы G совпадает с центром каждой подгруппы Бореля. Пересечение всех максимальных торов группы G совпадает с $Z(G)_s$.*

Доказательство. Пусть $g \in Z(G)$ и B — подгруппа Бореля. Из формулы $G = {}^G B$ следует, что $g \in B$, т. е. $Z(G) \subset Z(B)$. Обратное включение вытекает из следствия 11.4.

При $g \in Z(G_s) \subset B$ имеем $g \in T$, где T — максимальный тор группы B (см. теорему п. 10.6, утверждение 5). Из сопряженности максимальных торов вытекает, что g принадлежит каждому максимальному тору, так что $Z(G)_s \subset H$, где H — пересечение максимальных торов. Так как $H \subset T$, то H — диагонализируемая группа; кроме того, H — нормальный делитель в G. Условие жесткости (п. 8.10) влечет за собой включение $H \subset Z(G)$. Следовательно, $H = Z(G)_s$, что и требовалось доказать.

11.12. Следствие. *Пусть S — подтор группы G и $a \in Z_G(S)$. Тогда множество $\{a_s\} \cup S$ содержится в некотором торе группы G. Группа $Z_G(S)$ связна. Для любого $g \in G$ имеет место включение $g \in Z_G(g_s)^0$.*

Доказательство. Покажем сначала, что элемент $\{a\} \cup S$ содержится в некоторой подгруппе Бореля B группы G. Пусть F — множество неподвижных точек элемента a, действующего на многообразии G/B естественным образом. По теореме 11.10 элемент a содержится в некоторой группе, сопряженной с B, так что множество F непусто. Так как подтор S централизует a, то множество F инвариантно относительно него. Согласно теореме 10.4, в F есть точка, неподвижная относительно S, которую мы обозначим через x. Стабилизатор B' точки x в G является подгруппой Бореля группы G, содержащей множество $\{a\} \cup S$.

Таким образом, доказательство первого утверждения сводится к случаю, когда группа G разрешима, а в этом случае оно вытекает из теоремы 10.6, утверждение (5). Кроме того, согласно теореме 10.6, группа $Z_{B'}(S)$ связна, откуда следует, что $a \in Z_G(S)^0$, что составляет второе из доказываемых утверждений. Пусть теперь $g \in G$. По теореме 11.10 g содержится в некоторой подгруппе Бореля B группы G. Тогда $g \in Z_B(g_s)$. Но последняя группа связна (см. теорему 10.6); следовательно, $g \in Z_G(g_s)^0$.

11.13. Определение. Централизатор максимального тора группы G называется *подгруппой Картана* группы G.

Согласно следствию 11.12, подгруппы Картана группы G связны, согласно следствию 11.7, они нильпотентны и, согласно следствию 11.3, сопряжены друг с другом. Из теоремы 10.6 вытекает, что отображение $T \to Z_G(T)$ является биекцией множества максимальных торов на множество подгрупп Картана и что $Z_G(T) = T \times Z_G(T)_u$. Наконец, по теореме 11.10 объединение ${}^G C$ подгрупп, сопряженных с подгруппой Картана, содержит плотное открытое подмножество группы G.

11.14. Предложение. (1) *Пусть* α: $G \to G'$ — *сюръективный морфизм алгебраических групп,* B — *подгруппа Бореля группы* G, *и* $B = T \cdot B_u$, *где* T — *максимальный тор. Тогда* $\alpha(B) = \alpha(T) \cdot \alpha(B_u)$ — *подгруппа Бореля группы* G' *и каждая подгруппа Бореля группы* G' *получается таким образом. Кроме того,* $\alpha(T)$ — *максимальный тор группы* G', *и* $\alpha(B_u) = \alpha(B)_u$.

(2) *Пусть* H — *связная подгруппа группы* G, *и пусть* B_0 — *подгруппа Бореля группы* H. *Тогда* $B_0 = (H \cap B)^0$ *для подходящей подгруппы Бореля* B *группы* G. *Если* H — *нормальный делитель группы* G, *то подгруппы Бореля группы* H *исчерпываются группами вида* $(B \cap H)^0$, *когда* B *пробегает все подгруппы Бореля группы* G.

Аналогичные утверждения имеют место для максимальных торов и максимальных связных унипотентных подгрупп.

Доказательство. (1) Сквозное отображение $G \to G' \to G'/\alpha(B)$ индуцирует сюръективный морфизм $G/B \to G'/\alpha(B)$, так что многообразие $G'/\alpha(B)$ полно, и, следовательно, $\alpha(B)$ — параболическая подгруппа. Согласно п. 11.2, $\alpha(B)$ содержит подгруппу Бореля группы G'. Но группа $\alpha(B)$ связна и разрешима; следовательно, она сама является подгруппой Бореля. Разложение в полупрямое произведение $\alpha(B) = \alpha(T) \cdot \alpha(B_u)$ и тот факт, что $\alpha(B_u) = \alpha(B)_u$, следуют из сохранения разложений Жордана при морфизмах. В частности, $\alpha(T)$ — максимальный тор в группе $\alpha(B)$ и, следовательно, в G'. Из теоремы сопряженности вытекает, что все подгруппы Бореля, все максимальные торы и все минимальные связные унипотентные подгруппы группы G' получаются таким путем.

(2) Включим связную разрешимую группу B_0 в подгруппу Бореля B группы G. Тогда $B_0 \subset (H \cap B)^0$, причем последняя является связной разрешимой подгруппой группы H. Следовательно, она совпадает с B_0. Аналогично можно доказать соответствующие утверждения для торов и связных унипотентных подгрупп.

Следствие. *Пусть* S — *тор и* f: $G \to S$ — *сюръективный морфизм. Тогда любой максимальный тор* T *группы* G *содержит такой тор* S', *что* f: $S' \to S$ — *изогения.*

Согласно предложению, f: $T \to S$ — сюръективный морфизм. Из следствия п. 8.5 получаем, что компонента единицы ядра $\ker(f|T)$ — прямой множитель тора T, откуда вытекает следствие.

11.15. Теорема (Шевалле). *Если* P — *параболическая подгруппа, то* $P = N_G(P)$.

Предварительно докажем теоретико-групповую лемму.

Лемма. *Пусть* $H \supset M \supset L$ — *такие группы, что множество подгрупп группы* M, H-*сопряженных с* L, *совпадает с множеством подгрупп,* M-*сопряженных с* L. *Тогда* $N_H(M) \subset M \cdot N_H(L)$.

Доказательство. Если $h \in N_H(M)$, то ${}^hL = {}^mL$ для подходящего $m \in M$, так что $m^{-1}h \in N_H(L)$ и $h \in mN_H(L)$.

Прежде всего сведем теорему к случаю, когда P — подгруппа Бореля. А именно, предположим, что теорема верна для подгруппы Бореля $B \subset P$. Принимая во внимание теорему сопряженности (п. 11.1), мы можем применить лемму к подгруппам $B \subset P \subset G$; в результате получим $N_G(P) \subset P \cdot N_G(B) = P \cdot B = P$.

Пусть теперь N — нормализатор подгруппы Бореля B. Группа B содержит подгруппу Картана $C = Z_G(T)$ для некоторого максимального тора T (см. п. 11.13). Учитывая теорему сопряженности для максимальных торов в группах G и B, мы опять можем применить лемму к подгруппам $T \subset B \subset G$; получим, что $N \subset B \cdot N_G(T)$. Используя жесткость торов и следствие п. 11.12, приходим к равенству $N_G(T)^0 = C \subset B$, так что группа $B \cdot N_G(T)$ — *конечное* объединение смежных классов по подгруппе B. Следовательно, $N^0 \subset B$, так что

$$(*) \qquad B = N^0.$$

Оставшаяся часть доказательства основывается на следующей лемме.

Лемма. *Предположим, что для замкнутых подгрупп группы G имеют место соотношения $N \supset B \supset H$, $H' \supset H$, причем*

(i) *группы H и H' связны и разрешимы;*

(ii) *для некоторого элемента $a \in N$ множество коммутаторов (a^{-1}, H') содержится в H;*

(iii) *B — подгруппа Бореля группы G и $N = N_G(B)$. Тогда существует подгруппа Бореля B', содержащая H', нормализатор N' которой содержит a, и такая, что $a \in B'$, только если $a \in B$.*

Доказательство. Пусть $D = \{d \in G \mid d^{-1} a\, d \in N\}$. Тогда D — прообраз множества неподвижных относительно a точек многообразия G/N. Обозначим через D_0 связную компоненту единицы e в множестве D. Пусть $\pi: G \to G/B$ — факторный морфизм и $E = \pi(D)$; пусть E_0 — связная компонента точки $\pi(e)$ на множестве E.

$$\begin{array}{ccccc}
G & \xrightarrow{\pi} & G/B & \longrightarrow & G/N \\
\cup & & \cup & & \cup \\
D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & (G/N)^a \\
\cup & & \cup & & \\
D_0 & \longrightarrow & E_0 & &
\end{array}$$

Покажем сначала, что *множества E и E_0 замкнуты и $E_0 = \pi(D_0)$.*

Так как D — прообраз в G замкнутого множества из G/N, то множество $E = \pi(D)$ — прообраз в G/B того же множества и, следовательно, замкнуто. Тогда множество E_0 также замкнуто. Так как $\pi(D_0)$ — связное множество, то $\pi(D_0) \subset E_0$. Так как группа B

связна, то $d \in D_0$ влечет за собой $dB \subset D_0$, так что $D_0 = \pi^{-1}(\pi(D_0)) \subset \subset \pi^{-1}(E_0)$. Поскольку слои отображения $\pi: \pi^{-1}(E_0) \to E_0$ связны ($\cong B$), то множество $\pi^{-1}(E_0)$ связно и, следовательно, содержится в D_0. Таким образом, $D_0 = \pi^{-1}(E_0)$, так что $\pi(D_0) = \pi(\pi^{-1}E_0) = E_0$.

Пусть теперь $h \in H'$. Так как $a^{-1}hah^{-1} \in H$, то $hah^{-1} \in aH \subset \subset N \cdot B \subset N$, т. е. $h \in D$. Поскольку группа H' связна, то отсюда следует, что $H' \subset D_0$. Значит, $\pi(H') \subset E_0$, и так как множество E_0 замкнуто, то $\overline{\pi(H')} \subset E_0$. Множество $\overline{\pi(H')}$, будучи замыканием орбиты $H' \cdot \pi(e)$, инвариантно относительно H' и является полным многообразием, ибо G/B — полное многообразие. Группа H' связна и разрешима и потому имеет неподвижную точку на множестве E_0. Так как $E_0 = \pi(D_0)$, то эту неподвижную точку можно записать в виде $\pi(d)$, $d \in D_0$. Покажем, что группа $B' = dBd^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям леммы.

(1) Точка $\pi(d)$ неподвижна относительно $H' \Rightarrow H'dB = dB \Rightarrow \Rightarrow d^{-1}H'd \subset B \Rightarrow H' \subset dBd^{-1} = B'$.

(2) $d \in D \Rightarrow d^{-1}ad \in N \Rightarrow a \in dNd^{-1} = dN_G(B)d^{-1} = N_G(dBd^{-1}) = = N_G(B') = N'$.

(3) Пусть $a \in B'$; тогда $d^{-1}ad \in B$, так что образ отображения $D_0 \to N$, $g \to g^{-1}ag$, связен и имеет ненулевое пересечение с группой B (ибо множество D_0 связно и $d \in D_0$). Согласно утверждению (*) $B = N^0$; следовательно, этот образ содержится в B. В частности, поскольку $e \in D_0$, то $a = eae^{-1} \in B$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Итак, нам осталось убедиться, что $B = N$, где B — подгруппа Бореля и $N = N_G(B)$. Если $a \in N$, то a_s, $a_u \in N$; по этой причине достаточно доказать, что если элемент a полупрост или унипотентен, то $a \in B$. В любом случае по теореме плотности п. 11.10 можно указать связную нильпотентную группу H, содержащую элемент a. (Если $a = a_s$, то в качестве H можно взять максимальный тор, а если $a = a_u$, то максимальную связную унипотентную подгруппу.) Тогда имеется ряд $\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = H$ связных нормальных делителей группы H, такой, что $(H, H_i) \subset H_{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, в частности $(a^{-1}, H_i) \subset H_{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Положим $B_0 = B$ и $N_0 = N$. Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$, используя лемму, находим подгруппу Бореля B_i, содержащую H_i, нормализатор N_i которой содержит a, и такую, что $a \in B_i$ лишь в том случае, когда $a \in B_{i-1}$.

На последнем шаге $a \in H = H_n \subset B_n$, откуда последовательно вытекают соотношения $a \in B_{n-1}$, $a \in B_{n-2}$, $\ldots$, $a \in B_0 = B$. Теорема доказана.

11.16. „Многообразие" $\mathscr{B} = \mathscr{B}(G)$ всех подгрупп Бореля группы G. Прежде всего $\mathscr{B}(G)$ — множество, на котором группа G

действует при помощи сопряжения. В силу теоремы сопряженности это действие транзитивно. Стабилизатор элемента $B \in \mathscr{B}$ совпадает с группой $N_G(B)$, которая по теореме о нормализаторе в свою очередь совпадает с B.

Пусть H — подгруппа группы G. Множество точек из $\mathscr{B}$, неподвижных относительно H, совпадает с $\mathscr{B}^H$ (здесь мы снова применяем теорему о нормализаторе), где

$$\mathscr{B}^H = \{B \in \mathscr{B} \mid H \subset B\}.$$

Пусть $B_0 \in \mathscr{B}$ и $\pi\colon G \to G/B_0$ — факторный морфизм. Стабилизатор точки $x = \pi(g)$ есть

$$G_x = \{h \mid hgB_0 = gB_0\} = \{h \mid g^{-1}hg \in B_0\} = {}^gB_0 \in \mathscr{B}.$$

Следовательно, мы можем определить отображение

$$\varphi\colon\ G/B_0 \to \mathscr{B}, \quad \varphi(x) = G_x.$$

Так как $\varphi(\pi(g)) = {}^gB_0$, то из теоремы сопряженности вытекает, что отображение φ *сюръективно*. Кроме того,

$\varphi(\pi(g)) = \varphi(\pi(h)) \Leftrightarrow {}^gB_0 = {}^hB_0 \Leftrightarrow g^{-1}h \in N_G(B_0) = B_0$ (теорема о нормализаторе) $\Leftrightarrow \pi(g) = \pi(h)$.

Это означает, что отображение φ *инъективно*. При помощи биекции φ мы можем снабдить множество $\mathscr{B}$ структурой многообразия G/B_0. Более того, из теоремы сопряженности вытекает, что эта структура не зависит от выбора группы B_0. Это следствие того факта, что *отображение φ является G-эквивариантным.*

В самом деле, при $g, h \in G$ мы имеем $\varphi(h \cdot \pi(g)) = \varphi(\pi(hg)) = {}^{hg}B_0 = {}^h({}^gB_0) = {}^h\varphi(\pi(g))$. Еще одно следствие этого соотношения состоит в том, что *если H — подгруппа группы G, то отображение φ индуцирует биекцию*

$$(G/B_0)^H \to \mathscr{B}^H,$$

т. е. неподвижные точки многообразия G/B_0 при действии группы H соответствуют взаимно однозначно множеству подгрупп Бореля, содержащих H.

11.17. Следствие. *Группа Бореля B максимальна среди разрешимых (не обязательно замкнутых или связных) подгрупп группы G.*

Доказательство. Предположим, что H — разрешимая подгруппа, содержащая группу B. Тогда группа $\overline{H}$ разрешима (см. п. 2.4), так что мы можем предполагать группу H замкнутой. Тогда $B = H^0$. Следовательно, по теореме 11.15 $H \subset N_G(B) = B$.

Предостережение. Максимальная разрешимая подгруппа не обязана быть подгруппой Бореля. Так, например, при $G = \mathbf{SO}_n$

и $p \neq 2$ группа диагональных матриц в группе G изоморфна группе $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{n-1}$ и не содержится ни в какой подгруппе Бореля [1]).

11.18. Действие группы G^T на многообразии $(G/B)^T$.

Предложение. *Предположим, что группа G действует транзитивно на многообразии D, причем стабилизатор точки есть группа Бореля. Пусть T — тор в группе G. Тогда каждая неприводимая компонента многообразия D^T инвариантна относительно группы G^T и последняя действует транзитивно на каждой из них. Если $B \in \mathcal{B}^T$, то B^T — подгруппа Бореля группы G^T и соответствующее отображение $\mathcal{B}^T \to \mathcal{B}(G^T)$ сюръективно.*

Доказательство. Ясно, что множество D^T инвариантно относительно группы G^T; так как группа G^T связна (п. 11.12), то это свойство наследует каждая неприводимая компонента множества D^T. Пусть X — одна из них, и пусть $B_0 = G_{x_0} \in \mathcal{B}$ — стабилизатор некоторой точки $x_0 \in X$. Поскольку орбитное отображение π: $G \to D$, $\pi(g) = gx_0$, индуцирует биективный морфизм $G/B_0 \to D$, то многообразие D полно.

Мы утверждаем, что включение $G^T x_0 \subset X$ является равенством. Так как множество X связно и слои ($\cong B_0$) отображения π связны, то множество $Y = \pi^{-1}(X)$ связно. Если $y \in Y$, то $\pi(y) \in D^T$, так что $y^{-1}Ty \subset B_0$. Пусть α: $Y \times T \to B_0/(B_0)_u$ — композиция отображения $(y, t) \to y^{-1}ty$ и проекции $B_0 \to B_0/(B_0)_u$. Жесткость торов (п. 8.10) позволяет заключать, что $\alpha(y, t)$ не зависит от y. Так как $T \subset B_0$, то $e \in Y$, и поэтому при $y \in Y$ мы имеем $y^{-1}ty \equiv t \pmod{B_0)_u}$ для всех $t \in T$. Таким образом, $y^{-1}Ty \subset T \cdot (B_0)_u$. Последнее множество связно, так что из сопряженности максимальных торов вытекает, что $y^{-1}Ty = g^{-1}Tg$ для некоторого $g = tb \in T \cdot (B_0)_u$; мы можем заменить g на элемент b. При $s \in T$ по модулю $(B_0)_u$ имеют место сравнения $y^{-1}sy \equiv s \equiv b^{-1}sb$. Но отображение $y^{-1}Ty \to B_0/(B_0)_u$ инъективно, поэтому $y^{-1}sy = b^{-1}sb$, т. е. $yb^{-1} \in G^T$. Таким образом, $\pi(y) = yx_0 = yb^{-1}x_0 \in G^T x_0$ (ибо $b \in B_0 = G_{x_0}$). Следовательно, $G^T x_0$ содержит $\pi(Y) = X$, как мы утверждали. Многообразие X полно (как замкнутое множество в D); поэтому из п. АГ. 18.3 вытекает, что многообразие G^T/B_0^T полно, ибо морфизм $G^T/B_0^T \to X$ биективен. Группа B_0^T связна и разрешима; поэтому $B_0^T \in \mathcal{B}(G^T)$. Из предложения 11.14 следует, что каждая подгруппа Бореля группы G^T имеет такой вид.

---

[1]) Максимальные разрешимые подгруппы группы G могут быть и конечными. Относительно описания максимальных разрешимых подгрупп см. Платонов [4]. — *Прим. ред.*

Следствие. *Если группа G^T разрешима, то множество $\mathscr{B}^T$ конечно и каждая группа $B \in \mathscr{B}^T$ содержит G^T. В частности, это имеет место, когда T — максимальный тор.*

Доказательство. Пусть $D = G/B$ для некоторого $B \in \mathscr{B}$. Согласно предложению, орбита относительно группы G^T в полном многообразии D^T является его неприводимой компонентой. Если группа G^T разрешима, то в силу теоремы о неподвижной точке (п. 10.4) каждая компонента имеет неподвижную относительно группы G^T точку, поэтому каждая из них сводится к точке, так что многообразие D^T конечно. Отображение $x \to G_x$ индуцирует биекцию множеств $D^T \to \mathscr{B}^T$, причем каждая группа G_x содержит группу G^T. Последнее утверждение вытекает из п. 11.13.

11.19. Однотранзитивность [1]) группы Вейля. Пусть T — тор в группе G. Группа

$$W = W(T, G) = N_G(T)/Z_G(T)$$

называется *группой Вейля* группы G относительно тора T. Группы Вейля максимальных торов ввиду их сопряженности изоморфны между собой, и мы называем их просто „группами Вейля группы G“.

Ввиду жесткости торов $Z_G(T) = N_G(T)^0$, так что W — *конечная группа.*

Предложение. *Предположим, что T — максимальный тор группы G.*

(a) *Группа Бореля, содержащая тор T, содержит также группу $Z_G(T)$.*

(b) *Действие группы $N_G(T)$ на множестве $\mathscr{B}^T$ подгрупп Бореля, содержащих тор T, индуцирует однотранзитивное действие группы Вейля W на $\mathscr{B}^T$. В частности,* $\operatorname{card} \mathscr{B}^T = [W : 1] < \infty$.

Доказательство. Утверждение (a) вытекает из следствия п. 11.18.

(b) Группа $N_G(T)$ действует на множестве $\mathscr{B}^T$ посредством сопряжения, причем в силу (a) подгруппа G^T действует тривиально; следовательно, эффективное действие осуществляет группа W. Предположим, что $B, B' \in \mathscr{B}^T$. Тогда $B = {}^gB'$ при некотором $g \in G$; T и ${}^gT$ — максимальные торы группы B, откуда ${}^gT = {}^bT$ для некоторого $b \in B$. Таким образом, $g = bn^{-1}$, где $n = g^{-1}b \in N_G(T)$ и $B' = {}^{g^{-1}}B = {}^{nb^{-1}}B = {}^nB$. Это доказывает тот факт, что группа $N_G(T)$ (и, следовательно, группа W) действует на $\mathscr{B}^T$ транзитивно.

Предположим теперь, что $n \in N_G(T)$ и ${}^nB = B$, т. е. $n \in N_B(T)$. Однотранзитивность действия группы W означает, что $n \in G^T$. Последнее следует из утверждения (5) теоремы 10.6.

---

[1]) См. примечание на стр. 172. — *Прим. перев.*

Замечание. Как мы увидим в § 13, подгруппы Бореля, содержащие тор T, порождают группу G.

11.20. Предложение. *Пусть* α: $G \to G'$ — *сюръективный морфизм алгебраических групп, и пусть* T — *максимальный тор группы* G. *Тогда* $T' = \alpha(T)$ — *максимальный тор группы* G' *и* α *индуцирует сюръективные отображения*

(1) $\mathscr{B}^T \to \mathscr{B}'^{T'} \qquad (\mathscr{B}' = \mathscr{B}(G'))$,

(2) $W(T, G) \to W(T', G')$.

Если ядро морфизма α *содержится в каждой подгруппе Бореля группы* G, *то отображения* (1) *и* (2) *биективны.*

Доказательство. Из предложения 11.14 вытекает, что T' — максимальный тор группы G' и что отображение $\mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ сюръективно. Если $\mathscr{B}' \in \mathscr{B}'^{T'}$, то каждая подгруппа Бореля группы $\alpha^{-1}(B')^0$ есть подгруппа Бореля группы G, отображающаяся на B', и одна из них содержит максимальный тор $T \subset \alpha^{-1}(B')^0$. Это показывает, что отображение (1) сюръективно.

Выберем $B \in \mathscr{B}^T$ и положим $B' = \alpha(B)$. Обозначая через W и W' группы Вейля групп G и G' соответственно, мы получаем коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{(2)} & W' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{B}^T & \xrightarrow[(1)]{} & \mathscr{B}'^{T'} \end{array} \tag{3}$$

где вертикальные стрелки обозначают орбитные отображения $w \to {}^wB$ и $w' \to {}^{w'}B'$ соответственно. Согласно предложению п. 11.18, эти отображения биективны, так что сюръективность отображения (2) вытекает из сюръективности отображения (1).

Наконец, если $\ker(\alpha)$ содержится в каждой подгруппе Бореля, то отображение $\mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ инъективно и, следовательно, инъективно отображение (1). Из коммутативности диаграммы (3) следует инъективность отображения (2).

11.21. Радикалы; редуктивные и полупростые группы. Группа

$$R(G) = \Big(\bigcap_{B \in \mathscr{B}} B\Big)^0$$

называется *радикалом* группы G. Очевидно, что это связный разрешимый нормальный делитель группы G, содержащий все другие такие нормальные делители. Унипотентная часть группы $R(G)$

$$R(G)_u \text{ (иногда обозначаемая через } R_u(G))$$

называется *унипотентным радикалом* группы G. Он является связным унипотентным нормальным делителем группы G, содержащим все другие такие нормальные делители. Это вытекает из аналогичного свойства радикала $R(G)$.

Говорят, что группа G *полупроста*, если $R(G)=\{e\}$, и *редуктивна*, если $R_u(G)=\{e\}$. Очевидно, что группа $G/R(G)$ полупроста, а группа $G/R_u(G)$ редуктивна, и что они являются наибольшими факторгруппами группы G с этим свойством.

Из рассмотрения ряда коммутантов группы $R(G)$ и нижнего центрального ряда группы $R_u(G)$ вытекает, что группа G полупроста (соответственно редуктивна) тогда и только тогда, когда G не имеет связных абелевых (соответственно унипотентных абелевых) отличных от $\{e\}$ нормальных делителей.

Предложение. *Если группа G редуктивна, то $R(G)=Z(G)^0$ и группа $R(G)$ является тором.*

Доказательство. Очевидно, что $R(G)\supset Z(G)$. Поскольку группа G редуктивна, то $R(G)=R(G)_s$, так что, согласно теореме 10.6, $R(G)$ — тор. Из-за жесткости торов нормальные торы в связных группах центральны; значит, $R(G)\subset Z(G)^0$.

Библиографические замечания. Все результаты этого параграфа вплоть до п. 11.14, за исключением п. 11.8, доказаны Борелем [1]. Однако принятая в этих лекциях терминология была введена позднее (см. Семинар Шевалле [1]). Большая часть остальных результатов этого параграфа принадлежит Шевалле (там же). В частности, доказательство теоремы 11.15 заимствовано из сообщения 9 Семинара Шевалле [1]. Многообразие $\mathcal{B}$ (п. 11.16) можно было бы ввести более непосредственным образом; может случиться, что оно определено над k, даже если в нем нет определенных над k элементов [1]) (см. Борель и Шпрингер [2], § 7 или Семинар Шевалле [1]; сообщение 12).

§ 12. ПОДГРУППЫ КАРТАНА; РЕГУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

12.1. Свойства подгрупп Картана. Напомним (см. п. 11.13), что *подгруппа Картана* группы G определяется как централизатор максимального тора в G.

Теорема. (a) *Подгруппы Картана сопряжены.*

(b) *Объединение подгрупп Картана содержит плотное открытое подмножество группы G.*

Пусть C — некоторая подгруппа Картана. Тогда

(c) $C=N_G(C)^0$.

(d) $C=C_s\times C_u$, *где $T=C_s$ — единственный максимальный тор группы G, содержащийся в группе C, и $C=G^T$.*

---

[1]) То есть k-определенных подгрупп Бореля. — *Прим. ред.*

(e) *C — максимальная среди связных нильпотентных подгрупп группы G подгруппа.*

Доказательство. Утверждения (a) — (d) были доказаны ранее в пп. 11.7 и 11.13.

Остается показать, что C — максимальная связная нильпотентная подгруппа группы G. С учетом утверждения (c) это вытекает из следующей леммы, аналогичной соответствующему факту для конечных групп.

Лемма. *Пусть H — собственная замкнутая подгруппа связной нильпотентной группы G. Тогда* $\dim H < \dim N_G(H)$.

Доказательство. Пусть $Z = Z(G)^0$. Если Z не содержится в H, то $ZH \subset N_G(H)$, откуда следует заключение леммы. Если Z содержится в H, то применяем индукцию по размерности группы H/Z в G/Z, прообраз нормализатора которой есть группа $N_G(H)$.

12.2. Регулярные элементы; ранг. Размерность подгруппы Картана группы G называется *рангом* группы G. При $g \in G$ элемент g_s принадлежит некоторому максимальному тору T, так что $\dim Z_G(g_s) \geqslant \dim G^T =$ (ранг группы G), и мы называем элемент $g \in G$ *регулярным*, если в этом соотношении имеет место равенство. Таким образом, элемент g регулярен тогда и только тогда, когда регулярен элемент g_s.

Мы будем обозначать множество регулярных элементов группы G через G_{reg}. Элементы множества $G - G_{\mathrm{reg}}$ называются *сингулярными*.

Лемма. *Пусть T — максимальный тор группы G и $t \in T$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *элемент t регулярен;*

(b) $Z_G(t)^0 = G^T$;

(c) $t^\alpha \neq 1$ *для каждого корня* $\alpha \in \Phi(T, G)$.

Доказательство. Так как G^T — связная подгруппа группы $Z_G(t)$, то эквивалентность утверждений (a) и (b) немедленно вытекает из подсчета размерностей. Эквивалентность утверждений (b) и (c) следует из п. 9.4.

Из утверждения (c) вытекает, что регулярные элементы группы T образуют плотное открытое подмножество в T. В частности, регулярные элементы существуют тогда и только тогда, когда $T \neq 1$.

Предложение. *Пусть g — полупростой элемент группы G. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *элемент g регулярен;*

(2) $Z(g)^0$ — *подгруппа Картана;*

(3) $Z(g)^0$ — *нильпотентная группа;*

(4) *элемент g принадлежит только одному максимальному тору;*

(5) *элемент g содержится лишь в конечном числе максимальных торов.*

Доказательство. Пусть T — максимальный тор группы G, содержащий g. Эквивалентность утверждений (1) и (2) вытекает из эквивалентности утверждений (a) и (b) в лемме, а импликация (2)$\Rightarrow$(3) доказана в теореме п. 12.1, утверждение (e).

Из того факта, что связная нильпотентная группа содержит только один максимальный тор (теорема 10.6, утверждение (3)), вытекает, что (3)$\Rightarrow$(4). Кроме того, (4)$\Rightarrow$(5) тривиально.

Пусть $H = Z_G(g)^0$. Из условия (5), с учетом сопряженности максимальных торов в группе H, вытекает, что фактор $H/N_H(T)$ является конечным связным многообразием и, следовательно, состоит из одной точки. Таким образом, T — нормальный делитель связной группы H. Жесткость тора T (см. п. 8.10) позволяет сделать вывод, что T содержится в центре группы H, т. е. $H \subset G^T$. Но $G^T \subset Z_G(g)^0$, так что $G^T = H$. Отсюда следует, что (5) влечет за собой (2), что завершает доказательство.

12.3. Теорема. (1) *Элемент $g \in G$ регулярен тогда и только тогда, когда он содержится только в одной подгруппе Картана.*

(2) *Множество G_{reg} содержит плотное открытое подмножество группы G.*

Доказательство. (1) Предположим, что g — регулярный элемент. Тогда g_s содержится в подгруппе Картана $C = Z_G(g_s)^0$ (см. п. 12.2) и, согласно следствию 11.12, $g \in C$. Если C' — содержащая g подгруппа Картана, то $g_s \in C'_s$, так что $C' = Z_G(C'_s)$ (см. теорему п. 12.1, утверждение (d)) содержится в группе $Z_G(g_s)$ и, следовательно, $C' = C$.

Обратно, предположим, что элемент g принадлежит только одной подгруппе Картана C. Так как $g_s \subset C_s \subset Z(C)$, то группа $H = Z_G(g_s)^0$ содержит группу C, которая, очевидно, является подгруппой Картана группы H. Прочие подгруппы Картана группы H сопряжены с C и, следовательно, содержат элемент $g_s \in Z(H)$. Раз элемент g лежит лишь в одной подгруппе Картана группы H, то элемент $g_u = g_s^{-1}g$ обязан лежать лишь в одной подгруппе Картана группы H. Теперь регулярность элемента g_s, а вместе с ним и элемента g, вытекает ввиду предложения п. 12.2 из следующей леммы.

Лемма. *Предположим, что связная группа H содержит унипотентный элемент h, принадлежащий только одной подгруппе Картана C. Тогда группа H нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $C = H^T$, где T — некоторый максимальный тор; вложим группу C в подгруппу Бореля $B = T \cdot B_u$.

Учитывая утверждение (3) следствия 1 п. 11.5, приходим к выводу, что достаточно доказать нильпотентность группы B. Это будет следовать из включения $B \subset C$, которое в свою очередь вытекает из соотношения $B_u \subset C$. Итак, пусть $B_u = N_m \supset N_{m-1} \supset \ldots$ $\ldots \supset N_0 = \{e\}$ — нижний центральный ряд группы B_u. Индукцией по i будем доказывать, что $N_i \subset C$, причем можно начинать, очевидно, с номера $i > 0$. Если $x \in N_i$, то $h^{-1}xhx^{-1} \in N_{i-1}$, ибо $h \in B_u$, так что $xhx^{-1} \in hN_{i-1} \subset C$ по предположению индукции. Следовательно, $N_i \subset N_H(C)$, так что $N_i \subset N_H(C)^0$, ибо группа N_i связна. Это заканчивает доказательство леммы.

(2) Пусть $C = G^T = T \times C_u$ — подгруппа Картана и $T_0 = \{t \in T \mid t^\alpha \neq 1$ для всех $\alpha \in \Phi(T, G)\}$. Тогда $C_0 = T_0 \times C_u$ — плотное открытое подмножество группы C; по лемме п. 12.2 $C_0 = C \cap G_{\mathrm{reg}}$. Так как каждый регулярный элемент принадлежит подгруппе Картана, то G_{reg} является образом морфизма

$$f\colon G \times C_0 \to G, \qquad f(g, c) = gcg^{-1}.$$

Так как $C_0 \subset \mathrm{im}(f) = G_{\mathrm{reg}}$, то $C = \bar{C}_0 \subset \bar{G}_{\mathrm{reg}}$. Поскольку множество $\bar{G}_{\mathrm{reg}}$ инвариантно относительно сопряжения, то, следовательно, $\bar{G}_{\mathrm{reg}} \supset {}^G C$, и по теореме п. 12.1, утверждение (b), множество ${}^G C$ плотно в G. Так как многообразие $G \times C_0$ неприводимо, то f — доминантный морфизм. Таким образом, $G_{\mathrm{reg}} = \mathrm{im}(f)$ содержит плотное открытое подмножество группы G (см. утверждение (2) теоремы п. АГ. 10.1).

12.4. Предложение. *Пусть α: $G \to G'$ — сюръективный морфизм алгебраических групп.*

(1) *Подгруппы Картана группы G' являются образами подгрупп Картана группы G.*

(2) $\alpha(G_{\mathrm{reg}}) \subset G'_{\mathrm{reg}}$.

Доказательство. (1) Пусть $C = G^T$ — подгруппа Картана группы G. Ввиду сопряженности подгрупп Картана достаточно показать, что $\alpha(C)$ — подгруппа Картана группы G'. Но $T' = \alpha(T)$ — максимальный тор группы G (см. п. 11.4); из предложения 9.6 и следствия 11.12 вытекает, что отображение $G^T \to G'^{T'}$ сюръективно.

(2) При $g \in G_{\mathrm{reg}}$ и $t = g_s$ имеем $\alpha(t) = \alpha(g)_s$; согласно предложению 9.6, отображение $Z_G(t)^0 \to Z_{G'}(\alpha(t))^0$ сюръективно. Так как $Z_G(t)^0$ — подгруппа Картана, то ввиду (1) $Z_{G'}(\alpha(t))^0$ — также подгруппа Картана; следовательно, элемент $\alpha(g)$ регулярен.

12.5. Предложение. *Пусть H — не обязательно связная нильпотентная алгебраическая группа, и пусть $T = (H^0)_s$ — максимальный тор в H^0* (см. теорему 10.6). *Тогда T содержится в центре группы H.*

Доказательство. Так как $H^0 = T \times (H^0)_u$ (см. теорему 10.6), то T содержится в центре группы H^0 и является нормальным делителем группы H. Рассмотрим изоморфизм

$$X_*\colon \mathrm{End}_{\text{алг. групп}}(T) \to \mathrm{End}_{Z\text{-мод}}(X_*(T))$$

колец эндоморфизмов (см. пп. 8.3 и 8.6). При $h \in H$ будем писать $I(h)$ вместо $\mathrm{Int}(h)$ на T и $x(h)$ вместо $X_*(I(h))$. Если считать группу T аддитивной, то коммутирование с элементом h, т. е. отображение $t \to (h, t) = hth^{-1}t^{-1}$ совпадает с эндоморфизмом $I(h) - \mathrm{id}$. Так как группа H нильпотентна, то элемент $I(h) - \mathrm{id}$ и, следовательно, элемент $x(h) - \mathrm{id}$ нильпотентен, т. е. элемент $x(h)$ унипотентен. Таким образом, группа $x(H)$, будучи образом группы H/H^0, является конечной унипотентной подгруппой группы

$$\mathrm{Aut}_{Z\text{-мод}}(X_*(T)) \cong \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$$

для некоторого $n \geqslant 0$. Но группа $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ не содержит нетривиальных унипотентных элементов конечного порядка (см. например, п. 7.3). Следовательно, $x(H) = \{\mathrm{id}\}$, откуда следует, что группа H централизует тор T.

12.6. Определение Шевалле подгрупп Картана. Это определение совпадает с условием (2) следующей теоремы. Оно интересно тем, что имеет смысл для абстрактных групп.

Теорема. *Пусть C — не обязательно замкнутая подгруппа группы G. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *C — подгруппа Картана.*

(2) (a) *C — максимальная нильпотентная подгруппа;*

(b) *каждая подгруппа конечного индекса группы C имеет конечный индекс в своем нормализаторе (в G).*

(3) *C — замкнутая связная нильпотентная подгруппа, и $C = N_G(C)^0$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если H — нильпотентная группа, содержащая группу $C = Z_G(T)$, то мы можем считать, что группа H замкнута. Так как T — максимальный тор в группе G, то T — также максимальный тор в группе H_0; в силу предложения 12.5 $T \subset Z(H)$, т. е. $H \subset Z_G(T) = C$.

Если H — подгруппа конечного индекса в C, то H плотна в C, ибо группа C связна. Следовательно, $N_G(H) \subset N_G(C)$. В силу теоремы п. 12.1 $N_G(C)^0 = C$, и включения $H \subset C \subset N_G(C)$ показывают, что группа H имеет конечный индекс в $N_G(H)$.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) содержится в теореме п. 12.1.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $C = S \times C_u$, где $S = C_s$. Вложим группу C в подгруппу Бореля B, и пусть T — максимальный тор группы B, содержащий группу S, тогда $B = T \cdot B_u$. Положим $M = Z_B(S)$. Тогда группа M связна (п. 11.12) и, очевидно, $M = T \cdot M_u$. Так как

группа S центральна в группе M, то $S \cdot M_u$ — связная нильпотентная группа, содержащая группу C. По предположению $C = N_G(C)^0$; из леммы п. 12.1 вытекает, что $S \cdot M_u = C$. Поскольку группа M связна и разрешима, то $(M, M) \subset M_u \subset C$, так что группа C — нормальный делитель в M. Но $C = N_G(C)^0$, и группа M связна, так что $C = M$. Таким образом, $C \supset T$, откуда вытекает, что $S = T$ и что $C = Z_B(T)$ — подгруппа Картана группы B и, следовательно, группы G.

(2)$\Rightarrow$(1). Предположим, что группа $C \subset G$ удовлетворяет условиям (a) и (b). Так как группы C и $\bar{C}$ одновременно нильпотентны или нет, то из условия (a) следует, что группа C замкнута. Тогда, согласно условию (b), группа C^0 имеет конечный индекс в группе $N_G(C^0)$, так что $C^0 = N_G(C^0)^0$. Поскольку группа C^0 нильпотентна, то из импликации (3)$\Rightarrow$(1) вытекает, что C^0 — подгруппа Картана группы G. Но тогда из импликации (1)$\Rightarrow$(2) следует, что C^0 — максимальная нильпотентная подгруппа, так что $C^0 = C$.

Библиографические замечания. Определение Шевалле подгруппы Картана на языке абстрактной теории групп дано Шевалле [1], т. 3, где подгруппы Картана изучаются для поля характеристики нуль. Результаты этого параграфа можно найти в статье Бореля [1].

§ 13. ПОДГРУППЫ БОРЕЛЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ДАННЫЙ ТОР

Если H — замкнутая связная подгруппа группы G, то множество $\mathscr{B}^H$ подгрупп Бореля, содержащих группу H, пусто, если группа H неразрешима. Если же это множество непусто, то мы положим

$$I(H) = I_G(H) = \Big(\bigcap_{B \in \mathscr{B}^H} B\Big)^0.$$

Если T — максимальный тор, то, так как группа $I(T)$ связна и разрешима, мы можем написать $I(T) = T \cdot I(T)_u$. Основная цель этого параграфа — доказать, что группа $I(T)_u$ является унипотентным радикалом (см. п. 13.16) группы G.

Этот факт находит важные применения в исследовании редуктивных групп. Помимо некоторой информации о группах „полупростого ранга 1“ (п. 13.14), он используется в доказательстве того факта, что если группа G редуктивна, то множество $\Phi(T, G)$ является системой корней.

Окончание доказательства этого утверждения в п. 14.8 требует дополнительной информации о действии торов на унипотентных группах.

Наконец, он необходим при построении „большой клетки“ [1]), ассоциированной с парой подгрупп Бореля (см. п. 14.1).

13.1. Регулярные, полурегулярные и полусингулярные торы. Пусть S — тор в группе G.

Тор S называется *регулярным*, если он содержит регулярный элемент. Следовательно, *максимальные торы регулярны* (см. п. 12.3).

Тор S называется *полурегулярным*, если множество $\mathscr{B}^S$ конечно.

Тор S называется *сингулярным*, если множество $\mathscr{B}^S$ бесконечно.

Пусть S — регулярный тор, и пусть $s \in S$ — регулярный элемент. Тогда $\dim Z_G(s) \leqslant \dim Z_G(t)$ для любого $t \in S$. С другой стороны (п. 8.18), существует элемент $t \in S$, такой, что $Z_G(t) = Z_G(S)$. Так как централизатор тора S связен (п. 11.12), то $Z_G(S) = Z_G(s)^0$ тогда и только тогда, когда элемент $s \in S$ регулярен. В частности, в этом случае G^S является подгруппой Картана и, следовательно, нильпотентна. Отсюда и из следующего ниже предложения вытекает, что регулярные торы полурегулярны.

Если λ: $\mathbf{GL}_1 \to G$ — однопараметрическая подгруппа, то мы будем называть λ *регулярным*, *полурегулярным* или *сингулярным параметром*, если тор $S = \operatorname{im}(\lambda)$ обладает соответствующим свойством.

Предложение. *Пусть S — тор в группе G, $X = G/B$ для некоторой группы $B \in \mathscr{B}$. Следующие условия равносильны*:

(1) *тор S полурегулярен*;

(2) *тор S имеет изолированную неподвижную точку на X (т. е. X^S обладает связной компонентой, состоящей из одной точки)*;

(3) *группа G^S разрешима*;

(4) $G^S \subset I(S)$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна, так как множество X^S конечно и непусто (напомним (см. п. 11.16), что имеется естественная биекция между множествами $\mathscr{B}^S$ и X^S).

(2) $\Rightarrow$ (3). Группа G^S связна (см. п. 11.12), и множество X^S инвариантно относительно нее; следовательно, связные компоненты многообразия X^S инвариантны относительно группы G^S. Если одна из этих компонент состоит из одной точки, то эта точка неподвижна относительно группы G^S. Соответствующая подгруппа Бореля содержит группу G^S, так что группа G^S разрешима.

Импликации (3) $\Rightarrow$ (4) и (3) $\Rightarrow$ (1) вытекают из следствия в п. 11.18.

Импликация (4) $\Rightarrow$ (3) очевидна, ибо группа $I(S)$ разрешима.

---

[1]) В оригинале «big cell». — *Прим. перев.*

Следствие. *Пусть H — связная содержащая тор S подгруппа группы G. Если тор S регулярен (соответственно полурегулярен) в G, то он регулярен (соответственно полурегулярен) в H.*

Доказательство. Группа H^S нильпотентна (соответственно разрешима), коль скоро бо́льшая группа G^S нильпотентна (соответственно разрешима).

13.2. Сингулярные подторы и корни. Зафиксируем *полурегулярный* тор T. Если элемент $\alpha \in X(T)$ отличен от нуля, то $T_\alpha = (\ker(\alpha))^0$ — подтор коразмерности 1 тора T.

Мы будем здесь обозначать корни группы G относительно тора T через Φ вместо обычного обозначения $\Phi(T, G)$. Таким образом,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^T \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Рассмотрим также подмножество $\Psi = \Phi(T, G/I(T))$. Напомним (см. п. 8.17), что если мы запишем $\mathfrak{g}_\alpha = L(I(T))_\alpha \oplus \mathfrak{g}'_\alpha$, то через Ψ обозначается множество тех корней α, для которых $\mathfrak{g}'_\alpha \neq 0$. Мы называем их „корнями группы G вне группы $I(T)$“. Кроме того, так как $G^T \subset I(T)$ и, следовательно, $\mathfrak{g}^T \subset L(I(T))$, то мы имеем

$$\mathfrak{g} = L(I(T)) \oplus \coprod_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}'_\alpha.$$

Предложение. (1) *Следующие утверждения о подторе S тора T эквивалентны:* (a) *S сингулярен;* (b) *$S \subset T_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \Psi$;* (c) *$G^S \not\subset I(T)$.*

(2) *Если $\lambda \in X_*(T)$, то λ — полурегулярный параметр тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in \Psi$.*

Из утверждения (1) без труда получаем

Следствие. *Сингулярные подторы тора T содержатся в сингулярных подторах коразмерности* 1.

Доказательство предложения. (1) (a)$\Leftrightarrow$(c). Если подтор S полурегулярен, то $G^S \subset I(S)$ (условие (4) предложения п. 13.1), и ясно, что $I(S) \subset I(T)$. Обратно, если $G^S \subset I(T)$, то группа G^S разрешима (условие (3) предложения п. 13.1), так что подтор S полурегулярен.

Далее, эквивалентность (b)$\Leftrightarrow$(c) есть эквивалентность (a)$\Leftrightarrow$(c) утверждения (2) предложения из п. 9.4, где за H следует принять группу $I(T)$ и использовать тот факт, что группа G^S связна (п. 11.12).

(2) Применяем к подтору $S = \operatorname{im}(\lambda)$ эквивалентность (a)$\Leftrightarrow$(b).

13.3. Действия однопараметрических подгрупп на 0 и ∞. Мы будем писать

$\mathbf{P}_1 = \mathbf{GL}_1 \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ (объединение непересекающихся множеств), принимая следующее соглашение: координатное кольцо группы $\mathbf{GL}_1$ есть кольцо $K[\chi, \chi^{-1}]$, и проективная прямая $\mathbf{P}_1$ покрывается аффинными прямыми с координатными кольцами $K[\chi]$ и $K[\chi^{-1}]$. Точки 0 и ∞ соответствуют уравнениям $\chi=0$ и $\chi^{-1}=0$ соответственно в этих открытых множествах. Характер χ есть отображение отождествления $\mathbf{GL}_1 = K^*$.

Предположим, что f: $\mathbf{GL}_1 \to Y$ — морфизм в полное многообразие. Из утверждения (f) п. АГ. 18.5 вытекает, что морфизм f однозначно продолжается до морфизма f: $\mathbf{P}_1 \to Y$. Таким образом, мы можем говорить о значениях $f(0)$ и $f(\infty)$.

Предположим теперь, что имеется линейное представление группы G на векторном пространстве V, и пусть λ: $\mathbf{GL}_1 \to T$ — однопараметрическая подгруппа тора T группы G. Тогда группа G, и тем самым группа $\mathbf{GL}_1$, действует на проективном пространстве $\mathscr{P}(V)$. Если $x \in \mathscr{P}(V)$, то морфизм f: $\mathbf{GL}_1 \to \mathscr{P}(V)$, $f(t)=\lambda(t)x$, продолжается до морфизма проективной прямой $\mathbf{P}_1$ в $\mathscr{P}(V)$. Вместо $f(0)$ и $f(\infty)$ мы в этом случае будем писать $\lambda(0)x$ и $\lambda(\infty)x$.

Для определения этих точек выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V, такой, что e_i — собственный вектор, скажем с характером α_i, для тора T; пусть $\langle \alpha_i, \lambda \rangle = m_i$ (см. п. 8.6). Тогда, если $v = \sum a_i e_i \in V$ и $t \in \mathbf{GL}_1$, то

$$\lambda(t)v = \sum \alpha_i t^{m_i} e_i.$$

Предположим, что $v \neq 0$, и пусть $I = \{i \mid a_i \neq 0\}$. Пусть $\underline{J}$ — множество тех $i \in I$, для которых m_i принимает минимальное значение $m = \min m_i$ $(i \in I)$. Пусть, аналогично, $\bar{J}$ — множество тех $i \in I$, для которых m_i принимает максимальное значение $M = \max m_i$ $(i \in I)$. Если обозначить через $[v] \in \mathscr{P}(V)$ образ вектора v при проектировании π: $V - 0 \to \mathscr{P}(V)$, то для любого $t \in \mathbf{GL}_1$ мы имеем $[v] = [t^{-m}v] = [t^{-M}v]$. Определим морфизм

$$g_m\colon \mathbf{GL}_1 \cup \{0\} \to V - \{0\}$$

формулой

$$g_m(t) = \sum_{i \in I} \alpha_i t^{m_i - m} e_i$$

и морфизм

$$g_M(t) = \mathbf{GL}_1 \cup \{\infty\} \to V - \{0\}$$

формулой

$$g_M(t) = \sum_{i \in I} \alpha_i t^{m_i - M} e_i.$$

Так как $m_i - M \leqslant 0 \leqslant m_i - m$ для всех $i \in I$, то обе формулы имеют смысл (в точках 0 и ∞ соответственно) и дают ненулевые векторы из пространства V. Если $t \in \mathbf{GL}_1$, то $g_m(t) = t^{-m}\lambda(t)v$ и $g_M(t) = t^{-M}\lambda(t)v$. Таким образом, морфизм f: $t \to [\lambda(t)v]$ совпадает на $\mathbf{GL}_1$ с обоими морфизмами $\pi\circ g_m$ и $\pi\circ g_M$. Первый из этих двух морфизмов распространяет морфизм f на точку $t\Rightarrow 0$, а второй — на точку $t=\infty$. В явном виде

$$\lambda(0)[v]=\Big[\sum_{j\in J} a_j e_j\Big],$$

$$\lambda(\infty)[v]=\Big[\sum_{j\in \bar J} a_j e_j\Big].$$

Из этих формул становится ясным, что
$\lambda(0)[v]=\lambda(\infty)[v]\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow J=\bar J\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m=M$ (т. е. все m_i ($i\in I$) равны между собой) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow v$ — собственный вектор группы $\mathbf{GL}_1$ относительно $\lambda\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[v]$ — неподвижная точка группы $\mathbf{GL}_1$ при действии, индуцированном отображением λ.

Если λ таково, что значения $m_i=\langle\alpha_i,\lambda\rangle$ различны при различных характерах α_i ($1\leqslant i\leqslant n$), то собственные векторы группы $\mathbf{GL}_1$ (относительно λ) совпадают с собственными векторами тора T. Следовательно, в этом случае $\lambda(0)[v]=\lambda(\infty)[v]$ тогда и только тогда, когда $[v]$ — неподвижная относительно тора T точка.

13.4. Предложение. *Пусть T — тор с линейным представлением на векторном пространстве V. Пусть Y — замкнутое множество размерности $\geqslant 1$ в проективном пространстве $\mathcal{P}(V)$, инвариантное относительно T. Тогда на Y существует по крайней мере две неподвижные относительно тора T точки.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — различные характеры тора T в V. Можно выбрать $\lambda\in X_*(T)\cong\operatorname{Hom}(X(T),\mathbf{Z})$ (см. п. 8.6) так, что все $m_i=\langle\alpha_i,\lambda\rangle$ различны. Тогда группа $\mathbf{GL}_1$ и тор T имеют одинаковые собственные векторы в пространстве V и, следовательно, одни и те же неподвижные точки в $\mathcal{P}(V)$. Мы можем поэтому без ограничения общности предполагать, что $T=\mathbf{GL}_1$.

Если $Y^T=Y$, то множество Y^T бесконечно, так как $\dim Y\geqslant 1$. Если $Y^T\neq Y$, то выберем точку $v\in V\{0\}$, которая проектируется при отображении π: $V-\{0\}\to\mathcal{P}(V)$ в точку $x\in Y$, $x\notin Y^T$. Множество Y замкнуто и, значит, содержит точки $\lambda(0)x$ и $\lambda(\infty)x$, неподвижные относительно тора T (см. п. 13.3). Кроме того, так как точка x не является неподвижной относительно T, то из п. 13.3 также следует, что эти неподвижные точки различны.

13.5. Следствие. *Пусть P — параболическая подгруппа группы G, $P\neq G$, и T — тор группы G. Тогда T имеет по крайней мере две неподвижные точки на многообразии G/P.*

Доказательство. Согласно п. 5.1 (см. также доказательство теоремы 6.8), мы можем выбрать линейное представление

$G \to GL(V)$ и точку $x \in \mathcal{P}(V)$ так, что отображение $g \to gx$ индуцирует изоморфизм многообразия G/P на орбиту $Y = Gx$. Из предположения следует, что множество Y замкнуто и что $\dim Y \geqslant 1$. Таким образом, следствие вытекает из предложения 13.4.

13.6. Предложение. *Пусть T — максимальный тор группы G. Тогда G порождается всеми подгруппами $B \subset \mathscr{B}^T$.*

Доказательство. Пусть P — подгруппа, порожденная группами $B \subset \mathscr{B}^T$. Она замкнута и связна (п. 2.2). Зафиксируем группу $B \in \mathscr{B}^T$ и рассмотрим факторные морфизмы

$$G \xrightarrow{\pi} G/B \xrightarrow{p} G/P.$$

Предположим, что $P \neq G$. Так как P, очевидно, параболическая подгруппа, то, согласно следствию 13.5, на многообразии G/P есть неподвижная относительно тора T точка, отличная от $p(\pi(e))$. Прообраз Y в G/B этой неподвижной точки замкнут и инвариантен относительно T. Таким образом, точка $\pi(y) \in Y$ неподвижна относительно тора T, и по построению

$$p(\pi(y)) \neq p(\pi(e)).$$

Имеем $Ty \subset yB$, т. е. $y^{-1}Ty \subset B$. Ввиду сопряженности максимальных торов в группе B мы можем записать ${}^{y^{-1}}T = {}^{b}T$ для подходящего $b \in B$, так что $yb \in N_G(T)$. Однако из определения группы P вытекает, что группа $N_G(T)$ нормализует P. По теореме о нормализаторе (п. 11.15) $N_G(T) \subset N_G(P) = P$, так что $y = (yb)\, b^{-1} \in \in PB = P$ и, следовательно, $p(\pi(y)) = p(\pi(e))$. Противоречие.

Замечание. Мы увидим позднее (п. 14.1, следствие), что любая связная k-группа порождается двумя надлежащим образом выбранными подгруппами Бореля.

13.7. Лемма. *Пусть W — гиперплоскость в векторном пространстве V, Y — замкнутое подмногообразие проективного пространства $\mathcal{P}(V)$, и $H = \mathcal{P}(W) \subset \mathcal{P}(V)$. Тогда*

(a) *если* $\dim Y \geqslant 1$, *то* $Y \cap H \neq \varnothing$;

(b) *если многообразие Y неприводимо и не содержится в H, то каждая неприводимая компонента многообразия $Y \cap H$ имеет размерность* $\dim Y - 1$.

Доказательство. (a) Если $Y \cap H = \varnothing$, то Y — полное многообразие в аффинном пространстве $\mathcal{P}(V) - H$, так что множество Y конечно (см. утверждение (2) п. 10.1).

(b) Локально на $\mathcal{P}(V)$ гиперплоскость H определяется одним линейным уравнением, и, следовательно, это верно и для гиперплоскости $Y \cap H$ на Y. Утверждение (b) следует теперь из п. АГ.9.2.

13.8. Зафиксируем *полурегулярный тор* T группы G. Обозначим через $X_*(T)_{sr}$ множество полурегулярных однопараметрических подгрупп тора T. Согласно утверждению (2) предложения п. 13.2, это множество непусто. Более точно (см. п. 13.2)

$$X_*(T)_{sr} = \{\lambda \in X_*(T) \mid \langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \Psi\}.$$

Зафиксируем подгруппу Бореля $B_0 \in \mathscr{B}$ и положим $X = G/B_0$. При $\lambda \in X_*(T)_{sr}$ множество неподвижных точек из $\mathrm{im}(\lambda)$ в X конечно и, следовательно, совпадает с X^T.

Предложение. *Пусть* $\lambda \in X_*(T)_{sr}$. (1) *Существует и притом только одна точка* $x(\lambda) \in X$, *такая, что* $\lambda(\infty) x = x(\lambda)$ *для всех* x *в некоторой окрестности точки* $x(\lambda)$. *Соответствующая подгруппа Бореля* $B(\lambda)$ *содержит тор* T.

(2) *Множество* $U = \{x \in X \mid \lambda(\infty) x = x(\lambda)\}$ *является дополнением инвариантного относительно* T *сечения (в некотором* $\mathscr{P}(V)$) *гиперплоскостью множества* X. *В частности,* $\dim(X - U) = \dim X - 1$.

(3) *Существует множество* $\{\beta_i\}$ *нетривиальных характеров тора* T *с тривиальными ограничениями на* $T \cap R(G)$, *такое, что при* $\lambda' \in X_*(T)_{sr}$ *равенство* $B(\lambda) = B(\lambda')$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\langle \beta_i, \lambda' \rangle > 0$ *для каждого* i.

Замечание. Обратно, из существования такой точки $x(\lambda)$ вытекает, что λ — полурегулярный параметр, ибо (см. п. 13.1, утверждение (2) предложения) точка $x(\lambda)$ должна быть изолированной неподвижной точкой множества $\mathrm{im}(\lambda)$. Группа $B(\lambda)$ называется *группой, ассоциированной с* λ.

Доказательство. Так как многообразие X неприводимо, то любые два непустых открытых множества пересекаются, что очевидно, влечет за собой единственность $x(\lambda)$.

Так как $X = G/B_0 \cong (G/R(G))/(B_0/R(G))$, то мы можем выбрать линейное представление группы $G/R(G)$ и, следовательно, группы G в векторном пространстве V так, чтобы многообразие X оказалось G-орбитой некоторой точки в пространстве $\mathscr{P}(V)$. Пусть π: $V - \{0\} \to \mathscr{P}(V)$, $v \to [v]$ — канонический морфизм. Заменяя пространство V подпространством, натянутым на множество $\pi^{-1}(X)$, мы можем, далее, предполагать, что *многообразие* X *не содержится ни в какой гиперплоскости пространства* $\mathscr{P}(V)$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V, такой, что каждый вектор e_i является собственным вектором, скажем с характером α_i, тора T. Положим $m_i = \langle \alpha_i, \lambda \rangle$ и предположим, что базис упорядочен так, что $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_n$. Пусть $m_1 = \ldots = m_r$ и $m_r > m_i$ при $i > r$. Пусть W — гиперплоскость пространства V, натянутая на векторы $e_2, \ldots, e_n$, и предположим, что $v = \sum a_i e_i \notin W$ (т. е. $a_1 \neq 0$). Тогда вычисление в п. 13.3 показывает, что

$$(*) \qquad \lambda(\infty)[v] = [a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r].$$

Пусть H — гиперплоскость $\mathscr{P}(W)$ в проективном пространстве $\mathscr{P}(V)$. Наша цель — показать, что $r=1$ и что точка $x(\lambda)=[e_1]$ обладает свойством, сформулированным в утверждении (1). Кроме того, мы докажем, что множество U в утверждении (2) совпадает с $X-(X\cap H)$, откуда, с учетом п. 13.7, будет следовать утверждение (2).

Предположим, что $r>1$. Имеется бесконечное множество элементов $b\in K$ и векторов v вида $v=e_1+be_2+\ldots$, таких, что $[v]\in X$. В противном случае многообразие X содержалось бы в объединении гиперплоскости H и конечного числа гиперплоскостей $a_2=ba_1$. Но это не возможно, ибо многообразие X неприводимо и не содержится ни в какой гиперплоскости. Так как $r>1$, то из равенства (*) вытекает, что при $v=e_1+be_2+\ldots$ точки $\lambda(\infty)[v]$ различны при различных b. Таким образом, мы получаем бесконечное число неподвижных точек множества $\operatorname{im}(\lambda)$ в X, что противоречит предположению о полурегулярности параметра λ. Таким образом, $r=1$.

Пусть теперь $r=1$. Из соотношения (*) следует, что $\lambda(\infty)[v]=[e_1]$ тогда и только тогда, когда $v\in W$. Поэтому

$$\{x\in X\mid \lambda(\infty)\,x=[e_1]\}=X-(X\cap H),$$

что доказывает утверждения (1) и (2).

Для доказательства утверждения (3) рассмотрим параметр $\lambda'\in \mathrm{X}_*(T)_{sr}$. Пусть $m_i'=\langle\alpha_i, \lambda_i'\rangle$. Как показывает проведенное выше рассуждение, для подходящего j число m_j' строго больше числа m_i' для всех $i\neq j$, и $x(\lambda')=[e_j]$. Таким образом, $x(\lambda')=$ $=x(\lambda)\Leftrightarrow m_1'>m_i'$ для всех $i>1\Leftrightarrow\langle\alpha_1, \lambda'\rangle>\langle\alpha_i, \lambda'\rangle$ для всех $i>1\Leftrightarrow\langle\beta_i, \lambda'\rangle>0$ для всех $i>1$, где $\beta_i=\alpha_1-\alpha_i$. Это доказывает утверждение (3), ибо характеры α_i тора T тривиальны на $T\cap R(G)$.

Пусть f: $G\to G'$ — *изоморфизм* алгебраических групп, и пусть $T'=f(T)$. При $\lambda\in \mathrm{X}_*(T)_{sr}$, очевидно, $f\circ\lambda\in \mathrm{X}_*(T')_{sr}$ и $B(\lambda\circ f)=$ $=f(B(\lambda))$. Предположим теперь, что $n\in N_G(T)$ и $f=\operatorname{Int}(n)$. Тогда $T'=T$ и, если мы введем обозначение ${}^n\lambda=\operatorname{Int}(n)\circ\lambda$, то

$$B({}^n\lambda)={}^nB(\lambda)\quad \text{при}\quad n\in N_G(T).$$

13.9. Следствие. *Пусть T — максимальный тор, $W=W(T, G)$ и $X=G/B_0$, как и выше. Тогда*

(1) *если* $\dim X\geqslant 1$, *то* $\operatorname{card} W\geqslant 2$;

(2) *если* $\dim X\geqslant 2$, *то* $\operatorname{card} W\geqslant 3$.

Доказательство. Напомним, что группа W действует однотранзитивно на многообразии X^T (см. пп. 11.16, 11.19); следовательно, $\operatorname{card} W=\operatorname{card} X^T$ и утверждение (1) вытекает из предложения 13.4. Пусть теперь $\dim X\geqslant 2$. Выберем параметр $\lambda\in \mathrm{X}_*(T)_{sr}$ и положим $S=\operatorname{im}(\lambda)$. Тогда множество X^S конечно и T-инвариантно, так что $X^S=X^T$, и достаточно показать, что $\operatorname{card} X^S\geqslant 3$.

Пусть Y — сечение многообразия X T-инвариантной гиперплоскостью, такое, что оператор $\lambda(\infty)$ проектирует окрестность $X-Y$ точки $x(\lambda)$ в точку $x(\lambda)$ (см. п. 13.8). Тогда множество Y замкнуто и $\dim Y = \dim X - 1 \geqslant 1$. Согласно предложению 13.4, на множестве Y имеется две неподвижные относительно группы S точки, и $x(\lambda) \notin X$ — третья неподвижная точка в X.

13.10. Камеры Вейля. Пусть T — *максимальный* тор и $W = W(T, G)$. При $\lambda \in X_*(T)_{sr}$ рассмотрим ассоциированную группу Бореля $B(\lambda) \in \mathscr{B}^T$, построенную в п. 13.8. Пусть $B \in \mathscr{B}^T$. Тогда множество

$$WC(B) = \{\lambda \in X_*(T)_{sr} \mid B(\lambda) = B\}$$

называется *камерой Вейля* группы B (относительно тора T группы G).

Предложение. (1) *Имеется множество $\{\beta_i\}$ нетривиальных характеров тора T, тривиальных на $T \cap R(G)$ и таких, что*

$$WC(B) = \{\lambda \in X_*(T)_{sr} \mid \langle\beta_i, \lambda\rangle > 0 \text{ для каждого } i\}.$$

(2) *Группа Вейля W действует однотранзитивно на множестве камер Вейля $WC(B)$ группы $B \subset \mathscr{B}^T$.*

Доказательство. Из утверждения (2) следует, что каждая камера Вейля непуста, и тогда (1) совпадает с утверждением (3) предложения п. 13.8.

Если $n \in N_G(T)$ и $\lambda \in WC(B)$, то (см. конец п. 13.8) $B({}^n\lambda) = {}^nB(\lambda)$, так что ${}^nWC(B) = WC({}^nB)$. Если $n \in G^T$, то ${}^n\lambda = \lambda$, и, следовательно, группа $W = N_G(T)/G^T$ действует на множестве камер Вейля таким образом, что отображение f: $B \to WC(B)$ эквивариантно относительно W. Так как группа W транзитивна на $\mathscr{B}^T$, то каждое множество $WC(B)$ непусто (ибо хотя бы одно из них непусто). Но $WC(B)$ определяет группу B; значит, f биективно. Однотранзитивность группы W на множестве камер Вейля $WC(B)$ следует теперь из однотранзитивности W на $\mathscr{B}^T$ (п. 11.19).

13.11. Централизаторы сингулярных подторов коразмерности 1. Пусть S — сингулярный подтор коразмерности 1 в максимальном торе T, и пусть $B \in \mathscr{B}^T$. Тогда T — максимальный тор в группе G^S, и из предложения п. 11.18 следует, что B^S — подгруппа Бореля группы G^S. В самом деле, отображение $B \to B^S$ является эпиморфизмом множества $\mathscr{B}(G)^T$ на множество $\mathscr{B}(G^S)^T$ [1]). В записи $WC(B^S)$ группу B^S следует рассматривать как элемент множества $\mathscr{B}(G^S)^T$.

Предложение. (1) *Группа Вейля $W(T, G^S)$ имеет порядок* 2. (2) *В $X_*(T)$ имеет место соотношение $WC(B) \subset WC(B^S)$.*

---

[1]) Применяем упомянутое предложение к группе G^S; тогда $\mathscr{B}(G)^T = \mathscr{B}(G^S)^T = \mathscr{B}(G^T)$. — *Прим. перев.*

(3) *Если C — один из двух элементов множества $\mathscr{B}(G^S)^T$, то имеется нетривиальный элемент $\alpha \in X(T/S) \subset X(T)$, такой, что для любого $B \in \mathscr{B}^T$*

$$B^S = C \Leftrightarrow \langle \alpha, \lambda \rangle < 0 \quad \text{для всех} \quad \lambda \in WC(B).$$

Если C' — другой элемент множества $\mathscr{B}(G^S)^T$, то

$$B^S = C' \Leftrightarrow \langle \alpha, \lambda \rangle < 0 \quad \text{для всех} \quad \lambda \in WC(B).$$

Доказательство. (1) Положим $H = G^S$, и пусть π: $H \to H' = H/R(H)$ — факторный морфизм. Тогда $T' = \pi(T)$ — максимальный тор в группе H', и предложение 11.20 утверждает, что отображение $W(T, H) \to W' = W(T', H')$ является изоморфизмом. Мы сначала покажем, что $\dim T' = 1$, а затем выведем из этого факта, что $\operatorname{card} W' = 2$, откуда будет следовать утверждение (1).

Так как $S \subset R(H)$ и S имеет коразмерность 1 в торе T, то $\dim T' = \dim(T/T \cap R(H)) \leqslant 1$. С другой стороны, так как тор S сингулярен, то группа $H = G^S$ неразрешима; следовательно, группа H' неразрешима и, согласно п. 11.5, $T' \neq \{e\}$. Таким образом, $\dim T' = 1$.

Из п. 13.9 (утверждение 1 следствия) вытекает теперь, что $\operatorname{card} W' \geqslant 2$. С другой стороны, группа $W' = N_{H'}(T')/Z_{H'}(T')$ действует на T' точно, и так как $T' \cong \mathbf{GL}_1$, то (см. пп. 8.3, 8.4) группа $\operatorname{Aut}(T') \cong \mathbf{GL}_1(\mathbf{Z})$ имеет порядок 2. Следовательно, $\operatorname{card} W' \leqslant 2$.

(2) Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/B \\ \cup & & \uparrow j \\ G^S & \xrightarrow[\pi^S]{} & G^S/B^S \end{array}$$

где π и π^S — факторные морфизмы и $j(\pi^S(g)) = g \cdot \pi(e)$. Тогда отображение j инъективно. Если $\lambda \in WC(B)$, то $\pi(e) = x(\lambda)$, так что $\lambda(\infty)$ проектирует открытое множество на точку $\pi(e)$. Следовательно, при соответствующем действии на многообразии G^S/B^S оператор $\lambda(\infty)$ проектирует открытое множество на точку $\pi^S(e)$, т. е. группа B^S ассоциирована с параметром λ в группе G^S, что и требовалось доказать.

(3) Из (1) и утверждения (2) предложения п. 13.10 вытекает, что имеются две камеры Вейля тора T как тора в группе G^S. Согласно утверждению (1) предложения п. 13.10, каждая из них имеет вид $\{\lambda \in X_*(T)_{sr} \mid \langle \beta_i, \lambda \rangle > 0$ для каждого $i\}$. Здесь через $X_*(T)_{sr}$ обозначается множество параметров λ, которые полурегулярны в группе G^S, и β_i — нетривиальные характеры тора T/S. Так как $\dim T/S = 1$, то $X(T/S) \cong \mathbf{Z}$. Поскольку имеются две непустые камеры Вейля, то они должны иметь вид

$$\{\lambda \in X_*(T)_{sr} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\},$$

где α — образующая группы $X(T/S) \cong \mathbf{Z}$. В частности, $WC(B)$ имеет такой вид для некоторого α. Но в группе $\mathbf{Z}$ лишь два элемента $1, -1$ могут служить образующей, так что (3) вытекает из (2).

13.12. Следствие. *Пусть Q — сингулярный подтор коразмерности 1 в торе T, отличный от S. Тогда существует подгруппа Бореля $B' \in \mathscr{B}^T$, такая, что*

$$B'^S = B^S \quad \text{и} \quad B'^Q \neq B^Q.$$

Доказательство. Используя утверждение (3) предложения п. 13.11, мы можем найти нетривиальные характеры $\alpha \in X(T/S)$ и $\beta \in X(T/Q)$, такие, что при $B' \in \mathscr{B}^T$ и $\lambda' \in WC(B')$

$$B'^S = B^S \Leftrightarrow \langle \alpha, \lambda' \rangle > 0,$$
$$B'^Q = B^Q \Leftrightarrow \langle \beta, \lambda' \rangle > 0.$$

Так как $S \neq Q$, то характеры α и β линейно независимы в $X(T)$ (ибо их ядра имеют различные связные компоненты); поэтому мы можем найти такой параметр $\lambda' \in X_*(T)_{sr}$, что $\langle \alpha, \lambda' \rangle > 0$ и $\langle \beta, \lambda' \rangle < 0$. Тогда группа $B' = B(\lambda')$ является искомой группой Бореля.

13.13. Группы полупростого ранга 1 и группа $\mathbf{PGL}_2$. Пусть T — максимальный тор группы G и $W = W(T, G)$. Число $\dim(T/T \cap R(G))$, т. е. размерность максимального тора группы $G/R(G)$, называется *полупростым рангом* группы G. Ввиду сопряженности максимальных торов полупростой ранг зависит только от G. Например, группа $\mathbf{PGL}_2$ неразрешима и размерность ее максимального тора равна 1 (см. п. 10.8); следовательно, ее полупростой ранг равен 1.

Предложение. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *полупростой ранг группы G равен* 1;

(2) $\operatorname{card} W = 2$;

(3) $\dim G/B = 1$ (*где* $B \in \mathscr{B}$);

(4) *многообразие G/B изоморфно* $\mathbf{P}_1$;

(5) *существует сюръективный морфизм* $\varphi\colon G \to \mathbf{PGL}_2$, *такой, что* $\ker(\varphi) = \bigcap_{B' \in \mathscr{B}} B'$ (*так что* $(\ker(\varphi))^0 = R(G)$).

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) содержится в доказательстве утверждения (1) предложения п. 13.11.

(2) $\Rightarrow$ (3). Поскольку $\operatorname{card} W = \operatorname{card} \mathscr{B}^T > 1$, то группа G неразрешима, так что $\dim G/B \geqslant 1$. Так как $\operatorname{card} W < 3$, то из утверждения (2) следствия 13.9 вытекает, что $\dim G/B < 2$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $\lambda \in X_*(T)$ — регулярный параметр. Тогда группа $\mathbf{GL}_1$ действует (посредством λ) на многообразии G/B не-

тривиально, ибо тор T действует нетривиально. Из того факта, что G/B — неприводимое многообразие размерности 1, вытекает, что если точка $x \in G/B$ не является неподвижной относительно T, то орбитное отображение $\mathbf{GL}_1 \to G/B$, $t \to \lambda(t)\,x$, является доминантным морфизмом. Следовательно, для полей функций на этих многообразиях имеет место включение $K(G/B) \subset K(\mathbf{GL}_1)$. Но $K(\mathbf{GL}_1)$ — поле функций от одной переменной; по теореме Люрота $K(G/B)$ — также поле функций от одной переменной. Многообразие G/B есть полная гладкая кривая; следовательно, она изоморфна проективному пространству $\mathbf{P}_1$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Если $G/B \cong \mathbf{P}_1$, то, как следует из п. 10.8, действие группы G на G/B задается морфизмом φ: $G \to \mathbf{PGL}_2\,(= \mathrm{Aut}(\mathbf{P}_1))$. Ясно, что ядро этого морфизма равно $\bigcap B'\ (B' \in \mathscr{B})$, так что $(\ker(\varphi))^0 = R(G)$. Так как группа G неразрешима (ибо $B \neq G$), то в силу следствия 11.6, $\varphi(G) > 2$. Но группа $\mathbf{PGL}_2$ связна и имеет размерность 3. Следовательно, морфизм φ сюръективен.

(5) $\Rightarrow$ (1). Из существования морфизма φ вытекает, очевидно, что полупростой ранг группы G совпадает с полупростым рангом группы $\mathbf{PGL}_2$, который равен 1.

Следствие. *Предположим, что полупростой ранг группы G равен* 1; *пусть B_0, B_1, B_∞ — различные подгруппы Бореля группы G. Положим $I = \bigcap B\ (B \in \mathscr{B})$. Тогда $(B_0 \cap B_1)/I \cong \mathbf{GL}_1$ и $B_0 \cap B_1 \cap B_\infty = I$.*

Доказательство. Существует сюръективный морфизм φ: $G \to \mathbf{PGL}_2$ с ядром I, такой, что группы B_i являются стабилизаторами различных точек многообразия $\mathbf{P}_1$. (Если подействовать на $\mathbf{P}_1$ подходящим автоморфизмом, то можно даже считать, что B_i — стабилизатор точки $i\ (i = 0, 1, \infty)$ (см. п. 10.8).) Следствие вытекает из того факта, что группа $\mathbf{PGL}_2$ действует однотранзитивно на тройках различных точек в пространстве $\mathbf{P}_1$ и что подгруппа, оставляющая неподвижными пары точек, изоморфна $\mathbf{GL}_1$ (см. п. 10.8).

13.14. Редуктивные группы полупростого ранга 1. Пусть G — редуктивная группа полупростого ранга 1 и T — максимальный тор в G. Положим

$$I = \bigcap_{B \in \mathscr{B}} B \quad \text{и} \quad \mathscr{B}^T = \{B, B'\}.$$

Пусть

$$\mathfrak{g} = L(G), \ \mathfrak{b} = L(B), \ \mathfrak{b}' = L(B')$$

— соответствующие алгебры Ли.

Предложение. (1) $I(T) = B \cap B' = T$ и $I = Z(G)$.

(2) $B_u \cong \mathbf{G}_a$ *и действие тора T на группе B_u задается образующей α группы $X(T/T \cap I)$. Далее, $\Phi(T, B) = \{\alpha\}$ и $\mathfrak{b} = L(T) \oplus \mathfrak{g}_\alpha$. Кроме того, B_u — единственная T-инвариантная подгруппа группы G,*

такая, что $L(B_u) = \mathfrak{g}_\alpha$. *Подобные же утверждения имеют место по отношению к группе* B' *с заменой характера* α *на* $-\alpha$.

(3) $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' = L(T)$,

$\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{g} = L(T) \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$,

$\Phi(T, G) = \{\alpha, -\alpha\}$.

(4) $WC(B) = \{\lambda \in X_*(T) \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\}$,

$WC(B') = \{\lambda \in X_*(T) \mid \langle \alpha, \lambda \rangle < 0\}$.

Доказательство. Согласно предложению п. 13.13, имеется сюръективный морфизм $\varphi: G \to \mathbf{PGL}_2$ с ядром I. Поскольку $R_u(G) = \{e\}$, то морфизм $\varphi: B_u \to \varphi(B_u) \cong \mathbf{G}_a$ имеет конечное ядро, так что B_u — связная унипотентная группа размерности 1. Согласно теореме 10.9, существует изоморфизм $\theta: \mathbf{G}_a \to B_u$ и изоморфизм $\theta': \mathbf{G}_a \to B'_u$. Если $t \in T$ и $b \in \mathbf{G}_a$, то

$$t\theta(b)t^{-1} = \theta(t^\alpha b)$$

для подходящего $\alpha \in X(T)$ (см. п. 10.10). Переходя к группе $\mathbf{PGL}_2$, мы видим, что характер α порождает группу $X(\varphi(T)) = X(T/T \cap I)$ и что действие тора T на группе B'_u задается характером $-\alpha$ (п. 10.8).

Тогда группа $B_u \cap B'_u$ соответствует собственной подгруппе группы $\mathbf{G}_a$, инвариантной относительно нетривиального линейного действия тора T, задаваемого характером α; таким образом, $B_u \cap B'_u = \{e\}$. Так как $B = T \cdot B_u$, то $B \cap B' = T \cdot (B_u \cap B') = T \cdot (B_u \cap \cap B'_u) = T$. Но $T \subset I(T) = (B \cap B')^0$, что доказывает первую часть утверждения (1). Отсюда следует далее, что $I \subset T$, так что I — диагонализируемый нормальный делитель группы G. По теореме жесткости $I \subset Z(G)$. Обратное включение вытекает из следствия 11.11, что доказывает (1).

Так как $B = T \cdot B_u$, то $\mathfrak{b} = L(T) \oplus L(B_u)$ и сделанные выше замечания показывают, что $L(B_u)$ — одномерное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}_\alpha$. Подобным же образом $\mathfrak{b}' = L(T) \oplus L(B'_u)$, причем $L(B'_u)$ — одномерное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Следовательно, $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' = L(T)$, откуда, подсчитывая размерности, получаем $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{g}$, ибо

$$\dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') = 2 + \dim T,$$

$$\dim G = \dim I + \dim \mathbf{PGL}_2 = \dim I + 3$$

и

$$\dim T = \dim I + \dim \varphi(T) = \dim I + 1.$$

Это доказывает все утверждения в (2) и (3), кроме следующего: если H — связная T-инвариантная подгруппа, такая, что $L(H) = \mathfrak{g}_\alpha$, то $H = B_u$.

Так как $\dim H = 1$, то H — либо тор, либо унипотентная группа. Если бы группа H была тором, то ввиду жесткости группы T и H были бы поэлементно перестановочны. Но тор T действует на $L(H)$ нетривиально, откуда следует, что $H = H_u$. Заметим далее, что $T \cdot H$ — связная разрешимая подгруппа, содержащая T; поэтому группа $T \cdot H$ содержится либо в B, либо в B'. Так как $\Phi(T, B') = \{-\alpha\}$ и $\Phi(T, T \cdot H) = \{\alpha\}$, то $T \cdot H \subset B$ и, следовательно, $H \subset B_u$. Подсчет размерностей показывает, что $H = B_u$.

Докажем, наконец, утверждение (4). Пусть π: $G \to G/B$ — факторный морфизм; положим $x_0 = \pi(e)$. Так как B — стабилизатор точки x_0 и $B'_u \cap B = \{e\}$, то множество $\{\theta'(c)\, x_0\}$ $(c \in \mathbf{G}_a)$ содержит некоторую окрестность точки x_0 на многообразии $G/B \cong \mathbf{P}_1$. Предположим, что параметр $\lambda \in \mathrm{X}_*(T)$ таков, что $m = \langle \alpha, \lambda \rangle > 0$. При $c \in \mathbf{G}_a$ и $t \in \mathbf{GL}_1$ имеем

$$\lambda(t)\, \theta'(c)\, x_0 = \lambda(t)\, \theta'(c)\, \lambda(t)^{-1} x_0 \qquad \text{(тор } T \text{ оставляет неподвижной точку } x_0) =$$

$$= \theta'\left(t^{\langle -\alpha,\, \lambda \rangle} c\right) x_0 = \theta'\left(t^{-m} c\right) x_0.$$

Полагая здесь t^{-1} равным 0 (или t равным ∞), получаем

$$\lambda(\infty)\, \theta'(c)\, x_0 = \theta'(0)\, x_0 = x_0.$$

Отсюда следует, что λ — полурегулярный параметр и что $x(\lambda) = x_0$. Это показывает, что

$\langle \alpha, \lambda \rangle > 0 \Rightarrow$ параметр λ полурегулярен и $x(\lambda) = x_0$ (т. е. $B(\lambda) = B$).

Согласно утверждению (3) предложения п. 13.11, условие $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$ определяет в $\mathrm{X}_*(T)$ камеру Вейля, так что

$$WC(B) = \{\lambda \in \mathrm{X}_*(T) \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\}.$$

Подобным же образом получается аналог этого утверждения для B'.

13.15. Обратимся теперь к общей ситуации, т. е. группа G более не предполагается полупростой группой ранга 1, если противное не оговорено.

Лемма. *Пусть S и Q — различные сингулярные торы коразмерности 1 в максимальном торе T, и пусть $B \in \mathscr{B}^T$.*

(1) $\dim\left(B_u^S / B_u^S \cap I(T)_u\right) \leqslant 1$.

(2) $I(B^S)^Q \subset I(T)$.

Доказательство. (1). Согласно утверждению (1) предложения п. 13.11 и утверждению (5) предложения п. 13.13, существует сюръективный морфизм φ: $G^S \to \mathbf{PGL}_2$, такой, что $(\ker(\varphi))^0 = R\left(G^S\right)$ и $\varphi\left(B_u^S\right) \cong \mathbf{G}_a$. Отсюда следует, что $\dim\left(B_u^S / \left(B_u^S \cap R_u\left(G^S\right)\right)\right) = 1$. Утверждение (1) вытекает теперь из соотношения $R(G^S) \subset I(S) \subset I(T)$ (см. п. 11.18).

(2) Выберем группу B', как в п. 13.12. Так как $B^Q \neq B'^Q$, то из следствия в п. 13.13 вытекает, что $B^Q \cap B'^Q = T \cdot R_u(G^Q)$, и, согласно п. 11.18, эта группа содержится в группе $I(T)$. Так как $B'^S = B^S$, то $I(B^S) \subset B \cap B'$ и $I(B^S)^Q \subset B^Q \cap B'^Q \subset I(T)$.

13.16. Теорема. *Пусть T — максимальный тор в группе G. Тогда $I(T)_u = R_u(G)$.*

Доказательство. Ясно, что $R_u(G) \subset I(T)_u$ и что последняя группа связна и унипотентна. Остается показать, что группа $I(T)_u$ — нормальный делитель группы G.

Согласно предложению 13.6, группа G порождается подгруппами Бореля $B \in \mathscr{B}^T$. Комбинируя это с утверждением (2) следствия 9.5, получаем, что группа G порождается группами B^S при $B \in \mathscr{B}^T$, когда S пробегает различные подторы коразмерности 1 тора T. Так как $B^S = T \cdot B_u^S$, то достаточно показать, что группа B_u^S нормализует группу $I(T)_u$. Отметим сначала, что

(*) если S — полурегулярный тор, то, согласно предложению п. 13.1, $B^S \subset G^S \subset I(S) \subset I(T)$, так что $B_u^S \subset I(T)_u$.

Предположим теперь, что S — сингулярный тор. Тогда группа B_u^S содержится в группе

$$H = (I(B^S) \cap B_u)^0,$$

так что остается показать, что группа H нормализует группу $I(T)_u$. Заметим, что $I(T)_u \subset H$ и что H — связная унипотентная группа, которая нормализуется тором T (ибо группы B^S и B_u нормализуются тором T). Поэтому если мы покажем, что $\dim H \leqslant \dim I(T)_u + 1$, то из леммы п. 12.1 будет следовать, что группа H нормализует группу $I(T)_u$.

Известно (см. утверждение (2) следствия 9.5), что группа H порождается группами H^Q, когда Q пробегает подторы коразмерности 1 в T. Если $Q = S$, то, очевидно, $H^S = B_u^S$ и из утверждения (1) леммы п. 13.15 следует, что $\dim(H^S/(H^S \cap I(T)_u)) \leqslant 1$. Если $Q \neq S$ и тор Q полурегулярен, то, согласно утверждению (*), $H^Q \subset B_u^Q \subset I(T)_u$. Предположим, наконец, что тор Q сингулярен и отличен от S. Тогда, очевидно, $H^Q \subset I(B^S)^Q$, причем последняя группа содержится в $I(T)$, согласно утверждению (2) леммы п. 13.15. Следовательно, $H^Q \subset I(T)_u$ для всех $Q \neq S$, так что естественный морфизм

$$H^S/(H^S \cap I(T)_u) \to H/I(T)_u$$

сюръективен. Как мы отмечали ранее, левая часть имеет размерность $\leqslant 1$, что завершает доказательство.

13.17. Из доказанной теоремы можно извлечь ряд важных фактов. Примем обозначения: T — максимальный тор, S — подтор группы G.

Следствие 1. (a) $R_u(G^S) = R_u(G)^S$.
(b) *Если подтор S полурегулярен, то* $(G^S)_u = R_u(G)^S$.
(c) $G^T = T \cdot R_u(G)^T$.

Доказательство. Утверждение (c) есть частный случай утверждения (b), а (b) вытекает из (a), ибо $R_u(H) = H_u$, когда H — связная разрешимая группа (теорема 10.6).

При доказательстве утверждения (a) мы можем предполагать, что $S \subset T$ (п. 11.5). Группа $R_u(G)^S$ — связный унипотентный нормальный делитель группы G^S и, следовательно, $R_u(G)^S \subset R_u(G^S)$. С другой стороны, группа $R_u(G^S)$ содержится в каждой подгруппе Бореля группы G^S, а среди них имеются все группы B^S, $B \in \mathscr{B}^T$. В частности, $R_u(G^S) \subset I(T) = T \cdot R_u(G)$ по теореме 13.16, так что $R_u(G^S) \subset R_u(G)^S$.

Следствие 2. *Предположим, что группа G редуктивна, $S \subset T$.*
(a) *Группа G^S редуктивна.*
(b) *Если S — полурегулярный тор, то $G^S = T$. В частности, тор S регулярен.*
(c) $G^T = T$. *Подгруппы Картана группы G совпадают с максимальными торами.*
(d) *Пересечение Z всех максимальных торов совпадает с $Z(G)$.*

Утверждения (a), (b) и (c) непосредственно вытекают из соответствующих утверждений следствия 1. Группа Z — диагонализируемый нормальный делитель; ввиду жесткости торов она содержится в центре группы G. С другой стороны, согласно утверждению (c), группа $Z(G)$ содержится в каждом максимальном торе. Это доказывает утверждение (d).

13.18. Корни в редуктивных группах. Пусть T — максимальный тор в группе G. Автоморфизм группы $X(T)$ называется *отражением*, если он имеет порядок 2 и тривиален на подгруппах коранга 1.

Как и в п. 13.2, положим $\Psi = \Phi(T, G/I(T))$; вместо $\Phi(T, G)$ мы будем писать просто Φ.

Следующая теорема суммирует значительную часть накопленной нами информации о редуктивных группах.

Теорема. *Пусть G — редуктивная группа.*
(1) $\Psi = \Phi$, $L(T) = \mathfrak{g}^T$ *и* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^T \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$.

(2) *Сингулярные торы коразмерности* 1 *в T имеют вид* $T_\alpha = (\ker \alpha)^0$, $\alpha \in \Phi$, *и* $\left(\bigcap_{\alpha \in \Phi} T_\alpha\right)^0 = Z(G)^0$.

(3) *Множество* Φ *порождает подгруппу конечного индекса в группе* $X(T/Z(G)^0) \subset X(T)$. *Если характеры* α *и* β *из* Φ *линейно зависимы, то* $\beta = \pm\alpha$.

(4) *При* $\alpha \in \Phi$ *положим* $G_\alpha = Z_G(T_\alpha)$. *Тогда* G_α — *редуктивная подгруппа полупростого ранга* 1, *причем*

(a) $-\alpha \in \Phi$ *и* $L(G_\alpha) = \mathfrak{g}^T \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$;

(b) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$;

(c) *подгруппа* $W(T, G_\alpha)$ *группы* $W(T, G)$ *порождается отражением* r_α, $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$;

(d) *существует единственная связная* T-*инвариантная подгруппа* U_α *группы* G, *такая, что* $L(U_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$. *Это унипотентная часть подгруппы Бореля группы* G_α, *содержащей тор* T.

(5) *Пусть* $B \in \mathscr{B}^T$.

(a) *Для каждого* $\alpha \in \Phi$ *множество* $\Phi(B) \cap \{\alpha, -\alpha\} = \Phi(T, B^{T_\alpha})$ *состоит в точности из одного элемента. Следовательно, множество* Φ — *объединение непересекающихся множеств* $\Phi(B)$ *и* $-\Phi(B)$;

(b) $WC(B) = \{\lambda \in X_*(T) \mid \langle\alpha, \lambda\rangle > 0$ *для всех* $\alpha \in \Phi(B)\}$;

(c) *если* $\lambda \in WC(B)$, *то* $\Phi(B) = \{\alpha \in \Phi \mid \langle\alpha, \lambda\rangle > 0\}$;

(d) *на группе* $X(T)$ *можно задать структуру линейно упорядоченной группы, так что* $\Phi(B)$ *будет множеством положительных элементов в* Φ;

(e) $L(B) = \mathfrak{g}^T \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi(B)} \mathfrak{g}_\alpha$.

Доказательство. (1) Из теоремы 13.16 и предположения о редуктивности группы G следует, что $I(T) = T$. Ясно, что $\Phi(T, G/T) = \Phi$. Имеет место разложение (см. п. 8.16):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^T \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Согласно предложению п. 9.4, $\mathfrak{g}^T = L(G^T)$ и ввиду следствия 2 п. 13.17 $G^T = T$.

(2) Первое утверждение вытекает из утверждения (1) предложения п. 13.2, ибо $\Psi = \Phi$. Известно (см. п. 13.17, следствие 2), что $Z(G)^0$ — подтор тора T. Если S — подтор тора T, то, согласно п. 9.4, $G^S = G \Leftrightarrow \mathfrak{g}^S = \mathfrak{g} \Leftrightarrow S \subset T_\alpha$ для каждого $\alpha \in \Phi$. Таким образом, $Z(G)^0 = \left(\bigcap T_\alpha\right)^0$.

(3) Ясно, что доказанное только что равенство равносильно условию, что множество Φ порождает подгруппу конечного индекса в группе $X(T/Z(G)^0)$. Если $\alpha, \beta \in X(T)$, то, очевидно, характеры α и β линейно независимы, т. е. равенство $n\alpha = m\beta$ для некоторых отличных от нуля $m, n \in \mathbf{Z}$ может выполняться тогда и только тогда, когда группы $T_\alpha = (\ker(\alpha))^0$ и $T_\beta = (\ker(\beta))^0$ совпадают. В этом случае $\beta \in \Phi(G_\alpha)$, так что последняя часть утверждения (3) будет следовать из утверждения (4) (a), которое влечет за собой равенство $\Phi(T, G_\alpha) = \{\alpha, -\alpha\}$.

(4) Имеем $L(G_\alpha) = \mathfrak{g}^T \oplus \coprod_{T_\alpha \subset T_\beta} \mathfrak{g}_\beta$; из п. 13.11 известно, что группа G_α имеет полупростой ранг 1, а из п. 13.17 — что группа G_α редуктивна. Следовательно, мы можем использовать результаты п. 13.14. Так как $\alpha \in \Phi(G_\alpha)$, то из предложения п. 13.14 вытекает, что $\Phi(G_\alpha) = \{\alpha, -\alpha\}$ и что $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. В частности, $\mathfrak{g}^{T_\alpha} = \mathfrak{g}^T \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, так что $T_\alpha \subset T_\beta$ (при $\beta \in \Phi$) $\Leftrightarrow \beta = \pm\alpha$. Это доказывает утверждения (a) и (b).

Как уже отмечалось, группа $W(T, G_\alpha)$ имеет порядок 2; пусть r_α — ее образующая и n — прообраз элемента r_α в группе $N_{G_\alpha}(T)$. Автоморфизм группы T, индуцированный элементом n, имеет порядок 2 и оставляет неподвижной каждую точку подтора T_α коразмерности 1. Следовательно, множество коммутаторов (n, T) образует подтор коразмерности 1 (ибо он является нетривиальным образом группы $T/T_\alpha \cong \mathbf{GL}_1$). Если $\beta \in \mathrm{X}(T)$, то $\beta(ntn^{-1}) = \beta(t)$ для всех $t \in T \Leftrightarrow \beta((n, T)) = \{1\} \Leftrightarrow (n, T) \subset \ker(\beta)$. Множество таких β образует подгруппу коранга 1 в группе $\mathrm{X}(T)$, не содержащую α. Так как множество $\Phi(G_\alpha) = \{\alpha, -\alpha\}$ инвариантно относительно r_α, то $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$, ибо в противном случае автоморфизм r_α оставлял бы неподвижными элементы подгруппы конечного индекса в группе $\mathrm{X}(T)$ и, следовательно, был бы тождественным. Это доказывает утверждение (c).

Докажем, наконец, утверждение (d). Пусть H — связная T-инвариантная подгруппа группы G, такая, что $L(H) = \mathfrak{g}_\alpha$. Так как $\dim H = 1$, то H — либо тор, либо унипотентная группа. Если H — тор, то ввиду жесткости торов группа H централизует тор T, что противоречит нетривиальности действия тора T на $L(H)$. Следовательно, по теореме 10.9 существует изоморфизм $\theta\colon \mathbf{G}_a \to H$, и мы имеем $t\theta(b)t^{-1} = \theta(t^\alpha b)$ при $t \in T$, $b \in \mathbf{G}_a$. Отсюда следует, что $H \subset G_\alpha$. Теперь существование и единственность группы U_α следует из соответствующих утверждений о группе G_α (см. п. 13.14).

(5) Утверждение (a) вытекает из предложения п. 13.14, ибо $B^{T_\alpha} \subset \mathscr{B}(G_\alpha)^T$ и $\Phi(G_\alpha) = \{\alpha, -\alpha\}$, как отмечалось выше.

Кроме того, из п. 13.11 следует, что

$$WC(B) \subset WC(B^{T_\alpha}) = \{\lambda \in \mathrm{X}_*(T) \mid \langle\alpha, \lambda\rangle > 0\}$$

для каждого $\alpha \in \Phi(B)$. Для доказательства утверждения (b) мы покажем, обратно, что любой параметр $\lambda \in \bigcap_{\alpha \in \Phi(B)} WC(B^{T_\alpha})$ принадлежит камере Вейля $WC(B)$.

Если параметр λ не полурегулярен, то, согласно (2), $S = \operatorname{im}(\lambda) \subset T_\alpha$ для некоторого α, так что $G_\alpha \subset G^S$, а это противоречит тому факту, что параметр λ полурегулярен в группе G_α. Таким образом, параметр λ полурегулярен и определяет группу

$B' = B(\lambda)$; мы должны показать, что $B' = B$. Из предположения вытекает, что $B'^{T_\alpha} = B^{T_\alpha}$ для всех $\alpha \in \Phi$. Но, согласно утверждению (2) п. 9.5, группа B порождается подгруппами B^{T_α} и аналогичное утверждение имеет место для группы B'. Следовательно, $B = B'$, что и требовалось показать.

Очевидно, что утверждение (c) является следствием утверждений (a) и (b).

Докажем утверждение (d). Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — базис группы $X_*(T)$, такой, что $B = B(\lambda_1)$. Для ненулевого характера α мы будем писать, что $\alpha > 0$, если первый отличный от нуля член среди $\langle \alpha, \lambda_i \rangle$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ положителен. Этим определяется линейный порядок на группе $X(T)$. Если $\alpha \in \Phi(B)$, то $\langle \alpha, \lambda_1 \rangle > 0$, так что $\alpha > 0$. Если $\alpha \in \Phi$, $\alpha \notin \Phi(B)$, то, согласно утверждению (a), $-\alpha \in \Phi(B)$, так что $\alpha < 0$.

(e) По определению, если $\mathfrak{b} = L(B)$, то $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^T \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi(B)} \mathfrak{b}_\alpha$. Но, очевидно, $\mathfrak{b}^T = L(T) = \mathfrak{g}^T$ и, если $\alpha \in \Phi(B)$, то $\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$, ибо $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ (утверждение (4) (b)). Теорема доказана.

13.19. Предложение. *Пусть G — связная редуктивная группа и X — полупростой элемент ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда группа $Z_G(X)^0$ редуктивна.*

Доказательство. Сохраним обозначения п. 13.18 и положим $H = Z_G(X)^0$. Согласно предложению 11.8, мы можем считать, что $X \in \mathfrak{t}$. Имеем

$$\mathfrak{z}(X) = \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \qquad (\Psi = \{\alpha \in \Phi,\ d\alpha(X) = 0\}).$$

В соответствии с п. 9.1 $\mathfrak{z}(X) = L(H)$. В частности, если $\alpha \in \Psi$, то $G_\alpha \subset H$. Требуется доказать, что радикал $R_u(H)$ равен единице $\{e\}$. Согласно следствию 9.5, радикал $R_u(H)$ порождается централизаторами сингулярных подторов тора T, значит, их пересечениями с некоторой группой G_α, т. е. наконец, некоторыми подгруппами U_α $(\alpha \in \Psi)$. Но если $U_\alpha \subset R_u(H)$, то группа U_α содержится в унипотентном радикале группы G_α. Последняя группа редуктивна (см. п. 13.17, следствие 2) — противоречие.

Библиографические замечания. Результаты этого параграфа (кроме п. 13.19) принадлежат Шевалле (см. Семинар Шевалле [1], сообщения 10, 11 и 12).

§ 14. СИСТЕМЫ КОРНЕЙ И РАЗЛОЖЕНИЕ БРЮА В РЕДУКТИВНЫХ ГРУППАХ

В этом параграфе связная аффинная группа G предполагается *редуктивной*. Через T обозначается максимальный тор группы G; вместо $\Phi(T, G)$ мы будем писать просто Φ. Для каждого $\alpha \in \Phi$. положим $T_\alpha = (\ker(\alpha))^0$ и $G_\alpha = Z_G(T_\alpha)$.

Группа Вейля $W = W(T, G)$ действует на группе $X(T)$ и множестве Φ, инвариантном относительно нее. Наша цель — показать, что Φ — приведенная система корней в некотором подпространстве пространства $X(T)_{\mathbf{Q}} = X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ с группой Вейля W (см. п. 14.8). Учитывая результаты § 13, нам остается доказать главным образом, что $r_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbf{Z}_\alpha$; это будет сделано в п. 14.6 после некоторой подготовительной работы, которой посвящены пп. 14.3—14.5.

Пусть $B \in \mathscr{B}^T$ и π: $G \to G/B$ — факторный морфизм. Положим $o = \pi(e)$. Разложение Брюа (п. 14.11) означает, что если $U = B_u$, то отображение $w \to Uw(o)$ является биекцией группы W на множество U-орбит на многообразии G/B. Кроме того, при $w \in W$ орбита $Uw(o)$ изоморфна аффинному пространству (клетке) и $w(o)$ — единственная неподвижная относительно тора T точка на $Uw(o)$.

14.1. Теорема. *Пусть* $\lambda \in WC(B)$ *при* $B, B' \in \mathscr{B}^T$. *Следующие условия равносильны*:

(I) $B \cap B' = T$; (i) $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' = L(T)$ ($\mathfrak{b} = L(B)$, $\mathfrak{b}' = L(B')$);

(II) *Морфизм-произведение* $B \times B' \to G$ *является доминантным и сепарабельным*; (ii) $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{g}$;

(III) $B' = B(-\lambda)$; (iii) $\Phi(B') = -\Phi(B)$.

Из условия (III) видно, что существует единственная группа B', удовлетворяющая сформулированным условиям. Она называется группой Бореля, *противоположной* группе Бореля B. „Большая клетка“, ассоциированная с тором T и группой B, есть произведение $B \cdot B'$, которое содержит, согласно условию (II), плотное открытое подмножество группы G.

Доказательство. Из п. 13.18 известно, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^T \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}^T = L(T),$$

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{g}^T \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi(B)} \mathfrak{g}_\alpha,$$

$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{g}^T \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi(B')} \mathfrak{g}_\alpha$$

и Φ — объединение непересекающихся множеств $\Phi(B)$ и $-\Phi(B) = \Phi(B(-\lambda))$. Из этих фактов вытекает эквивалентность утверждений (i), (ii), (iii), (III).

Эквивалентность утверждений (II) и (ii) также очевидна (см. п. АГ. 17.3).

(I)$\Rightarrow$(iii). Предположим от противного, что $B \cap B' = T$ и что имеется характер $\alpha \in \Phi(B) \cap \Phi(B')$. Тогда $B^{T_\alpha} = B'^{T_\alpha} \subset B \cap B'$ — противоречие.

(i)$\Rightarrow$(I). Так как $T \subset B \cap B'$ и $L(B \cap B') \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$, то (i) влечет за собой равенство $T = (B \cap B')^0$. Так как $B = T \cdot B_u$, то $B \cap B' =$

$=T\cdot C$, где $C=B_u\cap B'=B_u\cap B'_u$. Тогда C — конечная группа, которая нормализуется и, следовательно, централизуется связной группой T. Таким образом, $C\subset G^T\cap B_u=T\cap B_u=\{e\}$ (см. п. 13.17, следствие 2).

Следствие 1. *Пусть H — связная группа, T — максимальный тор группы H и B — подгруппа Бореля группы H, содержащая тор T. Существует одна и только одна подгруппа Бореля B' группы H, удовлетворяющая следующим трем эквивалентным друг другу условиям:*

$$B\cap B'=T\cdot R_u(H),\quad \mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'=\mathfrak{t}+L(R_u(H)),\quad \mathfrak{b}+\mathfrak{b}'=\mathfrak{h}.$$

Пусть π: $H\to H'=H/R_u(H)$ — каноническая проекция. Группа H' редуктивна (п. 11.21) и $\pi(B)$ (соответственно $\pi(T)$) — подгруппа Бореля (соответственно максимальный тор) группы H' (п. 11.14). Кроме того, каждая подгруппа Бореля группы H содержит $R_u(H)$ и является прообразом некоторой подгруппы Бореля группы H'.

Следствие 2. *Пусть H — связная группа и P — параболическая подгруппа группы H. Тогда группа P совпадает с нормализатором в G алгебры Ли $L(P)$.*

Пусть $Q=N_G(L(P))$. Тогда группа Q содержит группу P и, следовательно, является параболической подгруппой. Из теоремы 11.15 видно, что группа Q связна. Пусть B — подгруппа Бореля группы G, содержащаяся в P. Если B' — подгруппа Бореля группы Q, то B' сопряжена с B при помощи элемента из группы Q, так что $L(B')\subset L(P)$. С другой стороны, согласно следствию 1, существует такая подгруппа Бореля B' группы Q, что $L(B')+L(B)=L(Q)$. Следовательно, $L(Q)=L(P)$ и $Q=P$.

14.2. Центр и коммутант. Обозначим через $C=Z(G)^0$ „связный центр“ группы G. Так как группа G редуктивна, то C совпадает с $R(G)$ (см. п. 11.21); поэтому группа G/C полупроста.

Предложение. (1) $C=\left(\bigcap_{\alpha\in\Phi}T_\alpha\right)^0=(T^W)^0$.

(2) *Коммутант DG группы G является полупростой группой.*
(3) *$G=C\cdot DG$, и $C\cap DG$ — конечная группа.*

Доказательство. (1) По теореме п. 13.18 (см. утверждение (2)) $C=\left(\bigcap_{\alpha\in\Phi}T_\alpha\right)^0$; очевидно, что $C\subset T^W$. Остается показать, что $(T^W)^0\subset T_\alpha$ для каждого $\alpha\in\Phi$. Согласно п. 13.18 (утверждение (4) (с) теоремы), существует такой элемент $w\in W$, что $w(\alpha)=-\alpha$. Если теперь $t\in T^W$, то ${}^wt=t$, так что $t^\alpha=({}^wt)^\alpha=t^{w(\alpha)}=t^{-\alpha}$. Таким образом, $T^W\subset\ker(2\alpha)$ и $(\ker(2\alpha))^0=(\ker\alpha)^0=T_\alpha$.

(3) Напомним сначала, что группа $\mathbf{PGL}_2$ совпадает со своим коммутантом (п. 10.8). Так как группа G_α/T_α изогенна группе $\mathbf{PGL}_2$,

то $G_\alpha = T_\alpha \cdot DG_\alpha$ для каждого $\alpha \in \Phi$. Известно (п. 13.18), что группы G_α ($\alpha \in \Phi$) порождают группу G, так что остается показать, что $T \subset G \cdot DG$. Положим $D = (N_G(T), T)^0 \subset (DG \cap T)$. Достаточно доказать, что $T = C \cdot D$ или что $T'_{\mathbf{Q}} = C'_{\mathbf{Q}} + D'_{\mathbf{Q}}$, где $T' = X_*(T)$, $C' = X_*(C)$, $D' = X_*(D)$. Но $C' = T'^W$ в силу утверждения (1) и по построению все элементы $(1 - w)\lambda$ ($w \in W$, $\lambda \in T'$) содержатся в группе D'. Тогда подпространство пространства $T'_{\mathbf{Q}}$, натянутое на эти элементы, обладает дополнением $(T'_{\mathbf{Q}})^W = (T'^W)_{\mathbf{Q}}$, так как групповая алгебра $\mathbf{Q}[W]$ полупроста. Это доказывает соотношение $G = C \cdot DG$.

Если мы покажем, что группа $C \cap DG$ конечна, полупростота группы DG будет следовать из того факта, что отображение $DG \to G/C = G/R(G)$ сюръективно и с конечным ядром. Таким образом, доказательство завершается следующей леммой:

Лемма. *Пусть C — центральный тор в связной группе H. Тогда группа $C \cap DH$ конечна.*

Доказательство. Используя точное линейное представление, мы можем считать, что $H \subset GL(V)$. Пусть $V = \coprod V_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), где $V_i = V_{\alpha_i}$, α_i пробегают веса группы C в пространстве V. Тогда $H \subset GL(V)^C = GL(V_1) \times \ldots \times GL(V_n)$. При $t \in C$ в этих координатах имеем $t = (t^{\alpha_1} \cdot 1_{V_1}, \ldots, t^{\alpha_n} \cdot 1_{V_n})$. Далее, если $t \in DH$, то каждая матрица $t^{\alpha_i} \cdot 1_{V_i}$ имеет определитель, равный 1, так что $(t^{\alpha_i})^{m_i} = 1$, где $m_i = \dim V_i$. Следовательно, группа $C \cap DH$ содержится в группе вида $C_1 \times \ldots \times C_n$, где C_i — циклическая группа, порядок которой делит m_i.

Следствие. *Следующие три условия равносильны: группа G полупроста; $G = DG$; группа $Z(G)$ конечна. В этих условиях пусть H — замкнутый связный нормальный делитель группы G. Тогда группа H редуктивна, $Z(H)^0 = (Z(G) \cap H)^0$ и $DH = (DG \cap H)^0$.*

Первое утверждение является очевидным следствием предложения. Далее, $R_u(H) \subset R_u(G)$, так что $R_u(H) = \{e\}$ и группа H редуктивна. Группа $Z(H)^0$ есть тор, являющийся нормальным делителем в G; поэтому (см. п. 8.10, следствие) группа $Z(H)^0$ содержится в центре группы G и в группе $Z(G)^0 \cap H$. Обратное включение очевидно, Ясно, что группа DH содержится в группе $(DG \cap H)^0$. Тот факт, что $(DG \cap H)^0$ не больше группы DH, следует из включения $Z(H)^0 \subset Z(G)$ и предложения.

14.3. Прямо порожденные группы. Пусть $(H_i)_{i \in I}$ — конечное семейство замкнутых связных подгрупп связной группы H. Мы будем говорить, что группа H *прямо порождена* своими подгруппами H_i, если для некоторого упорядочения $i_1, \ldots, i_n$ множества I морфизм-произведение

$$H_{i_1} \times \ldots \times H_{i_n} \to H$$

есть изоморфизм многообразий. Мы будем обозначать эту ситуацию следующим образом:

$$H_{i_1} \cdot H_{i_2} \cdot \ldots \cdot H_{i_n}.$$

Если $n = 2$ и одна из групп нормализует другую, мы получаем в качестве частного случая разложение группы в полупрямое произведение.

14.4. Действие тора T на унипотентных группах. Предположим, что тор T действует на связной унипотентной группе U, причем выполняются следующие условия (множество $\Phi(T, U)$ мы обозначаем для краткости через $\Phi(U)$):

(i) Каждый вес α группы T в пространстве $\mathfrak{u} = L(U)$ отличен от нуля, так что

$$\mathfrak{u} = \coprod_{\alpha \in \Phi(U)} \mathfrak{u}_\alpha,$$

и $\dim \mathfrak{u}_\alpha = 1$ для каждого $\alpha \in \Phi(U)$.

(ii) Различные корни $\alpha, \beta \in \Phi(U)$ линейно независимы, т. е. подторы $T_\alpha = (\ker(\alpha))^0$ и $T_\beta = (\ker(\beta))^0$ различны.

Предложение. (1) *Если $\alpha \in \Phi(U)$, то $U_\alpha = U^{T_\alpha}$ является единственной T-инвариантной замкнутой подгруппой группы U с алгеброй Ли $\mathfrak{u}_\alpha$.*

(2) *Пусть Λ — множество замкнутых T-инвариантных подгрупп группы U.*

(a) *Всякая группа $H \in \Lambda$ связна и прямо порождается подгруппами*

$$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Phi(H)\} = \{U_\alpha \mid \mathfrak{u}_\alpha \in \mathfrak{h}\}$$

в любом порядке.

(b) *$H \to \mathfrak{h}$ — структурный мономорфизм структуры подгрупп Λ на структуру T-инвариантных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{u}$.*

(c) *Если H, ${}^xH \in \Lambda$ для некоторого $x \in U$, то $H = {}^xH$.*

Доказательство. Известно (см. п. 9.4, предложение), что для подтора S тора T группа U^S связна и $L(U^S) = \mathfrak{u}^S = \coprod_{S \subset T_\beta} \mathfrak{u}_\beta$. Если положить $S = T$, то $U^T = \{e\}$. Полагая $S = T_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \Phi(U)$, мы видим, что группа U_α связна и ввиду предположения (ii) $L(U_\alpha) = \mathfrak{u}_\alpha$. Единственность группы U_α следует из части (a) утверждения (2), которую мы сейчас докажем.

Пусть $H \in \Lambda$. Предположим сначала, что группа H *связна*. Мы знаем (см. п. 9.4, предложение), что группа H порождается подгруппами H^{T_α} $(\alpha \in \Phi(U))$. Тогда $H^{T_\alpha} \subset U_\alpha$ и, если $\mathfrak{h} = L(H)$, то $L(H^{T_\alpha}) = \mathfrak{h}^{T_\alpha} = \mathfrak{h}_\alpha \subset \mathfrak{u}_\alpha$. Принимая во внимание предположение (i), получаем, что $\dim U_\alpha = \dim \mathfrak{u}_\alpha = 1$. Таким образом, либо

$$H^{T_\alpha} = \{e\}, \quad \mathfrak{h}_\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \alpha \notin \Phi(H),$$

либо

$$H^{T_\alpha} = U_\alpha, \quad \mathfrak{h}_\alpha = \mathfrak{u}_\alpha \quad \text{и} \quad \alpha \in \Phi(H).$$

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторое упорядочение множества $\Phi(H)$, и пусть

$$f\colon P = U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_n} \to H$$

— отображение-произведение. Для доказательства части (a) утверждения (2) мы должны убедиться, что f — изоморфизм многообразий. Ясно, что дифференциал $(df)_e$ — изоморфизм, так что f — доминантный и сепарабельный морфизм.

Без ограничения общности мы можем выбрать такое упорядочение множества $\Phi(H)$, что группы U_{α_i} при $1 \leqslant i \leqslant m$ не содержатся в группе $Z(H)$, а при $i > m$ содержатся. Будем различать два случая:

(I) $m = 0$, т. е. группа H коммутативна. Тогда группа P удовлетворяет предположениям (i) и (ii) (если P фигурирует в качестве U) и f — доминантный T-эквивариантный гомоморфизм с конечным ядром. Но группа T связна, значит, $\ker(f) \subset P^T$, а мы видели выше, что предположения (i) и (ii) приводят к соотношению $P^T = \{e\}$. Таким образом, f — изоморфизм.

(II) Общий случай. Пусть $\pi\colon H \to H/Z(H)^0$ — факторный морфизм. Если $i \leqslant m$, то $U_{\alpha_i} \to \pi(U_{\alpha_i})$ — биективный морфизм, и с помощью индукции по $\dim H$ получаем $\pi(H) = \pi(U_{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot \pi(U_{\alpha_m})$. Следовательно, $H = U_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot U_{\alpha_m} \cdot Z(H)^0$. Согласно случаю (I), $Z(H^0) = U_{\alpha_{m+1}} \cdot \ldots \cdot U_{\alpha_n}$.

Пусть теперь группа $H \in \Lambda$ несвязна. Применяя только что доказанное утверждение к группам H^0 и U, заключаем, что $U = H^0 \cdot V$, где $V = U_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot U_{\beta_q}$ для некоторых $\beta_i \in \Phi(U)$. Тогда группа H является теоретико-множественным декартовым произведением группы H^0 и группы $F = H \cap V$. Так как F — конечное T-инвариантное подмножество группы U, то $F \subset U^T = \{e\}$.

Этим заканчивается доказательство утверждения (1) и части (a) утверждения (2). Часть (b) утверждения (2) непосредственно вытекает из части (a).

Остается доказать часть (c) утверждения (2); предположим, что H, ${}^xH \in \Lambda$ для некоторого $x \in U$. Мы покажем индукцией по $\dim U$, что $H = {}^xH$.

Выберем $U_\gamma \subset Z(U)$. Пусть $\pi\colon U \to U' = U/U_\gamma$ — факторный морфизм. По предположению индукции $\pi(H) = \pi({}^xH)$. Если $U_\gamma \subset H$, то $U_\gamma = {}^xU_\gamma \subset {}^xH$ и $H = {}^xH$. Если же $U_\gamma \not\subset H$, то по крайней мере группа $M = H \cdot U_\gamma$ совпадает с группой ${}^xH \cdot U_\gamma$. Тогда $L(M) = L(H) \oplus \mathfrak{u}_\gamma = L({}^xH) \oplus \mathfrak{u}_\gamma$. Так как алгебры Ли $L(H)$ и $L({}^xH)$ инвариантны относительно T и так как веса тора T на пространстве $\mathfrak{u}$ имеют кратность 1, то $L(H) = L({}^xH)$. Следовательно, на основании утверждения (2) (a) (или (2) (b)) мы имеем $H = {}^xH$.

Замечание. Каждая группа U_α изоморфна группе $\mathbf{G}_a$, следовательно, отображение-произведение

$$f\colon U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_n} \to H$$

в доказательстве предложения приводит к T-эквивариантному изоморфизму группы H (как многообразия) с аффинным пространством K^n, на котором тор T действует диагонально при помощи весов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Отсюда вытекает существование T-эквивариантного изоморфизма многообразий $L(H)$ и H. В характеристике нуль это не что иное, как экспоненциальное отображение.

14.5. Специальные множества корней. Напомним сначала, что при $\alpha \in \Phi$ существует единственная связная T-инвариантная подгруппа U_α с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_\alpha$ (см. п. 13.18, утверждение (4) (b) теоремы).

При $\alpha, \beta \in \Phi$ обозначим через (α, β) множество корней $\gamma \in \Phi$ вида $\gamma = r\alpha + s\beta$, где r, s — натуральные числа. Для подмножеств Ψ и Ψ' множества Φ положим

$$(\Psi, \Psi') = \bigcup (\alpha, \beta) \qquad (\alpha \in \Psi,\ \beta \in \Psi').$$

Мы будем называть множество Ψ *специальным*, если

(a) $$(\Psi, \Psi) \subset \Psi$$

и

(b) существует такой параметр $\lambda \in X_*(T)$, что $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$ для всех $\alpha \in \Psi$.

Без ограничения общности можно считать, что параметр λ в условии (b) регулярен, т. е. что $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in \Phi$. В самом деле, пусть λ' — произвольный регулярный параметр. Так как Φ конечно, то мы можем выбрать столь большое число N, чтобы при $\alpha \in \Phi$ и $\lambda'' = N\lambda + \lambda'$ соотношение $\langle \alpha, \lambda'' \rangle > 0$ выполнялось всякий раз, когда $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$. Тогда, очевидно, параметр λ'' регулярен и может служить также в качестве λ в условии (b).

Предложение. (1) *Если* $\alpha, \beta \in \Phi$ *и* $\beta \neq \mp\alpha$, *то*

$$[\alpha, \beta) = \{\gamma \in \Phi \mid \gamma = r\alpha + s\beta \quad \text{при} \quad r, s \in \mathbf{Z},\ s > 0\}$$

— специальное множество.

Пусть $\Psi \subset \Phi$ — специальное подмножество.

(2) *Множество подгрупп $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Psi\}$ в любом порядке прямо порождает T-инвариантную подгруппу U_Ψ группы G.*

(3) *Если $\alpha \in \Phi$ и $(\alpha, \Psi) \subset \Psi$, то группа U_α нормализует группу U_Ψ.*

Доказательство. Предположим, что $\alpha, \beta \in \Phi$ и $\beta \neq \mp\alpha$. Очевидно, что множество $[\alpha, \beta)$ удовлетворяет условию (a) определения специального множества. Чтобы проверить условие (b), напомним (см. п. 13.18, утверждение (3) теоремы), что при $\beta \neq \mp\alpha$ корни α и β линейно независимы. Следовательно, существует такой параметр $\lambda \in X_*(T)$, что $\langle\alpha, \lambda\rangle = 0$ и $\langle\beta, \lambda\rangle > 0$. Ясно, что этот параметр λ положителен на множестве $[\alpha, \beta)$, откуда вытекает утверждение (1).

Заметим, что $(\alpha, \beta) \subset [\alpha, \beta)$. Так как условие (a) для множества (α, β) очевидно, то (α, β) — специальное множество. Мы хотим воспользоваться следующим фактом:

(*) *Пусть $U_{(\alpha, \beta)}$ — произведение взятых в некотором порядке групп $\{U_\gamma \mid \gamma \in (\alpha, \beta)\}$; тогда $(U_\alpha, U_\beta) \subset U_{(\alpha, \beta)}$* (в случае $(\alpha, \beta) \neq \varnothing$ мы полагаем $U_{(\alpha, \beta)} = \{e\}$).

Докажем сначала утверждения (2) и (3), а затем уже утверждение (*).

Пусть $\Psi \subset \Phi$ — специальное множество. Замечание, предшествующее предложению, показывает, что мы можем выбрать регулярный параметр $\lambda \in X_*(T)$, такой, что $\langle\alpha, \lambda\rangle > 0$ для всех $\alpha \in \Psi$. Положим $B = B(\lambda)$, $U = B_u$ и $\Phi^+ = \Phi(U) = \Phi(B)$. Тогда из п. 13.18 следует, что действие тора T на группе U удовлетворяет условиям (i) и (ii) п. 14.4. Если, кроме того, $\alpha \in \Phi^+$, то группа U_α совпадает с группой, которая обозначалась этим же символом в п. 14.4. Предположим, что произведение (в некотором порядке) групп $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Psi\}$ есть подгруппа; обозначим ее через U_Ψ. Ясно, что U_Ψ — замкнутая T-инвариантная подгруппа группы U с алгеброй Ли $\sum_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$. Из п. 14.4 вытекает тогда, что $\Psi = \Phi(U_\Psi)$ и что группа U_Ψ прямо порождается подгруппами $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Psi\}$ в любом порядке.

Утверждения (2) и (3) мы будем доказывать индукцией по $\operatorname{card} \Psi$. Если $\operatorname{card}(\Psi) = 0$, то оба утверждения очевидны, ибо $U_\Psi = \{e\}$. В противном случае мы можем записать $\Psi = \{\beta\} \cup \Psi'$, где $\beta \notin \Psi'$ и $\langle\beta, \lambda\rangle \leqslant \langle\gamma, \lambda\rangle$ для всех $\gamma \in \Psi'$. Тогда, как легко видеть, Ψ' — специальное множество и $(\beta, \Psi') \subset \Psi'$. Следовательно, по предположению индукции группа $U_{\Psi'}$ прямо порождается подгруппами $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Psi'\}$. Из утверждения (*) вытекает, что группа $U_{\Psi'}$ нормализуется группой U_β (см. доказательство утверждения (3) ниже). В частности, $U_\beta \cdot U_{\Psi'} = U_\Psi$ есть подгруппа группы U, и, как показано в предыдущем абзаце, группа U_Ψ прямо порождается подгруппами $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Psi\}$, взятыми в любом порядке. Это доказывает утверждение (2).

Переходя к доказательству утверждения (3), предположим, что $(\alpha, \Psi) \subset \Psi$. Чтобы убедиться, что группа U_α нормализует группу U_Ψ, достаточно показать, что при $x \in U_\alpha$ и $\gamma \in \Psi$ имеет место включение ${}^x U_\gamma \subset U_\Psi$. Предположим, что $y \in U_\gamma$. Тогда ${}^x y = (xyx^{-1})(y^{-1}y) = (x, y)\, y \in (U_\alpha, U_\gamma)\, U_\gamma$. Таким образом, достаточно проверить, что $(U_\alpha, U_\gamma) \subset U_\Psi$. Но, согласно $(*)$, $(U_\alpha, U_\gamma) \subset U_{(\alpha, \gamma)}$, где $U_{(\alpha, \gamma)}$ есть произведение (в некотором порядке) групп $\{U_\delta \mid \delta \in (\alpha, \gamma)\}$. Так как $(\alpha, \gamma) \subset \Psi$, то $U_{(\alpha, \gamma)} \subset U_\Psi$, что завершает доказательство.

Доказательство утверждения $(*)$. Положим $\Psi = (\alpha, \beta) \cup \{\alpha, \beta\}$. Ясно (см. доказательство утверждения (1) выше), что множество Ψ специально. Следовательно, можно выбрать параметр λ группы $B = B(\lambda)$ и $U = B_u$ и множество $\Phi^+ = \Phi(U)$, такое, что $\Psi \subset \Phi^+$.

Для $\gamma \in \Phi^+$ обозначим через θ_γ изоморфизм $\mathbf{G}_a \to U_\gamma$. Тогда

$$ {}^t\theta_\gamma(x) = \theta_\gamma(t^\gamma x) \qquad (\text{где } t \in T,\ x \in \mathbf{G}_a). $$

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — элементы множества Φ^+ в любом фиксированном порядке. Согласно п. 14.4, морфизм-произведение

$$ U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_n} \to U $$

есть изоморфизм многообразий. Определим морфизм

$$ f\colon\ \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a \to U, \qquad f(x, y) = (\theta_\alpha(x),\ \theta_\beta(y)). $$

Тогда, используя указанный выше изоморфизм, получаем

$$ f(x, y) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \theta_{\alpha_i}(P_i(x, y)) $$

(произведение в возрастающем порядке), где P_i — полиномы от двух переменных. Пусть

$$ P_i(x, y) = \sum_{r,\, s \geqslant 0} c_{i, r, s} x^r y^s. $$

Так как $f(0, y) = e = f(x, 0)$, то, очевидно, каждый одночлен в P_i включает как x, так и y, т. е. действительное суммирование происходит по r, $s > 0$.

При $t \in T$ и x, $y \in \mathbf{G}_a$, как легко видеть, выражение ${}^t f(x, y)$ равно

$$ (\theta_\alpha(t^\alpha x),\ \theta_\beta(t^\beta y)) = \prod_i \theta_{\alpha_i}(P_i(t^\alpha x,\ t^\beta y)), $$

а также равно

$$\prod_i \theta_{\alpha_i}(t^{\alpha_i}P_i(x, y)).$$

Отсюда следует, что для каждого $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{r, s > 0} c_{i, r, s}(t^\alpha x)^r (t^\beta y)^s = \sum_{r, s > 0} c_{i, r, s} t^{\alpha_i} x^r y^s.$$

Поэтому

$$c_{i, r, s} = 0, \qquad \text{если } \alpha_i \neq r\alpha + s\beta.$$

Как мы уже отмечали, $c_{i, r, s} = 0$, если $r = 0$, либо $s = 0$; следовательно, $c_{i, r, s} = 0$, если $\alpha_i \notin (\alpha, \beta)$. Таким образом,

$$P_i = 0, \qquad \text{если } \alpha_i \notin (\alpha, \beta).$$

Это равносильно тому, что мы хотим доказать. Действительно, последнее соотношение означает, что при $x, y \in \mathbf{G}_a$ элемент $(\theta_\alpha(x), \theta_\beta(y))$ содержится в произведении (в указанном порядке) тех групп U_{α_i}, для которых $\alpha_i \in (\alpha, \beta)$.

Замечания. (1) Так как корни α и β линейно независимы, то корень α_i однозначно представляется в виде $r\alpha + s\beta$. Следовательно, наше доказательство показывает, что *каждый полином P_i является одночленом*, равным нулю, если $\alpha_i \notin (\alpha, \beta)$.

(2) Доказанное выше утверждение является некоторым аналогом того факта в теории комплексных полупростых алгебр Ли, что $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(3) В характеристике $p > 0$ может случиться, что $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, даже если $(U_\alpha, U_\beta) = \{e\}$.

14.6. Следствие. *Пусть $\alpha \in \Phi$, и пусть $r_\alpha \in W$ — образующая подгруппы $W(T, G_\alpha)$. Тогда при $\beta \in \Phi$*

$$r_\alpha(\beta) = \beta - n_{\beta, \alpha}\alpha,$$

где $n_{\beta, \alpha} \in \mathbf{Z}$. Кроме того, $n_{\alpha, \alpha} = 2$.

Доказательство. Известно (см. утверждение (4) теоремы п. 13.18), что $r_\alpha(\alpha) = -\alpha = \alpha - 2\alpha$ и что r_α оставляет неподвижной подгруппу коранга 1 в группе $X(T)$. Переходя к пространству $X(T)_\mathbf{Q}$ и дополняя корень α до базиса этого пространства, остальные элементы которого содержатся в гиперплоскости неподвижных относительно преобразования r_α (продолженного на $X(T)_\mathbf{Q}$) элементов, мы видим, что для любого $\gamma \in X(T)_\mathbf{Q}$ число $\gamma - r_\alpha(\gamma)$ есть (рациональное) кратное корня α. В частности, $r_\alpha(\beta) = \beta - n_{\beta, \alpha}\alpha$ для некоторого $n_{\beta, \alpha} \in \mathbf{Q}$; кроме того, $n_{\alpha, \alpha} = 2$ и $n_{\alpha, -\alpha} = -2$. Следовательно, при доказательстве того факта, что $n_{\beta, \alpha} \in \mathbf{Z}$, мы можем предполагать, что $\beta \neq \pm\alpha$.

Согласно предложению п. 14.5, множество корней $[\alpha, \beta)$ является специальным; следовательно, подгруппы $U_\gamma (\gamma \in [\alpha, \beta))$ прямо порождают T-инвариантную подгруппу $H = U_{[\alpha, \beta)}$. Очевидно, что $(\alpha, [\alpha, \beta)) \subset [\alpha, \beta)$ и $(-\alpha [\alpha, \beta)) \subset [\alpha, \beta)$, так что (см. предложение п. 14.5) группы U_α и $U_{-\alpha}$ нормализуют группу H. Так как группы U_α, $U_{-\alpha}$ и T порождают группу G_α, то группа G_α нормализует H. Но автоморфизм r_α индуцируется сопряжением при помощи элемента $n \in N_{G_\alpha}(T)$, и, как мы только что видели, этот элемент n нормализует группу H. Поскольку $\beta \in [\alpha, \beta)$ и $nU_\beta n^{-1} = {}^{r_\alpha}U_\beta = U_{r_\alpha(\beta)}$, то $r_\alpha(\beta) \in [\alpha, \beta)$, т. е. $r_\alpha(\beta) = r\alpha + s\beta$ для подходящих r, $s \in \mathbf{Z}$, $s > 0$. Таким образом, $s = 1$ и $n_{\beta, \alpha} = -r \in \mathbf{Z}$, что и требовалось доказать.

14.7. Обзор по системам корней. Приведенные здесь факты можно найти в книге Серра [2], ч. III, гл. V, или в монографии Джекобсона [1].

Пусть R — подполе поля $\mathbf{R}$ и V — векторное пространство над R. Положим $V^* = \operatorname{Hom}_R(V, R)$. Пусть α — ненулевой вектор в пространстве V. Элемент $r \in GL(V)$ называется *отражением* относительно α, если $r(\alpha) = -\alpha$ и r оставляет неподвижными точки некоторой гиперплоскости H в пространстве V. Таким образом, $r(\beta) = \beta - \langle \beta, \lambda \rangle \alpha$ при $\beta \in V$, где элемент $\lambda \in V^*$ имеет ядро H, и $\langle \alpha, \lambda \rangle = 2$.

Если Φ — конечное множество, порождающее пространство V, то имеется не более одного отражения относительно α, такого, чтобы множество Φ было инвариантным относительно него.

Системой корней называется пара (V, Φ), где V — векторное пространство над R и Φ — множество в V, удовлетворяющее условиям

(1) множество Φ конечно, порождает V и не содержит нуля;

(2) для каждого $\alpha \in \Phi$ имеется отражение r_α относительно α, такого, что множество Φ инвариантно относительно r_α (r_α единственно, согласно сделанному замечанию);

(3) если α, $\beta \in \Phi$, то $r_\alpha(\beta) = \beta - n_{\beta, \alpha}\alpha$, где $n_{\beta, \alpha} \in \mathbf{Z}$.

Элементы множества Φ называются *корнями*.

Понятие изоморфизма системы корней очевидно. Мы будем обычно обозначать систему корней через Φ и говорить, что Φ — система корней в пространстве V. В частности, $\operatorname{Aut}(\Phi) \subset GL(V)$. Подгруппа $W(\Phi)$ группы $\operatorname{Aut}(\Phi)$, порожденная отражениями r_α $(\alpha \in \Phi)$, называется *группой Вейля* системы корней Φ.

Выберем корень $\alpha \in \Phi$ так, чтобы выполнялось условие: если $a\alpha$ — корень, пропорциональный корню α, то $|a| \leqslant 1$. Если $a\alpha$ — один из таких корней, то $-a\alpha = r_\alpha(a\alpha) = a\alpha - n_{a\alpha, \alpha}a$, так что $2a = n_{a\alpha, \alpha} \in \mathbf{Z}$. Таким образом, корни, пропорциональные корню α, имеют вид $\{-\alpha, \alpha\}$ и $\{-\alpha, -\alpha/2, \alpha/2, \alpha\}$. Если последний случай не реализуется, т. е. $\beta = \pm\alpha$ всякий раз, когда корни α и β пропорциональны, то система корней Φ называется *приведенной*.

Зафиксируем систему корней Φ в пространстве V. *Базисом* системы корней Φ называется подмножество S множества Φ, которое образует базис пространства V и таково, что каждый корень β выражается в виде линейной комбинации $\beta = \sum\limits_{\alpha \in S} m_\alpha \alpha$ корней множества S с целыми коэффициентами m_α одного знака. *Положительными корнями* Φ^+ (относительно S) мы называем те корни, для которых все m_α не отрицательны. Таким образом, множество Φ является объединением непересекающихся множеств Φ^+ и $\Phi^- = -\Phi^+$. Множество

$$WC(S) = \{\lambda \in V^* \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in S\}$$

называется *камерой Вейля* множества S (или множества Φ^+); ясно, что $WC(S)$ не изменится от замены множества S на множество Φ^+.

Элемент $\lambda \in V^*$ назовем *регулярным*, если $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in \Phi$. Например, камера Вейля, очевидно, состоит из регулярных элементов. Для регулярного элемента положим

$$\Phi^+(\lambda) = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\}$$

и

$$S(\lambda) = \{\alpha \in \Phi^+(\lambda) \mid \alpha \text{ не является суммой двух элементов из } \Phi^+(\lambda)\}.$$

Теорема. *Пусть Φ — система корней в пространстве V.*

(1) *Если элемент $\lambda \in V^*$ регулярен, то $S(\lambda)$ — базис множества Φ. Это единственный базис, содержащийся в $\Phi^+(\lambda)$. Таким образом, $S \to WC(S)$ — биекция множества базисов на множество камер Вейля.*

Предположим, что Φ — приведенная система корней.

(2) *Группа Вейля $W(\Phi)$ действует однотранзитивно на множестве базисов системы корней Φ и на множестве камер Вейля.*

Пусть S — базис системы корней Φ.

(3) *Корни r_α $(\alpha \in S)$ порождают группу $W(\Phi)$.*

(4) $\Phi = \bigcup\limits_{w \in W(\Phi)} wS.$

Базису S системы корней Φ можно сопоставить так называемую *схему Дынкина* $\operatorname{Dyn}(\Phi, S)$ — конечный граф, вершины которого — элементы множества S с некоторыми „весами“, причем вершины $\alpha, \beta \in S$ соединяются $n_{\alpha,\beta} \cdot n_{\beta,\alpha}$ дугами. Схемы Дынкина дают полную классификацию систем корней. Кроме того, зависимость $(\Phi, S) \to \operatorname{Dyn}(\Phi, S)$ функториальна, и группа автоморфизмов системы корней Φ есть полупрямое произведение группы W

и группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{Dyn}(\Phi, S))$ автоморфизмов схемы Дынкина, причем последняя является стабилизатором множества S в группе $\mathrm{Aut}(\Phi)$.

Система корней (V, Φ) называется *неприводимой*, если пространство V нельзя представить в виде нетривиальной прямой суммы $V = V_1 \dotplus V_2$, такой, что $\Phi = (\Phi \cap V_1) \cup (\Phi \cap V_2)$.

14.8. Теорема. *Пусть пространство $V = \mathrm{X}(T/Z(G)^0)_{\mathbf{Q}}$ канонически отождествлено с подпространством пространства $\mathrm{X}(T)_{\mathbf{Q}}$. Тогда Φ — приведенная система корней в пространстве V с группой Вейля W.*

Доказательство. Из утверждения (3) теоремы п. 13.18 вытекает, что Φ — конечное множество ненулевых векторов, порождающее пространство V и такое, что если корни α и β пропорциональны, то $\beta = \pm\alpha$. В остальной части доказательства мы, используя переход к $G/Z(G)^0$, можем предполагать без ограничения общности, что $Z(G)^0 = \{e\}$.

Из утверждения (4) (с) теоремы п. 13.18 мы получаем отражение r_α пространства $\mathrm{X}(T)$ относительно α, такое, что Φ инвариантно относительно r_α. Распространение отображения r_α на V (которое мы также будем обозначать через r_α) удовлетворяет условию (2) из определения системы корней.

Условие (3) (целостности) установлено в следствии 14.6. Это показывает, что Φ — приведенная система корней в V и что $W(\Phi) \subset W$.

Если мы отождествим V^* с $\mathrm{X}_*(T)_{\mathbf{Q}}$, то из результатов п. 14.7 и из утверждения (5) теоремы из п. 13.18 становится ясно, что камеры Вейля в V^* базисов системы Φ совпадают с подмножествами из V^*, полученными из камер Вейля в $\mathrm{X}_*(T)$ подгрупп Бореля $B \in \mathscr{B}^T$. (Камера Вейля в V^*, соответствующая подгруппе $B \in \mathscr{B}^T$, равна $\{\lambda \in V^* \mid \langle\alpha, \lambda\rangle > 0$ для $\alpha \in \Phi(T, B)\}$.) Согласно утверждению (2) предложения из п. 13.10, W действует однотранзитивно на этих камерах Вейля. Согласно результатам п. 14.7, так же действует и $W(\Phi)$. Следовательно, включение $W(\Phi) \subset W$ является на самом деле равенством.

Следствие. *Пусть $B \in \mathscr{B}^T$, и пусть $S = S(B)$ — множество тех корней $\alpha \in \Phi(B)$, которые не являются суммами двух элементов из множества $\Phi(B)$.*

(1) *Множество S является базисом системы корней Φ. (Мы называем S множеством простых корней, ассоциированных с группой Бореля B (и тором T).)*

(2) *Группа G порождается подгруппами $\{G_\alpha \mid \alpha \in S\}$.*

Доказательство. Утверждение (1) вытекает из следствия 14.6, если учесть тот факт (см. п. 13.18, утверждение (5) теоремы), что $\Phi(B) = \{\alpha \in \Phi \mid \langle\alpha, \lambda\rangle > 0$ при $\lambda \in WC(B)\}$ и для такого λ

$\langle\alpha, \lambda\rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in \Phi$, т. е. λ — регулярный элемент пространства V^*.

(2) Из п. 13.6 нам известно, что группа G порождается множеством подгрупп $B \in \mathscr{B}^T$. Если $B \in \mathscr{B}^T$, то $B = T \cdot B_u$ и, согласно предложению п. 14.4, группа B_u порождается (и даже прямо порождается) подгруппами $U_\alpha (\alpha \in \Phi(B))$. Следовательно, группа G порождается группой T и группами $U_\alpha (\alpha \in \Phi)$.

Пусть H — подгруппа, порожденная группами $G_\alpha (\alpha \in S)$; группа G_α содержит группу U_α, а также представитель $n_\alpha \in N_{G_\alpha}(T)$ элемента $r_\alpha \in W$. Из п. 14.7 вытекает, что группа H содержит представитель $n = n(w) \in N_G(T)$ каждого элемента $w \in W$. Если $\beta \in \Phi$, то ${}^nU_\beta = U_{w(\beta)}$. Таким образом, группа H содержит все группы U_β, для которых $\beta = w(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in S$. Согласно п. 14.7, такие корни β исчерпывают все Φ. Очевидно, $H \supset T$, откуда следует, что $H = G$.

14.9. Автоморфизмы полупростых групп. Предположим, что G — полупростая группа; зафиксируем группу Бореля $B \in \mathscr{B}^T$. Пусть $\mathrm{Int}(G)$ — группа внутренних автоморфизмов в группе

$$A = \mathrm{Aut}_{\text{алг. групп}}(G)$$

автоморфизмов группы G. Обозначим через $A_{(B,T)}$ подгруппу группы A, относительно которой инвариантна как группа B, так и группа T.

Согласно п. 14.8, $\Phi(B)$ есть множество положительных корней относительно базиса $S(B)$ системы корней Φ. Мы будем обозначать через $\mathrm{Dyn}(\Phi, B)$ соответствующую схему Дынкина (см. п. 14.7) и через $\mathrm{Aut}(\mathrm{Dyn}(\Phi, B))$ — ее группу автоморфизмов.

Если $a \in A_{(B,T)}$, то, так как $a \cdot T = T$, элемент a индуцирует автоморфизм системы корней Φ. Так как $a \cdot B = B$, то базис $S(B) \subset \Phi$ инвариантен относительно элемента a и, следовательно, этот последний определяет элемент $a' \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Dyn}(\Phi, B))$.

Предложение. (1) $A = \mathrm{Int}(G) \cdot A_{(B,T)}$.

(2) *Группа* $\mathrm{Int}(G) \cap A_{(B,T)}$ *является ядром описанного выше гомоморфизма* $A_{(B,T)} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Dyn}(\Phi, B))\ (a \to a')$.

(3) *Естественное отображение* $A/\mathrm{Int}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Dyn}(\Phi, B))$ *инъективно. В частности, группа* $\mathrm{Int}(G)$ *имеет конечный индекс в группе* A.

Доказательство. Ясно, что утверждение (3) следует из (1) и (2).

(1) Пусть $a \in A$. Учитывая сопряженность подгрупп Бореля группы G, мы имеем $c \cdot B = B$, где $c = \mathrm{Int}(g) \circ a$ для некоторого $g \in G$. Ввиду сопряженности максимальных торов в группе B имеем $d \cdot T = T$, где $d = \mathrm{Int}(b) \circ c$ для некоторого $b \in B$. Таким образом, $d = \mathrm{Int}(b) \circ \mathrm{Int}(g) \circ a \in A_{(B,T)}$, что и требовалось доказать.

(2) Предположим, что $a \in A_{(B, T)}$. Если $a = \operatorname{Int}(g)$ для некоторого $g \in G$, то $g \in N_G(B) \cap N_G(T) = B \cap N_G(T) = N_B(T) = T$ (см. пп. 10.6, 11.15), так что элемент индуцирует тождественный автоморфизм на Φ.

Обратно, предположим, что элемент $a' \in \operatorname{Aut}(\operatorname{Dyn}(\Phi, B))$ является единичным. Требуется доказать, что автоморфизм a внутренний. Для каждого $\alpha \in S(B)$ имеется изоморфизм θ_α: $\mathbf{G}_a \to U_\alpha$. Так как группа U_α инвариантна относительно элемента a, то $a\theta_\alpha(x) = \theta_\alpha(c_\alpha x)$ для некоторого $c_\alpha \in K^*$. Так как элементы множества $S(B)$ линейно независимы, то мы можем найти элемент $t \in T$, такой, что $t^\alpha = c_\alpha$ для каждого $\alpha \in S(B)$. Тогда автоморфизм $\operatorname{Int}(t)$ действует так же, как автоморфизм a на каждой группе U_α ($\alpha \in S(B)$); поэтому мы можем заменить a на $\operatorname{Int}(t)^{-1} \circ a$ и предполагать, что каждый элемент $c_\alpha = 1$. В этом случае автоморфизм a оставляет неподвижными элементы каждой группы U_α ($\alpha \in S(B)$).

Мы утверждаем, что a оставляет неподвижными также и элементы тора T. В самом деле, если $t \in T$, то $t^\alpha = a(t)^\alpha$ для каждого $\alpha \in S(B)$. Так как группа G полупроста, то $S(B)$ порождает подгруппу конечного индекса в $X(T)$ (см. пп. 14.8 и 13.18). Следовательно, $t = a(t)$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что автоморфизм a оставляет инвариантными группы $G_\alpha = G^{T_\alpha}$ и оставляет неподвижными элементы подгруппы Бореля $T \cdot U_\alpha$. Следовательно (следствие 11.4), автоморфизм $a \mid G_\alpha$ является тождественным. Наконец, так как группы G_α ($\alpha \in S(B)$) порождают группу G (следствие в п. 14.8), то a — тождественный автоморфизм.

14.10. Предложение. *Предположим, что G — полупростая группа, и $G \neq \{e\}$.*

(1) *Пусть H — связный нормальный делитель группы G, и пусть $H' = (G^H)^0$. Тогда*

(a) *группа H полупроста;*

(b) *$G = H \cdot H'$ и группа $H \cap H'$ содержится в конечной группе $Z(G)$.*

(2) *Пусть $\{G_i \mid i \in I\}$ — минимальные элементы в множестве связных нормальных делителей размерности $\geqslant 1$. Тогда*

(a) *$(G_i, G_j) = \{e\}$ при $i \neq j$;*

(b) *множество I конечно; пусть, скажем, $I = \{1, \ldots, n\}$; морфизм-произведение*

$$G_1 \times \ldots \times G_n \to G$$

является изогенией;

(c) *если H — связный нормальный делитель группы G, то H порождается группами $\{G_i \mid G_i \subset H\}$.*

(3) *Группа G „почти проста“, т. е. $G/Z(G)$ — простая группа тогда и только тогда, когда система корней Φ неприводима.*

Доказательство. (1) Утверждение (а) вытекает из следствия п. 14.2. Группа G^H является ядром гомоморфизма сопряжения:

$$G \xrightarrow{\mathrm{Int}\,|\,H} \mathrm{Aut}_{\text{алг. групп}}(H),$$

и, согласно предложению п. 14.9, образ группы H есть подгруппа конечного индекса. Поэтому группа $H \cdot G^H$ имеет в G конечный индекс. Следовательно, $G = H \cdot (G^H)^0 = H \cdot H'$, ибо группа G связна. Кроме того, $(H \cap H')^0 \subset Z(H)^0 \subset R(H) = \{e\}$, так что группа $H \cap H'$ — конечный нормальный делитель группы G и, значит, содержится в ее центре.

(2) Группа (G_i, H) $(i \in I)$ является связным нормальным делителем группы G, содержащимся в $G_i \cap H$. Следовательно, ввиду минимальности G_i он равен $\{e\}$ или G_i. Другими словами, $G_i \subset (G^H)^0$ или $G_i \subset H$. В частности, $(G_i, G_j) = \{e\}$ при $i \neq j$.

Пусть $J = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset I$, и пусть G_J — образ морфизма

$$f_J\colon G_{i_1} \times \ldots \times G_{i_r} \to G.$$

С учетом сделанных выше замечаний индукция по $r = \operatorname{card} J$ показывает, что группа $G_J \cap G_h$ конечна, если $h \notin J$, и, следовательно, что ядро $\ker(f_J)$ конечно. Тогда $\dim G \geqslant \dim G_J = \sum\limits_{j \in J} \dim G_j \geqslant \operatorname{card} J$, так что множество I обязано быть конечным. Кроме того, морфизм $f_J\colon G_{i_1} \times \ldots \times G_{i_r} \to G_J$ является изогенией.

Пусть H и H' — такие же, как в утверждении (1). Ясно, что $I = J \cup J'$ и $J \cap J' = \varnothing$, где $J = \{j \in I \mid G_j \subset H\}$ и $J' = \{j \in I \mid G_j \subset H'\}$. Отсюда следует, что $H = G_J$, так как $G = G_J \cdot G_{J'} = H \cdot H'$ и группа $H \cap H'$ конечна.

(3) Если $G = H \cdot H'$, то ясно, что система корней Φ группы G разлагается в прямую сумму систем корней групп H и H'. Таким образом, если размерности обеих групп H и H' больше 1, то система корней Φ приводима.

Обратно, предположим, что система корней Φ приводима; пусть, скажем, $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ — нетривиальное разложение в сумму двух систем корней. Пусть G_i — группа, порожденная всеми подгруппами U_α $(\alpha \in \Phi_i)$. Тогда, так как Φ_1 и Φ_2 — непустые множества, то $\dim G_i \geqslant 1$ $(i = 1, 2)$.

Покажем сначала, что группы G_1 и G_2 порождают группу G. Обозначим через H группу, порожденную группами G_1 и G_2. Тогда группа $H_\alpha = H \cap G_\alpha$ проектируется на полупростой фактор $\mathbf{PGL}_2$ группы G_α (см. п. 10.8), так что группа H_α содержит тор T'_α, дополнительный к тору T_α в T. Так как $(\bigcap T_\alpha)^0 = \{e\}$ (группа G полупроста), то торы T'_α независимы и порождают тор T. Таким образом, группа H содержит тор T и, следовательно, каждую группу G_α, значит, и группу G ввиду следствия п. 14.8. Мы утверждаем, далее, что группа G_1 централизует группу G_2. В самом деле, если $\alpha \in \Phi_1$ и $\beta \in \Phi_2$, то корней вида $r\alpha + s\beta$ $(r, s > 0)$ не существует. Следовательно, согласно утверждению (*) в доказательстве предложения из п. 14.5, группы U_α и U_β коммутируют.

Поэтому группа $G_1 \cap G_2$ коммутирует с группой, порожденной группами G_1 и G_2; так как она совпадает с группой G, то группа $G_1 \cap G_2 (\subset Z(G))$ конечна. Это завершает доказательство утверждения (3) и всего предложения.

14.11. Разложение Брюа. Зафиксируем группу Бореля $B \in \mathscr{B}^T$. Пусть $U = B_u$, $\Phi^+ = \Phi(B)$ и S — базис системы корней Φ в Φ^+, т. е. „множество простых корней, ассоциированных с B".

Пусть $B^- \in \mathscr{B}^T$ — противоположная группа Бореля (см. п. 14.1). Положим $U^- = B_u^-$ и $\Phi^- = \Phi(B^-) = \Phi^+$. При $\alpha \in \Phi$ мы будем писать $\alpha > 0$, если $\alpha \in \Phi^+$ и $\alpha < 0$, если $\alpha \in \Phi^-$.

Мы будем здесь обозначать через w как элемент группы W, так и его представитель в группе $N_G(T)$, если выбор представителя не влияет на его использование.

Рассмотрим группы

$$U_w = U \cap {}^wU \quad \text{и} \quad U_w^- = U \cap {}^wU^-.$$

Обе они являются замкнутыми подгруппами, инвариантными относительно T, так что (предложение п. 14.4) каждая из них прямо порождается в любом порядке содержащимися в ней группами U_γ $(\gamma > 0)$. Множество таких γ можно описать в виде

$$\Phi_w^+ = \Phi(U_w) = \{\gamma > 0 \mid \gamma^w > 0\}$$

и

$$\Phi_w^- = \Phi(U_w^-) = \{\gamma > 0 \mid \gamma^w < 0\},$$

где $\gamma^w = \gamma \circ \operatorname{Int}(n)$ для любого представителя $n \in N_G(T)$ элемента w. Так как $\Phi^+ = \Phi_w^+ \cup \Phi_w^-$ и $\Phi_w^+ \cap \Phi_w^- = \Phi$, то из п. 14.4 следует, что

$$U = U_w \cdot U_w^- = U_w^- = U_w^- \cdot U_w.$$

Пусть x_0 — неподвижная относительно группы B точка многообразия G/B.

Теорема. (a) (Разложение Брюа для группы G.) *Группа G представима в виде объединения непересекающихся двойных смежных классов BwB $(w \in W)$. При $w \in W$ морфизм $U_w^- \times B \to BwB$ $((x, y) \to xwy)$ является изоморфизмом многообразий.*

(b) (*Клеточное разбиение многообразия G/B.*) *Многообразие G/B является объединением непересекающихся U-орбит Uwx_0 $(w \in W)$.*

При $w \in W$ *морфизм* $U_w^- \to Uwx_0$ $(u \to uwx_0)$ *является изоморфизмом многообразий.*

Замечания. (1) Точки множества $(G/B)^T$ соответствуют точкам множества $\mathscr{B}^T$, и, согласно предложению п. 11.19, группа W однотранзитивно действует на этом множестве. В частности, $Wx_0 = (G/B)^T$, и это множество имеет столько же элементов, сколько W. Следовательно, утверждение (b) выше означает, что каждая U-орбита в G/B имеет точно одну общую точку с $(G/B)^T$.

(2) Так как $B = U \cdot T$ и группа W нормализует тор T, то при $w \in W$ мы имеем $BwB = UwB$ и $Bwx_0 = Uwx_0$.

Таким образом, утверждения (a) и (b) равносильны.

(3) Из п. 14.4 следует, что каждая группа U_w^- изоморфна как многообразие аффинному пространству. Таким образом, если $K = \mathbf{C}$, то каждая из U-орбит является клеткой; утверждение (b) задает клеточное разбиение многообразия G/B в том смысле, как это определяется в алгебраической топологии. Так как эти клетки являются комплексными многообразиями, то их (вещественные) размерности обязательно четны. Следовательно, $2i$-е число Бетти многообразия G/B есть число клеток (комплексной) размерности i. Последнее есть число тех элементов $w \in W$, для которых $\dim U_w^- = \operatorname{card}\{\gamma > 0 \mid w^{-1}(\gamma) < 0\}$ равно i.

Доказательство. Ввиду приведенного выше замечания (2) теорема будет доказана, если мы установим следующие три утверждения.

(1) *Пусть* $w, w' \in W$. *Тогда* $Uwx_0 = Uw'x_0 \Rightarrow w = w'$.

(2) $G = BWB$.

(3) *При* $w \in W$ *отображение* $U_w^- \times B \to BwB$, *заданное формулой* $(x, y) \to xwy$, *является изоморфизмом многообразий.*

Доказательство утверждения (1). Пусть $w'x_0 = uwx_0$, $u \in U$. Тогда стабилизатор в U элемента $w'x_0$, т. е. $U \cap {}^{w'}B = U_{w'}$, совпадает со стабилизатором элемента uwx_0, т. е. с группой $U_{uw} = U \cap {}^{uw}B = {}^{u}(U \cap {}^{w}B) = {}^{u}U_w$. Таким образом, группы U_w и ${}^{u}U_w = U_{w'}$ являются замкнутыми T-инвариантными подгруппами группы U. Тогда утверждение (2) (с) предложения п. 14.4 влечет за собой $U_w = U_{w'}$. В частности, множества $\Phi_w^+ = \Phi(U_w)$ и $\Phi_{w'}^+ = \Phi(U_{w'})$ совпадают. Доказательство завершает следующая лемма.

Лемма. *Если* $w, w' \in W$ *и* $\Phi_w^+ = \Phi_{w'}^+$, *то* $w = w'$.

Доказательство. Предположим, что $n \in N_G(T)$ — представитель элемента w. Тогда действие элемента w на $\lambda \in X_*(T)$ и на $\alpha \in X(T)$ задается формулами ${}^{w}\lambda = \operatorname{Int}(n) \circ \lambda$ и $\alpha^w = \alpha \circ \operatorname{Int}(n)$. Таким образом, $\alpha^w \circ \lambda = \alpha \circ {}^{w}\lambda$ или, что равносильно, $\langle \alpha^w, \lambda \rangle = \langle \alpha, {}^{w}\lambda \rangle$.

Если λ — полурегулярный параметр, то камера Вейля, содержащая элемент λ, определяется знаком чисел $\langle\alpha, \lambda\rangle$, когда α пробегает множество Φ^+. Это вытекает из утверждения (5) теоремы п. 13.18. Предположим, что $\lambda \in WC(B)$, т. е. $\langle\alpha, \lambda\rangle > 0$ для всех $\alpha > 0$. Тогда при $\alpha > 0$ имеем $\langle\alpha, {}^w\lambda\rangle = \langle\alpha^w, \lambda\rangle$, и это число положительно, если $\alpha \in \Phi^+_w$, и отрицательно, если $\alpha \notin \Phi^+_w$. Из предположений леммы следует, что ${}^w\lambda$ и ${}^{w'}\lambda$ лежат в одной и той же камере Вейля. Следовательно, $w = w'$, ибо W действует на камерах Вейля однотранзитивно (п. 13.10).

Доказательство утверждения (2). Мы проведем его в несколько шагов.

(i) *Утверждение* (2) *справедливо*, если *полупростой ранг группы G равен* 1.

В этом случае порядок группы W равен 2, так что ввиду утверждения (1) множество BWx_0 состоит из двух U-орбит. Следовательно, достаточно показать, что многообразие G/B состоит не более чем из двух U-орбит. Рассмотрим морфизм $U \to G/B$ $(u \to uy)$, где y не неподвижен относительно группы U. Мы можем отождествить группу $U \cong \mathbf{G}_a$ с многообразием $\mathbf{P}_1$ минус точка и расширить этот морфизм до морфизма $\mathbf{P}_1 \to G/B$. Его образ замкнут и одномерен и, следовательно, совпадает с G/B. С другой стороны, этот образ состоит из одномерной U-орбиты плюс одна неподвижная точка.

(ii) *Если $\alpha \in \Phi$ и $x \in G/B$, то*

$$G_\alpha x = (U_\alpha x) \cup (U_\alpha r_\alpha x).$$

Положим $C = (G_\alpha)_x = G_\alpha \cap B_x$. Это подгруппа Бореля группы G_α (п. 11.18), так что мы получаем G_α-эквивариантный и биективный морфизм $G_\alpha/C \to G_\alpha x$. Так как полупростой ранг группы G_α равен 1 (п. 13.18) и ее группа Вейля относительно тора T есть $\{e, r_\alpha\}$, то утверждение (ii) следует из (i).

(iii) *Предположим, что α — простой корень (т. е. $\alpha \in S$), и пусть $\Psi = \Phi^+ - \{\alpha\}$. Тогда в терминологии и обозначениях п.* 14.15 *множество Ψ специально, так что группа U_Ψ прямо порождается подгруппами U_β $(\beta \in \Psi)$. Кроме того, группа U_Ψ нормализуется группой G_α* и $U = U_\alpha U_\Psi = U_\Psi U_\alpha$.

Из свойств систем корней вытекает, что множество Ψ специально и что $(\alpha, \Psi) \subset \Psi$. Следовательно, $(-\alpha, \Psi) \subset \Psi$. В самом деле, предположим, что $\gamma = r(-\alpha) + s\beta \in \Phi$, где $\beta \in \Psi$ и $r > 0$, $s > 0$. Тогда $\beta = \sum\limits_{\delta \in S} m_\delta \delta$ и $m_{\delta_0} > 0$ для некоторого $\delta_0 \neq \alpha$, ибо система Φ приведенная. Следовательно, δ_0-координата элемента γ равна $sm_{\delta_0} > 0$, так что $\gamma \in \Phi^+$. Ясно, что $\gamma \neq \alpha$ и $\gamma \in \Psi$.

Из п. 14.5 вытекает, что группы $\{U_\beta \mid \beta \in \Psi\}$ прямо порождают (в любом порядке) группу U_Ψ и что группа U_Ψ нормализуется группами U_α и $U_{-\alpha}$, а также, конечно, и группой T. Следовательно, группа U_Ψ нормализуется группой G_α, ибо последняя порождается группами U_α, $U_{-\alpha}$ и T. Равенства $U = U_\alpha U_\Psi = U_\Psi U_\alpha$ теперь очевидны.

(iv) *Если* $\alpha \in S$ *и* $x \in (G/B)^T$, *то* $G_\alpha Bx = (Ux) \cup (Ur_\alpha x)$.

Так как $B = UT = U_\alpha U_\Psi T$ (см. (iii)), то

$$\begin{aligned} G_\alpha Bx &= G_\alpha U_\alpha U_\Psi Tx = \\ &= G_\alpha U_\Psi x \quad (Tx = x \text{ и } U_\alpha \subset G_\alpha) = \\ &= U_\Psi G_\alpha x \quad (\text{группа } G_\alpha \text{ нормализует группу } U_\Psi;\ (\text{iii})) = \\ &= U_\Psi((U_\alpha x) \cup (U_\alpha r_\alpha x)) \quad (\text{шаг (ii)}) = \\ &= (Ux) \cup (Ur_\alpha x). \end{aligned}$$

(v) *Если* $\alpha \in S$, *то* $G_\alpha(BwB) \subset BwB \cup Br_\alpha wB$.

В самом деле, если $w \in W$, то, согласно (iv),

$$G_\alpha BwB = (UwB) \cup (Ur_\alpha wB) \subset (BwB) \subset (Br_\alpha wB).$$

Ввиду следствия п. 14.8 группа G порождается группами $G_\alpha (\alpha \in S)$. Следовательно, из (v) получаем, что $G(BWB) \subset (BWB)$, откуда следует утверждение (2).

Доказательство утверждения (3). Так как $U_w = U \cap {}^wB = U \cap wBw^{-1} = U \cap wUw^{-1}$, то $U_w w \subset wU$. Аналогично, $U_w^- w \subset wU^-$. Из записи $B = UT = U_w^- U_w T$ мы видим, что $BwB = U_w^- U_w wB = U_w^- wB$, так что отображение

$$f\colon U_w^- \times B \to BwB\,((x, y) \to xwy)$$

сюръективно. Так как $U_w^- w \subset wU^-$ и $U^- \cap B = \{e\}$, то отображение f также инъективно. Кроме того, так как алгебра Ли $L(U^-) = \sum\limits_{\alpha<0} \mathfrak{g}_\alpha$ имеет тривиальное пересечение с алгеброй Ли $L(B) = \mathfrak{g}^T \oplus \sum\limits_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$, то отображение f сепарабельно и, следовательно, является изоморфизмом.

14.12. Следствие. *Если* B, B', $B'' \in \mathscr{B}$, *то группа* $B \cap B'$ *содержит максимальный тор группы* G. *Если группы Бореля* B' *и* B'' *противоположны группе Бореля* B, *то они сопряжены элементом группы* B.

Доказательство. Многообразие $G/B = \bigcup\limits_{w \in W} Uwx_0$ (в обозначениях п. 14.11) обладает неподвижной относительно группы B' точкой. Пусть группа B' оставляет неподвижной точку $x = uwx_0$, где $w \in W$ и $u \in U$. Тогда $B' = {}^{uw}B$. Так как $T \subset {}^wB$, то ${}^uT = {}^{uw}B \cap B = B' \cap B$.

Пусть T', T'' — максимальные торы в группах $B \cap B'$ и $B \cap B''$ соответственно. Если B' (соответственно B'') противоположна группе B, то она является единственной подгруппой Бореля группы G, содержащей тор T' (соответственно T'') (теорема 14.1). Тогда элемент $b \in B$, такой, что ${}^bT' = T''$ (теорема 10.6) сопрягает группу B' с группой B''.

14.13. Следствие. *Пусть B, $B' \in \mathscr{B}^T$ — противоположные подгруппы Бореля и $U = B_u$, $U' = B'_u$. Тогда отображение-произведение $U' \times B \to G$ является изоморфизмом многообразия $U' \times B$ на открытое подмножество группы G. Группа G есть рациональное многообразие.*

Ввиду следствия 14.12 мы можем считать, что B, B' суть группы B, B^- из п. 14.11. Пусть w_0 — элемент группы Вейля, который преобразует множество Φ^+ в Φ^-. Тогда левый сдвиг на w_0 является изоморфизмом многообразия $U \cdot w_0 \cdot B$ на многообразие $w_0 \cdot U \cdot w_0 \cdot B = U' \cdot B$, и первое утверждение вытекает из теоремы п. 14.11.

Тор T изоморфен над $\bar{k}$ произведению групп $\mathbf{GL}_1$. На основании теоремы п. 13.18 предположения (i), (ii) п. 14.4 выполняются; поэтому мы можем применить замечание п. 14.4. к группам U и U'; таким образом, обе они изоморфны как многообразия аффинным пространствам. Так как группа B изоморфна как многообразие произведению $T \times U$ (теорема 10.6), то $U' \cdot B$ — рациональное многообразие и, следовательно, группа G является рациональным многообразием.

Замечание. В § 18 мы увидим, что многообразие группы G унирационально над k и рационально над сепарабельным расширением поля k, а в п. 15.1 — что всякая связная аффинная k-группа есть рациональное многообразие над полем $\bar{k}$.

14.14. Лемма. *Сохраняем обозначения п. 14.11. Пусть X_α ($\alpha \in S$) — ненулевой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}_\alpha$ и $X = \sum_{\alpha \in S} X_\alpha$. Тогда* $\mathrm{Tr}(X, \mathfrak{b}) = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)(X) \in \mathfrak{b}\} = B$.

Пусть $g \in \mathrm{Tr}(X, \mathfrak{b})$. По теореме п. 14.11 $g = b' \cdot w \cdot b$ ($b, b' \in B$, $w \in W$). Так как группа B нормализует алгебру Ли $\mathfrak{b}$, то мы можем предполагать, что $b' = e$. Согласно предложению 3.12, элемент $\mathrm{Ad}(b)(X) - X$ принадлежит алгебре Ли коммутанта (U, U) группы U. Из утверждения (*) п. 14.5 следует, что группа (U, U) прямо порождена подгруппами U_γ ($\gamma \in \Phi^+$, $\gamma \notin S$). Так как элемент w переставляет между собой алгебры Ли $\mathfrak{g}_\alpha$, то мы можем написать

$$\mathrm{Ad}(g)(X) = \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha X_{w(\alpha)} \quad (X_{w(\alpha)} \in \mathfrak{g}_{\varphi(\alpha)}),$$

Множество тех корней α, для которых $c_\alpha \neq 0$, содержит множество S, и соответствующие элементы $X_{w(\alpha)}$ линейно независимы. Так как $\mathrm{Ad}(g)(X) \in \mathfrak{b}$, то $w(S) \subset \Phi^+$. Ввиду пп. 14.8 и 14.7 отсюда следует, что $w = e$, $g \in B$.

14.15. Лемма. *Пусть H — связная группа и M — замкнутая подгруппа группы H. Предположим, что существует такой элемент $X \in \mathfrak{m} = L(M)$, что множество $\mathrm{Tr}(X, \mathfrak{m})$ тех $h \in H$, для которых $\mathrm{Ad}(h)(X) \in \mathfrak{m}$, состоит из конечного множества левых смежных классов по M. Тогда $N_H(\mathfrak{m})^0 = M^0$ и множество $V = \bigcup_{h \in H} \mathrm{Ad}(h)(\mathfrak{m})$ содержит плотное открытое подмножество пространства $\mathfrak{h}$. Если многообразие H/M полно, то $V = \mathfrak{h}$.*

$N_H(\mathfrak{m})$ является замкнутой подгруппой группы H, содержащейся в $\mathrm{Tr}(X, \mathfrak{m})$; следовательно, ее компонента единицы равна M^0.

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 11.9. Рассмотрим морфизм

$$H \times \mathfrak{h} \xrightarrow{\alpha} H \times \mathfrak{h} \xrightarrow{\beta} (H/M) \times \mathfrak{h},$$

где $\alpha(x, Y) = (x, \mathrm{Ad}(x)(Y))$, $\beta = \pi \times \mathrm{Id}$, а π: $H \to H/M$ — канонический морфизм. Пусть $Q = \beta\alpha(H \times \mathfrak{m})$. Те же соображения, что и в п. 11.9, позволяют заключить, что множество Q замкнуто. По определению $V = \mathrm{pr}_2(Q)$, где pr_2 — проекция на второй множитель; следовательно, множество V замкнуто, если многообразие H/M полно. Слой проекции pr_2 над элементом Z множества V есть множество смежных классов xH, неподвижных относительно группы $\pi(\mathrm{Tr}(Z, \mathfrak{m})^{-1})$. В частности, слой над точкой X конечен. С другой стороны, используя проекцию pr_1 на первый множитель, мы видим, что $\dim Q = \dim H$, так что pr_2 — доминантное отображение.

14.16. Предложение. *Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ группы H является объединением своих подалгебр Бореля.*

(По определению подалгебра Бореля $\mathfrak{h}$ алгебры Ли есть алгебра Ли подгруппы Бореля группы H^0.)

Мы можем считать группу H связной. Пусть R — ее радикал. Каноническая проекция $H \to H/R$ определяет биективное отображение подгрупп Бореля (п. 11.14). Это сводит дело к случаю, когда группа H полупроста. Пусть B — подгруппа Бореля группы H. Согласно леммам 14.14 и 14.15, множество V алгебр Ли, сопряженных с алгеброй Ли $\mathfrak{b}$, содержит плотное открытое подмножество многообразия $\mathfrak{h}$. Но так как многообразие H/B плотно, то множество V замкнуто (п. 14.15), откуда следует предложение,

14.17. Предложение. *Элемент X, принадлежащий алгебре Ли $\mathfrak{h}$ группы H, нильпотентен тогда и только тогда, когда он принадлежит алгебре Ли замкнутой унипотентной подгруппы.*

Доказательство. Утверждение „тогда" доказано в п. 4.8. Пусть теперь элемент X нильпотентен. Согласно предложению 14.16, он принадлежит алгебре Ли подгруппы Бореля группы H, что сводит дело к случаю, когда группа H связна и разрешима. В силу утверждения 4 теоремы 10.6 $X \in L(H_u)$.

Библиографические замечания. Вплоть до п. 14.13 результаты этого параграфа принадлежат Шевалле (см. Семинар Шевалле [1]). В частности, относительно результатов п. 14.11 см. сообщение 13, относительно п. 14.8 — сообщение 16 и сообщение 17 относительно пп. 14.9 и 14.10. Основное отличие приведенного здесь изложения от изложения этих вопросов в сборнике Семинар Шевалле [1] состоит в том, что условие о целости коэффициентов (п. 14.6) доказано нами более непосредственно без привлечения теории представлений. Пункт 14.16 принадлежит Гротендику (Демазюр и Гротендик [1], сообщение XIV, теорема 4.11, стр. 33). Приведенное здесь доказательство заимствовано из статьи Бореля и Шпрингера [2].

Глава V

ВОПРОСЫ РАЦИОНАЛЬНОСТИ

В этой главе все алгебраические группы предполагаются аффинными, а G является k-группой.

§ 15. РАЗЛОЖИМЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ И ПОДГРУППЫ

15.1. Определение. *Пусть G — связная разрешимая группа. Будем говорить, что G разложима над k, или k-разложима, если она обладает композиционным рядом $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s = \{e\}$, состоящим из связных k-подгрупп G_i, причем факторы G_i/G_{i+1} изоморфны над k группам $\mathbf{G}_a$ или $\mathbf{GL}_1$ $(0 \leqslant i < s)$.*

Примеры. (1) Группа $\mathbf{D}_n$ всех обратимых диагональных $(n \times n)$-матриц разложима над простым полем. Вообще, если k-тор разложим над k в смысле п. 8.2, то он изоморфен произведению групп, изоморфных $\mathbf{GL}_1$ (см. пп. 8.2 и 8.3), и, следовательно, разложим в смысле данного здесь определения. Обратное вытекает из следствия п. 8.14.

(2) Так как связная одномерная k-группа $\bar{k}$-изоморфна $\mathbf{G}_a$ или $\mathbf{GL}_1$ (теорема 10.9), то из теоремы 10.6 вытекает, что для алгебраически замкнутого поля k любая связная разрешимая k-группа k-разложима.

15.2. Предложение. *Пусть V — полное k-многообразие, на котором k-рационально действует связная разрешимая k-разложимая группа G. Множество $V(k)$ либо пусто, либо обладает точкой, неподвижной относительно группы G.*

Доказательство проведем индукцией по $\dim G$. Пусть N — инвариантная связная k-подгруппа группы G, такая, что факторгруппа G/N изоморфна $\mathbf{G}_a$ или $\mathbf{GL}_1$. По предположению индукции существует неподвижная относительно N точка $x \in V(k)$. Тогда отображение $g \to g \cdot x$ определено над k и индуцирует k-морфизм f: $G/N \to V$, образ которого является орбитой $G(x)$ точки x. По предположению многообразие группы G/N изоморфно над k многообразию $\mathbf{P}_1 - A$, где A — одна или две точки, рациональные над k. Так как многообразие V полно, то f продолжается до k-морфизма полного многообразия $\mathbf{P}_1$ в V. Тогда $f(\mathbf{P}_1) =$

$=G(x)\cup f(A)$ — полное многообразие и, следовательно, является замыканием множества $G(x)$ в топологии Зарисского. Поэтому $f(\mathbf{P}_1)$ инвариантно относительно G. Множество $f(A)$ состоит из одной или двух точек, рациональных над k, каждая из которых остается неподвижной при действии G, — в противном случае их орбиты пересекались бы с $G(x)$. Это доказывает предложение.

15.3. Определение. *k-подгруппа H группы $\mathbf{GL}_n$ называется триангулируемой над k, если существует элемент $x\in\mathbf{GL}(n, k)$, такой, что xHx^{-1} состоит из верхних треугольных матриц* (см. п. 4.6).

Флаг F в пространстве K^n называется *рациональным над k*, если он состоит из подпространств, определенных над k. Это имеет место тогда и только тогда, когда F получается в результате трансформирования с помощью элемента группы $\mathbf{GL}(n, k)$ стандартного флага F_0: $[e_1]\subset[e_1, e_2]\subset\ldots$. Таким образом, группа H триангулируема над k тогда и только тогда, когда относительно ее действия инвариантен некоторый рациональный над k флаг, или же когда H оставляет неподвижной точку многообразия флагов $\mathcal{F}(V)$, рациональную над k.

Триангулируемая группа непременно разрешима. Если поле k алгебраически замкнуто, то всякая связная разрешимая k-подгруппа группы $\mathbf{GL}_n$ триангулируема над k (теорема Ли — Колчина (следствие 10.5)).

15.4. Теорема. *Пусть G — связная разрешимая группа.*

(i) *Предположим, что группа G разложима над k. Тогда каждый образ группы G при k-морфизме f (соответственно при k-морфизме в группу $GL(V)$), разложим над k (соответственно триангулируем над k).*

Предположим, что группа G линейна.

(ii) *Следующие условия эквивалентны:* (a) *группа G триангулируема над k;* (b) *группа G_u определена над k и группа G/G_u разложима над k;* (c) $\mathrm{X}(G)=\mathrm{X}(G)_k$.

(iii) *Если поле k совершенно, то группа G разложима над k тогда и только тогда, когда она триангулируема над k.*

Доказательство. (i) Покажем сначала, что группа $G'=f(G)$ разложима над k. Рассмотрим в первую очередь случай, когда группа G имеет размерность 1 и $G'\neq\{e\}$. Тогда размерность группы G' также равна 1. Если $G=\mathbf{GL}_1$, то группа G' изоморфна над k группе $\mathbf{GL}_1$ (предложение п. 8.2). Пусть $G=\mathbf{G}_a$. Тогда группа G' унипотентна; она действует точно и k-рационально на проективной прямой $\mathbf{P}_1$, причем имеется ровно одна неподвижная точка P, рациональная над полем $k^{p^{-\infty}}$, и одна открытая орбита (п. 10.9, замечание). Отображение f задает k-рациональное действие группы G на $\mathbf{P}_1$ с неподвижной точкой P. Согласно предложению 15.2, точка P рациональна над k; следовательно (п. 10.9, замечание), группа G' изоморфна над k группе $\mathbf{G}_a$.

Переходя к общему случаю, рассмотрим композиционный ряд (G_i) группы G, удовлетворяющий условию п. 15.1. Тогда $(f(G_i))$ — композиционный ряд группы G' и f индуцирует сюръективный k-морфизм группы G_i/G_{i+1} на группу $f(G_i)/f(G_{i+1})$ ($i=0, \ldots$ $\ldots, s-1$). Наше утверждение следует теперь из одномерного случая.

Пусть теперь G' — определенная над k подгруппа группы $\mathbf{GL}_n$ и $\mathcal{F}_n$ — многообразие флагов пространства K^n. Так как группа G' разложима над k и $\mathcal{F}_n(k) \neq \varnothing$, то в множестве $\mathcal{F}_n(k)$ имеется неподвижная относительно группы G' точка (предложение 15.2) и, следовательно, G' триангулируема над k (п. 15.3).

(ii) (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть G содержится в группе $\mathbf{T}_n$ верхних треугольных матриц степени n, и пусть $\mathbf{U}_n$ — унипотентная часть группы $\mathbf{T}_n$. Тогда $G_u = G \cap \mathbf{U}_n$. Согласно утверждению 4 теоремы 10.6, алгебра Ли группы G_u состоит из всех нильпотентных матриц из $L(G)$; следовательно, $L(G_u) = L(G) \cap L(\mathbf{U}_n)$, и группа G_u определена над k в силу предложения 6.12. Так как k-морфизм группы $\mathbf{T}_n$ на группу $\mathbf{D}_n$ с ядром $\mathbf{U}_n$ индуцирует инъективный k-морфизм группы G/G_u в $\mathbf{D}_n$, то группа G/G_u изоморфна над k прямому произведению групп $\mathbf{GL}_1$ (предложение п. 8.4).

(b) $\Rightarrow$ (c). Так как группа G изоморфна над $\bar{k}$ полупрямому произведению групп G/G_u и G_u (теорема 10.6), и $X(G_u) = \{1\}$, то, очевидно, отображение π^*: $X(G/G_u) \to X(G)$, индуцированное проекцией π: $G \to G/G_u$, является изоморфизмом. Если группа G_u определена над k, то проекция π определена над k; следовательно, отображение π^* преобразует множество $X(G/G_u)_k$ в $X(G)_k$. Поэтому равенство $X(G/G_u) = X(G/G_u)_k$ влечет за собой $X(G) = X(G)_k$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Пусть λ: $G \to GL(V)$ — морфизм, определенный над k. По теореме Ли — Колчина существует такой характер $\chi \in X(G)$, что собственное подпространство V_χ отлично от нуля. Так как по предположению характер χ определен над k, то пространство V_χ определено над k (п. 5.2). Используя индукцию по $\dim V$, приходим к выводу, что группа $\lambda(G)$ триангулируема над k, откуда следует наше утверждение.

(iii) Пусть поле k совершенно. Ввиду утверждения (i) достаточно показать, что разложимость над k группы G вытекает из ее триангулируемости над k. Пусть $G \subset \mathbf{T}_n$. Компоненты единицы пересечений группы G со стандартным нормальным рядом группы $\mathbf{T}_n$ (см. п. 10.2) дают нормальный ряд (G_i), состоящий из связных k-групп, последовательные факторы которого одномерны и изоморфны либо образам подгрупп группы $\mathbf{D}_n$ и, следовательно, k-изоморфны группе $\mathbf{GL}_1$ (пп. 8.2 и 15.1), либо унипотентным одномерным группам. Так как поле k совершенно, то эти последние k-изоморфны группе $\mathbf{G}_a$ (п. 10.9, замечание). Таким образом, группа G разложима над k.

Замечание. Согласно утверждению (iii) теоремы 15.4, линейный k-тор k-разложим тогда и только тогда, когда он триангулируем над k. С другой стороны, по той же причине связная унипотентная k-группа всегда триангулируема над k, хотя и не всегда k-разложима. Пример такой группы над полем характеристики > 2, разумеется несовершенным ввиду утверждения (ii) теоремы п. 15.4, можно найти в статье Розенлихта [2], стр. 46.

15.5. Следствие. (i) *Пусть G — триангулируемая над k линейная группа. Тогда образ группы G при k-морфизме f: $G \to GL(V)$ триангулируем над k.*

(ii) *Пусть группа G унипотентна. Тогда группа G триангулируема над k. Если поле k совершенно, то группа G разложима над k.*

(i) Пусть $G' = f(G)$. Тогда $G'_u = f(G_u)$ и морфизм f индуцирует сюръективный k-морфизм группы G/G_u на G'/G'_u. Наше утверждение следует теперь из утверждений (i) и (ii) теоремы 15.4.

(ii) Это следует из утверждений (ii) и (iii) теоремы 15.4.

15.6. Предложение. *Пусть $G = \mathbf{G}_a$, $\mathbf{GL}_1$. Пусть X — (непустое) k-многообразие, на котором группа G действует транзитивно и k-рационально. Тогда $X(k) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Многообразие X неприводимо. Если $\dim X = 0$, то X состоит из одной точки, которая должна быть рациональной над k. В противном случае $\dim X = 1$ и при $x \in X$ орбитное отображение f_x: $g \to g \cdot x$ сюръективно (с конечными слоями); следовательно, его коморфизм есть инъективный гомоморфизм поля $K(X)$ в поле $K(G)$. Но в рассматриваемом случае $K(G) = K(T)$, где T — переменная; по теореме Люрота поле $K(X)$ — чисто трансцендентное расширение поля K размерности 1. Другими словами, X — рациональная и, очевидно, гладкая кривая. Следовательно, существует k-изоморфизм кривой X на k-открытое подмножество полной гладкой кривой Y рода 0. Действие группы G на кривой X естественно продолжается до k-рационального действия группы G на Y, и множество $Y - X$ состоит из конечного числа точек, неподвижных относительно группы G.

Запишем $\mathbf{P}_1 = G \cup A$, где либо $A = \{0\}$, либо $A = \{0\} \cup \{\infty\}$ [1]). Орбитное отображение f_x продолжается до морфизма f многообразия $\mathbf{P}_1$ в Y, который оказывается сюръективным, ибо его образ замкнут и одномерен. Отсюда следует, что $Y - X = f(A)$. Так как морфизм f_x определен над полем $k(x)$, то $f(A) \subset Y(k(x))$. Это справедливо для любой точки $x \in X$. Но мы можем найти

[1]) В зависимости от того, будет ли $G = \mathbf{G}_a$ или $\mathbf{GL}_1$. — *Прим. ред.*

две точки x, $y \in X(K)$, такие, что $k(x) \cap k(y) = k$, например, две „независимые общие точки“ или общую точку x и алгебраическую точку y. Следовательно, $f(A) \subset Y(k)$ и последнее множество непусто. Так как Y — кривая рода нуль, то она k-изоморфна многообразию $\mathbf{P}_1$ (п. 10.9, замечание). Следовательно, Y обладает по крайней мере тремя рациональными точками (соответствующими точкам 0, 1, ∞). Но множество $f(A)$ состоит не более чем из двух точек, откуда вытекает, что $X(k) \neq \varnothing$.

15.7. Следствие. *Пусть H — некоторая k-группа, L — связная разрешимая k-разложимая подгруппа и π: $H \to H/L$ — каноническая проекция. Тогда отображение $\pi(k)$: $H(k) \to (H/L)(k)$ сюръективно.*

Воспользуемся индукцией по $\dim L$. Пусть N — первый нетривиальный член композиционного ряда, „разлагающего“ группу L. Группа N — разложимая над k группа коразмерности 1, так что группа L/N изоморфна над k группе $\mathbf{GL}_1$ или $\mathbf{G}_a$. Отображение π является композицией канонических проекций

$$H \xrightarrow{\alpha} H/N \xrightarrow{\beta} H/L.$$

Пусть $x \in (H/L)(k)$ и $X = \beta^{-1}(x)$. Так как морфизм β сепарабелен, то многообразие X определено над k. Группа L нормализует группу N, следовательно, правые сдвиги на многообразии H/N определяют k-рациональное действие группы L/N на H/N (следствие 6.11). Очевидно, что орбиты этого действия являются слоями морфизма β. Следовательно, в силу предложения 15.6 $X(k) \neq \varnothing$. По предположению индукции отображение $\alpha(k)$ сюръективно, откуда и вытекает следствие.

15.8. Замечание. Предположим, что H — связная k-группа. Пусть x — общая точка над k многообразия H/L. Согласно следствию, многообразие $\pi^{-1}(k(x))$ обладает точкой y, рациональной над $k(x)$, что дает вложение поля $k(y)$ в поле $k(x) = k(H/L)$, т. е. „рациональное отображение, определенное над k“, многообразия H/L в группу H. Иначе говоря, существует плотное k-открытое подмножество U многообразия H/L и k-морфизм s: $U \to H$, такой, что $\pi \circ s = \mathrm{id}$. Это означает, что расслоение группы H над H/L допускает локальное сечение, определенное над k. Открытое многообразие $\pi^{-1}(U)$ изоморфно над k многообразию $U \times L$, откуда следует, что группа H бирационально изоморфна над k многообразию $(H/L) \times L$. В частности, если группа H разрешима и k-разложима, то H — рациональное многообразие над k.

Предположим теперь, что поле k алгебраически замкнуто. Тогда унипотентный радикал $R_u(H)$ группы H разложим над k. Из замечания и следствия 14.13 вытекает, что *H — рациональное многообразие над k.*

15.9. Теорема. *Пусть k — совершенное поле и группа G связна. Максимальные связные разрешимые k-разложимые подгруппы (соответственно максимальные связные унипотентные k-подгруппы, соответственно максимальные k-разложимые торы) группы G сопряжены друг с другом при помощи элементов из группы $G(k)$. Если R — одна из таких подгрупп, то $(G/R)(k)$ есть множество рациональных точек проективного k-многообразия V, содержащего многообразие G/R в качестве k-открытого подмножества, на котором k-рационально действует группа G.*

Пусть R — максимальная связная разрешимая k-разложимая подгруппа группы G. Пусть π: $G \to GL(V)$ — точный k-морфизм, такой, что отображение $d\pi$ инъективно, и V содержит прямую D, определенную над k, стабилизатор которой в группе G (соответственно в $L(G)$) совпадает с R (соответственно с $L(R)$) (теорема 5.1). Образ группы R в группе $GL(V/D)$ относительно естественного представления триангулируем над k (теорема 15.4). Следовательно, существует рациональный над k флаг P в пространстве V, одномерное подпространство которого совпадает с D, и такой, что $RP = P$. Пусть $\mathcal{F}(V)$ — многообразие флагов пространства V и f: $g \to g(P)$ — орбитное отображение группы G в $\mathcal{F}(V)$. Пусть $X = \overline{G(P)}$. Это проективное k-многообразие, на котором k-рационально действует группа G; оно является объединением множества $G(P)$ и орбит строго меньшей размерности. Пусть $Q \in X(k)$ и H — стабилизатор точки Q. Группа H определена над k (ибо поле k совершенно) и триангулируема над k, ибо оставляет неподвижным некоторый элемент множества $\mathcal{F}(V)(k)$ (утверждение (iii) теоремы 15.4). Следовательно, $\dim H \leqslant \dim R$ и $\dim G(Q) \geqslant \dim G(P)$. Поэтому $Q \in G(P)$, так что $X(k) = G(P)(k)$. По построению флага P его стабилизатор в группе G (соответственно в алгебре Ли $L(G)$) совпадает с R (соответственно с $L(R)$), так что морфизм f сепарабелен и $G(P) = G/R$, откуда следует, что $(G/R)(k) = X(k)$.

Пусть теперь H — связная разрешимая k-разложимая подгруппа группы G. Согласно предложению 15.2, группа H обладает неподвижной точкой $x \in X(k)$. В силу сказанного выше $x \in G(P)(k) = (G/R)(k)$. Из п. 15.7 следует, что x — образ некоторого элемента $g \in G(k)$ при отображении f. Но тогда $xHx^{-1} \subset R$ и, если группа H унипотентна, то $xHx^{-1} \subset R_u$. Отсюда следует, что любая связная разрешимая k-разложимая подгруппа (соответственно связная унипотентная k-подгруппа) группы G сопряжена при помощи некоторого элемента из $G(k)$ с группой R (соответственно R_u) и что всякий k-разложимый тор H сопряжен над k с подтором группы R. Мы знаем уже, что k-торы группы R разложимы над k (теорема 15.4). Остается показать, что два максимальных тора T, T' группы R сопряжены при помощи элемента группы $R(k)$. Воспользуемся индукцией по $\dim R$. Пусть Q — связная одномерная k-подгруппа группы R_u, являющаяся нормальным делителем в R. Она триангулируема над k, и так как поле k совершенно, то она k-разложима и k-изоморфна группе $\mathbf{G}_a$. Используя индукцию и замечание 15.8, мы можем свести дело к случаю, когда $T' \subset T \cdot Q$, т. е. когда $R_u = \mathbf{G}_a$ — одномерная группа. Если R_u коммутирует с T, то группа $R = T \times Q$ нильпотентна и $T = T'$. В противном случае $Z_R(T) = T$ и $R_u = (T, R)$ (см. п. 9.3). Пусть S — компонента единицы централизатора группы R_u в T. Она имеет коразмерность 1, определена над k и является нормальным делителем в R. Группы T, T' сопряжены относительно R_u (теорема 10.6), следовательно, $S \subset T'$, и, выделяя S, мы можем предполагать, что $T = \mathbf{GL}_1$. Пусть $Y = \{n \in R_u \mid n \cdot T \cdot n^{-1} = T'\}$. Это замкнутое множество непусто (теорема 10.6) и определено над k. Если $x, y \in Y$, то $y^{-1} \cdot x \in N(T)$, так что $y^{-1} \cdot x \in Z_R(T) = T$ (п. 10.6) и, наконец, $x \in y \cdot T$. Таким образом, тор T действует на множестве Y при помощи правых сдвигов транзитивно; в силу предложения 15.6 $Y(k) \neq \varnothing$.

Замечание. Существует обобщение на произвольное поле k доказанного в последнем абзаце утверждения: в любой связной разрешимой k-группе H любые два максимальные тора, определенные над k, сопряжены с помощью элемента из $H(k)$. Этот результат принадлежит Розенлихту [4], теорема 4. Другое доказательство можно найти в статье Бореля и Титса [1], п. 11.4.

Библиографические замечания. Результаты этого параграфа до п. 15.5 доказаны в статье Розенлихта [2]; это одна из первых статей, посвященных вопросам рациональности в аффинных алгебраических группах. Пункт 15.6 также принадлежит Розенлихту [1], стр. 425. Другое доказательство дано в статье Розенлихта [5]. Теорема 15.9 опубликована Борелем и Титсом [1], теорема 8.2.

§ 16. ГРУППЫ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

В этом параграфе k — конечное поле, $q = p^s$ — число элементов поля k, F_q: $x \to x^q$ — гомоморфизм Фробениуса поля характеристики p.

16.1. Пусть V — многообразие, определенное над k. Обозначим через $v^{(q)}$ образ точки $v \in V$ при „морфизме Фробениуса" $V \to V$, который мы также обозначим через F_q. Напомним, что если $V \subset K^n$ — аффинное многообразие, то координаты точки $v^{(q)}$ получаются применением гомоморфизма F_q к координатам точки v, и коморфизм $(F_q)_0$: $k[V] \to k[V]$ является q-степенным гомоморфизмом $f \to f^q$.

Отображение F_q является чисто несепарабельной изогенией.

Оно биективно, и его дифференциал в любой точке является нулевым отображением. Множество неподвижных точек отображения F_q совпадает с $V(k)$ и, следовательно, конечно. Если V является k-группой, то F_q — гомоморфизм.

16.2. Определим отображение $f\colon G \times G \to G$ формулой $f(g, h) = g^{-1} \cdot h \cdot g^{(q)}$, и пусть f_g — отображение $h \to f(g, h)$. Тогда $f_{gh} = f_h \circ f_g$ и морфизм f определен над k. Следовательно, группа G действует на себе посредством отображений f_g и это действие k-рационально.

16.3. Теорема (Ленг). *Пусть $a \in G$. Тогда орбитное отображение s_a: $g \to g^{-1} \cdot a \cdot g^{(q)}$ сепарабельно. Его обрaз открыт и замкнут.*

Для доказательства второго утверждения достаточно убедиться, что $s_a(G^0)$ — связная компонента элемента a в группе G. Следовательно, мы можем считать группу G связной. Пусть i: $x \to x^{-1}$. Тогда (п. 3.2)[1])

$$(ds_a)_e(X) = di_e(X) \cdot a + dF_q(X) \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

Но $(di)_e = -\mathrm{Id}$ (п. 3.2) и $dF_q \equiv 0$ (п. 16.1); следовательно,

$$(ds_a)_e(X) = -X \cdot a,$$

откуда вытекает, что ds_a — изоморфизм. Поэтому s_a — доминантный и сепарабельный морфизм. Орбита $s_a(G)$ элемента a содержит непустое открытое множество, ввиду однородности само множество $s_a(G)$ также открыто. Так как это справедливо для любого элемента группы G, то все орбиты также замкнуты.

16.4. Следствие. *Пусть G — связная группа. Тогда отображение $g \to g^{-1} \cdot g^{(q)}$ сюръективно и сепарабельно.*

Это вытекает из теоремы п. 16.3 в случае $a = e$.

16.5. Следствие. *Пусть G — связная группа и V — непустое k-многообразие, на котором группа G действует транзитивно и k-рационально. Тогда $V(k) \neq \varnothing$.*

Пусть $v \in V$. По предположению существует такой элемент $g \in G$, что $g \cdot v^{(q)} = v$. Согласно следствию 16.4, для подходящего $h \in G$ имеем $g = h^{-1} \cdot h^q$. Тогда $hv = h^{(q)} \cdot v^{(q)} = (h \cdot v)^{(q)}$, откуда $h \cdot v \in V(k)$.

16.6. Предложение. *Группа G^0 обладает подгруппой Картана (соответственно максимальным тором, соответственно под-*

---

[1]) Здесь точка обозначает умножение в группе $T(G)$ (см. п. 3.5); $X \cdot a$ равна $d(\rho_a)_e(X)$, т. е. дифференциалу правого сдвига $\rho_a(g) = ga$ в точке e. — *Прим. перев.*

группой Бореля), определенной над k. Любые две подгруппы Бореля, определенные над k, сопряжены с помощью элемента из $G^0(k)$.

Пусть H — подгруппа Картана (соответственно максимальный тор, соответственно подгруппа Бореля) группы G^0. Тогда группа $H^{(q)}$, полученная применением отображения Фробениуса, также является подгруппой Картана (соответственно максимальным тором, соответственно подгруппой Бореля). Следовательно, существует такой элемент $g \in G^0$, что

$$g \cdot H^{(q)} \cdot g^{-1} = H$$

(см. пп. 11.1, 11.3). В силу следствия 16.4 существует элемент $a \in G^0$, такой, что $g = a^{-1} \cdot a^{(q)}$. Следовательно,

$$aHa^{-1} = a^{(q)}H^{(q)}\left(a^{(q)}\right)^{-1} = (a \cdot H \cdot a^{-1})^{(q)},$$

откуда вытекает, что группа aHa^{-1} определена над k.

Пусть B, B' — две подгруппы Бореля, определенные над k. Многообразие $V = \mathrm{Tr}(B, B') = \{x \in G \mid xBx^{-1} = B'\}$ определено над k (ибо поле k совершенно) и непусто (теорема 11.1). Так как группа B совпадает со своим нормализатором (теорема 11.15), то B действует на V транзитивно при помощи правых сдвигов. В силу следствия 16.5 $V(k) \neq \varnothing$.

Замечание. Последнее утверждение предложения 16.6 на самом деле справедливо для произвольного поля (Борель и Титс [1], теорема 4.13).

16.7. Предложение. *Пусть H — связная k-группа и f: $G^0 \to H$ — сюръективный k-морфизм. Тогда подгруппа Картана (соответственно максимальный тор, соответственно подгруппа Бореля) группы H, определенная над k, является образом такой подгруппы группы G^0.*

Пусть M — определенная над k подгруппа Картана группы H и $M' = f^{-1}(M)^0$. Тогда группа M' определена над k (ибо она k-замкнута и поле k совершенно) и $M = f(M')$, так как группа M связна. Согласно предложению 16.6, M' обладает определенной над k подгруппой Картана C'. В силу предложения п. 11.14 группа $f(C')$ является подгруппой Картана группы $f(M') = M$. Следовательно, $f(C') = M$. В двух других случаях доказательство аналогично.

16.8. Предложение. *Пусть G, H — связные k-группы и f: $G \to H$ — изогения, определенная над k. Тогда группы $G(k)$ и $H(k)$ содержат одинаковое число элементов.*

Пусть r: $M \to N$ — изогения связных алгебраических групп. Обозначим через $\deg r$ степень трансцендентности поля $k(M)$ над полем $r_0 k(N)$. Степень сепарабельности этого расширения равна числу элементов множества $\ker(r)$.

Пусть a_G—отображение $g \to g^{-1} \cdot g^{(q)}$. Оно сепарабельно и сюръективно (п. 16.4), и его степень сепарабельности равна числу $[G(k)]$ элементов группы $G(k)$. Аналогично, степень сепарабельности отображения a_H равна $[H(k)]$. Но $f \circ a_G = a_H \circ f$; следовательно,

$$\deg(f \circ a_G) = \deg f \cdot \deg a_G = \deg f \cdot \deg a_H.$$

Предложение следует из того факта, что $\deg f \neq 0$.

16.9. Не вдаваясь в детали, упомянем, что следствие 16.4 можно интерпретировать на языке когомологий Галуа. Оно эквивалентно следующему факту: если L — конечное расширение Галуа поля k, то

$$H^1(\mathrm{Gal}(L/k),\ G(L)) = 0.$$

Определение множества H^1 можно найти, например, в книге Серра [1].

Библиографические замечания. Результаты этого параграфа, за исключением пп. 16.6, 16.7, принадлежат Ленгу [1]. То обстоятельство, что следствие 16.5 можно вывести из теоремы 16.3, было отмечено Серром и упомянуто в статье Розенлихта [2] (см. сноску на стр. 45 этой статьи).

§ 17. ФАКТОР ГРУППЫ ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБРЫ ЛИ

В этом параграфе $\mathrm{char}(k) = p > 0$. *Мы полагаем* $A_k = k[G]$ *и* $A_K = K[G]$. Напомним (п. 3.3), что алгебру Ли $\mathfrak{g}$ можно отождествить с алгеброй левоинвариантных K-дифференцирований алгебры A_K посредством отображения $X \to *X$ и что

$$\mathfrak{g}(k) = \mathfrak{g} \cap \mathrm{Der}_k(A_k,\ A_k).$$

В § 6 мы ввели понятие фактора G/H группы G относительно ее замкнутой подгруппы. Разумеется, обе группы G и H предполагались „приведенными“, ибо только с такими группами мы имели дело в этих лекциях. Однако этот фактор можно определить на более широкой категории схем на группах (Демазюр и Гротендик [1]). В этом параграфе мы рассмотрим частный случай этой ситуации, когда в качестве H выступает ограниченная подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, — простейший тип неприведенных групп размерности нуль. Наш основной результат — предложение 17.8, которое будет играть важную роль в § 18.

17.1. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{m}$ — *определенная над* k *ограниченная подалгебра Ли алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Пусть* B — *множество элементов алгебры* A_k, *аннулируемых дифференцированиями множества* $\mathfrak{m}(k)$.

Тогда B содержит A_k^p и является конечно порожденной k-алгеброй. Кроме того, $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid X \cdot B = 0\}$.

Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на алгебре A_K при помощи дифференцирований, то она аннулирует множество A_K^p! Следовательно, $B \supset A_k^p$, и алгебра A_k является целой над B. Тогда алгебра B является конечно порожденной, согласно хорошо известному факту (см., например, Серр [4], лемма 10, стр. 58).

При доказательстве второго утверждения группу G можно считать связной. Пусть $L = K(G)$ и M — поле частных алгебры B_K. Тогда $L \supset M \supset L^p$, так что L — чисто несепарабельное расширение поля M высоты 1. Действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на A_K очевидным образом распространяется до действия алгебры Ли $\mathfrak{g} \otimes_K L$ на L, так что $\mathfrak{g} \otimes_K L$ становится алгеброй Ли дифференцирований поля L. Поле M является полем инвариантов[1]) для алгебры Ли $\mathfrak{m} \otimes_K L$. (Если $D(a/b) = 0$, где D — дифференцирование, то $D(a \cdot b^{p-1}) = 0$, откуда следует, что $a/b = a \cdot b^{p-1}/b^p$ есть частное двух D-инвариантов.) Но тогда в силу теории Галуа для несепарабельных расширений степени 1, построенной Джекобсоном [2], гл. IV, теорема 19, стр. 186, $\mathfrak{m} \otimes_K L$ есть алгебра Ли *всех* дифференцирований поля L, которые аннулируют M. Отсюда вытекает второе утверждение.

17.2. Предложение. *Пусть $\mathfrak{m}$ — ограниченная подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$, которая определена над k. Тогда существует аффинное k-многообразие $G/\mathfrak{m}$ и k-морфизм $\pi\colon G \to G/\mathfrak{m}$, обладающий следующими свойствами:*

(i) *Морфизм π биективен, $\ker(d\pi)_x = x \cdot \mathfrak{m}$ $(x \in G)$[2]). Коморфизм π_0 индуцирует изоморфизм кольца $k[G/\mathfrak{m}]$ на алгебру B тех элементов алгебры A_k, которые аннулируются подалгеброй $\mathfrak{m}(k)$.*

(ii) *Если Z — аффинное k-многообразие и $s\colon G \to Z$ — такой k-морфизм, что $\ker(ds)_x \supset x \cdot \mathfrak{m}$ $(x \in G)$, то существует единственный k-морфизм $f\colon G/\mathfrak{m} \to Z$, такой, что $s = f \circ \pi$.*

Пара $(G/\mathfrak{m}, \pi)$ единственна с точностью до k-изоморфизма.

Пусть (V_i, π_i) $(i = 1, 2)$ — две пары, обладающие свойствами (i) и (ii). Существуют единственные k-морфизмы $f\colon V_1 \to V_2$ и $h\colon V_2 \to V_1$, такие, что $\pi_2 = f \circ \pi_1$ и $\pi_1 = h \circ \pi_2$. Отсюда сразу следует, что морфизмы f и h биективны и что коморфизмы f_0, h_0 являются изоморфизмами. Остается доказать их существование.

Пусть $b_1, \ldots, b_s$ — множество образующих для B как k-алгебры (п. 17.1). Согласно предложению п. 1.9, имеется конечномерное подпространство W_i алгебры A_K, инвариантное относительно

---

[1]) Поясним, что инвариантом относительно дифференцирования D модуля M называется такой элемент $a \in M$, что $D(a) = 0$. — *Прим. перев.*

[2]) См. сноску на стр. 244. — *Прим. перев.*

группы G, действующей при помощи правых сдвигов, причем W_i определено над k и содержит b_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Пусть $E = \prod W_i$ и $b = b_1 + \ldots + b_s \in E$. Мы утверждаем, что орбита $V = G \cdot b$ элемента b относительно естественного действия группы G в E и орбитное отображение π: $g \to g \cdot b$ удовлетворяют нашим условиям.

Если $g \cdot b = b$, то $b_i(g) = b_i(e)$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Поскольку b_i порождают алгебру B и B содержит A_k^p, то $f(g) = f(e)$ для любого $f \in A_k$, так что $g = e$, т. е. отображение π биективно. Пусть $X \in \mathfrak{g}$. Тогда, согласно предложению 3.10, $X \in \ker(d\pi)_e$ тогда и только тогда, когда $b_i * X = 0$, т. е. в силу леммы 17.1 тогда и только тогда, когда $X \in \mathfrak{m}$. Следовательно, $\ker(d\pi)_e = \mathfrak{m}$. Равенство $\ker(d\pi)_x = X \cdot \mathfrak{m}$ вытекает тогда из того факта, что орбитное отображение эквивариантно.

Так как орбитное отображение π биективно и многообразие V нормально, то V аффинно (предложение п. АГ. 18.3) и коморфизм π_0 инъективен. Соотношение $\ker(d\pi)_e = \mathfrak{m}$ влечет за собой $\pi_0(k[V]) \subset B$. Чтобы установить обратное включение, достаточно доказать, что $b_i \in \operatorname{Im} \pi_0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Зафиксируем i. Пусть $u_1, \ldots, u_t$ — базис пространства $W_i(k)$ и $a_1, \ldots, a_t$ — двойственный базис пространства $W_i^*(k)$. Ограничение отображения $a_j \in W_i^* \subset E^*$ на многообразие V есть элемент алгебры $k[V]$. Если обозначить его через a_j, то

$$b_i(g) = g \cdot b_i(e) = \sum_j a_j(g \cdot b_i) \cdot u_j(e) = \sum_j \pi_0(a_j(g)) \cdot u_j(e),$$

что доказывает наше утверждение.

Пусть теперь s и Z — как в утверждении (ii). Тогда $s_0(k[Z])$ аннулируется дифференцированиями из $\mathfrak{m}(k)$ и, следовательно, содержится в B. Поэтому единственный k-морфизм f: $V \to Z$, ассоциированным коморфизмом которого является s_0: $k[Z] \to B$, удовлетворяет соотношению $s = f \circ \pi$.

Замечание. При доказательстве того факта, что многообразие V аффинно, мы использовали предложение п. АГ.18.3. Этого можно избежать. Затратив несколько больше усилий, можно показать непосредственно, что многообразие V замкнуто в E. Подобное рассуждение можно найти в книге Бореля [2], предложение 7.7.

17.3. Лемма. *Сохраним обозначения* п. 17.2 *и* § 3. *Пусть* $f \in A_K$, $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$. *Тогда*

(i) $$(i_0 f) * X = -i_0(X * f),$$

(ii) $$(f * X)(g) = (\operatorname{Ad}(g)(X) * f)(g).$$

Пусть $f_i,\ h_i \in A_K$ — такие элементы, что $\mu_0 f = \sum_i f_i \otimes h_i$. Тогда

$$i_0 f(g \cdot x) = f(x^{-1} \cdot g^{-1}) = \sum_i i_0 f_i(x) \cdot h_i(g^{-1}).$$

Так как $(i_0 f * X)(g) = X(\lambda_{g^{-1}} \cdot i_0 f)$ (см. п. 3.4), то

$$(i_0 f * X)(g) = \sum_i X(i_0 f_i) \cdot h_i(g^{-1}),$$

откуда, согласно п. 3.4,

$$(i_0 f * X)(g) = -\sum_i X f_i \cdot h_i(g^{-1}) = -(X * f)(g^{-1}),$$

что доказывает утверждение (i). Из равенства $f(g \cdot x) = f(gxg^{-1} \cdot g)$ получаем

$$\sum_i f_i(g) \cdot h_i(x) = \sum_i f_i(gxg^{-1}) \cdot h_i(g).$$

Следовательно,

$$(f * X)(g) = \sum_i X(f_i \circ \operatorname{Int} g) \cdot h_i(g).$$

Так как дифференциал морфизма Int по определению (см. п. 3.5) есть Ad, то из определения дифференциала отображения и п. 3.4 получаем

$$(f * X)(g) = \sum_i (\operatorname{Ad}(g)(X) \cdot f_i) \cdot h_i(g) = (\operatorname{Ad}(g)(X) * f)(g).$$

17.4. Предложение. *Пусть $\mathfrak{m}$ — ограниченная подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{m}$ определена над полем k и инвариантна относительно* Ad G. *Тогда на многообразии $G/\mathfrak{m}$ из п.* 17.2 *можно ввести каноническую структуру k-группы, такую, что морфизм π: $G \to G/\mathfrak{m}$ является k-изогенией. Если G' — некоторая k-группа и s: $G \to G'$ есть k-изоморфизм, дифференциал которого аннулирует алгебру $\mathfrak{m}$, то существует единственный k-морфизм f: $G/\mathfrak{m} \to G'$, такой, что $s = f \circ \pi$.*

Сохраним предыдущие обозначения. Так как подалгебра Ли $\mathfrak{m}$ инвариантна относительно Ad G, то, согласно утверждению (i) леммы 17.3, алгебра B_K совпадает с множеством элементов, неподвижных относительно левых конволюций $X *$ ($X \in \mathfrak{m}$). Из утверждения (ii) этой леммы вытекает тогда, что $i_0 B = B$. Пусть $f \in B$ и $\mu_0 f = \sum f_i \otimes h_i$ ($f_i,\ h_i \in A_k$). Можно предполагать, что элементы f_i (соответственно элементы h_i) линейно независимы над k. В самом деле, при $X \in \mathfrak{g}$ мы имеем

$$f * X = \sum f_i \cdot X h_i, \qquad X * f = \sum X f_i \cdot h_i.$$

При $X \in \mathfrak{m}$ обе левые части равны нулю. Следовательно, $X f_i = X h_i = 0$ для всех i, откуда $\mu_0 B \subset B \otimes B$. Таким образом, алгебра B и отображение μ, i_0, e удовлетворяют условиям п. 1.5, выполнение которых гарантирует, что B — координатное кольцо над k аффинной k-группы. Это позволяет ввести на многообразии $G/\mathfrak{m}$ структуру аффинной k-группы. Так как она совместима с включением $B \subset A_k$, то отображение π из п. 17.2 является k-изогенией. Это доказывает первое утверждение предложения. Второе вытекает из утверждения (ii) предложения 17.2.

17.5. Примеры. (1) Если $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$, то $k(G/\mathfrak{m}) = A_k^p$. Изогению Фробениуса (п. 16.1) можно рассматривать как k-изогению π группы G на $G/\mathfrak{g}$.

(2) Пусть $p = 2$ и $G = \mathbf{SL}_2$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ есть алгебра Ли (2×2)-матриц со следом нуль. Она содержит одномерное подпространство $\mathfrak{m}$ матриц, кратных единичной, которое является ограниченным идеалом, инвариантным (фактически центральным) относительно группы $\mathbf{SL}_2$. Легко видеть, что $G/\mathfrak{m} = \mathbf{PGL}_2$. Морфизм π: $G \to G/\mathfrak{m}$ реализуется при помощи естественного действия группы G на $\mathbf{P}_1$ (см. п. 10.8). Тогда $\operatorname{Im} d\pi = \mathfrak{n}$ есть двумерный идеал алгебры Ли $L(G/\mathfrak{m})$, инвариантный относительно p-отображения и относительно группы $\operatorname{Ad}(G/\mathfrak{m})$. Можно показать, что $\mathbf{PGL}_2/\mathfrak{n} \cong \mathbf{SL}_2$ и что сквозное отображение $G \to G/\mathfrak{m} \to (G/\mathfrak{m})/\mathfrak{n}$ есть изогения Фробениуса группы G.

17.6. Характеры группы $\mathbf{GL}_1$ имеют вид $x \to x^m$ $(m \in \mathbf{Z})$. Дифференциал такого характера есть отображение $X \to mX$. Пусть теперь T — тор. Отсюда следует, что $L(T) \cong \mathrm{X}_*(T) \otimes k$, $L(T)^* \cong \mathrm{X}(T) \otimes k$. В частности, характер $a \in \mathrm{X}(T)$ имеет нулевой дифференциал тогда и только тогда, когда $a \in p \cdot \mathrm{X}(T)$.

17.7. Лемма. *Пусть G — связная группа. Предположим, что все полупростые элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ центральны. Тогда множество полупростых элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является подпространством, определенным над k, и совпадает с алгеброй Ли некоторого максимального тора группы G.*

Пусть T — максимальный тор группы G. Пусть $X \in \mathfrak{g}$ — полупростой элемент. Он является касательным вектором к некоторому тору S (см. п. 11.8). и в силу следствия 11.3 существует элемент $g \in G$, такой, что $g \cdot S \cdot g^{-1} \subset T$. По предположению элемент X централен в $\mathfrak{g}$ и, следовательно, G совпадает с централизатором элемента X в G (см. п. 9.1). Поэтому $\operatorname{Ad}(g)(X) = X$ и $X \in \mathfrak{t}$. Но алгебра Ли $\mathfrak{t}$ состоит из полупростых элементов (п. 8.2, следствие), откуда вытекает, что $\mathfrak{t}$ есть множество всех полупростых элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Существует такая степень $q = p^s$ числа p, что s-я итерация $[q]$ отображения $[p]$ аннулирует все нильпотентные элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (если $G \subset \mathbf{GL}_n$, то можно принять $s = n$). Если $X = X_s + X_n$ — разложение Жордана элемента $X \in \mathfrak{g}$, то $X^{[q]} = X_s^{[q]}$, что показывает, что отображение $[q]$ преобразует $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{t}$. Так как отображение $[q]$ биективно на $\mathfrak{t}$ (см. п. 3.3, пример (2)), то $\mathfrak{t}$ совпадает со всем образом отображения $[q]$. Но $[q]$ есть k-морфизм многообразий (если $G \subset \mathbf{GL}_n$, то $X^{[q]}$ является q-й степенью матрицы X (см. п. 3.6)); следовательно, многообразие $\mathfrak{t} = \operatorname{im}[q]$ определено над k.

17.8. Предложение. *Пусть G — связная ненильпотентная группа; предположим, что каждый полупростой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ централен. Пусть T — максимальный тор группы G. Тогда существует k-подгруппа G', такая, что неполупростые элементы алгебры $\mathfrak{g}'$ центральны, и чисто несепарабельная k-изогения π: $G \to G'$, такая, что $\ker(d\pi) = \mathfrak{t}$ и $\operatorname{im}(d\pi)$ — подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}'$, дополнительное к алгебре Ли любого максимального тора.*

Пусть $\Phi = \Phi(T, G)$ — множество корней группы G относительно тора T (п. 8.17). Так как группа G ненильпотентна, то тор T не централен в группе G (см. п. 11.5) и множество Φ непусто (следствие п. 9.2). Пусть c — наибольшее положительное число, такое, что $\Phi \subset p^c \mathrm{X}(T)$. Ввиду п. 17.6 по; алгебра Ли $\mathfrak{t}$ центральна в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $c \geqslant 1$. Согласно лемме 17.7 и предположению, $c \geqslant 1$. Доказательство проведем индукцией по c.

Согласно п. 9.1, все элементы алгебры Ли $\mathfrak{t}$ централизуются группой G. Разумеется, алгебра Ли $\mathfrak{t}$ является ограниченной и инвариантной относительно $\operatorname{Ad}(G)$; следовательно, мы можем применить предложение 17.4: получаем k-группу $G_1 = G/\mathfrak{t}$ и k-изогению π_1: $G \to G_1$, такие, что $\ker(d\pi_1) = \mathfrak{t}$. Пусть T' — максимальный тор группы G_1. Согласно п. 11.14, $\dim T = \dim T'$. В силу леммы 17.7 $d\pi_1$ аннулирует все полупростые элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, так что (см. п. 4.4) $d\pi_1(\mathfrak{g})$ состоит из нильпотентных элементов. Если T' — максимальный тор группы G_1, то $d\pi_1(\mathfrak{g}) \cap \cap L(T') = \{0\}$, откуда

$$L(G_1) = d\pi_1(\mathfrak{g}) \oplus L(T') \tag{1}$$

по размерностным соображениям. Пусть теперь $T' = \pi_1(T)$. Так как отображение $d\pi_1$ аннулирует алгебру Ли $\mathfrak{t}$, то из п. 17.6 следует, что индуцированный гомоморфизм π_1^*: $\mathrm{X}(T') \to \mathrm{X}(T)$ отображает группу $\mathrm{X}(T')$ в $p \cdot \mathrm{X}(T)$. С другой стороны, отображение $d\pi_1$ инъективно на сумме корневых подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \Phi$). Из формулы (1) и эквивариантности следует, что гомоморфизм π_1^* индуцирует биекцию множества $\Phi(T', G_1)$ на Φ. Так как $\pi_1^* \mathrm{X}(T') \subset \subset p \cdot \mathrm{X}(T)$, то $d < c$, где d — наибольшее целое число, такое, что $\Phi(T', G_1) \subset p^d \mathrm{X}(T')$. Если $d = 0$, то мы возьмем $\pi_1 = \pi$, $G_1 = G'$. Если $d \neq 0$, то по индукции выберем группу G' и морфизм π_2, удовлетворяющие нашим условиям по отношению к группе G_1.

Ясно тогда, что пара (G', $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$) удовлетворяет нашим требованиям.

Библиографические замечания. Как уже упоминалось, результаты пп. 17.2, 17.4 справедливы в гораздо более общей форме (Демазюр и Гротендик [1]). Лемма п. 17.3 впервые доказана Серром [5] и Барсотти. См. также Картье [1]. Предложение п. 17.8 доказано в несколько более общем виде Борелем и Шпрингером [1], § 5.3.

§ 18. ПОДГРУППЫ КАРТАНА НАД ПОЛЕМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ; УНИРАЦИОНАЛЬНОСТЬ; РАЗЛОЖИМОСТЬ РЕДУКТИВНЫХ ГРУПП

18.1. Регулярные элементы. Пусть nil X ($X \in \mathfrak{g}$) — кратность нулевого собственного значения преобразования ad(X), и пусть $n(\mathfrak{g})$ — минимум nil X, когда X пробегает $\mathfrak{g}$. Элемент X называется *регулярным*, если nil $X = n(\mathfrak{g})$, и *сингулярным* в противном случае. Ясно, что nil $X =$ nil X_s, так что X регулярен в том и только в том случае, когда его полупростая часть X_s является регулярным элементом. Если $p \neq 0$, то элемент X регулярен тогда и только тогда, когда элемент $X^{[p]}$ регулярен.

Если ввести координаты в алгебре $\mathfrak{g}$ по отношению к базису из $\mathfrak{g}(k)$, то мы можем написать

$$\det(\mathrm{ad}(X) - T) = T^{n(\mathfrak{g})}(c_0(X) + c_1(X)T + \ldots + c_q(X)T^q),$$

где c_i — однородные полиномы с коэффициентами из поля k и $q = \dim \mathfrak{g} - n(\mathfrak{g})$. По определению числа $n(\mathfrak{g})$ полином c_0 отличен от нуля. Сингулярные элементы суть корни полинома c_0; следовательно, они образуют собственное k-замкнутое алгебраическое подмножество алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а регулярные элементы образуют плотное открытое подмножество.

Пусть поле k бесконечно. Тогда существует регулярный полупростой элемент $X \in \mathfrak{g}(k)$, ибо множество $\mathfrak{g}(k)$ плотно в $\mathfrak{g}$ в топологии Зарисского (поле k бесконечно). Пусть $X = X_s + X_n$ — его разложение Жордана (п. 4.4). Тогда элемент X_s регулярен. Если поле k совершенно, то $X_s \in \mathfrak{g}(k)$. Пусть $p \neq 0$. Тогда существует степень $[q]$ отображения $[p]$, которая аннулирует элемент X_n. Тогда $X_s^{[q]} = X^{[q]}$.

18.2. Теорема. *Пусть группа G связна.*

(i) *Группа G содержит максимальный тор и подгруппу Картана, определенные над k.*

(ii) *Если группа G редуктивна либо поле k совершенно, то группа G унирациональна над k.*

(i) Подгруппа Картана является централизатором максимального тора T и определена над k, если тор T определен над k (следствие п. 9.2). Следовательно, достаточно показать, что существует определенный над k максимальный тор. Если группа G нильпотентна, то это утверждение (3) теоремы 10.6. Если поле k конечно, это предложение 16.6. В общем случае мы воспользуемся индукцией по $\dim G$.

Пусть поле k бесконечно и группа G не нильпотентна.

Пусть T — максимальный тор группы G. Так как группа G ненильпотентна, то тор T нецентрален (п. 11.5). При $p=0$ ненулевые характеры тора T имеют ненулевые дифференциалы, так что алгебра Ли $\mathfrak{t}$ нецентральна в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{g}$ обладает нецентральными полупростыми элементами. Если все полупростые элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ центральны (и, следовательно, $p \neq 0$), то выберем G' и π: $G \to G'$, как в п. 17.8. В противном случае $G'=G$, $\pi=\mathrm{Id}$. Согласно п. 18.1, множество $\mathfrak{g}'(k)$ содержит регулярный полупростой элемент Y. По построению $n(\mathfrak{g}') \neq \dim \mathfrak{g}'$, так что $\mathfrak{z}(Y) \neq \mathfrak{g}'$. Пусть G действует на $\mathfrak{g}'$ при помощи отображения $\mathrm{Ad} \circ \pi$; при $Z \in \mathfrak{g}'$ обозначим через G_Z стабилизатор элемента Z в G. Ясно, что $\pi(G_Z)=Z_{G'}(Z)$. В частности, согласно п. 9.1, $G_Y=\dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}'}(Y) \neq \dim \mathfrak{g}'$, так что $G_Y \neq G$. Мы утверждаем, что группа G_Y определена над k. Это ясно, если поле k совершенно или если морфизм π тождествен (п. 9.1). В остальных случаях достаточно показать, что орбитное отображение f: $g \to g(Y) = \mathrm{Ad}\,\pi(g)(Y)$ сепарабельно (предложение 6.7). Это сводится к доказательству того факта, что отображение df_e сюръективно. Согласно формуле (2) п. 3.9 и п. 9.1, касательное пространство в точке Y к орбите $\mathrm{Ad}\,G'(Y)=G \cdot Y$ совпадает с $Y+[Y, \mathfrak{g}']$. С другой стороны, согласно формуле (2) п. 3.9,

$$df_e(X)=Y+[d\pi(X), Y] \qquad (X \in \mathfrak{g}).$$

Согласно предложению 17.8, пространство $d\pi(\mathfrak{g})$ дополнительно в $\mathfrak{g}'$ к алгебре Ли любого максимального тора. Мы знаем, что Y — алгебра Ли максимального тора (предложение 11.8). Так как последняя коммутирует с Y, то мы получаем $[Y, d\pi(\mathfrak{g})]=[Y, \mathfrak{g}']$, что доказывает наше утверждение.

Так как Y — касательный вектор к максимальному тору, то $Z_{G'}(Y)$ содержит максимальный тор группы G' и, следовательно, $G^0{}_Y$ содержит максимальный тор группы G. Ввиду сопряженности все максимальные торы группы $G^0{}_Y$ максимальны в группе G. По предположению индукции один из них определен над k, откуда следует утверждение (i).

(ii) Напомним (пример 2 п. 8. 13), что неприводимое k-многообразие V унирационально над k, если его поле функций $k(V)$ содержится в чисто трансцендентном расширении поля k. Если многообразия (V_i) $(1 \leqslant i \leqslant m)$ унирациональны над k и $f\colon V_1 \times \ldots \ldots \times V_m \to V$ — доминантный k-морфизм, то, очевидно, многообразие V унирационально над k.

Пусть поле k совершенно. Тогда унипотентный радикал $R_u(G)$ группы G, который всегда k-замкнут, определен над k. Он разложим над k (теорема 15.4) и, следовательно, является рациональным многообразием над k (замечание 15.8). Кроме того, также ввиду замечания 15.8, группа G бирационально изоморфна как k-многообразие многообразию $G/R_u(G) \times R_u(G)$. Это сводит доказательство утверждения (ii) к случаю, когда группа G редуктивна.

Итак, предположим, что группа G редуктивна. Если G — тор, то все сводится к примеру (2) п. 8.13. Рассмотрим случай, когда поле k бесконечно, и будем рассуждать при помощи индукции по $\dim G$. Сохраним обозначения из доказательства утверждения (i). Пусть H — группа, порожденная подгруппами $G^0{}_Y$, когда Y пробегает регулярные полупростые элементы множества $\mathfrak{g}'(k)$. Мы утверждаем, что $H = G$. Предположим противное. Тогда $\mathfrak{h}' = L(\pi(H))$ — собственная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}'$. Так как поле k бесконечно, то существует элемент $Z \in \mathfrak{g}'(k)$, регулярный и не содержащийся в $\mathfrak{h}'$. Пусть $Z = Z_s + Z_n$ — его разложение Жордана. Для некоторой итерации $[q]$ отображения $[p]$ мы имеем $Z_s^{[q]} = Z^{[q]}$, и элемент $U = Z_s^{[q]}$ регулярен, полупрост и рационален над k. Он коммутирует с Z (ибо он коммутирует с Z_s и $Z_s^{[q]} = Z_s^q$ в матричной реализации группы G'), так что $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}'}(U) \not\subset \mathfrak{h}'$. Но (см. п. 9.1) $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}'}(U)$ есть алгебра Ли группы $Z_{G'}(U)^0 = \pi(G_U)$. В качестве следствия получаем, что $G_U \not\subset H$ — противоречие. Итак, $H = G$. Тогда в множестве $G^0{}_Y$ можно выбрать конечное множество групп $H_1, \ldots, H_t$, таких, что отображение-произведение $H_1 \times \ldots \times H_t \to G$ сюръективно. Группы H_i не совпадают с G, определены над k (согласно (i)) и редуктивны, ибо их образы при изогении π редуктивны (предложение 13.19). По индукции они унирациональны над k; следовательно, группа G унирациональна над k.

Пусть теперь поле k конечно. Тогда (предложение 16.6) группа G обладает подгруппой Бореля B, определенной над k; последняя содержит в свою очередь определенный над k максимальный тор T. Так как поле k совершенно, то единственная подгруппа Бореля B^-, противоположная группе B и содержащая тор T, также определена над k, и унипотентные радикалы U, U^- групп B и B^- определены над k. Согласно теореме 10.6, группа B изоморфна над k полупрямому произведению $T \cdot U$. Согласно п. 14.13, группа G как многообразие бирационально k-изоморфна многообразию $U^- \times T \times U$. Согласно следствию 15.5, группы U, U^- разложимы над k и, следовательно, являются рациональными многообразиями над k. Так как тор T унирационален над k (пример (2) п. 8.13), то группа G унирациональна над k.

Замечание. Можно показать, что любая связная k-группа порождается своими подгруппами Картана, определенными над k: для конечного k см. Борель и Шпрингер [2], п. 2.9. Для бесконечного поля k это следует из того принадлежащего Гротендику факта, что многообразие групп Картана группы G рационально над k (для произвольного поля) (Демазюр и Гротендик [1], сообщение XIV, теорема 6.1, стр. 39; см. также Борель и Шпрингер [2], пп. 7.9, 7.10). Отсюда следует, что группа G унирациональна над k, если ее подгруппы Картана унирациональны над k. Это содержит два случая утверждения (ii).

18.3. Следствие. *Пусть G — связная группа и поле k бесконечно. Если поле k совершенно или группа G редуктивна, то множество $G(k)$ плотно в G в топологии Зарисского.*

Это вытекает из унирациональности. Отметим, что Розенлихтом [2], стр. 46, построен пример одномерной унипотентной k-группы над бесконечным полем k, в котором множество $G(k)$ конечно.

18.4. Следствие. *Пусть G — связная разрешимая группа. Тогда группа G разложима над алгебраическим расширением поля k.*

Согласно п. 18.2, группа G обладает максимальным тором T, определенным над k. Ее унипотентный радикал k-замкнут и, следовательно, разложим над конечным чисто несепарабельным расширением поля k в силу следствия 15.5. Тор T разложим над конечным (сепарабельным) расширением поля k (п. 8.11), что доказывает следствие.

18.5. Лемма. *Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли замкнутой подгруппы H группы G. Предположим, что алгебра $\mathfrak{h}$ определена над k и $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Тогда группа $N_G(\mathfrak{h})$ определена над k; группа H имеет конечный индекс в группе $N_G(\mathfrak{h})$ и определена над конечным сепарабельным расширением поля k; группа H^0 определена над k.*

Пусть $N = N_G(\mathfrak{h})$. Тогда группа N содержит H и алгебра Ли $L(N)$ содержит $\mathfrak{h}$ и нормализует $\mathfrak{h}$. Значит, $L(N) = \mathfrak{h}$ и $\dim N = \dim H$. Так как $N \supset H$, то $H^0 = N^0$ и группа H имеет конечный индекс в N. Предположим, что группа N определена над k. Тогда группа $H^0 = N^0$ также определена над k (см. утверждение (b) предложения п. 1.2) и группа H определена над k_s, согласно п. АГ. 12.3. Остается показать, что группа N определена над k.

Пусть $d = \dim \mathfrak{h}$, $E = \Lambda^d \mathfrak{g}$ и $\pi = \Lambda^d \cdot \mathrm{Ad}$ — естественное представление группы G в пространстве E. Пусть D — прямая, соответствующая подпространству $\mathfrak{h}$. Из предположений и леммы п. 5.1

Подобное рассуждение для группы $U_{-\alpha}$ завершает доказательство.

18.8. Следствие. *Пусть G — связная редуктивная группа. Тогда группа G разложима над конечным сепарабельным расширением поля k.*

По теореме 18.2 группа G обладает максимальным определенным над k тором T. Последний в силу предложения п. 8.11 разложим над конечным сепарабельным расширением k' поля k. Остается сослаться на теорему 18.7.

Библиографические замечания. В характеристике нуль теорема 18.2 принадлежит Шевалле: утверждение (i) см. Шевалле [1], т. 3, а утверждение (ii) — в статье Шевалле [2]. Для бесконечного совершенного поля эта теорема была установлена Розенлихтом [2], а в общем случае — Гротендиком (Демазюр и Гротендик [1], сообщение XIV). Приведенное здесь доказательство найдено Борелем и Шпрингером [1]. Упомянутая выше статья Шевалле также содержит результат (предложение 3), который, в сущности, эквивалентен рациональности над k многообразия подгрупп Картана группы G, если k — поле характеристики нуль (см. замечание в п. 18.2 по поводу общего случая этой теоремы).

Результаты п. 18.7 принадлежат Картье (не опубликовано). Более общие результаты можно найти у Демазюра и Гротендика [1], сообщение XII. Мы следовали здесь статье Бореля и Шпрингера [2].

ПОСЛЕСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Эти заметки охватывают лишь первую часть теории линейных алгебраических групп над полем. Чтобы облегчить дальнейшее изучение, мы дадим здесь краткий комментарий к статьям и книгам по этому предмету.

Если не считать некоторых общих фактов, изложенных в гл. I и II для произвольного поля, структурная теория разрабатывалась в первую очередь над алгебраически замкнутым, а затем уже над произвольным полем. Это соответствует в алгебраической геометрии различию между „геометрическими“ вопросами и вопросами „рациональности“.

Главы III и IV дают первую часть теории полупростых алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем. Перечислим основные оставшиеся за рамками этих лекций разделы этой теории (все результаты принадлежат Шевалле): (*a*) определяемость неприводимых представлений их старшими весами (см. Семинар Шевалле [1], Борель [4] или Стейнберг [4]); (*b*) изоморфизм двух групп над данным полем с одинаковыми системами корней (см. Семинар Шевалле [1] или Демазюр и Гротендик [2]); (*c*) существование группы с заданной системой корней (см. Борель [4], Шевалле [2] или Стейнберг [4]).

Главу V можно рассматривать как введение в теорию алгебраических групп над произвольным, не обязательно алгебраически замкнутым полем. Она содержит все необходимое для изучения редуктивных k-групп, предпринятого Борелем и Титсом [1]. Однако мы совершенно не затронули классификации классов изоморфизма над k простых k-групп. По этому поводу мы рекомендуем читателю статью Титса [4], а также (для совершенного поля) лекции Сатаке [2].

Если k — локальное поле, то группа $G(k)$ k-точек k-группы G обладает естественной структурой аналитической k-группы, топология которой тоньше топологии Зарисского. Если $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то группу $G(k)$ можно рассматривать как вещественную или комплексную группу Ли. Если группа G полупроста, то основную роль в изучении группы $G(k)$ играют максимальные компактные подгруппы, разложения Картана и Ивасава, и симметрическое пространство $G(k)/U$, где U — максимальная компактная подгруппа группы $G(k)$. Если k — неархимедово локально компактное поле, то группа $\tilde{G}(k)$ может иметь несколько классов сопряженных максимальных компактных подгрупп. Тем не менее и в этом случае развита довольно богатая теория, которая в значительной степени аналогична теории вещественных групп Ли (см. Брюа и Титс [1], [2], [3], Ивахори и Мацумото [1]).

В этой книге рассматривались только приведенные аффинные группы над полями. Они представляют собой частный случай групповых схем, относительно которых мы отсылаем читателя к книгам Демазюра и Габриеля [1] и Демазюра и Гротендика [2].

В наших лекциях алгебраические группы рассматривались сами по себе, без учета связей с другими разделами математики. Однако эти связи многочисленны, и на самом деле оказывали весьма стимулирующее воздействие на развитие теории. Чтобы получить представление об этом, читателю стоит ознакомиться с Трудами симпозиума по чистой и прикладной математике [1] [1]).

---

[1]) Там же можно найти обширную библиографию по теории алгебраических групп и ее приложениям. Некоторые из докладов на этом симпозиуме переведены на русский язык. (См. сб. Арифметические группы и автоморфные функции, «Мир», М., 1969.)

Укажем также на труды семинара по алгебраическим группам и связанным с ними конечным группам (Seminar of Algebric groups and related finite groups, Springer, 1970; готовится русский перевод). — *Прим. ред.*

ЛИТЕРАТУРА [1]

Борель (Borel A.)

1. Groupes linéaires algébriques, *Ann. Math.*, **64**, N .1 (1956), 20—80.
2. Introduction aux groupes arithmetiques, Hermann, Paris, 1969 [2]).
3. Linear algebraic groups, Proc. Symp. Pure Math., vol 9, Amer. Math. Soc., Providence, 1966, 3—19.

4°. Properties and linear representations of Chevalley groups, Seminar on Algebraic groups and related finite groups, Springer, Berlin. 1970, 1—55.

Борель, Шпрингер (Borel A., Springer T. A.)

1. Rationality properties of linear algebraic groups, Proc. Symp. Pure Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, 1966, 26—32.
2. Rationality properties of linear algebraic groups, II, *Tohoku Math. J.*, **20** (1968), 443—497.

Борель, Титс (Borel A., Tits J.)

1. Groupes réductifs, *Publ. Math. Inst. Haut. Et. Sci.*, **27** (1965), 55—150. (Русский перевод: Борель А., Титс Ж., Редуктивные группы, сб. *Математика*, **11**: 1, 43—111, **11**: 2 (1967), 3—31.)

2°. Compléments à l'article «Groupes réductifs» (в печати).

3°. Éléments unipotents et sousgroupes paraboliques de groupes réductifs, I, *Inv. Math.*, **12** (1971), № 2, 95—104.

4* On «abstract» homomorfisms of simple algebraic groups, Proc. Colloq. Algebraic Geometry in Bombey, Oxford, 1969, 75—83.

Брюа, Титс (Bruhat F., Tits J.)

1°. a) BN-paires de type affine et données radicielles, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **263** (1966), 598—601.
b) Groupes simples résiduéllement déployés sur un corps local, ibid., 766—768; c) Groupes algébriques simples sur un corps local, ibid., 822—825; d) Groupes algébriques simples sur un corps local: cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan, ibid., 867—869. (Русский перевод: Брюа Ф., Титс Ж., Строение полупростых алгебраических групп над локальными полями, сб. *Математика*, **12** : 5 (1968), 19—33.)

2°. Groupes algébriques simples sur un corps local. Proc. Conf. on Local Fields, Driebergen, 1967.

3°. Groupes algebriques simples sur un corps local, *Publ. Math. Inst. Haut. Et. Sci.* (в печати).

---

[1]) Первоначальный список литературы содержал лишь те работы, которые цитировались в тексте. Для русского перевода автор расширил этот список, снабдив его кратким комментарием (см. послесловие к русскому изданию). Добавленная автором литература помечена нуликом; звездочкой отмечена литература, добавленная редактором. — *Прим. ред.*

[2]) Имеется русский перевод основной части этой книги (см. сб. *Математика*, **12** : **4**, **12** : 5, **12** : 6 (1968)). — *Прим. ред.*

Бурбаки (Bourbaki N.)
1. Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 1: Algèbres de Lie, Hermann, Paris, 1960.
2. Groupes et algèbres de Lie, Chapitre VI: Systèmes de recines, Hermann, Paris, 1969. (Готовится к печати русский перевод.)

Ван-дер-Варден (Van der Waerden B. L.)
1. Algebra, Teil 1,5 Aufl., Springer, Berlin, 1960. (Русский перевод первого издания: Ван-дер-Варден, Современная алгебра, часть 1, ОГИЗ, М. — Л., 1947.)

Вейль (Weil A.)
1. On algebraic groups and homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, **77** (1955), 493—512.
2*. Adeles and algebraic groups (notes by M. Demazure and T. Ono), *Inst. Adv. Studies*, Prinston, **1961**. (Русский перевод: Вейль А., Адели и алгебраические группы, сб. *Математика*, **8** : 4, (1964), 3—74).

Винберг Э. Б., Онищик А. Л.
1*. Семинар по алгебраическим группам и группам Ли, 1967—1968, МГУ, М., 1969.

Годеман (Godement R.)
1*. Groupes linéaires algébriques sur un corps parfait, Séminaire Bourbaki, 1960/1961, éxposé 206.

Демазюр (Demazure M.)
1°. Schemas en groupes réductifs, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965), 369—413.

Демазюр, Гротендик (Demazure M., Grothendieck A.)
1°. Schemas en groupes, Séminaire de Geométrie Algébrique, Inst. Haut. Ét. Sci., Paris, 1964.
2°. Schemas en groupes, I, II, III, Springer Lecture Notes 151, 152, 153, Springer, Berlin, Göttingen — Heidelberg, New-York, 1970.

Демазюр, Габриель (Demazure M., Gabriel P.)
1°. Groupes algébriques, I, Masson, North Holland, 1970.

Джекобсон (Jacobson N.)
1. Алгебры Ли, «Мир», М., 1964.
2. Lectures in Abstract Algebra, vol. III, van Nostrand, Princeton, 1964.

Ивахори, Мацумото (Iwahori N., Matsumoto H.)
1°. On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups, *Publ. Math. Inst., Haut. Ét. Sci.*, **25** (1965), 5—48.

Картан (Cartan E.)
1. Oeuvres complètes, Hermann, Paris, 1952.

Картер (Carter R. W.)
1*. Simple groups and simple Lie algebras, *J. London Math. Soc.*, **40**, p. 2, № 158 (1965), 193—240. (Русский перевод: Картер Р., Простые группы и простые алгебры Ли, сб. *Математика*, **10**: 5 (1966), 3—47.)

Картье (Cartier P.)
1. Isogénies des variétés de groupes, *Bull. Soc. Math. France*, **87**, № 3 (1959), 191—220.
2*. Groupes algébriques et groupes formels, Colloq. sur la theor. groupes algebr. Bruxelles, 1962. Louvain, Paris, 1962, 87—110.

Кнезер (Kneser M.)
1°. Semi-simple algebraic groups. Algebraic Number Theory, Acádemic press, N.-Y. — London, 1967. (Русский перевод: Кнезер М., Полупростые ал-

гебраические группы, сб. «Алгебраическая теория чисел», «Мир», М., 1969, 374—396.)

Колчин (Kolchin E. R.)
1. Algebraic matrix groups and the Picard — Vessiot theory of homogeneous linear differential equations, *Ann. Math.*, **49** (1948), 1—42.
2. On certain concepts in the theory of algebraic martic groups, *Ann. Math.*, **49** (1948), 774—789.

Кэртис, Райнер (Curtis C. W., Reiner I.)
1. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», М., 1969.

Ленг (Lang S.)
1. Algebraic groups over finite fields, *Amer. Journ. Math.*, **78** (1958), 553—563.
2. Abelian varieties, Interscience Tracts, № 7, N. Y., 1959.
3*. Алгебраические числа, «Мир», М., 1966.

Мамфорд (Mamford D.)
1. Introduction to algebraic geometry, Harvard lecture notes, Harvard, 1967.
2*. Geometric invariant theory, Springer, 1965.

Мостов (Mostow G.)
1*. Fully reducible subgroups of algebraic groups, *Amer. J. Math.*, **68** (1956), 200—221.

Маурер (Maurer)
1. Zur Theorie der continuierlichen, homogenen und linearen Gruppen, *Sitz. Bericht. Bayer. Acad.*, **24** (1894).

Оно (Ono T.)
1. Arithmetic of algebraic tori, *Ann. Math.*, **74** (1961), 101—139.

Платонов В. П.
1°. Теория алгебраических линейных групп и периодические группы, *Изв. АН СССР,* сер. матем., **30** (1966), 573—620.
2°. Алгебраические группы с почти регулярным автоморфизмом и теоремы инвариантности, *Изв. АН СССР*, *сер. матем.*, **31**, № 3 (1967), 687—696.
3*. Расщепляемые линейные группы, *ДАН СССР,* **151**, № 2 (1963), 286—289.
4*. Доказательство гипотезы конечности для разрешимых подгрупп алгебраических групп, *Сиб. Матем. ж.*, X, № 5 (1969), 1084—1090.

Ричардсон (Richardson R.)
1°. Conjugacy classes in Lie algebras and algebraic groups, *Ann. Math.*, **86** (1967), 1—15.

Розенлихт (Rosenlicht M.)
1. Some basic theorem on algebraic groups, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 401—443.
2. Some rationality questions on algebraic groups, *Annali di Math. Pura et Appl.* (IV), **43** (1957), 25—50.
3. On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **101** (1961), 211—223.
4. Questions of rationality for solvable algebraic groups over nonperfect fields, *Annali di Math. Pura et Appl.*, (IV), **61** (1963), 97—120.
5. Another proof of a theorem on rational cross sections, *Pacific J. Math.*, **20**, № 1 (1967), 120—133.

Сатаке (Satake I.)
1°. On the theory of reductive algebraic groups over a perfect field, *Journ. Math. Soc. Japan*, **15**, № 2, (1963), 210—235. (Русский перевод: Сатаке И., Теория полупростых алгебраических групп над совершенным полем, сб. *Математика*, **9** : 2, 1965, 19—44.)
2°. Classification theory of semi-simple algebraic groups, Notes by D. Schattschneider, Univ. of Chicago, 1967.

Семинар Шевалле (Seminaire C. Chevalley)
1. Classification des groupes de Lie algébriques vol. 1, 2, Ecole Normale Supérieure, Paris, 1958.

Серр (Serre J. P.)
1. Когомологии Галуа, «Мир», М., 1968.
2. Алгебры Ли и группы Ли, «Мир», М., 1969.
3. Quelques propriétes des varietés abéliennes en characteristique *p*, *Amer. J. Math.*, **80**, № 3 (1958), 715—739.
4*. Алгебраические группы и поля классов, «Мир», М., 1968.

Стейнберг (Steinberg R.)
1°. Variations on a theme of Chevalley, *Pacif. J. Math.*, **9** (1959), 875—891
2°. Regular elements of semi-simple algebraic groups, *Publ. Math. Inst. Haut. Ét. Sci.*, **25** (1965), 281—312.
3°. Endomorphisms of linear algebraic groups, Memoirs Amer. Math. Soc., 80, 1968.
4°. Lectures on Chevalley groups. Notes by J. Faulkner and J. Wilson, Yale University, 1968.

Титс (Tits J.)
1. Lectures on algebraic groups, Notes by P. André and D. Winter, Yale University (1966/1967), 1969.
2°. Groupes semi-simples et geometries associées, Proc. Internat. Congr. Math. Stockholm, 1962, Uppsala, 1963, 197—221.
3°. Algebraic and abstract simple groups, *Ann. Math.*, **80**, № 2 (1964), 313—329.
4°. Classification of algebraic semisimple groups, Proc. Sympos. Pure and Appl. Math. vol IX, Algebraic groups and Discontinuous Subgroups, Amer. Math. Soc. Providence, 1966, 33—62. (Русский перевод: Титс Ж., Классификация полупростых алгебраических групп, сб. *Математика*, **12**: **2** (1968), 110—143.)

Труды симпозиума по чистой и прикладной математике
1°. Proc. Sympos. Pure and Appl. Math. Amer. Math. Soc., v. 9, Providence, 1966.

Чжоу (Chow W.)
1. On the projective embedding of homogeneous varieties, «Algebr. Geometry and Topology», Symposium in honor of S. Lefschetz, Prinston University Press, 1957, 122—128.

Шевалле (Chevalley C.)
1. Теория групп Ли, т. II: Алгебраические группы; т. III: Общая теория алгебр Ли, ИЛ, М., 1958.
2. On algebraic group varieties. Journ. Math. Soc. Japan, **6**, № 3—4 (1954), 303—324.
3. La théorie des groupes algébriques. «Proc. Intern. Congr. Math. Edinburh, 1958», Cambridge University Press, 1960, 53—68. (Русский перевод: Шевалле К., Теория алгебраических групп, Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958, Физматгиз, М., 1962.)

4°. Sur certains groupes simples. *Tohoku Math. Journ.* (2), **7** (1955), 14—66. (Русский перевод: Шевалле К., О некоторых простых группах, сб. *Математика*, **2**: 1 (1958), 3—58.)
5°. Certain schémas de groupes semi-simples, Seminaire Bourbaki, 1960—1961, éxpose 219.

Шпрингер (Springer T. A.)
1°. Some arithmetic results on semi-simple algebras, *Publ. Math. Inst. Haut. Et. Sci.*, **30**, (1966), 115—141.
2°. The unipotent variety of semi-simple group, «Colloquium on algebraic geometry, Bombey, 1968». Tata Institute, 1969, 373—391.

Шпрингер, Стейнберг (Springer T. A., Steinberg R.)
1°. Conjugacy classes, Seminar on algebraic groups and related finite groups, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, 1970, part E, 168—265.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и др. просим присылать по адресу:

Инд. 129820, Москва И-110 ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир».

А. Борель

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Редактор *Г. Цукерман*
Художник *К. П. Сиротов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *З. И. Резник*
Корректор *Е. Г. Литвак*

Сдано в набор 14/VI 1971 г.
Подписано к печати 3/II 1972 г.
Бумага № 1 $60\times90^1/_{16}$=8,50 бум. л. 17 печ. л.
Уч.-изд. л. 15,63. Изд. № 1/5900.
Цена 1 р. 33 к. Зак. 1154.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР»

готовится к печати

Фукс Л. **Бесконечные абелевы группы.** Том I. Нью-Йорк — Лондон, 1970.

Известный венгерский математик Ласло Фукс уже знаком советскому читателю по книге «Частично упорядоченные алгебраические системы» («Мир», 1965). Его новая книга заполняет существенный пробел в математической литературе на русском языке. Она является своего рода энциклопедией по абелевым группам; в ее основном тексте и в упражнениях можно найти почти все сколько-нибудь важные результаты теории абелевых групп, поставлено 50 нерешенных проблем. От читателя не требуется специальных знаний, что дает возможность использовать книгу и для первого знакомства с общей алгеброй.

Книга будет полезна каждому математику, работающему в теории групп, теории модулей и колец, топологии, гомологической алгебре.