БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА
МАТЕМАТИКА

М. БРЕЛО

О ТОПОЛОГИЯХ И ГРАНИЦАХ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS
A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold (Heidelberg) and B. Eckmann (Zürich)
Series: Tata Institute of Fundamental Research, Bombay
Adviser: M. S. Narasimhan
175

Marcel Brelot
Université de Paris, Paris/France

ON TOPOLOGIES AND BOUNDARIES IN POTENTIAL THEORY

(Enlarged edition of a course of lectures delivered in 1966)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN • HEIDELBERG • NEW YORK 1971

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

МАРСЕЛЬ БРЕЛО

О ТОПОЛОГИЯХ И ГРАНИЦАХ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Перевод с английского
Н. С. ЛАНДКОФА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1974

УДК 531.26; 517.5; 519.2

Автор уже известен советскому читателю по переводу его «Основ классической теории потенциала» («Мир», 1964).

В книге дано сжатое и замкнутое изложение ряда вопросов, отиосящихси к тонкой топологии и пространствам Мартина и ранее не освещенных в моиографиях.

Книга представляет интерес дли математиков и физиков, заиимающихся теорией потенциала, теорией фуикций и теорией вероятностей. Она доступна аспирантам и студентам старших курсов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

Б $\frac{20203-394}{041(01)-74}$ 27—73

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В современной теории потенциала важную роль играет понятие тонкой топологии. В настоящей книге впервые систематически изложены свойства такой топологии как внутри пространства, так и на границе. Значительная часть результатов принадлежит самому автору.

Изложение компактное и замкнутое в себе. В то же время приводится много ссылок на первоисточники и на литературу для дальнейшего чтения.

Специально к русскому изданию автор пересмотрел весь текст и любезно прислал большой список исправлений и дополнений. Все они учтены при переводе.

К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание этой книги вышло в серии Lecture Notes, № 175. При подготовке настоящего издания текст был исправлен, улучшен и даже дополнен. Многими из исправлений и дополнений я обязан проф. Н. С. Ландкофу, работа которого далеко вышла за рамки простого перевода. Я сердечно признателен ему за его нелегкий и продолжительный труд.

М. Брело

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория потенциала вызвала к жизни многие исследования в таких областях, как теория емкостей, теория распределений (обобщенных функций), теории крайних элементов, пространств Дирихле, ядер Ханта и полугрупп, теория вероятностей и т. д. Ее богатая математическая структура привела также к введению ряда новых топологий и границ. Мы будем изучать здесь те из этих новых понятий, которые позволят нам сформулировать общие результаты о поведении потенциалов. Своим успехом эти понятия обязаны тому обстоятельству, что они тесно связаны с природой изучаемых классов функций.

В классической теории потенциала были введены понятия разреженности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (Брело [4, 5]) и соответствующей «тонкой» топологии (Картан [2]), в которой потенциалы являются непрерывными функциями. Кроме того, в классической теории были введены некоторые границы, и прежде всего граница Мартина (см. книгу Константинеску и Корня [1]), а также понятие разреженности на этой границе (Наим [1]), с помощью которого Дуб [3, 4] получил окончательное обобщение знаменитой теоремы Фату о радиальных и некасательных пределах. Оказалось, что все эти понятия можно распространить на случай аксиоматических теорий потенциала, включающих в себя теорию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа и до некоторой степени теорию уравнений параболического типа. Были также найдены соответствующие вероятностные интерпретации и связи с марковскими процессами.

Важность топологических методов в теории потенциала служит оправданием для их дальнейшего изучения и развития. Настоящая книга представляет собой введение в эту обширную область исследований. Прекрасное сводное изложение классической теории потенциала на римановых поверхностях с особенным упором на вопросы граничного поведения имеется в монографии Константинеску и Корня [1]. Здесь я отправляюсь от общих абстрактных аксиоматических понятий, а затем излагаю некоторые важные приложения к теории потенциала и теории функций, в основном для классического случая (т. е. для случая $\mathscr{E}$-пространств или пространств Грина, включающего в себя случай римановых поверхностей). Доказательства, как правило, выбирались с учетом возможных обобщений на случай аксиоматических теорий гармонических функций, но сами эти обобщения лишь бегло упомянуты. Вероятностные интерпретации опущены (по этому поводу см. статьи Дуба [1—3] и Ханта [1] и книги Дынкина [1], Мейера [1, 2] и Блюменталя и Гетура [1]).

В первой части книги мы изучаем понятия (внутренней) разреженности и тонкой топологии, соответствующей данному пространству и некоторому конусу положительных функций. Даются примеры применения этих понятий, в частности с их помощью уточняется ряд результатов классической теории выметания.

Вторая часть посвящена границам. Сначала определяется абстрактная «минимальная граница» (состоящая из «крайних» элементов определенного множества функций) и вводится понятие минимальной разреженности. Затем в рамках классической или аксиоматической теории потенциала вводятся знаменитая граница Мартина и ее «минимальная» часть. При этом минимальная разреженность является ключевым понятием для описания граничного поведения. Интересно, что в большинстве приложений топологию, отвечающую этой разреженности, можно рассматривать как внутреннюю тонкую топологию (из первой части) на пространстве, дополненном минимальной границей, после введения на этом пополненном пространстве соответствующего нового класса функций.

В конце книги приведена подробная библиография, имеющая целью облегчить дальнейшее изучение предмета.

Нумерация определений, лемм, предложений и теорем сплошная в каждой главе. Иногда для краткости мы обозначали одним и тем же символом точку и соответствующее ей одноточечное множество.

Я выражаю благодарность С. Рамасвами за большую помощь при подготовке настоящей книги.

М. Брело

Часть 1

ВНУТРЕННЯЯ ТОНКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Глава I

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ РАЗРЕЖЕННОСТИ И ТОНКОЙ ТОПОЛОГИИ[1])

1. Пусть Ω — произвольное множество, не обязательно являющееся топологическим пространством. Обозначим через Φ некоторое множество неотрицательных (могущих принимать и бесконечные значения) функций на Ω, образующее выпуклый конус, т. е. удовлетворяющее следующим условиям:

i) $f \in \Phi \Rightarrow \lambda f \in \Phi$, $\forall$ вещественное $\lambda \geqslant 0$,
ii) $f_1, f_2 \in \Phi \Rightarrow f_1 + f_2 \in \Phi$,
iii) $+\infty \in \Phi$.

Примем, что $0 \cdot \infty = 0$, так что i) имеет смысл и тогда, когда $\lambda = 0$, а f принимает значение $+\infty$ в некоторых точках $x \in \Omega$. Иногда мы будем предполагать, что Φ C-замкнуто, т. е. что если $f_n \in \Phi$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\sum f_n$ также принадлежит Φ (условие счетной аддитивности). Это всегда будет специально оговариваться.

Если в Ω нет топологии, то мы можем ввести слабейшую топологию $\mathscr{T}_0$, в которой все функции $u \in \Phi$ будут полунепрерывны снизу. Эта топология порождается множествами вида $\{x \mid u(x) > a\}$, где u — любая функция из Φ, а a — любое вещественное число. Если же, как это чаще всего бывает в приложениях, Ω уже снабжено некоторой топологией $\mathscr{T}_1$, то мы вводим еще одно условие на Φ, а именно что все функции, принадлежащие Φ, полунепрерывны снизу.

---

[1]) Это аксиоматическое введение представляет собой сокращенное изложение статьи Брело [21].

Замечание. Будем говорить, что вещественная (могущая принимать бесконечные значения) функция f на топологическом пространстве имеет в точке x_0 *глобальный пик*, если для любой окрестности V точки x_0 выполнено неравенство $\sup\limits_{CV} f < f(x_0)$. Если предположить, что в топологии $\mathcal{T}_1$ каждая точка $x_0 \in \Omega$ служит глобальным пиком для некоторой функции $u \in \Phi$, то $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{T}_0$. Действительно, для любого $\mathcal{T}_1$-открытого множества ω и любой точки $x_0 \in \omega$ имеем $\sup\limits_{C\omega} v < \lambda < v(x_0)$ для некоторой функции $v \in \Phi$, так что множество $\{v > \lambda\}$ является содержащейся в ω открытой $\mathcal{T}_0$-окрестностью точки x_0.

Тонкая топология. Введем в Ω еще одну топологию, $\mathcal{T}$, самую слабую из всех топологий, более сильных, чем $\mathcal{T}_1$, для которых все функции $u \in \Phi$ непрерывны.

Так как множества вида $\{x \mid u(x) > \lambda\}$ уже открыты в топологии $\mathcal{T}_1$, то класс открытых множеств топологии $\mathcal{T}$ порождается

i) всеми множествами, открытыми в $\mathcal{T}_1$,

ii) множествами вида $\{x \mid u(x) < \lambda\}$, где $u \in \Phi$, а λ — любое вещественное число.

Определение I.1. Топология $\mathcal{T}$ называется *тонкой топологией* (или, более полно, *внутренней тонкой топологией*) в Ω (связанной с классом Φ и топологией $\mathcal{T}_1$ в Ω).

Определение I.2. Подмножество e из Ω называется *разреженным* (более полно, *внутренне разреженным*) в точке $x_0 \notin e$[1]), если либо

i) $x_0 \notin \bar{e}$ (замыкание в $\mathcal{T}_1$), либо

ii) $x_0 \in \bar{e}$ и $\exists$ функция $u \in \Phi$, такая, что

$$u(x_0) < \liminf_{e \ni x \to x_0} u(x); \qquad (*)$$

правая часть понимается как $\sup\limits_{\sigma}\left(\inf\limits_{x \in e \cap \sigma} u(x)\right)$, где σ — любая окрестность точки x_0.

---

[1]) Случай $x_0 \in e$ будет рассмотрен в гл. V.

Если принять, что $\inf u$ по пустому множеству есть $+\infty$, то предыдущий $\liminf$ всегда будет иметь смысл, и условия i и ii сводятся к одному условию (*): в случае i) можно взять $u=0$. Эквивалентное определение: существуют функция $u \in \Phi$ и окрестность σ точки x_0, такие, что

$$u(x_0) < \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x).$$

Заметим, что e не будет разреженным в точке $x_0 \notin e$ в том и только в том случае, когда для любой функции $u \in \Phi$

$$u(x_0) = \liminf_{e \ni x \to x_0} u(x).$$

В этом случае будем говорить, что e *неразрежено* в x_0.

2. **Простейшие свойства.** i) Всякое подмножество множества, разреженного в x_0, будет также разреженным в x_0.

ii) Конечная сумма разреженных в x_0 множеств будет также разреженной в x_0.

iii) Для некоторой подходящей окрестности σ точки x_0 множество $e \cap \sigma$ содержится в открытом множестве δ, разреженном в $x_0 \notin \delta$[1]).

Будем пользоваться терминами *тонкая окрестность, тонкое замыкание* (обозначаемое через $\tilde{e}$ для множества e), *тонкий предел* и т. д., когда речь будет идти об окрестностях, замыкании, пределе и т. д. в тонкой топологии.

Теорема I.3 (А. Картан[2])). *Тонкие окрестности точки x_0 совпадают с множествами вида $\complement e$, где e — разреженное множество в x_0, $x_0 \notin e$.*

Доказательство. Предположим, что e разрежено в x_0, и покажем, что $\complement e$ содержит тонкую

---

[1]) В качестве δ можно взять множество $\{x \mid u(x) > \alpha\}$, где $u(x_0) < \alpha < \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x)$. — *Прим. перев.*

[2]) А. Картан доказал эту теорему для случая классической теории потенциала (см. [2], гл. VI).

окрестность x_0. Существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u(x_0) < \sup_\sigma (\inf_{x \in e \cap \sigma} u)$. Следовательно, существует некоторая окрестность σ точки x_0, такая, что $u(x_0) < \lambda < \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x)$. Рассмотрим множество $E = \{x \mid u(x) < \lambda\}$. Оно открыто в топологии $\mathcal{T}$ и $x_0 \in E$. Так как $u \geqslant \lambda$ на $e \cap \sigma$, то $E \cap e \cap \sigma = \varnothing$, т. е. $E \cap \sigma \subset \complement e$. Но σ и E являются окрестностями x_0 в топологии $\mathcal{T}$. Следовательно, $\complement e$ — тонкая окрестность x_0.

Обратно, допустим, что V — тонкая окрестность x_0, и покажем, что $\complement V$ разрежено в x_0. Множество V содержит тонкое открытое множество E, содержащее x_0. Предположим, что E есть $\mathcal{T}_1$-окрестность точки x_0. Тогда $x_0 \notin \overline{\complement V}$ и, следовательно, $\complement V$ разрежено в x_0 согласно i). Если же E — не $\mathcal{T}_1$-окрестность x_0, то E содержит пересечение $\mathcal{T}_1$-открытого множества (которое, возможно, совпадает с Ω) с конечным числом множеств вида $\{x \mid u(x) < \lambda\}$, содержащих x_0. Их дополнения, очевидно, разрежены в x_0. Так как их конечное объединение также разрежено, то E будет разреженным в x_0. Но $\complement V \subset \complement E$, и поэтому $\complement V$ также разрежено в x_0.

Замечания. i) Тонкая изолированная точка множества e — это такая точка x из e, что множество $e \setminus \{x\}$ разрежено в x.

ii) $\tilde{e} = e \cup$ {множество тех точек из $\complement e$, в которых e неразрежено}.

Упражнения. 1) Будем называть базис фильтра $\mathfrak{B}$, сходящийся к x_0, *разреженным* в x_0, если существует $u \in \Phi$, такое, что $u(x_0) < \liminf_{\mathfrak{B}} u = \sup_{\sigma \in \mathfrak{B}} (\inf_\sigma u)$. Показать, что

α) Разреженность множества e в точке $x_0 \notin e$, $x_0 \in \bar{e}$, равнозначна разреженности базиса фильтра, определяемого пересечениями e с окрестностями точки x_0.

β) Необходимым и достаточным условием разреженности $\mathfrak{B}$ является существование множества $e \in \mathfrak{B}$, $x_0 \notin e$, разреженного в x_0.

2) (Г. Бауэр) Рассмотрим выпуклое множество Ω в отделимом топологическом линейном пространстве и множество Φ всех конечных неотрицательных полунепрерывных снизу вогнутых функций на Ω, дополненное еще функцией $+\infty$. Следующие утверждения эквивалентны:

α) x_0 является крайней точкой Ω;

β) $\complement\{x_0\}$ разрежено в x_0 (даже строго разрежено, см. гл. II);

γ) неравенство $u_1 \leqslant u_2$ для двух конечных функций из Φ, выполняющееся на $\Omega \setminus \{x_0\}$, не влечет за собой соответствующего неравенства x_0.

3. Некоторые свойства тонкой топологии. Теорема I.4. a) *Если топология $\mathcal{T}_1$ отделима, то такой же будет $\mathcal{T}$.*

b) *Если топология $\mathcal{T}_1$ регулярна, то такой же будет $\mathcal{T}$ (более того, даже если $\mathcal{T}_1$ неотделима, но всякая $\mathcal{T}_1$-окрестность x_0 содержит замкнутую окрестность, то всякая тонкая окрестность x_0 будет содержать $\mathcal{T}_1$-замкнутую тонкую окрестность). Если $\mathcal{T}_1$ локально компактна* [1], *то $(\Omega, \mathcal{T})$ будет бэровским пространством.*

c) *Если топология $\mathcal{T}_1$ равномеризуема, то такой же будет $\mathcal{T}$.*

Доказательство. a) Это очевидно, так как $\mathcal{T}$ сильнее, чем $\mathcal{T}_1$.

b) Рассмотрим тонкую окрестность V точки x_0. Существует $u \in \Phi$, такая, что в некоторой $\mathcal{T}_1$-окрестности σ точки x_0 будем иметь $u(x_0) < \inf\limits_{y \in \complement V \cap \sigma} u(y)$. Пусть λ — произвольное вещественное число, лежащее между двумя членами последнего неравенства, и $E = \{x \mid u(x) \leqslant \lambda\}$. Это множество $\mathcal{T}_1$-замкнуто и является тонкой окрестностью x_0; кроме того, $E \cap \sigma \subset V$. Далее, согласно предположению, существует $\mathcal{T}_1$-окрестность σ_1 точки x_0, замкнутая и содержащаяся в σ;

[1]) Можно потребовать лишь, чтобы всякая $\mathcal{T}_1$-окрестность точки x_0 содержала квазикомпактную (т. е. обладающую свойством покрытия, но, возможно, неотделимую) $\mathcal{T}_1$-окрестность. Доказательство аналогично.

тогда $E \cap \sigma_1$ содержится в $E \cap \sigma \subset V$, $\mathcal{T}_1$-замкнуто и является тонкой окрестностью x_0.

Предположим теперь, что $\mathcal{T}_1$ локально компактна. Рассмотрим последовательность тонких открытых множеств ω_n, каждое из которых плотно в Ω (в тонкой топологии), и покажем, что $\bigcap \omega_n$ также плотно в тонкой топологии, т. е. что $(\bigcap \omega_n) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого тонкого открытого множества $\omega \neq \varnothing$. В множестве $\omega_1 \cap \omega$, которое непусто, выберем точку x_1 и возьмем ее тонкую $\mathcal{T}_1$-замкнутую окрестность. Пересекая ее с компактной окрестностью, получим $\mathcal{T}_1$-компактное множество K_1 с непустой тонкой внутренностью α_1. В $\omega_2 \cap \alpha_1$ аналогичным образом найдем компактное множество K_2 с тонкой внутренностью $\alpha_2 \neq \varnothing$ и т. д. Мы получим $\omega \supset K_1 \supset \alpha_1 \supset \omega_2 \cap \alpha_1 \supset$ $\supset K_2 \supset \alpha_2 \supset \omega_3 \cap \alpha_2 \ldots$. Следовательно, $\omega_n \cap \omega \supset \omega_n \cap$ $\cap \alpha_{n-1} \supset K_n \supset \bigcap\limits_i K_i$ и $\left(\bigcap\limits_n \omega_n\right) \cap \omega = \bigcap\limits_n (\omega_n \cap \omega) \supset \bigcap\limits_i K_i \neq$ $\neq \varnothing$.

c) Достаточно доказать следующее.

Пусть V — какое-либо тонко открытое множество, содержащее x_0. Тогда существует тонко непрерывная функция, равная нулю в x_0, 1 в $\complement V$ и принимающая значения только из $[0, 1]$.

Так как $\complement V$ разрежено в x_0, то существуют функция $u \in \Phi$ и некоторая окрестность σ точки x_0, такие, что

$$\inf_{\complement V \cap \sigma} u = \lambda > u(x_0).$$

Положим $u_1 = \inf(u, \lambda)$. Эта функция будет тонко непрерывной. Пусть, далее,

$$u_2 = \frac{1}{\lambda - u(x_0)} [\sup(u_1, u(x_0)) - u(x_0)].$$

Функция u_2 тонко непрерывна и принимает значения из $[0, 1]$. Кроме того,

$$u_2 = \begin{cases} 0 & \text{в} \quad x_0, \\ 1 & \text{на} \quad \complement V \cap \sigma. \end{cases}$$

Но топология $\mathcal{T}_1$ равномеризуема, поэтому существует непрерывная на Ω функция ω со значениями в $[0, 1]$, такая, что $\omega(x_0) = 0$ и $\omega(x) = 1$ на $C\sigma$ [1]).

Положим $f = \sup(u_2, \omega)$. Тогда f тонко непрерывна, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ и

$$f = \begin{cases} 0 & \text{в } x_0, \\ 1 & \text{на } CV. \end{cases}$$

4. Определение I.5. a) Множество e называется *сверхразреженным* в точке $x_0 \notin e$, если существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u(x_0)$ конечно и $u(x) \to +\infty$, $x \in e$, $x \to x_0$.

b) e называется *полярным*, если существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u = +\infty$ на e и $u \not\equiv +\infty$.

c) e называется *строго полярным*, если для любого непустого подмножества $e' \subset e$ и любой точки $x \in e'$ существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u = +\infty$ на e' и $u(x) < +\infty$.

Точка x называется *полярной* или *строго полярной*, если множество $\{x\}$ является таковым.

Предложение I.6. *Если множество e строго полярно, то $e \setminus \{x\}$ сверхразрежено в x, $\forall x$, и каждая точка из e является тонко изолированной точкой этого множества.*

Некоторые отрицательные свойства тонкой топологии. С тонкой топологией не столь удобно работать, как с обычными топологиями. Во многих приложениях встречаются следующие трудности [2]).

Предположим, как это обычно и бывает в приложениях, что Φ C-замкнуто. Тогда для любого счетного множества e, состоящего из строго полярных точек, множество $e \setminus \{x_0\}$ будет сверхразреженным в x_0 для любой точки x_0.

---

[1]) См. Bourbaki N., Topologie générale, chap. 9, n° 5, теор. 2. — *Прим. перев.*

[2]) Трудности, о которых говорит автор, связаны с тем, что, вообще говоря, тонкие топологии не удовлетворяют первой аксиоме счетности (существование для каждой точки счетного базиса окрестностей) и не локально компактны (см. упражнения в конце п. 4). — *Прим. перев.*

В самом деле, если обозначить точки из e, отличные от x_0, через x_n, и взять $u_n \in \Phi$, такие, что $u_n(x_n) = +\infty$, $u_n(x_0) = 1/2^n$, то $v = \Sigma u_n \in \Phi$, причем $v = +\infty$ на $e \setminus \{x_0\}$ и $v(x_0)$ конечно.

Обратим внимание на следующее

Предложение I.7. *Если* Φ *C-замкнуто, то последовательность* $\{x_n\}$, *состоящая из строго полярных точек, не может иметь тонких предельных точек, если только она не содержит постоянной подпоследовательности, и не может иметь тонкого предела, если исключить случай* $x_n = \mathrm{const}$ *для всех достаточно больших* n.

Пусть x_0 является предельным значением; если нет ни одной постоянной последовательности, то $x_n \neq x_0$ при всех $n \geqslant N$ для достаточно большого N; множество $\bigcup\limits_N^\infty \{x_n\}$ разрежено в x_0, и дополнительное к нему множество является тонкой окрестностью x_0, не содержащей точек x_n, $n \geqslant N$.

Предположим теперь, что $x_n \to x_0$ и $x_n \neq x_0$ для бесконечного множества значений n; если бы существовала подпоследовательность $x_{n_p} \neq x_0$, то множество $\complement \{x_{n_p}\}$ было бы тонкой окрестностью x_0, не содержащей бесконечного множества точек x_n.

Упражнения. Предположим, что Φ C-замкнуто и что каждая точка строго полярна. Тогда:

i) Всякое счетное множество тонко замкнуто.

ii) Никакое бесконечное множество не будет тонко квазикомпактно.

iii) Если $\{x_0\}$ не является тонко изолированным, то точка x_0 не имеет счетного базиса тонких окрестностей.

vi) Если тонкая топология (пусть отделимая) не дискретна, то она не метризуема.

5. Простейшие общие примеры из теории потенциала. Возьмем в качестве Φ множество всех классических супергармонических неотрицательных функций в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) и функцию $+\infty$. В качестве $\mathcal{T}_1$ возьмем евклидову топологию.

Беря специальные супергармонические функции $h_{x_0}(x) = |x - x_0|^{2-n}$, видим, что всякое открытое множество есть сумма множеств вида $\{x \mid h_{x_1}(x) > \alpha\}$, и поэтому $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1$[1]. Любая точка строго полярна. Кроме того, известно, что если функции u_n супергармоничны и неотрицательны, то функция $\sum u_n$ также супергармонична или тождественно равна $+\infty$. Таким образом, Φ замкнуто относительно счетных сложений, т. е. C-замкнуто.

Далее, элементарно проверяется, что всякое полярное множество строго полярно и, значит, сверхразрежено в любой точке. Следовательно, все его точки тонко изолированы. Однако никакая точка $\mathbb{R}^n$ не является тонко изолированной в $\mathbb{R}^n$.

Нетривиальный пример разреженного множества (скажем, в $\mathbb{R}^3$) можно получить, беря объединение α шаров $B^{r_n}_{x_n}$, $x_n \to x_0$, с радиусами r_n, удовлетворяющими условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n r_n}{|x_n - x_0|} < +\infty.$$

Массы $n r_n$ в точках x_n порождают ньютонов потенциал (супергармоническую положительную функцию), конечный в x_0, не меньший n на $B^{r_n}_{x_n}$ и, следовательно, стремящийся к $+\infty$ на α.

В начале гл. IX приведены различные простые примеры разреженности и неразреженности, которые можно было бы рассмотреть уже теперь. Однако мы сначала продолжим изучение общих свойств.

---

[1]) Совпадение $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_1$ вытекает также из того, что всякая точка x_0 есть глобальный пик для $h_{x_0}(x)$ (см. п. 1). — *Прим. перев.*

Глава II

ПОНЯТИЕ ПРИВЕДЕННОЙ ФУНКЦИИ. ПРИМЕНЕНИЯ. СТРОГАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ И СТРОГАЯ НЕРАЗРЕЖЕННОСТЬ

1. В том же пространстве Ω с конусом Φ рассмотрим множество e и функцию φ на Ω со значениями из $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$. Определим функцию R_φ^e как

$$\inf_{u \in \Phi,\ u \geqslant \varphi \text{ на } e} u.$$

Отсюда вытекает, что $R_\varphi^\varnothing = 0$.

Определение II. 1. Функция R_φ^e называется *приведенной функцией* [1]) для φ на e.

Если $e = \Omega$, то будем писать R_φ вместо R_φ^Ω. Легко устанавливаются следующие свойства приведенной функции.

i) $R_\varphi^e = R_{\varphi \cdot \chi_e}^e$, где χ_e — характеристическая функция множества e.

ii) $R_{\lambda\varphi}^e = \lambda R_\varphi^e$, $\forall \lambda \geqslant 0$.

iii) $R_{\varphi_1+\varphi_2}^e \leqslant R_{\varphi_1}^e + R_{\varphi_2}^e$.

iv) $R_\varphi^{e_1 \cup e_2} \leqslant R_\varphi^{e_1} + R_\varphi^{e_2}$.

v) Если Φ C-замкнуто, то

$$R_\varphi^{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} R_\varphi^{e_n}.$$

---

[1]) Это название было использовано в статье Брело [17] для аналогичного понятия, введенного Мартином [1] для граничного множества. В указанном в тексте смысле это название появилось впервые в Брело [14] и [20]. Если подвергнуть приведенную функцию полунепрерывной снизу регуляризации, то получится так называемая выметенная функция, которая использовалась в классической теории потенциала еще в работе Брело [8] под именем „экстремали" (относительно дополнительного к e множества) (см. гл. VI). По поводу дальнейшего развития затронутых в этой главе вопросов см. Брело [21].

2. Охарактеризуем разреженные в точке $x_0 \notin e$ множества e с помощью приведенных функций.

Теорема II.2. *Множество e будет разреженным в x_0 в том и только в том случае, когда*

$$\inf_{\sigma} R_1^{e\cap\sigma}(x_0) < 1,$$

где σ обозначает переменную окрестность точки x_0, иными словами, когда существует такая окрестность σ, что $R_1^{e\cap\sigma}(x_0) < 1$.

Доказательство. Пусть e разрежено в x_0. Тогда существуют окрестность σ точки x_0 и функция $u \in \Phi$, такие, что $u(x_0) < \inf\limits_{x\in e\cap\sigma} u(x)$. Пусть $u(x_0) < \lambda < \inf\limits_{x\in e\cap\sigma} u(x)$. Тогда $R_\lambda^{e\cap\sigma}(x) \leqslant u(x)$. Следовательно, $R_\lambda^{e\cap\sigma}(x_0) \leqslant u(x_0) < \lambda$, так что $R_1^{e\cap\sigma}(x_0) < 1$.

Обратно, предположим, что существует окрестность σ точки x_0, такая, что $R_1^{e\cap\sigma}(x_0) < 1$, тогда существует функция $u \in \Phi$, удовлетворяющая неравенствам $u(x_0) < 1$ и $u \geqslant 1$ на $e \cap \sigma$. Это показывает, что e разрежено в x_0.

Предложение II.3. *Если существует конечная функция $u \in \Phi$, положительная в точке x_0, то для всякого множества $e \not\ni x_0$ выполнено соотношение $\inf\limits_{\sigma} R_1^{e\cap\sigma}(x_0) \leqslant 1$, где σ — переменная окрестность точки x_0.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда e неразрежено в x_0. В таком случае $u(x_0) = \sup\limits_{\sigma} \inf\limits_{e\cap\sigma} u(x)$. Поэтому для любого λ, $0 < \lambda < u(x_0)$, существует такая окрестность σ_0, что $\lambda < \inf\limits_{e\cap\sigma_0} u(x)$. Следовательно, $R_\lambda^{e\cap\sigma_0} \leqslant u$, откуда $\lambda R_1^{e\cap\sigma_0} \leqslant u$ и $R_1^{e\cap\sigma_0}(x_0) \leqslant \leqslant \frac{u(x_0)}{\lambda}$. Таким образом, $\inf\limits_{\sigma} R_1^{e\cap\sigma}(x_0) \leqslant u(x_0)/\lambda$, и поскольку это верно для любого $\lambda > 0$, такого, что $\lambda < u(x_0)$, мы заключаем, что $\inf\limits_{\sigma} R_1^{e\cap\sigma}(x_0) \leqslant 1$.

Предложение II.4. *Если функция φ конечна, непрерывна и положительна в точке x_0, $x_0 \notin e$, то*

$\inf_\sigma R_\varphi^{e\cap\sigma} = \varphi(x_0) \inf_\sigma R_1^{e\cap\sigma}$. *Следовательно, критерий разреженности можно записать в таком виде:* $\inf_\sigma R_\varphi^{e\cap\sigma}(x_0) < \varphi(x_0)$ *для любой конечной непрерывной положительной в точке* x_0 *функции* φ.

Доказательство. Пусть $0 < \theta_1 < 1 < \theta_2$. Тогда в силу непрерывности φ в точке x_0 существует окрестность σ_0 этой точки, такая, что на $e \cap \sigma_0$.

$$\theta_1\varphi(x_0) \leqslant \varphi \leqslant \theta_2\varphi(x_0).$$

Следовательно, для любой окрестности $\sigma \subset \sigma_0$ имеем

$$\theta_1\varphi(x_0) R_1^{e\cap\sigma} \leqslant R_\varphi^{e\cap\sigma} \leqslant \theta_2\varphi(x_0) R_1^{e\cap\sigma},$$

откуда

$$\theta_1\varphi(x_0) \inf_\sigma R_1^{e\cap\sigma} \leqslant \inf_\sigma R_\varphi^{e\cap\sigma} \leqslant \theta_2\varphi(x_0) \inf_\sigma R_1^{e\cap\sigma},$$

и так как θ_1, θ_2 произвольны, то

$$\inf_\sigma R_\varphi^{e\cap\sigma} = \varphi(x_0) \inf_\sigma R_1^{e\cap\sigma}.$$

Предложение II.5. *Если функция* $\varphi \geqslant 0$ *полунепрерывна снизу в точке* x_0, *а множество* e *неразрежено в точке* $x_0 \notin e$, *то* $R_\varphi^e(x_0) \geqslant \varphi(x_0)$; *если, кроме того,* $\varphi \in \Phi$, *то* $R_\varphi^e(x_0) = \varphi(x_0)$. *Для любой функции* φ, *всюду полунепрерывной снизу, но не обязательно принадлежащей* Φ, *имеем* $R_\varphi^e = R_\varphi^{\tilde{e}}$.

Доказательство. Если $v \in \Phi$ удовлетворяет на e неравенству $v \geqslant \varphi$, то

$$v(x_0) = \liminf_{x \in e,\, x \to x_0} v(x) \geqslant \liminf_{x \in e,\, x \to x_0} \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0).$$

Следовательно, $R_\varphi^e(x_0) \geqslant \varphi(x_0)$. Если $\varphi \in \Phi$, то имеет место также противоположное неравенство, а следовательно, равенство.

Пусть теперь φ всюду полунепрерывна снизу и $v \geqslant \varphi$ на e; тогда $v \geqslant \varphi$ также и на $\tilde{e}$. Значит, $R_\varphi^e \geqslant R_\varphi^{\tilde{e}}$, и следовательно, имеет место равенство.

Предложение II.6. *Пусть конечная функция $\varphi \geqslant 0$ имеет глобальный пик в точке x_0 и полунепрерывна снизу в x_0 (а значит, непрерывна в x_0). Допустим, что любая положительная константа принадлежит Φ. Тогда разреженность множества e в $x_0 \notin e$ эквивалентна неравенству $R^e_\varphi(x_0) < \varphi(x_0)$.*

Доказательство. Если e неразрежено, то, как мы только что установили, выполнено противоположное неравенство $\geqslant$. Пусть e разрежено. Тогда существуют функция $v \in \Phi$ и окрестность σ точки x_0, такие, что $\inf\limits_{\sigma \cap e} v > v(x_0)$. Выберем λ строго между этими числами и рассмотрим функцию $w = \varphi(x_0) + k(v - \lambda)$, где k — константа, удовлетворяющая неравенствам $0 < k < \varphi(x_0)/\lambda$. Тогда $w \in \Phi$, и на $e \cap \sigma$ имеем $w > \varphi(x_0) \geqslant \varphi$. Далее, $w \geqslant \varphi(x_0) - k\lambda$, что мажорирует φ на $\complement\sigma$ при достаточно малом k. Следовательно, $w \geqslant \varphi$ на e, так что $w \geqslant R^e_\varphi$ и

$$R^e_\varphi(x_0) \leqslant w(x_0) < \varphi(x_0).$$

Обобщение. *То же заключение имеет место, если φ есть сумма функции φ_1 указанного выше типа и функции $u \in \Phi$, конечной в x_0.*

Если e неразрежено, то проходят те же самые рассуждения. Если же e разрежено, то $R^e_{\varphi_1}(x_0) < \varphi_1(x_0)$, $R^e_u(x_0) \leqslant u(x_0)$, и поэтому

$$R^e_\varphi(x_0) \leqslant R^e_{\varphi_1}(x_0) + R^e_u(x_0) < \varphi_1(x_0) + u(x_0) = \varphi(x_0).$$

Замечание. В предложениях 5 и 6 функцию φ можно предполагать только тонко полунепрерывной снизу.

3. Строгая разреженность. Определение II.7. Множество e называется *строго разреженным* в точке $x_0 \notin e$, если

$$\inf_\sigma R_1^{e \cap \sigma}(x_0) = 0.$$

Простейшие свойства. 1) Всякое строго разреженное множество разрежено.

2) Любое подмножество строго разреженного множества строго разрежено.

3) Конечное объединение строго разреженных множеств строго разрежено.

Теорема II.8. *Пусть для любого $\varepsilon > 0$ каждая функция из Φ, конечная в x_0, может быть представлена в виде $v + \theta$, где функция θ конечна и непрерывна в x_0, а $v \in \Phi$ и $v(x_0) < \varepsilon$. Тогда всякое множество e, разреженное в x_0, будет строго разреженным в x_0.*

Доказательство. Пусть e разрежено в x_0. Тогда существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u(x_0) < \sup\limits_{\sigma} \inf\limits_{x \in e \cap \sigma} u(x)$. Выберем число K так, чтобы $0 < K < \sup\limits_{\sigma} \inf\limits_{x \in e \cap \sigma} u(x) - u(x_0)$. По предположению существуют v и θ, такие, что $v \in \Phi$ и $v(x_0) < K\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ задано), а функция θ конечна и непрерывна в x_0. Заметим, что

$$\sup_{\sigma} \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x) - u(x_0) = \sup_{\sigma} \inf_{x \in e \cap \sigma} v(x) - v(x_0).$$

Так как

$$0 < K < \sup_{\sigma} \inf_{x \in e \cap \sigma} v(x) - v(x_0), \quad \text{то} \quad \sup_{\sigma} \inf_{x \in e \cap \sigma} v(x) > K$$

и существует такая окрестность σ_0, что $\inf\limits_{x \in e \cap \sigma} v(x) > K$. Следовательно, $R_K^{e \cap \sigma_0} \leqslant v$, или $K R_1^{e \cap \sigma_0} \leqslant v$, т. е. $R_1^{e \cap \sigma_0}(x_0) \leqslant v(x_0)/K \leqslant \varepsilon$. Таким образом, $\inf\limits_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) \leqslant \varepsilon$, и поскольку это верно при любом $\varepsilon > 0$, то $\inf\limits_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) = 0$. Итак, e строго разрежено в x_0.

Замечание. Приведенная теорема остается справедливой, если мы потребуем лишь, чтобы разложение вида $v + \theta$ существовало для функции $u \in \Phi$, ассоциированной с e, т. е. такой, что

$$u(x_0) < \lim_{x \to x_0,\, x \in e} \inf u(x).$$

Теорема II.9. *Пусть Φ C-замкнуто. Если e_n — последовательность множеств, строго разреженных в x_0, то существует убывающая последовательность σ_n окрестностей точки x_0, такая, что $\bigcup (e_n \cap \sigma_n)$ строго разрежено в x_0.*

Доказательство. Пусть ε_n — последовательность положительных чисел, для которой $\sum \varepsilon_n < +\infty$. Так как e_1 строго разрежено в x_0, то существует окрестность σ_1 точки x_0, такая, что $R_1^{e_1 \cap \sigma_1}(x_0) < \varepsilon_1$. Так как e_2 строго разрежено в x_0, то мы можем выбрать окрестность σ_2, $\sigma_2 \subset \sigma_1$ так, чтобы $R_1^{e_2 \cap \sigma_2}(x_0) < \varepsilon_2$, и т. д., выбираем $\sigma_n \subset \sigma_{n-1}$ так, чтобы $R_1^{e_n \cap \sigma_n}(x_0) < \varepsilon_n$. Покажем, что $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (e_n \cap \sigma_n)$ строго разрежено в x_0.

Пусть δ — любая окрестность точки x_0. Имеем

$$R_1^{E \cap \delta}(x_0) \leqslant R_1^{\bigcup\limits_1^N (e_n \cap \sigma_n) \cap \delta}(x_0) + R_1^{\bigcup\limits_{N+1}^{\infty} (e_n \cap \sigma_n) \cap \delta}(x_0).$$

Второй член справа мажорируется величиной $R_1^{\bigcup\limits_{N+1}^{\infty} (e_n \cap \sigma_n)}(x_0)$ и тем более величиной $\sum\limits_{N+1}^{\infty} R_1^{e_n \cap \sigma_n}(x_0)$, которая $\leqslant \sum\limits_{N+1}^{\infty} \varepsilon_n$. Выберем N так, чтобы $\sum\limits_{N+1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon/2$. Так как $\bigcup\limits_1^N (e_n \cap \sigma_n)$ строго разрежено в x_0, существует окрестность δ точки x_0, такая, что $R_1^{\bigcup\limits_1^N (e_n \cap \sigma_n) \cap \delta}(x_0) < \varepsilon/2$. Следовательно, $R_1^{E \cap \delta}(x_0) \leqslant \varepsilon$ и $\inf\limits_{\sigma} R_1^{E \cap \sigma}(x_0) \leqslant \varepsilon$. Поскольку ε произвольно, мы заключаем, что E строго разрежено в x_0.

Упражнения. 1) Пусть e_n — последовательность множеств, строго разреженных в x_0. Предположим, что Φ C-замкнуто и что существует счетный базис $\{\omega_n\}$ окрестностей точки x_0, причем $\bigcap \omega_n = \{x_0\}$. Тогда можно найти убывающую последовательность окрестностей σ_n, такую, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_n = \{x_0\}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\sigma_n \cup e_n) \setminus \{x_0\}$ строго разрежено в x_0.

Указание. Для любых последовательностей множеств e_n и δ_n можно написать

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(e_n \cup \delta_n) \subset \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\delta_n\Big) \cup e_1 \cup (e_2 \cap \delta_1) \cup (e_3 \cap \delta_2) \cup \ldots$$

и применить предыдущую теорему.

2) Пусть (V_n) — последовательность тонких окрестностей точки x_0. Предположим, что Φ C-замкнуто, что разреженность влечет строгую разреженность и что существует счетный базис $\{\omega_n\}$ окрестностей точки x_0, такой, что $\bigcap \omega_n = \{x_0\}$. Тогда существует убывающая последовательность σ_n окрестностей x_0, такая, что $\bigcap \sigma_n = \{x_0\}$ и $\bigcup (V_n \setminus \sigma_n) \bigcup \{x_0\}$ является тонкой окрестностью точки x_0.

[Это — переформулировка упражнения 1) в терминах тонких окрестностей.]

Предложение II. 10. *Сверхразреженность влечет за собой строгую разреженность, а в случае, когда Φ C-замкнуто, оба понятия эквивалентны.*

Доказательство. Первая часть доказывается легко. Существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u(x_0)$ конечно и $u > \lambda$ на некотором $e \cap \sigma$. Поэтому

$$R_\lambda^{e\cap\sigma}(x_0) \leqslant u(x_0), \quad R_1^{\sigma\cap e}(x_0) \leqslant u(x_0)/\lambda$$

и, следовательно, $\inf\limits_{\sigma} R_1^{e\cap\sigma}(x_0) = 0$.

Обратно, предположим, что e строго разрежено в x_0, а Φ C-замкнуто.

Так как $\inf\limits_{\sigma} R_1^{e\cap\sigma}(x_0) = 0$, то для каждого n существует окрестность σ_n точки x_0, такая, что $R_1^{e\cap\sigma_n}(x_0) < \frac{1}{n^3}$. Следовательно, существуют $u_n \in \Phi$, такие, что $u_n(x_0) < \frac{1}{n^3}$ и $u_n \geqslant 1$ на $e \cap \sigma_n$. Рассмотрим $u = \sum n u_n$, По предположению $u \in \Phi$, $u(x_0) = \sum n u_n(x_0) < \sum \frac{1}{n^2} < \infty$. Далее, $u(x) \geqslant n u_n(x) \geqslant n$ на $e \cap \sigma_n$. Для произвольного заданного λ рассмотрим $N > \lambda$. Имеем $u(x) \geqslant \lambda$ на $e \cap \sigma_N$, т. е. $u(x) \to \infty$, $x \in e$, $x \to x_0$. Следовательно, e сверхразрежено в x_0.

4. Строгая неразреженность. Для того чтобы e было неразрежено в $x_0 \notin e$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_\sigma R_1^{e \cap \sigma}(x_0) \geqslant 1.$$

Пусть δ — какая-либо окрестность x_0. Имеем

$$R_1^{\sigma \cap e}(x_0) \geqslant R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0).$$

Следовательно,

$$R_1^{\sigma \cap e}(x_0) \geqslant \sup_\delta R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0)$$

и

$$\inf_\sigma R_1^{e \cap \sigma}(x_0) \geqslant \inf_\sigma \left(\sup_\delta R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0)\right).$$

Определение II.11. Множество e называется *строго неразреженным* в точке $x_0 \notin e$, если

$$\inf_\sigma \left(\sup_\delta R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0)\right) \geqslant 1.$$

Это условие влечет за собой неразреженность.

Важные замечания. 1) Пусть e строго неразрежено в x_0. Для любого σ имеем $\sup_\delta R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) \geqslant 1$. Поэтому, если даны σ и число K, $0 < K < 1$, то существует такое δ, что $R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) > K$.

2) Обратно, если при любом K, $0 < K < 1$, и любом σ существует такое δ, что $R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) > K$, то e строго неразрежено в x_0.

3) Если для множества $A \not\ni x_0$ выполнено равенство $\sup_\delta R_1^{A \setminus \delta}(x_0) = R_1^A(x_0)$, где δ — произвольная окрестность точки x_0, то A будет строго неразреженным в x_0 при условии, что оно неразрежено в x_0.

Теорема II.12. *Пусть e_n — последовательность строго неразреженных множеств в x_0, $x_0 \notin e_n$. Предположим, что существует счетный базис окрестностей точки x_0. Тогда существует убывающая последовательность окрестностей δ_n точки x_0, такая, что множество $\bigcup(e_n \setminus \delta_n)$ будет строго неразрежено в x_0.*

Доказательство. Пусть λ_n — возрастающая последовательность чисел, такая, что $0 < \lambda_n < 1$, $\lambda_n \to 1$ при $n \to \infty$. Пусть ω_n — счетный убывающий базис окрестностей точки x_0. Так как множество e_1 строго неразрежено в x_0, то можно найти окрестность δ_1, такую, что $\delta_1 \subset \omega_1$ и $R_1^{(e_1 \cap \omega_1) \setminus \delta_1}(x_0) > \lambda_1$. Из строгой неразреженности e_2 в x_0 следует, что можно выбрать δ_2 так, чтобы $\delta_2 \subset \omega_2 \cap \delta_1$ и $R_1^{(e_2 \cap \omega_2) \setminus \delta_2}(x_0) > \lambda_2$. И вообще для любого n можно выбрать δ_n так, чтобы $\delta_n \subset \omega_n \cap \delta_{n-1}$ и $R_1^{(e_n \cap \omega_n) \setminus \delta_n}(x_0) > \lambda_n$. Положим $E = \bigcup(e_n \setminus \delta_n)$. Тогда

$$(E \cap \omega_n) \setminus \delta_n \supset (e_n \cap \omega_n) \setminus \delta_n,$$

и поэтому

$$R_1^{(E \cap \omega_n) \setminus \delta_n}(x_0) \geqslant R_1^{(e_n \cap \omega_n) \setminus \delta_n}(x_0) \geqslant \lambda_n.$$

Возьмем $0 < K < 1$; для всех $n \geqslant N$ будем иметь $R_1^{(E \cap \omega_n) \setminus \delta_n}(x_0) \geqslant K$. Следовательно,

$$\sup_{\delta} R_1^{(E \cap \omega_n) \setminus \delta}(x_0) \geqslant K.$$

Так как любое σ содержит ω_n при $n > N$, то

$$\inf_{\sigma} \sup_{\delta} R_1^{(E \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) \geqslant K.$$

Значит, $\inf\limits_{\sigma} \sup\limits_{\delta} R_1^{(E \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) \geqslant 1$ и E строго неразрежено в x_0.

Замечание. Предположим, что неразреженность в x_0 всегда строгая и что существует счетный базис окрестностей точки x_0. Из неразреженности e_n в x_0 следует, что x_0 является тонкой предельной точкой для e_n. Доказанное предложение показывает, что если x_0 является тонкой предельной точкой для всех e_n, то существует убывающая последовательность δ_n окрестностей точки x_0, такая, что x_0 является тонкой предельной точкой для $\bigcup(e_n \setminus \delta_n)$.

5. Иногда полезно следующее

Определение II.13. Множество e называется *пренебрежимым*, если $\forall e' \subset e$, $R_1^{e'} = 0$ на $\complement e'$.

Простейшие свойства. i) *Конечная сумма пренебрежимых множеств будет пренебрежимым множеством.*

ii) *Строго полярное множество пренебрежимо.*

Действительно, если $e' \subset e$ и $x \in \complement e'$, то существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u = +\infty$ на e', а $u(x)$ конечно. Тогда для любого $\lambda > 0$ имеем $\lambda u = +\infty$ на e', так что $R_1^{e'}(x) \leqslant \lambda u(x)$. Таким образом, $R_1^{e'}(x) = 0$.

iii) *Если e пренебрежимо, то $e \setminus \{x\}$ будет строго разреженным в x при любом x.*

Предположим еще, что Φ C-замкнуто. Тогда

iv) *Счетная сумма пренебрежимых множеств будет пренебрежимым множеством.*

v) *Всякое пренебрежимое множество e является строго полярным.*

Действительно, пусть $e' \subset e$ и $x \notin e'$. Существуют $u_n \in \Phi$, такие, что $u_n \geqslant 1$ на e' и $u_n(x) < 2^{-n}$. Но тогда $\sum u_n \in \Phi$, $\sum u_n = +\infty$ на e' и $\sum u_n(x) < +\infty$.

Глава III

ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ТОНКИХ ПРЕДЕЛАХ[1]

1. Будем рассматривать пространство Ω, основную топологию $\mathscr{T}_1$ и конус Φ, определенные в гл. I, § 1, и проведем сравнение тонких пределов и обычных $\mathscr{T}_1$-пределов. Начнем с нескольких простых замечаний.

---

[1]) Отправными пунктами для этой главы послужили некоторые результаты Картана и Дуба в классической теории потенциала, а также аксиоматическое построение теории, данное в Брело [21].

a) Если множество e неразрежено в x_0, то x_0 является тонкой предельной точкой для e. Верно и обратное.

b) Пусть Ω'—какое-либо топологическое пространство, а f — функция на подмножестве E из Ω, неразреженном в точке $x_0 \notin E$, со значениями в Ω'. Пусть V — тонкая окрестность точки $x_0 \in \Omega$, и допустим, что f имеет предел l, когда $x \to x_0$, $x \in V \cap E$. Тогда тонкий $\lim\limits_{x \to x_0,\ x \in E} f$ существует и равен l.

c) Пусть λ — тонкое предельное значение[1] f на E в точке x_0, причем E неразрежено в $x_0 \notin E$. Тогда λ есть также $\mathscr{T}_1$-предельное значение f в x_0 на любой тонкой окрестности V.

Теорема III. 1[2]). *Пусть f — функция, определенная на подмножестве E из Ω, неразреженном в $x_0 \notin E$, со значениями в топологическом пространстве Ω'. Предположим, что существует тонкий $\lim\limits_{x \to x_0,\ x \in E} f = l$ и что выполнены следующие условия:*

i) Φ *C-замкнуто,*

ii) *разреженность влечет строгую разреженность,*

iii) *в каждой точке пространства Ω' существует счетный базис окрестностей.*

Тогда существует такая тонкая окрестность V точки x_0, что $\lim\limits_{x \to x_0,\ x \in E \cap V} f = l$ (т. е. f стремится к l вне некоторого разреженного множества).

Доказательство. Пусть α_n — убывающая последовательность окрестностей точки l. Для каждого n существует тонкая окрестность δ_n точки x_0, такая, что из $x \in E \cap \delta_n$ следует $f(x) \in \alpha_n$. Положим $e_n = \{x \in E \mid f(x) \notin \alpha_n\}$. Так как $e_n \subset C\delta_n$, то e_n будет разрежено в x_0 для любого n. В силу ii) e_n будет строго разрежено в x_0 для любого n. Но тогда по

---

[1]) λ является тонким (соответственно $\mathscr{T}_1$-) предельным значением в том и только в том случае, когда при отображении f прообраз любой окрестности λ пересекает любую тонкую (соответственно $\mathscr{T}_1$-) окрестность точки x_0.

[2]) В классическом случае эта теорема принадлежит А. Картану (см. Дени [3]).

теореме II. 9 существуют окрестности σ_n точки x_0, такие, что $e = \bigcup (e_n \cap \sigma_n)$ строго разрежено в x_0. Следовательно, Ce является тонкой окрестностью x_0.

Если α — любая окрестность точки l в Ω', то $\alpha \supset \alpha_n$ при достаточно больших n. Пусть $x \in \sigma_n \cap Ce \cap E \subset Ce_n$. Тогда $f(x) \in \alpha_n$ и, следовательно, $f(x) \in \alpha$. Итак, $\lim\limits_{x \to x_0,\ x \in Ce \cap E} f = l$.

В случае когда Ω' — это расширенная числовая ось $\overline{R}$, можно получить более сильный результат для функции f, определенной на множестве E, неразреженном в $x_0 \notin E$.

Теорема III. 2. *Пусть f — вещественная функция и тонкий $\limsup\limits_{x \to x_0,\ x \in E} f = \lambda$. Предположим, что выполнены условия* i) *и* ii). *Тогда существует такая тонкая окрестность V точки x_0, что* $\limsup\limits_{x \to x_0,\ x \in E \cap V} f = \lambda$.

Доказательство. Для любой фиксированной тонкой окрестности V имеем

$$\lambda = \text{тонкий} \limsup_{x \to x_0,\ x \in E} f \leqslant \limsup_{x \to x_0,\ x \in E \cap V} f.$$

Если $\lambda = +\infty$, то теорема верна с любой V. Предположим поэтому, что $\lambda < +\infty$, и покажем, что для некоторой окрестности V

$$\limsup_{x \to x_0,\ x \in E \cap V} f \leqslant \text{тонкий} \limsup_{x \to x_0,\ x \in E} f.$$

Пусть λ_n — убывающая последовательность вещественных чисел, причем $\lambda_n \to \lambda$. Для любого n имеем $\sup f \leqslant \lambda_n$ в некоторой тонкой окрестностн точки x_0. Поэтому множество $e_n = \{x \in E \mid f(x) > \lambda_n\}$ разрежено в x_0 и, следовательно, строго разрежено в x_0, $\forall n$.

Но тогда можно найти убывающую последовательность δ_n окрестностей точки x_0, такую, что $e = \bigcup (e_n \cap \delta_n)$ будет строго разреженным в x_0. Поэтому Ce будет тонкой окрестностью x_0 и $Ce \cap \delta_n \subset Ce_n$.

Следовательно, $\forall n$,

$$\sup_{x \in \delta_n \cap E \cap Ce} f \leqslant \lambda_n, \quad \inf_{\delta} \sup_{x \in \delta \cap E \cap Ce} f \leqslant \lambda n$$

и, значит, $\inf_{\delta} \sup_{x \in \delta \cap E \cap \complement e} f \leqslant \lambda$, т. е. $\limsup_{x \to x_0,\, x \in E \cap \complement e} f \leqslant \lambda$, откуда и следует требуемое равенство.

Замечания. i) Пусть V — тонкая окрестность из предыдущей теоремы. Тогда для любой тонкой окрестности $V_1 \subset V$ имеем

$$\limsup_{x \to x_0,\, x \in V_1 \cap E} f = \limsup_{x \to x_0,\, x \in V \cap E} f = \lambda.$$

Действительно,

$$\limsup_{x \to x_0,\, x \in V_1 \cap E} f \leqslant \limsup_{x \to x_0,\, x \in V \cap E} f = \lambda.$$

Но

$$\limsup_{x \to x_0,\, x \in V_1 \cap E} f \geqslant \text{тонкий} \limsup_{x \to x_0,\, x \in E} f = \lambda;$$

отсюда и следует наш результат.

ii) В предположениях i) и ii) теорем III. 1 и III. 2 пусть f_n — последовательность вещественных функций на E. Тогда имеется общая тонкая окрестность V для которой выполнены утверждения этих теорем.

Действительно, обозначим через V_n ту тонкую окрестность точки x_0, для которой результат теоремы III. 1 или III. 2 имеет место по отношению к f_n. Можно найти убывающую последовательность δ_n окрестностей точки x_0, такую, что $e = \bigcup (\complement V_n \cap \delta_n)$ будет разрежено в x_0. Тогда $\complement e$ будет тонкой окрестностью точки x_0, причем $\complement e \cap \delta_n \subset V_n$ для каждого n. Следовательно, $\complement e$ обладает требуемым свойством.

2. Теорема III. 3[1]). *Пусть λ — тонкое предельное значение f на множестве E, неразреженном в $x_0 \notin E$, где f — функция на $E \subset \Omega$ со значениями в топологическом пространстве Ω'. Тогда существует неразреженное множество e, на котором $f \to \lambda$, $x \to x_0$, $x \in e$, при условии, что выполнены следующие предположения:*

i) *x_0 имеет счетный базис окрестностей в Ω,*

[1]) Эта теорема навеяна аналогичным результатом Дуба относящимся к границе Мартина в классической теории потенциала.

ii) *в точке* x_0 *неразреженность влечет строгую неразреженность,*

iii) *в каждой точке* Ω' *имеется счетный базис окрестностей.*

Доказательство. Пусть α_n — убывающая последовательность окрестностей точки λ в Ω' и $e_n = f^{-1}(\alpha_n)$. Тогда множество e_n должно пересекать любую тонкую окрестность точки x_0, т. е. оно неразрежено в x_0. По предположению оно будет строго неразреженным в x_0. Согласно теореме II. 12 мы можем найти убывающую последовательность δ_n окрестностей точки x_0, такую, что $e = \bigcup (e_n \setminus \delta_n)$ строго неразрежено в x_0. Пусть σ — любая окрестность точки λ. Возьмем $\alpha_n \subset \sigma$. На e_p, $p \geqslant n$, имеем $f(x) \in \alpha_p \subset \sigma$; следовательно, то же верно на $\bigcup\limits_{p=n}^{\infty} (e_p \setminus \delta_p)$ и, значит, на $\delta_n \cap e$. Итак, $f \to \lambda$, $x \in e$, $x \to x_0$.

Глава IV

КВАЗИТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ[1])

1. В классической теории потенциала давно известны теоремы типа Лузина (А. Картан [1]), а именно что в $\mathbb{R}^3$ всякий потенциал допускает непрерывное сужение на множество, дополнение к которому имеет сколь угодно малую *емкость*. Эта идея была успешно использована Шоке в теории потенциала с более общими ядрами (Шоке [4], см. также Брело [20]). С другой стороны, в одной теореме Шоке [6] утверждается, что точки множества $\complement e$ (для определенности в $\mathbb{R}^3$), в которых e разрежено, могут быть заключены в открытое множество ω так, чтобы $\omega \cap e$ имело сколь

[1]) Материал этой главы взят из мимеографированных записей лекций автора (Париж, 1963—1964) и несколько дополнен в основном результатами из Брело [32].

угодно малую емкость[1]). Этот результат также представляется ключевым для тонкой теории потенциала.

В действительности оба вопроса тесно связаны друг с другом и теснейшим образом связаны с тонкой топологией. Это будет ясно из следующего аксиоматического изложения, которое дополнено недавними исследованиями Фугледе [1—3].

2. Мы исходим из некоторого топологического пространства Ω. Предположим, что в нем введена еще одна, более сильная топология, которую будем называть тонкой топологией. Понятия, отвечающие этой топологии, будем отмечать эпитетом „тонкий". Тонкое замыкание множества e будем, как и выше, обозначать через $\tilde{e}$.

Определение IV. 1. *Весом* называется функция множеств p со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, определенная на классе всех подмножеств Ω, неотрицательная, возрастающая и равная нулю на пустом множестве[2]). Вес p называется *тонким*, если $p(\tilde{e})=p(e)$, $\forall e$; *счетно субаддитивным*, если $p(\bigcup e_n)\leqslant\sum p(e_n)$ для любой последовательности множеств e_n; *непрерывным справа*, если $p(e)=\inf\limits_{\omega\supset e} p(\omega)$ (где ω — открытое множество).

Пусть дан вес p. Будем говорить, что множество ω является *p-квазиоткрытым*, если для любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество $\omega'\supset\omega$, такое, что $p(\omega'\setminus\omega)<\varepsilon$. Будем говорить, что множество *p-квазизамкнуто*, если его дополнение p-квазиоткрыто.

Функцию $f\colon \Omega\to\Omega'$ будем называть *p-квазинепрерывной*, если при любом $\varepsilon>0$ существует множество $\alpha\subset\Omega$, такое, что $p(\alpha)<\varepsilon$ и функция $f\,|\,C\alpha$ непрерывна.

Понятие p-квазиполунепрерывности определяется аналогичным образом.

---

1) Шоке рассматривал также точки $x\in e$, в которых e разрежено (см. гл. V, § 4, и гл. VI), но соответствующий результат для этих точек хорошо известен. Мы используем здесь только свойство Ce, формулируемое в терминах разреженности множества в точках его дополнения.

2) Последнее условие эквивалентно существованию квазиоткрытых множеств или квазинепрерывных функций.

Будем говорить, что некоторое свойство имеет место *p-квазивсюду*, если оно справедливо всюду, кроме множества e с $p(e)=0$.

Имея дело с фиксированным весом p, мы будем писать просто „квазиоткрытое“ и т. д. вместо „p-квазиоткрытое“ и т. д.

Простейшие свойства. Предложение IV.2. a) *Если множество α квазизамкнуто (соответственно квазиоткрыто), то функция χ_α квазиполунепрерывна сверху (соответственно снизу).*

Доказательство. Пусть α квазизамкнуто. Рассмотрим замкнутое $\beta \subset \alpha$, такое, что $p(\alpha \setminus \beta) < \varepsilon$. Функция χ_β полунепрерывна сверху, а функция $\chi_\alpha | \complement(\alpha \setminus \beta)$ равна χ_β на $\complement(\alpha \setminus \beta)$. Следовательно, χ_α квазиполунепрерывна сверху.

b) *Если вес p непрерывен справа, то верно также обратное.*

Доказательство. Рассмотрим открытое множество e с $p(e) < \varepsilon$, такое, что функция $\chi_\alpha | \complement e$ полунепрерывна сверху. Тогда функция $\chi_{\alpha \setminus e}$ также полунепрерывна сверху, так что $\alpha \setminus e$ замкнуто.

c) *Пусть вес p непрерывен справа. Если функция f квазинепрерывна, то множество $f^{-1}(\omega')$ квазиоткрыто для любого открытого множества ω'; если f квазиполунепрерывна сверху, то множество $\{x | f < \lambda\}$ при любом λ будет квазиоткрыто.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения рассмотрим открытое множество e с $p(e) < \varepsilon$, такое, что функция $f | \complement e$ непрерывна; тогда множество $f^{-1}(\omega') \cap \complement e$ открыто в $\complement e$, и поэтому $(f^{-1}(\omega') \cap \complement e) \cup e$ открыто. Таким образом, $f^{-1}(\omega')$ содержится в этом открытом множестве с точностью до множества веса $\leqslant p(e)$.

Рассуждение для второй части аналогично.

d) *Пусть вес p счетно субаддитивен. Если для функции $f: \Omega \to \Omega'$, где Ω' имеет счетный базис, $f^{-1}(\omega')$ квазиоткрыто для любого открытого ω', то f квазинепрерывна. Если для вещественной функции f множество*

$\{x \mid f(x) < \lambda\}$ *при любом* λ *квазиоткрыто, то* f *квазиполунепрерывна сверху.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения рассмотрим счетный базис $\{\omega_n\}$ открытых множеств Ω'. Пусть $e_n \subset \Omega$ — такое открытое множество, что $f^{-1}(\omega_n) \subset e_n$ и $p(e_n \setminus f^{-1}(\omega_n)) < \varepsilon/2^n$. Рассмотрим множество $A = \bigcup (e_n \setminus f^{-1}(\omega_n))$. Имеем $p(A) < \varepsilon$. Достаточно убедиться в том, что для любого n множество $f^{-1}(\omega_n) \cap \complement A$ открыто в $\complement A$. Но это следует из того, что $f^{-1}(\omega_n) \cap \complement A = e_n \cap \complement A$. Аналогично получается второе утверждение, но только вместо ω_n следует воспользоваться множествами $\{x \mid f < \lambda_n\}$, где числа λ_n образуют плотное множество.

Подчеркнем, что в случае непрерывного справа веса можно, как это делают некоторые авторы, в определении квазиполунепрерывности считать множество α открытым. Поэтому представляет интерес следующее замечание.

Замечание. Определим *внешний вес* p^* следующим образом: $p^*(e) = \inf\limits_{\omega \supset e} p(\omega) \geqslant p(e)$, где ω — открытое множество. Внешний вес всегда непрерывен справа. Он будет тонким или счетно субаддитивным, если p является таковым. Отметим, что $(p^*)^* = p^*$.

Классический пример в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$). Описанная выше тонкая топология совпадает с так называемой *классической тонкой топологией*. Внешняя ньютонова емкость является весом, непрерывным справа, счетно субаддитивным и тонким. Как мы увидим ниже, последнее свойство не столь элементарно, как первые два. Напомним, что множества нулевой емкости совпадают с полярными множествами. Более подробно см. об этом гл. VI—VIII.

3. Сравнение квазинепрерывности и тонкой непрерывности. Докажем сначала одну простую теорему, достаточно известную в классической теории потенциала (см., например, Дени и Лионс [1]).

Теорема IV.3. *Если вес* p *тонкий, то всякая* p*-квазинепрерывная функция* $f\colon \Omega \to \Omega'$ *тонко непре-*

рывна р-квазивсюду, а всякая р-квазиполунепрерывная функция тонко полунепрерывна р-квазивсюду.

Доказательство. Выберем множество α_n так, чтобы функция $f \mid C\alpha_n$ была непрерывна и чтобы $p(\alpha_n) < 1/n$. Тогда $p(\tilde{\alpha}_n) < 1/n$ и $p(\bigcap \tilde{\alpha}_n) = 0$. Если $x \notin \bigcap \tilde{\alpha}_n$, то существует такое n_0, что $x \notin \tilde{\alpha}_{n_0}$. Множество $C\tilde{\alpha}_{n_0}$ тонко открыто, а функция $f \mid C\tilde{\alpha}_{n_0}$ непрерывна и, следовательно, тонко непрерывна в x. Поэтому функция f на Ω также тонко непрерывна в x и, значит, тонко непрерывна p-квазивсюду в Ω. Доказательство для случая полунепрерывности аналогично.

Следствие. *Если вес p тонкий, то для всякого квазизамкнутого множества α имеет место равенство $p(\tilde{\alpha} \setminus \alpha) = 0$. Аналогичный результат верен для квазиоткрытых множеств.*

Доказательство. Функция χ_α квазиполунепрерывна сверху (см. предложение IV. 2, а)); следовательно, она тонко полунепрерывна сверху вне множества e нулевого веса. Далее, в любой точке $x \in \tilde{\alpha} \setminus \alpha$ функция χ_α равна нулю, в то время как ее тонкий $\limsup$ равен 1, так что она не будет тонко полунепрерывной сверху в точке x. Таким образом, $\tilde{\alpha} \setminus \alpha \subset e$.

Упражнение. Дать прямое доказательство последнего следствия. Для случая, когда Ω' имеет счетный базис, а вес p непрерывен справа и счетно субаддитивен, вывести из него теорему IV. 3.

4. Свойство Шоке. Определение IV.4. Для данного веса p *свойство Шоке* состоит в следующем: всякое тонко открытое множество является p-квазиоткрытым (или всякое тонко замкнутое множество является p-квазизамкнутым).

Эквивалентная форма свойства Шоке такова:

(α) *Для любого множества e и любого $\varepsilon > 0$ тонкая внешность e может быть заключена в открытое множество ω, такое, что $p(\omega \cap e) < \varepsilon$.*

Заметим, что отсюда вытекает такое свойство:

(β) *Всякая вещественнная функция со значениями* 0 *или* 1, *тонко полунепрерывная сверху* [1]), *квазиполунепрерывна сверху.*

Если вес p непрерывен справа, то, обратно, (β) влечет (α) и является, следовательно, эквивалентной формой свойства Шоке.

Вес, обладающий свойством Шоке, будем называть *весом типа Шоке.*

Предложение IV.5. *Если вес p — типа Шоке, то всякое тонко замкнутое множество есть объединение множества типа F_σ и множества нулевого веса. Если p к тому же непрерывен справа, то всякое тонкое борелевское множество есть объединение борелевского множества и множества нулевого веса.*

Доказательство. Первая часть очевидна. Что касается второго утверждения, то заметим, что тонкие борелевские множества образуют по определению σ-алгебру, которая является наименьшей σ-алгеброй, содержащей все тонко замкнутые множества. Множества, являющиеся объединением борелевского множества и множества нулевого веса, также образуют σ-алгебру (это следует из рассмотрения счетного пересечения и дополнения к счетной сумме таких множеств). Эта σ-алгебра содержит все тонко замкнутые множества и, следовательно, всю тонкую борелевскую σ-алгебру.

Предложение IV.6. *Если вес p тонкий и типа Шоке, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, любое множество e можно представить как объединение множеств e_1 и e_2, таких, что $p(\bar{e}_1) \leqslant p(e)$ а $p(e_2) < \varepsilon$.*

Доказательство (такое же, как в оригинальной работе Шоке). Тонкое замыкание $\tilde{e}$ содержит замкнутое множество e_0, такое, что $p(\tilde{e} \setminus e_0) < \varepsilon$, причем $p(e_0) \leqslant p(\tilde{e}) = p(e)$. В качестве e_1 мы возьмем $e \cap e_0$, а в качестве e_2 — множество $e \setminus e_0$.

---

[1]) Можно предполагать тонко полунепрерывным сверху лишь сужение этой функции на дополнение к множеству нулевого вес а

5. Эквивалентность квазинепрерывности и тонкой непрерывности квазивсюду. Теорема IV.7. *Пусть вес p — типа Шоке и счетно субаддитивен. Тогда всякая функция f: $\Omega \to \Omega'$, где Ω' имеет счетный базис, тонко непрерывная p-квазивсюду (или даже такая, сужение которой на множество E с $p(\complement E) = 0$ тонко непрерывно) будет p-квазинепрерывной. Всякая вещественная функция f, тонко полунепрерывная (сверху или снизу) p-квазивсюду (или даже функция, сужение которой, аналогичное указанному выше, тонко полунепрерывно) будет p-квазиполунепрерывной (сверху или снизу).*

Доказательство. Предположим сначала, что f тонко непрерывна. Рассмотрим базис $\{\omega_n\}$ открытых множеств в Ω', положим $e_n = f^{-1}(\omega_n)$ и выберем открытые множества $e'_n \supset e_n$ так, чтобы $p(e'_n \setminus e_n) < \varepsilon/2^n$. Положим $E = \bigcup (e'_n \setminus e_n)$. Тогда $p(E) < \varepsilon$. Покажем, что функция $f \mid \complement E$ непрерывна. Рассматривая прообразы открытых множеств в Ω', видим, что достаточно убедиться в том, что $e_n \cap \complement E$ открыто на $\complement E$. Но это следует из того, что $e_n \cap \complement E = e'_n \cap \complement E$ [1]).

Пусть теперь для некоторого множества α с $p(\alpha) = 0$ функция $f \mid \complement\alpha$ тонко непрерывна на $\complement\alpha$. Применим предыдущий результат к функции f на $\complement\alpha$, используя тот же самый вес p и индуцированную топологию. Мы получим, что f квазинепрерывна на $\Omega \setminus \alpha$ и, следовательно, на Ω. Аналогичные рассуждения можно провести в случае, когда f тонко полунепрерывна сверху (или снизу), рассмотрев множества $\{x \mid f < \lambda_n\}$, где $\{\lambda_n\}$ всюду плотно, и открытые множества $e'_n \supset e_n$, такие, что $p(e'_n \setminus e_n) < \varepsilon/2^n$.

Дальнейшие свойства эквивалентности. Из теорем IV.3 и IV.7 и определения IV.4 (в форме (β)) вытекают две следующие теоремы:

Теорема IV.8. *Предположим, что вес p — тонкий, счетно субаддитивный и типа Шоке.*

---

[1]) Это рассуждение принадлежит Дубу. В классическом примере п. 2 мы получаем для ньютоновых потенциалов свойство квазинепрерывности, указанное А. Картаном.

a) *Для любой функции* $f: \Omega \to \Omega'$ (где Ω' имеет счетный базис) [*f квазинепрерывна*]$\Leftrightarrow$[*f тонко непрерывна квазивсюду*].

b) *Для любой вещественной функции f* [*f квазиполунепрерывна* (*сверху или снизу*)]$\Leftrightarrow$[*f тонко полунепрерывна* (*сверху или снизу*) *квазивсюду*].

Теорема IV.9. *Если вес p непрерывен справа и счетно субаддитивен, то свойство Шоке эквивалентно следующему свойству: для всякой вещественной функции f тонкая полунепрерывность сверху влечет за собой квазиполунепрерывность сверху. Если, кроме того, вес p тонкий, то свойство Шоке равносильно эквивалентности тонкой полунепрерывности сверху квазивсюду и квазинепрерывности сверху.*

6. Случай тонкой топологии, определяемой конусом функций. Рассмотрим теперь, как в гл. I, конус Φ, соответствующую разреженность и тонкую топологию. В этом случае можно получить дополнительные достаточные условия для выполнения свойства Шоке.

Теорема IV. 10. *Предположим, что вес p счетно субаддитивен и непрерывен справа, а Ω имеет счетный базис. Тогда если нижняя огибающая* (inf) *любого семейства из Φ квазиполунепрерывна сверху, то p обладает свойством Шоке.*

Доказательство. Пусть $\{\omega_n\}$ — базис открытых множеств Ω. Для любого множества e положим $e_n = \{x \mid R_1^{e \cap \omega_n}(x) < 1\}$. Согласно сказанному в гл. I, множество E точек $\complement e$, где e разрежено, есть $\bigcup (e_n \cap \omega_n)$. Так как функция $R_1^{e \cap \omega_n}$ квазиполунепрерывна сверху (по предположению), то существует открытое множество α_n, такое, что $p(\alpha_n) < \varepsilon/2^n$ и функция $R_1^{e \cap \omega_n} \big| \complement \alpha_n$ полунепрерывна сверху. Поскольку $R_1^{e \cap \omega_n} \geqslant 1$ на $e \cap \omega_n$, это неравенство справедливо также на $\overline{e \cap \omega_n \setminus \alpha_n} \subset \complement e_n$. Следовательно, $\complement\,(\overline{e \cap \omega_n \setminus \alpha_n}) \supset e_n$.

Рассмотрим множества $A_n = \complement\,(\overline{e \cap \omega_n \setminus \alpha_n}) \cap \omega_n \supset$ $\supset e_n \cap \omega_n$; $\bigcup A_n$ открыто и содержит E. Далее, $A_n \cap e \subset \alpha_n$ или $\complement A_n \cup \complement e \supset \complement \alpha_n$, поскольку $\complement A_n \cup \complement e$ содержит множество $((e \cap \omega_n) \setminus \alpha_n) \cup \mathbf{C}(e \cap \omega_n)$, содержащее $\mathbf{C}\alpha_n$. Итак, $(\bigcup A_n) \cap e \subset \bigcup \alpha_n$ и $p((\bigcup A_n) \cap e) \leqslant \varepsilon$.

7. Примеры весов. Исходя из веса p и возрастающей вещественной функции $L(x) \geqslant 0$ $(x \geqslant 0)$, можно получить новый вес $L(p(e))$, свойства которого могут быть выведены из свойств p и L.

Рассмотрим конус Φ и связанный с ним вес $p(e) = R_\varphi^e(x_0)$ (см. гл. II), где $x_0 \in \Omega$ и $\varphi \geqslant 0$ фиксированы. Если функция φ полунепрерывна снизу, то вес p тонкий (следствие предложения II.5); если φ конечна, непрерывна и положительна, то вес p непрерывен справа (доказательство то же, что и в аксиоматической теории гармонических функций, см. Брело [20], стр. 122, теорема 23); если Φ C-замкнуто, то вес p счетно субаддитивен.

Замечание. Если взять $p(e) = R_1^e(x_0)$, то всякое квазизамкнутое множество α будет разрежено в x_0, если $x_0 \notin \alpha$, и всегда существует замкнутое множество $\alpha_0 \subset \alpha$, такое, что множество $\alpha \setminus \alpha_0$ не содержит точки x_0 и разрежено в ней.

Это легко получается, если выбрать содержащееся в α замкнутое множество α_0 так, чтобы $R_1^{\alpha \setminus \alpha_0}(x_0) < 1$.

Вес $R_{f_0}^e(x_0)$ и соответствующее свойство Шоке. Предложение IV.11. *Предположим, что для функции $f_0 \geqslant 0$ на Ω вес $R_{f_0}^e(x_0)$ непрерывен справа. Тогда для любой функции f, $0 \leqslant f \leqslant f_0$, квазиполунепрерывной сверху (в частности, если вес счетно субаддитивен и типа Шоке, то для всякой тонко полунепрерывной сверху квазивсюду функции) имеем $\inf\limits_{\varphi \geqslant 0} R_{f-\varphi}(x_0) = 0$ (здесь функция $\varphi \geqslant 0$, полунепрерывна сверху, $\leqslant f$, и в точках, где $f = \varphi = +\infty$, мы полагаем $f - \varphi = 0$).*

Доказательство. Существует открытое множество ω, такое, что $R_{f_0}^\omega(x_0) < \varepsilon$ и функция $f \,|\, \mathbf{C}\omega$ полунепрерывна сверху. Обозначим через f_1 эту функцию, продолженную нулем на ω; тогда f_1 будет полунепрерывна сверху на Ω и $R_{f-f_1}(x_0) \leqslant R_{f_0}^\omega(x_0) < \varepsilon$.

Теорема VI. 12. *Пусть f_0 — конечная непрерывная положительная функция на Ω. Предположим, что для всякой тонко полунепрерывной сверху функции f, $0 \leqslant f \leqslant f_0$, $\inf\limits_{\varphi} R_{f-\varphi}(x_0) = 0$ (φ полунепрерывна сверху, $0 \leqslant \varphi \leqslant f$). Тогда вес $R^e_{f_0}(x_0)$ обладает свойством Шоке.*

Доказательство. Рассмотрим тонко замкнутое множество E. Функция $(f_0)_E = f_0 \cdot \chi_E$ тонко полунепрерывна сверху. Если $\varphi \geqslant 0$ полунепрерывна сверху и $\varphi \leqslant (f_0)_E$, то множество $\alpha_0 = \{x \mid \varphi(x) \geqslant f_0/2\}$ замкнуто и содержится в E. На $E \setminus \alpha_0$ имеем $(f_0)_E - \varphi = f_0 - \varphi > f_0/2$. Поэтому $R_{(f_0)_E - \varphi} \geqslant R^{E \setminus \alpha_0}_{f_0/2} = (1/2)\, R^{E \setminus \alpha_0}_{f_0}$ и, следовательно, $R^{E \setminus \alpha_0}_{f_0}(x_0)$ при надлежащем выборе φ будет произвольно мало; это значит, что $R^{E \setminus \alpha_0}_{f_0}(x_0)$ произвольно мало при надлежащем выборе $\alpha \subset E$, а это и есть свойство Шоке.

Следствие (свойство эквивалентности для веса $R^e_{f_0}(x_0)$, где функция f_0 конечна, непрерывна и положительна, в предположении, что вес счетно субаддитивен). *Свойство Шоке эквивалентно следующему свойству:*

Для всякой тонко полунепрерывной сверху функции f, такой, что $0 \leqslant f \leqslant f_0$, имеет место равенство $\inf\limits_{\varphi} R_{f-\varphi}(x_0) = 0$ (функции φ полунепрерывны сверху, $0 \leqslant \varphi \leqslant f$).

Это — непосредственное следствие из IV. 11 и IV. 12. Установленная эквивалентность показывает, что аппроксимационное свойство, выражаемое последним равенством, может быть интерпретировано как свойство Шоке некоторого специального веса, а именно веса $R^e_{f_0}(x_0)$.

Упражнение. Пусть пространство Ω локально компактно и имеет счетный базис, а Φ C-замкнуто. Тогда для конечных непрерывных функций $f_0 > 0$ свойство Шоке для веса $R^e_{f_0}(x_0)$ не зависит от выбора f_0 и эквивалентно соответствующему *локальному* свойству Шоке для веса $R_1^e(x_0)$ [1]) и свойству $\inf\limits_{\varphi} R_{f-\varphi}(x_0)=0$ (φ полунепрерывны сверху, $0 \leqslant \varphi \leqslant f$) для всякой функции $f \geqslant 0$, тонко полунепрерывной сверху и локально ограниченной.

8. f_0-исчезающие семейства множеств ($f_0 \geqslant 0$). (См. Брело [27].) Будем рассматривать Ω и Φ из гл. I. Положим

$$\hat{f}(x) = \liminf_{y \to x} f(y).$$

Определение IV. 13. Семейство множеств $\{e_i\}$ будем называть *f_0-исчезающим*, если

$$\widehat{\inf_i R_{f_0}^{e_i}} = 0.$$

Это эквивалентно равенству

$$\widehat{\inf_i \hat{R}_{f_0}^{e_i}} = 0$$

(мы пишем $\hat{R}_\varphi^e$ вместо $\widehat{R_\varphi^e}$).

Действительно, второе, априори более слабое условие показывает, что в любом открытом множестве α при любом $\varepsilon > 0$ существует точка x_1, для которой $\inf\limits_i \hat{R}_{f_0}^{e_i}(x_1) < \varepsilon$, и, значит, существуют такое j, что $\hat{R}_{f_0}^{e_j}(x_1) < 2\varepsilon$, и, далее, такая точка $x_2 \in \alpha$, что $R_{f_0}^{e_j}(x_2) < 3\varepsilon$. Таким образом, множество, где $\inf\limits_i R_{f_0}^{e_i} < 3\varepsilon$, плотно, откуда вытекает и свойство f_0-исчезания.

Одно применение. Справедливость свойства Шоке для веса $R_{f_0}^e(x_0)$ или даже для веса $\hat{R}_{f_0}^e(x_0)$ для любой фиксированной функции $f_0 \geqslant 0$ и любой фиксированной точки x_0 влечет за собой следующее: для любых множества e и семейства открытых множеств ω_i, содержащих тонкие внешние точки e, семейство $\{e \cap \omega_i\}$ является f_0-исчезающим.

[1]) То есть свойству Шоке в каждом открытом множестве базиса Ω. — *Прим. перев.*

Упражнение. Найти дополнительные предположения, при которых равенство $\inf\limits_i R^{e_i}_{f_0}(x_0)=0$ (для одной функции f_0 и одной точки x_0) эквивалентно f_0-исчезанию семейства $\{e_i\}$.

9. О теории Фугледе [2, 3]. Фугледе рассматривает общую емкость, которя есть не что иное, как непрерывный справа счетно субаддитивный вес, обладающий еще свойством: $p(\bigcup \alpha_n)=\sup p(\alpha_n)$ для любой возрастающей последовательности множеств α_n. Сначала он доказывает, что если Ω имеет счетный базис открытых множеств, то всякое (непустое) семейство квазизамкнутых множеств $\{e_i\}$ содержит счетное подсемейство, пересечение которого содержится в каждом e_i с точностью до множества α_i нулевого веса. Далее он изучает в рамках нашей схемы с конусом Φ следствия следующих аксиом:

1) Рассматриваемый вес тонкий.

2) Множество точек $x\in E$, где $E\setminus\{x\}$ разрежено, имеет нулевой вес.

3) Если $p(E)=0$, то $E\setminus\{x\}$ разрежено, $\forall x$.

4) Каждая функция из Φ квазинепрерывна.

Заметим, что аксиома 2) в классической теории потенциала в $\mathbb{R}^n$ (см. п. 2 и гл. VI, где Φ является множеством всех неотрицательных гипергармонических функций) есть ключевая теорема, так же как и свойство Шоке. Однако в соответствующей теории для пространств Грина (см. гл. VI) свойство 2) не имеет места, если только не исключить неполярные точки. В аксиоматических теориях гармонических функций, берущих свое начало от классической теории, эта аксиома 2) (даже когда неполярных точек нет) не предполагается выполненной (равно как и свойство Шоке).

Именно поэтому мы ввели сначала более слабые условия и рассмотрели свойство Шоке. Довольно сильные аксиомы Фугледе имеют интересные следствия: из них выводятся свойство Шоке, существование наименьшего тонко замкнутого носителя для меры, которая равна нулю на множествах нулевого веса (обобщение теоремы Гетура), и т. д. В недавней работе [4] Фугледе обобщает свою теорию.

Глава V

СЛАБАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ[1])

1. Обозначения. Пусть f — произвольная функция на топологическом пространстве Ω со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Мы уже ввели (гл. IV, п. 8) обозначение

$$\hat{f}(x) = \liminf_{y \to x} f(y) = \sup_{\sigma} (\inf_{y \in \sigma} f(y))$$

(σ — окрестность точки x).

Введем еще обозначение

$$\check{f}(x) = \liminf_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} f(y) = \sup_{\sigma} (\inf_{\substack{y \in \sigma \\ y \neq x}} f(y));$$

в изолированных точках эта функция принимается равной $+\infty$. Известно, что функция $\hat{f}$ всегда полунепрерывна снизу и что $\hat{f} = \inf(\check{f}, f)$. Если f полунепрерывна снизу, то $\hat{f} = f$.

Вернемся к основным понятиям гл. I и рассмотрим еще одно понятие, которое поможет нам лучше понять существо регулярных граничных точек в задаче Дирихле и основной предельной теоремы в теории потенциала.

Определение V. 1. Множество e называется *слабо разреженным* в точке x_0 (которая может принадлежать или не принадлежать e), если

$$\inf_{\sigma} \hat{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1 \quad (\sigma \text{ — окрестность точки } x_0).$$

Замечания. 1) Слабая разреженность множества e влечет за собой слабую разреженность любого множества $e' \subset e$.

2) Так как $\hat{f} \leqslant f$, то разреженность множества e в $x_0 \notin e$ влечет за собой его слабую разреженность в x_0.

---

[1]) См. Брело [23].

3) Одноточечное множество $\{x_0\}$ слабо разрежено в x_0 в том и только в том случае, когда $\widehat{R}_1^{x_0}(x_0) < 1$ или, что то же самое, когда $\check{R}_1^{x_0}(x_0) < 1$.

Примеры. Ни в какой точке x пространство Ω не является слабо разреженным; $\varnothing$ слабо разрежено во всякой точке; никакая изолированная точка x_0 не будет слабо разреженной в x_0.

2. Предложение V. 2 (Рамасвами). *Если в точке $x_0 \in e$ множество $e \setminus \{x_0\}$ слабо разрежено, но не разрежено, то e слабо разрежено в x_0.*

Доказательство. Для любой окрестности σ точки x_0 имеем $x_0 \in \overline{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}$, так как $(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma$ неразрежено в x_0. Следовательно, $e \cap \sigma \subset \overline{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}$. Так как $R_1^{\alpha} = R_1^{\bar{\alpha}}$ (предложение II. 5), то

$$R_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma} = R_1^{\overline{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}} \geqslant R_1^{e \cap \sigma}$$

и то же самое верно для $\widehat{R}_1$. В силу сделанных предположений $\widehat{R}_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0) < 1$ для некоторой окрестности σ точки x_0. Таким образом, $\widehat{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$.

Применение. Если множество $\Omega \setminus \{x_0\}$ слабо разрежено в x_0, то оно разрежено в x_0.

Определение. V. 3. Точка x_0 называется *сингулярной*, если $\Omega \setminus \{x_0\}$ разрежено (или, что то же самое, слабо разрежено) в x_0.

Всякая изолированная точка пространства является сингулярной точкой.

Лемма V. 4. *Предположим, что множество $\{x_0\}$ пренебрежимо. Тогда для любого множества e имеем $\check{R}_1^{e}(x_0) = \check{R}_1^{e \setminus \{x_0\}}(x_0)$.*

Доказательство. Прежде всего $R_1^{e} \leqslant R_1^{e \setminus \{x_0\}} + R_1^{x_0}$. Так как $R_1^{x_0}(x) = 0$, $\forall x \neq x_0$, то $R_1^{e}(x) \leqslant R_1^{e \setminus \{x_0\}}(x)$, $\forall x \neq x_0$, откуда и вытекает искомое равенство $\check{R}_1^{e}(x_0) = \check{R}_1^{e \setminus \{x_0\}}(x_0)$.

Лемма V.5. *Если точка x_0 не сингулярна, то для всякого множества e имеет место неравенство $\check{R}_1^e(x_0) \leqslant R_1^e(x_0)$.*

Доказательство. Если $u \in \Phi$, $u \geqslant 1$ на e, то $R_1^e \leqslant u$, $\check{R}_1^e(x_0) \leqslant \check{u}(x_0)$. Так как $\Omega \setminus \{x_0\}$ неразрежено в x_0, то $\check{u}(x_0) = u(x_0)$ (гл. I, п. 1). Поэтому $\check{R}_1^e(x_0) \leqslant u(x_0)$ и, следовательно, $\check{R}_1^e(x_0) \leqslant R_1^e(x_0)$.

Теорема V.6. *Пусть точка x_0 пренебрежима и не сингулярна. Тогда, каково бы ни было множество $e \ni x_0$, из слабой разреженности $e \setminus \{x_0\}$ в x_0 следует, что e слабо разрежено в x_0.*

Доказательство. Для некоторой окрестности σ точки x_0

$$\hat{R}_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0) < 1.$$

Но

$$\check{R}_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0) \leqslant R_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0)$$

согласно последней лемме. Так как $\hat{f} = \inf(f, \check{f})$, то

$$\hat{R}_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0) = \check{R}_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0).$$

В силу леммы V.4 это равно $\check{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0)$. Наконец, $\hat{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0) \leqslant \check{R}_1^{\sigma \cap e}(x_0) < 1$, и следовательно, e слабо разрежено в x_0.

Замечание. Простые примеры Рамасвами показывают, что 1) условие несингулярности точки x_0 является необходимым, 2) сумма двух множеств, слабо разреженных в x_0, может не быть слабо разреженной, 3) все точки могут быть сингулярными.

3. Теорема о сходимости (или о нижней огибающей). Теорема V.7 (Брело [23]). *Пусть $\{u_i\}$ — семейство функций из конуса Φ. Тогда множество $\{x \mid \widehat{\inf u_i}(x) < \inf u_i(x)\}$ есть счетное объединение множеств, слабо разреженных в каждой точке.*

Доказательство. Положим

$$e_n = \left\{ x \mid \widehat{\inf u_i} < \inf\left(n, (\inf u_i) - \frac{1}{n}\right) \right\}.$$

Тогда

$$\{x \mid \widehat{\inf u_i}(x) < \inf u_i(x)\} = \bigcup e_n.$$

Покажем, что каждое e_n слабо разрежено в любой точке пространства. Пусть x_0 — какая-либо точка из Ω. Предположим сначала, что $\widehat{\inf u_i}(x_0) < +\infty$. Так как функция $\widehat{\inf u_i}$ полунепрерывна в x_0, то существует окрестность σ точки x_0, такая, что

$$\widehat{\inf u_i}(x) > \widehat{\inf u_i}(x_0) - (2n)^{-1}, \qquad \forall x \in \sigma.$$

На e_n имеем $\widehat{\inf u_i}(x) < \inf u_i(x) - n^{-1}$. Следовательно, на $e_n \cap \sigma$ имеем $\inf u_i > \widehat{\inf u_i} + (2n)^{-1}$. Положим $k_n = \widehat{\inf u_i}(x_0) + (2n)^{-1}$. Тогда $u_i/k_n > 1$ на $e_n \cap \sigma$ и

$$\frac{u_i}{k_n} \geqslant R_1^{e_n \cap \sigma}, \quad \inf \frac{u_i}{k_n} \geqslant R_1^{\sigma \cap e_n},$$

$$\frac{\widehat{\inf u_i}}{k_n} \geqslant \widehat{R}_1^{e_n \cap \sigma},$$

$$\widehat{R}_1^{e_n \cap \sigma}(x_0) \leqslant \frac{\widehat{\inf u_i}(x_0)}{k_n} < 1.$$

Следовательно, $\inf\limits_{\sigma} \widehat{R}_1^{e_n \cap \sigma}(x_0) < 1$, и e_n слабо разрежено в x_0.

Пусть теперь $\widehat{\inf u_i}(x_0) = +\infty$. Тогда для любого n существует окрестность σ' точки x_0, такая, что $\widehat{\inf u_i}(x) \geqslant n$, $\forall x \in \sigma'$. Поэтому $e_n \cap \sigma' = \varnothing$, и следовательно, e_n разрежено, а значит, слабо разрежено в x_0.

Обобщение. В доказательстве нигде не были использованы полунепрерывность снизу функций u_i и свойство аддитивности класса Φ. Поэтому теорема остается справедливой при очевидных изменениях в определении приведенной функции и слабой разреженности и для более общих классов Φ.

Счетное объединение множеств, слабо разреженных в каждой точке, называется *полуполярным множеством*[1]). Теорема V.7 утверждает, что „исключительное“ множество, определяемое неравенством из этой теоремы, является полуполярным.

4. Разреженность множества e в точке $x_0 \in e$.

Определение V.3. Множество e называется *разреженным в точке* $x_0 \in e$, если $e \setminus \{x_0\}$ разрежено в x_0 и e слабо разрежено в x_0.

Определение V.9. *Базой* B_e множества e называется множество точек, в которых e неразрежено.

Очевидно, $\tilde{e} = B_e \cup e$.

Эти понятия будут играть большую роль в дальнейших главах.

Замечание. В некоторых важных приложениях $R_\varphi^{e_1} = \hat{R}_\varphi^e$ на $\mathbf{C}e$ (для любой функции $\varphi \geqslant 0$). В этом случае для любой точки разреженность эквивалентна слабой разреженности.

В качестве следствия из теоремы V.6 получаем

Предложение V.10. *Предположим, что*

(i) *ни одна точка не сингулярна;*

(ii) *для любой точки x_0 утверждение „x_0 пренебрежимо“ эквивалентно утверждению „x_0 слабо разрежено в x_0“, т. е. $\hat{R}_1^{\{x_0\}}(x_0) < 1$.*

Тогда резреженность e в точке x_0 эквивалентна тому, что $e \setminus \{x_0\}$ разрежено в x_0 и $\{x_0\}$ пренебрежимо. Кроме того, тонкое замыкание любого множества e есть объединение B_e и множества пренебре-

---

[1]) В классическом пространстве Грина и в достаточно богатых аксиоматических теориях полярные множества характеризуются тем, что они разрежены в любой точке (см. следующее ниже общее определение). Аналогичное понятие, связанное со слабой разреженностью, как раз и есть понятие полуполярного множества.

жимых точек из е, являющихся тонко изолированными точками е[1]).

Предположения, фигурирующие в предыдущем замечании, и последнее предложение выполняются в классической теории, к изучению которой мы вскоре приступим.

З а м е ч а н и е. Завершая наше общее изучение тонкой топологии, упомянем, что более глубокий анализ приводит к рассмотрению таких понятий, как связность и локальная связность, свойство Линделёфа, нормальность, паракомпактность, счетность полуполярных множеств при различных предположениях (классический случай, различные аксиоматики). Отошлем читателя к работам Дуба [8], Фугледе [4—6], Берга, а также П. Мейера [2] (теоретико-вероятностный аспект).

Глава VI

ПОНЯТИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА[2])

1. Прежде чем применять развитую выше общую теорию к классической теории потенциала, напомним некоторые понятия (см., например, Брело [25]). Мы

---

[1]) В аналогичных ситуациях некоторые авторы предпочитают исключать возможность существования непренебрежимых точек (т. е. неполярных точек, в случае когда Ф C-замкнуто), поскольку в этом случае база B_e становится тонко совершенной (т. е. множеством без тонко изолированных точек в B_e). Это упрощает топологический язык.

Однако в классической теории потенциала естественно присоединять точку ∞ к $\mathbb{R}^n$, для того чтобы устранить различие между внешней и внутренней задачами Дирихле. В случае $n \geqslant 3$ эта точка будет неполярной для содержащих ее гриновых областей. В $\mathbb{R}^1$ все точки неполярны, а в рамках аксиоматической теории гармонических функций легко (используя $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^3$) построить пространства, имеющие иесчетное множество как полярных, так и неполярных точек, а также базы B_e, которые будут тонко замкнуты, но не тонко совершенны (см. гл. VI).

[2]) Некоторые вопросы здесь можно было бы, вероятно, изложить и лучшим способом, по образцу аксиоматической теории гармонических функций. Наша цель — лишь напомнить

будем рассматривать так называемые $\mathscr{E}$-пространства и пространства Грина, но для наглядности их можно почти всегда представлять себе как ограниченные области в $\mathbb{R}^n$.

Гармонические функции. Конечная вещественная непрерывная функция u на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ называется *гармонической*, если для любого открытого шара $B_{x_0}^r$ (с центром в x_0 радиуса r), замыкание которого содержится в Ω, $u(x_0)$ равно среднему значению u на $\partial B_{x_0}^r$, т. е.

$$u(x_0) = \int u \, d\sigma_{x_0}^r,$$

где $\sigma_{x_0}^r$ — единичная положительная масса, равномерно распределенная на $\partial B_{x_0}^r$ (т. е. инвариантная относительно вращений, или, иначе, пропорциональная площади). Отсюда вытекают такие факты:

a) Невозможность для гармонической функции иметь максимум или минимум в какой-либо точке без обращения в константу в некоторой окрестности этой точки.

b) Если функция u гармонична (в некоторой области) и $u \geqslant 0$, то либо $u > 0$ всюду, либо $u = 0$ всюду.

c) Пусть $\overline{\mathbb{R}}^n$ — компактификация Александрова пространства $\mathbb{R}^n$ (т. е. $\mathbb{R}^n$ с присоединенной точкой $A = \infty$). Если u — гармоническая функция в $\omega \subset \mathbb{R}^n$ и $\liminf u \geqslant 0$ в любой граничной точке, то $u \geqslant 0$ в ω.

Интеграл Пуассона для шара $B_{y_0}^R$ определяется формулой

$$I_f^{B_{y_0}^R}(y) = \int R^{n-2} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|x - y|^n} f(x) \, d\sigma_{y_0}^R(x); \qquad (1)$$

здесь функция f предполагается суммируемой по мере $d\sigma_{y_0}^R$. Для произвольной вещественной функции f

---

и дополнить классические результаты, чтобы сделать изложение замкнутым в себе. [Большинство этих результатов читатель может найти в книге Брело [25]. См. также Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, „Наука“, М., 1966. — *Перев.*]

очевидным образом определяются интегралы $\overline{I}_f$ и $\underline{I}_f$. Они либо равны $+\infty$ или $-\infty$, либо являются гармоническими функциями в $B_{y_0}^R$.

Задача Дирихле для данного открытого множества ω состоит в отыскании гармонической в ω функции, стремящейся в каждой граничной (в $\overline{\mathbb{R}}^n$) точке к заданным на $\partial\omega$ граничным значениям. Для заданной вещественной граничной функции f не может быть более одного решения; в случае шара $B_{y_0}^R$ и непрерывной конечной функции f решение существует.

В качестве основных следствий свойств интеграла Пуассона I_f отметим следующие:

α) *Локальный критерий гармоничности.* Функция u гармонична тогда и только тогда, когда она конечна, непрерывна и для каждой точки y_0 существует такое $\varepsilon > 0$, что при $r < \varepsilon$ имеем $u(y_0) = \int u \, d\sigma_{y_0}^r$.

β) *Свойство сходимости.* Для любого направленного по возрастанию семейства $\{u_i\}$ функций, гармонических в области ω, $\sup u_i$ есть либо $+\infty$, либо гармоническая функция.

γ) Положительные гармонические функции в области ω, равные 1 в некоторой точке $x_0 \in \omega$, равностепенно непрерывны в точке x_0, а также в любой другой точке. Поэтому рассматриваемое множество функций компактно в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах области ω.

2. Гипергармонические и супергармонические функции. В соответствии со знаменитой теорией Ф. Рисса мы будем называть функцию u *гипергармонической* в открытом множестве $\omega \subset \mathbb{R}^n$, если

a) $u > -\infty$,

b) u полунепрерывна снизу,

c) $u \geqslant I_u^{B_{y_0}^R}$ в любом шаре $B_{y_0}^R \subset \overline{B}_{y_0}^R \subset \omega$, или, что равносильно, $u(y_0) \geqslant \int u \, d\sigma_{y_0}^r$ для любой точки $y_0 \in \omega$ и достаточно малых r.

Справедливы те же утверждения, аналогичные утверждениям a) — c) п. 1 (правда, лишь для минимума в утверждении a)), а также факт сохранения гипергармоничности в открытом множестве ω при предельном переходе по возрастающей последовательности или направленному по возрастанию семейству функций и при замене u внутри шара $B_{y_0}^R$ $(\overline{B}_{y_0}^R \subset \omega)$ на $\overline{I}_u^{B_{y_0}^R}$.

Будем говорить, что u — *гипогармоническая* функция, если функция $-u$ — гипергармоническая.

В области ω гипер-(соотв. гипо-)гармоническая функция u либо всюду равна $+\infty$ (соотв. $-\infty$), либо конечна на плотном множестве и локально суммируема по мере Лебега. В последнем случае функция называется *супергармонической* (соотв. *субгармонической*). Пользуясь интегралом Пуассона, можно для заданной супергармонической функции u построить возрастающую последовательность конечных непрерывных супергармонических функций, сходящуюся к u.

Обозначения:

$$h(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{r^{n-2}} & (n \geqslant 3), \\ \log \dfrac{1}{r} & (n = 2). \end{cases} \tag{2}$$

Через h_{x_0} обозначается функция $x \mapsto h(|x - x_0|)$.

Примеры. a) Если μ — положительная мера Радона с компактным носителем, то

$$U^\mu(x) = \int h(|x-y|)\, d\mu(y) \tag{3}$$

есть супергармоническая функция, гармоническая вне носителя меры μ.

b) Если функции u, v гармоничны в открытом множестве ω, то функция $|u + iv|$ субгармонична. В случае $\mathbb{R}^2$, если функция f голоморфна в ω, то функция $|f|$ субгармонична, а $\log|f|$ есть гипогармоническая функция, субгармоническая во всякой области, где $f \not\equiv 0$.

3. Понятия, связанные с точкой A. (См. Брело [6].) Пусть открытое множество $\omega \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ содержит точку Александрова A. Функция u называется *гармонической в* ω, если она конечна, непрерывна, гармонична вне A и равна в A $\int u\, d\sigma_{y_0}^r$ для любого шара $B_{y_0}^r$, такого, что $\complement B_{y_0}^r \subset \omega$. Вещественная функция называется *гипергармонической в* ω, если она $> -\infty$, полунепрерывна снизу, гипергармоническая вне A и для указанных выше шаров $u(A) \geqslant \int u\, d\sigma_{y_0}^r$.

Для внешности (в $\overline{\mathbb{R}}^n$) шара $B_{y_0}^r$, которую мы обозначим через $B_{y_0}'^r$ (эта внешность содержит A), положим

$$I_f^{B_{y_0}'^r}(y) = \int R^{n-1}\left[\frac{|y-y_0|^2 - R^2}{|x-y|^n} - \frac{1}{|y-y_0|^{n-2}} + \frac{1}{R^{n-2}}\right] f(x)\, d\sigma_{y_0}^R(x) \qquad (4)$$

(в случае $n=2$ эта формула упрощается). Эта величина играет роль, подобную I_f (в том, что касается проблемы Дирихле, определения гипергармонических функций, замены в $B_{y_0}'^r$ гипергармонической функции u на $I_u^{B_{y_0}'^r}$). Вся предыдущая теория легко обобщается на этот случай.

4. $\mathscr{E}$-пространства. (См. Брело и Шоке [1].) *$\mathscr{E}$-пространством* называется связное отделимое пространство, обладающее следующим свойством. Для каждой точки x существуют открытая окрестность V_x и гомеоморфное отображение $y \mapsto \mathfrak{m}_x(y)$ этой окрестности V_x на открытое множество в $\overline{\mathbb{R}}^n$, удовлетворяющее следующему условию: для любых двух точек x_1, x_2 соответствие между точками $z_1 \in \mathfrak{m}_{x_1}(V_{x_1} \cap V_{x_2})$ и $z_2 \in \mathfrak{m}_{x_2}(V_{x_1} \cap V_{x_2})$, определяемое равенством $\mathfrak{m}_{x_1}^{-1}(z_1) = \mathfrak{m}_{x_2}^{-1}(z_2)$, или, что то же самое, соответствие при отображении $\mathfrak{m}_{x_2} \circ \mathfrak{m}_{x_1}^{-1}$, является изометрией (при этом точки, соответствующие точке A, называются точками на бесконечности), либо, в случае $n=2$, конформным отображением (первого или второго рода).

Такое пространство локально связно, локально компактно и метризуемо. Всякое его связное подпространство есть также $\mathscr{E}$-пространство. Точки на бесконечности образуют изолированное множество.

Примером $\mathscr{E}$-пространства может служить любая область в $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Определения гармонической, гипергармонической, супергармонической функций являются локальными и сводятся к соответствующему свойству на образе V'_x. Свойства a) — c) п. 1 (в свойстве c) надо рассматривать компактификацию Александрова пространства $\mathscr{E}$) остаются в силе. Будем называть *абстрактным потенциалом* (или, коротко, *потенциалом*) на $\mathscr{E}$-пространстве или на открытом его подмножестве любую неотрицательную супергармоническую функцию, у которой наибольшая гармоническая миноранта (она всегда существует) равна нулю. Нижняя и верхняя огибающие (inf и sup) двух потенциалов — тоже потенциалы [1]). Если v — потенциал (в некотором пространстве Ω), гармонический в ω, а w — гипергармоническая неотрицательная в ω функция, причем $\liminf (w-v) \geqslant 0$ в каждой граничной точке ω, то $w-v \geqslant 0$ в ω.

В самом деле, функция, равная $\inf[(w-v), 0]$ на ω и продолженная нулем, будет гипергармонической в Ω; эта функция $\geqslant -v$ и поэтому мажорирует наименьшую гармоническую мажоранту для $-v$, т. е. нуль. Взяв в качестве w постоянную, мы получим для конечных непрерывных потенциалов v *принцип Мариа — Фростмана*, а именно равенство $\sup\limits_{\Omega} v = \sup\limits_{S} v$ (где S — носитель функции v, т. е. дополнение к наибольшему открытому множеству, в котором v гармонична). Этот результат справедлив

---

[1]) Если P_1, P_2 — два потенциала и h — наибольшая гармоническая миноранта для P_1+P_2, то $h \leqslant P_1 + P_2 \Rightarrow h - P_1 \leqslant P_2 \Rightarrow h - P_1 \leqslant 0$ (так как функция $h - P_1$ субгармонична, а P_2 — потенциал) $\Rightarrow h \leqslant P_1 \Rightarrow h \leqslant 0 \Rightarrow h = 0$.

для любого потенциала v, что может быть доказано с помощью аппроксимаций (см. также теорему VIII. 4).

Полярные множества. Выберем в $\mathscr{E}$-пространстве Ω в качестве функций из Φ (см. гл. I) неотрицательные супергармонические функции и функцию $+\infty$. Тот же выбор используем для любого связного подпространства в Ω. Отметим счетную аддитивность класса Φ. Подмножество в области ω будет называться *полярным в* ω (в соответствии с терминологией гл. I), если в ω существует положительная[1]) супергармоническая функция, равная $+\infty$ на e (а может быть, и в других точках). Эту функцию можно построить так, чтобы она была конечной в заданной точке $x \notin e$. Подмножество открытого множества будем называть *полярным*, если оно является таковым в каждой компоненте связности. Отсюда вытекает, что оно является строго полярным относительно конуса неотрицательных гипергармонических функций на данном открытом множестве. Множество e называется *локально полярным* на открытом множестве ω, если для всякого $x \in \omega$ существует открытая окрестность ω_0 точки x, такая, что $e \cap \omega_0$ полярно в ω (эквивалентное определение получим, рассматривая только окрестности точек из e)[2]). Будем говорить *квазивсюду*, имея в виду „за исключением некоторого локально полярного множества". Точка x (мы отождествляем ее с множеством $\{x\}$) не будет локально полярной в том и только в том случае, когда $n \geqslant 3$ и x есть точка на бесконечности. Если множество e локально полярно и замкнуто в ω, то любая супергармоническая в $\omega \setminus e$ функция, ло-

---

[1]) Без требования положительности мы получили бы понятие, эквивалентное локальному определению в пространстве Грина (см. ниже); однако в общей аксиоматической теории, когда нет положительных потенциалов, это было бы уже не так (см. статью Анандама, в *Ann. Inst. Fourier*, 22 (1972), № 4).

[2]) Здесь нужно рассматривать окрестности в $\overline{\mathbb{R}^n}$, включая A наряду с другими точками.

кально ограниченная снизу, может быть продолжена, и притом единственным образом, до супергармонической функции в ω. Отметим также, что если ω связно, то $\omega \setminus \{e\}$ также связно.

5. Пространство Грина и функции Грина. $\mathscr{E}$-пространство Ω называется *пространством Грина*, если на Ω существует положительный потенциал или, что равносильно, положительная супергармоническая функция, отличная от константы. Область ω в пространстве Грина является снова пространством Грина; область ω в $\mathscr{E}$-пространстве, не являющемся пространством Грина, будет пространством Грина тогда и только тогда, когда множество $\Omega \setminus \omega$ не локально полярно. *В пространстве Грина всякое локально полярное множество полярно* и даже строго полярно или, что эквивалентно, пренебрежимо. В пространстве Грина все потенциалы, гармонические вне данной точки x_0, пропорциональны. Сейчас мы выделим один из этих потенциалов и назовем его *функцией Грина* $G_{x_0}^{\Omega}$ или G_{x_0}. Выделение осуществляется с помощью следующего условия: вблизи x_0 этот потенциал является такой функцией $f(x)$, что функция $f(\mathfrak{m}_{x_0}^{-1}(x'))$, где $x' = \mathfrak{m}_{x_0}(x)$, с точностью до гармонической функции равна $h(|x' - x_0'|)$, если $x_0' \neq A$ (где A — это точка Александрова пространства $\mathbb{R}^n$), и равна $h(|x'|)$, если $x_0' = A$.

Заметим, что если точка x не полярна, то функция $y \longmapsto G_x(y)$ ограничена и непрерывна. Напомним важное свойство симметрии: $G_x(y) = G_y(x)$. Отметим, что часто используется также обозначение $G(x, y)$.

Примеры. Пространства $\mathbb{R}^n$, $\overline{\mathbb{R}}^n$ римановы поверхности являются $\mathscr{E}$-пространствами.

$\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ и гиперболические римановы поверхности являются пространствами Грина.

$\mathbb{R}^2$ и параболические римановы поверхности не являются пространствами Грина.

В $\overline{\mathbb{R}}^n$ ($n \geqslant 2$) множество $\complement \overline{B}_0^R$ (содержащее A) является пространством Грина и

$$G_A(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{R^{n-2}} - \dfrac{1}{|x|^{n-2}} & \text{при} \quad n \geqslant 3, \\ \log \dfrac{|x|}{R} & \text{при} \quad n = 2. \end{cases}$$

Рассмотрим открытое подмножество Ω_0 $\mathscr{E}$-пространства Ω. Либо все компоненты Ω_0 гриновы (т. е. являются пространствами Грина) либо Ω не гриново. В первом случае мы будем называть множество Ω_0 *гриновым* и определим функцию Грина $G_x^{\Omega_0}$ как функцию, равную G_x^{ω} на содержащей x компоненте ω множества Ω_0 и нулю в остальных точках Ω_0. Симметрия по-прежнему имеет место.

Замечание. В пространстве Грина функция G_{x_0} имеет глобальную точку пика в x_0 (см. гл. I, п. 1).

В самом деле, $G_{x_0}(x) \leqslant G_{x_0}(x_0)$ (принцип Мариа — Фростмана, п. 4). Равенство в точке $x \neq x_0$ невозможно (если бы $G_{x_0}(x_0)$ было конечно, то G_{x_0} была бы константой). Рассмотрим заданную окрестность δ_0 точки x_0 и другую окрестность δ, содержащуюся в V_{x_0} (см. п. 4), образ которой есть шар $B_{y_0}^r$ или $B_{y_0}'^r$. После замены G_{x_0} в δ интегралом Пуассона мы получим супергармоническую функцию; она мажорируется своим супремумом на $\partial\delta$, который $< G_{x_0}(x_0)$. Следовательно, $\sup\limits_{\complement\delta} G_{x_0} < G_{x_0}(x_0)$.

6. Основные общие результаты и постановки задач. α) *Большая теорема сходимости* (Брело — Картан) [1]. Рассмотрим на открытом подмножестве Ω $\mathscr{E}$-пространства направленное по убыванию семейство супергармонических функций, локально равномерно ограниченное снизу. Тогда $\widehat{\inf u_i}$ есть супергармоническая функция, квазивсюду равная $\inf u_i$ (локальное свойство). Этот результат точнее теоремы V.7.

---

[1]) См. Брело [1], Картан [1], Брело [6].

β) *Аппроксимационная лемма.* В пространстве Грина Ω всякая конечная непрерывная на компактном множестве K функция может быть с точностью до любого $\varepsilon > 0$ аппроксимирована разностью двух конечных непрерывных неотрицательных супергармонических функций или даже непрерывных потенциалов.

В самом деле, конечные непрерывные супергармонические функции $u \geqslant 0$ разделяют точки Ω, что можно установить с помощью G_{x_0}; функция $|u_1 - u_2|$ и константы являются разностями таких u. Поэтому первый результат получается из теоремы Стона. Что касается потенциалов, то можно образовать конечный непрерывный потенциал $V > 0$, а далее оперировать с разностями конечных непрерывных неотрицательных потенциалов, поделенными на V.

γ) *Задача Дирихле* (Перрон — Винер — Брело). Рассмотрим сначала в $\mathscr{E}$-пространстве относительно компактное открытое множество Ω, для которого $C\Omega$ не локально полярно, и вещественную функцию f на $\partial\Omega$. Гипергармонические функции u в Ω, $\liminf$ которых $\geqslant f(x)$ во всякой граничной точке x, имеют нижнюю огибающую $\overline{H}_f^\Omega$ (или, проще, $\overline{H}_f$), которая в каждой компоненте либо равна $+\infty$, либо $-\infty$, либо является гармонической функцией. Положим $\underline{H}_f = -\overline{H}_{(-f)}$. Имеем $\underline{H}_f \leqslant \overline{H}^f$. В случае когда функция $\underline{H}_f$ равна $\overline{H}_f$ и всюду конечна, функция f называется *разрешимой*, а общее значение огибающих называется *обобщенным решением* и обозначается через H_f. Если открытое множество $\omega \subset \Omega$, а F есть функция $\overline{H}_f^\Omega$, продолженная с помощью функции f, то $\overline{H}_F^\omega = \overline{H}_f^\Omega$ в ω.

Если функция f конечна и непрерывна, то она разрешима (Винер) (при доказательстве используется аппроксимационная лемма) и

$$H_f^\Omega(x) = \int f(y)\, d\rho_x^\Omega(y), \tag{5}$$

где $d\rho_x^\Omega$ — некоторая положительная единичная мера на $\partial\Omega$ (гармоническая мера в x). Вообще же $\overline{H}_f^\Omega =$

$=\overline{\int} f\,d\rho_x^\Omega$, и f разрешима в том и только в том случае, когда она $d\rho_x^\Omega$-суммируема для всех точек x или хотя бы для одной точки в каждой компоненте Ω (теорема о разрешимости из Брело [3]).

Замечание. Если v супергармонична и имеет гармоническую миноранту, то наибольшую миноранту можно получить как предел

$$H_v^{\Omega_n} \quad (\overline{\Omega}_n \subset \Omega,\ \Omega_n \uparrow,\ \bigcup \Omega_n = \Omega).$$

Равенство нулю этого предела характеризует потенциалы.

В качестве следствия аддитивности отображения $f \mapsto H_f$ для разрешимых функций f получаем аддитивность наибольшей гармонической миноранты для функций v (супергармонических $\geqslant 0$). Это же можно получить непосредственно, используя аддитивность потенциалов (см. подстрочное примечание на стр. 53).

Регулярные граничные точки. Граничная точка X называется *регулярной*, если $H_f \to f(X)$ при $x \to X$ для всякой конечной непрерывной функции f. Необходимым и достаточным условием для этого является существование в $\Omega \cap \delta$, где δ — некоторая окрестность точки X, положительной супергармонической функции, стремящейся к нулю в X (локальный критерий), или, в случае когда Ω связно, условие $G_x(y) \to 0$, $y \to X$, где x — фиксированная точка из Ω (критерий Булигана).

Заметим, что точка $X \in \partial\Omega$ *иррегулярна* (т. е. не регулярна) в том и только в том случае, когда она иррегулярна для некоторой компоненты Ω. Далее, для регулярной точки X и для ограниченной сверху функции f имеем $\limsup\limits_{\substack{x \in \Omega \\ x \to X}} \overline{H}_f(x) \leqslant \limsup\limits_{\substack{y \in \partial\omega \\ y \to X}} f(y)$.

Пример. Точка X будет регулярной, если в V_X существует конус (с вершиной X' не на бесконечности), непустая внутренность которого вблизи X' лежит вне образа $V_X \cap \Omega$. Это дает возможность построить содержащее заданный компакт K открытое множество Ω' ($\overline{\Omega}' \subset \Omega$), у которого все граничные точки регулярны.

Точка на бесконечности, если она лежит на $\partial\Omega$, всегда регулярна при $n \geqslant 3$.

Теорема сходимости позволяет показать, что множество иррегулярных точек области (и, значит, любого открытого подмножества в Ω) локально полярно (Келлог — Эванс). Рассмотрим последовательность множеств $\Omega_n \uparrow$, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$, $\bigcup \Omega_n = \Omega$, с регулярными граничными точками. Функция $G_{x_0}^{\Omega_n}$, продолженная нулем, субгармонична вне x_0. Предельная функция $G_{x_0}^{\Omega_n}$, продолженная нулем и затем регуляризованная с помощью $\limsup$, будет субгармонической (вне x_0) и будет на $\partial\Omega$ отличаться от нуля на локально полярном множестве, которое совпадает с множеством иррегулярных точек.

Обобщение. Рассмотрим $\mathscr{E}$-пространство Ω_0 и обозначим через Ω_0' само пространство Ω_0, если оно компактно, или его компактификацию Александрова (с помощью точки A) в противном случае. Рассмотрим в Ω_0 гриново открытое множество Ω. Можно сформулировать аналогичную задачу Дирихле для Ω с границей $\partial\Omega$ в Ω_0'. При этом сохраняются определение огибающих и теоремы о разрешимости. Для функции f, заданной на некомпактном Ω_0, будем обозначать f_* ее продолжение нулем в точке A. Тогда получают смысл обозначения $H_{f_*}^{\Omega_0}$. Сохраняют силу замечание об аддитивности наибольшей гармонической миноранты, определение и свойства регулярности точки $X \in \partial\Omega$, $X \neq A$; Ω называется *регулярным*, если $A \notin \partial\Omega$ и все граничные точки регулярны. По-прежнему верен тот факт, что иррегулярные точки, отличные от A, образуют локально полярное множество.

б) *Задача Дирихле для компактных множеств* (Келдыш — Лаврентьев — Брело). Пусть даны компактное множество K в пространстве Грина Ω и конечная непрерывная функция f на ∂K. Супергармонические в некоторой открытой окрестности множества K функции v, удовлетворяющие условию

$\liminf\limits_{x \in CK,\, x \to X} v(x) \geqslant f(X)$ $(X \in \partial K)$, имеют на K нижнюю огибающую $\overline{K}_f$. Аналогично определяется $\underline{K}_f$ с помощью субгармонических функций. Обе эти огибающие равны пределу K_f функций H_F^ω по фильтру окрестностей ω компакта K, где F — любое непрерывное продолжение функции f. Точка $X \in \partial K$ называется *устойчивой*, если $K_f(X) = f(X)$, $\forall f$. Устойчивость всех точек $X \in \partial K$ эквивалентна возможности равномерной на ∂K аппроксимации любой из рассматривавшихся функций f с помощью функций, гармонических в окрестности K. Более подробно см. об этом Брело [7].

7. Представление Рисса. В пространстве Грина Ω (или в гриновом открытом подмножестве $\mathscr{E}$-пространства) для любой неотрицательной меры μ на Ω функция $\int G^\Omega(x, y)\, d\mu(y)$ гипергармонична; в каждой компоненте она либо равна $+\infty$, либо является абстрактным потенциалом (п. 4). Обратно, абстрактный потенциал в Ω допускает представление $\int G^\Omega(x, y) \times$ $\times\, d\mu(y)$ (называемое часто *G^Ω-потенциалом* меры μ) с единственной неотрицательной [1]) мерой μ.

Супергармоническая функция u в Ω, имеющая гармоническую миноранту, допускает представление

$$u(x) = \int G^\Omega(x, y)\, d\mu(y) + u^*(x), \tag{6}$$

где u^* — наибольшая гармоническая миноранта в Ω, а μ — единственным образом определенная неотрицательная мера (ассоциированная мера); определение меры μ имеет локальный характер в том смысле, что ее сужение на любое $\omega \subset \Omega$ является ассоциированной мерой для ω.

[1]) Мы не будем без специальных оговорок пользоваться термином „потенцнал“ в случае незнакоопределенной меры, т. е. для разности двух неотрицательных потенциалов.

8. Порядок в классе супергармонических функций. Мы вводим *специальный порядок* следующим образом:

$$u_1 \succ u_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2 + (\text{супергармоническая функция} \geqslant 0).$$

Если

$$u_1 = (\text{потенциал меры } \mu_1) + (\text{гармоническая функция } h_1),$$
$$u_2 = (\text{потенциал меры } \mu_2) + (\text{гармоническая функция } h_2),$$

то условие $u_1 \succ u_2$ эквивалентно условиям $h_1 \geqslant h_2$ и $\mu_1 \succ \mu_2$ (последнее означает, что $\mu_1 - \mu_2$ есть положительная мера).

Это очевидно для потенциалов и легко доказывается в общем случае. Множество всех неотрицательных супергармонических функций образует полную решетку относительно специального порядка. В случае потенциалов из более слабого условия $u_1 \geqslant u_2$ следует неравенство $\mu_1(\Omega) \geqslant \mu_2(\Omega)$. Это можно показать, рассмотрев открытое множество $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$ и функцию $R_1^{\Omega'}$, которая является потенциалом U^ν меры ν. При подходящем выборе Ω' интеграл $\int U^\nu \, d\mu_1$ будет как угодно близок к величине $\mu_1(\Omega)$, конечной или нет, и

$$\int U^\nu d\mu_1 = \int U^{\mu_1} d\nu \leqslant \int U^{\mu_2} d\nu = \int U^\nu d\mu_2 \leqslant \mu_2(\Omega).$$

9. Различные дополнения для случая пространства Грина. α) На компактном полярном множестве e существует мера $\nu \geqslant 0$, потенциал которой равен $+\infty$ на e и конечен на Ce (Эванс). Имеется обобщение (Дени [2] и Шоке [3]) на случай множеств типа G_δ.

β) Если супергармоническая функция u (с ассоциированной мерой μ) конечна на полярном множестве e, то внешняя μ-мера e равна нулю. В самом деле, e содержится в борелевском полярном множестве, а также в борелевском множестве, на котором u конечна. Поэтому мы можем считать, что e борелево и даже компактно, а u — потенциал меры μ. Рассмотрим множество $K_n = \{x \in e, u \leqslant n\}$ и соответствующую ему меру Эванса ν с потенциалом v; $\int v\,d\mu = \int u\,d\nu$ конечен, откуда $\mu(K_n) = 0$ и $\mu(e) = 0$.

γ) Нам потребуется существование конечного непрерывного потенциала $U > 0$, обладающего следующим свойством: для каждой точки $x_0 \in \Omega$ он допускает разложение $U = u_1 + u_2$, где u_1 — конечный непрерывный потенциал, а u_2 — конечная непрерывная функция $\geqslant 0$, для которой x_0 есть глобальная точка пика (см. гл. I, п. 1).

Покроем Ω счетным числом открытых множеств ω_i, таких, что $\bar{\omega}_i$ компактно, не содержит точек на бесконечности и содержится в некотором V_x, и открытых множеств ω^i, которые содержат точки на бесконечности. В каждом множестве ω_i рассмотрим конечный непрерывный потенциал V_i, порожденный мерой, равной нулю вне ω_i, а в ω_i являющейся прообразом меры Лебега на ω_i' (образе ω_i). Если $x_0 \in \omega_i$, то мы рассмотрим множество ω_i^1, образ которого есть шар с центром в x_0', и функцию V_i^*, полученную из V_i заменой ее на ω_i^1 фучкцией, образ которой есть интеграл Пуассона для шара. Тогда функция $V_i - V_i^*$ равна нулю вне ω_i^1, а в ω_i^1 является функцией, образ которой есть $G^{(\omega_i^1)}$-потенциал лебеговой меры. Заметим, что для $V_i - V_i^*$ точка x_0 является глобальной точкой пика.

Рассмотрим теперь ω^i и содержащуюся в нем точку на бесконечности X^i. В случае $n > 2$ мы полагаем V^i равной функции Грина с полюсом в X^i, а при $n=2$ определяем на некотором множестве $\omega_1^i \subset \omega^i$ меру так, чтобы ее G^Ω-потенциал был конечен и непрерывен, а $G^{\omega_1^i}$-потенциал, продолженный нулем, был также непрерывен и имел точку пика в X^i (это можно сделать, переходя к образам и используя инверсию) и в качестве V^i берем G^Ω-потенциал этой меры. Наконец, мы рассматриваем $\sum \lambda_i V_i + \sum \lambda^i V^i$, где положительные числа λ_i,

λ^i выбраны так, чтобы

$$\sum \lambda_i \sup V_i < +\infty, \quad \sum \lambda^i \sup V^i < +\infty.$$

Эта сумма и дает искомый потенциал U.

Полученный результат без труда обобщается на любое открытое подмножество в Ω.

δ) *Уточнение аппроксимационной леммы п.* 6, β). Если функция f конечна, непрерывна и неотрицательна на Ω и равна нулю вне компактного множества $K \subset \Omega$, а $K_1 \subset \Omega$—такое компактное множество, что $K \subset \overset{\circ}{K}_1 \subset K_1$, то существуют конечные непрерывные G^Ω-потенциалы v_1, v_2, такие, что $v_1 - v_2 \geqslant 0$, $v_1 - v_2 = 0$ на $\complement K_1$ и $|v_1 - v_2 - f| < \varepsilon$ на K.

Действительно, рассмотрим открытое множество Ω_1 и компакт K_2, такие, что $\overset{\circ}{K}_1 \supset \overline{\Omega}_1 \supset \Omega_1 \supset K_2 \supset \overset{\circ}{K}_2 \supset K$, причем граничные точки $\Omega_1 \setminus K_2$ регулярны. Применяя лемму п. 6, β), получим G^{Ω_1}-потенциалы u_1, u_2, такие, что $|u_1 - u_2 - f| < \varepsilon$ на K. Рассмотрим функцию $|u_1 - u_2|^+$, которая также является разностью двух аналогичных потенциалов u_1', u_2', и заменим u_1', u_2' в $\Omega_1 \setminus K_2$ решениями задачи Дирихле с граничными значениями, равными нулю на $\partial\Omega_1$ и соответственно u_1', u_2' на ∂K_2. Продолжив эти функции нулем, мы получим конечные непрерывные всюду функции субгармонические вне K_2. Эти функции U_1, U_2 представляются в Ω локально, а следовательно, и глобально как разности конечных непрерывных G^Ω-потенциалов (мер, сосредоточенных на K_1) $w_1 - w_1'$ и $w_2 - w_2'$ (это представление справедливо с точностью до гармонических функций, которые в данном случае равны нулю). Легко видеть, что $w_1 + w_2'$ и $w_2 + w_1'$ и могут быть взяты в качестве v_1 и v_2.

10. Приведенные функции и выметание [1]). Возьмем снова в качестве Ω пространство Грина, а в качестве

---

[1]) Выметание здесь и далее строится для любого множества e по методу работы Брело [8] 1945 года (несколько усовершенствованному). Этот метод может быть обобщен и приспособлен к аксиоматическим теориям гармонических функций; при раз-

Φ — множество неотрицательных гипергармонических функций. Для любого множества $e \subset \Omega$ и любой функции $\varphi \geqslant 0$ выполнены следующие утверждения.

a) Функция $\widehat{R}^e_\varphi$ гипергармонична, а в случае когда она супергармонична, она гармонична вне $\bar{e}$. Если $\varphi > 0$, то условие $\widehat{R}^e_\varphi = 0$ в одной точке или всюду, или условие $R^e_\varphi = 0$ где-нибудь, или же условие $\widehat{R}^e_1 < 1$ всюду — все эти условия эквивалентны тому, что множество e полярно, а также тому, что оно пренебрежимо.

b) $\widehat{R}_\varphi(x) = \inf\limits_{\omega \in \mathfrak{F}} \overline{\int} R_\varphi \, d\rho^\omega_x$, где $\mathfrak{F}$ — семейство открытых окрестностей точки x.

c) $\widehat{R}^e_\varphi = R^e_\varphi$ на Ce и квазивсюду на e.

d) $\widehat{R}^e_\varphi$ есть наименьшая гипергармоническая функция, которая $\geqslant 0$ на Ω и $\geqslant \varphi$ квазивсюду на e (а потому не изменяется при изменении e на полярное множество). Заметим еще, что $\widehat{R}^e_{\widehat{R}^e_\varphi} = \widehat{R}^e_\varphi$.

e) Если $\varphi_n \uparrow \varphi$, то $\widehat{R}_{\varphi_n} \uparrow \widehat{R}_\varphi$; если $e_n \uparrow e$, то $\widehat{R}^{e_n}_\varphi \uparrow \widehat{R}^e_\varphi$.

вернутом изложении он базируется на большой теореме сходимости. Совершенно иной метод был указан несколько позже Картаном [2] (в явной форме для $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$); он основан иа использованни понятия энергии и теории гильбертовых пространств и положил начало обобщениям в иных направлениях. Что касаетси предшествующих работ Валле-Пуссена, Фростмаиа и других по теории выметания в основном для случая компактиых множеств, см. библиографию в Брело [14].

Упомянем еще о *выметании второго типа*, которое получаетси, если в d) (см. п. 10) заменить слова „квазивсюду на e" словами „за исключением множества, все замкнутые подмножества которого полярны". Соответствующие этому случаю рассуждения см. в статьях Брело [8] и Картан [2]. Они представляются нам не столь полезными и не будут здесь рассматриваться. Для функций R^e_W и $\widehat{R}^e_W$, где W — иеотрицательнаи супергармоническая функция, могут быть получены дальнейшие свойства и даны другие доказательства устанавливаемых здесь свойств (без использования задачи Дирихле и большой теоремы сходимости), которые сохраняют силу и в более общих аксиоматических теориях (см. Бобок, Константинеску и Корни [2]).

f) Если функция φ непрерывна, но не обязательно конечна, то $\hat{R}^e_\varphi = \inf\limits_\omega \hat{R}^\omega_\varphi$, где ω — открытое множество, содержащее e с точностью до полярного множества.

11. Свойства $\hat{R}^e_v$ для неотрицательной супергармонической функции v. Выметание. ***Обозначения и терминология.*** Функция $\hat{R}^e_v$ называется функцией, *выметенной* относительно v и e, и обозначается еще через $\mathscr{B}^e_v$. Если v есть G^Ω-потенциал меры μ, то $\mathscr{B}^e_v$ также есть G^Ω-потенциал некоторой меры, которую мы будем обозначать через b^e_μ и называть *выметенной мерой*. Функция G^Ω_x является потенциалом меры Дирака ε_x, и значит, $\mathscr{B}^e_{G_x}$ есть G^Ω-потенциал меры $b^e_{\varepsilon_x}$. Напомним некоторые

Свойства функции $\mathscr{B}^e_v$. a′) Для всякого открытого множества ω имеем $\mathscr{B}^{\complement\omega}_v = H^\omega_{v_*}$ на ω, где функция v_* равна v на Ω и нулю в точке Александрова пространства Ω.

b′) Рассмотрим открытое множество $\omega \subset \Omega$ и граничную точку x_0 (не являющуюся точкой Александрова A). Пусть σ — любая окрестность точки x_0, а v — конечный непрерывный положительный потенциал. Регулярность точки x_0 для ω эквивалентна равенству $\mathscr{B}^{\complement\omega\cap\sigma}_v(x_0) = v(x_0)$ или условию $R^{\complement\omega\cap\sigma}_v(x) \to v(x_0)$, $x \in \omega$, $x \to x_0$, которое должно выполняться либо

α) для всех σ и v,

либо

β) для одной компактной окрестности σ и всех v,

либо

γ) для одного потенциала v и всех σ.

В самом деле, в силу a′) регулярность влечет за собой α); из аппроксимационной леммы следует, что β) влечет $H^{\omega\setminus\sigma}_\varphi \to \varphi(x_0)$ в точке x_0 для любой конечной непрерывной функции φ при условии, что эта функция равна нулю в A, а значит, и без этого последнего условия, но это и означает регулярность. Наконец, γ) влечет α). Действительно, если это не так, то для некоторых σ и v' будем иметь $\mathscr{B}^{\complement\omega\cap\sigma}_{v'}(x_0) <$

$< v'(x_0)$. Выберем λ так, чтобы $\lambda v(x_0)$ было заключено строго между этими числами. Тогда в некоторой окрестности $\sigma_1 \subset \sigma$ будет $\lambda v < v'$ и

$$\mathscr{B}_{\lambda v}^{C\omega \cap \sigma_1}(x_0) \leqslant \mathscr{B}_{v'}^{C\omega \cap \sigma_1}(x_0) < \mathscr{B}_{v'}^{C\omega \cap \sigma}(x_0) < \lambda v(x_0).$$

Следовательно, $\mathscr{B}_{v}^{C\omega \cap \sigma_1}(x_0) < v(x_0)$, и получено противоречие.

b″) Для всякого компакта k и $x_0 \in \partial k$ имеем $k_v = R_v^{Ck}$ на k, и устойчивость точки x_0 эквивалентна условию

$$R_v^{Ck}(x_0) = v(x_0)$$

для всех конечных непрерывных потенциалов v.

c′) Отображение $v \longmapsto \mathscr{B}_v^e$ аддитивно.

Действительно, в силу a′) это верно для замкнутых e; согласно п. 10, e), это верно для открытых e; для любых e и непрерывных v это следует из f); наконец, мы получаем тот же результат для любых v и e, беря последовательность непрерывных $v_n \uparrow v$ и используя e). Отсюда следует аддитивность отображения $\mu \longmapsto b_\mu^e$.

d′) $$\mathscr{B}_{G_x}^e(y) = \mathscr{B}_{G_y}^e(x). \tag{7}$$

Ввиду e) и f) достаточно рассмотреть только случай, когда e замкнуто или даже компактно. Если x, y находятся в Ce, то искомый результат вытекает из того факта, что для любого потенциала $u \geqslant 0$, конечного и непрерывного на ∂e, наибольшая гармоническая миноранта на Ce равна R_u^e. В таком случае $G_x^\Omega = G_x^{Ce} + R_{G_x}^e$ на Ce, и остается воспользоваться симметрией функции Грина. Если x и y полярны (и находятся, быть может, в e), то мы сначала добавляем к Ce открытые окрестности точек x и y, а затем стягиваем их к этим точкам. Если x или y или обе эти точки не полярны и по крайней мере одна из них находится в e, то мы используем свойства функций G_x (конечной и непрерывной, если точка x не полярна) и регулярностью любой неполярной граничной точки. Если точки x и y принадлежат e, причем x не полярна, а y полярна, то мы можем снова добавить к $\mathsf{C}e$ окрестность точки y.

12. Свойства, относящиеся к выметенным мерам. e′) Для любой супергармонической функции $v \geqslant 0$ на Ω

$$\mathscr{B}_v^e(x) = \int v \, db^e_{\varepsilon_x}. \tag{8}$$

Поэтому для потенциала u меры μ

$$\mathscr{B}_u^e = \int \mathscr{B}^e_{G_x} \, d\mu. \tag{9}$$

Прежде всего, если функция $\varphi \geqslant 0$ конечна, непрерывна, имеет компактный носитель и представляется в виде разности $V_1 - V_2$ непрерывных потенциалов, то мы рассматриваем функцию $\mathscr{B}^e_{V_1}(x) - \mathscr{B}^e_{V_2}(x)$, не зависящую от выбора указанного представления (см. c′)) и линейную относительно φ. Согласно аппроксимационной лемме, существует единственная мера Радона $\mu_x \geqslant 0$ на Ω, не зависящая от φ, V_1, V_2 и такая, что

$$\mathscr{B}^e_{V_1}(x) - \mathscr{B}^e_{V_2}(x) = \int (V_1 - V_2) \, d\mu_x.$$

Если v — конечный, непрерывный потенциал, то мы полагаем $V_1 = v$, $V_2 = \mathscr{B}_v^{\mathsf{C}\Omega_n}$ (где $\Omega_n \uparrow$, множества Ω_n имеют только регулярные граничные точки, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ и $\bigcup \Omega_n = \Omega$), и так как V_2 стремится к нулю, то мы получаем $\mathscr{B}_v^e(x) = \int v \, d\mu_x$. Затем эта формула обобщается на случай любого потенциала и любой супергармонической неотрицательной функции (нужно использовать возрастающие последовательности подходящих функций).

Наконец, используя уже полученное, видим, что

$$\mathscr{B}^e_{G_x}(y) = \mathscr{B}^e_{G_y}(x) = \int G_y(z) \, d\mu_x(z),$$

откуда и следует, что $\mu_x = b^e_{\varepsilon_x}$.

Применение 1 (к гармонической мере). Из общей формулы следует, что для относительно компактного открытого множества ω

$$H_f^{\omega}(x) = \int f\, db_{\varepsilon_x}^{C\omega}.$$

Это вытекает из равенства $H_v^{\omega} = \mathscr{B}_v^{C\omega}$ для потенциалов и из аппроксимационной леммы.

Следовательно, *мера* $b_{\varepsilon_x}^{C\omega}$ *совпадает с гармонической мерой в* x *для* ω. Отсюда можно вывести, что для любого открытого ω мера $b_{\varepsilon_x}^{C\omega}$ есть сужение на $\partial\omega \cap \Omega$ гармонической меры в x_0 для ω [1]).

Применение 2. Рассмотрим меры μ, ν, соответствующие им потенциалы u, v и для некоторого множества e выметенные меры μ', ν' и их потенциалы u', v'. Тогда

$$\int u\, d\nu' = \int v'\, d\mu = \int u'\, d\nu = \int v\, d\mu'. \qquad (10)$$

Это следует из (7).

f') Мера b_{μ}^{e} есть интеграл семейства мер $b_{\varepsilon_x}^{e}$ по мере μ, т. е. для любой конечной непрерывной функции φ с компактным носителем интеграл $\int \varphi\, db_{\varepsilon_x}^{e}$ является $d\mu$-суммируемым и

$$\int \varphi\, db_{\mu}^{e} = \int \left(\int \varphi\, db_{\varepsilon_x}^{e} \right) d\mu(x). \qquad (11)$$

Более общо, мы покажем, что если функция ψ db_{μ}^{e}-суммируема, то интеграл $\int \psi\, db_{\varepsilon_x}^{e}$ имеет смысл $d\mu$-почти всюду и

$$\int \psi\, db_{\mu}^{e} = \int \left(\int \psi(y)\, db_{\varepsilon_x}^{e}(y) \right) d\mu(x). \qquad (12)$$

---

1) Исторически интегральное представление H_f^{ω} в $\mathbb{R}^3$ было получено (Валле-Пуссен [1]) при помощи меры, соответствующей другой процедуре выметания.

Отсюда следует, что для любого борелевского множества α

$$b^e_\mu(\alpha) = \int b^e_{\varepsilon_x}(\alpha)\, d\mu(x). \tag{13}$$

При доказательстве достаточно рассмотреть случай φ, $\psi \geqslant 0$. Когда ψ является потенциалом, результат верен. Далее, согласно аппроксимационной лемме (п. 9, б)), существует последовательность функций $\theta_n \geqslant 0$ с компактными носителями, которая равномерно сходится к φ, причем θ_n является разностью двух конечных непрерывных потенциалов с компактным носителем и мажорируется некоторой константой, а также функцией λG_{x_0}, суммируемой по мерам $d\mu$ и db^e_μ. Поэтому

$$\int \theta_n\, db^e_\mu \to \int \varphi\, db^e_\mu.$$

В силу (10) левая часть есть интеграл по мере $d\mu$ от функции $\int \theta_n\, db^e_{\varepsilon_x}$, который мажорируется

$$\int \lambda G_{x_0}\, db^e_{\varepsilon_x} \leqslant \lambda G_{x_0} \text{ и стремится к } \int \varphi\, db^e_{\varepsilon_x}.$$

Отсюда следует формула (11). В случае общей функции ψ введем последовательность $\psi_n \downarrow$ полунепрерывных снизу функций $\geqslant \psi$, а также последовательность $\psi'_n \uparrow$ полунепрерывных сверху функций $\geqslant 0$ и $\leqslant \psi$ так, чтобы интегралы $\int \psi_n\, db^e_\mu$ и $\int \psi'_n\, db^e_\mu$ стремились к $\int \psi\, db^e_\mu$. Тогда

$$\int \psi\, db^e_\mu = \int \left(\int \lim \psi_n\, db^e_{\varepsilon_x}\right) d\mu = \int \left(\int \lim \psi'_n\, db^e_{\varepsilon_x}\right) d\mu,$$

так что $\overline{\int} \psi\, db^e_{\varepsilon_x}$ и $\underline{\int} \psi\, db^e_{\varepsilon_x}$ равны $d\mu$-почти всюду, и мы получаем (12).

Замечание. Для потенциала u меры μ имеем $\mathscr{B}^e_u \leqslant u$, откуда $b^e_\mu(\Omega) \leqslant \mu(\Omega)$ (см. конец п. 8). Отметим, что это — следствие случая $\mu = \varepsilon_x$ (соответствующее свойство получается из формулы (8)) при $v = 1$,

Глава VII

КЛАССИЧЕСКАЯ ТОНКАЯ ТОПОЛОГИЯ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА

1. Будем исходить из пространства Грина Ω и конуса Φ неотрицательных гипергармонических функций. Отметим прежде всего, что топология $\mathcal{T}_1$ на Ω совпадает с $\mathcal{T}_0$, т. е. со слабейшей топологией, в которой функции из Φ полунепрерывны снизу. Это вытекает, например, из того факта, что любая точка $x_0 \in \Omega$ является глобальным пиком для G_{x_0} (см. гл. I, п. 1, и гл. VI, п. 5). Напомним, что классы полярных, строго полярных и пренебрежимых множеств совпадают и что такие множества разрежены в каждой точке.

Теорема VII. 1. *Разреженность множества e в точке $x_0 \notin e$ эквивалентна существованию такой супергармонической функции v в открытой окрестности ω_0 точки x_0, что*

$$v(x_0) < \liminf_{x \in e,\, x \to x_0} v(x).$$

Отсюда следует локальный характер разреженности.

Нужно лишь убедиться, что указанное условие влечет за собой разреженность относительно Ω и Φ. Мера, ассоциированная с v в окрестности точки x_0, имеет G-потенциал, удовлетворяющий тому же самому неравенству. Возможно также не пользоваться этой мерой, а построить неотрицательную супергармоническую функцию в Ω, которая вблизи x_0 с точностью до гармонической функции совпадает с v (см. аксиоматические теории).

Тонкая топология в $\mathcal{E}$-пространстве. Если в качестве определения разреженности принять свойство, указанное в предыдущей теореме, то дополнения к разреженным множествам будут удовлетворять аксиомам для окрестностей (как в любом гриновом подпространстве) и определят так называемую *тонкую топологию* данного пространства; она индуцирует в каждом подпространстве Грина его собственную тонкую топологию.

Замечание. Всякое множество e, разреженное в точке $x_0 \notin e$, содержится в открытом множестве $\delta \not\ni x_0$, также разреженном в x_0.

2. Вернемся к пространству Грина Ω и дадим применение результатов гл. I—V. Мы разовьем и дополним некоторые разделы классической теории потенциала, следуя Брело [8][1]).

Теорема VII.2. *Разреженность* (*множества* e *в* $x_0 \notin e$) *всегда строга* (*и эквивалентна сверхразреженности*, см. гл. I, п. 4, и гл. II, п. 3).

Доказательство. Если u — супергармоническая функция $\geqslant 0$, конечная в x_0, то

$$u(x) = \int\limits_{V \setminus \{x_0\}} G(x, y)\, d\mu(y) + \int\limits_{\complement V} G(x, y)\, d\mu(y) + \\ + \mu(\{x_0\})\, G_{x_0} + h(x),$$

где h — гармоническая функция, V — некоторая окрестность точки x_0, а μ — мера, ассоциированная с u. Второй интеграл и последующие члены конечны и непрерывны в x_0 ($\mu(\{x_0\})$ есть нуль, если множество $\{x_0\}$ полярно). Первый интеграл произвольно мал при подходящем выборе V. Теперь доказательство завершается применением теоремы II.8.

Упражнение. Доказать непосредственно, что разреженность влечет за собой сверхразреженность.

Теорема VII.3. *Неразреженность* (*множества* e *в* $x_0 \notin e$) *всегда строгая.*

Доказательство. Согласно замечанию, сделанному перед теоремой II.12, нам нужно показать, что $\sup\limits_{\delta} R_1^{e \setminus \delta}(x_0) = R_1^e(x_0)$ ($x_0 \notin e$), где δ — произвольная окрестность точки x_0. Достаточно рассмотреть убывающую последовательность δ_n ($\bigcap \delta_n = \{x_0\}$).

---

[1]) См. также Картан [1, 2].

Используя результаты гл. VI, п. 10, получаем

$$R_1^{e \setminus \delta_n}(x_0) = \widehat{R}_1^{e \setminus \delta_n}(x_0),$$

$$\widehat{R}_1^{e \setminus \delta_n} \uparrow \widehat{R}_1^e, \quad \widehat{R}_1^e(x_0) = R_1^e(x_0) \text{ (согласно c) и e));}$$

это дает нужное нам свойство.

Таким образом, применимы теоремы III. 1, 2, 3 о тонких пределах.

Теорема VII. 4. *В пространстве Ω нет сингулярных точек (т. е. $\Omega \setminus \{x\}$ всегда неразрежено в точке x). Разреженность e в x_0 эквивалентна тому, что $e \setminus \{x_0\}$ разрежено и $\{x_0\} \cap e$ полярно, а также эквивалентна слабой разреженности. Необходимым и достаточным условием разреженности e в x_0 является выполнение соотношения $\inf \widehat{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$ (или $= 0$, что равносильно), где σ — произвольная окрестность точки x_0. Таким образом,*

полуполярность $\Leftrightarrow$ полярность $\Leftrightarrow$ пренебрежимость.

Доказательство. Полунепрерывность снизу и неравенство со средним для супергармонических функций показывают, что $\Omega \setminus \{x_0\}$ неразрежено. Дальнейшие свойства являются следствиями результатов гл. V, п. 4.

Заметим, что полярные множества разрежены в любой точке (и не содержат неполярных точек). Разреженность множества e в x_0 сохраняется при выбрасывании из e или добавлении к e полярного множества.

Теорема VII. 5. *Пусть σ — окрестность точки x_0, а v — конечный непрерывный потенциал > 0 на Ω. Неразреженность множества e в x_0 эквивалентна тому, что равенство*

$$\widehat{R}_v^{e \cap \sigma}(x_0) = v(x_0),$$

выполняется в одной из следующих ситуаций:

α) *для всех σ и v,*

β) *для всех v и для какой-нибудь одной σ,*

γ) *для всех σ и для какого-нибудь одного v.*

Доказательство. Если $x_0 \notin e$, то $\widehat{R}_v^{e\cap\sigma}(x_0) = R_v^{e\cap\sigma}(x_0)$. Из предложений II.4 и II.5 вытекает эквивалентность неразреженности условию γ), а также необходимость условий α) и β). Далее, пусть выполнено β). Из разреженности $e \cap \sigma$ следовало бы, что для потенциала U (гл. VI, п. 9, γ)), согласно предложению II.6, $R_U^{e\cap\sigma}(x_0) < U(x_0)$. Значит, $e \cap \sigma$ и e неразрежены. Пусть $x_0 \in e$. Если точка x_0 не полярна, то имеют место неразреженность и одновременно α), если же x_0 полярна, то наше утверждение эквивалентно аналогичному утверждению для $e \setminus \{x_0\}$.

3. Теорема VII.6. *Существует конечный непрерывный потенциал $U > 0$, такой, что для любого множества e множество тех точек, где оно разрежено, совпадает с множеством $\{x, \widehat{R}_U^e(x) < U(x)\}$.*

Доказательство. Достаточно взять тот же самый потенциал U (гл. VI, п. 9). Предыдущая теорема показывает, что указанное неравенство влечет за собой разреженность, а как мы только что напоминали, из разреженности следует неравенство.

Теорема VII.7 (Брело [5,6]). *Множество тех точек из e, где e разрежено, есть полярное множество.*

Доказательство. Очевидно, что $R_U^e = U$ на e, а теорема сходимости показывает, что $\widehat{R}_U^e = R_U^e$ квазивсюду.

Следствие. Полярное множество e можно охарактеризовать, как множество, разреженное в любой точке, или как множество, разреженное в любой точке из e, или, наконец, как множество, образованное полярными тонко изолированными точками.

Упражнение. Доказать теорему VII.7 без привлечения U, используя счетный базис открытых множеств и критерий из теоремы VII.4.

База множества (множество тех точек, где e неразрежено, см. определение V.9). Это множество состоит из тонких предельных точек[1]) множества e и из неполярных точек множества e. Тонкое замыкание $\tilde{e}$ есть объединение базы B_e и (полярного) множества тех точек из e, где e разрежено, т. е. полярных тонко изолированных точек множества e (см. предложение V. 10).

Напомним, что функция $\widehat{R}_{\varphi}^{e}$ $(\varphi \in \Phi)$ не изменяется при замене e на $\tilde{e}$ или на множество e', отличающееся от e лишь на полярное множество. Теорема VII.6 позволяет получить дальнейшие результаты подобного типа. Пусть, например, тонко замкнутое множество α содержит e с точностью до полярного множества. Положим $e' = e \cap \alpha$ и допустим, что $\alpha \supset e'$. Тогда $\alpha \supset \tilde{e}' \supset B_{\tilde{e}'} = B_{e'} = B_e$.

Выделим следующее

Предложение VII. 8. *База B_e — это наименьшее тонко замкнутое множество, содержащее e с точностью до полярного множества. Далее, $B_{\tilde{e}} = B_{B_e} = B_e \subset \tilde{e}$ и B_e есть множество класса G_δ; очевидно, $B_e \subset \bar{e}$ (где $\bar{e}$ — замыкание множества e в исходной топологии).*

Предложение VII. 9. *Всякое B_e можно охарактеризовать как множество E, неразреженное в каждой точке из E и разреженное в каждой точке из $\complement E$.*

Такие множества также будем называть *базами*.

Заметим, что $\tilde{e}$ и B_e имеют одну и ту же тонкую внутренность.

Представляет интерес также понятие *ядра* K_e множества e, которое определяется как $\complement B_{\complement e}$. Это — наибольшее тонко открытое множество, содержащееся в e с точностью до полярного множества (оно совпадает с объединением тонкой внутренности множества e и полярного множества тех точек из $\complement e$, в которых $\complement e$ разрежено).

Напоминание: (тонкая внутренность множества e) $\subset$ $\subset K_e \subset$ (тонкая внутренность множества B_e или $\tilde{e}$);

---

[1]) Тонкая предельная точка множества e — это точка, каждая тонкая окрестность которой содержит точку из e, отличную от нее самой.

(тонкая граница множества $B_e) \subset$ (тонкая граница множества e).

4. Основные применения. Лемма VII. 10. *Пусть $\{e_i\}$ — семейство тонко замкнутых множеств. Тогда существует счетное подсемейство $\{e_{i_n}\}$, такое, что $B_{\cap e_{i_n}} = B_{\cap e_i}$.*

Доказательство. В самом деле, воспользовавшись функцией U из теоремы VII. 6, получим для любого e

$$B_e = \{x, \mathscr{B}_U^e = U\}.$$

Применяя топологическую лемму Шоке (см. Брело [25], гл. 1), видим, что для некоторого счетного подсемейства $\{e_{i_n}\}$

$$\mathscr{B}_U^{\cap e_{i_n}} \leqslant \mathscr{B}_U^{e_{i_n}}, \ \forall n.$$

Далее, имеем

$$\mathscr{B}_U^{\cap e_{i_n}} \leqslant \inf \mathscr{B}_U^{e_{i_n}}; \quad \mathscr{B}_U^{\cap e_{i_n}} \leqslant \widehat{\inf \mathscr{B}_U^{e_{i_n}}} = \inf \mathscr{B}_U^{e_i},$$

откуда $\mathscr{B}_U^{\cap e_{i_n}} \leqslant \mathscr{B}_U^{e_i}$, $\forall i$. Поэтому $B_{\cap e_{i_n}} \subset B_{e_i} \subset e_i$ (последнее множество тонко замкнуто) и, значит, $B_{\cap e_{i_n}} \subset \bigcap e_i$. Беря базу от обеих частей, получим $B_{\cap e_{i_n}} \subset B_{\cap e_i}$, откуда и следует идентичность обоих множеств.

Предложение VII. 10. *Пересечение (соотв. объединение) тонко замкнутых (соотв. тонко открытых) множеств с точностью до полярного множества совпадает с пересечением (объединением) некоторого счетного подсемейства данных множеств.*

Это — частный случай общих результатов Дуба [8].

Предложение VII. 11. *Для любого семейства тонко полунепрерывных сверху функций u_i существует счетное подсемейство u_{i_n}, такое, что $\inf u_{i_n} = \inf u_i$ квазивсюду.*

Доказательство. Для любого рационального r выберем последовательность u_{i_p} так, чтобы

$$\{\inf_p u_{i_p} \geqslant r\} = \{\inf_i u_i \geqslant r\}$$

с точностью до полярного множества. Объединение всех функций этих последовательностей для различных r дает семейство u_{i_n}, удовлетворяющее написанному равенству для всех рациональных r вне некоторого полярного множества α. Для любой точки x, в которой $\inf_i u_i < \inf_n u_{i_n}$, рассмотрим рациональное r, заключенное строго между этими числами, и найдем, что $x \in \alpha$.

Теорема VII. 12 (Гетур[1]). *Если мера* μ *не нагружает полярных множеств* (т. е. внешняя мера любого такого множества есть нуль), *то существует наименьший тонко замкнутый носитель* E *меры* μ, *являющийся базой.*

Доказательство. Всякое тонко замкнутое множество есть сумма базы и полярного множества и потому μ-измеримо. Пусть $\{e_i\}$ — множество тонко замкнутых носителей. Для некоторого счетного подсемейства $\{e_{i_n}\}$ имеем $B_{\cap e_i} = B_{\cap e_{i_n}}$. Так как $\complement(\bigcap e_{i_n}) = \bigcup \complement e_{i_n}$, то $\bigcap e_{i_n}$ есть тонко замкнутый носитель. Но $B_{\cap e_{i_n}}$ отличается от $\bigcap e_{i_n}$ только на полярное множество и поэтому тоже есть тонко замкнутый носитель. Далее, любой тонко замкнутый носитель e_i содержит $\bigcap e_i$ (тонко замкнутое), а значит $B_{\cap e_i}$ или $B_{\cap e_{i_n}}$. Таким образом, $B_{\cap e_i}$ есть наименьший тонко замкнутый носитель меры μ.

Применение к задаче Дирихле. Теорема VII. 13. *Для открытого множества* ω (*соотв. для компактного множества* K) (*в пространстве Грина* Ω) *точка* x_0 *из* $\partial\omega \cap \Omega$ (*соотв. из* ∂K) *будет иррегулярной*

[1]) См. Гетур и Шоке [7], Дуб [8], Брело [30].

(*соотв. неустойчивой*) *в том и только в том случае, когда* $C\omega$ (*соотв.* CK) *разрежено в* x_0[1]).

Доказательство. Регулярность и неразреженность множества $C\omega$ эквивалентны условию $\hat{R}_v^{C\omega\cap\sigma}(x_0) = v(x_0)$ для какого-нибудь одного σ и для любого конечного непрерывного потенциала v (гл. VI, п. 11, b′), и теорема VII. 5). Устойчивость и неразреженность множества CK эквивалентны условию $R_v^{CK}(x_0) = v(x_0)$ для любого v (гл. VI, п. 11, b″, и теорема VII. 5).

Далее мы получим другие критерии тождественности регулярности и неразреженности (гл. IX).

Глава VIII

ПРИМЕНЕНИЯ К ВЫМЕТАНИЮ, ВЕСАМ И ЕМКОСТЯМ

1. Мы по-прежнему рассматриваем пространство Грина. Обратимся снова к классической теории и прежде всего дополним теорию выметания, следуя в основном Брело [8].

Заметим, что для неотрицательной супергармонической функции u функция $\mathscr{B}_u^e$ равна u на B_e и не изменяется при замене e на $\tilde{e}$ или на B_e. Напомним еще, что $\mathscr{B}^e_{\mathscr{B}_u^e} = \mathscr{B}_u^e$.

Лемма VIII. 1. *Пусть мера* $\mu \geqslant 0$ *сосредоточена на* B_e (*т. е.* $\mu(CB_e) = 0$). *Тогда* $b_\mu^e = \mu$.

Доказательство. Из равенства $u(x) = \int G(x, y)\,d\mu(y)$ получаем (см. гл. VI, п. 12) $\mathscr{B}_u^e(x) = \int \mathscr{B}_{G_x}^e(y)\,d\mu(y)$. Но $\mathscr{B}_{G_x}^e = G_x$ на B_e и поэтому $\mathscr{B}_u^e = u$.

---

[1]) Этим общим критерием иррегулярности и неустойчивости и подсказано введение понятия разреженности (см. Брело [4]).

Лемма VIII.2. *Для любой меры* $\mu \geqslant 0$ *имеет место равенство* $b_\mu^e(\complement B_e) = 0$.

Доказательство. Это — следствие интегрируемости мер для частного случая меры Дирака (см. гл. VI, п. 12 f')). Рассмотрим такую меру ε_x и воспользуемся снова потенциалом U из теоремы VII.6. Получим $\mathscr{B}_U^e(x) = \int U\, db_{\varepsilon_x}^e$ и после итерации $\mathscr{B}_U^e(x) = \int \mathscr{B}_U^e\, db_{\varepsilon_x}^e$. Следовательно, множество, где $U > \mathscr{B}_U^e$, совпадающее с $\complement B_e$, имеет $b_{\varepsilon_x}^e$-меру нуль.

Ключевая теорема VIII.3 (Брело [8]). *Если* u *— потенциал, то мера, соответствующая* $\mathscr{B}_u^e$, *— это единственная мера* $\nu \geqslant 0$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

a) $\nu(\complement B_e) = 0$ (*т. е.* B_e *— носитель меры* ν),

b) *потенциал меры* ν *равен* u *на* B_e (*или, что эквивалентно, квазивсюду на* e).

Доказательство. Для меры b_μ^e, имеющей потенциал $\mathscr{B}_u^e$, эти свойства уже установлены (см. лемму VIII.2). Возьмем теперь любую меру ν с потенциалом v, равным u квазивсюду на e и, следовательно, равным u на B_e; согласно лемме VIII.1, $v = \mathscr{B}_v^e$. Следовательно, $v(x) = \int v\, db_{\varepsilon_x}^e = \int u\, db_{\varepsilon_x}^e$ (лемма VIII.2), т. е. $v = \mathscr{B}_u^e$.

Первые важные следствия. Докажем следующие три теоремы.

Теорема VIII.4 (принцип доминирования в сильной форме[1]). *Пусть* u *— потенциал меры* μ, *а* v *— неотрицательная супергармоническая функция, которая* $\geqslant u$ *квазивсюду на множестве* E, *причем мера* μ *сосредоточена на* B_E (*т. е.* $\mu(\complement B_E) = 0$). *Тогда* $v \geqslant u$ *всюду.*

Доказательство. Из леммы VIII.1 следует, что $\mathscr{B}_u^E = u$. Но $v \geqslant \mathscr{B}_u^E$, так что $v \geqslant u$.

[1]) Более сильной, чем аналогичный принцип у Картана [2].

Теорема VIII.5. *Пусть E — множество иррегулярных граничных точек открытого множества ω. Если мера μ не нагружает E и имеет потенциал u, то функция $\mathscr{B}_u^{C\omega}$ в ω является наибольшей гармонической минорантой u* [1]).

Доказательство. Если через v^* обозначить наибольшую гармоническую миноранту в ω функции v (супергармонической и неотрицательной), то, как мы знаем, $(v_1+v_2)^*=v_1^*+v_2^*$ (гл. VI, п. 6, γ)). Поэтому мы рассмотрим сужения μ_1, μ_2 меры μ на ω и на $C\omega$ с потенциалами u_1, u_2. Мы знаем, что на $\bar{\omega}$ равенство $\mathscr{B}_{u_2}^{C\omega}=u_2$ (это гармоническая функция в ω) имеет место в том и только в том случае, когда мера μ_2 нагружает только базу множества $C\omega$, т. е. не нагружает E. Поэтому достаточно будет показать, что $\mathscr{B}_{u_1}^{C\omega}=\overset{*}{u}_1$. Воспользуемся возрастающей последовательностью открытых множеств $\{\omega_n\}$, такой, что $\bar{\omega}_n\subset\omega$ и $\bigcup\omega_n=\omega$. Пусть v_n и w_n — потенциалы сужений меры μ на ω_n и на $\omega\setminus\omega_n$. На ω имеем $u_1^*=v_n^*+w_n^*$, $w_n^*\leqslant w_n\to 0$. Далее, $\overset{*}{v}_n=\mathscr{B}_{v_n}^{C\omega}$. Это легко проверить, если ω относительно компактно. В общем случае введем возрастающую последовательность Ω_p, $\bar{\Omega}_p\subset\Omega$, $\bigcup\Omega_p=\Omega$, и положим φ_n равным v_n на $\partial\omega\cap\Omega$ и нулю в других точках. Используя сходимость и возрастание гармонических мер на $\partial\omega\cap\Omega$, можно убедиться в том, что $H_{v_n}^{\Omega_p\cap\omega}$ стремится к $\overset{*}{v}_n$ на ω, а $H_{\varphi_n}^{\Omega_p\cap\omega}$ стремится к $H_{v_n^*}^{\omega}$ при $p\to\infty$. Но $\left|H_{v_n}^{\Omega_p\cap\omega}-H_{\varphi_n}^{\Omega_p\cap\omega}\right|\leqslant H_{v_n}^{\Omega_p}\to 0$ (при $p\to\infty$),

---

[1]) В общем случае разность между функцией $\mathscr{B}_u^{C\omega}$ (называемой *наилучшей гармонической минорантой*) и наибольшей гармонической минорантой равна $\int G_x(y)\,d\mu(y)$, где функция G_x ($x\in\omega$) продолжена на $\partial\omega$ таким образом, чтобы при продолжении нулем на $C\omega$ получилась субгармоническая функция в $\Omega\setminus\{x\}$ (такое продолжение единственно). Для ограниченных ω в $\mathbb{R}^n$ это результат Брело, полученный способом, принадлежащим Фростману; см. ссылки у Брело [25].

и мы получаем желаемое равенство. Наконец, $\mathscr{B}_{v_n}^{C\omega} \to \mathscr{B}_{u_1}^{C\omega}$ и, следовательно, $\overset{*}{u}_1 = \mathscr{B}_{u_1}^{C\omega}$.

Замечание. В частности, мы можем предположить, что функция u локально ограничена. Отсюда будет следовать, что μ не нагружает полярных множеств и, значит, не нагружает множества иррегулярных точек границы ω.

Теорема VIII.6. *Для всякого открытого множества ω в Ω множество тех его граничных точек, в которых ω разрежено, имеет гармоническую меру нуль*[1]).

Эта теорема содержится в работах Валле-Пуссена.

Доказательство. Рассмотрим потенциал $\bar{U}$ из теоремы VII.6 и потенциал $U' = \mathscr{B}_U^{C\omega} \leqslant U$. Мы видим, что $\mathscr{B}_U^{C\omega}$ и $\mathscr{B}_{U'}^{C\omega}$ являются наибольшими гармоническими минорантами в ω для U и U' соответственно, и следовательно, они равны, ибо $U = U'$ на ω. Отсюда $H_{U*}^{\omega} = H_{U'*}^{\omega}$ и $U = U'$ на $\partial\omega \cap \Omega$ почти всюду по гармонической мере.

2. Дальнейшие свойства функции b_μ^e. Лемма VIII.7. *Если супергармоническая функция u не превосходит конечного числа λ, то (тонко замкнутое) множество тех точек, в которых $u = \lambda$, имеет тонкую внутренность μ-меры нуль, где μ — мера, ассоциированная с u.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для пересечения нашего множества с открытым относительно компактным множеством ω_1 и далее для функции u_1, положительной в $\omega_2 \supset \bar{\omega}_1$, где ω_2 относительно компактно, регулярно и связно. Заметим, что $u_1 = \left(R_{u_1}^{\omega_1}\right)_{\omega_2}$ на ω_1. Таким образом, мы приходим к случаю, когда u есть потенциал, стремящийся

---

[1]) Так как $b_{e_x}^{C\omega}$ есть гармоническая мера ω в x (гл. VI, п. 10), то этот результат содержится в приводимой далее теореме VIII.8 (однако он используется при ее доказательстве, точнее, при доказательстве леммы VIII.7).

к нулю в точке Александрова, и достаточно показать, что множество e, где $u = \lambda = \sup\limits_{\Omega} u$ имеет тонкую внутренность μ-меры нуль. Но открытое множество α, где $u > \lambda - \varepsilon$, относительно компактно в Ω, и $u = \lambda - \varepsilon$ на $\partial\alpha$, за возможным исключением множества точек, где α разрежено. Так как это множество имеет гармоническую меру нуль в α, то отсюда следует, что $H_u^{\alpha} = \widehat{R}_u^{\complement\alpha}$ равно $\lambda - \varepsilon$ в α. Следовательно, $\widehat{R}_u^{\complement e} = \lambda$ на e и $\widehat{R}_u^{\complement e} = u$ квазивсюду и, значит, всюду. Поскольку u совпадает с выметенной функцией $\mathscr{B}_u^{\complement e}$, то мера μ сосредоточена на $B_{\complement e}$ и ядро или тонкая внутренность e имеют нулевую μ-меру.

Теорема VIII.8. *Пусть мера μ, соответствующая некоторому потенциалу, такова, что $\mu(B_e) = 0$. Если множество α полярно и $\subset B_e$ или если α — тонкая внутренность множества B_e, то α имеет нулевую внешнюю b_μ^e-меру.*

Доказательство. В первом случае (когда α полярно) мы можем, расширив множество α, считать его борелевским. Достаточно рассмотреть случай, когда α компактно, а $\mu = \varepsilon_x$, $x \notin B_e$. Тогда функция G_x будет ограниченной на α, то же справедливо для $\mathscr{B}_{G_x}^e$, и поэтому соответствующая мера будет на α равна нулю (см. гл. VI, п. 9, β)).

Во втором случае мы снова рассматриваем ε_x $(x \notin B_e)$ и применяем предыдущую лемму к пространству $\Omega \setminus \{x\}$ и супергармонической функции $\mathscr{B}_{G_x}^e(y) - G_x(y)$. Эта функция равна нулю на B_e; следовательно. у B_e тонкая внутренность имеет нулевую $b_{\varepsilon_x}^e$-меру.

3. Приложения. Теорема VIII.9. *Если u — неотрицательная супергармоническая функция, то функция $\mathscr{B}_u^e$ (которая равна u на B_e) зависит на $\complement B_e$ только от значений u на тонкой границе множества B_e. Следовательно, $\mathscr{B}_u^e$ на тонком замыкании множества $\complement e$ определяется лишь значениями u на тонкой границе множества e.*

Доказательство. Будем исходить из формулы $\mathscr{B}_u^e(x) = \int u(y)\, db_{\varepsilon_x}^e(y)$. Первое утверждение очевидно. Пусть $x \in \tilde{C}e$. Если $x \in B_e$, то $\mathscr{B}_u^e(x) = \dot{u}(x)$ и $x \in \tilde{e}$ и, следовательно, x есть тонкая граничная точка для e. Если же $x \notin B_e$, то доказываемое утверждение следует из того, что тонкая граница B_e содержится в тонкой границе e.

Следствие. *Рассмотрим две неотрицательные супергармонические функции u_1, u_2 и множество $A = \{x \mid u_1 = u_2\}$. Тогда $\mathscr{B}_{u_1}^{CA} + u_2 = \mathscr{B}_{u_2}^{CA} + u_1$ и на ядре или на тонкой внутренности множества A меры, соответствующие u_1 и u_2, совпадают.*

Действительно, так как $u_1 = u_2$ на (тонко замкнутом) множестве A, то это справедливо на тонкой границе множества A или, что то же, множества CA, и поэтому на A $\mathscr{B}_{u_1}^{CA} = \mathscr{B}_{u_2}^{CA}$. С другой стороны, $\mathscr{B}_{u_1}^{CA} = u_1$ квазивсюду на A, и то же верно для u_2. Поэтому мы получаем требуемое равенство квазивсюду, а значит, всюду.

Если u_1, u_2 — потенциалы, то множества CB_{CA} и K_{CA} имеют меру нуль для мер, отвечающих $\mathscr{B}_{u_1}^{CA}$ и $\mathscr{B}_{u_2}^{CA}$, и поэтому равенство, которое мы выше доказали, дает искомый результат для мер. В общем случае мы вводим открытое множество $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ и потенциалы $\mathscr{B}_{u_1}^{\omega} = u_1'$, $\mathscr{B}_{u_2}^{\omega} = u_2'$ (равные u_1, u_2 на ω). На тонкой внутренности множества $\omega \cap A$ соответствующие меры тождественны. Отсюда — искомый результат для u_1, u_2.

Частично это следствие содержится в следующем результате (представляющем собой уточнение теоремы Валле-Пуссена, см. Брело [13]).

Теорема VIII. 10. *Для тех же функций u_1, $u_2 \geqslant 0$ и множества A, что и в предыдущем следствии, введем множество A_0, на котором u_1, u_2 конечны и в точках которого тонко открытое множество $\alpha = \{x \mid u_1 < u_2\}$ разрежено. Тогда на A_0 мера μ_2, ассоциированная с u_2, мажорирует меру μ_1, ассоциированную с u_1.*

Доказательство. Как и выше, можно свести доказательство к случаю потенциалов u_1, u_2. Рассмотрим функции $\mathscr{B}_{u_1}^{C\alpha}$, $\mathscr{B}_{u_2}^{C\alpha}$, которым соответствуют меры, равные μ_1, μ_2 на множестве A_0 (содержащемся в тонкой внутренности множества $B_{C\alpha}$). Но $\mathscr{B}_{u_1}^{C\alpha}$ и $\mathscr{B}_{u_2}^{C\alpha}$ равны на α, так как они равны на тонкой границе α, и мы возвращаемся к случаю, когда $u_1 \geqslant u_2$ всюду.

При этих предположениях рассмотрим компактное множество $K \subset A_0$ и открытое множество $\omega \supset K$, такие, что $\mu_1(\omega \setminus K) < \varepsilon$ и $\mu_2(\omega \setminus K) < \varepsilon$. Пусть h — наибольшая гармоническая миноранта для u_2 в ω; рассмотрим $u_1' = u_1 - h$ и потенциал $u_2' = u_2 - h$. Выметенная функция $\left(\mathscr{B}_{u_2'}^{K}\right)_\omega$, определенная обычным образом в компонентах множества ω, имеет ассоциированную меру, равную μ_2 на K с точностью до меры общей массы $< \varepsilon$ (отметим, что полярное множество точек разреженности K имеет нулевые μ_1- и μ_2-меры). Разложив u_1' на ω в сумму потенциала u_1'' и гармонической функции $\varphi \geqslant 0$, получим $\left(\mathscr{B}_{u_2'}^{K}\right)_\omega = \left(\mathscr{B}_{u_1'}^{K}\right)_\omega = \left(\mathscr{B}_{u_1''}^{K}\right)_\omega + \left(\mathscr{B}_{\varphi}^{K}\right)_\omega$. Следовательно, соответствующая мера на K мажорируется мерой μ_1 с точностью до меры общей массы $< \varepsilon$, и, таким образом, $\mu_2(K) \geqslant \mu_1(K)$.

Свойства функции $\mathscr{B}_u^e$ для гармонических u. В силу аддитивности при изучении свойств функции $\mathscr{B}_u^e$ достаточно рассмотреть случай, когда u — гармоническая функция.

Теорема VIII. 11. *Если u — неотрицательная гармоническая функция, то мера, соответствующая $\mathscr{B}_u^e$, сосредоточена на тонкой границе множества B_e (и, следовательно, множества e).*

Доказательство. Прежде всего, в соответствии с последним следствием (или теоремой 10) функции u и $\mathscr{B}_u^e$, равные между собой на B_e, имеют одинаковые ассоциированные меры на тонкой внутренности B_e. Если представить $\mathscr{B}_u^e$ в виде суммы потенциала v и гармонической функции h, то после выметания получим $\mathscr{B}_u^e = \mathscr{B}_v^e + \mathscr{B}_h^e$. Поэтому $v = \mathscr{B}_v^e$ (и $h = \mathscr{B}_h^e$). Но мера, соответствующая v, сосредоточена на B_e, и это дает желаемый результат.

Замечание. Мы уже упоминали (гл. VI, п. 10, подстрочное примечание на стр. 63 и 64) о теории выметания Картана [2]. Используемое в этой работе понятие тонкой сходимости неотрицательных мер (с потенциалами $\not\equiv +\infty$), примененное к мерам Дирака ε_x, порождает, в силу соответствия $\varepsilon_x \longleftrightarrow x$, понятие сходимости в $\mathbb{R}^n$, совпадающее с нашей тонкой сходимостью.

4. Примеры весов и емкостей. Свойство Шоке. Напомним, что в теории Шоке (см. Шоке [1, 5], Брело [20]) *общей емкостью* (в книге Брело [20] используется название „истинная емкость") называется вещественная (конечная или нет) функция множества $\mathscr{C}(e)$, определенная на всех подмножествах e отделимого пространства и удовлетворяющая следующим условиям: i) $\mathscr{C}(e)$ — возрастающая функция; ii) $\mathscr{C}(e_n) \to \mathscr{C}(\bigcup e_n)$ для всякой возрастающей последовательности множеств e_n; iii) $\mathscr{C}(e_n) \to \mathscr{C}(\bigcap e_n)$ для всякой убывающей последовательности компактных множеств e_n. Множество e называется C-измеримым, если $\mathscr{C}(e) = \sup \mathscr{C}(K)$, где K — компакт, $K \subset e$. Шоке доказал C-измеримость всех так называемых K-аналитических множеств (и, в частности, что важно для нас, всех борелевских множеств), содержащихся в множестве типа G_δ.

Пример общей емкости можно получить, отправляясь от конечной вещественной функции $\mathscr{C}(K) \geqslant 0$ (K — компакт), удовлетворяющей условиям: a) $\mathscr{C}(K)$ — возрастающая функция; b) $\mathscr{C}(K)$ непрерывна справа, что в случае локально компактного метрического пространства эквивалентно свойству iii); c) $\mathscr{C}(K_1 \cup K_2) + \mathscr{C}(K_1 \cap K_2) \leqslant \mathscr{C}(K_1) + \mathscr{C}(K_2)$ (*строгая субаддитивность*). Такая функция $\mathscr{C}(K)$ называется *емкостью Шоке.*

Введем *внутреннюю емкость*

$$\mathscr{C}_*(e) = \sup_{K \subset e} \mathscr{C}(K), \text{ где } K \text{ — компакт,}$$

и *внешнюю емкость*

$$\mathscr{C}^*(e) = \inf_{\omega \supset e} \mathscr{C}_*(\omega), \text{ где } \omega \text{ — открытое множество.}$$

Шоке доказал, что $\mathscr{C}^*(e)$ является общей емкостью, причем условие C-измеримости записывается в виде $\mathscr{C}_*(e) = \mathscr{C}^*(e)$. Кроме того, внешняя емкость $\mathscr{C}^*(e)$ счетно субаддитивна.

В рамках изложенной выше классической схемы с пространством Грина Ω и гипергармоническими неотрицательными функциями мы изучим в связи со сказанным в гл. IV такие функции множеств:

$A(e) = R_\varphi^e(x)$, где точка x фиксирована, а φ — конечная неотрицательная непрерывная функция,

$A_m(e) = \int \widehat{R}_\varphi^e(x)\, dm(x)$, где функция φ — такая же, как выше, а m — неотрицательная мера, не нагружающая полярных множеств и либо имеющая компактный носитель, либо такая, что существует супергармоническая неотрицательная функция V, удовлетворяющая условиям $V \geqslant \varphi$ и $\int V\, dm < +\infty$. Примеры: a) гармоническая мера $d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ в точке $x_0 \in \omega_0$, где ω_0 относительно компактно; b) $\gamma(e) = \mu(\Omega)$, где μ — мера, ассоциированная с $\widehat{R}_\varphi^e$ (функция φ такая же, как выше).

Теорема VIII. 12. *Функции $A(e)$, $A_m(e)$ являются весами, причем весами тонкими, непрерывными справа, счетно субаддитивными и типа Шоке. Второй из этих весов есть общая емкость, а если φ, кроме всего, супергармонична, то оба веса являются внешними емкостями для некоторых емкостей Шоке. Если множество e содержится в каком-либо фиксированном $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$, то $\gamma(e)$ в Ω' имеет те же свойства, что A_m. Внешняя емкость, соответствующая $\gamma(K)$ при $\varphi = 1$, называется внешней гриновой емкостью (или классической емкостью). Если $\varphi > 0$ и $m \not\equiv 0$, то множество e будет полярным в том и только в том случае, когда или $A_m(e) = 0$, или $A(e) = 0$ $(x \notin e)$, или $\gamma(e) = 0$ $(\bar{e} \subset \Omega)$, или его классическая емкость равна нулю.*

Доказательство. a) Рассмотрим функцию множества $e \longmapsto R_\varphi^e(x_0)$. Нам известно, что это — тонкий счетно субаддитивный вес. Он непрерывен справа. В самом деле, если он конечен, то существует положительная супергармоническая функция u, удовлетворяющая на e неравенству $u \geqslant \varphi$; возьмем $0 < \lambda < 1$, тогда множество $\{x \mid u \geqslant \lambda\varphi\}$ содержит некоторую окрестность α множества e; далее, $u \geqslant \lambda R_\varphi^\alpha$, $u \geqslant \lambda \inf\limits_{\omega \supset e} R_\varphi^\omega$ (ω — открытое множество), $u \geqslant \inf\limits_\omega R_\varphi^\omega$ и $R_\varphi^e(x_0) = \inf\limits_\omega R_\varphi^\omega(x_0)$.

Предположим теперь, что функция φ супергармонична; тогда из соотношений $\widehat{R}_\varphi^{e_n} \to \widehat{R}_\varphi^{\bigcup e_n}$, $R_\varphi^e = \varphi$ на e, $\widehat{R}_\varphi^e = R_\varphi^e$ на $\complement e$ получаем, что $R_\varphi^{e_n}(x) \to R_\varphi^{\bigcup e_n}(x)$. Следовательно, R_φ^e есть общая емкость. Кроме того, функция множества $K \longmapsto R_\varphi^K(x)$ строго субаддитивна, т. е. $R_\varphi^{K_1 \cup K_2} + R_\varphi^{K_1 \cap K_2} \leqslant R_\varphi^{K_1} + R_\varphi^{K_2}$. Это очевидно при $x \in K_1 \cup K_2$; если же x лежит вне этого множества, то нужно обе стороны неравенства рассматривать как решения задачи Дирихле в $\complement(K_1 \cup K_2)$ с граничными значениями, равными на $\partial(K_1 \cup K_2)$ соответствующим частям неравенства и нулю на бесконечности. Итак $K \longmapsto R_\varphi^K(x)$ есть емкость Шоке, и из общих свойств следует, что соответствующая внешняя емкость есть $R_\varphi^e(x)$.

b) Относительно $\int \widehat{R}_\varphi^e\, dm$ или $\int R_\varphi^e\, dm$ ясно, что это — тонкие счетно субаддитивные веса. Докажем непрерывность справа. Если рассматриваемый интеграл равен $+\infty$ или $m = 0$, то это очевидно. В противном случае существует неотрицательная супергармоническая функция u, такая, что $u \geqslant \varphi$ на e и $\int u\, dm < +\infty$ (ввиду предположений о m). Функция R_φ^e есть нижняя огибающая таких функций. Поэтому $\widehat{R}_\varphi^e = \widehat{\inf u_n}$ (согласно топологической лемме Шоке, см. Брело [20], такая убывающая подпоследовательность $\{u_n\}$ существует). Введем открытые множества $\omega_n = \{x \mid u_n > \theta\varphi\}$, $0 < \theta < 1$. Тогда $u_n \geqslant \theta R_\varphi^{\omega_n}$ и

$$\int R_\varphi^e\,dm = \int \inf u_n\,dm = \lim \int u_n\,dm \geqslant$$
$$\geqslant \theta \inf_n \int R_\varphi^{\omega_n}\,dm \geqslant \theta \inf_{\omega \supset e} \int R_\varphi^\omega\,dm.$$

Следовательно, $\int R_\varphi^e\,dm \geqslant \inf \int R_\varphi^\omega\,dm$, и значит, имеет место знак равенства. Предельное свойство для $e_n \uparrow$ следует отсюда немедленно и, таким образом, $\int R_\varphi^e\,dm$ есть общая емкость.

Если функция φ супергармонична, то, используя а), заключаем, что $\int R_\varphi^K\,dm$ есть емкость Шоке. Внутренняя емкость множества ω есть $\sup\limits_{K \subset \omega} \int R_\varphi^K\,dm = \int R_\varphi^\omega dm$, а внешняя емкость множества e есть $\inf\limits_{\omega \supset e} \int R_\varphi^\omega\,dm = \int R_\varphi^e\,dm$ (ω открыто).

с) Свойство монотонности отображения $e \longmapsto \widehat{R}_\varphi^e$ ($e \subset \Omega'$) влечет за собой аналогичное свойство для $\gamma(e)$ (см. гл. VI, конец п. 8). Мы используем сейчас аналогичные рассуждения, а также равный 1 на $\overline{\Omega'}$ потенциал W (меры ν, сосредоточенной в некоторой окрестности границы $\partial\Omega'$). Пусть μ_n, μ ассоциированы с $\widehat{R}_\varphi^{e_n}$ и $\widehat{R}_\varphi^{\bigcup e_n}$ ($e_n \subset \Omega'$). Тогда

$$\gamma\left(\bigcup e_n\right) = \int W\,d\mu = \int \widehat{R}_\varphi^{\bigcup e_n}\,d\nu \leqslant \sum \int \widehat{R}_\varphi^{e_n}\,d\nu =$$
$$= \sum \int W\,d\mu_n = \sum \gamma(e_n)$$

и по аналогичным соображениям $\gamma(e_n) \to \gamma\left(\bigcup e_n\right)$.

Если $\bar{e} \subset \Omega'$ и $\omega \supset e$, $\bar{\omega} \subset \Omega'$, то, как известно, $R_\varphi^e = \inf R_\varphi^\omega$, и поэтому $\widehat{R}_\varphi^e = \widehat{\inf R_\varphi^{\omega_n}}$ для некоторой убывающей последовательности $\{\omega_n\}$; отсюда интегрированием по мере $d\nu$ получаем $\gamma(e) = \lim\limits_n \gamma(\omega_n)$.

Итак, $\gamma(e)$ является в Ω' весом с требуемыми свойствами, а также общей емкостью.

Если функция φ — супергармоническая, то функция множеств $\gamma(K)$, подобно $\widehat{R}_\varphi^K$, строго субаддитивна и является, следовательно, емкостью Шоке. Опираясь на предыдущие свойства, заключаем, что соответствующие внутренняя, а также внешняя емкости множества ω (соотв. e) совпадают с $\gamma(\omega)$ (соотв. с $\gamma(e)$).

Упражнение. Для любого $e \subset \bar{e} \subset \Omega$ существует убывающая последовательность открытых множеств $\omega_n \supset e$, такая, что $\gamma(\omega_n) \to \gamma(e)$ и $\widehat{R}_\varphi^{\omega_n} \to \widehat{R}_\varphi^e$ (φ — любая конечная непрерывная положительная функция). То же верно для внешней емкости, если φ супергармонична.

d) Характеризация полярных множеств является простым следствием критерия $\widehat{R}_\varphi^e \equiv 0$ ($\varphi > 0$).

e) Осталось доказать свойство Шоке. Вместо первоначального доказательства Шоке мы приведем другое, просто вытекающее из следующего результата, имеющего и самостоятельный интерес.

5. Лемма VIII. 13. *Пусть даны множество $e \subset \Omega$ и точка $x_0 \in \Omega$. Тогда существует потенциал V, конечный в x_0 и такой, что для любой точки $x \in \bar{e} \setminus \tilde{e}$*

$$V(y) \to +\infty \quad \text{при} \quad y \in e, \ y \to x.$$

Доказательство. Воспользуемся потенциалом U из теоремы VII. 6. (с мерой μ). Сначала предположим, что e есть база. Сужения $\mu_1 = \mu \mid e$, $\mu_2 = \mu \mid Ce$ имеют конечные непрерывные потенциалы u_1, u_2 и $b_{\mu_1}^e = \mu_1$, $b_{\mu_2}^e(Ce) = 0$. Введем открытые множества $\omega_n \supset Ce$, такие, что $b_{\mu_2}^e(\omega_n) \to 0$, и положим $\nu_n = b_{\mu_2}^e \mid \omega_n$. Можно выделить подпоследовательность мер ν_{n_p} с потенциалами v_p, для которых $\sum v_p(x_0) < +\infty$. Тогда ряд $\sum v_p$ решает нашу задачу: для точки $x \in \bar{e}$, $x \in Ce$,

$$\liminf_{y \in e,\ y \to x} v_p(y) - v_p(x) = \liminf_{y \in e,\ y \to x} \mathscr{B}_U^e(y) - \mathscr{B}_U^e(x) =$$
$$= U(x) - \mathscr{B}_U^e(x) > 0,$$

Отсюда получается требуемое свойство для $\sum v_p$. Для произвольного множества e имеем $e \subset \tilde{e} = B_e \cup \alpha$, где α — полярное множество. Сумма функции, построенной указанным выше способом для B_e, и потенциала, бесконечного на $\alpha \setminus \{x_0\}$, но конечного в x_0, и будет искомым потенциалом. Действительно, $\bar{e} \subset \bar{\tilde{e}} = \overline{B}_e \cup \bar{\alpha}$ и $\bar{e} \setminus B_e = (\overline{B}_e \setminus B_e) \cup (\bar{\alpha} \setminus B_e)$, если $x_0 \in e$ и $x \in \bar{e} \setminus \tilde{e}$, то $x \neq x_0$.

Замечание. Аналогично существует потенциал W, такой, что в каждой точке $x \in \bar{e} \setminus B_e$ выполнено соотношение $W(y) \to +\infty$ при $e \ni y \to x$. Доказательство то же (надо взять $x_0 \notin e$; если $e = \Omega$, то $\bar{e} \setminus B_e = \varnothing$).

Лемма VIII. 14. *Если Ψ — неотрицательная, локально ограниченная функция, а ω — произвольное открытое множество, содержащее $\bar{e} \setminus \tilde{e}$, то $\inf\limits_{\omega} R_{\Psi}^{e \cap \omega}(x_0) = 0$, $\forall x_0$.*

Доказательство. Для любой точки $x \in \bar{e} \setminus \tilde{e}$ и любого λ существует открытая окрестность σ точки x такая, что потенциал V из предыдущей леммы удовлетворяет на $\sigma \cap e$ неравенству $\Psi < \lambda V$. Если δ—объединение этих σ, то мы получаем $\Psi > \lambda V$ на $\delta \cap e$, и $R_{\Psi}^{e \cap \delta}(x_0) < \lambda V(x_0)$. Следовательно, $\inf\limits_{\omega} R_{\Psi}^{e \cap \omega}(x_0) = 0$ (где $\omega \supset \bar{e} \setminus \tilde{e}$, ω открыто), и это верно для любой точки $x_0 \notin e$.

Тот же самый результат и то же доказательство сохраняют силу для $\omega \supset \bar{e} \setminus B_e$ при $x_0 \notin e$ (этот результат можно получить как следствие леммы).

Доказательство свойства Шоке получается теперь просто. Мы установим его сейчас даже при более общих предположениях.

Теорема VIII. 15. *Если функция Ψ неотрицательна и локально ограничена, то следующие функции множества: $R_{\Psi}^{e}(x_0)$ при любом фиксированном x_0; $\int R_{\Psi}^{e}\, dm(x)$, где мера $m \geqslant 0$ не нагружает полярных* *множеств и* $\int G_x\,dm \not\equiv +\infty$; $\mu(\Omega)$, *где* μ — *мера, соответствующая* $\widehat{R}^e_\Psi$, — *являются все весами типа Шоке, причем последняя — в любом* $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Доказательство. Свойство монотонности всех этих функций является следствием аналогичного свойства для R^e_Ψ. Первый вес обладает свойством Шоке согласно предыдущей лемме, в которой ω следует заменить на $\omega' = \omega \cup C\bar{e}$. Далее, существует убывающая последовательность множеств $\{\omega'_n\}$, содержащих $C\bar{e}$, такая, что для всех x

$$\widehat{\inf R_\Psi^{e \cap \omega'_n}}(x) = 0,$$

так что $R_\Psi^{e \cap \omega'_n} \to 0$ квазивсюду. Пользуясь последовательностью $\Omega_p \uparrow$, $\overline{\Omega}_p \subset \Omega$, $\bigcup \Omega_p = \Omega$, получаем для подходящего λ, всех n и фиксированного p, что $\int R_\Psi^{e \cap \omega'_n \cap \Omega_p}\,dm \leqslant \lambda \int G_x(y)\,dm(y)$ и, значит,

$$\int R_\Psi^{e \cap \omega'_n \cap \Omega_p}\,dm \to 0.$$

Выберем $n = n_p$ так, чтобы этот интеграл был $< \varepsilon/2^{-p}$. Тогда $\int R_\Psi^{e \cap \left(\cup \omega'_{n_p} \cap \Omega_p\right)}\,dm < \varepsilon$, и для второго веса вопрос решен. Наконец, $\widehat{R}_\Psi^{e \cap \omega'_n \cap \Omega'}$ есть потенциал некоторой меры μ_n (на $\overline{\Omega}'$). Пользуясь тем же самым W, что и в части c) доказательства теоремы VIII. 12, находим $\int \widehat{R}_\Psi^{e \cap \omega'_n \cap \Omega'}\,d\nu = \int W\,d\mu_n = \mu_n(\Omega) \to 0$, откуда получается свойство Шоке в Ω' для третьего веса.

Замечание. Интерпретация полярных множеств как множеств, у которых вес $A_m(e)$ равен нулю для подходящей меры m, приводит к следующему результату:

Всякое тонко замкнутое множество является с точностью до полярного множества множеством типа F_σ

(см. предложение IV. 5), а также множеством типа G_δ (гл. VII, п. 3).

6. Некоторые дополнения. а) Тонкая топология играет важную роль при изучении весов возрастающих и в особенности убывающих последовательностей множеств. Например, емкости $A_m(e)$, $\gamma(e)$ из теоремы VIII. 12 для убывающих тонко замкнутых множеств e_n, содержащихся в компакте K, стремятся к соответствующим емкостям множества $\bigcap e_n$. Это — следствие равенства $\inf \widehat{\widehat{R}^{e_n}_{\varphi}} = \widehat{R}^{\bigcap e_n}_{\varphi}$, и этот результат обобщается на случай направленных семейств $\{e_i\}$ (см. Брело [30]).

Более глубокое изучение весов $R^e_1(x_0)$, $\int \widehat{R}^e_\Psi\, dm$ (для любой функции $\Psi \leqslant V$, где V — супергармоническая функция, удовлетворяющая условию $\int V\, dm < \infty$, а мера m не нагружает полярных множеств) для убывающих e проведено в статьях Брело [27, 30, 32, 33], главным образом для случая неотрицательной супергармонической функции Ψ. Эти веса обладают свойством Шоке.

b) *Статистическая разреженность.* Нам встречались (см. теоремы VIII. 12 и VIII. 15) емкости, являющиеся также весами типа Шоке.

Теорема VIII. 16 (Брело [27]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

a) *В пространстве Ω множество e разрежено квазивсюду на множестве α (статистическая разреженность на α);*

b) $\widehat{\inf_{\omega} R^{e \cap \omega}_1} = 0$ *в какой-нибудь одной точке или в каждой точке (или то же условие для $\widehat{R}_1$), т. е. семейство $\{e \cap \omega\}$ (где ω — переменная окрестность множества α) является 1-исчезающим.*

Доказательство. В самом деле, в силу свойства Шоке семейство $\{e \cap \delta\}$ будет 1-исчезающим для окрестностей δ множества $C\tilde{e}$, т. е. множества тех точек из Ce, в которых e разрежено. Отправляясь от статистического свойства a), мы получаем то же самое для окрестностей следующих полярных множеств: 1) части множества α, где e неразрежено, 2) части множества e, где e разрежено. Отсюда и следует b).

Обратное просто. Исходим из b); если α_0 — часть множества α, где e неразрежено, а ω — переменная окрестность α, то $e \cap \omega$ неразрежено на α_0, и, поскольку $R_1^{\bar{\gamma}} = R_1^{\gamma}$, мы получаем $\widehat{R_1^{(e \cap \omega) \cup \alpha_0}} = R_1^{e \cap \omega}$, $R_1^{\alpha_0} \leqslant R_1^{e \cap \omega}$, $R_1^{\alpha_0} \leqslant \inf R_1^{e \cap \omega}$, $\hat{R}_1^{\alpha_0} \leqslant \widehat{\inf R_1^{e \cap \omega}}$. Следовательно, множество α_0 полярно.

Замечание. Эквивалентными условиями являются:

a) 1-исчезание тонких окрестностей α;

b) существование супергармонической функции $V > 0$, сужение которой на e стремится к $+\infty$ в точках множества $\alpha \cap \bar{e}$ (равно как аналогичное условие с тонким пределом в точках $\alpha \cap \tilde{e}$; см. лемму VIII. 13).

c) *Некоторые определения и приложения* (см. Брело [27, 30, 33]). *A*) Пусть W — положительная супергармоническая функция (с ассоциированной мерой μ_W). Полярное множество e называется *W-полярным* на Ω, если его внешняя μ_W-мера равна нулю. Эквивалентное требование: окрестности множества e образуют W-исчезающее семейство.

Приложение. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Множество e разрежено на α всюду, за исключением W-полярного множества (*W-статистическая разреженность* на α).

2) Для окрестностей ω множества α в пространстве Ω (равно как и для тонких окрестностей) семейство $\{e \cap \omega\}$ является W-исчезающим.

3) Существует супергармоническая функция $U > 0$, такая, что $U(y)/W(y)$ (мы считаем это отношение равным $+\infty$ там, где $U = W = +\infty$) стремится к $+\infty$ при $y \in e$, $y \to x \in \bar{e}$.

Аналогичный результат имеет место для тонких сходимости и замыкания.

В) Супергармоническая на Ω функция $W > 0$ называется *семиограниченной*, если семейство $e_\lambda = \{x \mid W > \lambda\}$ является W-исчезающим. Если W — потенциал, то это эквивалентно W-полярности множества $\{W = +\infty\}$.

Приложение (обобщение результата части *а*) этого пункта). Если $\{\varphi_i\}$ — направленное по убыванию множество тонко полунепрерывных сверху неотрицательных функций на Ω, которое мажорируется фиксированным семиограниченным потенциалом V, то $\widehat{\inf \widehat{R}_{\varphi_i}} = \widehat{R}_{\inf \varphi_i}$.

Глава IX

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИЗУЧЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕЖЕННОСТИ[1]). НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Выше была показана важность понятия разреженности для общих теорий типа теории выметания, которые могут быть доведены до аксиоматического уровня. Естественно более глубоко изучить вопрос в классическом случае, что даст нам массу подробностей и примеров, полезных для классических приложений. Мы будем рассматривать главным образом евклидовы пространства; обобщение на случай окрестности точки на бесконечности легко получить, либо повторяя соответствующие рассуждения, либо используя инверсию и преобразование Кельвина. Аналогично можно рассмотреть и случай общего пространства Грина (непосредственно или каким-нибудь иным способом).

Напомним, что в пространстве Грина из разреженности следуют строгая разреженность и сверхразреженность.

---

[1]) См. Брело [4, 5, 8] и Картан [2], а также приведенную в этих работах библиографию.

Замечание о сохранении разреженности или неразреженности при отображении. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ ограниченное борелевское отображение $x \mapsto y = F(x)$ (это означает, что образ любого шара ограничен). Со всякой мерой Радона μ можно связать другую меру ν, определенную условием $\int \theta(y)\,d\nu(y) = \int \theta(F(x))\,d\mu(x)$, где θ — любая конечная непрерывная финитная (т. е. обладающая компактным носителем) функция. Мера ν называется *образом* меры μ при отображении F; написанная формула сохраняет силу для любой $d\nu$-суммируемой функции θ.

Предложение IX. 1. *Если отображение F биективно и сохраняет расстояние $|x_1 - x_2|$ с точностью до коэффициента $\lambda(x_1, x_2)$, причем $0 < \alpha \leqslant \lambda(x_1, x_2) \leqslant \beta < +\infty$ (x_1, x_2 лежат в окрестности x_0), то разреженность в точке x_0 эквивалентна разреженности образа в точке $F(x_0) = y_0$.*

Доказательство. Имеем

$$\int h(|y - y_1|)\,d\nu(y) = \int h(\lambda(x, x_1)\,|x - x_1|)\,d\mu(x).$$

Если потенциал меры μ конечен в x_0 и стремится к $+\infty$ на e (при $x \to x_0$, $x \neq x_0$), то потенциал меры ν конечен в y_0 и стремится к $+\infty$ на $F(e)$ (при $y \to y_0$, $y \neq y_0$), и обратно.

Предложение IX. 2. *Если отображение F оставляет точку x_0 неподвижной, сохраняет расстояния до точки x_0, а вообще расстояния не увеличивает, то при применении отображения F потенциалы возрастают, и поэтому множество, разреженное в x_0, переходит в множество, разреженное в этой же точке.*

Пример. Отображение $x \mapsto y$ в $\mathbb{R}^2$, где y лежит на фиксированном луче, исходящем из точки x_0, а $|y - x_0| = |x - x_0|$, удовлетворяет условиям предыдущего предложения.

Сделанные замечания позволяют нам, отправляясь от элементарных примеров, строить много новых.

2. Одно геометрическое свойство разреженности. Теорема IX.3. *Если $e \subset \mathbb{R}^n$ разрежено в x_0, а $\sigma_{x_0}^r$ — единичная положительная инвариантная мера на сфере $\partial B_{x_0}^r$ (инвариантная относительно вращений, т. е. пропорциональная „площади“), то при $r \to 0$ внешняя мера $\sigma_{x_0}^{r*}(e \cap \partial B_{x_0}^r) \to 0$.*

Доказательство. Можно считать, что $x_0 \notin e$, что e открыто и что в окрестности x_0 существует супергармоническая функция $u > 0$, такая, что $u(x_0) < +\infty$, $u(x) \to +\infty$ при $e \ni x \to x_0$. Тогда

$$u(x_0) \geqslant (\text{среднее значение } u \text{ на } \partial B_{x_0}^r) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda(r)\, \sigma_{x_0}^{r*}(\partial B_{x_0}^r \cap e),$$

где $\lambda(r) = \inf u$ на $e \cap \partial B_{x_0}^r$. Так как $\lambda(r) \to +\infty$ при $r \to 0$, то $\sigma_{x_0}^{r*}(\partial B_{x_0}^r \cap e) \to 0$.

Упражнение. Провести аналогичное доказательство, используя функцию u, удовлетворяющую условию $u(x_0) < \liminf\limits_{x \in e,\, x \to x_0} u(x)$.

Обобщение. *Пусть $\{\omega_i\}$ — направленное по убыванию семейство подобластей пространства Грина, содержащих точку x_0 и имеющих пересечение $\{x_0\}$. Если $d\rho_{x_0}^{\omega_i}$ — гармоническая мера в x_0, то $\inf\limits_i \rho_{x_0}^{\omega_i *}(e \cap \partial\omega_i) = 0$.*

Доказательство аналогично.

В случае точки на бесконечности, используя образы в $\overline{\mathbb{R}}^n$, мы получаем отсюда аналогичное свойство для сферы, имеющей фиксированный центр и радиус $\to \infty$.

Замечание. Если ограниченная в окрестности точки x_0 функция имеет тонкий предел λ в x_0, то ее среднее значение на $\partial B_{x_0}^r$ стремится к λ при $r \to 0$.

Пример неразреженности. Любое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее конус вращения (с непустой внутренностью), неразрежено в вершине (этот пример указан Пуанкаре в связи с задачей Дирихле).

3. Критерии разреженности и неразреженности.

Теорема IX.4. *Замкнутое множество* $e \subset \mathbb{R}^n$ *неразрежено в точке* $x_0 \in e$ *в том и только в том случае, когда в* $\sigma \setminus e$ (где σ — некоторая открытая окрестность точки x_0) *существует положительная супергармоническая функция* u, *стремящаяся к нулю в* x_0.

Доказательство. Воспользуемся конечной непрерывной функцией $V>0$, супергармонической в шаре B_{x_0} и не являющейся гармонической ни на каком открытом множестве (можно взять, например, $k - |x - x_0|$ или $k - |x - x_0|^2$ с подходящей константой k или потенциал меры Лебега на B_{x_0}). Рассмотрим ее приведенную функцию в B_{x_0} относительно множества $e' = e \cap B_{x_0}$. Если e неразрежено в x_0, то $\widehat{R}_V^{e'}(x_0) = V(x_0)$. Следовательно, функция $\widehat{R}_V^{e'}$ непрерывна в x_0, и неотрицательная функция $V - \widehat{R}_V^{e'}$ не может быть равна нулю ни в одной компоненте множества $\complement e'$ в B_{x_0}. Таким образом, она > 0 и удовлетворяет требуемым условиям.

Обратно, предположим, что функция v супергармонична в $B_{x_0} \setminus e$ (для подходящего шара B_{x_0}) и $v > 0$, $v \to 0$ в x_0. Покажем, что это несовместимо с разреженностью e, т. е.. с существованием субгармонической функции u в B_{x_0}, удовлетворяющей условиям $u(x_0) = 1$, $u(x) \leqslant -1$ на $e \cap B_{x_0}^r$ (при некотором r). Заметим, что $u \leqslant v$ в некоторой открытой окрестности δ множества $\partial B_{x_0}^{r'} \cap e$ $(r' < r)$ и $u \leqslant \lambda v$ на $\partial B_{x_0}^{r'} \cap \complement\delta$ (где $\lambda > 1$ достаточно велико). Следовательно, функция $u - \lambda v - \varepsilon G_{x_0}^{B_{x_0}}$ $(\varepsilon > 0)$ на $B_{x_0}^r \setminus e$ имеет неположительный $\limsup$ в каждой граничной точке. Значит, эта функция $\leqslant 0$, и $u \leqslant \lambda v$ на $B_{x_0}^r \setminus e$. Но это противоречит тому, что $u(x_0) = 1 = \limsup\limits_{x \neq x_0,\, x \to x_0} u(x_0)$.

Отсюда простой переформулировкой получается обобщение на случай пространства Грина.

Рассмотрим некоторые приложения этих критериев.

Предложение IX.5. *Отличная от* A *граничная точка* x_0 *открытого множества* ω *в пространстве Грина* Ω

будет иррегулярной тогда и только тогда, когда $C_{\Omega}\omega$ *разрежено в* x_0.

Это следует из локальных критериев (гл. VI, п. 6, теорема IX. 4), а также из теоремы VII. 13.

Отсюда получается другое доказательство того, что множество иррегулярных точек полярно.

Некоторые примеры. В $\mathbb{R}^n$ гиперплоскость H (размерности $n-1$) неразрежена ни в какой своей точке, поскольку расстояние до H есть гармоническая положительная вне H функция. Однако линейные многообразия размерности $\leqslant n-2$ локально полярны (ибо ньютонов или логарифмический потенциал меры Лебега открытого множества α бесконечен на α) и поэтому всюду разрежены. Полугиперплоскость неразрежена даже на краю (следует рассмотреть объединение со второй полугиперплоскостью). В $\mathbb{R}^2$ отрезок не разрежен ни в какой своей точке.

Предложение IX. 6 (уточненное свойство Лебега — Бёрлинга). *Если множество* $e \subset \mathbb{R}^2$ *разрежено в точке* x_0, *то существуют сколь угодно малые окружности* $|x-x_0|=r$, *не пересекающиеся с* e.

Доказательство. Отображение из п. 1 на луч, исходящий из x_0, дает разреженное множество, которое не может содержать никакого отрезка с концом в x_0.

Таким образом, в $\mathbb{R}^2$ все неизолированные граничные точки конечносвязной относительно компактной области Грина будут регулярными.

В $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ положение совсем иное. Напомним знаменитый пример *лебегова острия* в $\mathbb{R}^3$ (он и был построен как пример иррегулярной граничной точки).

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ оси x_1 меру с линейной плотностью, равной x_1. Ее ньютонов потенциал V равен 1 в точке 0 и $+\infty$ в остальных точках отрезка. Множество $\{x \mid V > K > 1\}$ (это — тело вращения с осью x_1) разрежено в точке 0. Элементарный расчет показывает, что меридианная образующая задается уравнением $z = \pm a e^{-\frac{\lambda(x_1)}{x_1}}$, где $\lambda(x_1) \to K/2$.

4. Теорема IX.7. *В пространстве Грина Ω разреженность множества e в точке x_0 эквивалентна условию*

$$\mathscr{B}^e_{G_{x_0}} \neq G_{x_0}, \quad \text{т. е.} \quad b^e_{\varepsilon_{x_0}} \neq \varepsilon_{x_0} \quad \text{или} \quad b^e_{\varepsilon_{x_0}}\{x_0\} = 0\,^{1)}. \quad (\alpha)$$

Другие формы этого критерия для случая $\mathbb{R}^n$ таковы:

a) *В окрестности x_0 существует такая супергармоническая функция v, что*

$$\liminf_{x \in e,\ x \neq x_0,\ x \to x_0} \frac{v(x)}{h_{x_0}} > \liminf_{x \neq x_0,\ x \to x_0} \frac{v(x)}{h_{x_0}}$$

(*напомним, что* $h_{x_0}(x) = h(|x - x_0|)$).

b) *В окрестности точки x_0 существует мера $\mu \geqslant 0$, не нагружающая $\{x_0\}$, такая, что ее h- или G-потенциал v удовлетворяет условию*

$$\liminf_{x \in e,\ x_0 \neq x,\ x \to x_0} \frac{v(x)}{h(|x - x_0|)} > 0.$$

Это равносильно тому, что $v \geqslant h$ или $\geqslant G_{x_0}$ на e всюду вблизи x_0 (или только квазивсюду), причем $\mu(\complement B_e) = 0$.

c) *В окрестности точки x_0 существует мера $\mu \geqslant 0$ с G- или h-потенциалом v, удовлетворяющим условию*

$$\frac{v(x)}{h(|x - x_0|)} \to +\infty \quad (x \in e,\ x \neq x_0,\ x \to x_0).$$

[1]) Модифицируя понятие, введенное Валле-Пуссеном, Картан [2] (в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ или в единичном круге в $\mathbb{R}^2$) взял свойство $b^e_{\varepsilon_{x_0}} \neq \varepsilon_{x_0}$ в качестве определения „внешней иррегулярности" точки x_0 для e (которая, следовательно, эквивалентна разреженности e в x_0). Пользуясь „вторым типом выметания" (см. подстрочное примечание на стр. 63—64), он аналогичным образом пришел к понятию „внутренней иррегулярности", которая эквивалентна тому, что всякое замкнутое подмножество множества $e \cup \{x_0\}$ разрежено в x_0 (внутренняя разреженность). Это второе понятие оказалось малополезным, и мы оставили его в стороне, равно как и второй тип выметания. Слово „регулярность" мы сохранили за первоначальным классическим понятием, связанным с задачей Дирихле, чтобы избежать всяких недоразумений.

Доказательство. Если e разрежено, то мера $b^e_{\varepsilon_{x_0}}$, которая сосредоточена на B_e, не нагружает $\{x_0\}$. Если же e неразрежено (т. е. если $x_0 \in B_e$), то $b^e_{\varepsilon_{x_0}} = \varepsilon_{x_0}$.

Докажем сперва эквивалентность условий а), b), с).

Воспользуемся следующим замечанием. Если в пространстве Грина Ω потенциал v мажорирует $G^\Omega_{x_0}$ ($\{x_0\}$ — полярное множество), то $\mu_v(\{x_0\}) \neq 0$. В противном случае функция v в $\Omega \setminus \{x_0\}$ была бы $G^{\Omega \setminus \{x_0\}}$-потенциалом с гармонической минорантой $G_{x_0} \neq 0$.

Отправляясь от а), мы получим то же неравенство для локального потенциального слагаемого функции v, а затем для потенциала V сужения соответствующей меры на $\complement\{x_0\}$. Но тогда новый правый член неравенства должен быть равен нулю (иначе функция λV при достаточно большом λ мажорировала бы некоторую функцию $G^{B_{x_0}}_{x_0}$ вблизи точки x_0 и, значит, в B_{x_0}, а это противоречило бы предыдущему замечанию). Итак, мы получили b).

Далее, b)$\Rightarrow$а), потому что $v/h(|x - x_0|)$ или $v/G^{B_{x_0}}_{x_0}$ имеет нулевой $\liminf$ (те же рассуждения). Поскольку с)$\Rightarrow$b), то нам осталось доказать, что b)$\Rightarrow$с).

Пусть μ — мера из b), а μ_n — ее сужение на $B^{r_n}_{x_0}$; выберем подпоследовательность n_p так, чтобы сумма $\sum \|\mu_{n_p}\|$ была конечной. Тогда мера $\sum \mu_{n_p}$ отвечает всем нашим требованиям.

Докажем, наконец, что условие разреженности e в точке x_0 (мы считаем $\Omega \ni x_0$ шаром) эквивалентно условию b). Предполагая, что имеет место разреженность, видим, что мера $b^e_{\varepsilon_{x_0}}$ не нагружает $\{x_0\}$ и ее G^Ω-потенциал равен G_{x_0} на e всюду, за исключением полярного множества. Рассмотрим на Ω супергармоническую функцию $w > 0$, конечную в x_0 и равную $+\infty$ на $e \setminus \{x_0\}$. Тогда

$$\liminf_{x \in e,\, x \neq x_0,\, x \to x_0} \frac{\mathscr{B}^e_{G_{x_0}} + w}{G_{x_0}} > 0,$$

так что b) имеет место.

Будем теперь исходить из b) и обозначим через λ указанный в b) $\liminf$; тогда при $0<\lambda'<\lambda$ функция v/λ' мажорирует G_x, на $e\cap\sigma$ для некоторой окрестности σ точки x_0. Следовательно, $v/\lambda' \geqslant \mathscr{B}_{G_{x_0}}^{e\cap\sigma}$. Но $\mathscr{B}_{G_{x_0}}^{e\cap\sigma}$ не может быть равно G_{x_0} (согласно нашему предварительному замечанию). Отсюда следует разреженность $e\cap\sigma$ и, значит, e.

Замечание. Используя лишь свойство аддитивности отображения $v\longmapsto \mathscr{B}_v^e$ (где v — супергармоническая функция $\geqslant 0$) и свойство инвариантности $\mathscr{B}_{\mathscr{B}_v^e}^e = \mathscr{B}_v^e$, можно доказать непосредственно, что $\mathscr{B}_{G_{x_0}}^e \neq G_{x_0}$ влечет $b_{\varepsilon_{x_0}}^e(\{x_0\})=0$ (в любом пространстве Грина). Поэтому предыдущие рассуждения показывают, что условия a) — c) эквивалентны неравенству $\mathscr{B}_{G_{x_0}}^e \neq G_{x_0}$ без использования результатов теории выметания (теоремы VIII.3).

Упражнение. Доказать эквивалентность условий a) — c) и разреженности, используя следующую лемму (полезную также и для дальнейшего). Таким образом получается более прямое доказательство критерия (α) разреженности в $\mathbb{R}^n$ (см. Брело [5]).

Лемма IX.8 (Винер — Валле-Пуссен). *Рассмотрим в* $\mathbb{R}^n$ *меру* $\mu>0$, *не нагружающую начала* 0, *ее потенциал* v (*логарифмический или ньютонов*) *и число* $s>1$. *Сужение меры* μ *на множество*

$$E_n=\{x\mid h(|x|)\leqslant s^{n-1}\}\cup\{x\mid h(|x|)\geqslant s^{n+2}\}$$

имеет потенциал V, *который на множестве*

$$I_n=\{x\mid s^n\leqslant h(|x|)\leqslant s^{n+1}\}$$

(A) *мажорируется функцией* $h(|x|)\varepsilon_n$ $(\varepsilon_n\to 0)$, (B) *в случае конечности* $v(0)$ *мажорируется величиной* $Kv(0)$, *где* K *не зависит от* μ *и* n.

Доказательство. Элементарный подсчет показывает, что отношения $h(|x-y|)/h(|x|)$ и $h(|x-y|)/h\times\times(|x-y_1|)$ ограничены при произвольных $x\in E_n$,

$y \in I_n$ и n. Отсюда сразу получается второй результат. Первый результат является следствием того известного факта, что среднее значение v на ∂B_0^r имеет вид $h(r)\varepsilon(r)$, где $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to 0$ [1].

5. Теорема IX.9 (Булиган). *Замкнутое множество e в пространстве Грина Ω будет неразреженным в точке $x_0 \in e$ в том и только в том случае, когда*

a) *решение задачи Дирихле в $\Omega \setminus e$ с граничными значениями $G_{x_0}^{\Omega}$ и 0 в точке Александрова A равно $G_{x_0}^{\Omega}$.*

Если же точка x_0 полярна, то необходимое и достаточное условие таково:

b) *на $\sigma \setminus e$* (где σ — некоторая открытая окрестность точки x_0) *существует супергармоническая функция u, такая, что $u/G_{x_0}^{\Omega} \to +\infty$, $x \in \complement e$, $x \to x_0$* (если x_0 — не точка на бесконечности, то это эквивалентно тому, что на локальном образе $u/h(|x - x_0|) \to +\infty$, $x \in \complement e$, $x \to x_0$).

Доказательство. a) В случае замкнутого множества e этот критерий совпадает с критерием (α) из теоремы IX.7.

Предположим, что e неразрежено в x_0 и $\{x_0\}$ — полярное множество. Мы покажем даже, что в $\Omega \setminus e$ существует гармоническая положительная функция u, такая, что $u/G_{x_0}^{\Omega} \to +\infty$ в x_0. Для всякой области $\sigma \subset \Omega$, $\sigma \ni x_0$, имеем $\left(\hat{R}_{G_{x_0}^{\sigma}}^{e \cap \sigma}\right)_{\sigma} = G_{x_0}^{\sigma}$ на σ. Далее, для функции f_σ, равной $G_{x_0}^{\Omega}$ на σ и нулю в других точках и, в частности, в точке Александрова пространства Ω, имеем $H_{f_\sigma}^{\Omega \setminus e} \geqslant \hat{R}_{G_{x_0}^{\sigma}}^{e \cap \sigma}$ на $\sigma \setminus e$. Отправляясь от

---

[1]) Вместо этого стандартного доказательства можно рассмотреть график среднего значения на B_0^r как вогнутую функцию от $t = h(r)$ и воспользоваться интерпретацией правой полукасательной как (с точностью до множителя) массы, сосредоточенной на B_0^r. Это замечание позволяет для случая $\mathbb{R}^n$ получить предварительное замечание, использованное в доказательстве теоремы IX.7.

последовательности σ_n (убывающей и такой, что $\bigcap \sigma_n = \{x_0\}$), выберем подпоследовательность σ_p^1 так, чтобы сумма $\sum H_{f_{\sigma_p^1}}^{\Omega \setminus e}(x_1)$ была конечна[1] ($x_1 \in \omega_1$, где ω_1 — одна из компонент ω_i множества $\Omega \setminus e$), затем из нее выберем подпоследовательность σ_p^2 так, чтобы сумма $\sum H_{f_{\sigma_p^2}}^{\Omega \setminus e}(x_2)$ была конечна $(x_2 \in \omega_2)$ и т. д. С помощью диагонального процесса мы получим подпоследовательность σ'_p, такую, что $u = \sum H_{f_{\sigma'_p}}^{\Omega \setminus e}$ будет гармонической функцией в $\Omega \setminus e$. Далее, $u \geqslant NG_{x_0}^{\sigma'_N}$ на $\sigma'_N \setminus e$ и $u \geqslant 2^{-1}NG_{x_0}^{\Omega}$ на подходящей окрестности точки x_0 (вне множества e)[2]), и это доказывает, что поведение u в x_0 имеет требуемый характер.

Обратно, предположим, что существует функция u из условия b). Тогда функция $\varepsilon u = G_{x_0}^{\Omega} + H_{G_{x_0}^{\Omega}}^{\sigma \setminus e}$ $(\varepsilon > 0)$ имеет неотрицательный $\liminf$ во всех регулярных граничных точках множества $\sigma \setminus e$ $(\bar{\sigma} \subset \Omega)$. Поэтому $G_{x_0}^{\Omega} - H_{G_{x_0}^{\Omega}}^{\sigma \setminus e} \leqslant \varepsilon u$, и мы получаем условие a).

Упражнение. Доказать, что среди различных других форм критерия справедлива следующая: для какой-либо одной (или же для всякой) открытой относительно компактной окрестности σ точки x_0 любая неотрицательная гармоническая функция в $\sigma \setminus e$, стремящаяся к нулю квазивсюду на границе и мажорируемая функцией $G_{x_0}^{\Omega} + \text{const}$, обязательно нулевая.

6. Теорема IX. 10 (знаменитый критерий Винера[3]).

---

[1]) Так как $f_{\sigma_p^1} \to 0$ на границе всюду, за исключением (полярной) точки x_0, то общий член ряда может быть сделан $< 2^{-p}$.

[2]) Так как отношение $G_{x_0}^{\sigma'_N} / G_{x_0}^{\Omega}$ стремится к 1 в x_0.

[3]) Первоначально (Винер [2]) был дан как критерий иррегулярности граничной точки открытого множества. Доказательство было усложнено из-за отсутствия продвинутой теории выметания. Существенная часть леммы IX. 8 в нем уже использовалась.

Пусть Ω — произвольная гринова область в $\mathbb{R}^n$ (например, само $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$) *и* $x_0 \in \Omega$. *Обозначим через* $\gamma(\alpha)$ *соответствующую классическую внешнюю емкость, т. е. для относительно компактного множества* α *полную массу меры, ассоциированной с* $\mathscr{B}_1^\alpha$. *Положим еще*

$$I_n = \{x \mid s^n \leqslant h(|x - x_0|) \leqslant s^{n+1}\} \quad (s > 1).$$

Тогда разреженность любого множества e *в* x_0 *эквивалентна конечности* $\sum \gamma(I_n \cap e) s^n$ *или, что то же самое, конечности* $\sum \mathscr{B}_1^{I_n \cap e}(x_0)$.

Эквивалентность двух последних условий ясна, потому что мера, ассоциированная с $\mathscr{B}_1^{I_n \cap e}$, сосредоточена на I_n, а ее потенциал в точке x_0 заключен между $\gamma(I_n \cap e) s^n$ и $\gamma(I_n \cap e) s^{n+1}$.

Доказательство. Прежде всего из приведенного условия следует, что $\mathscr{B}_1^{e \cap B_{x_0}^r}(x_0) \to 0$ при $r \to 0$, т. е. что e строго разрежено. Доказательство обратного утверждения более трудно. Будем отправляться от G^Ω-потенциала v, конечного в x_0, но стремящегося к $+\infty$ в x_0 по e. Если $E = \bigcup\limits_p I_{2p} \cap e$, то функция $\mathscr{B}_v^E$ конечна в x_0 и стремится к $+\infty$ по E вне некоторого полярного множества; соответствующая мера μ сосредоточена на $\overline{E}$, а ее сужение $\mu \mid \complement I_{2p}$ имеет h- или G-потенциал, ограниченный на $I_{2p} \cap e$ (лемма IX. 8, B)). Далее, мера $\mu \mid I_{2p}$ при $p \geqslant p_0$, где p_0 достаточно велико, имеет потенциал $V_p \geqslant 1$ на $I_{2p} \cap e$ всюду, за исключением некоторого полярного множества. Следовательно, $V_p \geqslant \mathscr{B}_1^{I_{2p} \cap e}$ при $p \geqslant p_0$ и $\sum\limits_{p_0}^{\infty} \mathscr{B}_1^{I_{2p} \cap e}(x_0) \leqslant$ (G-потенциал μ в x_0) $= \mathscr{B}_v^E(x_0)$, т. е. эта сумма конечна. Аналогичные рассуждения проводятся для $\mathscr{B}_1^{I_{2p+1} \cap e}(x_0)$.

Замечание 1. Тот же результат справедлив, если заменить I_n на множество $\{s^n < h(|x - x_0|) \leqslant s^{n+1}\}$

или на $\{s^n \leqslant h(|x - x_0|) < s^{n+1}\}$. Доказательство совершенно аналогично.

Замечание 2. Можно получить интегральную форму критерия. Она устанавливается сперва для замкнутых множеств (Келлог — Василеску — Фростман) как следствие критерия Винера или непосредственно. Если через $\delta(z)$ обозначить множество $e \cap \{x \mid h(|x - x_0| \geqslant z\}$, то критерий состоит в конечности $\int \gamma(\delta(z))\,dz$. Однако критерий этот используется нечасто.

Тем не менее, используя его, можно несколько усилить теорему IX. 3 (см. Дени [1]) и более точно описать множество тех окружностей $|x_0 - x| = r$, которые не пересекают множество, разреженное в точке x_0 (приложение 3 теоремы IX. 4) (см. Брело [4]).

Упражнение. Доказать, что функция f в $\mathbb{R}^n$, имеющая тонкий предел 1 в точке x_0, стремится к 1 вдоль всех лучей, исходящих из x_0, за исключением множества лучей, пересекающего единичную сферу (с центром в x_0) по локально полярному множеству (результат Дени [1]).

Некоторые дополнения. а) Другая форма критерия состоит в сходимости ряда с общим членом $\mathscr{B}^{e \cap I_n}_{h(|x-x_0|)}(y_0)$, $y_0 \neq x_0$.

b) Иные формы мы получим, рассматривая вместо I_n множество

$$J_n = \{t^{n+1} \leqslant |x - x_0| \leqslant t^n\}, \quad 0 < t < 1$$

(вместо любого из знаков $\leqslant$ здесь можно поставить $<$). Мы можем заменить ранее рассматривавшиеся приведенные функции относительно $e \cap I_n$ на такие же функции, но относительно $e \cap J_n$. В случае $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ это не дает ничего нового. В случае $\mathbb{R}^2$ это эквивалентно сходимости последовательности $\{n\gamma(e \cap J_n)\}$ (Цудзи). Доказательство получается соответствующим видоизменением приведенного выше.

Замечание. Условие

$$R_1^{e \cap J_n}(x_0) \to 0 \quad \text{или} \quad R_{h(|x-x_0|)}^{e \cap J_n}(y_0) \to 0$$

(не зависящее от выбора t) может быть принято за определение *полуразреженности*. В случае $\mathbb{R}^2$ это условие обозначает, что $n\gamma(e \cap J_n) \to 0$.

c) В случае $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) для разреженности в точке на бесконечности могут быть получены интересные формы критерия. Например, разреженность эквивалентна тому, что внешняя классическая емкость конечна (см. Брело [6, 3, 10]).

7. Некоторые применения теории разреженности и тонких пределов. (См. Брело [5—10].) Лемма IX. 11. *Пусть u — ограниченная снизу супергармоническая функция в открытом множестве $\omega \subset \mathbb{R}^n$. Положим $\mathscr{L}_x u = \liminf\limits_{y \in \omega,\, y \to x} u(y)$ для $x \in \partial\omega$. Тогда если $x_0 \in \partial\omega$ — неизолированная точка $\partial\omega$, а $\mathscr{L}_{x_0} u < \liminf\limits_{x \in \partial\omega,\, x \neq x_0,\, x \to x_0} \mathscr{L}_x u$, то $C\omega$ разрежено в x_0 и u имеет в x_0 тонкий предел, равный $\mathscr{L}_{x_0} u$.*

Доказательство. Пусть K — число, лежащее строго между членами доказываемого неравенства. Рассмотрим на ω функцию $\inf(u, K)$ и продолжим ее на $C\omega \setminus \{x_0\}$ числом K. Мы получим супергармоническую функцию, которая станет также супергармонической в окрестности x_0, если положить ее в точке x_0, равной $\mathscr{L}_{x_0} u$. Множество, где эта функция U равна K, разрежено и содержит $C\omega \setminus \{x_0\}$; кроме того, функция U тонко непрерывна в x_0. Так как $u = U$ в тонкой окрестности x_0 всюду, кроме точки x_0, то мы получаем требуемый результат.

Теорема IX. 12. *Если функция u супергармонична в ω (открытом подмножестве пространства Грина) и ограничена снизу вблизи $x_0 \in \partial\omega$, причем $C\omega$ разрежено в x_0 (т. е. точка x_0 иррегулярна для ω), то u имеет тонкий предел в x_0.*

Доказательство. Все сводится к случаю, когда ω ограничено в $\mathbb{R}^n$ и функция u ограничена снизу в ω.

Результат очевиден, если x_0 — изолирсванная точка на $\partial\omega$. В противном случае рассмотрим функцию v, супергармоническую в окрестности x_0, причем $v(x_0)$ конечно и $v(x) \to +\infty$ при $x \in \complement\omega$, $x \neq x_0$, $x \to x_0$. Если $u+v$ стремится при $x \to x_0$ к $+\infty$ по ω, а следовательно, в тонкой топологии, то, поскольку v имеет конечный тонкий предел, u должно иметь бесконечный тонкий предел в x_0.

Если же $\mathscr{L}_{x_0}(u+v)$ конечно, то мы замечаем, что $\mathscr{L}_x(u+x) \to +\infty$ при $x \neq x_0$, $x \in \partial\omega$, $x \to x_0$, и предыдущая лемма показывает, что $u+v$ имеет тонкий предел, равный $\mathscr{L}_{x_0}(u+v)$, а значит, u также имеет тонкий предел.

Замечание. Очевидно достаточно, чтобы функция u была ограничена снизу в некоторой тонкой окрестности, содержащейся в ω, поскольку она содержится в открытом множестве, на котором u также ограничена снизу.

Лемма IX. 13. *Если функция u супергармонична в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то функция u/h_{x_0} имеет конечный тонкий предел в x_0 при $x \neq x_0$, $x \to x_0$, равный* $\liminf\limits_{x \neq x_0,\, x \to x_0} u/h_{x_0}$.

Доказательство. Как мы уже видели, $\liminf u/h_{x_0}$ равен нулю при условии, что $\mu_u\{x_0\} = 0$, а следовательно, он всегда конечен (см. доказательство теоремы IX. 7). Если K больше этого $\liminf$, то множество, где $u/h_{x_0} > K$, должно быть разреженным (теорема IX. 7, а)), и это показывает, что u/h_{x_0} имеет тонкий предел, равный этому $\liminf$.

Лемма IX. 14. *Пусть функция u супергармонична в $\omega \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям*

$$-\infty < \lambda = \liminf_{x \in \omega,\, x \to x_0} \frac{u}{h_{x_0}} < \liminf_{y \in \partial\omega,\, y \neq x_0,\, y \to x_0} \frac{\mathscr{L}_y u}{h_{x_0}(y)}$$

(x_0 — неизолированная точка $\partial\omega$). Тогда $\complement\omega$ разрежено в x_0, и u/h_{x_0} имеет в x_0 тонкий предел, равный λ.

Доказательство. Прибавляя функцию ah_{x} $(a > \lambda)$, мы сводим дело к случаю $u \geqslant 0$, когда проходит доказательство, подобное доказательству леммы IX. 11. Введем число K, заключенное строго между обоими $\liminf$, и рассмотрим функцию $\inf(u, Kh_{x_0})$, продолженную вне $\{x_0\}$ с помощью Kh_{x_0}. Эта функция может быть продолжена в x_0 как функция U супергармоническая, в окрестности x_0; тогда множество $\{x \neq x_0, U(x)/h_{x_0}(x)=K\}$ будет разрежено в x_0 (теорема IX. 13, a)), и U/h_{x_0} имеет тонкий предел λ (лемма IX. 13), чем и завершается доказательство.

Теорема IX. 15. *Если функция u супергармонична в ω (открытом подмножестве пространства Грина Ω) и неотрицательна вблизи точки $x_0 \in \partial\omega$, в которой $C\omega$ разрежено, то отношение $u/G_{x_0}^{\Omega}$ имеет конечный тонкий предел в x_0.*

Доказательство. Вопрос сводится к случаю ограниченного множества ω в $\mathbb{R}^n$. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы IX. 12 с использованием теоремы IX. 7 и предыдущей леммы.

Заметим, что условие $u \geqslant 0$ можно заменить условием ограниченности снизу функции $u/G_{x_0}^{\Omega}$ в тонкой окрестности точки x_0. Разумеется, $G_{x_0}^{\Omega}$ можно в теореме IX. 15 заменить на любую функцию $G_{x_0}^{\Omega'}$, где область $\Omega' \ni x_0$.

Следствие. *Решение H_f^{ω} задачи Дирихле имеет тонкий предел в иррегулярной точке x_0 (равно как и отношение $H_f^{\omega}/G_{x_0}^{\Omega}$; фактически последний предел равен нулю), по крайней мере для $f \geqslant 0$.*

Этот результат можно уточнить. А именно, упомянутый тонкий предел равен $\int f\,d\nu$, где $\nu = b_{\varepsilon_{x_0}}^{C\omega}$ (это очевидно, если f — потенциал на Ω).

Замечание. Поведение ограниченной гармонической в Ω функции u в окрестности иррегулярной точки x_0 можно описать точнее: $u(x_n)$ стремится к тонкому пределу в x_0 при условии, что $x_n \in \Omega$, $x_n \to x_0$

и $G_{y_0}^{\Omega}(x_n)$ стремится к тонкому пределу $G_{y_0}^{\Omega}$ в x_0 ($y_0 \in \Omega$), т. е. к $\limsup\limits_{x_0} G_{y_0}^{\Omega}$ (это условие не зависит от y_0). Более подробно см. об этом Брело [16].

8. Дальнейшие дополнения и указания. a) Тонкая топология полезна также при изучении поведения супергармонической функции в окрестности регулярной граничной точки. Можно поставить задачу Дирихле и определить огибающие типа Перрона — Винера с $\liminf$ и $\limsup$ в тонкой топологии (по крайней мере для относительно компактных открытых множеств); это дает те же самые огибающие (Брело [13]).

b) Используя понятие равномерной интегрируемости, введенное в теорию потенциала Дубом [1], можно доказать следующий результат: если гармоническая функция u в относительно компактной области ω имеет граничные тонкие пределы f почти всюду (относительно гармонической меры) и если u равномерно интегрируема по гармоническим мерам $\rho_{x_0}^{\omega_i}$ (области ω_i относительно компактны в ω, и $x_0 \in \omega_i$), то u совпадает с H_f^{ω} (см. Брело [22]).

c) Упомянем о понятиях *разреженности порядка* φ (Брело [5]) и *внутренней разреженности* (т. е. разреженности для всякого замкнутого подмножества в $e \cup \{x_0\}$) (Брело [8], Картан [2]).

d) Если u и v — положительные супергармонические функции в пространстве Грина Ω, то отношение u/v (мы полагаем его $+\infty$ там, где оно не определено) имеет конечный тонкий предел в каждой точке, за исключением некоторого полярного множества μ_v-меры нуль, т. е. v-полярного множества (гл. VIII, п. 6). Этот результат Дуба [4], который покрывает теорему IX. 15, в действительности был получен как следствие более общего результата (также принадлежащего Дубу) о поведении супергармонических функций на границе Мартина (см. гл. XVI, п. 4).

e) Тонкая топология играет важную роль также в теории так называемых BLD-*функций* (или *уточнен-*

ных BL-*функций*) [1]. Например, в любом открытом множестве $\omega \subset \mathbb{R}^n$ всякая BLD-функция тонко непрерывна квазивсюду (Дени [3]). Вероятно, теоремы IX. 12 и IX. 15 в общем случае на эти функции не распространяются, однако заметим, что всякая BLD-функция вне некоторого компактного множества в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ имеет тонкий предел на бесконечности (Дени — Лионс).

9. Приложение к теории функций. Классическая теорема Вейерштрасса утверждает, что для функции $f(Z)$, мероморфной всюду в некоторой окрестности точки Z_0, кроме самой точки Z_0, предельное множество (значений этой функции) в Z_0 либо одноточечно (т. е. существует предел в Z_0), либо есть вся расширенная плоскость. Дуб [7] заметил, что то же самое утверждение верно для тонких предельных множеств. Доказывается это непосредственно, и Тода [1] заметил, что доказательство сохраняет силу, если Z_0 заменить на замкнутое множество, разреженное в Z_0. Иными словами, имеет место

Теорема IX. 16. *Если функция $f(Z)$ мероморфна в открытом множестве ω и $C\omega$ разрежено в Z_0, то тонкое предельное множество в Z_0 либо одноточечно, либо совпадает с расширенной плоскостью.*

Доказательство. Пусть λ не является предельным значением. Можно (выполнив в случае надобности дробно-линейное преобразование), считать, что $\lambda = \infty$. Тогда для некоторой тонкой окрестности σ точки Z_0 функция f будет ограничена в $\omega \cap \sigma$. Вещественная и мнимая части функции f имеют в Z_0 тонкий предел (теорема IX. 12), значит, и сама функция f тоже.

Этот вопрос был более глубоко разработан Дубом [7], а затем рядом авторов, в особенности Тодой [1, 2]. Например: если Z_0 — изолированная граничная

[1]) См. Дени [3], Дени и Лионс [1], Брело [15], Дуб [6]. Общая BLD-функция в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — это вещественная квазивсюду конечная функция, являющаяся пределом квазивсюду последовательности гладких (даже класса C^∞) функций с конечной полунормой Дирихле (т. е. с конечным интегралом Дирихле), представляющей собой последовательность Коши по этой полунорме.

точка и если в Z_0 предела нет (т. е. имеет место существенная особенность), но есть тонкий предел, то не существует пикаровских исключительных значений (Дуб); в общем случае, когда в Z_0 нет и тонкого предела, исключительные значения для любой тонкой окрестности точки Z_0 образуют локально полярное множество (Тода).

Глава X

СВЯЗИ С ГРАНИЦЕЙ ШОКЕ

1. Границы Шоке и Шилова. Определение X. 1. Пусть на компактном пространстве E рассматривается семейство $\mathscr{E}$ функций со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, которые мы предполагаем полунепрерывными снизу и $> -\infty$. Следуя Шоке, назовем точку $X \in E$ *$\mathscr{E}$-экстремальной*, если любая единичная мера $\mu \geqslant 0$ на E, удовлетворяющая для всех $f \in \mathscr{E}$ неравенству $\int f(x)\, d\mu(x) \leqslant f(X)$, совпадает с ε_X (единичной массой в точке X). Множество таких точек называется *границей Шоке* [1]) пространства E (относительно $\mathscr{E}$).

Если $\mathscr{E}$ — векторное пространство вещественных непрерывных функций, то данное определение сводится к тому, что всякая положительная единичная мера μ, удовлетворяющая условию $\int f\, d\mu = f(X)$ для всех f, совпадает с ε_X.

Если E — выпуклое компактное множество в отделимом локально выпуклом топологическом пространстве, а $\mathscr{E}$ — множество сужений на E всех непрерывных линейных форм, то $\mathscr{E}$-экстремальные точки совпадают с крайними точками множества E.

Наименьшее компактное множество, на котором каждая функция из $\mathscr{E}$ достигает своего минимума

[1]) Сам Шоке назвал ее тонкой границей, поскольку она содержится в границе Шилова (см. ниже).

(если оно существует), называется *границей Шилова* множества E.

Бауэр [1] доказал, что если функции из $\mathscr{E}$ разделяют точки E и выполнено условие: $u \in \mathscr{E}$, $v \in \mathscr{E} \Rightarrow \Rightarrow u+v \in \mathscr{E}$, то граница Шилова существует и является замыканием границы Шоке. Обе эти границы весьма важны, и поэтому представляет интерес их связь с понятием разреженности. Она дается следующей теоремой.

2. Теорема X. 2 (Бауэр [1]). *Рассмотрим в пространстве Грина Ω_0 относительно компактное открытое множество Ω и семейство $\mathscr{E}$ вещественных непрерывных в $\overline{\Omega}$ и гармонических в Ω функций. Тогда граница Шоке $\overline{\Omega}$ относительно $\mathscr{E}$ есть множество всех регулярных граничных точек (а замыкание этого множества, называемое иногда приведенной границей*[1]*), есть соответствующая граница Шилова).*

Доказательство. Теорема является простым следствием следующей леммы Келдыша (литературные указания и простое доказательство этой леммы см. в Брело [20 bis]).

Если x_0 — регулярная граничная точка, то существует функция из $\mathscr{E}$, которая равна нулю в x_0, а в остальных точках положительна.

Для наших целей достаточно существования для заданных $\varepsilon > 0$, $K > 0$ такой неотрицательной функции из $\mathscr{E}$, которая $< \varepsilon$ в x_0 и $> K$ вне некоторой окрестности δ точки x_0 (это доказывается проще). Будем использовать именно эту ослабленную лемму. Предположим, что x_0 — регулярная точка, а $\mu \geqslant 0$ — единичная мера, такая, что $\int f\,d\mu = f(x_0)$, $\forall f \in \mathscr{E}$. Беря в качестве f функцию из леммы, получаем

$$\varepsilon \geqslant \int f\,d\mu \geqslant \int_{C\delta} f\,d\mu \geqslant K_1\mu\,(C\delta).$$

[1]) Первоначально приведенная граница определялась как множество точек, любая окрестность которой пересекает $\partial\Omega$ не по локально полярному множеству.

Следовательно, величина $\mu(C\delta)$ сколь угодно мала, т. е. $\mu = \varepsilon_{x_0}$, и точка x_0 $\mathscr{E}$-экстремальна.

Обратно, предположим, что x_0 $\mathscr{E}$-экстремальна. Тогда $x_0 \notin \Omega$. Действительно, в противном случае $\int f\,d\sigma = f(x_0)$, $\forall f \in \mathscr{E}$, где σ — равномерно распределенная единичная мера на любой достаточно малой сфере с центром в x_0.

Итак, пусть $x_0 \in \partial\Omega$; введем гармоническую меру ρ_x^Ω в точке $x \in \Omega$ и представление $H_\varphi^\Omega(x) = \int \varphi(y)\,d\rho_x^\Omega(y)$ (φ — конечная непрерывная на $\partial\Omega$ функция). Рассмотрим фильтр $\mathfrak{F}$, являющийся следом на Ω фильтра окрестностей точки x_0, и пусть μ — любой слабый предел мер ρ_x^Ω по какому-либо фильтру $\mathfrak{F}'$, более тонкому, чем $\mathfrak{F}$. Тогда

$$\int f\,d\rho_x^\Omega \xrightarrow[\mathfrak{F}']{} \int f\,d\mu, \quad \forall f \in \mathscr{E}.$$

Но

$$\int f\,d\rho_x^\Omega = f(x) \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} f(x_0),$$

и поэтому $\int f\,d\mu = f(x_0)$. Так как точка x_0 $\mathscr{E}$-экстремальна, то $\mu = \varepsilon_{x_0}$. Следовательно, меры ρ_x^Ω слабо сходятся к ε_{x_0} по фильтру $\mathfrak{F}$. Таким образом, $H_\varphi^\Omega(x) \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} \varphi(x_0)$, и мы заключаем, что точка x_0 регулярна.

Замечание. Обратную часть теоремы можно также получить, исходя из существования в иррегулярной точке x_0 тонкого предела H_f^Ω ($\forall f \in \mathscr{E}$). Он дается выражением $\int f\,d\nu_{x_0}$ (где ν_{x_0} — единичная положительная мера, отличная от ε_{x_0} [1])) и равен $f(x_0)$ (в силу непрерывности f). Отсюда следует, что точка x_0 не является $\mathscr{E}$-экстремальной.

---

[1]) Фактически ν_{x_0} есть $b_{\varepsilon_{x_0}}^{C\Omega} \neq \varepsilon_{x_0}$ (выметание производится в некоторой области Грина $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$).

Упражнение. Рассмотреть вместо $\overline{\Omega}$ компакт K, взяв в качестве $\mathscr{E}$ множество всех вещественных непрерывных на K функций, гармонических в K. Показать, что граница Шоке состоит из регулярных граничных точек множества $\overset{\circ}{K}$ и точек множества $K \setminus \overline{\overset{\circ}{K}}$.

Теорема X.3. *Рассмотрим в пространстве Грина Ω_0 компакт K и множество $\mathscr{E}$ функций на K, каждая из которых является сужением на K функции, гармонической в некоторой открытой окрестности множества K. Тогда $\mathscr{E}$-экстремальные точки совпадают с устойчивыми граничными точками K, границей Шоке множества K относительно $\mathscr{E}$ служит тонкая граница множества K, а границей Шилова*[1]) *служит ∂K.*

Доказательство. Как и выше, никакая внутренняя точка не является $\mathscr{E}$-экстремальной.

Далее, обозначим через K_φ решение задачи Дирихле для множества K и конечной непрерывной функции φ на ∂K (гл. VI, п. 6, δ)). Отображение $\varphi \longmapsto K_\varphi(x)$ является возрастающим линейным функционалом, который, следовательно, представим в виде $\int \varphi\, d\nu_x$, где ν_x — положительная единичная мера[2]) и $\nu_x = \varepsilon_x$ в том и только в том случае, когда точка $x \in \partial K$ устойчива. Заметим, что $K_f = f$ на K, $\forall f \in \mathscr{E}$. Следовательно, если точка $x \in \partial K$ неустойчива, то $f(x) = \int f\, d\nu_x$, $\forall f \in \mathscr{E}$, причем $\nu_x \neq \varepsilon_x$, и точка x не $\mathscr{E}$-экстремальна.

Обратно, если точка $x_0 \in \partial K$ не $\mathscr{E}$-экстремальна, то существует неотрицательная единичная мера

---

[1]) Условие отделимости Бауэра (п. 1) легко проверяется для $\mathbb{R}^n$, а в общем случае устанавливается исходя из рассмотрения отображения $x \longmapsto G_y^{\Omega}(x)$ для $y \in \complement K$ с использованием симметрии G и аналитичности гармонических функций.

[2]) Фактически $\nu_x = b_{\varepsilon_x}^{\complement K}$ и совпадает с ε_x в том и только в том случае, когда $\complement K$ не разрежено в x (т. е. когда точка x устойчива).

$\rho_{x_0} \neq \varepsilon_{x_0}$, такая, что $f(x_0) = \int f\, d\rho_{x_0}$, $\forall f \in \mathscr{E}$. Пусть U — неотрицательная субгармоническая функция, равная нулю только в точке x_0 (подобно функции $|x - x_0|$ в $\mathbb{R}^n$)[1]). Тогда для любой открытой окрестности ω множества K имеем

$$H_U^{\omega}(x_0) = \int H_U^{\omega}(x)\, d\rho_{x_0}(x) \geqslant \int U\, d\rho_{x_0} > 0.$$

Следовательно, $K_U(x_0) > 0$. Точка x_0 неустойчива, т. е. $\complement K$ разрежено в x_0.

Доказательство будет закончено, если мы убедимся, что множество устойчивых точек плотно на ∂K. Если последнее неверно, то $\complement K$ будет разрежено на множестве $e = \sigma \cap \partial K$ для некоторого открытого σ; тогда для каждой компоненты множества $\Omega_1 \setminus K$ (Ω_1 открыто, $\Omega_1 \supset K$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_0$) множество e имело бы нулевую гармоническую меру, и значит, существовала бы в $\Omega_1 \setminus K$ положительная супергармоническая функция, стремящаяся к $+\infty$ в точках из e. Положив ее на K равной $+\infty$, мы получили бы функцию, супергармоническую в σ, и тогда множество $\sigma \cap K$ было бы локально полярным, а следовательно, $\complement K$ было бы неразреженным в точках множества e. Получено противоречие.

Замечание. Семейства $\mathscr{E}$ — это частные случаи семейств общей аксиоматической теории Бауэра [1], который рассматривал на данном компактном пространстве линейное пространство вещественных непрерывных функций, содержащее постоянные и разделяющее точки этого компактного пространства; соответствующая задача Дирихле ставится на границе Шилова.

Упражнение. В предыдущих теоремах определить границу Шилова непосредственно.

---

[1]) Если точка x_0 неполярна, то годится функция $G_{x_0}(x_0) - G_{x_0}(x)$. В противном случае достаточно рассмотреть $u_n = \inf(G_{x_0}, n)$ и $\sum \lambda_n u_n(x_0) - \sum \lambda_n u_n(x)$, выбрав последовательность $\lambda_n > 0$ так, чтобы последняя сумма была конечной.

Глава XI

ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ АКСИОМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ)

1. Мы приведем здесь лишь некоторые понятия для ряда важнейших случаев[1]).

Несколько видоизменив исходные положения теории Дуба [1], Брело [19, 20] развил теорию, обобщающую классическую теорию гармонических и супергармонических функций следующим образом.

Пусть дано локально компактное, но не компактное локально связное отделимое пространство Ω. С каждым открытым множеством ω свяжем некоторое линейное пространство вещественных непрерывных функций (которые будем называть гармоническими функциями в ω). Будем обозначать через $\overline{\Omega}$ компактификацию Александрова пространства Ω.

Аксиома 1 (аксиома пучка). *Всякая гармоническая функция в ω будет гармонической и в любом открытом множестве $\omega' \subset \omega$, и всякая функция, гармоническая в некоторой окрестности каждой точки из ω, будет гармонической в ω.*

Регулярные множества. Открытое множество ω называется *регулярным*, если $\overline{\omega} \subset \Omega$ и если любая вещественная непрерывная функция f на $\partial\omega$ допускает единственное непрерывное продолжение H_f на $\overline{\omega}$, гармоническое в ω и возрастающее вместе с f. Следовательно, это продолжение является линейной формой $\int f\, d\rho_x^\omega$ ($\rho_x^\omega \geqslant 0$ называется *гармонической мерой* в точке x).

Аксиома 2. *Регулярные открытые множества образуют базис топологии пространства Ω.*

---

[1]) Большая часть исследований различных авторов, частично отраженных в этой главе, освещена в Брело [28].

Аксиома 3. *В области ω любая возрастающая последовательность гармонических функций стремится либо к гармонической функции, либо к $+\infty$.*

Как установили Константинеску и Корня, отсюда вытекает тот же вывод для любого направленного по возрастанию семейства, а Мокободский, Лоэб и Уолш показали, что аксиома 3 (при наличии других аксиом) эквивалентна тому, что всякое семейство гармонических функций $u_i \geqslant 0$ в области ω, ограниченное сверху в одной точке, будет равностепенно непрерывно в любой точке области ω.

2. Определение. Функция u называется *гипергармонической* в открытом множестве ω_0, если она полунепрерывна снизу, $> -\infty$ и мажорирует $\int u\, d\rho_x^\omega$ для любого регулярного множества $\omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0$.

Если ω_0 связно, то такая функция u либо $\equiv +\infty$, либо конечна на плотном множестве. Гипергармоническая в открытом множестве ω_0 функция u, конечная на плотном множестве, называется *супергармонической*.

Принцип минимума. a) *Гипергармоническая в области функция $u \geqslant 0$ либо всюду равна нулю, либо всюду > 0.*

b) *Если в открытом множестве ω существует супергармоническая функция $u \geqslant \varepsilon > 0$, то любая гипергармоническая в ω функция u, для которой* $\liminf u \geqslant 0$ *в каждой граничной точке, будет неотрицательной в ω. Если константы являются гармоническими функциями, то для любой гипергармонической функции u в любом ω имеем*

$$\inf_{y \in \omega} u(y) = \inf_{x \in \partial\omega} (\liminf u \text{ в } x).$$

Часто бывают полезными следующие определение и замечание.

h-гармонические функции. Если h — вещественная непрерывная положительная функция на Ω, то отношения u/h, где u — функция, гармоническая на некотором открытом множестве, образуют новый пучок, удовлетворяющий аксиомам (с тем же набором регулярных открытых множеств). Соответствующие гипергармонические функции (называемые *h-гипергармоническими функциями*) являются частными от деления исходных гипергармонических функций на h.

Если h есть гармоническая функция из заданного пучка, то h-гармонические функции содержат константы.

Примеры. Решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа с достаточно гладкими коэффициентами в заданной области пространства $\mathbb{R}^n$ удовлетворяют нашим аксиомам. Были получены некоторые обобщения на случай разрывных коэффициентов (Эрве [1—3]).

Потенциалы. Супергармоническая функция v, мажорирующая на открытом множестве ω некоторую гармоническую функцию, обладает наибольшей гармонической минорантой; если последняя равна нулю, то v называется *потенциалом*.

Существование в Ω положительного потенциала V эквивалентно существованию в Ω положительной супергармонической негармонической функции. Это будет иметь место, если существуют две непропорциональные положительные гармонические функции (условие, таким образом, носит локальный характер). Такие пространства Ω можно рассматривать как обобщение пространства Грина.

Обозначим через (А) систему аксиом 1—3 плюс существование положительного потенциала и через (A_1) то же самое при наличии счетной базы.

Следствия из (А). a) Для всякой точки x существуют потенциалы с носителем $\{x\}$ (т. е. гармонические вне $\{x\}$)[1], но они не обязательно будут пропорциональны. Случай „пропорциональности" важен для дальнейшего и обозначается через (АР) (через (A_1P) при наличии счетного базиса).

b) Неотрицательные гипергармонические функции на Ω образуют конус Φ из излагавшейся выше общей

[1]) Константинеску и Корня [2], I. Для (A_1) этот результат получила ранее Эрве [1].

теории. Локально полярные множества полярны, и некоторые основные свойства классической разреженности можно получить без дополнительных предположений. Это относится, например, к сверхразреженности и строгой разреженности при наличии разреженности в любой полярной точке $x_0 \not\in e$, к существованию у неотрицательной супергармонической на открытом множестве ω функции тонкого предела в граничной точке, где $C\omega$ разрежено.

В случае (A_1) слабая разреженность эквивалентна разреженности для любой точки $x \not\in e$[1]); при дополнительных предположениях можно получить дальнейшие обобщения[2]).

Задача Дирихле. В случае (A) задачу Дирихле можно изучать, используя обычную топологию, во всяком случае для относительно компактных открытых множеств ω; разрешимость имеет место для любой вещественной непрерывной граничной функции. Иррегулярная граничная точка (определяемая так же, как в классическом случае) характеризуется слабой разреженностью $C\omega$ в x_0.

В случае (A_1) теорема о разрешимости справедлива в таком же виде, как и в классическом случае.

3. Обобщение представления Рисса (в случае (A_1)). Если упорядочить супергармонические функции следующим образом:

$$u_1 \succ u_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2 + (\text{неотрицательная супергармоническая функция})$$

(это — так называемый *специальный порядок*), то конус S^+ неотрицательных супергармонических функ-

[1]) На самом деле слабая разреженность $e \not\ni x_0$ в x_0 эквивалентна разреженности при наличии счетного базиса окрестностей точки x_0 и, значит, заведомо имеет место в случае (A_1). Это — результаты позднейших исследований Бауэра и Константинеску — Корня (ссылки см. в Брело [28]).

[2]) См. Брело [19, 20, 33], Эрве [1]. О поведении ограниченных гармонических функций в открытом множестве ω в окрестности граничной точки x_0, где $C\omega$ разрежено, см. Смирнелис [1].

ций превращается в решетку (даже полную). Введем такое соотношение эквивалентности для пар неотрицательных супергармонических функций:

$$((u_1, u_2) \sim (u_1', u_2')) \Leftrightarrow (u_1 + u_2' = u_2 + u_1')$$

и рассмотрим соответствующие классы эквивалентности $[u_1, u_2]$; они образуют линейное пространство S. При подходящей топологии T на S (Эрве)[1]) мы получаем отделимое локально выпуклое топологическое линейное пространство, причем конус S^+, изоморфный множеству всех пар $[u, 0]$, имеет компактное метризуемое основание B. Теперь классическая теорема Шоке о крайних элементах дает для любой неотрицательной супергармонической функции u представление

$$l(u) = \int l(v)\, d\mu(v), \quad v \in B$$

(l — любая непрерывная линейная форма), откуда $u(x) = \int v(x)\, d\mu(v)$, где μ — единственная положительная единичная мера на множестве B, сосредоточенная на множестве его крайних точек. Эти крайние точки суть либо гармонические функции (их множество обозначим через H), либо потенциалы с точечными носителем (их множество обозначим через P). Следовательно,

$$u(x) = \int v(x)\, d\mu_1(v) + \int v(x)\, d\mu_2(v),$$

---

[1]) Если принять еще одну аксиому о существовании базиса β, состоящего из *вполне определяющих областей* δ (см. ниже п. 5), то полунормы пар (u_1, u_2), равные $\left| \int u_1\, d\rho_x^\delta - \int u_2\, d\rho_x^\delta \right|$ $(\delta \in \beta,\ x \in \delta)$, определят топологию на S, в которой конус S^+ будет иметь компактное метризуемое основание (указано Картаном для классического случая (не опубликовано) и далее развито Брело [19]). Эрве [1] удалось обойтись без введения этой новой аксиомы, а Мокободский предложил другой простой способ построения этой топологии (см. Мокободский [1], Брело [28]).

где мера μ_1 сосредоточена на H, а мера μ_2 — на P. Первый член есть наибольшая гармоническая миноранта функции u; в случае пропорциональности множество P гомеоморфно $\bar{\Omega}$ и второй член может быть записан в виде $\int p_X(x)\,d\mu_2'(X)$ (где мера μ_2' на Ω соответствует мере μ_2 на B, сосредоточенной на P). Первый член приводит к введению общей границы Мартина (см. часть 2).

4. Аксиома (D). Теория существенно обогащается и приближается по тонкости результатов к классической теории, если принять следующую новую аксиому:

Аксиома (D). *Всякий ограниченный на Ω потенциал v, гармонический в открытом множестве ω (дополнение к наибольшему такому открытому множеству называется* носителем потенциала *v), мажорируется любой неотрицательной супергармонической функцией u, которая $\geqslant v$ на* $C\omega$.

Отсюда вытекает то же самое свойство для любой подобласти пространства Ω; если Ω имеет счетный базис, то аксиома D эквивалентна этому локальному свойству.

Некоторые следствия из $(A_1 + D)$. a) Для супергармонической функции, так же как и в классическом случае, справедлива теорема сходимости; в случае пропорциональности последняя эквивалентна аксиоме (D).

b) (Слабая разреженность) $\Leftrightarrow$ (разреженность) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (сильная разреженность); полуполярные множества и полярные множества совпадают.

c) Неразреженность множества e в точке $x_0 \notin e$ всегда строгая (даже при отсутствии счетного базиса).

d) Точки разреженности множества e, принадлежащие этому множеству, образуют полярное множество, и свойство Шоке имеет место, например, для веса $\int \hat{R}_1^e \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$. Это важно при изучении поведения различных емкостей убывающих множеств, когда, как и в классическом случае, существенна тонкая топология (см. Брело [26—30]).

5. Сопряженные пучки. (См. Эрве [1].) Рассмотрим совокупность предположений (A_2), включающую в себя (A_1P) и предположение о существовании базиса относительно компактных открытых множеств, которые являются *вполне определяющими* в том смысле, что для любого потенциала v, гармонического в δ, $R_v^{C\delta} = v$ в δ.

Выберем потенциал p_y с носителем $\{y\}$, принадлежащий фиксированному компактному основанию конуса S^+ (в топологии Эрве). Тогда всякий потенциал можно будет записать в виде $\int p_y(x)\,d\mu(y)$, где μ — единственным образом определенная неотрицательная мера на Ω.

Далее, для всякого относительно компактного открытого множества ω функция $\widehat{R}_{p_y}^{C\omega}$ является потенциалом и допускает поэтому представление $\int p_z(x)\,d\sigma_y^\omega(z)$. Рассмотрим любое вполне определяющее множество $\delta \subset \bar{\delta} \subset \omega_0$ и конечную непрерывную функцию f на ω_0, удовлетворяющую условию $f(y) = \int f(z)\,d\sigma_y^\delta(z)$. Такие функции f для всех ω_0 образуют пучок, удовлетворяющий аксиомам 1—3, причем множества δ образуют базис регулярных открытых множеств, а σ_y^δ является гармонической мерой. При изменении в выборе потенциала p_y сопряженные гармонические функции умножаются на некоторую вещественную положительную непрерывную функцию.

Далее, $y \longmapsto p_y(x)$ представляет собой соответствующий потенциал с носителем $\{x\}$ и обозначается через $p_x^*(y)$.

Пример. Если рассмотреть в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа с локально липшицевыми коэффициентами, то при подходящем выборе p_y сопряженный пучок будет соответствовать классическому сопряженному уравнению (Эрве [1]).

6. Выметание. Приняв лишь предположения (A) или даже более слабые предположения (Бобок — Константинеску — Корня), можно обобщить важнейшие свойства функций R_φ^e и особенно функций R_u^e, $\widehat{R}_u^e$ для супергармонических неотрицательных u (аддитивность по u, строгая субаддитивность по e и т. д.). Заметим, что при предположениях (A_1 + D) функция $\widehat{R}_u^e$ является наименьшей неотрицательной супергармонической функцией, которая мажорирует u квазивсюду на e. Использование тонкой топологии оказывается здесь полезным.

Что касается выметания меры, то общая теория значительно отличается от классической из-за отсутствия симметрической функции Грина. Принимая предположения (A), рассмотрим меру $\mu \geqslant 0$ с компактным носителем; равенство $\int u\, db_\mu^e = \int \widehat{R}_u^e\, d\mu$, подсказанное классическим случаем, если оно выполняется для всех вещественных непрерывных потенциалов u, определяет единственным образом меру $b_\mu^e \geqslant 0$ (называемую *выметенной мерой*). При дополнительных предположениях эта формула может быть обобщена на случай общих супергармонических функций u.

Эта теория имеет много приложений; в случае (A_1) уже справедлив критерий разреженности множества e в точке x_0 в форме $b_{\varepsilon_{x_0}}^e \neq \varepsilon_{x_0}$ (Константинеску [2]).

Принимая предположения (A_2), рассмотрим сопряженный пучок (п. 5). Пусть звездочка обозначает „сопряженное понятие". Тогда справедлива следующая ключевая формула: $\widehat{R}_{p_y}^e(x) = \widehat{R}_{p_x^*}^{*e}(y)$ (Эрве). Из нее, в частности, вытекают:

a) тождественность сопряженно полярных и полярных множеств;

b) эквивалентность аксиомы (D) для сопряженного и для исходного пучков;

c) следующий критерий разреженности множества e в точке $x_0 \notin e$: для некоторой окрестности δ точки x_0 имеем $R^{*e\cap\delta}_{p^*_{x_0}} \neq \overset{*}{p}_{x_0}$, а в случае, когда точка x_0 полярна (даже если она принадлежит e), $\widehat{R}^{*e}_{p^*_{x_0}} \neq \overset{*}{p}_{x_0}$.

Однако мы не можем здесь входить в детали многочисленных обобщений классических результатов при различных предположениях (см. Эрве [1], Бобок, Константинеску и Корня [1, 2], Константинеску и Корня [2], Константинеску [2], Брело [27, 28, 30, 32, 33]).

7. Задача Дирихле для компактных множеств. Здесь также были получены обобщения классических результатов. Прадель [1, 2] сперва при предположениях (A_1), а затем и при многих других предположениях выяснил роль разреженности и рассмотрел связи рассматриваемого вопроса со свойством квазианалитичности гармонических функций (т. е. с тем обстоятельством, что гармоническая функция является нулем, если она равна нулю в окрестности некоторой точки).

Отметим еще, что в рамках аксиоматической теории (при тех или иных дополнительных предположениях) можно проследить и связи с границей Шоке, но, кажется, эти результаты нигде не публиковались.

8. Более слабые аксиоматики. Для того чтобы дать приложения к теории уравнений параболического типа, Бауэр [2, 3, 5] ослабил предыдущие аксиомы следующим образом. Если отвлечься от некоторых несущественных деталей, то он сохранил аксиомы 1 и 2 и ослабил аксиому 3, требуя, чтобы для направленного по возрастанию семейства гармонических функций u_i на открытом множестве ω $\sup u_i$ также был гармонической функцией при одном из следующих условий: (K_1) $\sup u_i$ ограничен; (K_2) $\sup u_i$ конечен; (K_D) (аксиома Дуба) $\sup u_i$ конечен на плотном множестве. Для того чтобы получить принцип минимума, Бауэр вводит следующую аксиому:

(T) *в* Ω *существует положительная гармоническая функция* h *и* h*-гипергармонические функции* (определение такое же, как в классическом случае) *разделяют точки* Ω.

(Часто предполагают, что уже положительные функции разделяют точки Ω.)

Заметим, что эти аксиомы удовлетворяются и в первоначальной аксиоматике, если предположить, что в Ω существуют две непропорциональные гармонические функции.

Отправляясь от этих аксиом (в том числе от аксиомы (K_D)) и предполагая наличие счетного базиса в Ω и существование для каждой точки $x \in \Omega$ положительного в x потенциала, Бауэр построил теорию, аналогичную изложенной выше. Однако интегральное представление в этой теории более сложно и не столь полезно в связи с отсутствием у конуса S^+ основания. Понятие разреженности играет аналогичную роль.

Преимущество аксиоматики Бауэра состоит в том, что она применима также к уравнению теплопроводности и вообще к широкому классу уравнений второго порядка параболического типа. Бобок, Константинеску и Корня [2], Константинеску и Корня (в обширной монографии [4] по гармоническим пространствам), Уолш и другие авторы еще более ослабили эти аксиомы и получили более общие теории локального и глобального характера. Некоторые обратные проблемы были рассмотрены Ханзеном и особенно Мокободским и Сибони (см. Мокободский [2]).

Что касается топологий, используемых в этих аксиоматических теориях, то упомянем о недавней книге Фугледе [6], посвященной тонко гармоническим функциям, а также, хотя это и находится вне рамок нашего изложения, о важной роли понятия *ядерности*, введенного Лоэбом и Уолшем (см. также Хинриксен [1]).

Для приложений описанных аксиоматических теорий важно определить все пучки, удовлетворяющие аксиомам. Для случая области в $\mathbb{R}^n$ и функций класса C^2, а также для случая всего пространства $\mathbb{R}^n$ и пучков, инвариантных относительно сдвига и содержащих постоянные, это было сделано Бони [1] (и даже в предположении, что выполняются лишь аксиомы 1 и 2) с помощью предэллиптического (возможно, вырожденного) оператора. В случае не столь гладких функций (типа решений уравнений с разрывными коэффициентами, которые рассматривал Стампакья [1] и которые ввела в рамки предыдущей теории Эрве [2, 3]), этот вопрос остается открытым.

Часть 2

ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРИИ И МИНИМАЛЬНАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ

Глава XII

АБСТРАКТНАЯ МИНИМАЛЬНАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ. МИНИМАЛЬНАЯ ГРАНИЦА. МИНИМАЛЬНАЯ ТОНКАЯ ТОПОЛОГИЯ

1. Введение к части 2. Граничные задачи в теории дифференциальных уравнений в частных производных изучались ранее только для евклидовых границ. Небольшим усовершенствованием было введение точки на бесконечности в $\mathbb{R}^n$ и использование компактифицированного пространства. Впрочем, в классической проективной геометрии также использовались точки, линии и плоскости на бесконечности.

Первым примером введения другой важной границы были *простые концы* Каратеодори, примененные им для изучения поведения функций комплексного переменного. В настоящее время их можно рассматривать как частный случай *границы Мартина* (см. гл. XIV), или компактификации (пополнения). Специалисты, изучавшие задачу Дирихле, также пришли к необходимости расщеплять некоторые граничные точки; ясно, что в круге с разрезом по некоторому радиусу нет никаких оснований ожидать, что в точке, лежащей на этом радиусе, граничное поведение решения будет одинаковым при подходе к ней с разных сторон. Для того чтобы придать этим рассмотрениям более отчетливую форму, представлялось естественным ввести в соответствующей области подходящую метрику, совместимую с евклидовой топологией, и затем пополнить пространство по этой метрике (см. Брело [9]).

Но как вскоре было обнаружено, лучшие результаты получаются, если вводить *границу, зависящую от природы изучаемого класса функций*. Вообще если рассматривается произвольное топологическое пространство Ω и функции на нем со значениями в другом пространстве Ω', то наиболее полезные границы получаются компактификацией или пополнением Ω, зависящим от класса рассматриваемых функций. Эти рассуждения будут развиты в следующей главе и там же будет дан ряд приложений.

Далее, иногда бывает естественно узучать поведение рассматриваемых функций в связи с некоторыми последовательностями точек или некоторыми фильтрами. Эти фильтры можно рассматривать как точки абстрактной границы, причем представляется интересным, а иногда даже необходимым ввести на объединении Ω и этой абстрактной границы топологию таким образом, чтобы сходимость по рассматриваемым фильтрам совпадала со сходимостью в этой топологии. Мы разовьем также и эту идею, а именно выбирая фильтры, связанные с понятием крайних элементов, понятием, которое становится все более важным в анализе (теория Шоке). На этом пути мы придем к понятиям минимальной границы, минимальной разреженности в точках границы и продолжим ранее рассматривавшуюся тонкую топологию до так называемой минимальной тонкой топологии. Фундаментальное значение этих понятий ярко демонстрируется классическими результатами Наим и Дуба о гармонических и супергармонических функциях (эти результаты обобщены Гаурисанкараном на случай аксиоматической теории гармонических функций), которые имеют существенные приложения в теории функций комплексного переменного и в дифференциальных уравнениях с частными производными. Во многих случаях, как мы это увидим ниже, минимальную тонкую топологию можно изучать в рамках теории, развитой в части 1.

2. Предварительные сведения. Изложение в этом пункте основано на работе Мышкиса [1].

Теорема XII. 1. *Пусть Ω — некоторое множество, и пусть в нем задана топология, превращающая его в топологическое пространство Ω_0. Рассмотрим в Ω_0 семейство $\{\mathfrak{B}_i\}$ ($i \in I$) базисов фильтров, образованных* *открытыми множествами, и множество* $\Omega_1 = \Omega \cup I$. *Тогда на* Ω_1 *существуют топологии, удовлетворяющие условиям:*

1) *на* Ω *они индуцируют топологию пространства* Ω_0;

2) *для любой точки* $i \in I$ *пересечения окрестностей этой точки с* Ω *образуют фильтр с базисом* $\mathfrak{B}_i$.

Среди этих топологий имеется сильнейшая топология T_M; *в ней множество* Ω *открыто, а на* I *она индуцирует дискретную топологию; множества из* $\mathcal{L}_i$, *к которым добавлена точка* i, *образуют базис окрестностей точки* i *в этой топологии.*

Среди тех из указанных выше топологий, в которых Ω *открыто, имеется слабейшая топология* T_m; *окрестности точки* $x_0 \in \Omega$ *в* Ω_0 *образуют базис окрестностей в топологии* T_m *(равно как и в* T_M*). Что касается* $i \in I$, *то сопоставим каждому множеству* $\alpha \in \mathfrak{B}_i$ *множество* J_α *точек* $j \in I$, *таких, что* α *содержит какое-либо множество из* $\mathfrak{B}_j$. *Тогда множества* $\alpha \cup J_\alpha$, *где* α *пробегает* $\mathfrak{B}_i$, *образуют базис фильтра, являющегося фильтром окрестностей точки* i *в топологии* T_m *в* Ω_1.

Наконец, топология T_m *будет отделимой в том и только в том случае, когда*

a) *пространство* Ω_0 *отделимо;*

b) $\forall x \in \Omega_0$, $i \in I$, *существуют окрестность точки* x *в* Ω_0 *и множество* $\alpha \in \mathfrak{B}_i$ *без общих точек;*

c) $\forall i, j \in I$, $i \neq j$; *существуют множества* $\alpha \in \mathfrak{B}_i$, $\beta \in \mathfrak{B}_j$ *без общих точек.*

Доказательство. Рассмотрим на Ω_1 топологию, в которой окрестности точки $x \in \Omega_0$ образуют базис окрестностей точки x, а множества $\alpha \cup \{i\}$, где α пробегает $\mathfrak{B}_i$, образуют базис окрестностей точки i. Аксиомы окрестностей выполняются, и эта топология удовлетворяет требованиям 1) и 2); в ней множество Ω открыто, и она индуцирует на I дискретную топологию.

В любой топологии, удовлетворяющей условиям 1) и 2), окрестность точки $x \in \Omega$ или $i \in I$ является, очевидно, окрестностью и в только что построенной топологии, и поэтому последняя действительно является сильнейшей топологией T_M.

Рассмотрим теперь утверждения, связанные с топологией T_m. Проверим, что классы множеств, указанные в формулировке теоремы, удовлетворяют аксиомам окрестностей. Это очевидно для точек $x \in \Omega$; для точки $i \in I$ рассмотрим соответствующее множество $\alpha \cup J_\alpha$ и покажем, что оно является окрестностью (в смысле введенной нами топологии, которую мы временно обозначим через S) для любой своей точки. Это очевидно для точек множества α (открытого в Ω_0); что касается точек $j \in J_\alpha$, то существует $\beta \in \mathfrak{B}_j$, содержащееся в α. Всякое j', для которого $\mathfrak{B}'_j$ содержит элемент $\beta' \subset \beta$, принадлежит J_α. Поэтому β и все эти j' образуют S-окрестность, содержащуюся в $\alpha \cup J_\alpha$. Таким образом, аксиомы окрестностей выполнены, топология S удовлетворяет условиям 1) и 2) и множество Ω в ней открыто.

Осталось сравнить S с любой другой топологией T_1, удовлетворяющей условиям 1) и 2), в которой множество Ω открыто. Рассмотрим произвольную S-окрестность V точки из Ω_1 и покажем, что она является T_1-окрестностью. Это очевидно для точек из Ω. Для точки $i \in I$ множество V содержит $\alpha \cup J_\alpha$. Но α является пересечением множества Ω с некоторой T_1-окрестностью точки i, T_1-внутренность которой мы обозначим через α'. Если $j \in I$, $j \in \alpha'$, то α' есть T_1-окрестность точки j, и $\alpha' \cap \Omega$ содержит элемент из $\mathfrak{B}_j$. Но $\alpha = \alpha' \cap \Omega$, поэтому $j \in J_\alpha$ и $\alpha' \subset \alpha \cup J_\alpha \subset V$. Итак, V есть T_1-окрестность точки i, и мы заключаем, что топология T_1 сильнее, чем S.

Остальные утверждения очевидны.

Замечание. Отметим интересный случай, когда множество Ω открыто для любой топологии, удовлетворяющей условиям 1) и 2). Это случай, когда для всякой точки $x_0 \in \Omega$ существует лежащая в Ω окрестность, не принадлежащая никакому фильтру с базисом $\mathfrak{B}_i$.

3. Абстрактная минимальная разреженность. Следуя Гаурисанкарану [1] и несколько обобщая его изложение, рассмотрим непустое множество Ω и два семейства неотрицательных функций.

Одно из них — это содержащий нулевую функцию *конус* U вещественных функций (которые будем называть *гармоническими*).

Второе — это *выпуклый конус* P функций со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ (которые будем называть *потенциалами*). Таким образом, $p_1, p_2 \in P \Rightarrow \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \in P$ $(\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0)$. (Мы принимаем, что $0 \cdot \infty = 0$.)

Обозначим еще через Σ конус $U + P$, состоящий из функций вида $u + p$, где $u \in U$, $p \in P$. Будем предполагать выполненными следующие аксиомы.

Аксиома A_1. $u \in U$, $p \in P$, $u \leqslant p \Rightarrow u = 0$.

Аксиома A_2. *Если* $u \in U$, $v \in \Sigma$, *то* $\inf(u, v) \in \Sigma$.

В случае когда существует $p \equiv +\infty$, из аксиомы A_1 следует, что $u = 0$, $\forall u \in U$.

Минимальные гармонические функции.

Определение XII.2. Функция $h \in U$ называется *минимальной*, если из $u \in U$, $u \leqslant h$ следует, что $u = \alpha h$ $(\alpha \geqslant 0)$.

Важный частный случай $\mathscr{C}$. Предположим, что конус U выпуклый и рассмотрим линейное пространство $U - U$. Допустим, что при естественном порядке для функций неотрицательные элементы совпадают с элементами из U, т. е. что U является положительным конусом этого линейного пространства. Тогда для $h \in U$, $h \neq 0$,

h минимальна $\Leftrightarrow \{\lambda h \mid \lambda \geqslant 0\}$ есть крайняя образующая конуса U.

Приведенная функция. Так же как и ранее, рассмотрим множество $E \subset \Omega$ и вещественную неотрицательную функцию f на E, мажорируемую функцией из Σ. Положим

$$R_f^E = \inf_{v \in \Sigma} v, \quad v \geqslant f \text{ на } E,$$

и будем вместо R_f^Ω писать просто R_f.

Теорема XII.3. *Для заданных минимальной гармонической функции $h \neq 0$ и множества $E \subset \Omega$ следующие условия эквивалентны:*

a) $R_h^E \neq h$, *т. е. существует такая функция $v \in \Sigma$, что $v \geqslant h$ на E, но не всюду.*

b) *Существует потенциал, мажорирующий h на E.*

c) *Для $u \in U$ условие $u \leqslant R_h^E$ влечет $u = 0$.*

Доказательство. Пусть имеет место a), и пусть v — функция, существование которой утверждается в a). Тогда функция $w = \inf(v, h)$ удовлетворяет условиям $w \in \Sigma$, $w \leqslant h$, $w = h$ на E, $w \neq h$. Далее, разложение $w = u + p$ дает $u \leqslant h$, откуда $u = \alpha h$, где $0 \leqslant \alpha < 1$; следовательно, на E выполнены соотношения $\alpha h + p = h$, $\frac{p}{1-\alpha} = h$, и мы получаем b).

Пусть имеет место b). Тогда потенциал, мажорирующий h на E, мажорирует также R_h^E, и это дает c). Наконец, из c) следует, что $h \nleqslant R_h^E$ и, значит, $h \neq R_h^E$, т. е. что имеет место a).

Определение XII.4. Множество $E \subset \Omega$ называется *разреженным относительно минимальной функции $h \neq 0$*, если $R_h^E \neq h$ (или выполняется любое другое из приведенных выше эквивалентных условий).

Это определение (Гаурисанкаран [1]) подсказано соответствующим классическим понятием (Наим [1]) и условием в форме b) для классического случая полуплоскости и так называемых PL-множеств (Альфорс и Хейнс [1]).

Замечания. 1) Ω никогда не разрежено ($\forall h$); $\varnothing$ всегда разрежено; подмножество разреженного множества разрежено.

2) Для всякой минимальной гармонической функции $h \neq 0$ множество $\{x \mid h(x) = 0\}$ разрежено относительно h.

Действительно, потенциал 0 мажорирует h на этом множестве.

Теорема XII.5. *Пусть h — минимальная гармоническая функция $\neq 0$. Объединение множеств e_1*

и e_2, разреженных относительно h, будет также разрежено. Таким образом, множества, дополнительные к разреженным, образуют некоторый фильтр $\mathfrak{T}_h$.

Доказательство. Если e_1, e_2 разрежены и p_1, p_2 — потенциалы, мажорирующие h на e_1, e_2, то p_1+p_2 есть потенциал, мажорирующий h на $e_1 \cup e_2$.

Теорема XII.6 (Наим [1], теорема 8.17; Гаурисанкаран [1]). *Пусть h — минимальная функция $\neq 0$, а $v \in \Sigma$. На множестве Λ, где отношение v/h имеет смысл, v/h имеет предел по фильтру $\mathfrak{T}_h$; этот предел конечен и равен $\inf\limits_{\Lambda}(v/h)$.*

Доказательство. Так как $C\Lambda \subset \{x \mid h(x)=0\} = e$, то $C\Lambda$ разрежено. Положим $\alpha = \inf\limits_{\Lambda}(v/h)$; число α конечно, ибо в противном случае и v, и любая потенциальная часть p в разложении функции v были бы равны $+\infty$ на Ce, а тогда было бы $h \leqslant p$ всюду и функция h была бы нулем.

Рассмотрим теперь множество $E_\varepsilon = \{x \in \Lambda \mid v/h \geqslant \geqslant \alpha+\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Очевидно, $E_\varepsilon \supset e \cap \Lambda$ и $E_\varepsilon \neq \Omega$; далее, $v/(\alpha+\varepsilon) \geqslant h$ на $E_\varepsilon \cap Ce$, но не на CE_ε. Следовательно, E_ε разрежено, т. е. $CE_\varepsilon \in \mathfrak{T}_h$, и v/h на Λ стремится к α по фильтру $\mathfrak{T}_h$.

Следствия. *Пусть h, h' минимальны, $\neq 0$ и не пропорциональны. Тогда*

1) *на множестве E, где h'/h имеет смысл, $h'/h \xrightarrow[\mathfrak{T}_h]{} 0$;*

2) *существуют не имеющие общих точек множества из фильтров $\mathfrak{T}_h$ и $\mathfrak{T}_{h'}$ соответственно.*

Доказательство. Утверждение 1) есть следствие того факта, что неравенство $h'/h \geqslant K > 0$ на E влекло бы за собой равенство $h' = \lambda h$ всюду. Утверждение 2) доказывается рассмотрением того подмножества множества E, где $h'/h < 1$ (это — элемент фильтра $\mathfrak{T}_h$), и того подмножества, где $h'/h > 1$ (это — элемент фильтра $\mathfrak{T}_{h'}$).

4. Минимальная граница. Две минимальные функции будем называть *эквивалентными*, если они пропорциональны (с множителем $\neq 0$). Класс эквивалентности, содержащий h, обозначим через $\bar{h}$. Фильтр $\mathfrak{T}_h$ одинаков для всех h из данного класса эквивалентности, и поэтому мы будем его обозначать через $\mathfrak{T}_{\bar{h}}$.

Определение XII. 7. Классы $\bar{h}$ называются *минимальными граничными точками*, а их совокупность — (*абстрактной*) *минимальной границей* $\mathfrak{m}$.

Понятия lim, lim sup, ..., соответствующие фильтру $\mathfrak{T}_{\bar{h}}$, будут называться *тонкими* lim, lim sup и т. д. *в точке* $\bar{h}$.

Заметим, что в случае $\mathscr{C}$ точкам $\bar{h}$ соответствуют крайние образующие конуса U, а если U имеет основание, то крайние точки этого основания.

Топологическая интерпретация. Пусть Ω — топологическое пространство, U — выпуклый конус вещественных неотрицательных непрерывных функций на Ω, а P — выпуклый конус полунепрерывных снизу неотрицательных функций. Тогда функция из $U+P$ и $+\infty$ образуют выпуклый конус Φ, удовлетворяющий условиям гл. I, и можно рассматривать тонкую топологию $\mathscr{T}$ на Ω.

Далее, для непрерывных функций $f \geqslant 0$ имеем $R_f^E = R_f^{\tilde{E}}$ (где $\tilde{E}$ — тонкое замыкание множества E). Следовательно, если e разрежено в $\bar{h}$, то $\tilde{e}$ также разрежено, и дополнения к тонко замкнутым множествам, разреженным в $\bar{h}$, образуют базис фильтра $\mathfrak{T}_{\bar{h}}$, элементы которого — тонко открытые множества. Мы можем теперь воспользоваться теоремой XII. 1, в которой I заменено на $\mathfrak{m}$. Таким образом получается

Теорема XII. 8. *На множестве* $\Omega \cup \mathfrak{m}$ *существуют топологии, удовлетворяющие условиям*:

1) *на* Ω *они индуцируют тонкую топологию* $\mathscr{T}$;

2) *соответствующие им фильтры окрестностей для любой точки* $\bar{h} \in \mathfrak{m}$ *индуцируют на* Ω *фильтр* $\mathfrak{T}_{\bar{h}}$.

В такой топологии понятия lim, lim sup, ... *по* Ω

в точке $\bar{h}$ совпадают с понятиями $\lim$, $\limsup, \ldots$ *по фильтру* $\mathfrak{T}_{\bar{h}}$.

Среди этих топологий имеется сильнейшая (в ней Ω открыто, и на $\mathfrak{m}$ она индуцирует дискретную топологию), а среди тех из них, в которых Ω открыто, имеется слабейшая, которую называют ***минимальной тонкой топологией*** (подробнее о ней см. в XII. 1).

Заметим, что последняя топология будет отделимой, если отделима тонкая топология в Ω и если для всякого $x \in \Omega$ существует потенциал p, для которого $p(x) > 0$ (поскольку это влечет для каждой точки $\bar{h}$ разреженность некоторой окрестности точки x).

Далее мы изучим важный частный случай, когда минимальная тонкая топология на $\Omega \cup \mathfrak{m}$ является тонкой топологией (в смысле гл. I), отвечающей некоторому семейству функций, полунепрерывных снизу (для подходящей топологии на $\Omega \cup \mathfrak{m}$).

Упражнение. Кроме принятых предположений допустим еще, что

i) в Φ возможно счетное сложение;

ii) для некоторой фиксированной минимальной функции $h \not\equiv 0$ неравенство $u \leqslant u'$ ($u, u' \in U$) влечет $u - \lambda h \leqslant u' - \lambda' h$, где $\lambda = \inf\limits_{\Omega} (u/h)$, $\lambda' = \inf\limits_{\Omega} (u'/h)$ (нижнюю грань следует брать по множествам, где эти отношения имеют смысл);

iii) существует такая последовательность множеств V_n, что $R_h^{e \cap V_n} \to 0$ для всякого множества e, разреженного в $\bar{h}$ (функция h та же, что и в ii)).

Тогда для заданной функции $u_0 \in U$ существует множество e_0, разреженное в этой точке $\bar{h}$ и такое, что для всякой функции $u \in U$, $u \leqslant u_0$, отношение u/h имеет предел по фильтру с базисом $V_{n_p} \setminus e_0$ (где n_p — некоторая подпоследовательность последовательности натуральных чисел) (этот предел равен минимальному тонкому пределу в $\bar{h}$, т. е. пределу по фильтру $\mathfrak{T}_{\bar{h}}$).

Глава XIII

ОБЩАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ КОНСТАНТИНЕСКУ—КОРНЯ. ПЕРВЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

1. Константинеску и Корня доказали свою теорему (см. [1]) для римановых поверхностей, но их доказательство сохраняет силу для произвольных локально компактных пространств. Они пришли к понятию компактификации, близкому к понятию компактификации Стоуна — Чеха и позволяющему вводить различные полезные границы единообразным способом.

Теорема XIII. 1. *Пусть Ω — локально компактное, но не компактное отделимое пространство и Φ — семейство непрерывных функций на Ω со значениями в $[-\infty, \infty]$. Существует единственное с точностью до гомеоморфизма компактное пространство $\hat{\Omega}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

i) *Ω — плотное подмножество в $\hat{\Omega}$.*

ii) *Каждую функцию $f \in \Phi$ можно продолжить до непрерывной функции $\hat{f}$ на $\hat{\Omega}$.*

iii) *Семейство функций $\{\hat{f}\}$ разделяет точки множества $\hat{\Omega} \setminus \Omega$ (это множество будем ниже обозначать через Δ).*

Кроме того, Ω открыто в пространстве $\hat{\Omega}$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что Ω открыто в любом $\hat{\Omega}$, удовлетворяющем перечисленным выше условиям. Рассмотрим все относительно компактные открытые множества Ω_i в пространстве Ω. Имеем $\Delta \subset \overline{\Omega} \subset (\overline{\Omega \setminus \Omega_i}) \cup \overline{\Omega}_i$ (замыкания берутся в $\hat{\Omega}$). Так как замыкание Ω_i в Ω компактно, то оно является также замыканием в $\hat{\Omega}$. Поэтому $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$ и $\Delta \subset \overline{\Omega \setminus \Omega_i}$, $\Delta \subset \bigcap_i (\overline{\Omega \setminus \Omega_i})$. Но $(\overline{\Omega \setminus \Omega_i}) \cap \Omega$ совпадает с множеством

$\Omega \setminus \Omega_i$ (замкнутым в Ω). Таким образом,

$$\bigcap_i (\overline{\Omega \setminus \Omega_i}) \cap \Omega = \varnothing,$$

$$\bigcap_i (\overline{\Omega \setminus \Omega_i}) \subset \hat{\Omega} \setminus \Omega = \Delta, \quad \Delta = \bigcap_i (\overline{\Omega \setminus \Omega_i}).$$

Следовательно, Δ компактно и Ω открыто в $\hat{\Omega}$.

Докажем теперь единственность пространства $\hat{\Omega}$, предполагая, что оно существует. Пусть $\hat{\Omega}$, $\hat{\Omega}'$ — два пространства, удовлетворяющие поставленным условиям. Рассмотрим фильтр окрестностей точки $x \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$ в $\hat{\Omega}$ и его след $\mathfrak{T}_\Omega$ в Ω. Этот базис фильтра $\mathfrak{T}_\Omega$ должен сходиться в $\hat{\Omega}'$; в противном случае на Ω имелись бы два фильтра $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ (на любом множестве $\supset \Omega$ это будут базисы фильтров), более тонких, чем $\mathfrak{T}_\Omega$, и сходящихся в пространстве $\hat{\Omega}'$ к точкам X_1, X_2 ($X_1 \neq X_2$). Эти точки не принадлежат Ω, поскольку сходимость $\mathfrak{T}_1$ в $\hat{\Omega}'$ к точке $X_1 \in \Omega$ влекла бы за собой сходимость в Ω, а значит, в $\hat{\Omega}$, что противоречит сходимости $\mathfrak{T}_\Omega$ к точке $x \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$. Рассмотрим теперь две точки X_1 и $X_2 \in \hat{\Omega}' \setminus \Omega$, $X_1 \neq X_2$, и непрерывное продолжение $\bar{f}$ некоторой функции f на $\hat{\Omega}'$, разделяющее точки X_1, X_2; функция f должна иметь различные пределы по $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, и должен существовать предел по $\mathfrak{T}_\Omega$, что невозможно.

Итак, $\mathfrak{T}_\Omega$ сходится в $\hat{\Omega}'$ к точке $X \in \hat{\Omega}' \setminus \Omega$, и, переставляя $\hat{\Omega}$ и $\hat{\Omega}'$, мы убеждаемся, что соответствие $x \longmapsto X$ биективно. Далее, тождественное отображение $x \longmapsto x$ множества Ω как части $\hat{\Omega}$ в Ω, рассматриваемое как часть $\hat{\Omega}'$, имеет предел $X \in \hat{\Omega}' \setminus \Omega$ в каждой точке $x \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$; поэтому оно имеет непрерывное продолжение, определяющее гомеоморфизм между $\hat{\Omega}$ и $\hat{\Omega}'$.

Остается доказать существование пространства $\hat{\Omega}$. Пусть Φ_0 обозначает множество всех конечных непрерывных функций на Ω с компактным носителем. Рассмотрим множество $\Psi = \Phi \cup \Phi_0$. Каждой функции

$\psi \in \Psi$ сопоставим пространство $\overline{R}_\psi = [-\infty, \infty]$ и положим $A = \prod_{\psi \in \Psi} \overline{R}_\psi$. Это — компакт. Пусть m обозначает отображение Ω в это пространство, определяемое условием: $m(x)$ есть точка с координатой $\psi(x)$ в каждом $\overline{R}_\psi$. Покажем, что это отображение — гомеоморфизм.

a) Очевидно, что оно непрерывно.

b) Оно инъективно: если взять $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$, то существует функция $\psi \in \Phi_0$, равная в этих точках, соответственно нулю и единице (нужно использовать равномеризуемость Ω или то обстоятельство, что компактификация Александрова нормальна).

c) Отображение m^{-1} из $m(\Omega)$ в Ω, обратное к m, непрерывно. Действительно, возьмем произвольную окрестность V точки $x_0 \in \Omega$ в Ω и покажем, что $m(V)$ есть окрестность $m(x_0)$ в $m(\Omega)$. Рассмотрим в V компактную окрестность U точки x_0 и функцию ψ_0 из Φ_0, не равную нулю в x_0, носитель которой содержится в U. Обозначим через $E \subset m(\Omega)$ множество точек, у которых координата, принадлежащая $\overline{R}_{\psi_0}$, отлична от нуля. E есть открытое множество в $m(\Omega)$ (как прообраз открытого множества) и содержит $m(x_0)$. Если точка $m(x) \in E$, то ее проекция на $\overline{R}_{\psi_0}$ есть $\psi_0(x) \neq 0$, поэтому $x \in U$, $m(x) \in m(U)$ и $E \subset m(U)$. Следовательно, $m(U)$ есть окрестность точки $m(x_0)$ в $m(\Omega)$ и то же верно для $m(V)$.

Далее, Ω плотно в компактном пространстве $\widehat{\Omega}$, гомеоморфном $\overline{m(\Omega)}$ (замыкание в A) (следует рассмотреть в $m(\Omega)$ равномерную структуру компактного пространства $\overline{m(\Omega)}$, соответствующую структуру на Ω и пополнения обоих пространств).

Теперь легко проверить, что полученное $\widehat{\Omega}$ удовлетворяет требованиям ii) и iii). Рассмотрим $f \in \Phi$. Проекция точки $m(x)$ на $\overline{R}_f$ есть $f(x)$; это отображение из $m(\Omega)$ в $\overline{R}_f$ имеет непрерывное продолжение — проекцию из $\overline{m(\Omega)}$ в $\overline{R}_f$. Следовательно, в силу гомеоморфизма, f допускает непрерывное продолжение на $\widehat{\Omega}$.

Рассмотрим, наконец, на $\hat{\Omega} \setminus \Omega$ две точки x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$; их образы в $\overline{m(\Omega)} \setminus m(\Omega)$ имеют различные проекции на некоторое $\overline{R}_\psi$, т. е. $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$. Следовательно, $\psi \notin \Phi_0$, ибо в противном случае непрерывное продолжение ψ на границу Ω было бы нулем. Итак, $\psi \in \Phi$, и iii) доказано.

2. Другая характеризация рассмотренной компактификации. Теорема XIII.2. *Равномерная структура на Ω, индуцируемая единственной равномерной структурой на $\hat{\Omega}$, может быть охарактеризована*

a) *как слабейшая равномерная структура S, в которой все функции из Ψ равномерно непрерывны;*

b) *как слабейшая равномерная структура S', совместимая с топологией Ω, в которой все функции из Φ равномерно непрерывны.*

Следовательно, $\hat{\Omega}$ является пополнением Ω в равномерной структуре S или S'.

Доказательство. Докажем сначала эквивалентность a) и b). Топология, определяемая S, является слабейшей топологией, в которой непрерывны все функции из Ψ, и поэтому она совпадает с топологией Ω. Поэтому структура S входит в число структур, описанных в b), и, следовательно, сильнее, чем S'. Но, с другой стороны, структуры из b) содержатся в семействе из a), и поэтому S' сильнее, чем S.

Далее, структура S предкомпактна, так как функции из Ψ определяют отображения в компактное пространство. Следовательно, соответствующее пополнение $\overline{\Omega}$ компактно, и мы сейчас убедимся, что оно гомеоморфно $\hat{\Omega}$.

Окрестности точки $x \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$ пересекают Ω по множествам, образующим фильтр Коши в равномерной структуре $\hat{\Omega}$ (в которой функции из Ψ равномерно непрерывны). Следовательно, в более сильной структуре S этот фильтр сходится в $\overline{\Omega}$ к некоторой точке $X \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Отображение $x \mapsto X$ инъективно. Действительно, рассмотрим точки $x_1 \neq x_2$ на $\hat{\Omega} \setminus \Omega$ и функцию

$f \in \Phi$, непрерывное продолжение которой на $\widehat{\Omega}$ разделяет x_1 и x_2. Ясно, что $X_1 \neq X_2$, ибо в противном случае функция f, допускающая непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$, имела бы одинаковый предел по фильтрам на Ω, индуцированным окрестностями точек x_1 и x_2 в $\widehat{\Omega}$. Это отображение даже биективно: окрестности точки $X \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ и $\overline{\Omega}$ пересекают Ω по множествам некоторого фильтра, причем имеется более тонкий фильтр $\mathfrak{T}$, сходящийся в $\widehat{\Omega}$ к некоторой точке $x \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega$. Ее образ при нашем отображении есть предел фильтра $\mathfrak{T}$ в $\overline{\Omega}$, т. е. точка X.

Тождественное отображение $x \mapsto x$ из Ω (рассматриваемого как подмножество в $\widehat{\Omega}$) в Ω (рассматриваемое как подмножество $\overline{\Omega}$) имеет пределы в точках множества $\widehat{\Omega} \setminus \Omega$, т. е. допускает непрерывное продолжение. Это продолжение является взаимно однозначным непрерывным отображением компактного пространства $\widehat{\Omega}$ на отделимое пространство $\overline{\Omega}$ и, следовательно, есть гомеоморфизм.

Упражнение. Рассматривая только S', доказать непосредственно, что соответствующее пополнение есть $\widehat{\Omega}$.

3. Примеры применений. (См. Константинеску и Корня [1].) 1) Теорема XIII. 1 в случае пустого Φ показывает, что $\widehat{\Omega}$ является единственным компактным пространством, в котором Ω плотно и которое содержит только одну точку вне Ω. Следовательно, $\widehat{\Omega}$ есть (с точностью до гомеоморфизма) *компактификация Александрова.*

2) Если Φ содержит все вещественные непрерывные (конечные или нет) функции, то мы получаем *компактификацию Стоуна — Чеха.*

3) Пусть Φ — множество вещественных непрерывных функций, такое, что для любой функции $f \in \Phi$ имеется компактное множество, дополнение к которому представляет собой объединение областей, в каждой из которых f постоянна. Тогда мы получаем *компактификацию Керекьярто — Стоилова*, введенную

первоначально для римановых поверхностей и используемую обычно в теории функций комплексного переменного.

4) Если рассмотреть все вещественные непрерывные функции класса BLD (см. гл. IX, п. 9, подстрочное примечание на стр. 109) на римановой поверхности или в $\mathscr{E}$-пространстве, то мы получим *компактификацию Ройдена.*

5) Рассмотрим следующий подкласс предыдущего класса функций: для каждой функции f из этого подкласса существует замкнутое множество F, вне которого f гармонична и реализует минимум интеграла Дирихле в классе BLD-функций, равных f на CF. Тогда мы получаем *компактификацию Курамоти* (определенную им для римановых поверхностей), хорошо приспособленную для изучения BLD-функций. По этим важным вопросам см. сборник „Kuramochi boundaries on Riemann surfaces“, Lecture Notes, v. 58, Springer, 1968.

6) В следующей главе мы детально изучим еще одну и самую важную для нас компактификацию, а именно *компактификацию Мартина.*

Глава XIV

КЛАССИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО МАРТИНА[1]). ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАРТИНА

1. Элементарное введение. Рассмотрим на пространстве Грина Ω семейство функций $x \longmapsto \frac{G(x, y)}{G(x, y_0)} = K(x, y)$ ($y_0 \in \Omega$ фиксировано), зависящее от параметра y. Если положить $K(y_0, y_0) = 1$, то функция $x \longmapsto K(x, y)$ будет непрерывной и при $y = y_0$.

Теорема XIV. 1. *Пространство* $\widehat{\Omega}$, *получающееся по теореме Константинеску — Корня* (гл. XIII), *в слу-*

---

[1]) См. фундаментальную работу Мартина [1], а также обзорные статьи Брело [12, 24].

чае, когда в качестве Φ взято указанное только что семейство функций, не зависит, с точностью до гомеомерфизма, от точки y_0. Оно называется пространством Мартина, а множество $\Delta = \widehat{\Omega} \setminus \Omega$ — границей Мартина. Топология пространства $\widehat{\Omega}$ будет обозначаться через $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$.

Доказательство. В любой области $\Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, $\Omega_1 \ni y_0$ функция $y \longmapsto G(x, y)/G(x, y_0)$ гармонична, если $x \notin \Omega_1$, положительна и равна 1 в y_0. Поэтому при $x \to X \in \Omega \setminus \widehat{\Omega}$ эта функция стремится к гармонической положительной функции. Рассмотрим

$$\frac{G(x, y)}{G(x, y_0')} = \frac{G(x, y)}{G(x, y_0'')} \frac{G(x, y_0'')}{G(x, y_0')}, \text{ где } y_0', \; y_0'' \in \Omega_1, \quad y_0' \neq y_0''.$$

Если $\widehat{\Omega}'$, $\widehat{\Omega}''$ обозначают пространства, соответствующие семействам, связанным соответственно с точками y_0', y_0'', то оба множителя справа сходятся в $\widehat{\Omega}''$ при $x \to X \in \widehat{\Omega}'' \setminus \Omega$ к конечным положительным пределам; то же справедливо поэтому для левой части. Если при различных X_1, X_2 пределы левой части при $y = y_0''$ различны, то эти пределы разделяют точки множества $\widehat{\Omega}'' \setminus \Omega$; в противном случае при некотором y будут различны пределы $G(x, y)/G(x, y_0'')$ в соответствии с определением $\widehat{\Omega}''$. Таким образом, пределы (в $\widehat{\Omega}''$) левой части при $x \to X \in \widehat{\Omega}'' \setminus \Omega$ и любом y существуют и разделяют точки множества $\widehat{\Omega}'' \setminus \Omega$. Следовательно, $\widehat{\Omega}$ гомеоморфно $\widehat{\Omega}''$.

Дополнения. i) Предел $K(X, y)$ функции $K(x, y)$ при $x \to X \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega$ (обозначаемый также через $K_X(y)$) есть вещественная непрерывная функция точки $(X, y) \in \Delta \times \Omega$. Это — следствие непрерывности по X и равномерной непрерывности по y.

ii) Рассмотрим при фиксированном y_0 семейство функций $x \longmapsto K(x, y_i)$ для плотного множества $\{y_i\}$. Пространство, получаемое в этом случае по теореме Константинеску — Корня, совпадает с $\widehat{\Omega}$, так как функции $y \mapsto K(x, y)$ сходятся, когда x стремится к любой граничной точке этого пространства. Введем, далее, счетное семейство $\{\varphi_j\}$ вещественных непрерывных функций с компактным носителем, плотное во всем пространстве таких функций (с нормой $\sup|\cdot|$). Слабейшая равномерная структура в Ω, в которой все функции $K(x, y_i)$ и φ_j равномерно непрерывны, есть структура, пополнение которой дает $\widehat{\Omega}$. Это показывает, что структура, о которой идет речь, имеет счетный базис окружений и, следовательно, пространство $\widehat{\Omega}$ метризуемо.

Упражнение. Указать явную форму метрики в $\widehat{\Omega}$ (как это и сделал Мартин).

iii) Вместо $G(x, y_0)$ мы могли бы рассматривать непрерывные функции $G'(x, y_0) = \int G(x, y)\, d\rho_{y_0}^{\omega_0}(y)$ (где $d\rho_{y_0}^{\omega_0}$ — гармоническая мера для регулярной области $\omega_0 \ni y_0$) и соответствующие им функции K'. Получаемое таким образом пространство снова совпадает с $\widehat{\Omega}$ (так как $K' = K$ при $x \notin \omega_0$).

2. Минимальные гармонические функции в пространстве Грина Ω. Возьмем в качестве U и P (см. гл. XII, п. 3) неотрицательные гармонические функции и потенциалы. Аксиомы A_1 и A_2 выполнены. Кроме того, U выпукло и в пространстве $\mathscr{E}_U$ разностей неотрицательных гармонических функций с естественным порядком U является неотрицательным конусом. Поэтому минимальные гармонические функции являются точками на крайних образующих конуса U. В $\mathscr{E}_U$ мы можем ввести топологию локальной равномерной сходимости, и тогда множество функций из $\mathscr{E}_U$, определяемое условием $u(y_0) = 1$, будет замкнутой гиперплоскостью. Положительные функции из этой гиперплоскости образуют компактное метризуемое множество B_{y_0} (например, с метрикой $\sup|u_1 - u_2|$ по некоторой фиксированной окрестности точки y_0). Крайние точки B_{y_0} совпадают с минимальными гармоническими функциями, равными 1 в y_0, и их множествами есть *непустое* множество типа G_δ (как множество крайних точек компактного метризуемого множества в линейном пространстве).

Найдем все минимальные гармонические функции. Очевидно, что если μ — положительная мера на Δ, то $\int K(X, y)\, d\mu(X)$ есть положительная гармоническая функция в Ω (это следует из критерия среднего). Справедливо и обратное утверждение.

Лемма XIV.2. *Всякая неотрицательная функция u, гармоническая в Ω, допускает представление*

$$u(y) = \int K(X, y)\, d\mu(X), \tag{1}$$

где μ — положительная мера Радона на Δ.

Доказательство. Если Ω_n — возрастающая последовательность относительно компактных открытых множеств, такая, что $\Omega_n \subset \bar{\Omega}_n \subset \Omega$ и $\bigcup \Omega_n = \Omega$, то функция $\hat{R}_u^{\Omega_n}$ является потенциалом (она супергармонична и $\leqslant \lambda G_{y_0}$, если λ выбрать так, чтобы $\lambda G_{y_0} \geqslant u$ на $\partial\Omega_n$ и, следовательно, на Ω_n). Представление Рисса дает

$$\hat{R}_u^{\Omega_n}(y) = \int G(x, y)\, d\mu_n(x) = \int K(x, y)\, d\nu_n(x),$$

где $d\nu_n(x) = G(x, y_0)\, d\mu_n(x)$, $\int d\nu_n = u(y_0)$ и $\operatorname{supp} \nu_n \subset \subset \partial\Omega_n$. Можно извлечь подпоследовательность ν_{n_p}, слабо сходящуюся к положительной мере μ на $\hat{\Omega}$ с носителем в Δ. Непрерывность функции $x \longmapsto K(x, y)$ на $\hat{\Omega}$ дает

$$u(y) = \int K(X, y)\, d\mu(X).$$

Теорема XIV.3. *Всякая минимальная гармоническая функция u равна $u(y_0) K(X, y)$ для некоторой точки $X \in \Delta$.*

Соответствующие точки X называются *минимальными точками границы* Δ, и их множество обозначается через Δ_1.

Доказательство. Пусть $u > 0$. Используем представление $u(y) = \int K(X, y)\, d\mu(X)$, в котором μ есть строго положительная мера. На Δ существует такая точка X_0, что всякая ее открытая окрестность V в $\hat{\Omega}$ имеет μ-меру $\neq 0$. Следовательно,

$$\int_V K(X, y)\, d\mu(X) = \lambda u(y),$$

где V — произвольная окрестность точки X_0, а $\lambda = \mu(V)/u(y_0)$. Таким образом,

$$\frac{u(y)}{K(X_0, y)\, u(y_0)} = \frac{\int_V \frac{K(X, y)}{K(X_0, y)}\, d\mu(X)}{\int_V d\mu}.$$

Пусть y зафиксировано. При заданном $\varepsilon > 0$ выберем V так, чтобы при $X \in V$ иметь

$$1 - \varepsilon < \frac{K(X, y)}{K(X_0, y)} < 1 + \varepsilon.$$

Тогда то же самое будет верно для всей правой части, и, следовательно, левая часть равна 1.

З а м е ч а н и е. Предыдущие рассуждения показывают, что если функция $\int K(X, y)\, d\mu(X)$ минимальна, то она пропорциональна $K(X_0, y)$, где X_0 — точка замкнутого носителя меры μ.

Соответствие $X \mapsto K_X$ между Δ и множеством B'_{y_0} функций K_X из B_{y_0} является гомеоморфизмом. Действительно, $X \mapsto K_X$ есть непрерывное и взаимно однозначное отображение компакта Δ на отделимое пространство B'_{y_0}. Образ множества Δ_1 представляет собой множество крайних точек множества B_{y_0}.

3. Представление Мартина. Напомним сначала фундаментальные результаты Шоке.

Рассмотрим в отделимом локально выпуклом топологическом линейном пространстве E выпуклый конус C с компактным основанием B (пересечением C с некоторой замкнутой гиперплоскостью).

α) Если B метризуемо, то любая точка $X \in B$ есть центр тяжести некоторой меры $\mu \geqslant 0$ ($\|\mu\| = 1$), сосредоточенной на множестве $\mathscr{E}$ крайних точек множества B (т. е. такой, что $\mu(\complement\mathscr{E}) = 0$). Это значит, что для всякой непрерывной линейной формы l на E имеем

$$l(X) = \int l(x)\, d\mu(x).$$

β) Если в упорядоченности, определяемой конусом C, C есть решетка, то такое представление единственно.

В нашем случае для пространства $\mathscr{E}_U$, конуса U и основания B_{y_0} известно, что B_{y_0} компактно и метризуемо, а C является решеткой (гл. VI), причем последнее можно доказать и без использования представления Рисса.

Следовательно, для всякой неотрицательной гармонической функции u имеем

$$l(u) = \int l(v)\, d\mu(v), \tag{2}$$

где $v \in B_{y_0}$, μ — положительная мера Радона на B_{y_0}, а также на B'_{y_0}, так как $\mu(\complement\mathscr{E}) = 0$. Отсюда

$$u(y) = \int v(y)\, d\mu(v), \quad v \in B_{y_0}, \tag{3}$$

причем мера μ не зависит от y.

Так как Δ гомеоморфно B'_{y_0}, то μ можно рассматривать и как меру на Δ. Таким образом, доказана

Теорема XIV.4. *Для любой неотрицательной гармонической функции u на Ω имеем*

$$u(y) = \int_{\Delta} K_X(y)\, d\mu(X) \quad (X \in \Delta), \tag{4}$$

где неотрицательная мера μ сосредоточена на Δ_1 и единственна.

Единственность в (2) влечет за собой единственность в (3) и (4), поскольку из справедливости соотношения (3) для всех y следует справедливость соотношения (2) для всех l. В противном случае u не была бы центром тяжести для μ, и этот центр тяжести, будучи точкой из B_{y_0}, являлся бы гармонической функцией, отличной от u, т. е. в некоторой точке y мы имели бы $u(y) \neq \int v(y)\, d\mu(v)$.

4. Пример: случай шара в $\mathbb{R}^n$. Теорема XIV.5. *В случае когда Ω есть шар с центром y_0 и радиусом R, отношение $G(x, y)/G(x, y_0)$ имеет предел при $x \to X$, где X — точка обычной евклидовой границы, причем этот предел равен*

$$K_X(y) = R^{n-2} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|X - y|^n}. \tag{4}$$

Поэтому евклидово замыкание шара Ω и его граница гомеоморфны $\widehat{\Omega}$ и Δ, а $K(X, y)$ есть приведенное выше ядро Пуассона. Кроме того, $\Delta_1 = \Delta$ (поскольку все точки границы равноправны и по крайней мере одна из них минимальна).

Доказательство. Мы начнем со случая полупространства, для которого легче вести расчет.

Для полупространства в $\mathbb{R}^3$ имеем

$$G(x, y) = \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x_1 - y|}, \tag{5}$$

где x_1 — точка, симметричная точке x относительно граничной плоскости H. При фиксированной точке y_0

$$\frac{G(x, y)}{G(x, y_0)} = \frac{|x_1 - y| - |x - y|}{|x_1 - y_0| - |x - y_0|} \cdot \frac{|x - y_0| \cdot |x_1 - y_0|}{|x - y| \cdot |x_1 - y|}.$$

Первый множитель равен

$$\frac{|x_1 - y|^2 - |x - y|^2}{|x_1 - y_0|^2 - |x - y_0|^2} \cdot \frac{|x_1 - y_0| + |x - y_0|}{|x_1 - y| + |x - y|}.$$

Из теорем элементарной геометрии следует, что $|x_1 - y|^2 - |x - y|^2 = 4\delta_x\delta_y$, где δ_x — расстояние от x

до H. Отсюда мы легко заключаем, что при $x \to X \in H$

$$\frac{G(x, y)}{G(x, y_0)} \to \frac{\delta_y}{\delta_{y_0}} \frac{|X - y_0|^3}{|X - y|^3}.$$

В случае $\mathbb{R}^2$ мы используем соотношение $\log x \sim \sim x - 1$ при $x \to 1$, и аналогичные вычисления дают предел, равный

$$\frac{\delta_y}{\delta_{y_0}} \frac{|X - y_0|^2}{|X - y|^2}.$$

В общем случае пространства $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$, для того чтобы преобразовать выражение $\frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x - y|^{n-2}}$, воспользуемся тождеством $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots)$; это приводит нас снова к разности $\frac{1}{|x_1 - y|} - \frac{1}{|x - y|}$; используя предыдущие вычисления, приходим к общему результату:

$$\frac{G(x, y)}{G(x, y_0)} \to \frac{\delta_y |X - y_0|^n}{\delta_{y_0} |X - y|^n} \quad (x \to X \in H). \tag{6}$$

Те же рассуждения показывают, что когда x стремится к точке Александрова пространства $\mathbb{R}^n$, то $G(x, y)/G(x, y_0) \to \delta_y/\delta_{y_0}$ и, таким образом, (6) при очевидных соглашениях имеет место для всех граничных точек. Это дает *ядро Пуассона* для полупространства. Пользуясь преобразованием Кельвина (в случае $\mathbb{R}^2$ — простой инверсией), мы заключаем, что в случае шара предел $G(x, y)/G(x, y_0)$ существует в каждой граничной точке. Поэтому $\hat{\Omega}$ можно идентифицировать с евклидовым замыканием.

Для того чтобы получить явное выражение этого предела, проще всего воспользоваться полученным выше предельным соотношением для точки Александрова.

Подвергнем преобразованию Кельвина функцию δ_y/δ_{y_0}, выполнив инверсию в шаре радиуса δ_{y_0} с центром в точке X_0, симметричной точке y_0 относительно плоскости H; точку касания шара с H обозначим через Z_0. Образ нашего полупространства будет шаром с центром $Y_0 = \frac{1}{2}(X_0 + Z_0)$ и радиусом $R = \frac{1}{2}\delta_{y_0}$. Возьмем точку Y_0 в качестве начала и обозначим через y_i, y_i' координаты точки y и ее образа y', причем последнюю ось выберем перпендикулярной к H (с $y_n > 0$). Тогда

$$\delta_y + 2R = \delta_{y_0}^2 \frac{y_n' + R}{|X_0 - y'|^2},$$

$$\frac{\delta_y}{\delta_{y_0}} = \delta_{y_0} \frac{y_n' + R}{|X_0 - y'|^2} - 1 = \frac{2Ry_n' + 2R^2 - |X_0 - y'|^2}{|X_0 - y'|^2},$$

и так как

$$|y' - X_0|^2 = |y' - Y_0|^2 + |Y_0 - X_0|^2 + 2(y' - Y_0)\cdot(Y_0 - X_0) = $$
$$= |y' - Y_0|^2 + R^2 + 2Ry_n',$$

то

$$\frac{\delta_y}{\delta_{y_0}} = \frac{R^2 - |y' - Y_0|^2}{|X_0 - y'|^2}.$$

Вспоминая вид преобразования Кельвина в $\mathbb{R}^n$, получаем

$$\frac{R^{n-2}}{|X_0 - y'|^{n-2}} \frac{R^2 - |y' - Y_0|^2}{|X_0 - y'|^2} = R^{n-2} \frac{R^2 - |y' - Y_0|^2}{|X_0 - y'|^n},$$

чем формула (5) и установлена.

Следствие. Отсюда непосредственно получается представление Лебега — Стильтьеса для положительных гармонических функций в шаре с центром y_0 радиуса R:

$$u(y) = \int R^{n-2} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|X - y|^n} d\mu(X) \tag{7}$$

(с единственной положительной мерой μ на $\partial\Omega$).

Упражнения. 1) Доказать существование меры μ, применив представление интегралом Пуассона в концентрическом меньшем шаре и предельный переход.

2) Используя полученное представление, вывести, что минимальные гармонические функции совпадают с функциями, пропорциональными ядру Пуассона.

Замечание. В случае шара (с центром y_0) из наличия предела $G(x, y)/G(x, y_0)$ при стремлении x к граничной точке X следуют существование нормальной производной функции $x \longmapsto G(x, y)$ в точке X (так как функция $G(x, y_0)$ эквивалентна в этом случае функции $(R - |x - y_0|)/R^{n-1}$) и равенство

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_X} = \frac{1}{R} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|X - y|^n}.$$

Напомним, что если функция, гармоническая по одну сторону от гладкой (дважды непрерывно дифференцируемой) поверхности, равна нулю на этой поверхности, то ее градиент имеет при приближении к поверхности конечный предел. В случае функции $x \longmapsto G(x, y)$ в шаре этот предел равен как раз $\frac{\partial G}{\partial n_X}$. Выше мы установили существование этой нормальной производной независимо.

Подчеркнем, что классическое решение задачи Дирихле для шара, т. е. интеграл Пуассона

$$\int K_X(y) f(X)\, d\nu(X), \text{ или } \int R^{n-2} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|X - y|^n} f(X)\, d\nu(X)$$

(ν — равномерное распределение единичной массы на сфере), можно записать в виде

$$R^{n-1} \int \frac{\partial G}{\partial n_X}(y) f(X)\, d\nu(X),$$

равно как общее представление (7) в виде

$$\int \frac{\partial G}{\partial n_X}(y)\, dm(X).$$

5. Другой важный пример. Теорема XIV.6. *Рассмотрим в пространстве Грина Ω полярную точку x_0 и область $\Omega_1 = \Omega \setminus \{x_0\}$. Минимальные гармонические функции на Ω_1 — это либо минимальные функции на Ω, либо функции, пропорциональные $G^{\Omega}_{x_0}$.*

Доказательство. Если w — минимальная функция на Ω, то ее сужение на Ω_1 будет минимальной функцией для Ω_1. Действительно, всякая неотрицательная гармоническая миноранта на Ω_1 допускает гармоническое продолжение на Ω, являющееся минорантой для w и, следовательно, пропорциональное w.

Рассмотрим любую неотрицательную гармоническую функцию u на Ω_1 и для ее супергармонического продолжения $\hat{u}$ на Ω запишем представление Рисса

$$\hat{u} = \lambda G_{x_0} + v \geqslant 0,$$

где v — гармоническая функция. При этом $\lambda \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Если $u \leqslant G_{x_0}$, то $v \leqslant G_{x_0}$ на Ω_1 и, значит, на Ω. Следовательно, $v = 0$, $u = \lambda G_{x_0}$ и функция G_{x_0} минимальна на Ω_1.

Предположим теперь, что функция u минимальна на Ω_1. Если u ограничена вблизи x_0, то $\lambda = 0$ и функция $\hat{u}$ гармонична и обязательно минимальна на Ω, так как любая ее гармоническая миноранта будет пропорциональна ей на Ω_1 и, следовательно, на Ω. Если же u неограничена, то ее миноранта v должна быть пропорциональна u и, следовательно, равна нулю, так что $u = \lambda G_{x_0}$.

Есть более сложное доказательство, использующее результаты о поведении функций, гармонических в окрестности бесконечно удаленной точки в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$, но не в самой этой точке.

Упражнение. Если точка x_0 не полярна в пространстве Грина, то минимальные гармонические функции на $\Omega_1 = \Omega \setminus \{x_0\}$ — это функции вида $u - \lambda G_{x_0}$, где функция u минимальна на Ω, а λ таково, что $u(x_0) - \lambda G_{x_0}(x_0) = 0$, а также функции, пропорциональные G_{x_0}.

6. Замечания. Результаты, полученные для случая шара, можно обобщить на области с более или менее гладкой границей; это было сделано разными путями; см., например, Валле-Пуссен [1] и недавние работы Ханта и Уидена [1, 2], о которых будет сказано ниже (гл. XVII, § 4).

Важно подчеркнуть, что в $\mathbb{R}^2$ или на римановой поверхности всякое конформное преобразование сохраняет функцию Грина и, значит, ядро $K(x, y)$. Так как односвязная область ω, граница которой в $\overline{R^2}$ содержит более одной точки, может быть конформно отображена на открытый круг, то пространство Мартина для такой области ω гомеоморфно евклидову замыканию круга, а граница Мартина совпадает с множеством простых концов Каратеодори.

В общем случае для произвольной евклидовой области Грина топология Мартина, как показывают примеры (Мартин [1], Брело [12]), несравнима с евклидовой топологией. Напомним пример области в R^3, содержащейся между двумя касающимися сферами; в этом случае $K(x, y)$ имеет много различных предельных функций, когда x стремится к точке касания сфер. Это значит, что точке касания отвечает много точек границы Мартина (Булиган [1]). Наоборот, для некоторых областей может оказаться, что $K(x, y)$ имеет одинаковую предельную функцию, когда x стремится к различным точкам евклидовой границы.

Этим и объясняется недостаточность понятия обычной границы, известная уже довольно давно, а также успех нового понятия.

7. Другая характеризация простраиства Мартииа (краткие указаиия). Рассмотрим пространство Грина Ω, конус S^+ неотрицательных супергармонических функций ч линейное пространство S разностей этих функций. Точнее (см. гл. XI), мы рассматриваем множество пар (u, v), где $u, v \in S^+$, и вводим отношение эквивалентности в этом множестве следующим образом: $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$, если $u_1 + v_2 = u_2 + v_1$, т. е. если $u_1 - v_1 = u_2 - v_2$ квазивсюду (поскольку обе стороны равенства определены лишь квазивсюду). Класс эквивалентности, отвечающий (u, v), обозначим через $[u, v]$. Тогда S является множеством этих классов эквивалентности, а S^+ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов $[u, 0]$. Как мы уже упоминали, S^+ является полной решеткой относительно порядка, порождаемого самим конусом S^+ (специальный порядок) (это может быть доказано без использования теоремы Рисса о представлении), и существует топология на S, в которой S^+ локально компактно. Сейчас нам достоточно ввести счетный базис регулярных областей ω_i и счетное всюду плотное множество точек x_j. Тогда $[u, v] \mapsto \mapsto \left| \int u d\rho_{x_j}^{\omega_i} - \int v d\rho_{x_j}^{\omega_i} \right|$ есть полунорма, и эти полунормы определяют топологию (не зависящую от выбора ω_i, x_j). Таким образом, у конуса S^+ существует компактное метризуемое основание B, например определяемое условием $\int u d\rho_{y_0}^{\omega_0} = 1$, $u \in S^+$ (область ω_0 регулярна, точка y_0 фиксирована) (см. Брело [19], Эрве [1]). Мы уже видели, что, используя теорему Шоке, можно (даже в рамках аксиоматической теории) прийти к представлению любой неотрицательной супергармонической функции в виде

$$u(y) = \int v(y)\, d\mu(v), \qquad v \in B, \tag{8}$$

где μ — положительная мера на B, сосредоточенная на множестве крайних точек B. Отсюда можно вывести, что крайние элементы множества B совпадают с точностью до множителя с функциями $y \mapsto G(x, y)$, т. е. равны $\lambda_x G(x, y)$, где $\lambda_x = \left[\int G(x, y)\, d\rho_{y_0}^{\omega_0}(y) \right]^{-1}$, и минимальные гармонические функции равны 1 в точке y_0.

Теорема XIV.7. *Множество E потенциалов из B, имеющих точечный носитель (т. е. множество функций $\lambda_x G(x, y)$), и его замыкание $\bar{E}$ в B гомеоморфны Ω и $\hat{\Omega}$ соответственно.*

Доказательство. Что касается первого утверждения, то см. Брело [18] и Гаурисанкаран [1]. Далее, мы видим, что $\bar{E}$ гомеоморфно некоторому компакту $\check{\Omega}$, в котором Ω плотно. Для последовательности функций из B, гармонических в открытом множестве ω, сходимость в B влечет за собой сходимость в каждой точке ω. Следовательно, $\check{\Omega}$ удовлетворяет всем условиям, определяющим $\hat{\Omega}$ (здесь важно существование предела $G(x, y)/G(x, y_0)$, когда x стремится к точке из $\breve{\Omega} \setminus \Omega$).

Напомним, что мера μ в (8) может быть разложена на две части: меру μ_1, сосредоточенную на множестве крайних потенциалов и меру μ_2, сосредоточенную на множестве минимальных гармонических функций. Следовательно, ввиду гомеоморфизма между $\mathscr{E}$ и Ω и между $\overline{\mathscr{E}} \setminus \mathscr{E}$ и Δ мы получаем *разложение Рисса — Мартина*

$$u(y) = \int G(x, y)\lambda_x \, d\mu_1(x) + \int K_X(y)\, d\mu_2(X). \quad (9)$$

Второе слагаемое — это наибольшая гармоническая миноранта, представление которой дается формулой (1).

Глава XV

КЛАССИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО МАРТИНА И МИНИМАЛЬНАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ

1. Минимальная разреженность. Минимальная тонкая топология на $\Omega \cup \Delta_1$. Применим теперь результаты гл. XII. Рассмотрим на пространстве Грина Ω выпуклый конус U неотрицательных гармонических функций, выпуклый конус P потенциалов и конус Φ неотрицательных гипергармонических функций. Каждый класс функций, пропорциональных минимальной гармонической функции, соответствует некоторой точке $X \in \Delta_1$; общая абстрактная минимальная граница $\mathfrak{m}$ из гл. XII, п. 4, совпадает в данном случае с Δ_1. Разреженность множества $e \subset \Omega$ в точке X будет, следовательно, характеризоваться условием $R^e_{K_X} \neq K_X$ или существованием потенциала, мажорирующего K_X на e (или хотя бы квазивсюду на e, но с мерой, сосредоточенной на B_e), или же тем свойством, что $R^e_{K_X}$ является потенциалом. Так же как и в общем случае, объединение двух разреженных множеств будет разрежено, само Ω неразрежено и дополнения к разреженным множествам образуют фильтр $\mathfrak{T}_X$.

Замечание. Если множество e разрежено в X, то $\widehat{R}_{K_X}^{e \cap CK}$ есть потенциал (для любого компакта $K \subset \Omega$), и этот потенциал стремится к нулю по направленному по возрастанию множеству компактов K. В частности, если δ_n есть окрестность X в $\widehat{\Omega}$, причем $\bigcap \delta_n = X$, то $R_{K_X}^{e \cap \delta_n} \to 0$.

Упражнение. Если всякое замкнутое подмножество множества e типа F_σ разрежено в $X \in \Delta_1$, то e также разрежено в X (указано Тодой для случая открытого множества e).

Пример. В случае когда Ω — шар, множество $\{y \mid K(X, y) < \lambda\}$, являющееся дополнением к некоторому другому шару (касающемуся шара Ω в точке X), (минимально) разрежено в точке X, хотя и неразрежено в обычном смысле в $\mathbb{R}^n$.

В общей постановке вопроса (гл. XII, п. 4) мы рассматривали возможные продолжения тонкой топологии на Ω до топологии на $\Omega \cup \Delta_1$, в которой окрестности любой точки $x \in \Delta_1$ пересекают Ω по множествам фильтра $\mathfrak{T}_X$. Мы видели там, что существует сильнейшая из таких топологий, а среди топологий, в которых Ω открыто, существует слабейшая. Уточним это в рассматриваемом частном случае.

Лемма XV.1. *Если δ — открытая окрестность точки $X \in \Delta_1$ в топологии $\widehat{\Omega}$, то множество $\Omega \setminus \delta$ разрежено в X (а следовательно, $\delta \cap \Omega$ неразрежено в X).*

Доказательство. Если это не так, то $K_X \equiv R_{K_X}^{\Omega \setminus \delta} \equiv \widehat{R}_{K_X}^{\Omega \setminus \delta}$. Возьмем возрастающую последовательность $\{\Omega_n\}$ относительно компактных открытых множеств, такую, что $\Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega$, $\bigcup \Omega_n = \Omega$; тогда $\widehat{R}_{K_X}^{\Omega_n \setminus \delta} \to$

$\hat{R}_{K_X}^{\Omega\setminus\delta}$. Так как функция $\hat{R}_{K_X}^{\Omega_n\setminus\delta}$ есть потенциал V_n, то ее можно представить в виде

$$\int G(x, y)\,d\mu_n(x) \text{ или } \int K(x, y)\,d\nu_n(x),$$

т.е. $\int d\nu_n = 1$. Некоторая подпоследовательность ν_{n_p} будет слабо сходиться к мере ν на $\hat{\Omega}$. Следовательно,

$$K_X(y) = \int K(x, y)\,d\nu(x), \quad y \in \Omega, \ x \in \hat{\Omega}, \tag{1}$$

причем $\int d\nu = 1$ (это получается, если положить $= y_0$). Так как $\nu_n(\delta \cap \Omega_n) = 0$ (в силу гармоничности V_n на $\delta \cap \Omega_n$), то ν_n сосредоточена на $\complement_{\hat{\Omega}}\delta = \hat{\Omega} \setminus \delta$ и это же верно для ν[1]). Из гармоничности интеграла (1) в Ω следует, что $\nu(\Omega) = 0$, так что мера ν сосредоточена на $\Delta \cap \complement_{\hat{\Omega}}\delta$. Но этот интеграл минимален, и замечание в гл. XIV, конец п. 2, показывает, что он должен быть равен $K_{X_0}(y)$, причем $X_0 \in \complement_{\hat{\Omega}}\delta$. В силу (1) с $X \in \delta$ это противоречит единственности точки X.

Лемма XV.2. *Для каждой точки $X_0 \in \Delta_1$ существует открытое в $\hat{\Omega}$ множество α, содержащее $\Delta \setminus X_0$ и такое, что $\alpha \cap \Omega$ разрежено в X_0 (и, конечно, неразрежено в любой точке $Y \in \Delta_1$, $Y \neq X_0$).*

Доказательство. Покроем $\hat{\Omega} \setminus \{X_0\}$ такой счетной системой открытых множеств α_n, замыкания которых не содержат X_0, что множества $\alpha_n \cap \Omega$ неразрежены в любой точке $\Delta_1 \cap \alpha_n$. Функция $\hat{R}_{K_{X_0}}^{\alpha_n \cap \Omega}$ является потенциалом; взяв любое ε, $0 < \varepsilon < 1$, мы сможем выбрать $\omega_n \subset \bar{\omega}_n \subset \Omega$ так, чтобы для $\alpha_n' = \alpha_n \setminus \omega_n$ выполнялось неравенство $R_{K_{X_0}}^{\alpha_n' \cap \Omega}(y_0) < 2^{-n}\varepsilon$.

---

[1]) Мы можем закончить рассуждение следующим образом: в силу (1) центр тяжести меры ν, сосредоточенной на B, есть K_X. Но K_X — крайняя точка для B, и поэтому ν должна быть мерой Дирака для точки $X \in \delta$. Противоречие.

Тогда $R_{K_{X_0}}^{\bigcup\alpha'_n\cap\Omega}(y_0)<\varepsilon$, и $\bigcup\alpha'_n$ удовлетворяет требованиям леммы.

Теорема XV.3 (Брело [33]). *На $\Omega\bigcup\Delta_1$ существует единственная топология, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) *она индуцирует на Ω тонкую топологию;*

(ii) *соответствующие ей окрестности любой точки $X\in\Delta_1$ пересекают Ω по множествам фильтра $\mathfrak{T}_X$.*

Эта топология отделима, множество Ω в ней открыто, и она индуцирует на Δ_1 дискретную топологию.

Доказательство. Если ω — открытая относительно компактная окрестность точки $x\in\Omega$, то $C\omega$ не разрежено ни в какой точке $X\in\Delta_1$. В топологии, удовлетворяющей условиям (i) и (ii), существует открытое множество α, такое, что $\alpha\cap\Omega=\omega$; если бы множество $\alpha\cap\Delta_1$ было непусто, то в точке $X\in\alpha\cap\Delta_1$ множество $\Omega\setminus\alpha\subset C_\Omega\omega$ было бы разрежено, что невозможно. Поэтому $\alpha=\omega$, и Ω открыто в рассматриваемой топологии.

Покажем теперь, что слабейшая топология, удовлетворяющая условиям (i) и (ii), совпадает с сильнейшей такой топологией. Воспользуемся результатами гл. XII, п. 4, и теоремой XII. 1, взяв в качестве $\{i\}$ точки множества Δ_1, а в качестве элементов фильтров $\mathfrak{B}_i$ — тонко открытые подмножества в Ω, принадлежащие $\mathfrak{T}_X$. Существование тонко замкнутого множества, разреженного в X и неразреженного ни в какой другой точке Δ_1 (лемма XV. 2) показывает, что $\{X\}$ есть окрестность точки X в рассматриваемой слабейшей топологии. Отсюда следует совпадение ее с сильнейшей топологией. Теорема доказана.

Топологию из этой теоремы будем называть *минимальной тонкой топологией* на $\Omega\bigcup\Delta_1$.

2. Интерпретация минимальной тонкой топологии на $\Omega\bigcup\Delta_1$. Лемма XV.4. *Если множество $E\subset\Omega$ разрежено в $X\in\Delta_1$, то существует открытое множество $\omega\supset E$, также разреженное в X.*

Доказательство. Мы знаем, что $R^e_{K_X}(y) = \inf\limits_{\omega} R^{\omega}_{K_X}(y)$ (ω открыто, $\omega \supset e$) (см. теорему VIII. 12). Так как $R^e_{K_X}(y_1) < K_X(y_1)$ для некоторого y_1, то существует такое ω, что $R^{\omega}_{K_X}(y_1) < K_X(y_1)$, и это ω разрежено в точке X.

Лемма XV. 5. *Из соотношения* $\int G(x, y)\, d\mu_1(y) \leqslant \leqslant \int G(x, y)\, d\mu_2(y)$ *для любой точки* x *следует соотношение* $\int v\, d\mu_1 \leqslant \int v\, d\mu_2$ *для любой неотрицательной супергармонической функции* v.

Доказательство. Если $\{\alpha_n\}$ — возрастающая последовательность компактных множеств, такая, что $\bigcup \alpha_n = \Omega$, то $\widehat{R}^{\alpha_n}_v(y)$ есть потенциал $\int G(x, y)\, d\nu_n(x)$ и

$$\int \widehat{R}^{\alpha_n}_v\, d\mu_1 = \int \left(\int G(x, y)\, d\mu_1 \right) d\nu_n.$$

То же самое верно для μ_2. При сделанных предположениях

$$\int \widehat{R}^{\alpha_n}_v\, d\mu_1 \leqslant \int \widehat{R}^{\alpha_n}_v\, d\mu_2,$$

и искомый результат получается переходом к пределу при $n \to \infty$.

Теорема XV. 6 (Наим [1]). *Разреженность множества* $E \subset \Omega$ *в точке* $X \in \Delta_1$ *эквивалентна существованию такой меры* $\mu \geqslant 0$, *что в топологии Мартина* $\mathcal{T}_m$

$$\int K_X(y)\, d\mu(y) = \mathcal{T}_m\text{-} \liminf_{x \in E,\ x \to X} \int K(x, y)\, d\mu(y). \qquad (2)$$

Доказательство. Мы знаем, что если X не принадлежит $\mathcal{T}_m$-замыканию множества E, то E разрежено в X, и условие (2) выполнено (с $\mu = 0$), поскольку правая его часть, т. е. $\sup\limits_{\delta} \inf\limits_{x \in E \cap \delta} \int K(x, y)\, d\mu(y)$ (δ — любая $\mathcal{T}_m$-окрестность), равна в данном случае $+\infty$ (как $\inf$ по пустому множеству).

Пусть E разрежено в X; согласно лемме XV.4 мы можем считать его открытым. Тогда существует такая точка $Z \in \Omega$, что

$$K_X(Z) > \hat{R}^E_{K_X}(Z) = \int K_X(y)\, db^E_{\varepsilon_Z}(y)$$

(см. гл. VI п. 12). Покажем, что мера $b^E_{\varepsilon_Z}$ удовлетворяет соотношению (2). Рассмотрим функцию $V_Z(x) = \int K(x, y)\, db^E_{\varepsilon_Z}(y)$. Так как функция $y \mapsto K(x, y)$ супергармонична и положительна, то на E

$$V_Z(x) = K(x, Z) \to_{\mathcal{T}_m} K(X, Z) = \int K_X(y)\, db^E_{\varepsilon_Z}(y)$$
$$\text{при } x \to X,$$

что даже более точно, чем (2).

Обратно, предположим, что X лежит в $\mathcal{T}_m$-замыкании множества E и μ удовлетворяет соотношению (2). Возьмем число γ, заключенное строго между правой и левой частями (2), и окрестность δ точки X в $\hat{\Omega}$ ($\delta \not\ni y_0$), такую, что $\int K(x, y)\, d\mu(y) \geqslant \gamma$ на $\delta \cap E$. Тогда $\int G(x, y)\, d\mu(y) \geqslant \gamma G(x, y_0)$ на $\delta \cap E$ и для каждого x

$$\int G(x, y)\, d\mu(y) \geqslant \gamma \hat{R}^{\delta \cap E}_{G_{y_0}}(x) = \gamma \hat{R}^{\delta \cap E}_{G_x}(y_0) =$$
$$= \gamma \int G(x, y)\, db^{\delta \cap E}_{\varepsilon_{y_0}}(y).$$

Следовательно,

$$K_X(y_0) = 1 > \frac{1}{\gamma} \int K_X(y)\, d\mu(y) \geqslant \hat{R}^{\delta \cap E}_{K_X}(y_0).$$

Отсюда мы заключаем, что множество $E \cap \delta$, а также множество E разрежены в X.

С л е д с т в и е. *Для любой меры $\mu \geqslant 0$ на Ω и любой точки $X \in \Delta_1$*

$$\mathcal{T}_m\text{-}\liminf_{x \in \Omega,\, x \to X} \int K(x, y)\, d\mu(y) = \int K_X(y)\, d\mu(y).$$

Теорема XV.7. *Рассмотрим на пространстве Мартина $\widehat{\Omega}$ конус Φ функций вида $\int K'(x, y)\,d\mu(y)$*[1]*, где μ — положительная мера на Ω, и конус Φ_{I} сужений этих функций на $\Omega \cup \Delta_{\mathrm{I}}$.*

i) *Тонкая топология, соответствующая Φ_{I} и пространству $\Omega \cup \Delta_{\mathrm{I}}$ с топологией Мартина $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$ (она индуцирована тонкой топологией, соответствующей конусу Φ на пространстве $\widehat{\Omega}$), совпадает с минимальной тонкой топологией на $\Omega \cup \Delta_{\mathrm{I}}$.*

ii) *Φ_{I} состоит из $+\infty$ и полунепрерывных снизу (в топологии $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$) продолжений на $\Omega \cup \Delta_{\mathrm{I}}$ функций вида $v/G'(x, y_0)$, где v — потенциал на Ω.*

Доказательство. Утверждение ii) вытекает из предыдущего следствия. Что касается i), то разреженность, отвечающая Φ_{I}, в точках Ω совпадает, очевидно, с классической разреженностью. Для $E \subset \Omega$ эта разреженность в точке $X \in \Delta_{\mathrm{I}}$ есть минимальная разреженность (предыдущая теорема). Согласно теореме XV.3, тонкая топология на $\Omega \cup \Delta_{\mathrm{I}}$, соответствующая Φ_{I} и $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$, совпадает с минимальной тонкой топологией.

Замечание. Теорема сохраняет силу, если $G'(x, y_0)$ заменить на G_{y_0}, и v/G_{y_0} определить в точке y_0 как $\liminf$ в y_0 по множеству $\Omega \setminus \{y_0\}$. Это — следствие того факта (см. гл. IX), что v/G_{y_0} на множестве $\Omega \setminus \{y_0\}$ имеет тонкий предел в y_0, равный упомянутому $\liminf$.

Упражнение. Доказать без использования теоремы XV.3, что топология, соответствующая Φ_{I}, является слабейшей топологией на $\Omega \cup \Delta_{\mathrm{I}}$, индуцирующей классическую тонкую топологию на Ω и обладающей тем свойством, что окрестности любой точки $X \in \Delta_{\mathrm{I}}$ пересекают Ω по множествам из $\mathfrak{T}_X$.

Теорема XV.8. *Обозначим через Φ' семейство функций, полученных полунепрерывным снизу (в*

[1]) Определение функции $K'(x, y)$ см. в гл. XIV, п. 1, iii). — *Прим. перев.*

топологии $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$) *продолжением на* $\Omega \cup \Delta_{\mathrm{I}}$ *функций вида* $v/G'(x, y_0)$, *где* v — *неотрицательная гипергармоническая функция на* Ω. *Тогда семейство* Φ' *порождает на* $\Omega \cup \Delta_{\mathrm{I}}$ *ту же тонкую топологию, что и* Φ_{I}, *т. е. минимальную тонкую топологию.*

Это вытекает из следующего результата (Наим [1], теорема 7'·16):

Для любой неотрицательной супергармонической функции v *отношение* v/G_{y_0} *на* Ω *имеет в любой точке* $X \in \Delta_{\mathrm{I}}$ *минимальный тонкий предел (т. е. предел по фильтру* $\mathfrak{T}_X$), *равный* $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$-$\liminf$.

Доказательство. Будем предполагать, что указанный $\liminf$ конечен. Обозначим его через Λ. Нужно доказать разреженность в точке X множества $E_\varepsilon = \{x \mid v(x)/G(x, y_0) > \Lambda + \varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ x \neq y_0\}$. Для всякого $x \in E$ имеем

$$v(x) \geqslant (\Lambda + \varepsilon)\, \hat{R}^{E_\varepsilon}_{G_{y_0}}(x) = (\Lambda + \varepsilon)\, \hat{R}^{E_\varepsilon}_{G_x}(y_0) = \\ = (\Lambda + \varepsilon) \int G_x(y)\, db^{E_\varepsilon}_{\varepsilon_{y_0}},$$

так что

$$\frac{v(x)}{(\Lambda + \varepsilon)\, G_{y_0}} \geqslant \int K(x, y)\, db^{E_\varepsilon}_{\varepsilon_{y_0}}(y) \quad (x \neq y_0).$$

Далее,

$$\int K_X(y)\, db^{E_\varepsilon}_{\varepsilon_{y_0}}(y) = \mathcal{T}_{\mathrm{m}}\text{-}\liminf_{x \in \Omega,\, x \to X} \int K(x, y)\, db^{E_\varepsilon}_{\varepsilon_{y_0}}(y) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\Lambda + \varepsilon}\, \mathcal{T}_{\mathrm{m}}\text{-}\liminf_{x \in \Omega,\, x \to K} \frac{v}{G_{y_0}} < 1,$$

и $\hat{R}^{E_\varepsilon}_{K_X}(y_0) < 1 = K_X(y_0)$, чем требуемая разреженность и доказана.

Замечание 1. Предыдущим рассмотрениям можно придать другую форму, если ввести, следуя Наим [1], некоторое продолжение на Δ отношения $G(x, y)/[G(x, y_0)\, G(y, y_0)]$. Мы получим на $\hat{\Omega}$ симметричное ядро $\Theta(x, y)$; соответствующие потенциалы неотрицательных мер определены на $\Omega \setminus \{y_0\}$ (но могут быть полунепрерывно снизу продолжены в y_0) и образуют конус, который порождает тонкую топологию, совпадающую с минимальной тонкой топологией на $\Omega \cup \Delta_1$. Ядро Θ оказывается полезным также при изучении BLD-функций. (Дуб [6]).

Важное замечание 2 (Наим [1], теорема 8′-17). Последний результат предыдущей теоремы стоит сопоставить с поведением отношения v/K_X $(X \in \Delta_1)$ в точке X. Согласно теореме XII.6, это отношение имеет минимально тонкий предел в X, равный $\inf (v/K_X)$, а также, очевидно, равный $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$-$\liminf (v/K_X)$ в X. Кроме того, можно показать, что он совпадает с $\mu_v(\{X\})$. Это вытекает из равенства $\mu_v(\{X\}) = \inf\limits_{\Omega} (v/K_X)$.

В случае когда v есть потенциал, это очевидно, поскольку неравенство $v \geqslant \varepsilon K_X$ $(\varepsilon > 0)$ невозможно. Для гармонической функции v это также легко получить, отправляясь от случая $\mu_v(\{X\}) = 0$. Тогда мы не можем иметь $v \geqslant \varepsilon K_X$, ибо отсюда следовало бы $\mu_v \succ \varepsilon \mu_{K_X}$. Наконец, в общем случае надо воспользоваться аддитивностью величины $\inf\limits_{\Omega} (v/K_X)$, вытекающей из того, что она равна соответствующему тонкому пределу.

3. Строгая разреженность и неразреженность. Теорема XV.9. *На пространстве* $\Omega \cup \Delta_1$ *с топологией* $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$ *разреженность и неразреженность, отвечающая конусу функций* Φ_1, *всегда строги.*

Доказательство. Для Ω это известно. Для множества $E \subset \Omega$, разреженного в точке $X \in \Delta_1$, мы докажем строгую разреженность, построив меру μ_0 на Ω, такую, что

$$\int K'_X \, d\mu_0 < +\infty,$$

$$\int K'(x, y)\, d\mu(y) \to_{\mathcal{T}_{\mathrm{m}}} +\infty \qquad (x \in E,\ x \to X).$$

Будем отправляться от меры μ, удовлетворяющей соотношению (2); для некоторой убывающей последовательности σ_n открытых окрестностей точки X в $\widehat{\Omega}$ и для сужений μ_n меры μ на $\sigma_n \cap \Omega$ ряд $\sum \mu_n$ дает решение вопроса (подробное доказательство см. в Брело [33]).

Наконец, множество $\Delta_{\mathrm{I}} \setminus \{X\}$, очевидно, разрежено (так как индуцированная на Δ_{I} топология дискретна), и можно убедиться, чт оно строго разрежено, используя множество E из леммы 2 и отвечающую ему меру μ_0, построенную в предыдущем абзаце. Интеграл $\int K'(x, y)\, d\mu_0(y)$, который стремится к $+\infty$ (в топологии $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$) в точке X по E, будет стремиться к $+\infty$ также и по $\Delta_{\mathrm{I}} \setminus \{X\}$ в силу следствия теоремы XV.6.

Что касается неразреженности, то заметим, что достаточно убедиться в строгой неразреженности множества $E \subset \Omega$ при условии, что оно неразрежено в X. Будем обозначать через R_{φ}^{E} приведенные функции относительно Φ_{I} в пространстве $\Omega \cup \Delta_{\mathrm{I}}$. Любая функция $V \in \Phi_{\mathrm{I}}$, мажорирующая 1 на $E \setminus \delta$ (где δ — открытая окрестность точки X в $\widehat{\Omega}$, $y_0 \notin \bar{\delta}$), на Ω не меньше, чем отношение $R_{G'_{y_0}}^{E \setminus \delta} / G'_{y_0}$, которое на $\delta \cap \Omega$ равно $\widehat{R}_{G_x}^{E \setminus \delta}(y_0)/G_x(y_0) = \int K(x, y)\, db_{\varepsilon_{y_0}}^{E \setminus \delta}(y)$. Далее, $V(x)$ не меньше, чем $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$-$\liminf$ этого выражения, т. е. чем $\int K(X, y)\, db_{\varepsilon_{y_0}}^{E \setminus \delta}(y)$ (теорема XV.6, следствие). Эта же оценка верна для $R_{\mathrm{I}}^{E \setminus \delta}(X)$. Поэтому достаточно установить, что $\sup\limits_{\delta} \int K(X, y)\, db_{\varepsilon_{y_0}}^{E \setminus \delta}(y) = 1$ (см. гл. II, п. 4) или же что $R_{K_X}^{E \setminus \delta_n}(y_0) \to \widehat{R}_{K_X}^{E}(y_0)$ для некоторых δ_n ($\bigcap \delta_n = \{X\}$). Но это предельное соотношение хорошо известно (см. гл. VI, п. 10).

4. Приведенные функции. Минимальные и неминимальные точки. Лемма XV.10. *Если функция v, неотрицательная и супергармоническая на Ω, допускает представление $v(y) = \int K'(x, y)\, d\mu_v(x)$ (где μ_v — неотрицательная мера на $\widehat{\Omega}$, сосредоточенная на $\Omega \cup \Delta_{\mathrm{I}}$) и $e \subset \Omega$, то*

$$\widehat{R}_v^e(z) = \int \widehat{R}_{K'(x, y)}^e(z)\, d\mu_v(x).$$

Доказательство. Известно (гл. VI), что $\widehat{R}_v^e(z) = \int v(y)\, db_{\varepsilon_z}^e(y)$. Следовательно, $\widehat{R}_v^e(z)$ равно

$$\int \left(\int K'(x, y)\, db_{\varepsilon_z}^e(y) \right) d\mu_v(x), \quad \text{или} \quad \int \widehat{R}_{K'(x,\cdot)}^e(z)\, d\mu_v(x).$$

Теорема XV. 11. (Наим [1].) *Если функция $u \geqslant 0$ гармонична и $E \subset \Omega$, то условие $R_u^E = u$ эквивалентно тому, что борелевское множество $\mathscr{E}_E$ точек из Δ_1, где E разрежено, имеет μ_u-меру нуль.*

Доказательство [1]. Допустим, что $\mu_u(\mathscr{E}_E) = 0$. Так как

$$\widehat{R}_u^E(y) = \int \widehat{R}_{K_X}^E(y)\, d\mu_u(X) \quad \text{и} \quad \widehat{R}_{K_X}^E = K_X \quad (\forall X \notin \mathscr{E}_E),$$

то мы получаем

$$\widehat{R}_u^E(y) = \int K_X(y)\, d\mu_u(X) = u(y).$$

Теперь предположим, что $\widehat{R}_u^E = u$. Введем счетный базис $\{\delta_i\}$ регулярных областей в Ω; в любой точке $X \in \Delta_1$, в которой E разрежено, имеем неравенство $\widehat{R}_{K_X}^E(y) < K_X(y)$ для некоторой точки y в одной из областей δ_i. Следовательно,

$$\int \widehat{R}_{K_X}^E\, d\rho_y^{\delta_i} < K_X(y) \quad (\forall y \in \delta_i).$$

Иными словами, $\mathscr{E}_E$ содержится в счетном объединении множеств α_i, удовлетворяющих предыдущему неравенству для всех X. Покажем, что α_i имеет нулевую μ_u-меру. Поскольку мы имеем дело с борелевскими функциями,

$$\int \left(\int \widehat{R}_{K_X}^E(x)\, d\rho_y^{\delta_i}(x) \right) d\mu_u(X) = \int \left(\int \widehat{R}_{K_X}^E(x)\, d\mu_u(X) \right) d\rho_y^{\delta_i}(x) = \int \widehat{R}_u^E(x)\, d\rho_y^{\delta_i}(x) = \int u\, d\rho_y^{\delta_i}(x) = u(y) \quad (\forall y \in \delta_i).$$

---

[1]) Мы следуем доказательству Гаурисанкарана [1], который уточнил также описание множества $\mathscr{E}_E$.

Следовательно,

$$\int \left[K_X(y) - \int \hat{R}^E_{K_X} d\rho^{\delta_i}_y \right] d\mu_u(X) = 0,$$

откуда $\mu_u(\alpha_i) = 0$.

Замечание. Множество $\mathscr{E}_E$ является пересечением Δ_1 с множеством типа K_σ из Δ.

Мы приведем доказательство, отличное от первоначального доказательства Гаурисанкарана. Прежде всего $\hat{R}^e_{K_X}(y_0) = \int K_X\, db^e_{y_0}$. Далее, $\mathscr{E}_E$ есть пересечение Δ_1 с объединением множеств $F_n = \left\{ \hat{R}^{E \setminus \Omega_n}_{K_X}(y_0) < 1 \right\}$ из Δ (здесь $\Omega_n \uparrow$, $\Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega$, $\bigcup \Omega_n = \Omega$). Каждое F_n есть объединение множеств $\left\{ \hat{R}^{E \setminus \Omega_n}_{K_X}(y_0) \leqslant 1 - p^{-1} \right\}$ для всех натуральных p. Наконец, каждое из этих множеств есть пересечение множеств $\left\{ \hat{R}^{E \cap (\Omega_{n+q} \setminus \Omega_n)}_{K_X}(y_0) \leqslant \leqslant 1 - p^{-1} \right\}$ для всех натуральных q. Последние же множества компактны в Δ.

Следствие. *Для любых неотрицательных гармонических функций* u *и множества* $E \subset \Omega$ *имеем*

$$\hat{R}^E_u = \int K_X\, d\mu'_u + \int \hat{R}^E_{K_X}\, d\mu''_u, \tag{3}$$

где μ'_u, μ''_u — *сужения меры* μ_u *на* $\Delta_1 \setminus \mathscr{E}_E$ *и* $\mathscr{E}_E$ *соответственно. Первый член есть наибольшая гармоническая миноранта для* $\hat{R}^E_u$, *а второй является потенциалом.*

В самом деле, $X \in \Delta_1 \setminus \mathscr{E}_E \Rightarrow \hat{R}^E_{K_X} = K_X$, откуда и получается искомое разложение.

Далее, пусть u' положительна, гармонична и $\leqslant \hat{R}^E_u$. Тогда $u' = R^E_{u'}$. Действительно, в противном случае существует супергармоническая функция v, которая $\geqslant u'$ на E и $< u'$ в некоторой точке x; рассмотрим супергармоническую функцию w, которая $\geqslant u$ на E и достаточно близка к R^E_u в x. Функция $v + w - u'$ неотрицательна $\left(w \geqslant R^E_u \geqslant u'\right)$, $\geqslant u$ на E, но $< R^E_u$

в точке x. Поэтому мы заключаем, что $\mu_{u'}(\mathscr{E}_E) = 0$, и так как эта мера $\leqslant \mu_u$, то $\mu_{u'} \leqslant \mu'_u$ и, значит, $u' \leqslant \int K_X \, d\mu'_u$.

Определение XV.12. Неотрицательная гармоническая в Ω функция u называется *привязанной к нулю* в точке $X \in \Delta$, если существует такая окрестность δ точки X в пространстве $\hat{\Omega}$, что $u = R_u^{C\delta \cap \Omega}$ на $\delta \cap \Omega$. В этом случае то же самое верно для любой окрестности $\delta' \subset \delta$.

Предложение XV.13. *Если неотрицательная гармоническая функция u привязана к нулю в любой точке множества $\omega \cap \Delta_1$, где ω — открытое подмножество пространства $\hat{\Omega}$, то для ассоциированной меры μ_u имеем $\mu_u(\omega \cap \Delta_1) = 0$. Обратно, из этого равенства следует, что u привязана к нулю в каждой точке множества $\omega \cap \Delta$.*

Доказательство. Для любой точки $X_0 \in \Delta_1 \cap \omega$ можно найти в $\hat{\Omega}$ открытое множество $\omega_1 \subset \omega$, являющееся окрестностью точки X_0 и такое, что $\hat{R}_u^{C\omega_1 \cap \Omega} = u$ на $\omega_1 \cap \Omega$, а следовательно, и на Ω (поскольку это равенство имеет место квазивсюду на $C\omega_1$). Так как $C\omega_1$ разрежено в каждой точке множества $\omega_1 \cap \Delta_1$, то $\mu_u(\omega_1 \cap \Delta_1) = 0$. Используя счетное покрытие множества $\omega \cap \Delta_1$, мы заключаем, что $\mu_u(\omega \cap \Delta_1) = 0$. Обратное утверждение доказывается легко.

В качестве непосредственного следствия получается

Теорема XV.14. *Положительная гармоническая функция u на Ω будет минимальной в том и только в том случае, когда она привязана к нулю во всех точках множества $X \in \Delta_1$, кроме одной (или же во всех точках $x \in \Delta$, кроме одной минимальной).*

Следовательно:

Всякая неотрицательная гармоническая функция, привязанная к нулю во всех точках множества Δ, кроме одной точки X_0, либо пропорциональна K_{X_0}, либо равна нулю в случае, когда точка X_0 не минимальна.

Это — *принцип положительных особенностей*, восходящий к Булигану [1]. См. Дени [1] и Брело [12].

Характеризация неминимальных точек множества Δ. Предложение XV. 15. *Для того чтобы точка $X \in \Delta$ была неминимальна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий*:

а) *Существует такая окрестность δ точки $X \in \Delta$ в $\hat{\Omega}$, что $\hat{R}_{K_X}^{\delta \cap \Omega} \neq K_X$*.

b) *Существует такая мера $\mu \geqslant 0$ на Ω, что*

$$\int K(X, y)\, d\mu(y) < \mathcal{T}_{\mathrm{m}}\text{-}\liminf_{x \in \Omega,\ x \to X} \int K(x, y)\, d\mu(y) \qquad (4)$$

Доказательство. Утверждение насчет а) близко к предыдущей теореме.

Что касается условия b), то формула (2) сразу показывает, что из него следует неминимальность точки X. Далее, если точка X неминимальна, то мы можем использовать открытую окрестность δ из а), и соображения, приведенные в начале доказательства теоремы XV. 6, дают меру, удовлетворяющую условию b).

Замечание. Рассмотрим на пространстве $\hat{\Omega}$ (с топологией $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$) конус функций Φ, определенный в теореме XV. 7. В соответствующей тонкой топологии Ω будет строго неразреженным в любой точке $X \in \Delta_1$ (в силу теоремы XV. 9). Далее, Ω строго разрежено в любой точке $X \in \Delta \setminus \Delta_1$. Разреженность вытекает из b), а строгая разреженность доказывается так же, как в теореме XV. 9.

Упражнения. 1) В указанной тонкой топологии множество $\Delta \setminus \Delta_1$ открыто, а любое подмножество в Δ_1 замкнуто.

2) Минимальная тонкая топология на $\Omega \cup \Delta_1$ индуцируется топологией на $\hat{\Omega}$, в которой для всякой точки $X \in \Delta_1$ базис окрестностей состоит из множеств фильтра $\mathfrak{T}_X$ с добавленной к ним точкой X, а для всякой точки $X \in \Delta \setminus \Delta_1$ окрестностями являются окрестности в топологии $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$.

5. Статистическая разреженность и свойство Шоке. (См. Брело [27].) Теорема XV.16. *Пусть даны множества $e \subset \Omega$, $\alpha \subset \Delta_1$ и положительная гармоническая на Ω функция h с ассоциированной мерой μ_h, сосредоточенной на Δ_1. Тогда h-статистическая разреженность на α (статистическое свойство):*

e разрежено на α всюду, за исключением множества нулевой μ_h-меры

эквивалентна тому, что для окрестностей ω множества α в пространстве $\hat{\Omega}$ семейство $\{\omega \cap e\}$ является h-исчезающим, т. е. $\inf \widehat{R_h^{\omega \cap e}} = 0$. Тот же результат верен для тонких окрестностей α в $\Omega \cup \Delta_1$.

Доказательство. Пусть имеет место статистическое свойство. Разложим α на множество α_0, где e неразрежено, и множество α_1, где e разрежено. Так как $\mu_h(\alpha_0) = 0$, то $\overline{D}_{1,h}^{\alpha_0} = 0$ [1]. Далее, существует положительная супергармоническая функция v, такая, что $\liminf (v/h) \geqslant 1$ на α_0 и $v(y_0) < \varepsilon$. В таком случае $v/h > 1 - \varepsilon$ на открытом множестве ω_0, являющемся пересечением Ω с множеством ω, открытым в $\hat{\Omega}$ и содержащим α_0. Таким образом, $v/(1-\varepsilon) \geqslant h$ на ω_0 и $R_h^{\omega \cap \Omega}(y_0) < \varepsilon/(1-\varepsilon)$. Что касается α_1, то заметим, что множество, где e разрежено, есть пересечение множества Δ_1 с подмножеством типа K_σ в Δ_1 (см. теорему XV.11, замечание). Поэтому достаточно проверить свойство h-исчезания для произвольного компактного множества β точек из $\Delta \setminus \Delta_1$. Рассмотрим открытое в $\hat{\Omega}$ множество $\omega \supset \beta$, такое, что

$$\mu(\bar{\omega} \cap \Delta) < \mu(\beta) + \varepsilon$$

(замыкание берется в $\hat{\Omega}$), и возрастающую последовательность компактов K_n, $\bigcup K_n = \Omega$. Тогда наибольшая

---

[1]) Обозначение $\overline{D}_{1,h}^{\alpha_0}$ вводится ниже в гл. XVI, п. 1. — *Прим. перев.*

гармоническая миноранта для $\hat{R}_h^{e\cap\omega}$ есть $\lim \hat{R}_h^{e\cap\omega\cap CK_n}$, или $\int_E K_X\, d\mu_h$, где E — подмножество в Δ_1, на котором $e\cap\omega$ разрежено (следствие теоремы XV. 11). Таким образом, $\hat{R}_h^{e\cap\omega\cap CK_n}(y_0)\to\mu(E)$. Но $E\subset\bar{\omega}\setminus\beta$, и поэтому $\mu(E)<\varepsilon$, откуда и следует искомое свойство h-исчезания.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим тонкую окрестность ω множества α, такую, что $\hat{R}_h^{e\cap\omega}(y_0)<\varepsilon$. Наибольшая гармоническая миноранта этой функции есть $\int_E K_X\, d\mu_h$, где E то же, что и выше. Но $\alpha_0\subset E$, так что

$$\overline{\int_{\alpha_0}} d\mu_h \leqslant \int_E d\mu_h \leqslant \hat{R}_h^{e\cap\omega}(y_0) < \varepsilon$$

и, следовательно, $\mu_h(\alpha_0)=0$.

Дополнения и указания. 1) Статистическое свойство эквивалентно существованию положительной супергармонической функции U, такой, что $U/h\to\infty$ на $\alpha\cap\bar{e}$ (или тому же самому в тонкой топологии).

2) Функцию h можно заменить положительной супергармонической функцией V, пользуясь ассоциированной с V мерой μ_V, которая на Δ равна μ_h, где h — наибольшая гармоническая миноранта для V.

3) Сравнение полученных результатов с результатами для пространства Ω (гл. VII) позволяет прийти к следующему выводу. Пусть $\alpha\subset\Omega\cup\Delta_1$, $e\subset\Omega$ и V — положительная супергармоническая функция. Тогда аналогичное статистическое свойство с исключительным V-полярным множеством (т. е. V-статистическая разреженность) эквивалентно V-исчезанию семейства $\{\omega\cap e\}$ (где ω — окрестность множества α в $\hat{\Omega}$ или в тонкой топологии), а также существованию супергармонической функции $U\geqslant 0$, такой, что отношение $(U/V)\,|\,e$ (там, где оно имеет

смысл) стремится к $+\infty$ в точках множества $\alpha \cap \bar{e}$ (соответственно в точках множества $\alpha \cap \tilde{e}$ в случае тонкой сходимости).

Свойство Шоке. В общей теории (гл. IV) можно было бы назвать *свойством Шоке* множества e и веса $p(e)$ существование для произвольного $\varepsilon > 0$ замкнутого множества $e' \subset \tilde{e}$, такого, что $p(\tilde{e} \setminus e') < \varepsilon$.

Упражнение. В изложенной выше классической теории обозначим через R_{φ}^{*e} нижнюю огибающую множества неотрицательных гипергармонических функций, которые мажорируют функцию $\varphi \geqslant 0$ на множествах $e \cap \Omega$ и $\Omega \cap \omega$, где ω — некоторая окрестность множества e в $\hat{\Omega}$. Тогда вес $\int R_{\varphi}^{*e}\, d\rho_{y_0}^{\delta}$ (где $d\rho_{y_0}^{\delta}$ — гармоническая мера в δ для точки $y_0 \in \delta$) обладает свойством Шоке для любого множества $e \subset \Omega \cup \Delta_1$, для которого множество $e \cap \Delta_1$ является μ_V-измеримым (здесь V — некоторая положительная супергармоническая функция).

6. Случай шара или полупространства в $\mathbb{R}^n$. В этих случаях пространство Мартина совпадает с евклидовым замыканием рассматриваемой области. Как показала Наим [1], оказывается возможным и интересным уточнить предыдущий анализ и дать, например, критерий разреженности, аналогичный классическому критерию Винера.

Более подробное непосредственное изучение случая полупространства было предпринято раньше Лелон-Феран [1]. Однако ее определения (например, определение разреженности с помощью критерия типа Винера) и методы не приспособлены для случая общего пространства Мартина и поэтому здесь не рассматриваются (см., впрочем, гл. XVII). Было бы полезно углубить эти результаты и установить их связь с общей теорией.

Дополнительные сведения по тематике этой главы (например, о подпространствах) можно найти у Мартина [1], Брело [12], Наим [1] и в более поздних аксиоматических исследованиях.

Глава XVI

КЛАССИЧЕСКАЯ ГРАНИЦА МАРТИНА ПРОБЛЕМА ДИРИХЛЕ И ПОВЕДЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ

1. Общая задача Дирихле. (См. Брело [17].) Рассмотрим пространство Грина Ω, плотное в некотором компактном метризуемом пространстве $\overline{\overline{\Omega}}$ (с границей $\Delta = \overline{\overline{\Omega}} \setminus \Omega$) и фиксированную положительную гармоническую функцию h на Ω.

Лемма XVI. 1. *Если функция v супергармонична в Ω и для всех $X \in \Delta$ удовлетворяется условие*

$$\liminf_{y \in \Omega,\ y \to X \in \Delta} \frac{v(y)}{h(y)} \geqslant \lambda$$

(в топологии пространства $\overline{\overline{\Omega}}$), *то* $v/h \geqslant \lambda$.

Доказательство. Можно, конечно, считать, что $\lambda > -\infty$. Если лемма не верна, то v/h после полунепрерывного снизу продолжения на $\overline{\overline{\Omega}}$ будет достигать своего минимума $k < \lambda$ на Ω. Функция $v - kh$ неотрицательна и супергармонична в Ω и равна нулю в некоторой точке; следовательно, она есть нуль и $v/h = k < \lambda$. Получено противоречие.

Обобщенные огибающие. Пусть дана вещественная функция f на Δ. Рассмотрим семейство Φ гипергармонических функций v на Ω, удовлетворяющих условиям

$$\liminf (v/h) \geqslant f(X), \quad \liminf (v/h) > -\infty \quad (\forall X \in \Delta).$$

Заметим, что второе условие эквивалентно ограниченности снизу отношения v/h. Нижняя огибающая $\overline{D}_{f,h}$ этого семейства есть либо $+\infty$, либо $-\infty$, либо гармоническая функция (и, очевидно, возрастает вместе с f). В случае $f = \varphi_e$ (φ_e — индикатор множества $e \subset \Omega$) мы эту огибающую будем обозначать через h_e. Если $h_e = 0$, то множество e называется

h-пренебрежимым. Термин "h-почти всюду" (h-п. в.) означает "всюду, за исключением h-пренебрежимого множества в Δ". Отметим, что $\overline{D}_{f,h}$ не меняется при изменении f на h-пренебрежимом множестве. Поэтому на таком множестве функция f может быть не определена.

Положим $\underline{D}_{f,h}$ равным $-\overline{D}_{-f,h}$. Из предыдущей леммы следует, что $\underline{D}_{f,h} \leqslant \overline{D}_{f,h}$. Если обе огибающие равны и конечны (и, значит, гармоничны), то функция f называется *h-разрешимой*, а эта общая огибающая обозначается через $D_{f,h}$ (гармоническое решение h-задачи Дирихле [1])). Очевидно, что 1 h-разрешима и $D_{1,h} = h$. Отметим, что h-разрешимость сохраняется при линейных операциях и переходе к пределу по равиомерной сходимости.

Далее мы будем развивать теорию подобно классической теории для ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ (изложенной в Брело [25] и в более общей форме в Брело [19, 20]).

Лемма XVI.2. *Если последовательность f_n возрастает, и $\underline{D}_{f_n,h} > -\infty$, то $\overline{D}_{f_n,h}$ также возрастает и стремится к $\overline{D}_{\lim f_n,h}$.*

Доказательство такое же, как в классическом случае или в общей теории (Брело [20, 28]). В частности, если $e_n \uparrow$, $\bigcup e_n = e$, то $h_{e_n} \uparrow$, $h_{e_n} \to h_e$.

Теорема XVI.3. *Предположим, что каждая конечная вещественная непрерывная функция на Δ h-разрешима (условие A_h). Тогда линейная форма $\varphi \mapsto D_{\varphi,h}(y)$ может быть записана в виде $\int \varphi\, d\nu_h^y$ (где ν_h^y — однозначно определенная мера Радона на Δ) и для любой функции f имеем $\overline{D}_{f,h}(y) = \overline{\int} f\, d\nu_h^y$.*

---

[1]) На языке аксиоматической теории (Брело [19]) $D_{f,h}/h$ следовало бы назвать решением задачи Дирихле для *h-гармонических функций* (отношений гармонических функций к h) при заданной граничной функции f.

Следовательно, $h_e(y)$ есть внешняя ν_h^y-мера множества e. Далее, h-разрешимость функции f эквивалентна ее ν_h^y-интегрируемости (это условие не зависит от y), и если эта интегрируемость имеет место, то

$$D_{f,h}(y)=\int f\,d\nu_h^y.$$

Доказательство такое же, как в классической или общей теории.

Нам потребуется еще

Лемма XVI.4. *Если α — произвольная открытая окрестность множества e в $\overline{\overline{\Omega}}$, то $h_e=\inf\limits_{\alpha} R_h^{\alpha\cap\Omega}$.*

Доказательство. Неравенство $h_e\leqslant\inf\limits_{\alpha} R_g^{\alpha\cap\Omega}$ очевидно. Если супергармоническая функция $v\geqslant 0$ удовлетворяет в каждой граничной точке условию $\liminf(v/h)\geqslant\varphi_e$, то v/h после полунепрерывного снизу продолжения будет $>1-\varepsilon$ на некотором открытом подмножестве β пространства $\overline{\overline{\Omega}}$, содержащем e. Поэтому $v/(1-\varepsilon)>h$ на $\beta\cap\Omega$, $v/(1-\varepsilon)\geqslant R_h^{\beta\cap\Omega}$ и, следовательно, $h_e\geqslant(1-\varepsilon)R_h^{\beta\cap\Omega}$. Так как ε произвольно, то $h_e\geqslant\inf\limits_{\alpha} R_h^{\alpha\cap\Omega}$.

Следствие 1. *Существует такая убывающая последовательность $\{\alpha_n\}$ открытых окрестностей множества e в пространстве $\overline{\overline{\Omega}}$, что $h_e=\inf\limits_{n} R_h^{\alpha_n\cap\Omega}$.*

Следствие 2. *Для всякого $e\subset\Delta$ имеем $h_e=\inf\limits_{\gamma} h_\gamma$, где γ пробегает множество всех окрестностей множества e.*

Лемма XVI.5. *Для всякого $e\subset\Delta$ имеем $(h_e)_e=h_e$.*

Доказательство. Выбрав открытую окрестность α множества e в $\overline{\overline{\Omega}}$, введем убывающую последовательность $\alpha_n\subset\alpha$, как в следствии 1. Тогда $\hat{R}_{\hat{R}_h^{\alpha_n\cap\Omega}}^{\alpha\cap\Omega}=$

$= \widehat{R}_h^{\alpha_n \cap \Omega}$ [1]). Левая часть стремится к $\widehat{R}_h^{\alpha \cap \Omega}$ [2]), а $\inf\limits_{\alpha} \widehat{R}_{h_e}^{\alpha \cap \Omega}$ равен $(h_e)_e$, откуда и вытекает требуемое равенство.

Много дополнений и дальнейших результатов можно найти у Брело [16] и Наим [1]. Исследуются роль условия A_h, случай переменных функции h и области Ω в заданном пространстве Грина, различные типы компактификации, т. е. различные границы, поведение функций вблизи этих границ и т. д. Упомянем некоторые из результатов. Без предположения о том, что выполненс условие A_h, отображение $e \longmapsto h(e)$ для компактных множеств e является емкостью Шоке (и даже альтернирующей бесконечного порядка); эта емкость аддитивна (т. е. определяет меру с соответствующей внешней мерой, равной h_e для любого e) в том и только в том случае, когда имеет место условие A_h. При условии A_h базис фильтра $\mathfrak{F}$, сходящийся к $X \in \Delta$, называется *h-регулярным*, если для всякой конечной непрерывной функции f имеем $D_{f,h}/h \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} f(X)$. Это эквивалентно условию

a) для всякой функции f, ограниченной сверху, $\limsup\limits_{\mathfrak{F}} (\overline{D}_{f,h}/h) \leqslant \limsup f$ в X, а также условию

b) $h_e/h \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} 0$ для всякого компактного $e \not\ni X$.

Условия a) и b) эквивалентны и без предположения о том, что выполнено условие A_h и могут служить определением h-регулярности базиса фильтра $\mathfrak{F}$ в общем случае.

Граничная точка $X \in \Delta$ называется *h-регулярной*, если ее окрестности пересекают Ω по h-регулярному фильтру $\mathfrak{F}$. С помощью этого понятия могут быть обобщены некоторые классические результаты, относящиеся к евклидовой границе. Например, рассмо-

---

[1]) В силу следующего замечаиия: для открытых миожеств $\beta \subset \beta' \subset \Omega$ имеем $\widehat{R}^{\beta'}_{\widehat{R}^{\beta}_{v}} = \widehat{R}^{\beta}_{v}$. Неравенство $\leqslant$ очевидио. Но левая часть мажорирует v иа β и, следовательио, мажорирует правую часть (тот же результат вереи для любых миожеств $\beta \subset \beta''$).

[2]) В силу общей формулы (8) гл. VI, стр. 67.

трим величину $\mathscr{L}_h^u(x)$, равную lim inf в точке X отношения u/h, где u — супергармоническая функция и u/h ограничено снизу. Если точка X является h-регулярной, то

$$\mathscr{L}_h^u(X) = \liminf_{Y \to X,\, Y \in \Delta \setminus E} \mathscr{L}_h^u(Y)$$

для любого h-пренебрежимого множества E. Однако неизвестно, будет ли множество h-иррегулярных граничных точек h-пренебрежимым.

Упомянем еще, что в связи с общей теорией задачи Дирихле изучались метризуемые, полные, но, вообще говоря, некомпактные пространства и соответствующие им границы, причем граничные условия выражались с помощью фильтров. Интересные примеры получаются при пополнении по метрике, совместимой с топологией Ω, с помощью базисов фильтров, определяемых концами некоторых линий, например линий Грина (Брело и Шоке [1], Брело [15], Оцука, Арсоув и Джонсон).

2. Основной случай: пространство Мартина $\hat{\Omega}$. Далее будем предполагать, что $\hat{\hat{\Omega}} = \hat{\Omega}$ (см. Брело [17]).

Лемма XVI. 6. *Пусть точка X минимальна (т. е. $X \in \Delta_1$). Если $X \in e$, то $(K_X)_e = K_X$, в противном случае $(K_X)_e = 0$.*

Доказательство. Для любой открытой окрестности α множества e в пространстве $\hat{\Omega}$ множество $\alpha \cap \Omega$ будет неразрежено в $X \in e$ (лемма XV. 1). Следовательно, $R_{K_X}^{\alpha \cap \Omega} = K_X$ (определение разреженности) и $(K_X)_e = K_X$.

В случае $X \notin e$ мы докажем даже немного больше, а именно что $(K_X)_{\Delta \setminus \{X\}} = 0$. Воспользуемся существованием окрестности E множества $\Delta \setminus \{X\}$ в $\hat{\Omega}$, такой, что $E \cap \Omega$ разрежено в X (лемма XV. 2). Тогда $R_{K_X}^{E \cap \Omega} < K_X$ и, следовательно, $(K_X)_{\Delta \setminus \{X\}} < K_X$. Теперь достаточно заметить, что для любого $e \subset \Delta$ минимальная функция K_X удовлетворяет условию $(K_X)_e = 0$

или $(K_X)_e = K_X$. В самом деле, так как $(K_X)_e \leqslant K_X$, то $(K_X)_e = lK_X$ $(l \geqslant 0)$; далее $((K_X)_e)_e = l\,(K_X)_e$, так что $(K_X)_e = l\,(K_X)_e$, и поэтому либо $(K_X)_e = 0$, либо $= 1$.

Лемма XVI. 7. *Обозначим через μ_h меру, фигурирующую в представлении Мартина функции h* (см. теорему XIV. 4). *Тогда*

$$h_e(y) = \overline{\int_e} K_X(y)\,d\mu_h(X) = \overline{\int} \varphi_e K_X\,d\mu_h$$

(где φ_e — характеристическая функция (индикатор) e). Если множество e борелевское (или даже только μ_h-измеримое), то, обозначая через μ_h^e сужение меры μ_h на e, будем иметь

$$h_e(y) = \int K_X\,d\mu_h^e(X); \quad h_e(y_0) = \int_e d\mu_h.$$

Доказательство. Предположим сначала, что e компактно. Рассмотрим открытую окрестность α множества e в $\widehat{\Omega}$. Тогда, согласно лемме XV. 10,

$$\widehat{R}_h^{\alpha \cap \Omega}(y) = \int \widehat{R}_{K_X}^{\alpha \cap \Omega}(y)\,d\mu_h(X).$$

Беря убывающую последовательность $\{\alpha_n\}$ таких множеств α с пересечением, равным e, убеждаемся, что $\widehat{R}_h^{\alpha_n \cap \Omega}$ и $\widehat{R}_{K_X}^{\alpha_n \cap \Omega}$ стремятся соответственно к h_e и $(K_X)_e$. Следовательно,

$$h_e(y) = \int (K_X)_e\,d\mu_h(X) = \int_e K_X\,d\mu_h(X).$$

Для открытого множества e рассмотрим возрастающую последовательность компактных e_n с $\bigcup e_n = e$ и получим ту же самую формулу. Для произвольного e рассмотрим множество всех открытых окрестностей j в Δ; очевидно, $h_e = \inf\limits_j h_j$. Для фиксированного y интеграл $\int\limits_j K_X(y)\,d\mu_h$ есть $K_X(y)\,d\mu_h$-мера множества j, и поэтому $\inf_j h_j$ есть соответствующая внешняя мера множества e, т. е. $\overline{\int} \varphi_e K_X(y)\, d\mu_h(X)$.

Отметим, что множество $\Delta \setminus \Delta_1$ всегда h-пренебрежимо.

Следствие. *Если e_1, e_2 — непересекающиеся борелевские множества в Δ, то $(h_{e_1})_{e_2} = 0$.*

Действительно, $(h_{e_1})_{e_2}(y_0) = \int_{e_2} d\mu_h^{e_1} = 0$.

Лемма XVI. 8. *Если e — борелевское (или даже только μ_h-измеримое) множество, то характеристическая функция φ_e этого множества h-разрешима.*

Доказательство. Так как $(h_e)_{\Delta \setminus e} = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти такую открытую окрестность α множества $\Delta \setminus e$ в пространстве $\widehat{\Omega}$, что $\widehat{R}_{h_e}^{\alpha \cap \Omega}(y_0) < \varepsilon$. Далее, разность $h_e - \widehat{R}_{h_e}^{\alpha \cap \Omega} \geqslant 0$ и равна нулю на $\alpha \cap \Omega$; эта — субгармоническая функция в Ω, которая не превосходит $h_e = \overline{D}_{\varphi_e, h}$, и ее отношение к h стремится к нулю в каждой точке множества $\Delta \setminus e$; следовательно, она не превосходит $\underline{D}_{\varphi_e, h}$. Это показывает, что разность $\overline{D}_{\varphi_e, h} - \underline{D}_{\varphi_e, h}$ произвольно мала в точке y_0; следовательно, она равна нулю в y_0 и, значит, всюду в Ω.

Теорема XVI. 9 (для пространства Мартина). *Всякая конечная непрерывная функция φ на Δ является h-разрешимой, и мера $d\nu_h^y$ из общей теории равна в рассматриваемом случае $K_X(y)\, d\mu_h(X)$.*

Доказательство. Действительно, функцию φ можно приблизить с точностью до любого $\varepsilon > 0$ конечной суммой функций вида $\lambda_i \varphi_{e_i}$ (где e_i — борелевские множества, λ_i — вещественные числа), которая h-разрешима. Сопоставление выражений для $h_e(y)$, данных в теореме XVI. 3 и в лемме XVI. 7, приводит к искомому соотношению между ν_h^y и μ_h.

Отметим, что h-пренебрежимость множества равносильна в рассматриваемом случае равенству нулю его μ_h-меры.

Замечание 1. Доказанный результат первоначально был получен Брело [17] с помощью аналогичных, но более длинных рассуждений. А именно, вместо интегрального представления Мартина использовалось одно более грубое элементарное представление. Оно приводит к формуле $D_{f,h} = \int f K_X \, d\nu_h^{y_0}$, где мера $\nu_h^{y_0}$ сосредоточена на Δ_1; в частном случае $f = 1$ эта формула дает $D_{1,h} = h = \int K_X \, d\nu_h^{y_0}$, т. е. представление Мартина.

Замечание 2. Лемма XVI. 4 наводит на мысль рассмотреть последовательности функций $R_h^{e_i \cap \Omega}$ (в $\widehat{\Omega}$) для убывающей последовательности множеств $e_i \subset \Omega$; однако даже если все e_i открыты и $\bigcap e_i \cap \Omega = \varnothing$, то $\inf R_h^{e_i \cap \Omega} \neq h_{\cap e_i}$. При выполнении условия $\bigcap e_i \cap \Omega = \varnothing$ этот inf равен $\inf h_{A_i}$, где A_i — множество точек из Δ_1, в которых $e_i \cap \Omega$ неразрежено. Более подробное и более общее исследование проведено в Брело [30].

Упражнение. Функции $D_{f,h}$ ($f \geqslant 0$) совпадают с пределами возрастающих последовательностей неотрицательных гармонических функций, отношение которых к h равномерно ограничено (Парро [1], Брело [17]).

3. Другие характеризации огибающих (случай Мартина). Лемма XVI. 10 (принцип минимума) (Наим [1]). *Пусть заданы положительная гармоническая функция h и супергармоническая функция u, такие, что $u/h \geqslant K$ (где постоянная $K \leqslant 0$). Пусть e — множество внутренней μ_h-меры нуль и для всякой точки $X \in \Delta_1 \setminus e$ существует неразреженное в ней множество E_X, такое, что*

$$\liminf_{y \to X,\, y \in E_X} \frac{u(y)}{h(y)} \geqslant 0.$$

Тогда $u \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u_1 = \inf(u, 0)$ и допустим, что $u_1 \neq 0$. У этой функции имеется наибольшая гармоническая миноранта $u_1' \geqslant Kh$. Множество $E_\varepsilon = \{x \mid u_1(x) \geqslant -\varepsilon h(x)\}$, совпадающее с множеством $\{x \mid u \geqslant -\varepsilon h\}$, содержит для каждой точки $X \in \Delta_1 \setminus e$ пересечение множества E_X с некоторой окрестностью точки X. Поэтому борелевское подмножество в Δ_1, где E_ε разрежено, является частью множества e и имеет нулевую μ_h-меру и нулевую $\mu_{-u_1'}$-меру. Следовательно, $R^E_{-u_1'} = -u_1'$ (теорема XV. 11). Так как $u_1 = u_1' + v$ (где v — неотрицательный потенциал), то $-u_1' \leqslant \varepsilon h + v$ на E_ε. Таким образом, $R^{E_\varepsilon}_{-u_1'} \leqslant \varepsilon h + v$ на Ω для произвольного $\varepsilon > 0$, так что $u_1' = 0$. Получено противоречие.

Теорема XVI. 11 (Наим [1], Дуб [3]). *Для произвольной вещественной функции f на Δ рассмотрим гипергармонические функции u, для которых отношение u/h, где h — фиксированная гармоническая функция, ограничено снизу и удовлетворяет одному из следующих условий*:

a) *Для любой точки $X \in \Delta_1$ существует множество E^u_X, неразреженное в X и такое, что*

$$\liminf_{y \in E^u_X,\ y \to X} (u/h) \geqslant f(X).$$

b) *Тонкий* $\liminf (u/h) \geqslant f(X)$ *в любой точке* $X \in \Delta_1$.

c) (Дуб) *Тонкий* $\limsup (u/h) \geqslant f(X)$ *в любой точке* $X \in \Delta_1$.

Тогда нижняя огибающая множества таких функций u совпадает с $\overline{D}_{f,h}$. Тот же результат верен, если предположить лишь, что указанные условия выполняются μ_h-почти всюду.

Доказательство. В каждом из трех случаев рассматриваемая огибающая, очевидно, $\leqslant \overline{D}_{f,h}$, и нам нужно получить противоположное неравенство. Так как отношение u/h ограничено снизу некоторой константой K, то достаточно рассмотреть вместо f функцию $f' = \sup(f, K)$, поскольку $\overline{D}_{f', h} \geqslant \overline{D}_{f, h}$. Можем считать поэтому, что f ограничена снизу, например, неотрицательна. Предположим, что функция $\overline{D}_{f, h}$ конечна. Тогда существует функция $\varphi \geqslant f$, ν_h^y- и μ_h-интегрируемая и такая, что $D_{\varphi, h} = \overline{D}_{f, h}$ и $\underline{D}_{\varphi - f, h} = 0$ (в случае, когда f бесконечна, $\varphi - f = 0$). Это — свойство верхнего интеграла. Отсюда следует, что множество, где $\varphi - f > \varepsilon > 0$, имеет внутреннюю μ_h-меру нуль. Далее, если функция v гипогармонична и удовлетворяет условиям: v/h ограничено сверху и $\limsup(v/h) \leqslant \varphi$ в любой точке $X \in \Delta_1$, то функция $u - v$ гипергармонична, а $(u - v)/h$ ограничено снизу, и в случае a) имеем

$$\liminf_{y \in E_X^u,\ y \to X} \frac{u - v + \varepsilon h}{h} \geqslant 0$$

для всех $X \in \Delta_1$, исключая множество нулевой внутренней μ_h-меры. Следовательно, $u - v \geqslant -\varepsilon h$, $u \geqslant v$ и $u \geqslant \underline{D}_{\varphi, h} = D_{\varphi, h} = \overline{D}_{f, h}$.

В случаях b) и c) $u(y)/h(y)$ имеет предел $f(X)$ при $y \to X$ по некоторому множеству $E_X'^{u}$, неразреженному в точке $X \in \Delta_1$ (в соответствии с интерпретацией тонкой топологии на $\Omega \cup \Delta_1$, данной в теоремах XV.9 и III.3). Следовательно, $u - v$ удовлетворяет тем же условиям, что и выше, с заменой E_X^u на $E_X'^{u}$, и мы заключаем, что $u \geqslant \overline{D}_{f, h}$.

Если $\overline{D}_{f, h} = +\infty$, то мы рассматриваем $f_n = \inf(f, n)$; тогда функция $\overline{D}_{f_n, h}$ конечна и стремится к $\overline{D}_{f, h}$ при $n \to \infty$. Так как $u \geqslant \overline{D}_{f_n, h}$, то $u \geqslant \overline{D}_{f, h} = +\infty$.

З а м е ч а н и е. В качестве следствия в случае c) получаем, что для положительной супергармонической функции v множество точек на Δ_1, где тонкий $\limsup(v/h) = +\infty$ h-пренебрежимо (прямое доказательство см. у Наим [2]).

4. Граничное поведение гармонических и супергармонических функций. Глобальные результаты, получаемые с использованием (минимальной) тонкой топологии (случай Мартина). Успешное введение минимальной тонкой топологии позволило Дубу получить результаты, аналогичные классической теореме Фату о некасательных граничных пределах, ограниченных в круге гармонических функций, а также ее усилениям, принадлежащим Кальдерону, Стейну и др., с заменой упомянутых пределов тонкими пределами, причем для случая общего пространства Мартина.

Основой для этих исследований служит проведенный выше анализ.

Теорема XVI. 12 (Дуб [3, 4]). *Если h — положительная гармоническая функция и функция f на Δ h-разрешима, то отношение $D_{f,h}/h$ имеет тонкий предел f μ_h-почти всюду на Δ_1.*

Доказательство. Обозначим через f' тонкий $\limsup (D_{f,h}/h)$ на Δ_1 и положим $f_1 = \sup(f, f') \geqslant f$. Если u удовлетворяет условиям предыдущей теоремы (случай с)), то $u \geqslant D_{f,h}$. Аналогично $u \geqslant \overline{D}_{f_1,h}$. Переходя к нижней огибающей множества этих u, получаем $D_{f,h} \geqslant \overline{D}_{f_1,h}$. Следовательно, $D_{f,h} = \overline{D}_{f_1,h} = \underline{D}_{f_1,h}$, откуда видно, что $f = f_1$ μ_h-почти всюду, т. е. $f' \leqslant f$ μ_h-почти всюду. Тот же результат получается для $-f$, и мы заключаем, что тонкий $\liminf (D_{f,h}/h) \geqslant f$ μ_h-почти всюду.

Замечание. Другое доказательство, использующее вместо теоремы XVI. 11 (случай с)) замечание, приведенное в конце п. 3, можно найти у Наим [2].

Теорема XVI. 13 (Наим [1]). *Если v — потенциал, а h — положительная гармоническая функция, то отношение v/h имеет μ_h-почти всюду на Δ_1 тонкий предел, равный нулю.*

Доказательство. Нам нужно показать, что множество точек $X \in \Delta_1$, где тонкий $\limsup (v/h) > 0$, h-пренебрежимо. Докажем это для множества, где тонкий $\limsup (v/h) > \varepsilon > 0$. Это множество содержится в множестве точек $X \in \Delta_1$, где $E = \{x \mid v(x)/h(x) > \varepsilon\}$ неразрежено. Далее, функция $\hat{R}_h^E \leqslant v/\varepsilon$ и, следовательно, является потенциалом. Поэтому следствие теоремы XV. 11 показывает, что подмножество в Δ_1, где E неразрежено, h-пренебрежимо.

Следствие 1. *Пусть заданы h, открытое множество $\delta \subset \hat{\Omega}$ и положительная гармоническая функция u, такая, что $\mu_u(\delta \cap \Delta) = 0$. Тогда u/h имеет нулевой тонкий предел μ_h-почти всюду на $\delta \cap \Delta_1$.*

В самом деле, возьмем в $\hat{\Omega}$ открытое множество $\delta_0 \subset \bar{\delta}_0 \subset \delta$. Так как множество точек Δ_1, где $\delta_0 \cap \Omega$ неразрежено, содержится в $\delta \cap \Omega$ и, значит, u-пренебрежимо, то функция $R_u^{\delta_0 \cap \Omega}$ является потенциалом (теорема XV. 11, следствие). Но на $\delta_0 \cap \Omega$ она совпадает с u, откуда и следует искомый результат для δ_0, а значит, и для δ.

Применение. Если положительная гармоническая функция u привязана к нулю в точке $X \in \Delta_1$, то отношение u/h имеет нулевой тонкий предел μ_h-почти всюду в некоторой окрестности точки X. Этот результат применим, в частности, к K_{X_0} ($X_0 \in \Delta_1$, $X \in \Delta_1$, $X \neq X_0$).

В самом деле, $\mu_u(\delta \cap \Delta_1) = 0$ для некоторой открытой окрестности δ точки X (предложение XV. 13).

Следствие 2. *Если множество $\delta \subset \hat{\Omega}$ открыто, то отношение $\hat{R}_h^{C\delta \cap \Omega}/h$ μ_h-почти всюду на $\delta \cap \Delta_1$ имеет тонкий предел, равный нулю.*

Действительно, согласно следствию теоремы XV. 11, $\hat{R}_h^{C\delta \cap \Omega}$ есть сумма некоторого потенциала и гармонической функции u, для которой $\mu_u(\delta \cap \Delta_1) = 0$, так как $C\delta \cap \Omega$ разрежено на $\delta \cap \Delta_1$.

Лемма XVI. 14 (Парро [1] (в случае $h = 1$), Наим [1]). *Всякая неотрицательная гармоническая функция u есть сумма некоторого решения $D_{f, h}$ (с μ_h-интегрируемой функцией f) и гармонической функции v, для которой $\inf(v, h)$ является потенциалом.*

Доказательство. Мера μ_u есть сумма меры $f\mu_h$ (где функция f μ_h-интегрируема) и меры ν, сингулярной относительно μ_h, т. е. такой, что $\inf(\nu, \mu_h) = 0$ (Ф. Рисс). Другими словами, u есть сумма функции $\int K_X f\, d\mu_h$ и неотрицательной гармонической функции v, такой, что h и v не имеют, кроме нуля, никакой общей неотрицательной гармонической миноранты. Но это и означает, что $\inf(v, h)$ есть потенциал. (Другие доказательства без использования мер см. у Парро [1] и Наим [1].)

Лемма XVI. 15 (Наим [1]). *Если u и h — положительные гармонические функции и $\inf(u, h)$ есть потенциал, то отношение u/h μ_h-почти всюду на Δ_1 имеет тонкий предел нуль.*

Доказательство. Рассмотрим множество $E_\varepsilon = \{x \mid u(x)/h(x) > \varepsilon\}$ $(0 < \varepsilon < 1)$. Функция $R_h^{E_\varepsilon}$ не превосходит h и u/ε, а следовательно, и $\varepsilon^{-1} \inf(u, h)$. Таким образом, она является потенциалом, и поэтому множество точек из Δ_1, где E_ε неразрежено, имеет μ_h-меру нуль (теорема XV. 11, следствие). То же самое верно для множества точек, где тонкий $\limsup(u/h) > 0$.

Замечание. Обратное утверждение также верно (Наим [1]).

Основная теорема XVI. 16 (Дуб [3, 4]). *Если функция u положительна и супергармонична, а h положительна и гармонична, то отношение u/h имеет конечный тонкий предел μ_h-почти всюду на Δ_1.*

Доказательство. В самом деле, u есть сумма неотрицательной гармонической функции v и потенциала. Поведение этого потенциала описывается теоремой XVI. 13, а поведение функции v (ввиду разложения из леммы XVI. 14) — леммой XVI. 15 и теоремой XVI. 12, в которой функция f μ_h-интегрируема, и, следовательно, конечна μ_h-почти всюду.

Более прямое доказательство. Положим $f(X) =$ $=$ (тонкий $\limsup(u/h)$ в точке $X \in \Delta_1$).

a) f — борелевская функция на Δ_1. Действительно, положим $e = \{X \mid f(X) \geqslant \lambda\}$ и обозначим через e'_n множество тех точек из Δ_1, где множество $e_n = \{x \mid u/h > \lambda_n\} \subset \Omega$ $(\lambda_n < \lambda)$ не является минимально разреженным. При $\lambda_n \uparrow$, $\lambda_n \to \lambda$ мы имеем $e = \bigcap e'_n$. Но известно, что $\complement e'_n$ — борелевское множество (теорема XV. 11); поэтому e также борелево.

b) $f(X)$ — разрешимая функция. В самом деле, мы знаем, что

$$\overline{\int} f\, d\nu_h^y = \overline{D}_{f, h}(y) \leqslant u(y).$$

Следовательно, интеграл конечен (и гармоничен), а так как функция f измерима, то она ν_h^y-интегрируема и, значит, разрешима. Таким образом, $D_{f, h}$ существует и f конечна μ_h-почти всюду.

c) Согласно теоремам XVI. 11 и XVI. 12 $u \geqslant D_{f, h}$ и μ_h-почти всюду

$$(\text{тонкий } \lim (u/h) \text{ в } X) \geqslant (\text{тонкий } \lim (D_{f, h}/h) \text{ в } X) = \\ = f(X) = (\text{тонкий } \lim (u/h) \text{ в } X).$$

Итак, u/h имеет μ_h-почти всюду конечный тонкий предел, равный f.

Обобщения. Из имеющихся обобщений отметим следующие.

a) Дуб [3, 4] доказал, что если обе функции u и h положительны и супергармоничны, то отношение u/h имеет конечный тонкий предел μ_h-почти всюду в $\Omega \cup \Delta_1$ (где μ_h — это мера на $\widehat{\Omega}$, фигурирующая в представлении Рисса — Мартина функции h).

b) Для строго положительной функции h и для произвольной супергармонической функции u, таких, что отношение u/h ограничено снизу в некоторой тонкой окрестности каждой точки множества $A \subset \Delta_1$, это отношение имеет конечный тонкий предел μ_h-почти всюду на A (Дуб [4]).

Дополнения. α) Дуб [6] изучал также граничное поведение BLD-функций, введенных в гл. IX. Он доказал для них существование тонкого предела $f\mu_1$-почти всюду на Δ_1, а в случае гармонических функций u

равенство $u = D_{f,1}$; при этом интеграл Дирихле может быть выражен через f. Далее, $f = 0$ (μ_1-почти всюду) в том и только в том случае, когда u является функцией *потенциального типа*, т. е. пределом (почти всюду, а также по норме Дирихле) последовательности BLD-функций класса C^∞ с компактным носителем. Дуб получил и другие результаты в этом направлении. Обобщение исследований Дуба на случай h-BLD-функций было дано Люме-Наим.

β) Гармоническая функция v называется *обобщенной сопряженной* для гармонической функции u, если $|\operatorname{grad} v| \leqslant K |\operatorname{grad} u|$ на Ω (K — константа). Если v имеет почти всюду на Δ_1 минимальный тонкий предел, то u обладает тем же свойством (см. Дуб [9], где этот результат приведен в несколько более общем виде).

5. Тонкая проблема Дирихле и различные типы регулярности. Даже в случае Мартина неизвестно, будет ли h-пренебрежимым множество h-иррегулярных точек (которые были для более общего случая определены в п. 1). Однако для других вариантов задачи Дирихле это будет так при надлежащем определении регулярности. Рассмотрим функции u, удовлетворяющие условиям теоремы XVI. 11, случай b), и их нижнюю огибающую, равную $\overline{D}_{f,h}$. Положим также $\underline{D}_{f,h} = -\overline{D}_{-f,h}$ и для соответствующей *тонкой h-задачи Дирихле* определим понятия и разрешимости так же, как выше. Однако понятие *тонкой h-регулярной точки* X определим с помощью более слабого условия: $D_{f,h}/h \to f(X)$ ($X \in \Delta$) в тонкой топологии для произвольной конечной непрерывной на Δ функции f. Это определение немедленно приводит к желаемому свойству множества тонких h-иррегулярных точек.

В самом деле, рассмотрим счетное плотное множество $\{f_i\}$ в пространстве вещественных конечных непрерывных функций f на Δ (с топологией равномерной сходимости). Если e_i — исключительное множество, отвечающее функции f_i по теореме XVI. 12, то множество $\bigcup e_i$ будет h-пренебрежимо, и для любой точки $X \in \Delta_1 \setminus \bigcup e_i$ имеем $D_{f,h}/h \to f(X)$ в тонкой топологии.

Мы сейчас докажем большее и более глубоко проникнем в суть вопроса, введя некоторые новые понятия (при этом мы ограничимся здесь рассмотрением пространства $\widehat{\Omega}$). См. Брело [17] и особенно Наим [1].

Фильтр $\mathfrak{F}$ на Ω, сходящийся в $\widehat{\Omega}$ к точке $X \in \Delta_1$, назовем *слабо h-регулярным*, если существует положительная супергармоническая на Ω функция v, такая, что $v/h \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} 0$. Если же, кроме того, $\inf(v/h) > 0$ вне любой окрестности точки X в $\widehat{\Omega}$, то фильтр назовем *сильно h-регулярным*.

Совсем не очевидно, что каждая из введенных h-регулярностей эквивалентна существованию соответствующей функции v лишь в окрестности точки X. Однако легко видеть, что обычная h-регулярность влечет за собой слабую h-регулярность и вытекает из сильной. Далее, слабая h-регулярность эквивалентна условию $G_{y_0}/h \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} 0$ (очевидно, не зависящему от y_0), а сильная — условию $R_h^{\complement(\delta \cap \Omega)}/h \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} 0$ для любой окрестности δ точки X.

Если фильтр $\mathfrak{F}$ задается пересечениями множества Ω с (тонкими) окрестностями точки X, то эта точка называется соответственно *(тонкой) слабо h-регулярной* или *(тонкой) сильно h-регулярной*.

Напомним (теорема XV. 8), что отношение G_{y_0}/h имеет в любой точке $X \in \Delta_1$ тонкий $\limsup$, равный $\limsup$ в $\widehat{\Omega}$; поэтому слабо h-регулярные точки совпадают с тонкими слабо h-регулярными точками.

Теорема XVI. 17 (в основном Наим [1]). *Каждое из следующих подмножеств в Δ_1 является h-пренебрежимым:*

a) *множество (тонких) слабо h-иррегулярных точек,*

b) *множество тонких h-иррегулярных точек,*

c) *множество тонких сильно h-иррегулярных точек.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы XVI. 13, а кроме того, является следствием двух других. Второе утверждение было уже доказано выше; кроме того, оно также является следствием последнего утверждения, которое мы и докажем. Рассмотрим счетный базис открытых множеств пространства $\widehat{\Omega}$ и обозначим через δ_n те из множеств этого базиса, которые пересекаются с Δ_1. Тогда отношение $R_h^{\complement(\delta_n \cap \Omega)}/h$ тонко стремится к нулю на $\delta_n \cap \Delta_1$ всюду, за исключением некоторого h-пренебрежимого множества e_n (теорема XVI. 13, следствие 2). Следовательно, $\bigcup e_n$ h-пренебрежимо и содержит все тонкие сильно h-иррегулярные точки.

Упражнение. В открытом множестве $\omega \subset \subset \Omega \subset \widehat{\Omega}$ можно поставить h-задачу Дирихле, используя границу множества ω в $\widehat{\Omega}$ (см. Брело [17], где это сделано в более общей ситуации, описанной в п. 1). Определения h-регулярности оставим прежними. Тогда сильная h-регулярность фильтра $\mathfrak{F}$, сходящегося к $X \in \Delta_1$, эквивалентна h-регулярности относительно $\omega \cap \Omega$ для любой открытой окрестности ω точки X.

Замечание о равномерной интегрируемости. Для границы Мартина или минимальной тонкой границы можно получить лучшие результаты, чем для обычной евклидовой границы (гл. IX, п. 8). Данная гармоническая в Ω функция u является решением $D_{f,1}$ в том и только в том случае, когда она равномерно интегрируема относительно гармонических мер $\mu_{x_0}^{\omega_i}$ (здесь ω_i — относительно компактная область в Ω и $x_0 \in \omega_i$). В этом случае функция f μ_1-почти всюду равна тонкому пределу u.

Супергармоническая функция, которая μ_1-почти всюду имеет нулевой тонкий предел, будет потенциалом в том и только в том случае, когда она обладает указанным выше свойством равномерной интегрируемости. Это легко обобщается на случай отношения u/h, где h — фиксированная положительная гармоническая функция.

6. Приложения. Дальнейшее изучение задачи Дирихле (краткие указания). С помощью введенных выше понятий можно более глубоко изучить поведение супергармонических функций в окрестности точек границы (см. Наим [1]). Например, если точка $X_0 \in \Delta$ слабо h-иррегулярна, то:

a) Если v — положительная супергармоническая функция, то v/h имеет тонкий предел $\Lambda_v \geqslant 0$ в X_0.

b) Если фильтр $\mathfrak{F}$ сходится к X_0 и $G_{y_0}/h \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} \limsup (G_{y_0}/h)$ в X_0, то для любой положительной гармонической функции u, для которой u/h ограничено, $u/h \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} \Lambda_u$.

c) Если функция $f \geqslant 0$ на Δ h-разрешима, то $D_{f, h}/h$ имеет тонкий предел в X_0, который может быть записан в виде $\int f\, d\nu^X$, где ν не зависит от f. При этом ν-измеримость совпадает с μ_h-измеримостью и множества ν-меры нуль и μ_h-меры нуль совпадают.

Для общей компактной границы (п. 1) аналогичный анализ нельзя продвинуть столь далеко, но некоторые результаты могут быть получены с помощью важной теоремы Наим, согласно которой при условии A_h общая задача Дирихле из п. 1 эквивалентна соответствующей задаче Дирихле для границы Мартина (так как с точностью до двух h-пренебрежимых множеств существует взаимно однозначное отображение исходной границы на Δ_1). Граница Δ наряду с евклидовой является наиболее важной из компактных границ, и было бы желательно провести более глубокий сравнительный анализ этих границ, чем это сделано до сих пор. Конечно, основной топологией остается тонкая топология.

Имеются очевидные обобщения на случай функций комплексного переменного и важные приложения к римановым поверхностям (напомним, что гиперболические римановы поверхности являются пространствами Грина), а именно к проблеме соответствия между двумя гиперболическими поверхностями и их границами Мартина (см. Брело [17, 18, 29], Наим [1], Константинеску и Корня [1], Дуб [5, 7]).

В следующей главе будет предпринято более глубокое изучение тонкой топологии и будут рассмотрены связи с более ранними классическими результатами.

Глава XVII

СРАВНЕНИЕ ДВУХ ТИПОВ РАЗРЕЖЕННОСТИ. ТОНКИЕ И НЕКАСАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ (КЛАССИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ. ПРИМЕРЫ)

1. Некоторые примеры сравнения. Теорема XVII. 1. *Рассмотрим пространство Грина Ω и полярную точку $x_0 \in \Omega$. Для любого множества из $\Omega_1 = \Omega \setminus \{x_0\}$ разреженность в точке x_0 в пространстве Ω эквивалентна минимальной разреженности относительно минимальной функции $G_{x_0}^{\Omega}$.*

Доказательство. Мы знаем (теорема XIV. 6), что функция $G_{x_0}^{\Omega}$ минимальна в Ω_1. Далее, множество $e \subset \Omega_1$ будет разреженным в точке x_0 в Ω в том и только в том случае, когда $\left(R^e_{G_{x_0}^{\Omega}}\right)_{\Omega} \not\equiv G_{x_0}^{\Omega}$. Но $\left(R^e_{G_{x_0}}\right)_{\Omega} = \left(R^e_{G_{x_0}}\right)_{\Omega_1}$ на Ω_1, так как положительные супергармонические функции на множестве Ω_1 являются сужениями на это множество положительных супергармонических функций на Ω. Таким образом, разреженность в x_0 эквивалентна минимальной разреженности для $G_{x_0}^{\Omega}$.

Другое по форме доказательство основано на совпадении потенциалов в $\Omega \setminus \{x_0\}$ и потенциалов в Ω для мер, не нагружающих $\{x_0\}$.

Упражнение. Если x_0 — неполярная точка в пространстве Ω (размерности $\geqslant 3$), то разреженность в x_0 влечет за собой минимальную разреженность в Ω_1

относительно минимальной функции $G_{x_0}^{\Omega}$, но обратное неверно. Минимальная разреженность эквивалентна в этом случае разреженности множества, получаемого инверсией образа в $\mathbb{R}^n$ окрестности точки x_0 (Брело [6]).

Для обобщения предыдущей теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма XVII. 2. *Рассмотрим область ω в пространстве Грина Ω и иррегулярную точку $x_0 \in \Omega$ для ω. Тогда $U = G_{x_0}^{\Omega} - R_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega}$ является в ω минимальной гармонической функцией.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим в ω гармоническую функцию u, $0 \leqslant u \leqslant U$. Если u_{I} есть продолжение функции $u + R_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega}$ с ω на Ω посредством функции $G_{x_0}^{\Omega}$, то $\hat{u}_{\mathrm{I}}$ — потенциал. В самом деле, если v обозначает потенциал, равный бесконечности на множестве $e \subset \partial\omega \cap \Omega$, где $C\omega$ разрежено, то $u_{\mathrm{I}} + n^{-1}v$ есть неотрицательная супергармоническая функция, и то же справедливо для функции $\widehat{\lim (u_{\mathrm{I}} + n^{-1}v)}$, вне e равной u_{I} и, значит, $\hat{u}_{\mathrm{I}}$; вне $\{x_0\}$ эта функция локально ограничена. Так как $u_{\mathrm{I}} \leqslant G_{x_0}^{\Omega}$, то $\hat{u}_{\mathrm{I}}$ — действительно потенциал, и соответствующая мера μ не нагружает e, кроме, возможно, точки $\{x_0\}$[1]). Следовательно, $\hat{u}_{\mathrm{I}} = V + \alpha G_{x_0}$, где V — потенциал сужения μ' меры μ на $C\{x_0\}$. Далее,

$$\widehat{R}_{\hat{u}_{\mathrm{I}}}^{C\omega} = \widehat{R}_V^{C\omega} + \alpha \widehat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega}, \quad \alpha \geqslant 0.$$

Но $\widehat{R}_{\hat{u}_{\mathrm{I}}}^{C\omega} = R_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega}$, так как $\hat{u}_{\mathrm{I}} = G_{x_0}^{\Omega}$ квазивсюду на $C\omega$, а $\widehat{R}_V^{C\omega} = V$, потому что μ' сосредоточена на $C\omega$. Итак,

$$u = \hat{u}_{\mathrm{I}} - \widehat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega} = \alpha \left(G_{x_0}^{\Omega} - R_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega} \right) = \alpha U \text{ на } \omega.$$

---

[1]) Если неотрицательная супергармоническая функция w на ω конечна на полярном множестве e, а μ — ассоциированная с ней мера, то e имеет нулевую внутреннюю μ-меру.

Лемма XVII. 3 (Наим). *В обозначениях предыдущей леммы для всякого множества* $e \subset \omega$

$$\left(\widehat{R}^{e \cup C\omega}_{G^{\Omega}_{x_0}}\right)_{\Omega} = \left(\widehat{R}^{e}_{U}\right)_{\omega} + \left(\widehat{R}^{C\omega}_{G^{\Omega}_{x_0}}\right)_{\Omega} \quad \text{на } \omega.$$

Доказательство. Для любой неотрицательной супергармонической на Ω функции u, которая мажорирует $G^{\Omega}_{x_0}$ на $e \cup C\omega$, имеем $u - R^{C\omega}_{G^{\Omega}_{x_0}} \geqslant 0$, и на e эта разность мажорирует U. Поэтому $u - R^{C\omega}_{G^{\Omega}_{x_0}} \geqslant \left(R^{e}_{u}\right)_{\omega}$ на ω, и левая часть доказываемого равенства мажорирует правую. Обратно, функция U_1, равная на ω сумме $\left(\widehat{R}^{e}_{u}\right)_{\omega} + \widehat{R}^{C\omega}_{G^{\Omega}_{x_0}}$ и продолженная на $C\omega$ как $G^{\Omega}_{x_0}$, такова, что $\widehat{U}_1$ есть неотрицательная супергармоническая функция в Ω (даже потенциал). Это доказывается теми же рассуждениями, что и в начале доказательства предыдущей леммы. Но $\widehat{U}_1$ мажорирует $G^{\Omega}_{x_0}$ квазивсюду на $e \cup C\omega$ и потому мажорирует также $\left(\widehat{R}^{e \cup C\omega}_{G^{\Omega}_{x_0}}\right)_{\Omega}$. Следовательно, то же верно для U_1.

Теорема XVII. 4 (Наим [1]). *Рассмотрим пространство Грина* Ω *и в нем область* ω *с иррегулярной (и значит, полярной) граничной точкой* $x_0 \in \Omega$. *Разреженность множества* $e \subset \omega$ *в точке* x_0 *в* Ω *эквивалентна минимальной разреженности относительно минимальной функции* $G^{\Omega}_{x_0} - R^{C\omega}_{G^{\Omega}_{x_0}}$ *в* ω, *т. е. разреженности в соответствующей точке* X_0 *границы Мартина.*

Иными словами, соответствие между пространствами $\omega \cup \{x_0\}$ и $\omega \cup \{X_0\}$, снабженными тонкой и минимальной тонкой топологиями, определяемое тождественным отображением на ω и соответствием $x_0 \longleftrightarrow X_0$, есть гомеоморфизм.

Доказательство. Если e разрежено, то в силу разреженности $C\omega$ множество $e \cup C\omega$ будет также разрежено в x_0, так что $\left(\widehat{R}^{e \cup C\omega}_{G^{\Omega}_{x_0}}\right)_{\Omega} \not\equiv G^{\Omega}_{x_0}$. Если бы равенство соблюдалось всюду на ω, то оно имело бы место квазивсюду на $\omega \cup C\omega = \Omega$ и, следовательно, всюду. Поэтому существует точка x_1, где $\left(\hat{R}_U^e\right)_\omega + R^{C\omega}_{G^\Omega_{x_1}} \neq G^\Omega_{x_0}$, т. е. $\left(\hat{R}_U^e\right)_\omega (x_1) \neq G^\Omega_{x_0}(x_1) - R^{C\omega}_{G^\Omega_{x_0}}(x_1) = U(x_1)$. Но это и означает минимальную разреженность. Обратно, из минимальной разреженности следует, что $(\hat{R}_U^e)_\omega \neq U$ в некоторой точке $x_2 \in \omega$. Поэтому $\hat{R}^{e \cup C\omega}_{G^\Omega_{x_0}}(x_2) \neq G^\Omega_{x_0}(x_2)$, т. е. имеет место разреженность множества $e \cup C\omega$ и, значит, множества e.

Упражнение. Предположим, что e разрежено в x_0. Тогда $\hat{R}^{C\omega}_{\hat{R}^e_{G^\Omega_{x_0}}}$ есть наибольшая гармоническая миноранта для $\hat{R}^e_{G^\Omega_{x_1}}$ в ω и, следовательно, $\hat{R}^e_{G^\Omega_{x_0}} - \hat{R}^{C\omega}_{\hat{R}^e_{G^\Omega_{x_0}}}$ есть потенциал в ω. Отсюда вытекает минимальная разреженность множества e (отметим, что лемма 3 здесь не используется).

2. Примеры в полупространстве ω пространства $\mathbb{R}^n$. (В основном по Лелон [1].) Евклидово замыкание области ω в компактификации Александрова пространства $\mathbb{R}^n$ совпадает с пространством Мартина $\hat{\omega}$.

Теорема XVII.5. *Рассмотрим в полупространстве* $\omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ *нормальную область Штольца* $\mathscr{C} \neq \omega$, *т. е. часть открытого конуса вращения с вершиной в* $x_0 \in \partial\omega$ *и осью, перпендикулярной гиперплоскости* $\partial\omega$, *принадлежащую некоторому шару с центром* x_0. *Тогда разреженность множества* $e \subset \mathscr{C}$ *в* x_0 *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *эквивалентна его минимальной разреженности в* x_0 *в* ω.

Доказательство. Введем множества $I_p = \{s^{p+1} < |x - x_0| \leqslant s^p\}$, $0 < s < 1$, $I_p^e = I_p \cap e$. Критерий разреженности множества e можно записать в виде $\sum_p \gamma_p / s^{p(n-2)} < +\infty$ (где γ_p — внешняя емкость множества $e_p = e \cap I_p$ в $\mathbb{R}^n$). Это несколько видоизмененная форма общего критерия Винера (теорема IX. 10).

Введем следующее обозначение. Пусть φ, ψ — вещественные переменные, определяемые некоторыми условиями (например, зависящие от переменной p, изменяющейся в некоторой заданной области). Будем называть их *сравнимыми* и писать $\varphi \simeq \psi$, если отношение φ/ψ для всех значений p, где оно имеет смысл, содержится между двумя фиксированными положительными числами (не зависящими от p). Элементарный расчет показывает, что в случае $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ внешняя гринова емкость γ_p^ω подмножества e_p в ω сравнима с γ_p (переменная p). Это вытекает из того, что $|x-y|^{-(n-2)}/G^\omega(x, y) \simeq 1$ для x и y, меняющихся в $I_p \cap \mathscr{C}$ (при переменном p). Предположим, что e разрежено. Тогда ряд $\sum\limits_p \gamma_p^\omega / s^{p(n-2)}$ сходится. Далее, γ_p^ω есть полная мера, отвечающая $\left(\widehat{R}_1^{e_p}\right)_\omega$. При $x \in \mathscr{C}$ имеем $G_{y_0}^\omega(x) \simeq \delta_x \simeq |x-x_0|$, где δ_x — расстояние от переменной точки x до $\partial\omega$. Эта величина на $I_p \cap \mathscr{C}$ сравнима с s^p (переменная p). Таким образом, $\left(R_1^{e_p}\right)_\omega(y_0) \simeq \gamma_p^\omega s^p$ и $\gamma_p^\omega s^{-p(n-2)} \simeq \left(\widehat{R}_1^{e_p}\right)_\omega(y_0)\, s^{-p(n-1)}$ (переменная p). Но на I_p имеем $K_{x_0}(x) \simeq \delta_x |x-x_n|^{-n} \simeq s^{-p(n-1)}$ (переменная p). Следовательно, ряд $\sum\limits_p \widehat{R}_{K_{x_0}}^{e_p}(y_0)$ сходится, так что $\sum\limits_N^\infty \widehat{R}_{K_{x_0}}^{e_p}(y_0) \to 0$ при $N \to \infty$, и $R_{K_{X_0}}^{e \cap \{|x-x_0|<r\}}(y_0) \to 0$ при $r \to 0$. Отсюда мы заключаем, что e минимально разрежено.

Обратное утверждение является следствием сходимости ряда $\sum\limits_p \widehat{R}_{K_{x_0}}^{e_p}(y_0)$, которая эквивалентна минимальной разреженности согласно критерию типа Винера, приведенному ниже в упражнении а).

Дополнения. Как показала Лелон [1], указанная в теореме эквивалентность не имеет места для произвольного множества $e \subset \omega$ [1]); однако *разрежен-*

---

[1]) Существуют (даже при $n \geqslant 2$) минимально разреженные множества, не являющиеся разреженными; это вытекает, например, из неразреженности замыкания следующего множества: шара, из которого удален меньший шар, касающийся первого в точке x_0.

ность всегда влечет за собой минимальную разреженность (Шоке).

Случай $\mathbb{R}^2$ более труден для исследования; последнее утверждение по-прежнему верно для любого $e \subset \omega$[1]) (Джексон [1]), обратное утверждение снова неверно.

Иными словами, тождественное отображение подмножества $\omega \cup \{x_0\}$ в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, наделенного минимальной тонкой топологией, в то же множество, наделенное тонкой топологией, непрерывно, обратное же отображение нет.

Дальнейшие результаты см. в Лелон [1], Брело и Дуб [1], Наим [1], Джексон [1].

Упражнения. a) Критерий минимальной разреженности подмножества e полупространства $\omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ состоит в сходимости ряда $\sum\limits_p R_{K_{x_0}}^{e \cap I_p}(y_0)$, при прежнем определении множеств I_p (Лелон, Наим). В случае $\mathbb{R}^2$ для множества e, лежащего в области Штольца, другой, очевидно эквивалентный критерий состоит в сходимости ряда $\sum\limits_p \gamma_p^{\omega}$.

См. также некоторые примеры и приложения в статье Брело и Дуб [1].

b) Снова при $n \geqslant 2$ и при тех же обозначениях определим *минимальную полуразреженность* условием $R_{K_{x_0}}^{e \cap I_p}(y_0) \to 0$ (не зависящим от s и y_0). Тогда множество e, для которого $\delta_x / |x - x_0| \to 0$ $(x \in e,\ x \to x_0)$, будет минимально полуразреженным.

c) В случае $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ полуразреженность e (см. гл. IX, п. 6) влечет за собой минимальную полуразреженность в ω.

Это можно вывести из справедливости этого факта для случая множеств e, лежащих в области Штольца. В этом случае мы используем при $n \geqslant 3$ сравнимость $\gamma_p \simeq \gamma_p^{\omega}$ и заключаем, что $\gamma_p / s^{p(n-2)} \simeq \left(R_{K_{x_0}}^{e \cap I_p}(y_0)\right)_{\omega}$. При $n = 2$ полуразреженность означает, что $p\gamma_p \to 0$, в то время как минимальная полуразреженность

---

[1]) Этим опровергается утверждение о несравнимости обоих видов разреженности, высказанное без доказательства Лелон.

(в области Штольца) эквивалентна тому, что $\gamma_p^\omega \to 0$. Согласно Джексону, первое условие влечет второе.

d) В любом пространстве Грина Ω минимальная полуразреженность множества e в точке $X \in \Delta_1$ может быть определена следующим образом. Положим $\sigma_\lambda = \{x \mid K_X(x)/G_{y_0}^\Omega(x) \geqslant \lambda\}$ и потребуем, чтобы выполнялось одно из условий:

$$\alpha)\ R_{\lambda G_{y_0}^\Omega}^{e \cap \sigma_\lambda} \to 0 \ (\lambda \to \infty) \text{ (Брело — Дуб)},$$

$$\beta)\ R_{K_X}^{(\sigma_{t^p} \setminus \sigma_{t^{p+1}}) \cap e} \to 0 \ (p \to \infty),$$

$$t > 1 \text{ (Дуб, неопубликовано)}.$$

Доказать их эквивалентность и провести сравнение с понятием разреженности. Показать согласованность этих определений с определениями, введенными в b) для случая полупространства в $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно в предыдущих примерах заменить область ω на ее пересечение с шаром с центром x_0. Желательно было бы, однако, обобщить эти результаты по крайней мере на случай ограниченных регулярных областей, у которых евклидова граница совпадает с границей Мартина.

Упражнение. Для такого рода областей Ω, регулярных хотя бы только в одной точке $X \in \partial\Omega$, существование двух шаров, касающихся друг друга в точке X и лежащих соответственно внутри и вне области, позволяет заключить, что разреженность (соотв. полуразреженность) в X влечет за собой минимальную разреженность (соотв. минимальную полуразреженность).

3. Сравнение статистических типов разреженности. (См. Брело [26, 27].) Так как неизвестно, верны ли результаты п. 2 для общих областей, то мы рассмотрим здесь некоторые более слабые утверждения, остающиеся верными и в аксиоматических теориях.

Определение XVII. 6. Рассмотрим область ω в пространстве Грина Ω и граничную точку x_0

области ω в Ω. Минимальная точка X границы Мартина области ω (т. е. $X \in \Delta_1$) называется *связанной* в x_0, если для любой окрестности δ точки x_0 множество $\omega \setminus \delta$ минимально разрежено в X, т. е. $(\delta \cap \omega) \cup \{X\}$ есть тонкая окрестность точки X (другое эквивалентное условие (Наим [1]); x_0 есть единственный „полюс" для X).

Теорема XVII.7. *Если множество $e \subset \omega$ 1-статистически разрежено на $\alpha \subset \partial\omega \cap \Omega$* (например, разрежено в каждой точке α), *то оно 1-статистически минимально разрежено на множестве E точек из Δ_1^ω, связанных с точками множества α.*

Доказательство. Если δ — переменная окрестность множества α, то семейство $\{\delta \cap e\}$ является 1-исчезающим в Ω (теорема VIII. 16) и, следовательно, в ω. Но $(\delta \cap \omega) \cup E$ — тонкая окрестность множества E, и ее пересечение с e есть $\delta \cap e$. Поэтому если V — переменная тонкая окрестность E в $\hat{\hat{\omega}} = \omega \cup \Delta_1^\omega$, то семейство $\{V \cap e\}$ будет 1-исчезающим, и отсюда следует, что e минимально тонко разрежено μ_1-почти всюду на E (теорема XV. 16).

Обобщение. *Пусть W — положительная супергармоническая функции в Ω, а H — ее положительная гармоническая миноранта в ω. Если множество e W-статистически разрежено на $\alpha \subset \partial\omega \cap \Omega$, то оно H-статистически разрежено на E (множестве точек из Δ_1^ω, связанных с точками множества α).*

Это устанавливается с помощью тех же рассуждений, что и в гл. XV, п. 5.

4. Угловые (некасательные) пределы и тонкие пределы для функций, гармонических в полупространстве $\omega \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим (для определенности вещественную) функцию f в полупространстве ω и граничную точку x_0. Число λ называют *некасательным* (или *угловым*) *пределом* функции f в точке x_0, если $f \to \lambda$ (в евклидовой топологии) в любой области Штольца с вершиной в x_0; число λ называется *угловой предельной точкой* функции f, если $f(x_n) \to \lambda$ для некоторой последовательности $x_n \to x_0$, лежащей в области Штольца.

Мы уже рассматривали множества в ω, *полностью касательные* в точке x_0, т. е. такие, что $\delta_x / |x - x_0| \to 0$, $x \in e$, $x \to x_0$. Дополнения таких множеств относительно ω образуют фильтр $\mathfrak{T}^a_{x_0}$. Приведенные выше угловые понятия (предела, предельной точки) эквивалентны понятиям предела и предельной точки по фильтру $\mathfrak{T}^a_{x_0}$ (замечание Дуба).

Мы будем также рассматривать фильтры $\mathfrak{T}^m_{x_0}$, $\mathfrak{T}^s_{x_0}$, образованные дополнениями относительно ω множеств (минимально) разреженных, соответственно полуразреженных в точке x_0. Этим фильтрам отвечают, как нам известно, понятия (минимального) тонкого предела и полутонкого предела. Кроме того, мы знаем, что первое из этих понятий эквивалентно понятию евклидова предела вне некоторого разреженного множества, и можно показать, что аналогичное положение имеет место для полутонких пределов и полуразреженных множеств.

Отметим, что фильтр $\mathfrak{T}^s$ тоньше, чем $\mathfrak{T}^m$ и чем $\mathfrak{T}^a$ (см. упражнение b) из п. 2).

Лемма XVII. 8. *Рассмотрим в полупространстве* ω *переменный шар* B_x *с центром в* x *радиуса* $R_x = \alpha\delta_x$, *где* $0 < \alpha < 1$ *фиксировано. Тогда для фиксированных точек* $y_0 \in \omega$, $x_0 \in \partial\omega$ *имеем*

$$\liminf_{x \in \omega,\, x \to x_0} \left(R_1^{B_x}(y_0) / \delta_x^{n-1} \right) > 0.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда вектор $x_0 - y_0$ ортогонален к гиперплоскости $\partial\omega$ и x лежит на той же нормали, что x_0 и y_0. Если ω_x есть полупространство $\{y \mid \delta_y > \delta_x\} \subset \omega$, то $R_1^{B_x}(y_0)$ мажорирует гармоническую меру $\partial\omega_x \cap B_x$ относительно ω_x в точке y_0. Последняя с точностью до множителя совпадает с R_x^{n-1} или δ_x^{n-1}.

Классические результаты типа теоремы Фату о существовании почти всюду угловых или нормальных пределов у гармонических и супергармонических функций (Кальдерон, Стейн, Зигмунд) могут быть получены из следующей общей теоремы о тонких пределах.

Теорема XVII.9 (Брело и Дуб [1], Константинеску и Корня [1]). *Пусть u и h — две строго положительные гармонические функции в полупространстве ω (или только в некоторой окрестности его граничной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$). Всякая угловая предельная точка отношения u/h в x_0 является также (минимально) тонкой и даже полутонкой предельной точкой. Следовательно, существование тонкого предела влечет за собой существование углового предела. Существование углового равносильно существованию полутонкого предела.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_p \to x_0$, принадлежащую области Штольца $\mathscr{C}_1 \subset \omega$, такую, что $u(x_p)/h(x_p) \to \lambda$ (этот предел будем считать конечным; в случае когда он бесконечен, рассуждения аналогичны). Задавшись числом $\varepsilon > 0$, мы построим последовательность шаров B_p с центрами x_p, принадлежащих некоторой большей области Штольца $\mathscr{C}_2$, причем так, чтобы на всех шарах с номерами $p > p_0$ (где p_0 зависит от ε) выполнялось неравенство $|(u/h) - \lambda| < \varepsilon$ и чтобы объединение этих шаров не было разреженным и даже полуразреженным. Тогда любое множество из фильтра $\mathfrak{T}^m$ или $\mathfrak{T}^s$ будет содержать точку, где $|(u/h) - \lambda| < \varepsilon$, откуда и будет следовать, что всякая угловая предельная точка является и полутонкой предельной точкой.

Напомним, что если w пробегает множество всех положительных гармонических функций в шаре с центром x_0 радиуса ρ, а x пробегает концентрический шар радиуса $\alpha\rho$, то величина

$$\theta(\alpha) = \sup_w \left(\sup_x \frac{w(x)}{w(x_0)} \right)$$

не зависит от ρ и удовлетворяет соотношению $\lim_{\alpha \to 0} \theta(\alpha) = 1$ (следствие классического неравенства Гарнака).

Возвращаясь к нашей последовательности x_p, выберем сначала p_0 так, чтобы при $p > p_0$ иметь

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u(x_p)}{h(x_p)} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем возьмем в $\mathscr{C}_2$ шар B'_p с центром x_p и радиусом $\rho_p = \beta\delta_{x_p}$, где β — фиксированное достаточно малое число. Тогда в концентрическом шаре B''_p радиуса $\alpha\rho_p = \alpha\beta\delta_{x_p}$ $(\alpha < 1)$ мы будем иметь

$$\frac{\lambda - \frac{\varepsilon}{2}}{\theta^2(\alpha)} < \frac{u}{h} < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)\theta^2(\alpha).$$

Выбрав подходящим образом число α (оно не зависит от p, как и β), мы получим, что в каждом шаре B''_p $(p > p_0)$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{u}{h} < \lambda + \varepsilon.$$

Согласно предыдущей лемме, $R_1^{B''_p}(y_0) > K\delta_{x_p}^{1-n}$ (где K не зависит от p). Так как $K_{x_0}(x) \simeq \delta_{x_p}^{1-n}$ на B''_p, то

$$\inf R_{K_{x_0}}^{B''_p}(y_0) > \eta > 0.$$

Каждый шар B''_p пересекает лишь конечное число ν_p множеств I_q, причем $\nu_p \leqslant \nu$ независимо от p (в силу соображений подобия). Если i — одно из этих пересечений, то $R_{K_{X_0}}^{i}(y_0) > \frac{\eta}{\nu}$. Таким образом, существуют произвольно большие q, для которых

$$R_{K_{x_0}}^{\bigcup\limits_{p > p_0} B''_p \cap I_q}(y_0) > \frac{\eta}{\nu}.$$

Это показывает, что при $q \to \infty$ левая часть не стремится к нулю, и поэтому множество $\bigcup B''_p$ неразрежено и даже неполуразрежено. Шары B''_p и являются, таким образом, искомыми шарами B_p.

Итак, существование полутонкого предела у u/h влечет за собой существование углового. Обратное очевидно, поскольку фильтр $\mathfrak{T}^a$ тоньше, чем $\mathfrak{T}^s$.

Дополнения (см. Брело и Дуб [1]). Вместо того чтобы предполагать, что $u > 0$, $h > 0$, достаточно предполагать, что $h > 0$, а u/h ограничено с одной стороны (в окрестности точки x_0). *В случае* $\mathbb{R}^2$ *никаких ограничений на гармоническую функцию и налагать вообще не нужно* вследствие некоторых специальных свойств разреженности в $\mathbb{R}^2$. Изложенные выше результаты применимы к функциям, определенным лишь в близких к x_0 точках некоторого открытого конуса с вершиной x_0 (в общей области Штольца с вершиной x_0[1])).

Отметим важный контрпример Шоке, который показывает, что положительная гармоническая в полуплоскости функция может иметь угловой предел в точке x_0, но не иметь тонкого предела.

В работе Брело и Дуба изучались также обратные статистические свойства. Например, для произвольной функции со значениями в компактном метрическом пространстве существование углового предела во всех точках множества $e \subset \partial\omega$ влечет за собой существование почти всюду (по мере Лебега) на e равного ему (минимального) тонкого предела.

Было бы интересно провести сравнение тонких и угловых пределов для гармонических BLD-функций.

Упражнения. 1) Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ полупространство ω, область Штольца $\mathscr{C}$ с вершиной $x_0 \in \partial\omega$ и множество $e \subset \omega$, минимально разреженное или даже только полуразреженное в x_0. Рассмотрим далее меньшую область Штольца $\mathscr{C}'$ и пересечения I'_p области $\mathscr{C}'$ с множествами $\{x \mid \theta_1 s^{p+1} < |x - x_0| < \theta_2 s^p\}$, $0 < \theta_2 < 1 < \theta_1$. Внешняя гармоническая мера множества $\partial I_p \cap e$ относительно I_p на I'_p равномерно стремится к нулю при $p \to \infty$.

(*Указание*: непосредственно применить определения и сравнить указанную гармоническую меру с $R_1^{\partial I_p \cap e}$.)

---

[1]) *Общая область Штольца* с вершиной x_0 — это пересечение некоторого открытого конуса вращения, содержащегося вместе со своим замыканием (но без точки x_0) в полупространстве, с некоторым шаром с центром x_0.

В качестве приложения дать другое доказательство следующей части предыдущей теоремы:

2) Если u/h имеет в точке x_0 тонкий (или полутонкий) предел λ (u, h — положительные гармонические функции в ω), то существует равный ему угловой предел.

(*Указание*. Если $\lambda = +\infty$, то на I'_p отношение u/h стремится к $+\infty$. Если же λ конечно, то u/h остается ограниченным в любой области Штольца и стремится к λ вне некоторого открытого полуразреженного множества e. Введем функцию u', равную u вне e и λh на e, и затем рассмотрим функцию $u - H_{u}^{I'_p}$. Используя упражнение 1), показать, что частное от деления этой функции на h стремится к нулю на I'_p, откуда и вытекает искомый результат.)

Применение к ранней теореме Фату. Сопоставляя теорему XVI. 16 и теорему XVII. 9 для полупространства ω, мы получаем, что для положительных гармонических в ω функций u и h угловой предел отношения u/h существует μ_h-почти всюду на гиперплоскости $\partial\omega$. (Если $h = 1$, как в первоначальном случае Фату, то понятие „μ_1-почти всюду“ совпадает с понятием „почти всюду по лебеговой мере“.) Аналогичный результат имеет место для шара (как у самого Фату).

Укажем еще, что уточнение теоремы Фату, данное Кальдероном и Карлесоном, было далее уточнено Дубом (см. Брело и Дуб [1]) следующим образом: пусть h — по-прежнему положительная функция, гармоническая в полупространстве, а u — функция, гармоническая в открытом множестве $\omega_0 \subset \omega$; предположим, что ω_0 содержит переменную общую область Штольца, вершина которой описывает некоторое граничное множество $e \subset \partial\omega$. Пусть отношение u/h в каждой такой области ограничено либо сверху, либо снизу в зависимости от положения вершины. Тогда u/h имеет конечный угловой предел на e, если исключить множество лебеговой меры нуль и множество μ_h-меры нуль.

Важное замечание. Для супергармонических функций аналогичного свойства нет. См. контрпример Зигмунда (в $\mathbb{R}^2$ для $h=1$) у Толстеда [1]. Это показывает преимущество и силу понятия тонкого предела.

Обобщение на случай липшицевых областей (Хант и Уиден [1, 2]). Для такого рода ограниченных и регулярных областей Ω (которые в каждой граничной точке имеют внутренний и внешний конусы Штольца) более сложные в техническом отношении рассуждения приводят к следующим важным результатам: евклидово замыкание такой области гомеоморфно пространству Мартина $\widehat{\Omega}$ (причем все его граничные точки минимальны); теорема XVII. 9 допускает при $h=1$ обобщение при соответствующем определении минимальной полуразреженности и углового предела. Отсюда получается и обобщение теоремы Фату (которое можно доказать также непосредственно).

5. Сравнение угловых, тонких и нормальных пределов (краткие указания). Дубу [7] удалось вывести из своей общей теоремы о тонких пределах классические результаты о нормальных пределах и тем самым продвинуться далее в этом круге вопросов.

Рассмотрим сначала множество A в полупространстве $\omega\subset\mathbb{R}^n$. *Нормальной предельной точкой* x_0 множества A называется точка из $\partial\omega$, принадлежащая евклидовому замыканию множества $A\cap n_{x_0}$, где n_{x_0} — нормаль к $\partial\omega$ в точке x_0. Для почти всех (по мере Лебега на $\partial\omega$) таких точек x_0 множество A будет (минимально) неразрежено в x_0 (т. е. x_0 является (минимальной) тонкой предельной точкой A)[1]).

Рассмотрим теперь функцию f на ω со значениями в компактном метрическом пространстве E и обозначим через N_{x_0}, A_{x_0}, F_{x_0} предельные множества функции f

---

[1]) Доказательство Дуба сложно. Из приведенного результата следует аналогичное свойство с обычной разреженностью (в $\mathbb{R}^n$). Отметим, что последнее свойство (даже для произвольного $e\subset\mathbb{R}^n$) доказывается проще непосредственно, причем прямое доказательство дает даже „квазивсюду на $\partial\omega$“ вместо „почти всюду на $\partial\omega$“.

при приближении к x_0 соответственно по n_{x_0} или по фильтрам $\mathfrak{T}^a_{x_0}$, $\mathfrak{T}^m_{x_0}$. Тогда почти всюду на $\partial\omega$ имеем $N_{x_0} \subset F_{x_0}$; это показывает, что из существования почти всюду тонкого предела следует существование почти всюду равного ему нормального предела.

Если функция f супергармонична, то можно получить больше: в этом случае $E = [-\infty, +\infty]$ и для всех точек x_0 на $\partial\omega$, исключая множество лебеговой меры нуль, имеем либо

α) $$-\infty \in F_{x_0} \subset A_{x_0},$$

либо

β) существуют конечный тонкий предел и равный ему нормальный предел, хотя углового предела может и не быть.

Если f — супергармоническая функция с гармонической минорантой $u \leqslant 0$, то эта миноранта имеет конечный тонкий предел почти всюду на $\partial\omega$ и случай α) исключается. Следовательно, f имеет нормальный предел почти всюду. Это эквивалентно классическому результату Литлвуда — Привалова.

Доказательства и дальнейшие подробности см. у Дуба [7]. Отметим только, что в качестве приложения к теории функций Дуб получил следующее уточнение классической теоремы Плеснера. Если f — мероморфная функция в полуплоскости ω, то, как доказал Плеснер, почти всюду либо

α) A_{x_0} есть расширенная плоскость,

либо

β) A_{x_0} состоит из одной точки (т. е. имеется угловой предел)[1]).

Дуб показал, что если исключить еще одно множество меры нуль на $\partial\omega$, то можно утверждать большее: случай α) разбивается на два подслучая: либо F_{x_0} также есть расширенная плоскость, либо F_{x_0} и N_{x_0} сводятся к одной и той же точке. Далее, β) допол-

[1]) Отметим, что (даже для функций f, принимающих значения в произвольном компактном метрическом пространстве E) A_{x_0} почти всюду совпадает с предельным множеством в любой области Штольца.

няется утверждением, что F_{x_0} также состоит из одной точки (той же самой, что и A_{x_0}).

Часть этой теоремы, не относящаяся к нормальным пределам, была доказана также Константинеску и Корня.

Глава XVIII

ПРОСТРАНСТВО МАРТИНА И МИНИМАЛЬНАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ В АКСИОМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ (КРАТКИЙ ОБЗОР)

1. Различные предположения и обозначения. Будем исходить из аксиоматики Брело, указанной в гл. XI. Основное пространство Ω будет предполагаться имеющим счетный базис (хотя это не всегда необходимо). Будет предполагаться, далее, что выполнены аксиомы 1 — 3 и что существует положительный потенциал. Совокупность этих предположений обозначим через ($\mathrm{A_I}$). Мы дополним результаты гл. XII и обобщим результаты п. 5 гл. XIV.

Снабдим множество S разностей положительных супергармонических функций T-топологией Эрве и рассмотрим компактное метризуемое основание B конуса S^+. Будем обозначать через Δ_1 множество минимальных гармонических в Ω функций, принадлежащих B, т. е. множество всех крайних элементов B (которое отождествляется с минимальной границей Ω). Символом (A_{I}^{P}) будем обозначать совокупность предположений ($\mathrm{A_I}$) вместе с предположением о пропорциональности (всех потенциалов с одним и тем же точечным носителем). В таком случае принадлежащие B потенциалы этого типа, обозначаемые через p_x (где $\{x\}$ — носитель), образуют множество, гомеоморфное Ω (Гаурисанкаран [1]). Его T-замыкание есть *обобщенное пространство Мартина* $\widehat{\Omega}$ (называемое так потому, что в классическом случае оно гомеоморфно ранее рассмотренному пространству Мартина). Граница

Мартина $\Delta = \widehat{\Omega} \setminus \Omega$ содержит Δ_1; точки X последнего множества, являющиеся гармоническими функциями на Ω, обозначаются иногда через $p_X(y)$. В интегральном представлении Рисса супергармонической функции v соответствующая мера μ_v на B может рассматриваться как мера на $\widehat{\Omega}$, сосредоточенная на $\Omega \cup \Delta_1$. Тогда

$$v(y) = \int_{\Omega} p_x(y)\, d\mu_v + \int_{\Delta_1} p_X(y)\, d\mu_v.$$

Возможное отсутствие функций типа $p_x(y)\lambda(x)$, аналогичных симметрической функции Грина, оправдывает использование сопряженных пучков Эрве и приводит к принятию дополнительного предположения о существовании базиса из *вполне определяющих областей* (см. гл. XI, п. 5). Совокупность A_1^P вместе с этим предположением будет обозначаться через (A_2). Хороший пример B дается условием $\int v\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$ (где $v \in S^+$, ω_0 — вполне определяющая область и $x_0 \in \omega_0$). Именно в этом B берутся потенциалы p_x, определяющие сопряженный пучок.

2. Тонкая топология на $\check{\Omega} = \Omega \cup \Delta_1$. (См. Брело [33].) Продолжим обобщение результатов гл. XIV, используя материал гл. XII.

При введенных выше условиях (A_1) разреженность множества $e \subset \Omega$ в точке $X \in \Delta_1$ определяется условием $R_X^e \neq X$ или требованием, чтобы функция $\widehat{R}_X^e$ была потенциалом. Дополнения в Ω к таким разреженным множествам образуют, как известно, некоторый фильтр $\mathfrak{T}_X$; предел по этому фильтру будем называть *минимально тонким*. Дадим соответствующую топологическую интерпретацию, уточняющую то, что было сказано в гл. XII.

Будем говорить, что топология θ' на $\check{\Omega}$ есть *минимальное продолжение* топологии θ на Ω, если она индуцирует на Ω топологию θ и если окрестности любой точки $X \in \Delta_1$ пересекают Ω по множествам фильтра $\mathfrak{T}_X$. Для тонкой топологии на Ω существуют минимальные продолжения на $\check{\Omega}$, причем такие, в которых Ω открыто. Среди них имеются сильнейшая (индуцирующая на Δ_1 дискретную топологию) и слабейшая. В случае (A_1^P) имеется единственное такое продолжение.

Внутренняя интерпретация (при условиях (A_2)). Рассмотрим на Ω семейство Φ_1 неотрицательных сопряженных гипергармонических функций, подсемейство Φ_2 сопряженных потенциалов (включая функцию $+\infty$) и подсемейство Φ_3 сопряженных потенциалов вида $\int p_x(y)\,d\mu(y)$, где $\mu \geqslant 0$ на Ω. Обозначим через Φ_1', Φ_2', Φ_3' соответствующие семейства функций на Ω, полученные с помощью полунепрерывного снизу продолжения в топологии T. Обозначим через T_1, T_2, T_3 (соотв. T_1', T_2', T_3') топологии на Ω (соотв. на $\check{\Omega}$), определяемые исходной топологией T и одним из предыдущих семейств функций. Тогда T_1', T_2', T_3' являются единственными минимальными продолжениями для T_1, T_2, T_3.

Отметим, что T_1, T_2 — сопряженные тонкие топологии на Ω, минимальные продолжения которых можно интерпретировать как внутренние топологии T_1', T_2' на $\check{\Omega}$.

Отметим еще частный результат, состоящий в том, что любая неотрицательная сопряженная супергармоническая функция на Ω имеет в каждой точке $X \in \Delta_1$ предел по фильтру $\mathfrak{T}_X$, равный ее T-$\liminf$.

Далее, внутренняя разреженность или неразреженность в точке $X \in \Delta_1$ относительно классов Φ_1', Φ_2' или Φ_3' на $\check{\Omega}$ с начальной T-топологией всегда строгая.

Подробности и доказательства, а также критерий минимальности точки $X \in \Delta$ см. у Брело [33].

3. Задача Дирихле и граничное поведение (обобщение результатов гл. XV и XVI). Принимая предположения (A_1) и первоначально еще аксиому D, Гаурисанкаран [1] обобщил основную теорему (критерий равенства $R_h^e = h$ для положительной гармонической h) и доказал, что отношение v/h (где v — положительный потенциал) имеет тонкий предел нуль μ_h-почти всюду на Δ_1. Он рассмотрел задачу Дирихле для h-гармонических функций в Ω с минимальной тонкой топологией для граничных условий. Приняв условие R_h (о том, что всякая T-равномерно непрерывная функция на Δ_1 h-разрешима), он обобщил теорему о разрешимости и получил результат типа Дуба для функций u/h (где u — положительная супергармоническая функция), т. е. доказал существование тонкого предела μ_h-почти всюду на Δ_1. В случае (A_1^P) условие R_h всегда выполнено и можно изучать задачу Дирихле для h-гармонических функций с T-топологией на $\widehat{\Omega}$; случаи разрешимости и сами решения совпадают для обеих задач.

Далее, Гаурисанкарану [4] удалось в предположениях (A_1), *без* аксиомы D и каких-либо условий типа R_h, сделать следующее: получить основной критерий для равенства $R_h^e = h$ в случае открытого множества e; описать граничное поведение любого потенциала w (именно w/h имеет тонкий предел нуль μ_h-почти всюду); исследовать задачу Дирихле (подобную рассмотренной в теореме XVI. 11) с граничными условиями

$$\text{тонкий } \liminf (v/h) \geqslant f \quad \mu_h\text{-почти всюду на } \Delta_1$$

или

$$\text{тонкий } \limsup (v/h) \geqslant f \quad \mu_h\text{-почти всюду.}$$

Огибающие (inf) таких гипергармонических функций v, ограниченных снизу, совпадают для обеих задач, равно как и критерии разрешимости (μ_h-суммируемость функции f) и сами решения. Отсюда при одних предположениях (A_1) получается обобщение свойства Дуба (существование μ_h-почти всюду конечного тонкого предела у v/h для любой неотрицательной супергармонической функции v).

Гаурисанкаран [5] изучил также (без аксиомы D) задачу Дирихле для произвольной компактификации пространства Ω, обобщив результаты п. 1 гл. XVI, и провел сравнение с этими результатами. Другие исследования по компактификациям и соответствующей задаче Дирихле были проведены Константинеску и Корня [3], Лоэбом и Уолшем.

4. Вот некоторые другие обобщения классической теории, полученные при различных предположениях.

a) Теорема типа Фату — Дуба о граничном поведении в случае ограниченности снизу только в тонкой (минимальной) окрестности любой точки μ_h-измеримого множества $E \subset \Delta_1$ (при предположениях (A_1) и D).

b) Использование равномерной интегрируемости для характеризации решений задачи Дирихле.

c) Поведение различных емкостей для убывающих множеств (например, тонко замкнутых) (при предположениях (A_1), D, а иногда и (A_2)).

d) Понятие *W-полярного* множества на $\breve{\Omega}$ (т. е. такого, что $e \cap \Omega$ W-полярно, а $e \cap \Delta_1$ имеет нулевую μ_W-меру) и различные характеризации таких множеств (при предположениях (A_1) или (A_1^P)).

e) Соответствие между двумя пространствами, снабженными гармонической структурой, и соответствие между их минимальными границами (обобщение результатов Константинеску — Корня — Дуба, а также теоремы Рисса о двумерных римановых поверхностях), в основном при предположениях (A_1^P) и D в обоих пространствах.

f) Задача Дирихле для компактных множеств, понятие устойчивой граничной точки, свойство квазианалитичности (в случае (A_2)).

g) Дважды гармонические функции $u(x, y)$ (x, y в двух различных пространствах) и их граничное поведение.

h) Изучение $\mathscr{H}^p$-гармонических функций, т. е. функций с конечной L^p-нормой относительно гармонической меры.

В связи с a), g) см. Гаурисанкаран [3, 5] и Уолш [1]; в связи с b) — d) см. Брело [22, 30, 33]; в связи с e) — Константинеску и Корня [3] и Сибони [1, 2]; в связи с f) — Прадель [1, 2] и в связи с h) — Люме-Наим [3].

Более слабые аксиоматики. Понятия минимальной разреженности и границы могут рассматриваться и в более слабых аксиоматиках, например в аксиоматике Бауэра. При этом сохраняют силу некоторые результаты Дуба, а также обобщаются некоторые результаты о соответствии между двумя пространствами. Сибони [2] получил результат Дуба в более общей форме, пригодной в теории эксцессивных функций. Он провел также исследование задачи Дирихле с граничными условиями, задаваемыми с помощью минимальных тонких фильтров.

В качестве заключительного замечания напомним еще раз, что мы оставили в стороне целый ряд других топологических вопросов теории потенциала, как, например, связанные с применением теории гильбертовых пространств (см. Дени [4]) и функционального анализа (см. важные исследования Лоэба; Уолша; Мокободского [2]), а также обширную область вероятностных интерпретаций (в качестве введения в которую см. Бауэр [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ [1]

Довольно подробный исторический обзор теории потенциала вместе с библиографией можно найти в статье Брело [35].

Альфорс и Хейнс (Ahlfors L. V., Heins M.)

[1] Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelöf principle, *Ann. Math.*, **50** (1949), № 2, 341—346.

Бауэр (Bauer H.)

[1] Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem, *Ann. Inst. Fourier*, **11** (1961), 89—136.

[2] Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 146 (1962), 1—59.

[3] Weiterführung einer axiomatischen Potentialtheorie ohne Kern (Existenz von Potentialen), *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1 (1963), 197—229.

[4] Propriétés fines des fonctions hyperharmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 137—154.

[5] Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Math., 22, Springer, 1966.

[6] Recent developments in axiomatic potential theory, Symposium of Loutraki, Lecture Notes in Math., 31, Springer, 1967.

[7] Harmonic spaces and associated Markov Processes, Summer course C. I. M. E. «Potential Theory. Stresa, 1969», Roma, 1970.

Блюменталь и Гетур (Blumenthal R. M., Getoor R. K.)

[1] Markov processes and potential theory, Academic Press, N. Y. & London, 1968.

Бобок, Константинеску и Корня (Boboc N., Constantinescu C., Cornea A.)

[1] Axiomatic theory of harmonic functions, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 283—312.

[2] Axiomatic theory of harmonic functions. — Balayage, *Ann. Inst. Fourier*, 15/2 (1965), 37—70.

Бобок, Корня (Boboc N., Cornea A.)

[1] Behaviour of harmonic functions at a nonregular boundary point, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Phys. RSR, 1965.

---

[1]) Для переводных книг в круглых скобках указан год выхода в свет оригинального издания.

Бони (Bony J. M.)

[1] Détermination des axiomatiques de théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont differentiables, *Ann. Inst. Fourier*, **17**/1 (1967), 353—382.

[2] Opérateurs elliptique dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel, Summer Course C. I. M. E., «Potential Theory. Stresa, 1969», Roma, 1970.

Брело (Brelot M.)

[1] Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques, C. R., 207 (1938), 1157.

[2] Critères de régularité et de stabilité, *Bull. Ac. royale des Belgique*, **25** (1939), 125—137.

[3] Familles de Perron et problème de Dirichlet, *Acta Szeged*, **9** (1939), 133—153.

[4] Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *J. de Math.*, **19** (1940), 319—337.

[5] Sur les ensembles effilés, *Bull. Sc. Math.*, **68** (1944), 12—36.

[6] Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **61** (1944), 301—332.

[7] Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes, *Bull. Soc. Math. France*, **73** (1945), 55—73.

[8] Minorantes sousharmoniques extrémales et capacités, *J. de Math.*, 24 (1945), 1—32.

[9] Le problème de Dirichlet ramifié, *Ann. Univ. de Grenoble, Math. Phys.*, 22 (1946), 167—200.

[10] Etude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point frontière irrégulier, *Ann. Univ. de Grenoble, Math. Phys.*, 22 (1946), 205—249.

[11] Quelques propriétés et applications du balayage, C. R., 227 (1948), 19.

[12] Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin, *Ann. Univ. de Grenoble, Math. Phys.*, 23 (1948), 119—138.

[13] Sur l'allure des fonctions harmoniques et sousharmoniques à la frontière, *Math. Nachr.*, 4 (1950), 298—307.

[14] La théorie moderne du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 4 (1952), 113—140.

[15] Etude et extension du principe de Dirichlet, *Ann. Inst. Fourier*, **5** (1953—54), 371—419.

[16] On the behaviour of harmonic functions in the neighbourhood of an irregular boundary point, *J. Anal. Math.*, 4 (1954—56), 209—221.

[17] Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin, *J. de Math.*, **35**, (1956), 297—335.

[18] Sur l'allure à la frontière des fonctions sousharmoniques ou holomorphes, Ann. Ac. Scient. Fenn., A. Math., 250/4 (1958).

[19] Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Sémin. Théorie du potentiel, 2, Paris, 1958.
[20] Lectures on Potential Theory, Tata Institute, № 19, Bombay, 1960, re-issued 1967.
[20bis] Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, *J. Anal. Math.*, 8 (1960—61), 273—288.
[21] Introduction axiomatique de l'effilement, *Annali di Mat.*, **57** (1962), 77—96.
[22] Intégrabilité uniforme, quelques applications à la théorie du potentiel, Sémin. Théorie du potentiel, 6/1, Paris, 1962.
[23] Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement (ibid.).
[24] On Martin boundary (Hiroshima Univ., 1962. [Русский перевод: *Математика*, 9 : 5 (1965), 136—155.]
[25] Основы классической теории потенциала, «Мир», М., 1964 (1959).
[26] Etude comparé des deux types d'effilement, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 155—168.
[27] Aspect statistique et comparé de deux types d'effilement, *Anais da Ac. Brasileira de ciências*, **37** (1965), № 1.
[28] Axiomatique des fonctions harmoniques, Univ. de Montréal, 1966.
[29] Théorie du potentiel et fonctions analytiques, Сб. «Современные проблемы теории аналитических функций, Ереван, 1965, «Наука», М., 1966, 47—56.
[30] Capacity and balayage for decreasing sets, Symposium on Probability and Statistics, Berkeley, 1965.
[31] La topologie fine en théorie du potentiel, Symposium of Loutraki, Lecture Notes in Math., 31, Springer, 1967.
[32] Recherches axiomatiques sur un théorème de Choquet concernant l'effilement, *Nagoya Math. J.*, **30** (1967), 39—46.
[33] Recherches sur la topologie fine et ses applications, *Ann. Inst. Fourier*, **17**/2 (1967), 395—424.
[34] Historical Introduction, Summer course C. I. M. E., «Potential Theory Stresa, 1969», Roma, 1970.
[35] Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel, *L'Enseignement mathématique*, 18 (1972), № 1.

Брело и Дуб (Brelot M., Doob J. L.)
[1] Limite angulaires et limites fines, *Ann. Inst. Fourier*, **13**/2 (1963), 395—415. [Русский перевод: *Математика*, **11 : 3** (1967), 101—116.]

Брело и Шоке (Brelot M., Choquet G.)
[1] Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier*, **3** (1951), 199—263.

Булиган (Bouligand G.)
[1] Fonctions harmoniques. Principe de Picard et de Dirichlet, Memorial des Sc. Math., fasc. 11, Paris, 1926.

Валле-Пуссен (de la Vallée-Poussin Ch. J.)

[1] Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surface à courbure bornée, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, sér. II, vol. 2 (1933).
[2] Potentjel et problème généralisé de Dirichlet, *Math. Gazette*, 22 (1938), 17—36.
[3] Le potentiel logarithmique. Balayage et représentation conforme, Louvain, 1949.

Винер (Wiener N.)

[1] Certain notions in potential theory, *J. Math. Phys.*, **3** (1924), № 1, 24—51.
[2] The Dirichlet problem, *J. Math. Phys.*, **3** (1924), № 3, 127—146.
[3] Note on a paper of O. Perron, *J. Math. Phys.*, 4 (1925), № 1, 21—32.

Гаурисанкаран (Gowrisankaran K. N.)

[1] Extreme harmonic functions and boundary value problems, *Ann. Inst. Fourier*, **13**/2 (1963), 307—356.
[2] Extreme harmonic functions and boundary value problems. II, *Math. Zeitschr.*, **94** (1966), 256—270.
[3] Multiply harmonic functions, *Nagoya Math. J.*, **28** (1966), 27—48.
[4] Fatou-Naïm-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier*, **16**/2 (1966), 455—467.
[5] On minimal positive harmonic functions, Sémin. Théorie du potentiel, 11, Paris, 1966—67.

Гетур (Getoor R. K.)

[1] Additive functionals of a Markov process, Lectures at Hamburg Univ., 1964.

Дени (Deny J.)

[1] Un théorème sur les ensembles effilés, *Ann. Univ. de Grenoble*, Math. Phys., **23**, (1947—48), 139—142.
[1bis] Le principe des singularités positives de G. Bouligand et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine, Revue Scient., 85^{e} année, fasc. 14, № 3279, 1947, 866—872.
[2] Sur les infinis d'un potentiel, *C. R.*, 224 (1947), 524.
[3] Les potentiels d'énergie finie, *Acta Math.*, 82 (1950), 107—183.
[4] Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, Summer course C. I. M. E. «Potential Theory. Stresa, 1969», Roma, 1970.

Дени и Лионс (Deny J., Lions J. L.)

[1] Les espaces du types de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier*, **5** (1953—54), 305—370.

Джексон (Jackson H. L.)

[1] Some results on thin sets in a half-plane, *Ann. Inst. Fourier*, 20/2 (1970), 201—218.

Дуб (Doob J. L.)

[1] Semi-martingales and subharmonic functions, *Trans. Am. Math. Soc.*, 77 (1954), 86—121.

[2] Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. 3^d Berkeley Symp., 2, 1954—55, 49—80.

[3] Conditional Brownian motion and boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 431—458.

[4] A non-probabilistic proof of the relative Fatou-theorem, *Ann. Inst. Fourier*, 9 (1959), 293—300.

[5] Conformally invariant cluster value theory, *Illinois J. Math.* 5, (1961), 521—547.

[6] Boundary properties of functions with finite Dirichlet integral, *Ann. Inst. Fourier*, 12 (1962), 573—621. [Русский перевод: *Математика*, 11 : 6 (1967), 95—131.]

[7] Some classical function theory theorems and their modern versions, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 113—136. [Русский перевод: *Математика*, 11 : 4 (1967), 133—150.]

[8] Application to Analysis of a topological definition of smallness of a set, *Bull. Am. Math. Soc.*, 72 (1966), 579—600.

[9] Remarks on the boundary limits of harmonic functions, *J. SIAM Numer. Anal.*, 3 (1966), № 2, 229—235.

Дынкин Е. Б.

[1] Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963.

[2] Martin boundary and positive solutions of some boundary value problems, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 275—282.

Кальдерон (Calderon A.)

[1] On the behaviour of the harmonic functions at the boundary, *Trans. Am. Math. Soc.*, 68 (1950), 47—54.

Картан А. (Cartan H.)

[1] Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels, *Bull. Soc. Math. France*, 73 (1945), 74—106.

[2] Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, *Ann. Univ. de Grenoble*, Math. Phys., 22 (1946), 221—280.

Константинеску (Constantinescu C.)

[1] Die heutige Lage der Theorie der harmonischen Räume, *Rev. roum. Math. pures et appl.*, 9 (1966), № 9, 1041.

Константинеску и Корня (Constantinescu C., Cornea A.)

[1] Ideale Ränder Riemannscher Flächen, *Ergeb. Math.*, Bd. 32, Springer, 1963.

[2] On the axiomatic of harmonic functions. I, II, *Ann. Inst. Fourier*, 13/2 (1963), 373—394.

[3] Compactifications of harmonic spaces, *Nagoya Math. J.*, 25 (1965), 1—57.

[4] Potential theory on harmonic spaces, Grundlehren d. Math. Wiss., Bd. 158, Springer, 1972.

Лелон-Ферран (Lelong-Ferrand J.)

[1] Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **66** (1949), 125—159.

Люме-Наим (Lumer-Naïm L.)

[1] Sur le théorème de Fatou généralisé, *Ann. Inst. Fourier*, **12** (1962), 623—626.

[2] Sur une extension du principe de Dirichlet en espace de Green, *C. R.*, **255** (1962), 1058.

[3] H^p-spaces of harmonic functions, *Ann. Inst. Fourier*, **17/2** (1967), 425—469.

Мартин (Martin R. S.)

[1] Minimal positive harmonic functions, *Trans. Am. Math. Soc.*, **49** (1941), 137—172.

Мейер (Meyer P. A.)

[1] Вероятность и потенциалы, «Мир», М., 1973 (1966).

[2] Processus de Markov, Lecture Notes in Math., 26 and 77, Springer, 1967.

Мокободский (Mokobodzki G.)

[1] Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des réduites, *Ann. Inst. Fourier*, **15/1** (1965), 103—112.

[2] Cônes de potentiels et noyaux subordonnés, Summer course C. I. M. E. «Potential Theory Stresa, 1969», Roma, 1970.

Мышкис А. Д.

[1] К понятию границы, *Матем. сб.*, **25** (67) (1949), 387—414.

Наим (Naïm L.)

[1] Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, **7** (1957), 183—281.

Парро (Parreau M.)

[1] Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann, *Ann. Inst. Fourier*, **3** (1951), 103—197.

Прадель (de la Pradelle A.)

[1] Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, **17/1** (1967), 383—399.

[2] Remarque sur la valeur d'un potentiel à support ponctuel polaire en son pôle en théorie axiomatique, *Ann. Fourier*, **19/1** (1969), 275—276.

Рисс (Riesz F.)

[1] Sur les fonctions sousharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.*, 48 (1926), 329—343; 54 (1930), 321—360.

Сибони (Sibony D.)

[1] Allure à la frontière minimale d'une classe de transformations. Théorème de Doob généralisé, *Ann. Inst. Fourier*, 18/2 (1968), 91—120.

[2] Théorème de limites fines et problème de Dirichlet, *Ann. Inst. Fourier*, 18/2 (1968), 121—134.

Смирнелис (Smyrnelis E.)

[1] Allure des fonctions harmoniques au voisinage d'un point-frontière irrégulier, *C. R.*, **267** (1968), 157.

Стампакья (Stampacchia G.)

[1] Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1, 1965, 189—257.

Стейн (Stein E.)

[1] On the theory of harmonic functions of several variables II. Behaviour near the boundary, *Acta Math.*, **106** (1961), 137—174.

Тода (Toda N.)

[1] Etude des fonctions méromorphes au voisinage d'un point-frontière irregulier, *Bull. Sc. Math.*, **89** (1965), 93—102.

[2] Sur l'allure des fonctions méromorphes, *Nagoya Math. J.*, **26** (1966), 173—181.

Толстед (Tolsted E.)

[1] Limiting values of subharmonic functions, *Bull. Am. Math. Soc.* (1949), 636—647.

Уолш (Walsh J. B.)

[1] Probability and a Dirichlet problem for multiply superharmonic functions, *Ann. Inst. Fourier*, 18/2 (1968), 221—279.

Фугледе (Fuglede B.)

[1] Le théorème du minimax et la théorie fine du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 65—87.

[2] Esquisse d'une théorie axiomatique de l'effilement et de la capacité, *C. R.*, **261** (1965), 3272.

[3] Quasi-topology and fine topology, Sémin. Théorie du potentiel, 10, Paris, 1966.

[4] The quasi-topology associated with a countably subadditive set function, *Ann. Inst. Fourier*, 21/1 (1971), 123—170.

[5] Connexion en topologie fine et balayage des measures, *Ann. Inst. Fourier*, 21/3 (1971), 227—244.

[6] Finely harmonic functions, Lecture Notes in Math., 289, Springer, 1972.

Хант (Hunt G. A.)
[1] Марковские процессы и потенциалы, ИЛ, М., 1962 (1957, 1958).

Хант и Уиден (Hunt G. A., Wheeden R.)
[1] On the boundary values of harmonic functions, *Trans. Am. Math. Soc.*, 132 (1968), 307—322.
[2] Positive harmonic functions on Lipschitz domains, *Trans. Am. Math. Soc.*, 147 (1970), 507—000.

Хинриксен (Hinrichsen D.)
[1] Randintegrale und nukleare Funktionenräume, *Ann. Inst. Fourier*, 17/1 (1967), 225—271.

Шоке (Choquet G.)
[1] Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1953—54), 131—295.
[2] Existence et unicité des représentation intégrales, Sémin. Bourbaki, Dec. 1956.
[3] Potentiels sur un ensemble de capacité nulle. Suites de potentiels, *C. R.*, 244 (1957), 1707.
[4] Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, Sémin. Théorie du potentiel, 1, Paris, 1957.
[5] Forme abstraite du théorème de capacitabilité, *Ann. Inst. Fourier*, 9 (1959), 83—89.
[6] Sur les points d'effilement d'un ensemble. Application à l'étude de la capacité, *Ann. Inst. Fourier*, 9 (1959), 91—102.
[7] Démonstration non probabiliste d'un théorème de Getoor, *Ann. Inst. Fourier*, 15/2 (1965), 409—413.

Шоке и Мейер (Choquet G., Meyer P. A.)
[1] Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, *Ann. Inst. Fourier*, 14/2 (1964), 485—492.

Эрве (Hervé R. M.)
[1] Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 12 (1962), 415—571.
[2] Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformiment elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$, *Ann. Inst. Fourier*, 14 (1964), 493—508.
[3] Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associés à une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$, *Ann. Inst. Fourier*, 15/2 (1965), 215—223.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

М. Брело

О ТОПОЛОГИЯХ И ГРАНИЦАХ
В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Редактор В. И. Авербух
Художник В. М. Новоселова
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Л. П. Бирюкова
Корректор Е. Г. Литвак

Сдано в набор 29/I 1974 г. Подписано к печати 12/V 1974 г. Бумага тип. № 3 $84 \times 108^1/_{32}$=3,50 бум. л. 11,76 усл. п. л. Уч.-изд л. 10,25. Изд. № 1/6964.
Цена 92 коп. Зак. 60

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29