ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

LES COURS DE SORBONNE

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE CLASSIQUE DU POTENTIEL

PAR M. BRELOT

Professeur à la Faculté des Sciences

Rédaction initiale par C. Houzel
Élève à l'Ecole Normale Supérieure

2e édition améliorée 1961

CENTRE DE DOCUMENTATION UNIVERSITAIRE
PARIS

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

М. БРЕЛО

ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Перевод с французского

Е. Д. СОЛОМЕНЦЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1964

АННОТАЦИЯ

Предлагаемая книга возникла из курса лекций, читанных известным французским математиком М. Брело в Парижском университете. В ней излагаются основные концепции современной теории потенциала в том виде, как они развиваются французской математической школой со времен А. Пуанкаре и А. Лебега. Изложение ведется в классической форме, т. е. применительно к евклидовым пространствам.

Современная теория потенциала находит важные и все более расширяющиеся применения в теории функций, теории краевых задач математической физики и теории вероятностей. Эта книга будет полезной для всех математиков и физиков, интересы которых лежат в указанных областях. Для понимания изложения требуется владение основными понятиями математического анализа и теоретико-множественной топологии.

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Различные направления современной теории потенциала и субгармонических функций за последние двадцать — тридцать лет обогатились многочисленными и важными результатами. Все большее значение приобретают применения этой теории к теории функций, математической физике и теории вероятностей. Однако в современной монографической литературе теория потенциала представлена очень слабо. В частности, в советской литературе успели уже стать библиографическими редкостями книги И. И. Привалова, Субгармонические функции, 1937, и Н. М. Гюнтера, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, 1953.

Предлагаемая вниманию читателя книга известного французского специалиста М. Брело в некоторой степени восполняет существующий в литературе пробел. Она является хорошим введением в тот круг идей современной теории потенциала и субгармонических функций, который характерен, главным образом, для французской математической школы.

Книга состоит из основного текста и приложения. Приложение является, в сущности, подробным введением, содержащим обзор элементарных свойств гармонических функций. Собственно современная теория потенциала излагается в 12 главах основного текста в классической форме, т. е. применительно главным образом к евклидову пространству R^n. Следует отметить, что у читателя предполагаются знания общей топологии, топологических векторных пространств, теории функций и интегрирования в плане известного трактата «Элементы математики» Н. Бурбаки. В частности, соответствующая терминология используется, как правило, без каких-либо дополнительных пояснений. Поскольку уже довольно много томов этого обширного трактата вышло на русском языке, переводчик счел целесообразным придерживаться, по возможности, примененных в нем русских терминов. Дополнительные примечания даются лишь в более сложных ситуациях.

При переводе исправлены отдельные мелкие погрешности оригинала и несколько пополнена библиография, главным образом, работами советских авторов. В качестве пособия для общей ориентировки в вопросах теории потенциала, гармонических и субгармонических функций можно указать обзор, написанный автором этих строк[1]).

Е. Соломенцев

---

[1]) Гармонические и субгармонические функции и их обобщения, в сб. «Итоги науки», ВИНИТИ, М., 1964.

ПРЕДИСЛОВИЕ

После появления работы Келлога[1] (1929 г.) по теории потенциала вышла в свет только монография Валле-Пуссена[2] (1949 г.), но ее публикация сильно запоздала и она посвящена, главным образом, личным исследованиям автора. Таким образом, в литературе нет единого изложения многочисленных, разнообразных и весьма важных работ по теории потенциала, появившихся за последние двадцать или тридцать лет.

Современные исследования, все более и более активные, черпают свое богатство, прежде всего, в многообразии точек зрения и методов классической теории, которую все еще необходимо знать в общих чертах, прежде чем переходить к изучению современных аксиоматических методов. Эти обстоятельства побудили меня опубликовать сначала современный курс основ классической теории потенциала (в евклидовом пространстве R^n, с ньютоновским или логарифмическим ядром), основанный на записях, тщательно выполненных моим слушателем Узелем. Я счел также полезным присоединить в виде приложения подготовительный курс первоначальных понятий современной теории гармонических функций (в нем, между прочим, встречаются обозначения, отличающиеся от применяемых в основном тексте).

Рассматриваемые здесь понятия лежат в основе построений весьма развитой и важной теории. Перечислим некоторые из них: супергармонические функции (их теория теперь аксиоматизирована), емкость (это понятие привело к общим емкостям Шоке), задача Дирихле (как известно, применяемая в теории операторов и краевых задач), принцип Дирихле (норма Дирихле привела Бёйрлинга и Дени к рассмотрению пространств Дирихле), энергия (А. Картан обновил это понятие и ввел различные топологии в множества мер; его теория была значительно расширена Дени при помощи обобщенных функций), выметание в различных аспектах (оно привело,

[1] Kellog O. D., Foundations of Potential Theory, Berlin, 1929.

[2] De la Vallée Poussin C. J., Le potentiel logarithmique, balayage et representation conforme, Paris, 1949.

например, к задаче о свертке мер на топологических группах), экстремальные элементы и т. д. Что касается существенных новейших идей, не отраженных в трактуемых здесь классических частях теории, как, например, связи с теорией вероятностей (Дуб, Хант), то я упоминаю о них в заключительном кратком обзоре и дополнительной библиографии.

Я старался придать рассуждениям такую форму, которая была бы приспособлена для дальнейших обобщений, причем порой это было внушено современными работами наиболее общего характера. Чтобы не разделять случаев R^2 и R^n $(n > 2)$ и не усложнять изложения, я часто говорю об ограниченных областях или даже о шарах там, где речь могла бы идти о произвольных областях. Для соблюдения последовательности изложения пришлось сделать трудный выбор: я решил доказать как можно раньше наиболее сильную теорему сходимости, чтобы ею затем пользоваться.

Я не даю здесь никакого исторического введения, отсылая читателя, прежде всего, к детальному обзору, который я опубликовал по этому вопросу в *Annales de l'Institut Fourier*, 4 (1952), 113—140. Каждая глава заканчивается соответствующей общей библиографией, указывающей наиболее полезные источники и наиболее важные последующие работы; дополнительной библиографией заканчивается упомянутый заключительный краткий обзор.

М. Брело

Апрель, 1959

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Теперь, когда моя работа уже разошлась, я решил продолжать ее распространение без больших задержек, учитывая отсутствие аналогичных книг и большую потребность в них.

Я не имел времени для коренной ее переделки и использовал представившийся случай только для внесения необходимых исправлений и нескольких локальных улучшений или незначительных добавлений.

Октябрь, 1961

Глава I

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Принцип минимума (или максимума)

Пусть u — гармоническая функция на открытом множестве ω евклидова пространства R^n (компактификация R^n, получаемая присоединением точки Александрова, обозначается через $\overline{R^n}$). Тогда имеем

$$\inf_{x \in \omega} u(x) \geqslant \inf_{x_0 \in \partial\omega} [\underline{\lim}_{x \to x_0} u(x)],$$

где $\partial\omega$ обозначает границу множества ω в $\overline{R^n}$. Принцип максимума получаем, заменяя inf на sup и $\underline{\lim}$ на $\overline{\lim}$.

Эти утверждения вытекают из следующей леммы[1]).

Лемма. *Пусть u — полунепрерывная снизу числовая функция, определенная на открытом множестве $\omega \neq \Omega$ компактного связного пространства Ω; допустим, что из утверждения: u имеет отрицательный минимум в точке x следует, что u постоянна в некоторой окрестности x, какова бы ни была точка $x \in \omega$. Тогда если $\underline{\lim}_{x \to x_0} u(x) \geqslant 0$ для всех точек x_0 границы $\partial\omega$, то $u \geqslant 0$ на ω.*

Для доказательства построим продолжение $\bar{u}$ функции u на все пространство Ω, положив $\bar{u} = 0$ в точках Ω, не принадлежащих ω. Функция $\bar{u}$ полунепрерывна снизу на Ω и, следовательно, достигает своего наименьшего значения k. Если $k < 0$, то множество A (соответственно B) тех точек $x \in \Omega$, в которых $\bar{u}(x) > k$ (соответственно, в которых $u(x) = k$), есть непустое открытое множество. Так как Ω связно и $\Omega = A \bigcup B$, приходим к противоречию. Следовательно, $k \geqslant 0$.

[1]) Другое доказательство см. в приложении.

§ 2. Топологическая лемма (Шоке)

Пусть Ω — топологическое пространство со счетным базисом и $\{f_i\}_{i \in I}$ — семейство числовых функций, определенных на Ω. Существует счетная часть I_0 множества индексов I, такая, что из утверждения: g есть полунепрерывная снизу функция и $g \leqslant \inf_{i \in I_0} f_i$, вытекает, что $g \leqslant \inf_{i \in I} f_i$.

Для каждой части J множества I положим $f_J = \inf_{i \in J} f_i$. Используя возрастающий гомеоморфизм $x \to x/(1+|x|)$ пространства $\overline{R}$ на отрезок $[-1, 1]$, можно ограничиться случаем, когда все рассматриваемые функции принимают значения из отрезка $[-1, 1]$.

Существует последовательность $\{\omega_n\}$ открытых множеств из Ω, образующих топологический базис, такая, что для каждого n можно найти бесконечно много индексов m, для которых $\omega_m = \omega_n$; например, можно взять счетный базис, расположенный в виде последовательности $\{\delta_n\}$, и построить последовательность $\delta_1, \delta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$.

Для каждого натурального числа n существует такой индекс i_n, что

$$\inf_{x \in \omega_n} f_{i_n}(x) - \inf_{x \in \omega_n} f_I(x) \leqslant \frac{1}{n}. \tag{1}$$

В самом деле, существует такая точка $x_0 \in \omega_n$, что

$$f_I(x_0) - \inf_{x \in \omega_n} f_I(x) \leqslant \frac{1}{2n},$$

и такой индекс i_n, что $f_{i_n}(x_0) - f_I(x_0) \leqslant \frac{1}{2n}$.

Пусть $I_0 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ — множество этих индексов. Рассмотрим полунепрерывную снизу числовую функцию g, удовлетворяющую условию

$$g \leqslant f_{I_0}. \tag{2}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$; какова бы ни была точка x, существует такая окрестность V_x, что из включения $y \in V_x$ следует неравенство $g(x) < g(y) + \varepsilon/2$. Следовательно, существуют такие открытые множества ω_p рассматриваемого базиса со сколь угодно большими индексами p (в силу условий, наложенных на последовательность $\{\omega_n\}$), что из включения $x \in \omega_p$ следует неравенство $g(x) < \inf_{y \in \omega_p} g(y) + \varepsilon/2$. Но, согласно условию (2), $g \leqslant f_{i_p}$, а значит, в силу (1),

$$\inf_{y \in \omega_p} g(y) \leqslant \inf_{y \in \omega_p} f_{i_p}(y) \leqslant \inf_{y \in \omega_p} f_I(y) + \frac{1}{p}.$$

Таким образом, $g(x) < \inf_{y \in \omega_p} f_I(y) + \varepsilon/2 + 1/p$; p здесь можно выбрать настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $1/p < \varepsilon/2$. Существует, следовательно, такое число p, что $g(x) \leqslant \inf_{y \in \omega_p} f_I(y) + \varepsilon$. Так так ε произвольно, лемма доказана.

Назовем функцию $\underset{\sim}{f}(x) = \varliminf_{y \to x} f(y)$ *нижней регуляризацией* функции $f(x)$. Лемма утверждает, что $\underset{\sim}{f_I} = \underset{\sim}{f_{I_0}}$.

Применение. В пространстве со счетным базисом доказанная лемма позволяет переходить от семейств функций к последовательностям.

В частности, если $\{f_i\}_{i \in I}$ — семейство функций, гармонических в некоторой области пространства R^n, фильтрующееся влево, то существует невозрастающая подпоследовательность $\{f_i\}_{i \in I_0}$, пределом которой является $g = f_{I_0}$; опираясь только на сходимость последовательностей, можно показать, что функция g либо гармоническая, либо тождественно равна $-\infty$ (см. приложение).

Имеем $f_I \leqslant g$ и, согласно лемме, $g \leqslant f_I$; отсюда $f_I = g$. Таким образом, нижняя огибающая f_I рассматриваемого семейства либо гармоническая функция, либо тождественно равна $-\infty$.

§ 3. Классическая лемма Дени — Картана

Пусть $\{f_i\}$ — фильтрующееся влево семейство положительных[1]) *функций, таких, что $f_i < +\infty$, причем f_i полунепрерывны сверху и определены на компактном про-*

[1]) Слово «положительная» означает, что $f_i \geqslant 0$. Слова «убывающая» и «возрастающая» также всегда понимаются в широком смысле.

странстве Ω. *Если* $\inf f_i = 0$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой индекс* i_0, *что* $f_{i_0} \leqslant \varepsilon$.

В самом деле, для каждой точки x существует такой индекс i_x, что $f_{i_x}(x) < \varepsilon$; так как f_{i_x} полунепрерывна сверху, существует такая открытая окрестность V_x точки x, что из включения $y \in V_x$ следует неравенство $f_{i_x}(y) \leqslant \varepsilon$. Множество $\{V_x\}_{x \in \Omega}$ представляет собой открытое покрытие пространства Ω, а значит, из него можно выбрать конечное покрытие $\{V_{x_p}\}$, $p = 1, \ldots, n$. Поскольку семейство $\{f_i\}$ фильтруется влево, существует функция f_{i_0} этого семейства, меньшая чем $f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}$; для этой функции f_{i_0} неравенство $f_{i_0}(y) \leqslant \varepsilon$ выполняется в каждой точке y.

Применение к одной теореме о переходе к пределу под знаком интеграла. Пусть μ — положительная мера на компактном пространстве Ω и $\{f_i\}$ — фильтрующееся влево семейство полунепрерывных сверху функций, причем $f_i < +\infty$ на Ω. Тогда

$$\inf \int_\Omega f_i \, d\mu = \int_\Omega \inf f_i \, d\mu.$$

Пусть сначала $\inf f_i = 0$, и пусть дано $\varepsilon > 0$. Согласно лемме, существует функция $f_{i_0} \leqslant \varepsilon$, для которой имеем $\int_\Omega f_{i_0} \, d\mu \leqslant \varepsilon\mu(\Omega)$. Отсюда $\inf \int_\Omega f_i \, d\mu \leqslant \varepsilon\mu(\Omega)$, а значит, $\inf \int_\Omega f_i \, d\mu = 0$, так как ε произвольно.

В общем случае положим $F = \inf f_i$. Очевидно, что $\int_\Omega F \, d\mu \leqslant \inf \int_\Omega f_i \, d\mu$. Пусть $\lambda > \int_\Omega F \, d\mu$; существует конечная непрерывная функция φ, мажорирующая F и такая, что $\int_\Omega \varphi \, d\mu \leqslant \lambda$. Семейство $\{(f_i - \varphi)^+\}$ положительных полунепрерывных сверху функций фильтруется влево, и его нижняя огибающая тождественно равна нулю. Следовательно, $\inf \int_\Omega (f_i - \varphi)^+ \, d\mu = 0$. Отсюда имеем

$$\inf \int_\Omega (f_i - \varphi) \, d\mu = \inf \int_\Omega f_i \, d\mu - \int_\Omega \varphi \, d\mu \leqslant 0,$$

то есть

$$\inf \int_\Omega f_i \, d\mu \leqslant \int_\Omega \varphi \, d\mu \leqslant \lambda.$$

Из последнего неравенства заключаем, что

$$\inf \int_\Omega f_i \, d\mu = \int_\Omega F \, d\mu = \int_\Omega \inf f_i \, d\mu.$$

Точно так же можно доказать, что если $\{g_i\}$ — фильтрующееся вправо семейство полунепрерывных снизу функций, причем $g_i > -\infty$ на Ω, то

$$\sup \int_\Omega g_i \, d\mu = \int_\Omega \sup g_i \, d\mu.$$

Применение к гармоническим функциям. Пусть $\{f_i\}$ — фильтрующееся вправо семейство гармонических функций в некоторой области пространства R^n. Верхняя огибающая этого семейства либо тождественно равна $+\infty$, либо локально ограничена (это вытекает из неравенств Гарнака). В последнем случае верхняя огибающая есть гармоническая функция; в самом деле, значение каждой функции f_i в некоторой точке равно среднему ее значений по объему шара с центром в этой точке, и это свойство характеризует гармонические функции. Согласно предыдущему результату, можно перейти к пределу под знаком интеграла, и, следовательно, свойство среднего сохраняется для огибающей. Отсюда вытекает, что верхняя огибающая есть функция непрерывная и гармоническая.

Можно также получить результат, найденный ранее при помощи топологической леммы Шоке (§ 2).

§ 4. Перечень свойств сходимости и компактности для гармонических функций

Благодаря свойству равностепенной непрерывности (вытекающему из неравенств Гарнака) в вопросах сходимости действительных гармонических функций можно всегда опираться на равномерную сходимость.

Отсылая за подробностями к приложению, подчеркнем следующие свойства функций, гармонических в некоторой области ω пространства R^n.

1) Локально ограниченное семейство гармонических функций равностепенно непрерывно в каждой точке области ω.

2) Для семейства, локально ограниченного снизу, свойство 1) все еще справедливо в смысле равномерной структуры расширенной числовой прямой (для множества значений).

Следовательно, фильтрующееся вправо семейство гармонических функций сходится либо к гармонической функции, либо к $+\infty$ (проще говоря, это вытекает из равномерной сходимости).

3) Снабдим пространство числовых функций (принимающих конечные или бесконечные значения), определенных в ω, равномерной структурой компактной сходимости ($\overline{R}$ наделено равномерной структурой расширенной числовой прямой). В этом пространстве каждое множество гармонических функций, локально ограниченное снизу, относительно компактно. Множество, образованное из гармонических функций, мажорирующих данную конечную непрерывную функцию, и постоянной $+\infty$, компактно (и, следовательно, метризуемо).

§ 5. Норма Дирихле и теорема полноты

Рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{P}_0$ числовых функций, конечных и непрерывных на открытом множестве Ω пространства R^n $(n \geqslant 2)$, которые имеют конечный и непрерывный градиент с суммируемым квадратом в Ω.

Для каждой функции $u \in \mathfrak{P}_0$ полагаем

$$\| u \| = \left[\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right]^{1/2}$$

(dx — мера Лебега). Легко видеть, что $u \to \| u \|$ есть полунорма в $\mathfrak{P}_0$, соответствующая скалярному полупроизведению $(u_1, u_2) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u_1, \operatorname{grad} u_2)\, dx$. Равенство $\| u \| = 0$

равносильно утверждению, что функция u постоянна на каждой связной компоненте Ω. Мы будем также рассматривать соответствующее $\mathfrak{P}_0$ отделимое пространство $\mathfrak{P}$ классов эквивалентности функций из $\mathfrak{P}_0$, совпадающих с точностью до константы на каждой связной компоненте множества Ω, с соответствующим скалярным произведением; $\mathfrak{P}$ есть действительное предгильбертово пространство, норма в котором называется *нормой Дирихле*. Для упрощения обозначений можно отождествлять функцию из $\mathfrak{P}_0$ с ее классом эквивалентности в $\mathfrak{P}$.

Для каждой измеримой части $\alpha \subset \Omega$ можно положить

$$\| f \|_\alpha = \left[\int_\alpha \operatorname{grad}^2 f \, dx \right]^{1/2}, \quad f \in \mathfrak{P}_0.$$

Теорема. *Пусть Ω — область пространства R^n и $\{u_n\}$ — последовательность гармонических функций с конечной нормой Дирихле в Ω, т. е. последовательность гармонических функций из $\mathfrak{P}_0$. Если $\{u_n\}$ — последовательность Коши в $\mathfrak{P}_0$ (т. е. если соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - u_{n+p} \| = 0$ выполняется равномерно по p) и существует такая точка $x_0 \in \Omega$, что последовательность $\{u_n(x_0)\}$ сходится, то последовательность $\{u_n\}$ сходится в пространстве $\mathfrak{P}_0$ и в смысле компактной сходимости на Ω.*

В самом деле, если α — компактное подмножество области Ω, то

$$\left| \int_\alpha \left(\frac{\partial u_{n+p}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right) dx \right|^2 \leqslant \operatorname{mes} \alpha \int_\alpha \left(\frac{\partial u_{n+p}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} \alpha \, \| u_{n+p} - u_n \|^2.$$

Так как разность $\dfrac{\partial u_{n+p}}{\partial x_i} - \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$ есть функция гармоническая, легко показать, принимая за α шар постоянного радиуса с переменным центром, что эта разность локально равномерно стремится к нулю, когда $n \to \infty$ (независимо от p). Имеет место, следовательно, локально равномерная сходимость производных $\partial u_n / \partial x_i$, откуда следует их локальная ограниченность и локальная равностепенная непрерывность функций u_n. Рассматривая криволинейный интеграл, выражающий разность $u_n(x)-u_n(x_0)$, получаем, что функции $u_n(x)$ сходятся локально равномерно к гармонической функции $u(x)$.

Покажем теперь, что последовательность $\{u_n\}$ сходится к u в пространстве $\mathfrak{P}_0$, т. е. покажем, что $u \in \mathfrak{P}_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - u \| = 0$.

Во-первых, u — гармоническая функция и интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{grad}^2 u\, dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \operatorname{grad}^2 u_n\, dx$$

конечен, так как последовательность $\| u_n \|$ ограничена. Следовательно, $u \in \mathfrak{P}_0$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Существует такое целое число n', что $\| u_n - u_{n'} \| < \varepsilon/3$ для всех $n > n'$. Существует также такое компактное множество $K \subset \Omega$, что $\| u \|_{\Omega-K} \leqslant \varepsilon/3$ и $\| u_{n'} \|_{\Omega-K} \leqslant \varepsilon/3$. Следовательно, для всех $n \geqslant n'$ имеем неравенства

$$\| u - u_n \|_{\Omega-K} \leqslant \| u \|_{\Omega-K} + \| u_n \|_{\Omega-K} \leqslant$$

$$\leqslant \| u \|_{\Omega-K} + \| u_{n'} \|_{\Omega-K} + \| u_n - u_{n'} \| < \varepsilon.$$

Так как для всех $n > n'$ справедливо неравенство

$$\| u - u_n \|^2 = \| u - u_n \|^2_{\Omega-K} + \| u - u_n \|^2_K \leqslant$$
$$\leqslant \| u - u_n \|^2_K + \varepsilon^2$$

и соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{grad}(u-u_n) = 0$ выполняется равномерно на компактном множестве K, можно написать

$$\varlimsup_{n\to\infty} \| u - u_n \|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что подпространство пространства $\mathfrak{P}$, состоящее из классов эквивалентности гармонических функций, имеющих конечную норму Дирихле, *полно*; оно является гильбертовым пространством.

§ 6. Уравнение $\Delta T = 0$ в смысле теории обобщенных функций

Пусть T — обобщенная функция[1]) *на открытом множестве ω пространства R^n. Условие $\Delta T = 0$ означает, что T есть функция, равная (почти всюду) некоторой гармонической функции.*

В самом деле, предположим сначала, что T определена во всем пространстве R^n. Произведя регуляризацию при помощи функции $\varphi \in \mathfrak{D}$, получим $\Delta(T * \varphi) = \Delta T * \varphi = 0$; следовательно, $T * \varphi \in \mathfrak{D}$ — гармоническая функция. Используем две функции из $\mathfrak{D}$: $\varphi_2(x) = \theta(\|x\|)$ и $\varphi_1(x)$, такие, что $\varphi_1 = 0$ при $\|x\| \geqslant r_1$ и интегралы от обеих функций по всему пространству равны единице. Так как $T * \varphi_1$ — гармоническая функция, имеем $(T * \varphi_2) * \varphi_1 = (T * \varphi_1) * \varphi_2 = T * \varphi_1$; в дальнейшем будем варьировать φ_1 так, чтобы $r_1 \to 0$. Тогда φ_1 сходится к дельта-функции Дирака δ и в пределе получаем $T * \varphi_2 = T$; следовательно, $T \in \mathfrak{D}$ и T есть гармоническая функция.

Пусть теперь T определена на открытом множестве ω пространства R^n. Введем обобщенную функцию T_1 в R^n, сужение которой на некоторое открытое множество $\omega_0 \subset \overline{\omega}_0 \subset \omega$ равно сужению T. Приведенное выше рассуждение доказывает, что T_1 совпадает с некоторой гармонической функцией на любом открытом множестве $\omega_1 \subset \overline{\omega}_1 \subset \omega_0$. Таким образом, T равна гармонической функции на любом произвольно выбранном открытом множестве ω_1. Отсюда следует, что T совпадает с гармонической функцией на ω.

§ 7. Решение задачи Дирихле в кольце

Мы называем здесь кольцом радиусов r и R в пространстве R^n множество таких точек $x \in R^n$, что $r < \|x\| < R$.

Напомним выражение интеграла Пуассона от функции f (определенной и суммируемой на сфере $S(0, R)$ простран-

[1]) Применяются терминология и обозначения книги Л. Шварца (см. библиографию). Понятие регуляризации см. в гл. 6 этой книги. Пространство $\mathfrak{D}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. На русском языке можно рекомендовать кингу И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова. — *Прим. перев.*

ства R^n) в открытом шаре $B(0, R)$ с центром 0 и радиусом R:

$$I_f(x)=\frac{1}{\alpha_n R}\int\limits_{S(0,\,R)}\frac{R^2-\|x\|^2}{\|y-x\|^n}f(y)\,d\sigma_y, \quad x\in B(0, R).$$

В этой формуле интегрирование производится по мере Лебега на сфере $S(0, R)$; α_n обозначает общую массу аналогичной меры на единичной сфере, или «площадь» единичной сферы. Интеграл Пуассона для внешности сферы $B'(0, R)$ имеет вид

$$I'_f(x)=\frac{1}{\alpha_n R}\int\frac{\|x\|^2-R^2}{\|y-x\|^n}f(y)\,d\sigma_y, \qquad x\in B'(0, R).$$

Эти интегралы представляют собой гармонические функции, по абсолютной величине не превосходящие $\sup|f|$ и стремящиеся к значению $f(y)$ в каждой точке $y\in S(0, R)$, в которой функция f непрерывна. Если среднее значение функции f по площади сферы равно нулю, то и среднее значение интеграла Пуассона по площади любой сферы с центром 0 равно нулю.

Каково бы ни было число r, $0<r<R$, обозначим через $\theta_R(r)$ значение в точке $(r, 0, \ldots, 0)$ интеграла I_θ от функции θ, равной 1 на полусфере $x_1\geqslant 0$ и -1 на полусфере $x_1<0$. Имеем $0<\theta_R(r)<1$. Можно показать, что для любой суммируемой числовой функции f, определенной на $S(0, R)$ и имеющей нулевое среднее значение, выполняется неравенство

$$|I_f(x)|\leqslant\theta_R(\|x\|)\cdot\sup|f|$$

(аналогичный результат имеет место и для I'_f).

Рассмотрим кольцо радиусов r и R, $r<R$. Пусть F — непрерывная конечная числовая функция, определенная на $S(0, R)$ и имеющая нулевое среднее значение. Мы приступаем к решению задачи Дирихле в кольце при помощи метода последовательных приближений при следующих граничных значениях: F на $S(0, R)$ и 0 на $S(0, r)$.

Интеграл Пуассона I_F есть гармоническая функция, граничные значения которой на $S(0, R)$ равны F; обозначим через f_1 ее сужение на $S(0, r)$. Разность $I_F - I'_{f_1}$ есть гармоническая функция, принимающая значения 0 на $S(0, r)$. Обозначив через F_1 сужение I'_{f_1} на $S(0, R)$, мы рассмотрим функцию $I_F - I'_{f_1} + I_{F_1}$, и т. д.

Пусть функция F_n определена; через f_{n+1} обозначим сужение I_{F_n} на $S(0, r)$ и через F_{n+1} — сужение $I'_{f_{n+1}}$ на $S(0, R)$. На соответствующих сферах средние значения функций F_n и f_n равны нулю. Поэтому в рассматриваемом кольце выполняются следующие неравенства:

$$|I_{F_n}(x)| \leqslant \sup |F_n|, \quad |I'_{f_n}(x)| \leqslant \sup |f_n|$$

и

$$\sup |F_n| \leqslant \sup |f_n|, \quad \sup |f_{n+1}| \leqslant \theta_R(r) \sup |F_n|, \; r = \|x\|.$$

Таким образом, по абсолютной величине I_{F_n} и I'_{f_n} не превосходят $[\theta_R(r)]^n \sup |F|$. Отсюда следует, что ряд

$$I_F - I'_{f_1} + I_{F_1} - I'_{f_2} + \ldots - I'_{f_n} + I_{F_n} - \ldots$$

сходится абсолютно и равномерно в кольце. Сумма этого ряда есть гармоническая функция в кольце, дающая решение поставленной задачи Дирихле. Аналогичный процесс применим, когда на $S(0, R)$ заданы граничные значения 0 и на $S(0, r)$ — граничные значения f со средним значением 0.

Исходя из этого результата, нетрудно построить решение задачи Дирихле в кольце, когда в качестве граничных значений заданы произвольные непрерывные функции f на $S(0, r)$ и F на $S(0, R)$. Для сведения к случаю, когда f и F имеют нулевые средние значения, необходимо воспользоваться линейной комбинацией, содержащей функцию $h(\|x\|) = \|x\|^{2-n}$ при $n \geqslant 3$ или $h(\|x\|) = -\log \|x\|$ при $n = 2$.

Рассмотрим, наконец, эту задачу в случае граничных значений более общего вида. Например, если φ полунепрерывна снизу на границе и ограничена снизу, то она является пределом фильтрующегося вправо семейства конечных непрерывных функций $\varphi_i \leqslant \varphi$. Решение u_i для граничных значений φ_i есть гармоническая функция, и семейство $\{u_i\}$ фильтруется вправо; следовательно, его предел есть функция гармоническая или тождественно равная $+\infty$. Мы скажем, что этот предел u, если он конечен, является *обобщенным решением задачи Дирихле* для граничных значений φ; в каждой точке y границы выполняется неравенство

$$\varliminf_{x\to y} u(x) \geqslant \varphi(y).$$

§ 8. Непрерывность градиента гармонической функции на границе

Теорема.[1]) *Пусть в окрестности точки x_0 задана дважды непрерывно дифференцируемая гиперповерхность Σ, и пусть с одной стороны от Σ в окрестности x_0 (т. е. в некоторой компоненте ω множества $B(x_0, r)\bigcap \complement\Sigma$ при достаточно малом r) задана гармоническая функция u, имеющая в каждой точке y границы $\Sigma\bigcap B(x_0, r)$ предел $\lim\limits_{x\to y} u(x)=U(y)$, причем функция $U(y)$ на Σ дважды непрерывно дифференцируема. Тогда* $\operatorname{grad} u$ *имеет конечный предел в каждой точке границы $\Sigma\bigcap B(x_0, r)$ и может быть непрерывно продолжен на $\Sigma\bigcap B(x_0, r)$.*

Кроме того, если $U=0$, то продолжение $\operatorname{grad} u$ на Σ нормально к Σ; если при этом $u>0$, то $\operatorname{grad} u\neq 0$ и направлен в ту сторону, где u определена (т. е. производная по направлению внутренней нормали положительна).

Доказательство, в основном, опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть y — точка единичной сферы $S(0, 1)$. Пусть φ — суммируемая функция на $S(0, 1)$, равная нулю вне сегмента $\gamma_y^d=S(0, 1)\bigcap B(y, d)$, $0<d<1$, и такая, что $|\varphi(x)|\leqslant\|x-y\|^2$. Тогда существует функция $\alpha(d)$, $\lim\limits_{d\to 0}\alpha(d)=0$, такая, что для всех веществен-*

[1]) При несколько более слабых предположениях этот результат был установлен 30 лет назад Шаудером, который пользовался представлением гармонической функции посредством потенциала двойного слоя, возникающим при решении задачи Дирихле методом ннтегральных уравнений Фредгольма. Здесь приводится доказательство, не опубликованное ранее.

ных чисел t, $1-d<t<1$, *выполняется неравенство* $\|\operatorname{grad} I_\varphi(ty)\| \leqslant \alpha(d)$, *где* I_φ — *интеграл Пуассона.*

Доказательство этой леммы нетрудно получить, дифференцируя под знаком интеграла и применяя простые оценки.

Лемма 2. *Пусть* $\{\psi_n\}$ — *последовательность суммируемых функций на* $S(0, 1)$, *например равномерно ограниченных и равных нулю на сегменте* γ_y^d; *допустим, что последовательность* $\{\psi_n\}$ *сходится к некоторой функции* ψ. *Тогда интегралы Пуассона* I_{ψ_n} *гармонически продолжаются через* γ_y^d *посредством функций* f_n *и последовательность* $\{\operatorname{grad} f_n\}$ *равномерно сходится в окрестности точки* y *к* $\operatorname{grad} f$, *где* f — *гармоническое продолжение интеграла* I_ψ *через* γ_y^d.

Эта лемма вытекает из возможности гармонического продолжения и из свойств сходимости гармонических функций и их производных.

Отметим, что градиенты на сегменте нормальны к сфере.

Рассмотрим случай, когда функция U равна нулю на Σ. Заметим, что в окрестности точки $x_1 \in \Sigma$ имеет место неравенство $|u(x)| \leqslant k\|x-x_1\|^2$, где k может быть выбрано не зависящим от x_1 при условии, что x_1 находится достаточно близко от некоторой фиксированной точки из Σ. Чтобы это доказать, достаточно взять кольцо, малая сфера σ_1 которого расположена в $C\omega$ и касается Σ в точке x_1; если F — решение задачи Дирихле для этого кольца с граничными значениями 0 на σ_1 и 1 на большой сфере, то $-\lambda F \leqslant u \leqslant \lambda F$, где λ — постоянная, мажорирующая $|u|$. Сформулированный результат для u теперь легко получить, рассматривая поведение функции F, для которой имеется элементарное выражение.

Пусть, далее, $\{t_n\}$ — последовательность точек ω, сходящаяся к точке $x_1 \in \Sigma \cap B(x_0, r)$; для всех n пусть y_n — проекция t_n на Σ (с минимальным расстоянием); последовательность $\{y_n\}$ также сходится к x_1. Введем в рассмотрение для каждого целого n шар $\delta_n \subset \omega$ с центром t_n' достаточно малого постоянного радиуса, касающийся поверхности Σ в точке y_n, и связанный с ним репер A_n с началом t_n', одна из осей которого направлена вдоль вектора $y_n - t'_n$; при $n \to \infty$ репер A_n стремится к некоторому предельному положению. Для того чтобы установить, что последовательность $\{\operatorname{grad} u(t_n)\}$ есть последовательность Коши, согласно лемме 1, достаточно рассмотреть интегралы Пуассона I_{ψ_n} в δ_n от функций ψ_n, равных нулю на сегменте $\gamma^d_{y_n}$ сферы δ_n и равных сужению u на сферу δ_n вне этого сегмента (d выбирается соответственно), и проверить в системе A_n, что $\operatorname{grad} I_{\psi_n}(t_n)$ имеют конечный предел; это последнее утверждение следует из леммы 2.

Рассмотрим теперь общий случай. В окрестности точки $x_1 \in \Sigma$ функцию U можно представить в виде суммы $U(x) = l(x) + v(x)$, где l — линейная функция, непрерывно зависящая от x_1, и v такова, что $|v(x)| \leqslant k\|x - x_1\|^2$, причем k может быть выбрано не зависящим от x_1, если x_1 находится в окрестности некоторой фиксированной точки Σ. Используя подходящим образом выбранное кольцо, можно вывести такое же свойство для u в окрестности x_1 в ω, а затем применить предшествующее рассуждение для $u - l$ и любого $x_1 \in \Sigma$.

Наконец, чтобы установить свойство производной по направлению внутренней нормали для $u > 0$, строим решение задачи Дирихле в кольце, содержащемся в ω, большая сфера которого касается Σ; на этой сфере принимаем граничные значения 0, а на малой сфере — постоянные граничные значения, не превосходящие u. Производная по направлению внутренней нормали для таким образом построенной функции положительна и является минорантой для производной функции u по направлению внутренней нормали в точке x_1.

БИБЛИОГРАФИЯ

По материалу этой главы см. классические работы, такие как:

*Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, М., 1961[1]).

Гильберт Д., Курант Р., Методы математической физики, М., 1951.

[1]) Названия, отмеченные звездочкой, добавлены переводчиком.

Bourbaki N., Éléments de mathématique, Paris.
Kellog O. D., Foundations of Potential Theory, Berlin, 1929.
Schwartz L., Théorie des distributions, Paris, Hermann, 1950.
Weyl H., Die Idee der Riemannschen Flächen, Stuttgart, Teubner, 1955.

По поводу § 2 см. работу

Brelot M., Choquet G., Le théorème de convergence en théorie du potentiel, *J. Madras Univ.*, **B 27**, № 1 (1957), 277—286.

Глава II

ФУНКЦИИ СУПЕРГАРМОНИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ СУПЕРГАРМОНИЧЕСКИЕ

§ 1. Функции супергармонические в широком смысле (Ф. Рисс)

Числовая функция (конечная или нет) $u > -\infty$, определенная на открытом множестве ω пространства R^n, называется *супергармонической в широком смысле* (или *гипергармонической*), если она полунепрерывна снизу и если для каждого замкнутого шара $\overline{B}(x_0, r) \subset \omega$ выполняется неравенство

$$u(x_0) \geqslant \mathfrak{M}_u^r(x_0),$$

где $\mathfrak{M}_u^r(x_0)$ — среднее значение функции $u(x)$ по площади сферы $S(x_0, r)$ (обозначения см. в приложении).

В частности, постоянная функция $u = +\infty$ является супергармонической в широком смысле.

Свойства.

а) Пусть u — супергармоническая в широком смысле функция в области $\omega \subset R^n$. Какова бы ни была гармоническая функция h в ω, из условия $\varliminf_{x \to y} [u(x) - h(x)] \geqslant 0$ для всех $y \in \partial\omega$ вытекает, что $u \geqslant h$ в ω.

Это непосредственное следствие леммы из § 1, гл. I.

Свойство а) объясняет происхождение термина «супергармоническая».

б) Любая линейная комбинация с положительными коэффициентами супергармонических в широком смысле функций есть функция супергармоническая в широком смысле.

в) Нижняя огибающая двух супергармонических в широком смысле функций также является функцией, супергармонической в широком смысле.

г) Верхняя огибающая фильтрующегося вправо семейства супергармонических в широком смысле функций есть функция супергармоническая в широком смысле.

В самом деле, эта огибающая полунепрерывна снизу и удовлетворяет неравенству из определения, включающему среднее по площади сферы, так как возможен переход к пределу под знаком интеграла (см. § 3, гл. I).

д) Пусть u — супергармоническая в широком смысле функция на открытом множестве $\omega \subset R^n$. Для любого замкнутого шара $\overline{B}(x, r)$, лежащего в ω, обозначим через I_u интеграл Пуассона в $B(x, r)$ для сужения u на сферу $S(x, r)$. Тогда функция u мажорирует I_u в $B(x, r)$.

В самом деле, для всякой конечной непрерывной функции φ, определенной на $S(x, r)$ и мажорируемой функцией u на этой сфере, справедливо неравенство

$$\underline{\lim}_{z \to y} [u(z) - I_\varphi(z)] \geqslant u(y) - \varphi(y) \geqslant 0, \qquad z \in B(x, r),$$

которое выполняется в каждой точке $y \in S(x, r)$; согласно свойству а), $u \geqslant I_\varphi$ в $B(x, r)$. Поскольку сужение u на $S(x, r)$ полунепрерывно снизу, оно может быть представлено как верхняя огибающая конечных непрерывных функций $\varphi \leqslant u$; $I_u = \sup I_\varphi$, откуда $I_u \leqslant u$.

Числовая функция (конечная или нет) u, определенная на открытом множестве $\omega \in R^n$, называется субгармонической в широком смысле (или гипогармонической), если функция $-u$ является супергармонической в широком смысле в ω. Формулировку свойств гипогармонических функций, соответствующих свойствам а) — д), мы предоставляем читателю.

§ 2. Параметры Бляшке — Привалова

Пусть f — конечная числовая функция, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая на открытом множестве ω пространства R^n. В окрестности начала координат, предполагая, что оно принадлежит ω, имеем разложение

$$f(x) = f(0) + \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) + \frac{1}{2} \sum x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0) + o(r^2),$$

$$r^2 = \sum x_i^2,$$

откуда

$$\mathfrak{M}_f^r(0)-f(0)=\frac{1}{2a_n r^{n-1}}\sum\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(0)\int\limits_{S(0,\,r)}x_i^2\,d\sigma+o(r^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\Delta f(0)\,\mathfrak{M}_{x_i^2}^r(0)+o(r^2)=\frac{r^2}{2n}\Delta f(0)+o(r^2).$$

Точно так же, для любой точки $x_0\in\omega$ имеем

$$\Delta f(x_0)=\lim_{r\to 0}\frac{2n}{r^2}[\mathfrak{M}_f^r(x_0)-f(x_0)].$$

Таким же способом можно показать, что

$$\Delta f(x_0)=\lim_{r\to 0}\frac{2(n+2)}{r^2}[\mathfrak{A}_f^r(x_0)-f(x_0)],$$

где вместо среднего по площади сферы $S(x_0, r)$ фигурирует среднее по объему шара $B(x_0, r)$.

Для всех числовых функций, суммируемых в узком или широком смысле на сферах $S(x_0, r)$ достаточно малого радиуса и таких, что выражение $\mathfrak{M}_f^r(x_0)-f(x_0)$ имеет смысл, можно определить «периферические» параметры

$$\overline{P}_f(x_0)=\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{2n}{r^2}[\mathfrak{M}_f^r(x_0)-f(x_0)],$$

$$\underline{P}_f(x_0)=\underline{\lim_{r\to 0}}\frac{2n}{r^2}[\mathfrak{M}_f^r(x_0)-f(x_0)].$$

Точно так же при аналогичных предположениях определяются пространственные параметры:

$$\overline{S}_f(x_0)=\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{2(n+2)}{r^2}[\mathfrak{A}_f^r(x_0)-f(x_0)],$$

$$\underline{S}_f(x_0)=\underline{\lim_{r\to 0}}\frac{2(n+2)}{r^2}[\mathfrak{A}_f^r(x_0)-f(x_0)].$$

Через P_f, S_f обозначаются соответственно общие значения $\overline{P}_f$, $\underline{P}_f$ и $\overline{S}_f$, $\underline{S}_f$, если имеет место равенство верхнего и нижнего пределов.

Замечание. Можно доказать, предполагая суммируемость в узком смысле, что $\underline{P}_f\leqslant\underline{S}_f\leqslant\overline{S}_f\leqslant\overline{P}_f$.

Теорема (Бляшке — Привалов). *Для того чтобы функция* $u > -\infty$, *полунепрерывная снизу на открытом множестве* ω *пространства* R^n, *была супергармонической в широком смысле, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке* $x \in \omega$, *в которой значение* $u(x)$ *конечно, выполнялось неравенство* $\underline{P}_u(x) \leqslant 0$.

Необходимость условия очевидна.

Для того чтобы доказать при высказанных предположениях, что функция u является супергармонической в широком смысле, достаточно доказать, что для любого замкнутого шара $\overline{B}(x_0, r)$, лежащего в ω, неравенство $I_\varphi - u \leqslant 0$ выполняется для всякой конечной непрерывной функции φ, определенной на $S(x_0, r)$ и мажорируемой функцией u на этой сфере; в самом деле, отсюда следует, что I_u мажорируется функцией u в шаре $B(x_0, r)$, а следовательно,

$$u(x_0) \geqslant I_u(x_0) = \mathfrak{M}_u^r(x_0).$$

Функция $w(x) = \| x - x_0 \|^2 - r^2$ является субгармонической и имеет лапласиан $\Delta w = 2n$; кроме того, она равна нулю на $S(x_0, r)$. Рассмотрим в $B(x_0, r)$ функцию $v = I_\varphi - u + \varepsilon w$, которая полунепрерывна сверху, причем $v < +\infty$. Достаточно показать, что она отрицательна при любом $\varepsilon > 0$. В противном случае функция v должна достигать конечного строго положительного максимума в точке x, где u конечна. В этой точке должны выполняться соотношения

$$\underline{P}_v = \varepsilon \Delta w - \underline{P}_u = 2n\varepsilon - \underline{P}_u > -\underline{P}_u \geqslant 0.$$

Таким образом, $\underline{P}_v(x) > 0$, а это неравенство несовместимо с наличием максимума в точке x.

Аналогичный критерий справедлив с $\underline{S}_u$ вместо $\underline{P}_u$ (его можно доказать непосредственно или использовать неравенство $\underline{S}_u \geqslant \underline{P}_u$).

Приведенный критерий Бляшке — Привалова является локальным критерием гипергармоничности. Он показывает, в частности, что функция $u > -\infty$, полунепрерывная снизу на открытом множестве ω, является супергармонической в широком смысле, если неравенство $u(x_0) \geqslant$

$\geqslant \mathfrak{M}_u^r(x_0)$ выполняется в каждой точке $x_0 \in \omega$ для всех достаточно малых значений r [$r \leqslant \varepsilon(x_0)$, где $\varepsilon(x_0)$ — строго положительная функция от x_0].

В качестве приложения отметим, что если u — супергармоническая в широком смысле функция в ω, то для любого замкнутого шара $\overline{B}$, лежащего в ω, функция u_B, равная u вне B и равная интегралу Пуассона I_u^B в B (I_u^B конечен и гармоничен или равен константе $+\infty$), также является супергармонической в широком смысле.

§ 3. Супергармонические функции

Теорема. *Супергармоническая в широком смысле функция u в области ω пространства R^n или тождественно равна $+\infty$ или почти всюду конечна и локально суммируема (тогда она называется супергармонической).*

Множество точек ω, в окрестности которых функция u суммируема, открыто. Покажем, что его дополнение также обладает этим свойством. Если u не суммируема ни в какой окрестности точки x_0, то интеграл от u по любой окрестности x_0 равен $+\infty$ (поскольку u полунепрерывна снизу и $u > -\infty$). Таким образом, $u(x_0) \geqslant \mathfrak{A}_u^r(x_0) = +\infty$ для любого замкнутого шара $\overline{B}(x_0, r)$, лежащего в ω. Открытый шар $B(x_0, r/2)$ является такой окрестностью точки x_0, для каждой точки x которой существует замкнутый шар $\overline{B}(x, \varrho)$, лежащий в ω и содержащий x_0 внутри. Следовательно, интеграл от u по окрестности $B(x, \varrho)$ точки x_0 равен $+\infty$ и $u(x) \geqslant \mathfrak{A}_u^\varrho(x) = +\infty$. Таким образом, функция u равна $+\infty$ в шаре $B(x_0, r/2)$, а значит, не суммируема ни в какой окрестности любой точки этого шара. Отсюда следует, что множество точек ω, в окрестности которых функция u не суммируема, открыто и содержится в множестве точек, в которых $u = +\infty$. Так как область ω связна, отсюда заключаем, что функция u или локально суммируема, или всюду равна $+\infty$. Если u локально суммируема, то множество точек, в которых она принимает значение $+\infty$, очевидно, имеет меру нуль.

Применение. Супергармоническую функцию u на открытом множестве ω можно охарактеризовать как полунепрерывную снизу функцию, удовлетворяющую одному из следующих условий:

а) u локально суммируема, и неравенство

$$u(x) \geqslant \mathfrak{A}_u^r(x)$$

выполняется для каждого замкнутого шара $\overline{B}(x, r) \subset \omega$ или только для тех шаров, радиусы которых достаточно малы в каждой точке x;

б) на каждой сфере $S(x, r)$ или только на тех сферах, радиусы которых достаточно малы в каждой точке x, u суммируема и выполняется неравенство

$$u(x) \geqslant \mathfrak{M}_u^r(x).$$

§ 4. Примеры супергармонических и субгармонических функций

Какова бы ни была гармоническая функция f (возможно, комплексная) на открытом множестве ω пространства R^n, абсолютная величина $|f|$ есть субгармоническая функция. В самом деле, $|f|$ есть непрерывная функция и для любого замкнутого шара $\overline{B}(x_0, r) \subset \omega$ имеем $f(x_0) = \mathfrak{M}_f^r(x_0)$, а следовательно, $|f(x_0)| \leqslant \mathfrak{M}_{|f|}^r(x_0)$. Точно так же, субгармонической является функция $f^+ = \sup(f, 0)$, так как f и 0 — функции субгармонические.

Если f и g — две гармонические функции на открытом множестве $\omega \subset R^n$, то $|f + ig|$ есть субгармоническая функция. Отсюда следует, в частности, что на плоскости модуль голоморфной функции есть субгармоническая функция.

Пусть $f(z)$ — функция одного комплексного переменного, определенная и голоморфная в некоторой области и не обращающаяся тождественно в нуль. Тогда $\log|f(z)|$ есть субгармоническая функция. В самом деле, $\log|f(z)| < +\infty$, эта функция непрерывна всюду, является гармонической вне (изолированных) нулей функции f и принимает значение $-\infty$ в нулях f; следовательно, она удовлетворяет локальному критерию субгармоничности в каждой точке.

В частности, $h(\|x - x_0\|) = -\log\|x - x_0\|$ — супергармоническая функция в R^2. Точно так же легко убедиться в том, что $h(\|x-x_0\|)=\|x-x_0\|^{2-n}$ — супергармоническая функция в R^n при $n \geqslant 3$. Общий пример потенциалов будет изучен далее.

§ 5. Локальные свойства

а) Рассмотрим супергармоническую функцию f на открытом множестве ω пространства R^n. Какова бы ни была точка $x_0 \in \omega$, средние значения $\mathfrak{M}_f^r(x_0)$ и $\mathfrak{A}_f^r(x_0)$ являются убывающими функциями от радиуса $r > 0$ при $\overline{B}(x_0, r) \subset \omega$.

Для любого замкнутого шара $\overline{B}(x_0, r) \subset \omega$ обозначим через I_f^r интеграл Пуассона в шаре $B(x_0, r)$ от сужения f на сферу $S(x_0, r)$. Если $\overline{B}(x_0, R) \subset \omega$, то функция f мажорирует интеграл I_f^R в $B(x_0, R)$ [§ 1, свойство д)] и, в частности, на $S(x_0, r)$ при $r < R$. Следовательно, I_f^r мажорирует I_f^R в $B(x_0, r)$ при $r < R$, а значит,

$$\mathfrak{M}_f^r(x_0) = I_f^r(x_0) \geqslant I_f^R(x_0) = \mathfrak{M}_f^R(x_0).$$

Таким образом, $\mathfrak{M}_f^r(x_0)$ есть убывающая функция от r.

Неравенство $I_f^r \geqslant I_f^R$ при $r \leqslant R$ вытекает еще из того, что функция f', равная I_f^r в $B(x_0, r)$ и совпадающая с f в остальных точках, является супергармонической в широком смысле (§ 3); следовательно, она мажорирует интеграл $I_{f'}^R = I_f^R$ в $B(x_0, R)$.

Среднее значение $\mathfrak{A}_f^r(x_0)$ есть убывающая функция от r; это можно доказать, воспользовавшись тождеством

$$\mathfrak{A}_f^R(x_0) = \frac{n}{R^n}\int_0^R \mathfrak{M}_f^r(x_0)\, r^{n-1}\, dr = n\int_0^1 \mathfrak{M}_f^{Rt}(x_0)\, t^{n-1}\, dt.$$

б) Докажем еще, что в каждой точке $x_0 \in \omega$

$$\lim_{r \to 0} \mathfrak{M}_f^r(x_0) = \lim_{r \to 0} \mathfrak{A}_f^r(x_0) = f(x_0).$$

В самом деле, так как функция f полунепрерывна снизу, для любого числа $k < f(x_0)$ существует окрестность точки x_0, в которой $k < f$, а следовательно, $k < \mathfrak{M}_f^r(x_0)$ для любого замкнутого шара $\overline{B}(x_0, r)$, лежащего в этой окрестности. Таким образом, $k < \mathfrak{M}_f^r(x_0) \leqslant f(x_0)$ и $\lim\limits_{r \to 0} \mathfrak{M}_f^r(x_0) = f(x_0)$. Точно так же, $\lim\limits_{r \to 0} \mathfrak{A}_f^r(x_0) = f(x_0)$.

Из последнего свойства вытекает, что супергармоническая функция вполне определена ее сужением на дополнение к любому множеству меры нуль; две супергармонические функции тождественно совпадают, если они совпадают почти всюду.

в) **Нижний предел по мере.** Рассмотрим числовую функцию u, определенную в части E пространства R^n. Говорят, что число λ есть *миноранта функции u по мере на E*, если множество точек $x \in E$, в которых $u(x) < \lambda$, имеет меру нуль.

Верхняя грань k минорант по мере функции u также является минорантой по мере. В самом деле, пусть $\{\lambda_n\} < k$ — возрастающая последовательность, сходящаяся к k; множество точек $x \in E$, в которых $u(x) < k$, является объединением последовательности $\{A_n\}$ множеств A_n меры нуль [где A_n обозначает множество точек $x \in E$, в которых $u(x) < \lambda_n$] и, следовательно, представляет собой множество меры нуль. Таким образом, k есть наибольшая из минорант по мере функции u; число k называется *нижней гранью по мере* функции u. Если $u' = u$ почти всюду, то нижние грани по мере этих двух функций совпадают.

Пусть u — числовая функция, определенная на открытом множестве ω пространства R^n. Для любой окрестности V точки $x_0 \in \omega$ в ω обозначим через k_V нижнюю грань по мере функции u в V. *Нижним пределом по мере функции u в точке x_0* называется число $\sup\limits_V k_V$, где V пробегает фильтр окрестностей точки x_0 в ω; это число равно также пределу k_V по фильтрующемуся упорядоченному множеству окрестностей V.

Свойство. *Пусть u — супергармоническая функция на открытом множестве ω пространства R^n. Для любой точки $x \in \omega$ значение $u(x)$ равно нижнему пределу по мере функции u в точке x.*

В самом деле, пусть некоторое число Λ строго меньше нижнего предела по мере функции u в точке x (этот предел не может быть равен $-\infty$, поскольку функция u полунепрерывна снизу и $u > -\infty$). Существует окрестность V точки x, в которой $\Lambda < u$ почти всюду; следовательно, $\mathfrak{A}_u^r(x) \geqslant \Lambda$ для $B(x, r) \subset V$, а значит $u(x) \geqslant \Lambda$.

Отсюда следует, что нижний предел по мере функции u в точке x не превосходит $u(x)$. Допустим, что $u(x)$ строго больше этого предела; тогда существует число $k < u(x)$, которое все еще строго больше нижнего предела по мере u в x. В силу полунепрерывности u существует окрестность W точки x, в которой $k \leqslant u$, а отсюда вытекает, что нижний предел по мере u в x не меньше, чем k. Полученное противоречие доказывает сформулированное свойство.

В частности, пусть E — некоторое множество меры нуль; тогда для любой точки $x_0 \in \omega$ имеем $u(x_0) = \varliminf_{x \to x_0} u(x)$, $x \in \complement E$, так как правая часть этого равенства заключена между нижним пределом по мере u в x_0 и $\varliminf_{x \to x_0} u(x)$, а оба эти числа равны $u(x_0)$. Для $E = \{x_0\}$ это замечание приводит к формуле $u(x_0) = \varliminf_{x \to x_0} u(x)$, $x \neq x_0$.

Здесь мы снова получаем, что супергармоническая функция определяется ее сужением на дополнение к любому множеству меры нуль.

§ 6. Аппроксимация супергармонических функций

Пусть f — локально суммируемая функция, определенная на открытом множестве ω пространства R^n. Легко показать, что среднее значение $\mathfrak{A}_f^r(x)$ есть непрерывная функция от x; эта функция определена на множестве тех точек ω, расстояние которых до границы $\partial\omega$ больше фиксированного r. Точно так же, можно показать, что если функция f непрерывно дифференцируема $p-1$ раз в ω, то среднее значение $\mathfrak{A}_f^r(x)$ как функция от x непрерывно дифференцируемо p раз. Положив $A_1^r = \mathfrak{A}_f^r$, определим $A_p^r = \mathfrak{A}_{A_{p-1}^r}^r$ для каждого натурального числа p. Из предшествующих замечаний следует, что если функция f локально суммируема в ω, то функция A_p^r непрерывно дифференцируема $p-1$ раз в открытой части множества ω, где эта функция определена.

Если f — супергармоническая функция, то функция A_p^r от x и r убывает по r и сходится к f, когда r стремится к нулю (§ 5). Отсюда получаем процесс аппроксимации функции f на любом относительно компактном открытом множестве при помощи возрастающей последовательности p раз дифференцируемых супергармонических функций A_{p+1}^r.

Полная регуляризация. Пусть ψ_{r_0} — положительная функция одного действительного переменного $r \geqslant 0$, равная нулю на сегменте $[r_0, +\infty)$ и такая, что функция $\psi_{r_0}(r) = \varphi(x)$, $r^2 = \sum x_i^2$, определенная во всем пространстве R^n, бесконечно дифференцируема; можно выбрать ψ_{r_0} таким образом, чтобы интеграл от φ по всему пространству R^n был равен 1.

Заметим, что если f — супергармоническая функция на ω, то регуляризация $f * \varphi$ есть также супергармоническая функция на открытом множестве ω_{r_0} точек из ω, расстояние которых до границы $\partial\omega$ больше r_0.

Если f — конечная непрерывная функция, то $f * \varphi$ при любом выборе ψ_{r_0} для каждого r_0 локально равномерно сходится к f при $r_0 \to 0$. Вообще, пусть f — локально суммируемая функция, r_1 и ψ_{r_1} фиксированы. Если брать $\psi_{r_0}(r)$ пропорциональной $\psi_{r_1}(r_1 r / r_0)$, то можно показать, что $f * \varphi$ почти всюду сходится к f при $r_0 \to 0$.

Отсюда получается процесс аппроксимации супергармонических функций при помощи бесконечно дифференцируемых супергармонических функций. Методы аппроксимации супергармонических функций позволяют свести решение некоторых вопросов к элементарным вычислениям с производными; например, таким путем можно доказать, что возрастающая вогнутая функция от супергармонической функции снова является супергармонической.

§ 7. Теорема Рисса о выпуклости

Пусть u — *субгармоническая (супергармоническая) функция в кольце с центром* 0 *радиусов* R, R' *в* R^n (см. § 7, гл. I). *Тогда среднее значение* $\mathfrak{M}_u^r(0)$ *есть выпуклая (соответственно вогнутая) функция от переменного* $t = h(r)$ *при* $R < r < R'$, *где* h *обозначает фундаментальную функцию, определенную в* § 4.

Посредством аппроксимации можно свести доказательство к случаю дважды непрерывно дифференцируемой функции, когда вычисление проводится элементарно. Мы предпочитаем другое рассуждение.

Заметим сначала, что если u — гармоническая функция, то среднее значение $\mathfrak{M}_u^r(0)$ есть линейная функция от переменного $t = h(r)$. В самом деле, поток u через сферу $S(0, r)$, $R < r < R'$, не зависит от r. Если перейти к сферическим координатам (r, θ), где θ пробегает сферу $S(0, 1)$, выражение для этого потока примет вид

$$\int\limits_{S(0,1)} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} r^{n-1} d\sigma = k,$$

σ — элемент площади сферы $S(0, 1)$. Отсюда

$$\int\limits_{S(0,1)} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} d\sigma = \frac{k}{r^{n-1}}.$$

При $n > 2$ получаем

$$\int\limits_{S(0,1)} u(r, \theta)\, d\sigma = \frac{k}{2-n} r^{2-n} + k' = k' + k''t,$$

а при $n = 2$

$$\int\limits_{S(0,1)} u(r, \theta)\, d\sigma = k \log r + k' = k' - kt.$$

Рассмотрим теперь субгармоническую функцию u, определенную в данном кольце. Пусть r_1, r_2 — любые числа, такие, что $R < r_1 < r_2 < R'$. Через v обозначим обобщенное решение задачи Дирихле в кольце радиусов r_1, r_2, для которого граничными значениями служат сужения функции u на сферы $S(0, r_1)$ и $S(0, r_2)$. Тогда $\overline{\lim\limits_{x \to y}}\, v(x) \leqslant u(y)$, $y \in S(0, r_1)$ или $y \in S(0, r_2)$ (см. § 7, гл. I). Отсюда следует, что пределы $\mathfrak{M}_v^r(0)$ при $r \to r_1$ и $r \to r_2$ не превосходят соответственно средних $\mathfrak{M}_u^{r_1}$ и $\mathfrak{M}_u^{r_2}$. Поскольку, согласно определению, функция v мажорирует u в рассматриваемом кольце, среднее $\mathfrak{M}_u^r$ мажорируется средним $\mathfrak{M}_v^r$, которое представляет собой линейную функцию от t со значениями на концах отрезка, не превосходящими $\mathfrak{M}_u^{r_1}$ и $\mathfrak{M}_u^{r_2}$. Это доказывает выпуклость.

Из этой теоремы можно вывести многочисленные следствия, в частности для модулей голоморфных функций, изучение которых привело Ф. Рисса к субгармоническим функциям.

Теорема о выпуклости позволяет также провести исследование субгармонических функций в окрестности изолированной особой точки. Например, если 0 является такой точкой, то среднее $\mathfrak{M}_u^r(0)$ и отношение $\mathfrak{M}_u^r(0)/h(r)$ имеют определенные пределы при $r \to 0$.

§ 8. Гармонические миноранты

Рассмотрим семейство $\{u_i\}$ супергармонических функций на открытом множестве ω пространства R^n. Если существует хотя бы одна субгармоническая функция, являющаяся минорантой для всех функций u_i, то верхняя огибающая w субгармонических минорант семейства $\{u_i\}$ есть функция *гармоническая* и является *наибольшей гармонической минорантой* семейства $\{u_i\}$.

В самом деле, для каждого замкнутого шара $\overline{B}$, лежащего в ω, и для каждой субгармонической миноранты v семейства $\{u_i\}$ функция v_B, получаемая заменой v в B интегралом I_v^B (см. § 2), также является субгармонической минорантой $\{u_i\}$. Следовательно, w совпадает в B с верхней огибающей семейства $\{I_v^B\}$ гармонических функций (поскольку $v \leqslant I_v^B$); это последнее семейство фильтруется вправо, как и все семейство $\{v\}$ субгармонических минорант. Так как функция w отлична от $+\infty$, она является гармонической (§ 2, 3, гл. I). Утверждение доказано.

В частности, если супергармоническая функция u на открытом множестве ω имеет хотя бы одну гармоническую миноранту, то она имеет и наибольшую гармоническую миноранту. Заметим, что в шаре $B(x_0, R)$ наибольшей гармонической минорантой функции u является функция $\lim\limits_{r \to R} I_u^{B_r}$, $B_r = B(x_0, r)$, $r < R$.

В самом деле, $I_u^{B_r}$ в B_r мажорирует каждую гармоническую миноранту в B_R и $\lim\limits_{r \to R} I_u^{B_r}$ есть гармоническая миноранта u.

Кроме того, интеграл $I_u^{B_r}$ при $r < R$ является также наибольшей гармонической минорантой функции u в B_r [вследствие непрерывности $\mathfrak{M}_u^r(x_0)$ по r].

Вообще, пусть $\{\omega\}$ — фильтрующееся упорядочение относительно компактных открытых множеств ω, содержащихся в открытом множестве Ω; тогда наибольшая гармоническая миноранта w_Ω функции u в Ω есть предел по $\{\omega\}$ наибольших гармонических минорант w_ω функции u в ω.

Применение.

Теорема. *Множество положительных гармонических функций на открытом множестве ω является решеткой по естественному порядку. Множество разностей двух положительных гармонических функций составляет вполне решетчатое пространство Рисса.*

В самом деле, если u_1 и u_2 — положительные гармонические функции, то тем же свойством обладают их сумма $u_1 + u_2$ и функция 0; первая из них мажорирует, а вторая минорирует u_1 и u_2; следовательно, множество $\{u_1, u_2\}$ имеет наибольшую гармоническую миноранту и наименьшую гармоническую мажоранту.

Точно так же, пространство разностей положительных гармонических функций является вполне решетчатым, потому что любое множество положительных гармонических функций, мажорируемое гармонической функцией, имеет наименьшую гармоническую мажоранту.

§ 9. Почти супергармонические функции (Шпильрейн)

Числовая функция f (конечная или нет), определенная на открытом множестве ω пространства R^n, называется *почти супергармонической*, если существует супергармоническая функция $\hat{f}$ на ω, почти всюду равная f.

Функция $\hat{f}$ единственна (§ 5); она называется *супергармонической регуляризацией* f. Значение $\hat{f}(x)$ совпадает с $\lim\limits_{r\to 0} \mathfrak{A}_f^r(x)$ и с нижним пределом по мере функции f в точке x.

Введение почти супергармонических функций оправдывается, с одной стороны, использованием обобщенных функций, а с другой стороны — тем, что полунепрерывность снизу не сохраняется при переходе к пределу по убывающей последовательности.

Критерии почти супергармоничности.

1) Для того чтобы числовая функция u (конечная или нет), определенная на открытом множестве ω пространства R^n, была почти супергармонической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) функция u локально суммируема;

б) $\varliminf_{r\to 0}[\mathfrak{A}_u^r(x_0)-\varphi(x_0)]/r^2\leqslant 0$ для всех точек $x_0\in\omega$,

причем $\varphi(x_0)$ обозначает нижний предел по мере функции u в точке x_0.

Если u — почти супергармоническая функция, то $\hat{u}=\varphi$ и $\mathfrak{A}_u^r=\mathfrak{A}_{\hat{u}}^r$, откуда следует необходимость этих условий.

Наоборот, в силу условия б) всюду $\varphi>-\infty$, так как $\mathfrak{A}_u^r(x_0)$ конечно; функция φ также полунепрерывна снизу. Кроме того, u мажорирует φ почти всюду. В самом деле, так как u локально суммируема, для почти всех точек $x\in\omega$ имеем $\lim_{r\to 0}\mathfrak{A}_u^r(x)=u(x)$. Предположим, что в точке x выполняются неравенства $u(x)<k<\varphi(x)$; тогда k есть миноранта по мере функции u в окрестности V точки x, а следовательно, $\mathfrak{A}_u^r(x)>k>u(x)$ для достаточно малых r и соотношение $\lim_{r\to 0}\mathfrak{A}_u^r(x)=u(x)$ не может выполняться в этой точке. Таким образом, множество точек x, в которых $\varphi(x)>u(x)$, имеет меру нуль.

Из предыдущего следует, что $\mathfrak{A}_\varphi^r\leqslant\mathfrak{A}_u^r$, а значит, согласно условию б), $\varliminf_{r\to 0}[\mathfrak{A}_\varphi^r(x_0)-\varphi(x_0)]/r^2\leqslant 0$, т. е. в каждой точке $x_0\in\omega$ имеем $\underline{S}_\varphi(x_0)\leqslant 0$. Отсюда следует, что φ — супергармоническая функция (поскольку она полунепрерывна снизу и $\varphi>-\infty$, см. § 2).

Наконец, функция φ почти всюду равна u; в самом деле, почти всюду u мажорирует φ, а, с другой стороны, если предел $\lim_{r\to 0}\mathfrak{A}_u^r(x)$ существует, то он не превосходит $\varphi(x)$, согласно б). Так как $\lim_{r\to 0}\mathfrak{A}_u^r=u$ почти всюду, имеем $u\leqslant\varphi$ почти всюду.

2) Для того чтобы числовая функция u, определенная на открытом множестве ω пространства R^n, была почти супергармонической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а′) u локально суммируема;

б′) для почти всех точек x_0 множества ω и для любого замкнутого шара $\overline{B}(x_0, r)$ выполняется неравенство $u(x_0) \geqslant \mathfrak{A}_u^r(x_0)$.

Необходимость этих условий очевидна.

Наоборот, предположим, что условия а′) и б′) выполнены. Для фиксированного значения r функция $\mathfrak{A}_u^r(x)$ конечна и непрерывна. Пусть x_0 — точка из ω; существует такая последовательность $\{x_n\}$ точек из ω, сходящаяся к x_0, что $u(x_n) \geqslant \mathfrak{A}_u^r(x_n)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и последовательность $\{u(x_n)\}$ сходится к нижнему пределу по мере $\varphi(x_0)$ функции u в точке x_0. Отсюда имеем

$$\varphi(x_0) = \lim_{n\to\infty} u(x_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}_u^r(x_n) = \mathfrak{A}_u^r(x_0),$$

где r произвольно. Таким образом, условие б) предыдущего критерия выполнено, а следовательно, u есть почти супергармоническая функция.

В итоге получаем, что супергармоническую функцию можно охарактеризовать как почти супергармоническую функцию, значением которой в каждой точке является ее нижний предел по мере.

Супермедианные функции. Числовая функция u (конечная или нет), определенная на открытом множестве ω пространства R^n, называется *пространственно супермедианной* (или, короче, *супермедианной*), если она локально суммируема и неравенство $u(x) \geqslant \mathfrak{A}_u^r(x)$ выполняется для каждого замкнутого шара $\overline{B}(x, r)$, лежащего в ω.

Пространственно супермедианную функцию u можно охарактеризовать как почти супергармоническую функцию, которая мажорирует свою супергармоническую регуляризацию, или как функцию, для которой ее супергармоническая регуляризация $\hat{u}$ совпадает с нижней регуляризацией $\underset{\sim}{u}$, или еще как функцию, для которой нижняя регуляризация $\underset{\sim}{u}(x)$ совпадает с нижним пределом по мере функции $\tilde{u}$ в точке x.

Пределы почти супергармонических функций. Пусть на открытом множестве $\omega \subset R^n$ дана последовательность почти супергармонических функций, мажорируемая по модулю на каждом компактном множестве, лежащем в ω, некоторой суммируемой функцией. *Предел этой последовательности есть почти супергармоническая функция на* ω.

Доказательство получается непосредственно при помощи критерия 2).

С другой стороны, можно доказать, что *нижняя огибающая локально ограниченного снизу семейства* $\{u_i\}$ *пространственно супермедианных функций локально суммируема*; отсюда следует, что она есть *пространственно супермедианная функция*. Это вытекает из рассмотрения (при помощи топологической леммы) частного случая, когда u_i являются супергармоническими функциями; этот последний случай при помощи той же леммы сводится к случаю последовательности.

В дальнейшем мы убедимся, что если u_i являются супергармоническими функциями, то имеет место более сильное свойство: функция $u = \inf u_i$ отличается от супергармонической функции только на некотором полярном множестве. Понятие полярного множества вводится в следующей главе.

Замечание. В аксиоматических обобщениях в качестве понятия, близкого к гипергармоническим функциям, вводятся *гипермедианные функции*. Эти функции определяются на открытом множестве ω следующими условиями: u локально ограничена снизу; для любого замкнутого шара $\overline{B}(x, r) \subset \omega$ выполняется неравенство[1]) $u(x) \geqslant \overline{\int} u\, d\varrho$, где ϱ — положительная мера с общей массой 1, пропорциональная площади сферы $\partial B(x, r)$.

Полезность этого понятия обусловливается следующими двумя простыми свойствами: нижняя огибающая

[1]) Здесь и в дальнейшем используются терминология и обозначения теории абстрактного интеграла в изложении Bourbaki N., Éléments de mathématique, Livre VI, Intégration, Paris, Hermann, 1952.

$\overline{\int} u\, d\varrho$ и $\underline{\int} u\, d\varrho$ — верхний и нижний интегралы по мере ϱ. — *Прим. перев.*

семейства гипермедианных функций, локально ограниченного снизу, есть функция того же типа; нижняя регуляризация $\underset{\sim}{u}(x)$ принимает значения $\varliminf_{r\to 0}\int u\,d\varrho$ и является гипергармонической функцией.

БИБЛИОГРАФИЯ

*Привалов И. И., Субгармоиические фуикции, М., 1937.

Brelot M., Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point, Paris, Hermann, 1934.

Brelot M., Fonctions sousharmoniques, presque sousharmoniques ou sousmédianes, *Ann. Univ. Grenoble*, **21** (1945), 75—90.

Rado T., Subharmonic Functions, 1937.

Riesz F., Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel. I, *Acta Math.*, **48** (1926), 329—343; II, **54** (1930), 321—360.

Отиосительно функций, представимых в виде разностей двух супергармоиических функций, см. работы:

Arsove M. G., Functions representable as differences of subharmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 327—365.

Arsove M. G., Functions of potential type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 526—551.

Отиосительно обобщений иа окрестиость бескоиечно удаленной точки (оии различны для $n=2$ и $n>2$), см., кроме приложения, работу:

Brelot M., Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques, *Ann. Ecole Normale Super.*, **61** (1944), **301—322**,

где рассмотреиы многие обобщения следующих глав.

Глава III

ВВЕДЕНИЕ ПОЛЯРНЫХ МНОЖЕСТВ

§ 1. Определение

Множество $E \subset R^n$ называется *локально полярным* или, ради краткости, просто *полярным*[1]), если для каждой точки x можно найти открытую окрестность V_x, на которой существует супергармоническая функция u_x, равная $+\infty$ в каждой точке пересечения $V_x \cap E$ (и, что можно добавить, не уменьшая общности, строго положительная на V_x).

Говорят, что некоторое свойство $P\{x\}$ имеет место *квазивсюду*, если множество точек $x \in R^n$, в которых это свойство не выполняется, является полярным.

Если в определении рассматривать только точки $x \in E$, то получается понятие, равносильное первоначальному; это следует из результата, приводимого ниже.

Свойство. Пусть E — полярное множество в последнем смысле, содержащееся в открытом множестве ω пространства R^n (в частности, в R^n). Тогда существует супергармоническая функция u на ω (или даже на R^n), равная $+\infty$ в каждой точке E; u называется *ассоциированной супергармонической функцией с множеством E в ω*. Можно показать, что существует ассоциированная функция, конечная в каждой фиксированной точке множества $\complement E \cap \omega$ и даже строго положительная, если только множество ω ограничено.

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма. *Пусть u — супергармоническая функция, определенная в шаре $B(0, R)$. Каков бы ни был радиус*

---

[1]) Это понятие было введено в 1941 году [Brelot M., *Bull. Sci. Math.*, **65** (1941), 72—98] для того, чтобы заменить понятие множества внутренней емкости нуль, систематически использовавшееся прежде. Оно локально равносильно понятию множества внешней емкости нуль (см. гл. V).

$R' < R$, в R^n существует супергармоническая функция, являющаяся продолжением сужения функции u на шар $B(0, R')$ и конечная вне $B(0, R')$.

Уменьшая R, если нужно, сводим доказательство к случаю, когда u ограничена снизу числом k. Рассмотрим функцию v, равную u в замкнутом шаре $\overline{B}(0, R')$, а в кольце (R', R) совпадающую с обобщенным решением задачи Дирихле для этого кольца с граничными значениями u на $S(0, R')$ и k на $S(0, R)$. Функция v полунепрерывна снизу (см. гл. I, § 7), удовлетворяет критерию Привалова всюду вне $S(0, R')$ и даже на $S(0, R')$, а следовательно, является супергармонической в $B(0, R)$.

Указанное определение функции v в кольце при помощи предельной операции с равномерной сходимостью в окрестности $S(0, R)$ показывает, что v принимает постоянное значение k на сфере $S(0, R)$; продолжая v гармонически через $S(0, R)$, получаем функцию w. Тогда существует функция w', линейная относительно фундаментальной функции $h(\|x\|)$ (гл. II, § 4), принимающая значение k на $S(0, R)$ и мажорируемая функцией w в окрестности этой сферы. Функция v', равная v в $B(0, R)$ и w' вне $B(0, R)$, является супергармонической (рассуждение то же, что и для v) и совпадает с u в шаре $B(0, R')$.

Рассмотрим теперь такое множество E, что каждой точке $x \in E$ поставлен в соответствие шар $B(x, r)$, в котором существует супергармоническая функция v, принимающая значение $+\infty$ на $B \cap E$; рассмотрим также настолько малый концентрический шар B', чтобы замыкание $\overline{B'}$ не содержало фиксированной точки $x_0 \in \complement E$. Так как пространство R^n имеет счетную базу, множество E можно покрыть последовательностью таких шаров B'_p. В силу леммы каждому из них соответствует функция v_p, супергармоническая в R^n, конечная вне $\overline{B'_p}$ и бесконечная на $B'_p \cap E$. Для любого натурального числа p полунепрерывная снизу функция v_p ограничена снизу в шаре $B(x_0, \rho)$; пусть k_p — такая постоянная, что $v_p + k_p \geqslant 0$ в шаре $B(x_0, \rho)$. Пусть $\{\lambda_p\}$ — такая последовательность строго положительных чисел, что ряд с общим членом $\lambda_p[v_p(x_0) + k_p]$ сходится. Тогда ряд с общим членом $\lambda_p(v'_p + k_p)$ сходится к супергармонической функции в R^n, так как в любом шаре $B(0, \varrho)$ функции $\lambda_p(v'_p+k_p)$ положительны при достаточно большом p и сумма ряда конечна в точке x_0. Эта супергармоническая функция $\sum \lambda_p(v'_p+k_p)$ равна $+\infty$ на каждом множестве $B'_p \cap E$, а следовательно, в каждой точке множества E.

§ 2. Свойства

1) Каждое множество, состоящее из одной точки, полярно.

В самом деле, если $E=\{x_0\}$, то супергармоническая функция $h(\|x-x_0\|)$ равна $+\infty$ в точке x_0.

2) Каждая часть полярного множества есть полярное множество.

3) Каждое полярное множество есть множество меры нуль. След полярного множества на сфере есть множество меры нуль на сфере. Это вытекает из свойств суммируемости супергармонических функций.

4) Объединение счетного семейства $\{E_p\}$ полярных множеств есть множество полярное.

Пусть x_0 — точка, не принадлежащая объединению множеств этого семейства. Для каждого натурального числа p рассмотрим супергармоническую функцию v_p, ассоциированную с множеством E_p, конечную в точке x_0 и положительную в шаре $B(x_0, p)$. Пусть $\{\lambda_p\}$ — последовательность строго положительных чисел, такая, что ряд с общим членом $\lambda_p v_p(x_0)$ сходится. Тогда ряд с общим членом $\lambda_p v_p$ сходится к супергармонической функции, которая равна $+\infty$ в каждой точке объединения $\bigcup E_p$.

5) Образ полярного множества при конформном преобразовании есть множество полярное.

В самом деле, конформное отображение на плоскости, подобие и преобразование Кельвина сохраняют супергармоничность.

6) Пусть в области ω задано полярное множество E, замкнутое в ω; дополнение $\omega - E$ множества E относительно ω есть множество связное.

В самом деле, пусть v — супергармоническая в ω функция, ассоциированная с E. Если множество $\omega - E$ не связно, то пусть ω_1 и ω_2 — две его непустые связные компоненты. Функция u, равная v в ω_1 и $+\infty$ в $\omega - \omega_1$, является супергармонической в широком смысле; однако она равна $+\infty$ в ω_2, но не в ω_1, что невозможно.

Свойство продолжения. *Пусть E — полярное множество, содержащееся в открытом множестве ω и замкнутое относительно ω. Если u — супергармоническая функция, определенная в $\omega - E$ и локально ограниченная снизу в ω, то существует единственная супергармоническая в ω функция, являющаяся продолжением u.*

Доказательство непосредственно сводится к случаю ограниченного множества ω. Пусть v — строго положительная супергармоническая в ω функция, ассоциированная с множеством E. Функция v_p, равная $+\infty$ на E и $u+v/p$ на $\omega - E$, является супергармонической. Последовательность $\{v_p\}$ убывает и в каждой точке x, где $v(x)$ конечна, сходится к u; таким образом, предел w убывающей последовательности $\{v_p\}$ есть функция почти супергармоническая и почти всюду равная u; следовательно, его супергармоническая регуляризация $\hat{w}$ представляет собой искомое продолжение функции u.

В частности, если u — локально ограниченная гармоническая функция в $\omega - E$, то в ω существует единственная гармоническая функция, являющаяся продолжением u.

БИБЛИОГРАФИЯ

Brelot M., Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques, *Bull. Sci. Math.*, 65 (1941), 72—98.

Глава IV

КЛАССИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

§ 1. Определение

Напомним определение фундаментальной супергармонической функции $h(\|x\|)$ в пространстве R^n (ср. гл. III, § 4):

$$h(\|x\|)=\begin{cases} -\log\|x\|, & n=2;\\ \|x\|^{2-n}, & n\geqslant 3.\end{cases}$$

Через h_y обозначим функцию $h(\|x-y\|)$ и, ради краткости, через h — функцию $h_{y=0}=h(\|x\|)$.

Пусть дана мера μ на R^n; потенциалом меры μ называется функция (не всегда определенная на всем R^n)

$$U^\mu(x)=\int\limits_{R^n} h(\|x-y\|)\,d\mu(y)=\int\limits_{R^n} h_x(y)\,d\mu(y). \qquad (1)$$

Для $n\geqslant 3$ фундаментальная функция положительна. В случае плоскости можно перейти к положительной фундаментальной функции, если рассматривается мера μ с компактным носителем: фундаментальная функция полунепрерывна снизу, а следовательно, ограничена снизу на носителе меры μ.

Свойство. *Потенциал положительной меры с компактным носителем всюду определен и является супергармонической функцией.*

Для каждого натурального числа p положим $\varphi_p(x, y)=$ $=\inf[h(\|x-y\|), p]$; $\varphi_p(x, y)$ есть непрерывная супергармоническая функция от x. Далее, $\Psi_p(x)=\int\limits_{R^n}\varphi_p(x, y)\,d\mu(y)$ есть непрерывная супергармоническая функция, так как мера μ положительна. Имеем $h(\|x-y\|)=\sup\varphi_p(x, y)$, а значит, возрастающая последовательность $\{\Psi_p\}$ сходится к потенциалу U^μ, $U^\mu=\sup\Psi_p$. Отсюда следует, что U^μ —

супергармоническая в широком смысле функция [гл. II, § 1, свойство г)]. Кроме того, непосредственно видно, что U^μ — конечная гармоническая функция в дополнении к носителю меры μ; следовательно, U^μ есть супергармоническая функция.

Обобщение. Доказанное свойство остается в силе для положительной меры μ с некомпактным носителем, если потенциал хотя бы в одной точке существует и конечен.

Рассмотрим сначала случай $n \geqslant 3$. Пусть $\overline{B}$ — замкнутый шар в пространстве R^n; согласно предыдущему, потенциал содержащихся в $\overline{B}$ масс всюду определен и является супергармонической функцией. Относительно потенциала масс, находящихся вне $\overline{B}$, можно сделать только два предположения: если он бесконечен в какой-либо точке $x \in B$, то он бесконечен всюду; в противном случае этот потенциал есть функция, гармоническая в B. Таким образом, потенциал меры μ в B либо является супергармонической функцией, либо тождественно равен $+\infty$.

Рассуждение нужно немного изменить в случае плоскости, так как фундаментальная функция тогда принимает отрицательные значения. Достаточно отделить ее положительную и отрицательную части. Мы не останавливаемся на этом, так как в дальнейшем будем рассматривать вопрос с локальной точки зрения и заменим фундаментальную функцию всюду положительной функцией Грина.

§ 2. Использование обобщенных функций

В этом параграфе мы будем рассматривать только меры с компактным носителем.

Если обозначить через h фундаментальную функцию $h(x) = h(\|x\|)$, то формула (1) из § 1 переписывается так:

$$U^\mu(x) = \int_{R^n} h(y-x)\,d\mu(y) = h*\mu(x),$$

т. е. $U^\mu = h*\mu$. Вообще, для любой обобщенной функции T с компактным носителем в R^n мы принимаем, по определению, потенциал обобщенной функции T равным регуляризации $U^T = h*T$.

Свойства лапласиана.

1) В смысле обобщенных функций имеет место равенство

$$\Delta h = -\varphi_n \delta, \tag{2}$$

где δ — дельта-функция Дирака и φ_n — поток фундаментальной функции h внутрь какой-либо сферы с центром 0.

В самом деле, если T есть обобщенная функция, Δh и $f \in \mathfrak{D}$, то $T(f) = \int h \Delta f \, dx$ является пределом интеграла от $h\Delta f$ по кольцу радиусов ε и R, когда $\varepsilon \to 0$ и $R \to +\infty$. Так как h — гармоническая функция в этом кольце, то $\Delta h = 0$, а следовательно, учитывая, что f имеет компактный носитель, из формулы Грина получаем

$$\int\limits_{R^n} h \Delta f \, dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int\limits_{\varepsilon < \| x \| < R} (h \Delta f - f \Delta h) \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\| x \| = \varepsilon} \left(h \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial h}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Непосредственно получаются следующие равенства:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\| x \| = \varepsilon} h \frac{\partial f}{\partial n} \, d\sigma = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\| x \| = \varepsilon} f \frac{\partial h}{\partial n} \, d\sigma = \varphi_n f(0).$$

Таким образом, $T(f) = -\varphi_n f(0)$, т. е. $\Delta h = -\varphi_n \delta$.

Нетрудно вычислить φ_n: для $n \geqslant 3$ имеем

$$\varphi_n = \int \frac{\partial h}{\partial n} \, d\sigma = \int \frac{dr^{2-n}}{dr} \, d\sigma = (n-2) \alpha_n,$$

$\varphi_2 = 2\pi$ при $n = 2$.

2) Для любой обобщенной функции T с компактным носителем в R^n имеет место равенство

$$\Delta U^T = \Delta (h * T) = \Delta h * T = -\varphi_n T. \tag{3}$$

Теорема представления Рисса (локальная форма). *Класс обобщенных функций T на открытом множестве ω пространства R^n, удовлетворяющих неравен-*

ству $\Delta T \leqslant 0$, совпадает с классом почти супергармонических функций на ω.

Докажем сначала, что для всякой почти супергармонической функции f на ω неравенство $\Delta f \leqslant 0$ выполняется в смысле обобщенных функций. Утверждение достаточно установить для случая, когда f — супергармоническая функция. Но такую функцию можно локально представить как предел возрастающей последовательности бесконечно дифференцируемых супергармонических функций (см. гл. II, § 6), лапласианы которых отрицательны; следовательно, $\Delta f \leqslant 0$.

Наоборот, мы докажем теперь, что обобщенная функция T, удовлетворяющая неравенству $\Delta T \leqslant 0$ в области ω пространства R^n, локально может быть представлена в виде суммы потенциала единственной положительной меры и некоторой гармонической функции. Это и есть локальная форма теоремы представления Рисса.

Как в § 6, гл. I, введем обобщенную функцию T_1 с компактным носителем в R^n, совпадающую с T на ограниченном открытом множестве ω_1, произвольно выбранном так, что $\overline{\omega}_1 \subset \omega$. Тогда, согласно (3),

$$\Delta T_1 = \delta * \Delta T_1 = -\frac{1}{\varphi_n} \Delta h * \Delta T_1 = -\frac{1}{\varphi_n} \Delta (h * \Delta T_1) = \Delta U^{-\Delta T_1/\varphi_n},$$

а следовательно, $\Delta (T_1 - U^{-\Delta T_1/\varphi_n}) = 0$. Из сказанного в § 6, гл. I следует теперь, что $T_1 - U^{-\Delta T_1/\varphi_n}$ есть гармоническая функция. Но $\Delta T_1 = \Delta T \leqslant 0$ на ω_1; следовательно, существует положительная мера μ в R^n, совпадающая с $-\Delta T_1/\varphi_n$ на произвольно выбранном открытом множестве $\omega_2 \subset \overline{\omega}_2 \subset \omega_1$. Разность $T_1 - U^{\mu}$ есть гармоническая функция на ω_2, и то же самое справедливо для $T - U^{\mu}$; множество ω_2 является произвольным относительно компактным множеством в ω.

Единственность этой меры следует из формулы (3).

§ 3. Функция Грина для шара и потенциал Грина

Пусть $B = B(x_0, R)$ — открытый шар в пространстве R^n и y — некоторая точка из B. Обозначим через I_{h_y} интеграл Пуассона в B, построенный для сужения функции

h_y на сферу ∂B. *Функцией Грина с полюсом y* называется разность $G_y = h_y - I_{h_y}$; функцию G_y мы построим в явном виде.

Пусть точка y переходит в y_1 при инверсии относительно сферы ∂B; точка y_1 находится вне B. Функция $h(\|y-x_0\|\cdot\|x-y_1\|/R)$ равна h_y на сфере ∂B и является гармонической в B. Следовательно, $I_{h_y}(x) = h(\|y-x_0\|\cdot\|x-y_1\|/R)$ в каждой точке $x \in B$ и

$$G_y(x) = h(\|x-y\|) - h\left(\frac{\|y-x_0\|\cdot\|x-y_1\|}{R}\right).$$

Функция Грина G_y есть строго положительная гармоническая функция на множестве $B-\{y\}$, обращающаяся в нуль на ∂B. Используя полученное выражение, легко видеть, что $G_y(x) = G_x(y)$, каковы бы ни были точки x и y шара B. Мы полагаем $G(x, y) = G(y, x) = G_y(x) = G_x(y)$. Симметрическая функция $G(x, y)$ от двух переменных есть *ядро Грина* для шара B. Для произвольных x, y определяем $G(x, y)$, полагая $G(x, y) = 0$, если хотя бы одна из точек x, y находится вне B.

Замечание. Обозначим через G_y^r функцию Грина с полюсом y для шара $B(x_0, r)$ пространства R^n, $n \geqslant 3$. Если r, возрастая, стремится к ∞, то G_y^r возрастает и сходится к h_y.

Потенциал Грина. Если μ — мера на шаре B, то потенциалом Грина меры μ называется функция

$$G\mu = \int_B G(x, y)\, d\mu(y),$$

где $G(x, y)$ — ядро Грина для шара B.

Свойства.

1) Потенциал Грина положительной меры μ на B есть супергармоническая в широком смысле функция на B.

В самом деле, значение потенциала Грина меры μ в точке x равно пределу интеграла

$$\int_{B_r} G(x, y)\, d\mu(y) = \int_{B_r} h(\|x-y\|)\, d\mu(y) - \int_{B_r} I_{h_y}(x)\, d\mu(y),$$

когда радиус $r < R$ концентрического шара $B_r = B(x_0, r)$ стремится к R. Первый интеграл правой части есть супергармоническая функция, второй — гармоническая. Таким образом, все выражение представляет собой супергармоническую функцию, которая при возрастании r может только возрастать; следовательно, предел есть супергармоническая в широком смысле функция.

2) Потенциал Грина положительной меры μ с конечной общей массой на шаре B есть супергармоническая функция, и ее наибольшая гармоническая миноранта в B тождественно равна нулю.

Первая часть утверждения непосредственно вытекает из предыдущего рассуждения, так как легко найти точку, в которой потенциал конечен.

Далее, если $y \in B - B_r$, то $\mathfrak{M}^r_{G_y}(x_0) = G_y(x_0)$; если же $y \in B_r$, то

$$\mathfrak{M}^r_{G_y}(x_0) = \mathfrak{M}^r_{h_y}(x_0) - \mathfrak{M}^r_{I_{h_y}}(x_0) = \\ = h(r) - I_{h_y}(x_0) = \\ = h(r) - \mathfrak{M}^R_{h_y}(x_0) = h(r) - h(R).$$

Обозначим через v потенциал Грина меры μ. Тогда

$$\mathfrak{M}^r_v(x_0) = \int\limits_{B-B_r} G(x_0, y)\,d\mu(y) + [h(r) - h(R)]\,\mu(B_r).$$

Отсюда следует, поскольку общая масса $\mu(B)$ конечна, что $\lim\limits_{r\to R} \mathfrak{M}^r_v(x_0) = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{r\to R} I^{B_r}_v = 0$, т. е. наибольшая гармоническая миноранта потенциала v в B тождественно равна нулю[1]) (гл. II, § 8).

Лемма. *Пусть v — супергармоническая функция в шаре $B(x_0, R)$; обозначим через μ ассоциированную меру* $-\Delta v/\varphi_n$ (ср. § 2). *Для каждого шара $B_r = B(x_0, r)$,*

---

[1]) Это свойство немедленно распространяется на меры μ, для которых потенциал $\int G\,d\mu$ не везде бесконечен. Следует воспользоваться неравенством

$$[h(r) - h(R)]\,\mu(B_r - B_{r_1}) \leqslant \int\limits_{B_r - B_{r_1}} G(x_0, y)\,d\mu(y).$$

$r < R$, *и для каждой точки* $x \in B_r$ *имеет место равенство*

$$v(x) = \int_{B_r} G^r(x, y)\, d\mu(y) + I_v^{B_r}(x), \tag{4}$$

где G^r — *ядро Грина для шара* B_r.

В самом деле, согласно локальной форме теоремы представления Рисса, функция $v(x)$ представима в виде суммы интеграла $\int\limits_{B_r} G^r(x, y)\, d\mu(y)$ и гармонической функции w в B_r. Из свойства 2) теперь следует, что

$$\lim_{\rho \to r} \mathfrak{M}_v^\rho(x_0) = \lim_{\rho \to r} \mathfrak{M}_w^\rho(x_0), \quad \rho < r,$$

т. е. $\mathfrak{M}_v^r(x_0) = w(x_0)$. Так как интеграл $I_v^{B_r}$ является наибольшей гармонической минорантой функции v в B_r, $I_v^{B_r}$ мажорирует w и, следовательно, $w = I_v^{B_r}$.

Теорема представления Рисса (глобальная форма). *Пусть* v — *супергармоническая функция в шаре* B *с ассоциированной мерой* $\mu = -\Delta v / \varphi_n$ (см. локальную форму теоремы). *Для того чтобы потенциал Грина меры* μ *в* B *был супергармонической функцией, необходимо и достаточно, чтобы в* B *существовала гармоническая миноранта функции* v. *В этом случае в любой точке* $x \in B$ *справедливо равенство*

$$v(x) = \int_B G(x, y)\, d\mu(y) + v^*(x), \tag{5}$$

где $v^*(x)$ *обозначает наибольшую гармоническую миноранту функции* v *в* B.

Для доказательства достаточно перейти к пределу при $r \to R$ в формуле (4) [ср. гл. II, § 8].

Замечания. 1) Используя решение задачи Дирихле в кольце, можно дать такое же доказательство, как в общем случае [см. гл. IX, § 5, где обобщается формула (5)].

2) Рассуждая непосредственно или используя предыдущий результат, можно получить, что если v — супергармоническая функция во всем R^n ($n \geqslant 3$) и имеет гар-

моническую миноранту в R^n, то

$$v(x) = \int_{R^n} h(\| x-y \|)\, d\mu(y) + v^*(x) =$$

$$= \int_{R^n} \| x-y \|^{2-n}\, d\mu(y) + v^*(x),$$

где μ — ассоциированная мера, v^* — наибольшая гармоническая миноранта v в R^n. В частности, наибольшей гармонической минорантой потенциала положительной меры является тождественный нуль.

§ 4. Закон взаимности

Пусть μ и ν — две положительные меры, имеющие в случае $n=2$ компактный носитель, U^μ и U^ν — их потенциалы. В силу симметрии функции h имеем

$$\int_{R^n} U^\mu\, d\nu = \int_{R^n} U^\nu\, d\mu.$$

Этот закон легко обобщается на потенциалы Грина.

Применения. а) Пусть μ и ν — положительные меры с компактным носителем. Если потенциал U^ν локально ограничен, то U^μ ν-интегрируем.

Например, если ν — мера Лебега на ограниченном многообразии размерности $n-1$, вложенном в R^n, то можно показать, что потенциал этой меры конечен и непрерывен, а следовательно, и ограничен на любом компактном множестве; отсюда вытекает, что потенциал U^μ ν-интегрируем, какова бы ни была положительная мера μ с компактным носителем. Для многообразия размерности $n-2$ потенциал U^ν бесконечен; *такое многообразие является полярным множеством.*

б) Пусть μ_1 и μ_2 — положительные меры с компактными носителями в R^n, $n \geqslant 3$. *Если $U^{\mu_1} \leqslant U^{\mu_2}$, то $\| \mu_1 \| \leqslant \| \mu_2 \|$.* В самом деле, пусть ν — равномерно распределенная масса на сфере $S(0, R)$ достаточно большого радиуса, причем $U^\nu = 1$ в $B(0, R)$. Тогда

$$\|\mu_1\| = \int U^\nu d\mu_1 = \int U^{\mu_1} d\nu \leqslant \int U^{\mu_2} d\nu = \int U^\nu d\mu_2 = \|\mu_2\|.$$

Этот принцип можно назвать *принципом положительности масс* (если провести рассуждение для разности $\mu_2 - \mu_1$). Его можно распространить на потенциалы Грина, не равные тождественно $+\infty$, даже в случае $n=2$ и без ограничений на компактность носителя.

§ 5. Непрерывность потенциала на носителе масс

Следующий результат, принадлежащий Эвансу и Василеско (1933 г.), весьма важен. В общей теории потенциала (см. гл. VI) он является почти аксиомой.

Теорема. *Пусть μ — положительная мера с компактным носителем K. Если сужение V потенциала U^μ на K непрерывно в точке $x_0 \in K$, то U^μ непрерывен в точке x_0 (в пространстве).*

Утверждение очевидно, если $U^\mu(x_0) = +\infty$. Если $U^\mu(x_0) < +\infty$, то для доказательства используется следующая лемма.

Лемма. *Пусть μ — положительная мера с компактным носителем K. Пусть x — произвольная точка R^n и y — ближайшая к x точка K. Тогда при $n \geqslant 3$ имеем*

$$U^\mu(x) \leqslant 2^{n-2} U^\mu(y).$$

В самом деле, для любой точки $z \in K$ имеем $\|x-y\| \leqslant \leqslant \|x-z\|$ и $\|y-z\| \leqslant \|x-y\| + \|x-z\| \leqslant 2\|x-z\|$. Следовательно, $\|x-z\|^{2-n} \leqslant 2^{n-2}\|y-z\|^{2-n}$, а отсюда интегрированием по z получаем неравенство $U^\mu(x) \leqslant 2^{n-2} U^\mu(y)$.

В случае плоскости имеет место неравенство $U^\mu(x) \leqslant \leqslant U^\mu(y) + \|\mu\| \log 2$.

Рассмотрим теперь точку $x_0 \in K$, в которой функция V конечна и непрерывна; предположим, например, что $n \geqslant 3$. Пусть B — шар с центром x_0. Потенциал сужения μ_{CB} меры μ на CB непрерывен в B (это гармоническая функция). Пусть дано $\varepsilon > 0$; можно выбрать шар B настолько малым, чтобы потенциал сужения меры μ на B в точке x_0 был меньше ε. Тогда существует такой шар

B' с центром x_0, что потенциал сужения μ на B меньше 2ε в каждой точке y множества $B' \cap K$ (непрерывность V).

Пусть x — произвольная точка и y — ближайшая к x точка K; из неравенства $\|x - x_0\| \leqslant \eta$ вытекает, что

$$\|y - x_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x - y\| \leqslant 2\|x - x_0\| \leqslant 2\eta.$$

Следовательно, если точка x достаточно близка к x_0, то y принадлежит B' и, согласно лемме, потенциал сужения μ_B меры μ на B в точке x меньше $2^{n-2} \cdot 2\varepsilon = 2^{n-1}\varepsilon$. Из неравенства

$$|U^\mu(x) - U^\mu(x_0)| \leqslant |U^{\mu CB}(x) - U^{\mu CB}(x_0)| +$$
$$+ |U^{\mu_B}(x)| + |U^{\mu_B}(x_0)|$$

теперь вытекает, что потенциал U^μ непрерывен в точке x_0.

В случае плоскости доказательство проводится аналогично.

§ 6. Преобразования пространства

Пусть E и F — два компактных множества в пространстве R^n. Если μ — положительная мера на E и φ — некоторое μ-измеримое отображение E в F, то через ν обозначим образ μ, определяемый для борелевских множеств e равенством $\nu(e) = \mu[\varphi^{-1}(e)]$.

а) Если φ — сжимающее отображение, то $U^\nu[\varphi(x)] \geqslant U^\mu(x)$ для любой точки $x \in E$.

б) Предположим, что для любой неподвижной точки y, т. е. такой, что $\varphi(y) = y$, неравенство

$$\|\varphi(x) - y\| \leqslant K\|x - y\|$$

выполняется, какова бы ни была точка $x \in E$. Тогда для R^n, $n \geqslant 3$, имеем

$$U^\nu(y) \geqslant \frac{1}{K^{n-2}} U^\mu(y),$$

а для R^2 —

$$U^\nu(y) \geqslant U^\mu(y) + \|\mu\| \cdot \log \frac{1}{K}.$$

Частным случаем отображения типа б) является борелевская проекция множества E на F, т. е. борелевское отображение, которое точке $x \in E$ ставит в соответствие ближайшую к x точку F. Такое отображение всегда существует, согласно Шоке. Заметим, что это очевидно, если F — выпуклое множество (например, линейное многообразие), так как в этом случае существует единственная ближайшая точка; при этом проекция является сжимающим отображением. Доказательство проводится также элементарно, если F образовано, например, из конечного числа замкнутых шаров.

Примером отображения со свойством а) является сжатие φ плоскости R^2 в полупрямую, т. е. отображение, которое точке с полярными координатами $r \geqslant 0$ и θ ставит в соответствие точку с координатами r и 0. Если ν — образ положительной меры μ с компактным носителем при отображении φ, то для всех x имеем $U^\nu[\varphi(x)] \geqslant$ $\geqslant U^\mu(x)$ и $U^\nu(0) = U^\mu(0)$.

Применения. 1) Борелевская сжимающая проекция полярного множества дает полярное множество.

2) Пусть E — *ограниченное полярное множество* и μ — положительная мера с компактным носителем, потенциал которой равен $+\infty$ на E. Построив борелевскую проекцию[1]) компактного носителя на $\bar{E}$, получим в качестве образа меры μ *меру, распределенную на* $\bar{E}$, *потенциал которой равен* $+\infty$ *на* E. В случае компактного множества E этот результат был получен Эвансом. С другой стороны, Шоке доказал, что если E есть множество точек бесконечности некоторого потенциала (т. е. по терминологии, введенной Дени, E есть полярное мно-

[1]) Если не опираться на общую теорему существования борелевской проекции, то можно обойтись частным случаем, относящимся к объединению замкнутых шаров. Пусть A_ρ — объединение конечного числа замкнутых шаров радиуса ρ с центрами в точках из $\bar{E}$, таких, что концентрические шары радиуса $\rho/2$ покрывают $\bar{E}$. Спроектируем на A_ρ массы μ, находящиеся вне $\bar{E}$, и заменим массу, попадающую на каждую сферу, равной массой, находящейся в центре (массы на пересечении сфер рассматриваем только один раз). Операция повторяется с множеством $A_{\rho/2} \subset A_\rho$ и массами μ, расположенными на множестве $\bar{A}_\rho - A_{\rho/2}$, в результате чего появляются новые точечные массы на $\bar{E}$, и т. д. Объединение этих точечных масс и масс, первоначально расположенных на $\bar{E}$, дает искомую меру.

жество типа G_δ), то существует положительная мера на E, потенциал которой равен $+\infty$ в каждой точке из E и конечен в CE (см. библиографию).

Замечание. Из результата Эванса следует, что если положительная мера $\mu > 0$ распределена на компактном полярном множестве E, то ее потенциал неограничен на E. Действительно, если U^μ ограничен на E и ν — положительная мера на E, потенциал которой бесконечен в каждой точке E, то

$$\int U^\mu d\nu = \int U^\nu d\mu,$$

а это приводит к противоречию.

Отсюда вытекает, что $U^\mu = +\infty$ хотя бы в одной точке из E. В противном случае пусть μ_n — сужение меры μ на компактное подмножество E, где $U^\mu \leqslant n$. Потенциал U^{μ_n} должен быть тогда ограничен на замкнутом полярном носителе меры μ_n, откуда следует, что $\mu_n \equiv 0$ и $\mu = \sum \mu_n = 0$.

Следствие. *Если для положительной меры μ некоторое полярное множество имеет внутреннюю строго положительную меру, то потенциал U^μ принимает значение $+\infty$ хотя бы в одной точке этого множества.*

БИБЛИОГРАФИЯ

См. работы И. И. Привалова, Т. Радо и Ф. Рисса, указанные в гл. II.

Brelot M., Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *J. math. pures et appl.*, **19** (1940), 319—337.

Evans G. C., Potentials of positive mass, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1937), 226—253; **38**, 201—236.

*Evans G. C., Modern methods of analysis in potential theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1937, 481—502.

*Evans G. C., The Logarithmic Potential, Discontinuous Dirichlet and Neumann Problems, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1927.

Schwartz L., Théorie des distributions, Paris, Hermann, 1950.

Vasilesco F., La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet, Paris, Hermann, 1938.

Глава V

КЛАССИЧЕСКИЕ И ОБЩИЕ ЕМКОСТИ

Первая часть

Классические емкости Грина в шаре

§ 1. Емкостный потенциал и емкость компактного множества

Пусть K — компактное множество, содержащееся в шаре $B=B(x_0, R)$ пространства R^n. Обозначим через $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_K$ множество положительных супергармонических функций на B, для которых единица является минорантой на K. Введем в рассмотрение функцию $W_K=\inf v$, $v \in \mathfrak{F}$; W_K есть супермедианная функция, равная единице на K и не превосходящая единицы на B (поскольку постоянная $v \equiv 1$ принадлежит $\mathfrak{F}$). Регуляризация $\widehat{W}_K$ функции W_K является супергармонической функцией; мы будем обозначать ее через V_K.

Как W_K, так и V_K являются гармоническими функциями в дополнении $B-K$ к множеству K. В самом деле, пусть $b \subset B$ — некоторый шар, не имеющий точек пересечения с K. Для каждой функции $v \in \mathfrak{F}$ можно построить функцию v_b, равную v на множестве $B-K-b$ и равную интегралу Пуассона I_v^b в b; v_b принадлежит $\mathfrak{F}$ и мажорируется функцией v. Таким образом, в шаре b функция W_K есть нижняя огибающая фильтрующегося влево семейства гармонических функций $\{v_b\}$; следовательно, W_K есть гармоническая функция (гл. I, § 2).

Кроме того, в каждой точке y сферы $\partial B=S(x_0, R)$ выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{x \to y} V_K(x)=0$. В самом деле, пусть $B'=B(x_0, r)$, $r<R$, — шар, содержащий K. Функция

$$\frac{h(\|x-x_0\|)-h(R)}{h(r)-h(R)}$$

равна нулю на ∂B и 1 на $\partial B'$; продолжая эту функцию значениями 1 внутрь B', получаем функцию из $\mathfrak{F}$, равную нулю на ∂B. Отсюда следует, что нуль является наибольшей гармонической минорантой функции V_K и V_K есть потенциал Грина в B. Так как на $B-K$ этот потенциал Грина есть гармоническая функция, носитель ассоциированной положительной меры должен содержаться в K.

Функция V_K есть наибольший потенциал Грина положительной меры с носителем, содержащимся в K, мажорируемый единицей в B.

В самом деле, пусть V — некоторый потенциал Грина положительной меры, носитель которой содержится в K, причем $V \leqslant 1$ в B; V есть гармоническая функция в $B-K$. Соотношения $\lim\limits_{x \to y} V(x)=0$ и $\overline{\lim\limits_{x \to z}}\, V(x) \leqslant 1$ выполняются соответственно для каждой точки $y \in \partial B$ и $z \in \partial K$. Следовательно, в каждой точке y границы множества $B-K$ выполняется соотношение $\underline{\lim\limits_{x \to y}}\, [v(x)-V(x)] \geqslant 0$, $x \in B-K$, где v — произвольная функция из $\mathfrak{F}$. Отсюда вытекает, что любая функция $v \in \mathfrak{F}$ мажорирует V в K и на $B-K$ (гл. II, § 1). Значит, W_K мажорирует V и $V \leqslant V_K$.

Определения. *Емкостным потенциалом* компактного множества K, содержащегося в шаре B, называется наибольший потенциал Грина положительной меры с носителем, содержащимся в K, мажорируемый единицей в B.

Общая масса $\mathfrak{C}(K)=\|\mu\|$ ассоциированной меры μ емкостного потенциала называется *емкостью* множества K, *емкостной мерой* или *емкостным распределением*.

Согласно предыдущему, емкостный потенциал V_K является регуляризацией супермедианной функции $W_K = \inf\limits_{v \in \mathfrak{F}} v$. Так как W_K равна единице на K, равенство $V_K(x)=1$ выполняется почти всюду на K. Можно также показать, что множество $\mathfrak{F}$, а следовательно, и емкостный потенциал не изменяются, если K заменить компактным дополнением к связной компоненте множества $B-K$, граница которой содержит ∂B.

§ 2. Свойства емкости и емкостного потенциала

1) Свойства W_K и V_K.

а) Отображение $K \to W_K$ является *возрастающим*, т. е. если K и K' — два компактных множества, лежащих в B, то включение $K \subset K'$ влечет за собой неравенство $W_K \leqslant W_{K'}$. Отсюда следует, что отображение $K \to V_K$ также является возрастающим.

В самом деле, имеем, очевидно, $\mathfrak{F}_K \subset \mathfrak{F}_{K'}$, откуда вытекает, что $W_K \leqslant W_{K'}$.

б) Отображение $K \to W_K$ *непрерывно справа*. Это означает, что если точка x фиксирована, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество ω, содержащее K и такое, что для любого компактного множества K', $K \subset K' \subset \omega$, выполняется неравенство

$$W_{K'}(x) - W_K(x) < \varepsilon.$$

Прежде всего установим, что указанное свойство равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} W_{K_n} = W_{\bigcap K_n}$ для любой убывающей последовательности компактных множеств K_n. В самом деле, если последнее утверждение справедливо, то, очевидно, свойство имеет место. Наоборот, если последнее утверждение несправедливо, то при помощи последовательности открытых множеств $\omega_n \supset \bar{\omega}_{n+1}$, $\bigcap \omega_n = K$, можно построить убывающую последовательность компактных множеств K_n с пересечением K, такую, что $W_{K_n}(x) > W_K(x) + \varepsilon$.

Теперь, для того чтобы установить соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} W_{K_n} = W_{\bigcap K_n}$, заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} W_{K_n}$ есть супермедианная функция, гармоническая в $B - K$, равная 1 на K и 0 на ∂B; отсюда получаем, что $\widehat{\lim\limits_{n\to\infty} W_{K_n}} \leqslant V_K$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} W_{K_n} \geqslant W_K$, получаем, что $\widehat{\lim\limits_{n\to\infty} W_{K_n}} = V_K$. Рассматривая теперь отдельно точки K и CK, находим, что $\lim\limits_{n\to\infty} W_{K_n} = W_K$.

в) Неравенство

$$W_{K_1 \cup K_2} + W_{K_1 \cap K_2} \leqslant W_{K_1} + W_{K_2}$$

выполняется для любых компактных множеств K_1, K_2 из B, и аналогичное неравенство имеет место для V (свойство *сильной субаддитивности*).

Это неравенство выполняется в любой точке K_1 или K_2, так как функция $W_{K_1 \cap K_2}$ является минорантой для W_{K_1} и W_{K_2}. Для того чтобы проверить справедливость неравенства для точек множества $B-(K_1 \cap K_2)$, заметим, что функции W полунепрерывны сверху, откуда для $x \in B-(K_1 \cup K_2)$, $y \in \partial(K_1 \cup K_2)$ имеем

$$\varlimsup_{x \to y} [W_{K_1 \cup K_2}(x) + W_{K_1 \cap K_2}(x)] \leqslant$$
$$\leqslant W_{K_1 \cup K_2}(y) + W_{K_1 \cap K_2}(y) \leqslant W_{K_1}(y) + W_{K_2}(y).$$

Если v_1, v_2 — положительные супергармонические функции, мажорирующие 1 соответственно на K_1, K_2, то левая часть рассматриваемого неравенства мажорируется суммой $v_1(y)+v_2(y)$. В силу принципа максимума отсюда получаем, что в $B-(K_1 \cup K_2)$ выполняется неравенство

$$W_{K_1 \cup K_2} + W_{K_1 \cap K_2} \leqslant v_1 + v_2,$$

доказывающее сформулированное утверждение.

2) **Свойства емкости.** Согласно определению, аналогичные свойства для емкости можно получить, используя то обстоятельство, что из неравенства для потенциалов Грина положительных масс с компактными носителями вытекает неравенство для общих масс [гл. IV, § 4, применение б)].

В этом весьма простом случае шара можно также рассмотреть поток внутрь ∂B потенциала U^μ меры μ с компактным носителем; этот поток равен $\varphi_n \mu(B)$. Отсюда находим:

Емкость компактного множества K есть верхняя грань общих масс $\mu(K)$ положительных мер μ, носители которых принадлежат K и потенциалы Грина которых не превосходят единицы.

Используя это характеристическое свойство или исходя непосредственно из определения, можно показать, что для того, чтобы компактное множество K имело емкость нуль, необходимо и достаточно, чтобы потенциал любой положительной меры $\mu > 0$ на K был неограниченным.

Также непосредственно выводятся следующие свойства.

1) *Возрастание емкости*: если K и K' — компактные множества из B, то включение $K \subset K'$ влечет за собой неравенство $\mathfrak{C}(K) \leqslant \mathfrak{C}(K')$.

2) *Свойство непрерывности справа* выражается аналогично соответствующему свойству для емкостных потенциалов. Оно также равносильно тому, что если $\{K_n\}$ — убывающая последовательность компактных множеств из B с непустым компактным пересечением $K = \bigcap K_n$, то $\mathfrak{C}(K) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{C}(K_n)$.

В самом деле, используя шар $B' \supset K_n$, меру ν, распределенную только в тех точках $B' - K$, где $W_K = G\mu$, и емкостные меры μ_n и μ множеств K_n и K, получаем

$$\mathfrak{C}(K_n) = \int\limits_{B'} G\nu \, d\mu_n = \int\limits_{B'} G\mu_n \, d\nu \to \int\limits_{B'} W_K \, d\nu = \int\limits_{B'} G\mu \, d\nu = \mathfrak{C}(K).$$

Можно также использовать поток через сферу $\partial B'$.

3) *Свойство сильной субаддитивности*: для любых компактных множеств K_1 и K_2 из B имеет место неравенство

$$\mathfrak{C}(K_1 \cup K_2) + \mathfrak{C}(K_1 \cap K_2) \leqslant \mathfrak{C}(K_1) + \mathfrak{C}(K_2).$$

§ 3. Емкости произвольных множеств

Емкость есть положительная числовая функция $K \to \mathfrak{C}(K)$, определенная на множестве компактных частей шара B. Мы продолжим эту функцию на более обширное множество частей B.

А) **Емкость открытых множеств.** *Емкостью открытого множества* ω, лежащего в B, называется верхняя грань емкостей компактных множеств K, содержащихся в ω:

$$\mathfrak{C}(\omega) = \sup \mathfrak{C}(K), \quad K \subset \omega.$$

Б) **Внешняя емкость произвольного множества.** Пусть E — произвольная часть B; *внешней емкостью E* называется нижняя грань емкостей открытых множеств ω, лежащих в B и содержащих E:

$$\mathfrak{C}^*(E) = \inf \mathfrak{C}(\omega), \quad \omega \supset E.$$

Рассмотрим компактное множество K, лежащее в B. Для любого $\varepsilon > 0$ существует открытая окрестность ω_0 множества K, такая, что из включений $K \subset K' \subset \omega_0$ вытекает неравенство $\mathfrak{C}(K') - \mathfrak{C}(K) \leqslant \varepsilon$. Отсюда получаем

$$\mathfrak{C}(K) \leqslant \mathfrak{C}^*(\omega_0) = \sup_{K' \subset \omega_0} \mathfrak{C}(K') \leqslant \mathfrak{C}(K) + \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{C}(K) \leqslant \mathfrak{C}^*(K) = \inf_{\omega \supset K} \mathfrak{C}(\omega) \leqslant \mathfrak{C}(K) + \varepsilon.$$

Поскольку число ε произвольно, $\mathfrak{C}(K) = \mathfrak{C}^*(K)$. Таким образом, *внешняя емкость компактного множества совпадает с его емкостью.*

Теорема А. Картана. *Для того чтобы часть E шара B была полярным множеством, необходимо и достаточно, чтобы внешняя емкость E равнялась нулю.*

Пусть E — полярное множество. Ассоциированной супергармонической функции соответствует, в силу теоремы разложения Рисса, положительная ограниченная мера μ, причем потенциал Грина $G\mu$ в B бесконечен на E. Так как $G\mu$ полунепрерывен снизу, множество ω_α точек из B, в которых $G\mu$ строго больше числа $\alpha > 0$, представляет собой открытую окрестность множества E. Пусть K — любое компактное множество, содержащееся в ω_α; так как $G\mu > \alpha$ на K и $G\mu_K \leqslant 1$, где μ_K — емкостное распределение для K, имеем

$$\mathfrak{C}(K) = \int_B d\mu_K \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_B G\mu \, d\mu_K = \frac{1}{\alpha} \int_B G\mu_K \, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha} \int_B d\mu = \frac{\|\mu\|}{\alpha}.$$

Таким образом, для любого $\alpha > 0$ имеем

$$\mathfrak{C}(\omega_\alpha) \leqslant \frac{\|\mu\|}{\alpha},$$

а следовательно,

$$\mathfrak{C}^*(E) \leqslant \inf_{\alpha > 0} \mathfrak{C}(\omega_\alpha) = 0.$$

Наоборот, рассмотрим множество E, внешняя емкость которого равна нулю, $\mathfrak{C}^*(E)=0$. Чтобы установить локальное свойство полярности, можно ограничиться случаем, когда в B существуют окрестность точки y и окрестность ω множества E, не имеющие общих точек. Так как $\mathfrak{C}^*(E)=0$, для любого натурального числа n существует открытая окрестность $\omega_n \subset \omega$ множества E, емкость которой меньше $1/n^2$; существует также возрастающая последовательность $\{K_p\}$ компактных множеств $K_p \subset K_{p+1}$, такая, что $\omega_n = \bigcup K_p$. Емкостный потенциал множества K_p есть супергармоническая функция, равная 1 на K_p; следовательно, $w_n = \lim\limits_{p\to\infty} V_{K_p}$ есть супергармоническая функция, равная 1 на ω_n. Если λ — некоторое число, такое, что $\lambda \geqslant \sup\limits_{x\in\omega} G(y, x)$, то для любого p имеем

$$V_{K_p}(y) = \int\limits_B G(y, x)\, d\mu_{K_p}(x) \leqslant \frac{\lambda}{n^2},$$

так как $\int\limits_B d\mu_{K_p} \leqslant 1/n^2$. Следовательно, $w_n(y) \leqslant \lambda/n^2$. Таким образом, каждому натуральному числу n поставлены в соответствие открытая окрестность ω_n множества E и положительная супергармоническая функция w_n, равная 1 на ω_n и такая, что $w_n(y) \leqslant \lambda/n^2$. Ряд с общим членом w_n сходится к супергармонической в широком смысле функции $v = \sum w_n$, которая конечна в точке y и, следовательно, является супергармонической. В любой точке $x \in E$ для всех n имеет место равенство $w_n(x)=1$ и, следовательно, $v(x) = +\infty$. Отсюда вытекает, что E — полярное множество.

Замечание. Изложенная теория была построена (главным образом, для локальных рассмотрений) для шара таким образом, чтобы она была применима в случае плоскости и чтобы подготовить расширение на более общий случай ограниченной области (см. далее) и даже на пространства Грина[1]) — многообразия, аналогичные, в основном, римановым поверхностям, на которых существует

[1]) См. указания на стр. 172.

функция Грина. Однако она непосредственно применима к евклидову пространству R^n при $n \geqslant 3$, для которого функция Грина имеет вид $G(x, y) = \| x - y \|^{2-n}$.

Вторая часть

Емкость Шоке

§ 4. Общее определение емкости

Пусть Ω — отделимое топологическое пространство; через $\mathfrak{K}$ обозначим множество компактных частей пространства Ω. *Емкостью Шоке* в Ω называется конечная числовая функция $\mathfrak{C}(X)$, определенная на $\mathfrak{K}$ и удовлетворяющая следующим трем аксиомам.

1) Аксиома возрастания. *Для любых компактных множеств X и Y из включения $X \subset Y$ вытекает неравенство $\mathfrak{C}(X) \leqslant \mathfrak{C}(Y)$.*

2) Аксиома непрерывности справа. *Для любого компактного множества X и числа $\varepsilon > 0$ существует открытая окрестность ω множества X, такая, что из включений $Y \in \mathfrak{K}$ и $X \subset Y \subset \omega$ вытекает неравенство $\mathfrak{C}(Y) - \mathfrak{C}(X) \leqslant \varepsilon$.*

Как в § 2, отсюда получается следующий результат: для любой убывающей последовательности $\{X_n\}$ компактных множеств X_n имеют место соотношения

$$\mathfrak{C}\left(\bigcap X_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{C}(X_n) = \inf_n \mathfrak{C}(X_n).$$

Однако, вообще говоря, это свойство не равносильно теперь аксиоме непрерывности справа.

3) Аксиома сильной субаддитивности. *Для любых компактных множеств X и Y выполняется неравенство*

$$\mathfrak{C}(X \cup Y) + \mathfrak{C}(X \cap Y) \leqslant \mathfrak{C}(X) + \mathfrak{C}(Y).$$

Примеры. Наряду с положительными мерами Радона, мы укажем два важных примера.

1) Емкость Грина в шаре B.

2) Если x — точка из B и K — компактное множество из B, то $W_K(x)$, как функция от K, есть емкость Шоке.

Заметим, что если K изменяется, оставаясь в некотором компактном множестве, лежащем в $B-\{x\}$, то $\mathfrak{C}(K)$ и $W_K(x)$ [или $V_K(x)$] обращаются в нуль одновременно; если эти функции не равны нулю тождественно, то их отношение остается заключенным между двумя строго положительными числами.

§ 5. Последовательные разности

Пусть X и $A_1, A_2, \ldots$ — компактные множества пространства Ω. Положим

$$V_1(X;\ A_1)=\mathfrak{C}(X)-\mathfrak{C}(X\cup A_1)$$

и, далее,

$$V_2(X;\ A_1,\ A_2)=V_1(X;\ A_1)-V_1(X\cup A_2;\ A_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V_{n+1}(X;\ A_1,\ \ldots,\ A_{n+1})=V_n(X;\ A_1,\ \ldots,\ A_n)-\\ -V_n(X\cup A_{n+1};\ A_1,\ \ldots,\ A_n).$$

Если $V_{n+1}(X;\ A_1,\ \ldots,\ A_{n+1})\leqslant 0$ для любого компактного множества A_{n+1}, то для $A_{n+1}=A_n$, в частности, получаем

$$V_n(X;\ A_1,\ \ldots,\ A_n)\leqslant V_n(X\cup A_n;\ A_1,\ \ldots,\ A_n)=0.$$

Следовательно, если $V_n(X;\ A_1,\ \ldots,\ A_n)\leqslant 0$ для любых компактных множеств $A_1, \ldots, A_n$, то $V_i(X;A_1, \ldots, A_i)\leqslant 0$ для всех $i\leqslant n$ и для любых компактных множеств $A_1, \ldots$ $\ldots, A_i$.

Первая аксиома о возрастании емкости равносильна, очевидно, следующему утверждению: *для любых компактных множеств X и A_1 выполняется неравенство $V_1(X;\ A_1)\leqslant 0$.*

Докажем, что объединение аксиом 1 и 3 (возрастания и сильной субаддитивности) равносильно следующему утверждению: *для любых компактных множеств X, A_1, A_2 выполняется неравенство $V_2(X;\ A_1,\ A_2)\leqslant 0$.*

Если аксиома 3 выполняется, то, заменяя X на $X\cup A_1$ и Y на $X\cup A_2$, получаем

$$\mathfrak{C}[(X\cup A_1)\cap(X\cup A_2)]+\mathfrak{C}(X\cup A_1\cup A_2)\leqslant\\ \leqslant\mathfrak{C}(X\cup A_1)+\mathfrak{C}(X\cup A_2),$$

то есть

$$\mathfrak{C}[X \cup (A_1 \cap A_2)] + \mathfrak{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \leqslant \mathfrak{C}(X \cup A_1) + \mathfrak{C}(X \cup A_2).$$

Если, кроме того, выполняется аксиома 1, то мы имеем $\mathfrak{C}[X \cup (A_1 \cap A_2)] \geqslant \mathfrak{C}(X)$, откуда

$$\mathfrak{C}(X) + \mathfrak{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \mathfrak{C}(X \cup A_1) + \mathfrak{C}(X \cup A_2),$$

и, следовательно, $V_2(X;\ A_1,\ A_2) \leqslant 0$.

Наоборот, предположим, что $V_2(X;\ A_1,\ A_2) \leqslant 0$ для любых компактных множеств X, A_1, A_2, т. е.

$$\mathfrak{C}(X) + \mathfrak{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \mathfrak{C}(X \cup A_1) + \mathfrak{C}(X \cup A_2).$$

Если A и B — данные компактные множества, то, полагая $X = A \cap B$, $A_1 = A$ и $A_2 = B$, получаем

$$\mathfrak{C}(A \cap B) + \mathfrak{C}(A \cup B) \leqslant \mathfrak{C}(A) + \mathfrak{C}(B).$$

Аксиома 3 выполняется. Кроме того, из нашего предположения вытекает, что $V_1(X;\ A_1) \leqslant 0$ для любых компактных множеств X и A_1, а это равносильно аксиоме 1.

Таким образом, систему аксиом 1, 2, 3, приведенных выше, можно заменить следующей равносильной системой.

α) Аксиома 2 непрерывности справа.

β) *Неравенство* $V_2(X;\ A_1,\ A_2) \leqslant 0$ *выполняется для любых компактных множеств* X, A_1, A_2.

Более сильную систему аксиом можно получить, заменяя аксиомы 1 и 3 следующим утверждением: *неравенство* $V_n(X;\ A_1,\ \ldots,\ A_n) \leqslant 0$ *выполняется для любых компактных множеств* X, A_1, ..., A_n *при фиксированном* $n \geqslant 2$. Действительно, неравенство $V_n(X;\ A_1,\ \ldots,\ A_n) \leqslant 0$ влечет за собой неравенства $V_p(X;\ A_1,\ \ldots,\ A_p) \leqslant 0$ для всех $p \leqslant n$.

Емкость $\mathfrak{C}$, удовлетворяющая аксиоме непрерывности справа и условию $V_n \leqslant 0$, называется *альтернированной емкостью порядка* n. Если $\mathfrak{C}$ — альтернированная емкость порядка n при любом натуральном n, то $\mathfrak{C}$ называется *альтернированной емкостью бесконечного порядка*. Именно этим свойством обладают примеры, приведенные в конце § 4.

Другая форма аксиомы с неравенством. *Следующие два утверждения равносильны:*

а) *неравенство* $V_2(X;\ A_1,\ A_2) \leqslant 0$ *выполняется для любых компактных множеств* X, A_1, A_2;

б) *для любых компактных множеств* A, K *и* $a \subset A$ *выполняется неравенство*

$$\mathfrak{C}(A \cup K) - \mathfrak{C}(A) \leqslant \mathfrak{C}(a \cup K) - \mathfrak{C}(a),$$

или

$$\mathfrak{C}(A \cup K) + \mathfrak{C}(a) \leqslant \mathfrak{C}(a \cup K) + \mathfrak{C}(A).$$

В самом деле, условие а) можно переписать так:

$$\mathfrak{C}(X) + \mathfrak{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \mathfrak{C}(X \cup A_1) + \mathfrak{C}(X \cup A_2),$$

откуда, полагая $A_1 = A$, $A_2 = K$ и $X = a \subset A$, получаем

$$\mathfrak{C}(a) + \mathfrak{C}(A \cup K) \leqslant \mathfrak{C}(A) + \mathfrak{C}(a \cup K).$$

Наоборот, если это последнее неравенство справедливо для любых компактных множеств A, K и $a \subset A$, то, полагая $a = X$, $A = X \cup A_1$, $K = A_2$, получаем

$$\mathfrak{C}(X) + \mathfrak{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \mathfrak{C}(X \cup A_1) + \mathfrak{C}(X \cup A_2),$$

т. е. $V_2(X;\ A_1,\ A_2) \leqslant 0$.

Применение. Из аксиомы β) вытекает следующее утверждение: для любых конечных семейств компактных множеств $\{A_i\}_{i \in I}$ и $\{a_i\}_{i \in I}$, таких, что $a_i \subset A_i$ для всех i, выполняется неравенство

$$\mathfrak{C}(\bigcup_i A_i) - \mathfrak{C}(\bigcup_i a_i) \leqslant \sum_i [\mathfrak{C}(A_i) - \mathfrak{C}(a_i)],$$

или

$$\mathfrak{C}(\bigcup_i A_i) + \sum_i \mathfrak{C}(a_i) \leqslant \mathfrak{C}(\bigcup_i a_i) + \sum_i \mathfrak{C}(A_i).$$

В самом деле, если сначала взять $I = \{1,\ 2\}$, то, согласно предыдущему,

$$\mathfrak{C}(A_1 \cup A_2) + \mathfrak{C}(a_1) \leqslant \mathfrak{C}(a_1 \cup A_2) + \mathfrak{C}(A_1),$$
$$\mathfrak{C}(A_2 \cup a_1) + \mathfrak{C}(a_2) \leqslant \mathfrak{C}(a_1 \cup a_2) + \mathfrak{C}(A_2),$$

откуда искомый результат получается путем сложения.

Общее неравенство можно доказать методом индукции, предполагая, что оно выполняется для $I=\{1, \ldots, n\}$ и рассматривая множества $\bigcup\limits_1^n A_i$, A_{n+1}, $\bigcup\limits_1^n a_i$ и a_{n+1}.

§ 6. Внутренняя емкость множества

Пусть A — некоторая часть пространства Ω. *Внутренней емкостью* $\mathfrak{C}_*(A)$ *множества* A называется верхняя грань емкостей компактных множеств K, содержащихся в A, $\mathfrak{C}_*(A)=\sup\limits_{K\subset A}\mathfrak{C}(K)$. Для любого компактного множества K справедливо равенство $\mathfrak{C}_*(K)=\mathfrak{C}(K)$.

Лемма. *Пусть ω_1, ω_2 — открытые множества и K — компактное множество, содержащееся в объединении $\omega_1\bigcup\omega_2$. Тогда существуют компактные множества $K_1\subset\omega_1$ и $K_2\subset\omega_2$, такие, что $K=K_1\bigcup K_2$.*

В самом деле, множества $K-K\bigcap\omega_1$ и $K-K\bigcap\omega_2$ замкнуты и не пересекаются; в нормальном пространстве K они имеют непересекающиеся открытые окрестности Ω_1 и Ω_2. Тогда компактные множества $K-\Omega_1$ и $K-\Omega_2$ отвечают условиям леммы.

Свойства. Для произвольных конечных семейств открытых множеств $\{A_i\}$ и $\{a_i\}$, таких, что $a_i\subset A_i$ для всех $i\in I$, выполняется неравенство

$$\mathfrak{C}_*(\bigcup_i A_i)+\sum_i\mathfrak{C}_*(a_i)\leqslant\mathfrak{C}_*(\bigcup_i a_i)+\sum_i\mathfrak{C}_*(A_i),$$

причем рассматриваемые емкости могут быть равны $+\infty$.

Пусть $I=\{1, 2\}$ и λ_i, Λ_i, θ — произвольные конечные числа, меньшие соответственно, чем $\mathfrak{C}_*(a_i)$, $\mathfrak{C}_*(A_i)$, $\mathfrak{C}_*(A_1\bigcup A_2)$. Выберем компактные множества γ_i, Γ_i, K, содержащиеся соответственно в a_i, A_i, $A_1\bigcup A_2$, так, чтобы удовлетворялись неравенства

$$\lambda_i<\mathfrak{C}(\gamma_i),\quad \Lambda_i<\mathfrak{C}(\Gamma_i),\quad \theta<\mathfrak{C}(K).$$

Согласно лемме, эти множества можно увеличить таким образом, чтобы при тех же обозначениях выполнялись соотношения $\gamma_i\subset\Gamma_i$ и $K=\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$. Из неравенства

$$\mathfrak{C}(\Gamma_1\bigcup\Gamma_2)+\mathfrak{C}(\gamma_1)+\mathfrak{C}(\gamma_2)\leqslant$$
$$\leqslant\mathfrak{C}(\gamma_1\bigcup\gamma_2)+\mathfrak{C}(\Gamma_1)+\mathfrak{C}(\Gamma_2)$$

теперь вытекает, что

$$\theta+\lambda_1+\lambda_2\leqslant \mathfrak{C}_*(a_1\bigcup a_2)+\mathfrak{C}_*(A_1)+\mathfrak{C}_*(A_2),$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

Общий случай получается методом индукции: предполагаем, что неравенство выполняется для $I=\{1, \ldots, n\}$, и составляем уже доказанное неравенство для множеств $\bigcup\limits_1^n a_i$, a_{n+1}, $\bigcup\limits_1^n A_i$, A_{n+1}. Если емкость $\mathfrak{C}_*(\bigcup\limits_1^n A_i)$ конечна, то то же самое имеет место для $\mathfrak{C}_*(\bigcup\limits_1^n a_i)$, и неравенство для $n+1$ индексов получается при почленном сложении двух указанных неравенств и упрощении. В противном случае сумма $\mathfrak{C}_*(\bigcup\limits_1^n a_i)+\sum\limits_1^n \mathfrak{C}_*(A_i)$ бесконечна и то же самое имеет место для $\mathfrak{C}_*(\bigcup\limits_1^{n+1} a_i)+\sum\limits_1^{n+1} \mathfrak{C}_*(A_i)$; следовательно, доказываемое неравенство выполняется.

§ 7. Внешняя емкость

Внешней емкостью $\mathfrak{C}^*(A)$ части A пространства Ω называется нижняя грань внутренних емкостей открытых множеств ω, содержащих A: $\mathfrak{C}^*(A)=\inf\limits_{\omega\supset A}\mathfrak{C}_*(\omega)$.

Поскольку внутренняя емкость возрастает, для любого открытого множества ω выполняется равенство $\mathfrak{C}_*(\omega)=\mathfrak{C}^*(\omega)$. Как в § 3, можно показать, что $\mathfrak{C}_*(K)=\mathfrak{C}^*(K)=\mathfrak{C}(K)$ для любого компактного множества K. Множество A называется *$\mathfrak{C}$-измеримым*, если $\mathfrak{C}^*(A)=\mathfrak{C}_*(A)$; эта величина обозначается $\mathfrak{C}(A)$. Открытые и компактные множества являются $\mathfrak{C}$-измеримыми.

Свойство. *Для любых конечных семейств $\{A_i\}_{i\in I}$ и $\{a_i\}_{i\in I}$ частей пространства Ω, таких, что $a_i\subset A_i$ для всех i, выполняется неравенство*

$$\mathfrak{C}^*(\bigcup_i A_i)+\sum_i \mathfrak{C}^*(a_i)\leqslant \mathfrak{C}^*(\bigcup_i a_i)+\sum_i \mathfrak{C}^*(A_i).$$

Если правая часть конечна, то ее можно сколь угодно точно приблизить суммой $\mathfrak{C}(\omega)+\sum_i \mathfrak{C}(\Omega_i)=\lambda$, где ω и Ω_i — подходящие открытые множества, содержащие соответственно $\bigcup_i a_i$ и A_i. В $\omega\bigcap\Omega_i$ выберем открытое множество ω_i, содержащее a_i. Число λ мажорирует сумму $\mathfrak{C}(\bigcup_i \omega_i)+\sum_i \mathfrak{C}(\Omega_i)$, а следовательно, также $\mathfrak{C}(\bigcup_i \Omega_i)+$ $+\sum_i \mathfrak{C}(\omega_i)$ и левую часть доказываемого неравенства.

Теорема. *Для любой возрастающей последовательности $\{\alpha_n\}$ частей α_n пространства Ω выполняется соотношение* $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{C}^*(\alpha_n)=\mathfrak{C}^*(\bigcup \alpha_n)$.

Рассмотрим сначала случай открытых множеств α_n; положим $\alpha=\bigcup \alpha_n$. Пусть число λ строго меньше емкости $\mathfrak{C}(\alpha)$. Существует компактное множество K, содержащееся в α и такое, что $\mathfrak{C}(K)\geqslant\lambda$. Так как $\{\alpha_n\}$ есть возрастающее открытое покрытие множества K, существует натуральное число n_0, такое, что для всех $n\geqslant n_0$ выполняется включение $K\subset\alpha_n$, а следовательно, и неравенства $\mathfrak{C}(\alpha_n)\geqslant\mathfrak{C}(K)\geqslant\lambda$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{C}(\alpha)=$ $=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{C}(\alpha_n)$.

Предположим теперь, что множества α_n произвольны. Теорема очевидна, если $\mathfrak{C}^*(\alpha_n)=+\infty$ для достаточно большого n. Предположим, что все емкости $\mathfrak{C}^*(\alpha_n)$ конечны. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел, такая, что ряд $\sum\varepsilon_n$ сходится, $\varepsilon=\sum\varepsilon_n$. Так как для каждого n существует такое открытое множество $\omega_n'\supset\alpha_n$, что $\mathfrak{C}(\omega_n')-\mathfrak{C}^*(\alpha_n)\leqslant\varepsilon_n$, имеем

$$\mathfrak{C}\left(\bigcup_1^p \omega_n'\right)\leqslant\mathfrak{C}^*\left(\bigcup_1^p \alpha_n\right)+\sum_1^p \varepsilon_n.$$

Отсюда, устремляя p к бесконечности, получаем, что $\mathfrak{C}(\bigcup\omega_n')\leqslant\lim_{n\to\infty}\mathfrak{C}^*(\alpha_n)+\varepsilon$ и $\mathfrak{C}^*(\alpha)\leqslant\lim_{n\to\infty}\mathfrak{C}^*(\alpha_n)+\varepsilon$, независимо от того, конечна емкость $\mathfrak{C}^*(\alpha)$ или нет. Из этого неравенства следует утверждение теоремы для всех случаев.

§ 8. $\mathfrak{C}\varphi$-измеримые множества

K-аналитические множества. Пусть Ω — отделимое топологическое пространство; часть A пространства Ω называется *K-аналитическим множеством*, если A есть непрерывный образ множества типа $K_{\sigma\delta}$, лежащего в некотором компактном пространстве[1]).

Это определение обобщает классическое определение аналитического множества как метризуемого непрерывного образа некоторого полного метрического пространства со счетным базисом. Как известно, аналитическое множество гомеоморфно множеству типа G_δ, содержащемуся в компактном метрическом пространстве. Но в компактном метрическом пространстве всякое множество типа G_δ есть множество типа $K_{\sigma\delta}$. Отсюда следует, что всякое классическое аналитическое множество является K-аналитическим.

Напомним, что в полном метрическом пространстве со счетным базисом всякое борелевское множество есть аналитическое множество.

Обобщенная емкость. *Обобщенной емкостью* в отделимом пространстве Ω называется (конечная или нет) числовая функция $\varphi(A)$, определенная на множестве частей A пространства Ω и удовлетворяющая следующим аксиомам.

1) Аксиома возрастания. *Из включения $A \subset A'$ вытекает неравенство $\varphi(A) \leqslant \varphi(A')$.*

2) *Для любой возрастающей последовательности $\{A_n\}$ частей Ω выполняется равенство $\varphi(\bigcup A_n) = \sup \varphi(A_n)$.*

3) *Для любой убывающей последовательности $\{K_n\}$ компактных множеств из Ω выполняется равенство*

$$\varphi(\bigcap K_n) = \inf \varphi(K_n).$$

Можно показать, что если $\mathfrak{C}$ — емкость Шоке в пространстве Ω, то соответствующая внешняя емкость есть обобщенная емкость (§ 7).

Пусть φ — обобщенная емкость в отделимом пространстве Ω; часть A пространства Ω называется $\mathfrak{C}\varphi$-*измери-*

---

[1]) Множество типа K_σ есть счетное объединение компактных множеств; множество типа $K_{\sigma\delta}$ — счетное пересечение множеств типа K_σ. Множество типа G_δ есть счетное пересечение открытых множеств.

мой, если $\varphi(A) = \sup_{K \subset A} \varphi(K)$, где K — компактное множество. В случае емкости Шоке $\mathfrak{C}$ это определение совпадает с данным в предыдущем параграфе.

Теорема $\mathfrak{C}\varphi$-измеримости. *Пусть φ — обобщенная емкость в отделимом пространстве Ω; любое K-аналитическое множество, содержащееся в некотором множестве типа K_σ пространства Ω, является $\mathfrak{C}\varphi$-измеримым.*

Лемма 1. *Всякое множество типа $K_{\sigma\delta}$ пространства Ω является $\mathfrak{C}\varphi$-измеримым.*

В самом деле, пусть $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ — множество типа $K_{\sigma\delta}$, $A_i = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_i^p$ для любого индекса i, $\{A_i^p\}_p$ — возрастающая последовательность компактных множеств.

Последовательность $\{A_1^n \cap A\}_n$ возрастает, и ее объединением является множество $A_1 \cap A = A$. Пусть $a < \varphi(A)$; так как, по аксиоме 2, $\sup \varphi[A_1^n \cap A] = \varphi(A)$, существует такой индекс p_1, что если $B_1 = A_1^{p_1} \cap A$, то $\varphi(B_1) > a$. Предположим, что определены такие натуральные числа $p_1, \ldots, p_{n-1}$, что если $B_k = A \cap A_1^{p_1} \cap \ldots \cap A_k^{p_k}$, то $\varphi(B_k) > a$ для $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Последовательность множеств $\{B_{n-1} \cap A_n^i\}_i$ возрастает и, поскольку $B_{n-1} \subset A \subset A_n$, имеет объединением множество $B_{n-1} \cap A_n = B_{n-1}$. Следовательно, $\sup_i \varphi(B_{n-1} \cap A_n^i) = \varphi(B_{n-1}) > a$ и существует такой индекс p_n, что если

$$B_n = B_{n-1} \cap A_n^{p_n} = A \cap A_1^{p_1} \cap \ldots \cap A_{n-1}^{p_{n-1}} \cap A_n^{p_n},$$

то $\varphi(B_n) > a$. Таким образом, можно построить последовательность $\{p_n\}$ и соответствующую последовательность $\{B_n\}$, такие, что $\varphi(B_n) > a$ для всех натуральных n. Для любого n положим

$$B'_n = A_1^{p_1} \cap A_2^{p_2} \cap \ldots \cap A_n^{p_n};$$

множество B'_n компактно и $B_n = A \cap B'_n \subset B'_n$, откуда $\varphi(B'_n) > a$. Последовательность $\{B'_n\}$ компактных множеств убывает, а следовательно, по аксиоме 3, $\varphi(\bigcap B'_n) = \inf \varphi(B'_n) \geqslant a$. Далее, $\bigcap B'_n = \bigcap A_n^{p_n} \subset \bigcap A_i = A$, так как $A_n^{p_n} \subset A_n$; $\bigcap B'_n$ есть компактное множество, содержащееся в A и, значит, $\sup\limits_{K\subset A}\varphi(K)\geqslant a$. Но a есть произвольное число, меньшее, чем $\varphi(A)$; отсюда вытекает, что $\varphi(A)=$ $=\sup\limits_{K\subset A}\varphi(K)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* Ω_0 — *отделимое пространство,* Ω — *отделимое пространство, снабженное обобщенной емкостью* φ, *и* f — *непрерывное отображение* Ω_0 *в* Ω. *Для любой части* A *пространства* Ω_0 *положим* $\psi(A)=$ $=\varphi[f(A)]$. *Числовая функция* $\psi(A)$ *есть обобщенная емкость в* Ω_0 *и из того, что* A *является* $\mathfrak{C}\psi$-*измеримым, вытекает, что* $f(A)$ *есть* $\mathfrak{C}\varphi$-*измеримое множество.*

а) Очевидно, что функция ψ возрастает.

б) Пусть $\{A_n\}$ — возрастающая последовательность частей пространства Ω_0. Тогда $\{f(A_n)\}$ есть возрастающая последовательность частей пространства Ω и $f(\bigcup A_n)=$ $=\bigcup f(A_n)$, откуда

$$\psi(\bigcup A_n)=\varphi[f(\bigcup A_n)]=\varphi[\bigcup f(A_n)]=$$
$$=\sup\varphi[f(A_n)]=\sup\psi(A_n).$$

в) Пусть $\{K_n\}$ — убывающая последовательность компактных множеств пространства Ω_0; тогда $\{f(K_n)\}$ есть убывающая последовательность компактных множеств пространства Ω. Имеет место равенство $f(\bigcap K_n)=\bigcap f(K_n)$. В самом деле, включение $f(\bigcap K_n)\subset\bigcap f(K_n)$ очевидно. Наоборот, пусть $x\in\bigcap f(K_n)$. Множество $f^{-1}(x)$ замкнуто, а значит, $\{f^{-1}(x)\bigcap K_n\}$ есть убывающая последовательность непустых компактных множеств пространства Ω_0 (мы предполагаем здесь, что множества K_n непусты при всех n). Отсюда вытекает, что $f^{-1}(x)\bigcap(\bigcap K_n)=$ $=\bigcap[f^{-1}(x)\bigcap K_n]$ есть непустое множество, т. е. существует по крайней мере одна точка $y\in\bigcap K_n$, такая, что $f(y)=x$; следовательно, $x\in f(\bigcap K_n)$ и $\bigcap f(K_n)=f(\bigcap K_n)$. Таким образом,

$$\psi(\bigcap K_n)=\varphi[f(\bigcap K_n)]=\varphi[\bigcap f(K_n)]=$$
$$=\inf\varphi[f(K_n)]=\inf\psi(K_n).$$

Тем самым доказано, что ψ есть обобщенная емкость в пространстве Ω_0.

Пусть теперь A — некоторая $\mathfrak{C}\psi$-измеримая часть пространства Ω_0. Для любого числа $\lambda < \psi(A) = \varphi[f(A)]$ существует содержащееся в A компактное множество K, такое, что $\varphi[f(K)] = \psi(K) \geqslant \lambda$. Тогда $f(K)$ есть содержащееся в $f(A)$ компактное множество, такое, что $\varphi[f(K)] \geqslant \lambda$. Это доказывает, что $f(A)$ есть $\mathfrak{C}\varphi$-измеримое множество.

Теорема $\mathfrak{C}\varphi$-измеримости вытекает из лемм 1 и 2. Рассмотрим K-аналитическое множество A, содержащееся в некотором компактном множестве отделимого пространства Ω, снабженного обобщенной емкостью φ; можно предполагать, что само Ω компактно. По определению, A есть образ множества B типа $K_{\sigma\delta}$, содержащегося в компактном множестве B_0, при непрерывном отображении f: $B_0 \to \Omega$. Обозначим через Γ график отображения f; A есть проекция Γ при проектировании $B_0 \times \Omega$ на Ω.

Так как отображение f непрерывно, его график Γ замкнут в $B \times \Omega$; отсюда следует, что $\Gamma = \overline{\Gamma} \cap (B \times \Omega)$, где $\overline{\Gamma}$ обозначает замыкание Γ в $B_0 \times \Omega$. Так как Ω и B_0 компактны, множество $\overline{\Gamma}$ компактно. Поскольку B — множество типа $K_{\sigma\delta}$ в B_0, $B \times \Omega$ есть множество типа $K_{\sigma\delta}$ в $B_0 \times \Omega$, а следовательно, и Γ есть множество типа $K_{\sigma\delta}$ в $B_0 \times \Omega$.

Согласно лемме 1, Γ есть $\mathfrak{C}\psi$-измеримое множество для обобщенной емкости ψ, определенной для каждой части H пространства $B_0 \times \Omega$ равенством $\psi(H) = \varphi(\mathrm{pr}\, H)$. Из леммы 2 теперь следует, что $A = \mathrm{pr}\, \Gamma$ есть $\mathfrak{C}\varphi$-измеримое множество.

Рассмотрим, наконец, K-аналитическое множество A, содержащееся в множестве $\bigcup K_n \subset \Omega$ типа K_σ. Можно считать последовательность компактных множеств K_n возрастающей. Полагая $A_n = A \cap K_n$, имеем $A = \bigcup A_n$; последовательность $\{A_n\}$ возрастает, и, следовательно, $\varphi(A) = \sup \varphi(A_n)$. Пусть $\lambda < \varphi(A)$; существует такое натуральное число n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ имеем $\varphi(A_n) > \lambda$. Множество A_n является $\mathfrak{C}\varphi$-измеримым, так как это K-аналитическое множество, содержащееся в компактном множестве K_n. Таким образом, существует компактное множество $K \subset A_n \subset A$, такое, что $\varphi(K) \geqslant \lambda$, а это доказывает, что само множество A является $\mathfrak{C}\varphi$-измеримым.

БИБЛИОГРАФИЯ

Относительно общих современных понятий см. работы:

Bourbaki N., Eléments de mathématique, Paris, Hermann.

Choquet G., Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, **5** (1953—54), 131—295.

Различные обобщения и упрощения можно найти в работах:

Choquet G., Ensembles *K*-analytiques et *K*-sousliniens. Cas générale et cas métrique, *Ann. Inst. Fourier*, **9** (1959), 75—110.

Sion M., On analytic sets in topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **96**, № 2 (1960), 341—354.

Относительно классических емкостей см. работы:

Frostman O., Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, Thèse, *Meddel. Lunds. Univ. Mat. Sem.*, **3** (1935).

De la Vallée Poussin C. J., Le potentiel logarithmique, balayage et représentation conforme, Paris, 1949.

Wiener N., Certain notions in potential theory, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Technol.*, **3** (1924), 24—51.

Глава VI

ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ПОТЕНЦИАЛА И ТЕОРЕМА СХОДИМОСТИ. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ. ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ ВЫМЕТАНИЯ

§ 1. Общие понятия

Мы уже указывали (гл. II, § 9), что предел убывающей последовательности или даже фильтрующегося влево упорядоченного множества локально ограниченных снизу супергармонических функций есть функция квазисупергармоническая, т. е. совпадает с некоторой супергармонической функцией, исключая, быть может, полярное множество (или множество внешней емкости нуль, ср. гл. V, § 3).

После появления первых результатов о почти супергармонических функциях, Брело доказал в 1938 г. для убывающих последовательностей, что исключительное множество имеет, например в шаре, внутреннюю емкость нуль. Картан значительно улучшил этот результат, заменив убывающие последовательности фильтрующимися влево семействами и показав, что исключительное множество имеет внешнюю емкость нуль, т. е. является полярным; доказательство этой теоремы опирается на использование энергетической нормы (ср. гл. XI), не связанной с существом вопроса.

Здесь мы даем сначала менее точную теорему, доказательство которой (см. библиографию, Брело и Шоке, 1957), отчасти аналогичное доказательству первой, сохраняет силу в гораздо более общих предположениях, формулируемых здесь несколько далее. Относительно других доказательств при различных предположениях см. библиографию, Шоке, 1957 и Брело, 1958.

Ядро. Пусть Ω — локально компактное топологическое пространство. *Ядром* в Ω называется положительная числовая функция $G(x, y)$, определенная на произведении $\Omega \times \Omega$.

Предполагается, что для любой положительной меры μ на Ω ядро $G_x = G(x, y)$, как функция от y, измеримо для любого $x \in \Omega$. Функция от x

$$G\mu(x) = \int_\Omega G(x, y)\, d\mu(y)$$

называется *потенциалом меры* μ *относительно ядра* G.

Грубая топология. Рассмотрим множество M^+ положительных мер на Ω. Снабдим его *грубой топологией*, т. е. слабейшей из топологий, оставляющих непрерывными все отображения

$$\mu(f)\colon \mu \longrightarrow \int_\Omega f\, d\mu$$

множества M^+ в пространство R; здесь $f \in \mathfrak{K}(\Omega)$, где $\mathfrak{K}(\Omega)$ — множество непрерывных конечных функций с компактным носителем.

Фундаментальная система окрестностей меры μ_0 в грубой топологии состоит из множеств $V(\mu_0;\ \varepsilon, \{f_i\})$, определяемых следующим образом: если $\{f_i\} = \{f_1, f_2, \ldots \ldots, f_n\}$ — конечная последовательность функций из $\mathfrak{K}(\Omega)$ и ε — строго положительное число, то $V(\mu_0;\ \varepsilon, \{f_i\})$ есть множество положительных мер μ, удовлетворяющих условиям

$$\left| \int_\Omega f_i\, d\mu - \int_\Omega f_i\, d\mu_0 \right| \leqslant \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим через $\mathfrak{K}(\Omega, K)$ множество функций из $\mathfrak{K}(\Omega)$, носитель которых содержится в компактном множестве K; это множество снабжено топологией равномерной сходимости.

Свойство непрерывности. *Отображение* $(f, \mu) \to \mu(f)$ *пространства* $\mathfrak{K}(\Omega, K) \times M^+$ *в* R *непрерывно.*

В самом деле, пусть $(f_0, \mu_0) \in \mathfrak{K}(\Omega, K) \times M^+$ и $\varepsilon > 0$. Имеем

$$|\mu(f) - \mu_0(f_0)| = |\mu(f - f_0) + \mu(f_0) - \mu_0(f_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |\mu(f - f_0)| + |\mu(f_0) - \mu_0(f_0)|.$$

Пусть функция $\varphi \in \mathfrak{K}(\Omega)$ заключена между 0 и 1 и равна 1 на K, η — строго положительное число и U — окрестность функции f_0 в $\mathfrak{K}(\Omega, K)$, определяемая условием $\sup|f-f_0|\leqslant\eta$. Если $f\in U$, то $|f-f_0|\leqslant\eta\varphi$, откуда $|\mu(f-f_0)|\leqslant\eta\mu(\varphi)$ для всех мер $\mu\in M^+$. Предположим, с другой стороны, что $\mu\in V(\mu_0;\ \eta, \{f_0, \varphi\})$; тогда $|\mu(f_0)-\mu_0(f_0)|\leqslant\eta$ и $|\mu(\varphi)-\mu_0(\varphi)|\leqslant\eta$.

Следовательно, когда f и μ принадлежат соответственно двум рассматриваемым окрестностям, справедливо неравенство

$$|\mu(f)-\mu_0(f_0)|\leqslant\eta\mu(\varphi)+\eta\leqslant\eta\,[\mu_0(\varphi)+\eta+1],$$

которое, в силу произвольности η, доказывает утверждение.

Свойство компактности. Напомним, что *семейство положительных мер μ, таких, что множество $\{\mu(K)\}$ ограничено для любого компактного K, относительно компактно в грубой топологии.*

В самом деле, рассмотрим ультрафильтр $\mathfrak{U}$ на этом множестве мер. Для любой функции $f\in\mathfrak{K}(\Omega)$ образ $\mathfrak{U}$ при отображении $\mu\to\mu(f)$ есть базис ультрафильтра $\mathfrak{U}_f$ на R, множества которого ограничены; следовательно, $\mathfrak{U}_f$ сходится к конечному пределу $\nu(f)$. Таким образом, определено отображение $f\to\nu(f)$ множества $\mathfrak{K}(\Omega)$ в R, представляющее собой, очевидно, положительную меру на Ω. Так как для всякой функции $f\in\mathfrak{K}(\Omega)$ мера $\mu(f)$ сходится к $\nu(f)$, ультрафильтр $\mathfrak{U}$ грубо сходится к ν.

Свойство точечных масс. *Отображение $x\to\varepsilon_x$ пространства Ω в множество мер M^+, которое каждой точке $x\in\Omega$ ставит в соответствие меру $\varepsilon_x(f)=f(x)$ (масса $+1$, помещенная в точку x), является гомеоморфизмом Ω в множество M^+, снабженное грубой топологией.*

Рассматриваемое отображение, очевидно, непрерывно, так как для любой функции $f\in\mathfrak{K}(\Omega)$ имеем $\varepsilon_x(f)=f(x)$, а f непрерывна. Кроме того, это отображение инъективно. В самом деле, если x и y — две различные точки из Ω, то существует такая функция $f\in\mathfrak{K}(\Omega)$, что $f(x)=1$ и $f(y)=0$, и, следовательно, $\varepsilon_x(f)=1$ и $\varepsilon_y(f)=0$, а это показывает, что $\varepsilon_x\neq\varepsilon_y$. Если пространство Ω компактно, то отсюда следует, что рассматриваемое отображение есть гомеоморфизм. В противном случае пусть $\overline{\Omega}$ — компактификация Ω, получаемая присоединением точки Александрова α. Когда x стремится к α в $\overline{\Omega}$, ε_x стремится к 0; следовательно, отображение $x \longrightarrow \varepsilon_x$ можно продолжить на $\overline{\Omega}$, положив $\varepsilon_\alpha = 0$. Это продолжение является непрерывным и инъективным (так как $\varepsilon_x \neq 0$ для всех $x \in \Omega$) отображением компактного пространства $\overline{\Omega}$ в M^+; оно, следовательно, является гомеоморфизмом. Свойство доказано.

§ 2. Полунепрерывные и регулярные ядра

Теорема. *Для того чтобы отображение* $(x, \mu) \longrightarrow G\mu(x)$ *пространства* $\Omega \times M^+$ *в* R *было полунепрерывным снизу, необходимо и достаточно, чтобы ядро* G *было полунепрерывным снизу в пространстве* $\Omega \times \Omega$.

В самом деле, предположим, что отображение $(x, \mu) \longrightarrow G\mu(x)$ полунепрерывно снизу; тем же свойством обладает его сужение на пространство $\Omega \times M_0$, где M_0 обозначает множество точечных мер ε_x. Так как

$$G\varepsilon_x(y) = \int_\Omega G(y, z)\, d\varepsilon_x(z) = G(y, x),$$

получаем, что ядро G полунепрерывно снизу в $\Omega \times \Omega$.

Наоборот, предположим, что ядро G полунепрерывно снизу; следовательно, оно является пределом фильтрующегося вправо семейства $\{G_i\}$ непрерывных конечных функций с компактным носителем, а значит,

$$G\mu(x) = \int_\Omega G(x, y)\, d\mu(y) = \\ = \lim \int_\Omega G_i(x, y)\, d\mu(y) = \lim G_i\mu(x).$$

Но для непрерывного ядра G_i, носитель которого содержится в произведении компактных множеств $K_i \times K_i$, отображение $(x; \mu) \longrightarrow G_i\mu(x)$ представляет собой композицию отображения $(f, \mu) \longrightarrow \int_\Omega f\, d\mu$, непрерывного в $\mathfrak{K}(\Omega, K_i) \times M^+$, и отображения $(x, \mu) \longrightarrow (G_{i,x}, \mu)$, где

$G_{i,x}=G_i(x, y)$ есть функция от y, принадлежащая множеству $\mathfrak{K}(\Omega; K_i)$ и, следовательно, непрерывно зависящая от $x \in \Omega$; это второе отображение также непрерывно. Мы получаем, что отображение $(x, \mu) \longrightarrow G\mu(x)$ является пределом фильтрующегося вправо семейства непрерывных отображений и, следовательно, полунепрерывно снизу.

Следствие. *Рассмотрим полунепрерывное снизу ядро G и последовательность $\{\mu_n\}$ положительных мер на Ω, грубо сходящуюся к мере μ. Тогда $G\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} G\mu_n$.*

Это непосредственно вытекает из полунепрерывности снизу рассматриваемого отображения относительно меры μ.

G-устранимые множества. Пусть G — произвольное ядро. Компактное множество K называется *G-устранимым*, если всякая ненулевая положительная мера μ, носитель которой содержится в K, имеет потенциал $G\mu$, неограниченный на K.

Часть A пространства Ω называется *G-устранимой изнутри*, если каждое компактное множество, содержащееся в A, G-устранимо.

Сопряженное ядро. Если G — ядро в пространстве E, то *сопряженное к нему ядро* G^* определяется равенством $G^*(x, y)=G(y, x)$. Для того чтобы сопряженное ядро G^* было полунепрерывно снизу, необходимо и достаточно, чтобы ядро G было полунепрерывно снизу.

Ядро называется *симметрическим*, если оно совпадает со своим сопряженным.

Регулярное ядро (Шоке). Ядро G в пространстве Ω называется *регулярным*, если оно удовлетворяет следующему условию: из того, что для любого компактного множества K и любой положительной меры μ с носителем, содержащимся в K, сужение потенциала $G\mu$ на K непрерывно и конечно, следует, что потенциал $G\mu$ непрерывен и конечен во всем Ω.

В гл. IV, § 5 мы видели, что ядро $h(\|x-y\|)$ регулярно в R^n. Следовательно, то же самое можно сказать о ядре Грина для шара.

Теорема. *Пусть даны полунепрерывное снизу ядро G, число $\varepsilon > 0$ и положительная мера μ с компактным носителем K, такая, что сужение потенциала $G\mu$ на K*

конечно на K. Тогда существует компактное множество $K' \subset K$, такое, что сужение μ' меры μ на K' удовлетворяет следующему условию: сужение потенциала $G\mu'$ на K' есть непрерывная конечная функция, причем $\|\mu\| - \|\mu'\| \leqslant \varepsilon$.

В самом деле, так как потенциал $G\mu$ полунепрерывен снизу, в силу теоремы Лузина существует компактное множество $K' \subset K$, такое, что $\mu(K) - \mu(K') \leqslant \varepsilon$ и сужение $G\mu$ на K' конечно и непрерывно. Обозначим через μ' сужение μ на K' и положим $\mu'' = \mu - \mu'$. Имеем $G\mu = G\mu' + G\mu''$, и сужение $G\mu$ на K' непрерывно, тогда как сужения $G\mu'$ и $G\mu''$ полунепрерывны снизу. Следовательно, сужение потенциала $G\mu' = G\mu - G\mu''$ на K' также полунепрерывно и сверху, а значит, непрерывно.

Следствие 1. *Пусть G — полунепрерывное снизу регулярное ядро в пространстве Ω. Тогда для любого компактного множества K, если только оно не G-устранимо, существует ненулевая положительная мера μ с носителем, содержащимся в K, потенциал которой $G\mu$ конечен и непрерывен в Ω.*

Поскольку K не является G-устранимым, существует ненулевая положительная мера μ_1 с носителем, содержащимся в K, потенциал которой $G\mu_1$ ограничен на K. Согласно доказанной теореме, существует такое компактное множество $K' \subset K$, что сужение μ меры μ_1 на K' отлично от нуля и сужение потенциала $G\mu$ на K' непрерывно. Так как ядро G регулярно, отсюда следует, что потенциал $G\mu$ конечен и непрерывен в Ω.

Следствие 2. *Пусть G — полунепрерывное снизу регулярное ядро. Всякое G-устранимое компактное множество K из Ω является также G-устранимым изнутри.*

В противном случае должны существовать компактное множество $K' \subset K$ и ненулевая положительная мера μ с носителем, содержащимся в K', а следовательно, и в K; потенциал этой меры $G\mu$ должен быть конечен и непрерывен в Ω, а следовательно, ограничен на K, что невозможно.

§ 3. Теорема сходимости

Предположим сначала, что Ω — *компактное пространство со счетным базисом (следовательно, метризуемое) и G — полунепрерывное снизу ядро, для которого сопряженное ядро G^* регулярно.*

Пусть $\{\mu_i\}_{i\in I}$ — семейство положительных мер на Ω, удовлетворяющее следующим условиям:

1) *семейство потенциалов $\{G\mu_i\}$ фильтруется влево;*
2) *множество $\{\mu_i(\Omega)\}$ ограничено.*

Тогда существует такая мера μ, что потенциал $G\mu$ совпадает с $\inf\limits_{i\in I} G\mu_i$, исключая, быть может, некоторое G^*-устранимое изнутри множество.

Точнее, из семейства мер $\{\mu_i\}$ можно извлечь последовательность $\{\mu_{\alpha_n}\}$, грубо сходящуюся к мере μ и такую, что последовательность потенциалов $\{G\mu_{\alpha_n}\}$ убывает и выполняются неравенства $G\mu \leqslant \inf\limits_{i\in I} G\mu_i \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} G\mu_{\alpha_n}$, причем равенства здесь имеют место всюду, исключая, быть может, некоторое G^*-устранимое изнутри множество.

Доказательство. Так как потенциалы $G\mu_i$ полунепрерывны снизу и пространство Ω имеет счетный базис, можно применить к семейству $\{G\mu_i\}$ топологическую лемму (гл. I, § 2), в силу которой существует счетная часть $I_0 = \{i_{k_n}\}$ множества индексов I, такая, что из утверждения: g есть полунепрерывная снизу функция и $g \leqslant \inf\limits_{i\in I_0} G\mu_i$ следует, что $g \leqslant \inf\limits_{i\in I} G\mu_i$.

Так как семейство $\{G\mu_i\}$ фильтруется влево, I_0 можно заменить частью $I'_0 = \{i_{k'_n}\} \subset I_0$, обладающей тем же свойством, но такой, что последовательность $\{G\mu_{i_{k'_n}}\}$ убывает.

В силу грубой компактности из второго предположения теоремы вытекает, что из последовательности $\{\mu_{i_{k'_n}}\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{\mu_{\alpha_n}\}$, грубо сходящуюся к некоторой мере μ. Так как последовательность $\{G\mu_{i_{k'_n}}\}$ убывает, то же самое имеет место для подпоследовательности $\{G\mu_{\alpha_n}\}$, и мы получаем, что $\lim G\mu_{i_{k'_n}} = \lim G\mu_{\alpha_n}$. В § 1 было показано, что $G\mu \leqslant \lim G\mu_{\alpha_n}$. Так как потенциал $G\mu$ полунепрерывен снизу, отсюда вытекает, что $G\mu \leqslant \inf_{i \in I} G\mu_i \leqslant \lim_{n \to \infty} G\mu_{\alpha_n}$.

Остается доказать, что потенциал $G\mu$ совпадает с $\lim G\mu_{\alpha_n}$, исключая, быть может, G^*-устранимое изнутри множество. Если, в противном случае, множество точек, в которых $G\mu$ отличается от $\lim G\mu_{\alpha_n}$, не является G^*-устранимым изнутри, то оно содержит также не G^*-устранимое компактное множество K_0. На K_0 существует ненулевая положительная мера ν, потенциал которой $G^*\nu$ конечен и непрерывен в Ω (§ 2, следствие 1).

В силу полунепрерывности потенциалов имеем

$$\int\limits_{\Omega} G\mu_{\alpha_n} d\nu = \int\limits_{\Omega} G^*\nu \, d\mu_{\alpha_n}. \tag{1}$$

Положим $\Phi = \lim G\mu_{\alpha_n}$. Так как потенциалы $G\mu_{\alpha_n}$, убывая, сходятся к Φ, левая часть равенства (1) сходится к $\int\limits_{\Omega} \Phi \, d\nu$. Так как потенциал $G^*\nu$ конечен и непрерывен, в силу грубой сходимости правая часть равенства (1) сходится к

$$\int\limits_{\Omega} G^*\nu \, d\mu = \int\limits_{\Omega} G\mu \, d\nu.$$

Однако равенство

$$\int\limits_{\Omega} \Phi \, d\nu = \int\limits_{\Omega} G\mu \, d\nu$$

противоречиво, так как $\Phi \geqslant G\mu$ и $\Phi > G\mu$ на множестве ненулевой ν-меры.

Обобщение. Утверждение теоремы остается в силе в локально компактном пространстве Ω, если только заменить предположение 2) условием

2′) *для любого компактного множества K множество $\{\mu_i(K)\}$ ограничено* и добавить предположение

3) *для любой положительной меры ν с компактным носителем, потенциал которой $G^*\nu$ конечен и непрерывен, интеграл $\int\limits_{\Omega} G^*\nu \, d\mu_i^{CK}$ сходится к нулю по фильтрующемуся вправо упорядоченному семейству компактных*

множеств равномерно относительно индекса i (здесь μ_i^{CK} обозначает сужение меры μ_i на CK).

Единственное новое затруднение состоит в доказательстве сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega G^*\nu\, d\mu_{\alpha_n}=\int_\Omega G^*\nu\, d\mu$$

и конечности входящих сюда интегралов. Интегралы

$$\int_\Omega G^*\nu\, d\mu_i=\int_K G^*\nu\, d\mu_i+\int_{CK} G^*\nu\, d\mu_i$$

ограничены в силу предположений 2′) и 3).

Пусть K — компактное множество, φ — положительная непрерывная функция, равная нулю вне некоторого компактного множества, равная $G^*\nu$ на K и всюду не превосходящая $G^*\nu$. Тогда из неравенства $\int_\Omega G^*\nu\, d\mu_{\alpha_n}\leqslant \leqslant\lambda<+\infty$ следует, что $\int_\Omega \varphi\, d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi\, d\mu_{\alpha_n}\leqslant\lambda$. Отсюда получаем, что $\int_\Omega G^*\nu\, d\mu\leqslant\lambda$, так как потенциал $G^*\nu$ есть предел фильтрующегося вправо семейства таких функций φ.

Далее, имеем

$$\left|\int_\Omega G^*\nu\, d\mu_{\alpha_n}-\int_\Omega G^*\nu\, d\mu\right|\leqslant\left|\int_\Omega \varphi\, d\mu_{\alpha_n}-\int_\Omega \varphi\, d\mu\right|+$$
$$+\int_\Omega (G^*\nu-\varphi)\, d\mu_{\alpha_n}+\int_\Omega (G^*\nu-\varphi)\, d\mu.$$

Второй и третий интегралы правой части мажорируются соответственно интегралами $\int_{CK} G^*\nu\, d\mu_{\alpha_n}$ и $\int_{CK} G^*\nu\, d\mu$ и, следовательно, могут быть сделаны сколь угодно малыми подходящим выбором множества K, независимо от n. Первый член правой части может быть сделан сколь угодно малым за счет увеличения n, и это завершает доказательство обобщения.

Замечания. 1) Предположение 3) удовлетворяется, если меры μ_i имеют носители, содержащиеся в фиксированном компактном множестве, или если множество $\{\mu_i(\Omega)\}$ ограничено [отсюда вытекает 2')] и $\lim G(x, y) = 0$ локально равномерно по x, когда y стремится к точке Александрова пространства $\overline{\Omega}$.

2) Если последовательность потенциалов $G\mu_i$ убывает, то предположение о наличии счетного базиса пространства Ω излишне. Доказательство упрощается и не опирается на топологическую лемму.

§ 4. Применение к классическому случаю

Теорема А. Картана. *Пусть $\{v_i\}$ — семейство супергармонических функций, локально ограниченное снизу на открытом множестве Ω пространства R^n. Нижняя огибающая такого семейства может отличаться от некоторой супергармонической функции (необходимо являющейся супергармонической регуляризацией и нижней регуляризацией) только на полярном множестве.*

Достаточно доказать теорему локально (гл. III, § 1). Мы будем вести рассуждения в открытом шаре $B \subset \overline{B} \subset \Omega$. Так как семейство $\{v_i\}$ ограничено снизу в B, можно рассматривать лишь случай положительных функций v_i. Пусть $B' \subset \overline{B'} \subset B$ — шар, концентрический с шаром B. Для каждого индекса i обозначим через v'_i супергармоническую функцию, равную v_i в B' и равную обобщенному решению задачи Дирихле в кольце $B - \overline{B'}$ с граничными значениями v_i на $\partial B'$ и 0 на ∂B. Так как функция v'_i положительна и принимает нулевые значения на ∂B, нуль является ее наибольшей гармонической минорантой в B. Следовательно, согласно теореме представления Рисса, v'_i есть потенциал Грина; так как v'_i — гармоническая функция в $B - \overline{B'}$, v'_i есть потенциал меры, носитель которой содержится в $\overline{B'}$.

Пусть $\{w_i\}$ — фильтрующееся влево семейство нижних огибающих конечных подсемейств семейства $\{v'_i\}$. Имеют место следующие свойства:

1) нижняя огибающая $\inf w_i = \inf v'_i$ совпадает с нижней огибающей $\inf v_i$ в B';

2) для любого индекса i функция w_i есть потенциал Грина положительной меры μ_i с носителем, содержащимся в $\overline{B'}$.

Так как ядро Грина полунепрерывно снизу, симметрично и регулярно, можно применить доказанную теорему сходимости. Таким образом, из семейства мер $\{\mu_i\}$ можно извлечь последовательность $\{\mu_{\alpha_n}\}$, грубо сходящуюся к мере μ, потенциал Грина которой w удовлетворяет неравенствам $w \leqslant \inf w_i \leqslant \inf w_{\alpha_n}$; равенства здесь имеют место всюду, исключая, быть может, некоторое G-устранимое изнутри множество, внутренняя емкость которого, следовательно, равна нулю.

Множество точек, в которых w отличается от $\inf w_{\alpha_n}$, является, очевидно, борелевским. Согласно теореме $\mathfrak{C}\varphi$-измеримости, это множество $\mathfrak{C}\varphi$-измеримо, а следовательно, имеет внешнюю емкость нуль. Таким образом, нижняя огибающая $\inf w_i$ совпадает с потенциалом w всюду, исключая, быть может, некоторое полярное множество (гл. V, § 3), и $\inf v_i$ есть квазисупергармоническая функция в открытом шаре B'.

Замечание. Можно было бы применить только теорему сходимости для компактных пространств к B' и к ядру Грина для B.

§ 5. Классические применения теоремы сходимости

Понятия экстремизации и выметания. Рассмотрим ограниченное открытое множество[1] $\Omega \subset R^n$ (или произвольное открытое множество Ω в R^n при $n \geqslant 3$), часть E множества Ω и положительную супергармоническую функцию v на Ω. Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество положительных супергармонических функций на Ω, мажорирующих v на E, и через R_v^E — супермедианную функцию $\inf\limits_{w \in \mathfrak{F}} w$; функция R_v^E называется *приведением v относительно E в Ω*. Значения R_v^E совпадают квазивсюду со значениями ее

[1]) Это предположение облегчает рассуждения, так как оно обеспечивает существование для любого полярного множества $e \subset \Omega$ строго положительной супергармонической функции на Ω, принимающей значение $+\infty$ на e.

регуляризации $\widehat{R_v^E} \leqslant R_v^E$. Эта регуляризация обозначается также $\mathfrak{B}_v^E$ и называется *выметанием* v *относительно* E *в* Ω или обозначается $\mathfrak{E}_v^{\Omega-E}$ и называется *экстремизацией* v *относительно* $\Omega - E$ (или *на* $\Omega - E$) *в* Ω. Отметим, что R_v^E зависит только от значений v на E.

Пример. $\mathfrak{C}$-измеримый потенциал V_K компактного множества K в шаре B есть экстремизация единицы на $B - K$ или выметание единицы относительно K в B; наряду с этим, функция W_K, введенная в гл. V, есть приведение единицы относительно K.

Общие свойства.

1) α) Всюду $v \geqslant R_v^E \geqslant \mathfrak{B}_v^E$.

β) $R_v^E = v$ всюду и $\widehat{R_v^E} = v$ квазивсюду на E.

γ) $R_v^E = \mathfrak{B}_v^E$ на $\Omega - E$ и эта функция является гармонической внутри $\Omega - E$.

Свойства α) и β) очевидны, поскольку $v \in \mathfrak{F}$. Что касается свойства γ), пусть $e \subset E$ — полярное множество, на котором $v > \mathfrak{B}_v^E$. Если $x_0 \in \Omega - E$, то рассмотрим на Ω ассоциированную с e супергармоническую функцию $u > 0$, конечную в точке x_0 (см. гл. III, § 1). Сумма $\mathfrak{B}_v^E + \varepsilon u$, $\varepsilon > 0$, есть строго положительная супергармоническая функция, мажорирующая v на E, а следовательно, принадлежащая $\mathfrak{F}$ и мажорирующая R_v^E всюду. В силу произвольности ε имеем $\mathfrak{B}_v^E(x_0) = R_v^E(x_0)$.

Кроме того, в произвольном шаре $B(x_0, r) \subset \Omega - E$ функция R_v^E совпадает с нижней огибающей интегралов Пуассона, построенных по значениям $w \in \mathfrak{F}$ для $B(x_0, r)$. Эти интегралы образуют фильтрующееся влево упорядоченное семейство, а отсюда следует, что R_v^E — гармоническая функция на $\Omega - E$.

2) Выметание $\mathfrak{B}_v^E$ есть наименьшая положительная супергармоническая функция, мажорирующая v квазивсюду на E.

В самом деле, пусть w — положительная супергармоническая функция, мажорирующая v на E, исключая, быть может, полярное множество e, и u — положительная супергармоническая функция, бесконечная на e и конечная в точке $x_0 \in \Omega - E$. Тогда $w + \varepsilon u \in \mathfrak{F}$ при любом $\varepsilon < 0$, а следовательно, $w + \varepsilon u \geqslant R_v^E$, откуда $w \geqslant R_v^E$ на $\Omega - E$. Таким образом, всюду $w \geqslant R_v^E$ и, следовательно, $w \geqslant \widehat{R_v^E}$.

Выметание масс. Ограничимся случаем, когда Ω есть шар B.

Рассмотрим положительную меру μ в B и множество E. Пусть $v = G\mu(x) = \int\limits_B G(x, y)\, d\mu(y)$ — потенциал Грина меры μ в B. Тогда выметание $\mathfrak{B}_v^E$ в B есть положительная супергармоническая функция, минорирующая v; следовательно, наибольшая гармоническая миноранта $\mathfrak{B}_v^E$ есть нуль, так как нуль является наибольшей гармонической минорантой для v, и $\mathfrak{B}_v^E$ представляет собой некоторый потенциал Грина $\mathfrak{B}_v^E(x) = \int\limits_B G(x, y)\, d\mu_1(y)$. Говорят, что ассоциированная с $\mathfrak{B}_v^E$ *мера* μ_1 *получена выметанием меры* μ (или *является выметанием меры* μ) относительно множества E.

В частности, если E — замкнутое множество в B, то $\mathfrak{B}_v^E$ есть гармоническая функция в $B - E$ и носитель меры μ_1 принадлежит E. Если E — компактное множество и μ — равномерное распределение масс на сфере $\partial B'$, концентрической с B, $E \subset B'$, причем потенциал этого распределения равен 1 в B', то $G\mu_1$ и μ_1 — соответственно емкостный потенциал и емкостная мера множества E.

Исторический пример выметания. Этот пример послужил А. Пуанкаре для введения понятия выметания. Оно несколько отличается от выметания, описанного выше; шар заменяется пространством R^n ($n \geqslant 3$) и потенциалы Грина — ньютоновскими потенциалами, но мы уже отмечали, что изложенная теория остается применимой и в этом случае (гл. IV, § 3).

Рассмотрим открытый шар $B(x_0, R)$ и его дополнение E. Пусть $x \in B$ и $\mu = \varepsilon_x$ — масса $+1$, помещенная в точке x. Произведем выметание массы ε_x относительно E. Интеграл Пуассона, построенный по значениям потенциала h_x массы ε_x в ∂B, минорирует каждую супергармоническую функцию, мажорирующую h_x в CB, а следовательно, минорирует $R_{h_x}^E$. С другой стороны, непрерывная супергармоническая функция v, равная h_x в CB и равная указанному интегралу Пуассона в B, мажорирует h_x в CB, а следовательно, мажорирует $R_{h_x}^E$. Таким образом, $v = R_{h_x}^E$ является потенциалом выметания массы ε_x.

Нетрудно доказать, что мера на ∂B, имеющая в качестве плотности ядро Пуассона с полюсом x

$$\frac{1}{\alpha_n R} \frac{R^2 - \| x - x_0 \|^2}{\| y - x \|^n},$$

дает непрерывный потенциал, совпадающий с v в B и в $CB = E$. Следовательно, это и есть мера, полученная выметанием.

Этот пример будет обобщен в гл. IX, и мы вернемся к рассмотрению выметания в гл. X.

БИБЛИОГРАФИЯ

Brelot M., Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques, *C. r. Acad. sci.*, 207 (1938), 836.

Brelot M., Nouvelle démonstration du théoreme fondamental sur la convergence des potentiels, *Ann. Inst. Fourier*, **6** (1955—56), 361—368.

Brelot M., La convergence des fonctions surharmoniques et des potentiels généralisés, *C. r. Acad. sci.*, **246** (1958), № 19, 2709—2712.

Brelot M., Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Semin. théor. potentiel M. Brelot, G. Choquet, J. Deny, 1958, t. 2, n. 1.

Brelot M., Choquet G., Le théorème de convergence en théorie du potentiel, *J. Madras Univ.*, **B 27** (1957), 277—286.

Cartan H., Théorie du potentiel newtonien, énergie, capacité, suites de potentiels, *Bull. Soc. Math.*, **73** (1945).

Choquet G., Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, Sem. théor. potent. M. Brelot, G. Choquet, J. Deny, 1957, t. 1.

Глава VII

РАЗРЕЖЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 1. Определение

Часть E пространства R^n называется *разреженной*[1]) *в точке* $x_0 \notin E$, если x_0 не является точкой прикосновения для E или если x_0 является точкой прикосновения для E, но в окрестности точки x_0 (или даже в R^n) существует такая супергармоническая функция v, что

$$v(x_0) < \varliminf_{x \to x_0} v(x), \quad x \in E.$$

Говорят также, что E *разрежено в точке* $x_0 \in E$, если множество $E - \{x_0\}$ разрежено в x_0.

Таким образом, если множество E не является разреженным в точке x_0, то для любой супергармонической в окрестности x_0 функции v выполняются соотношения

$$v(x_0) = \varliminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} v(x) = \varliminf_{x \to x_0} v(x), \quad x \in E.$$

Более удобный критерий. Для того чтобы множество E было разреженным в точке прикосновения $x_0 \notin E$, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности x_0 существовала супергармоническая функция v, конечная в точке x_0 и такая, что $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = +\infty$, $x \in E$.

Это условие, очевидно, достаточно. Чтобы доказать его необходимость, предположим, что множество E разрежено в точке x_0, и пусть u — такая супергармоническая функция, что $u(x_0) < \varliminf\limits_{x \to x_0} u(x)$, $x \in E$. Можно ограничиться

---

[1]) Это понятие было введено в работе Brelot M., *J. math. pures et appl.*, **19** (1940), 319 — 337, для того, чтобы обобщить понятия *иррегулярной точки* границы открытого множества и *неустойчивой точки* границы замкнутого множества.

случаем, когда u — потенциал положительной массы μ. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\}$ чисел $\varepsilon_n > 0$ и обозначим через u_n потенциал сужения меры μ на шар $B(x_0, \varepsilon_n)$. Так как значение $u(x_0)$ конечно, последовательность $\{\varepsilon_n\}$ можно выбрать таким образом, чтобы ряд с общим членом $u_n(x_0)$ сходился. Сумма $v_p = \sum_{n=1}^{p} u_n$ есть супергармоническая функция. Если $\delta = \varliminf_{x\to x_0} u(x) - u(x_0)$, $x \in E$, то имеем также $\delta = \varliminf_{x\to x_0} u_n(x) - u_n(x_0)$, $x \in E$, так как разность $u - u_n$ есть гармоническая функция в $B(x_0, \varepsilon_n)$ и, следовательно, непрерывна в точке x_0. Таким образом, $\varliminf_{x\to x_0} v_p(x) - v_p(x_0) \geqslant p\delta$, $x \in E$. Отсюда следует, что конечная в точке x_0 супергармоническая функция $v = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sup v_p$ удовлетворяет условию $\varliminf_{x\to x_0} v(x) = +\infty$, $x \in E$.

§ 2. Свойства

1) Всякая часть разреженного в точке x_0 множества разрежена в x_0. Объединение конечного числа разреженных в точке x_0 множеств разрежено в x_0.

2) Полярное множество разрежено во всех точках.

В самом деле, если E — полярное множество и x_0 — точка прикосновения E, то существует супергармоническая в окрестности точки x_0 функция v, конечная в x_0 и бесконечная в каждой точке E, принадлежащей этой окрестности [ср. гл. VI, § 5, свойство 2)].

Далее мы убедимся, что и обратно, всякое множество, разреженное в каждой из своих точек, является полярным.

Как следует из приведенных свойств, прибавление или вычитание полярного множества не изменяет разреженность или неразреженность некоторого множества во всех точках. В качестве применения отметим, что для выметания (см. гл. VI, § 5) равенство $\mathfrak{B}_v^E = v$ имеет место по крайней мере в тех точках множества E, где оно не разрежено.

3) Пусть E — разреженное в точке x_0 множество. Если $r>0$ стремится к нулю, то мера Лебега следа E на сфере $S(x_0, r)$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с полной мерой сферы.

В самом деле, пусть x_0 — точка прикосновения для $E \cap \complement\{x_0\}$ и u — положительная супергармоническая функция, конечная в точке x_0 и такая, что $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$, $x \neq x_0$, $x \in E$. Имеем

$$u(x_0) \geqslant \mathfrak{M}_u^r(x_0) \geqslant A(r) \frac{\operatorname{mes} E \cap S(x_0, r)}{\operatorname{mes} S(x_0, r)},$$

причем $A(r) = \inf u(x)$, $x \in E \cap S(x_0, r)$, и $\lim\limits_{r \to 0} A(r) = +\infty$. Отсюда следует, что отношение рассматриваемых мер стремится к нулю.

Из этого свойства видно, что множество, содержащее в окрестности x_0 непустую внутренность некоторого конуса с вершиной x_0, не является разреженным в точке x_0.

4) Имеет место сохранение разреженности при деформациях: если E — разреженное множество в точке x_0 и f — сжимающее отображение E в R^n, такое, что $\|f(x) - f(x_0)\| = \|x - x_0\|$ для каждой точки $x \in E$, то образ E' множества E при отображении f является разреженным множеством в точке $f(x_0)$.

Исторический пример Лебега. Рассмотрим сегмент $[0, 1]$ оси абсцисс в пространстве R^3, снабженный мерой плотности $\varrho(x) = x$. Потенциал этой меры равен 1 в точке 0, но бесконечен в каждой точке полуинтервала $(0, 1]$. Множество E точек из R^3, в которых этот потенциал мажорирует константу $k > 1$, есть тело вращения вокруг оси абсцисс; оно разрежено в точке 0. Можно показать, что меридиан поверхности вращения, ограничивающей это множество, есть график функции вида $y = ae^{-\lambda(x)/x}$, где $\lim\limits_{x \to 0} \lambda(x) = k/2$. Множество E в окрестности точки 0 называется *острием Лебега*.

§ 3. Общий критерий разреженности

Пусть Ω — ограниченное открытое множество в пространстве R^n и x_0 — точка из Ω. Пусть супергармоническая функция $w > 0$ на Ω такова, что для всякой окрестности V точки x_0 выполняется неравенство $w(x_0) > \sup\limits_{x \in CV} w(x)$ [следовательно, $w(x_0)$ есть абсолютный максимум $w(x)$]. *Для того чтобы часть α множества Ω была разреженной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы для выметания в Ω выполнялось неравенство*

$$\mathfrak{B}_w^\alpha(x_0) < w(x_0).$$

При доказательстве достаточности можно предполагать, что $x_0 \notin \alpha$, так как удаление x_0 не изменяет $\mathfrak{B}_w^\alpha$. Тогда условие можно переписать в следующей форме:

$$\mathfrak{B}_w^\alpha(x_0) = R_w^\alpha(x_0) < w(x_0).$$

Это условие достаточно, так как если бы не было разреженности, то здесь, как мы видели, имело бы место равенство. Более непосредственно, наше условие показывает, что существует положительная супергармоническая функция v, мажорирующая w на α и сколь угодно близкая к $R_w^\alpha(x_0)$ в точке x_0, для которой, следовательно, справедливы неравенства

$$\varliminf_{x \to x_0} v(x) \geqslant \varliminf_{x \to x_0} w(x) \geqslant w(x_0) > v(x_0), \quad x \in \alpha.$$

Наоборот, предположим, что множество α разрежено в точке x_0. Если $x_0 \notin \bar{\alpha}$, то пусть V — окрестность x_0, не пересекающаяся с α, и $K = \sup\limits_{x \in CV} w(x)$. Положительная супергармоническая функция $w' = \inf(w, K)$ на Ω совпадает с w на α и, следовательно, можорирует R_w^α, откуда имеем

$$R_w^\alpha(x_0) \leqslant w'(x_0) = K < w(x_0).$$

Если $x_0 \in \bar{\alpha}$, то существует положительная супергармоническая функция v, ограниченная на Ω и такая, что

$$v(x_0) < \varliminf_{x \to x_0} v(x) = l, \quad x \in \alpha.$$

Пусть γ — такое число, что $v(x_0) < \gamma < l$, и пусть $\varphi(x) = w(x_0) + \lambda[v(x) - \gamma]$, причем здесь следует выбрать число $\lambda > 0$ подходящим образом. В некоторой окрестности V точки x_0 для $x \in V \cap \alpha$ имеет место неравенство $v(x) > \gamma$, а следовательно, и $\varphi(x) > w(x)$. Возьмем $\lambda > 0$ настолько малым, чтобы на $\Omega - V$ было $\lambda|v(x)-\gamma| \leqslant w(x_0)-w(x)$ (здесь правая часть минорируется некоторой строго положительной константой). Таким образом, $\varphi(x) \geqslant w(x)$ на $\Omega - V$, а следовательно, всюду на α, откуда $\varphi \geqslant R_w^\alpha$ и $w(x_0) > \varphi(x_0) \geqslant R_w^\alpha(x_0)$.

Замечание. Аналогичным путем можно доказать следующий критерий. Пусть w — строго положительная супергармоническая функция на ограниченном открытом множестве Ω, конечная и непрерывная в точке $x_0 \in \Omega$. Для того чтобы множество $\alpha \subset \Omega$ было разреженным в x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность δ точки x_0, что для выметания на Ω выполняется неравенство

$$\mathfrak{B}_w^{\alpha \cap \delta}(x_0) < w(x_0).$$

Относительно различных дополнений, в частности, относительно критериев, использующих классическую емкость (типа известного критерия Винера), которые не представляются необходимыми и не связаны с современной аксиоматикой, мы отсылаем читателя к библиографии.

§ 4. Основная теорема о множестве точек разрежения некоторого множества[1]

Лемма. *На открытом ограниченном множестве Ω существует конечная (и даже непрерывная) супергармоническая функция $w > 0$, которая при любом выборе точки $x_0 \in \Omega$ является суммой двух положительных супергармонических функций на Ω, причем одна из них, w_1, для любой окрестности V точки x_0 удовлетворяет условию*

$$w_1(x_0) > \sup w_1(x), \quad x \in \complement V.$$

Если $n \geqslant 3$, то достаточно рассмотреть ньютоновский потенциал меры Лебега на Ω. Он является суммой потенциалов меры Лебега в $B(x_0, r) \subset \Omega$ и в $\Omega - B(x_0, r)$. В качестве w_1 можно взять первый потенциал. В случае $n = 2$ к аналогичным логарифмическим потенциалам следует добавить подходящие константы, чтобы сделать их положительными.

[1]) См. в библиографии работы Брело 1944 г. и 1945 г.

Теорема. *Точки разрежения некоторого множества E образуют полярное множество.*

Можно ограничиться случаем, когда E содержится в ограниченном открытом множестве Ω. Рассмотрим, согласно лемме, супергармоническую функцию $w>0$ на Ω и разбиение $w=w_1+w_2$, где w_1 удовлетворяет условиям леммы. Если множество E разрежено в точке x_0, то $\mathfrak{B}_{w_1}^E(x_0)<w_1(x_0)$, откуда

$$\mathfrak{B}_w^E(x_0) \leqslant \mathfrak{B}_{w_1}^E(x_0)+\mathfrak{B}_{w_2}^E(x_0)<w_1(x_0)+w_2(x_0)=w(x_0).$$

Таким образом, в тех точках E, где E разрежено, $\mathfrak{B}_w^E<w$, и, следовательно, эти точки образуют полярное множество.

Замечания. 1) Точки, в которых $\mathfrak{B}_w^E<w$, образуют множество типа K_σ. Поскольку всякое полярное множество содержится в полярном множестве типа $K_{\sigma\delta}$, множество теоремы представляет собой пересечение E и некоторого полярного множества типа $K_{\sigma\delta}$.

2) Теорему можно также доказать, применяя другой критерий разреженности (§ 3, замечание 1). При этом нужно использовать счетный базис открытых множеств $\{\omega_i\}$ в Ω и рассмотреть выметания $\mathfrak{B}_w^{E\cap\omega_i}$ с непрерывной функцией w, например равной константе.

Следствие. *Для того чтобы некоторое множество было полярным, необходимо и достаточно, чтобы оно было разреженным в каждой своей точке.*

§ 5. Случай замкнутых множеств

Лемма. *Пусть E — замкнутое множество, содержащееся в ограниченном открытом множестве Ω пространства R^n. Существует конечная и непрерывная супергармоническая функция $U>0$, не являющаяся гармонической ни в какой связной компоненте множества $\Omega-E$.*

В качестве такой функции можно взять (с точностью до аддитивной константы) потенциал меры Лебега на Ω или функцию $k-\|x-x_0\|$, где $k=\text{const}$, $x_0\in\Omega$.

Теорема. *Пусть E — замкнутое множество, содержащееся в ограниченном открытом множестве Ω. Для* *того чтобы E не было разреженным в точке $x_0 \in \partial E \cap \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы на $\Omega - E$ (или только в окрестности x_0 в $\Omega - E$) существовала строго положительная супергармоническая функция, стремящаяся к нулю в точке x_0.*

Если множество E не является разреженным в точке $x_0 \in \partial E \cap \Omega$, то выметание $\mathfrak{B}_U^E$ относительно функции U из леммы и множества Ω принимает значение $U(x_0)$ в x_0, и мы имеем

$$\varliminf_{x \to x_0} \mathfrak{B}_U^E(x) \geqslant U(x_0), \quad x \in \complement E.$$

Так как функция U непрерывна и мажорирует $\mathfrak{B}_U^E$, разность $U - \mathfrak{B}_U^E$ удовлетворяет условиям теоремы.

Доказательство достаточности этого условия намного сложнее. Пусть B — открытый шар с центром x_0 и v — строго положительная супергармоническая функция в $B \cap \complement E$, стремящаяся к нулю в точке x_0. Допустим, что множество E разрежено в точке x_0. Тогда существует ограниченная сверху субгармоническая функция u в окрестности V точки x_0, такая, что $u(x_0) = 1$ и $u(x) \leqslant -1$ для $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$. Можно считать, что $B \subset V$. Если B_1 — концентрический шар меньшего радиуса, то u строго меньше нуля в открытой окрестности W множества $E \cap \partial B_1$ и $\inf\limits_{x \in \partial B_1 \cap \complement W} v(x) > 0$. Поэтому существует настолько большое число $\lambda > 0$, что для всех $x \in \partial B_1 \cap \complement E$ выполняется неравенство $u(x) - \lambda v(x) \leqslant 0$. Значит, разность $u - \lambda v - \varepsilon h_{x_0}$, где число $\varepsilon > 0$ произвольно, отрицательна на $B_1 \cap \complement E$, так как в каждой точке y границы $\partial(B_1 \cap \complement E)$ имеем

$$\varlimsup_{x \to y} [u(x) - \lambda v(x) - \varepsilon h_{x_0}(x)] \leqslant 0, \quad x \in B_1 \cap \complement E.$$

В силу произвольности ε получаем, что $u(x) \leqslant \lambda v(x)$ для $x \in B_1 \cap \complement E$, и, следовательно, $\varlimsup\limits_{x \to x_0} u(x) \leqslant 0$, $x \in \complement E$. Полученное неравенство вместе с условием $u(x) \leqslant -1$ для $x \in B_1 \cap E$ несовместимо с условием $u(x_0) = 1$, и мы приходим к выводу, что E не является разреженным в точке x_0.

Замечание 1. Если множество E не является разреженным в точке x_0, то существует даже гармоническая функция $v>0$ на $\Omega-E$, обращающаяся в нуль в точке x_0, и такая, что для любой окрестности V точки x_0 имеем $\inf v(x)>0$, $x \in \complement V$.

Достаточно взять разность

$$U(x_0)-\mathfrak{B}_U^E \geqslant U(x_0)-U(x),$$

где U — строго положительная супергармоническая функция, удовлетворяющая для любой окрестности V точки x_0 условию $U(x_0)>\sup\limits_{x \in \complement V} U(x)$; например $U=k-\|x-x_0\|$.

Замечание 2. Для того чтобы замкнутое множество $E \subset \Omega$ не было разреженным в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы для всех связных компонент ω_n множества $\Omega-E$ дополнения $\complement\omega_n$ не были разреженными в точке x_0.

В одну сторону замечание очевидно. Если все дополнения $\complement\omega_n$ не являются разреженными в x_0, то сопоставим каждой компоненте ω_n супергармоническую функцию v_n, $0<v_n<1/n^2$, такую, что если $x_0 \in \overline{\omega}_n$, то v_n стремится к нулю, когда $x \in \omega_n$ стремится к x_0. Отсюда получаем супергармоническую функцию в $\complement E$; это показывает, что E не является разреженным в x_0.

Применение. Открытый отрезок прямой на плоскости не является разреженным ни в одной из своих точек, так как из двух линейных функций, обращающихся в нуль на этом отрезке, можно составить в окрестности каждой точки x_0 этого отрезка гармоническую функцию, строго положительную вне отрезка и обращающуюся в нуль в x_0.

Отсюда следует, что открытый или замкнутый отрезок не является разреженным в концевых точках.

Следствие. *Если произвольное множество E на плоскости является разреженным в точке x_0, то существуют сколь угодно малые окружности с центром x_0, не пересекающиеся с E.* (Для замкнутого множества E это равносильно одному результату Бёйрлинга.)

Вращая полупрямую с началом в x_0 вокруг этой точки и отмечая все точки пересечения с E, получаем линейное множество E', разреженное, как и E (§ 2, свойство 4), которое не может содержать никакого открытого отрезка с концом в x_0.

Здесь перед нами топологическое свойство, которое не имеет аналогов в пространствах размерности $n \geqslant 3$ (ср. острие Лебега). В другой, менее сильной форме, на языке иррегулярных точек, оно было отмечено Лебегом еще в 1907 г. для замкнутых множеств E.

Как следствие мы получаем, что плоское полярное множество должно быть всюду разрывным. Однако отметим без доказательства, что в плоскости канторовское совершенное всюду разрывное множество на оси абсцисс, получаемое повторным выбрасыванием из сегмента $[0, 1]$ средней трети, не является разреженным ни в одной из своих точек[1]) и, следовательно, имеет неполярное пересечение с любой из окрестностей любой из своих точек, между тем как линейная мера этого множества равна нулю.

§ 6. Тонкая топология

Тонкой топологией в R^n (согласно Картану) называется слабейшая из топологий, оставляющих непрерывными все супергармонические функции в R^n. Слова «тонкий», «тонко» будут употребляться вместо выражения «в смысле тонкой топологии».

Теорема А. Картана. *В тонкой топологии окрестностями точки являются все множества, содержащие эту точку и имеющие дополнение, разреженное в этой точке.*

Тонкая топология порождается прообразами, при отображении посредством супергармонических функций v в R^n, следующих множеств из $\bar{R}$: $(\alpha, +\infty]$, $[-\infty, \beta)$ и (α, β) (здесь числа α и β конечны). В силу полунепрерывности v множество первого типа есть обычное открытое множество, множество третьего типа — пересечение обычного открытого множества и множества второго типа.

---

[1]) Это следует, например, из критерия Виннера, опущенного в нашем изложении. См. в библиографии работу Брело 1940 г.

Заметим, что обычные открытые множества являются открытыми и в тонкой топологии, так как их можно представить как объединение открытых шаров, а каждый отдельный шар $B(x_0, r)$ есть множество, на котором $h_{x_0} > h(r)$. Иначе говоря, тонкая топология сильнее евклидовой топологии.

Рассмотрим теперь тонкую окрестность V точки x_0. Она содержит тонкое открытое множество, содержащее x_0 и являющееся конечным пересечением тонких открытых множеств указанных трех типов, т. е. это либо обычное открытое множество, либо пересечение обычного открытого множества, содержащего x_0, и нескольких множеств e_i вида $v^{-1}\{[-\infty, \beta_i)\}$, где $v(x_0) < \beta_i$. На дополнении $\mathrm{C}e_i$ имеем $v \geqslant \beta_i$, а значит, $\mathrm{C}e_i$ разрежено в точке x_0 и то же самое справедливо для объединения множеств $\mathrm{C}e_i$.

Наоборот, пусть множество V таково, что $x_0 \in V$ и дополнение $\mathrm{C}V$ является разреженным в точке x_0. Если x_0 лежит внутри V, то V является обычной, а следовательно, и тонкой окрестностью точки x_0. Пусть теперь $x_0 \in \partial V$. Тогда в окрестности точки x_0 существует супергармоническая функция v (которую можно даже считать ограниченной), такая, что $v(x_0) < \beta < \varliminf_{x \to x_0} v(x)$, $x \in \mathrm{C}V$; существует также функция, супергармоническая в R^n и обладающая теми же свойствами (гл. III, лемма 1), которую мы обозначим снова через v. Таким образом, для подходящим образом выбранной обычной окрестности δ точки x_0 имеем $v \geqslant \beta$ на $\mathrm{C}V \cap \delta$, т. е. $v^{-1}\{[-\infty, \beta)\} \subset \mathrm{C}(\mathrm{C}V \cap \delta) = V \cup \mathrm{C}\delta$, откуда $\delta \cap v^{-1}\{[-\infty, \beta)\} \subset V$. Следовательно, V есть тонкая окрестность точки x_0.

Замечания. 1) Вполне аналогичное рассуждение показывает, что *конечные* супергармонические функции дают те же самые окрестности, а следовательно, и ту же топологию.

2) Каждая супергармоническая функция на открытом множестве Ω пространства R^n тонко непрерывна на Ω, поскольку ее сужение на любой замкнутый шар, содержащийся в Ω, можно продолжить супергармонически в R^n.

3) Для того чтобы некоторое множество E было разреженным в одной из своих точек, необходимо и доста-

точно, чтобы эта точка была тонко изолированной для множества E.

Тонкий предел. Пусть множество E не является разреженным в точке x_0, но x_0 все же принадлежит тонкому замыканию E. Рассмотрим (конечную или нет) числовую функцию f на E. Выражение: *функция f имеет предел λ в точке x_0 в смысле тонкой топологии* (или *тонкий предел*, или *псевдопредел*) имеет следующий смысл: для любой окрестности δ точки λ в пространстве $\overline{R}$ существует такая тонкая окрестность V точки x_0, что из включения $x \in V \cap E$ следует включение $f(x) \in \delta$.

Теорема А. Картана. *Пусть точка x_0 принадлежит тонкому замыканию множества E, функция f определена на E и имеет тонкий предел λ в точке x_0. Тогда существует такая тонкая окрестность V точки x_0, что число λ является пределом в точке x_0 сужения f на $E \cap V$ в смысле обычной топологии пространства R^n.*

Можно считать, что E содержится в ограниченном открытом множестве Ω пространства R^n.

Пусть $\{\delta_n\}$ — базис окрестностей точки λ в $\overline{R}$. Для любого n существует такая тонкая окрестность V_n точки x_0, что из включения $x \in E \cap V_n$ следует включение $f(x) \in \delta_n$. Пусть v_n — строго положительная супергармоническая функция на Ω, конечная в x_0 и такая, что если x_0 принадлежит замыканию множества $CV_n = e_n$, то $\lim\limits_{x \to x_0} v_n(x) = +\infty$, $x \in e_n$. Выберем числа $\lambda_n > 0$ так, чтобы ряд $\sum \lambda_n v_n(x_0)$ сходился. Тогда сумма ряда $v = \sum \lambda_n v_n(x)$ есть супергармоническая функция, конечная в точке x_0.

Рассмотрим часть e'_n множества e_n, на которой $\lambda_n v_n(x) > n$, и пусть $F = \bigcup e'_n$. Нужно доказать, что если $x_0 \in \overline{F}$, то $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = +\infty$, $x \in F$; отсюда получим, что множество F разрежено в точке x_0. Пусть дано число A; тогда найдется такое N, что для всех $n \geqslant N$ имеем $\lambda_n v_n(x) \geqslant A$ в e'_n. С другой стороны, для $n < N$ существует такая окрестность ω_n точки x_0, что $\lambda_n v_n(x) \geqslant A$ в $e'_n \cap \omega_n$. Итак, если $\omega = \bigcap\limits_{1}^{N-1} \omega_n$, то из включения $x \in F \cap \omega$ следует неравенство $v(x) = \sum \lambda_n v_n(x) \geqslant A$.

Заметим, наконец, что для всех n существует такая окрестность α_n точки x_0, что $\alpha_n \cap e_n \subset e'_n$ и, значит, $\alpha_n \cap e_n \subset F \cap \alpha_n$. Отсюда имеем $\alpha_n \cap \complement e_n \supset \alpha_n \cap \complement F$ и $V_n \supset \supset \alpha_n \cap \complement F$. Таким образом, тонкая окрестность $V = \complement F$ удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Пример тонкого предела.

Теорема. *Пусть E — замкнутое множество, разреженное в точке x_0, и v — строго положительная супергармоническая функция, определенная на $\complement E$ в окрестности x_0. Тогда v имеет тонкий предел в точке x_0 (известно даже, что этот предел строго положителен)*[1].

В самом деле, пусть определенная в окрестности точки x_0 супергармоническая функция w конечна в x_0, причем $\lim\limits_{x \to x_0} w(x) = +\infty$, $x \neq x_0$, $x \in E$. Предположим сначала, что $\lambda = \lim\limits_{x \to x_0} [v(x) + w(x)] < +\infty$, $x \in \complement E$, и пусть $k > \lambda$. Существует окрестность V точки x_0, такая, что для всех $y \in V \cap (\partial E - \{x_0\})$ имеем $\underline{\lim}_{x \to y} [v(x) + w(x)] > k$, $x \in \complement E$. Функция $u_1 = \inf(v + w, k)$ является супергармонической на $\complement E$ и принимает значение k в окрестности каждой точки $y \in V \cap (\partial E - \{x_0\})$. Константа k является продолжением функции u_1 на множество $E - \{x_0\}$; из предыдущего известно, что это продолжение есть супергармоническая функция на $V - \{x_0\}$, супергармоническим продолжением которой является функция u во всем V. Таким образом, супергармоническая функция u в V тонко непрерывна и ее тонкий предел в точке x_0 равен $u(x_0) = = \underline{\lim}_{x \to x_0} u(x) = \lambda < k$, $x \neq x_0$. Следовательно, на множестве $\complement E$ функции u_1 и $v + w$ имеют один и тот же тонкий предел в точке x_0; кроме того, функция w, будучи супергармонической и конечной в точке x_0, имеет конечный тонкий предел $w(x_0)$. Отсюда следует, что функция v имеет тонкий предел в точке x_0.

Если $\underline{\lim}_{x \to x_0} [v(x) + w(x)] = +\infty, x \in \complement E$, то функция $v + w$ имеет, очевидно, бесконечный тонкий предел в точке x_0, и заключение теоремы остается справедливым.

[1]) По поводу дополиеиий см. в библиографии работы Брело 1946 и 1954—56 г.

БИБЛИОГРАФИЯ

Brelot M., Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *J. math. pures et appl.*, **19** (1940), 319—337.

Brelot M., Sur les ensemblés effilés, *Bull. Sci. Math.*, **68** (1944), 12—36.

Brelot M., Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités, *J. math. pures et appl.*, **24** (1945), 1—32.

Brelot M., Étude générale des fonctions harmoniques ou sousharmoniques positives au voisinage d'un point frontière irrégulier, *Ann. Univ. Grenoble*, 22 (1946), 205—219.

Brelot M., *J. d'analyse math.*, **4** (1954—56).

Brelot M., Introduction axiomatique de l'effilement, *Ann. mat. pura ed appl.*, 57 (1962), 77—96.

Deny J., *Ann. Univ. Grenoble*, **23** (1948).

Deny J., Les potentiels d'energie finie, *Acta Math.*, 82 (1950), 107—183.

Wiener N., Certain notions in potential-theory, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Technol.*, **3** (1924), 24—51.

Глава VIII

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ R^n

§ 1. Определение функции $\overline{H}_f$

Метод, которым мы будем пользоваться в этой главе, имеет своим источником работу Перрона 1923 г. В основе этого метода лежит идея аппроксимации, которую можно найти уже у Пеано (1880 г.), применившего ее для изучения обыкновенного дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y)$. Каждому начальному значению y_0 неизвестной функции y сопоставляется семейство Ψ таких функций y, что $y(x_0) = y_0$ и $y'(x) \leqslant f[x, y(x)]$, и семейство Φ таких функций z, что $z(x_0) = y_0$ и $z'(x) \geqslant f[x, z(x)]$. Далее следует рассмотреть функции $u = \sup y$, $y \in \Psi$, и $v = \inf z$, $z \in \Phi$, дающие интегралы данного уравнения с начальным значением y_0.

Такой же метод мы применим для решения задачи Дирихле на открытом множестве Ω пространства R^n; вместо указанных функций y и z мы будем использовать соответственно субгармонические и супергармонические функции, удовлетворяющие определенным граничным условиям.

Мы будем рассматривать здесь ограниченное открытое множество Ω пространства R^n. Пусть f — (конечная или нет) числовая функция, определенная на границе $\partial\Omega$. Обозначим через Φ_f^Ω, или просто через Φ, множество супергармонических в широком смысле функций v на Ω, ограниченных снизу и таких, что для каждой точки $x \in \partial\Omega$ имеем

$$\varliminf_{y \to x} v(y) \geqslant f(x).$$

Положим $\overline{H}_f^\Omega = \inf v$, $v \in \Phi$. Точно так же можно рассматривать семейство Ψ субгармонических в широком смысле функций u, ограниченных сверху и таких, что для каждого $x \in \partial\Omega$ имеем

$$\overline{\lim_{y \to x}}\, u(y) \leqslant f(x).$$

Положив $\underline{H}_f^\Omega = \sup u$, $u \in \Psi$, получим $\underline{H}_f^\Omega = -\overline{H}_{-f}^\Omega$.

Замечание 1. Если ω — некоторая связная компонента множества Ω, то в ω имеем $\overline{H}_f^\omega = \overline{H}_f^\Omega$, так как всякая супергармоническая функция из семейства Φ^ω, продолженная значением $+\infty$, дает функцию из Φ^Ω.

Замечание 2. Пусть F — положительная супергармоническая функция на открытом множестве $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$ и f — сужение F на $\partial\Omega$. Тогда $\overline{H}_f^\Omega$ равна в Ω экстремизации $\mathfrak{E}_F^\Omega$ (определенной в Ω_0), так как если $v \in \Phi$, то функция $\inf(v, F)$, продолженная на Ω_0 значениями F, является положительной супергармонической в Ω_0.

§ 2. Свойства

1) **Характер $\overline{H}_f$ как функции от x.** *На каждой связной компоненте множества Ω функция $\overline{H}_f^\Omega$ либо является гармонической, либо тождественно равна $+\infty$ или $-\infty$.*

В самом деле, пусть $\overline{B}$ — замкнутый шар, лежащий в некоторой связной компоненте множества Ω. Для любой функции $v \in \Phi$ пусть функция v' равна v на $\Omega - B$ и равна интегралу Пуассона на B, построенному по сужению v на ∂B. Функция v' супергармоническая в широком смысле и, следовательно, принадлежит Φ; так как $v' \leqslant v$, имеем $\overline{H}_f = \inf\limits_{v \in \Phi} v = \inf\limits_{v \in \Phi} v'$. В частности, в B функция $\overline{H}_f$ равна нижней огибающей интегралов Пуассона I_v^B, $v \in \Phi$. Если все эти интегралы бесконечны, то имеем $\overline{H}_f = +\infty$ в B. В противном случае конечные интегралы образуют фильтрующееся влево семейство, потому что семейство Φ фильтруется влево. В этом случае либо $\overline{H}_f = \inf\limits_{v \in \Phi} I_v^B$ есть гармоническая функция, либо она тождественно равна $-\infty$ в B. Отсюда легко получается доказываемое утверждение.

2) Сравнение функций $\underline{H}_f$ и $\overline{H}_f$.

Имеем $\underline{H}_f \leqslant \overline{H}_f$. В самом деле, рассмотрим две функции $u \in \Psi$ и $v \in \Phi$. Разность $u - v$ есть субгармоническая в широком смысле функция на Ω. Пусть x — такая точка $\partial\Omega$, что $|f(x)| < +\infty$. Так как $\overline{\lim\limits_{y\to x}}\, u(y) \leqslant f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{y\to x}}\, v(y) \geqslant f(x)$, имеем $\overline{\lim\limits_{y\to x}}\,[u(y) - v(y)] \leqslant 0$. Если $f(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{y\to x} v(y) = +\infty$, но $\overline{\lim\limits_{y\to x}}\, u(y) < +\infty$, так как u ограничена сверху; следовательно, $\overline{\lim\limits_{y\to x}}\,[u(y) - v(y)] = -\infty$. Наконец, если $f(x) = -\infty$, то $\lim\limits_{y\to x} u(y) = -\infty$ и $\underline{\lim\limits_{y\to x}}\, v(y) > -\infty$; поэтому, $\overline{\lim\limits_{y\to x}}\,[u(y) - v(y)] = -\infty$. Таким образом, для всех точек $x \in \partial\Omega$ имеем $\overline{\lim\limits_{y\to x}}\,[u(y) - v(y)] \leqslant 0$. В силу принципа максимума, отсюда вытекает, что $u - v \leqslant 0$. Так как u и v — две произвольные функции соответственно из Ψ и Φ, имеем $\underline{H}_f \leqslant \overline{H}^f$.

Если здесь равенство имеет место в одной точке, то оно имеет место во всей связной компоненте, содержащей эту точку, и общее значение $\underline{H}_f = \overline{H}^f$ есть гармоническая функция, либо тождественно равно $+\infty$ или $-\infty$.

Разрешимость. Определенная на $\partial\Omega$ функция f называется *разрешимой*, если $\underline{H}_f^\Omega$ и $\overline{H}_f^\Omega$ конечны и совпадают на Ω. В этом случае полагаем $H_f^\Omega = \underline{H}_f^\Omega = \overline{H}_f^\Omega$; гармоническая функция H_f называется *обобщенным решением задачи Дирихле относительно* f.

Если существует классическое решение для конечной и непрерывной функции f, то оно принадлежит одновременно Φ и Ψ и, следовательно, совпадает с обобщенным решением.

Из предыдущего вытекает, что для того, чтобы функция f была разрешимой, достаточно, чтобы в каждой связной компоненте множества Ω существовала по крайней мере одна такая точка x, в которой значения $\underline{H}_f^\Omega(x)$ и $\overline{H}_f^\Omega(x)$ равны и конечны.

3) Свойства $\overline{H}_f$ как функционала от f.

α) Для любой функции f, определенной на $\partial\Omega$, и произвольной константы k имеем $\overline{H}_{f+k} = \overline{H}_f + k$. Для произвольной константы $\lambda > 0$ имеем $\overline{H}_{\lambda f} = \lambda \overline{H}_f$ и $\overline{H}_{-\lambda f} = -\lambda \underline{H}_f$.

β) Отображение $f \to \overline{H}_f$ является возрастающим. Следовательно, $\inf f \leqslant \overline{H}_f \leqslant \sup f$.

γ) Пусть функции f и g определены на $\partial\Omega$. Тогда $\overline{H}_{f+g} \leqslant \overline{H}_f + \overline{H}_g$, если только левая часть неравенства имеет смысл всюду; в противном случае сумму $f+g$ можно определить произвольно там, где она не определена.

В самом деле, если $u \in \Phi_f$ и $v \in \Phi_g$, то для любого $x \in \partial\Omega$, учитывая указанное соглашение, имеем

$$\varliminf_{y \to x} [u(y) + v(y)] \geqslant f(x) + g(x).$$

Следовательно, $u + v \in \Phi_{f+g}$ и $u + v \geqslant \overline{H}_{f+g}$.

Отсюда вытекает, что для разрешимых функций f и g при условии, что разность $+\infty - \infty$ произвольна и $0 \cdot \infty = 0$, имеем $H_{\lambda f + \mu g} = \lambda H_f + \mu H_g$.

δ) Пусть $\{f_n\}$ — возрастающая последовательность определенных на $\partial\Omega$ функций f_n, таких, что $\overline{H}_{f_n} > -\infty$ для всех n. Если $f = \lim f_n$, то $\overline{H}_f = \lim \overline{H}_{f_n}$.

Можно ограничиться случаем, когда Ω — связное множество.

Предположим сначала, что функции $\overline{H}_{f_n}$ конечны для всех n; пусть $\varepsilon > 0$ и $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность таких чисел $\varepsilon_n > 0$, что $\varepsilon = \sum \varepsilon_n$. Фиксируем точку $x_0 \in \Omega$; для каждого индекса n существует такая супергармоническая функция $v_n \in \Phi_{f_n}$, что $v_n(x_0) - \overline{H}_{f_n}(x_0) \leqslant \varepsilon_n$. Функция

$$w = \lim_{n \to \infty} \overline{H}_{f_n} + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - \overline{H}_{f_n})$$

является супергармонической в широком смысле, и для каждого целого n имеем неравенство $w \geqslant \overline{H}_{f_n} + v_n - \overline{H}_{f_n} = v_n$. Отсюда следует, что функция w ограничена снизу и $\varliminf_{y \to x} w(y) \geqslant f_n(x)$ независимо от n для всех $x \in \partial\Omega$. Иначе говоря, $w \in \Phi_{f_n}$ для любого n. Пусть $y_0 \in \partial\Omega$ и $\lambda < f(y_0)$, если $f(y_0) > -\infty$. Существует натуральное число n_0, такое, что для всех $n \geqslant n_0$ имеем $\lambda \leqslant f_n(y_0) \leqslant f(y_0)$; значит, $\underline{\lim}_{y \to y_0} w(y) \geqslant f_n(y_0) \geqslant \lambda$ и $\underline{\lim}_{y \to y_0} w(y) \geqslant f(y_0)$, поскольку λ произвольно. Таким образом, $w \in \Phi_f$ и $w \geqslant \overline{H}_f$. Следовательно, в точке x_0 имеем

$$\overline{H}_f(x_0) \leqslant \lim_{n\to\infty} \overline{H}_{f_n}(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [v_n(x_0) - \overline{H}_{f_n}(x_0)] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \overline{H}_{f_n}(x_0) + \varepsilon,$$

откуда $\overline{H}_f(x_0) \leqslant \lim_{n\to\infty} \overline{H}_{f_n}(x_0)$, поскольку ε произвольно. С другой стороны, $\lim_{n\to\infty} \overline{H}_{f_n} \leqslant \overline{H}_f$. Так как точка x_0 произвольна, $\overline{H}_f = \lim_{n\to\infty} \overline{H}_{f_n}$.

Если существует такой индекс m, что $\overline{H}_{f_m} = +\infty$, то $\overline{H}_{f_n} = +\infty$ для всех $n \geqslant m$ и $\overline{H}_f = +\infty$. Доказываемое соотношение также выполняется.

ε) Пусть ω — открытое множество, содержащееся в Ω, и f — определенная на $\partial\Omega$ функция, причем продолжение f на Ω равно $F = \overline{H}_f^{\Omega}$. Тогда $\overline{H}_F^{\omega} = \overline{H}_f^{\Omega}$ на ω.

Ограничимся случаем, когда Ω и ω — связные множества. По определению, имеем $\overline{H}_f^{\Omega} \geqslant \overline{H}_F^{\omega}$. Значит, если $\overline{H}_f^{\Omega} = -\infty$, то доказываемое равенство выполняется. Если $\overline{H}_f^{\Omega} = +\infty$, то, принимая во внимание, что каждая гипергармоническая функция из Φ_F^{ω}, продолженная значением $+\infty$, дает гипергармоническую функцию, мажорирующую $\overline{H}_f^{\Omega}$, получаем $\overline{H}_F^{\omega} = +\infty$. Пусть, наконец, функция $\overline{H}_f^{\Omega}$ конечна. Пусть $w \in \Phi_F^{\omega}$; тогда функция $\inf(w, \overline{H}_f^{\Omega})$ на ω, продолженная значениями $\overline{H}_f^{\Omega}$, дает гипергармоническую функцию V на Ω. Введем в рассмотрение функцию $v \in \Phi_f^{\Omega}$ и пусть $U = V + v - \overline{H}_f^{\Omega}$. Рассматривая множества, на которых $V = w$ в ω или $V = \overline{H}_f^{\Omega}$ в Ω, находим, что в каждой граничной точке из Ω справедливы соотношения $\underline{\lim}\, U \geqslant f$, $\underline{\lim}\, U > -\infty$, откуда $U \geqslant \overline{H}_f^{\Omega}$, $V \geqslant \overline{H}_f^{\Omega}$. Следовательно, $w \geqslant \overline{H}_f^{\Omega}$ и, наконец, $\overline{H}_F^{\omega} \geqslant \overline{H}_f^{\Omega}$.

В случае, когда функция f разрешима для Ω, получаем, что F разрешима для ω и $H_F^{\omega} = H_f^{\Omega}$; это легко доказать и непосредственно.

§ 3. Случай конечных и непрерывных граничных данных

Теорема Винера. *Всякая конечная и непрерывная функция f, определенная на $\partial\Omega$, разрешима.*

Докажем сначала эту теорему в том частном случае, когда функция f допускает конечное непрерывное продолжение F на $\overline{\Omega}$, являющееся супергармонической функцией на Ω.

Имеем $F \in \Phi_f$, откуда $F \geqslant \overline{H}_f$, и для любого $x \in \partial\Omega$

$$\overline{\lim_{y \to x}}\, \overline{H}_f(y) \leqslant \overline{\lim_{y \to x}}\, F(y) = F(x) = f(x).$$

Следовательно, $\overline{H}_f \in \Psi_f$ и $\underline{H}_f = \overline{H}_f$.

Продолжение доказательства основывается на следующих леммах.

Лемма 1. *Равномерный предел f равномерно ограниченных разрешимых функций f_n также является разрешимой функцией, причем* $\lim\limits_{n \to \infty} H_{f_n} = H_f$.

В самом деле, из неравенств $f_n - \varepsilon < \lim\limits_{n \to \infty} f_n = f < f_n + \varepsilon$ получаем

$$H_{f_n} - \varepsilon < \underline{H}_f \leqslant \overline{H}_f < H_{f_n} + \varepsilon.$$

Лемма 2. *Всякая конечная и непрерывная функция f на компактном множестве K может быть равномерно аппроксимирована разностями двух конечных и непрерывных функций, супергармонических внутри K (и даже положительных на K).*

Лемму можно доказать, аппроксимируя f некоторым полиномом $\varphi(x)$. Полиномы $\varphi(x) + kx_1^2$ и kx_1^2 являются супергармоническими функциями в любом фиксированном шаре при подходящем выборе $k < 0$.

Рассуждая непосредственно, согласно замечанию Эрве в более поздней аксиоматике, утверждение можно вывести из теоремы аппроксимации Стоуна, из существования супергармонической функции, разделяющей две произвольные точки x' и x'' (как функция $-\|x-x'\|$) и из следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть u и v — две конечные и непрерывные супергармонические функции на открытом множестве Ω. Тогда $|u-v|$, а также $(u-v)^+$, $(u-v)^-$, $\sup(u, v)$ и $\inf(u, v)$, могут быть представлены как разности конечных и непрерывных супергармонических функций (и даже положительных).*

В самом деле,

$$\sup(u, v) = u+v-\inf(u, v),$$
$$(u-v)^+ = u-\inf(u, v),$$
$$(u-v)^- = v-\inf(u, v),$$
$$|u-v| = u+v-2\inf(u, v).$$

Между прочим, это утверждение остается в силе и в том случае, когда ограничение конечности и непрерывности отброшено, при условии, что разности и равенства рассматриваются квазивсюду.

Вариация множества Ω. Пусть f — непрерывная числовая функция, определенная на $\partial\Omega$. Рассмотрим некоторое конечное и непрерывное продолжение F функции f на Ω. *Если $\{\Omega_n\}$ — покрытие Ω возрастающей последовательностью открытых множеств $\Omega_n \subset \Omega$, то $\lim\limits_{n\to\infty} H_F^{\Omega_n} = H_f^{\Omega}$.*

Наиболее короткое доказательство получается, если рассматривать случай, когда F — супергармоническая функция на Ω, и опираться на лемму об аппроксимации. В этом случае функции $H_F^{\Omega_n} \leqslant F$ убывают и $H_F^{\Omega_n} \geqslant H_f^{\Omega}$, так как если $u \in \Phi_F^{\Omega_n}$, то функция $\inf(u, F)$, продолженная значениями F, принадлежит $\Phi_F^{\Omega_p}$ при $p > n$ и Φ_f^{Ω}. Предел $\lim H_F^{\Omega_n} \geqslant H_f^{\Omega}$ является гармонической функцией и $\lim H_F^{\Omega_n} \leqslant F$; следовательно, этот предел принадлежит Ψ_f^{Ω} и не превосходит H_f^{Ω}.

Отметим, что непосредственное доказательство можно получить, опираясь только на принцип максимума.

Замечание. Отметим, что для конечной и непрерывной f функция H_f является единственной гармонической функцией, которая линейно зависит от f, возрастает при возрастании f и совпадает с классическим решением задачи Дирихле, если последнее существует. Этот результат принадлежит М. В. Келдышу (он справедлив в R^n при $n \geqslant 2$); первоначальное доказательство было сложным, но теперь он доказывается очень просто (см. в библиографии работу Брело 1960—1961).

Гармоническая мера. Пусть x_0 — некоторая точка из Ω, функция f конечна и непрерывна на $\partial\Omega$. Отображение $f \longrightarrow H_f(x_0)$ определяет положительную меру на компактном множестве $\partial\Omega$. Эта мера обозначается $\mu_{x_0}^{\Omega}$ или, короче, μ_{x_0}, и называется *гармонической мерой* в точке x_0. Таким образом, для всякой непрерывной на $\partial\Omega$ функции f имеем

$$H_f(x_0) = \int_{\partial\Omega} f(y)\, d\mu_{x_0}(y).$$

Это формула Валле-Пуссена, полученная методом выметания.

§ 4. Основная теорема разрешимости[1])

Пусть Ω — ограниченная область пространства R^n и x — некоторая точка из Ω. Для того чтобы определенная на $\partial\Omega$ функция f была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы она была μ_x-интегрируемой, и тогда

$$H_f(x) = \int_{\partial\Omega} f\, d\mu_x.$$

Более того, для любой функции f имеют место равенства

$$\overline{H}_f(x) = \overline{\int_{\partial\Omega}} f\, d\mu_x, \quad \underline{H}_f(x) = \underline{\int_{\partial\Omega}} f\, d\mu_x.$$

Пусть сначала f — полунепрерывная снизу функция, причем $f > -\infty$ и, следовательно, f ограничена снизу; тогда справедливы равенства

$$\overline{H}_f(x) = \underline{H}_f(x) = \int_{\partial\Omega} f\, d\mu_x, \tag{1}$$

причем члены этих равенств могут быть равны $+\infty$.

[1]) Оригинальное доказательство (работа Брело 1939) опирается на изучение поведения огибающих $\overline{H}_f$ и $\underline{H}_f$ на границе.

В самом деле, f есть предел возрастающей последовательности $\{f_n\}$ конечных и непрерывных функций на $\partial\Omega$. Согласно доказанному свойству [§ 2, свойство 3, δ)], имеем

$$\overline{H}_f(x)=\sup \overline{H}_{fn}(x)=\sup \int\limits_{\partial\Omega} f_n d\mu_x=\int\limits_{\partial\Omega} f d\mu_x.$$

Кроме того, $\overline{H}_{fn}=\underline{H}_{fn}\leqslant \underline{H}_f$, откуда $\sup H_{fn}\leqslant \underline{H}_f$, т. е. $\overline{H}_f\leqslant \underline{H}_f$. Следовательно, функции $\overline{H}_f(x)$ и $\underline{H}_f(x)$ совпадают и равны конечному или нет интегралу $\int\limits_{\partial\Omega} f d\mu_x$.

Точно так же, если f — полунепрерывная сверху функция, $f<+\infty$, то имеют место равенства (1), причем члены этих равенств могут быть равны $-\infty$.

Рассмотрим теперь произвольную функцию f. Докажем, что $\overline{H}_f(x)=\overline{\int\limits_{\partial\Omega}} f d\mu_x$ и, следовательно, $\underline{H}_f(x)=\underline{\int\limits_{\partial\Omega}} f d\mu_x$.

Обозначим через Θ множество определенных на $\partial\Omega$ функций $\varphi>-\infty$, полунепрерывных снизу и мажорирующих f. По определению,

$$\overline{\int\limits_{\partial\Omega}} f d\mu_x=\inf_{\varphi\in\Theta}\int\limits_{\partial\Omega}\varphi d\mu_x=\inf_{\varphi\in\Theta} \overline{H}_\varphi\geqslant \overline{H}_f(x).$$

Пусть дано $\varepsilon>0$; для фиксированной точки x существует такая функция $v\in\Phi_f$, что $v(x)\leqslant \overline{H}_f(x)+\varepsilon$. Функция $w(z)=\varliminf\limits_{y\to z} v(y)$, $z\in\partial\Omega$, очевидно, принадлежит Θ и $\overline{H}_w\leqslant v$. Таким образом, $\overline{H}_w(x)\leqslant \overline{H}_f(x)+\varepsilon$ и, следовательно, $\overline{\int\limits_{\partial\Omega}} f d\mu_x\leqslant \overline{H}_f(x)$.

Замечание. Если $\overline{H}_f$ конечна, то существует разрешимая и даже борелевская функция $g\geqslant f$, такая, что $H_g=\overline{H}_f$.

Это утверждение можно доказать в случае области, заметив, что $\overline{H}_f(x)=\inf \overline{H}_{f_0}(x)$ для полунепрерывных снизу функций $f_0>-\infty$, мажорирующих f, и рассмотрев убывающую последовательность таких функций для фиксированной точки x.

§ 5. Устранимые множества на границе

Пусть Ω — ограниченное открытое множество пространства R^n. Часть e границы $\partial\Omega$ называется *устранимой для* Ω, если она имеет μ_x-меру нуль, какова бы ни была точка $x \in \Omega$.

Критерий. *Для того чтобы часть e границы $\partial\Omega$ была устранимой для Ω, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая положительная супергармоническая функция v на Ω, что $\lim\limits_{x \to y} v(x) = +\infty$ для всех точек $y \in e$.*

Обозначим через φ_e характеристическую функцию множества e. Множество e устранимо тогда и только тогда, когда $\overline{H}_{\varphi_e}=0$. Предположим сначала, что Ω связно, и пусть $\varepsilon > 0$ и $\{\varepsilon_n\}$ — такая последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$, что $\varepsilon = \sum \varepsilon_n$. Рассмотрим точку $x_0 \in \Omega$. Если $\overline{H}_{\varphi_e}(x_0) = 0$, то для любого индекса n существует такая функция $v_n \in \Phi_{\varphi_e}$, что $v_n(x_0) \leqslant \varepsilon_n$. Так как $\varliminf\limits_{x \to y} v_n(x) \geqslant \varphi_e(y) \geqslant 0$ для любой точки $y \in \partial\Omega$, имеем $v_n \geqslant 0$. Таким образом, $v = \sum v_n$ — конечная в точке x_0 положительная супергармоническая функция на Ω.

Пусть $y \in e$; тогда для любого индекса n имеем $\varliminf\limits_{x \to y} v_n(x) \geqslant 1$ и, следовательно,

$$\varliminf_{x \to y} v(x) \geqslant \sum \varliminf_{x \to y} v_n(x) = +\infty.$$

Условие теоремы необходимо.

Наоборот, это условие достаточно, так как если такая функция v существует, то $\lambda v \in \Phi_{\varphi_e}$ при любом $\lambda > 0$ и, следовательно, $\overline{H}_{\varphi_e} \leqslant \inf\limits_{\lambda > 0} \lambda v$. Таким образом, $\overline{H}_{\varphi_e}$ обращается в нуль во всех тех точках Ω, где v конечна, т. е. почти всюду. Следовательно, $\overline{H}_{\varphi_e} = 0$.

В том случае, когда множество Ω не является связным, пусть $\{\omega_i\}$ — последовательность его связных компонент. Если множество e устранимо, то для всех индексов i существует такая положительная супергармоническая функция v_i на ω_i, что $\lim\limits_{x \to y} v_i(x) = +\infty$, $x \in \omega_i$, для любой точки $y \in e \bigcap \partial\omega_i$. Определим на Ω функцию v, положив ее равной $v_n + n$ на ω_n. Докажем, что v удовлетворяет условиям теоремы; во-первых, это строго положительная супергармоническая функция. Убедимся, что $\lim\limits_{x \to y} v(x) = +\infty$, $x \in \Omega$, для всех $y \in e$. Пусть A — произвольное число; для $n \geqslant A$ имеем $v(x) \geqslant n \geqslant A$ для $x \in \omega_n$. Для каждого $n < A$ существует окрестность точки y, в которой $v_n \geqslant A$ (эта окрестность может не пересекаться с ω_n); следовательно, в пересечении ω этих окрестностей все функции v_n, $n < A$, мажорируют A. Значит, в пересечении $\omega \bigcap \Omega$ функция v мажорирует A.

§ 6. Поведение решения на границе

Наиболее естественное расширение классической задачи Дирихле состоит, прежде всего, в изучении поведения H_f для конечной и непрерывной функции f.

Определение. Пусть Ω — ограниченная область пространства R^n. Граничная точка x_0 называется *регулярной*, если $\lim\limits_{x \to x_0} H_f(x) = f(x_0)$ для любой конечной и непрерывной функции f на $\partial\Omega$.

Разрешимость классической задачи Дирихле для всех f равносильна регулярности всех граничных точек.

Первая задача состоит в оценке множества иррегулярных точек. Ответ дается следующей теоремой.

Теорема. *Регулярные точки границы $\partial\Omega$ области Ω — это те точки, в которых дополнение* $C\Omega$ *не является разреженным.*

Если точка x_0 регулярна, то строго положительная непрерывная субгармоническая функция $f(x) = \|x - x_0\|$ в Ω минорирует гармоническую функцию H_f, причем H_f стремится к $f(x_0) = 0$ в точке x_0. Следовательно, дополнение $C\Omega$ не является разреженным в точке x_0 (гл. VII, § 5, теорема).

Наоборот, предположим, что дополнение $C\Omega$ не является разреженным в точке x_0. Если f — сужение на $\partial\Omega$ конечной и непрерывной супергармонической функции $F > 0$ в шаре $B \supset \overline{\Omega}$, то из нашего предположения следует, что экстремизация $\mathfrak{E}_F^{\Omega}$ относительно B равна F

в точке x_0, $\mathfrak{E}_F^\Omega(x_0)=F(x_0)=f(x_0)$ (гл. VII, § 1). Так как $\mathfrak{E}_F^\Omega \leqslant F$, экстремизация $\mathfrak{E}_F^\Omega$ непрерывна в x_0, и так как H_f есть сужение $\mathfrak{E}_F^\Omega$ на Ω (§ 1, замечание 2), заключаем, что $\lim\limits_{x \to x_0} H_f(x)=f(x_0)$, $x \in \Omega$. Переход к произвольной конечной и непрерывной функции f можно произвести, опираясь на лемму 2 (§ 3).

Впрочем, достаточность условия теоремы еще более непосредственно получается из приводимой ниже общей теоремы, не зависящей от теоремы Винера и от аппроксимации по лемме 2; эта теорема опирается только на критерий разреженности замкнутых множеств (гл. VII, § 5).

Теорема. *Если в точке x_0 дополнение $C\Omega$ не является разреженным, то для любой ограниченной сверху числовой функции f на $\partial\Omega$ (конечной и непрерывной или нет) имеем*

$$\varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} \overline{H}_f(x) \leqslant \varlimsup_{\substack{y \to x_0 \\ y \in \partial\Omega}} f(y)=\lambda.$$

Если $\lambda<+\infty$, то число $\Lambda>\lambda$ мажорирует f в некоторой открытой окрестности V точки x_0. Пусть B — некоторый шар, содержащий $\overline{\Omega}$, и U — строго положительная в $B-(C\Omega \cap V_1)$ супергармоническая функция, стремящаяся к 0 в x_0; здесь V_1 — замкнутая окрестность точки x_0, содержащаяся в V. Функция $\alpha U+\Lambda$ при достаточно большом α принадлежит Φ_f и, следовательно, мажорирует $\overline{H}_f$, откуда $\varlimsup\limits_{x \to x_0} \overline{H}_f(x) \leqslant \Lambda$.

Замечание 1. Из этой теоремы непосредственно получается, что если функция f конечна и непрерывна, то квазивсюду на границе имеем $\lim\limits_{x \to y} \overline{H}_f(x)=\lim\limits_{x \to y} \underline{H}_f(x)=f(y)$, откуда $\overline{H}_f=\underline{H}_f$ (разность $\overline{H}_f-\underline{H}_f$ мажорируется функцией ε_v, $v>0$, в шаре B, ассоциированной с подходящим полярным множеством границы). Таким образом, здесь мы получаем доказательство теоремы Винера.

Замечание 2. Не используя понятия разреженности и теоремы сходимости, можно показать[1]), что регуляр-

[1]) См. в библиографии работу Брело 1939 г.

ность равносильна существованию строго положительной супергармонической функции на Ω в окрестности x_0, обращающейся в нуль в точке x_0. Доказательство значительно упрощается, если потребовать, чтобы эта функция была в точке x_0 строго меньше, чем ее нижняя грань вне любой окрестности точки x_0; такие функции называются *барьерами*.

Основное следствие. *Множество иррегулярных граничных точек есть полярное множество* (*типа* K_σ). Это — основной результат Келлога и Эванса (см. в библиографии работу Эванса, 1933).

Замечание. Иррегулярная граничная точка открытого множества Ω является иррегулярной граничной точкой для *одной и только одной* связной компоненты (см. гл. VII, § 5, замечание 2).

Отметим, что из теории разреженности можно получить все многочисленные достаточные условия регулярности, а стало быть и разрешимости классической задачи Дирихле, так как последняя требует регулярности всех граничных точек. Упомянем здесь условие Пуанкаре, состоящее в том, что в окрестности точки $x_0 \in \partial\Omega$ в $C\Omega$ должен содержаться конус с вершиной x_0 и непустой внутренностью.

§ 7. Поведение H_f в иррегулярной граничной точке x_0, когда функция f разрешима

Согласно последней теореме гл. VII, в такой точке существует тонкий предел, когда $f \geqslant 0$, а следовательно, также и тогда, когда f ограничена снизу или сверху.

Случай конечной и непрерывной функции f. Тонкий предел представляет собой возрастающий линейный функционал от f, представимый в форме интеграла Радона $\int\limits_{\partial\Omega} f\,dv_{x_0}$.

Кроме того, согласно Келдышу и Фростману, предельные значения H_f в x_0 заключены между[1]) $f(x_0)$ и $\int\limits_{\partial\Omega} f\,dv_{x_0}$.

[1]) Они даже покрывают этот интервал, если только граница не является полярной в окрестности x_0, т. е. если существуют регулярные точки, сколь угодно близкие к x_0.

В самом деле (гл. VII, § 6, последняя теорема), в Ω существует разреженное в точке x_0 множество, вне которого H_f стремится к $\int\limits_{\partial\Omega} f d\nu_{x_0}$, когда $x \to x_0$. Расширим это множество до открытого множества $\omega \subset \Omega$, разреженного в точке x_0, которую можно считать граничной точкой ω. Пусть F — продолжение f значениями H_f^{Ω}; тогда $H_f^{\Omega} = H_F^{\omega}$. Отсюда видно, что нижний и верхний пределы функции H_f^{Ω} на ω в точке x_0 содержатся между пределами F на $\partial\omega$, т. е. между $f(x_0)$ и $\int\limits_{\partial\Omega} f d\nu_{x_0}$.

Следствие (теорема М. В. Келдыша). *Существует такое счетное множество иррегулярных точек x_i, что если $\lim\limits_{x \to x_i} H_f(x) = f(x_i)$ для всех x_i, то $\lim\limits_{x \to X} H_f(x) = f(X)$ для любой точки $X \in \partial\Omega$.*

В самом деле, рассмотрим пространство конечных непрерывных функций f на $\partial\Omega$, снабженное топологией равномерной сходимости. Множество $\mathfrak{H}$ линейных функционалов от f вида

$$f(x) - \int\limits_{\partial\Omega} f d\nu_x$$

с индексом x, где x — иррегулярная точка, содержит счетное подмножество, относительно плотное в слабой топологии простой сходимости на $\mathfrak{H}$. Это следует[1]) из того, что рассматриваемое пространство функций f сепарабельно. Соответствующие этому подмножеству точки x_i отвечают условию теоремы, так как обращение в нуль разности $f(x_i) - \int\limits_{\partial\Omega} f d\nu_{x_i}$ для всех f влечет за собой обращение в нуль разности $f(x) - \int\limits_{\partial\Omega} f d\nu_x$ для всех иррегулярных точек x.

---

[1]) Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932, p. 129. (Украинский перевод: Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.)

Замечание. Отметим еще без доказательства, что выметание относительно Ω единичной массы, помещенной в граничной точке X, например, в некотором шаре, содержащем $\overline{\Omega}$, ничего не изменяет, если точка X регулярна, и дает меру $d\nu_X$, если точка X иррегулярна. Кроме того, для любой разрешимой функции f, ν_X-суммируемой в широком смысле, функция H_f имеет в иррегулярной точке X тонкий предел $\int\limits_{\partial\Omega} f d\nu_X$ (см. в библиографии работу Брело, 1946).

БИБЛИОГРАФИЯ

Brelot M., Fàmilles de Perron et problème de Dirichlet, *Acta Szeged*, **9** (1939).

Brelot M., Le problème de Dirichlet ramifié, *Ann. Univ. Grenoble*, **22** (1946), 167—200.

Brelot M., Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, *J. d'anal. math.*, 8 (1960—61), 273—288.

Brelot M., Choquet G., Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier*, **3** (1951—52).

Evans G. C., Applications of Poincaré's sweeping out process, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **19** (1933), 457—461.

Келдыш М. В., О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, *Докл. АН СССР*, 18 (1938), 315—318; то же название, *Успехи матем. наук*, 8 (1941), 171—292.

Perron O., Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe fur $\Delta u = 0$, *Math. Z.*, 18 (1923).

Wiener N., Certain notions in potential theory, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Technol.*, **3** (1924), 24—51.

Wiener N., The Dirichlet problem, ibid., 127—146.

Wiener N., Note on a paper of O. Perron, ibid., 4 (1925), 21—32.

Материал этой главы можно обобщить соответствующим образом на неограниченные открытые множества и даже на открытые множества определения гармонических и супергармонических функций, содержащие бесконечно удаленную точку. При этом удается построить единую теорию, не рассматривая отдельно внешнюю и внутреннюю задачи; следует, однако, иметь в виду, как уже указывалось (гл. II, библиография), что роль бесконечно удаленной точки различна в случае плоскости и в случае пространств R^n при $n \geqslant 3$. См. по этому поводу: Brelot M., *Ann. Ecole Norm. Super.*, **61** (1944).

С другой стороны, если h — строго положительная гармоническая функция на Ω, то можно ставить аналогичные граничные задачи, рассматривая пределы на границе отношений гармонических, супергармонических и субгармонических функций к функции h. Соответствующая специализация несложна. См. по этому поводу: Brelot M., Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontiere de Martin, *J. math. pures et appl.*, **35**(1956), 297—335.

Укажем, наконец, на задачу Дирихле для компактных множеств. См. следующие работы: Келдыш М. В., О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, *Докл. АН СССР*, **18** (1938), 315—318; *Матем. сб.*, 8 (50) (1940), 137—148; Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А., Об устойчивости решения задачи Дирихле, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 1937, 551—593; О сходящейся последовательности гармонических полиномов, *Тр. Матем. ин-та Груз. фил. АН СССР*, **1** (1937), 165—184; в особенности см. работу Brelot M., *Bull. Soc. Math. France*, **73** (1945). Эта задача связана с вопросами аппроксимации. См. работы: Ж. Дени; Н. С. Ландкофа, О плотности некоторых систем гармонических функций в пространстве функций, непрерывных на множестве, *Докл. АН СССР*, **55** (1947), № 1, 7—8; Аппроксимация непрерывных функций гармоническими, *Матем. сб.* **25** (1949), № 1, 95—106; и, в особенности, *Ann. Inst. Fourier*, **1** (1949).

Глава IX

ФУНКЦИЯ ГРИНА

§ 1. Определение

Мы будем рассматривать лишь ограниченное открытое множество Ω в пространстве R^n.

Теорема. *Пусть x — точка множества Ω; на Ω существует наименьшая строго положительная супергармоническая функция, ассоциированная мера которой мажорирует точечную меру ε_x, т. е. содержит массу* 1 *в точке x. Эта функция имеет вид*

$$G_x^\Omega(y) = h_x(y) - H_{h_x}(y), \quad y \in \Omega.$$

Прежде всего отметим, что функция G_x^Ω удовлетворяет поставленным условиям. Наоборот пусть v — строго положительная супергармоническая функция, удовлетворяющая поставленным условиям и, следовательно, в окрестности точки x имеющая вид

$$v = h_x + U + f,$$

где U есть h-потенциал положительной меры и f — гармоническая функция. Разность $w = v - h_x$, определенную на $\Omega - \{x\}$, можно продолжить в точку x супергармонически; это продолжение мы обозначим также через w. Тогда $\varliminf\limits_{y \to z} w(y) \geqslant -h_x(z)$, $y \in \Omega$, в каждой точке $z \in \partial\Omega$; значит, поскольку w ограничена снизу, $w \geqslant H_{-h_x} = -H_{h_x}$. Следовательно, $v \geqslant h_x - H_{h_x}$.

Замечание 1. Функция G_x^Ω является также на множестве $\Omega - \{x\}$ минимальной строго положительной гармонической функцией, имеющей в окрестности x вид $h_x +$ $+$ гармоническая функция. Исходя из этого, можно строить обобщения не только для многообразий, не обладающих границей, но и для уравнений, более общих, чем уравнение Лапласа.

Замечание 2. Если ввести в рассмотрение шар $B \supset \overline{\Omega}$ и считать функцию G_x^B известной, можно в предыдущем рассуждении и в выражении для G_x^Ω заменить h_x на G_x^B. Это замечание будет использоваться в дальнейшем.

Свойства. 1) Отображение $\Omega \to G_x^\Omega$, где Ω — ограниченная открытая окрестность точки x, возрастающее.

2) Пусть $\{\omega_n\}$ — возрастающее открытое покрытие Ω, $\omega_n \subset \Omega$; тогда

$$G_x^\Omega = \lim_{n\to\infty} G_x^{\omega_n}.$$

В самом деле, согласно 1), $\lim\limits_{n\to\infty} G_x^{\omega_n} \leqslant G_x^\Omega$. Кроме того, будучи пределом возрастающей последовательности, функция $\lim\limits_{n\to\infty} G_x^{\omega_n}$ является строго положительной супергармонической функцией в Ω и, как и $G_x^{\omega_n}$, в окрестности точки x имеет вид $h_x +$ гармоническая функция.

3) **Симметрия:** для любых точек x и y множества Ω имеем

$$G_x^\Omega(y) = G_y^\Omega(x).$$

В самом деле,

$$G_x^\Omega(y) = h_x(y) - \int_{\partial\Omega} h_x(z)\, d\mu_y(z) = h_y(x) - U^{\mu_y}(x).$$

Таким образом, $G_x^\Omega(y) = h_y(x) - U^{\mu_y}(x)$ есть строго положительная супергармоническая функция от x в Ω, ассоциированная мера которой есть ε_y (функция U^{μ_y} является гармонической в Ω). Следовательно, $G_x^\Omega(y) \geqslant G_y^\Omega(x)$ и, точно так же, $G_y^\Omega(x) \geqslant G_x^\Omega(y)$, что и доказывает утверждение.

Обозначения. Положим

$$G^\Omega(x, y) = G_x^\Omega(y) = G_y^\Omega(x) = G^\Omega(y, x).$$

Следующие записи равноправны:

$$G^\Omega(x, y) = \begin{cases} h(\|y - x\|) - \int\limits_{\partial\Omega} h(\|z - x\|)\, d\mu_y(z), \\ h(\|x - y\|) - \int\limits_{\partial\Omega} h(\|z - y\|)\, d\mu_x(z). \end{cases}$$

Функция $G_x^\Omega(y)$ от y называется *функцией Грина множества* Ω *с полюсом* x. Функция $G^\Omega(x, y)$ пары точек (x, y) называется *ядром Грина множества* Ω.

§ 2. Продолжение функции Грина

В $\complement\{x\}$ *существует единственная субгармоническая функция, равная* G_x *на* $\Omega-\{x\}$ *и* 0 *вне* $\overline{\Omega}$.

Единственность здесь будет доказана только при дополнительном предположении, что эта функция равна нулю почти всюду на $\partial\Omega$.

Положим

$$G'_x(y)=h_x(y)-\int_{\partial\Omega} h_y(z)\,d\mu_x^\Omega(z).$$

Тогда функция G'_x удовлетворяет всем условиям теоремы, так как для $y\in\complement\overline{\Omega}$ имеем

$$h_y(x)=H_{h_y}^\Omega(x)=\int_{\partial\Omega} h_y(z)\,d\mu_x^\Omega(z).$$

Докажем теперь единственность при указанном предположении. Пусть $\{\omega_n\}$ — возрастающая последовательность открытых множеств $\omega_n\subset\Omega=\bigcup\omega_n$, граница которых имеет меру Лебега нуль (например многогранников). Обозначим через $\mu_x^{\omega_n}$ гармоническую меру в точке x для $\partial\omega_n$; как известно, последовательность $\{\mu_x^{\omega_n}\}_n$ грубо сходится к μ_x^Ω (гл. VIII, § 3). Пусть дано число $r>0$; для каждой числовой функции F, определенной и суммируемой в окрестности точки $z_0\in\partial\Omega$, можно построить функцию $A_{z_0}[F]=\mathfrak{A}_F^r(z_0)$. Пусть φ_n — продолжение значением 0 функции $G_x^{\omega_n}(y)$ и φ — продолжение значением 0 функции $G_x^\Omega(y)$; согласно свойству 2 (§ 1), φ_n сходятся, возрастая, к φ. Кроме того, вне $\partial\omega_n$, а следовательно, почти всюду имеем

$$\varphi_n(y)=h_x(y)-\int h_z(y)\,d\mu_x^{\omega_n}(z)=$$

$$=\int [h_x(y)-h_z(y)]\,d\mu_x^{\omega_n}(z),$$

откуда

$$A_{z_0}[\varphi_n] = \int A_{z_0}[h_x - h_z]\, d\mu_x^{\omega_n}(z).$$

Поскольку функция $A_{z_0}[h_x - h_z]$ от z конечна и непрерывна, имеем

$$\lim_{n\to\infty} A_{z_0}[\varphi_n] = \lim_{n\to\infty} \int A_{z_0}[h_x - h_z]\, d\mu_x^{\omega_n}(z) =$$

$$= \int A_{z_0}[h_x - h_z]\, d\mu_x^{\Omega}(z) = A_{z_0}\left[\int (h_x - h_z)\, d\mu_x^{\Omega}(z)\right].$$

С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} A_{z_0}[\varphi_n] = A_{z_0}[\lim_{n\to\infty} \varphi_n] = A_{z_0}[\varphi],$$

и, следовательно,

$$A_{z_0}[\varphi] = A_{z_0}\left[\int (h_x - h_z)\, d\mu_x^{\Omega}(z)\right] = A_{z_0}[G'_x].$$

Таким образом, для любой субгармонической функции ψ на $\mathbf{C}\{x\}$, равной G_x^{Ω} на $\Omega - \{x\}$, 0 во внешности Ω и почти всюду равной нулю на $\partial\Omega$, имеем

$$^{r}A_{z_0}[\psi] = A_{z_0}[\varphi] = A_{z_0}[G'_x].$$

Заставляя r стремиться к нулю, отсюда получаем $\psi(z_0) = G'_x(z_0)$, что и доказывает единственность.

Наконец, докажем, что $G'_x(z_0) = \overline{\lim_{y\to z_0}}\, G_x(y)$, $y \in \Omega$. В одну сторону неравенство известно; кроме того, $\lim_{r\to 0} A_{z_0}[\varphi] \leqslant \overline{\lim_{y\to z_0}}\, G_x(y)$, $y \in \Omega$.

В дальнейшем мы будем использовать продолжение G_x вне Ω посредством функции G'_x, т. е. продолжение в $\mathbf{C}\{x\}$ как регуляризации субмедианной функции, полученной при продолжении G_x значением 0. Общее определение для произвольных x, выявляющее симметрию, мы оставляем здесь в стороне.

§ 3. Различные применения; характеризация иррегулярных точек

Пусть Ω — некоторая область. Если установлено непосредственно, что регулярная точка характеризуется существованием в окрестности этой точки в Ω строго положительной супергармонической функции, обращающейся в нуль в самой точке, то можно показать, не используя ни понятия разреженности, ни теоремы сходимости, что *иррегулярные точки — это те точки z, в которых $G'_x(z) > 0$ или $\overline{\lim\limits_{y \to z}} G_x(y) > 0$, $y \in \Omega$, для фиксированной точки $x \in \Omega$* (Булиган).

Опираясь на это свойство, можно доказать, при использовании дополнительных сведений, что иррегулярные точки образуют полярное множество.

Докажем это последнее утверждение, не используя понятия разреженности, но опираясь на теорему сходимости. Пусть $\{\omega_n\}$ — возрастающее относительно компактное открытое покрытие области Ω, $\omega_n \subset \overline{\omega}_n \subset \Omega$. Функции $G_x^{\omega_n}$, продолженные значением 0 и регуляризованные, дают в пределе при $n \to \infty$ функцию G_x^{Ω}, продолженную значением 0. Регуляризация этого последнего продолжения, дающая введенную выше функцию G'_x, может изменить значения предельной функции только на полярном множестве.

§ 4. Гармоническая мера и выметание

На множестве $\mathbf{C}\{x\}$ ассоциированная мера для функции

$$-G_x(y) = -h_x(y) + \int h_y(z)\, d\mu_x(z)$$

есть μ_x. Следовательно, μ_x является также ассоциированной мерой для супергармонической функции $h_x - G_x$, которая совпадает, между прочим, с регуляризацией функции, равной h_x на $\mathbf{C}\Omega$ и H_{h_x} на Ω. Таким образом, во внешности Ω и в регулярных точках $\partial\Omega$ имеем $U^{\mu_x} = h_x = U^{\varepsilon_x}$, тогда как $U^{\mu_x} = H_{h_x}$ в Ω.

Кроме того, *гармоническую меру μ_x на $\partial\Omega$ можно охарактеризовать* как единственную положительную меру, такую, что

1) ее потенциал мажорируется функцией H_{h_x} в Ω;

2) ее потенциал в $\mathbf{C}\Omega$ равен квазивсюду h_x.

В самом деле, гармоническая мера удовлетворяет, конечно, этим условиям.

Наоборот, пусть положительная мера μ удовлетворяет условиям 1) и 2). Докажем сначала, что потенциал U^{μ} можорирует H_{h_x} в Ω. Пусть $y \in \Omega$ и v — положительная супергармоническая функция в $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$, ассоциированная с полярным множеством тех точек из $C\Omega$, в которых U^{μ} отличается от h_x, и такая, что $v(y) \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — произвольное число). Сумма $w = U^{\mu} + v$ есть супергармоническая функция, мажорирующая h_x на $\partial\Omega$; следовательно, она мажорирует H_{h_x} в Ω и, в частности,

$$U^{\mu}(y) \geqslant H_{h_x}(y) - v(y) \geqslant H_{h_x}(y) - \varepsilon.$$

Значит, $U^{\mu} \geqslant H_{h_x}$ в Ω. С другой стороны, согласно 1), $U^{\mu} \leqslant H_{h_x}$ в Ω. Таким образом, $U^{\mu} = H_{h_x}$ в Ω. Меры μ и μ_x имеют один и тот же потенциал квазивсюду, а значит, и всюду. Следовательно, $\mu = \mu_x$.

Первая часть этого рассуждения показывает также, что если только μ — положительная мера на $\partial\Omega$, для которой неравенство $U^{\mu} \geqslant h_x$ выполняется квазивсюду в $C\Omega$, то неравенство $U^{\mu} \geqslant U^{\mu_x}$ выполняется в Ω, а следовательно, квазивсюду и всюду.

Иначе говоря, μ_x есть положительная мера на $\partial\Omega$, имеющая *наименьший* потенциал, мажорирующий h_x квазивсюду в $C\Omega$.

Если вести рассуждение в шаре $B \supset \overline{\Omega}$ (или даже в пространстве R^n при $n \geqslant 3$) с потенциалами Грина, то будут применимы предшествующие результаты, полученные при изучении выметания (гл. VI); μ_x можно представить как массу, полученную выметанием ε_x относительно $B - \Omega$ в B.

§ 5. Глобальное представление Рисса на произвольном открытом множестве

Пусть v — положительная супергармоническая функция на ограниченном открытом множестве Ω. Тогда на Ω

$$v(y) = \int_{\Omega} G(x, y)\, d\mu(x) + v^*(y),$$

где μ — ассоциированная мера для v, G — функция Грина множества Ω и v^* — наибольшая гармоническая миноранта функции v в Ω.

В самом деле, пусть $\Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ и φ — определенная на $\partial(\Omega - \Omega_1) = \partial\Omega \bigcup \partial\Omega_1$ функция, равная нулю на $\partial\Omega$ и v на $\partial\Omega_1$. Тогда продолжение функции $H_\varphi^{\Omega - \overline{\Omega}_1}$ значениями v есть квазисупергармоническая функция на Ω (см. § 3), и ее регуляризация v_1 с ассоциированной мерой μ_1 имеет вид

$$v_1(y) = \int_\Omega G(x, y)\, d\mu_1(x),$$

так как оба члена в этом равенстве в окрестности $\partial\Omega$ ограничены и обращаются в нуль в регулярных точках. Следовательно, в Ω_1 (где $\mu = \mu_1$)

$$v_1 \geqslant \int_{\Omega_1} G_x\, d\mu_1(x)$$

и, значит, $v \geqslant \int_\Omega G_x\, d\mu(x)$ на Ω. Рассуждая точно так же для $v - v^*$, находим, что $v - v^* \geqslant \int_\Omega G_x\, d\mu(x)$. Однако разность $v - \int_\Omega G_x\, d\mu(x)$ квазивсюду равна гармонической функции, минорирующей v, а следовательно, и v^*. Отсюда следует доказываемое утверждение.

Пусть теперь v — произвольная супергармоническая функция на открытом множестве Ω и $\{\Omega_n\}$ — возрастающее относительно компактное открытое покрытие Ω, $\Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega$. Применяя предыдущий результат в Ω_n к разности v и ее наибольшей гармонической миноранты в Ω, видим, что в Ω существование гармонической миноранты равносильно требованию конечности потенциала Грина $\int_\Omega G(x, y)\, d\mu(x)$ хотя бы в одной точке каждой связной компоненты Ω. Если эти условия выполняются, то формула разложения Рисса остается в силе на всем множестве Ω.

§ 6. Наилучшая и наибольшая гармонические миноранты

Пусть открытые множества Ω_0 и Ω таковы, что $\overline{\Omega} \subset \Omega_0$, и пусть v — супергармоническая функция на Ω_0. Функция $\overline{v} = H_v^{\Omega}$ называется *наилучшей гармонической минорантой* v *в* Ω (это определение равносильно определению Ф. Рисса).

С другой стороны, мы знаем, что функция v имеет в Ω наибольшую гармоническую миноранту v^*, которую можно получить как предел наилучших гармонических минорант $H_v^{\Omega_n}$, когда Ω_n пробегает возрастающее открытое покрытие Ω, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$, ибо всякая гармоническая миноранта в Ω минорирует $H_v^{\Omega_n}$.

Фростман доказал, что две миноранты $\overline{v}$ и v^* совпадают, если граница $\partial\Omega$ не имеет иррегулярных точек. На самом деле его доказательство дает более сильный результат, который мы здесь докажем.

Для всех $x \in \Omega$ *имеем*

$$v^*(x) - \overline{v}(x) = \int_{\partial\Omega} G^{\Omega}(x, z)\, d\varrho(z),$$

где ϱ — *ассоциированная с* v *мера. Следовательно, для того чтобы две миноранты совпадали, необходимо и достаточно, чтобы множество иррегулярных точек* (*т. е. объединение множеств иррегулярных точек для всех связных компонент* Ω) *имело* ϱ-*меру нуль.*

Заметим сначала, что отображения $v \to \overline{v}$ и $v \to v^*$ аддитивны и что $\overline{v} = v^*$ в том случае, когда функция v конечна и непрерывна в окрестности $\partial\Omega$. Следовательно, можно ограничиться случаем потенциала некоторой меры с носителем, расположенным в открытом множестве, содержащем $\overline{\Omega}$; нам удобнее будет взять потенциал Грина в шаре B. Если δ — достаточно малая окрестность $\partial\Omega$, то потенциал Грина сужения ϱ на $\delta - \partial\Omega$ сколь угодно мал в каждой фиксированной точке Ω; это же справедливо и для обеих его минорант. Отсюда следует равенство минорант для потенциала такой меры, которая не имеет масс на $\partial\Omega$. Остается исследовать случай, когда носитель ассоциированной меры расположен на $\partial\Omega$. Без потери общности можно вернуться к обычным потенциалам. Тогда

$$v^*(x) = v(x) = \int_{\partial\Omega} h(\|y-x\|)\, d\varrho(y)$$

и

$$\bar{v}(x) = \int_{\partial\Omega} v(z)\, d\mu_x(z) = \int_{\partial\Omega} d\mu_x(z) \int_{\partial\Omega} h(\|y-z\|)\, d\varrho(y) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} d\varrho(y) \int_{\partial\Omega} h(\|y-z\|)\, d\mu_x(z).$$

Отсюда получаем

$$v(x) - \bar{v}(x) = \int_{\partial\Omega} d\varrho(y) \Big[h(\|y-x\|) - \int_{\partial\Omega} h(\|y-z\|) d\mu_x(z) \Big] =$$

$$= \int_{\partial\Omega} G(x, y)\, d\varrho(y).$$

Применение 1.

Принцип мажорирования (в слабой форме). *Пусть v — потенциал Грина положительной меры μ на ограниченном открытом множестве Ω. Предположим, что потенциал v конечен на (замкнутом) носителе S меры μ или на*[1] ∂S; *можно также ограничиться предположением, что (полярное) множество точек разреженности носителя S имеет μ-меру нуль. Тогда всякая положительная супергармоническая функция w, мажорирующая v на S, мажорирует v всюду.*

В самом деле, пусть Ω_n — возрастающее открытое покрытие Ω, $\bar{\Omega}_n \subset \Omega$, $\bigcup \Omega_n = \Omega$, положим $\omega_n = \Omega_n \cap CS$. Тогда $v = H_v^{\omega_n}$ в ω_n. Если v' — супергармоническая функция в Ω_n, удовлетворяющая в каждой точке $y \in \partial\Omega_n$ условию $\varliminf_{x \to y} v'(x) \geqslant v(y)$, $x \in \Omega_n$, то $v' + w \geqslant H_v^{\omega_n} = v$ в ω_n. Отсюда $H_v^{\Omega_n} + w \geqslant H_v^{\omega_n}$ в ω_n. Поскольку $\lim_{n\to\infty} H_v^{\Omega_n} = 0$, имеем $w \geqslant v$ в $\Omega - S$, а следовательно, и в Ω.

[1]) Из этой гипотезы следует, что мера μ равна нулю на каждом полярном борелевском множестве ∂S (см. конец гл. IV). Отсюда вытекает условие, используемое при доказательстве.

Частный случай. Если $w=k$, где k — константа, $k=\sup_{x\in S} v(x)$, то $v\leqslant k$ всюду. Это известный принцип максимума Фростмана.

Обобщение. В качестве применения более развитой теории экстремизации в ограниченном открытом множестве или в R^n при $n\geqslant 3$ отметим, что для такого множества справедливо следующее утверждение.

Принцип мажорирования (в сильной форме). *Пусть α — произвольное множество, μ — положительная мера и w — положительная супергармоническая функция. Неравенство $G\mu\leqslant w$ на α влечет за собой такое же неравенство всюду, если множество точек, в которых α разрежено, имеет μ-меру нуль. Это условие выполняется, если α есть существенный носитель меры μ [т. е. если* $\mathbf{C}\alpha$ *имеет μ-меру нуль] и [полярное] множество точек α, в которых α разрежено, также имеет μ-меру нуль.*

Эта форма принципа мажорирования сильнее классической формы принципа максимума Картана, который будет приведен в гл. XI.

Применение 2.

Теорема. *Пусть Ω — ограниченное открытое множество; множество точек границы $\partial\Omega$, в которых Ω является разреженным, имеет гармоническую меру нуль.*

Пусть v — положительная супергармоническая функция, локально ограниченная в шаре $B\supset\overline{\Omega}$. Функции v и $v'=\mathfrak{B}_v^{\Omega}$, $v\geqslant v'$, совпадают в Ω. Следовательно, они имеют в Ω одну и ту же наибольшую гармоническую миноранту, а значит, и их наилучшие гармонические миноранты равны, $H_v^{\Omega}=H_{v'}^{\Omega}$. Отсюда следует, что v и v' могут отличаться на $\partial\Omega$ только на множестве гармонической меры нуль. Чтобы закончить доказательство, остается напомнить, что v можно выбрать таким образом, чтобы точки разреженности Ω принадлежали множеству точек, в которых $v>v'$ (см. гл. VII).

§ 7. Выметание в произвольном ограниченном открытом множестве с ядром Грина

Понятиям, относящимся к приведению R_v^E и выметанию $\mathfrak{B}_v^E=\widehat{R_v^E}$ в случае произвольного ограниченного открытого множества Ω, можно придать законченную форму, используя потенциал Грина

$$G\mu(x) = \int_{\Omega} G^{\Omega}(x, y)\, d\mu(y);$$

в гл. VI эти вопросы были рассмотрены только для шара или для пространства R^n при $n \geqslant 3$. Напомним, что ассоциированной мерой для $\mathfrak{B}^E_{G\mu}$ является выметание меры μ относительно E.

С другой стороны, имеется все необходимое, чтобы распространить на Ω понятия емкостного потенциала и емкости. Не вдаваясь в детали доказательств, отметим следующее.

Пусть $v = 1$, K — компактное множество, содержащееся в Ω. Тогда R^K_v, емкостной потенциал $\mathfrak{B}^K_v = \widehat{R^K_v}$, ассоциированная мера μ_K (емкостное распределение) и емкость $\|\mu_K\| = \mathfrak{C}(K)$ обладают следующими свойствами.

Емкостной потенциал $\mathfrak{B}^K_v$ есть наибольший потенциал Грина положительной меры на K, не превосходящий единицы (в силу принципа мажорирования). На $\Omega - K$ он совпадает с решением задачи Дирихле для этого открытого множества с граничными значениями 0 на $\partial\Omega$ и 1 на K.

Емкость $\|\mu_K\|$ есть верхняя грань масс $\mu(\Omega)$ положительных мер, носитель которых содержится в K и потенциал Грина не превосходит единицы. Приведение R^K_v и емкость $\|\mu_K\|$ обладают свойствами возрастания, непрерывности справа и сильной субаддитивности. Далее вводятся внутренняя и внешняя емкости и доказывается, что обращение в нуль внешней емкости означает, что множество является полярным.

Задача о равновесном потенциале. Так называется задача об отыскании на неполярном (т. е. имеющем строго положительную емкость) компактном множестве $K \subset \Omega$ положительной меры μ, такой, что

1) $\mu(K) = Q$, где число $Q > 0$ дано;

2) потенциал Грина $G^{\Omega}_{\mu}(x)$ принимает квазивсюду на K одно и то же постоянное значение;

3) потенциал Грина $G^{\Omega}_{\mu}(x)$ ограничен или только сужение меры μ на любое полярное множество равно нулю.

Существует единственное решение этой задачи, пропорциональное емкостному распределению.

В самом деле, мера $Q\mu_K/\|\mu_K\|$ удовлетворяет условиям задачи. Кроме того, согласно требованию равенства постоянных значений на K для двух решений μ_1 и μ_2, имеем

$$\int\limits_{\Omega} G\mu_K\, d\mu_1 = \int\limits_{\Omega} G\mu_K\, d\mu_2 = \int\limits_{\Omega} G\mu_1\, d\mu_K = \int\limits_{\Omega} G\mu_2\, d\mu_K.$$

Тождество $\mu_1 = \mu_2$ вытекает теперь из принципа мажорирования.

Отметим, что равновесное распределение μ удовлетворяет условию $Q = \mathfrak{C}(K)\, V$, где V — постоянное значение потенциала $G\mu_K$ квазивсюду на K. Отсюда можно непосредственно перейти к случаю R^n при $n \geqslant 3$.

БИБЛИОГРАФИЯ

Brelot M., A new proof of the fundamental theorem of Kellog—Evans on the set of irregular points in the Dirichlet problem, *Rend. Circ. Palermo*, 4 (1955), 112—122.

Среди многочисленных более старых работ отметим следующие:

Brelot M., Fonctions sousharmoniques et balayage, *Bull. Ac. royale sc. de Belgique*, 1938, 301—312; 421—436.

Brelot M., Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, 61 (1944), 301—322.

Frostmann O., Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, *Meddel. Lunds. Univ. Mat. Sem.*, 3 (1935).

Riesz M., Intégrales de Riemann — Liouville et potentiels, *Acta Szeged*, 9 (1938).

Глава X

НОРМА И ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

§ 1. Предварительная форма

Будем рассматривать опять случай ограниченной области Ω пространства R^n. Пусть (как в гл. I, § 5) $\mathfrak{P}_0$ — пространство конечных непрерывных функций на Ω, конечный и непрерывный градиент которых суммируем в квадрате; скалярное произведение определяется формулой

$$(f_1, f_2) = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2)\, dx,$$

и отсюда получается полунорма $\|f\|$. Будет использовано также ассоциированное отделимое пространство $\mathfrak{P}$ классов эквивалентности функций, равных с точностью до константы, с соответствующими скалярным произведением и нормой; $\mathfrak{P}$ есть предгильбертово пространство. Для краткости можно отождествлять функцию с ее классом эквивалентности в $\mathfrak{P}$.

Принцип Дирихле; предварительная форма (Заремба — Никодим). *Для любой функции $f \in \mathfrak{P}$ существует единственная гармоническая функция $u \in \mathfrak{P}$, такая, что норма $\|u - f\|$ достигает минимума.*

Эта функция u называется *проекцией f в $\mathfrak{P}$ на подпространство $\mathfrak{H}$ гармонических функций.*

В самом деле, было доказано (гл. I, § 5), что множество $\mathfrak{H}$ гармонических функций из $\mathfrak{P}$ является полным подпространством $\mathfrak{P}$. Достаточно воспользоваться теоремой о проекциях[1]) и взять в качестве u проекцию f на подпространство $\mathfrak{H}$. Известно, что $\|u\| \leqslant \|f\|$ и равенство

[1]) См. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959, гл. V, § 1, п. 4. — *Прим. перев.*

$\|u\| = \|f\|$ равносильно утверждению, что f принадлежит $\mathfrak{H}$, т. е. является гармонической функцией, или еще совпадает со своей проекцией на $\mathfrak{H}$.

§ 2. Классический принцип Дирихле

Теорема. *Пусть f — ограниченная функция из $\mathfrak{P}_0$, определенная на ограниченном открытом множестве Ω и допускающая конечное и непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$ (это продолжение будет обозначаться через f). Гармоническая функция u из $\mathfrak{P}$, минимизирующая норму $\|u-f\|$, т. е. проекция f на $\mathfrak{H}$, есть H_f^Ω.*

Если, кроме того, все точки границы $\partial\Omega$ регулярны, то H_f^Ω есть единственная функция из $\mathfrak{P}_0$ с минимальной нормой, имеющая в каждой точке $\partial\Omega$ то же предельное значение, что и f.

1) Предположим сначала, что множество Ω «вполне регулярно», т. е. совпадает с внутренностью своего замыкания и его граница в окрестности каждой своей точки определяется при помощи дважды непрерывно дифференцируемой функции, выражающей одну из координат через остальные. Кроме того, предположим, что функция f допускает дважды непрерывно дифференцируемое продолжение в некоторую открытую окрестность Ω' множества $\overline{\Omega}$.

Наши предположения регулярности обеспечивают включение $H_f^\Omega \in \mathfrak{P}_0$ (см. гл. I, § 8), и остается доказать, что разность $H_f^\Omega - f$ ортогональна в $\mathfrak{P}$ подпространству $\mathfrak{H}$ гармонических функций из $\mathfrak{P}$. В этом можно убедиться, построив функцию $\varphi \in \mathfrak{P}_0$ с компактным носителем, такую, что $H_f - f - \varphi \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, так как φ обладает свойством ортогональности. Чтобы избежать некоторых длиннот при оформлении этого доказательства, мы приведем другое рассуждение. Пусть $V \in \mathfrak{P}_0$ — строго положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция на Ω, причем ее предельные значения на $\partial\Omega$ равны нулю и ее первые производные имеют конечные предельные значения; предположим еще, что производная от V по направлению внутренней нормали всюду на $\partial\Omega$ строго положительна. Такую функцию можно получить, регуляризируя функцию Грина G_x в окрестности полюса x. Покажем, что V ортогональна к $\mathfrak{H}$. В самом деле, согласно теореме о неявных функциях, открытое множество $D_\varepsilon = V^{-1}[(\varepsilon, +\infty)]$ при достаточно малом ε вполне регулярно. Следовательно, для него можно написать формулу Грина с функциями V и $h \in \mathfrak{H}$

$$\int_{D_\varepsilon} (\operatorname{grad} V, \operatorname{grad} h)\, dx + \int_{\partial D_\varepsilon} V \frac{\partial h}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

Так как $V = \varepsilon$ на ∂D_ε, отсюда получаем

$$\int_{D_\varepsilon} (\operatorname{grad} V, \operatorname{grad} h)\, dx = 0$$

и

$$(V, h) = 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Согласно сделанным предположениям о f и $\partial\Omega$, функция $H_f^\Omega - f + \lambda V$ обладает теми же свойствами, что и V, если только число λ выбрано достаточно большим так, чтобы производная по направлению внутренней нормали на $\partial\Omega$ была строго больше нуля. Таким образом, для всех $h \in \mathfrak{H}$

$$(H_f^\Omega - f, h) = (H_f^\Omega - f + \lambda V, h) = 0.$$

2) Изучим теперь случай, когда множество Ω вполне регулярно, но функция f допускает продолжение, только один раз непрерывно дифференцируемое на открытом множестве $\Omega' \supset \overline{\Omega}$. При помощи усреднения или свертки можно построить последовательность $\{f_n\}$ дважды непрерывно дифференцируемых функций на открытом множестве $\Omega'' \supset \overline{\Omega}$, сужения которых на Ω принадлежат $\mathfrak{P}$, равномерно сходящуюся к f внутри Ω'' и такую, что последовательность градиентов $\{\operatorname{grad} f_n\}$ сходится к $\operatorname{grad} f$ также равномерно внутри Ω''. Тогда f_n сходятся к f в пространстве $\mathfrak{P}$, а поскольку $H_{f_n}^\Omega$ есть проекция f_n на $\mathfrak{H}$, функции $H_{f_n}^\Omega$ сходятся в $\mathfrak{P}$ к проекции f на $\mathfrak{H}$. Но так как f_n на $\partial\Omega$ сходятся равномерно к f, функции $H_{f_n}^\Omega$ равномерно сходятся к H_f^Ω и предел $H_{f_n}^\Omega$ в $\mathfrak{P}$ также

равен H_f^Ω (гл. I, § 5). Следовательно, проекция f на $\mathfrak{H}$ есть H_f^Ω.

3) Пусть, наконец, выполняются предположения, указанные в формулировке теоремы, и $\{\Omega_n\}$ — возрастающее покрытие Ω вполне регулярными открытыми множествами $\Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega$. Справедливы следующие утверждения.

α) Решения $u_n = H_f^{\Omega_n}$ сходятся к $u = H_f^\Omega$ вместе с производными равномерно внутри Ω.

β) Функция $u \in \mathfrak{P}_0$, т. е. норма $\|u\|_\Omega$ конечна. В самом деле, продолжая $\operatorname{grad}^2 u_n$ значением 0, получаем функции, сходящиеся к $\operatorname{grad}^2 u$, откуда

$$\int\limits_\Omega \operatorname{grad}^2 u\,dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n} \operatorname{grad}^2 u_n\,dx.$$

Но так как $\|u_n\|_{\Omega_n} \leqslant \|f\|_{\Omega_n} \leqslant \|f\|_\Omega$, получаем $\|u\|_\Omega \leqslant \|f\|_\Omega$.

γ) Нормы $\|u_n - f\|_{\Omega_n}$ сходятся к $\|u - f\|_\Omega$. Прежде всего, общее правило перехода к пределу под знаком интеграла дает

$$\|u - f\|_\Omega \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|u_n - f\|_{\Omega_n}.$$

Теперь достаточно убедиться в том, что не может быть строгого неравенства

$$\|u - f\|_\Omega < \varlimsup_{n\to\infty} \|u_n - f\|_{\Omega_n}.$$

Если бы это последнее неравенство имело место, то существовали бы сколь угодно большие n, такие, что

$$\|u - f\|_\Omega < \lambda < \|u_n - f\|_{\Omega_n},$$

а следовательно, и такие, что $\|u - f\|_{\Omega_n} < \lambda < \|u_n - f\|_{\Omega_n}$. Мы получили противоречие с минимизирующим свойством u_n в Ω_n.

δ) Функция u минимизирующая. В противном случае существовала бы функция $v \in \mathfrak{P}_0$, такая, что $\|v - f\| < \|u - f\|$, а следовательно, для достаточно больших n

$$\|v - f\|_{\Omega_n} \leqslant \|v - f\| < \|u_n - f\|_{\Omega_n}.$$

Полученное неравенство противоречит минимизирующему свойству u_n в Ω_n.

Таким образом, проекцией f на $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{P}$ является H_f^Ω.

В заключение используем предположение, что все граничные точки регулярны. Пусть $\mathfrak{F}$ — множество функций из $\mathfrak{P}_0$, принимающих те же значения, что f. Для любой функции $\varphi \in \mathfrak{F}$ решение H_f есть проекция φ на $\mathfrak{H}$ и $\|H_f\| \leqslant \|\varphi\|$. Если $\|H_f\| = \|\varphi\|$, то, как уже указывалось, $\varphi = H_f$.

Эта характеризация H_f как функции, имеющей минимальную норму среди функций $\mathfrak{F}$, означает (с точностью до эквивалентности), что H_f является проекцией нуля на $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{P}$.

Замечание 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{\Omega_n} = 0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{\Omega_n} = \|u\|_\Omega$.

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_K = 0$ и, следовательно, достаточно доказать, что $\|u_n - u\|_{\Omega_n - K} < \varepsilon$ (где ε произвольно) для подходящего компактного множества K и достаточно больших n. Но

$$\|u_n - f\|^2_{\Omega_n - K} = \|u_n - f\|^2_{\Omega_n} - \|u_n - f\|^2_K \to \|u - f\|^2_{\Omega - K},$$

откуда

$$\|u_n - u\|_{\Omega_n - K} \leqslant \|u_n - f\|_{\Omega_n - K} + \|u - f\|_{\Omega_n - K} \to \\ \to 2\|u - f\|_{\Omega - K}.$$

Замечание 2. Тривиальное видоизменение рассуждений позволяет перейти от Ω к R^n при $n \geqslant 2$, если f стремится к k в бесконечности и H_f заменяется константой k.

Обобщение. Несколько усовершенствовав это рассуждение, можно прийти к следующему результату.

Пусть f — ограниченная на Ω функция из $\mathfrak{P}_0$, имеющая предельное значение $\varphi(x)$ в каждой точке $x \in \partial\Omega$, принадлежащей дополнению некоторой части $\partial\Omega$ гармонической меры нуль. Пусть φ — некоторое продолжение на $\partial\Omega$ функции $\varphi(x)$, определенной на части $\partial\Omega$. Тогда H_φ^Ω есть единственная гармоническая функция из $\mathfrak{P}$, минимизирующая норму $\|u - f\|$, и единственная функция из $\mathfrak{P}_0$

минимальной нормы среди тех функций, которые имеют на границе те же предельные значения, что f, почти всюду в смысле гармонической меры.

§ 3. Функции типа BLD

Естественно желание пополнить нормированное пространство $\mathfrak{P}$. Эта операция приводит, однако, к функциям, недостаточно определенным для успешного использования их в теории потенциала. Поэтому, уточняя функции, рассматривавшиеся Беппо Леви и Никодимом, Дени ввел функции, названные уточненными функциями типа BL, или функциями типа BLD.

Так называется функция f, определенная и конечная квазивсюду на Ω и являющаяся квазивсюду пределом последовательности Коши по норме Дирихле $\{f_n\}$ функций f_n из $\mathfrak{P}_0$ (их можно предполагать бесконечно дифференцируемыми). Доказывается, что f имеет почти всюду градиент с суммируемым квадратом и $\lim\limits_{n\to\infty} \| f - f_n \| = 0$ по норме Дирихле. Классы эквивалентности этих функций, определяемые отношением равенства квазивсюду с точностью до константы, образуют гильбертово пространство с тем же скалярным произведением.

Что касается рассматриваемой в этой главе задачи, то отметим только, что предварительный принцип применяется немедленно и если f типа BLD на открытом множестве $\Omega_1 \supset \overline{\Omega}$, то H_f^{Ω} существует, причем:

1) H_f^{Ω} есть единственная гармоническая функция типа BLD (всегда с точностью до константы), минимизирующая норму $\| u - f \|$;

2) H_f^{Ω} есть единственная гармоническая функция на Ω, продолжение которой значениями f на Ω_1 будет типа BLD.

Большое количество свойств и применений можно найти в литературе, указанной в библиографии.

С другой стороны, при аксиоматическом подходе норма Дирихле привела к определению и изучению Бёйрлингом и Дени пространств Дирихле, представляющих собой один из аксиоматических аспектов теории потенциала.

БИБЛИОГРАФИЯ

Brelot M., Etude et extensions du principe de Dirichlet, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1953—54).

Deny J., Les potentiels d'énergie finie, *Acta Math.*, 82 (1950).

Deny J., Sur les espaces de Dirichlet, Sem. théor. potent. M. Brelot, G. Choquet, J. Deny, 1957.

Deny J., Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1953—54), 305—370.

Ставшая классической идея использования гильбертовых пространств принадлежит Никодиму:

Nikodym, Sur une classe des fonctions considérées dans l'étude du probléme de Dirichlet, *Fundam. Math.*, 21 (1933), 129—150; sur un théorème de M. S. Zaremba concernant les fonctions harmoniques, *J. math. pures et appl.*, 12 (1933), 95—108; *Mathematica*, 9 (1935).

Современное изложение в плоскости и без использования гильбертовых пространств:

Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., ИЛ, 1953.

Глава XI

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Введение

Мы будем сначала рассматривать функции, определенные во всем пространстве R^n ($n \geqslant 3$), и пользоваться ядром $\|x-y\|^{2-n}$, следуя оригинальным и классическим построениям А. Картана (который опирался только на соотношения Ф. Рисса между супергармоническими функциями и потенциалами). Затем устанавливается связь с предшествующим материалом и, с другой стороны, получается обобщение на ограниченную область пространства R^n ($n \geqslant 2$) с ядром Грина. Это обобщение сводится, между прочим, к расширению «принципа энергии», установленного вначале, а остальное переносится непосредственно.

Определение. Пусть Ω — локально компактное топологическое пространство. Множество $H \subset \mathfrak{K}(\Omega)$ конечных и непрерывных положительных числовых функций с компактным носителем, определенных на Ω, называется *положительно обильным* (*весьма обильным*), если для любой конечной и непрерывной положительной числовой функции f с компактным носителем K, произвольного числа $\varepsilon > 0$ и некоторой (соответственно любой) окрестности V множества K существует линейная комбинация $g = \sum \lambda_i g_i$ с положительными коэффициентами λ_i функций $g_i \in H$ с носителями, содержащимися в V, такая, что

$$\|f-g\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Нетрудно доказать, что положительная мера μ на Ω полностью определена, если известны ее значения для функций некоторого положительно обильного семейства; кроме того, для последовательности положительных мер

μ_n сходимость интегралов $\int f\,d\mu_n$ к конечному числу для всех функций f положительно обильного семейства влечет за собой грубую сходимость мер μ_n.

Пример. Пусть $\Omega = R^n$ $(n \geqslant 3)$. Рассмотрим множество H конечных и непрерывных положительных функций f с компактным носителем в R^n, обладающих двумя свойствами:

1) для любой окрестности нуля V существует функция $f \in H$, носитель которой содержится в V;

2) множество H инвариантно относительно переносов в пространстве R^n.

Докажем, что это множество H положительно весьма обильно.

Пусть f — непрерывная положительная функция с компактным носителем K. Рассмотрим некоторую компактную окрестность W множества K, и пусть V — такая окрестность нуля, что любой перенос V, содержащий точки, общие с K, содержится в W. Существует положительная функция φ, пропорциональная некоторой функции из H, носитель которой содержится в V, такая, что интеграл Лебега $\int \varphi(x)\,dx$ равен единице. Носитель функции

$$F(x) = \varphi * f(x) = \int \varphi(y) f(x-y)\,dy = \int \varphi(x-y) f(y)\,dy$$

содержится в W. Пусть $\varepsilon > 0$; в силу равномерной непрерывности f можно выбрать V так, чтобы для любой точки x из включения $y \in V$ следовало неравенство $|f(x)-f(x-y)| \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$|f(x)-F(x)| = \left| \int \varphi(y)\,[f(x)-f(x-y)]\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int \varphi(y)\,|f(x)-f(x-y)|\,dy \leqslant \varepsilon.$$

С другой стороны, существуют конечное разбиение $\{A_i\}$ множества K, состоящее из измеримых множеств, и множество $\{y_i\}$ точек $y_i \in A_i$, такие, что для $y \in A_i$ и произвольной точки x справедливо неравенство

$$|\varphi(x-y_i) - \varphi(x-y)| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда получаем для всех x

$$\left| F(x) - \sum_i \varphi(x - y_i) \int_{A_i} f(y)\,dy \right| \leqslant \varepsilon \int f(y)\,dy$$

и

$$\left| f(x) - \sum_i \varphi(x - y_i) \int_{A_i} f(y)\,dy \right| \leqslant \varepsilon \left[1 + \int f(y)\,dy \right].$$

Поскольку правая часть последнего неравенства произвольно мала, утверждение доказано.

Опираясь на доказанное, построим теперь положительно весьма обильное множество функций в R^n, которые, кроме того, являются потенциалами.

Для любого $\varrho > 0$ функция ψ_ρ определяется формулами

$$\psi_\rho(x) = \begin{cases} h\left(\frac{\varrho}{2}\right) - h(\varrho) & \text{в} \quad B\left(0, \frac{\varrho}{2}\right), \\ h(\|x\|) - h(\varrho) & \text{в} \quad B(0, \varrho) - B\left(0, \frac{\varrho}{2}\right), \\ 0 & \text{вне} \quad B(0, \varrho). \end{cases}$$

Пусть σ_ρ — мера на сфере $S(0, \varrho)$, пропорциональная мере Лебега, общая масса которой равна 1. Нетрудно видеть, что ψ_ρ выражается через потенциалы:

$$\psi_\rho = U^{\sigma_{\rho/2}} - U^{\sigma_\rho}$$

(локально это гармоническая, супергармоническая или субгармоническая функция); перенося центр в точку x_0, получаем функции $\psi_\rho^{x_0}$, составляющие искомое семейство Ψ.

§ 2. Взаимная энергия двух положительных мер

Пусть μ и ν — две положительные меры в R^n $(n \geqslant 3)$. Их *взаимная энергия* определяется формулой

$$(\mu, \nu) = \int U^\mu\,d\nu = \int U^\nu\,d\mu. \tag{1}$$

Для любой положительной меры μ *энергией* μ называется число $(\mu, \mu) \geqslant 0$, *энергетической нормой* — число $\|\mu\|_e = \sqrt{(\mu, \mu)}$.

Через $\mathfrak{E}^+$ обозначим множество положительных мер с конечной энергией. Из нижеследующего неравенства вытекает, что сумма двух мер из $\mathfrak{E}^+$ также принадлежит $\mathfrak{E}^+$.

Основное неравенство. *Для любых положительных мер* μ *и* ν *справедливо неравенство*

$$(\mu, \nu) \leqslant \|\mu\|_e \cdot \|\nu\|_e, \tag{2}$$

то есть

$$(\mu, \nu)^2 \leqslant \int U^\mu \, d\mu \cdot \int U^\nu \, d\nu.$$

Этот результат вытекает из следующей леммы, справедливой в R^n $(n \geqslant 3)$ для потенциалов «порядка α», определяемых ядром $\|x-y\|^{\alpha-n}$ (М. Рисс).

Лемма. *Если* α *и* β — *два действительных числа, то для интегралов Лебега справедливо тождество*

$$\int \|x-y\|^{\alpha-n} \|x-z\|^{\beta-n} \, dx = K \cdot \|y-z\|^{\alpha+\beta-n},$$

где K — *постоянная,* $K > 0$.

В самом деле, преобразование подобия с центром 0 и коэффициентом растяжения $\|y-z\|^{-1}$ переводит y и z соответственно в точки y_0 и z_0, такие, что $\|y_0-z_0\|=1$. Это же преобразование для переменной интегрирования дает

$$\int \|x-y\|^{\alpha-n} \|x-z\|^{\beta-n} \, dx = \\ = \|y-z\|^{\alpha+\beta-n} \int \|x-y_0\|^{\alpha-n} \|x-z_0\|^{\beta-n} \, dx,$$

причем здесь последний интеграл, очевидно, есть постоянная $K > 0$, так как он не зависит от y_0 и z_0, связанных тождеством $\|y_0-z_0\|=1$. Лемма доказана.

Положим теперь

$$U_\alpha^\mu(x) = \int \|x-y\|^{\alpha-n} \, d\mu(y).$$

Тогда

$$\int U_\alpha^\mu(x) U_\beta^\nu(x) \, dx = \int \|x-y\|^{\alpha-n} \|x-z\|^{\beta-n} \, dx \, d\mu(y) \, d\nu(z) = \\ = K \int \|y-z\|^{\alpha+\beta-n} \, d\mu(y) \, d\nu(z) = \\ = K \int U_{\alpha+\beta}^\mu(z) \, d\nu(z).$$

В частности,

$$\int (U_\alpha^\mu)^2\,dx = K\int U_{2\alpha}^\mu\,d\mu. \tag{3}$$

Заменяя α и β через $\alpha/2$, получаем

$$\int U_\alpha^\mu\,d\nu = \frac{1}{K}\int U_{\alpha/2}^\mu U_{\alpha/2}^\nu\,dx,$$

откуда

$$\left(\int U_\alpha^\mu\,d\nu\right)^2 \leqslant \frac{1}{K^2}\int (U_{\alpha/2}^\mu)^2\,dx\cdot\int (U_{\alpha/2}^\nu)^2\,dx.$$

Применяя формулу (3), находим

$$\left(\int U_\alpha^\mu\,d\nu\right)^2 \leqslant \int U_\alpha^\mu\,d\mu\cdot\int U_\alpha^\nu\,d\nu.$$

Полагая здесь $\alpha=2$, получаем искомое неравенство (2).

§ 3. Энергия мер произвольного знака

Рассмотрим множество $\mathfrak{E}$ мер μ, представимых в виде разности $\mu_1-\mu_2$, где μ_1, $\mu_2\in\mathfrak{E}^+$. Потенциал такой меры $U^\mu = U^{\mu_1}-U^{\mu_2}$ определен не везде.

Взаимная энергия (μ, ν) двух таких мер определяется как интеграл $\int U^\mu\,d\nu$, имеющий значение

$$\int U^{\mu_1}\,d\nu_1+\int U^{\mu_2}\,d\nu_2-\int U^{\mu_1}\,d\nu_2-\int U^{\mu_2}\,d\nu_1=$$
$$=(\mu_1, \nu_1)+(\mu_2, \nu_2)-(\mu_1, \nu_2)-(\mu_2, \nu_1).$$

Это значение не зависит от вида разбиения μ и ν.

Энергией меры μ называется, по определению, число

$$(\mu, \mu)=\|\mu_1\|_e^2+\|\mu_2\|_e^2-2(\mu_1, \mu_2)\geqslant$$
$$\geqslant(\|\mu_1\|_e-\|\mu_2\|_e)^2\geqslant 0. \tag{4}$$

Таким образом, энергия всегда положительна (произвольные ядра с этим свойством называются *ядрами положительного типа*); мы снова полагаем $\|\mu\|_e=\sqrt{(\mu, \mu)}$.

Отсюда для мер μ и ν из $\mathfrak{E}$ и произвольных действительных чисел a и b вытекает неравенство

$$\|a\mu+b\nu\|_e^2=a^2\|\mu\|_e^2+b^2\|\nu\|_e^2+2ab(\mu, \nu)\geqslant 0.$$

Следовательно,

$$|(\mu, \nu)| \leqslant \|\mu\|_e \cdot \|\nu\|_e, \tag{5}$$

уже без ограничений на знак μ и ν.

Теорема. *Для любой меры* $\mu \in \mathfrak{E}$ *условие* $\|\mu\|_e = 0$ *равносильно тождеству* $\mu = 0$.

Это свойство в соединении с условием положительности энергии называется *принципом энергии*.

Если $\mu = 0$, то $\|\mu\|_e = 0$. Наоборот, если $\|\mu\|_e = 0$, то для любой меры $\nu \in \mathfrak{E}$ имеем $|(\mu, \nu)| \leqslant \|\mu\|_e \cdot \|\nu\|_e = 0$, а следовательно, $(\mu, \nu) = 0$. Это справедливо, в частности, для мер ν, ассоциированных с переносами $\psi_\rho^{x_0}$ функции ψ_ρ. Следовательно, для разбиения $\mu = \mu_1 - \mu_2$ имеем

$$\int \psi_\rho^{x_0}\, d\mu_1 = \int \psi_\rho^{x_0}\, d\mu_2,$$

где функции $\psi_\rho^{x_0}$ образуют положительно обильное семейство. Отсюда $\mu_1 = \mu_2$ и $\mu = 0$.

На основании доказанного заключаем, что $\mathfrak{E}$ *есть предгильбертово векторное пространство со скалярным произведением* (μ, ν) *и нормой* $\|\mu\|_e$.

§ 4. Принцип мажорирования или принцип максимума А. Картана

Из представления супергармонической функции $v \geqslant 0$ в R^n при помощи потенциалов (гл. IV) следует, что для того, чтобы v была потенциалом, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{r\to\infty} \mathfrak{M}_v^r(0) = 0$. Следовательно, положительная супергармоническая функция, мажорируемая потенциалом положительной меры, есть также потенциал положительной меры.

С другой стороны, если U^μ $(\mu \geqslant 0)$ есть потенциал конечной энергии, то всякий потенциал U^ν $(\nu \geqslant 0)$, мажорируемый потенциалом U^μ, также имеет конечную энергию, ибо

$$\int U^\nu\, d\nu \leqslant \int U^\mu\, d\nu = \int U^\nu\, d\mu \leqslant \int U^\mu\, d\mu = \|\mu\|_e^2 < +\infty.$$

Принцип мажорирования. *Пусть v — положительная супергармоническая функция и U^μ — потенциал* *конечной энергии положительной меры в* R^n $(n \geqslant 3)$. *Если функция* v *мажорирует потенциал* U^μ *на существенном носителе меры* μ (*т. е. на множестве, дополнение к которому имеет* μ-*меру нуль*), *то* $v \geqslant U^\mu$ *всюду в* R^n.

В самом деле, $\inf(U^\mu, v)$ есть положительная супергармоническая функция, мажорируемая потенциалом U^μ. Эта функция является, следовательно, потенциалом конечной энергии: $\inf(U^\mu, v) = U^\nu$, где ν — положительная мера. Имеем

$$\|\mu-\nu\|^2 = \int (U^\mu - U^\nu)\,d\mu - \int (U^\mu - U^\nu)\,d\nu =$$
$$= -\int (U^\mu - U^\nu)\,d\nu \leqslant 0,$$

так как U^μ и U^ν совпадают на борелевском носителе меры μ и, следовательно, первый интеграл в средней части равен нулю; второй интеграл положителен, так как ν — положительная мера и $U^\mu \geqslant U^\nu$. Отсюда вытекает, что $\|\mu-\nu\|_e = 0$, т. е. $\mu = \nu$, а значит,

$$U^\mu = \inf(U^\mu, v) \leqslant v.$$

Замечание. Наоборот, из ослабленных форм этого принципа (например, из наиболее слабой формы, приведенной в гл. IX) или только из принципа максимума Фростмана вытекает принцип энергии, причем даже для ядер гораздо более общего вида (см. в библиографии работы Ниномия).

§ 5. Основная теорема А. Картана

В предгильбертовом пространстве $\mathfrak{E}$ *множество* $\mathfrak{E}^+$ *полно*[1]).

Мы выделим сначала несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\{U^{\mu_n}\}$ — *монотонная последовательность потенциалов положительных мер* μ_n *с конечной энергией, сходящаяся к потенциалу* U^μ *того же*

[1]) Но, согласно одному примеру А. Картана, пространство $\mathfrak{E}$ не полно. Пополнение этого пространства является исходной точкой работ Дени о потенциалах конечной энергии, получаемых посредством свертки фиксированной обобщенной функции (ядра) и переменной обобщенной функции. См. Deny J., *Acta Math.*, 82 (1950).

вида. Тогда последовательность мер $\{\mu_n\}$ сильно сходится в пространстве $\mathfrak{E}$ к мере μ.

Напомним, что если ν и ν' — две положительные меры с конечной энергией, такие, что $U^\nu \leqslant U^{\nu'}$, то $\|\nu\|_e \leqslant \|\nu'\|_e$ (§ 4). Предположим, например, что последовательность $\{U^{\mu_n}\}$ возрастает. Для $p \geqslant n$ имеем

$$(\mu_n, \mu_p - \mu_n) = \int (U^{\mu_p} - U^{\mu_n})\, d\mu_n \geqslant 0,$$

а следовательно,

$$\begin{aligned}\|\mu_p\|_e^2 &= \|\mu_n + \mu_p - \mu_n\|_e^2 = \\ &= \|\mu_n\|_e^2 + \|\mu_p - \mu_n\|_e^2 + 2(\mu_n, \mu_p - \mu_n) \geqslant \\ &\geqslant \|\mu_n\|_e^2 + \|\mu_p - \mu_n\|_e^2,\end{aligned}$$

то есть

$$\|\mu_p - \mu_n\|_e^2 \leqslant \|\mu_p\|_e^2 - \|\mu_n\|_e^2.$$

Так как $U^{\mu_n} \leqslant U^\mu$, то, согласно замечанию, сделанному в начале доказательства, $\|\mu_n\|_e \leqslant \|\mu\|_e$ для всех n. Последовательность $\{\|\mu_n\|_e\}$ возрастает и ограничена; она, следовательно, является последовательностью Коши, а значит, $\{\mu_n\}$ есть последовательность Коши в пространстве $\mathfrak{E}$.

Кроме того, пусть $\lambda \in \mathfrak{E}$. Последовательность $\left\{\int U^{\mu_n}\, d\lambda\right\}$ сходится к $\int U^\mu\, d\lambda$, так как последовательность потенциалов U^{μ_n} возрастает, т. е. последовательность мер $\{\mu_n\}$ слабо сходится к μ. Но так как $\{\mu_n\}$ есть последовательность Коши, она сильно сходится к μ в $\mathfrak{E}$.

Лемма 2. *Множество мер с компактным носителем из $\mathfrak{E}$, потенциалы которых конечны, непрерывны и имеют компактный носитель, всюду плотно в $\mathfrak{E}$.*

Мы докажем сначала, что множество мер с компактным носителем из $\mathfrak{E}^+$ плотно в $\mathfrak{E}^+$. В самом деле, пусть $\mu \in \mathfrak{E}^+$; для любого числа $r > 0$ обозначим через μ_r сужение меры μ на шар $B(0, r)$. Потенциал U^μ есть предел возрастающей последовательности $\{U^{\mu_n}\}$ и $\mu_n \in \mathfrak{E}^+$. Из леммы 1 теперь следует, что последовательность мер $\{\mu_n\}$ сильно сходится к μ в $\mathfrak{E}$.

Любая мера $\mu \in \mathfrak{E}^+$ с компактным носителем может быть сколь угодно точно аппроксимирована в $\mathfrak{E}^+$ мерой того же типа, но с конечным и непрерывным потенциалом. Действительно, при помощи регуляризации потенциала U^{μ} (см. гл. II, § 6) можно построить возрастающую последовательность конечных и непрерывных потенциалов, сходящуюся к U^{μ}.

Наконец, пусть мера ν из $\mathfrak{E}^+$ имеет компактный носитель и конечный непрерывный потенциал; меру ν можно сколь угодно точно аппроксимировать в $\mathfrak{E}$ мерой из $\mathfrak{E}$ с компактным носителем и потенциалом из $\mathfrak{K}(R^n)$. Для этой цели достаточно ввести функции φ_n, равные U^{ν} вне шара $B(0, n)$ и равные интегралу Пуассона от U^{ν} в $B(0, n)$. Положительные супергармонические функции φ_n мажорируются потенциалом U^{ν} и, следовательно, составляют убывающую последовательность потенциалов, сходящуюся к нулю при $n \to \infty$. Соответствующие ассоциированные меры сильно сходятся к нулю, откуда получается искомая аппроксимация U^{ν} посредством $U^{\nu} - \varphi_n$.

Лемма 3. *Пусть* $\{\mu_n\}$ — *последовательность мер* $\mu_n \in \mathfrak{E}$. *Тогда*

1) *слабая сходимость последовательности* $\{\mu_n\}$ *к мере* μ *влечет за собой грубую сходимость;*

2) *если нормы* $\|\mu_n\|$ *не превосходят фиксированного числа* M, *то из грубой сходимости последовательности* $\{\mu_n\}$ *к a priori произвольной, необходимо положительной мере* μ *следует, что* $\mu \in \mathfrak{E}^+$ *и что* $\{\mu_n\}$ *слабо сходится к* μ.

Пусть сначала последовательность $\{\mu_n\}$ слабо сходится к $\mu \in \mathfrak{E}^+$; тогда $\int U^{\lambda}\, d\mu_n \to \int U^{\lambda}\, d\mu$ для любой меры λ, ассоциированной с функцией вида $\psi_{\rho}^{x_0}$. Следовательно, для функций f, составляющих положительно обильное множество, имеем $\int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$, откуда следует грубая сходимость.

Допустим теперь, что выполняются предположения второй части леммы. Так как потенциал U^{μ_p} полунепрерывен снизу, он является пределом возрастающей последовательности $\{\varphi_i\}$ конечных и непрерывных функций φ_i с компактным носителем и

$$\int U^{\mu_p}\, d\mu = \lim_{i \to \infty} \int \varphi_i\, d\mu.$$

Но

$$\int \varphi_i \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_i \, d\mu_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \int U^{\mu_p} \, d\mu_n.$$

Поскольку

$$\int U^{\mu_p} \, d\mu_n = (\mu_p, \mu_n) \leqslant \| \mu_p \|_e \cdot \| \mu_n \|_e \leqslant M^2,$$

находим, что $\int \varphi_i \, d\mu \leqslant M^2$, а следовательно, и

$$\int U^{\mu_p} d\mu = \int U^{\mu} \, d\mu_p \leqslant M^2.$$

Точно так же, U^{μ} есть предел функций ψ_i, аналогичных φ_i, и

$$\int U^{\mu} d\mu = \lim_{i\to\infty} \int \psi_i \, d\mu,$$

причем

$$\int \psi_i \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \psi_i \, d\mu_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \int U^{\mu} \, d\mu_n \leqslant M^2.$$

Следовательно, $\int U^{\mu} \, d\mu \leqslant M^2$ и $\mu \in \mathfrak{E}^+$.

Для любой меры $\lambda \in \mathfrak{E}^+$, потенциал которой конечен, непрерывен и имеет компактный носитель, в силу грубой сходимости имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int U^{\lambda} \, d\mu_n = \int U^{\lambda} \, d\mu,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} (\mu_n, \lambda) = (\mu, \lambda)$, откуда, по лемме 2 (нормы $\| \mu_n \|_e$ ограничены), вытекает слабая сходимость последовательности $\{\mu_n\}$ к мере μ.

Вторая часть леммы 3 позволяет доказать основную теорему. Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность Коши мер $\mu_n \in \mathfrak{E}^+$; последовательность норм $\{\| \mu_n \|_e\}$ ограничена. Для последовательности Коши $\{\mu_n\}$ из слабой сходимости будет следовать сильная сходимость в $\mathfrak{E}^+$; согласно лемме 3, слабая сходимость будет следовать из грубой сходимости, которую мы сейчас и докажем.

Пусть $\lambda \in \mathfrak{E}$; имеем

$$| (\mu_p - \mu_n, \lambda) | \leqslant \| \mu_p - \mu_n \|_e \cdot \| \lambda \|_e.$$

Следовательно, $\{(\mu_n, \lambda)\}$ есть последовательность Коши действительных чисел, и она сходится, в частности, для мер λ, ассоциированных с функциями $\psi_\rho^{x_0}$. Таким образом, последовательность $\left\{\int \psi_\rho^{x_0}\, d\mu_n\right\}$ сходится для всех функций $\psi_\rho^{x_0}$, составляющих положительно обильное множество. Отсюда следует грубая сходимость последовательности $\{\mu_n\}$, что и доказывает теорему.

§ 6. Проекция в $\mathfrak{E}$

Пусть $\mathfrak{F}$ — полная выпуклая часть $\mathfrak{E}$ и μ — мера с конечной энергией.

Известно, что мера μ имеет единственную *проекцию* ν на $\mathfrak{F}$, характеризуемую свойством: $\|\mu-\nu\|_e \leqslant \|\mu-\lambda\|_e$ для всех $\lambda \in \mathfrak{F}$.

В предгильбертовых пространствах имеет место также другое равносильное свойство.

α) **Другая характеризация проекции.** Из предыдущего условия можно вывести для всех λ соотношение

$$\|\mu-\nu\|_e^2 \leqslant \|\mu-\lambda\|_e^2 = \|\mu-\nu+\nu-\lambda\|_e^2 =$$
$$= \|\mu-\nu\|_e^2 + \|\nu-\lambda\|_e^2 + 2(\mu-\nu,\ \nu-\lambda).$$

Отсюда $2(\mu-\nu, \nu-\lambda) \leqslant \|\lambda-\nu\|_e^2$ для любого $\lambda \in \mathfrak{F}$. В частности, в силу выпуклости $\mathfrak{F}$ для $\lambda = \nu + k(\lambda_0-\nu)$ при $0 < k < 1$ и произвольном $\lambda_0 \in \mathfrak{F}$ имеем

$$2k(\mu-\nu,\ \lambda_0-\nu) \leqslant k^2 \|\lambda_0-\nu\|_e^2,$$

откуда $2(\mu-\nu,\ \lambda_0-\nu) \leqslant k\|\lambda_0-\nu\|_e^2$. В пределе при $k \to 0$ получаем для всех $\lambda_0 \in \mathfrak{F}$

$$(\mu-\nu,\ \lambda_0-\nu) \leqslant 0. \qquad (\alpha)$$

Это свойство характеризует меру ν как проекцию меры , так как если мера $\nu \in \mathfrak{F}$ удовлетворяет неравенству μ $-\nu,\ \lambda-\nu) \leqslant 0$ для любой меры $\lambda \in \mathfrak{F}$, то получаем

$$\|\mu-\lambda\|_e^2 \geqslant \|\mu-\nu\|_e^2 + \|\nu-\lambda\|_e^2,$$

откуда $\|\mu-\nu\|_e \leqslant \|\mu-\lambda\|_e$.

β) **Гауссовская характеризация.** Поскольку

$$\|\mu-\lambda\|_e^2 = \|\mu\|_e^2 - 2(\mu,\ \lambda) + \|\lambda\|_e^2 =$$
$$= (\lambda-2\mu,\ \lambda) + \|\mu\|_e^2,$$

проекция меры μ на $\mathfrak{F}$ есть такая мера $\nu \in \mathfrak{F}$, которая среди всех мер $\lambda \in \mathfrak{F}$ дает минимум интегралу

$$\int (U^{\lambda} - 2U^{\mu})\, d\lambda = (\lambda - 2\mu,\ \lambda).$$

Эта идея, в сущности принадлежащая Гауссу, вновь была использована в работах Фростмана, Валле-Пуссена и др.

γ) **Частный случай и новая характеризация.** Предположим, что $0 \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} + \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}$; следовательно, $\mathfrak{F}$ — полный выпуклый конус. Свойство (α) при $\lambda_0 = 0$ дает $(\mu - \nu,\ \nu) \geqslant 0$ и $(\mu - \nu,\ \lambda) \leqslant 0$ при $\lambda_0 = \lambda + \nu$, причем здесь ν — проекция μ и $\lambda \in \mathfrak{F}$ произвольно.

Проекция ν меры μ на $\mathfrak{F}$ характеризуется тем, что для всех $\lambda \in \mathfrak{F}$

$$(\mu - \nu,\ \lambda) \leqslant 0$$

и

$$(\mu - \nu,\ \nu) \geqslant 0.$$

Действительно, из этих неравенств следует, что для всех $\lambda \in \mathfrak{F}$

$$(\mu - \nu,\ \lambda - \nu) = (\mu - \nu,\ \lambda) - (\mu - \nu,\ \nu) \leqslant 0.$$

Отметим, что эти неравенства дают также: $(\mu - \nu, \nu) = 0$ и $(\mu,\ \nu) = \|\nu\|_e^2$.

§ 7. Выметание относительно произвольного компактного множества

Пусть K — компактное множество пространства R^n ($n \geqslant 3$). Множество $\mathfrak{F}_K$ мер $\lambda \in \mathfrak{E}$, носитель которых содержится в K, представляет собой полный выпуклый конус пространства $\mathfrak{E}$. Действительно, очевидно, что это есть грубо замкнутый выпуклый конус, а следовательно, и замкнутый конус в $\mathfrak{E}^+$ (лемма 3); так как $\mathfrak{E}^+$ полно, $\mathfrak{F}_K$ также полно. Это свойство позволяет применить метод проекций.

Теорема. *Пусть $\mu \in \mathfrak{E}^+$. Проекция μ_K меры μ на $\mathfrak{F}_K$ характеризуется как единственная положительная мера на K, удовлетворяющая условиям:*

$U^{\nu} \leqslant U^{\mu}$ всюду;

$U^\nu = U^\mu$ почти всюду на K относительно любой меры $\lambda \in \mathfrak{E}^+$.

В самом деле, согласно свойствам проекций, для всех $\lambda \in \mathfrak{F}_K$ имеем

$$\int (U^\mu - U^{\mu_K})\, d\lambda \leqslant 0$$

и

$$\int (U^\mu - U^{\mu_K})\, d\mu_K = 0.$$

Неравенство показывает, что множество точек, в которых $U^\mu > U^{\mu_K}$, имеет λ-меру нуль для всех $\lambda \in \mathfrak{F}_K$. В противном случае приходим к противоречию, стягивая меру λ к указанному множеству. Это справедливо для $\lambda = \mu_K$, и равенство теперь показывает, что множество точек, в которых $U^\mu < U^{\mu_K}$ имеет также μ_K-меру нуль. Следовательно, $U^\mu = U^{\mu_K}$ на существенном носителе меры μ_K, и принцип мажорирования дает теперь неравенство $U^\mu \geqslant U^{\mu_K}$ всюду. Это и дает доказываемые свойства.

Наоборот, неравенство $U^\nu \leqslant U^\mu$ показывает, что $\nu \in \mathfrak{E}^+$. Равенство $U^\nu = U^\mu$ почти всюду на K по λ-мере дает $(\mu - \nu, \lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathfrak{F}_K$. Отсюда $\nu = \mu_K$.

Предполагая, что наша предыдущая теория выметания или экстремизации распространена на пространство R^n $(n \geqslant 3)$, мы докажем следующую теорему, из которой непосредственно видно, что μ_K есть мера, полученная выметанием меры μ относительно компактного множества K.

Теорема. *Для того чтобы борелевское множество имело λ-меру нуль для всех $\lambda \in \mathfrak{E}^+$, необходимо и достаточно, чтобы оно было полярным множеством.*

Достаточно рассмотреть случай компактного множества E. Если E не является полярным множеством, то на E существует ненулевая положительная мера μ, потенциал которой ограничен. Следовательно, энергия μ конечна и $\mu(E) \neq 0$.

Наоборот, пусть мера $\mu \in \mathfrak{E}^+$ такова, что $\mu(E) \neq 0$. Тогда функция $\inf(U^\mu, k)$, где $k > 0$ — постоянная, есть ненулевой потенциал конечной энергии $U_{\mu'}$, $\mu' \neq 0$, Описанное проектирование меры μ' дает ненулевую меру μ'_E, потому что потенциал $U^{\mu'_E}$ должен совпадать почти всюду на E с $U^{\mu'}$, поскольку $\mu(E)>0$, $\mu\in\mathfrak{E}^+$. Так как $U^{\mu'_E}\leqslant \leqslant U^{\mu'}\leqslant k$, множество E не является полярным.

Если исходить из равномерного распределения на некоторой сфере, окружающей компактное множество, то посредством описанного проектирования мы получим, в частности, емкостное распределение.

А. Картану удалось развить описанную теорию выметания для произвольных множеств и положительных мер, не обязательно имеющих конечную энергию (причем даже без использования большой теоремы сходимости), однако его рассуждения довольно сложны.

§ 8. Емкостное распределение и энергия

Рассмотрим на компактном множестве K, $\mathfrak{C}(K)>0$, такие меры $\lambda\in\mathfrak{E}^+$, что $\lambda(K)=1$. Они образуют непустое множество $\mathfrak{F}'_K$, являющееся также (замкнутой) полной выпуклой частью $\mathfrak{E}$. Проекция нуля на $\mathfrak{F}'_K$ есть положительная мера ν_0, единственная при высказанных условиях на K и имеющая минимальную энергию.

Мы докажем, что ν_0 *есть равновесное распределение единичной массы на* K, т. е. $\nu_0=\mu_0/\mathfrak{C}(K)$, где μ_0 есть емкостное распределение, и, следовательно, минимальная энергия единичных масс равна

$$\int U^{\nu_0}\,d\nu_0=\frac{1}{\mathfrak{C}(K)}\,.$$

В самом деле, известно, что мера μ_0 получается выметанием относительно K массы R^{n-2}, равномерно распределенной на сфере $\partial B(0,R)$ $[B(0,R)\supset K]$, поскольку именно эта масса дает потенциал 1 внутри $B(0,R)$. Следовательно, согласно характеризации (β), мера μ_0 получается минимизацией выражения

$$\int (U^\lambda-2)\,d\lambda=\int U^\lambda\,d\lambda-2\lambda(K),\qquad \lambda\in\mathfrak{F}'_K. \tag{6}$$

При $\lambda(K)=m$ интеграл $\int U^\lambda\,d\lambda$ достигает минимального значения только при $\lambda=m\nu_0$, и это значение равно

$m^2 \| \nu_0 \|_e^2$. Выражение (6) равно $m^2 \| \nu_0 \|_e^2 - 2m$ и, следовательно, оно достигает минимума при $m = 1/\| \nu_0 \|_e^2$, т. е. при $\lambda = \nu_0 / \| \nu_0 \|_e^2$. Таким образом, меры μ_0 и ν_0 пропорциональны и утверждение доказано.

Следствие. *Емкостное распределение μ_0 есть единственное распределение массы $\mathfrak{C}(K)$ на K, потенциал которого не превосходит единицы.*

Действительно, если ν — такое распределение, то мера $\nu/\mathfrak{C}(K)$ имеет энергию

$$\frac{1}{\mathfrak{C}^2(K)} \int U^\nu \, d\nu \leqslant \frac{1}{\mathfrak{C}(K)}.$$

Здесь возможен только знак равенства, и, следовательно, имеет место тождество $\nu/\mathfrak{C}(K) = \nu_0$.

§ 9. Энергия и интеграл Дирихле

Наряду с взаимной энергией (μ_1, μ_2) мер $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{E}$ и энергетической нормой $\| \mu \|_e$ были введены для функций типа BLD скалярное произведение

$$(f_1, f_2) = \int_\Omega (\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2) \, dx$$

и норма Дирихле $\| f \| = \sqrt{(f, f)}$ (если нужно, мы будем здесь ставить индексы, указывающие множество сужения для мер или функций).

Лемма 1. *Если $\mu \in \mathfrak{E}^+$ и потенциал $v = U^\mu$ дважды непрерывно дифференцируем, то норма $\| U^\mu \|$ конечна, $\lim\limits_{r \to \infty} \| I_v^r \| = 0$ и $\varphi_n \| \mu \|_e = \| U^\mu \|$, причем здесь I_v^r обозначает интеграл Пуассона от v в $B(0, r)$ и φ_n — поток функции r^{2-n} внутрь сферы $S(0, R)$.*

В самом деле, обозначим через v_r потенциал Грина в $B_r = B(0, r)$ сужения меры μ на этот шар. Имеем $v_r = v - I_v^r$ в $B(0, r)$, и в силу регулярности v интеграл Пуассона I_v^r имеет в $B(0, r)$ градиент, который допускает непрерывное продолжение на $S(0, r)$. Отсюда получаем, по формуле Грина,

$$\varphi_n \int_{B(0, r)} v_r \, d\mu = \int_{B(0, r)} \operatorname{grad}^2 v_r \, dx,$$

потому что мера μ имеет плотность $-\Delta v/\varphi_n$. Следовательно,

$$\int\limits_{B(0,\,r)} \operatorname{grad}^2 v\,dx \leqslant \varphi_n \int\limits_{B(0,\,r)} v\,d\mu < +\infty.$$

Из предыдущего рассуждения или из результатов гл. X (§ 1, замечание 2) вытекает, что $\|v\| \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \|v_r\|$. Здесь обязательно должен быть знак равенства, так как в противном случае для некоторых r мы имели бы $\|v\| < \|v_r\| = \|v - I_v^r\|$, а это противоречит минимизирующему свойству функции $I_v^r = H_v^{B(0,\,r)}$. Следовательно, $\lim_{r\to\infty} \|v_r\| = \|v\|$ и $\varphi_n \|\mu\|_e = \|v\|$. Отсюда вытекает, что $\lim_{r\to\infty} \|I_v^{B_r}\|_{B_r} = 0$ (см. гл. X, § 2, замечание 1).

Лемма 2. *Если меры μ_1 и μ_2 удовлетворяют предположениям леммы* 1, *то* $\varphi_n(\mu_1, \mu_2) = (U^{\mu_1}, U^{\mu_2})$.

В самом деле, используя обозначения леммы 1, из формулы Грина для шара $B_r = B(0, r)$ получаем

$$\int\limits_{B_r} (v_1)_r\, \Delta v_2\, dx + \int\limits_{B_r} [\operatorname{grad}(v_1)_r, \operatorname{grad} v_2]\, dx = 0,$$

откуда

$$\lim_{r\to\infty} [(v_1)_r, v_2]_{B_r} = \varphi_n(\mu_1, \mu_2).$$

Поскольку $\lim_{r\to\infty} \|v_1 - (v_1)_r\|_{B_r} = 0$, отсюда получаем

$$\lim_{r\to\infty} (v_1, v_2)_{B_r} = \varphi_n(\mu_1, \mu_2).$$

Эта лемма распространяется тривиальным образом на разности мер, удовлетворяющих предположениям леммы 1.

Теорема. *Какова бы ни была мера $\mu \in \mathfrak{E}$, потенциал U^μ есть функция типа* BLD *и* $\varphi_n \|\mu\|_e = \|U^\mu\|$; *каковы бы ни были меры $\mu_1 \in \mathfrak{E}$ и $\mu_2 \in \mathfrak{E}$*, имеем

$$\varphi_n(\mu_1, \mu_2) = (U^{\mu_1}, U^{\mu_2}).$$

Можно ограничиться случаем мер $\mu \in \mathfrak{E}^+$. Посредством регуляризации находим возрастающую последовательность

$\{v_p\}$ дважды непрерывно дифференцируемых положительных супергармонических функций v_p, сходящуюся к U^{μ}. Функция v_p есть потенциал U^{μ_p}, $\mu_p \in \mathfrak{E}^+$, и известно, что $\lim\limits_{p\to\infty} \|\mu - \mu_p\|_e = 0$.

С другой стороны,

$$\|U^{\mu_q} - U^{\mu_p}\| = \varphi_n \|\mu_p - \mu_q\|_e,$$

а отсюда следует, что $\{U^{\mu_p}\}$ есть последовательность Коши по норме Дирихле и ее предел U^{μ} есть функция типа BLD. Наконец, имеем $\lim\limits_{p\to\infty} \|U^{\mu_p} - U^{\mu}\| = 0$, и сформулированные результаты получаются переходом к пределу.

§ 10. Распространение на случай ограниченной области Ω в пространстве R^n $(n \geqslant 2)$

Точно такую же теорию можно развить для мер в ограниченной области Ω с ядром Грина $G^{\Omega}(x, y)$ и потенциалом Грина $G\mu$, исходя из основного неравенства (2), распространенного на эти потенциалы. В самом деле, начиная с § 3 все переносится без затруднений. Переносы $\psi_{\rho}^{x_0}$ функции ψ_{ρ}, построенные для точек $x_0 \in \Omega$, расстояние которых от границы больше ϱ, образуют в Ω положительно весьма обильное семейство функций, являющихся потенциалами Грина с массами, расположенными на сферах $\partial B(x_0, \varrho)$ и $\partial B(x_0, \varrho/2)$. Аппроксимации пространства R^n шарами $B(0, n)$ заменяются аппроксимациями посредством возрастающих областей Ω_n, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$, границы которых предполагаются, если нужно, достаточно регулярными.

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы установить неравенство (2) в новых условиях. Пусть сначала положительная мера μ имеет компактный носитель $K \subset \Omega$. Заменяя в Ω h-потенциал (т. е. ньютоновский или логарифмический) U^{μ} через $H_{U^{\mu}}^{\Omega} \leqslant U^{\mu}$, получим квазисупергармоническую функцию в R^n, регуляризация которой есть супергармоническая функция V, ограниченная в окрестности $\partial\Omega$ и имеющая ассоциированную меру μ', причем носитель μ' содержится в $\partial\Omega$, $\mu'(\partial\Omega) = \mu(K)$. Функция V есть h-потенциал меры μ'; это очевидно при $n \geqslant 3$, а при

$n=2$ это следует из того, что разность $V-U^{\mu'}$ стремится к 0 в бесконечности. Заметим, что интеграл $\int\limits_{\Omega} G\mu\, d\mu$ конечен или бесконечен ($+\infty$) одновременно с интегралом $\int\limits_{\Omega} U^{\mu}\, d\mu$ и что интеграл

$$\int U^{\mu'}\, d\mu' = \int U^{\mu}\, d\mu' = \int U^{\mu'}\, d\mu$$

конечен.

Установим теперь, что разность $U^{\mu}-U^{\mu'}$ есть потенциал Грина $G\mu$ в Ω. Действительно, эта разность квазивсюду в Ω есть гармоническая функция, ограниченная в окрестности $\partial\Omega$ и стремящаяся к 0 в регулярных точках. Таким образом, для положительных мер μ_1, μ_2 с компактным носителем вытекают соотношения

$$\int G\mu_1\, d\mu_2 = \int (U^{\mu_1}-U^{\mu_1'})\, d\mu_2 - \int (U^{\mu_1}-U^{\mu_1'})\, d\mu_2',$$

ибо второй интеграл обращается в нуль.

1) В случае R^n при $n \geqslant 3$, используя скалярные произведения в $\mathfrak{E}$, для μ_1, $\mu_2 \in \mathfrak{E}^+$ получаем

$$\int G\mu_1\, d\mu_2 = (\mu_1-\mu_1',\ \mu_2-\mu_2'),$$

откуда в силу теории, развитой в R^n,

$$\left| \int G\mu_1\, d\mu_2 \right|^2 \leqslant \int G\mu_1\, d\mu_1 \cdot \int G\mu_2\, d\mu_2.$$

Это неравенство распространяется на произвольные положительные меры в Ω посредством перехода к пределу, если учесть следующее замечание: пусть μ_n, ν_n — сужения положительных мер μ, ν в Ω на такие области Ω_n, что $\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \overline{\Omega}_{n+1} \subset \Omega$ и $\bigcup \Omega_n = \Omega$, тогда

$$\int G\mu\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{p\to\infty} \int G\mu_n\, d\nu_p \right).$$

2) Если $n=2$, достаточно еще рассмотреть случай положительных мер с компактным носителем в Ω. Воспользуемся, как и М. Рисс, предельным соотношением

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\|x-y\|^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon} = \log \frac{1}{\|x-y\|},$$

причем для достаточно малых $\varepsilon > 0$ числа $(\|x-y\|^{-\varepsilon}-1)/\varepsilon$ возрастают при $\varepsilon \to 0$. Тогда, если для положительной меры μ с компактным носителем в R^n интеграл

$$\int \log \frac{1}{\|x-y\|}\, d\mu(x)$$

конечен, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ то же самое имеет место для

$$\int \frac{\|x-y\|^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon}\, d\mu(x).$$

Рассмотрим, следовательно, множество $\mathfrak{M}_\varepsilon$ таких положительных мер μ в $\overline{\Omega}$, для которых конечен интеграл

$$\int \|x-y\|^{-\varepsilon}\, d\mu(x).$$

Лемма из § 2, точнее последнее неравенство, полученное при ее доказательстве, применимо в R^2 при $n=2$, $\alpha=2-\varepsilon$ и может быть без затруднений распространено на разности мер из $\mathfrak{M}_\varepsilon$, в частности, на разности $\mu=\mu_1-\mu_1'$ и $\nu=\mu_2-\mu_2'$, введенные выше. Учитывая, что $\mu(R^2)=$ $=\nu(R^2)=0$, получаем

$$\left|\int \frac{\|x-y\|^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon}\, d\mu(x)\, d\nu(y)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int \frac{\|x-y\|^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon}\, d\mu(x)\, d\mu(y)\right| \cdot \left|\int \frac{\|x-y\|^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon}\, d\nu(x)\, d\nu(y)\right|$$

Отсюда в пределе при $\varepsilon \to 0$ получается аналогичное неравенство с логарифмическим ядром. Переход к неравенству с ядром Грина совершается так же.

На самом деле развитая теория может быть сразу же распространена на несколько более общий случай пространств Грина (см. далее; частный случай гиперболических римановых поверхностей был представлен Эдвардсом). Однако гораздо более важно углубить лежащий в основе принцип энергии так, чтобы он распространялся на более широкие классы пространств и ядер. Непосредственно, например, обобщая закон составления энергии из § 2, это делал А. Картан; по пути сравнения с другими принципами общей теории шел Ниномия. Отметим также расширение на R^n при помощи обобщенных функций, развитое Дени, с обобщенными функциями в качестве ядер.

БИБЛИОГРАФИЯ

Cartan H. Sur le fondements de la théorie du potentiel, *Bull. Soc. Math. France*, **69** (1941), 71—96.

Cartan H., La théorie générale du potentiel dans les espaces homogènes, *Bull. Sci. Math.*, **66** (1942).

Cartan H., Théorie du potentiel newtonien, énergie, capacité, suites de potentiels, *Bull. Soc. Math. France*, **73** (1945), 74—106.

Cartan H., Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, *Ann. Univ. Grenoble*, **22** (1946), 221—280.

Deny, Deny — Lions — см. работы, цитированные выше.

Edwards R. E., Cartan's balayage theory for hyperbolic Riemann surfaces, *Ann. Inst. Fourier*, 8 (1958), 263—272.

Ninomya N., Sur l'intégrale d'énergie dans la théorie du poten tiel, *J. Inst. Polytechn. Osaca City Univ.*, A4, 2 (1954), 97—100.

Ninomya N., Sur le principe de continuité dans la théorie du potentiel, *J. Inst. Polytechn. Osaca City Univ.*, A8, 1 (1957), 51—56.

Из более старых работ см. в особенности цитированные выше работы Фростмана, Эванса (1935), Валле-Пуссена и М. Рисса.

Глава XII

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ГРАНИЦА МАРТИНА

§ 1. Граница Мартина

С давних пор изучался интеграл, получаемый заменой в интеграле Пуассона I_f функции f или, точнее, меры с плотностью f произвольной мерой на сфере. Было доказано, что таким путем получается функция более общего вида, представимая в виде разности двух положительных гармонических функций (см. в дополнительной библиографии работу Анже).

Мартин распространил это интегральное представление на положительные гармонические функции в произвольных областях (но, например, ограниченных в случае пространства R^2). Он использовал не только соответствующее ядро, но и интегрирование по специально построенной идеальной границе, которая в случае шара отождествляется со сферой. Это и есть *граница Мартина*; она будет кратко описана далее аксиоматическим методом. Мы будем рассматривать случай ограниченной области Ω и дадим только общее представление об этом круге вопросов.

Теорема. *Существует единственное с точностью до гомеоморфизма компактное пространство $\hat{\Omega}$, обладающее следующими свойствами.*

1) *Пространство $\hat{\Omega}$ имеет всюду плотную часть Ω', гомеоморфную Ω. Отождествим Ω' с Ω и назовем $\Delta = \hat{\Omega} - \Omega$ границей Мартина.*

2) *Пусть y_0 — фиксированная точка из Ω; положим $K(x, y) = G(x, y)/G(x, y_0)$ для точек $x, y \in \Omega$ (G — функция Грина области Ω). Для любых точек $y \in \Omega$, $z \in \Delta$ функция $K(x, y)$ имеет предел*

$$\lim_{x \to z} K(x, y) = K(z, y), \quad x \in \Omega.$$

Этот предел есть гармоническая функция от y

3) *Отображение* $z \to K_z$, *ставящее в соответствие каждой точке* $z \in \Delta$ *гармоническую функцию* $K_z = K(z, y)$ *от* $y \in \Omega$, *взаимно однозначно.*

Пространство $\hat{\Omega}$ *метризуемо и не зависит от выбора точки* y_0.

Легко доказать единственность. Если существуют два пространства $\hat{\Omega}_1$ и $\hat{\Omega}_2$, то всякий фильтр $\mathfrak{F}$ на Ω, сходящийся в $\hat{\Omega}_1$ к точке $z \in \Delta_1 = \hat{\Omega}_1 - \Omega$, должен сходиться в $\hat{\Omega}_2$ к некоторой точке границы $\Delta_2 = \hat{\Omega}_2 - \Omega$. В противном случае на Ω существовали бы два фильтра $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}'$, более слабые чем $\mathfrak{F}$ и сходящиеся соответственно к двум различным точкам t и t' границы $\Delta_2 = \hat{\Omega}_2 - \Omega$. Применяя условия 2) и 3) к $\hat{\Omega}_2$, получаем, что функция $K(x, y)$ от x для каждого $y \in \Omega$ сходится по этим двум фильтрам к двум числам, определяющим функции $K_t^{(2)}$ и $K_{t'}^{(2)}$ от y на $\hat{\Omega}_2$. Эти функции различны, так как различны точки t и t', что противоречит, однако, сходимости $K(x, y)$ по фильтру $\mathfrak{F}$ к $K_z^{(1)}$ на $\hat{\Omega}_1$. Следовательно, между Δ_1 и Δ_2 имеется взаимно однозначное соответствие, сохраняющее предельные соотношения. В силу регулярности компактных пространств тождественное отображение Ω продолжается до гомеоморфизма $\hat{\Omega}_1$ на $\hat{\Omega}_2$.

Перейдем к доказательству существования. Пусть α — компактная окрестность точки y_0 и σ — фиксированное открытое множество, такое, что[1] $\sigma \subset \mathring{\alpha}$. Для точек $x_1, x_2 \in \Omega$ введем функцию $\sup\limits_{y \in \sigma} |K(x_1, y) - K(x_2, y)|$. Эта функция обладает свойствами расстояния, так как обращение ее в нуль означает равенство $K(x_1, y)$ и $K(x_2, y)$ в σ, отсюда вытекает тождество гармонических продолжений, а следовательно, и совпадение точек x_1 и x_2. Это расстояние на $\Omega - \alpha$ согласуется с топологией Ω и, таким образом, его можно продолжить на Ω. Пусть $\hat{\Omega}$ — пополнение Ω; когда точка $x \in \Omega$ стремится к точке $x_0 \in \hat{\Omega} - \Omega$ в $\hat{\Omega}$, функция $K(x, y)$ стремится на σ, а следовательно, и на Ω к некоторой функции, которую мы обозначим $K(x_0, y)$.

---

[1]) $\mathring{\alpha}$ — внутренность множества α.—*Прим. перев.*

Вследствие локальной компактности положительных гармонических функций пространство $\hat{\Omega}$ компактно и отвечает всем поставленным условиям. Отметим, что функция $K(x, y)$ непрерывна на $\hat{\Omega} \times \Omega$.

§ 2. Интегральное представление положительных гармонических функций

Пусть u — положительная гармоническая функция в Ω. Введем относительно компактное возрастающее открытое покрытие $\{\omega_n\}$ области Ω. Выметание $\mathfrak{B}_u^{\omega_n}$ есть потенциал Грина

$$\mathfrak{B}_u^{\omega_n}(y) = \int_{\Omega} G(x, y)\, d\mu_n(x)$$

или

$$\mathfrak{B}_u^{\omega_n}(y) = \int_{\Omega} K(x, y)\, d\nu_n(x),$$

где ν_n — мера с общей массой $u(y_0)$, распределенной на $\partial\omega_n$. Эти меры грубо сходятся в $\hat{\Omega}$, и, следовательно, переходя, если нужно, к подпоследовательности, для Ω получаем

$$u(y) = \int K(x, y)\, d\nu(x),$$

где ν — некоторая положительная мера на Δ. Однако это представление, вообще говоря, не единственно; здесь-то и возникают трудности.

Мартин ввел понятие *минимальной* строго положительной гармонической функции u, т. е. такой функции, что всякая мажорируемая ею строго положительная гармоническая функция пропорциональна u. Можно доказать (мы оставим здесь в стороне достаточно простые необходимые для этого построения), что всякая минимальная функция, равная единице в точке y_0, имеет вид $K_x(y) = K(x, y)$, где точка $x \in \Delta$ определяется единственным образом. Точки $x \in \Delta$, соответствующие минимальным функциям, Мартин назвал *минимальными*. Он доказал (в этом заключается трудность), что интегральное представление возможно и единственно, если предположить, что мера ν имеет в качестве существенного носителя множество минимальных точек (между прочим, типа G_δ). Соответствующая мера ν называется *канонической ассоциированной мерой*.

Мы увидим, как можно получить этот результат при помощи одной весьма общей современной теоремы Шоке об *экстремальных*[1]) элементах. Дело в том, что, согласно ставшему тривиальным замечанию А. Картана, минимальные гармонические функции, равные 1 в точке y_0, суть экстремальные элементы множества положительных гармонических функций, равных 1 в точке y_0.

§ 3. Формулировка теоремы Шоке и ее применение

Пусть $\mathfrak{C}$ — выступающий заостренный выпуклый конус в локально выпуклом топологическом векторном пространстве. Включение $y - x \in \mathfrak{C}$ определяет отношение порядка $x \prec y$. Предположим, что $\mathfrak{C}$ есть решетчатое множество для этого порядка и что все его образующие пересекают некоторую не проходящую через нуль гиперплоскость по компактному и метризуемому множеству B (называемому базисом).

Тогда всякая точка X базиса B является центром тяжести $\int x\,d\mu(x)$ (векторный интеграл) единственной единичной положительной меры μ, существенным носителем которой является множество экстремальных точек B. Это означает, что для всякой линейной непрерывной формы l имеет место представление в виде интеграла Радона

$$l(X) = \int l(x)\,d\mu(x).$$

Применение к **представлению Мартина.** Рассмотрим (локально выпуклое) действительное векторное пространство числовых функций на Ω, например конечных и непрерывных, снабженное топологией компактной сходимости. Множество положительных гармонических функций представляет собой в этом пространстве выступающий заостренный выпуклый конус; известно, что он является решетчатым для естественного отношения порядка, определяющего

1) См. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959, гл. II.

этот конус. Множество функций, равных 1 в точке y_0, есть гиперплоскость, и ясно, что пересечение B конуса с этой гиперплоскостью является компактным и метризуемым базисом.

Следовательно, всякая гармоническая функция $v > 0$ на Ω, равная 1 в y_0, т. е. всякая точка из B, является центром тяжести $\int w\,d\mu(w)$ единственной единичной положительной меры μ на B, существенным носителем которой является множество экстремальных элементов, т. е. минимальных функций, равных 1 в y_0.

Так как для всех $y \in \Omega$ отображение $w \longrightarrow w(y)$ линейно и непрерывно, имеем

$$v(y) = \int w(y)\,d\mu(w).$$

Поскольку μ также является мерой на замыкании в B множества K_x экстремальных элементов, т. е. на некотором компактном множестве, гомеоморфном части Δ, ее можно отождествить с мерой на Δ, существенным носителем которой является множество минимальных точек. Отсюда получается результат Мартина:

$$v(y) = \int K(x, y)\,d\mu(x).$$

§ 4. О роли границы Мартина

В случае шара пространство Мартина гомеоморфно его евклидову замыканию и то же самое имеет место для всех областей с достаточно регулярной евклидовой границей. Ясно, что в случае шара функция $K(x, y)$, $x \in \hat{\Omega} - \Omega$, есть ядро Пуассона ($y_0$ в центре), и, таким образом, интеграл Пуассона — Стильтьеса является частным случаем общего представления Мартина. Рассматривая, в частности, круг и подвергая его произвольному конформному преобразованию (сохраняющему K), мы видим, что совокупность простых концов границы в смысле Каратеодори односвязной плоской области совпадает с точностью до гомеоморфизма с границей Мартина; таким образом, граница Мартина является естественным обобщением граничных элементов Каратеодори.

Среди идеальных границ, получаемых, в частности, путем пополнения с использованием некоторой метрики, согласующейся с топологией, граница Мартина представляется наиболее удобной и наиболее применимой в качестве задающей границы как в теории потенциала, так и в других, связанных с этим, вопросах (аналитические функции на римановых поверхностях, функции типа BLD). Она позволяет построить обобщение задачи Дирихле, аналогичное тому, которое было сделано для евклидовой границы; как частный случай здесь получается представление Мартина (см. в библиографии работу Брело, 1956). Граница Мартина хорошо приспособлена для изучения граничного поведения положительных гармонических и супергармонических функций или даже функций типа BLD путем введения понятий разреженности и тонкого предела на границе Мартина аналогично тому, как это сделано в классическом случае; здесь получаются результаты большей общности, чем в случае евклидовой границы общего вида, аналогичные классическим результатам для шара (см. в библиографии диссертацию Наим 1957 г. и работы Дуба). Так, отношение u/h супергармонической функции $u \geqslant 0$ и гармонической функции $h > 0$ имеет тонкий предел почти всюду на границе в смысле канонической меры, ассоциированной с функцией h (Дуб).

БИБЛИОГРАФИЯ

Brelot M., Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin, *Ann. Univ. Grenoble*, **23** (1948).

Brelot M., Le problème de Dirichlet, axiomatique et frontière de Martin, *J. math. pures et appl.*, **35** (1956), 297—335.

Choquet G., Notes sur la représentation intégrale au moyen des éléments extrémaux, *C. r. Acad. sci.*, **243** (1956), 555; 699; 736.

Choquet G., Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux, Sem. Bourbaki (Déc. 1956).

Deny J., Le principe des singularités positives de Bouligand et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine, *Rev. sc.* (1947), fasc. 14.

Doob J. L., Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957). 5

Doob J. L., A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem, *Ann. Inst. Fourier*, **9** (1959), 293.

Doob J. L., Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, *Ann. Inst. Fourier*, **12** (1962), 573—622.

Очень простое доказательство существования представления Шоке можно найти в работе

Hervé R.-M., Sur les représentations intégrales à l'aide des points extrémaux dans un ensemble compact convexe métrisable, *C. r. Acad. Sci.*, 1961.

Martin R. S., Minimal positive harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49** (1941), 137—172.

Naim L., Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, **7** (1957), 183—281.

КРАТКИЙ ОБЗОР И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ БИБЛИОГРАФИЯ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Желая упростить рассуждения, мы рассматривали только ограниченные области или все пространство R^n при $n \geqslant 3$. Однако можно получить не только путем введения на границе или в области бесконечно удаленной точки, но и посредством построений, связанных только с областью, но не с ее границей, расширения на более общие многообразия, такие, как *пространство* $\mathfrak{E}$, или *пространство Грина* [5]. Пространством $\mathfrak{E}$ называется связное отделимое топологическое пространство, каждая точка которого имеет открытую окрестность, гомеоморфную некоторому открытому множеству пространства R^n (или его компактификации Александрова $\overline{R^n}$), и структура которого определяется некоторым атласом (в R^n или $\overline{R^n}$), причем изменения карт суть изометрические отображения (при $n=2$ — конформные отображения); здесь содержится случай римановых поверхностей. Если существует «функция Грина» (или, иначе, существует отличная от константы положительная супергармоническая функция, как это имеет место в R^n при $n \geqslant 3$), мы имеем дело с *пространством Грина*.

Вводятся также различные «краевые условия», например при помощи «*линий Грина*» (касательных к линиям $\operatorname{grad} G_{x_0}$) или путем введения границ, получаемых пополнением в некоторой метрике, согласующейся с топологией. Изучение *границы Мартина* проводится так, как это было намечено выше, и она играет роль задающей границы при общем изучении супергармонических функций и задачи Дирихле, что было показано Л. Наим (см. в библиографии к гл. XII работы Брело и Наим).

Имеется еще много других направлений, где классическая теория допускает заслуживающие внимания обобщения. Назовем здесь наиболее важные из них.

Уже указанные работы Дени, в которых *ядро h и меры заменяются обобщенными функциями* [9].

Работы сначала Картана и Дени [6, 9], а затем Дени и Шоке [7—9], в которых рассматриваются *свертки мер в евклидовом пространстве или на топологической группе.*

Аксиоматические построения с ядерными функциями в евклидовом или локально компактном пространстве или на группе, уже частично упоминавшиеся. Здесь исследуются соотношения между «принципами» или разыскиваются ядра, им удовлетворяющие. Назовем работы современных японских математиков [Угаери, Кунугуи, Каметани, Ниномия (см. гл. XI), Мацусита и др.] и работу Шоке—Дени [8], где полностью разобран случай пространства, состоящего из конечного числа точек. Роль непрерывных потенциалов была подчеркнута в работах Анже [1], который положил их в основу своих изысканий и изложения.

Связь с теорией вероятностей была уточнена уже у Какутани. Однако значительное развитие это направление получило в работах Дуба [10], который построил аксиоматику, отличную от намеченной Таутцем [15], гармонических и супергармонических функций в топологическом пространстве, *связывающую их с марковскими процессами* (и позволяющую, между прочим, рассматривать одновременно некоторые эллиптические и параболические уравнения). Здесь также изучен дискретный случай.

Связанные с теорией вероятностей исследования Каца, Феллера и, в особенности, Ханта [12], в которых дается весьма общий и основательный синтез на основе изучения потенциала как преобразования, переводящего одну функцию или меру в другую функцию или меру.

Исследования Брело [4], а затем Эрве [11] (не связанные с теорией Ханта), в которых иным способом, чем у Дуба и Таутца, строится *аксиоматика супергармонических функций* в локально компактном пространстве (положительные потенциалы появляются как супергармонические функции, наибольшая гармоническая миноранта которых есть нуль). Существенные факты классической теории сохраняются без применения ядра или функции Грина.

Исследования Бёйрлинга и Дени [3], в которых на основе *аксиоматизации интеграла Дирихле* строится другая теория, не использующая понятия ядра.

Аксиоматические исследования Бауера [2] о задаче Дирихле, связанные с границей типа «границы Шилова» и расширяющие начало теории Брело [4].

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Anger G., Thèse, Dresden, 1957. Sem. théor. potent. 1958

[1*] Ein funktionalanalytischer Aufbau der Potentialtheorie, *Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden*, 8, 4 (1958—59), 679—685.

[2] Bauer H., Un problème de Dirichlet pour la frontière de Šilov d'un espace compact, *C. r. Acad. sci.*, **247** (1958), 843—846.
Frontière de Šilov et problème de Dirichlet, Sem. théor. potent., 1958—59, t. 3.
Une axiomatique du problème de Dirichlet pour certaines équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques, *C. r. Acad. sci.*, **250** (1960), 2672—2674.
Šilovscher Rand und Dirichletscher Problem, *Ann. Inst. Fourier*, **11** (1961), 89—136.

[3] Beurling A., Deny J., Espaces de Dirichlet, I : Le cas élémentaire, *Acta Math.*, **99** (1958), 203—224.

[4] Brelot M., Extension axiomatique des fonctions sousharmoniques, *C. r. Acad. sci.*, **245**, 20 (1957), 1688—1690.
Extension axiomatique des fonctions sousharmoniques, *C. r. Acad. sci.*, **246**, 16 (1958), 2334—2337.
Une axiomatique générale du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts, Sem. théor. potent. M. Brelot, G. Choquet, J. Deny, 1957, t. I, n. 6, 16 p.
Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, ibid., 1958, t. 2, n. 1, 40 p.
Lectures on potential theory, Bombay, Tata Inst., 1960.

[5] Brelot M., Choquet G., Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier*, **3** (1951), 199—262.

[6] Cartan H., Deny J., Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique, *Acta Szeged*, **12** (1950), 81—100.

[7] Choquet G., Les noyaux réguliers en théorie du potentiel, *C. r. Acad. sci.*, **243**, 7 (1956), 635—638.

Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, *C. r. Acad. sci.*, **244**, 12 (1957), 1606—1609.
Sem. théor. potent., 1957.

[8] C h o q u e t G., D e n y J., Aspects linéaires de la théorie du potentiel. I. Etude des modéles finis, *C. r. Acad. sci.*, **242**, 2 (1956), 222—225. II. Théorème de dualité et applications, *C. r. Acad. sci.*, **243**, 10 (1956), 764—767.
Modèles finis en théorie du potentiel, *J. d'analyse math.*, 5 (1956—57), 77—135.

[9] D e n y J., Les potentiels d'énergie finie, Thèse, *Acta Math.*, **82** (1950).
Sur la définition de l'énergie en théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, **2** (1950), 83—99.
Familles fondamentales, noyaux associés, *Ann. Inst. Fourier*, **3** (1951), 73—101.

[10] D o o b J. L., Semi-martingales and subharmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77** (1954), 86—121.
Martingales and one-dimensional diffusion, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 168—208.
Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. Third Symp. Math. Stat. Prob., 1954—55, v. 2, p. 49—80.
Probability theory and the first boundary value problem, *Ill. J. Math.* **2** (1958), 13—36.
Discrete potential theory and boundaries, *J. Math. Mech.*, **8** (1959), 433—458.

[11] H e r v é R.-M., Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, **12** (1962), 415—571.

[12] H u n t G. A., Markoff processes and potentials, *Ill. J. Math.*, **1**, 3 (1957); **2**, 2 (1958).
Эти статьи приведены в книге: Х а н т Дж. А., Марковские процессы и потенциалы, ИЛ, М., 1962.

[13] M a t s u s h i t a S., Generalized laplacian and balayage theory, *J. Inst. Polytechn. Osaca City Univ.*, **A8**, 1 (1957), 59—90; ibid. **A9**, 1958.

[14] O h t s u k a M., Les relations entre certains principes en théorie du potentiel, *Proc. Japan. Acad.*, **33**, № 1 (1957), 37—40.

[15] T a u t z, Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe, *Math. Nachr.*, **2** (1949), 279—303.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ГАРМОНИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Сначала мы рассматриваем случай плоскости, но таким способом, который позволяет легко получить впоследствии обобщение на пространства R^n высших размерностей; некоторые вопросы, не допускающие такой трактовки, изучены отдельно.

§ 1. Основные свойства

1. Определение. Рассмотрим в плоскости открытое множество Ω, конечную непрерывную функцию $u(M)$ точки M, действительную или комплексную, и совокупность замкнутых кругов $\overline{D_{M_0}^r}$ радиуса r с центром M_0, содержащихся в Ω. Обозначим через $\mathfrak{A}_u^r(M_0)$ и $\mathfrak{M}_u^r(M_0)$ средние значения функции u соответственно по площади круга $D_{M_0}^r$ и по длине дуги его окружности:

$$\mathfrak{M}_u^r(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r, \theta)\, d\theta,$$

$$\mathfrak{A}_u^r(M_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta)\, \varrho\, d\varrho\, d\theta = \frac{2}{r^2}\int_0^r \mathfrak{M}_u^\varrho(M_0)\, \varrho\, d\varrho.$$

Условия

$$1)\ \mathfrak{A}_u^r(M_0) = u(M_0) \quad \text{и} \quad 2)\ \mathfrak{M}_u^r(M_0) = u(M_0)$$

равносильны для фиксированной точки M_0 и переменного радиуса r, $0 < r < R$, $\overline{D_{M_0}^R} \subseteq \Omega$, а следовательно, они равносильны и для всего множества кругов, содержащихся в Ω. В самом деле, из условия 2) вытекает, что

$$\mathfrak{A}_u^r(M_0)=\frac{2}{r^2}\int\limits_0^r u(M_0)\,\varrho\,d\varrho=u(M_0).$$

С другой стороны, из условия 1) получаем

$$r^2u(M_0)=2\int\limits_0^r \mathfrak{M}_u^\varrho(M_0)\,\varrho\,d\varrho,$$

$$2ru(M_0)=2\mathfrak{M}_u^r(M_0)\,r,$$

$$u(M_0)=\mathfrak{M}_u^r(M_0).$$

Переходы от значений $u(M_0)$ к средним значениям дают при конечном r новые функции от M_0, определенные для точек Ω, расстояние которых до границы больше r; эти преобразования называются *пространственным и сферическим усреднениями*. Доказанное свойство равносильности можно высказать и в такой форме, что инвариантность для всех r при одном усреднении равносильна инвариантности при другом усреднении.

Определение. Функция u называется *гармонической* в Ω, если она инвариантна при том или другом усреднении.

Очевидно, что действительная и мнимая части гармонической функции суть функции гармонические, и наоборот. Когда говорят о гармонической функции, обычно подразумевают, что она действительная.

Замечание. Если функция u имеет непрерывные частные производные первого порядка, то условие гармоничности равносильно условию $\int \frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0$ для окружности любого замкнутого круга, содержащегося в Ω. В самом деле, из этого условия вытекает, что $\int \frac{\partial u}{\partial \varrho}\,d\theta=0$, т. е. интеграл $\int u(\varrho,\theta)\,d\theta$ не зависит от ϱ.

2. Первоначальные свойства.

а) Свойство гармоничности сохраняется при составлении линейных комбинаций, при преобразовании подобия и при локальной равномерной сходимости.

б) Теорема Пикара. *Всякая действительная гармоническая функция, ограниченная сверху или снизу на всей плоскости, есть константа.*

Ограничимся случаем $u \geqslant 0$. Рассмотрим круг с центром M_0 радиуса r_0 и другой круг с центром M_1 радиуса r_1, содержащий первый. Сравнение интегралов по площади этих кругов дает

$$\pi r_0^2 \mathfrak{A}_u^{r_0}(M_0) \leqslant \pi r_1^2 \mathfrak{A}_u^{r_1}(M_1),$$

$$r_0^2 u(M_0) \leqslant r_1^2 u(M_1).$$

Заставляя r_0 и r_1 возрастать так, чтобы их отношение стремилось к единице, находим

$$u(M_0) \leqslant u(M_1).$$

Противоположное неравенство получается в результате перемены ролей двух кругов.

в) Если действительная гармоническая функция достигает максимума или минимума в некоторой точке, то она постоянна в окрестности этой точки.

Для комплексной гармонической функции имеем

$$|u(M)| \leqslant \mathfrak{M}_{|u|}^r(M).$$

Отсюда получаем, что если модуль комплексной гармонической функции достигает максимума в некоторой точке, то функция постоянна в окрестности этой точки.

Последнее свойство приводит нас к весьма важному принципу.

3. **Принцип максимума** (абстрактная форма). *Пусть на связном топологическом пространстве E определена полунепрерывная сверху действительная функция f и известно, что если f достигает максимума в некоторой точке, то она постоянна в окрестности этой точки. Тогда если f достигает своей верхней грани, то f — константа.*

Действительно, множества, на которых $f = \sup f$ и $f < \sup f$, открыты, а значит, второе множество пустое.

Упражнение. Если, кроме того, пространство E не компактно, то

$$\sup f = \inf_K [\sup_{M \in \complement K} f(M)],$$

где K пробегает все компактные множества из E.

Применение. Пусть Ω — открытое множество в пространстве R^n, на котором определена полунепрерывная сверху действительная функция f; известно, что если f достигает максимума в некоторой точке, то она постоянна в окрестности этой точки. Присоединяя к R^n бесконечно удаленную точку, получаем компактное пространство $\overline{R^n}$, топологию которого мы и будем иметь в виду. Тогда

а) если f достигает своей верхней грани в некоторой точке, то f постоянна во всей связной компоненте, содержащей эту точку;

б) если λ — верхняя грань верхних пределов на границе Ω, то $f \leqslant \lambda$;

в) если K — компактное множество, содержащееся в Ω, и ∂K — его граница, то

$$\sup_{M \in K} f(M) = \sup_{M \in \partial K} f.$$

Свойство а) непосредственно следует из сформулированного принципа.

Для доказательства свойства б) продолжим f на $\partial\Omega$, принимая в качестве значения f в каждой точке $\partial\Omega$ верхний предел в этой точке на Ω. Построенная функция полунепрерывна сверху на компактном множестве $\overline{\Omega}$. Допустим, что $f > \lambda$ в Ω; тогда верхняя грань продолженной функции $\alpha > \lambda$ достигается в некоторой точке Ω. Это есть также верхняя грань f в Ω, и f постоянна на соответствующей связной компоненте. На границе этой компоненты верхний предел f в Ω равен $\alpha > \lambda$, что противоречит сделанному предположению.

Наконец, свойство в) следует из того, что в $\mathring{K}$ функция f мажорируется верхней гранью верхних пределов f на границе, т. е. верхней гранью f на ∂K.

Замечание. Пусть функции f_n непрерывны и пусть из того, что f_n достигает экстремума в некоторой точке Ω, следует, что f_n постоянна в окрестности этой точки; кроме того, пусть f_n имеет конечный предел $\varphi_n(P)$ в каждой точке границы $\partial\Omega$. Тогда из равномерной сходимости φ_n на $\partial\Omega$ следует равномерная сходимость f_n на Ω.

Отметим, что в случае действительной гармонической функции u принцип максимума применим к u, $-u$ и u^+; в случае комплексной гармонической функции — к $|u|$.

Задача Дирихле. Гармоническая функция на открытом множестве Ω, обращающаяся в нуль на границе, т. е. стремящаяся к нулю в каждой точке границы (граница рассматривается в пространстве с присоединенной бесконечно удаленной точкой), тождественно равна нулю.

Следовательно, две гармонические функции, принимающие на границе одни и те же конечные значения, тождественно равны в Ω, так как их разность обращается в нуль на границе. Возникает вопрос, существует ли гармоническая функция, принимающая на границе заданные значения. *Это и есть задача Дирихле.*

Задача Дирихле имеет не более одного решения, если граничные данные конечны. Однако это решение не всегда существует, даже если граничные данные непрерывны.

Эта весьма важная для математики и физики задача усиленно изучалась. Несколько дальше мы дадим ее решение для круга с конечными непрерывными граничными данными.

4. Дифференцирование гармонических функций. Пусть $\varphi(\varrho)$ — конечная действительная функция от $\varrho \geqslant 0$, равная нулю при $\varrho \geqslant \varrho_0 > 0$ и такая, что $\varphi(0M)$ имеет непрерывные производные всех порядков по координатам x, y точки M, т. е. бесконечно дифференцируемая функция, или функция класса C^∞. Такова, например, функция, равная $\exp[1/(\varrho^2-\varrho_0^2)]$ при $0 \leqslant \varrho < \varrho_0$ и 0 при $\varrho \geqslant \varrho_0$.

При помощи численного множителя можно реализовать дополнительное условие

$$\int\limits_{D_0^{\varrho_0}} \varphi(0M)\,d\omega_M = 1, \quad \text{или} \quad 2\pi \int\limits_0^{\varrho_0} \varphi(\varrho)\,\varrho\,d\varrho = 1,$$

где $d\omega$ — мера Лебега.

Пусть теперь функция $f(M)$ конечна и непрерывна на открытом множестве Ω. Изучим композицию функций $\varphi(0M)$ и $f(M)$

$$F(P) = \int\limits_{D_P^{\varrho_0}} \varphi(MP)\,f(M)\,d\omega_M.$$

Мы предполагаем, что расстояние точки P от границы больше ϱ_0. На открытом множестве Ω_{ρ_0}, составленном из таких точек P, функция $F(P)$ принадлежит классу C^∞ (дифференцирование под знаком интеграла возможно). Если ϱ, θ — полярные координаты с полюсом P, то

$$F(P)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_0}\varphi(\varrho)f(\varrho,\theta)\,\varrho\,d\varrho\,d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^{\rho_0}\mathfrak{M}_f^{\varrho}(P)\,\varphi(\varrho)\,\varrho\,d\varrho.$$

Применяя этот результат к гармонической функции f, получаем $F(P)=f(P)$. Следовательно, гармонические функции принадлежат классу C^∞.

Упражнение. Доказать, что при пространственном усреднении с постоянным радиусом конечной и непрерывной функции f получаем функцию с непрерывным градиентом. Если f имеет непрерывные производные порядка n, то получается функция с непрерывными производными порядка $n+1$. Рассмотреть применения к гармоническим функциям.

5. Формулы Грина. Пусть ограниченное открытое множество Ω имеет достаточно регулярную границу, состоящую, например, из нескольких окружностей, и пусть на открытом множестве $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$ определен непрерывно дифференцируемый вектор $\mathbf{V}$, действительный или комплексный. Тогда справедлива формула Грина — Римана

$$\int_{\Omega}\operatorname{div}\mathbf{V}\,d\omega=\int_{\partial\Omega}(\mathbf{V},\mathbf{n})\,ds, \tag{1}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, s — длина дуги на $\partial\Omega$. Вообще говоря, множество Ω называется *регулярным по Грину*, если для него имеет место формула (1). Пусть теперь функции f и g имеют непрерывные частные производные второго порядка на Ω_0. Применяя формулу (1) к вектору $\mathbf{V}$ с проекциями $f\,\partial g/\partial x$ и $f\,\partial g/\partial y$, получаем

$$\int [f\Delta g+(\operatorname{grad} f,\ \operatorname{grad} g)]\,d\omega=\int_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial n}\,ds, \tag{2}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. В частности, отсюда следуют формулы

$$\int\limits_{\Omega} \Delta g\, d\omega = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n}\, ds, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\, d\omega = \int\limits_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) ds. \tag{4}$$

6. Локальный характер гармоничности. Критерий, использующий лапласианы. Пусть u — гармоническая функция на Ω и $D^r_{M_0}$ — замкнутый круг в Ω с границей γ. Поскольку $\int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0$, имеем

$$\int\limits_{D^r_{M_0}} \Delta u\, d\omega = 0.$$

Отсюда следует, что в каждой точке Ω должно удовлетворяться *уравнение Лапласа* $\Delta u = 0$. Наоборот, если u имеет непрерывные частные производные второго порядка и всюду выполняется условие $\Delta u = 0$, то $\int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0$ и, следовательно, u — гармоническая функция.

Существование непрерывных частных производных второго порядка и обращение в нуль лапласиана составляют *локальный критерий гармоничности*.

Упражнение. Пусть функция f имеет непрерывные вторые частные производные в окрестности точки M_0. Показать при помощи (3) и формулы Тейлора, что

$$\Delta f(M_0) = \lim_{r\to 0} \frac{4}{r^2}\, [\mathfrak{M}^r_f(M_0) - f(M_0)],$$

$$\Delta f(M_0) = \lim_{r\to 0} \frac{8}{r^2}\, [\mathfrak{A}^r_f(M_0) - f(M_0)].$$

Поскольку эти пределы существуют для функций f более общего вида (не обязательно непрерывных), их называют *обобщенными лапласианами*.

§ 2. Применение обыкновенного лапласиана

7. Гармонические полиномы. Если гармонический полином P представлен в виде суммы однородных полиномов $P_0+P_1+\ldots+P_m$, где полином P_i имеет степень i, то каждое слагаемое в этой сумме есть гармонический полином. Это очевидно для $m=0$ или $m=1$; члены суммы $\Delta P=\Delta P_2+\ldots+\Delta P_m$ являются однородными полиномами различных степеней, и, следовательно, все они тождественно равны нулю, если $\Delta P=0$.

Итак, мы можем ограничиться изучением однородных гармонических полиномов. Пусть $m\geqslant 2$. Записывая условие гармоничности полинома

$$P_m(x, y)=a_{m,0}x^m+a_{m-1,1}x^{m-1}y+\ldots+a_{0,m}y^m,$$

получаем, что член с x^py^q в ΔP_m имеет коэффициент

$$a_{p+2,q}(p+2)(p+1)+a_{p,q+2}(q+2)(q+1).$$

Приравнивая нулю все эти коэффициенты для $p+q=$ $=m-2$, получаем $m-1$ уравнений с $m+1$ неизвестными $a_{m,0}, \ldots, a_{0,m}$. Заметим, что левые части этих уравнений являются *независимыми* линейными формами. Достаточно показать, что уравнения, получаемые приравниванием этих левых частей произвольным числам, всегда разрешимы. Полагая $a_{0,m}=a_{1,m-1}=0$, последовательно получаем остальные коэффициенты из уравнений с одним неизвестным. Таким образом, все коэффициенты гармонического полинома P_m получаются в виде линейных однородных функций двух из них.

Полином P_m имеет вид $\lambda Q_m^1+\mu Q_m^2$, причем Q_m^1 всегда имеет члены, которых нет в Q_m^2. Эти полиномы Q_m^1, Q_m^2 линейно независимы, т. е. их линейная комбинация может быть тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда все ее коэффициенты равны нулю. Наоборот, составляя линейную комбинацию двух линейно независимых гармонических полиномов данной степени, всегда получаем гармонический полином общего вида.

Эти два линейно независимых полинома легко получить, если заметить, что комплексная функция $(x+iy)^m$ гармонична. Действительно, ее вторые производные по x и y соответственно равны $m(m-1)(x+iy)^{m-2}$

и $-m(m-1)(x+iy)^{m-2}$. Искомые полиномы получаются, если отделить действительную и мнимую части $(x+iy)^m$; в полярных координатах эти полиномы имеют вид $\varrho^m \cos m\theta$ и $\varrho^m \sin m\theta$. Следовательно, всякий полином и всякий степенной ряд в круге его сходимости по $z=x+iy$ являются гармоническими функциями, поскольку равномерная сходимость сохраняет гармоничность.

8. Лапласиан в полярных координатах. Фундаментальная гармоническая функция. В полярных координатах выражение лапласиана имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho}.$$

Если u зависит только от ϱ, то легко находим

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{du}{d\varrho}.$$

Приравнивая это выражение нулю и решая получающееся дифференциальное уравнение, получаем гармонические функции, зависящие только от ϱ:

$$A \log \varrho + B,$$

где A и B — постоянные. По аналогии со случаем пространства более удобна функция $h(\varrho) = \log(1/\varrho)$; при $\varrho = 0M$ она называется *фундаментальной гармонической функцией*.

9. Применения формул Грина. В открытом множестве определения гармонической функции u рассмотрим область Ω, допускающую применение формул Грина. Поток u через границу $\partial\Omega$ равен нулю.

Применение. Если u — гармоническая функция в кольце с центром O, то

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \varrho}\,\varrho\, d\theta = K = \text{const},$$

где γ_ρ — окружность с центром O радиуса ϱ. Отсюда

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho}\, d\theta = \frac{K}{\varrho}$$

и

$$\int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta)\, d\theta = K \log \varrho + K_1.$$

Среднее значение функции u на окружности γ_ρ есть линейная функция от $\log \varrho$ или $\log(1/\varrho)$.

Упражнение. Пусть ω — открытая окрестность точки некоторой достаточно регулярной кривой. Если функция с непрерывным градиентом в ω гармонична по каждую сторону от кривой, то она гармонична в ω.

Пусть $P \in \Omega$; окружим P малым кругом $\bar{D}_P^R$ с окружностью γ и рассмотрим область $\Omega - \bar{D}_P^R$. Применяя формулу Грина (4) к этой области и к гармоническим функциям u и $\log(1/PM)$, получаем

$$-\int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{PM} - \log \frac{1}{PM} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds =$$
$$= \int_{\gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{PM} - \log \frac{1}{PM} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

где производные берутся по направлению внутренней нормали для области $\Omega - \bar{D}_P^R$. Второй интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int_{\gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{PM} - \log \frac{1}{PM} \frac{\partial u}{dn} \right) ds =$$
$$= \int_{\gamma} u \frac{d}{d\varrho} \log \frac{1}{\varrho}\, ds = -\frac{1}{R} \int_{\gamma} u\, ds = -2\pi u(P).$$

Отсюда получаем

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{PM} - \log \frac{1}{PM} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds_M. \tag{5}$$

10. Оценка производных гармонических функций. Пусть функция $u(M, t)$ зависит от параметра t и имеет непрерывные производные третьего порядка по x, y, t. Если u гармонична по x, y, то гармонична и $\partial u/\partial t$, потому что

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \Delta u.$$

Точно так же, все частные производные функции u по x и y являются гармоническими функциями. Отсюда можно получить оценки производных.

Пусть u — гармоническая функция на открытом множестве Ω, точка P и замкнутый круг $\overline{D}_P^R$ с границей γ содержатся в Ω. Так как $\partial u/\partial x = \operatorname{div}(u, 0)$, получаем

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x} = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{D_P^R} \frac{\partial u}{\partial x} d\omega = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{\gamma} u \cos\theta \, ds.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial u(P)}{\partial x} \right| \leqslant \frac{U_\gamma}{\pi R} \int\limits_0^{2\pi} |\cos\theta| \, d\theta = \frac{4U_\gamma}{\pi R},$$

где $U_\gamma = \sup|u|$. Полагая $U = \sup|u|$ и обозначая через δ расстояние точки P до границы, имеем

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leqslant \frac{4U}{\pi\delta}. \tag{6}$$

Этот результат можно несколько улучшить для действительной функции u, применяя предыдущую оценку к функции $u - (\overline{B} + \underline{B})/2$, где $\overline{B} = \sup u$ и $\underline{B} = \inf u$. Получаем

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leqslant \frac{4}{\pi\delta} \frac{\overline{B} - \underline{B}}{2} \tag{7}$$

и

$$|\operatorname{grad} u| \leqslant \frac{4}{\pi\delta} \frac{\overline{B} - \underline{B}}{2}. \tag{8}$$

Отсюда еще раз находим, что если u — гармоническая функция, ограниченная во всей плоскости, то $u = \text{const}$.

§ 3. Конформное преобразование

11. Рассмотрим непрерывно дифференцируемое действительное преобразование области Ω плоскости (x, y), в плоскость $(X, Y): X = f(x, y)$, $Y = g(x, y)$. Тогда

$$dX = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

$$dY = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy.$$

Предположим, что в каждой точке dX и dY одновременно обращаются в нуль тогда и только тогда, когда $dx=dy=0$; это условие, очевидно, равносильно тому, что $D(f, g)/D(x, y) \neq 0$. Отсюда вытекает *локальная взаимная однозначность*.

Изучим, как изменяется угол между направлениями, задаваемыми дифференциалами. Предположим, что двум ортогональным направлениям соответствуют два ортогональных направления. Векторам $(dx=1,\ dy=0)$ и $(dx=0,\ dy=1)$ соответствуют векторы $(\partial f/dx,\ \partial g/\partial x)$ и $(\partial f/\partial y,\ \partial g/\partial y)$, откуда

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}=0.$$

Рассматривая векторы $(dx=1,\ dy=1)$, $(dx=1,\ dy=-1)$ и соответствующие им векторы

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2=0.$$

Итак, должны выполняться следующие условия:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2=\lambda(x, y)>0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}=0. \tag{10}$$

Из соотношений (9) и (10), между прочим, следует, что любые два ортогональных направления переходят в ортогональные и что эти условия равносильны одному:

$$dS^2=\lambda\, ds^2, \quad \lambda>0.$$

Производные $\partial f/\partial y$ и $\partial g/\partial y$ не обращаются одновременно в нуль согласно нашей гипотезе; если же одна из этих производных равна нулю, то, согласно (10), производная другой функции по x равна нулю. Следовательно, полагая

$$\frac{\partial f/dx}{\partial g/\partial y}=-\frac{\partial g/\partial x}{\partial f/\partial y}=\varepsilon(x, y),$$

получаем выражение, которое всегда определено одним из соотношений и *непрерывно*. Подставляя в (9), находим $\varepsilon^2 = 1$.

Итак, в рассматриваемой области имеем всюду $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$. Следовательно, якобиан $\frac{D(f, g)}{D(x, y)} = \varepsilon\lambda$ также имеет постоянный знак. Таким образом, возможны два случая:

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{\partial g}{\partial x}; \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{\partial g}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

В случае (I) преобразование дифференциалов соответствует вращению, сопровождаемому преобразованием подобия, причем сохраняются величины углов и направления их отсчета. В случае (II) общее преобразование равносильно преобразованию первого типа, сопровождаемому симметрией относительно оси OX; имеет место сохранение величины углов, но направление отсчета меняется на противоположное.

Следовательно, рассмотренные выше преобразования, подчиненные условию сохранения углов любых пар ортогональных направлений (или только двух пар) в каждой точке области, необходимо принадлежат во всей области к одному из указанных двух видов. Они называются соответственно *конформными преобразованиями I или II рода*.

12. Кроме того, если γ — окружность в Ω, то в силу (I) или (II)

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial n}\, ds = \pm \int\limits_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial s}\, ds = 0.$$

Итак, в обоих случаях f и g — гармонические функции.

Пусть теперь функция $U(X, Y)$ имеет непрерывные вторые производные и при конформном преобразовании переходит в функцию $u(x, y)$. Элементарное вычисление дает

$$\Delta u = \Delta U\, \lambda(x, y),$$

то есть

$$\Delta u\, ds^2 = \Delta U\, dS^2.$$

Это свойство можно получить еще следующим образом. Пусть малый круг D_r с центром (x, y) имеет в качестве образа множество E_r. Тогда

$$\Delta u = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial D_r} \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

$$\Delta U = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\text{пл.}\, E_r} \int_{\partial E_r} \frac{\partial U}{\partial n} dS.$$

Интегралы равны в силу локального подобия. Так как отношение площадей стремится к отношению ds^2/dS^2, получаем уже найденный результат.

В частности, *при преобразованиях указанных двух типов гармоничность функции сохраняется.*

§ 4. Логарифмический потенциал

13. Определение и частные случаи. Заметим, что если $u(M, t)$ — гармоническая функция точки M, зависящая, например, от действительного параметра t, изменяющегося на интервале (a, b), и если u непрерывна и ограничена на $\Omega \times (a, b)$, то интеграл

$$\int_a^b u(M, t)\, dt$$

есть гармоническая функция на Ω.

В самом деле, эта функция непрерывна, а свойство среднего значения легко проверить, меняя порядок интегрирования.

Доказанная теорема немедленно распространяется на случай, когда t — точка пространства с мерой Радона, по которой производится интегрирование.

Важным частным случаем является *логарифмический потенциал*

$$U(M) = \int \log \frac{1}{MP}\, d\mu_P,$$

представляющий собой интеграл Радона для меры μ (потенциал масс μ), например, с компактным носителем K (для масс, распределенных на K).

В частном случае, когда существует непрерывная и ограниченная плотность ϱ, $d\omega$ — мера Лебега на ограниченном открытом множестве Ω и ds — элемент длины дуги кривой γ, получаем *потенциалы простого слоя с плотностью* ϱ:

$$\int\limits_{\Omega} \log \frac{1}{MP}\, \varrho(P)\, d\omega_P, \qquad \int\limits_{\gamma} \log \frac{1}{MP}\, \varrho(P)\, ds_P.$$

Отметим некоторые свойства логарифмического потенциала.

а) Вне K потенциал U есть гармоническая функция от M; это вытекает из гармоничности функции $h(MP) = \log \frac{1}{MP}$ от M.

б) Поток $\int \frac{\partial h}{\partial n}\, ds_M$, выходящий из любого круга D_P^r или любого регулярного по Грину открытого множества, содержащего P, равен -2π. Чтобы вычислить поток $\int \frac{\partial U}{\partial n}\, ds$ потенциала U, выходящий из такого открытого множества, содержащего K, достаточно произвести элементарные преобразования и использовать полученное свойство h. Таким образом, находим, что поток потенциала меры μ равен $-2\pi M$, где $M = \mu(K)$ — общая масса.

в) Упражнение. Изучить потенциал

$$U = \int\limits_{\Omega} \log \frac{1}{MP}\, \varrho(P)\, d\omega_P$$

в Ω, причем плотность ϱ ограничена в Ω. В классических сочинениях доказывается, что если ϱ имеет непрерывные первые производные, то U имеет непрерывные вторые производные и $\Delta U = -2\pi\varrho$ (*формула Пуассона*). Доказать, что если ϱ непрерывна, то U имеет в Ω обобщенный лапласиан (сферический и объемный; см. п. 6), равный $-2\pi\varrho$.

г) **Равномерный слой на окружности.** Если γ — окружность с центром O радиуса R, то потенциал

$$U(M) = \int\limits_{\gamma} \log \frac{1}{MP}\, ds_P$$

есть гармоническая функция вне и внутри этой окружности. Во внешней точке M он равен среднему значению функции $\log(1/MP)$, т. е. $\log(1/OM)$. Вне и внутри окружности потенциал зависит только от расстояния $OM=r$. Следовательно, он имеет вид $A\log(1/r)+B$. Но так как эта функция ограничена в окрестности точки 0, то $A=0$, потенциал постоянен внутри окружности и равен своему значению в центре $2\pi R\log(1/R)$.

Итак, равномерный простой слой на окружности имеет потенциал

$$U(M)=\begin{cases}\log\dfrac{1}{R}\,\mu(\gamma) & \text{внутри } \gamma,\\[2ex] \log\dfrac{1}{OM}\,\mu(\gamma) & \text{вне } \gamma.\end{cases}$$

Последнее равенство нетрудно распространить на распределение масс в круге, если плотность зависит только от расстояния OP.

14. Потенциал двойного слоя. Рассмотрим функцию $\log\dfrac{1}{MP}$, $M(x, y)$, $P(a, b)$. Ее производные по x или по a, равные соответственно $-(x-a)/MP^2$ и $(x-a)/MP^2$, являются гармоническими функциями от (x, y), кроме точки (a, b), и от (a, b), кроме точки (x, y). Следовательно, считая точку $P(a, b)$ переменной и интегрируя такую производную по некоторой мере μ, например с компактным носителем K, получаем гармоническую функцию от (x, y) вне K.

Например, если Γ — замкнутая дуга, то интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{x-a}{MP^2}\,d\mu_P$$

есть гармоническая функция вне Γ. Аналогичный интеграл с y обладает теми же свойствами, а следовательно, интеграл

$$\int\frac{(x-a)\,\alpha+(y-b)\,\beta}{MP^2}\,d\mu_P,$$

где α и β — направляющие косинусы ориентированной нормали, равный с точностью до знака интегралу

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\log\frac{1}{MP}\right)d\mu_P,$$

есть гармоническая функция вне Г. При наличии плотности последний интеграл принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\log\frac{1}{MP}\right)\varrho(P)\,ds_P,$$

причем в этих формулах $\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\log\frac{1}{MP}\right)$ обозначает при фиксированном M производную функции от P по направлению ориентированной нормали к Г в точке P.

Эти выражения называются *потенциалами двойного слоя*, ибо они получаются как предел общего потенциала двух соответствующих простых слоев противоположного знака, распределенных на двух близких параллельных кривых.

Заметим, что потенциал двойного слоя есть сумма производных по x и y от некоторых потенциалов простого слоя. Более основательное изучение этих потенциалов можно найти в классических сочинениях. Здесь мы хотели только дать примеры гармонических функций. Эти потенциалы важны в том отношении, что всякая гармоническая функция локально выражается, согласно формуле (5), как сумма потенциалов простого и двойного слоев, распределенных, например, по некоторой окружности.

§ 5. Аналитичность гармонических функций

15. Формула (5) дает локальное представление любой гармонической функции в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя. Мы уже видели, что любой потенциал двойного слоя есть сумма производных по x и по y от некоторых потенциалов простого слоя. Следовательно, для того чтобы доказать аналитичность гармонических функций, достаточно доказать аналитичность потенциала простого слоя такого, например, вида:

$$U(M) = \int\limits_{\gamma} \log\frac{1}{MP}\,\varrho(P)\,ds_P$$

в окрестности точки M_0, не лежащей на замкнутой дуге γ; здесь ϱ — ограниченная непрерывная плотность.

Но, согласно теореме о подстановке ряда в ряд, выражение

$$\log\frac{1}{MP}=-\frac{1}{2}\log\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]$$

для любой точки $P(a, b)$ есть аналитическая функция от действительных переменных x и y в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)\neq P$. Говоря подробнее, следует рассмотреть разложение выражения

$$\log\frac{1}{MP}=-\frac{1}{2}\log M_0P^2-\frac{1}{2}\log(1-X),$$

где

$$X=-\frac{MM_0^2+2\,(PM_0,\ M_0M)}{M_0P^2}.$$

Таким образом, в степенной ряд

$$-\frac{1}{2}\log M_0P^2+\frac{1}{2}\left(X+\frac{X^2}{2}+\ldots\right)$$

следует подставить выражение для X в виде полинома от $x-x_0$, $y-y_0$. Коэффициенты этого полинома мажорируются по модулю коэффициентами полинома

$$\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{M_0P^2}+\frac{2}{|M_0P|}\left[(x-x_0)+(y-y_0)\right],$$

а следовательно, и коэффициентами полинома

$$X_1=\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{\delta^2}+\frac{2}{\delta}\left[(x-x_0)+(y-y_0)\right],$$

где δ — расстояние от M_0 до γ, $P\in\gamma$.

Отсюда следует, что если мы подставим в ряд по X выражение для X и для X_1, то получим два степенных ряда по $x-x_0$, $y-y_0$, из которых второй мажорирует первый. Если число $\varepsilon>0$ достаточно мало, то $X_1(|x-x_0|, |y-y_0|)<1$ при $|MM_0|<\varepsilon$, а значит, наши двойные ряды абсолютно сходятся при $|MM_0|<\varepsilon$. Поскольку коэффициенты (кроме первого) мажорирующего ряда не зависят от точки $P\in\gamma$, первый ряд, умноженный на $\varrho(P)$, можно интегрировать почленно по ds_P. В результате получим разложение в двойной ряд по $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ для функции $U(M)$, который будет сходиться при достаточно малых $|x-x_0|$ и $|y-y_0|$.

Наше утверждение доказано, и оно распространяется, конечно, на $\int \log \frac{1}{MP} d\mu_P$.

Замечание. Доказательство легко перестроить для интегралов $\int\limits_{\gamma} MP^{\alpha}\, d\mu_P$, где α — действительное число. Так как коэффициенты в разложении выражения $(1+X)^{\alpha}$, вообще говоря, неположительны, используем ряд с тем же радиусом сходимости, получаемый заменой коэффициентов их модулями.

Такое же доказательство применимо для интеграла

$$\int\limits_{\gamma} \frac{x-a}{MP^2}\, d\mu_P.$$

В силу аналитичности гармоническая функция в области Ω, равная нулю в окрестности некоторой точки, тождественно равна нулю.

Аналитическая функция в Ω, гармоническая в окрестности некоторой точки, является гармонической во всей области Ω, так как аналитический лапласиан должен быть тождественно равен нулю.

§ 6. Интеграл Пуассона

16. Вывод интеграла Пуассона. Рассмотрим гармоническую функцию u на некотором открытом множестве, содержащем замкнутый круг $\overline{D_0^R}$ с границей γ_R. Мы знаем, что внутри круга

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_R} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{PM} - \log \frac{1}{PM} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds_M.$$

Пусть P не находится в центре и P_1 — образ точки P при инверсии относительно γ_R. Тогда

$$0 = \int\limits_{\gamma_R} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{P_1 M} - \log \frac{1}{P_1 M} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds_M.$$

Величина $\log(1/PM)-\log(1/P_1M)$ остается постоянной, когда точка M описывает окружность, а следовательно,

$$\int_{\gamma_R} \log\frac{1}{PM}\frac{\partial u}{\partial n}ds_M=\int_{\gamma_R} \log\frac{1}{P_1M}\frac{\partial u}{\partial n}ds_M.$$

Комбинируя полученные выражения, находим

$$u(P)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\gamma_R}\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{P_1M}{PM}\right)u(M)\,ds_M. \qquad (11)$$

Упражнение 1. Вывести другую форму интеграла Пуассона

$$u(P)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\gamma_R}\frac{R^2-OP^2}{MP^2}u(M)\,ds_M, \qquad (12)$$

применимую и тогда, когда P находится в центре.

Упражнение 2. Другой метод получения формулы (12): производим дробно-линейное преобразование, сохраняющее круг и переводящее точку P в 0. Функция $u(M)$ переходит при этом в гармоническую функцию $v(M_1)$ точки M_1 — образа M; значение v в точке 0, равное $u(P)$, есть среднее значение v на окружности γ_R. Преобразуя интеграл среднего значения в интеграл относительно точки M, получим формулу (12).

Упражнение 3. Вывести формулу

$$u(P_1)-u(P_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(M)\frac{d(MP_2,\ MP_1)}{d\theta}d\theta_M,$$

где θ — угол $(Ox,\ OM)$.

17. Отвлекаясь от способа вывода формулы (12) изучим непосредственно интеграл Пуассона

$$I_f(P)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\gamma_R}\frac{R^2-OP^2}{MP^2}f(M)\,ds_M, \qquad (13)$$

где заданная на γ_R функция f может быть конечной и непрерывной или, вообще, суммируемой по Лебегу

Поведение внутри круга.

а) Интеграл $I(P)$ есть *гармоническая* функция в D_O^R

Достаточно убедиться в том, что ядро $(R^2-OP^2)/MP^2$ для каждой точки $M\in\gamma_R$ есть гармоническая функция точки $P(x, y)$. Направляя ось x по OM, получаем выражение

$$\frac{R^2-(x^2+y^2)}{(R-x)^2+y^2}.$$

Вместо того чтобы вычислять Δ, заметим, что последнее выражение равно

$$-1+\frac{2R^2-2Rx}{(R-x)^2+y^2}=-1+2R\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{MP}\right).$$

б) Если f есть константа K, то $I(P)=K$.

В самом деле, в этом случае $I(P)$ зависит только от OP; так как интеграл $I(P)$ ограничен в окрестности 0, он равен константе, например значению в центре:

$$\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\gamma_R}\frac{R^2}{R^2}K\,ds=K.$$

Поведение $I(P)$ на границе. В каждой точке $M_0\in\gamma_R$, в которой (конечная или нет) функция f непрерывна, имеем

$$\lim_{P\to M_0} I_f(P)=f(M_0),\qquad P\in D_O^R.$$

Докажем, что $\overline{\lim\limits_{P\to M_0}}\, I_f(P)\leqslant f(M_0)$. Это очевидно, если $f(M_0)=+\infty$. При $f(M_0)<+\infty$ пусть Λ — конечное число, $\Lambda>f(M_0)$. Достаточно доказать, что $\overline{\lim\limits_{P\to M_0}}\, I_f\leqslant\Lambda$ или $\overline{\lim\limits_{P\to M_0}}\,(I_f-\Lambda)\leqslant 0$. Так как $I_f-\Lambda=I_f-I_\Lambda=I_{f-\Lambda}$, достаточно доказать, что $\overline{\lim\limits_{P\to M_0}}\, I_{f-\Lambda}\leqslant 0$. Пусть α — дуга, охватывающая точку M_0, на которой $f<\Lambda$. Тогда

$$I_{f-\Lambda}(P)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\alpha}+\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\gamma_R-\alpha}.$$

Второй интеграл определен и непрерывен в некоторой полной окрестности точки M_0 и равен нулю в M_0. Первый интеграл отрицателен. Отсюда следует доказываемое неравенство. Точно так же доказывается, что $\underline{\lim}_{P\to M_0} I_f \geqslant f(M_0)$, и, следовательно, $\lim_{P\to M_0} I_f = f(M_0)$.

Отметим, что приведенное рассуждение при единственном предположении суммируемости функции f доказывает, что

$$\overline{\lim_{P\to M_0}} I_f(P) \leqslant \overline{\lim_{M\to M_0}} f(M), \quad M \in \gamma. \qquad (14)$$

Следствие. *Интеграл Пуассона I_f решает задачу Дирихле для круга с конечной и непрерывной заданной функцией f.*

Если u — некоторая конечная и непрерывная функция в замкнутом круге, гармоническая внутри круга, то она совпадает с I_u. Отсюда снова получаем в улучшенном виде исходный результат из п. 16 относительно формы интеграла Пуассона (11). Из этого представления вытекает без использования логарифмических потенциалов аналитичность гармонических функций, так как этим свойством обладает интеграл

$$\int_\gamma \frac{f(M)}{MP^2}\, ds_M.$$

18. Применения.

1) Локальный критерий гармоничности. *Если для конечной и непрерывной действительной (а следовательно, и комплексной) функции f в области Ω существует для каждой точки $M_0 \in \Omega$ число $\varrho_{M_0} > 0$, такое, что*

$$\mathfrak{M}_f^r(M_0) = f(M_0)$$

для всех $r < \varrho_{M_0}$, то f — гармоническая функция.

В самом деле, разность $f - I_f$ определена внутри любого замкнутого круга $\overline{D_{M_0}^r}$, равна нулю на границе этого круга и обладает тем же локальным свойством, что f. Следовательно, если эта разность достигает экстремума внутри $D_{M_0}^r$, то она постоянна. На основании принципа максимума отсюда получаем $f = I_f$.

2) **Примеры гармоиического продолжения.**

а) Если функция u гармонична в проколотой окрестности точки M_0 и $\lim_{M\to M_0} (u/\log M_0M) = 0$, $M \neq M_0$, то u

продолжается в точку M_0, оставаясь гармонической (в силу непрерывности такое продолжение, очевидно, единственно).

Рассмотрим интеграл Пуассона I_u в круге $D^R_{M_0}$ для действительной функции u. Тогда функция $u - I_u - \varepsilon \log(R/M_0M)$ гармонична в проколотом круге и ее верхний предел на границе отрицателен для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, это выражение отрицательно во всем круге, а значит, $u \leqslant I_u$ и точно так же $-u \leqslant I_{-u}$; таким образом, u совпадает с I_u.

б) Пусть функция $u(M)$ определена и гармонична в открытой окрестности точки M_0 по одну сторону от прямой D, проходящей через M_0. Предполагается, что u обращается в нуль на D, т. е. u стремится к нулю, когда M стремится к любой точке D. Тогда, продолжая u противоположными по знаку значениями в симметричных относительно D точках и полагая $u(M_0) = 0$ на D, получаем гармоническую функцию во всей окрестности M_0.

В самом деле, наше продолжение непрерывно и удовлетворяет предыдущему критерию гармоничности. Этот результат можно также установить, используя интеграл Пуассона для круга с центром на D.

При помощи инверсии это продолжение непосредственно обобщается на функции, заданные по одну сторону дуги окружности (симметрия заменяется соответствием при инверсии).

3) **Неравенства Гарнака.** Мажорируя и минорируя MP соответственно выражениями $R + OP$ и $R - OP$ в формуле (13), для $f \geqslant 0$ получаем

$$\frac{R-OP}{R+OP} I_f(O) \leqslant I_f(P) \leqslant \frac{R+OP}{R-OP} I_f(O).$$

Следовательно, для гармонической функции $u > 0$ в D^R_O справедливы неравенства

$$\frac{R'-OP}{R'+OP} \leqslant \frac{u(P)}{u(O)} \leqslant \frac{R'+OP}{R'-OP}, \quad 0 < R' < R,$$

откуда

$$\frac{R-OP}{R+OP} \leqslant \frac{u(P)}{u(O)} \leqslant \frac{R+OP}{R-OP}. \tag{15}$$

Эти оценки достигаются функцией $(R^2-OP^2)/AP^2$, где A — некоторая точка окружности.

В частности, в фиксированном круге меньшего радиуса, например в $D_O^{R/2}$, имеем

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{u(P)}{u(O)} \leqslant 3. \tag{16}$$

Можно получить также соотношения

$$-\frac{2OPu(O)}{R+OP} \leqslant u(P)-u(O) \leqslant \frac{2OPu(O)}{R-OP}, \tag{17}$$

откуда

$$|\operatorname{grad} u(O)| \leqslant \frac{2}{R} u(O). \tag{18}$$

Теперь можно получить для функции u произвольного знака аналог формулы (8), но с менее точным коэффициентом.

Отметим также, что оценки (15) дают первоначальное доказательство теоремы Пикара (п. 1) при $R \to \infty$.

§ 7. Семейства гармонических функций. Сходимость

19. Локально ограниченные семейства.

Теорема. *Семейство гармонических функций u, равномерно локально ограниченных на открытом множестве Ω, равностепенно непрерывно в каждой точке Ω и, следовательно, равностепенно непрерывно на всяком компактном множестве $K \subset \Omega$.*

Эту теорему можно получить из соотношений (17) или из оценки производных (п. 10) или, как это сделано ниже, из самого определения гармоничности. Пусть $D' = D_{M_1}^r \cup D_{M_2}^r - D_{M_1}^r \cap D_{M_2}^r$. Тогда

$$u(M_2)-u(M_1) = \frac{1}{\pi r^2}\left(\int\limits_{D_{M_2}^r} u\,d\omega - \int\limits_{D_{M_1}^r} u\,d\omega\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi r^2}\left(\int\limits_{D' \cap D_{M_2}^r} u\,d\omega - \int\limits_{D' \cap D_{M_1}^r} u\,d\omega\right).$$

При фиксированном r пусть $M_1M_2 < 2r$ и $|u| \leqslant A$ в $D^{3r}_{M_1}$. Имеем

$$|u(M_2) - u(M_1)| \leqslant \frac{A}{\pi r^2} \text{ пл. } D',$$

откуда и следует утверждение теоремы, так как $D' \to 0$ при $M_2 \to M_1$.

Следствия. *Пусть $\{u_n\}$ — последовательность равномерно локально ограниченных гармонических функций на Ω. Тогда*

1) *из обычной сходимости вытекает локально равномерная сходимость, и предельная функция является гармонической;*

2) *из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь локально равномерно сходящуюся (к гармонической функции) подпоследовательность.*

В самом деле, пусть $\{\Omega_n\}$ — возрастающая последовательность относительно компактных открытых множеств Ω_n, сходящаяся к Ω. Из $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_n^{(1)}\}$, равномерно сходящуюся на $\overline{\Omega}_1$. Из $\{u_n^{(1)}\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_n^{(2)}\}$, равномерно сходящуюся на $\overline{\Omega}_2$, и т. д. Диагональный процесс дает последовательность $\{u_n^{(n)}\}$, равномерно сходящуюся на всяком компактном подмножестве Ω.

Следствие. *Из обычной сходимости равномерно локально ограниченной последовательности $\{u_n\}$ в окрестности некоторой точки вытекает, если множество Ω связно, сходимость всюду.*

Действительно, в противном случае можно было бы извлечь две подпоследовательности, сходящиеся к различным гармоническим функциям, совпадающим в окрестности некоторой точки.

Сходимость производных. Локально равномерная сходимость последовательности $\{u_n\}$ влечет за собой такую же сходимость последовательности производных от u_n любого порядка к соответствующей производной от предельной функции.

Действительно, в круге D^R_M, например, $\partial(u_n - u)/\partial x$ мажорируется величиной $K \sup |u_n(M) - u(M)|$, где $K = 2/R$ или даже $4/\pi R$, $M \in D^{2R}_{M_0}$, $D^{2R}_{M_0} \subset \Omega$.

20. Семейство равномерно локально ограниченных снизу (или сверху) действительных функций в области.

Теорема. *Верхняя огибающая семейства гармонических функций $u > 0$ в области Ω или всюду бесконечна, или локально ограничена и даже непрерывна. Нижняя огибающая или всюду равна нулю, или непрерывна и строго положительна.*

Множества точек, в которых верхняя огибающая U конечна или $U = +\infty$, открыты, согласно неравенствам Гарнака. Эти же неравенства показывают, что если U конечна в некоторой точке, то она ограничена в окрестности этой точки.

Докажем, что если U конечна, то она непрерывна. Это легко выводится из равностепенной непрерывности или непосредственно из неравенств Гарнака. Между прочим, полунепрерывность снизу имеет место для верхней огибающей любого семейства непрерывных функций.

Для нижней огибающей рассуждение проводится аналогично.

Замечание. Согласно неравенствам Гарнака или неравенству (18), функции $\log u$ равностепенно непрерывны в каждой точке. Следовательно, они равномерно ограничены на любом компактном множестве, если только они равномерно ограничены в одной из его точек. В этом случае огибающие непрерывны; отсюда можно вывести еще раз только что доказанную теорему.

Следствие. *Для любой гармонической функции $u > 0$ в области Ω отношение значений u в двух произвольных точках M', M'' компактного множества $K \subset \Omega$ заключено между двумя строго положительными числами, не зависящими ни от u, ни от M', M''.*

Достаточно получить оценки для отношения $u(M)/u(M_0)$, где точка M_0 фиксирована, или для всех строго положительных гармонических функций, равных 1 в точке M_0. Применяя к этим функциям доказанную теорему, получаем требуемый результат.

Обобщение теоремы. *Верхняя огибающая семейства гармонических функций u в области Ω, равномерно ограниченных снизу в окрестности каждой точки, или равна всюду $+\infty$, или конечна и непрерывна.*

Действительно, в любой относительно компактной подобласти ω все функции u ограничены снизу одним и тем же числом K и верхняя огибающая разности $u-K$ в ω или равна $+\infty$, или конечна и непрерывна.

Теоремы сходимости. *Пусть $\{u_n\}$ — последовательность гармонических функций, равномерно локально ограниченных снизу в области Ω.*

Если эта последовательность $\{u_n\}$ ограничена в некоторой точке, то она локально ограничена в Ω и для нее справедливы результаты п. 19.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ в некоторой точке M_0, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ всюду, причем сходимость локально равномерна.

Действительно, пусть $E \subset \Omega$ — компактное множество, ω — относительно компактная область $(\overline{\omega} \in \Omega)$, содержащая M_0 и E. В ω имеем $u_n > K$ и $u_n - K > 0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(M_0) = +\infty$, то $u_n - K$ стремится к $+\infty$ равномерно на E, согласно доказанному следствию.

Следствия. 1) *Всякая возрастающая последовательность гармонических функций в некоторой области сходится (локально равномерно) или к $+\infty$, или к гармонической функции.*

2) *Всякое семейство гармонических функций, равномерно локально ограниченных снизу в некоторой области, обладает следующим свойством: из любой последовательности функций этого семейства можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся (локально равномерно) или к $+\infty$, или к гармонической функции.* (Короче говоря, согласно Монтелю, это семейство является *нормальным*.)

§ 8. Изучение гармонических функций в окрестности особой точки

21. Теорема. *Гармоническая функция u в круге D_O^R разлагается единственным образом в окрестности точки O в ряд*

$$u(\varrho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\theta)\,\varrho^k, \tag{19}$$

где ϱ, θ — полярные координаты.

Ряд (19) *сходится в круге* D_O^R; *степенной ряд* $\sum A_k \varrho^k$, *где* $A_k = \sup\limits_\theta |a_k(\theta)|$, *имеет радиус сходимости, не меньший* R.

Наконец, общий член $a_k(\theta)\varrho^k$ *этого ряда представляет собой в координатах* x, y *однородный гармонический полином степени* k, *т. е.* $a_k(\theta)$ *имеет вид* $\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta$.

Единственность разложения, сходящегося в окрестности точки O, получаем из рассмотрения степенного ряда по ϱ при фиксированном θ; выражение $a_k(\theta)k!$ должно быть равно значению производной порядка k от $u(\varrho, \theta)$ по ϱ в точке O. Существование разложения в окрестности O получаем из аналитичности u, группируя члены двойного ряда в однородные полиномы возрастающих степеней. Все эти полиномы гармонические, так как ряд вида (19), составленный из их лапласианов, имеет нулевую сумму, а отсюда вытекает, в силу единственности разложения в степенной ряд, обращение в нуль всех лапласианов.

Следовательно, остается доказать существование разложения в круге D_O^R с указанным свойством коэффициентов A_k. Выпишем интеграл Пуассона в круге $D_O^{R'}$, $R' < R$, с границей $\Gamma_{R'}$:

$$u(P) = \frac{1}{2\pi R'} \int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{(R')^2 - OP^2}{MP^2} u(M)\, ds_M.$$

Введя угол $\gamma = (OP, OM)$, замечаем, что

$$MP^2 = OP^2 + (R')^2 - 2R'OP\cos\gamma =$$
$$= \varrho^2 + (R')^2 - R'\varrho(e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) = (R' - \varrho e^{i\gamma})(R' - \varrho e^{-i\gamma}),$$

и тогда

$$u(P) = \frac{(R')^2 - \varrho^2}{2\pi R'} \int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{u(M)\, ds_M}{(R' - \varrho e^{i\gamma})(R' - \varrho e^{-i\gamma})}.$$

Ядро

$$\frac{1}{(R' - \varrho e^{i\gamma})(R' - \varrho e^{-i\gamma})} =$$
$$= \frac{1}{(R')^2}\left(1 - \frac{\varrho}{R'} e^{i\gamma}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\varrho}{R'} e^{-i\gamma}\right)^{-1}$$

разлагается в степенной ряд по ϱ, получаемый как произведение рядов для обоих сомножителей. Отбрасывая множители $e^{i\gamma}$ и $e^{-i\gamma}$, немедленно находим мажорирующий степенной ряд с численными коэффициентами λ_k и радиусом сходимости R'. Отсюда следует, что произведения $\lambda_k R_0^k$ ограничены равномерно по k при любом выборе R_0, $0 < R_0 < R'$. Полученный ряд можно интегрировать почленно при $\varrho < R'$; проинтегрированный ряд имеет вид $\sum \psi_k(\theta)\varrho^k$, причем $|\psi_k(\theta)| < K/R_0^k$, $0 < R_0 < R'$, K — некоторая постоянная.

Такой же результат имеем для u; разложение вида (19) сходится при $\varrho < R$, причем A_k мажорируется выражением типа K/R_0^k, где $R_0 < R$ может быть принято сколь угодно близким к R. Это равносильно тому, что радиус сходимости ряда $\sum A_k\varrho^k$ не меньше R.

Следствие. *Пусть u — гармоническая функция во внешности круга D_O^R, ограниченная в окрестности бесконечно удаленной точки. При достаточно больших ϱ она разлагается единственным образом в ряд*

$$u(\varrho,\ \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\theta)\frac{1}{\varrho^k}\ . \tag{20}$$

Этот ряд сходится при $\varrho > R$; при $\varrho > R' > R$ существует сходящийся числовой ряд, мажорирующий ряд (20) по модулю. Наконец, выражения $a_k(\theta)$ имеют вид $\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta$.

Достаточно произвести инверсию с полюсом O; при этом получается гармоническая функция, ограниченная в окрестности O, и, следовательно, ее можно продолжить гармонически в точку O. К полученной гармонической функции в круге применяем доказанную теорему, а затем при помощи инверсии из ряда (19) получаем ряд (20).

Замечание. Если ряды вида (19) и (20) сходятся локально равномерно на открытом множестве ω и a_k имеют требуемый вид, то суммы этих рядов являются гармоническими функциями.

22. Разложение в кольце. Пусть u — гармоническая функция в кольце C_1C_2, $R_1 < \varrho < R_2$. Введем концентрическое кольцо $C_1'C_2'$, $R_1 < R_1' < \varrho < R_2' < R_2$. В этом втором кольце имеем (производные берутся по направлению внутренней нормали к кольцу)

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_1'} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{PM} - \log \frac{1}{PM} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds_M +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_2'} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{PM} - \log \frac{1}{PM} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds_M. \qquad (21)$$

Второй интеграл правой части представляет гармоническую функцию точки P в круге $D_O^{R_2'}$, эта функция разлагается в ряд вида (19), который не изменяется, когда R_2' возрастает, так как левая часть и первый интеграл правой части не меняются.

Точно так же, первый интеграл правой части представляет гармоническую функцию во внешности круга $D_O^{R_1'}$, значения которой не изменяются при убывании R_1'. Рассмотрим этот интеграл более подробно.

Интеграл

$$\int\limits_{C_1'} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\log \frac{1}{PM} \right) ds_M$$

есть гармоническая функция во внешности круга $D_O^{R_1'}$, которая в окрестности бесконечно удаленной точки мажорируется по модулю выражением

$$\int\limits_{C_1'} |u| \frac{ds_M}{MP} < \frac{\text{const}}{\varrho - R_1'},$$

и, следовательно, стремится к нулю при $\varrho \to +\infty$. Далее,

$$- \int\limits_{C_1'} \log \frac{1}{PM} \frac{\partial u}{\partial n} ds_M = - \log \frac{1}{OP} \int\limits_{C_1'} \frac{\partial u}{\partial n} ds_M -$$

$$- \int\limits_{C_1'} \log \frac{PO}{PM} \frac{\partial u}{\partial n} ds_M.$$

Здесь первый интеграл правой части имеет вид $\alpha \log (1/\varrho)$, где $\alpha \geqslant 0$ есть поток u, выходящий из $D_O^{R_1'}$, и, следовательно, α не зависит от R_1'. Второй интеграл в окрестности бесконечно удаленной точки мажорируется по модулю выражением

$$\log\frac{\varrho}{\varrho-R_1'}\int\limits_{C_1'}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|ds_M$$

и, следовательно, стремится к нулю при $\varrho\to+\infty$.

Таким образом, первый интеграл правой части (21) является суммой выражения $\alpha\log(1/\varrho)$ и некоторой гармонической функции, не изменяющейся при убывании R_1' и обращающейся в нуль в бесконечно удаленной точке; следовательно, в разложении (20) для этой функции $a_0=0$. Во всем кольце окончательно получаем

$$u(P)=K+\alpha\log\frac{1}{\varrho}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\theta)\varrho^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{(1)}(\theta)}{\varrho^k},\qquad(22)$$

где a_k и $a_k^{(1)}$ имеют вид $\lambda_k\cos k\theta+\mu_k\sin k\theta$.

Каждый из двух рядов (22) мажорируется по модулю сходящимся числовым рядом соответственно при $\varrho<R_2'<$ $<R_2$ и $\varrho>R_1'>R$. Разложение этого вида единственно; для этого достаточно было бы даже предположить равномерную сходимость рядов (22) по θ при всех ϱ, $R_1<$ $<\varrho<R_2$. В самом деле, усреднение правой части по θ дает $K+\alpha\log(1/\varrho)$, и, следовательно, из выражения для среднего значения u единственным образом определяются K и α. Для того чтобы установить единственность рядов в (22), достаточно рассмотреть случай $u=0$. Умножая на a_n и интегрируя по θ от 0 до 2π, получаем в этом случае, в силу ортогональности a_k с различными индексами,

$$\varrho^n\int\limits_0^{2\pi}a_n^2(\theta)\,d\theta+\frac{1}{\varrho^n}\int\limits_0^{2\pi}a_n(\theta)\,a_n^{(1)}(\theta)\,d\theta=0,\qquad R_1<\varrho<R_2.$$

Отсюда вытекает, что $\int\limits_0^{2\pi}a_n^2\,d\theta=0$ и $a_n=0$; точно так же $a_n^{(1)}=0$.

Из теории тригонометрических рядов единственность можно получить, предполагая только сходимость рядов (22).

23. Поведение в окрестности особой точки O. Пусть u — гармоническая функция в проколотой окрестности точки O. Найденное разложение можно переписать следующим образом:

$$u(P)=v(P)+\alpha\log\frac{1}{\varrho}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{(1)}(\theta)}{\varrho^k},$$

где v — гармоническая функция в полной окрестности точки O; при этом ряд $\sum\sup\limits_{\theta}|a_k^{(1)}|/\varrho^k$ сходится при всех $\varrho>0$.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{M\to 0}u(M)OM^s=0$ *при некотором* $s>0$ *или даже только* $\lim\limits_{\varrho\to 0}\mathfrak{M}_{u^+}^{\varrho}\varrho^s=0$, *то* $a_k^{(1)}=0$ *при всех* $k\geqslant s$. *При более сильном условии*

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\mathfrak{M}_{|u|}^{\varrho}}{\log(1/\varrho)}=0$$

также $\alpha=0$ *и функция u продолжается гармонически в точку* O.

В самом деле, $\mathfrak{M}_u^{\varrho}=v(O)+\alpha\log(1/\varrho)$, откуда $\lim\limits_{\varrho\to 0}\varrho^s\mathfrak{M}_u^{\varrho}=0$. Учитывая, что $|u|=2u^+-u$, получаем $\lim\limits_{\varrho\to 0}\varrho^s\mathfrak{M}_{|u|}^{\varrho}=0$. Следовательно, $\lim\limits_{\varrho\to 0}\varrho^s\mathfrak{M}_{ua_n^{(1)}}^{\varrho}=0$. Однако

$$\mathfrak{M}_{ua_n^{(1)}}^{\varrho}=\frac{1}{2\pi\varrho^n}\int_0^{2\pi}[a_n^{(1)}]^2\,d\theta,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varrho\to 0}\varrho^{s-n}\int_0^{2\pi}[a_n^{(1)}]^2\,d\theta=0.$$

Отсюда заключаем, что $a_n^{(1)}=0$ при $n\geqslant s$.

Наконец, из последнего предположения следует, что все $a_n^{(1)}=0$. Кроме того, $\alpha=0$; в противном случае модуль $|u|$ был бы бесконечно большой величиной, эквивалентной $\alpha\log(1/\varrho)$, а это противоречит предположению.

24. Поведение в окрестности бесконечно удаленной точки. Здесь следует использовать разложение во внешности достаточно большого круга:

$$u(P)=K+\alpha\log\frac{1}{\varrho}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\theta)\varrho^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{(1)}(\theta)}{\varrho^k},$$

причем ряд $\sum\sup\limits_{\theta}|a_k|\varrho^k$ сходится при всех $\varrho>R$. Доказательство, вполне аналогичное предыдущему, дает следующее утверждение.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{M\to\infty}u(M)/OM^s=0$ *при некотором* $s>0$ *или даже только* $\lim\limits_{\rho\to\infty}\mathfrak{M}_{u+}^{\rho}/\varrho^s=0$, *то* $a_k=0$ *при всех* $k\geqslant s$. *При более сильном условии*

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{\mathfrak{M}_{|u|}^{\rho}}{\log\frac{1}{\varrho}}=0$$

имеем $u(P)=K+\sum\frac{a_k^{(1)}(\theta)}{\varrho^k}$.

Последний случай в этой теореме характеризуется тем, что функция u ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда функция u имеет предел в этой точке, равный среднему значению u на любой окружности с произвольным центром, лежащей вместе со своей внешностью в неограниченной области определения u. Это можно выразить еще так: при помощи инверсии с произвольным полюсом получается функция, которая гармонически продолжается в полюс.

В этом случае заданная функция, продолженная по непрерывности в бесконечно удаленную точку, называется *гармонической в окрестности бесконечно удаленной точки, включая эту точку, или, короче, гармонической в бесконечности.*

Функции гармонические во всей плоскости R^2. Разложение в этом случае имеет вид

$$u(P)=K+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\theta)\varrho^k.$$

Если $\lim\limits_{M\to\infty} u(M)/OM^s=0$ при некотором $s>0$ или даже только $\lim\limits_{\rho\to\infty}\mathfrak{M}_{u^+}^{\rho}/\varrho^s=0$, то $a_k=0$ при всех $k\geqslant s$ и функция u есть гармонический полином, степень которого меньше s.

В частности, если $\lim\limits_{\rho\to\infty}\mathfrak{M}_{u^+}^{\rho}/\varrho=0$, то u есть константа, что является улучшением теоремы Пикара. Добавим, что функция, гармоническая в расширенной плоскости, включающей бесконечно удаленную точку, необходимо является константой.

§ 9. Распространение на евклидовы пространства R^n при $n>2$

25. Определение. Известно, что в трехмерном пространстве площадь поверхности $z=f(x, y)$ определяется при помощи интеграла $\iint\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$, где γ — угол нормали с осью z. Исходя отсюда, можно получить определение площади, инвариантное относительно выбора осей, и вывести формулы Грина. Распространение на произвольное число измерений не представляет труда.

В частности, на сфере $S_R=S(0, R)$ получается мера Лебега, инвариантная относительно вращений; последнее свойство, между прочим, гарантирует единственность с точностью до множителя. Меру на единичной сфере S_1 с текущей точкой θ будем обозначать $d\theta$. Мера Лебега на сфере S_R равна произведению R^{n-1} на меру подобного множества, лежащего на S_1.

Правило замены переменных для интеграла от функции $f(P)$, определенной в шаре $B(0, R)$, дает

$$\int\limits_{B(0,R)} f\,d\omega=\int\limits_0^R r^{n-1}\,dr\int\limits_{S_1} f(r, \theta)\,d\theta; \qquad (23)$$

здесь r, θ — сферические координаты.

Обозначим объем шара $B(0, r)$ через $v_n(r)$, и пусть $v_n=v_n(1)$; обозначим площадь сферы S_r через $\alpha_n(r)$ и пусть $\alpha_n=\alpha_n(1)$. Заметим, что $v_n=\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$, т. е. $v_{2p}=\pi^p/p!$, $v_{2p+1}=2(2\pi)^p/1\cdot3\ldots(2p+1)$. Тогда $v_n(r)=v_nr^n$, $\alpha_n(r)=\alpha_nr^{n-1}$, $dv_n(r)/dr=\alpha_n(r)$, $\alpha_n=rv_n$.

В сферических координатах с центром M_0 положим

$$\mathfrak{M}_f^r(M_0) = \frac{1}{\alpha_n} \int\limits_{S_1} f(r, \theta)\, d\theta,$$

$$\mathfrak{A}_f^r(M_0) = \frac{1}{v_n(r)} \int\limits_{B_r} f(r, \theta)\, d\omega.$$

Тогда формула (23) переписывается в следующем виде:

$$\mathfrak{A}_f^R(M_0) = \frac{n}{R^n} \int\limits_0^R \mathfrak{M}_f^r(M_0)\, r^{n-1}\, dr. \tag{24}$$

Пусть f — конечная и непрерывная функция на открытом множестве Ω пространства R^n. Исходя из выписанных соотношений, нетрудно обобщить определение гармонических функций при помощи условий $\mathfrak{M}_f^r(M_0) = f(M_0)$ и $\mathfrak{A}_f^r(M_0) = f(M_0)$, где $B(0, r)$ — произвольный шар в Ω, и доказать равносильность этих условий.

26. Вся изложенная теория без затруднений переносится на случай произвольного R^n с точностью до некоторых коэффициентов (в обобщенном лапласиане, в оценке градиента). Изменения касаются следующих существенных пунктов.

а) **Гармонические полиномы.** Приведенный однородный полином степени m от n переменных содержит K_n^m одночленов или коэффициентов, где

$$K_n^m = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}$$

есть число размещений из n переменных по m с m повторениями. Следовательно, лапласиан такого полинома имеет K_n^{m-2} членов; приравнивая его нулю, получаем K_n^{m-2} уравнений с K_n^m неизвестными. Характер получающихся уравнений остается таким же, как раньше, и при произвольных правых частях эти уравнения можно решить, принимая равными нулю коэффициенты тех одночленов, в которые некоторая фиксированная переменная входит 0 или 1 раз.

Таким образом, $K_n^m - K_n^{m-2}$ коэффициентов можно выбрать произвольно, и столько же существует линейно независимых однородных гармонических полиномов степени m. При $n=3$ это число равно $2m+1$.

Записав такой полином в сферических координатах, получим $P_m = r^m Y_m(\theta)$, где Y_m — функция Лапласа. Выполняется свойство ортогональности

$$\int_{S_1} Y_p(\theta)\, Y_q(\theta)\, d\theta = 0, \quad p \neq q.$$

Действительно, формула Грина (4), примененная к шару $B(0, 1)$, дает

$$\int_{S_1} \left(P_p \frac{\partial P_q}{\partial n} - P_q \frac{\partial P_p}{\partial n} \right) d\theta = 0.$$

Но поскольку $P_p = r^p Y_p$, имеем $\partial P_p/\partial n = p r^{p-1} Y_p$. Следовательно,

$$(p-q) \int_{S_1} Y_p Y_q\, d\theta = 0,$$

что и доказывает ортогональность.

б) Фундаментальная гармоническая функция. Если функция $u(r)$ имеет непрерывную вторую производную по r, то лапласиан $\Delta u(OM)$ как функции точки M имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr}.$$

Приравнивая это выражение нулю и интегрируя получившееся дифференциальное уравнение, находим гармонические функции, зависящие только от $r = OM$:

$$A \frac{1}{r^{n-2}} + B.$$

Таким образом, r^{2-n} заменяет теперь $\log(1/\varrho)$ и обозначается $h(r)$.

При распространении материала, изложенного в п. 9 и 10, в формулах (5) и (6) следует только изменить численные коэффициенты. Так, получаем общую формулу ($n \geqslant 2$)

$$u(P) = \frac{1}{\varphi_n} \int_{\partial\Omega} \left[u(M) \frac{\partial h(PM)}{\partial n_M} - h(PM) \frac{\partial u(M)}{\partial n_M} \right] d\sigma_M, \tag{5'}$$

где величина φ_n есть поток $h(OM)$ внутрь шара $B(0, r)$, равный $-\alpha_n h'(1)$. Точно так же, для ограниченной действительной функции u в области Ω ($\underline{B} \leqslant u \leqslant \overline{B}$) для точек, отстоящих от границы на δ, имеем

$$|\operatorname{grad} u| \leqslant \frac{2\lambda}{\delta} \frac{\overline{B}-\underline{B}}{2}, \tag{8'}$$

где λ равно $2/\pi$, если $n=2$, а в общем случае $\lambda = v_{n-1}/v_n$.

в) Преобразование Кельвина. Как и в плоскости, при преобразовании подобия остаются инвариантными выражение $\Delta u\, ds^2$, а следовательно, и гармоничность. Однако в пространстве R^n при $n \geqslant 3$, помимо преобразований подобия, не существует других непрерывно дифференцируемых конформных гомеоморфизмов, кроме инверсий, а инверсия, вообще говоря, не сохраняет гармоничности.

Рассмотрим, как действует инверсия $OM \cdot OM' = 1$ с полюсом O на функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую; $v(M') = u(M)$, $n \geqslant 3$. Поток u из малой сферы $S(M_0, R) = S$ (в очевидных обозначениях) выражается так:

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{S'} \frac{\partial v}{\partial n} \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-2} d\sigma' = \int_{S'} \frac{\partial v}{\partial n} \frac{1}{(r')^{2n-4}} d\sigma'.$$

Но

$$\frac{1}{(r')^{2n-4}} \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{(r')^{n-2}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v}{(r')^{n-2}}\right) - \frac{v}{(r')^{n-2}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{(r')^{n-2}}\right).$$

Вследствие гармоничности функции $1/(r')^{n-2}$ аналог формулы Грина (4) дает

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{B'} \frac{1}{(r')^{n-2}} \Delta\left(\frac{v}{(r')^{n-2}}\right) d\omega.$$

Разделив здесь левую часть на объем w_B шара $B(M_0, r)$ и переходя к пределу при $r \to 0$, получаем $\Delta u(M_0)$. Правая часть в пределе дает

$$\lim_{r\to\infty} \frac{w_{B'}}{w_B} \left[\frac{1}{(OM_0')^{n-2}} \Delta\left(\frac{v(M_0')}{(OM_0')^{n-2}}\right)\right].$$

Предел отношения объемов равен $(r'/r)^n$ или $(r')^{2n}$. Итак,

$$\Delta u(M_0) = (OM_0')^{n+2} \Delta\left(\frac{v(M_0')}{(OM_0')^{n-2}}\right),$$

Точечное преобразование инверсии, сопровождаемое преобразованием функции $u(M)$ в функцию $v(M')/(OM')^{n-2}$, называется *преобразованием Кельвина*. Ясно, что преобразование Кельвина сохраняет гармоничность.

Общим свойствам логарифмического потенциала соответствуют общие свойства ньютоновского потенциала

$$U(M) = \int \frac{1}{MP^{n-2}}\, d\mu_P.$$

На любом открытом множестве, не несущем масс μ, этот потенциал есть гармоническая функция.

Поток U, входящий в открытое множество, содержащее компактный носитель меры μ, равен произведению φ_n на общую массу, и потенциал

$$U(M) = \int h(MP)\, \varrho(P)\, d\omega_P$$

в случае непрерывно дифференцируемой плотности ϱ имеет лапласиан $\varphi_n\varrho$ (в смысле обобщенного потенциала это верно для конечной непрерывной плотности ϱ). Вводится также потенциал двойного слоя μ, распределенного по некоторой поверхности:

$$V(M) = \int \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{MP^{n-2}}\right) d\mu_P.$$

Аналитичность этих потенциалов вне носителя масс доказывается аналогично, и отсюда следует аналитичность всех гармонических функций.

Интеграл Пуассона можно ввести при помощи потенциалов, но можно применить и преобразование Кельвина, аналогично инверсии в плоскости. Этот интеграл имеет вид

$$I_f(M) = \frac{1}{a_n R} \int\limits_{S(0,R)} \frac{R^2 - OM^2}{MP^n} f(P)\, d\sigma_P.$$

Подробное изучение и применения интеграла Пуассона строятся по вышеприведенному образцу. Неравенства Гарнака

$$R^{n-2}\frac{R-OP}{(R+OP)^{n-1}} \leqslant \frac{u(P)}{u(O)} \leqslant R^{n-2}\frac{R+OP}{(R-OP)^{n-1}}$$

дают

$$|\operatorname{grad} u(O)| \leqslant \frac{n}{R} u(O).$$

Теория семейств функций и сходимости также обобщается, но с некоторыми изменениями.

г) Поведение в окрестности конечной или бесконечно удаленной особой точки. Разложение внутри шара строится аналогично. К внешности шара переходим при помощи преобразования Кельвина, и в шаровом кольце получаем разложение

$$u(P) = K + \alpha h(OP) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) r^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k^{(1)}(\theta)}{r^{n-2+k}},$$

причем входящие сюда ряды мажорируются по модулю сходящимися числовыми рядами соответственно при $r < R_2' < R_2$ и $r > R_1' > R_1$. Единственность разложения имеет место в предположении равномерной сходимости по θ при любом r, $R_1 < r < R_2$.

Рассуждая, как в плоскости, от этого разложения приходим к следующим результатам относительно поведения гармонической функции $u(M)$ в окрестности особой точки O.

Если $\lim\limits_{M \to 0} r^s u(M) = 0$ при некотором $s > n-2$ или даже только $\lim\limits_{r \to 0} r^s \mathfrak{M}_{u^+}^r = 0$, то $Y_k^{(1)} = 0$ для всех k, таких, что $n-2+k \geqslant s$. Если

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{M}_{|u|}^r}{h(r)} = 0,$$

то u продолжается гармонически в точку O.

Такая формулировка сохраняет силу и в случае плоскости $n = 2$.

Поведение в бесконечности. Если $\lim\limits_{M \to \infty} u(M)/r^s = 0$ для некоторого $s > 0$ или даже только $\lim\limits_{r \to \infty} \mathfrak{M}_{u^+}^r / r^s = 0$, то $Y_k = 0$ для всех $k \geqslant s$.

Если функция u ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки, то ее разложение при $n \geqslant 3$ имеет вид

$$u(P)=K+\frac{\alpha}{r^{n-2}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k^{(1)}(\theta)}{r^{n-2+k}}.$$

Предел в бесконечности равен K, но среднее значение на сфере $S(0, r)$ равно $K+\alpha/r^{n-2}$ и поток, входящий в сферу $S(0, r)$, равен $\alpha\varphi_n$. Согласно этой интерпретации α, применяя формулу Грина к области между двумя сферами с различными центрами, нетрудно показать, что α, а значит, и условие $\alpha=0$ не зависят от выбора начала координат.

Условия ограниченности u в бесконечности и $\alpha=0$ равносильны тому, что разложение имеет вид

$$u(P)=K+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k^{(1)}(\theta)}{r^{n-2+k}},$$

а также тому, что u имеет предел в бесконечности, равный ее среднему значению на сфере $S(M_0, r)$ с произвольным центром M_0 (внешность соответствующего шара должна лежать в области гармоничности). В этом случае говорят, что функция *u продолжается гармонически в окрестность бесконечно удаленной точки, включая эту точку, или просто, что u продолжается гармонически в бесконечность.* Таким путем приходим к понятию гармонической функции на открытом множестве пространства, содержащем бесконечно удаленную точку, и это приводит к ряду обобщений, например принципа максимума.

Гармонические функции во всем пространстве R^n при любом выборе начала координат разлагаются в ряд

$$K+\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\theta)\,r^k.$$

Если при этом $\lim\limits_{r\to\infty}\mathfrak{M}_{u^+}^r/r^s=0$, то $Y_k=0$ при $k>s$ и функция сводится к гармоническому полиному.

Этот результат вполне аналогичен полученному для плоскости и также дает улучшение теоремы Пикара.

ОГЛАВЛЕНИЕ

М. Брело

ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Редактор *Н. И. Плужникова*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Техническнй редактор *Л. П. Кондюкова*
Корректор *Т. А. Палладина*

Сдано в производство 22/XI 1963 г.
Подписано к печати 8/II 1964 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$=3,4 бум. л.
11,1 печ. л. Уч.-изд. л. 10,0.
Изд. № 1/2386. Цена 70 коп. Зак. 1143

* * *

ИЗДАТЕЛЬСТВО « МИР »
Москва, 1-й Рижский пер., 2

* * *

Московская типография № 16
«Главполиграфпрома» Государственного комитета
Совета Миннстров СССР по печати
Москва, Трехпрудный пер., 9

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

ПРОДОЛЖАЕТ ВЫПУСК
СЕРИЮ БРОШЮР

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

Вышли из печати

В 1959 г.

Микусинский Я., Сикорский Р., **Элементарная теория обобщеииых функций.** Вып. I. Варшава, 1957, перевод с английского, 3,5 изд. л.

Хёрмандер Л., **К теории общих дифференциальных операторов в частиых производных.** Уппсала, 1959, перевод с английского, 6 изд. л.

Халмош П. Р., **Лекции по эргодической теории**. Токио, 1956, перевод с английского, 7 изд. л.

Капланский И., **Введение в дифференциальную алгебру**. Париж, 1957, перевод с английского, 4 изд. л.

В 1960 г.

Карлеман Т., **Математические задачи кииетической теории газов**. Уппсала, 1957, перевод с французского, 5,7 изд. л.

Хейман В. К., **Миоголистные функции**. Кембридж, 1958, перевод с английского, 8,4 изд. л.

Номидзу К., **Группы Ли и дифференциальиая геометрия.** Токио, 1956, перевод с английского, 6 изд. л.

Судзуки М., **Строение группы и строение структуры ее подгрупп**. Берлин — Геттинген — Гейдельберг, 1956, перевод с английского, 7 изд. л.

Рутисхаузер Г., **Алгоритм частных и разиостей**. Базель — Штутгарт, 1957, перевод с немецкого, 4 изд. л.

Ито К., **Вероятностные процессы**. Вып. I. Токио, 1957, перевод с японского, 6,1 изд. л.

В 1961 г.

Гренандер У., **Случайные процессы и статистические выводы.** Стокгольм, 1960, перевод с английского, 8 изд. л.

Гординг Л., **Задача Коши для гиперболических уравнений.** Чикаго, 1957, перевод с английского, 5,3 изд. л.

Гудстейн Р. Л., **Математическая логика.** Лейчестер, 1957, перевод с английского, 7,9 изд. л.

Дэй М. М., **Нормированные линейные пространства.** Берлин, 1958, перевод с английского, 11,2 изд. л.

Гротендик А., **О некоторых вопросах гомологической алгебры.** Япония, 1957, перевод с французского, 8,9 изд. л.

Альфорс Л., Берс Л., **Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения.** Сборник статей, перевод с английского, 8,7 изд. л.

Лере Ж., **Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии.** Париж, 1959, перевод с французского, 6 изд. л.

В 1962 г.

Мандельбройт С., **Теоремы замкнутости и теоремы композиции.** Издание оригинальное, 7 изд. л.

Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., **Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.** США, 1959, перевод с английского, 9,3 изд. л.

Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Париж, 1955, перевод с французского, 14,5 изд. л.

Хант Дж. А., **Марковские процессы и потенциалы.** Урбана, 1959, перевод с английского, 13,4 изд. л.

Хёрмандер Л., **Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига.** Уппсала, 1960, перевод с английского, 3 изд. л.

В 1963 г.

Ван Хао, Мак-Нотон Р., **Аксиоматические системы теории множеств.** Париж, перевод с французского, 2,3 изд. л.

Холл М., **Комбинаторный анализ.** США, 1960, перевод с английского, 4,6 изд. л.

Зойтендейк Г., **Методы возможных направлений.** Амстердам, 1960, перевод с английского, 8,5 изд. л.

Ито К., **Вероятностные процессы.** Вып. II. Токио, 1957, перевод с японского, 5 изд. л.

Микусинский Я., Сикорский Р., **Элементарная теория обобщенных функций.** Вып. II. Варшава, 1960, 2,8 изд. л.

Боттенбрух Г., **Структура АЛГОЛ-60 и его использование.** США, 1962, перевод с английского, 4,3 изд. л.

Некоторые вопросы теории приближений. Сборник, перевод с английского, 6,2 изд. л.

Возенкрафт Дж. М., Рейффен Б., **Последовательное декодирование.** Нью-Йорк, 1961, перевод с английского, 7 изд. л.

Носиро К., **Предельиые множества.** Берлин—Геттинген—Гейдельберг, 1960, перевод с английского, 12,6 изд. л.

Находятся в печати

Шварц Л., **Применения теории обобщенных функций к исследованию элементарных частиц в релятивистской кваитовой механике.** Беркли, 1961, перевод с английского, 8 изд. л.

Хуа Ло-ген, **Метод тригонометрических сумм и его применеиия в теории чисел.** Лейпциг, 1959, перевод с немецкого, 7 изд. л.

Готовятся к печати

Шварц Л., **Комплексные аиалитические многообразия. Эллиптические уравиеиия с частными производными.** Богота, 1956, перевод с испанского, 10 изд. л.

Бергман С., **Интегральные операторы в теории линейиых уравнений с частными производными.** Берлин—Гёттинген—Гейдельберг, 1961, перевод с английского, 9 изд. л.

Гейтинг А., **Интуиционизм.** Амстердам, 1956, перевод с английского, 8 изд. л.

Мак-Кракен Д., **Программирование на АЛГОЛе.** Нью-Йорк, 1962, перевод с английского, 8 изд. л.