

671 972

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА

МАТЕМАТИКА

М. БРЕЛО
О ТОПОЛОГИЯХ
И ГРАНИЦАХ
В ТЕОРИИ
ПОТЕНЦИАЛА



LECTURE NOTES IN MATHEMATICS

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold (Heidelberg) and B. Eckmann (Zürich)
Series: Tata Institute of Fundamental Research, Bombay
Adviser: M. S. Narasimhan

175

Marcel Brelot

Université de Paris, Paris/France

**ON TOPOLOGIES AND BOUNDARIES
IN POTENTIAL THEORY**

(Enlarged edition of a course of lectures delivered in 1966)

SPRINGER-VERLAG

BERLIN • HEIDELBERG • NEW YORK 1971

МАРСЕЛЬ БРЕЛО

**О ТОПОЛОГИЯХ И ГРАНИЦАХ
В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА**

Перевод с английского
Н. С. ЛАНДКОФА

671972

УДК 531.26; 517.5; 519.2

Автор уже известен советскому читателю по переводу его «Основ классической теории потенциала» («Мир», 1964).

В книге дано сжатое и замкнутое изложение ряда вопросов, относящихся к тонкой топологии и пространствам Мартина и ранее не освещенных в монографиях.

Книга представляет интерес для математиков и физиков, занимающихся теорией потенциала, теорией функций и теорией вероятностей. Она доступна аспирантам и студентам старших курсов университетов.



Редакция литературы по математическим наукам

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В современной теории потенциала важную роль играет понятие тонкой топологии. В настоящей книге впервые систематически изложены свойства такой топологии как внутри пространства, так и на границе. Значительная часть результатов принадлежит самому автору.

Изложение компактное и замкнутое в себе. В то же время приводится много ссылок на первоисточники и на литературу для дальнейшего чтения.

Специально к русскому изданию автор пересмотрел весь текст и любезно прислал большой список исправлений и дополнений. Все они учтены при переводе.

К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание этой книги вышло в серии Lecture Notes, № 175. При подготовке настоящего издания текст был исправлен, улучшен и даже дополнен. Многими из исправлений и дополнений я обязан проф. Н. С. Ландкофу, работа которого далеко вышла за рамки простого перевода. Я сердечно признателен ему за его нелегкий и продолжительный труд.

М. Брело

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория потенциала вызвала к жизни многие исследования в таких областях, как теория емкостей, теория распределений (обобщенных функций), теории крайних элементов, пространств Дирихле, ядер Ханта и полугрупп, теория вероятностей и т. д. Ее богатая математическая структура привела также к введению ряда новых топологий и границ. Мы будем изучать здесь те из этих новых понятий, которые позволят нам сформулировать общие результаты о поведении потенциалов. Своим успехом эти понятия обязаны тому обстоятельству, что они тесно связаны с природой изучаемых классов функций.

В классической теории потенциала были введены понятия разреженности в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n (Брело [4, 5]) и соответствующей «тонкой» топологии (Картан [2]), в которой потенциалы являются непрерывными функциями. Кроме того, в классической теории были введены некоторые границы, и прежде всего граница Мартина (см. книгу Константинеску и Корня [1]), а также понятие разреженности на этой границе (Наим [1]), с помощью которого Дуб [3, 4] получил окончательное обобщение знаменитой теоремы Фату о радиальных и некасательных пределах. Оказалось, что все эти понятия можно распространить на случай аксиоматических теорий потенциала, включающих в себя теорию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа и до некоторой степени теорию уравнений параболического типа. Были также найдены соответствующие вероятностные интерпретации и связи с марковскими процессами.

Важность топологических методов в теории потенциала служит оправданием для их дальнейшего изучения и развития. Настоящая книга представляет собой введение в эту обширную область исследований. Прекрасное сводное изложение классической теории потенциала на римановых поверхностях с особым упором на вопросы граничного поведения имеется в монографии Константинеску и Корня [1]. Здесь я отпращиваюсь от общих абстрактных аксиоматических понятий, а затем излагаю некоторые важные приложения к теории потенциала и теории функций, в основном для классического случая (т. е. для случая \mathcal{E} -пространств или пространств Грина, включающего в себя случай римановых поверхностей). Доказательства, как правило, выбирались с учетом возможных обобщений на случай аксиоматических теорий гармонических функций, но сами эти обобщения лишь бегло упомянуты. Вероятностные интерпретации опущены (по этому поводу см. статьи Дуба [1—3] и Ханта [1] и книги Дынкина [1], Мейера [1, 2] и Блюменталья и Гетура [1]).

В первой части книги мы изучаем понятия (внутренней) разреженности и тонкой топологии, соответствующей данному пространству и некоторому конусу положительных функций. Даются примеры применения этих понятий, в частности с их помощью уточняется ряд результатов классической теории выметания.

Вторая часть посвящена границам. Сначала определяется абстрактная «минимальная граница» (состоящая из «крайних» элементов определенного множества функций) и вводится понятие минимальной разреженности. Затем в рамках классической или аксиоматической теории потенциала вводятся знаменитая граница Мартина и ее «минимальная» часть. При этом минимальная разреженность является ключевым понятием для описания граничного поведения. Интересно, что в большинстве приложений топологию, отвечающую этой разреженности, можно рассматривать как внутреннюю тонкую топологию (из первой части) на пространстве, дополненном минимальной

границей, после введения на этом пополненном пространстве соответствующего нового класса функций.

В конце книги приведена подробная библиография, имеющая целью облегчить дальнейшее изучение предмета.

Нумерация определений, лемм, предложений и теорем сплошная в каждой главе. Иногда для краткости мы обозначали одним и тем же символом точку и соответствующее ей одноточечное множество.

Я выражаю благодарность С. Рамасвами за большую помощь при подготовке настоящей книги.

М. Брело

Часть 1

ВНУТРЕННЯЯ ТОНКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Глава I

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ РАЗРЕЖЕННОСТИ И ТОНКОЙ ТОПОЛОГИИ¹⁾

1. Пусть Ω — произвольное множество, не обязательно являющееся топологическим пространством. Обозначим через Φ некоторое множество неотрицательных (могущих принимать и бесконечные значения) функций на Ω , образующее выпуклый конус, т. е. удовлетворяющее следующим условиям:

- i) $f \in \Phi \Rightarrow \lambda f \in \Phi, \forall$ вещественное $\lambda \geq 0$,
- ii) $f_1, f_2 \in \Phi \Rightarrow f_1 + f_2 \in \Phi$,
- iii) $+\infty \in \Phi$.

Примем, что $0 \cdot \infty = 0$, так что i) имеет смысл и тогда, когда $\lambda = 0$, а f принимает значение $+\infty$ в некоторых точках $x \in \Omega$. Иногда мы будем предполагать, что Φ S -замкнуто, т. е. что если $f_n \in \Phi, n = 1, 2, \dots$, то $\sum f_n$ также принадлежит Φ (условие счетной аддитивности). Это всегда будет специально оговариваться.

Если в Ω нет топологии, то мы можем ввести слабейшую топологию \mathcal{T}_0 , в которой все функции $u \in \Phi$ будут полунепрерывны снизу. Эта топология порождается множествами вида $\{x | u(x) > a\}$, где u — любая функция из Φ , а a — любое вещественное число. Если же, как это чаще всего бывает в приложениях, Ω уже снабжено некоторой топологией \mathcal{T}_1 , то мы вводим еще одно условие на Φ , а именно что все функции, принадлежащие Φ , полунепрерывны снизу.

¹⁾ Это аксиоматическое введение представляет собой сокращенное изложение статьи Брело [21].

З а м е ч а н и е. Будем говорить, что вещественная (могущая принимать бесконечные значения) функция f на топологическом пространстве имеет в точке x_0 *глобальный пик*, если для любой окрестности V точки x_0 выполнено неравенство $\sup_{CV} f < f(x_0)$. Если предположить, что в топологии \mathcal{T}_1 каждая точка $x_0 \in \Omega$ служит глобальным пиком для некоторой функции $u \in \Phi$, то $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{T}_0$. Действительно, для любого \mathcal{T}_1 -открытого множества ω и любой точки $x_0 \in \omega$ имеем $\sup_{C\omega} v < \lambda < v(x_0)$ для некоторой функции $v \in \Phi$, так что множество $\{v > \lambda\}$ является содержащейся в ω открытой \mathcal{T}_0 -окрестностью точки x_0 .

Тонкая топология. Введем в Ω еще одну топологию, \mathcal{T} , самую слабую из всех топологий, более сильных, чем \mathcal{T}_1 , для которых все функции $u \in \Phi$ непрерывны.

Так как множества вида $\{x | u(x) > \lambda\}$ уже открыты в топологии \mathcal{T}_1 , то класс открытых множеств топологии \mathcal{T} порождается

- i) всеми множествами, открытыми в \mathcal{T}_1 ,
- ii) множествами вида $\{x | u(x) < \lambda\}$, где $u \in \Phi$, а λ — любое вещественное число.

Определение I.1. Топология \mathcal{T} называется *тонкой топологией* (или, более полно, *внутренней тонкой топологией*) в Ω (связанной с классом Φ и топологией \mathcal{T}_1 в Ω).

Определение I.2. Подмножество e из Ω называется *разреженным* (более полно, *внутренне разреженным*) в точке $x_0 \notin e^1$, если либо

- i) $x_0 \notin \bar{e}$ (замыкание в \mathcal{T}_1), либо
- ii) $x_0 \in \bar{e}$ и \exists функция $u \in \Phi$, такая, что

$$u(x_0) < \liminf_{e \ni x \rightarrow x_0} u(x); \quad (*)$$

правая часть понимается как $\sup_{\sigma} (\inf_{x \in e \cap \sigma} u(x))$, где σ — любая окрестность точки x_0 .

¹⁾ Случай $x_0 \in e$ будет рассмотрен в гл. V.

Если принять, что $\inf u$ по пустому множеству есть $+\infty$, то предыдущий $\lim \inf$ всегда будет иметь смысл, и условия i и ii сводятся к одному условию (*): в случае i) можно взять $u = 0$. Эквивалентное определение: существуют функция $u \in \Phi$ и окрестность σ точки x_0 , такие, что

$$u(x_0) < \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x).$$

Заметим, что e не будет разреженным в точке $x_0 \notin e$ в том и только в том случае, когда для любой функции $u \in \Phi$

$$u(x_0) = \lim_{e \ni x \rightarrow x_0} \inf u(x).$$

В этом случае будем говорить, что e *неразрезано* в x_0 .

2. Простейшие свойства. i) Всякое подмножество множества, разреженного в x_0 , будет также разреженным в x_0 .

ii) Конечная сумма разреженных в x_0 множеств будет также разреженной в x_0 .

iii) Для некоторой подходящей окрестности σ точки x_0 множество $e \cap \sigma$ содержится в открытом множестве δ , разреженном в $x_0 \notin \delta^1$.

Будем пользоваться терминами *тонкая окрестность*, *тонкое замыкание* (обозначаемое через \tilde{e} для множества e), *тонкий предел* и т. д., когда речь будет идти об окрестностях, замыкании, пределе и т. д. в тонкой топологии.

Теорема I.3 (А. Картан²⁾. *Тонкие окрестности точки x_0 совпадают с множествами вида Se , где e — разреженное множество в x_0 , $x_0 \notin e$.*

Доказательство. Предположим, что e разрежено в x_0 , и покажем, что Se содержит тонкую

¹⁾ В качестве δ можно взять множество $\{x \mid u(x) > \alpha\}$, где $u(x_0) < \alpha < \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x)$. — Прим. перев.

²⁾ А. Картан доказал эту теорему для случая классической теории потенциала (см. [2], гл. VI).

окрестность x_0 . Существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u(x_0) < \sup_{\sigma} (\inf_{x \in e \cap \sigma} u)$. Следовательно, существует некоторая окрестность σ точки x_0 , такая, что $u(x_0) < \lambda < \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x)$. Рассмотрим множество $E = \{x \mid u(x) < \lambda\}$. Оно открыто в топологии \mathcal{T} и $x_0 \in E$. Так как $u \geq \lambda$ на $e \cap \sigma$, то $E \cap e \cap \sigma = \emptyset$, т. е. $E \cap \sigma \subset C_e$. Но σ и E являются окрестностями x_0 в топологии \mathcal{T} . Следовательно, C_e — тонкая окрестность x_0 .

Обратно, допустим, что V — тонкая окрестность x_0 , и покажем, что CV разрежено в x_0 . Множество V содержит тонкое открытое множество E , содержащее x_0 . Предположим, что E есть \mathcal{T}_1 -окрестность точки x_0 . Тогда $x_0 \notin \overline{CV}$ и, следовательно, CV разрежено в x_0 согласно i). Если же E — не \mathcal{T}_1 -окрестность x_0 , то E содержит пересечение \mathcal{T}_1 -открытого множества (которое, возможно, совпадает с Ω) с конечным числом множеств вида $\{x \mid u(x) < \lambda\}$, содержащих x_0 . Их дополнения, очевидно, разрежены в x_0 . Так как их конечное объединение также разрежено, то E будет разреженным в x_0 . Но $CV \subset CE$, и поэтому CV также разрежено в x_0 .

Замечания. i) Тонкая изолированная точка множества e — это такая точка x из e , что множество $e \setminus \{x\}$ разрежено в x .

ii) $\bar{e} = e \cup \{\text{множество тех точек из } C_e, \text{ в которых } e \text{ неразрезано}\}$.

Упражнения. 1) Будем называть базис фильтра \mathfrak{B} , сходящийся к x_0 , *разреженным* в x_0 , если существует $u \in \Phi$, такое, что $u(x_0) < \liminf_{\mathfrak{B}} u = \sup_{\sigma \in \mathfrak{B}} (\inf_{\sigma} u)$. Показать, что

a) Разреженность множества e в точке $x_0 \notin e$, $x_0 \in \bar{e}$, равнозначна разреженности базиса фильтра, определяемого пересечениями e с окрестностями точки x_0 .

б) Необходимым и достаточным условием разреженности \mathfrak{B} является существование множества $e \in \mathfrak{B}$, $x_0 \notin e$, разреженного в x_0 .

2) (Г. Бауэр) Рассмотрим выпуклое множество Ω в отделимом топологическом линейном пространстве и множество Φ всех конечных неотрицательных полунепрерывных снизу вогнутых функций на Ω , дополненное еще функцией $+\infty$. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) x_0 является крайней точкой Ω ;
- б) $C\{x_0\}$ разрежено в x_0 (даже строго разрежено, см. гл. II);
- в) неравенство $u_1 \leq u_2$ для двух конечных функций из Φ , выполняющееся на $\Omega \setminus \{x_0\}$, не влечет за собой соответствующего неравенства x_0 .

3. Некоторые свойства тонкой топологии. Теорема I.4. а) Если топология \mathcal{T}_1 отделима, то такой же будет \mathcal{T} .

б) Если топология \mathcal{T}_1 регулярна, то такой же будет \mathcal{T} (более того, даже если \mathcal{T}_1 неотделима, но всякая \mathcal{T}_1 -окрестность x_0 содержит замкнутую окрестность, то всякая тонкая окрестность x_0 будет содержать \mathcal{T}_1 -замкнутую тонкую окрестность). Если \mathcal{T}_1 локально компактна¹⁾, то (Ω, \mathcal{T}) будет бэровским пространством.

с) Если топология \mathcal{T}_1 равномерномеризуема, то такой же будет \mathcal{T} .

Доказательство. а) Это очевидно, так как \mathcal{T} сильнее, чем \mathcal{T}_1 .

б) Рассмотрим тонкую окрестность V точки x_0 . Существует $u \in \Phi$, такая, что в некоторой \mathcal{T}_1 -окрестности σ точки x_0 будем иметь $u(x_0) < \inf_{y \in CV \cap \sigma} u(y)$.

Пусть λ — произвольное вещественное число, лежащее между двумя членами последнего неравенства, и $E = \{x \mid u(x) \leq \lambda\}$. Это множество \mathcal{T}_1 -замкнуто и является тонкой окрестностью x_0 ; кроме того, $E \cap \sigma \subset V$. Далее, согласно предположению, существует \mathcal{T}_1 -окрестность σ_1 точки x_0 , замкнутая и содержащаяся в σ ;

¹⁾ Можно потребовать лишь, чтобы всякая \mathcal{T}_1 -окрестность точки x_0 содержала квазикompактную (т. е. обладающую свойством покрытия, но, возможно, неотделимую) \mathcal{T}_1 -окрестность. Доказательство аналогично.

тогда $E \cap \sigma_1$ содержится в $E \cap \sigma \subset V$, \mathcal{F}_1 -замкнуто и является тонкой окрестностью x_0 .

Предположим теперь, что \mathcal{F}_1 локально компактна. Рассмотрим последовательность тонких открытых множеств ω_n , каждое из которых плотно в Ω (в тонкой топологии), и покажем, что $\bigcap \omega_n$ также плотно в тонкой топологии, т. е. что $(\bigcap \omega_n) \cap \omega \neq \emptyset$ для любого тонкого открытого множества $\omega \neq \emptyset$. В множестве $\omega_1 \cap \omega$, которое непусто, выберем точку x_1 и возьмем ее тонкую \mathcal{F}_1 -замкнутую окрестность. Пересекая ее с компактной окрестностью, получим \mathcal{F}_1 -компактное множество K_1 с непустой тонкой внутренностью α_1 . В $\omega_2 \cap \alpha_1$ аналогичным образом найдем компактное множество K_2 с тонкой внутренностью $\alpha_2 \neq \emptyset$ и т. д. Мы получим $\omega \supset K_1 \supset \alpha_1 \supset \omega_2 \cap \alpha_1 \supset K_2 \supset \alpha_2 \supset \omega_3 \cap \alpha_2 \dots$. Следовательно, $\omega_n \cap \omega \supset \omega_n \cap \alpha_{n-1} \supset K_n \supset \bigcap_i K_i$ и $(\bigcap_n \omega_n) \cap \omega = \bigcap_n (\omega_n \cap \omega) \supset \bigcap_i K_i \neq \emptyset$.

с) Достаточно доказать следующее.

Пусть V — какое-либо тонко открытое множество, содержащее x_0 . Тогда существует тонко непрерывная функция, равная нулю в x_0 , 1 в CV и принимающая значения только из $[0, 1]$.

Так как CV разрежено в x_0 , то существуют функция $u \in \Phi$ и некоторая окрестность σ точки x_0 , такие, что

$$\inf_{CV \cap \sigma} u = \lambda > u(x_0).$$

Положим $u_1 = \inf(u, \lambda)$. Эта функция будет тонко непрерывной. Пусть, далее,

$$u_2 = \frac{1}{\lambda - u(x_0)} [\sup(u_1, u(x_0)) - u(x_0)].$$

Функция u_2 тонко непрерывна и принимает значения из $[0, 1]$. Кроме того,

$$u_2 = \begin{cases} 0 & \text{в } x_0, \\ 1 & \text{на } CV \cap \sigma. \end{cases}$$

Но топология \mathcal{T}_1 равномерноизуема, поэтому существует непрерывная на Ω функция ω со значениями в $[0, 1]$, такая, что $\omega(x_0) = 0$ и $\omega(x) = 1$ на $C\sigma^1$.

Положим $f = \sup(u_2, \omega)$. Тогда f тонко непрерывна, $0 \leq f(x) \leq 1$ и

$$f = \begin{cases} 0 & \text{в } x_0, \\ 1 & \text{на } C\sigma^1. \end{cases}$$

4. Определение 1.5. а) Множество e называется *сверхразреженным* в точке $x_0 \notin e$, если существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u(x_0)$ конечно и $u(x) \rightarrow +\infty$, $x \in e$, $x \rightarrow x_0$.

б) e называется *полярным*, если существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u = +\infty$ на e и $u \neq +\infty$.

с) e называется *строго полярным*, если для любого непустого подмножества $e' \subset e$ и любой точки $x \in e'$ существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u = +\infty$ на e' и $u(x) < +\infty$.

Точка x называется *полярной* или *строго полярной*, если множество $\{x\}$ является таковым.

Предложение 1.6. Если множество e строго полярно, то $e \setminus \{x\}$ сверхразрежено в x , $\forall x$, и каждая точка из e является тонко изолированной точкой этого множества.

Некоторые отрицательные свойства тонкой топологии. С тонкой топологией не столь удобно работать, как с обычными топологиями. Во многих приложениях встречаются следующие трудности²⁾.

Предположим, как это обычно и бывает в приложениях, что Φ C -замкнуто. Тогда для любого счетного множества e , состоящего из строго полярных точек, множество $e \setminus \{x_0\}$ будет сверхразреженным в x_0 для любой точки x_0 .

¹⁾ См. Bourbaki N., Topologie générale, chap. 9, n° 5, теор. 2. — Прим. перев.

²⁾ Трудности, о которых говорит автор, связаны с тем, что, вообще говоря, тонкие топологии не удовлетворяют первой аксиоме счетности (существование для каждой точки счетного базиса окрестностей) и не локально компактны (см. упражнения в конце п. 4). — Прим. перев.

В самом деле, если обозначить точки из e , отличные от x_0 , через x_n , и взять $u_n \in \Phi$, такие, что $u_n(x_n) = +\infty$, $u_n(x_0) = 1/2^n$, то $v = \sum u_n \in \Phi$, причем $v = +\infty$ на $e \setminus \{x_0\}$ и $v(x_0)$ конечно.

Обратим внимание на следующее

Предложение I.7. *Если Φ S -замкнуто, то последовательность $\{x_n\}$, состоящая из строго полярных точек, не может иметь тонких предельных точек, если только она не содержит постоянной подпоследовательности, и не может иметь тонкого предела, если исключить случай $x_n = \text{const}$ для всех достаточно больших n .*

Пусть x_0 является предельным значением; если нет ни одной постоянной последовательности, то $x_n \neq x_0$ при всех $n \geq N$ для достаточно большого N ;

множество $\bigcup_N \{x_n\}$ разрежено в x_0 , и дополнительное к нему множество является тонкой окрестностью x_0 , не содержащей точек x_n , $n \geq N$.

Предположим теперь, что $x_n \rightarrow x_0$ и $x_n \neq x_0$ для бесконечного множества значений n ; если бы существовала подпоследовательность $x_{n_p} \neq x_0$, то множество $S\{x_{n_p}\}$ было бы тонкой окрестностью x_0 , не содержащей бесконечного множества точек x_n .

У п р а ж н е н и я. Предположим, что Φ S -замкнуто и что каждая точка строго полярна. Тогда:

- i) Всякое счетное множество тонко замкнуто.
- ii) Никакое бесконечное множество не будет тонко квазикompактно.
- iii) Если $\{x_0\}$ не является тонко изолированным, то точка x_0 не имеет счетного базиса тонких окрестностей.
- vi) Если тонкая топология (пусть отделимая) не дискретна, то она не метризуема.

5. Простейшие общие примеры из теории потенциала. Возьмем в качестве Φ множество всех классических супергармонических неотрицательных функ-

ций в \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) и функцию $+\infty$. В качестве \mathcal{T}_1 возьмем евклидову топологию.

Беря специальные супергармонические функции $h_{x_0}(x) = |x - x_0|^{2-n}$, видим, что всякое открытое множество есть сумма множеств вида $\{x \mid h_{x_0}(x) > \alpha\}$, и поэтому $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1$ ¹⁾. Любая точка строго полярна. Кроме того, известно, что если функции u_n супергармоничны и неотрицательны, то функция $\sum u_n$ также супергармонична или тождественно равна $+\infty$. Таким образом, Φ замкнуто относительно счетных сложений, т. е. C -замкнуто.

Далее, элементарно проверяется, что всякое полярное множество строго полярно и, значит, сверхразрежено в любой точке. Следовательно, все его точки тонко изолированы. Однако никакая точка \mathbb{R}^n не является тонко изолированной в \mathbb{R}^n .

Нетривиальный пример разреженного множества (скажем, в \mathbb{R}^3) можно получить, беря объединение α шаров $B_{x_n}^{r_n}$, $x_n \rightarrow x_0$, с радиусами r_n , удовлетворяющими условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr_n}{|x_n - x_0|} < +\infty.$$

Массы nr_n в точках x_n порождают ньютонов потенциал (супергармоническую положительную функцию), конечный в x_0 , не меньший n на $B_{x_n}^{r_n}$ и, следовательно, стремящийся к $+\infty$ на α .

В начале гл. IX приведены различные простые примеры разреженности и неразреженности, которые можно было бы рассмотреть уже теперь. Однако мы сначала продолжим изучение общих свойств.

¹⁾ Совпадение \mathcal{T}_0 и \mathcal{T}_1 вытекает также из того, что всякая точка x_0 есть глобальный пик для $h_{x_0}(x)$ (см. п. 1). — *Прим. перев.*

Глава II

ПОНЯТИЕ ПРИВЕДЕННОЙ ФУНКЦИИ.
 ПРИМЕНЕНИЯ. СТРОГАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ
 И СТРОГАЯ НЕРАЗРЕЖЕННОСТЬ

1. В том же пространстве Ω с конусом Φ рассмотрим множество e и функцию φ на Ω со значениями из $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$. Определим функцию R_φ^e как

$$\inf_{u \in \Phi, u \geq \varphi \text{ на } e} u.$$

Отсюда вытекает, что $R_\varphi^\emptyset = 0$.

Определение II.1. Функция R_φ^e называется *приведенной функцией* ¹⁾ для φ на e .

Если $e = \Omega$, то будем писать R_φ вместо R_φ^Ω . Легко устанавливаются следующие свойства приведенной функции.

i) $R_\varphi^e = R_{\varphi \cdot \chi_e}^e$, где χ_e — характеристическая функция множества e .

ii) $R_{\lambda\varphi}^e = \lambda R_\varphi^e, \forall \lambda \geq 0$.

iii) $R_{\varphi_1 + \varphi_2}^e \leq R_{\varphi_1}^e + R_{\varphi_2}^e$.

iv) $R_{\varphi^{e_1 \cup e_2}}^e \leq R_{\varphi^{e_1}}^e + R_{\varphi^{e_2}}^e$.

v) Если Φ C -замкнуто, то

$$R_\varphi^{\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} R_{\varphi^{e_n}}^e.$$

¹⁾ Это название было использовано в статье Брело [17] для аналогичного понятия, введенного Мартином [1] для граничного множества. В указанном в тексте смысле это название появилось впервые в Брело [14] и [20]. Если подвергнуть приведенную функцию полунепрерывной снизу регуляризации, то получится так называемая выметенная функция, которая использовалась в классической теории потенциала еще в работе Брело [8] под именем „экстремали“ (относительно дополнительного к e множества) (см. гл. VI). По поводу дальнейшего развития затронутых в этой главе вопросов см. Брело [21].

2. Охарактеризуем разреженные в точке $x_0 \notin e$ множества e с помощью приведенных функций.

Теорема II.2. Множество e будет разреженным в x_0 в том и только в том случае, когда

$$\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1,$$

где σ обозначает переменную окрестность точки x_0 , иными словами, когда существует такая окрестность σ , что $R_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$.

Доказательство. Пусть e разрежено в x_0 . Тогда существуют окрестность σ точки x_0 и функция $u \in \Phi$, такие, что $u(x_0) < \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x)$. Пусть $u(x_0) < \lambda < \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x)$.

Тогда $R_{\lambda}^{e \cap \sigma}(x) \leq u(x)$. Следовательно, $R_{\lambda}^{e \cap \sigma}(x_0) \leq u(x_0) < \lambda$, так что $R_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$.

Обратно, предположим, что существует окрестность σ точки x_0 , такая, что $R_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$, тогда существует функция $u \in \Phi$, удовлетворяющая неравенствам $u(x_0) < 1$ и $u \geq 1$ на $e \cap \sigma$. Это показывает, что e разрежено в x_0 .

Предложение II.3. Если существует конечная функция $u \in \Phi$, положительная в точке x_0 , то для всякого множества $e \ni x_0$ выполнено соотношение $\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) \leq 1$, где σ — переменная окрестность точки x_0 .

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда e неразрезано в x_0 . В таком случае $u(x_0) = \sup_{\sigma} \inf_{e \cap \sigma} u(x)$. Поэтому для любого λ , $0 < \lambda < u(x_0)$, существует такая окрестность σ_0 , что $\lambda < \inf_{e \cap \sigma_0} u(x)$.

Следовательно, $R_{\lambda}^{e \cap \sigma_0} \leq u$, откуда $\lambda R_1^{e \cap \sigma_0} \leq u$ и $R_1^{e \cap \sigma_0}(x_0) \leq \frac{u(x_0)}{\lambda}$. Таким образом, $\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) \leq u(x_0)/\lambda$, и поскольку это верно для любого $\lambda > 0$, такого, что $\lambda < u(x_0)$, мы заключаем, что $\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) \leq 1$.

Предложение II.4. Если функция φ конечна, непрерывна и положительна в точке x_0 , $x_0 \notin e$, то

$\inf_{\sigma} R_{\Phi}^{e \cap \sigma} = \varphi(x_0) \inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}$. Следовательно, критерий разреженности можно записать в таком виде: $\inf_{\sigma} R_{\Phi}^{e \cap \sigma}(x_0) < \varphi(x_0)$ для любой конечной непрерывной положительной в точке x_0 функции φ .

Доказательство. Пусть $0 < \theta_1 < 1 < \theta_2$. Тогда в силу непрерывности φ в точке x_0 существует окрестность σ_0 этой точки, такая, что на $e \cap \sigma_0$

$$\theta_1 \varphi(x_0) \leq \varphi \leq \theta_2 \varphi(x_0).$$

Следовательно, для любой окрестности $\sigma \subset \sigma_0$ имеем

$$\theta_1 \varphi(x_0) R_1^{e \cap \sigma} \leq R_{\Phi}^{e \cap \sigma} \leq \theta_2 \varphi(x_0) R_1^{e \cap \sigma},$$

откуда

$$\theta_1 \varphi(x_0) \inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma} \leq \inf_{\sigma} R_{\Phi}^{e \cap \sigma} \leq \theta_2 \varphi(x_0) \inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma},$$

и так как θ_1, θ_2 произвольны, то

$$\inf_{\sigma} R_{\Phi}^{e \cap \sigma} = \varphi(x_0) \inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}.$$

Предложение II. 5. Если функция $\varphi \geq 0$ полунепрерывна снизу в точке x_0 , а множество e неразрезано в точке $x_0 \notin e$, то $R_{\Phi}^e(x_0) \geq \varphi(x_0)$; если, кроме того, $\varphi \in \Phi$, то $R_{\Phi}^e(x_0) = \varphi(x_0)$. Для любой функции φ , всюду полунепрерывной снизу, но не обязательно принадлежащей Φ , имеем $R_{\Phi}^e = R_{\Phi}^{\bar{e}}$.

Доказательство. Если $v \in \Phi$ удовлетворяет на e неравенству $v \geq \varphi$, то

$$v(x_0) = \liminf_{x \in e, x \rightarrow x_0} v(x) \geq \liminf_{x \in e, x \rightarrow x_0} \varphi(x) \geq \varphi(x_0).$$

Следовательно, $R_{\Phi}^e(x_0) \geq \varphi(x_0)$. Если $\varphi \in \Phi$, то имеет место также противоположное неравенство, а следовательно, равенство.

Пусть теперь φ всюду полунепрерывна снизу и $v \geq \varphi$ на e ; тогда $v \geq \varphi$ также и на \bar{e} . Значит, $R_{\Phi}^e \geq R_{\Phi}^{\bar{e}}$, и следовательно, имеет место равенство.

Предложение II.6. Пусть конечная функция $\varphi \geq 0$ имеет глобальный пик в точке x_0 и полунепрерывна снизу в x_0 (а значит, непрерывна в x_0). Допустим, что любая положительная константа принадлежит Φ . Тогда разреженность множества e в $x_0 \notin e$ эквивалентна неравенству $R_\varphi^e(x_0) < \varphi(x_0)$.

Доказательство. Если e неразрезено, то, как мы только что установили, выполнено противоположное неравенство \geq . Пусть e разрежено. Тогда существуют функция $v \in \Phi$ и окрестность σ точки x_0 , такие, что $\inf_{\sigma \cap e} v > v(x_0)$. Выберем λ строго между этими числами и рассмотрим функцию $w = \varphi(x_0) + k(v - \lambda)$, где k — константа, удовлетворяющая неравенствам $0 < k < \varphi(x_0)/\lambda$. Тогда $w \in \Phi$, и на $e \cap \sigma$ имеем $w > \varphi(x_0) \geq \varphi$. Далее, $w \geq \varphi(x_0) - k\lambda$, что мажорирует φ на $\complement \sigma$ при достаточно малом k . Следовательно, $w \geq \varphi$ на e , так что $w \geq R_\varphi^e$ и

$$R_\varphi^e(x_0) \leq w(x_0) < \varphi(x_0).$$

Обобщение. То же заключение имеет место, если φ есть сумма функции φ_1 указанного выше типа и функции $u \in \Phi$, конечной в x_0 .

Если e неразрезено, то проходят те же самые рассуждения. Если же e разрежено, то $R_{\varphi_1}^e(x_0) < \varphi_1(x_0)$, $R_u^e(x_0) \leq u(x_0)$, и поэтому

$$R_\varphi^e(x_0) \leq R_{\varphi_1}^e(x_0) + R_u^e(x_0) < \varphi_1(x_0) + u(x_0) = \varphi(x_0).$$

Замечание. В предложениях 5 и 6 функцию φ можно предполагать только тонко полунепрерывной снизу.

3. Строгая разреженность. Определение II.7. Множество e называется строго разреженным в точке $x_0 \notin e$, если

$$\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) = 0.$$

Простейшие свойства. 1) Всякое строго разреженное множество разрежено.

2) Любое подмножество строго разреженного множества строго разрежено.

3) Конечное объединение строго разреженных множеств строго разрежено.

Теорема II.8. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ каждая функция из Φ , конечная в x_0 , может быть представлена в виде $v + \theta$, где функция θ конечна и непрерывна в x_0 , а $v \in \Phi$ и $v(x_0) < \varepsilon$. Тогда всякое множество e , разреженное в x_0 , будет строго разреженным в x_0 .

Доказательство. Пусть e разрежено в x_0 . Тогда существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u(x_0) < < \sup_{\sigma} \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x)$. Выберем число K так, чтобы $0 < K < < \sup_{\sigma} \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x) - u(x_0)$. По предположению существуют v и θ , такие, что $v \in \Phi$ и $v(x_0) < K\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ задано), а функция θ конечна и непрерывна в x_0 . Заметим, что

$$\sup_{\sigma} \inf_{x \in e \cap \sigma} u(x) - u(x_0) = \sup_{\sigma} \inf_{x \in e \cap \sigma} v(x) - v(x_0).$$

Так как

$$0 < K < \sup_{\sigma} \inf_{x \in e \cap \sigma} v(x) - v(x_0), \text{ то } \sup_{\sigma} \inf_{x \in e \cap \sigma} v(x) > K$$

и существует такая окрестность σ_0 , что $\inf_{x \in e \cap \sigma} v(x) > K$.

Следовательно, $R_K^{e \cap \sigma_0} \leq v$, или $K R_1^{e \cap \sigma_0} \leq v$, т. е. $R_1^{e \cap \sigma_0}(x_0) \leq v(x_0)/K \leq \varepsilon$. Таким образом, $\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) \leq \varepsilon$,

и поскольку это верно при любом $\varepsilon > 0$, то $\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) = 0$. Итак, e строго разрежено в x_0 .

З а м е ч а н и е. Приведенная теорема остается справедливой, если мы потребуем лишь, чтобы разложение вида $v + \theta$ существовало для функции $u \in \Phi$, ассоциированной с e , т. е. такой, что

$$u(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0} \inf_{x \in e} u(x).$$

Теорема II.9. Пусть Φ S -замкнуто. Если e_n — последовательность множеств, строго разреженных в x_0 , то существует убывающая последовательность σ_n окрестностей точки x_0 , такая, что $\bigcup (e_n \cap \sigma_n)$ строго разрежено в x_0 .

Доказательство. Пусть ε_n — последовательность положительных чисел, для которой $\sum \varepsilon_n < +\infty$. Так как e_1 строго разрежено в x_0 , то существует окрестность σ_1 точки x_0 , такая, что $R_1^{e_1 \cap \sigma_1}(x_0) < \varepsilon_1$. Так как e_2 строго разрежено в x_0 , то мы можем выбрать окрестность σ_2 , $\sigma_2 \subset \sigma_1$ так, чтобы $R_1^{e_2 \cap \sigma_2}(x_0) < \varepsilon_2$, и т. д., выбираем $\sigma_n \subset \sigma_{n-1}$ так, чтобы $R_1^{e_n \cap \sigma_n}(x_0) < \varepsilon_n$. Покажем, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (e_n \cap \sigma_n)$ строго разрежено в x_0 .

Пусть δ — любая окрестность точки x_0 . Имеем

$$R_1^{E \cap \delta}(x_0) \leq R_1^{\bigcup_{n=1}^N (e_n \cap \sigma_n) \cap \delta}(x_0) + R_1^{\bigcup_{n=N+1}^{\infty} (e_n \cap \sigma_n) \cap \delta}(x_0).$$

Второй член справа мажорируется величиной

$$R_1^{\bigcup_{n=N+1}^{\infty} (e_n \cap \sigma_n)}(x_0) \text{ и тем более величиной } \sum_{N+1}^{\infty} R_1^{e_n \cap \sigma_n}(x_0),$$

которая $\leq \sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_n$. Выберем N так, чтобы $\sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon/2$.

Так как $\bigcup_1^N (e_n \cap \sigma_n)$ строго разрежено в x_0 , существует

$$\text{окрестность } \delta \text{ точки } x_0, \text{ такая, что } R_1^{\bigcup_1^N (e_n \cap \sigma_n) \cap \delta}(x_0) < \varepsilon/2. \text{ Следовательно, } R_1^{E \cap \delta}(x_0) \leq \varepsilon \text{ и } \inf_{\sigma} R_1^{E \cap \sigma}(x_0) \leq \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, мы заключаем, что E строго разрежено в x_0 .

У п р а ж н е н и я. 1) Пусть e_n — последовательность множеств, строго разреженных в x_0 . Предположим, что Φ S -замкнуто и что существует счетный базис $\{\omega_n\}$ окрестностей точки x_0 , причем $\bigcap \omega_n = \{x_0\}$. Тогда

можно найти убывающую последовательность окрестностей σ_n , такую, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \{x_0\}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\sigma_n \cup e_n) \setminus \{x_0\}$ строго разрежено в x_0 .

Указание. Для любых последовательностей множеств e_n и δ_n можно написать

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (e_n \cup \delta_n) \subset \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \delta_n \right) \cup e_1 \cup (e_2 \cap \delta_1) \cup (e_3 \cap \delta_2) \cup \dots$$

и применить предыдущую теорему.

2) Пусть (V_n) — последовательность тонких окрестностей точки x_0 . Предположим, что Φ C -замкнуто, что разреженность влечет строгую разреженность и что существует счетный базис $\{\omega_n\}$ окрестностей точки x_0 , такой, что $\bigcap \omega_n = \{x_0\}$. Тогда существует убывающая последовательность σ_n окрестностей x_0 , такая, что $\bigcap \sigma_n = \{x_0\}$ и $\bigcup (V_n \setminus \sigma_n) \cup \{x_0\}$ является тонкой окрестностью точки x_0 .

[Это — переформулировка упражнения 1) в терминах тонких окрестностей.]

Предложение II.10. *Сверхразреженность влечет за собой строгую разреженность, а в случае, когда Φ C -замкнуто, оба понятия эквивалентны.*

Доказательство. Первая часть доказывается легко. Существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u(x_0)$ конечно и $u > \lambda$ на некотором $e \cap \sigma$. Поэтому

$$R_{\lambda}^{e \cap \sigma}(x_0) \leq u(x_0), \quad R_1^{\sigma \cap e}(x_0) \leq u(x_0)/\lambda$$

и, следовательно, $\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) = 0$.

Обратно, предположим, что e строго разрежено в x_0 , а Φ C -замкнуто.

Так как $\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) = 0$, то для каждого n существует окрестность σ_n точки x_0 , такая, что $R_1^{e \cap \sigma_n}(x_0) < \frac{1}{n^3}$. Следовательно, существуют $u_n \in \Phi$, такие, что $u_n(x_0) < \frac{1}{n^3}$ и $u_n \geq 1$ на $e \cap \sigma_n$. Рассмотрим $u = \sum n u_n$,

По предположению $u \in \Phi$, $u(x_0) = \sum n u_n(x_0) < \sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

Далее, $u(x) \geq n u_n(x) \geq n$ на $e \cap \sigma_n$. Для произвольного заданного λ рассмотрим $N > \lambda$. Имеем $u(x) \geq \lambda$ на $e \cap \sigma_N$, т. е. $u(x) \rightarrow \infty$, $x \in e$, $x \rightarrow x_0$. Следовательно, e сверхразрежено в x_0 .

4. Строгая неразреженность. Для того чтобы e было неразрежено в $x_0 \notin e$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) \geq 1.$$

Пусть δ — какая-либо окрестность x_0 . Имеем

$$R_1^{\sigma \cap e}(x_0) \geq R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0).$$

Следовательно,

$$R_1^{\sigma \cap e}(x_0) \geq \sup_{\delta} R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0)$$

и

$$\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) \geq \inf_{\sigma} \left(\sup_{\delta} R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) \right).$$

Определение II.11. Множество e называется *строго неразреженным* в точке $x_0 \notin e$, если

$$\inf_{\sigma} \left(\sup_{\delta} R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) \right) \geq 1.$$

Это условие влечет за собой неразреженность.

Важные замечания. 1) Пусть e строго неразрежено в x_0 . Для любого σ имеем $\sup_{\delta} R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) \geq 1$.

Поэтому, если даны σ и число K , $0 < K < 1$, то существует такое δ , что $R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) > K$.

2) Обратное, если при любом K , $0 < K < 1$, и любом σ существует такое δ , что $R_1^{(e \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) > K$, то e строго неразрежено в x_0 .

3) Если для множества $A \not\equiv x_0$ выполнено равенство $\sup_{\delta} R_1^{A \setminus \delta}(x_0) = R_1^A(x_0)$, где δ — произвольная окрестность точки x_0 , то A будет строго неразреженным в x_0 при условии, что оно неразрежено в x_0 .

Теорема II.12. Пусть e_n — последовательность строго неразрезанных множеств в x_0 , $x_0 \notin e_n$. Предположим, что существует счетный базис окрестностей точки x_0 . Тогда существует убывающая последовательность окрестностей δ_n точки x_0 , такая, что множество $\bigcup (e_n \setminus \delta_n)$ будет строго неразрезано в x_0 .

Доказательство. Пусть λ_n — возрастающая последовательность чисел, такая, что $0 < \lambda_n < 1$, $\lambda_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть ω_n — счетный убывающий базис окрестностей точки x_0 . Так как множество e_1 строго неразрезано в x_0 , то можно найти окрестность δ_1 , такую, что $\delta_1 \subset \omega_1$ и $R_1^{(e_1 \cap \omega_1) \setminus \delta_1}(x_0) > \lambda_1$. Из строгой неразрезанности e_2 в x_0 следует, что можно выбрать δ_2 так, чтобы $\delta_2 \subset \omega_2 \cap \delta_1$ и $R_1^{(e_2 \cap \omega_2) \setminus \delta_2}(x_0) > \lambda_2$. И вообще для любого n можно выбрать δ_n так, чтобы $\delta_n \subset \omega_n \cap \delta_{n-1}$ и $R_1^{(e_n \cap \omega_n) \setminus \delta_n}(x_0) > \lambda_n$. Положим $E = \bigcup (e_n \setminus \delta_n)$. Тогда

$$(E \cap \omega_n) \setminus \delta_n \supset (e_n \cap \omega_n) \setminus \delta_n,$$

и поэтому

$$R_1^{(E \cap \omega_n) \setminus \delta_n}(x_0) \geq R_1^{(e_n \cap \omega_n) \setminus \delta_n}(x_0) \geq \lambda_n.$$

Возьмем $0 < K < 1$; для всех $n \geq N$ будем иметь $R_1^{(E \cap \omega_n) \setminus \delta_n}(x_0) \geq K$. Следовательно,

$$\sup_{\delta} R_1^{(E \cap \omega_n) \setminus \delta}(x_0) \geq K.$$

Так как любое σ содержит ω_n при $n > N$, то

$$\inf_{\sigma} \sup_{\delta} R_1^{(E \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) \geq K.$$

Значит, $\inf_{\sigma} \sup_{\delta} R_1^{(E \cap \sigma) \setminus \delta}(x_0) \geq 1$ и E строго неразрезано в x_0 .

З а м е ч а н и е. Предположим, что неразрезанность в x_0 всегда строгая и что существует счетный базис окрестностей точки x_0 . Из неразрезанности e_n в x_0 следует, что x_0 является тонкой предельной точкой для e_n . Доказанное предложение показывает, что если x_0 является тонкой предельной точкой для

всех e_n , то существует убывающая последовательность δ_n окрестностей точки x_0 , такая, что x_0 является тонкой предельной точкой для $\bigcup(e_n \setminus \delta_n)$.

5. Иногда полезно следующее

Определение II.13. Множество e называется *пренебрежимым*, если $\forall e' \subset e, R_1^{e'} = 0$ на Se' .

Простейшие свойства. i) *Конечная сумма пренебрежимых множеств будет пренебрежимым множеством.*

ii) *Строго полярное множество пренебрежимо.*

Действительно, если $e' \subset e$ и $x \in Se'$, то существует функция $u \in \Phi$, такая, что $u = +\infty$ на e' , а $u(x)$ конечно. Тогда для любого $\lambda > 0$ имеем $\lambda u = +\infty$ на e' , так что $R_1^{e'}(x) \leq \lambda u(x)$. Таким образом, $R_1^{e'}(x) = 0$.

iii) *Если e пренебрежимо, то $e \setminus \{x\}$ будет строго разреженным в x при любом x .*

Предположим еще, что Φ S -замкнуто. Тогда

iv) *Счетная сумма пренебрежимых множеств будет пренебрежимым множеством.*

v) *Всякое пренебрежимое множество e является строго полярным.*

Действительно, пусть $e' \subset e$ и $x \notin e'$. Существуют $u_n \in \Phi$, такие, что $u_n \geq 1$ на e' и $u_n(x) < 2^{-n}$. Но тогда $\sum u_n \in \Phi$, $\sum u_n = +\infty$ на e' и $\sum u_n(x) < +\infty$.

Глава III

ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ТОНКИХ ПРЕДЕЛАХ¹⁾

1. Будем рассматривать пространство Ω , основную топологию \mathcal{T}_1 и конус Φ , определенные в гл. I, § 1, и проведем сравнение тонких пределов и обычных \mathcal{T}_1 -пределов. Начнем с нескольких простых замечаний.

¹⁾ Отправными пунктами для этой главы послужили некоторые результаты Картана и Дуба в классической теории потенциала, а также аксиоматическое построение теории, данное в Брело [21].

а) Если множество e неразрезано в x_0 , то x_0 является тонкой предельной точкой для e . Верно и обратное.

б) Пусть Ω' — какое-либо топологическое пространство, а f — функция на подмножестве E из Ω , неразрезанном в точке $x_0 \notin E$, со значениями в Ω' . Пусть V — тонкая окрестность точки $x_0 \in \Omega$, и допустим, что f имеет предел l , когда $x \rightarrow x_0$, $x \in V \cap E$. Тогда тонкий $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f$ существует и равен l .

в) Пусть λ — тонкое предельное значение¹⁾ f на E в точке x_0 , причем E неразрезано в $x_0 \notin E$. Тогда λ есть также \mathcal{T}_1 -предельное значение f в x_0 на любой тонкой окрестности V .

Теорема III.1²⁾. Пусть f — функция, определенная на подмножестве E из Ω , неразрезанном в $x_0 \notin E$, со значениями в топологическом пространстве Ω' . Предположим, что существует тонкий $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f = l$ и что выполнены следующие условия:

- i) Φ C -замкнуто,
- ii) разреженность влечет строгую разреженность,
- iii) в каждой точке пространства Ω' существует счетный базис окрестностей.

Тогда существует такая тонкая окрестность V точки x_0 , что $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E \cap V} f = l$ (т. е. f стремится к l вне некоторого разреженного множества).

Доказательство. Пусть α_n — убывающая последовательность окрестностей точки l . Для каждого n существует тонкая окрестность δ_n точки x_0 , такая, что из $x \in E \cap \delta_n$ следует $f(x) \in \alpha_n$. Положим $e_n = \{x \in E \mid f(x) \notin \alpha_n\}$. Так как $e_n \subset C\delta_n$, то e_n будет разрежено в x_0 для любого n . В силу ii) e_n будет строго разрежено в x_0 для любого n . Но тогда по

¹⁾ λ является тонким (соответственно \mathcal{T}_1 -) предельным значением в том и только в том случае, когда при отображении f прообраз любой окрестности λ пересекает любую тонкую (соответственно \mathcal{T}_1 -) окрестность точки x_0 .

²⁾ В классическом случае эта теорема принадлежит А. Картану (см. Дени [3]).

теореме II.9 существуют окрестности σ_n точки x_0 , такие, что $e = \bigcup (e_n \cap \sigma_n)$ строго разрежено в x_0 . Следовательно, Ce является тонкой окрестностью x_0 .

Если α — любая окрестность точки l в Ω' , то $\alpha \supset \alpha_n$ при достаточно больших n . Пусть $x \in \sigma_n \cap Ce \cap E \subset Ce_n$. Тогда $f(x) \in \alpha_n$ и, следовательно, $f(x) \in \alpha$. Итак,

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in Ce \cap E} f = l.$$

В случае когда Ω' — это расширенная числовая ось \bar{R} , можно получить более сильный результат для функции f , определенной на множестве E , неразрезанном в $x_0 \notin E$.

Теорема III.2. Пусть f — вещественная функция и тонкий $\limsup_{x \rightarrow x_0, x \in E} f = \lambda$. Предположим, что выполнены условия i) и ii). Тогда существует такая тонкая окрестность V точки x_0 , что $\limsup_{x \rightarrow x_0, x \in E \cap V} f = \lambda$.

Доказательство. Для любой фиксированной тонкой окрестности V имеем

$$\lambda = \text{тонкий } \limsup_{x \rightarrow x_0, x \in E} f \leq \limsup_{x \rightarrow x_0, x \in E \cap V} f.$$

Если $\lambda = +\infty$, то теорема верна с любой V . Предположим поэтому, что $\lambda < +\infty$, и покажем, что для некоторой окрестности V

$$\limsup_{x \rightarrow x_0, x \in E \cap V} f \leq \text{тонкий } \limsup_{x \rightarrow x_0, x \in E} f.$$

Пусть λ_n — убывающая последовательность вещественных чисел, причем $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Для любого n имеем $\sup f \leq \lambda_n$ в некоторой тонкой окрестности точки x_0 . Поэтому множество $e_n = \{x \in E \mid f(x) > \lambda_n\}$ разрежено в x_0 и, следовательно, строго разрежено в x_0 , $\forall n$.

Но тогда можно найти убывающую последовательность δ_n окрестностей точки x_0 , такую, что $e = \bigcup (e_n \cap \delta_n)$ будет строго разреженным в x_0 . Поэтому Ce будет тонкой окрестностью x_0 и $Ce \cap \delta_n \subset Ce_n$.

Следовательно, $\forall n$,

$$\sup_{x \in \delta_n \cap E \cap Ce} f \leq \lambda_n, \quad \inf_{\delta} \sup_{x \in \delta \cap E \cap Ce} f \leq \lambda_n$$

и, значит, $\inf_{\delta} \sup_{x \in \delta \cap E \cap C_e} f \leq \lambda$, т. е. $\limsup_{x \rightarrow x_0, x \in E \cap C_e} f \leq \lambda$, откуда и следует требуемое равенство.

Замечания. i) Пусть V — тонкая окрестность из предыдущей теоремы. Тогда для любой тонкой окрестности $V_1 \subset V$ имеем

$$\limsup_{x \rightarrow x_0, x \in V_1 \cap E} f = \limsup_{x \rightarrow x_0, x \in V \cap E} f = \lambda.$$

Действительно,

$$\limsup_{x \rightarrow x_0, x \in V_1 \cap E} f \leq \limsup_{x \rightarrow x_0, x \in V \cap E} f = \lambda.$$

Но

$$\limsup_{x \rightarrow x_0, x \in V_1 \cap E} f \geq \text{тонкий } \limsup_{x \rightarrow x_0, x \in E} f = \lambda;$$

отсюда и следует наш результат.

ii) В предположениях i) и ii) теорем III. 1 и III. 2 пусть f_n — последовательность вещественных функций на E . Тогда имеется общая тонкая окрестность V для которой выполнены утверждения этих теорем

Действительно, обозначим через V_n ту тонкую окрестность точки x_0 , для которой результат теоремы III. 1 или III. 2 имеет место по отношению к f_n . Можно найти убывающую последовательность δ_n окрестностей точки x_0 , такую, что $e = \bigcup (C V_n \cap \delta_n)$ будет разрежено в x_0 . Тогда C_e будет тонкой окрестностью точки x_0 , причем $C_e \cap \delta_n \subset V_n$ для каждого n . Следовательно, C_e обладает требуемым свойством.

2. Теорема III. 3¹⁾. Пусть λ — тонкое предельное значение f на множестве E , неразрезанном в $x_0 \notin E$, где f — функция на $E \subset \Omega$ со значениями в топологическом пространстве Ω' . Тогда существует неразрезанное множество e , на котором $f \rightarrow \lambda$, $x \rightarrow x_0$, $x \in e$, при условии, что выполнены следующие предположения:

i) x_0 имеет счетный базис окрестностей в Ω ,

¹⁾ Эта теорема навеяна аналогичным результатом Дуба относящимся к границе Мартина в классической теории потенциалов.

- ii) в точке x_0 неразреженность влечет строгую неразреженность,
 iii) в каждой точке Ω' имеется счетный базис окрестностей.

Доказательство. Пусть α_n — убывающая последовательность окрестностей точки λ в Ω' и $e_n = f^{-1}(\alpha_n)$. Тогда множество e_n должно пересекать любую тонкую окрестность точки x_0 , т. е. оно неразрежено в x_0 . По предположению оно будет строго неразреженным в x_0 . Согласно теореме II.12 мы можем найти убывающую последовательность δ_n окрестностей точки x_0 , такую, что $e = \bigcup (e_n \setminus \delta_n)$ строго неразрежено в x_0 . Пусть σ — любая окрестность точки λ . Возьмем $\alpha_n \subset \sigma$. На e_p , $p \geq n$, имеем $f(x) \in \alpha_p \subset \sigma$; следовательно, то же верно на $\bigcup_{p=n}^{\infty} (e_p \setminus \delta_p)$ и, значит, на $\delta_n \cap e$. Итак, $f \rightarrow \lambda$, $x \in e$, $x \rightarrow x_0$.

Глава IV

КВАЗИТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ ¹⁾

1. В классической теории потенциала давно известны теоремы типа Лузина (А. Картан [1]), а именно что в \mathbb{R}^3 всякий потенциал допускает непрерывное сужение на множество, дополнение к которому имеет сколь угодно малую емкость. Эта идея была успешно использована Шоке в теории потенциала с более общими ядрами (Шоке [4], см. также Брело [20]). С другой стороны, в одной теореме Шоке [6] утверждается, что точки множества $\mathcal{C}e$ (для определенности в \mathbb{R}^3), в которых e разрежено, могут быть заключены в открытое множество ω так, чтобы $\omega \cap e$ имело сколь

¹⁾ Материал этой главы взят из mimeографированных записей лекций автора (Париж, 1963—1964) и несколько дополнен в основном результатами из Брело [32].

угодно малую емкость¹⁾. Этот результат также представляется ключевым для тонкой теории потенциала.

В действительности оба вопроса тесно связаны друг с другом и теснейшим образом связаны с тонкой топологией. Это будет ясно из следующего аксиоматического изложения, которое дополнено недавними исследованиями Фугледе [1—3].

2. Мы исходим из некоторого топологического пространства Ω . Предположим, что в нем введена еще одна, более сильная топология, которую будем называть тонкой топологией. Понятия, отвечающие этой топологии, будем отмечать эпитетом „тонкий“. Тонкое замыкание множества e будем, как и выше, обозначать через \tilde{e} .

О п р е д е л е н и е IV. 1. *Весом* называется функция множеств p со значениями в $\bar{\mathbb{R}}$, определенная на классе всех подмножеств Ω , неотрицательная, возрастающая и равная нулю на пустом множестве²⁾. Вес p называется *тонким*, если $p(\tilde{e}) = p(e)$, $\forall e$; *счетно субаддитивным*, если $p(\bigcup e_n) \leq \sum p(e_n)$ для любой последовательности множеств e_n ; *непрерывным справа*, если $p(e) = \inf_{\omega \supseteq e} p(\omega)$ (где ω — открытое множество).

Пусть дан вес p . Будем говорить, что множество ω является *p -квазиоткрытым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $\omega' \supset \omega$, такое, что $p(\omega' \setminus \omega) < \varepsilon$. Будем говорить, что множество *p -квазизамкнуто*, если его дополнение p -квазиоткрыто.

Функцию $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ будем называть *p -квазинепрерывной*, если при любом $\varepsilon > 0$ существует множество $\alpha \subset \Omega$, такое, что $p(\alpha) < \varepsilon$ и функция $f|_{\Omega \setminus \alpha}$ непрерывна.

Понятие *p -квазиполунепрерывности* определяется аналогичным образом.

¹⁾ Шоке рассматривал также точки $x \in e$, в которых e разрежено (см. гл. V, § 4, и гл. VI), но соответствующий результат для этих точек хорошо известен. Мы используем здесь только свойство S_e , формулируемое в терминах разреженности множества в точках его дополнения.

²⁾ Последнее условие эквивалентно существованию квазиоткрытых множеств или квазинепрерывных функций.

Будем говорить, что некоторое свойство имеет место p -квазивсюду, если оно справедливо всюду, кроме множества e с $p(e) = 0$.

Имея дело с фиксированным весом p , мы будем писать просто „квазиоткрытое“ и т. д. вместо „ p -квазиоткрытое“ и т. д.

Простейшие свойства. Предложение IV.2.
а) Если множество α квазизамкнуто (соответственно квазиоткрыто), то функция χ_α квазиполунепрерывна сверху (соответственно снизу).

Доказательство. Пусть α квазизамкнуто. Рассмотрим замкнутое $\beta \subset \alpha$, такое, что $p(\alpha \setminus \beta) < \varepsilon$. Функция χ_β полунепрерывна сверху, а функция $\chi_\alpha |_{\mathbf{C}(\alpha \setminus \beta)}$ равна χ_β на $\mathbf{C}(\alpha \setminus \beta)$. Следовательно, χ_α квазиполунепрерывна сверху.

б) Если вес p непрерывен справа, то верно также обратное.

Доказательство. Рассмотрим открытое множество e с $p(e) < \varepsilon$, такое, что функция $\chi_\alpha |_{\mathbf{C}e}$ полунепрерывна сверху. Тогда функция $\chi_{\alpha \setminus e}$ также полунепрерывна сверху, так что $\alpha \setminus e$ замкнуто.

с) Пусть вес p непрерывен справа. Если функция f квазинепрерывна, то множество $f^{-1}(\omega')$ квазиоткрыто для любого открытого множества ω' : если f квазиполунепрерывна сверху, то множество $\{x | f < \lambda\}$ при любом λ будет квазиоткрыто.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения рассмотрим открытое множество e с $p(e) < \varepsilon$, такое, что функция $f |_{\mathbf{C}e}$ непрерывна; тогда множество $f^{-1}(\omega') \cap \mathbf{C}e$ открыто в $\mathbf{C}e$, и поэтому $(f^{-1}(\omega') \cap \mathbf{C}e) \cup e$ открыто. Таким образом, $f^{-1}(\omega')$ содержится в этом открытом множестве с точностью до множества веса $\leq p(e)$.

Рассуждение для второй части аналогично.

д) Пусть вес p счетно субаддитивен. Если для функции $f: \Omega \rightarrow \Omega'$, где Ω' имеет счетный базис, $f^{-1}(\omega')$ квазиоткрыто для любого открытого ω' , то f квазинепрерывна. Если для вещественной функции f множество

$\{x \mid f(x) < \lambda\}$ при любом λ квазиоткрыто, то f квазиполунепрерывна сверху.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения рассмотрим счетный базис $\{\omega_n\}$ открытых множеств Ω' . Пусть $e_n \subset \Omega$ — такое открытое множество, что $f^{-1}(\omega_n) \subset e_n$ и $p(e_n \setminus f^{-1}(\omega_n)) < \varepsilon/2^n$. Рассмотрим множество $A = \bigcup (e_n \setminus f^{-1}(\omega_n))$. Имеем $p(A) < \varepsilon$. Достаточно убедиться в том, что для любого n множество $f^{-1}(\omega_n) \cap \mathbf{C}A$ открыто в $\mathbf{C}A$. Но это следует из того, что $f^{-1}(\omega_n) \cap \mathbf{C}A = e_n \cap \mathbf{C}A$. Аналогично получается второе утверждение, но только вместо ω_n следует воспользоваться множествами $\{x \mid f < \lambda_n\}$, где числа λ_n образуют плотное множество.

Подчеркнем, что в случае непрерывного справа веса можно, как это делают некоторые авторы, в определении квазиполунепрерывности считать множество α открытым. Поэтому представляет интерес следующее замечание.

Замечание. Определим *внешний вес* p^* следующим образом: $p^*(e) = \inf_{\omega \supset e} p(\omega) \geq p(e)$, где ω — открытое множество. Внешний вес всегда непрерывен справа. Он будет тонким или счетно субаддитивным, если p является таковым. Отметим, что $(p^*)^* = p^*$.

Классический пример в \mathbb{R}^n ($n \geq 3$). Описанная выше тонкая топология совпадает с так называемой *классической тонкой топологией*. Внешняя ньютонова емкость является весом, непрерывным справа, счетно субаддитивным и тонким. Как мы увидим ниже, последнее свойство не столь элементарно, как первые два. Напомним, что множества нулевой емкости совпадают с полярными множествами. Более подробно см. об этом гл. VI—VIII.

3. Сравнение квазинепрерывности и тонкой непрерывности. Докажем сначала одну простую теорему, достаточно известную в классической теории потенциала (см., например, Дени и Лионс [1]).

Теорема IV.3. Если вес p тонкий, то всякая p -квазинепрерывная функция $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ тонко непре-

р-квазивсюду, а всякая r -квазиполунепрерывная функция тонко полунепрерывна r -квазивсюду.

Доказательство. Выберем множество α_n так, чтобы функция $f|_{\mathcal{C}\alpha_n}$ была непрерывна и чтобы $r(\alpha_n) < 1/n$. Тогда $r(\tilde{\alpha}_n) < 1/n$ и $r(\bigcap \tilde{\alpha}_n) = 0$. Если $x \notin \bigcap \tilde{\alpha}_n$, то существует такое n_0 , что $x \notin \tilde{\alpha}_{n_0}$. Множество $\mathcal{C}\tilde{\alpha}_{n_0}$ тонко открыто, а функция $f|_{\mathcal{C}\tilde{\alpha}_{n_0}}$ непрерывна и, следовательно, тонко непрерывна в x . Поэтому функция f на Ω также тонко непрерывна в x и, значит, тонко непрерывна r -квазивсюду в Ω . Доказательство для случая полунепрерывности аналогично.

Следствие. Если вес r тонкий, то для всякого квазизамкнутого множества α имеет место равенство $r(\tilde{\alpha} \setminus \alpha) = 0$. Аналогичный результат верен для квазиоткрытых множеств.

Доказательство. Функция χ_α квазиполунепрерывна сверху (см. предложение IV. 2, а)); следовательно, она тонко полунепрерывна сверху вне множества e нулевого веса. Далее, в любой точке $x \in \tilde{\alpha} \setminus \alpha$ функция χ_α равна нулю, в то время как ее тонкий \limsup равен 1, так что она не будет тонко полунепрерывной сверху в точке x . Таким образом, $\tilde{\alpha} \setminus \alpha \subset e$.

Упражнение. Дать прямое доказательство последнего следствия. Для случая, когда Ω' имеет счетный базис, а вес r непрерывен справа и счетно субаддитивен, вывести из него теорему IV. 3.

4. Свойство Шоке. Определение IV.4. Для данного веса r свойство Шоке состоит в следующем: всякое тонко открытое множество является r -квазиоткрытым (или всякое тонко замкнутое множество является r -квазизамкнутым).

Эквивалентная форма свойства Шоке такова:

(а) Для любого множества e и любого $\varepsilon > 0$ тонкая внешность e может быть заключена в открытое множество ω , такое, что $r(\omega \cap e) < \varepsilon$.

Заметим, что отсюда вытекает такое свойство:

(β) Всякая вещественная функция со значениями 0 или 1, тонко полунепрерывная сверху¹⁾, квазиполунепрерывна сверху.

Если вес p непрерывен справа, то, обратно, (β) влечет (α) и является, следовательно, эквивалентной формой свойства Шоке.

Вес, обладающий свойством Шоке, будем называть *весом типа Шоке*.

Предложение IV.5. *Если вес p — типа Шоке, то всякое тонко замкнутое множество есть объединение множества типа F_σ и множества нулевого веса. Если p к тому же непрерывен справа, то всякое тонкое борелевское множество есть объединение борелевского множества и множества нулевого веса.*

Доказательство. Первая часть очевидна. Что касается второго утверждения, то заметим, что тонкие борелевские множества образуют по определению σ -алгебру, которая является наименьшей σ -алгеброй, содержащей все тонко замкнутые множества. Множества, являющиеся объединением борелевского множества и множества нулевого веса, также образуют σ -алгебру (это следует из рассмотрения счетного пересечения и дополнения к счетной сумме таких множеств). Эта σ -алгебра содержит все тонко замкнутые множества и, следовательно, всю тонкую борелевскую σ -алгебру.

Предложение IV.6. *Если вес p тонкий и типа Шоке, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, любое множество e можно представить как объединение множеств e_1 и e_2 , таких, что $p(\tilde{e}_1) \leq p(e)$ а $p(e_2) < \varepsilon$.*

Доказательство (такое же, как в оригинальной работе Шоке). Тонкое замыкание \tilde{e} содержит замкнутое множество e_0 , такое, что $p(\tilde{e} \setminus e_0) < \varepsilon$, причем $p(e_0) \leq p(\tilde{e}) = p(e)$. В качестве e_1 мы возьмем $e \cap e_0$, а в качестве e_2 — множество $e \setminus e_0$.

¹⁾ Можно предполагать тонко полунепрерывным сверху лишь сужение этой функции на дополнение к множеству нулевого веса a

5. Эквивалентность квазинепрерывности и тонкой непрерывности квазивсюду. Теорема IV.7. Пусть вес ρ — типа Шоке и счетно субаддитивен. Тогда всякая функция $f: \Omega \rightarrow \Omega'$, где Ω' имеет счетный базис, тонко непрерывная ρ -квазивсюду (или даже такая, сужение которой на множество E с $\rho(CE) = 0$ тонко непрерывно) будет ρ -квазинепрерывной. Всякая вещественная функция f , тонко полунепрерывная (сверху или снизу) ρ -квазивсюду (или даже функция, сужение которой, аналогичное указанному выше, тонко полунепрерывно) будет ρ -квазиполунепрерывной (сверху или снизу).

Доказательство. Предположим сначала, что f тонко непрерывна. Рассмотрим базис $\{\omega_n\}$ открытых множеств в Ω' , положим $e_n = f^{-1}(\omega_n)$ и выберем открытые множества $e'_n \supset e_n$ так, чтобы $\rho(e'_n \setminus e_n) < \varepsilon/2^n$. Положим $E = \bigcup (e'_n \setminus e_n)$. Тогда $\rho(E) < \varepsilon$. Покажем, что функция $f|_{CE}$ непрерывна. Рассматривая прообразы открытых множеств в Ω' , видим, что достаточно убедиться в том, что $e_n \cap CE$ открыто на CE . Но это следует из того, что $e_n \cap CE = e'_n \cap CE^1$.

Пусть теперь для некоторого множества α с $\rho(\alpha) = 0$ функция $f|_{C\alpha}$ тонко непрерывна на $C\alpha$. Применим предыдущий результат к функции f на $C\alpha$, используя тот же самый вес ρ и индуцированную топологию. Мы получим, что f квазинепрерывна на $\Omega \setminus \alpha$ и, следовательно, на Ω . Аналогичные рассуждения можно провести в случае, когда f тонко полунепрерывна сверху (или снизу), рассмотрев множества $\{x \mid f < \lambda_n\}$, где $\{\lambda_n\}$ всюду плотно, и открытые множества $e'_n \supset e_n$, такие, что $\rho(e'_n \setminus e_n) < \varepsilon/2^n$.

Дальнейшие свойства эквивалентности. Из теорем IV.3 и IV.7 и определения IV.4 (в форме (β)) вытекают две следующие теоремы:

Теорема IV.8. Предположим, что вес ρ — тонкий, счетно субаддитивный и типа Шоке.

¹⁾ Это рассуждение принадлежит Дубу. В классическом примере п. 2 мы получаем для ньютоновых потенциалов свойство квазинепрерывности, указанное А. Картаном.

а) Для любой функции $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ (где Ω' имеет счетный базис) $[f \text{ квазинепрерывна}] \Leftrightarrow [f \text{ тонко непрерывна квазивсюду}]$.

б) Для любой вещественной функции f $[f \text{ квазиполунепрерывна (сверху или снизу)}] \Leftrightarrow [f \text{ тонко полунепрерывна (сверху или снизу) квазивсюду}]$.

Теорема IV.9. Если вес p непрерывен справа и счетно субаддитивен, то свойство Шоке эквивалентно следующему свойству: для всякой вещественной функции f тонкая полунепрерывность сверху влечет за собой квазиполунепрерывность сверху. Если, кроме того, вес p тонкий, то свойство Шоке равносильно эквивалентности тонкой полунепрерывности сверху квазивсюду и квазинепрерывности сверху.

6. Случай тонкой топологии, определяемой конусом функций. Рассмотрим теперь, как в гл. I, конус Φ , соответствующую разреженность и тонкую топологию. В этом случае можно получить дополнительные достаточные условия для выполнения свойства Шоке.

Теорема IV.10. Предположим, что вес p счетно субаддитивен и непрерывен справа, а Ω имеет счетный базис. Тогда если нижняя огибающая (\inf) любого семейства из Φ квазиполунепрерывна сверху, то p обладает свойством Шоке.

Доказательство. Пусть $\{\omega_n\}$ — базис открытых множеств Ω . Для любого множества e положим $e_n = \{x \mid R_1^{e \cap \omega_n}(x) < 1\}$. Согласно сказанному в гл. I, множество E точек $\mathbf{C}e$, где e разрежено, есть $\bigcup (e_n \cap \omega_n)$. Так как функция $R_1^{e \cap \omega_n}$ квазиполунепрерывна сверху (по предположению), то существует открытое множество α_n , такое, что $p(\alpha_n) < \varepsilon/2^n$ и функция $R_1^{e \cap \omega_n} \mid \mathbf{C}\alpha_n$ полунепрерывна сверху. Поскольку $R_1^{e \cap \omega_n} \geq 1$ на $e \cap \omega_n$, это неравенство справедливо также на $e \cap \omega_n \setminus \alpha_n \subset \mathbf{C}e_n$. Следовательно, $\mathbf{C}(e \cap \omega_n \setminus \alpha_n) \supset e_n$.

Рассмотрим множества $A_n = \mathbf{C}(e \cap \omega_n \setminus \alpha_n) \cap \omega_n \supset e_n \cap \omega_n$; $\bigcup A_n$ открыто и содержит E . Далее, $A_n \cap e \subset \alpha_n$ или $\mathbf{C}A_n \cup \mathbf{C}e \supset \mathbf{C}\alpha_n$, поскольку $\mathbf{C}A_n \cup \mathbf{C}e$ содержит

множество $((e \cap \omega_n) \setminus \alpha_n) \cup \mathbf{C}(e \cap \omega_n)$, содержащее $\mathbf{C}\alpha_n$.
Итак, $(\bigcup A_n) \cap e \subset \bigcup \alpha_n$ и $\rho((\bigcup A_n) \cap e) \leq \varepsilon$.

7. Примеры весов. Исходя из веса ρ и возрастающей вещественной функции $L(x) \geq 0$ ($x \geq 0$), можно получить новый вес $L(\rho(e))$, свойства которого могут быть выведены из свойств ρ и L .

Рассмотрим конус Φ и связанный с ним вес $\rho(e) = R_\Phi^e(x_0)$ (см. гл. II), где $x_0 \in \Omega$ и $\Phi \geq 0$ фиксированы. Если функция φ полунепрерывна снизу, то вес ρ тонкий (следствие предложения II.5); если φ конечна, непрерывна и положительна, то вес ρ непрерывен справа (доказательство то же, что и в аксиоматической теории гармонических функций, см. Брело [20], стр. 122, теорема 23); если Φ \mathbf{C} -замкнуто, то вес ρ счетно субаддитивен.

Замечание. Если взять $\rho(e) = R_1^e(x_0)$, то всякое квазизамкнутое множество α будет разрежено в x_0 , если $x_0 \notin \alpha$, и всегда существует замкнутое множество $\alpha_0 \subset \alpha$, такое, что множество $\alpha \setminus \alpha_0$ не содержит точки x_0 и разрежено в ней.

Это легко получается, если выбрать содержащееся в α замкнутое множество α_0 так, чтобы $R_1^{\alpha \setminus \alpha_0}(x_0) < 1$.

Вес $R_{f_0}^e(x_0)$ и соответствующее свойство Шоке. Предложение IV.11. *Предположим, что для функции $f_0 \geq 0$ на Ω вес $R_{f_0}^e(x_0)$ непрерывен справа. Тогда для любой функции f , $0 \leq f \leq f_0$, квазиполунепрерывной сверху (в частности, если вес счетно субаддитивен и типа Шоке, то для всякой тонко полунепрерывной сверху квазивсюду функции) имеем $\inf_{\Phi \geq 0} R_{f-\Phi}(x_0) = 0$ (здесь функция $\Phi \geq 0$, полунепрерывна сверху, $\leq f$, и в точках, где $f = \Phi = +\infty$, мы полагаем $f - \Phi = 0$).*

Доказательство. Существует открытое множество ω , такое, что $R_{f_0}^\omega(x_0) < \varepsilon$ и функция $f|_{\mathbf{C}\omega}$ полунепрерывна сверху. Обозначим через f_1 эту функцию, продолженную нулем на ω ; тогда f_1 будет полунепрерывна сверху на Ω и $R_{f-f_1}(x_0) \leq R_{f_0}^\omega(x_0) < \varepsilon$.

Теорема VI. 12. Пусть f_0 — конечная непрерывная положительная функция на Ω . Предположим, что для всякой тонко полунепрерывной сверху функции f , $0 \leq f \leq f_0$, $\inf_{\varphi} R_{f-\varphi}(x_0) = 0$ (φ полунепрерывна сверху, $0 \leq \varphi \leq f$). Тогда вес $R_{f_0}^e(x_0)$ обладает свойством Шоке.

Доказательство. Рассмотрим тонко замкнутое множество E . Функция $(f_0)_E = f_0 \cdot \chi_E$ тонко полунепрерывна сверху. Если $\varphi \geq 0$ полунепрерывна сверху и $\varphi \leq (f_0)_E$, то множество $\alpha_0 = \{x \mid \varphi(x) \geq f_0/2\}$ замкнуто и содержится в E . На $E \setminus \alpha_0$ имеем $(f_0)_E - \varphi = f_0 - \varphi > f_0/2$. Поэтому $R_{(f_0)_E - \varphi} \geq R_{f_0/2}^{E \setminus \alpha_0} = (1/2) R_{f_0}^{E \setminus \alpha_0}$ и, следовательно, $R_{f_0}^{E \setminus \alpha_0}(x_0)$ при надлежащем выборе φ будет произвольно мало; это значит, что $R_{f_0}^{E \setminus \alpha_0}(x_0)$ произвольно мало при надлежащем выборе $\alpha \subset E$, а это и есть свойство Шоке.

Следствие (свойство эквивалентности для веса $R_{f_0}^e(x_0)$, где функция f_0 конечна, непрерывна и положительна, в предположении, что вес счетно субаддитивен). *Свойство Шоке эквивалентно следующему свойству:*

Для всякой тонко полунепрерывной сверху функции f , такой, что $0 \leq f \leq f_0$, имеет место равенство $\inf_{\varphi} R_{f-\varphi}(x_0) = 0$ (функции φ полунепрерывны сверху, $0 \leq \varphi \leq f$).

Это — непосредственное следствие из IV. 11 и IV. 12.

Установленная эквивалентность показывает, что аппроксимационное свойство, выражаемое последним равенством, может быть интерпретировано как свойство Шоке некоторого специального веса, а именно веса $R_{f_0}^e(x_0)$.

Упражнение. Пусть пространство Ω локально компактно и имеет счетный базис, а Φ S -замкнуто. Тогда для конечных непрерывных функций $f_0 > 0$ свойство Шоке для веса $R_{f_0}^e(x_0)$ не зависит от выбора f_0 и эквивалентно соответствующему локальному свой-

ству Шоке для веса $R_i^e(x_0)$ ¹⁾ и свойству $\inf R_{f-\varphi}(x_0) = 0$ (φ полунепрерывны сверху, $0 \leq \varphi \leq f$)^φ для всякой функции $f \geq 0$, тонко полунепрерывной сверху и локально ограниченной.

8. f_0 -исчезающие семейства множеств ($f_0 \geq 0$). (См. Брело [27].) Будем рассматривать Ω и Φ из гл. I. Положим

$$\hat{f}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y).$$

Определение IV.13. Семейство множеств $\{e_i\}$ будем называть f_0 -исчезающим, если

$$\inf_i \widehat{R}_{f_0}^{e_i} = 0.$$

Это эквивалентно равенству

$$\inf_i \widehat{R}_{f_0}^{e_i} = 0$$

(мы пишем \widehat{R}_φ^e вместо \widehat{R}_φ^e).

Действительно, второе, априори более слабое условие показывает, что в любом открытом множестве α при любом $\varepsilon > 0$ существует точка x_1 , для которой $\inf_i \widehat{R}_{f_0}^{e_i}(x_1) < \varepsilon$, и, значит, существуют такое j , что $\widehat{R}_{f_0}^{e_j}(x_1) < 2\varepsilon$, и, далее, такая точка $x_2 \in \alpha$, что $\widehat{R}_{f_0}^{e_j}(x_2) < 3\varepsilon$. Таким образом, множество, где $\inf_i \widehat{R}_{f_0}^{e_i} < 3\varepsilon$, плотно, откуда вытекает и свойство f_0 -исчезания.

Одно применение. Справедливость свойства Шоке для веса $R_{f_1}^e(x_0)$ или даже для веса $\widehat{R}_{f_0}^e(x_0)$ для любой фиксированной функции $f_0 \geq 0$ и любой фиксированной точки x_0 влечет за собой следующее: для любых множества e и семейства открытых множеств ω_i , содержащих тонкие внешние точки e , семейство $\{e \cap \omega_i\}$ является f_0 -исчезающим.

¹⁾ То есть свойству Шоке в каждом открытом множестве базиса Ω . — Прим. перев.

У п р а ж н е н и е. Найти дополнительные предположения, при которых равенство $\inf_i R_{f_0}^{e_i}(x_0) = 0$ (для одной функции f_0 и одной точки x_0) эквивалентно f_0 -исчезанию семейства $\{e_i\}$.

9. О теории Фугледе [2, 3]. Фугледе рассматривает общую емкость, которая есть не что иное, как непрерывный справа счетно субаддитивный вес, обладающий еще свойством: $p(\bigcup \alpha_n) = \sup p(\alpha_n)$ для любой возрастающей последовательности множеств α_n . Сначала он доказывает, что если Ω имеет счетный базис открытых множеств, то всякое (непустое) семейство квазизамкнутых множеств $\{e_i\}$ содержит счетное подсемейство, пересечение которого содержится в каждом e_i с точностью до множества α_i нулевого веса. Далее он изучает в рамках нашей схемы с конусом Φ следствия следующих аксиом:

- 1) Рассматриваемый вес тонкий.
- 2) Множество точек $x \in E$, где $E \setminus \{x\}$ разрежено, имеет нулевой вес.
- 3) Если $p(E) = 0$, то $E \setminus \{x\}$ разрежено, $\forall x$.
- 4) Каждая функция из Φ квазинепрерывна.

Заметим, что аксиома 2) в классической теории потенциала в \mathbb{R}^n (см. п. 2 и гл. VI, где Φ является множеством всех неотрицательных гипергармонических функций) есть ключевая теорема, так же как и свойство Шоке. Однако в соответствующей теории для пространств Грина (см. гл. VI) свойство 2) не имеет места, если только не исключить неполярные точки. В аксиоматических теориях гармонических функций, берущих свое начало от классической теории, эта аксиома 2) (даже когда неполярных точек нет) не предполагается выполненной (равно как и свойство Шоке).

Именно поэтому мы ввели сначала более слабые условия и рассмотрели свойство Шоке. Довольно сильные аксиомы Фугледе имеют интересные следствия: из них выводятся свойство Шоке, существование наименьшего тонко замкнутого носителя для меры, которая равна нулю на множествах нулевого веса (обобщение теоремы Гетура), и т. д. В недавней работе [4] Фугледе обобщает свою теорию.

Глава V

СЛАБАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ¹⁾

1. Обозначения. Пусть f — произвольная функция на топологическом пространстве Ω со значениями в $\bar{\mathbb{R}}$. Мы уже ввели (гл. IV, п. 8) обозначение

$$\hat{f}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y) = \sup_{\sigma} \left(\inf_{y \in \sigma} f(y) \right)$$

(σ — окрестность точки x).

Введем еще обозначение

$$\check{f}(x) = \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \neq x}} f(y) = \sup_{\substack{\sigma \\ y \neq x}} \left(\inf_{y \in \sigma} f(y) \right);$$

в изолированных точках эта функция принимается равной $+\infty$. Известно, что функция \hat{f} всегда полунепрерывна снизу и что $\hat{f} = \inf(\check{f}, f)$. Если f полунепрерывна снизу, то $\hat{f} = f$.

Вернемся к основным понятиям гл. I и рассмотрим еще одно понятие, которое поможет нам лучше понять существо регулярных граничных точек в задаче Дирихле и основной предельной теоремы в теории потенциала.

Определение V.1. Множество e называется *слабо разреженным* в точке x_0 (которая может принадлежать или не принадлежать e), если

$$\inf_{\sigma} \hat{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1 \quad (\sigma \text{ — окрестность точки } x_0).$$

Замечания. 1) Слабая разреженность множества e влечет за собой слабую разреженность любого множества $e' \subset e$.

2) Так как $\hat{f} \leq f$, то разреженность множества e в $x_0 \notin e$ влечет за собой его слабую разреженность в x_0 .

¹⁾ См. Брело [23].

3) Одноточечное множество $\{x_0\}$ слабо разрежено в x_0 в том и только в том случае, когда $\hat{R}_1^{x_0}(x_0) < 1$ или, что то же самое, когда $\check{R}_1^{x_0}(x_0) < 1$.

Примеры. Ни в какой точке x пространство Ω не является слабо разреженным; \emptyset слабо разрежено во всякой точке; никакая изолированная точка x_0 не будет слабо разреженной в x_0 .

2. Предложение V.2 (Рамасвами). Если в точке $x_0 \in e$ множество $e \setminus \{x_0\}$ слабо разрежено, но не разрежено, то e слабо разрежено в x_0 .

Доказательство. Для любой окрестности σ точки x_0 имеем $x_0 \in \overline{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}$, так как $(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma$ неразрежено в x_0 . Следовательно, $e \cap \sigma \subset \overline{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}$. Так как $R_1^e = R_1^{\check{e}}$ (предложение II.5), то

$$R_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma} = R_1^{\overline{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}} \geq R_1^{e \cap \sigma}$$

и то же самое верно для \hat{R}_1 . В силу сделанных предположений $\hat{R}_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0) < 1$ для некоторой окрестности σ точки x_0 . Таким образом, $\hat{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$.

Применение. Если множество $\Omega \setminus \{x_0\}$ слабо разрежено в x_0 , то оно разрежено в x_0 .

Определение V.3. Точка x_0 называется *сингулярной*, если $\Omega \setminus \{x_0\}$ разрежено (или, что то же самое, слабо разрежено) в x_0 .

Всякая изолированная точка пространства является сингулярной точкой.

Лемма V.4. Предположим, что множество $\{x_0\}$ пренебрежимо. Тогда для любого множества e имеем $\check{R}_1^e(x_0) = \check{R}_1^{e \setminus \{x_0\}}(x_0)$.

Доказательство. Прежде всего $R_1^e \leq R_1^{e \setminus \{x_0\}} + R_1^{x_0}$. Так как $R_1^{x_0}(x) = 0$, $\forall x \neq x_0$, то $R_1^e(x) \leq R_1^{e \setminus \{x_0\}}(x)$, $\forall x \neq x_0$, откуда и вытекает искомое равенство $\check{R}_1^e(x_0) = \check{R}_1^{e \setminus \{x_0\}}(x_0)$.

Лемма V.5. Если точка x_0 не сингулярна, то для всякого множества e имеет место неравенство $\check{R}_1^e(x_0) \leq R_1^e(x_0)$.

Доказательство. Если $u \in \Phi$, $u \geq 1$ на e , то $R_1^e \leq u$, $\check{R}_1^e(x_0) \leq \check{y}(x_0)$. Так как $\Omega \setminus \{x_0\}$ неразрезано в x_0 , то $\check{y}(x_0) = u(x_0)$ (гл. I, п. I). Поэтому $\check{R}_1^e(x_0) \leq u(x_0)$ и, следовательно, $\check{R}_1^e(x_0) \leq R_1^e(x_0)$.

Теорема V.6. Пусть точка x_0 пренебрежима и не сингулярна. Тогда, каково бы ни было множество $e \ni x_0$, из слабой разреженности $e \setminus \{x_0\}$ в x_0 следует, что e слабо разрежено в x_0 .

Доказательство. Для некоторой окрестности σ точки x_0

$$\hat{R}_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0) < 1.$$

Но

$$\check{R}_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0) \leq R_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0)$$

согласно последней лемме. Так как $\hat{f} = \inf(f, \check{f})$, то

$$\hat{R}_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0) = \check{R}_1^{(e \setminus \{x_0\}) \cap \sigma}(x_0).$$

В силу леммы V.4 это равно $\check{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0)$. Наконец, $\hat{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0) \leq \check{R}_1^{\sigma \cap e}(x_0) < 1$, и следовательно, e слабо разрежено в x_0 .

Замечание. Простые примеры Рамасвами показывают, что 1) условие несингулярности точки x_0 является необходимым, 2) сумма двух множеств, слабо разреженных в x_0 , может не быть слабо разреженной, 3) все точки могут быть сингулярными.

3. Теорема о сходимости (или о нижней огибающей). Теорема V.7 (Брело [23]). Пусть $\{u_i\}$ — семейство функций из конуса Φ . Тогда множество $\{x \mid \widehat{\inf} u_i(x) < \inf u_i(x)\}$ есть счетное объединение множеств, слабо разреженных в каждой точке.

Доказательство. Положим

$$e_n = \left\{ x \mid \widehat{\inf} u_i < \inf \left(n, (\inf u_i) - \frac{1}{n} \right) \right\}.$$

Тогда

$$\{x \mid \widehat{\inf} u_i(x) < \inf u_i(x)\} = \bigcup e_n.$$

Покажем, что каждое e_n слабо разрежено в любой точке пространства. Пусть x_0 — какая-либо точка из Ω . Предположим сначала, что $\widehat{\inf} u_i(x_0) < +\infty$. Так как функция $\widehat{\inf} u_i$ полунепрерывна в x_0 , то существует окрестность σ точки x_0 , такая, что

$$\widehat{\inf} u_i(x) > \widehat{\inf} u_i(x_0) - (2n)^{-1}, \quad \forall x \in \sigma.$$

На e_n имеем $\widehat{\inf} u_i(x) < \inf u_i(x) - n^{-1}$. Следовательно, на $e_n \cap \sigma$ имеем $\inf u_i > \widehat{\inf} u_i + (2n)^{-1}$. Положим $k_n = \widehat{\inf} u_i(x_0) + (2n)^{-1}$. Тогда $u_i/k_n > 1$ на $e_n \cap \sigma$ и

$$\frac{u_i}{k_n} \geq R_1^{e_n \cap \sigma}, \quad \inf \frac{u_i}{k_n} \geq R_1^{\sigma \cap e_n},$$

$$\frac{\widehat{\inf} u_i}{k_n} \geq \widehat{R}_1^{e_n \cap \sigma},$$

$$\widehat{R}_1^{e_n \cap \sigma}(x_0) \leq \frac{\widehat{\inf} u_i(x_0)}{k_n} < 1.$$

Следовательно, $\inf_{\sigma} \widehat{R}_1^{e_n \cap \sigma}(x_0) < 1$, и e_n слабо разрежено в x_0 .

Пусть теперь $\widehat{\inf} u_i(x_0) = +\infty$. Тогда для любого n существует окрестность σ' точки x_0 , такая, что $\widehat{\inf} u_i(x) \geq n$, $\forall x \in \sigma'$. Поэтому $e_n \cap \sigma' = \emptyset$, и следовательно, e_n разрежено, а значит, слабо разрежено в x_0 .

Обобщение. В доказательстве нигде не были использованы полунепрерывность снизу функций u_i и свойство аддитивности класса Φ . Поэтому теорема остается справедливой при очевидных изменениях в определении приведенной функции и слабой разреженности и для более общих классов Φ .

Счетное объединение множеств, слабо разреженных в каждой точке, называется *полуполярным множеством*¹⁾. Теорема V.7 утверждает, что „исключительное“ множество, определяемое неравенством из этой теоремы, является полуполярным.

4. Разреженность множества e в точке $x_0 \in e$.

Определение V.3. Множество e называется *разреженным в точке $x_0 \in e$* , если $e \setminus \{x_0\}$ разрежено в x_0 и e слабо разрежено в x_0 .

Определение V.9. *Базой B_e* множества e называется множество точек, в которых e неразрежено.

Очевидно, $\bar{e} = B_e \cup e$.

Эти понятия будут играть большую роль в дальнейших главах.

Замечание. В некоторых важных приложениях $R_\varphi^e = \hat{R}_\varphi^e$ на Se (для любой функции $\varphi \geq 0$). В этом случае для любой точки разреженность эквивалентна слабой разреженности.

В качестве следствия из теоремы V.6 получаем

Предложение V.10. *Предположим, что*

- (i) *ни одна точка не сингулярна;*
- (ii) *для любой точки x_0 утверждение „ x_0 пренебрежимо“ эквивалентно утверждению „ x_0 слабо разрежено в x_0 “, т. е. $\hat{R}_1^{(x_0)}(x_0) < 1$.*

Тогда разреженность e в точке x_0 эквивалентна тому, что $e \setminus \{x_0\}$ разрежено в x_0 и $\{x_0\}$ пренебрежимо. Кроме того, тонкое замыкание любого множества e есть объединение B_e и множества пренебре-

¹⁾ В классическом пространстве Грина и в достаточно богатых аксиоматических теориях полярные множества характеризуются тем, что они разрежены в любой точке (см. следующее ниже общее определение). Аналогичное понятие, связанное со слабой разреженностью, как раз и есть понятие полуполярного множества.

жимых точек из e , являющихся тонко изолированными точками e^1).

Предположения, фигурирующие в предыдущем замечании, и последнее предложение выполняются в классической теории, к изучению которой мы вскоре приступим.

З а м е ч а н и е. Завершая наше общее изучение тонкой топологии, упомянем, что более глубокий анализ приводит к рассмотрению таких понятий, как связность и локальная связность, свойство Линделёфа, нормальность, паракомпактность, счетность полуполярных множеств при различных предположениях (классический случай, различные аксиоматики). Отошлем читателя к работам Дуба [8], Фугледе [4—6], Берга, а также П. Мейера [2] (теоретико-вероятностный аспект).

Глава VI

ПОНЯТИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ²⁾

1. Прежде чем применять развитую выше общую теорию к классической теории потенциала, напомним некоторые понятия (см., например, Брело [25]). Мы

¹⁾ В аналогичных ситуациях некоторые авторы предпочитают исключать возможность существования непренебрежимых точек (т. е. неполярных точек, в случае когда Φ C -замкнуто), поскольку в этом случае база V_e становится тонко совершенной (т. е. множеством без тонко изолированных точек в V_e). Это упрощает топологический язык.

Однако в классической теории потенциала естественно присоединять точку ∞ к \mathbb{R}^n , для того чтобы устранить различие между внешней и внутренней задачами Дирихле. В случае $n \geq 3$ эта точка будет неполярной для содержащих ее гриновых областей. В \mathbb{R}^1 все точки неполярны, а в рамках аксиоматической теории гармонических функций легко (используя \mathbb{R}^1 и \mathbb{R}^3) построить пространства, имеющие несчетное множество как полярных, так и неполярных точек, а также базы V_e , которые будут тонко замкнуты, но не тонко совершенны (см. гл. VI).

²⁾ Некоторые вопросы здесь можно было бы, вероятно, изложить и лучшим способом, по образцу аксиоматической теории гармонических функций. Наша цель — лишь напомнить

будем рассматривать так называемые \mathcal{E} -пространства и пространства Грина, но для наглядности их можно почти всегда представлять себе как ограниченные области в \mathbb{R}^n .

Гармонические функции. Конечная вещественная непрерывная функция u на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) называется *гармонической*, если для любого открытого шара $B_{x_0}^r$ (с центром в x_0 радиуса r), замыкание которого содержится в Ω , $u(x_0)$ равно среднему значению u на $\partial B_{x_0}^r$, т. е.

$$u(x_0) = \int u d\sigma_{x_0}^r,$$

где $\sigma_{x_0}^r$ — единичная положительная масса, равномерно распределенная на $\partial B_{x_0}^r$ (т. е. инвариантная относительно вращений, или, иначе, пропорциональная площади). Отсюда вытекают такие факты:

а) Невозможность для гармонической функции иметь максимум или минимум в какой-либо точке без обращения в константу в некоторой окрестности этой точки.

б) Если функция u гармонична (в некоторой области) и $u \geq 0$, то либо $u > 0$ всюду, либо $u = 0$ всюду.

с) Пусть $\bar{\mathbb{R}}^n$ — компактификация Александера пространства \mathbb{R}^n (т. е. \mathbb{R}^n с присоединенной точкой $A = \infty$). Если u — гармоническая функция в $\omega \subset \mathbb{R}^n$ и $\liminf u \geq 0$ в любой граничной точке, то $u \geq 0$ в ω .

Интеграл Пуассона для шара $B_{y_0}^R$ определяется формулой

$$I_f^{B_{y_0}^R}(y) = \int R^{n-2} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|x - y|^n} f(x) d\sigma_{y_0}^R(x); \quad (1)$$

здесь функция f предполагается суммируемой по мере $d\sigma_{y_0}^R$. Для произвольной вещественной функции f

и дополнить классические результаты, чтобы сделать изложение замкнутым в себе. [Большинство этих результатов читатель может найти в книге Брело [25]. См. также Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, „Наука“, М., 1966. — *Перев.*]

очевидным образом определяются интегралы \bar{I}_f и \underline{I}_f . Они либо равны $+\infty$ или $-\infty$, либо являются гармоническими функциями в $B_{y_0}^R$.

Задача Дирихле для данного открытого множества ω состоит в отыскании гармонической в ω функции, стремящейся в каждой граничной (в $\bar{\mathbb{R}}^n$) точке к заданным на $\partial\omega$ граничным значениям. Для заданной вещественной граничной функции f не может быть более одного решения; в случае шара $B_{y_0}^R$ и непрерывной конечной функции f решение существует.

В качестве основных следствий свойств интеграла Пуассона I_f отметим следующие:

а) *Локальный критерий гармоничности.* Функция u гармонична тогда и только тогда, когда она конечна, непрерывна и для каждой точки y_0 существует такое $\varepsilon > 0$, что при $r < \varepsilon$ имеем $u(y_0) = \int u d\sigma_{y_0}^r$.

б) *Свойство сходимости.* Для любого направленного по возрастанию семейства $\{u_i\}$ функций, гармонических в области ω , $\sup u_i$ есть либо $+\infty$, либо гармоническая функция.

γ) Положительные гармонические функции в области ω , равные 1 в некоторой точке $x_0 \in \omega$, равномерно непрерывны в точке x_0 , а также в любой другой точке. Поэтому рассматриваемое множество функций компактно в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах области ω .

2. Гипергармонические и супергармонические функции. В соответствии со знаменитой теорией Ф. Рисса мы будем называть функцию u *гипергармонической* в открытом множестве $\omega \subset \mathbb{R}^n$, если

а) $u > -\infty$,

б) u полунепрерывна снизу,

в) $u \geq I_u^{B_{y_0}^R}$ в любом шаре $B_{y_0}^R \subset \bar{B}_{y_0}^R \subset \omega$, или, что равносильно, $u(y_0) \geq \int u d\sigma_{y_0}^r$ для любой точки $y_0 \in \omega$ и достаточно малых r .

Справедливы те же утверждения, аналогичные утверждениям а) — с) п. 1 (правда, лишь для минимума в утверждении а)), а также факт сохранения гипергармоничности в открытом множестве ω при предельном переходе по возрастающей последовательности или направленному по возрастанию семейству функций и при замене u внутри шара $B_{y_0}^R$ ($\bar{B}_{y_0}^R \subset \omega$) на $\bar{I}_u^{B_{y_0}^R}$.

Будем говорить, что u — *гипогармоническая* функция, если функция $-u$ — гипергармоническая.

В области ω гипер-(соотв. гипо-)гармоническая функция u либо всюду равна $+\infty$ (соотв. $-\infty$), либо конечна на плотном множестве и локально суммируема по мере Лебега. В последнем случае функция называется *супергармонической* (соотв. *субгармонической*). Пользуясь интегралом Пуассона, можно для заданной супергармонической функции u построить возрастающую последовательность конечных непрерывных супергармонических функций, сходящуюся к u .

Обозначения:

$$h(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^{n-2}} & (n \geq 3), \\ \log \frac{1}{r} & (n = 2). \end{cases} \quad (2)$$

Через h_{x_0} обозначается функция $x \mapsto h(|x - x_0|)$.

Примеры. а) Если μ — положительная мера Радона с компактным носителем, то

$$U^\mu(x) = \int h(|x - y|) d\mu(y) \quad (3)$$

есть супергармоническая функция, гармоническая вне носителя меры μ .

б) Если функции u , v гармоничны в открытом множестве ω , то функция $|u + iv|$ субгармонична. В случае \mathbb{R}^2 , если функция f голоморфна в ω , то функция $|f|$ субгармонична, а $\log|f|$ есть гипогармоническая функция, субгармоническая во всякой области, где $f \neq 0$.

3. Понятия, связанные с точкой A . (См. Брело [6].)

Пусть открытое множество $\omega \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ содержит точку Александрова A . Функция u называется *гармонической* в ω , если она конечна, непрерывна, гармонична вне A и равна в A $\int u d\sigma_{y_0}^r$ для любого шара $B_{y_0}^r$, такого, что $SB_{y_0}^r \subset \omega$. Вещественная функция называется *гипергармонической* в ω , если она $> -\infty$, полунепрерывна снизу, гипергармоническая вне A и для указанных выше шаров $u(A) \geq \int u d\sigma_{y_0}^r$.

Для внешности (в $\bar{\mathbb{R}}^n$) шара $B_{y_0}^r$, которую мы обозначим через $B_{y_0}^r$ (эта внешность содержит A), положим

$$I_f^{B_{y_0}^r}(y) = \int R^{n-1} \left[\frac{|y - y_0|^2 - R^2}{|x - y|^n} - \frac{1}{|y - y_0|^{n-2}} + \frac{1}{R^{n-2}} \right] f(x) d\sigma_{y_0}^R(x) \quad (4)$$

(в случае $n=2$ эта формула упрощается). Эта величина играет роль, подобную I_f (в том, что касается проблемы Дирихле, определения гипергармонических функций, замены в $B_{y_0}^r$ гипергармонической функции u на $I_u^{B_{y_0}^r}$). Вся предыдущая теория легко обобщается на этот случай.

4. \mathcal{E} -пространства. (См. Брело и Шоке [1].) \mathcal{E} -пространством называется связное отделимое пространство, обладающее следующим свойством. Для каждой точки x существуют открытая окрестность V_x и гомеоморфное отображение $y \mapsto m_x(y)$ этой окрестности V_x на открытое множество в $\bar{\mathbb{R}}^n$, удовлетворяющее следующему условию: для любых двух точек x_1, x_2 соответствие между точками $z_1 \in m_{x_1}(V_{x_1} \cap V_{x_2})$ и $z_2 \in m_{x_2}(V_{x_1} \cap V_{x_2})$, определяемое равенством $m_{x_1}^{-1}(z_1) = m_{x_2}^{-1}(z_2)$, или, что то же самое, соответствие при отображении $m_{x_2} \circ m_{x_1}^{-1}$, является изометрией (при этом точки, соответствующие точке A , называются точками

на бесконечности), либо, в случае $n = 2$, конформным отображением (первого или второго рода).

Такое пространство локально связно, локально компактно и метризуемо. Всякое его связное подпространство есть также \mathcal{E} -пространство. Точки на бесконечности образуют изолированное множество.

Примером \mathcal{E} -пространства может служить любая область в \mathbb{R}^n .

Определения гармонической, гипергармонической, супергармонической функций являются локальными и сводятся к соответствующему свойству на образе V'_x . Свойства а) — с) п. I (в свойстве с) надо рассматривать компактификацию Александера пространства \mathcal{E}) остаются в силе. Будем называть *абстрактным потенциалом* (или, коротко, *потенциалом*) на \mathcal{E} -пространстве или на открытом его подмножестве любую неотрицательную супергармоническую функцию, у которой наибольшая гармоническая миноранта (она всегда существует) равна нулю. Нижняя и верхняя огибающие (\inf и \sup) двух потенциалов — тоже потенциалы ¹⁾. Если v — потенциал (в некотором пространстве Ω), гармонический в ω , а ω — гипергармоническая неотрицательная в ω функция, причем $\liminf (\omega - v) \geq 0$ в каждой граничной точке ω , то $\omega - v \geq 0$ в ω .

В самом деле, функция, равная $\inf[(\omega - v), 0]$ на ω и продолженная нулем, будет гипергармонической в Ω ; эта функция $\geq -v$ и поэтому мажорирует наименьшую гармоническую мажоранту для $-v$, т. е. нуль. Взяв в качестве ω постоянную, мы получим для конечных непрерывных потенциалов v принцип Мариа — Фростмана, а именно равенство $\sup_{\Omega} v = \sup_S v$ (где S — носитель функции v , т. е. дополнение к наибольшему открытому множеству, в котором v гармонична). Этот результат справедлив

¹⁾ Если P_1, P_2 — два потенциала и h — наибольшая гармоническая миноранта для $P_1 + P_2$, то $h \leq P_1 + P_2 \Rightarrow h - P_1 \leq P_2 \Rightarrow h - P_1 \leq 0$ (так как функция $h - P_1$ субгармонична, а P_2 — потенциал) $\Rightarrow h \leq P_1 \Rightarrow h \leq 0 \Rightarrow h = 0$.

для любого потенциала v , что может быть доказано с помощью аппроксимаций (см. также теорему VIII. 4).

Полярные множества. Выберем в \mathcal{E} -пространстве Ω в качестве функций из Φ (см. гл. I) неотрицательные супергармонические функции и функцию $+\infty$. Тот же выбор используем для любого связного подпространства в Ω . Отметим счетную аддитивность класса Φ . Подмножество в области ω будет называться *полярным* в ω (в соответствии с терминологией гл. I), если в ω существует положительная ¹⁾ супергармоническая функция, равная $+\infty$ на e (а может быть, и в других точках). Эту функцию можно построить так, чтобы она была конечной в заданной точке $x \notin e$. Подмножество открытого множества будем называть *полярным*, если оно является таковым в каждой компоненте связности. Отсюда вытекает, что оно является строго полярным относительно конуса неотрицательных гипергармонических функций на данном открытом множестве. Множество e называется *локально полярным* на открытом множестве ω , если для всякого $x \in \omega$ существует открытая окрестность ω_0 точки x , такая, что $e \cap \omega_0$ полярно в ω (эквивалентное определение получим, рассматривая только окрестности точек из e)²⁾. Будем говорить *квазивсюду*, имея в виду „за исключением некоторого локально полярного множества“. Точка x (мы отождествляем ее с множеством $\{x\}$) не будет локально полярной в том и только в том случае, когда $n \geq 3$ и x есть точка на бесконечности. Если множество e локально полярно и замкнуто в ω , то любая супергармоническая в $\omega \setminus e$ функция, ло-

¹⁾ Без требования положительности мы получили бы понятие, эквивалентное локальному определению в пространстве Грина (см. ниже); однако в общей аксиоматической теории, когда нет положительных потенциалов, это было бы уже не так (см. статью Анандама, в *Ann. Inst. Fourier*, 22 (1972), № 4).

²⁾ Здесь нужно рассматривать окрестности в $\bar{\mathbb{R}}^n$, включая A наряду с другими точками.

кально ограниченная снизу, может быть продолжена, и притом единственным образом, до супергармонической функции в ω . Отметим также, что если ω связно, то $\omega \setminus \{e\}$ также связно.

5. Пространство Грина и функции Грина. \mathcal{E} -пространство Ω называется *пространством Грина*, если на Ω существует положительный потенциал или, что равносильно, положительная супергармоническая функция, отличная от константы. Область ω в пространстве Грина является снова пространством Грина; область ω в \mathcal{E} -пространстве, не являющемся пространством Грина, будет пространством Грина тогда и только тогда, когда множество $\Omega \setminus \omega$ не локально полярно. В пространстве Грина всякое локально полярное множество полярно и даже строго полярно или, что эквивалентно, пренебрежимо. В пространстве Грина все потенциалы, гармонические вне данной точки x_0 , пропорциональны. Сейчас мы выделим один из этих потенциалов и назовем его *функцией Грина*

Грина $G_{x_0}^\Omega$ или G_{x_0} . Выделение осуществляется с помощью следующего условия: вблизи x_0 этот потенциал является такой функцией $f(x)$, что функция $f(\pi_{x_0}^{-1}(x'))$, где $x' = \pi_{x_0}(x)$, с точностью до гармонической функции равна $h(|x' - x'_0|)$, если $x'_0 \neq A$ (где A — это точка Александра пространства \mathbb{R}^n), и равна $h(|x'|)$, если $x'_0 = A$.

Заметим, что если точка x не полярна, то функция $y \mapsto G_x(y)$ ограничена и непрерывна. Напомним важное свойство симметрии: $G_x(y) = G_y(x)$. Отметим, что часто используется также обозначение $G(x, y)$.

Примеры. Пространства \mathbb{R}^n , $\bar{\mathbb{R}}^n$ римановы поверхности являются \mathcal{E} -пространствами.

\mathbb{R}^n ($n \geq 3$) и гиперболические римановы поверхности являются пространствами Грина.

\mathbb{R}^2 и параболические римановы поверхности не являются пространствами Грина.

В $\bar{\mathbb{R}}^n$ ($n \geq 2$) множество $\mathbf{C}\bar{B}_0^R$ (содержащее A) является пространством Грина и

$$G_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{при } n \geq 3, \\ \log \frac{|x|}{R} & \text{при } n = 2. \end{cases}$$

Рассмотрим открытое подмножество Ω_0 \mathcal{E} -пространства Ω . Либо все компоненты Ω_0 гриновы (т. е. являются пространствами Грина) либо Ω не гриново. В первом случае мы будем называть множество Ω_0 *гриновым* и определим функцию Грина $G_x^{\Omega_0}$ как функцию, равную G_x^{ω} на содержащей x компоненте ω множества Ω_0 и нулю в остальных точках Ω_0 . Симметрия по-прежнему имеет место.

Замечание. В пространстве Грина функция G_{x_0} имеет глобальную точку пика в x_0 (см. гл. I, п. 1).

В самом деле, $G_{x_0}(x) \leq G_{x_0}(x_0)$ (принцип Мариа — Фростмана, п. 4). Равенство в точке $x \neq x_0$ невозможно (если бы $G_{x_0}(x_0)$ было конечно, то G_{x_0} была бы константой). Рассмотрим заданную окрестность δ_0 точки x_0 и другую окрестность δ , содержащуюся в V_{x_0} (см. п. 4), образ которой есть шар $B_{y_0}^r$ или $B_{y_0}^{r'}$. После замены G_{x_0} в δ интегралом Пуассона мы получим супергармоническую функцию; она мажорируется своим супремумом на $\partial\delta$, который $< G_{x_0}(x_0)$. Следовательно, $\sup_{\delta} G_{x_0} < G_{x_0}(x_0)$.

6. Основные общие результаты и постановки задач. а) *Большая теорема сходимости* (Брело — Картан)¹⁾. Рассмотрим на открытом подмножестве Ω \mathcal{E} -пространства направленное по убыванию семейство супергармонических функций, локально равномерно ограниченное снизу. Тогда $\widehat{\inf} u_i$ есть супергармоническая функция, квазивсюду равная $\inf u_i$ (локальное свойство). Этот результат точнее теоремы V.7.

¹⁾ См. Брело [1], Картан [1], Брело [6].

β) *Аппроксимационная лемма.* В пространстве Грина Ω всякая конечная непрерывная на компактном множестве K функция может быть с точностью до любого $\varepsilon > 0$ аппроксимирована разностью двух конечных непрерывных неотрицательных супергармонических функций или даже непрерывных потенциалов.

В самом деле, конечные непрерывные супергармонические функции $u \geq 0$ разделяют точки Ω , что можно установить с помощью G_{x_0} ; функция $|u_1 - u_2|$ и константы являются разностями таких u . Поэтому первый результат получается из теоремы Стона. Что касается потенциалов, то можно образовать конечный непрерывный потенциал $V > 0$, а далее оперировать с разностями конечных непрерывных неотрицательных потенциалов, поделенными на V .

γ) *Задача Дирихле* (Перрон — Винер — Брело). Рассмотрим сначала в \mathcal{E} -пространстве относительно компактное открытое множество Ω , для которого $\mathcal{C}\Omega$ не локально полярно, и вещественную функцию f на $\partial\Omega$. Супергармонические функции u в Ω , \liminf которых $\geq f(x)$ во всякой граничной точке x , имеют нижнюю огибающую \bar{H}_f^Ω (или, проще, \bar{H}_f), которая в каждой компоненте либо равна $+\infty$, либо $-\infty$, либо является гармонической функцией. Положим $\underline{H}_f = -\bar{H}_{(-f)}$. Имеем $\underline{H}_f \leq \bar{H}_f$. В случае когда функция \underline{H}_f равна \bar{H}_f и всюду конечна, функция f называется *разрешимой*, а общее значение огибающих называется *обобщенным решением* и обозначается через H_f . Если открытое множество $\omega \subset \Omega$, а F есть функция \bar{H}_f^Ω , продолженная с помощью функции f , то $\bar{H}_F^\omega = \bar{H}_f^\Omega$ в ω .

Если функция f конечна и непрерывна, то она разрешима (Винер) (при доказательстве используется аппроксимационная лемма) и

$$H_f^\Omega(x) = \int f(y) d\rho_x^\Omega(y), \quad (5)$$

где $d\rho_x^\Omega$ — некоторая положительная единичная мера на $\partial\Omega$ (гармоническая мера в x). Вообще же $\bar{H}_f^\Omega =$

$= \int \bar{f} d\rho_x^\Omega$, и f разрешима в том и только в том случае, когда она $d\rho_x^\Omega$ -суммируема для всех точек x или хотя бы для одной точки в каждой компоненте Ω (теорема о разрешимости из Брело [3]).

Замечание. Если v супергармонична и имеет гармоническую миноранту, то наибольшую миноранту можно получить как предел

$$H_v^{\Omega_n} \quad (\bar{\Omega}_n \subset \Omega, \Omega_n \uparrow, \bigcup \Omega_n = \Omega).$$

Равенство нулю этого предела характеризует потенциалы.

В качестве следствия аддитивности отображения $f \mapsto H_f$ для разрешимых функций f получаем аддитивность наибольшей гармонической миноранты для функций v (супергармонических ≥ 0). Это же можно получить непосредственно, используя аддитивность потенциалов (см. подстрочное примечание на стр. 53).

Регулярные граничные точки. Граничная точка X называется *регулярной*, если $H_f \rightarrow f(X)$ при $x \rightarrow X$ для всякой конечной непрерывной функции f . Необходимым и достаточным условием для этого является существование в $\Omega \cap \delta$, где δ — некоторая окрестность точки X , положительной супергармонической функции, стремящейся к нулю в X (локальный критерий), или, в случае когда Ω связно, условие $G_x(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow X$, где x — фиксированная точка из Ω (критерий Булигана).

Заметим, что точка $X \in \partial\Omega$ *иррегулярна* (т. е. не регулярна) в том и только в том случае, когда она иррегулярна для некоторой компоненты Ω . Далее, для регулярной точки X и для ограниченной сверху функции f имеем $\limsup_{\substack{x \in \Omega \\ x \rightarrow X}} \bar{H}_f(x) \leq \limsup_{\substack{y \in \partial\Omega \\ y \rightarrow X}} f(y)$.

Пример. Точка X будет регулярной, если в V_X существует конус (с вершиной X' не на бесконечности), непустая внутренность которого вблизи X' лежит вне образа $V_X \cap \Omega$. Это дает возможность по-

строить содержащее заданный компакт K открытое множество Ω' ($\bar{\Omega}' \subset \Omega$), у которого все граничные точки регулярны.

Точка на бесконечности, если она лежит на $\partial\Omega$, всегда регулярна при $n \geq 3$.

Теорема сходимости позволяет показать, что множество иррегулярных точек области (и, значит, любого открытого подмножества в Ω) локально полярно (Келлог — Эванс). Рассмотрим последовательность множеств $\Omega_n \uparrow$, $\bar{\Omega}_n \subset \Omega$, $\bigcup \Omega_n = \Omega$, с регулярными граничными точками. Функция $G_{x_0}^{\Omega_n}$, продолженная нулем, субгармонична вне x_0 . Предельная функция $G_{x_0}^{\Omega}$, продолженная нулем и затем регуляризованная с помощью \limsup , будет субгармонической (вне x_0) и будет на $\partial\Omega$ отличаться от нуля на локально полярном множестве, которое совпадает с множеством иррегулярных точек.

Обобщение. Рассмотрим \mathcal{E} -пространство Ω_0 и обозначим через Ω'_0 само пространство Ω_0 , если оно компактно, или его компактификацию Александрова (с помощью точки A) в противном случае. Рассмотрим в Ω_0 гриново открытое множество Ω . Можно сформулировать аналогичную задачу Дирихле для Ω с границей $\partial\Omega$ в Ω'_0 . При этом сохраняются определение огибающих и теоремы о разрешимости. Для функции f , заданной на некомпактном Ω_0 , будем обозначать f_* ее продолжение нулем в точке A . Тогда получают смысл обозначения $H_{f_*}^{\Omega_0}$. Сохраняют силу замечание об аддитивности наибольшей гармонической миноранты, определение и свойства регулярности точки $X \in \partial\Omega$, $X \neq A$; Ω называется *регулярным*, если $A \notin \partial\Omega$ и все граничные точки регулярны. По-прежнему верен тот факт, что иррегулярные точки, отличные от A , образуют локально полярное множество.

б) *Задача Дирихле для компактных множеств* (Келдыш — Лаврентьев — Брело). Пусть даны компактное множество K в пространстве Грина Ω и конечная непрерывная функция f на ∂K . Супергармонические в некоторой открытой окрестности множества K функции v , удовлетворяющие условию

$\liminf_{x \in \partial K, x \rightarrow X} v(x) \geq f(X)$ ($X \in \partial K$), имеют на K нижнюю огибающую \bar{K}_f . Аналогично определяется \underline{K}_f с помощью субгармонических функций. Обе эти огибающие равны пределу K_f функций H_F^0 по фильтру окрестностей ω компакта K , где F — любое непрерывное продолжение функции f . Точка $X \in \partial K$ называется *устойчивой*, если $K_f(X) = f(X)$, $\forall f$. Устойчивость всех точек $X \in \partial K$ эквивалентна возможности равномерной на ∂K аппроксимации любой из рассматривавшихся функций f с помощью функций, гармонических в окрестности K . Более подробно см. об этом Брело [7].

7. Представление Рисса. В пространстве Грина Ω (или в гриновом открытом подмножестве \mathcal{E} -пространства) для любой неотрицательной меры μ на Ω функция $\int G^\Omega(x, y) d\mu(y)$ гипергармонична; в каждой компоненте она либо равна $+\infty$, либо является абстрактным потенциалом (п. 4). Обратно, абстрактный потенциал в Ω допускает представление $\int G^\Omega(x, y) \times \times d\mu(y)$ (называемое часто G^Ω -потенциалом меры μ) с единственной неотрицательной¹⁾ мерой μ .

Супергармоническая функция u в Ω , имеющая гармоническую миноранту, допускает представление

$$u(x) = \int G^\Omega(x, y) d\mu(y) + u^*(x), \quad (6)$$

где u^* — наибольшая гармоническая миноранта в Ω , а μ — единственным образом определенная неотрицательная мера (ассоциированная мера); определение меры μ имеет локальный характер в том смысле, что ее сужение на любое $\omega \subset \Omega$ является ассоциированной мерой для ω .

¹⁾ Мы не будем без специальных оговорок пользоваться термином „потенциал“ в случае незнакоопределенной меры, т. е. для разности двух неотрицательных потенциалов.

8. Порядок в классе супергармонических функций. Мы вводим *специальный порядок* следующим образом:

$$u_1 > u_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2 + (\text{супергармоническая функция} \geq 0).$$

Если

$$u_1 = (\text{потенциал меры } \mu_1) + (\text{гармоническая функция } h_1),$$

$$u_2 = (\text{потенциал меры } \mu_2) + (\text{гармоническая функция } h_2),$$

то условие $u_1 > u_2$ эквивалентно условиям $h_1 \geq h_2$ и $\mu_1 > \mu_2$ (последнее означает, что $\mu_1 - \mu_2$ есть положительная мера).

Это очевидно для потенциалов и легко доказывается в общем случае. Множество всех неотрицательных супергармонических функций образует полную решетку относительно специального порядка. В случае потенциалов из более слабого условия $u_1 \geq u_2$ следует неравенство $\mu_1(\Omega) \geq \mu_2(\Omega)$. Это можно показать, рассмотрев открытое множество $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$ и функцию $R_1^{\Omega'}$, которая является потенциалом U^v меры v . При подходящем выборе Ω' интеграл $\int U^v d\mu_1$ будет как угодно близок к величине $\mu_1(\Omega)$, конечной или нет, и

$$\int U^v d\mu_1 = \int U^{\mu_1} dv \leq \int U^{\mu_2} dv = \int U^v d\mu_2 \leq \mu_2(\Omega).$$

9. Различные дополнения для случая пространства Грина. α) На компактном полярном множестве e существует мера $v \geq 0$, потенциал которой равен $+\infty$ на e и конечен на Se (Эванс). Имеется обобщение (Дени [2] и Шоке [3]) на случай множеств типа G_δ .

β) Если супергармоническая функция u (с ассоциированной мерой μ) конечна на полярном множестве e , то внешняя μ -мера e равна нулю. В самом деле, e содержится в борелевском полярном множестве, а также в борелевском множестве, на котором u конечна. Поэтому мы можем считать, что e борелево и даже компактно, а u — потенциал меры μ . Рассмотрим множество $K_n = \{x \in e, u \leq n\}$ и соответствующую

ему меру Эванса ν с потенциалом v ; $\int v d\mu = \int u d\nu$ конечен, откуда $\mu(K_n) = 0$ и $\mu(e) = 0$.

γ) Нам потребуется существование конечного непрерывного потенциала $U > 0$, обладающего следующим свойством: для каждой точки $x_0 \in \Omega$ он допускает разложение $U = u_1 + u_2$, где u_1 — конечный непрерывный потенциал, а u_2 — конечная непрерывная функция ≥ 0 , для которой x_0 есть глобальная точка пика (см. гл. I, п. 1).

Покроем Ω счетным числом открытых множеств ω_i , таких, что $\bar{\omega}_i$ компактно, не содержит точек на бесконечности и содержится в некотором V_x , и открытых множеств ω^i , которые содержат точки на бесконечности. В каждом множестве ω_i рассмотрим конечный непрерывный потенциал V_i , порожденный мерой, равной нулю вне ω_i , а в ω_i являющейся прообразом меры Лебега на ω'_i (образе ω_i). Если $x_0 \in \omega_i$, то мы рассмотрим множество ω^i_i , образ которого есть шар с центром в x'_0 , и функцию V^*_i , полученную из V_i заменой ее на ω^i_i функцией, образ которой есть интеграл Пуассона для шара. Тогда функция $V_i - V^*_i$ равна нулю вне ω^i_i , а в ω^i_i является функцией, образ которой есть $G^{(\omega^i_i)}$ -потенциал лебеговой меры. Заметим, что для $V_i - V^*_i$ точка x_0 является глобальной точкой пика.

Рассмотрим теперь ω^i и содержащуюся в нем точку на бесконечности X^i . В случае $n > 2$ мы полагаем V^i равной функции Грина с полюсом в X^i , а при $n=2$ определяем на некотором множестве $\omega^i_1 \subset \omega^i$ меру так, чтобы ее G^Ω -потенциал был конечен и непрерывен, а $G^{\omega^i_1}$ -потенциал, продолженный нулем, был также непрерывен и имел точку пика в X^i (это можно сделать, переходя к образам и используя инверсию) и в качестве V^i берем G^Ω -потенциал этой меры. Наконец, мы рассматриваем $\sum \lambda_i V_i + \sum \lambda^i V^i$, где положительные числа λ_i ,

λ^i выбраны так, чтобы

$$\sum \lambda_i \sup V_i < +\infty, \quad \sum \lambda^i \sup V^i < +\infty.$$

Эта сумма и дает искомый потенциал U .

Полученный результат без труда обобщается на любое открытое подмножество в Ω .

д) Уточнение аппроксимационной леммы п. 6, б). Если функция f конечна, непрерывна и неотрицательна на Ω и равна нулю вне компактного множества $K \subset \Omega$, а $K_1 \subset \Omega$ — такое компактное множество, что $K \subset \overset{\circ}{K}_1 \subset K_1$, то существуют конечные непрерывные G^Ω -потенциалы v_1, v_2 , такие, что $v_1 - v_2 \geq 0$, $v_1 - v_2 = 0$ на $\overset{\circ}{K}_1$ и $|v_1 - v_2 - f| < \varepsilon$ на K .

Действительно, рассмотрим открытое множество Ω_1 и компакт K_2 , такие, что $\overset{\circ}{K}_1 \supset \bar{\Omega}_1 \supset \Omega_1 \supset K_2 \supset K_2^0 \supset K$, причем граничные точки $\Omega_1 \setminus K_2$ регулярны. Применяя лемму п. 6, б), получим G^{Ω_1} -потенциалы u_1, u_2 , такие, что $|u_1 - u_2 - f| < \varepsilon$ на K . Рассмотрим функцию $|u_1 - u_2|^+$, которая также является разностью двух аналогичных потенциалов u'_1, u'_2 , и заменим u'_1, u'_2 в $\Omega_1 \setminus K_2$ решениями задачи Дирихле с граничными значениями, равными нулю на $\partial\Omega_1$ и соответственно u'_1, u'_2 на ∂K_2 . Продолжив эти функции нулем, мы получим конечные непрерывные всюду функции субгармонические вне K_2 . Эти функции U_1, U_2 представляются в Ω локально, а следовательно, и глобально как разности конечных непрерывных G^Ω -потенциалов (мер, сосредоточенных на K_1) $w_1 - w'_1$ и $w_2 - w'_2$ (это представление справедливо с точностью до гармонических функций, которые в данном случае равны нулю). Легко видеть, что $w_1 + w'_2$ и $w_2 + w'_1$ и могут быть взяты в качестве v_1 и v_2 .

10. Приведенные функции и выметание¹⁾. Возьмем снова в качестве Ω пространство Грина, а в качестве

¹⁾ Выметание здесь и далее¹ строится для любого множества e по методу работы Брело [8] 1945 года (несколько усовершенствованному). Этот метод может быть обобщен и приспособлен к аксиоматическим теориям гармонических функций; при раз-

Φ — множество неотрицательных гипергармонических функций. Для любого множества $e \subset \Omega$ и любой функции $\varphi \geq 0$ выполнены следующие утверждения.

а) Функция \hat{R}_φ^e гипергармонична, а в случае когда она супергармонична, она гармонична вне \bar{e} . Если $\varphi > 0$, то условие $\hat{R}_\varphi^e = 0$ в одной точке или всюду, или условие $R_\varphi^e = 0$ где-нибудь, или же условие $\hat{R}_1^e < 1$ всюду — все эти условия эквивалентны тому, что множество e полярно, а также тому, что оно пренебрежимо.

б) $\hat{R}_\varphi(x) = \inf_{\omega \in \mathfrak{F}} \int R_\varphi d\rho_x^\omega$, где \mathfrak{F} — семейство открытых окрестностей точки x .

с) $\hat{R}_\varphi^e = R_\varphi^e$ на Se и квазивсюду на e .

д) \hat{R}_φ^e есть наименьшая гипергармоническая функция, которая ≥ 0 на Ω и $\geq \varphi$ квазивсюду на e (а потому не изменяется при изменении e на полярное множество). Заметим еще, что $\hat{R}_{\hat{R}_\varphi^e}^e = \hat{R}_\varphi^e$.

е) Если $\varphi_n \uparrow \varphi$, то $\hat{R}_{\varphi_n} \uparrow \hat{R}_\varphi$; если $e_n \uparrow e$, то $\hat{R}_{\varphi}^{e_n} \uparrow \hat{R}_{\varphi}^e$.

вернутом изложении он базируется на большой теореме сходимости. Совершенно иной метод был указан несколько позже Картаном [2] (в явной форме для \mathbb{R}^n , $n \geq 3$); он основан на использовании понятия энергии и теории гильбертовых пространств и положил начало обобщениям в иных направлениях. Что касается предшествующих работ Валле-Пуссеца, Фростмана и других по теории выметания в основном для случая компактных множеств, см. библиографию в Брело [14].

Упомянем еще о *выметании второго типа*, которое получается, если в д) (см. п. 10) заменить слова „квазивсюду на e “ словами „за исключением множества, все замкнутые подмножества которого полярны“. Соответствующие этому случаю рассуждения см. в статьях Брело [8] и Картан [2]. Они представляются нам не столь полезными и не будут здесь рассматриваться. Для функций R_W^e и \hat{R}_W^e , где W — неотрицательная супергармоническая функция, могут быть получены дальнейшие свойства и даны другие доказательства устанавливаемых здесь свойств (без использования задачи Дирихле и большой теоремы сходимости), которые сохраняют силу и в более общих аксиоматических теориях (см. Бобок, Константиnescу и Корни [2]).

f) Если функция φ непрерывна, но не обязательно конечна, то $\hat{R}_\varphi^e = \inf_{\omega} \hat{R}_\varphi^\omega$, где ω — открытое множество, содержащее e с точностью до полярного множества.

11. Свойства \hat{R}_v^e для неотрицательной супергармонической функции v . Выметание. Обозначения и терминология. Функция \hat{R}_v^e называется функцией, *выметенной* относительно v и e , и обозначается еще через \mathcal{B}_v^e . Если v есть G^Ω -потенциал меры μ , то \mathcal{B}_v^e также есть G^Ω -потенциал некоторой меры, которую мы будем обозначать через b_μ^e и называть *выметенной мерой*. Функция G_x^Ω является потенциалом меры Дирака ε_x , и значит, $\mathcal{B}_{G_x^\Omega}^e$ есть G^Ω -потенциал меры $b_{\varepsilon_x}^e$. Напомним некоторые

Свойства функции \mathcal{B}_v^e . а') Для всякого открытого множества ω имеем $\mathcal{B}_v^{C\omega} = H_{v_*}^\omega$ на ω , где функция v_* равна v на Ω и нулю в точке Александра пространства Ω .

б') Рассмотрим открытое множество $\omega \subset \Omega$ и граничную точку x_0 (не являющуюся точкой Александра A). Пусть σ — любая окрестность точки x_0 , а v — конечный непрерывный положительный потенциал. Регулярность точки x_0 для ω эквивалентна равенству $\mathcal{B}_v^{C\omega \cap \sigma}(x_0) = v(x_0)$ или условию $R_v^{C\omega \cap \sigma}(x) \rightarrow v(x_0)$, $x \in \omega$, $x \rightarrow x_0$, которое должно выполняться либо

а) для всех σ и v ,
либо

б) для одной компактной окрестности σ и всех v ,
либо

в) для одного потенциала v и всех σ .

В самом деле, в силу а') регулярность влечет за собой а); из аппроксимационной леммы следует, что б) влечет $H_\varphi^\omega \setminus \sigma \rightarrow \varphi(x_0)$ в точке x_0 для любой конечной непрерывной функции φ при условии, что эта функция равна нулю в A , а значит, и без этого последнего условия, но это и означает регулярность. Наконец, в) влечет а). Действительно, если это не так, то для некоторых σ и v' будем иметь $\mathcal{B}_{v'}^{C\omega \cap \sigma}(x_0) <$

$< v'(x_0)$. Выберем λ так, чтобы $\lambda v(x_0)$ было заключено строго между этими числами. Тогда в некоторой окрестности $\sigma_1 \subset \sigma$ будет $\lambda v < v'$ и

$$\mathcal{R}_{\lambda v}^{C \cap \sigma_1}(x_0) \leq \mathcal{R}_{v'}^{C \cap \sigma_1}(x_0) < \mathcal{R}_{v'}^{C \cap \sigma}(x_0) < \lambda v(x_0).$$

Следовательно, $\mathcal{R}_v^{C \cap \sigma_1}(x_0) < v(x_0)$, и получено противоречие.

b'') Для всякого компакта k и $x_0 \in \partial k$ имеем $k_v = R_v^{Ck}$ на k , и устойчивость точки x_0 эквивалентна условию

$$R_v^{Ck}(x_0) = v(x_0)$$

для всех конечных непрерывных потенциалов v .

c') Отображение $v \mapsto \mathcal{R}_v^e$ аддитивно.

Действительно, в силу a') это верно для замкнутых e ; согласно п. 10, e), это верно для открытых e ; для любых e и непрерывных v это следует из f); наконец, мы получаем тот же результат для любых v и e , беря последовательность непрерывных $v_n \uparrow v$ и используя e). Отсюда следует аддитивность отображения $\mu \mapsto b_\mu^e$.

$$d') \quad \mathcal{R}_{G_x^e}(y) = \mathcal{R}_{G_y^e}(x). \quad (7)$$

Ввиду e) и f) достаточно рассмотреть только случай, когда e замкнуто или даже компактно. Если x, y находятся в Se , то искомый результат вытекает из того факта, что для любого потенциала $u \geq 0$, конечного и непрерывного на de , наибольшая гармоническая миноранта на Se равна R_u^e . В таком случае $G_x^\Omega = G_x^{Ce} + R_{G_x^e}$ на Se , и остается воспользоваться симметрией функции Грина. Если x и y полярны (и находятся, быть может, в e), то мы сначала добавляем к Se открытые окрестности точек x и y , а затем стягиваем их к этим точкам. Если x или y или обе эти точки не полярны и по крайней мере одна из них находится в e , то мы используем свойства функций G_x (конечной и непрерывной, если точка x не полярна) и регулярностью любой неполярной граничной точки. Если точки x и y принадле-

жат e , причем x не полярна, а y полярна, то мы можем снова добавить к S_e окрестность точки y .

12. Свойства, относящиеся к выметенным мерам.

e') Для любой супергармонической функции $v \geq 0$ на Ω

$$\mathcal{R}_v^e(x) = \int v db_{e_x}^e. \quad (8)$$

Поэтому для потенциала u меры μ

$$\mathcal{R}_u^e = \int \mathcal{R}_{G_x}^e d\mu. \quad (9)$$

Прежде всего, если функция $\varphi \geq 0$ конечна, непрерывна, имеет компактный носитель и представляется в виде разности $V_1 - V_2$ непрерывных потенциалов, то мы рассматриваем функцию $\mathcal{R}_{V_1}^e(x) - \mathcal{R}_{V_2}^e(x)$, не зависящую от выбора указанного представления (см. с')) и линейную относительно φ . Согласно аппроксимационной лемме, существует единственная мера Радона $\mu_x \geq 0$ на Ω , не зависящая от φ , V_1 , V_2 и такая, что

$$\mathcal{R}_{V_1}^e(x) - \mathcal{R}_{V_2}^e(x) = \int (V_1 - V_2) d\mu_x.$$

Если v — конечный, непрерывный потенциал, то мы полагаем $V_1 = v$, $V_2 = \mathcal{R}_v^{Q_n}$ (где $\Omega_n \uparrow$, множества Ω_n имеют только регулярные граничные точки, $\bar{\Omega}_n \subset \Omega$ и $\bigcup \Omega_n = \Omega$), и так как V_2 стремится к нулю, то мы получаем $\mathcal{R}_v^e(x) = \int v d\mu_x$. Затем эта формула обобщается на случай любого потенциала и любой супергармонической неотрицательной функции (нужно использовать возрастающие последовательности подходящих функций).

Наконец, используя уже полученное, видим, что

$$\mathcal{R}_{G_x}^e(y) = \mathcal{R}_{G_y}^e(x) = \int G_y(z) d\mu_x(z),$$

откуда и следует, что $\mu_x = b_{e_x}^e$.

Применение 1 (к гармонической мере). Из общей формулы следует, что для относительно компактного открытого множества ω

$$H_f^\omega(x) = \int f db_{e_x}^{C^\omega}.$$

Это вытекает из равенства $H_v^\omega = \mathcal{B}_v^{C^\omega}$ для потенциалов и из аппроксимационной леммы.

Следовательно, мера $b_{e_x}^{C^\omega}$ совпадает с гармонической мерой в x для ω . Отсюда можно вывести, что для любого открытого ω мера $b_{e_x}^{C^\omega}$ есть сужение на $\partial\omega \cap \Omega$ гармонической меры в x_0 для ω^1).

Применение 2. Рассмотрим меры μ, ν , соответствующие им потенциалы u, v и для некоторого множества e выметенные меры μ', ν' и их потенциалы u', v' . Тогда

$$\int u d\nu' = \int v' d\mu = \int u' d\nu = \int v d\mu'. \quad (10)$$

Это следует из (7).

f') Мера b_μ^e есть интеграл семейства мер $b_{e_x}^e$ по мере μ , т. е. для любой конечной непрерывной функции ϕ с компактным носителем интеграл $\int \phi db_{e_x}^e$ является $d\mu$ -суммируемым и

$$\int \phi db_\mu^e = \int \left(\int \phi db_{e_x}^e \right) d\mu(x). \quad (11)$$

Более общо, мы покажем, что если функция ψ db_μ^e -суммируема, то интеграл $\int \psi db_{e_x}^e$ имеет смысл $d\mu$ -почти всюду и

$$\int \psi db_\mu^e = \int \left(\int \psi(y) db_{e_x}^e(y) \right) d\mu(x). \quad (12)$$

¹⁾ Исторически интегральное представление H_f^ω в \mathbb{R}^3 было получено (Валле-Пуссен [1]) при помощи меры, соответствующей другой процедуре выметания.

Отсюда следует, что для любого борелевского множества α

$$b_{\mu}^e(\alpha) = \int b_{e_x}^e(\alpha) d\mu(x). \quad (13)$$

При доказательстве достаточно рассмотреть случай $\varphi, \psi \geq 0$. Когда ψ является потенциалом, результат верен. Далее, согласно аппроксимационной лемме (п. 9, δ)), существует последовательность функций $\theta_n \geq 0$ с компактными носителями, которая равномерно сходится к φ , причем θ_n является разностью двух конечных непрерывных потенциалов с компактным носителем и мажорируется некоторой константой, а также функцией λG_{x_0} , суммируемой по мерам $d\mu$ и db_{μ}^e . Поэтому

$$\int \theta_n db_{\mu}^e \rightarrow \int \varphi db_{\mu}^e.$$

В силу (10) левая часть есть интеграл по мере $d\mu$ от функции $\int \theta_n db_{e_x}^e$, который мажорируется

$$\int \lambda G_x db_{e_x}^e \leq \lambda G_{x_0} \text{ и стремится к } \int \varphi db_{e_x}^e.$$

Отсюда следует формула (11). В случае общей функции ψ введем последовательность $\psi_n \downarrow$ полунепрерывных снизу функций $\geq \psi$, а также последовательность $\psi'_n \uparrow$ полунепрерывных сверху функций ≥ 0 и $\leq \psi$ так, чтобы интегралы $\int \psi_n db_{\mu}^e$ и $\int \psi'_n db_{\mu}^e$ стремились к $\int \psi db_{\mu}^e$. Тогда

$$\int \psi db_{\mu}^e = \int \left(\int \lim \psi_n db_{e_x}^e \right) d\mu = \int \left(\int \lim \psi'_n db_{e_x}^e \right) d\mu,$$

так что $\overline{\int \psi db_{e_x}^e}$ и $\underline{\int \psi db_{e_x}^e}$ равны $d\mu$ -почти всюду, и мы получаем (12).

Замечание. Для потенциала u меры μ имеем $\mathcal{B}_u^e \leq u$, откуда $b_{\mu}^e(\Omega) \leq \mu(\Omega)$ (см. конец п. 8). Отметим, что это — следствие случая $\mu = e_x$ (соответствующее свойство получается из формулы (8)) при $v = 1$.

Глава VII

КЛАССИЧЕСКАЯ ТОНКАЯ ТОПОЛОГИЯ.
ОБЩИЕ СВОЙСТВА

1. Будем исходить из пространства Грина Ω и конуса Φ неотрицательных гипергармонических функций. Отметим прежде всего, что топология \mathcal{T}_1 на Ω совпадает с \mathcal{T}_0 , т. е. со слабой топологией, в которой функции из Φ полунепрерывны снизу. Это вытекает, например, из того факта, что любая точка $x_0 \in \Omega$ является глобальным пиком для G_{x_0} (см. гл. I, п. 1, и гл. VI, п. 5). Напомним, что классы полярных, строго полярных и пренебрежимых множеств совпадают и что такие множества разрежены в каждой точке.

Теорема VII.1. Разреженность множества e в точке $x_0 \notin e$ эквивалентна существованию такой супергармонической функции v в открытой окрестности ω_0 точки x_0 , что

$$v(x_0) < \liminf_{x \in e, x \rightarrow x_0} v(x).$$

Отсюда следует локальный характер разреженности.

Нужно лишь убедиться, что указанное условие влечет за собой разреженность относительно Ω и Φ . Мера, ассоциированная с v в окрестности точки x_0 , имеет G -потенциал, удовлетворяющий тому же самому неравенству. Возможно также не пользоваться этой мерой, а построить неотрицательную супергармоническую функцию в Ω , которая вблизи x_0 с точностью до гармонической функции совпадает с v (см. аксиоматические теории).

Тонкая топология в \mathcal{S} -пространстве. Если в качестве определения разреженности принять свойство, указанное в предыдущей теореме, то дополнения к разреженным множествам будут удовлетворять аксиомам для окрестностей (как в любом гриновом подпространстве) и определяют так называемую *тонкую топологию* данного пространства; она индуцирует

в каждом подпространстве Грина его собственную тонкую топологию.

Замечание. Всякое множество e , разреженное в точке $x_0 \notin e$, содержится в открытом множестве $\delta \not\ni x_0$, также разреженном в x_0 .

2. Вернемся к пространству Грина Ω и дадим применение результатов гл. I—V. Мы разовьем и дополним некоторые разделы классической теории потенциала, следуя Брело [8]¹⁾.

Теорема VII.2. Разреженность (множества e в $x_0 \notin e$) всегда строга (и эквивалентна сверхразреженности, см. гл. I, п. 4, и гл. II, п. 3).

Доказательство. Если u — супергармоническая функция ≥ 0 , конечная в x_0 , то

$$u(x) = \int_{V \setminus \{x_0\}} G(x, y) d\mu(y) + \int_{CV} G(x, y) d\mu(y) + \mu(\{x_0\}) G_{x_0} + h(x),$$

где h — гармоническая функция, V — некоторая окрестность точки x_0 , а μ — мера, ассоциированная с u . Второй интеграл и последующие члены конечны и непрерывны в x_0 ($\mu(\{x_0\})$ есть нуль, если множество $\{x_0\}$ полярно). Первый интеграл произвольно мал при подходящем выборе V . Теперь доказательство завершается применением теоремы II.8.

Упражнение. Доказать непосредственно, что разреженность влечет за собой сверхразреженность.

Теорема VII.3. Неразреженность (множества e в $x_0 \notin e$) всегда строгая.

Доказательство. Согласно замечанию, сделанному перед теоремой II.12, нам нужно показать, что $\sup_{\delta} R_1^e \setminus^{\delta}(x_0) = R_1^e(x_0)$ ($x_0 \notin e$), где δ — произвольная окрестность точки x_0 . Достаточно рассмотреть убывающую последовательность δ_n ($\bigcap \delta_n = \{x_0\}$).

¹⁾ См. также Картан [1, 2].

Используя результаты гл. VI, п. 10, получаем

$$R_1^e \setminus \delta_n(x_0) = \widehat{R}_1^e \setminus \delta_n(x_0),$$

$$\widehat{R}_1^e \setminus \delta_n \uparrow \widehat{R}_1^e, \quad \widehat{R}_1^e(x_0) = R_1^e(x_0) \text{ (согласно с) и е);}$$

это дает нужное нам свойство.

Таким образом, применимы теоремы III.1, 2, 3 о тонких пределах.

Теорема VII.4. *В пространстве Ω нет сингулярных точек (т. е. $\Omega \setminus \{x\}$ всегда неразрезано в точке x). Разреженность e в x_0 эквивалентна тому, что $e \setminus \{x_0\}$ разрезано и $\{x_0\} \cap e$ полярно, а также эквивалентна слабой разреженности. Необходимым и достаточным условием разреженности e в x_0 является выполнение соотношения $\inf \widehat{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$ (или $= 0$, что равносильно), где σ — произвольная окрестность точки x_0 . Таким образом,*

полуполярность \Leftrightarrow полярность \Leftrightarrow пренебрежимость.

Доказательство. Полунепрерывность снизу и неравенство со средним для супергармонических функций показывают, что $\Omega \setminus \{x_0\}$ неразрезано. Дальнейшие свойства являются следствиями результатов гл. V, п. 4.

Заметим, что полярные множества разрежены в любой точке (и не содержат неполярных точек). Разреженность множества e в x_0 сохраняется при выбрасывании из e или добавлении к e полярного множества.

Теорема VII.5. *Пусть σ — окрестность точки x_0 , а v — конечный непрерывный потенциал > 0 на Ω . Неразрезанность множества e в x_0 эквивалентна тому, что равенство*

$$\widehat{R}_\sigma^{e \cap \sigma}(x_0) = v(x_0),$$

выполняется в одной из следующих ситуаций:

- а) для всех σ и v ,
- б) для всех v и для какой-нибудь одной σ ,
- в) для всех σ и для какого-нибудь одного v .

Доказательство. Если $x_0 \notin e$, то $\widehat{R}_\sigma^{e \cap \sigma}(x_0) = R_\sigma^{e \cap \sigma}(x_0)$. Из предложений II. 4 и II. 5 вытекает эквивалентность неразреженности условию γ), а также необходимость условий α) и β). Далее, пусть выполнено β). Из разреженности $e \cap \sigma$ следовало бы, что для потенциала U (гл. VI, п. 9, γ)), согласно предложению II. 6, $R_U^{e \cap \sigma}(x_0) < U(x_0)$. Значит, $e \cap \sigma$ и e неразрезаны. Пусть $x_0 \in e$. Если точка x_0 не полярна, то имеют место неразреженность и одновременно α), если же x_0 полярна, то наше утверждение эквивалентно аналогичному утверждению для $e \setminus \{x_0\}$.

3. Теорема VII. 6. *Существует конечный непрерывный потенциал $U > 0$, такой, что для любого множества e множество тех точек, где оно разрежено, совпадает с множеством $\{x, \widehat{R}_U^e(x) < U(x)\}$.*

Доказательство. Достаточно взять тот же самый потенциал U (гл. VI, п. 9). Предыдущая теорема показывает, что указанное неравенство влечет за собой разреженность, а как мы только что напоминали, из разреженности следует неравенство.

Теорема VII. 7 (Брело [5, 6]). *Множество тех точек из e , где e разрежено, есть полярное множество.*

Доказательство. Очевидно, что $R_U^e = U$ на e , а теорема сходимости показывает, что $\widehat{R}_U^e = R_U^e$ квазиговсюду.

Следствие. Полярное множество e можно охарактеризовать, как множество, разреженное в любой точке, или как множество, разреженное в любой точке из e , или, наконец, как множество, образованное полярными тонко изолированными точками.

Упражнение. Доказать теорему VII. 7 без привлечения U , используя счетный базис открытых множеств и критерий из теоремы VII. 4.

База множества (множество тех точек, где e неразрезано, см. определение V. 9). Это множество

состоит из тонких предельных точек¹⁾ множества e и из неполярных точек множества e . Тонкое замыкание \tilde{e} есть объединение базы B_e и (полярного) множества тех точек из e , где e разрежено, т. е. полярных тонко изолированных точек множества e (см. предложение V. 10).

Напомним, что функция \hat{R}_Φ^e ($\Phi \in \Phi$) не изменяется при замене e на \tilde{e} или на множество e' , отличающееся от e лишь на полярное множество. Теорема VII. 6 позволяет получить дальнейшие результаты подобного типа. Пусть, например, тонко замкнутое множество α содержит e с точностью до полярного множества. Положим $e' = e \cap \alpha$ и допустим, что $\alpha \supset e'$. Тогда $\alpha \supset \tilde{e}' \supset B_{\tilde{e}'} = B_{e'} = B_e$.

Выделим следующее

Предложение VII. 8. База B_e — это наименьшее тонко замкнутое множество, содержащее e с точностью до полярного множества. Далее, $B_{\tilde{e}} = B_{B_e} = B_e \subset \tilde{e}$ и B_e есть множество класса G_δ ; очевидно, $B_e \subset \tilde{e}$ (где \tilde{e} — замыкание множества e в исходной топологии).

Предложение VII. 9. Всякое B_e можно охарактеризовать как множество E , неразрезанное в каждой точке из E и разреженное в каждой точке из SE .

Такие множества также будем называть *базами*.

Заметим, что \tilde{e} и B_e имеют одну и ту же тонкую внутренность.

Представляет интерес также понятие *ядра* K_e множества e , которое определяется как SB_{Se} . Это — наибольшее тонко открытое множество, содержащееся в e с точностью до полярного множества (оно совпадает с объединением тонкой внутренней множества e и полярного множества тех точек из Se , в которых Se разрежено).

Напоминание: (тонкая внутренность множества e) $\subset \subset K_e \subset$ (тонкая внутренность множества B_e или \tilde{e});

¹⁾ Тонкая предельная точка множества e — это точка, каждая тонкая окрестность которой содержит точку из e , отличную от нее самой.

(тонкая граница множества $B_e \subset$ (тонкая граница множества e).

4. Основные применения. Лемма VII.10. Пусть $\{e_i\}$ — семейство тонко замкнутых множеств. Тогда существует счетное подсемейство $\{e_{i_n}\}$, такое, что $B_{\cap e_{i_n}} = B_{\cap e_i}$.

Доказательство. В самом деле, воспользовавшись функцией U из теоремы VII.6, получим для любого e

$$B_e = \{x, \mathcal{B}_U^e = U\}.$$

Применяя топологическую лемму Шоке (см. Брело [25], гл. 1), видим, что для некоторого счетного подсемейства $\{e_{i_n}\}$

$$\mathcal{B}_U^{\cap e_{i_n}} \leq \mathcal{B}_U^{e_{i_n}}, \quad \forall n.$$

Далее, имеем

$$\mathcal{B}_U^{\cap e_{i_n}} \leq \inf \mathcal{B}_U^{e_{i_n}}; \quad \mathcal{B}_U^{\cap e_{i_n}} \leq \widehat{\inf \mathcal{B}_U^{e_{i_n}}} = \inf \mathcal{B}_U^{e_i},$$

откуда $\mathcal{B}_U^{\cap e_{i_n}} \leq \mathcal{B}_U^{e_i}$, $\forall i$. Поэтому $B_{\cap e_{i_n}} \subset B_{e_i} \subset e_i$ (последнее множество тонко замкнуто) и, значит, $B_{\cap e_{i_n}} \subset \cap e_i$. Беря базу от обеих частей, получим $B_{\cap e_{i_n}} \subset B_{\cap e_i}$, откуда и следует идентичность обоих множеств.

Предложение VII.10. Пересечение (соотв. объединение) тонко замкнутых (соотв. тонко открытых) множеств с точностью до полярного множества совпадает с пересечением (объединением) некоторого счетного подсемейства данных множеств.

Это — частный случай общих результатов Дуба [8].

Предложение VII.11. Для любого семейства тонко полунепрерывных сверху функций u_i существует счетное подсемейство u_{i_n} , такое, что $\inf u_{i_n} = \inf u_i$ квазивсюду.

Доказательство. Для любого рационального r выберем последовательность u_{i_p} так, чтобы

$$\{\inf_p u_{i_p} \geq r\} = \{\inf_i u_i \geq r\}$$

с точностью до полярного множества. Объединение всех функций этих последовательностей для различных r дает семейство u_{i_n} , удовлетворяющее написанному равенству для всех рациональных r вне некоторого полярного множества α . Для любой точки x , в которой $\inf_i u_i < \inf_n u_{i_n}$, рассмотрим рациональное r , заключенное строго между этими числами, и найдем, что $x \in \alpha$.

Теорема VII.12 (Гетур¹⁾). *Если мера μ не нагружает полярных множеств (т. е. внешняя мера любого такого множества есть нуль), то существует наименьший тонко замкнутый носитель E меры μ , являющийся базой.*

Доказательство. Всякое тонко замкнутое множество есть сумма базы и полярного множества и потому μ -измеримо. Пусть $\{e_i\}$ — множество тонко замкнутых носителей. Для некоторого счетного подсемейства $\{e_{i_n}\}$ имеем $V_{\cap e_i} = V_{\cap e_{i_n}}$. Так как $C(\cap e_{i_n}) = \cup C e_{i_n}$, то $\cap e_{i_n}$ есть тонко замкнутый носитель. Но $V_{\cap e_{i_n}}$ отличается от $\cap e_{i_n}$ только на полярное множество и поэтому тоже есть тонко замкнутый носитель. Далее, любой тонко замкнутый носитель e_i содержит $\cap e_i$ (тонко замкнутое), а значит $V_{\cap e_i}$ или $V_{\cap e_{i_n}}$. Таким образом, $V_{\cap e_i}$ есть наименьший тонко замкнутый носитель меры μ .

Применение к задаче Дирихле. Теорема VII.13. *Для открытого множества ω (соотв. для компактного множества K) (в пространстве Грина Ω) точка x_0 из $\partial\omega \cap \Omega$ (соотв. из ∂K) будет иррегулярной*

¹⁾ См. Гетур и Шоке [7], Дуб [8], Брело [30].

(соотв. неустойчивой) в том и только в том случае, когда $S\omega$ (соотв. CK) разрежено в x_0^1).

Доказательство. Регулярность и неразреженность множества $S\omega$ эквивалентны условию $\hat{R}_\sigma^{C\omega \cap \sigma}(x_0) = v(x_0)$ для какого-нибудь одного σ и для любого конечного непрерывного потенциала v (гл. VI, п. 11, б'), и теорема VII.5). Устойчивость и неразреженность множества CK эквивалентны условию $R_v^{CK}(x_0) = v(x_0)$ для любого v (гл. VI, п. 11, б'', и теорема VII.5).

Далее мы получим другие критерии тождественности регулярности и неразреженности (гл. IX).

Глава VIII

ПРИМЕНЕНИЯ К ВЫМЕТАНИЮ, ВЕСАМ И ЕМКОСТЯМ

1. Мы по-прежнему рассматриваем пространство Грина. Обратимся снова к классической теории и прежде всего дополним теорию выметания, следуя в основном Брело [8].

Заметим, что для неотрицательной супергармонической функции u функция \mathcal{R}_u^e равна u на B_e и не изменяется при замене e на \tilde{e} или на B_e . Напомним еще, что $\mathcal{R}_{\mathcal{R}_u^e}^e = \mathcal{R}_u^e$.

Лемма VIII.1. Пусть мера $\mu \geq 0$ сосредоточена на B_e (т. е. $\mu(SB_e) = 0$). Тогда $b_\mu^e = \mu$.

Доказательство. Из равенства $u(x) = \int G(x, y) d\mu(y)$ получаем (см. гл. VI, п. 12) $\mathcal{R}_u^e(x) = \int \mathcal{R}_{G_x}^e(y) d\mu(y)$. Но $\mathcal{R}_{G_x}^e = G_x$ на B_e и поэтому $\mathcal{R}_u^e = u$.

¹⁾ Этим общим критерием иррегулярности и неустойчивости и подсказано введение понятия разреженности (см. Брело [4]).

Лемма VIII.2. Для любой меры $\mu \geq 0$ имеет место равенство $b_\mu^e(CB_e) = 0$.

Доказательство. Это — следствие интегрируемости мер для частного случая меры Дирака (см. гл. VI, п. 12 f')). Рассмотрим такую меру ν_x и воспользуемся снова потенциалом U из теоремы VII.6. Получим $\mathcal{R}_U^e(x) = \int U db_{\nu_x}^e$ и после итерации $\mathcal{R}_U^e(x) = \int \mathcal{R}_U^e db_{\nu_x}^e$. Следовательно, множество, где $U > \mathcal{R}_U^e$, совпадающее с CB_e , имеет $b_{\nu_x}^e$ -меру нуль.

Ключевая теорема VIII.3 (Брело [8]). Если u — потенциал, то мера, соответствующая \mathcal{R}_u^e , — это единственная мера $\nu \geq 0$, удовлетворяющая следующим условиям:

- $\nu(CB_e) = 0$ (т. е. B_e — носитель меры ν),
- потенциал меры ν равен u на B_e (или, что эквивалентно, квазिवсюду на e).

Доказательство. Для меры b_μ^e , имеющей потенциал \mathcal{R}_u^e , эти свойства уже установлены (см. лемму VIII.2). Возьмем теперь любую меру ν с потенциалом v , равным u квазिवсюду на e и, следовательно, равным u на B_e ; согласно лемме VIII.1, $v = \mathcal{R}_\nu^e$. Следовательно, $v(x) = \int v db_{\nu_x}^e = \int u db_{\nu_x}^e$ (лемма VIII.2), т. е. $v = \mathcal{R}_u^e$.

Первые важные следствия. Докажем следующие три теоремы.

Теорема VIII.4 (принцип доминирования в сильной форме¹⁾). Пусть u — потенциал меры μ , а v — неотрицательная супергармоническая функция, которая $\geq u$ квазिवсюду на множестве E , причем мера μ сосредоточена на B_E (т. е. $\mu(CB_E) = 0$). Тогда $v \geq u$ всюду.

Доказательство. Из леммы VIII.1 следует, что $\mathcal{R}_\mu^E = u$. Но $v \geq \mathcal{R}_\mu^E$, так что $v \geq u$.

¹⁾ Более сильной, чем аналогичный принцип у Картана [2].

Теорема VIII.5. Пусть E — множество иррегулярных граничных точек открытого множества ω . Если мера μ не нагружает E и имеет потенциал u , то функция $\mathcal{R}_u^{C\omega}$ в ω является наибольшей гармонической минорантой u^1).

Доказательство. Если через v^* обозначить наибольшую гармоническую миноранту в ω функции v (супергармонической и неотрицательной), то, как мы знаем, $(v_1 + v_2)^* = v_1^* + v_2^*$ (гл. VI, п. 6, γ). Поэтому мы рассмотрим сужения μ_1, μ_2 меры μ на ω и на $C\omega$ с потенциалами u_1, u_2 . Мы знаем, что на ω равенство $\mathcal{R}_{u_2}^{C\omega} = u_2$ (это гармоническая функция в ω) имеет место в том и только в том случае, когда мера μ_2 нагружает только базу множества $C\omega$, т. е. не нагружает E . Поэтому достаточно будет показать, что $\mathcal{R}_{u_1}^{C\omega} = u_1^*$. Воспользуемся возрастающей последовательностью открытых множеств $\{\omega_n\}$, такой, что $\bar{\omega}_n \subset \omega$ и $\bigcup \omega_n = \omega$. Пусть v_n и w_n — потенциалы сужений меры μ на ω_n и на $\omega \setminus \omega_n$. На ω имеем $u_1^* = v_n^* + w_n^*$, $w_n^* \leq w_n \rightarrow 0$. Далее, $v_n^* = \mathcal{R}_{v_n}^{C\omega}$. Это легко проверить, если ω относительно компактно. В общем случае введем возрастающую последовательность $\Omega_p, \bar{\Omega}_p \subset \Omega, \bigcup \Omega_p = \Omega$, и положим φ_n равным v_n на $\partial\omega \cap \Omega$ и нулю в других точках. Используя сходимости и возрастание гармонических мер на $\partial\omega \cap \Omega$, можно убедиться в том, что $H_{v_n}^{\Omega_p \cap \omega}$ стремится к v_n^* на ω , а $H_{\varphi_n}^{\Omega_p \cap \omega}$ стремится к $H_{v_n}^{\omega}$ при $p \rightarrow \infty$. Но $\left| H_{v_n}^{\Omega_p \cap \omega} - H_{\varphi_n}^{\Omega_p \cap \omega} \right| \leq H_{v_n}^{\Omega_p} \rightarrow 0$ (при $p \rightarrow \infty$),

¹⁾ В общем случае разность между функцией $\mathcal{R}_u^{C\omega}$ (называемой наилучшей гармонической минорантой) и наибольшей гармонической минорантой равна $\int G_x(y) d\mu(y)$, где функция G_x ($x \in \omega$) продолжена на $\partial\omega$ таким образом, чтобы при продолжении нулем на $C\omega$ получилась субгармоническая функция в $\Omega \setminus \{x\}$ (такое продолжение единственно). Для ограниченных ω в \mathbb{R}^n это результат Брело, полученный способом, принадлежащим Фростману; см. ссылки у Брело [25].

и мы получаем желаемое равенство. Наконец, $\mathcal{R}_{v_n}^{C\omega} \rightarrow \mathcal{R}_{u_1}^{C\omega}$ и, следовательно, $u_1^* = \mathcal{R}_{u_1}^{C\omega}$.

З а м е ч а н и е. В частности, мы можем предположить, что функция u локально ограничена. Отсюда будет следовать, что μ не нагружает полярных множеств и, значит, не нагружает множества иррегулярных точек границы ω .

Теорема VIII.6. *Для всякого открытого множества ω в Ω множество тех его граничных точек, в которых ω разрежено, имеет гармоническую меру нуль¹⁾.*

Эта теорема содержится в работах Валле-Пуссена.

Доказательство. Рассмотрим потенциал \bar{U} из теоремы VII.6 и потенциал $U' = \mathcal{R}_{\bar{U}}^{C\omega} \leq U$. Мы видим, что $\mathcal{R}_U^{C\omega}$ и $\mathcal{R}_{U'}^{C\omega}$ являются наибольшими гармоническими минорантами в ω для U и U' соответственно, и следовательно, они равны, ибо $U = U'$ на ω . Отсюда $H_{U^*}^{\omega} = H_{U'^*}^{\omega}$ и $U = U'$ на $d\omega \cap \Omega$ почти всюду по гармонической мере.

2. Дальнейшие свойства функции b_{μ}^e . **Лемма VIII.7.** *Если супергармоническая функция u не превосходит конечного числа λ , то (тонко замкнутое) множество тех точек, в которых $u = \lambda$, имеет тонкую внутренность μ -меры нуль, где μ — мера, ассоциированная с u .*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для пересечения нашего множества с открытым относительно компактным множеством ω_1 и далее для функции u_1 , положительной в $\omega_2 \supset \bar{\omega}_1$, где ω_2 относительно компактно, регулярно и связно. Заметим, что $u_1 = (R_{u_1}^{\omega_1})_{\omega_1}$ на ω_1 . Таким образом, мы приходим к случаю, когда u есть потенциал, стремящийся

¹⁾ Так как $b_{e_x}^{C\omega}$ есть гармоническая мера ω в x (гл. VI, п. 10), то этот результат содержится в приводимой далее теореме VIII.8 (однако он используется при ее доказательстве, точнее, при доказательстве леммы VIII.7).

к нулю в точке Александрова, и достаточно показать, что множество e , где $u = \lambda = \sup_{\Omega} u$ имеет тонкую внутренность μ -меры нуль. Но открытое множество α , где $u > \lambda - \varepsilon$, относительно компактно в Ω , и $u = \lambda - \varepsilon$ на $\partial\alpha$, за возможным исключением множества точек, где α разрежено. Так как это множество имеет гармоническую меру нуль в α , то отсюда следует, что $H_u^\alpha = \widehat{R}_u^{C\alpha}$ равно $\lambda - \varepsilon$ в α . Следовательно, $\widehat{R}_u^{C_e} = \lambda$ на e и $\widehat{R}_u^{C_e} = u$ квазिवсюду и, значит, всюду. Поскольку u совпадает с выметенной функцией $\mathcal{R}_u^{C_e}$, то мера μ сосредоточена на B_{C_e} и ядро или тонкая внутренность e имеют нулевую μ -меру.

Теорема VIII.8. Пусть мера μ , соответствующая некоторому потенциалу, такова, что $\mu(B_e) = 0$. Если множество α полярно и $\subset B_e$ или если α — тонкая внутренность множества B_e , то α имеет нулевую внешнюю b_μ^e -меру.

Доказательство. В первом случае (когда α полярно) мы можем, расширив множество α , считать его борелевским. Достаточно рассмотреть случай, когда α компактно, а $\mu = \varepsilon_x$, $x \notin B_e$. Тогда функция G_x будет ограниченной на α , то же справедливо для $\mathcal{R}_{G_x}^e$, и поэтому соответствующая мера будет на α равна нулю (см. гл. VI, п. 9, β)).

Во втором случае мы снова рассматриваем ε_x ($x \notin B_e$) и применяем предыдущую лемму к пространству $\Omega \setminus \{x\}$ и супергармонической функции $\mathcal{R}_{G_x}^e(y) = G_x(y)$. Эта функция равна нулю на B_e ; следовательно, у B_e тонкая внутренность имеет нулевую $b_{\varepsilon_x}^e$ -меру.

3. Приложения. Теорема VIII.9. Если u — отрицательная супергармоническая функция, то функция \mathcal{R}_u^e (которая равна u на B_e) зависит на CB_e только от значений u на тонкой границе множества B_e . Следовательно, \mathcal{R}_u^e на тонком замыкании множества C_e определяется лишь значениями u на тонкой границе множества e .

Доказательство. Будем исходить из формулы $\mathcal{B}_u^e(x) = \int u(y) db_{e_x}^e(y)$. Первое утверждение очевидно.

Пусть $x \in \tilde{C}e$. Если $x \in B_e$, то $\mathcal{B}_u^e(x) = \dot{u}(x)$ и $x \in \tilde{e}$ и, следовательно, x есть тонкая граничная точка для e . Если же $x \notin B_e$, то доказываемое утверждение следует из того, что тонкая граница B_e содержится в тонкой границе e .

Следствие. Рассмотрим две неотрицательные супергармонические функции u_1, u_2 и множество $A = \{x \mid u_1 = u_2\}$. Тогда $\mathcal{B}_{u_1}^{CA} + u_2 = \mathcal{B}_{u_2}^{CA} + u_1$ и на ядре или на тонкой внутренности множества A меры, соответствующие u_1 и u_2 , совпадают.

Действительно, так как $u_1 = u_2$ на (тонко замкнутом) множестве A , то это справедливо на тонкой границе множества A или, что то же, множества CA , и поэтому на A $\mathcal{B}_{u_1}^{CA} = \mathcal{B}_{u_2}^{CA}$. С другой стороны, $\mathcal{B}_{u_1}^{CA} = u_1$ квазिवсюду на A , и то же верно для u_2 . Поэтому мы получаем требуемое равенство квазिवсюду, а значит, всюду.

Если u_1, u_2 — потенциалы, то множества CB_{CA} и K_{CA} имеют меру нуль для мер, отвечающих $\mathcal{B}_{u_1}^{CA}$ и $\mathcal{B}_{u_2}^{CA}$, и поэтому равенство, которое мы выше доказали, дает искомый результат для мер. В общем случае мы вводим открытое множество $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ и потенциалы $\mathcal{B}_{u_1}^\omega = u_1', \mathcal{B}_{u_2}^\omega = u_2'$ (равные u_1, u_2 на ω). На тонкой внутренности множества $\omega \cap A$ соответствующие меры тождественны. Отсюда — искомый результат для u_1, u_2 .

Частично это следствие содержится в следующем результате (представляющем собой уточнение теоремы Валле-Пуссена, см. Брело [13]).

Теорема VIII. 10. Для тех же функций $u_1, u_2 \geq 0$ и множества A , что и в предыдущем следствии, введем множество A_0 , на котором u_1, u_2 конечны и в точках которого тонко открытое множество $\alpha = \{x \mid u_1 < u_2\}$ разрежено. Тогда на A_0 мера μ_2 , ассоциированная с u_2 , мажорирует меру μ_1 , ассоциированную с u_1 .

Доказательство. Как и выше, можно свести доказательство к случаю потенциалов u_1, u_2 . Рассмотрим функции $\mathcal{B}_{u_1}^{\mathcal{C}\alpha}, \mathcal{B}_{u_2}^{\mathcal{C}\alpha}$, которым соответствуют меры, равные μ_1, μ_2 на множестве A_0 (содержащемся в тонкой внутренности множества $B_{\mathcal{C}\alpha}$). Но $\mathcal{B}_{u_1}^{\mathcal{C}\alpha}$ и $\mathcal{B}_{u_2}^{\mathcal{C}\alpha}$ равны на α , так как они равны на тонкой границе α , и мы возвращаемся к случаю, когда $u_1 \geq u_2$ всюду.

При этих предположениях рассмотрим компактное множество $K \subset A_0$ и открытое множество $\omega \supset K$, такие, что $\mu_1(\omega \setminus K) < \varepsilon$ и $\mu_2(\omega \setminus K) < \varepsilon$. Пусть h — наибольшая гармоническая миноранта для u_2 в ω ; рассмотрим $u'_1 = u_1 - h$ и потенциал $u'_2 = u_2 - h$. Выметенная функция $(\mathcal{B}_{u'_2}^K)_\omega$, определенная обычным образом в компонентах множества ω , имеет ассоциированную меру, равную μ_2 на K с точностью до меры общей массы $< \varepsilon$ (отметим, что полярное множество точек разреженности K имеет нулевые μ_1 - и μ_2 -меры). Разложив u'_1 на ω в сумму потенциала u''_1 и гармонической функции $\varphi \geq 0$, получим $(\mathcal{B}_{u'_2}^K)_\omega = (\mathcal{B}_{u'_1}^K)_\omega = (\mathcal{B}_{u''_1}^K)_\omega + (\mathcal{B}_\varphi^K)_\omega$. Следовательно, соответствующая мера на K мажорируется мерой μ_1 с точностью до меры общей массы $< \varepsilon$, и, таким образом, $\mu_2(K) \geq \mu_1(K)$.

Свойства функции \mathcal{B}_u^e для гармонических u . В силу аддитивности при изучении свойств функции \mathcal{B}_u^e достаточно рассмотреть случай, когда u — гармоническая функция.

Теорема VIII. 11. *Если u — неотрицательная гармоническая функция, то мера, соответствующая \mathcal{B}_u^e , сосредоточена на тонкой границе множества B_e (u , следовательно, множества e).*

Доказательство. Прежде всего, в соответствии с последним следствием (или теоремой 10) функции u и \mathcal{B}_u^e , равные между собой на B_e , имеют одинаковые ассоциированные меры на тонкой внутренности B_e . Если представить \mathcal{B}_u^e в виде суммы потенциала v и гармонической функции h , то после выметания

получим $\mathcal{R}_u^e = \mathcal{R}_v^e + \mathcal{R}_h^e$. Поэтому $v = \mathcal{R}_v^e$ (и $h = \mathcal{R}_h^e$). Но мера, соответствующая v , сосредоточена на B_e , и это дает желаемый результат.

З а м е ч а н и е. Мы уже упоминали (гл. VI, п. 10, подстрочное примечание на стр. 63 и 64) о теории выматания Картана [2]. Используемое в этой работе понятие тонкой сходимости неотрицательных мер (с потенциалами $\neq +\infty$), примененное к мерам Дирака ε_x , порождает, в силу соответствия $\varepsilon_x \leftrightarrow x$, понятие сходимости в \mathbb{R}^n , совпадающее с нашей тонкой сходимостью.

4. Примеры весов и емкостей. Свойство Шоке. Напомним, что в теории Шоке (см. Шоке [1, 5], Брело [20]) *общей емкостью* (в книге Брел [20] используется название „истинная емкость“) называется вещественная (конечная или нет) функция множества $\mathcal{V}(e)$, определенная на всех подмножествах e отделимого пространства и удовлетворяющая следующим условиям: i) $\mathcal{V}(e)$ — возрастающая функция; ii) $\mathcal{V}(e_n) \rightarrow \mathcal{V}(\bigcup e_n)$ для всякой возрастающей последовательности множеств e_n ; iii) $\mathcal{V}(e_n) \rightarrow \mathcal{V}(\bigcap e_n)$ для всякой убывающей последовательности компактных множеств e_n . Множество e называется C -измеримым, если $\mathcal{V}(e) = \sup \mathcal{V}(K)$, где K — компакт, $K \subset e$. Шоке доказал C -измеримость всех так называемых K -аналитических множеств (и, в частности, что важно для нас, всех борелевских множеств), содержащихся в множестве типа G_δ .

Пример общей емкости можно получить, отправляясь от конечной вещественной функции $\mathcal{V}(K) \geq 0$ (K — компакт), удовлетворяющей условиям: а) $\mathcal{V}(K)$ — возрастающая функция; б) $\mathcal{V}(K)$ непрерывна справа, что в случае локально компактного метрического пространства эквивалентно свойству iii); в) $\mathcal{V}(K_1 \cup K_2) + \mathcal{V}(K_1 \cap K_2) \leq \mathcal{V}(K_1) + \mathcal{V}(K_2)$ (*строгая субаддитивность*). Такая функция $\mathcal{V}(K)$ называется *емкостью Шоке*.

Введем *внутреннюю емкость*

$$\mathcal{V}_*(e) = \sup_{K \subset e} \mathcal{V}(K), \text{ где } K \text{ — компакт,}$$

и внешнюю емкость

$$\mathcal{C}^*(e) = \inf_{\omega \supseteq e} \mathcal{C}_*(\omega), \text{ где } \omega \text{ — открытое множество.}$$

Шоке доказал, что $\mathcal{C}^*(e)$ является общей емкостью, причем условие C -измеримости записывается в виде $\mathcal{C}_*(e) = \mathcal{C}^*(e)$. Кроме того, внешняя емкость $\mathcal{C}^*(e)$ счетно субаддитивна.

В рамках изложенной выше классической схемы с пространством Грина Ω и гипергармоническими неотрицательными функциями мы изучим в связи со сказанным в гл. IV такие функции множеств:

$A(e) = R_\varphi^e(x)$, где точка x фиксирована, а φ — конечная неотрицательная непрерывная функция,

$A_m(e) = \int \hat{R}_\varphi^e(x) dm(x)$, где функция φ — такая же, как выше, а m — неотрицательная мера, не нагружающая полярных множеств и либо имеющая компактный носитель, либо такая, что существует супергармоническая неотрицательная функция V , удовлетворяющая условиям $V \geq \varphi$ и $\int V dm < +\infty$. Примеры: а) гармоническая мера $d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ в точке $x_0 \in \omega_0$, где ω_0 относительно компактно; б) $\gamma(e) = \mu(\Omega)$, где μ — мера, ассоциированная с \hat{R}_φ^e (функция φ такая же, как выше).

Теорема VIII. 12. *Функции $A(e)$, $A_m(e)$ являются весами, причем весами тонкими, непрерывными справа, счетно субаддитивными и типа Шоке. Второй из этих весов есть общая емкость, а если φ , кроме всего, супергармонична, то оба веса являются внешними емкостями для некоторых емкостей Шоке. Если множество e содержится в каком-либо фиксированном $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$, то $\gamma(e)$ в Ω' имеет те же свойства, что A_m . Внешняя емкость, соответствующая $\gamma(K)$ при $\varphi = 1$, называется внешней гриновой емкостью (или классической емкостью). Если $\varphi > 0$ и $m \neq 0$, то множество e будет полярным в том и только в том случае, когда или $A_m(e) = 0$, или $A(e) = 0$ ($x \notin e$), или $\gamma(e) = 0$ ($\bar{e} \subset \Omega$), или его классическая емкость равна нулю.*

Доказательство. а) Рассмотрим функцию множества $e \mapsto R_\Phi^e(x_0)$. Нам известно, что это — тонкий счетно субаддитивный вес. Он непрерывен справа. В самом деле, если он конечен, то существует положительная супергармоническая функция u , удовлетворяющая на e неравенству $u \geq \varphi$; возьмем $0 < \lambda < 1$, тогда множество $\{x \mid u \geq \lambda\varphi\}$ содержит некоторую окрестность ω множества e ; далее, $u \geq \lambda R_\Phi^\omega$, $u \geq \lambda \inf_{\omega \supset e} R_\Phi^\omega$ (ω — открытое множество), $u \geq \inf_{\omega} R_\Phi^\omega$ и $R_\Phi^e(x_0) = \inf_{\omega} R_\Phi^\omega(x_0)$.

Предположим теперь, что функция φ супергармонична; тогда из соотношений $\widehat{R}_\Phi^{en} \rightarrow \widehat{R}_\Phi^{Uen}$, $R_\Phi^e = \varphi$ на e , $\widehat{R}_\Phi^e = R_\Phi^e$ на Se получаем, что $R_\Phi^{en}(x) \rightarrow R_\Phi^{Uen}(x)$. Следовательно, R_Φ^e есть общая емкость. Кроме того, функция множества $K \mapsto R_\Phi^K(x)$ строго субаддитивна, т. е. $R_\Phi^{K_1 \cup K_2} + R_\Phi^{K_1 \cap K_2} \leq R_\Phi^{K_1} + R_\Phi^{K_2}$. Это очевидно при $x \in K_1 \cup K_2$; если же x лежит вне этого множества, то нужно обе стороны неравенства рассматривать как решения задачи Дирихле в $C(K_1 \cup K_2)$ с граничными значениями, равными на $\partial(K_1 \cup K_2)$ соответствующим частям неравенства и нулю на бесконечности. Итак $K \mapsto R_\Phi^K(x)$ есть емкость Шоке, и из общих свойств следует, что соответствующая внешняя емкость есть $R_\Phi^e(x)$.

б) Относительно $\int \widehat{R}_\Phi^e dm$ или $\int R_\Phi^e dm$ ясно, что это — тонкие счетно субаддитивные веса. Докажем непрерывность справа. Если рассматриваемый интеграл равен $+\infty$ или $m=0$, то это очевидно. В противном случае существует неотрицательная супергармоническая функция u , такая, что $u \geq \varphi$ на e и $\int u dm < +\infty$ (ввиду предположений о m). Функция R_Φ^e есть нижняя огибающая таких функций. Поэтому $\widehat{R}_\Phi^e = \widehat{\inf u_n}$ (согласно топологической лемме Шоке, см. Брело [20]), такая убывающая подпоследо-

вательность $\{u_n\}$ существует). Введем открытые множества $\omega_n = \{x | u_n > \theta\phi\}$, $0 < \theta < 1$. Тогда $u_n \geq \theta R_\phi^{\omega_n}$ и

$$\begin{aligned} \int R_\phi^e dm &= \int \inf u_n dm = \lim \int u_n dm \geq \\ &\geq \theta \inf_n \int R_\phi^{\omega_n} dm \geq \theta \inf_{\omega \supset e} \int R_\phi^\omega dm. \end{aligned}$$

Следовательно, $\int R_\phi^e dm \geq \inf \int R_\phi^\omega dm$, и значит, имеет место знак равенства. Предельное свойство для $e_n \uparrow$ следует отсюда немедленно и, таким образом, $\int R_\phi^e dm$ есть общая емкость.

Если функция ϕ супергармонична, то, используя а), заключаем, что $\int R_\phi^K dm$ есть емкость Шоке. Внутренняя емкость множества ω есть $\sup_{K \subset \omega} \int R_\phi^K dm = \int R_\phi^\omega dm$, а внешняя емкость множества e есть $\inf_{\omega \supset e} \int R_\phi^\omega dm = \int R_\phi^e dm$ (ω открыто).

с) Свойство монотонности отображения $e \mapsto \widehat{R}_\phi^e$ ($e \subset \Omega'$) влечет за собой аналогичное свойство для $\gamma(e)$ (см. гл. VI, конец п. 8). Мы используем сейчас аналогичные рассуждения, а также равный 1 на $\overline{\Omega'}$ потенциал W (меры ν , сосредоточенной в некоторой окрестности границы $\partial\Omega'$). Пусть μ_n, μ ассоциированы с $\widehat{R}_\phi^{e_n}$ и $\widehat{R}_\phi^{Ue_n}$ ($e_n \subset \Omega'$). Тогда

$$\begin{aligned} \gamma(Ue_n) &= \int W d\mu = \int \widehat{R}_\phi^{Ue_n} d\nu \leq \sum \int \widehat{R}_\phi^{e_n} d\nu = \\ &= \sum \int W d\mu_n = \sum \gamma(e_n) \end{aligned}$$

и по аналогичным соображениям $\gamma(e_n) \rightarrow \gamma(Ue_n)$.

Если $\bar{e} \subset \Omega'$ и $\omega \supset e$, $\bar{\omega} \subset \Omega'$, то, как известно, $R_\phi^e = \inf R_\phi^\omega$, и поэтому $\widehat{R}_\phi^e = \widehat{\inf R_\phi^\omega}$ для некоторой убывающей последовательности $\{\omega_n\}$; отсюда интегрированием по мере $d\nu$ получаем $\gamma(e) = \lim_n \gamma(\omega_n)$.

Итак, $\gamma(e)$ является в Ω' весом с требуемыми свойствами, а также общей емкостью.

Если функция φ — супергармоническая, то функция множеств $\gamma(K)$, подобно \hat{R}_φ^K , строго субаддитивна и является, следовательно, емкостью Шоке. Опираясь на предыдущие свойства, заключаем, что соответствующие внутренняя, а также внешняя емкости множества ω (соотв. e) совпадают с $\gamma(\omega)$ (соотв. с $\gamma(e)$).

У п р а ж н е н и е. Для любого $e \subset \bar{e} \subset \Omega$ существует убывающая последовательность открытых множеств $\omega_n \supset e$, такая, что $\gamma(\omega_n) \rightarrow \gamma(e)$ и $\hat{R}_\varphi^{\omega_n} \rightarrow \hat{R}_\varphi^e$ (φ — любая конечная непрерывная положительная функция). То же верно для внешней емкости, если φ супергармонична.

д) Характеризация полярных множеств является простым следствием критерия $\hat{R}_\varphi^e \equiv 0$ ($\varphi > 0$).

е) Осталось доказать свойство Шоке. Вместо первоначального доказательства Шоке мы приведем другое, просто вытекающее из следующего результата, имеющего и самостоятельный интерес.

5. Лемма VIII. 13. Пусть даны множество $e \subset \Omega$ и точка $x_0 \in \Omega$. Тогда существует потенциал V , конечный в x_0 и такой, что для любой точки $x \in \bar{e} \setminus \bar{e}$

$$V(y) \rightarrow +\infty \text{ при } y \in e, y \rightarrow x.$$

Доказательство. Воспользуемся потенциалом U из теоремы VII. 6. (с мерой μ). Сначала предположим, что e есть база. Сужения $\mu_1 = \mu|_e$, $\mu_2 = \mu|_{Ce}$ имеют конечные непрерывные потенциалы u_1, u_2 и $b_{\mu_1}^e = \mu_1$, $b_{\mu_2}^e(Ce) = 0$. Введем открытые множества $\omega_n \supset Ce$, такие, что $b_{\mu_2}^e(\omega_n) \rightarrow 0$, и положим $\nu_n = b_{\mu_2}^e|_{\omega_n}$. Можно выделить подпоследовательность мер ν_{n_p} с потенциалами v_p , для которых $\sum v_p(x_0) < +\infty$. Тогда ряд $\sum v_p$ решает нашу задачу: для точки $x \in \bar{e}$, $x \in Ce$,

$$\begin{aligned} \liminf_{y \in e, y \rightarrow x} v_p(y) - v_p(x) &= \liminf_{y \in e, y \rightarrow x} \mathcal{R}_U^e(y) - \mathcal{R}_U^e(x) = \\ &= U(x) - \mathcal{R}_U^e(x) > 0. \end{aligned}$$

Отсюда получается требуемое свойство для $\sum v_p$. Для произвольного множества e имеем $e \subset \bar{e} = B_e \cup \alpha$, где α — полярное множество. Сумма функции, построенной указанным выше способом для B_e , и потенциала, бесконечного на $\alpha \setminus \{x_0\}$, но конечного в x_0 , и будет искомым потенциалом. Действительно, $\bar{e} \subset \bar{\bar{e}} = \bar{B}_e \cup \bar{\alpha}$ и $\bar{e} \setminus B_e = (\bar{B}_e \setminus B_e) \cup (\bar{\alpha} \setminus B_e)$, если $x_0 \in e$ и $x \in \bar{e} \setminus \bar{e}$, то $x \neq x_0$.

Замечание. Аналогично существует потенциал W , такой, что в каждой точке $x \in \bar{e} \setminus B_e$ выполнено соотношение $W(y) \rightarrow +\infty$ при $e \ni y \rightarrow x$. Доказательство то же (надо взять $x_0 \notin e$; если $e = \Omega$, то $\bar{e} \setminus B_e = \emptyset$).

Лемма VIII. 14. Если Ψ — неотрицательная, локально ограниченная функция, а ω — произвольное открытое множество, содержащее $\bar{e} \setminus \bar{e}$, то $\inf_{\omega} R_{\Psi}^{e \cap \omega}(x_0) = 0, \forall x_0$.

Доказательство. Для любой точки $x \in \bar{e} \setminus \bar{e}$ и любого λ существует открытая окрестность σ точки x такая, что потенциал V из предыдущей леммы удовлетворяет на $\sigma \cap e$ неравенству $\Psi < \lambda V$. Если δ — объединение этих σ , то мы получаем $\Psi > \lambda V$ на $\delta \cap e$, и $R_{\Psi}^{e \cap \delta}(x_0) < \lambda V(x_0)$. Следовательно, $\inf_{\omega} R_{\Psi}^{e \cap \omega}(x_0) = 0$ (где $\omega \supset \bar{e} \setminus \bar{e}$, ω открыто), и это верно для любой точки $x_0 \notin e$.

Тот же самый результат и то же доказательство сохраняют силу для $\omega \supset \bar{e} \setminus B_e$ при $x_0 \notin e$ (этот результат можно получить как следствие леммы).

Доказательство свойства Шоке получается теперь просто. Мы установим его сейчас даже при более общих предположениях.

Теорема VIII. 15. Если функция Ψ неотрицательна и локально ограничена, то следующие функции множества: $R_{\Psi}^e(x_0)$ при любом фиксированном x_0 ; $\int R_{\Psi}^e dt(x)$, где мера $t \geq 0$ не нагружает полярных

множеств и $\int G_x dt \neq +\infty$; $\mu(\Omega)$, где μ — мера, соответствующая \widehat{R}_Ψ^e , — являются все весами типа Шоке, причем последняя — в любом $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$.

Доказательство. Свойство монотонности всех этих функций является следствием аналогичного свойства для R_Ψ^e . Первый вес обладает свойством Шоке согласно предыдущей лемме, в которой ω следует заменить на $\omega' = \omega \cup C\bar{e}$. Далее, существует убывающая последовательность множеств $\{\omega'_n\}$, содержащих $C\bar{e}$, такая, что для всех x

$$\widehat{\inf R_\Psi^e \cap \omega'_n}(x) = 0,$$

так что $R_\Psi^e \cap \omega'_n \rightarrow 0$ квазивсюду. Пользуясь последовательностью $\Omega_p \uparrow$, $\bar{\Omega}_p \subset \Omega$, $\bigcup \Omega_p = \Omega$, получаем для подходящего λ , всех n и фиксированного p , что $\int R_\Psi^e \cap \omega'_n \cap \Omega_p dt \leq \lambda \int G_x(y) dt(y)$ и, значит,

$$\int R_\Psi^e \cap \omega'_n \cap \Omega_p dt \rightarrow 0.$$

Выберем $n = n_p$ так, чтобы этот интеграл был $< \varepsilon/2^{-p}$.

Тогда $\int R_\Psi^e \cap (\cup \omega'_{n_p} \cap \Omega_p) dt < \varepsilon$, и для второго веса вопрос

решен. Наконец, $\widehat{R}_\Psi^e \cap \omega'_n \cap \Omega'$ есть потенциал некоторой

меры μ_n (на $\bar{\Omega}'$). Пользуясь тем же самым W , что и в части с) доказательства теоремы VIII. 12, находим

$\int \widehat{R}_\Psi^e \cap \omega'_n \cap \Omega' d\nu = \int W d\mu_n = \mu_n(\Omega) \rightarrow 0$, откуда получается свойство Шоке в Ω' для третьего веса.

З а м е ч а н и е. Интерпретация полярных множеств как множеств, у которых вес $A_m(e)$ равен нулю для подходящей меры t , приводит к следующему результату:

Всякое тонко замкнутое множество является с точностью до полярного множества множеством типа F_σ

(см. предложение IV.5), а также множеством типа G_δ (гл. VII, п. 3).

6. Некоторые дополнения. а) Тонкая топология играет важную роль при изучении весов возрастающих и в особенности убывающих последовательностей множеств. Например, емкости $A_m(e)$, $\gamma(e)$ из теоремы VIII.12 для убывающих тонко замкнутых множеств e_n , содержащихся в компакте K , стремятся к соответствующим емкостям множества $\bigcap e_n$. Это — следствие равенства $\widehat{\inf R_\phi^e} = \widehat{R_\phi^{e_n}}$, и этот результат обобщается на случай направленных семейств $\{e_i\}$ (см. Брело [30]).

Более глубокое изучение весов $R_1^e(x_0)$, $\int \widehat{R}_\Psi^e dm$ (для любой функции $\Psi \leq V$, где V — супергармоническая функция, удовлетворяющая условию $\int V dm < \infty$, а мера m не нагружает полярных множеств) для убывающих e проведено в статьях Брело [27, 30, 32, 33], главным образом для случая неотрицательной супергармонической функции Ψ . Эти веса обладают свойством Шоке.

б) *Статистическая разреженность.* Нам встречались (см. теоремы VIII.12 и VIII.15) емкости, являющиеся также весами типа Шоке.

Теорема VIII.16 (Брело [27]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *В пространстве Ω множество e разрежено квазивсюду на множестве α (статистическая разреженность на α);*

б) $\widehat{\inf_\omega R_1^{e \cap \omega}} = 0$ *в какой-нибудь одной точке или в каждой точке (или то же условие для \widehat{R}_1), т. е. семейство $\{e \cap \omega\}$ (где ω — переменная окрестность множества α) является 1-исчезающим.*

Доказательство. В самом деле, в силу свойства Шоке семейство $\{e \cap \delta\}$ будет 1-исчезающим для окрестностей δ множества $S\check{e}$, т. е. множества тех точек

из Se , в которых e разрежено. Отправляясь от статистического свойства а), мы получаем то же самое для окрестностей следующих полярных множеств: 1) части множества α , где e неразрезано, 2) части множества e , где e разрежено. Отсюда и следует б).

Обратное просто. Исходим из б); если α_0 — часть множества α , где e неразрезано, а ω — переменная окрестность α , то $e \cap \omega$ неразрезано на α_0 , и, поскольку $R_1^{\bar{y}} = R_1^{\bar{y}}$, мы получаем $R_1^{(e \cap \omega) \cup \alpha} = R_1^{e \cap \omega}$, $R_1^{\alpha_0} \leq R_1^{e \cap \omega}$, $R_1^{\alpha_0} \leq \inf R_1^{e \cap \omega}$, $\hat{R}_1^{\alpha_0} \leq \inf R_1^{e \cap \omega}$. Следовательно, множество α_0 полярно.

З а м е ч а н и е. Эквивалентными условиями являются:

а) 1-исчезание тонких окрестностей α ;
 б) существование супергармонической функции $V > 0$, сужение которой на e стремится к $+\infty$ в точках множества $\alpha \cap \bar{e}$ (равно как аналогичное условие с тонким пределом в точках $\alpha \cap \bar{e}$; см. лемму VIII. 13).

в) *Некоторые определения и приложения* (см. Брело [27, 30, 33]). А) Пусть W — положительная супергармоническая функция (с ассоциированной мерой μ_W). Полярное множество e называется *W-полярным* на Ω , если его внешняя μ_W -мера равна нулю. Эквивалентное требование: окрестности множества e образуют W -исчезающее семейство.

П р и л о ж е н и е. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Множество e разрежено на α всюду, за исключением W -полярного множества (W -статистическая разреженность на α).

2) Для окрестностей ω множества α в пространстве Ω (равно как и для тонких окрестностей) семейство $\{e \cap \omega\}$ является W -исчезающим.

3) Существует супергармоническая функция $U > 0$, такая, что $U(y)/W(y)$ (мы считаем это отношение равным $+\infty$ там, где $U = W = +\infty$) стремится к $+\infty$ при $y \in e$, $y \rightarrow x \in \bar{e}$.

Аналогичный результат имеет место для тонких сходимости и замыкания.

В) Супергармоническая на Ω функция $W > 0$ называется *семиограниченной*, если семейство $e_\lambda = \{x \mid W > \lambda\}$ является W -исчезающим. Если W — потенциал, то это эквивалентно W -полярности множества $\{W = +\infty\}$.

Приложение (обобщение результата части а) этого пункта). Если $\{\varphi_i\}$ — направленное по убыванию множество тонко полунепрерывных сверху неотрицательных функций на Ω , которое мажорируется фиксированным семиограниченным потенциалом V , то $\widehat{\inf} R_{\varphi_i} = \widehat{R}_{\inf \varphi_i}$.

Глава IX

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИЗУЧЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕЖЕННОСТИ¹⁾. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Выше была показана важность понятия разреженности для общих теорий типа теории выметания, которые могут быть доведены до аксиоматического уровня. Естественно более глубоко изучить вопрос в классическом случае, что даст нам массу подробностей и примеров, полезных для классических приложений. Мы будем рассматривать главным образом евклидовы пространства; обобщение на случай окрестности точки на бесконечности легко получить, либо повторяя соответствующие рассуждения, либо используя инверсию и преобразование Кельвина. Аналогично можно рассмотреть и случай общего пространства Грина (непосредственно или каким-нибудь иным способом).

Напомним, что в пространстве Грина из разреженности следуют строгая разреженность и сверхразреженность.

¹⁾ См. Брело [4, 5, 8] и Картан [2], а также приведенную в этих работах библиографию.

Замечание о сохранении разреженности или неразреженности при отображении. Рассмотрим в \mathbb{R}^n ограниченное борелевское отображение $x \mapsto y = F(x)$ (это означает, что образ любого шара ограничен). Со всякой мерой Радона μ можно связать другую меру ν , определенную условием $\int \theta(y) d\nu(y) = \int \theta(F(x)) d\mu(x)$, где θ — любая конечная непрерывная финитная (т. е. обладающая компактным носителем) функция. Мера ν называется *образом* меры μ при отображении F ; написанная формула сохраняет силу для любой $d\nu$ -суммируемой функции θ .

Предложение IX.1. Если отображение F биективно и сохраняет расстояние $|x_1 - x_2|$ с точностью до коэффициента $\lambda(x_1, x_2)$, причем $0 < \alpha \leq \lambda(x_1, x_2) \leq \beta < +\infty$ (x_1, x_2 лежат в окрестности x_0), то разреженность в точке x_0 эквивалентна разреженности образа в точке $F(x_0) = y_0$.

Доказательство. Имеем

$$\int h(|y - y_1|) d\nu(y) = \int h(\lambda(x, x_1)|x - x_1|) d\mu(x).$$

Если потенциал меры μ конечен в x_0 и стремится к $+\infty$ на e (при $x \rightarrow x_0$, $x \neq x_0$), то потенциал меры ν конечен в y_0 и стремится к $+\infty$ на $F(e)$ (при $y \rightarrow y_0$, $y \neq y_0$), и наоборот.

Предложение IX.2. Если отображение F оставляет точку x_0 неподвижной, сохраняет расстояния до точки x_0 , а вообще расстояния не увеличивает, то при применении отображения F потенциалы возрастают, и поэтому множество, разреженное в x_0 , переходит в множество, разреженное в этой же точке.

Пример. Отображение $x \mapsto y$ в \mathbb{R}^2 , где y лежит на фиксированном луче, исходящем из точки x_0 , а $|y - x_0| = |x - x_0|$, удовлетворяет условиям предыдущего предложения.

Сделанные замечания позволяют нам, отправляясь от элементарных примеров, строить много новых.

2. Одно геометрическое свойство разреженности.
 Теорема IX.3. Если $e \subset \mathbb{R}^n$ разрежено в x_0 , а $\sigma_{x_0}^r$ — единичная положительная инвариантная мера на сфере $\partial V_{x_0}^r$ (инвариантная относительно вращений, т. е. пропорциональная „площади“), то при $r \rightarrow 0$ внешняя мера $\sigma_{x_0}^{r*}(e \cap \partial V_{x_0}^r) \rightarrow 0$.

Доказательство. Можно считать, что $x_0 \notin e$, что e открыто и что в окрестности x_0 существует супергармоническая функция $u > 0$, такая, что $u(x_0) < +\infty$, $u(x) \rightarrow +\infty$ при $e \ni x \rightarrow x_0$. Тогда

$$u(x_0) \geq (\text{среднее значение } u \text{ на } \partial V_{x_0}^r) \geq \lambda(r) \sigma_{x_0}^{r*}(\partial V_{x_0}^r \cap e),$$

где $\lambda(r) = \inf u$ на $e \cap \partial V_{x_0}^r$. Так как $\lambda(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow 0$, то $\sigma_{x_0}^{r*}(\partial V_{x_0}^r \cap e) \rightarrow 0$.

Упражнение. Провести аналогичное доказательство, используя функцию u , удовлетворяющую условию $u(x_0) < \liminf_{x \in e, x \rightarrow x_0} u(x)$.

Обобщение. Пусть $\{\omega_i\}$ — направленное по убыванию семейство подобластей пространства Грина, содержащих точку x_0 и имеющих пересечение $\{x_0\}$. Если $d\rho_{x_0}^{\omega_i}$ — гармоническая мера в x_0 , то $\inf_i \rho_{x_0}^{\omega_i*}(e \cap \partial \omega_i) = 0$.

Доказательство аналогично.

В случае точки на бесконечности, используя образы в $\bar{\mathbb{R}}^n$, мы получаем отсюда аналогичное свойство для сферы, имеющей фиксированный центр и радиус $\rightarrow \infty$.

Замечание. Если ограниченная в окрестности точки x_0 функция имеет тонкий предел λ в x_0 , то ее среднее значение на $\partial V_{x_0}^r$ стремится к λ при $r \rightarrow 0$.

Пример неразреженности. Любое множество в \mathbb{R}^n , содержащее конус вращения (с непустой внутренностью), неразрежено в вершине (этот пример указан Пуанкаре в связи с задачей Дирихле).

3. Критерии разреженности и неразреженности.

Теорема IX.4. *Замкнутое множество $e \subset \mathbb{R}^n$ неразрежено в точке $x_0 \in e$ в том и только в том случае, когда в $\sigma \setminus e$ (где σ — некоторая открытая окрестность точки x_0) существует положительная супергармоническая функция u , стремящаяся к нулю в x_0 .*

Доказательство. Воспользуемся конечной непрерывной функцией $V > 0$, супергармонической в шаре B_{x_0} и не являющейся гармонической ни на каком открытом множестве (можно взять, например, $k - |x - x_0|$ или $k - |x - x_0|^2$ с подходящей константой k или потенциал меры Лебега на B_{x_0}). Рассмотрим ее приведенную функцию в B_{x_0} относительно множества $e' = e \cap B_{x_0}$. Если e неразрежено в x_0 , то $\hat{R}_V^{e'}(x_0) = V(x_0)$. Следовательно, функция $\hat{R}_V^{e'}$ непрерывна в x_0 , и неотрицательная функция $V - \hat{R}_V^{e'}$ не может быть равна нулю ни в одной компоненте множества $S_{e'}$ в B_{x_0} . Таким образом, она > 0 и удовлетворяет требуемым условиям.

Обратно, предположим, что функция v супергармонична в $B_{x_0} \setminus e$ (для подходящего шара B_{x_0}) и $v > 0$, $v \rightarrow 0$ в x_0 . Покажем, что это несовместимо с разреженностью e , т. е. с существованием субгармонической функции u в B_{x_0} , удовлетворяющей условиям $u(x_0) = 1$, $u(x) \leq -1$ на $e \cap B_{x_0}^r$ (при некотором r). Заметим, что $u \leq v$ в некоторой открытой окрестности δ множества $\partial B_{x_0}^r \cap e$ ($r' < r$) и $u \leq \lambda v$ на $\partial B_{x_0}^r \cap S_\delta$ (где $\lambda > 1$ достаточно велико). Следовательно, функция $u - \lambda v - \varepsilon G_{x_0}^{B_{x_0}}$ ($\varepsilon > 0$) на $B_{x_0}^r \setminus e$ имеет неположительный \limsup в каждой граничной точке. Значит, эта функция ≤ 0 , и $u \leq \lambda v$ на $B_{x_0}^r \setminus e$. Но это противоречит тому, что $u(x_0) = 1 = \limsup_{\substack{x \neq x_0, \\ x \rightarrow x_0}} u(x)$.

Отсюда простой переформулировкой получается обобщение на случай пространства Грина.

Рассмотрим некоторые приложения этих критериев.

Предложение IX.5. *Отличная от A граничная точка x_0 открытого множества ω в пространстве Грина Ω*

будет иррегулярной тогда и только тогда, когда $S_{\Omega\omega}$ разрежено в x_0 .

Это следует из локальных критериев (гл. VI, п. 6, теорема IX.4), а также из теоремы VII.13.

Отсюда получается другое доказательство того, что множество иррегулярных точек полярно.

Некоторые примеры. В \mathbb{R}^n гиперплоскость H (размерности $n-1$) неразрезана ни в какой своей точке, поскольку расстояние до H есть гармоническая положительная вне H функция. Однако линейные многообразия размерности $\leq n-2$ локально полярны (ибо ньютонов или логарифмический потенциал меры Лебега открытого множества α бесконечен на α) и поэтому всюду разрежены. Полугиперплоскость неразрезана даже на краю (следует рассмотреть объединение со второй полугиперплоскостью). В \mathbb{R}^2 отрезок не разрежен ни в какой своей точке.

Предложение IX.6 (уточненное свойство Лебега — Бёрлинга). Если множество $e \subset \mathbb{R}^2$ разрежено в точке x_0 , то существуют сколь угодно малые окружности $|x - x_0| = r$, не пересекающиеся с e .

Доказательство. Отображение из п. 1 на луч, исходящий из x_0 , дает разреженное множество, которое не может содержать никакого отрезка с концом в x_0 .

Таким образом, в \mathbb{R}^2 все неизолированные граничные точки конечносвязной относительно компактной области Грина будут регулярными.

В \mathbb{R}^n при $n \geq 3$ положение совсем иное. Напомним знаменитый пример лебегова остря в \mathbb{R}^3 (он и был построен как пример иррегулярной граничной точки).

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ оси x_1 меру с линейной плотностью, равной x_1 . Ее ньютонов потенциал V равен 1 в точке 0 и $+\infty$ в остальных точках отрезка. Множество $\{x | V > K > 1\}$ (это — тело вращения с осью x_1) разрежено в точке 0. Элементарный расчет показывает, что меридианная образующая задается уравнением $z = \pm ae^{-\frac{\lambda(x_1)}{x_1}}$, где $\lambda(x_1) \rightarrow K/2$.

4. Теорема IX.7. В пространстве Грина Ω разреженность множества e в точке x_0 эквивалентна условию

$$\mathcal{R}_{G_{x_0}}^e \neq G_{x_0}, \text{ т. е. } b_{e_{x_0}}^e \neq \varepsilon_{x_0} \text{ или } b_{e_{x_0}}^e \{x_0\} = 0^1). \quad (\alpha)$$

Другие формы этого критерия для случая \mathbb{R}^n таковы:

а) В окрестности x_0 существует такая супергармоническая функция v , что

$$\liminf_{x \in e, x \neq x_0, x \rightarrow x_0} \frac{v(x)}{h_{x_0}} > \liminf_{x \neq x_0, x \rightarrow x_0} \frac{v(x)}{h_{x_0}}$$

(напомним, что $h_{x_0}(x) = h(|x - x_0|)$).

б) В окрестности точки x_0 существует мера $\mu \geq 0$, не нагружающая $\{x_0\}$, такая, что ее h - или G -потенциал v удовлетворяет условию

$$\liminf_{x \in e, x_0 \neq x, x \rightarrow x_0} \frac{v(x)}{h(|x - x_0|)} > 0.$$

Это равносильно тому, что $v \geq h$ или $\geq G_{x_0}$ на e всюду вблизи x_0 (или только квазिवсюду), причем $\mu(\text{CB}_e) = 0$.

с) В окрестности точки x_0 существует мера $\mu \geq 0$ с G - или h -потенциалом v , удовлетворяющим условию

$$\frac{v(x)}{h(|x - x_0|)} \rightarrow +\infty \quad (x \in e, x \neq x_0, x \rightarrow x_0).$$

¹⁾ Модифицируя понятие, введенное Валле-Пуссенем, Картан [2] (в \mathbb{R}^n при $n \geq 3$ или в единичном круге в \mathbb{R}^2) взял свойство $b_{e_{x_0}}^e \neq \varepsilon_{x_0}$ в качестве определения „внешней иррегулярности“ точки x_0 для e (которая, следовательно, эквивалентна разреженности e в x_0). Пользуясь „вторым типом выметания“ (см. подстрочное примечание на стр. 63–64), он аналогичным образом пришел к понятию „внутренней иррегулярности“, которая эквивалентна тому, что всякое замкнутое подмножество множества $e \cup \{x_0\}$ разрежено в x_0 (внутренняя разреженность). Это второе понятие оказалось малополезным, и мы оставили его в стороне, равно как и второй тип выметания. Слово „регулярность“ мы сохранили за первоначальным классическим понятием, связанным с задачей Дирихле, чтобы избежать всяких недоразумений.

Доказательство. Если e разрежено, то мера $b_{\varepsilon x_0}^e$, которая сосредоточена на V_e , не нагружает $\{x_0\}$. Если же e неразрежено (т. е. если $x_0 \in V_e$), то $b_{\varepsilon x_0}^e = \varepsilon x_0$.

Докажем сперва эквивалентность условий а), б), с). Воспользуемся следующим замечанием. Если в пространстве Грина Ω потенциал v мажорирует $G_{x_0}^\Omega$ ($\{x_0\}$ — полярное множество), то $\mu_v(\{x_0\}) \neq 0$. В противном случае функция v в $\Omega \setminus \{x_0\}$ была бы $G_{x_0}^\Omega \setminus \{x_0\}$ -потенциалом с гармонической минорантой $G_{x_0} \neq 0$.

Отправляясь от а), мы получим то же неравенство для локального потенциального слагаемого функции v , а затем для потенциала V сужения соответствующей меры на $C\{x_0\}$. Но тогда новый правый член неравенства должен быть равен нулю (иначе функция λV при достаточно большом λ мажорировала бы некоторую функцию $G_{x_0}^{B_{x_0}}$ вблизи точки x_0 и, значит, в B_{x_0} , а это противоречило бы предыдущему замечанию). Итак, мы получили б).

Далее, б) \Rightarrow а), потому что $v/h(|x - x_0|)$ или $v/G_{x_0}^{B_{x_0}}$ имеет нулевой \liminf (те же рассуждения). Поскольку с) \Rightarrow б), то нам осталось доказать, что б) \Rightarrow с).

Пусть μ — мера из б), а μ_n — ее сужение на $B_{x_n}^r$; выберем подпоследовательность n_p так, чтобы сумма $\sum \|\mu_{n_p}\|$ была конечной. Тогда мера $\sum \mu_{n_p}$ отвечает всем нашим требованиям.

Докажем, наконец, что условие разреженности e в точке x_0 (мы считаем $\Omega \ni x_0$ шаром) эквивалентно условию б). Предполагая, что имеет место разреженность, видим, что мера $b_{\varepsilon x_0}^e$ не нагружает $\{x_0\}$ и ее G^Ω -потенциал равен G_{x_0} на e всюду, за исключением полярного множества. Рассмотрим на Ω супергармоническую функцию $\omega > 0$, конечную в x_0 и равную $+\infty$ на $e \setminus \{x_0\}$. Тогда

$$\liminf_{x \in e, x \neq x_0, x \rightarrow x_0} \frac{\mathcal{H}_{G_{x_n}}^e + \omega}{G_{x_0}} > 0,$$

так что б) имеет место.

Будем теперь исходить из б) и обозначим через λ указанный в б) \liminf ; тогда при $0 < \lambda' < \lambda$ функция v/λ' мажорирует G_x на $e \cap \sigma$ для некоторой окрестности σ точки x_0 . Следовательно, $v/\lambda' \geq \mathcal{R}_{G_{x_0}}^{e \cap \sigma}$. Но $\mathcal{R}_{G_{x_0}}^{e \cap \sigma}$ не может быть равно G_{x_0} (согласно нашему предварительному замечанию). Отсюда следует разреженность $e \cap \sigma$ и, значит, e .

З а м е ч а н и е. Используя лишь свойство аддитивности отображения $v \mapsto \mathcal{R}_v^e$ (где v — супергармоническая функция ≥ 0) и свойство инвариантности $\mathcal{R}_{\mathcal{R}_v^e}^e = \mathcal{R}_v^e$, можно доказать непосредственно, что $\mathcal{R}_{G_{x_0}}^e \neq G_{x_0}$ влечет $b_{\varepsilon_{x_0}}^e(\{x_0\}) = 0$ (в любом пространстве Грина). Поэтому предыдущие рассуждения показывают, что условия а) — с) эквивалентны неравенству $\mathcal{R}_{G_{x_0}}^e \neq G_{x_0}$ без использования результатов теории выметания (теоремы VIII. 3).

У д р а ж н е н и е. Доказать эквивалентность условий а) — с) и разреженности, используя следующую лемму (полезную также и для дальнейшего). Таким образом получается более прямое доказательство критерия (а) разреженности в \mathbb{R}^n (см. Брело [5]).

Л е м м а IX. 8 (Винер — Валле-Пуссен). *Рассмотрим в \mathbb{R}^n меру $\mu > 0$, не нагружающую начала 0, ее потенциал v (логарифмический или ньютонів) и число $s > 1$. Сужение меры μ на множество*

$$E_n = \{x \mid h(|x|) \leq s^{n-1}\} \cup \{x \mid h(|x|) \geq s^{n+2}\}$$

имеет потенциал V , который на множестве

$$I_n = \{x \mid s^n \leq h(|x|) \leq s^{n+1}\}$$

(А) *мажорируется функцией $h(|x|)\varepsilon_n$ ($\varepsilon_n \rightarrow 0$),*
 (В) *в случае конечности $v(0)$ мажорируется величиной $Kv(0)$, где K не зависит от μ и n .*

Доказательство. Элементарный подсчет показывает, что отношения $h(|x-y|)/h(|x|)$ и $h(|x-y|)/h \times \times (|x-y_1|)$ ограничены при произвольных $x \in E_n$,

$y \in I_n$ и n . Отсюда сразу получается второй результат. Первый результат является следствием того известного факта, что среднее значение v на ∂V_0^r имеет вид $h(r)\varepsilon(r)$, где $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0^1$.

5. Теорема IX.9 (Булиган). *Замкнутое множество e в пространстве Грина Ω будет неразрезанным в точке $x_0 \in e$ в том и только в том случае, когда*

а) решение задачи Дирихле в $\Omega \setminus e$ с граничными значениями $G_{x_0}^\Omega$ и 0 в точке Александрова A равно $G_{x_0}^\Omega$.

Если же точка x_0 полярна, то необходимое и достаточное условие таково:

б) на $\sigma \setminus e$ (где σ — некоторая открытая окрестность точки x_0) существует супергармоническая функция u , такая, что $u/G_{x_0}^\Omega \rightarrow +\infty$, $x \in \sigma$, $x \rightarrow x_0$ (если x_0 — не точка на бесконечности, то это эквивалентно тому, что на локальном образе $u/h(|x - x_0|) \rightarrow +\infty$, $x \in \sigma$, $x \rightarrow x_0$).

Доказательство. а) В случае замкнутого множества e этот критерий совпадает с критерием (а) из теоремы IX.7.

Предположим, что e неразрезано в x_0 и $\{x_0\}$ — полярное множество. Мы покажем даже, что в $\Omega \setminus e$ существует гармоническая положительная функция u , такая, что $u/G_{x_0}^\Omega \rightarrow +\infty$ в x_0 . Для всякой области $\sigma \subset \Omega$, $\sigma \ni x_0$, имеем $(\widehat{R}_{G_{x_0}^\Omega}^{e \cap \sigma})_\sigma = G_{x_0}^\sigma$ на σ . Далее, для функции f_σ , равной $G_{x_0}^\Omega$ на σ и нулю в других точках и, в частности, в точке Александрова пространства Ω , имеем $H_{f_\sigma}^{\Omega \setminus e} \geq \widehat{R}_{G_{x_0}^\Omega}^{e \cap \sigma}$ на $\sigma \setminus e$. Отправляясь от

¹⁾ Вместо этого стандартного доказательства можно рассмотреть график среднего значения на V_0^r как вогнутую функцию от $t = h(r)$ и воспользоваться интерпретацией правой полукасательной как (с точностью до множителя) массы, сосредоточенной на V_0^r . Это замечание позволяет для случая \mathbb{R}^n получить предварительное замечание, использованное в доказательстве теоремы IX.7.

последовательности σ_n (убывающей и такой, что $\bigcap \sigma_n = \{x_0\}$), выберем подпоследовательность σ_p^1 так, чтобы сумма $\sum H_{f_{\sigma_p^1}}^{\Omega \setminus e}(x_1)$ была конечна¹⁾ ($x_1 \in \omega_1$, где ω_1 — одна из компонент ω_l множества $\Omega \setminus e$), затем из нее выберем подпоследовательность σ_p^2 так, чтобы сумма $\sum H_{f_{\sigma_p^2}}^{\Omega \setminus e}(x_2)$ была конечна ($x_2 \in \omega_2$) и т. д. С помощью диагонального процесса мы получим подпоследовательность σ'_p , такую, что $u = \sum H_{f_{\sigma'_p}}^{\Omega \setminus e}$ будет гармонической функцией в $\Omega \setminus e$. Далее, $u \geq NG_{x_0}^{\sigma'_N}$ на $\sigma'_N \setminus e$ и $u \geq 2^{-1}NG_{x_0}^{\Omega}$ на подходящей окрестности точки x_0 (вне множества e)²⁾, и это доказывает, что поведение u в x_0 имеет требуемый характер.

Обратно, предположим, что существует функция u из условия б). Тогда функция $\epsilon u = G_{x_0}^{\Omega} + H_{G_{x_0}^{\Omega}}^{\sigma \setminus e}$ ($\epsilon > 0$) имеет неотрицательный \liminf во всех регулярных граничных точках множества $\sigma \setminus e$ ($\bar{\sigma} \subset \Omega$). Поэтому $G_{x_0}^{\Omega} - H_{G_{x_0}^{\Omega}}^{\sigma \setminus e} \leq \epsilon u$, и мы получаем условие а).

У п р а ж н е н и е. Доказать, что среди различных других форм критерия справедлива следующая: для какой-либо одной (или же для всякой) открытой относительно компактной окрестности σ точки x_0 любая неотрицательная гармоническая функция в $\sigma \setminus e$, стремящаяся к нулю квазивсюду на границе и мажорируемая функцией $G_{x_0}^{\Omega} + \text{const}$, обязательно нулевая.

6. Теорема IX. 10 (знаменитый критерий Винера³⁾).

¹⁾ Так как $f_{\sigma_p^1} \rightarrow 0$ на границе всюду, за исключением (полярной) точки x_0 , то общий член ряда может быть сделан $< 2^{-p}$.

²⁾ Так как отношение $G_{x_0}^{\sigma'_N} / G_{x_0}^{\Omega}$ стремится к 1 в x_0 .

³⁾ Первоначально (Винер [2]) был дан как критерий иррегулярности граничной точки открытого множества. Доказательство было усложнено из-за отсутствия продвинутой теории выметания. Существенная часть леммы IX. 8 в нем уже использовалась.

Пусть Ω — произвольная гринова область в \mathbb{R}^n (например, само \mathbb{R}^n при $n \geq 3$) и $x_0 \in \Omega$. Обозначим через $\gamma(\alpha)$ соответствующую классическую внешнюю емкость, т. е. для относительно компактного множества α полную массу меры, ассоциированной с \mathcal{B}_1^α . Положим еще

$$I_n = \{x \mid s^n \leq h(|x - x_0|) \leq s^{n+1}\} \quad (s > 1).$$

Тогда разреженность любого множества e в x_0 эквивалентна конечности $\sum \gamma(I_n \cap e) s^n$ или, что то же самое, конечности $\sum \mathcal{B}_1^{I_n \cap e}(x_0)$.

Эквивалентность двух последних условий ясна, потому что мера, ассоциированная с $\mathcal{B}_1^{I_n \cap e}$, сосредоточена на I_n , а ее потенциал в точке x_0 заключен между $\gamma(I_n \cap e) s^n$ и $\gamma(I_n \cap e) s^{n+1}$.

Доказательство. Прежде всего из приведенного условия следует, что $\mathcal{B}_1^{e \cap B_r^r}(x_0) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, т. е. что e строго разрежено. Доказательство обратного утверждения более трудно. Будем отправляться от G^2 -потенциала v , конечного в x_0 , но стремящегося к $+\infty$ в x_0 по e . Если $E = \bigcup_p I_{2^p} \cap e$, то функция \mathcal{B}_v^E конечна в x_0 и стремится к $+\infty$ по E вне некоторого полярного множества; соответствующая мера μ сосредоточена на \bar{E} , а ее сужение $\mu|_{CI_{2^p}}$ имеет h - или G -потенциал, ограниченный на $I_{2^p} \cap e$ (лемма IX.8, B)). Далее, мера $\mu|_{I_{2^p}}$ при $p \geq p_0$, где p_0 достаточно велико, имеет потенциал $V_p \geq 1$ на $I_{2^p} \cap e$ всюду, за исключением некоторого полярного множества. Следовательно, $V_p \geq \mathcal{B}_1^{I_{2^p} \cap e}$ при $p \geq p_0$ и $\sum_{p_0}^{\infty} \mathcal{B}_1^{I_{2^p} \cap e}(x_0) \leq (G\text{-потенциал } \mu \text{ в } x_0) = \mathcal{B}_v^E(x_0)$, т. е. эта сумма конечна. Аналогичные рассуждения проводятся для $\mathcal{B}_1^{I_{2^{p+1}} \cap e}(x_0)$.

Замечание 1. Тот же результат справедлив, если заменить I_n на множество $\{s^n < h(|x - x_0|) \leq s^{n+1}\}$

или на $\{s^n \leq h(|x - x_0|) < s^{n+1}\}$. Доказательство совершенно аналогично.

Замечание 2. Можно получить интегральную форму критерия. Она устанавливается сперва для замкнутых множеств (Келлог — Василеску — Фростман) как следствие критерия Винера или непосредственно. Если через $\delta(z)$ обозначить множество $e \cap \{x \mid h(|x - x_0|) \geq z\}$, то критерий состоит в конечности $\int \gamma(\delta(z)) dz$. Однако критерий этот используется нечасто.

Тем не менее, используя его, можно несколько усилить теорему IX.3 (см. Дени [1]) и более точно описать множество тех окружностей $|x_0 - x| = r$, которые не пересекают множество, разреженное в точке x_0 (приложение 3 теоремы IX.4) (см. Брело [4]).

Упражнение. Доказать, что функция f в \mathbb{R}^n , имеющая тонкий предел 1 в точке x_0 , стремится к 1 вдоль всех лучей, исходящих из x_0 , за исключением множества лучей, пересекающего единичную сферу (с центром в x_0) по локально полярному множеству (результат Дени [1]).

Некоторые дополнения. а) Другая форма критерия состоит в сходимости ряда с общим членом $\mathcal{B}_{h(|x-x_0|)}^{e \cap I_n}(y_0)$, $y_0 \neq x_0$.

б) Иные формы мы получим, рассматривая вместо I_n множество

$$J_n = \{t^{n+1} \leq |x - x_0| \leq t^n\}, \quad 0 < t < 1$$

(вместо любого из знаков \leq здесь можно поставить $<$). Мы можем заменить ранее рассматривавшиеся приведенные функции относительно $e \cap I_n$ на такие же функции, но относительно $e \cap J_n$. В случае \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) это не дает ничего нового. В случае \mathbb{R}^2 это эквивалентно сходимости последовательности $\{n\gamma(e \cap J_n)\}$ (Судзи). Доказательство получается соответствующим видоизменением приведенного выше.

З а м е ч а н и е. Условие

$$R_1^{e \cap J^n}(x_0) \rightarrow 0 \quad \text{или} \quad R_h^{e \cap J^n}_{(|x-x_0|)}(y_0) \rightarrow 0$$

(не зависящее от выбора t) может быть принято за определение *полуразреженности*. В случае \mathbb{R}^2 это условие обозначает, что $\nu(e \cap J_n) \rightarrow 0$.

с) В случае \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) для разреженности в точке на бесконечности могут быть получены интересные формы критерия. Например, разреженность эквивалентна тому, что внешняя классическая емкость конечна (см. Брело [6, 3, 10]).

7. Некоторые применения теории разреженности и тонких пределов. (См. Брело [5—10].) Лемма IX. 11. Пусть u — ограниченная снизу супергармоническая функция в открытом множестве $\omega \subset \mathbb{R}^n$. Положим $\mathcal{L}_x u = \liminf_{y \in \omega, y \rightarrow x} u(y)$ для $x \in \partial\omega$. Тогда если $x_0 \in \partial\omega$ — неизолированная точка $\partial\omega$, а $\mathcal{L}_{x_0} u < \liminf_{x \in \partial\omega, x \neq x_0, x \rightarrow x_0} \mathcal{L}_x u$, то $\mathcal{C}\omega$ разрежено в x_0 и u имеет в x_0 тонкий предел, равный $\mathcal{L}_{x_0} u$.

Доказательство. Пусть K — число, лежащее строго между членами доказываемого неравенства. Рассмотрим на ω функцию $\inf(u, K)$ и продолжим ее на $\mathcal{C}\omega \setminus \{x_0\}$ числом K . Мы получим супергармоническую функцию, которая станет также супергармонической в окрестности x_0 , если положить ее в точке x_0 , равной $\mathcal{L}_{x_0} u$. Множество, где эта функция U равна K , разрежено и содержит $\mathcal{C}\omega \setminus \{x_0\}$; кроме того, функция U тонко непрерывна в x_0 . Так как $u = U$ в тонкой окрестности x_0 всюду, кроме точки x_0 , то мы получаем требуемый результат.

Теорема IX. 12. Если функция u супергармонична в ω (открытом подмножестве пространства Грина) и ограничена снизу вблизи $x_0 \in \partial\omega$, причем $\mathcal{C}\omega$ разрежено в x_0 (т. е. точка x_0 иррегулярна для ω), то u имеет тонкий предел в x_0 .

Доказательство. Все сводится к случаю, когда ω ограничено в \mathbb{R}^n и функция u ограничена снизу в ω .

Результат очевиден, если x_0 — изолированная точка на $\partial\omega$. В противном случае рассмотрим функцию v , супергармоническую в окрестности x_0 , причем $v(x_0)$ конечно и $v(x) \rightarrow +\infty$ при $x \in \mathbb{C}\omega$, $x \neq x_0$, $x \rightarrow x_0$. Если $u + v$ стремится при $x \rightarrow x_0$ к $+\infty$ по ω , а следовательно, в тонкой топологии, то, поскольку v имеет конечный тонкий предел, u должно иметь бесконечный тонкий предел в x_0 .

Если же $\mathcal{L}_{x_0}(u + v)$ конечно, то мы замечаем, что $\mathcal{L}_x(u + v) \rightarrow +\infty$ при $x \neq x_0$, $x \in \partial\omega$, $x \rightarrow x_0$, и предыдущая лемма показывает, что $u + v$ имеет тонкий предел, равный $\mathcal{L}_{x_0}(u + v)$, а значит, u также имеет тонкий предел.

З а м е ч а н и е. Очевидно достаточно, чтобы функция u была ограничена снизу в некоторой тонкой окрестности, содержащейся в ω , поскольку она содержится в открытом множестве, на котором u также ограничена снизу.

Л е м м а IX. 13. Если функция u супергармонична в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то функция u/h_{x_0} имеет конечный тонкий предел в x_0 при $x \neq x_0$, $x \rightarrow x_0$, равный $\liminf_{x \neq x_0, x \rightarrow x_0} u/h_{x_0}$.

Доказательство. Как мы уже видели, $\liminf u/h_{x_0}$ равен нулю при условии, что $\mu_u\{x_0\} = 0$, а следовательно, он всегда конечен (см. доказательство теоремы IX.7). Если K больше этого \liminf , то множество, где $u/h_{x_0} > K$, должно быть разреженным (теорема IX.7, а)), и это показывает, что u/h_{x_0} имеет тонкий предел, равный этому \liminf .

Л е м м а IX. 14. Пусть функция u супергармонична в $\omega \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям

$$-\infty < \lambda = \liminf_{x \in \omega, x \rightarrow x_0} \frac{u}{h_{x_0}} < \liminf_{y \in \partial\omega, y \neq x_0, y \rightarrow x_0} \frac{\mathcal{L}_y u}{h_{x_0}(y)}$$

(x_0 — неизолированная точка $\partial\omega$). Тогда $\mathbb{C}\omega$ разрежено в x_0 , и u/h_{x_0} имеет в x_0 тонкий предел, равный λ .

Доказательство. Прибавляя функцию ah_x ($a > \lambda$), мы сводим дело к случаю $u \geq 0$, когда проходит до-

казательство, подобное доказательству леммы IX. 11. Введем число K , заключенное строго между обоими \liminf , и рассмотрим функцию $\inf(u, Kh_{x_0})$, продолженную вне $\{x_0\}$ с помощью Kh_{x_0} . Эта функция может быть продолжена в x_0 как функция U супергармоническая, в окрестности x_0 ; тогда множество $\{x \neq x_0, U(x)/h_{x_0}(x) = K\}$ будет разрежено в x_0 (теорема IX. 13, а)), и U/h_{x_0} имеет тонкий предел λ (лемма IX. 13), чем и завершается доказательство.

Теорема IX. 15. Если функция u супергармонична в ω (открытом подмножестве пространства Грина Ω) и неотрицательна вблизи точки $x_0 \in \partial\omega$, в которой $C\omega$ разрежено, то отношение $u/G_{x_0}^\Omega$ имеет конечный тонкий предел в x_0 .

Доказательство. Вопрос сводится к случаю ограниченного множества ω в \mathbb{R}^n . Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы IX. 12 с использованием теоремы IX. 7 и предыдущей леммы.

Заметим, что условие $u \geq 0$ можно заменить условием ограниченности снизу функции $u/G_{x_0}^\Omega$ в тонкой окрестности точки x_0 . Разумеется, $G_{x_0}^\Omega$ можно в теореме IX. 15 заменить на любую функцию $G_{x_0}^{\Omega'}$, где область $\Omega' \ni x_0$.

Следствие. Решение N_f^ω задачи Дирихле имеет тонкий предел в иррегулярной точке x_0 (равно как и отношение $N_f^\omega/G_{x_0}^\Omega$; фактически последний предел равен нулю), по крайней мере для $f \geq 0$.

Этот результат можно уточнить. А именно, упомянутый тонкий предел равен $\int f d\nu$, где $\nu = b_{\varepsilon, x_0}^{C\omega}$ (это очевидно, если f — потенциал на Ω).

Замечание. Поведение ограниченной гармонической в Ω функции u в окрестности иррегулярной точки x_0 можно описать точнее: $u(x_n)$ стремится к тонкому пределу в x_0 при условии, что $x_n \in \Omega$, $x_n \rightarrow x_0$.

и $G_{y_0}^\Omega(x_n)$ стремится к тонкому пределу $G_{y_0}^\Omega$ в x_0 ($y_0 \in \Omega$), т. е. к $\limsup_{x_0} G_{y_0}^\Omega$ (это условие не зависит от y_0). Более подробно см. об этом Брело [16].

8. Дальнейшие дополнения и указания. а) Тонкая топология полезна также при изучении поведения супергармонической функции в окрестности регулярной граничной точки. Можно поставить задачу Дирихле и определить огибающие типа Перрона — Винера с \liminf и \limsup в тонкой топологии (по крайней мере для относительно компактных открытых множеств); это дает те же самые огибающие (Брело [13]).

б) Используя понятие равномерной интегрируемости, введенное в теорию потенциала Дубом [1], можно доказать следующий результат: если гармоническая функция u в относительно компактной области ω имеет граничные тонкие пределы f почти всюду (относительно гармонической меры) и если u равномерно интегрируема по гармоническим мерам $\rho_{x_0}^{\omega_i}$ (области ω_i относительно компактны в ω , и $x_0 \in \omega_i$), то u совпадает с H_f^ω (см. Брело [22]).

в) Упомянем о понятиях *разреженности порядка φ* (Брело [5]) и *внутренней разреженности* (т. е. разреженности для всякого замкнутого подмножества в $e \cup \{x_0\}$) (Брело [8], Картан [2]).

г) Если u и v — положительные супергармонические функции в пространстве Грина Ω , то отношение u/v (мы полагаем его $+\infty$ там, где оно не определено) имеет конечный тонкий предел в каждой точке, за исключением некоторого полярного множества μ_v -меры нуль, т. е. v -полярного множества (гл. VIII, п. 6). Этот результат Дуба [4], который покрывает теорему IX. 15, в действительности был получен как следствие более общего результата (также принадлежащего Дубу) о поведении супергармонических функций на границе Мартина (см. гл. XVI, п. 4).

е) Тонкая топология играет важную роль также в теории так называемых *BLD-функций* (или *уточнен-*

ных VL-функций)¹⁾. Например, в любом открытом множестве $\omega \subset \mathbb{R}^n$ всякая BLD-функция тонко непрерывна квазивсюду (Дени [3]). Вероятно, теоремы IX. 12 и IX. 15 в общем случае на эти функции не распространяются, однако заметим, что всякая BLD-функция вне некоторого компактного множества в \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) имеет тонкий предел на бесконечности (Дени — Лионс).

9. Приложение к теории функций. Классическая теорема Вейерштрасса утверждает, что для функции $f(Z)$, мероморфной всюду в некоторой окрестности точки Z_0 , кроме самой точки Z_0 , предельное множество (значений этой функции) в Z_0 либо одноточечно (т. е. существует предел в Z_0), либо есть вся расширенная плоскость. Дуб [7] заметил, что то же самое утверждение верно для тонких предельных множеств. Доказывается это непосредственно, и Тода [1] заметил, что доказательство сохраняет силу, если Z_0 заменить на замкнутое множество, разреженное в Z_0 . Иными словами, имеет место

Теорема IX. 16. Если функция $f(Z)$ мероморфна в открытом множестве ω и $C\omega$ разрежено в Z_0 , то тонкое предельное множество в Z_0 либо одноточечно, либо совпадает с расширенной плоскостью.

Доказательство. Пусть λ не является предельным значением. Можно (выполнив в случае надобности дробно-линейное преобразование), считать, что $\lambda = \infty$. Тогда для некоторой тонкой окрестности σ точки Z_0 функция f будет ограничена в $\omega \cap \sigma$. Вещественная и мнимая части функции f имеют в Z_0 тонкий предел (теорема IX. 12), значит, и сама функция f тоже.

Этот вопрос был более глубоко разработан Дубом [7], а затем рядом авторов, в особенности Тодой [1, 2]. Например: если Z_0 — изолированная граничная

¹⁾ См. Дени [3], Дени и Лионс [1], Брело [15], Дуб [6]. Общая BLD-функция в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — это вещественная квазивсюду конечная функция, являющаяся пределом квазивсюду последовательности гладких (даже класса C^∞) функций с конечной полунормой Дирихле (т. е. с конечным интегралом Дирихле), представляющей собой последовательность Коши по этой полунорме.

точка и если в Z_0 предела нет (т. е. имеет место существенная особенность), но есть тонкий предел, то не существует пикаровских исключительных значений (Дуб); в общем случае, когда в Z_0 нет и тонкого предела, исключительные значения для любой тонкой окрестности точки Z_0 образуют локально полярное множество (Тода).

Глава X

СВЯЗИ С ГРАНИЦЕЙ ШОКЕ

1. Границы Шоке и Шилова. Определение X. 1. Пусть на компактном пространстве E рассматривается семейство \mathcal{F} функций со значениями в $\bar{\mathbb{R}}$, которые мы предполагаем полунепрерывными снизу и $> -\infty$. Следуя Шоке, назовем точку $X \in E$ \mathcal{F} -экстремальной, если любая единичная мера $\mu \geq 0$ на E , удовлетворяющая для всех $f \in \mathcal{F}$ неравенству $\int f(x) d\mu(x) \leq f(X)$, совпадает с ε_X (единичной массой в точке X). Множество таких точек называется *границей Шоке*¹⁾ пространства E (относительно \mathcal{F}).

Если \mathcal{F} — векторное пространство вещественных непрерывных функций, то данное определение сводится к тому, что всякая положительная единичная мера μ , удовлетворяющая условию $\int f d\mu = f(X)$ для всех f , совпадает с ε_X .

Если E — выпуклое компактное множество в отделимом локально выпуклом топологическом пространстве, а \mathcal{F} — множество сужений на E всех непрерывных линейных форм, то \mathcal{F} -экстремальные точки совпадают с крайними точками множества E .

Наименьшее компактное множество, на котором каждая функция из \mathcal{F} достигает своего минимума

¹⁾ Сам Шоке назвал ее тонкой границей, поскольку она содержится в границе Шилова (см. ниже).

(если оно существует), называется *границей Шилова* множества E .

Бауэр [1] доказал, что если функции из \mathcal{E} разделяют точки E и выполнено условие: $u \in \mathcal{E}, v \in \mathcal{E} \Rightarrow u + v \in \mathcal{E}$, то граница Шилова существует и является замыканием границы Шоке. Обе эти границы весьма важны, и поэтому представляет интерес их связь с понятием разреженности. Она дается следующей теоремой.

2. Теорема X.2 (Бауэр [1]). *Рассмотрим в пространстве Грина Ω_0 относительно компактное открытое множество Ω и семейство \mathcal{E} вещественных непрерывных в $\bar{\Omega}$ и гармонических в Ω функций. Тогда граница Шоке $\bar{\Omega}$ относительно \mathcal{E} есть множество всех регулярных граничных точек (а замыкание этого множества, называемое иногда приведенной границей¹⁾, есть соответствующая граница Шилова).*

Доказательство. Теорема является простым следствием следующей леммы Келдыша (литературные указания и простое доказательство этой леммы см. в Брело [20 bis]).

Если x_0 — регулярная граничная точка, то существует функция из \mathcal{E} , которая равна нулю в x_0 , а в остальных точках положительна.

Для наших целей достаточно существования для заданных $\varepsilon > 0, K > 0$ такой неотрицательной функции из \mathcal{E} , которая $< \varepsilon$ в x_0 и $> K$ вне некоторой окрестности δ точки x_0 (это доказывается проще). Будем использовать именно эту ослабленную лемму. Предположим, что x_0 — регулярная точка, а $\mu \geq 0$ — единичная мера, такая, что $\int f d\mu = f(x_0), \forall f \in \mathcal{E}$. Беря в качестве f функцию из леммы, получаем

$$\varepsilon \geq \int f d\mu \geq \int_{C\delta} f d\mu \geq K_1 \mu(C\delta).$$

¹⁾ Первоначально приведенная граница определялась как множество точек, любая окрестность которой пересекает $\partial\Omega$ не по локально полярному множеству.

Следовательно, величина $\mu(C\delta)$ сколь угодно мала, т. е. $\mu = \varepsilon_{x_0}$, и точка x_0 \mathcal{E} -экстремальна.

Обратно, предположим, что x_0 \mathcal{E} -экстремальна. Тогда $x_0 \notin \Omega$. Действительно, в противном случае $\int f d\sigma = f(x_0)$, $\forall f \in \mathcal{E}$, где σ — равномерно распределенная единичная мера на любой достаточно малой сфере с центром в x_0 .

Итак, пусть $x_0 \in \partial\Omega$; введем гармоническую меру ρ_x^Ω в точке $x \in \Omega$ и представление $H_\Phi^\Omega(x) = \int \varphi(y) d\rho_x^\Omega(y)$ (φ — конечная непрерывная на $\partial\Omega$ функция). Рассмотрим фильтр \mathfrak{F} , являющийся следом на Ω фильтра окрестностей точки x_0 , и пусть μ — любой слабый предел мер ρ_x^Ω по какому-либо фильтру \mathfrak{F}' , более тонкому, чем \mathfrak{F} . Тогда

$$\int f d\rho_x^\Omega \xrightarrow{\mathfrak{F}'} \int f d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{E}.$$

Но

$$\int f d\rho_x^\Omega = f(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} f(x_0),$$

и поэтому $\int f d\mu = f(x_0)$. Так как точка x_0 \mathcal{E} -экстремальна, то $\mu = \varepsilon_{x_0}$. Следовательно, меры ρ_x^Ω слабо сходятся к ε_{x_0} по фильтру \mathfrak{F} . Таким образом, $H_\Phi^\Omega(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \varphi(x_0)$, и мы заключаем, что точка x_0 регулярна.

Замечание. Обратную часть теоремы можно также получить, исходя из существования в иррегулярной точке x_0 тонкого предела H_f^Ω ($\forall f \in \mathcal{E}$). Он дается выражением $\int f d\nu_{x_0}$ (где ν_{x_0} — единичная положительная мера, отличная от ε_{x_0} ¹⁾) и равен $f(x_0)$ (в силу непрерывности f). Отсюда следует, что точка x_0 не является \mathcal{E} -экстремальной.

¹⁾ Фактически ν_{x_0} есть $b_{\varepsilon_{x_0}}^{C\Omega} \neq \varepsilon_{x_0}$ (выметание производится в некоторой области Грина $\Omega_0 \supset \bar{\Omega}$).

У п р а ж н е н и е. Рассмотрим вместо $\bar{\Omega}$ компакт K , взяв в качестве \mathcal{E} множество всех вещественных непрерывных на K функций, гармонических в K . Показать, что граница Шоке состоит из регулярных граничных точек множества $\overset{\circ}{K}$ и точек множества $K \setminus \overset{\circ}{K}$.

Теорема X.3. Рассмотрим в пространстве Грина Ω_0 компакт K и множество \mathcal{E} функций на K , каждая из которых является сужением на K функции, гармонической в некоторой открытой окрестности множества K . Тогда \mathcal{E} -экстремальные точки совпадают с устойчивыми граничными точками K , границей Шоке множества K относительно \mathcal{E} служит тонкая граница множества K , а границей Шилова¹⁾ служит ∂K .

Доказательство. Как и выше, никакая внутренняя точка не является \mathcal{E} -экстремальной.

Далее, обозначим через K_φ решение задачи Дирихле для множества K и конечной непрерывной функции φ на ∂K (гл. VI, п. 6, д)). Отображение $\varphi \mapsto K_\varphi(x)$ является возрастающим линейным функционалом, который, следовательно, представим в виде $\int \varphi d\nu_x$, где ν_x — положительная единичная мера²⁾ и $\nu_x = \varepsilon_x$ в том и только в том случае, когда точка $x \in \partial K$ устойчива. Заметим, что $K_f = f$ на K , $\forall f \in \mathcal{E}$. Следовательно, если точка $x \in \partial K$ неустойчива, то $f(x) = \int f d\nu_x$, $\forall f \in \mathcal{E}$, причем $\nu_x \neq \varepsilon_x$, и точка x не \mathcal{E} -экстремальна.

Обратно, если точка $x_0 \in \partial K$ не \mathcal{E} -экстремальна, то существует неотрицательная единичная мера

¹⁾ Условие отделимости Бауэра (п. 1) легко проверяется для \mathbb{R}^n , а в общем случае устанавливается исходя из рассмотрения отображения $x \mapsto G_y^\Omega(x)$ для $y \in \text{СК}$ с использованием симметрии G и аналитичности гармонических функций.

²⁾ Фактически $\nu_x = b_{\varepsilon_x}^{\text{СК}}$ и совпадает с ε_x в том и только в том случае, когда СК не разрежено в x (т. е. когда точка x устойчива).

$\rho_{x_0} \neq \varepsilon_{x_0}$, такая, что $f(x_0) = \int f d\rho_{x_0}$, $\forall f \in \mathcal{E}$. Пусть U — неотрицательная субгармоническая функция, равная нулю только в точке x_0 (подобно функции $|x - x_0|$ в \mathbb{R}^n)¹⁾. Тогда для любой открытой окрестности ω множества K имеем

$$H_U^\omega(x_0) = \int H_U^\omega(x) d\rho_{x_0}(x) \geq \int U d\rho_{x_0} > 0.$$

Следовательно, $K_U(x_0) > 0$. Точка x_0 неустойчива, т. е. СК разрежено в x_0 .

Доказательство будет закончено, если мы убедимся, что множество устойчивых точек плотно на ∂K . Если последнее неверно, то СК будет разрежено на множестве $e = \sigma \cap \partial K$ для некоторого открытого σ ; тогда для каждой компоненты множества $\Omega_1 \setminus K$ (Ω_1 открыто, $\Omega_1 \supset K$, $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_0$) множество e имело бы нулевую гармоническую меру, и значит, существовала бы в $\Omega_1 \setminus K$ положительная супергармоническая функция, стремящаяся к $+\infty$ в точках из e . Положив ее на K равной $+\infty$, мы получили бы функцию, супергармоническую в σ , и тогда множество $\sigma \cap K$ было бы локально полярным, а следовательно, СК было бы неразрезанным в точках множества e . Получено противоречие.

З а м е ч а н и е. Семейства \mathcal{E} — это частные случаи семейств общей аксиоматической теории Бауэра [1], который рассматривал на данном компактном пространстве линейное пространство вещественных непрерывных функций, содержащее постоянные и разделяющее точки этого компактного пространства; соответствующая задача Дирихле ставится на границе Шилова.

У п р а ж н е н и е. В предыдущих теоремах определить границу Шилова непосредственно.

¹⁾ Если точка x_0 неполярна, то годится функция $G_{x_0}(x_0) - G_{x_0}(x)$. В противном случае достаточно рассмотреть $u_n = \inf(G_{x_0}, n)$ и $\sum \lambda_n u_n(x_0) - \sum \lambda_n u_n(x)$, выбрав последовательность $\lambda_n > 0$ так, чтобы последняя сумма была конечной.

Глава XI

ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ АКСИОМАТИЧЕСКИХ
ТЕОРИЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
(КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ)

1. Мы приведем здесь лишь некоторые понятия для ряда важнейших случаев¹⁾.

Несколько видоизменив исходные положения теории Дуба [1], Брело [19, 20] развил теорию, обобщающую классическую теорию гармонических и супергармонических функций следующим образом.

Пусть дано локально компактное, но не компактное локально связное отделимое пространство Ω . С каждым открытым множеством ω свяжем некоторое линейное пространство вещественных непрерывных функций (которые будем называть гармоническими функциями в ω). Будем обозначать через $\bar{\Omega}$ компактификацию Александрова пространства Ω .

Аксиома 1 (аксиома пучка). Всякая гармоническая функция в ω будет гармонической и в любом открытом множестве $\omega' \subset \omega$, и всякая функция, гармоническая в некоторой окрестности каждой точки из ω , будет гармонической в ω .

Регулярные множества. Открытое множество ω называется *регулярным*, если $\bar{\omega} \subset \Omega$ и если любая вещественная непрерывная функция f на $\partial\omega$ допускает единственное непрерывное продолжение H_f на $\bar{\omega}$, гармоническое в ω и возрастающее вместе с f . Следовательно, это продолжение является линейной формой $\int f d\rho_x^\omega$ ($\rho_x^\omega \geq 0$ называется *гармонической мерой* в точке x).

Аксиома 2. Регулярные открытые множества образуют базис топологии пространства Ω .

¹⁾ Большая часть исследований различных авторов, частично отраженных в этой главе, освещена в Брело [28].

Аксиома 3. В области ω любая возрастающая последовательность гармонических функций стремится либо к гармонической функции, либо к $+\infty$.

Как установили Константиnescу и Корня, отсюда вытекает тот же вывод для любого направленного по возрастанию семейства, а Мокободский, Лоэб и Уолш показали, что аксиома 3 (при наличии других аксиом) эквивалентна тому, что всякое семейство гармонических функций $u_i \geq 0$ в области ω , ограниченное сверху в одной точке, будет равностепенно непрерывно в любой точке области ω .

2. Определение. Функция u называется *гипергармонической* в открытом множестве ω_0 , если она полунепрерывна снизу, $> -\infty$ и мажорирует $\int u d\rho_x^\omega$ для любого регулярного множества $\omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0$.

Если ω_0 связно, то такая функция u либо $\equiv +\infty$, либо конечна на плотном множестве. Гипергармоническая в открытом множестве ω_0 функция u , конечная на плотном множестве, называется *супергармонической*.

Принцип минимума. а) *Гипергармоническая в области функция $u \geq 0$ либо всюду равна нулю, либо всюду > 0 .*

б) *Если в открытом множестве ω существует супергармоническая функция $u \geq \varepsilon > 0$, то любая гипергармоническая в ω функция u , для которой $\liminf u \geq 0$ в каждой граничной точке, будет неотрицательной в ω . Если константы являются гармоническими функциями, то для любой гипергармонической функции u в любом ω имеем*

$$\inf_{y \in \omega} u(y) = \inf_{x \in \partial\omega} (\liminf u \text{ в } x).$$

Часто бывают полезными следующие определение и замечание.

h -гармонические функции. Если h — вещественная непрерывная положительная функция на Ω , то отношения u/h , где u — функция, гармоническая на некотором открытом множестве, образуют новый пучок, удовлетворяющий аксиомам (с тем же набором

ром регулярных открытых множеств). Соответствующие гипергармонические функции (называемые *h-гипергармоническими функциями*) являются частными от деления исходных гипергармонических функций на h .

Если h есть гармоническая функция из заданного пучка, то h -гармонические функции содержат константы.

Примеры. Решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа с достаточно гладкими коэффициентами в заданной области пространства \mathbb{R}^n удовлетворяют нашим аксиомам. Были получены некоторые обобщения на случай разрывных коэффициентов (Эрве [1—3]).

Потенциалы. Супергармоническая функция v , мажорирующая на открытом множестве ω некоторую гармоническую функцию, обладает наибольшей гармонической минорантой; если последняя равна нулю, то v называется *потенциалом*.

Существование в Ω положительного потенциала V эквивалентно существованию в Ω положительной супергармонической негармонической функции. Это будет иметь место, если существуют две непропорциональные положительные гармонические функции (условие, таким образом, носит локальный характер). Такие пространства Ω можно рассматривать как обобщение пространства Грина.

Обозначим через (A) систему аксиом 1—3 плюс существование положительного потенциала и через (A₁) то же самое при наличии счетной базы.

Следствия из (A). а) Для всякой точки x существуют потенциалы с носителем $\{x\}$ (т. е. гармонические вне $\{x\}$)¹⁾, но они не обязательно будут пропорциональны. Случай „пропорциональности“ важен для дальнейшего и обозначается через (AP) (через (A₁P) при наличии счетного базиса).

б) Неотрицательные гипергармонические функции на Ω образуют конус Φ из излагавшейся выше общей

¹⁾ Константинеску и Корня [2], I. Для (A₁) этот результат получила ранее Эрве [1].

теории. Локально полярные множества полярны, и некоторые основные свойства классической разреженности можно получить без дополнительных предположений. Это относится, например, к сверхразреженности и строгой разреженности при наличии разреженности в любой полярной точке $x_0 \notin e$, к существованию у неотрицательной супергармонической на открытом множестве ω функции тонкого предела в граничной точке, где $S\omega$ разрежено.

В случае (A_1) слабая разреженность эквивалентна разреженности для любой точки $x \notin e^1$; при дополнительных предположениях можно получить дальнейшие обобщения²⁾.

Задача Дирихле. В случае (A) задачу Дирихле можно изучать, используя обычную топологию, во всяком случае для относительно компактных открытых множеств ω ; разрешимость имеет место для любой вещественной непрерывной граничной функции. Иррегулярная граничная точка (определяемая так же, как в классическом случае) характеризуется слабой разреженностью $S\omega$ в x_0 .

В случае (A_1) теорема о разрешимости справедлива в таком же виде, как и в классическом случае.

3. Обобщение представления Рисса (в случае (A_1)). Если упорядочить супергармонические функции следующим образом:

$$u_1 > u_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2 +$$

$$+ (\text{неотрицательная супергармоническая функция})$$

(это — так называемый *специальный порядок*), то конус S^+ неотрицательных супергармонических функ-

¹⁾ На самом деле слабая разреженность $e \not\equiv x_0$ в x_0 эквивалентна разреженности при наличии счетного базиса окрестностей точки x_0 и, значит, заведомо имеет место в случае (A_1) . Это — результаты позднейших исследований Бауэра и Константинеску — Корня (ссылки см. в Брело [28]).

²⁾ См. Брело [19, 20, 33], Эрве [1]. О поведении ограниченных гармонических функций в открытом множестве ω в окрестности граничной точки x_0 , где $S\omega$ разрежено, см. Смирнелис [1].

ций превращается в решетку (даже полную). Введем такое соотношение эквивалентности для пар неотрицательных супергармонических функций:

$$((u_1, u_2) \sim (u'_1, u'_2)) \Leftrightarrow (u_1 + u'_2 = u_2 + u'_1)$$

и рассмотрим соответствующие классы эквивалентности $[u_1, u_2]$; они образуют линейное пространство S . При подходящей топологии T на S (Эрве)¹⁾ мы получаем отделимое локально выпуклое топологическое линейное пространство, причем конус S^+ , изоморфный множеству всех пар $[u, 0]$, имеет компактное метризуемое основание B . Теперь классическая теорема Шоке о крайних элементах дает для любой неотрицательной супергармонической функции u представление

$$l(u) = \int l(v) d\mu(v), \quad v \in B$$

(l — любая непрерывная линейная форма), откуда $u(x) = \int v(x) d\mu(v)$, где μ — единственная положительная единичная мера на множестве B , сосредоточенная на множестве его крайних точек. Эти крайние точки суть либо гармонические функции (их множество обозначим через H), либо потенциалы с точечными носителями (их множество обозначим через P). Следовательно,

$$u(x) = \int v(x) d\mu_1(v) + \int v(x) d\mu_2(v),$$

¹⁾ Если принять еще одну аксиому о существовании базиса β , состоящего из *вполне определяющих областей* δ (см. ниже п. 5), то полунормы пар (u_1, u_2) , равные $\left| \int u_1 d\rho_x^\delta - \int u_2 d\rho_x^\delta \right|$ ($\delta \in \beta, x \in \delta$), определяют топологию на S , в которой конус S^+ будет иметь компактное метризуемое основание (указано Картаном для классического случая (не опубликовано) и далее развито Брело [19]). Эрве [1] удалось обойтись без введения этой новой аксиомы, а Мокободский предложил другой простой способ построения этой топологии (см. Мокободский [1], Брело [28]).

где мера μ_1 сосредоточена на H , а мера μ_2 — на P . Первый член есть наибольшая гармоническая миноранта функции u ; в случае пропорциональности множество P гомеоморфно Ω и второй член может быть записан в виде $\int p_X(x) d\mu'_2(X)$ (где мера μ'_2 на Ω соответствует мере μ_2 на B , сосредоточенной на P). Первый член приводит к введению общей границы Мартина (см. часть 2).

4. Аксиома (D). Теория существенно обогащается и приближается по тонкости результатов к классической теории, если принять следующую новую аксиому:

Аксиома (D). Всякий ограниченный на Ω потенциал v , гармонический в открытом множестве ω (дополнение к наибольшему такому открытому множеству называется носителем потенциала v), мажорируется любой неотрицательной супергармонической функцией u , которая $\geq v$ на $S\omega$.

Отсюда вытекает то же самое свойство для любой подобласти пространства Ω ; если Ω имеет счетный базис, то аксиома D эквивалентна этому локальному свойству.

Некоторые следствия из $(A_1 + D)$. а) Для супергармонической функции, так же как и в классическом случае, справедлива теорема сходимости; в случае пропорциональности последняя эквивалентна аксиоме (D).

б) (Слабая разреженность) \Leftrightarrow (разреженность) \Leftrightarrow (сильная разреженность); полуполярные множества и полярные множества совпадают.

в) Неразреженность множества e в точке $x_0 \notin e$ всегда строгая (даже при отсутствии счетного базиса).

д) Точки разреженности множества e , принадлежащие этому множеству, образуют полярное множество, и свойство Шоке имеет место, например, для веса $\int \hat{R}_1^e d\rho_{x_0}^{\omega_0}$. Это важно при изучении поведения различных емкостей убывающих множеств, когда, как и

в классическом случае, существенна тонкая топология (см. Брело [26—30]).

5. Сопряженные пучки. (См. Эрве [1].) Рассмотрим совокупность предположений (A_2) , включающую в себя (A_1P) и предположение о существовании базиса относительно компактных открытых множеств, которые являются *вполне определяющими* в том смысле, что для любого потенциала v , гармонического в δ , $R_v^{\text{C}\delta} = v$ в δ .

Выберем потенциал p_y с носителем $\{y\}$, принадлежащий фиксированному компактному основанию конуса S^+ (в топологии Эрве). Тогда всякий потенциал можно будет записать в виде $\int p_y(x) d\mu(y)$, где μ — единственным образом определенная неотрицательная мера на Ω .

Далее, для всякого относительно компактного открытого множества ω функция $\hat{R}_{p_y}^{\text{C}\omega}$ является потенциалом и допускает поэтому представление $\int p_z(x) d\sigma_y^\omega(z)$. Рассмотрим любое вполне определяющее множество $\delta \subset \bar{\delta} \subset \omega_0$ и конечную непрерывную функцию f на ω_0 , удовлетворяющую условию $f(y) = \int f(z) d\sigma_y^\delta(z)$. Такие функции f для всех ω_0 образуют пучок, удовлетворяющий аксиомам 1—3, причем множества δ образуют базис регулярных открытых множеств, а σ_y^δ является гармонической мерой. При изменении в выборе потенциала p_y сопряженные гармонические функции умножаются на некоторую вещественную положительную непрерывную функцию.

Далее, $y \mapsto p_y(x)$ представляет собой соответствующий потенциал с носителем $\{x\}$ и обозначается через $p_x^*(y)$.

Пример. Если рассмотреть в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа с локально липшицевыми коэффициентами, то при подходящем

выборе p_y сопряженный пучок будет соответствовать классическому сопряженному уравнению (Эрве [1]).

6. Выметание. Приняв лишь предположения (A) или даже более слабые предположения (Бобок — Константинеску — Корня), можно обобщить важнейшие свойства функций R_Φ^e и особенно функций R_u^e , \hat{R}_u^e для супергармонических неотрицательных u (аддитивность по u , строгая субаддитивность по e и т. д.). Заметим, что при предположениях $(A_1 + D)$ функция \hat{R}_u^e является наименьшей неотрицательной супергармонической функцией, которая мажорирует u квазивсюду на e . Использование тонкой топологии оказывается здесь полезным.

Что касается выметания меры, то общая теория значительно отличается от классической из-за отсутствия симметрической функции Грина. Принимая предположения (A), рассмотрим меру $\mu \geq 0$ с компактным носителем; равенство $\int u db_\mu^e = \int \hat{R}_u^e d\mu$, подсказанное классическим случаем, если оно выполняется для всех вещественных непрерывных потенциалов u , определяет единственным образом меру $b_\mu^e \geq 0$ (называемую *выметенной мерой*). При дополнительных предположениях эта формула может быть обобщена на случай общих супергармонических функций u .

Эта теория имеет много приложений; в случае (A_1) уже справедлив критерий разреженности множества e в точке x_0 в форме $b_{e, x_0}^e \neq \varepsilon_{x_0}$ (Константинеску [2]).

Принимая предположения (A_2) , рассмотрим сопряженный пучок (п. 5). Пусть звездочка обозначает „сопряженное понятие“. Тогда справедлива следующая ключевая формула: $\hat{R}_{p_y}^e(x) = \hat{R}_{p_x}^{*e}(y)$ (Эрве). Из нее, в частности, вытекают:

а) тождественность сопряженно полярных и полярных множеств;

б) эквивалентность аксиомы (D) для сопряженного и для исходного пучков;

с) следующий критерий разреженности множества e в точке $x_0 \notin e$: для некоторой окрестности δ точки x_0 имеем $R_{\rho x_0}^{*e \cap \delta} \neq \rho_{x_0}^*$, а в случае, когда точка x_0 полярна (даже если она принадлежит e), $\widehat{R}_{\rho x_0}^{*e} \neq \rho_{x_0}^*$.

Однако мы не можем здесь входить в детали многочисленных обобщений классических результатов при различных предположениях (см. Эрве [1], Бобок, Константиnescу и Корня [1, 2], Константиnescу и Корня [2], Константиnescу [2], Брело [27, 28, 30, 32, 33]).

7. Задача Дирихле для компактных множеств. Здесь также были получены обобщения классических результатов. Прадель [1, 2] сперва при предположениях (A_1) , а затем и при многих других предположениях выяснил роль разреженности и рассмотрел связи рассматриваемого вопроса со свойством квазианалитичности гармонических функций (т. е. с тем обстоятельством, что гармоническая функция является нулем, если она равна нулю в окрестности некоторой точки).

Отметим еще, что в рамках аксиоматической теории (при тех или иных дополнительных предположениях) можно проследить и связи с границей Шоке, но, кажется, эти результаты нигде не публиковались.

8. Более слабые аксиоматики. Для того чтобы дать приложения к теории уравнений параболического типа, Бауэр [2, 3, 5] ослабил предыдущие аксиомы следующим образом. Если отвлечься от некоторых несущественных деталей, то он сохранил аксиомы 1 и 2 и ослабил аксиому 3, требуя, чтобы для направленного по возрастанию семейства гармонических функций u_i на открытом множестве ω $\sup u_i$ также был гармонической функцией при одном из следующих условий: (K_1) $\sup u_i$ ограничен; (K_2) $\sup u_i$ конечен; (K_D) (аксиома Дуба) $\sup u_i$ конечен на плотном множестве. Для того чтобы получить принцип минимума, Бауэр вводит следующую аксиому:

(Т) в Ω существует положительная гармоническая функция h и h -гипергармонические функции (определение такое же, как в классическом случае) разделяют точки Ω .

(Часто предполагают, что уже положительные функции разделяют точки Ω .)

Заметим, что эти аксиомы удовлетворяются и в первоначальной аксиоматике, если предположить, что в Ω существуют две непропорциональные гармонические функции.

Отправляясь от этих аксиом (в том числе от аксиомы (K_D)) и предполагая наличие счетного базиса в Ω и существование для каждой точки $x \in \Omega$ положительного в x потенциала, Бауэр построил теорию, аналогичную изложенной выше. Однако интегральное представление в этой теории более сложно и не столь полезно в связи с отсутствием у конуса S^+ основания. Понятие разреженности играет аналогичную роль.

Преимущество аксиоматики Бауэра состоит в том, что она применима также к уравнению теплопроводности и вообще к широкому классу уравнений второго порядка параболического типа. Бобок, КонстантINESКУ и Корня [2], КонстантINESКУ и Корня (в обширной монографии [4] по гармоническим пространствам), Уолш и другие авторы еще более ослабили эти аксиомы и получили более общие теории локального и глобального характера. Некоторые обратные проблемы были рассмотрены Ханзенем и особенно Мокободским и Сибони (см. Мокободский [2]).

Что касается топологий, используемых в этих аксиоматических теориях, то упомянем о недавней книге Фугледе [6], посвященной тонко гармоническим функциям, а также, хотя это и находится вне рамок нашего изложения, о важной роли понятия *ядерности*, введенного Лоэбом и Уолшем (см. также Хинриксен [1]).

Для приложений описанных аксиоматических теорий важно определить все пучки, удовлетворяющие аксиомам. Для случая области в \mathbb{R}^n и функций

класса C^2 , а также для случая всего пространства \mathbb{R}^n и пучков, инвариантных относительно сдвига и содержащих постоянные, это было сделано Бони [1] (и даже в предположении, что выполняются лишь аксиомы 1 и 2) с помощью предэллиптического (возможно, вырожденного) оператора. В случае не столь гладких функций (типа решений уравнений с разрывными коэффициентами, которые рассматривал Стампакья [1] и которые ввела в рамки предыдущей теории Эрве [2, 3]), этот вопрос остается открытым.

Часть 2

ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРИИ И МИНИМАЛЬНАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ

Глава XII

АБСТРАКТНАЯ МИНИМАЛЬНАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ. МИНИМАЛЬНАЯ ГРАНИЦА. МИНИМАЛЬНАЯ ТОНКАЯ ТОПОЛОГИЯ

1. Введение к части 2. Граничные задачи в теории дифференциальных уравнений в частных производных изучались ранее только для евклидовых границ. Небольшим усовершенствованием было введение точки на бесконечности в \mathbb{R}^n и использование компактифицированного пространства. Впрочем, в классической проективной геометрии также использовались точки, линии и плоскости на бесконечности.

Первым примером введения другой важной границы были *простые концы* Каратеодори, примененные им для изучения поведения функций комплексного переменного. В настоящее время их можно рассматривать как частный случай *границы Мартина* (см. гл. XIV), или компактификации (пополнения). Специалисты, изучавшие задачу Дирихле, также пришли к необходимости расщеплять некоторые граничные точки; ясно, что в круге с разрезом по некоторому радиусу нет никаких оснований ожидать, что в точке, лежащей на этом радиусе, граничное поведение решения будет одинаковым при подходе к ней с разных сторон. Для того чтобы придать этим рассмотрением более отчетливую форму, представлялось естественным ввести в соответствующей области подходящую метрику, совместимую с евклидовой топологией, и затем пополнить пространство по этой метрике (см. Брело [9]).

Но как вскоре было обнаружено, лучшие результаты получаются, если вводить *границу, зависящую от природы изучаемого класса функций*. Вообще если рассматривается произвольное топологическое про-

странство Ω и функции на нем со значениями в другом пространстве Ω' , то наиболее полезные границы получаются компактификацией или пополнением Ω , зависящим от класса рассматриваемых функций. Эти рассуждения будут развиты в следующей главе и там же будет дан ряд приложений.

Далее, иногда бывает естественно изучать поведение рассматриваемых функций в связи с некоторыми последовательностями точек или некоторыми фильтрами. Эти фильтры можно рассматривать как точки абстрактной границы, причем представляется интересным, а иногда даже необходимым ввести на объединении Ω и этой абстрактной границы топологию таким образом, чтобы сходимости по рассматриваемым фильтрам совпадала со сходимостью в этой топологии. Мы разовьем также и эту идею, а именно выбирая фильтры, связанные с понятием крайних элементов, понятием, которое становится все более важным в анализе (теория Шоке). На этом пути мы придем к понятиям минимальной границы, минимальной разреженности в точках границы и продолжим ранее рассматривавшуюся тонкую топологию до так называемой минимальной тонкой топологии. Фундаментальное значение этих понятий ярко демонстрируется классическими результатами Наим и Дуба о гармонических и супергармонических функциях (эти результаты обобщены Гаурисанкараном на случай аксиоматической теории гармонических функций), которые имеют существенные приложения в теории функций комплексного переменного и в дифференциальных уравнениях с частными производными. Во многих случаях, как мы это увидим ниже, минимальную тонкую топологию можно изучать в рамках теории, развитой в части I.

2. Предварительные сведения. Изложение в этом пункте основано на работе Мышкиса [1].

Теорема XII. 1. Пусть Ω — некоторое множество, и пусть в нем задана топология, превращающая его в топологическое пространство Ω_0 . Рассмотрим в Ω_0 семейство $\{\mathcal{B}_i\}$ ($i \in I$) базисов фильтров, образованных

открытыми множествами, и множество $\Omega_1 = \Omega \cup I$. Тогда на Ω_1 существуют топологии, удовлетворяющие условиям:

- 1) на Ω они индуцируют топологию пространства Ω_0 ;
- 2) для любой точки $i \in I$ пересечения окрестностей этой точки с Ω образуют фильтр с базисом \mathfrak{B}_i .

Среди этих топологий имеется сильнейшая топология T_M ; в ней множество Ω открыто, а на I она индуцирует дискретную топологию; множества из \mathcal{L}_i , к которым добавлена точка i , образуют базис окрестностей точки i в этой топологии.

Среди тех из указанных выше топологий, в которых Ω открыто, имеется слабая топология T_m ; окрестности точки $x_0 \in \Omega$ в Ω_0 образуют базис окрестностей в топологии T_m (равно как и в T_M). Что касается $i \in I$, то сопоставим каждому множеству $\alpha \in \mathfrak{B}_i$ множество J_α точек $j \in I$, таких, что α содержит какое-либо множество из \mathfrak{B}_j . Тогда множества $\alpha \cup J_\alpha$, где α пробегает \mathfrak{B}_i , образуют базис фильтра, являющегося фильтром окрестностей точки i в топологии T_m в Ω_1 .

Наконец, топология T_m будет отделимой в том и только в том случае, когда

- a) пространство Ω_0 отделимо;
- b) $\forall x \in \Omega_0, i \in I$, существуют окрестность точки x в Ω_0 и множество $\alpha \in \mathfrak{B}_i$ без общих точек;
- c) $\forall i, j \in I, i \neq j$; существуют множества $\alpha \in \mathfrak{B}_i, \beta \in \mathfrak{B}_j$ без общих точек.

Доказательство. Рассмотрим на Ω_1 топологию, в которой окрестности точки $x \in \Omega_0$ образуют базис окрестностей точки x , а множества $\alpha \cup \{i\}$, где α пробегает \mathfrak{B}_i , образуют базис окрестностей точки i . Аксиомы окрестностей выполняются, и эта топология удовлетворяет требованиям 1) и 2); в ней множество Ω открыто, и она индуцирует на I дискретную топологию.

В любой топологии, удовлетворяющей условиям 1) и 2), окрестность точки $x \in \Omega$ или $i \in I$ является, очевидно, окрестностью и в только что построенной топологии, и поэтому последняя действительно является сильнейшей топологией T_M .

Рассмотрим теперь утверждения, связанные с топологией T_m . Проверим, что классы множеств, указанные в формулировке теоремы, удовлетворяют аксиомам окрестностей. Это очевидно для точек $x \in \Omega$; для точки $i \in I$ рассмотрим соответствующее множество $\alpha \cup J_\alpha$ и покажем, что оно является окрестностью (в смысле введенной нами топологии, которую мы временно обозначим через S) для любой своей точки. Это очевидно для точек множества α (открытого в Ω_0); что касается точек $j \in J_\alpha$, то существует $\beta \in \mathfrak{B}_j$, содержащееся в α . Всякое j' , для которого $\mathfrak{B}_{j'}$ содержит элемент $\beta' \subset \beta$, принадлежит J_α . Поэтому β и все эти j' образуют S -окрестность, содержащуюся в $\alpha \cup J_\alpha$. Таким образом, аксиомы окрестностей выполнены, топология S удовлетворяет условиям 1) и 2) и множество Ω в ней открыто.

Осталось сравнить S с любой другой топологией T_1 , удовлетворяющей условиям 1) и 2), в которой множество Ω открыто. Рассмотрим произвольную S -окрестность V точки из Ω_1 и покажем, что она является T_1 -окрестностью. Это очевидно для точек из Ω . Для точки $i \in I$ множество V содержит $\alpha \cup J_\alpha$. Но α является пересечением множества Ω с некоторой T_1 -окрестностью точки i , T_1 -внутренность которой мы обозначим через α' . Если $j \in I$, $j \in \alpha'$, то α' есть T_1 -окрестность точки j , и $\alpha' \cap \Omega$ содержит элемент из \mathfrak{B}_j . Но $\alpha = \alpha' \cap \Omega$, поэтому $j \in J_\alpha$ и $\alpha' \subset \alpha \cup J_\alpha \subset V$. Итак, V есть T_1 -окрестность точки i , и мы заключаем, что топология T_1 сильнее, чем S .

Остальные утверждения очевидны.

З а м е ч а н и е. Отметим интересный случай, когда множество Ω открыто для любой топологии, удовлетворяющей условиям 1) и 2). Это случай, когда для всякой точки $x_0 \in \Omega$ существует лежащая в Ω окрестность, не принадлежащая никакому фильтру с базисом \mathfrak{B}_i .

3. Абстрактная минимальная разреженность. Следуя Гаурисанкарану [1] и несколько обобщая его

изложение, рассмотрим непустое множество Ω и два семейства неотрицательных функций.

Одно из них — это содержащий нулевую функцию конус U вещественных функций (которые будем называть *гармоническими*).

Второе — это *выпуклый конус* P функций со значениями в $\bar{\mathbb{R}}$ (которые будем называть *потенциалами*). Таким образом, $p_1, p_2 \in P \Rightarrow \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \in P$ ($\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$). (Мы принимаем, что $0 \cdot \infty = 0$.)

Обозначим еще через Σ конус $U + P$, состоящий из функций вида $u + p$, где $u \in U$, $p \in P$. Будем предполагать выполненными следующие аксиомы.

Аксиома A_1 . $u \in U$, $p \in P$, $u \leq p \Rightarrow u = 0$.

Аксиома A_2 . Если $u \in U$, $v \in \Sigma$, то $\inf(u, v) \in \Sigma$.

В случае когда существует $p \equiv +\infty$, из аксиомы A_1 следует, что $u = 0$, $\forall u \in U$.

Минимальные гармонические функции.

Определение XII.2. Функция $h \in U$ называется *минимальной*, если из $u \in U$, $u \leq h$ следует, что $u = \alpha h$ ($\alpha \geq 0$).

Важный частный случай \mathcal{C} . Предположим, что конус U выпуклый и рассмотрим линейное пространство $U - U$. Допустим, что при естественном порядке для функций неотрицательные элементы совпадают с элементами из U , т. е. что U является положительным конусом этого линейного пространства. Тогда для $h \in U$, $h \neq 0$,

h минимальна $\Leftrightarrow \{\lambda h \mid \lambda \geq 0\}$ есть крайняя образующая конуса U .

Приведенная функция. Так же как и ранее, рассмотрим множество $E \subset \Omega$ и вещественную неотрицательную функцию f на E , мажорируемую функцией из Σ . Положим

$$R_f^E = \inf_{v \in \Sigma} v, \quad v \geq f \text{ на } E,$$

и будем вместо R_f^Ω писать просто R_f .

Теорема XII.3. Для заданных минимальной гармонической функции $h \neq 0$ и множества $E \subset \Omega$ следующие условия эквивалентны:

а) $R_h^E \neq h$, т. е. существует такая функция $v \in \Sigma$, что $v \geq h$ на E , но не всюду.

б) Существует потенциал, мажорирующий h на E .

с) Для $u \in U$ условие $u \leq R_h^E$ влечет $u = 0$.

Доказательство. Пусть имеет место а), и пусть v — функция, существование которой утверждается в а). Тогда функция $w = \inf(v, h)$ удовлетворяет условиям $w \in \Sigma$, $w \leq h$, $w = h$ на E , $w \neq h$. Далее, разложение $w = u + p$ дает $u \leq h$, откуда $u = \alpha h$, где $0 \leq \alpha < 1$; следовательно, на E выполнены соотношения $\alpha h + p = h$, $\frac{p}{1-\alpha} = h$, и мы получаем б).

Пусть имеет место б). Тогда потенциал, мажорирующий h на E , мажорирует также R_h^E , и это дает с). Наконец, из с) следует, что $h \not\leq R_h^E$ и, значит, $h \neq R_h^E$, т. е. что имеет место а).

Определение XII.4. Множество $E \subset \Omega$ называется разреженным относительно минимальной функции $h \neq 0$, если $R_h^E \neq h$ (или выполняется любое другое из приведенных выше эквивалентных условий).

Это определение (Гаурисанкаран [1]) подсказано соответствующим классическим понятием (Наим [1]) и условием в форме б) для классического случая полуплоскости и так называемых PL-множеств (Альфортс и Хейнс [1]).

Замечания. 1) Ω никогда не разрежено ($\forall h$); \emptyset всегда разрежено; подмножество разреженного множества разрежено.

2) Для всякой минимальной гармонической функции $h \neq 0$ множество $\{x \mid h(x) = 0\}$ разрежено относительно h .

Действительно, потенциал 0 мажорирует h на этом множестве.

Теорема XII.5. Пусть h — минимальная гармоническая функция $\neq 0$. Объединение множеств e_1

и e_2 , разреженных относительно h , будет также разрежено. Таким образом, множества, дополнительные к разреженным, образуют некоторый фильтр \mathfrak{F}_h .

Доказательство. Если e_1, e_2 разрежены и p_1, p_2 — потенциалы, мажорирующие h на e_1, e_2 , то $p_1 + p_2$ есть потенциал, мажорирующий h на $e_1 \cup e_2$.

Теорема XII.6 (Наим [1], теорема 8.17; Гаурисанкаран [1]). Пусть h — минимальная функция $\neq 0$, а $v \in \Sigma$. На множестве Λ , где отношение v/h имеет смысл, v/h имеет предел по фильтру \mathfrak{F}_h ; этот предел конечен и равен $\inf_{\Lambda} (v/h)$.

Доказательство. Так как $S\Lambda \subset \{x \mid h(x) = 0\} = e$, то $S\Lambda$ разрежено. Положим $\alpha = \inf_{\Lambda} (v/h)$; число α конечно, ибо в противном случае и v , и любая потенциальная часть p в разложении функции v были бы равны $+\infty$ на S_e , а тогда было бы $h \leq p$ всюду и функция h была бы нулем.

Рассмотрим теперь множество $E_\epsilon = \{x \in \Lambda \mid v/h \geq \alpha + \epsilon\}$, $\epsilon > 0$. Очевидно, $E_\epsilon \supset e \cap \Lambda$ и $E_\epsilon \neq \Omega$; далее, $v/(\alpha + \epsilon) \geq h$ на $E_\epsilon \cap S_e$, но не на $S E_\epsilon$. Следовательно, E_ϵ разрежено, т. е. $S E_\epsilon \in \mathfrak{F}_h$, и v/h на Λ стремится к α по фильтру \mathfrak{F}_h .

Следствия. Пусть h, h' минимальны, $\neq 0$ и не пропорциональны. Тогда

- 1) на множестве E , где h'/h имеет смысл, $h'/h \xrightarrow{\mathfrak{F}_h} 0$;
- 2) существуют не имеющие общих точек множества из фильтров \mathfrak{F}_h и $\mathfrak{F}_{h'}$ соответственно.

Доказательство. Утверждение 1) есть следствие того факта, что неравенство $h'/h \geq K > 0$ на E влекло бы за собой равенство $h' = \lambda h$ всюду. Утверждение 2) доказывается рассмотрением того подмножества множества E , где $h'/h < 1$ (это — элемент фильтра \mathfrak{F}_h), и того подмножества, где $h'/h > 1$ (это — элемент фильтра $\mathfrak{F}_{h'}$).

4. Минимальная граница. Две минимальные функции будем называть эквивалентными, если они про-

порциональны (с множителем $\neq 0$). Класс эквивалентности, содержащий h , обозначим через \bar{h} . Фильтр \mathfrak{F}_h одинаков для всех h из данного класса эквивалентности, и поэтому мы будем его обозначать через $\mathfrak{F}_{\bar{h}}$.

Определение XII.7. Классы \bar{h} называются *минимальными граничными точками*, а их совокупность — (абстрактной) *минимальной границей* \mathfrak{m} .

Понятия \lim , $\lim \sup$, ..., соответствующие фильтру $\mathfrak{F}_{\bar{h}}$, будут называться *тонкими* \lim , $\lim \sup$ и т. д. в точке \bar{h} .

Заметим, что в случае \mathcal{C} точкам \bar{h} соответствуют крайние образующие конуса U , а если U имеет основание, то крайние точки этого основания.

Топологическая интерпретация. Пусть Ω — топологическое пространство, U — выпуклый конус вещественных неотрицательных непрерывных функций на Ω , а P — выпуклый конус полунепрерывных снизу неотрицательных функций. Тогда функция из $U + P$ и $+\infty$ образуют выпуклый конус Φ , удовлетворяющий условиям гл. I, и можно рассматривать тонкую топологию \mathcal{T} на Ω .

Далее, для непрерывных функций $f \geq 0$ имеем $R_f^E = R_f^{\tilde{E}}$ (где \tilde{E} — тонкое замыкание множества E). Следовательно, если e разрежено в \bar{h} , то \tilde{e} также разрежено, и дополнения к тонко замкнутым множествам, разреженным в \bar{h} , образуют базис фильтра $\mathfrak{F}_{\bar{h}}$, элементы которого — тонко открытые множества. Мы можем теперь воспользоваться теоремой XII.1, в которой I заменено на \mathfrak{m} . Таким образом получается

Теорема XII.8. *На множестве $\Omega \cup \mathfrak{m}$ существуют топологии, удовлетворяющие условиям:*

- 1) на Ω они индуцируют тонкую топологию \mathcal{T} ;
- 2) соответствующие им фильтры окрестностей для любой точки $\bar{h} \in \mathfrak{m}$ индуцируют на Ω фильтр $\mathfrak{F}_{\bar{h}}$.

В такой топологии понятия \lim , $\lim \sup$, ... по Ω

в точке \bar{h} совпадают с понятиями \lim , \limsup , ... по фильтру $\mathfrak{F}_{\bar{h}}$.

Среди этих топологий имеется сильнейшая (в ней Ω открыто, и на \mathfrak{m} она индуцирует дискретную топологию), а среди тех из них, в которых Ω открыто, имеется слабейшая, которую называют минимальной тонкой топологией (подробнее о ней см. в XII. 1).

Заметим, что последняя топология будет отделимой, если отделима тонкая топология в Ω и если для всякого $x \in \Omega$ существует потенциал p , для которого $p(x) > 0$ (поскольку это влечет для каждой точки \bar{h} разреженность некоторой окрестности точки x).

Далее мы изучим важный частный случай, когда минимальная тонкая топология на $\Omega \cup \mathfrak{m}$ является тонкой топологией (в смысле гл. I), отвечающей некоторому семейству функций, полунепрерывных снизу (для подходящей топологии на $\Omega \cup \mathfrak{m}$).

У п р а ж н е н и е. Кроме принятых предположений допустим еще, что

- i) в Φ возможно счетное сложение;
- ii) для некоторой фиксированной минимальной функции $h \neq 0$ неравенство $u \leq u'$ ($u, u' \in U$) влечет $u - \lambda h \leq u' - \lambda' h$, где $\lambda = \inf_{\Omega} (u/h)$, $\lambda' = \inf_{\Omega} (u'/h)$ (нижнюю грань следует брать по множествам, где эти отношения имеют смысл);

iii) существует такая последовательность множеств V_n , что $R_h^{e \cap V_n} \rightarrow 0$ для всякого множества e , разреженного в \bar{h} (функция h та же, что и в ii)).

Тогда для заданной функции $u_0 \in U$ существует множество e_0 , разреженное в этой точке \bar{h} и такое, что для всякой функции $u \in U$, $u \leq u_0$, отношение u/h имеет предел по фильтру с базисом $V_{n_p} \setminus e_0$ (где n_p — некоторая подпоследовательность последовательности натуральных чисел) (этот предел равен минимальному тонкому пределу в \bar{h} , т. е. пределу по фильтру $\mathfrak{F}_{\bar{h}}$).

Глава XIII

ОБЩАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ
КОНСТАНТИНЕСКУ — КОРНЯ.
ПЕРВЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

1. Константинеску и Корня доказали свою теорему (см. [1]) для римановых поверхностей, но их доказательство сохраняет силу для произвольных локально компактных пространств. Они пришли к понятию компактификации, близкому к понятию компактификации Стоуна—Чеха и позволяющему вводить различные полезные границы единообразным способом.

Теорема XIII.1. Пусть Ω — локально компактное, но не компактное отделимое пространство и Φ — семейство непрерывных функций на Ω со значениями в $[-\infty, \infty]$. Существует единственное с точностью до гомеоморфизма компактное пространство $\hat{\Omega}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- i) Ω — плотное подмножество в $\hat{\Omega}$.
- ii) Каждую функцию $f \in \Phi$ можно продолжить до непрерывной функции \hat{f} на $\hat{\Omega}$.
- iii) Семейство функций $\{\hat{f}\}$ разделяет точки множества $\hat{\Omega} \setminus \Omega$ (это множество будем ниже обозначать через Δ).

Кроме того, Ω открыто в пространстве $\hat{\Omega}$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что Ω открыто в любом $\hat{\Omega}$, удовлетворяющем перечисленным выше условиям. Рассмотрим все относительно компактные открытые множества Ω_i в пространстве Ω . Имеем $\Delta \subset \bar{\Omega} \subset (\overline{\Omega \setminus \Omega_i}) \cup \bar{\Omega}_i$ (замыкания берутся в $\hat{\Omega}$). Так как замыкание Ω_i в Ω компактно, то оно является также замыканием в $\hat{\Omega}$. Поэтому $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$ и $\Delta \subset \overline{\Omega \setminus \Omega_i}$, $\Delta \subset \bigcap_i (\overline{\Omega \setminus \Omega_i})$. Но $(\overline{\Omega \setminus \Omega_i}) \cap \Omega$ совпадает с множеством

$\Omega \setminus \Omega_i$ (замкнутым в Ω). Таким образом,

$$\bigcap_i (\overline{\Omega \setminus \Omega_i}) \cap \Omega = \emptyset,$$

$$\bigcap_i (\overline{\Omega \setminus \Omega_i}) \subset \hat{\Omega} \setminus \Omega = \Delta, \quad \Delta = \bigcap_i (\overline{\Omega \setminus \Omega_i}).$$

Следовательно, Δ компактно и Ω открыто в $\hat{\Omega}$.

Докажем теперь единственность пространства $\hat{\Omega}$, предполагая, что оно существует. Пусть $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}'$ — два пространства, удовлетворяющие поставленным условиям. Рассмотрим фильтр окрестностей точки $x \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$ в $\hat{\Omega}$ и его след \mathfrak{I}_Ω в Ω . Этот базис фильтра \mathfrak{I}_Ω должен сходиться в $\hat{\Omega}'$; в противном случае на Ω имелись бы два фильтра $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ (на любом множестве $\supset \Omega$ это будут базисы фильтров), более тонких, чем \mathfrak{I}_Ω , и сходящихся в пространстве $\hat{\Omega}'$ к точкам X_1, X_2 ($X_1 \neq X_2$). Эти точки не принадлежат Ω , поскольку сходимости \mathfrak{I}_1 в $\hat{\Omega}'$ к точке $X_1 \in \Omega$ влекла бы за собой сходимости в Ω , а значит, в $\hat{\Omega}$, что противоречит сходимости \mathfrak{I}_Ω к точке $x \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$. Рассмотрим теперь две точки X_1 и $X_2 \in \hat{\Omega}' \setminus \Omega$, $X_1 \neq X_2$, и непрерывное продолжение \bar{f} некоторой функции f на $\hat{\Omega}'$, разделяющее точки X_1, X_2 ; функция f должна иметь различные пределы по $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$, и должен существовать предел по \mathfrak{I}_Ω , что невозможно.

Итак, \mathfrak{I}_Ω сходится в $\hat{\Omega}'$ к точке $X \in \hat{\Omega}' \setminus \Omega$, и, переставляя $\hat{\Omega}$ и $\hat{\Omega}'$, мы убеждаемся, что соответствие $x \mapsto X$ биективно. Далее, тождественное отображение $x \mapsto x$ множества Ω как части $\hat{\Omega}$ в Ω , рассматриваемое как часть $\hat{\Omega}'$, имеет предел $X \in \hat{\Omega}' \setminus \Omega$ в каждой точке $x \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$; поэтому оно имеет непрерывное продолжение, определяющее гомеоморфизм между $\hat{\Omega}$ и $\hat{\Omega}'$.

Остается доказать существование пространства $\hat{\Omega}$. Пусть Φ_0 обозначает множество всех конечных непрерывных функций на Ω с компактным носителем. Рассмотрим множество $\Psi = \Phi \cup \Phi_0$. Каждой функции

$\psi \in \Psi$ сопоставим пространство $\bar{R}_\psi = [-\infty, \infty]$ и положим $A = \prod_{\psi \in \Psi} \bar{R}_\psi$. Это — компакт. Пусть t обозначает отображение Ω в это пространство, определяемое условием: $t(x)$ есть точка с координатой $\psi(x)$ в каждом \bar{R}_ψ . Покажем, что это отображение — гомеоморфизм.

а) Очевидно, что оно непрерывно.

б) Оно инъективно: если взять $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$, то существует функция $\psi \in \Phi_0$, равная в этих точках, соответственно нулю и единице (нужно использовать равномеризуемость Ω или то обстоятельство, что компактификация Александрова нормальна).

в) Отображение t^{-1} из $t(\Omega)$ в Ω , обратное к t , непрерывно. Действительно, возьмем произвольную окрестность V точки $x_0 \in \Omega$ в Ω и покажем, что $t(V)$ есть окрестность $t(x_0)$ в $t(\Omega)$. Рассмотрим в V компактную окрестность U точки x_0 и функцию ψ_0 из Φ_0 , не равную нулю в x_0 , носитель которой содержится в U . Обозначим через $E \subset t(\Omega)$ множество точек, у которых координата, принадлежащая \bar{R}_{ψ_0} , отлична от нуля. E есть открытое множество в $t(\Omega)$ (как прообраз открытого множества) и содержит $t(x_0)$. Если точка $t(x) \in E$, то ее проекция на \bar{R}_{ψ_0} есть $\psi_0(x) \neq 0$, поэтому $x \in U$, $t(x) \in t(U)$ и $E \subset t(U)$. Следовательно, $t(U)$ есть окрестность точки $t(x_0)$ в $t(\Omega)$ и то же верно для $t(V)$.

Далее, Ω плотно в компактном пространстве $\hat{\Omega}$, гомеоморфном $\overline{t(\Omega)}$ (замыкание в A) (следует рассмотреть в $\overline{t(\Omega)}$ равномерную структуру компактного пространства $\overline{t(\Omega)}$, соответствующую структуру на Ω и пополнения обоих пространств).

Теперь легко проверить, что полученное $\hat{\Omega}$ удовлетворяет требованиям ii) и iii). Рассмотрим $f \in \Phi$. Проекция точки $t(x)$ на \bar{R}_f есть $f(x)$; это отображение из $t(\Omega)$ в \bar{R}_f имеет непрерывное продолжение — проекцию из $\overline{t(\Omega)}$ в \bar{R}_f . Следовательно, в силу гомеоморфизма, f допускает непрерывное продолжение на $\hat{\Omega}$.

Рассмотрим, наконец, на $\widehat{\Omega} \setminus \Omega$ две точки x_1, x_2 , $x_1 \neq x_2$; их образы в $m(\widehat{\Omega}) \setminus m(\Omega)$ имеют различные проекции на некоторое R_ψ , т. е. $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$. Следовательно, $\psi \notin \Phi_0$, ибо в противном случае непрерывное продолжение ψ на границу Ω было бы нулем. Итак, $\psi \in \Phi$, и iii) доказано.

2. Другая характеристика рассмотренной компактификации. Теорема XIII. 2. *Равномерная структура на Ω , индуцируемая единственной равномерной структурой на $\widehat{\Omega}$, может быть охарактеризована*

- а) как слабая равномерная структура S , в которой все функции из Ψ равномерно непрерывны;
- б) как слабая равномерная структура S' , совместимая с топологией Ω , в которой все функции из Φ равномерно непрерывны.

Следовательно, $\widehat{\Omega}$ является пополнением Ω в равномерной структуре S или S' .

Доказательство. Докажем сначала эквивалентность а) и б). Топология, определяемая S , является слабой топологией, в которой непрерывны все функции из Ψ , и поэтому она совпадает с топологией Ω . Поэтому структура S входит в число структур, описанных в б), и, следовательно, сильнее, чем S' . Но, с другой стороны, структуры из б) содержатся в семействе из а), и поэтому S' сильнее, чем S .

Далее, структура S предкомпактна, так как функции из Ψ определяют отображения в компактное пространство. Следовательно, соответствующее пополнение $\widehat{\Omega}$ компактно, и мы сейчас убедимся, что оно гомеоморфно $\widehat{\Omega}$.

Окрестности точки $x \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega$ пересекают Ω по множествам, образующим фильтр Коши в равномерной структуре $\widehat{\Omega}$ (в которой функции из Ψ равномерно непрерывны). Следовательно, в более сильной структуре S этот фильтр сходится в $\widehat{\Omega}$ к некоторой точке $X \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega$. Отображение $x \mapsto X$ инъективно. Действительно, рассмотрим точки $x_1 \neq x_2$ на $\widehat{\Omega} \setminus \Omega$ и функцию

$f \in \Phi$, непрерывное продолжение которой на $\hat{\Omega}$ разделяет x_1 и x_2 . Ясно, что $X_1 \neq X_2$, ибо в противном случае функция f , допускающая непрерывное продолжение на $\bar{\Omega}$, имела бы одинаковый предел по фильтрам на Ω , индуцированным окрестностями точек x_1 и x_2 в $\hat{\Omega}$. Это отображение даже биективно: окрестности точки $X \in \bar{\Omega} \setminus \Omega$ и $\bar{\Omega}$ пересекают Ω по множествам некоторого фильтра, причем имеется более тонкий фильтр \mathfrak{I} , сходящийся в $\hat{\Omega}$ к некоторой точке $x \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$. Ее образ при нашем отображении есть предел фильтра \mathfrak{I} в $\bar{\Omega}$, т. е. точка X .

Тождественное отображение $x \mapsto x$ из Ω (рассматриваемого как подмножество в $\hat{\Omega}$) в Ω (рассматриваемое как подмножество $\bar{\Omega}$) имеет пределы в точках множества $\hat{\Omega} \setminus \Omega$, т. е. допускает непрерывное продолжение. Это продолжение является взаимно однозначным непрерывным отображением компактного пространства $\hat{\Omega}$ на отделимое пространство $\bar{\Omega}$ и, следовательно, есть гомеоморфизм.

Упражнение. Рассматривая только S' , доказать непосредственно, что соответствующее пополнение есть $\hat{\Omega}$.

3. Примеры применений. (См. Константинеску и Корня [1].) 1) Теорема XIII.1 в случае пустого Φ показывает, что $\hat{\Omega}$ является единственным компактным пространством, в котором Ω плотно и которое содержит только одну точку вне Ω . Следовательно, $\hat{\Omega}$ есть (с точностью до гомеоморфизма) компактификация *Александра*.

2) Если Φ содержит все вещественные непрерывные (конечные или нет) функции, то мы получаем компактификацию *Стоуна — Чеха*.

3) Пусть Φ — множество вещественных непрерывных функций, такое, что для любой функции $f \in \Phi$ имеется компактное множество, дополнение к которому представляет собой объединение областей, в каждой из которых f постоянна. Тогда мы получаем компактификацию *Керекьярто — Стоилова*, введенную

первоначально для римановых поверхностей и используемую обычно в теории функций комплексного переменного.

4) Если рассмотреть все вещественные непрерывные функции класса BLD (см. гл. IX, п. 9, подстрочное примечание на стр. 109) на римановой поверхности или в \mathcal{E} -пространстве, то мы получим *компактификацию Ройдена*.

5) Рассмотрим следующий подкласс предыдущего класса функций: для каждой функции f из этого подкласса существует замкнутое множество F , вне которого f гармонична и реализует минимум интеграла Дирихле в классе BLD-функций, равных f на CF . Тогда мы получаем *компактификацию Курамоти* (определенную им для римановых поверхностей), хорошо приспособленную для изучения BLD-функций. По этим важным вопросам см. сборник „Kuramoto's boundaries on Riemann surfaces“, Lecture Notes, v. 58, Springer, 1968.

6) В следующей главе мы детально изучим еще одну и самую важную для нас компактификацию, а именно *компактификацию Мартина*.

Глава XIV

КЛАССИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО МАРТИНА¹⁾. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАРТИНА

1. Элементарное введение. Рассмотрим на пространстве Грина Ω семейство функций $x \mapsto \frac{G(x, y)}{G(x, y_0)} = K(x, y)$ ($y_0 \in \Omega$ фиксировано), зависящее от параметра y . Если положить $K(y_0, y_0) = 1$, то функция $x \mapsto K(x, y)$ будет непрерывной и при $y = y_0$.

Теорема XIV. 1. *Пространство $\hat{\Omega}$, получающееся по теореме Константинеску — Корня (гл. XIII), в слу-*

¹⁾ См. фундаментальную работу Мартина [1], а также обзорные статьи Брело [12, 24].

чае, когда в качестве Φ взято указанное только что семейство функций, не зависит, с точностью до гомотопии, от точки y_0 . Оно называется пространством Мартина, а множество $\Delta = \hat{\Omega} \setminus \Omega$ — границей Мартина. Топология пространства $\hat{\Omega}$ будет обозначаться через \mathcal{T}_m .

Доказательство. В любой области $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, $\Omega_1 \ni y_0$ функция $y \mapsto G(x, y)/G(x, y_0)$ гармонична, если $x \notin \Omega_1$, положительна и равна 1 в y_0 . Поэтому при $x \rightarrow X \in \Omega \setminus \hat{\Omega}$ эта функция стремится к гармонической положительной функции. Рассмотрим

$$\frac{G(x, y)}{G(x, y'_0)} = \frac{G(x, y)}{G(x, y''_0)} \frac{G(x, y''_0)}{G(x, y'_0)}, \text{ где } y'_0, y''_0 \in \Omega_1, y'_0 \neq y''_0.$$

Если $\hat{\Omega}'$, $\hat{\Omega}''$ обозначают пространства, соответствующие семействам, связанным соответственно с точками y'_0 , y''_0 , то оба множителя справа сходятся в $\hat{\Omega}''$ при $x \rightarrow X \in \hat{\Omega}'' \setminus \Omega$ к конечным положительным пределам; то же справедливо поэтому для левой части. Если при различных X_1, X_2 пределы левой части при $y = y''_0$ различны, то эти пределы разделяют точки множества $\hat{\Omega}'' \setminus \Omega$; в противном случае при некотором y будут различны пределы $G(x, y)/G(x, y''_0)$ в соответствии с определением $\hat{\Omega}''$. Таким образом, пределы (в $\hat{\Omega}''$) левой части при $x \rightarrow X \in \hat{\Omega}'' \setminus \Omega$ и любом y существуют и разделяют точки множества $\hat{\Omega}'' \setminus \Omega$. Следовательно, $\hat{\Omega}$ гомеоморфно $\hat{\Omega}''$.

Дополнения. i) Предел $K(X, y)$ функции $K(x, y)$ при $x \rightarrow X \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$ (обозначаемый также через $K_X(y)$) есть вещественная непрерывная функция точки $(X, y) \in \Delta \times \Omega$. Это — следствие непрерывности по X и равномерной непрерывности по y .

ii) Рассмотрим при фиксированном y_0 семейство функций $x \mapsto K(x, y_i)$ для плотного множества $\{y_i\}$. Пространство, получаемое в этом случае по теореме Константинеску — Корня, совпадает с $\hat{\Omega}$, так как

функции $y \mapsto K(x, y)$ сходятся, когда x стремится к любой граничной точке этого пространства. Введем, далее, счетное семейство $\{\varphi_j\}$ вещественных непрерывных функций с компактным носителем, плотное во всем пространстве таких функций (с нормой $\sup|\cdot|$). Слабейшая равномерная структура в Ω , в которой все функции $K(x, y_i)$ и φ_j равномерно непрерывны, есть структура, пополнение которой дает $\hat{\Omega}$. Это показывает, что структура, о которой идет речь, имеет счетный базис окружений и, следовательно, пространство $\hat{\Omega}$ метризуемо.

У п р а ж н е н и е. Указать явную форму метрики в $\hat{\Omega}$ (как это и сделал Мартин).

iii) Вместо $G(x, y_0)$ мы могли бы рассматривать непрерывные функции $G'(x, y_0) = \int G(x, y) d\rho_{y_0}^{\omega_0}(y)$ (где $d\rho_{y_0}^{\omega_0}$ — гармоническая мера для регулярной области $\omega_0 \ni y_0$) и соответствующие им функции K' . Получаемое таким образом пространство снова совпадает с $\hat{\Omega}$ (так как $K' = K$ при $x \notin \omega_0$).

2. Минимальные гармонические функции в пространстве Грина Ω . Возьмем в качестве U и P (см. гл. XII, п. 3) неотрицательные гармонические функции и потенциалы. Аксиомы A_1 и A_2 выполнены. Кроме того, U выпукло и в пространстве \mathcal{E}_U разностей неотрицательных гармонических функций с естественным порядком U является неотрицательным конусом. Поэтому минимальные гармонические функции являются точками на крайних образующих конуса U . В \mathcal{E}_U мы можем ввести топологию локальной равномерной сходимости, и тогда множество функций из \mathcal{E}_U , определяемое условием $u(y_0) = 1$, будет замкнутой гиперплоскостью. Положительные функции из этой гиперплоскости образуют компактное метризуемое множество B_{y_0} (например, с метрикой $\sup|u_1 - u_2|$ по некоторой фиксированной окрестности точки y_0). Крайние точки B_{y_0} совпадают с минимальными гармоническими функциями, равными 1 в y_0 , и их мно-

жествами есть *непустое* множество типа G_δ (как множество крайних точек компактного метризуемого множества в линейном пространстве).

Найдем все минимальные гармонические функции. Очевидно, что если μ — положительная мера на Δ , то $\int K(X, y) d\mu(X)$ есть положительная гармоническая функция в Ω (это следует из критерия среднего). Справедливо и обратное утверждение.

Лемма XIV. 2. Всякая неотрицательная функция u , гармоническая в Ω , допускает представление

$$u(y) = \int K(X, y) d\mu(X), \quad (1)$$

где μ — положительная мера Радона на Δ .

Доказательство. Если Ω_n — возрастающая последовательность относительно компактных открытых множеств, такая, что $\Omega_n \subset \bar{\Omega}_n \subset \Omega$ и $\bigcup \Omega_n = \Omega$, то функция $\hat{R}_u^{\Omega_n}$ является потенциалом (она супергармонична и $\leq \lambda G_{y_0}$, если λ выбрать так, чтобы $\lambda G_{y_0} \geq u$ на $\partial\Omega_n$ и, следовательно, на Ω_n). Представление Рисса дает

$$\hat{R}_u^{\Omega_n}(y) = \int G(x, y) d\mu_n(x) = \int K(x, y) dv_n(x),$$

где $dv_n(x) = G(x, y_0) d\mu_n(x)$, $\int dv_n = u(y_0)$ и $\text{supp } v_n \subset \subset \partial\Omega_n$. Можно извлечь подпоследовательность v_{n_p} , слабо сходящуюся к положительной мере μ на $\hat{\Omega}$ с носителем в Δ . Непрерывность функции $x \mapsto K(x, y)$ на $\hat{\Omega}$ дает

$$u(y) = \int K(X, y) d\mu(X).$$

Теорема XIV. 3. Всякая минимальная гармоническая функция u равна $u(y_0)K(X, y)$ для некоторой точки $X \in \Delta$.

Соответствующие точки X называются *минимальными точками границы Δ* , и их множество обозначается через Δ_1 .

Доказательство. Пусть $u > 0$. Используем представление $u(y) = \int K(X, y) d\mu(X)$, в котором μ есть строго положительная мера. На Δ существует такая точка X_0 , что всякая ее открытая окрестность V в $\hat{\Omega}$ имеет μ -меру $\neq 0$. Следовательно,

$$\int_V K(X, y) d\mu(X) = \lambda u(y),$$

где V — произвольная окрестность точки X_0 , а $\lambda = \mu(V)/u(y_0)$. Таким образом,

$$\frac{u(y)}{K(X_0, y) u(y_0)} = \frac{\int_V \frac{K(X, y)}{K(X_0, y)} d\mu(X)}{\int_V d\mu}.$$

Пусть y зафиксировано. При заданном $\varepsilon > 0$ выберем V так, чтобы при $X \in V$ иметь

$$1 - \varepsilon < \frac{K(X, y)}{K(X_0, y)} < 1 + \varepsilon.$$

Тогда то же самое будет верно для всей правой части, и, следовательно, левая часть равна 1.

З а м е ч а н и е. Предыдущие рассуждения показывают, что если функция $\int K(X, y) d\mu(X)$ минимальна, то она пропорциональна $K(X_0, y)$, где X_0 — точка замкнутого носителя меры μ .

Соответствие $X \mapsto K_X$ между Δ и множеством B'_{y_0} функций K_X из B_{y_0} является гомеоморфизмом. Действительно, $X \mapsto K_X$ есть непрерывное и взаимно однозначное отображение компакта Δ на отделимое пространство B'_{y_0} . Образ множества Δ_1 представляет собой множество крайних точек множества B_{y_0} .

3. Представление Мартина. Напомним сначала фундаментальные результаты Шоке.

Рассмотрим в отделимом локально выпуклом топологическом линейном пространстве E выпуклый

конус C с компактным основанием B (пересечением C с некоторой замкнутой гиперплоскостью).

а) Если B метризуемо, то любая точка $X \in B$ есть центр тяжести некоторой меры $\mu \geq 0$ ($\|\mu\| = 1$), сосредоточенной на множестве \mathcal{E} крайних точек множества B (т. е. такой, что $\mu(C\mathcal{E}) = 0$). Это значит, что для всякой непрерывной линейной формы l на E имеем

$$l(X) = \int l(x) d\mu(x).$$

б) Если в упорядоченности, определяемой конусом C , C есть решетка, то такое представление единственно.

В нашем случае для пространства \mathcal{E}_U , конуса U и основания B_{y_0} известно, что B_{y_0} компактно и метризуемо, а C является решеткой (гл. VI), причем последнее можно доказать и без использования представления Рисса.

Следовательно, для всякой неотрицательной гармонической функции u имеем

$$l(u) = \int l(v) d\mu(v), \quad (2)$$

где $v \in B_{y_0}$, μ — положительная мера Радона на B_{y_0} , а также на B'_{y_0} , так как $\mu(C\mathcal{E}) = 0$. Отсюда

$$u(y) = \int v(y) d\mu(v), \quad v \in B_{y_0}, \quad (3)$$

причем мера μ не зависит от y .

Так как Δ гомеоморфно B'_{y_0} , то μ можно рассматривать и как меру на Δ . Таким образом, доказана

Теорема XIV.4. Для любой неотрицательной гармонической функции u на Ω имеем

$$u(y) = \int_{\Delta} K_X(y) d\mu(X) \quad (X \in \Delta), \quad (4)$$

где неотрицательная мера μ сосредоточена на Δ , и единственна.

Единственность в (2) влечет за собой единственность в (3) и (4), поскольку из справедливости соотношения (3) для всех y следует справедливость соотношения (2) для всех l . В противном случае u не была бы центром тяжести для μ , и этот центр тяжести, будучи точкой из B_{y_0} , являлся бы гармонической функцией, отличной от u , т. е. в некоторой точке y мы имели бы $u(y) \neq \int v(y) d\mu(v)$.

4. Пример: случай шара в \mathbb{R}^n . Теорема XIV.5. В случае когда Ω есть шар с центром y_0 и радиусом R , отношение $G(x, y)/G(x, y_0)$ имеет предел при $x \rightarrow X$, где X — точка обычной евклидовой границы, причем этот предел равен

$$K_X(y) = R^{n-2} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|X - y|^n}. \quad (4)$$

Поэтому евклидово замыкание шара Ω и его граница гомеоморфны $\hat{\Omega}$ и Δ , а $K(X, y)$ есть приведенное выше ядро Пуассона. Кроме того, $\Delta_1 = \Delta$ (поскольку все точки границы равноправны и по крайней мере одна из них минимальна).

Доказательство. Мы начнем со случая полупространства, для которого легче вести расчет.

Для полупространства в \mathbb{R}^3 имеем

$$G(x, y) = \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x_1 - y|}, \quad (5)$$

где x_1 — точка, симметричная точке x относительно граничной плоскости H . При фиксированной точке y_0

$$\frac{G(x, y)}{G(x, y_0)} = \frac{|x_1 - y| - |x - y|}{|x_1 - y_0| - |x - y_0|} \cdot \frac{|x - y_0| \cdot |x_1 - y_0|}{|x - y| \cdot |x_1 - y|}.$$

Первый множитель равен

$$\frac{|x_1 - y|^2 - |x - y|^2}{|x_1 - y_0|^2 - |x - y_0|^2} \cdot \frac{|x_1 - y_0| + |x - y_0|}{|x_1 - y| + |x - y|}.$$

Из теорем элементарной геометрии следует, что $|x_1 - y|^2 - |x - y|^2 = 4\delta_x \delta_y$, где δ_x — расстояние от x

до H . Отсюда мы легко заключаем, что при $x \rightarrow X \in H$

$$\frac{G(x, y)}{G(x, y_0)} \rightarrow \frac{\delta_y}{\delta_{y_0}} \frac{|X - y_0|^3}{|X - y|^3}.$$

В случае \mathbb{R}^2 мы используем соотношение $\log x \sim x - 1$ при $x \rightarrow 1$, и аналогичные вычисления дают предел, равный

$$\frac{\delta_y}{\delta_{y_0}} \frac{|X - y_0|^2}{|X - y|^2}.$$

В общем случае пространства \mathbb{R}^n при $n > 3$, для того чтобы преобразовать выражение $\frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x - y|^{n-2}}$, воспользуемся тождеством $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots)$; это приводит нас снова к разности $\frac{1}{|x_1 - y|} - \frac{1}{|x - y|}$; используя предыдущие вычисления, приходим к общему результату:

$$\frac{G(x, y)}{G(x, y_0)} \rightarrow \frac{\delta_y |X - y_0|^n}{\delta_{y_0} |X - y|^n} \quad (x \rightarrow X \in H). \quad (6)$$

Те же рассуждения показывают, что когда x стремится к точке Александра пространства \mathbb{R}^n , то $G(x, y)/G(x, y_0) \rightarrow \delta_y/\delta_{y_0}$ и, таким образом, (6) при очевидных соглашениях имеет место для всех граничных точек. Это дает ядро Пуассона для полупространства. Пользуясь преобразованием Кельвина (в случае \mathbb{R}^2 — простой инверсией), мы заключаем, что в случае шара предел $G(x, y)/G(x, y_0)$ существует в каждой граничной точке. Поэтому $\hat{\Omega}$ можно идентифицировать с евклидовым замыканием.

Для того чтобы получить явное выражение этого предела, проще всего воспользоваться полученным выше предельным соотношением для точки Александра.

Подвергнем преобразованию Кельвина функцию δ_y/δ_{y_0} , выполнив инверсию в шаре радиуса δ_{y_0} с центром в точке X_0 , симметричной точке y_0 относительно плоскости H ; точку касания шара с H обозначим через Z_0 . Образ нашего полупространства будет шаром

с центром $Y_0 = \frac{1}{2}(X_0 + Z_0)$ и радиусом $R = \frac{1}{2}\delta_{y_0}$. Возьмем точку Y_0 в качестве начала и обозначим через y_i, y'_i координаты точки y и ее образа y' , причем последнюю ось выберем перпендикулярной к H (с $y_n > 0$). Тогда

$$\delta_y + 2R = \delta_{y_0}^2 \frac{y'_n + R}{|X_0 - y'|^2},$$

$$\frac{\delta_y}{\delta_{y_0}} = \delta_{y_0} \frac{y'_n + R}{|X_0 - y'|^2} - 1 = \frac{2Ry'_n + 2R^2 - |X_0 - y'|^2}{|X_0 - y'|^2},$$

и так как

$$|y' - X_0|^2 = |y' - Y_0|^2 + |Y_0 - X_0|^2 + 2(y' - Y_0) \cdot (Y_0 - X_0) =$$

$$= |y' - Y_0|^2 + R^2 + 2Ry'_n,$$

то

$$\frac{\delta_y}{\delta_{y_0}} = \frac{R^2 - |y' - Y_0|^2}{|X_0 - y'|^2}.$$

Вспоминая вид преобразования Кельвина в \mathbb{R}^n , получаем

$$\frac{R^{n-2}}{|X_0 - y'|^{n-2}} \frac{R^2 - |y' - Y_0|^2}{|X_0 - y'|^2} = R^{n-2} \frac{R^2 - |y' - Y_0|^2}{|X_0 - y'|^n},$$

чем формула (5) и установлена.

Следствие. Отсюда непосредственно получается представление Лебега—Стилтьеса для положительных гармонических функций в шаре с центром y_0 радиуса R :

$$u(y) = \int R^{n-2} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|X - y|^n} d\mu(X) \quad (7)$$

(с единственной положительной мерой μ на $\partial\Omega$).

У п р а ж н е н и я. 1) Доказать существование меры μ , применив представление интегралом Пуассона в концентрическом меньшем шаре и предельный переход.

2) Используя полученное представление, вывести, что минимальные гармонические функции совпадают с функциями, пропорциональными ядру Пуассона.

Замечание. В случае шара (с центром y_0) из наличия предела $G(x, y)/G(x, y_0)$ при стремлении x к граничной точке X следуют существование нормальной производной функции $x \mapsto G(x, y)$ в точке X (так как функция $G(x, y_0)$ эквивалентна в этом случае функции $(R - |x - y_0|)/R^{n-1}$) и равенство

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} = \frac{1}{R} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|X - y|^n}.$$

Напомним, что если функция, гармоническая по одну сторону от гладкой (дважды непрерывно дифференцируемой) поверхности, равна нулю на этой поверхности, то ее градиент имеет при приближении к поверхности конечный предел. В случае функции $x \mapsto G(x, y)$ в шаре этот предел равен как раз $\frac{\partial G}{\partial n_x}$. Выше мы установили существование этой нормальной производной независимо.

Подчеркнем, что классическое решение задачи Дирихле для шара, т. е. интеграл Пуассона

$$\int K_x(y) f(X) d\nu(X), \text{ или } \int R^{n-2} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|X - y|^n} f(X) d\nu(X)$$

(ν — равномерное распределение единичной массы на сфере), можно записать в виде

$$R^{n-1} \int \frac{\partial G}{\partial n_x}(y) f(X) d\nu(X),$$

равно как общее представление (7) в виде

$$\int \frac{\partial G}{\partial n_x}(y) dm(X).$$

5. Другой важный пример. Теорема XIV.6. Рассмотрим в пространстве Грина Ω полярную точку x_0 и область $\Omega_1 = \Omega \setminus \{x_0\}$. Минимальные гармонические функции на Ω_1 — это либо минимальные функции на Ω , либо функции, пропорциональные $G_{x_0}^\Omega$.

Доказательство. Если w — минимальная функция на Ω , то ее сужение на Ω_1 будет минимальной функцией для Ω_1 . Действительно, всякая неотрицательная

гармоническая миноранта на Ω_1 допускает гармоническое продолжение на Ω , являющееся минорантой для w и, следовательно, пропорциональное w .

Рассмотрим любую неотрицательную гармоническую функцию u на Ω_1 и для ее супергармонического продолжения \hat{u} на Ω запишем представление Рисса

$$\hat{u} = \lambda G_{x_0} + v \geq 0,$$

где v — гармоническая функция. При этом $\lambda \geq 0$, $v \geq 0$. Если $u \leq G_{x_0}$, то $v \leq G_{x_0}$ на Ω_1 и, значит, на Ω . Следовательно, $v = 0$, $u = \lambda G_{x_0}$ и функция G_{x_0} минимальна на Ω_1 .

Предположим теперь, что функция u минимальна на Ω_1 . Если u ограничена вблизи x_0 , то $\lambda = 0$ и функция \hat{u} гармонична и обязательно минимальна на Ω , так как любая ее гармоническая миноранта будет пропорциональна ей на Ω_1 и, следовательно, на Ω . Если же u неограничена, то ее миноранта v должна быть пропорциональна u и, следовательно, равна нулю, так что $u = \lambda G_{x_0}$.

Есть более сложное доказательство, использующее результаты о поведении функций, гармонических в окрестности бесконечно удаленной точки в \mathbb{R}^n ($n \geq 3$), но не в самой этой точке.

Упражнение. Если точка x_0 не полярна в пространстве Грина, то минимальные гармонические функции на $\Omega_1 = \Omega \setminus \{x_0\}$ — это функции вида $u - \lambda G_{x_0}$, где функция u минимальна на Ω , а λ таково, что $u(x_0) - \lambda G_{x_0}(x_0) = 0$, а также функции, пропорциональные G_{x_0} .

6. Замечания. Результаты, полученные для случая шара, можно обобщить на области с более или менее гладкой границей; это было сделано разными путями; см., например, Валле-Пуссен [1] и недавние работы Ханта и Уидена [1, 2], о которых будет сказано ниже (гл. XVII, § 4).

Важно подчеркнуть, что в \mathbb{R}^2 или на римановой поверхности всякое конформное преобразование сохраняет функцию Грина и, значит, ядро $K(x, y)$. Так

как односвязная область ω , граница которой в \mathbb{R}^2 содержит более одной точки, может быть конформно отображена на открытый круг, то пространство Мартина для такой области ω гомеоморфно евклидову замыканию круга, а граница Мартина совпадает с множеством простых концов Каратеодори.

В общем случае для произвольной евклидовой области Грина топология Мартина, как показывают примеры (Мартин [1], Брело [12]), несравнима с евклидовой топологией. Напомним пример области в \mathbb{R}^3 , содержащейся между двумя касающимися сферами; в этом случае $K(x, y)$ имеет много различных предельных функций, когда x стремится к точке касания сфер. Это значит, что точке касания отвечает много точек границы Мартина (Булиган [1]). Наоборот, для некоторых областей может оказаться, что $K(x, y)$ имеет одинаковую предельную функцию, когда x стремится к различным точкам евклидовой границы.

Этим и объясняется недостаточность понятия обычной границы, известная уже довольно давно, а также успех нового понятия.

7. Другая характеристика пространства Мартина (краткие указания). Рассмотрим пространство Грина Ω , конус S^+ неотрицательных супергармонических функций и линейное пространство S разностей этих функций. Точнее (см. гл. XI), мы рассматриваем множество пар (u, v) , где $u, v \in S^+$, и вводим отношение эквивалентности в этом множестве следующим образом: $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$, если $u_1 + v_2 = u_2 + v_1$, т. е. если $u_1 - v_1 = u_2 - v_2$ квазивсюду (поскольку обе стороны равенства определены лишь квазивсюду). Класс эквивалентности, отвечающий (u, v) , обозначим через $[u, v]$. Тогда S является множеством этих классов эквивалентности, а S^+ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов $[u, 0]$. Как мы уже упоминали, S^+ является полной решеткой относительно порядка, порождаемого самим конусом S^+ (специальный порядок) (это может быть

доказано без использования теоремы Рисса о представлении), и существует топология на S , в которой S^+ локально компактно. Сейчас нам достаточно ввести счетный базис регулярных областей ω_i и счетное всюду плотное множество точек x_j . Тогда $[u, v] \mapsto \left| \int u d\rho_{x_j}^{\omega_i} - \int v d\rho_{x_j}^{\omega_i} \right|$ есть полунорма, и эти полунормы определяют топологию (не зависящую от выбора ω_i, x_j). Таким образом, у конуса S^+ существует компактное метризуемое основание B , например определяемое условием $\int u d\rho_{y_0}^{\omega_0} = 1, u \in S^+$ (область ω_0 регулярна, точка y_0 фиксирована) (см. Брело [19], Эрве [1]). Мы уже видели, что, используя теорему Шоке, можно (даже в рамках аксиоматической теории) прийти к представлению любой неотрицательной супергармонической функции в виде

$$u(y) = \int v(y) d\mu(v), \quad v \in B, \quad (8)$$

где μ — положительная мера на B , сосредоточенная на множестве крайних точек B . Отсюда можно вывести, что крайние элементы множества B совпадают с точностью до множителя с функциями $y \mapsto G(x, y)$, т. е. равны $\lambda_x G(x, y)$, где $\lambda_x = \left[\int G(x, y) d\rho_{y_0}^{\omega_0}(y) \right]^{-1}$, и минимальные гармонические функции равны 1 в точке y_0 .

Теорема XIV.7. *Множество E потенциалов из B , имеющих точечный носитель (т. е. множество функций $\lambda_x G(x, y)$), и его замыкание \bar{E} в B гомеоморфны Ω и $\tilde{\Omega}$ соответственно.*

Доказательство. Что касается первого утверждения, то см. Брело [18] и Гаурисанкаран [1]. Далее, мы видим, что \bar{E} гомеоморфно некоторому компакту $\tilde{\Omega}$, в котором Ω плотно. Для последовательности функций из B , гармонических в открытом множестве ω , сходимости в B влечет за собой сходимости в каждой точке ω . Следовательно, $\tilde{\Omega}$ удовлетворяет всем усло-

виям, определяющим $\widehat{\Omega}$ (здесь важно существование предела $G(x, y)/G(x, y_0)$, когда x стремится к точке из $\widehat{\Omega} \setminus \Omega$).

Напомним, что мера μ в (8) может быть разложена на две части: меру μ_1 , сосредоточенную на множестве крайних потенциалов и меру μ_2 , сосредоточенную на множестве минимальных гармонических функций. Следовательно, ввиду гомеоморфизма между \mathcal{E} и Ω и между $\overline{\mathcal{E}} \setminus \mathcal{E}$ и Δ мы получаем разложение Рисса — Мартина

$$u(y) = \int G(x, y) \lambda_x d\mu_1(x) + \int K_X(y) d\mu_2(X). \quad (9)$$

Второе слагаемое — это наибольшая гармоническая миноранта, представление которой дается формулой (1).

Глава XV

КЛАССИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО МАРТИНА И МИНИМАЛЬНАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ

1. Минимальная разреженность. Минимальная гонкая топология на $\Omega \cup \Delta_1$. Применим теперь результаты гл. XII. Рассмотрим на пространстве Грина Ω выпуклый конус U неотрицательных гармонических функций, выпуклый конус P потенциалов и конус Φ неотрицательных гипергармонических функций. Каждый класс функций, пропорциональных минимальной гармонической функции, соответствует некоторой точке $X \in \Delta_1$; общая абстрактная минимальная граница \mathfrak{m} из гл. XII, п. 4, совпадает в данном случае с Δ_1 . Разреженность множества $e \subset \Omega$ в точке X будет, следовательно, характеризоваться условием $R_{K_X}^e \neq K_X$ или существованием потенциала, мажорирующего K_X на e (или хотя бы квазивсюду на e , но с мерой, сосредоточенной на B_e), или же тем свойством, что $R_{K_X}^e$ является потенциалом. Так же как и

в общем случае, объединение двух разреженных множеств будет разрежено, само Ω неразрежено и дополнения к разреженным множествам образуют фильтр \mathfrak{F}_X .

Замечание. Если множество e разрежено в X , то $\hat{R}_{KX}^{e \cap CK}$ есть потенциал (для любого компакта $K \subset \Omega$), и этот потенциал стремится к нулю по направлению по возрастанию множеству компактов K . В частности, если δ_n есть окрестность X в $\hat{\Omega}$, причем $\bigcap \delta_n = X$, то $R_{KX}^{e \cap \delta_n} \rightarrow 0$.

Упражнение. Если всякое замкнутое подмножество множества e типа F_σ разрежено в $X \in \Delta_1$, то e также разрежено в X (указано Тодой для случая открытого множества e).

Пример. В случае когда Ω — шар, множество $\{y \mid K(X, y) < \lambda\}$, являющееся дополнением к некоторому другому шару (касающемуся шара Ω в точке X), (минимально) разрежено в точке X , хотя и неразрежено в обычном смысле в \mathbb{R}^n .

В общей постановке вопроса (гл. XII, п. 4) мы рассматривали возможные продолжения тонкой топологии на Ω до топологии на $\Omega \cup \Delta_1$, в которой окрестности любой точки $x \in \Delta_1$ пересекают Ω по множествам фильтра \mathfrak{F}_X . Мы видели там, что существует сильнейшая из таких топологий, а среди топологий, в которых Ω открыто, существует слабейшая. Уточним это в рассматриваемом частном случае.

Лемма XV.1. Если δ — открытая окрестность точки $X \in \Delta_1$ в топологии $\hat{\Omega}$, то множество $\Omega \setminus \delta$ разрежено в X (а следовательно, $\delta \cap \Omega$ неразрежено в X).

Доказательство. Если это не так, то $K_X \equiv R_{KX}^{\Omega \setminus \delta} \equiv \hat{R}_{KX}^{\Omega \setminus \delta}$. Возьмем возрастающую последовательность $\{\Omega_n\}$ относительно компактных открытых множеств, такую, что $\Omega_n \subset \bar{\Omega}_n \subset \Omega$, $\bigcup \Omega_n = \Omega$; тогда $\hat{R}_{KX}^{\Omega_n \setminus \delta} \rightarrow$

$\widehat{R}_{K_X}^{\Omega \setminus \delta}$. Так как функция $\widehat{R}_{K_X}^{\Omega_n \setminus \delta}$ есть потенциал V_n , то ее можно представить в виде

$$\int G(x, y) d\mu_n(x) \text{ или } \int K(x, y) dv_n(x),$$

где $\int dv_n = 1$. Некоторая подпоследовательность v_{n_p} будет слабо сходиться к мере ν на $\widehat{\Omega}$. Следовательно,

$$K_X(y) = \int K(x, y) d\nu(x), \quad y \in \Omega, \quad x \in \widehat{\Omega}, \quad (1)$$

причем $\int d\nu = 1$ (это получается, если положить y_0). Так как $v_n(\delta \cap \Omega_n) = 0$ (в силу гармоничности V_n на $\delta \cap \Omega_n$), то v_n сосредоточена на $C_{\widehat{\Omega}}\delta = \widehat{\Omega} \setminus \delta$ и это же верно для ν ¹⁾. Из гармоничности интеграла (1) в Ω следует, что $\nu(\Omega) = 0$, так что мера ν сосредоточена на $\Delta \cap C_{\widehat{\Omega}}\delta$. Но этот интеграл минимален, и замечание в гл. XIV, конец п. 2, показывает, что он должен быть равен $K_{X_0}(y)$, причем $X_0 \in C_{\widehat{\Omega}}\delta$. В силу (1) с $X \in \delta$ это противоречит единственности точки X .

Лемма XV. 2. *Для каждой точки $X_0 \in \Delta_1$ существует открытое в $\widehat{\Omega}$ множество α , содержащее $\Delta \setminus X_0$ такое, что $\alpha \cap \Omega$ разрежено в X_0 (и, конечно, неразрежено в любой точке $Y \in \Delta_1$, $Y \neq X_0$).*

Доказательство. Покроем $\widehat{\Omega} \setminus \{X_0\}$ такой системой открытых множеств α_n , замыкания которых не содержат X_0 , что множества $\alpha_n \cap \Omega$ неразрежены в любой точке $\Delta_1 \cap \alpha_n$. Функция $\widehat{R}_{K_{X_0}}^{\alpha_n \cap \Omega}$ является потенциалом; взяв любое ε , $0 < \varepsilon < 1$, мы сможем выбрать $\omega_n \subset \bar{\omega}_n \subset \Omega$ так, чтобы для $\alpha'_n = \alpha_n \setminus \omega_n$ выполнялось неравенство $\widehat{R}_{K_{X_0}}^{\alpha'_n \cap \Omega}(y_0) < 2^{-n}\varepsilon$.

¹⁾ Мы можем закончить рассуждение следующим образом: В силу (1) центр тяжести меры ν , сосредоточенной на B , есть K_X . Но K_X — крайняя точка для B , и поэтому ν должна быть мерой Дирака для точки $X \in \delta$. Противоречие.

Тогда $R_{KX_0}^{\cup \alpha'_n \cap \Omega}(y_0) < \varepsilon$, и $\cup \alpha'_n$ удовлетворяет требованиям леммы.

Теорема XV.3 (Брело [33]). *На $\Omega \cup \Delta_1$ существует единственная топология, удовлетворяющая следующим условиям:*

- (i) *она индуцирует на Ω тонкую топологию;*
- (ii) *соответствующие ей окрестности любой точки $X \in \Delta_1$ пересекают Ω по множествам фильтра \mathfrak{F}_X .*

Эта топология отделима, множество Ω в ней открыто, и она индуцирует на Δ_1 дискретную топологию.

Доказательство. Если ω — открытая относительно компактная окрестность точки $x \in \Omega$, то $C\omega$ не разрежено ни в какой точке $X \in \Delta_1$. В топологии, удовлетворяющей условиям (i) и (ii), существует открытое множество α , такое, что $\alpha \cap \Omega = \omega$; если бы множество $\alpha \cap \Delta_1$ было непусто, то в точке $X \in \alpha \cap \Delta_1$ множество $\Omega \setminus \alpha \subset C_\Omega \omega$ было бы разрежено, что невозможно. Поэтому $\alpha = \omega$, и Ω открыто в рассматриваемой топологии.

Покажем теперь, что слабейшая топология, удовлетворяющая условиям (i) и (ii), совпадает с сильнейшей такой топологией. Воспользуемся результатами гл. XII, п. 4, и теоремой XII.1, взяв в качестве $\{i\}$ точки множества Δ_1 , а в качестве элементов фильтров \mathfrak{F}_i — тонко открытые подмножества в Ω , принадлежащие \mathfrak{F}_X . Существование тонко замкнутого множества, разреженного в X и неразреженного ни в какой другой точке Δ_1 (лемма XV.2) показывает, что $\{X\}$ есть окрестность точки X в рассматриваемой слабейшей топологии. Отсюда следует совпадение ее с сильнейшей топологией. Теорема доказана.

Топологию из этой теоремы будем называть *минимальной тонкой топологией* на $\Omega \cup \Delta_1$.

2. Интерпретация минимальной тонкой топологии на $\Omega \cup \Delta_1$. Лемма XV.4. *Если множество $E \subset \Omega$ разрежено в $X \in \Delta_1$, то существует открытое множество $\omega \supset E$, также разреженное в X .*

Доказательство. Мы знаем, что $R_{K_X}^e(y) = \inf_{\omega} R_{K_X}^{\omega}(y)$ открыто, $\omega \supset e$ (см. теорему VIII.12). Так как $K_X(y_1) < K_X(y_1)$ для некоторого y_1 , то существует такое ω , что $R_{K_X}^{\omega}(y_1) < K_X(y_1)$, и это ω разрежено в точке X .

Лемма XV.5. Из соотношения $\int G(x, y) d\mu_1(y) \leq \int G(x, y) d\mu_2(y)$ для любой точки x следует соотношение $\int v d\mu_1 \leq \int v d\mu_2$ для любой неотрицательной супергармонической функции v .

Доказательство. Если $\{\alpha_n\}$ — возрастающая последовательность компактных множеств, такая, что $\bigcup \alpha_n = \Omega$, то $\hat{R}_v^{\alpha_n}(y)$ есть потенциал $\int G(x, y) dv_n(x)$ и

$$\int \hat{R}_v^{\alpha_n} d\mu_1 = \int \left(\int G(x, y) d\mu_1 \right) dv_n.$$

То же самое верно для μ_2 . При сделанных предположениях

$$\int \hat{R}_v^{\alpha_n} d\mu_1 \leq \int \hat{R}_v^{\alpha_n} d\mu_2,$$

и искомый результат получается переходом к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Теорема XV.6 (Наим [1]). Разреженность множества $E \subset \Omega$ в точке $X \in \Delta_1$ эквивалентна существованию такой меры $\mu \geq 0$, что в топологии Мартина \mathcal{T}_m

$$\int K_X(y) d\mu(y) = \mathcal{T}_m\text{-} \liminf_{x \in E, x \rightarrow X} \int K(x, y) d\mu(y). \quad (2)$$

Доказательство. Мы знаем, что если X не принадлежит \mathcal{T}_m -замыканию множества E , то E разрежено в X , и условие (2) выполнено (с $\mu = 0$), поскольку правая его часть, т. е. $\sup_{\delta} \inf_{x \in E \cap \delta} \int K(x, y) d\mu(y)$ (δ — любая \mathcal{T}_m -окрестность), равна в данном случае $-\infty$ (как \inf по пустому множеству).

Пусть E разрежено в X ; согласно лемме XV.4 мы можем считать его открытым. Тогда существует такая точка $Z \in \Omega$, что

$$K_X(Z) > \widehat{R}_{K_X}^E(Z) = \int K_X(y) db_{e_Z}^E(y)$$

(см. гл. VI п. 12). Покажем, что мера $b_{e_Z}^E$ удовлетворяет соотношению (2). Рассмотрим функцию $V_Z(x) = \int K(x, y) db_{e_Z}^E(y)$. Так как функция $y \mapsto K(x, y)$ супергармонична и положительна, то на E

$$V_Z(x) = K(x, Z) \rightarrow \mathcal{T}_m K(X, Z) = \int K_X(y) db_{e_Z}^E(y) \\ \text{при } x \rightarrow X,$$

что даже более точно, чем (2).

Обратно, предположим, что X лежит в \mathcal{T}_m -замыкании множества E и μ удовлетворяет соотношению (2). Возьмем число γ , заключенное строго между правой и левой частями (2), и окрестность δ точки X в $\widehat{\Omega}$ ($\delta \not\ni y_0$), такую, что $\int K(x, y) d\mu(y) \geq \gamma$ на $\delta \cap E$. Тогда $\int G(x, y) d\mu(y) \geq \gamma G(x, y_0)$ на $\delta \cap E$ и для каждого x

$$\int G(x, y) d\mu(y) \geq \gamma \widehat{R}_{G_{y_0}}^{\delta \cap E}(x) = \gamma \widehat{R}_{G_x}^{\delta \cap E}(y_0) = \\ = \gamma \int G(x, y) db_{e_{y_0}}^{\delta \cap E}(y).$$

Следовательно,

$$K_X(y_0) = 1 > \frac{1}{\gamma} \int K_X(y) d\mu(y) \geq \widehat{R}_{K_X}^{\delta \cap E}(y_0).$$

Отсюда мы заключаем, что множество $E \cap \delta$, а также множество E разрежены в X .

Следствие. Для любой меры $\mu \geq 0$ на Ω и любой точки $X \in \Delta_1$

$$\mathcal{T}_m \text{-} \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow X} \int K(x, y) d\mu(y) = \int K_X(y) d\mu(y).$$

Теорема XV.7. Рассмотрим на пространстве Мартина $\hat{\Omega}$ конус Φ функций вида $\int K'(x, y) d\mu(y)$ ¹⁾, где μ — положительная мера на Ω , и конус Φ_1 суженный этих функций на $\Omega \cup \Delta_1$.

i) Тонкая топология, соответствующая Φ_1 и пространству $\Omega \cup \Delta_1$ с топологией Мартина \mathcal{T}_m (она индуцирована тонкой топологией, соответствующей конусу Φ на пространстве $\hat{\Omega}$), совпадает с минимальной тонкой топологией на $\Omega \cup \Delta_1$.

ii) Φ_1 состоит из $+\infty$ и полунепрерывных снизу (в топологии \mathcal{T}_m) продолжений на $\Omega \cup \Delta_1$ функций вида $v/G'(x, y_0)$, где v — потенциал на Ω .

Доказательство. Утверждение ii) вытекает из предыдущего следствия. Что касается i), то разреженность, отвечающая Φ_1 , в точках Ω совпадает, очевидно, с классической разреженностью. Для $E \subset \Omega$ эта разреженность в точке $X \in \Delta_1$ есть минимальная разреженность (предыдущая теорема). Согласно теореме XV.3, тонкая топология на $\Omega \cup \Delta_1$, соответствующая Φ_1 и \mathcal{T}_m , совпадает с минимальной тонкой топологией.

Замечание. Теорема сохраняет силу, если $G'(x, y_0)$ заменить на G_{y_0} , и v/G_{y_0} определить в точке y_0 как \liminf в y_0 по множеству $\Omega \setminus \{y_0\}$. Это — следствие того факта (см. гл. IX), что v/G_{y_0} на множестве $\Omega \setminus \{y_0\}$ имеет тонкий предел в y_0 , равный упомянутому \liminf .

Упражнение. Доказать без использования теоремы XV.3, что топология, соответствующая Φ_1 , является слабой топологией на $\Omega \cup \Delta_1$, индуцирующей классическую тонкую топологию на Ω и обладающей тем свойством, что окрестности любой точки $X \in \Delta_1$ пересекают Ω по множествам из \mathcal{T}_X .

Теорема XV.8. Обозначим через Φ' семейство функций, полученных полунепрерывным снизу (в

¹⁾ Определение функции $K'(x, y)$ см. в гл. XIV, п. 1, iii). — Прим. перев.

топологии \mathcal{T}_m) продолжением на $\Omega \cup \Delta_1$ функций вида $v/G'(x, y_0)$, где v — неотрицательная гипергармоническая функция на Ω . Тогда семейство Φ' порождает на $\Omega \cup \Delta_1$ ту же тонкую топологию, что и Φ_1 , т. е. минимальную тонкую топологию.

Это вытекает из следующего результата (Наим [1], теорема 7'-16):

Для любой неотрицательной супергармонической функции v отношение v/G_{y_0} на Ω имеет в любой точке $X \in \Delta_1$ минимальный тонкий предел (т. е. предел по фильтру \mathfrak{F}_X), равный $\mathcal{T}_m\text{-lim inf}$.

Доказательство. Будем предполагать, что указанный lim inf конечен. Обозначим его через Λ . Нужно доказать разреженность в точке X множества $E_\varepsilon = \{x \mid v(x)/G(x, y_0) > \Lambda + \varepsilon, \varepsilon > 0, x \neq y_0\}$. Для всякого $x \in E$ имеем

$$\begin{aligned} v(x) &\geq (\Lambda + \varepsilon) \hat{R}_{G_{y_0}}^{E_\varepsilon}(x) = (\Lambda + \varepsilon) \hat{R}_{G_x}^{E_\varepsilon}(y_0) = \\ &= (\Lambda + \varepsilon) \int G_x(y) db_{y_0}^{E_\varepsilon}, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{v(x)}{(\Lambda + \varepsilon) G_{y_0}} \geq \int K(x, y) db_{y_0}^{E_\varepsilon}(y) \quad (x \neq y_0).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int K_X(y) db_{y_0}^{E_\varepsilon}(y) &= \mathcal{T}_m\text{-lim inf}_{x \in \Omega, x \rightarrow X} \int K(x, y) db_{y_0}^{E_\varepsilon}(y) \leq \\ &\leq \frac{1}{\Lambda + \varepsilon} \mathcal{T}_m\text{-lim inf}_{x \in \Omega, x \rightarrow X} \frac{v}{G_{y_0}} < 1, \end{aligned}$$

и $\hat{R}_{K_X}^{E_\varepsilon}(y_0) < 1 = K_X(y_0)$, чем требуемая разреженность и доказана.

Замечание 1. Предыдущим рассмотрениям можно придать другую форму, если ввести, следуя Наим [1], некоторое продолжение на Δ отношения $G(x, y)/[G(x, y_0)G(y, y_0)]$. Мы получим на $\hat{\Omega}$ симметричное ядро $\Theta(x, y)$; соответствующие потенциалы неотрицательных мер определены на $\Omega \setminus \{y_0\}$ (но могут быть полунепрерывно снизу продолжены в y_0) и образуют конус, который порождает тонкую топологию,

совпадающую с минимальной тонкой топологией на $\Omega \cup \Delta_1$. Ядро Θ оказывается полезным также при изучении BLD-функций. (Дуб [6]).

Важное замечание 2 (Наим [1], теорема 8'-17). Последний результат предыдущей теоремы стоит сопоставить с поведением отношения v/K_X ($X \in \Delta_1$) в точке X . Согласно теореме XII.6, это отношение имеет минимально тонкий предел в X , равный $\inf(v/K_X)$, а также, очевидно, равный $\mathcal{T}_m\text{-lim inf}(v/K_X)$ в X . Кроме того, можно показать, что он совпадает с $\mu_\nu(\{X\})$. Это вытекает из равенства $\mu_\nu(\{X\}) = \inf_{\Omega} (v/K_X)$.

В случае когда v есть потенциал, это очевидно, поскольку неравенство $v \geq \varepsilon K_X$ ($\varepsilon > 0$) невозможно. Для гармонической функции v это также легко получить, отправляясь от случая $\mu_\nu(\{X\}) = 0$. Тогда мы не можем иметь $v \geq \varepsilon K_X$, ибо отсюда следовало бы $\mu_\nu > \varepsilon \mu_{K_X}$. Наконец, в общем случае надо воспользоваться аддитивностью величины $\inf_{\Omega} (v/K_X)$, вытекающей из того, что она равна соответствующему тонкому пределу.

3. Строгая разреженность и неразреженность. Теорема XV.9. *На пространстве $\Omega \cup \Delta_1$ с топологией \mathcal{T}_m разреженность и неразреженность, отвечающая конусу функций Φ_1 , всегда строга.*

Доказательство. Для Ω это известно. Для множества $E \subset \Omega$, разреженного в точке $X \in \Delta_1$, мы докажем строгую разреженность, построив меру μ_0 на Ω , такую, что

$$\int K'_X d\mu_0 < +\infty,$$

$$\int K'(x, y) d\mu(y) \rightarrow \mathcal{T}_m + \infty \quad (x \in E, x \rightarrow X).$$

Будем отправляться от меры μ , удовлетворяющей соотношению (2); для некоторой убывающей последовательности σ_n открытых окрестностей точки X в $\hat{\Omega}$ и для сужений μ_n меры μ на $\sigma_n \cap \Omega$ ряд $\sum \mu_n$ дает решение вопроса (подробное доказательство см. в Брело [33]).

Наконец, множество $\Delta_1 \setminus \{X\}$, очевидно, разрежено (так как индуцированная на Δ_1 топология дискретна), и можно убедиться, что оно строго разрежено, используя множество E из леммы 2 и отвечающую ему меру μ_0 , построенную в предыдущем абзаце. Интеграл $\int K'(x, y) d\mu_0(y)$, который стремится к $+\infty$ (в топологии \mathcal{T}_m) в точке X по E , будет стремиться к $+\infty$ также и по $\Delta_1 \setminus \{X\}$ в силу следствия теоремы XV.6.

Что касается неразреженности, то заметим, что достаточно убедиться в строгой неразреженности множества $E \subset \Omega$ при условии, что оно неразрежено в X . Будем обозначать через R_Φ^E приведенные функции относительно Φ_1 в пространстве $\Omega \cup \Delta_1$. Любая функция $V \in \Phi_1$, мажорирующая 1 на $E \setminus \delta$ (где δ — открытая окрестность точки X в $\hat{\Omega}$, $y_0 \notin \delta$), на Ω не меньше, чем отношение $R_{G_{y_0}'}^{E \setminus \delta} / G_{y_0}'$, которое на $\delta \cap \Omega$ равно $\hat{R}_{G_x}^{E \setminus \delta}(y_0) / G_x(y_0) = \int K(x, y) db_{e_{y_0}}^{E \setminus \delta}(y)$. Далее, $V(x)$ не меньше, чем $\mathcal{T}_m\text{-lim inf}$ этого выражения, т. е. чем $\int K(X, y) db_{e_{y_0}}^{E \setminus \delta}(y)$ (теорема XV.6, следствие): Эта же оценка верна для $R_1^{E \setminus \delta}(X)$. Поэтому достаточно установить, что $\sup_\delta \int K(X, y) db_{e_{y_0}}^{E \setminus \delta}(y) = 1$ (см. гл. II, п. 4) или же что $R_{K_X}^{E \setminus \delta_n}(y_0) \rightarrow \hat{R}_{K_X}^E(y_0)$ для некоторых δ_n ($\bigcap \delta_n = \{X\}$). Но это предельное соотношение хорошо известно (см. гл. VI, п. 10).

4. Приведенные функции. Минимальные и неминимальные точки. Лемма XV.10. Если функция v , неотрицательная и супергармоническая на Ω , допускает представление $v(y) = \int K'(x, y) d\mu_v(x)$ (где μ_v — неотрицательная мера на $\hat{\Omega}$, сосредоточенная на $\Omega \cup \Delta_1$) и $e \subset \Omega$, то

$$\hat{R}_v^e(z) = \int \hat{R}_{K'(x, y)}^e(z) d\mu_v(x).$$

Доказательство. Известно (гл. VI), что $\hat{R}_v^e(z) = \int v(y) db_{e_z}^e(y)$. Следовательно, $\hat{R}_v^e(z)$ равно

$$\int \left(\int K'(x, y) db_{e_z}^e(y) \right) d\mu_v(x), \text{ или } \int \hat{R}_{K'(x, \cdot)}^e(z) d\mu_v(x).$$

Теорема XV.11. (Наим [1].) *Если функция $u \geq 0$ гармонична и $E \subset \Omega$, то условие $R_u^E = u$ эквивалентно тому, что борелевское множество \mathcal{E}_E точек из Δ_1 , где E разрежено, имеет μ_u -меру нуль.*

Доказательство ¹⁾. Допустим, что $\mu_u(\mathcal{E}_E) = 0$. Так как

$$\hat{R}_u^E(y) = \int \hat{R}_{K_X}^E(y) d\mu_u(X) \text{ и } \hat{R}_{K_X}^E = K_X \quad (\forall X \notin \mathcal{E}_E),$$

то мы получаем

$$\hat{R}_u^E(y) = \int K_X(y) d\mu_u(X) = u(y).$$

Теперь предположим, что $\hat{R}_u^E = u$. Введем счетный базис $\{\delta_i\}$ регулярных областей в Ω ; в любой точке $X \in \Delta_1$, в которой E разрежено, имеем неравенство $\hat{R}_{K_X}^E(y) < K_X(y)$ для некоторой точки y в одной из областей δ_i . Следовательно,

$$\int \hat{R}_{K_X}^E d\rho_y^{\delta_i} < K_X(y) \quad (\forall y \in \delta_i).$$

Иными словами, \mathcal{E}_E содержится в счетном объединении множеств α_i , удовлетворяющих предыдущему неравенству для всех X . Покажем, что α_i имеет нулевую μ_u -меру. Поскольку мы имеем дело с борелевскими функциями,

$$\begin{aligned} & \int \left(\int \hat{R}_{K_X}^E(x) d\rho_y^{\delta_i}(x) \right) d\mu_u(X) = \\ & = \int \left(\int \hat{R}_{K_X}^E(x) d\mu_u(X) \right) d\rho_y^{\delta_i}(x) = \\ & = \int \hat{R}_u^E(x) d\rho_y^{\delta_i}(x) = \int u d\rho_y^{\delta_i}(x) = u(y) \quad (\forall y \in \delta_i). \end{aligned}$$

¹⁾ Мы следуем доказательству Гаурисанкарана [1], который уточнил также описание множества \mathcal{E}_E .

Следовательно,

$$\int \left[K_X(y) - \int \hat{R}_{K_X}^E d\rho_y^{\delta_i} \right] d\mu_u(X) = 0,$$

откуда $\mu_u(\alpha_i) = 0$.

Замечание. Множество \mathcal{E}_E является пересечением Δ_1 с множеством типа K_σ из Δ .

Мы приведем доказательство, отличное от первоначального доказательства Гаурисанкарана. Прежде всего $\hat{R}_{K_X}^E(y_0) = \int K_X db_{y_0}^E$. Далее, \mathcal{E}_E есть пересечение Δ_1 с объединением множеств $F_n = \{ \hat{R}_{K_X}^E \setminus \Omega_n(y_0) < 1 \}$ из Δ (здесь $\Omega_n \uparrow$, $\Omega_n \subset \bar{\Omega}_n \subset \Omega$, $\bigcup \Omega_n = \Omega$). Каждое F_n есть объединение множеств $\{ \hat{R}_{K_X}^E \setminus \Omega_n(y_0) \leq 1 - \rho^{-1} \}$ для всех натуральных ρ . Наконец, каждое из этих множеств есть пересечение множеств $\{ \hat{R}_{K_X}^{E \cap (\Omega_{n+q} \setminus \Omega_n)}(y_0) \leq 1 - \rho^{-1} \}$ для всех натуральных q . Последние же множества компактны в Δ .

Следствие. Для любых неотрицательных гармонических функций u и множества $E \subset \Omega$ имеем

$$\hat{R}_u^E = \int K_X d\mu'_u + \int \hat{R}_{K_X}^E d\mu''_u, \quad (3)$$

где μ'_u , μ''_u — сужения меры μ_u на $\Delta_1 \setminus \mathcal{E}_E$ и \mathcal{E}_E соответственно. Первый член есть наибольшая гармоническая миноранта для \hat{R}_u^E , а второй является потенциалом.

В самом деле, $X \in \Delta_1 \setminus \mathcal{E}_E \Rightarrow \hat{R}_{K_X}^E = K_X$, откуда и получается искомое разложение.

Далее, пусть u' положительна, гармонична и $\leq \hat{R}_u^E$. Тогда $u' = R_{u'}^E$. Действительно, в противном случае существует супергармоническая функция v , которая $\geq u'$ на E и $< u'$ в некоторой точке x ; рассмотрим супергармоническую функцию w , которая $\geq u$ на E и достаточно близка к R_u^E в x . Функция $v + w - u'$ неотрицательна ($w \geq R_u^E \geq u'$), $\geq u$ на E , но $< R_u^E$

в точке x . Поэтому мы заключаем, что $\mu_{u'}(\mathcal{E}_E) = 0$, и так как эта мера $\leq \mu_u$, то $\mu_{u'} \leq \mu'_u$ и, значит, $u' \leq \int K_x d\mu'_u$.

Определение XV.12. Неотрицательная гармоническая в Ω функция u называется *привязанной к нулю* в точке $X \in \Delta$, если существует такая окрестность δ точки X в пространстве $\hat{\Omega}$, что $u = R_u^{C\delta \cap \Omega}$ на $\delta \cap \Omega$. В этом случае то же самое верно для любой окрестности $\delta' \subset \delta$.

Предложение XV.13. Если неотрицательная гармоническая функция u привязана к нулю в любой точке множества $\omega \cap \Delta_1$, где ω — открытое подмножество пространства $\hat{\Omega}$, то для ассоциированной меры μ_u имеем $\mu_u(\omega \cap \Delta_1) = 0$. Обратно, из этого равенства следует, что u привязана к нулю в каждой точке множества $\omega \cap \Delta$.

Доказательство. Для любой точки $X_0 \in \Delta_1 \cap \omega$ можно найти в $\hat{\Omega}$ открытое множество $\omega_1 \subset \omega$, являющееся окрестностью точки X_0 и такое, что $\hat{R}_u^{C\omega_1 \cap \Omega} = u$ на $\omega_1 \cap \Omega$, а следовательно, и на Ω (поскольку это равенство имеет место квазивсюду на $C\omega_1$). Так как $C\omega_1$ разрежено в каждой точке множества $\omega_1 \cap \Delta_1$, то $\mu_u(\omega_1 \cap \Delta_1) = 0$. Используя счетное покрытие множества $\omega \cap \Delta_1$, мы заключаем, что $\mu_u(\omega \cap \Delta_1) = 0$. Обратное утверждение доказывается легко.

В качестве непосредственного следствия получается

Теорема XV.14. Положительная гармоническая функция u на Ω будет минимальной в том и только в том случае, когда она привязана к нулю во всех точках множества $X \in \Delta_1$, кроме одной (или же во всех точках $x \in \Delta$, кроме одной минимальной).

Следовательно:

Всякая неотрицательная гармоническая функция, привязанная к нулю во всех точках множества Δ , кроме одной точки X_0 , либо пропорциональна K_{X_0} , либо равна нулю в случае, когда точка X_0 не минимальна.

Это — принцип положительных особенностей, восходящий к Булигану [1]. См. Дени [1] и Брело [12].

Характеризация неминимальных точек множества Δ . Предложение XV.15. Для того чтобы точка $X \in \Delta$ была неминимальна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:

а) Существует такая окрестность δ точки $X \in \Delta$ в $\hat{\Omega}$, что $\hat{R}_{K_X}^{\delta \cap \Omega} \neq K_X$.

б) Существует такая мера $\mu \geq 0$ на Ω , что

$$\int K(X, y) d\mu(y) < \mathcal{T}_m\text{-} \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow X} \int K(x, y) d\mu(y) \quad (4)$$

Доказательство. Утверждение насчет а) близко к предыдущей теореме.

Что касается условия б), то формула (2) сразу показывает, что из него следует неминимальность точки X . Далее, если точка X неминимальна, то мы можем использовать открытую окрестность δ из а), и соображения, приведенные в начале доказательства теоремы XV.6, дают меру, удовлетворяющую условию б).

Замечание. Рассмотрим на пространстве $\hat{\Omega}$ (с топологией \mathcal{T}_m) конус функций Φ , определенный в теореме XV.7. В соответствующей тонкой топологии Ω будет строго неразрезанным в любой точке $X \in \Delta_1$ (в силу теоремы XV.9). Далее, Ω строго разрежено в любой точке $X \in \Delta \setminus \Delta_1$. Разреженность вытекает из б), а строгая разреженность доказывается так же, как в теореме XV.9.

Упражнения. 1) В указанной тонкой топологии множество $\Delta \setminus \Delta_1$ открыто, а любое подмножество в Δ_1 замкнуто.

2) Минимальная тонкая топология на $\Omega \cup \Delta_1$ индуцируется топологией на $\hat{\Omega}$, в которой для всякой точки $X \in \Delta_1$ базис окрестностей состоит из множеств фильтра \mathfrak{F}_X с добавленной к ним точкой X , а для всякой точки $X \in \Delta \setminus \Delta_1$ окрестностями являются окрестности в топологии \mathcal{T}_m .

5. Статистическая разреженность и свойство Шоке. (См. Брело [27].) Теорема XV.16. Пусть даны множества $e \subset \Omega$, $a \subset \Delta_1$ и положительная гармоническая на Ω функция h с ассоциированной мерой μ_h , сосредоточенной на Δ_1 . Тогда h -статистическая разреженность на a (статистическое свойство):

e разрежено на a всюду, за исключением множества нулевой μ_h -меры

эквивалентна тому, что для окрестностей ω множества a в пространстве $\hat{\Omega}$ семейство $\{\omega \cap e\}$ является h -исчезающим, т. е. $\inf \widehat{R}_h^{\omega \cap e} = 0$. Тот же результат верен для тонких окрестностей a в $\Omega \cup \Delta_1$.

Доказательство. Пусть имеет место статистическое свойство. Разложим a на множество a_0 , где e неразрезано, и множество a_1 , где e разрежено. Так как $\mu_h(a_0) = 0$, то $\bar{D}_{1,h}^{a_0} = 0$ ¹⁾. Далее, существует положительная супергармоническая функция v , такая, что $\liminf (v/h) \geq 1$ на a_0 и $v(y_0) < \varepsilon$. В таком случае $v/h > 1 - \varepsilon$ на открытом множестве ω_0 , являющемся пересечением Ω с множеством ω , открытым в $\hat{\Omega}$ и содержащим a_0 . Таким образом, $v/(1 - \varepsilon) \geq h$ на ω_0 и $R_h^{\omega_0 \cap \Omega}(y_0) < \varepsilon/(1 - \varepsilon)$. Что касается a_1 , то заметим, что множество, где e разрежено, есть пересечение множества Δ_1 с подмножеством типа K_σ в Δ_1 (см. теорему XV.11, замечание). Поэтому достаточно проверить свойство h -исчезания для произвольного компактного множества β точек из $\Delta \setminus \Delta_1$. Рассмотрим открытое в $\hat{\Omega}$ множество $\omega \supset \beta$, такое, что

$$\mu(\bar{\omega} \cap \Delta) < \mu(\beta) + \varepsilon$$

(замыкание берется в $\hat{\Omega}$), и возрастающую последовательность компактов K_n , $\bigcup K_n = \Omega$. Тогда наибольшая

¹⁾ Обозначение $\bar{D}_{1,h}^{a_0}$ вводится ниже в гл. XVI, п. 1. — *Прим. перев.*

гармоническая миноранта для $\hat{R}_h^{e \cap \omega}$ есть $\lim \hat{R}_h^{e \cap \omega \cap C K_n}$, или $\int_E K_X d\mu_h$, где E — подмножество в Δ_1 , на котором $e \cap \omega$ разрежено (следствие теоремы XV.11). Таким образом, $\hat{R}_h^{e \cap \omega \cap C K_n}(y_0) \rightarrow \mu(E)$. Но $E \subset \bar{\omega} \setminus \beta$, и поэтому $\mu(E) < \varepsilon$, откуда и следует искомое свойство h -исчезания.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим тонкую окрестность ω множества α , такую, что $\hat{R}_h^{e \cap \omega}(y_0) < \varepsilon$. Наибольшая гармоническая миноранта этой функции есть $\int_E K_X d\mu_h$, где E то же, что и выше. Но $\alpha_0 \subset E$, так что

$$\int_{\alpha_0} d\mu_h \leq \int_E d\mu_h \leq \hat{R}_h^{e \cap \omega}(y_0) < \varepsilon$$

и, следовательно, $\mu_h(\alpha_0) = 0$.

Дополнения и указания. 1) Статистическое свойство эквивалентно существованию положительной супергармонической функции U , такой, что $U/h \rightarrow \infty$ на $\alpha \cap \bar{e}$ (или тому же самому в тонкой топологии).

2) Функцию h можно заменить положительной супергармонической функцией V , пользуясь ассоциированной с V мерой μ_V , которая на Δ равна μ_h , где h — наибольшая гармоническая миноранта для V .

3) Сравнение полученных результатов с результатами для пространства Ω (гл. VII) позволяет прийти к следующему выводу. Пусть $\alpha \subset \Omega \cup \Delta_1$, $e \subset \Omega$ и V — положительная супергармоническая функция. Тогда аналогичное статистическое свойство с исключительным V -полярным множеством (т. е. V -статистическая разреженность) эквивалентно V -исчезанию семейства $\{\omega \cap e\}$ (где ω — окрестность множества α в $\hat{\Omega}$ или в тонкой топологии), а также существованию супергармонической функции $U \geq 0$, такой, что отношение $(U/V)|_e$ (там, где оно имеет

смысл) стремится к $+\infty$ в точках множества $\alpha \cap \bar{e}$ (соответственно в точках множества $\alpha \cap \bar{e}$ в случае тонкой сходимости).

Свойство Шоке. В общей теории (гл. IV) можно было бы назвать *свойством Шоке* множества e и веса $p(e)$ существование для произвольного $\varepsilon > 0$ замкнутого множества $e' \subset \bar{e}$, такого, что $p(\bar{e} \setminus e') < \varepsilon$.

Упражнение. В изложенной выше классической теории обозначим через R_φ^{*e} нижнюю огибающую множества неотрицательных гипергармонических функций, которые мажорируют функцию $\varphi \geq 0$ на множествах $e \cap \Omega$ и $\Omega \cap \omega$, где ω — некоторая окрестность множества e в $\hat{\Omega}$. Тогда вес $\int R_\varphi^{*e} d\rho_{y_0}^\delta$ (где $d\rho_{y_0}^\delta$ — гармоническая мера в δ для точки $y_0 \in \delta$) обладает свойством Шоке для любого множества $e \subset \subset \Omega \cup \Delta_1$, для которого множество $e \cap \Delta_1$ является μ_V -измеримым (здесь V — некоторая положительная супергармоническая функция).

6. Случай шара или полупространства в \mathbb{R}^n . В этих случаях пространство Мартина совпадает с евклидовым замыканием рассматриваемой области. Как показала Наим [1], оказывается возможным и интересным уточнить предыдущий анализ и дать, например, критерий разреженности, аналогичный классическому критерию Винера.

Более подробное непосредственное изучение случая полупространства было предпринято раньше Лелон-Феран [1]. Однако ее определения (например, определение разреженности с помощью критерия типа Винера) и методы не приспособлены для случая общего пространства Мартина и поэтому здесь не рассматриваются (см., впрочем, гл. XVII). Было бы полезно углубить эти результаты и установить их связь с общей теорией.

Дополнительные сведения по тематике этой главы (например, о подпространствах) можно найти у Мартина [1], Брело [12], Наим [1] и в более поздних аксиоматических исследованиях.

Глава XVI

КЛАССИЧЕСКАЯ ГРАНИЦА МАРТИНА ПРОБЛЕМА ДИРИХЛЕ И ПОВЕДЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ

1. Общая задача Дирихле. (См. Брело [17].) Рассмотрим пространство Грина Ω , плотное в некотором компактном метризуемом пространстве $\bar{\Omega}$ (с границей $\Delta = \bar{\Omega} \setminus \Omega$) и фиксированную положительную гармоническую функцию h на Ω .

Лемма XVI. 1. *Если функция v супергармонична в Ω и для всех $X \in \Delta$ удовлетворяется условие*

$$\liminf_{y \in \Omega, y \rightarrow X \in \Delta} \frac{v(y)}{h(y)} \geq \lambda$$

(в топологии пространства $\bar{\Omega}$), то $v/h \geq \lambda$.

Доказательство. Можно, конечно, считать, что $\lambda > -\infty$. Если лемма не верна, то v/h после непрерывного снизу продолжения на $\bar{\Omega}$ будет достигать своего минимума $k < \lambda$ на Ω . Функция $v - kh$ неотрицательна и супергармонична в Ω и равна нулю в некоторой точке; следовательно, она есть нуль и $v/h = k < \lambda$. Получено противоречие.

Обобщенные огибающие. Пусть дана вещественная функция f на Δ . Рассмотрим семейство Φ гипергармонических функций v на Ω , удовлетворяющих условиям

$$\liminf (v/h) \geq f(X), \quad \liminf (v/h) > -\infty \quad (\forall X \in \Delta).$$

Заметим, что второе условие эквивалентно ограниченности снизу отношения v/h . Нижняя огибающая $\bar{D}_{f,h}$ этого семейства есть либо $+\infty$, либо $-\infty$, либо гармоническая функция (и, очевидно, возрастает вместе с f). В случае $f = \varphi_e$ (φ_e — индикатор множества $e \subset \Omega$) мы эту огибающую будем обозначать через h_e . Если $h_e = 0$, то множество e называется

h -пренебрежимым. Термин " h -почти всюду" (h -п. в.) означает "всюду, за исключением h -пренебрежимого множества в Δ ". Отметим, что $\bar{D}_{f,h}$ не меняется при изменении f на h -пренебрежимом множестве. Поэтому на таком множестве функция f может быть не определена.

Положим $\underline{D}_{f,h}$ равным $-\bar{D}_{-f,h}$. Из предыдущей леммы следует, что $\underline{D}_{f,h} \leq \bar{D}_{f,h}$. Если обе огибающие равны и конечны (и, значит, гармоничны), то функция f называется h -разрешимой, а эта общая огибающая обозначается через $D_{f,h}$ (гармоническое решение h -задачи Дирихле ¹⁾). Очевидно, что 1 h -разрешима и $D_{1,h} = h$. Отметим, что h -разрешимость сохраняется при линейных операциях и переходе к пределу по равномерной сходимости.

Далее мы будем развивать теорию подобно классической теории для ограниченных областей в \mathbb{R}^n (изложенной в Брело [25] и в более общей форме в Брело [19, 20]).

Лемма XVI.2. Если последовательность f_n возрастает, и $D_{f_n,h} > -\infty$, то $\bar{D}_{f_n,h}$ также возрастает и стремится к $\bar{D}_{\lim f_n,h}$.

Доказательство такое же, как в классическом случае или в общей теории (Брело [20, 28]). В частности, если $e_n \uparrow$, $\bigcup e_n = e$, то $h_{e_n} \uparrow$, $h_{e_n} \rightarrow h_e$.

Теорема XVI.3. Предположим, что каждая конечная вещественная непрерывная функция на Δ h -разрешима (условие A_h). Тогда линейная форма $\varphi \mapsto D_{\varphi,h}(y)$ может быть записана в виде $\int \varphi dv_h^y$ (где v_h^y — однозначно определенная мера Радона на Δ) и для любой функции f имеем $\bar{D}_{f,h}(y) = \int f dv_h^y$.

¹⁾ На языке аксиоматической теории (Брело [19]) $D_{f,h}/h$ следовало бы назвать решением задачи Дирихле для h -гармонических функций (отношений гармонических функций к h) при заданной граничной функции f .

Следовательно, $h_e(y)$ есть внешняя v_h^y -мера множества e . Далее, h -разрешимость функции f эквивалентна ее v_h^y -интегрируемости (это условие не зависит от y), и если эта интегрируемость имеет место, то

$$D_{t, h}(y) = \int f d v_h^y.$$

Доказательство такое же, как в классической или общей теории.

Нам потребуется еще

Лемма XVI.4. Если α — произвольная открытая окрестность множества e в $\bar{\Omega}$, то $h_e = \inf_{\alpha} R_h^{\alpha \cap \Omega}$.

Доказательство. Неравенство $h_e \leq \inf_{\alpha} R_g^{\alpha \cap \Omega}$ очевидно. Если супергармоническая функция $v \geq 0$ удовлетворяет в каждой граничной точке условию $\liminf (v/h) \geq \varphi_e$, то v/h после полунепрерывного снизу продолжения будет $> 1 - \varepsilon$ на некотором открытом подмножестве β пространства $\bar{\Omega}$, содержащем e . Поэтому $v/(1 - \varepsilon) > h$ на $\beta \cap \Omega$, $v/(1 - \varepsilon) \geq R_h^{\beta \cap \Omega}$ и, следовательно, $h_e \geq (1 - \varepsilon) R_h^{\beta \cap \Omega}$. Так как ε произвольно, то $h_e \geq \inf_{\alpha} R_h^{\alpha \cap \Omega}$.

Следствие 1. Существует такая убывающая последовательность $\{\alpha_n\}$ открытых окрестностей множества e в пространстве $\bar{\Omega}$, что $h_e = \inf_n R_h^{\alpha_n \cap \Omega}$.

Следствие 2. Для всякого $e \subset \Delta$ имеем $h_e = \inf_{\gamma} h_{\gamma}$, где γ пробегает множество всех окрестностей множества e .

Лемма XVI.5. Для всякого $e \subset \Delta$ имеем $(h_e)_e = h_e$.

Доказательство. Выбрав открытую окрестность α множества e в $\bar{\Omega}$, введем убывающую последовательность $\alpha_n \subset \alpha$, как в следствии 1. Тогда $\hat{R}_{\hat{R}_h^{\alpha_n \cap \Omega}}^{\alpha \cap \Omega} =$

$= \hat{R}_h^{\alpha \cap \Omega 1}$). Левая часть стремится к $\hat{R}_h^{\alpha \cap \Omega 2}$, а $\inf_a \hat{R}_h^{\alpha \cap \Omega}$ равен $(h_e)_e$, откуда и вытекает требуемое равенство.

Много дополнений и дальнейших результатов можно найти у Брело [16] и Наим [1]. Исследуются роль условия A_h , случай переменных функции h и области Ω в заданном пространстве Грина, различные типы компактификации, т. е. различные границы, поведение функций вблизи этих границ и т. д. Упомянем некоторые из результатов. Без предположения о том, что выполнено условие A_h , отображение $e \rightarrow h(e)$ для компактных множеств e является емкостью Шоке (и даже альтернирующей бесконечного порядка); эта емкость аддитивна (т. е. определяет меру с соответствующей внешней мерой, равной h_e для любого e) в том и только в том случае, когда имеет место условие A_h . При условии A_h базис фильтра \mathfrak{F} , сходящийся к $X \in \Delta$, называется h -регулярным, если для всякой всякой конечной непрерывной функции f имеем $D_{f, h}/h \xrightarrow{\mathfrak{F}} f(X)$. Это эквивалентно условию

а) для всякой функции f , ограниченной сверху, $\limsup_{\mathfrak{F}} (\bar{D}_{f, h}/h) \leq \limsup f$ в X , а также условию

б) $h_e/h \xrightarrow{\mathfrak{F}} 0$ для всякого компактного $e \neq X$.

Условия а) и б) эквивалентны и без предположения о том, что выполнено условие A_h и могут служить определением h -регулярности базиса фильтра \mathfrak{F} в общем случае.

Граничная точка $X \in \Delta$ называется h -регулярной, если ее окрестности пересекают Ω по h -регулярному фильтру \mathfrak{F} . С помощью этого понятия могут быть обобщены некоторые классические результаты, относящиеся к евклидовой границе. Например, рассмо-

1) В силу следующего замечания: для открытых множеств $\beta \subset \beta' \subset \Omega$ имеем $\hat{R}_{\hat{R}_\beta}^{\beta'} = \hat{R}_\beta$. Неравенство \leq очевидно. Но левая часть мажорирует v на β и, следовательно, мажорирует правую часть (тот же результат верен для любых множеств $\beta \subset \beta'$).

2) В силу общей формулы (8) гл. VI, стр. 67.

трим величину $\mathcal{L}_h^u(x)$, равную \liminf в точке X отношения u/h , где u — супергармоническая функция и u/h ограничено снизу. Если точка X является h -регулярной, то

$$\mathcal{L}_h^u(X) = \liminf_{Y \rightarrow X, Y \in \Delta \setminus E} \mathcal{L}_h^u(Y)$$

для любого h -пренебрежимого множества E . Однако неизвестно, будет ли множество h -иррегулярных граничных точек h -пренебрежимым.

Упомянем еще, что в связи с общей теорией задачи Дирихле изучались метризуемые, полные, но, вообще говоря, некомпактные пространства и соответствующие им границы, причем граничные условия выражались с помощью фильтров. Интересные примеры получаются при пополнении по метрике, совместимой с топологией Ω , с помощью базисов фильтров, определяемых концами некоторых линий, например линий Грина (Брело и Шоке [1], Брело [15], Оцука, Арсоув и Джонсон).

2. Основной случай: пространство Мартина $\hat{\Omega}$. Далее будем предполагать, что $\bar{\Omega} = \hat{\Omega}$ (см. Брело [17]).

Лемма XVI.6. Пусть точка X минимальна (т. е. $X \in \Delta_1$). Если $X \in e$, то $(K_X)_e = K_X$, в противном случае $(K_X)_e = 0$.

Доказательство. Для любой открытой окрестности α множества e в пространстве $\hat{\Omega}$ множество $\alpha \cap \Omega$ будет неразрезано в $X \in e$ (лемма XV.1). Следовательно, $R_{K_X}^{\alpha \cap \Omega} = K_X$ (определение разреженности) и $(K_X)_e = K_X$.

В случае $X \notin e$ мы докажем даже немного больше, а именно что $(K_X)_{\Delta \setminus \{X\}} = 0$. Воспользуемся существованием окрестности E множества $\Delta \setminus \{X\}$ в $\hat{\Omega}$, такой, что $E \cap \Omega$ разрежено в X (лемма XV.2). Тогда $R_{K_X}^{E \cap \Omega} < K_X$ и, следовательно, $(K_X)_{\Delta \setminus \{X\}} < K_X$. Теперь достаточно заметить, что для любого $e \subset \Delta$ минимальная функция K_X удовлетворяет условию $(K_X)_e = 0$

или $(K_X)_e = K_X$. В самом деле, так как $(K_X)_e \leq K_X$, то $(K_X)_e = lK_X$ ($l \geq 0$); далее $((K_X)_e)_e = l(K_X)_e$, так что $(K_X)_e = l(K_X)_e$, и поэтому либо $(K_X)_e = 0$, либо $= 1$.

Лемма XVI.7. *Обозначим через μ_h меру, фигурирующую в представлении Мартина функции h (см. теорему XIV.4). Тогда*

$$h_e(y) = \int_e \overline{K_X}(y) d\mu_h(X) = \int \varphi_e K_X d\mu_h$$

(где φ_e — характеристическая функция (индикатор) e). Если множество e борелевское (или даже только μ_h -измеримое), то, обозначая через μ_h^e сужение меры μ_h на e , будем иметь

$$h_e(y) = \int K_X d\mu_h^e(X); \quad h_e(y_0) = \int_e d\mu_h.$$

Доказательство. Предположим сначала, что e компактно. Рассмотрим открытую окрестность α множества e в $\hat{\Omega}$. Тогда, согласно лемме XV.10,

$$\hat{R}_h^{\alpha \cap \Omega}(y) = \int \hat{R}_{K_X}^{\alpha \cap \Omega}(y) d\mu_h(X).$$

Беря убывающую последовательность $\{\alpha_n\}$ таких множеств α с пересечением, равным e , убеждаемся, что $\hat{R}_h^{\alpha_n \cap \Omega}$ и $\hat{R}_{K_X}^{\alpha_n \cap \Omega}$ стремятся соответственно к h_e и $(K_X)_e$. Следовательно,

$$h_e(y) = \int (K_X)_e d\mu_h(X) = \int_e K_X d\mu_h(X).$$

Для открытого множества e рассмотрим возрастающую последовательность компактных e_n с $\bigcup e_n = e$ и получим ту же самую формулу. Для произвольного e рассмотрим множество всех открытых окрестностей j в Δ ; очевидно, $h_e = \inf_j h_j$. Для фиксированного y интеграл $\int_j K_X(y) d\mu_h$ есть $K_X(y) d\mu_h$ -мера

множества j , и поэтому $\inf_j h_j$ есть соответствующая внешняя мера множества e , т. е. $\int \varphi_e K_X(y) d\mu_h(X)$.

Отметим, что множество $\Delta \setminus \Delta_1$ всегда h -пренебрежимо.

Следствие. Если e_1, e_2 — непересекающиеся борелевские множества в Δ , то $(h_{e_1})_{e_2} = 0$.

Действительно, $(h_{e_1})_{e_2}(y_0) = \int_{e_2} d\mu_h^{e_1} = 0$.

Лемма XVI. 8. Если e — борелевское (или даже только μ_h -измеримое) множество, то характеристическая функция φ_e этого множества h -разрешима.

Доказательство. Так как $(h_e)_{\Delta \setminus e} = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти такую открытую окрестность α множества $\Delta \setminus e$ в пространстве $\hat{\Omega}$, что $\hat{R}_{h_e}^{\alpha \cap \Omega}(y_0) < \varepsilon$. Далее, разность $h_e - \hat{R}_{h_e}^{\alpha \cap \Omega} \geq 0$ и равна нулю на $\alpha \cap \Omega$; эта — субгармоническая функция в Ω , которая не превосходит $h_e = \bar{D}_{\varphi_e, h}$, и ее отношение к h стремится к нулю в каждой точке множества $\Delta \setminus e$; следовательно, она не превосходит $\underline{D}_{\varphi_e, h}$. Это показывает, что разность $\bar{D}_{\varphi_e, h} - \underline{D}_{\varphi_e, h}$ произвольно мала в точке y_0 ; следовательно, она равна нулю в y_0 и, значит, всюду в Ω .

Теорема XVI. 9 (для пространства Мартина). Всякая конечная непрерывная функция φ на Δ является h -разрешимой, и мера $d\nu_h^\varphi$ из общей теории равна в рассматриваемом случае $K_X(y) d\mu_h(X)$.

Доказательство. Действительно, функцию φ можно приблизить с точностью до любого $\varepsilon > 0$ конечной суммой функций вида $\lambda_i \varphi_{e_i}$ (где e_i — борелевские множества, λ_i — вещественные числа), которая h -разрешима. Сопоставление выражений для $h_e(y)$, данных в теореме XVI. 3 и в лемме XVI. 7, приводит к искомому соотношению между ν_h^φ и μ_h .

Отметим, что h -пренебрежимость множества равносильна в рассматриваемом случае равенству нулю его μ_h -меры.

Замечание 1. Доказанный результат первоначально был получен Брело [17] с помощью аналогичных, но более длинных рассуждений. А именно, вместо интегрального представления Мартина использовалось одно более грубое элементарное представление. Оно приводит к формуле $D_{f,h} = \int f K_X d\nu_h^{y_0}$, где мера $\nu_h^{y_0}$ сосредоточена на Δ_1 ; в частном случае $f=1$ эта формула дает $D_{1,h} = h = \int K_X d\nu_h^{y_0}$, т. е. представление Мартина.

Замечание 2. Лемма XVI.4 наводит на мысль рассмотреть последовательности функций $R_h^{e_i \cap \Omega}$ (в $\hat{\Omega}$) для убывающей последовательности множеств $e_i \subset \Omega$; однако даже если все e_i открыты и $\bigcap e_i \cap \Omega = \emptyset$, то $\inf R_h^{e_i \cap \Omega} \neq h_{\bigcap e_i}$. При выполнении условия $\bigcap e_i \cap \Omega = \emptyset$ этот \inf равен $\inf h_{A_i}$, где A_i — множество точек из Δ_1 , в которых $e_i \cap \Omega$ неразрезано. Более подробное и более общее исследование проведено в Брело [30].

Упражнение. Функции $D_{f,h}$ ($f \geq 0$) совпадают с пределами возрастающих последовательностей неотрицательных гармонических функций, отношение которых к h равномерно ограничено (Парро [1], Брело [17]).

3. Другие характеристики огибающих (случай Мартина). Лемма XVI.10 (принцип минимума) (Найм [1]). Пусть заданы положительная гармоническая функция h и супергармоническая функция u , такие, что $u/h \geq K$ (где постоянная $K \leq 0$). Пусть e — множество внутренней μ_h -меры нуля u для всякой точки $X \in \Delta_1 \setminus e$ существует неразрезанное в ней множество E_X , такое, что

$$\liminf_{y \rightarrow X, y \in E_X} \frac{u(y)}{h(y)} \geq 0.$$

Тогда $u \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u_1 = \inf(u, 0)$ и допустим, что $u_1 \neq 0$. У этой функции имеется наибольшая гармоническая миноранта $u'_1 \geq Kh$. Множество $E_\varepsilon = \{x \mid u_1(x) \geq -\varepsilon h(x)\}$, совпадающее с множеством $\{x \mid u \geq -\varepsilon h\}$, содержит для каждой точки $X \in \Delta_1 \setminus e$ пересечение множества E_X с некоторой окрестностью точки X . Поэтому борелевское подмножество в Δ_1 , где E_ε разрежено, является частью множества e и имеет нулевую μ_h -меру и нулевую $\mu_{-u'_1}$ -меру. Следовательно, $R_{-u'_1}^E = -u'_1$ (теорема XV.11). Так как $u_1 = u'_1 + v$ (где v — неотрицательный потенциал), то $-u'_1 \leq \varepsilon h + v$ на E_ε . Таким образом, $R_{-u'_1}^E \leq \varepsilon h + v$ на Ω для произвольного $\varepsilon > 0$, так что $u'_1 = 0$. Получено противоречие.

Теорема XVI.11 (Наим [1], Дуб [3]). Для произвольной вещественной функции f на Δ рассмотрим гипергармонические функции u , для которых отношение u/h , где h — фиксированная гармоническая функция, ограничено снизу и удовлетворяет одному из следующих условий:

а) Для любой точки $X \in \Delta_1$ существует множество E_X^u , неразрезанное в X и такое, что

$$\liminf_{u \in E_X^u, u \rightarrow X} (u/h) \geq f(X).$$

б) Тонкий $\liminf (u/h) \geq f(X)$ в любой точке $X \in \Delta_1$.

с) (Дуб) Тонкий $\limsup (u/h) \geq f(X)$ в любой точке $X \in \Delta_1$.

Тогда нижняя огибающая множества таких функций u совпадает с $\bar{D}_{f,h}$. Тот же результат верен, если предположить лишь, что указанные условия выполняются μ_h -почти всюду.

Доказательство. В каждом из трех случаев рассматриваемая огибающая, очевидно, $\leq \bar{D}_{f,h}$, и нам нужно получить противоположное неравенство. Так как отношение u/h ограничено снизу некоторой константой K , то достаточно рассмотреть вместо f функ-

цию $f' = \sup(f, K)$, поскольку $\bar{D}_{f', h} \geq \bar{D}_{f, h}$. Можем считать поэтому, что f ограничена снизу, например, неотрицательна. Предположим, что функция $\bar{D}_{f, h}$ конечна. Тогда существует функция $\varphi \geq f$, v_h^u - и μ_h -интегрируемая и такая, что $D_{\varphi, h} = \bar{D}_{f, h}$ и $\underline{D}_{\varphi-f, h} = 0$ (в случае, когда f бесконечна, $\varphi - f = 0$). Это — свойство верхнего интеграла. Отсюда следует, что множество, где $\varphi - f > \varepsilon > 0$, имеет внутреннюю μ_h -меру нуль. Далее, если функция v гипогармонична и удовлетворяет условиям: v/h ограничено сверху и $\limsup (v/h) \leq \varphi$ в любой точке $X \in \Delta_1$, то функция $u - v$ гипергармонична, а $(u - v)/h$ ограничено снизу, и в случае а) имеем

$$\liminf_{y \in E_X^u, y \rightarrow X} \frac{u - v + \varepsilon h}{h} \geq 0$$

для всех $X \in \Delta_1$, исключая множество нулевой внутренней μ_h -меры. Следовательно, $u - v \geq -\varepsilon h$, $u \geq v$ и $u \geq \underline{D}_{\varphi, h} = D_{\varphi, h} = \bar{D}_{f, h}$.

В случаях б) и с) $u(y)/h(y)$ имеет предел $f(X)$ при $y \rightarrow X$ по некоторому множеству $E_X'^n$, неразрезанному в точке $X \in \Delta_1$ (в соответствии с интерпретацией тонкой топологии на $\Omega \cup \Delta_1$, данной в теоремах XV.9 и III.3). Следовательно, $u - v$ удовлетворяет тем же условиям, что и выше, с заменой E_X^u на $E_X'^u$, и мы заключаем, что $u \geq \bar{D}_{f, h}$.

Если $\bar{D}_{f, h} = +\infty$, то мы рассматриваем $f_n = \inf(f, n)$; тогда функция $\bar{D}_{f_n, h}$ конечна и стремится к $\bar{D}_{f, h}$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $u \geq \bar{D}_{f_n, h}$, то $u \geq \bar{D}_{f, h} = +\infty$.

Замечание. В качестве следствия в случае с) получаем, что для положительной супергармонической функции v множество точек на Δ_1 , где тонкий $\limsup (v/h) = +\infty$ h -пренебрежимо (прямое доказательство см. у Наим [2]).

4. Граничное поведение гармонических и супергармонических функций. Глобальные результаты, получаемые с использованием (минимальной) тонкой топологии (случай Мартина). Успешное введение минимальной тонкой топологии позволило Дубу получить результаты, аналогичные классической теореме Фату о некасательных граничных пределах, ограниченных в круге гармонических функций, а также ее усилениям, принадлежащим Кальдерону, Стейну и др., с заменой упомянутых пределов тонкими пределами, причем для случая общего пространства Мартина.

Основой для этих исследований служит проведенный выше анализ.

Теорема XVI.12 (Дуб [3, 4]). *Если h — положительная гармоническая функция и функция f на Δ h -разрешима, то отношение $D_{f,h}/h$ имеет тонкий предел f μ_h -почти всюду на Δ_1 .*

Доказательство. Обозначим через f' тонкий $\limsup(D_{f,h}/h)$ на Δ_1 и положим $f_1 = \sup(f, f') \geq f$. Если u удовлетворяет условиям предыдущей теоремы (случай с)), то $u \geq D_{f,h}$. Аналогично $u \geq \bar{D}_{f_1,h}$. Переходя к нижней огибающей множества этих u , получаем $D_{f,h} \geq \bar{D}_{f_1,h}$. Следовательно, $D_{f,h} = \bar{D}_{f_1,h} = D_{f_1,h}$, откуда видно, что $f = f_1$ μ_h -почти всюду, т. е. $f' \leq f$ μ_h -почти всюду. Тот же результат получается для $-f$, и мы заключаем, что тонкий $\liminf(D_{f,h}/h) \geq f$ μ_h -почти всюду.

З а м е ч а н и е. Другое доказательство, использующее вместо теоремы XVI.11 (случай с)) замечание, приведенное в конце п. 3, можно найти у Наим [2].

Теорема XVI.13 (Наим [1]). *Если v — потенциал, а h — положительная гармоническая функция, то отношение v/h имеет μ_h -почти всюду на Δ_1 тонкий предел, равный нулю.*

Доказательство. Нам нужно показать, что множество точек $X \in \Delta_1$, где тонкий $\limsup(v/h) > 0$, h -пренебрежимо. Докажем это для множества, где тонкий $\limsup(v/h) > \varepsilon > 0$. Это множество содержится в мно-

жестве точек $X \in \Delta_1$, где $E = \{x \mid v(x)/h(x) > \varepsilon\}$ неразрезано. Далее, функция $\widehat{R}_h^E \leq v/\varepsilon$ и, следовательно, является потенциалом. Поэтому следствие теоремы XV.11 показывает, что подмножество в Δ_1 , где E неразрезано, h -пренебрежимо.

Следствие 1. Пусть заданы h , открытое множество $\delta \subset \widehat{\Omega}$ и положительная гармоническая функция u , такая, что $\mu_u(\delta \cap \Delta) = 0$. Тогда u/h имеет нулевой тонкий предел μ_h -почти всюду на $\delta \cap \Delta_1$.

В самом деле, возьмем в $\widehat{\Omega}$ открытое множество $\delta_0 \subset \bar{\delta}_0 \subset \delta$. Так как множество точек Δ_1 , где $\delta_0 \cap \Omega$ неразрезано, содержится в $\delta \cap \Omega$ и, значит, u -пренебрежимо, то функция $R_u^{\delta_0 \cap \Omega}$ является потенциалом (теорема XV.11, следствие). Но на $\delta_0 \cap \Omega$ она совпадает с u , откуда и следует искомым результат для δ_0 , а значит, и для δ .

Применение. Если положительная гармоническая функция u привязана к нулю в точке $X \in \Delta_1$, то отношение u/h имеет нулевой тонкий предел μ_h -почти всюду в некоторой окрестности точки X . Этот результат применим, в частности, к K_X , ($X_0 \in \Delta_1$, $X \in \Delta_1$, $X \neq X_0$).

В самом деле, $\mu_u(\delta \cap \Delta_1) = 0$ для некоторой открытой окрестности δ точки X (предложение XV.13).

Следствие 2. Если множество $\delta \subset \widehat{\Omega}$ открыто, то отношение $\widehat{R}_h^{C\delta \cap \Omega}/h$ μ_h -почти всюду на $\delta \cap \Delta_1$ имеет тонкий предел, равный нулю.

Действительно, согласно следствию теоремы XV.11, $\widehat{R}_h^{C\delta \cap \Omega}$ есть сумма некоторого потенциала и гармонической функции u , для которой $\mu_u(\delta \cap \Delta_1) = 0$, так как $C\delta \cap \Omega$ разрезано на $\delta \cap \Delta_1$.

Лемма XVI.14 (Парро [1] (в случае $h=1$), Наим [1]). Всякая неотрицательная гармоническая функция u есть сумма некоторого решения $D_{f,h}$ (с μ_h -интегрируемой функцией f) и гармонической функции v , для которой $\inf(v, h)$ является потенциалом.

Доказательство. Мера μ_u есть сумма меры $f\mu_h$ (где функция f μ_h -интегрируема) и меры ν , сингулярной относительно μ_h , т. е. такой, что $\inf(\nu, \mu_h) = 0$ (Ф. Рисс). Другими словами, u есть сумма функции $\int K_x f d\mu_h$ и неотрицательной гармонической функции ν , такой, что h и ν не имеют, кроме нуля, никакой общей неотрицательной гармонической миноранты. Но это и означает, что $\inf(\nu, h)$ есть потенциал. (Другие доказательства без использования мер см. у Парро [1] и Наим [1].)

Лемма XVI. 15 (Наим [1]). Если u и h — положительные гармонические функции и $\inf(u, h)$ есть потенциал, то отношение u/h μ_h -почти всюду на Δ_1 имеет тонкий предел нуль.

Доказательство. Рассмотрим множество $E_\varepsilon = \{x \mid u(x)/h(x) > \varepsilon\}$ ($0 < \varepsilon < 1$). Функция $R_h^{E_\varepsilon}$ не превосходит h и u/ε , а следовательно, и $\varepsilon^{-1} \inf(u, h)$. Таким образом, она является потенциалом, и поэтому множество точек из Δ_1 , где E_ε неразрезано, имеет μ_h -меру нуль (теорема XV. 11, следствие). То же самое верно для множества точек, где тонкий $\limsup(u/h) > 0$.

З а м е ч а н и е. Обратное утверждение также верно (Наим [1]).

Основная теорема XVI. 16 (Дуб [3, 4]). Если функция u положительна и супергармонична, а h положительна и гармонична, то отношение u/h имеет конечный тонкий предел μ_h -почти всюду на Δ_1 .

Доказательство. В самом деле, u есть сумма неотрицательной гармонической функции ν и потенциала. Поведение этого потенциала описывается теоремой XVI. 13, а поведение функции ν (ввиду разложения из леммы XVI. 14) — леммой XVI. 15 и теоремой XVI. 12, в которой функция f μ_h -интегрируема, и, следовательно, конечна μ_h -почти всюду.

Более прямое доказательство. Положим $f(X) = \limsup(u/h)$ в точке $X \in \Delta_1$.

а) f — борелевская функция на Δ_1 . Действительно, положим $e = \{X \mid f(X) \geq \lambda\}$ и обозначим через e'_n множество тех точек из Δ_1 , где множество $e_n = \{x \mid u/h > \lambda_n\} \subset \Omega$ ($\lambda_n < \lambda$) не является минимально разреженным. При $\lambda_n \uparrow$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$ мы имеем $e = \bigcap e'_n$. Но известно, что $\mathcal{C}e'_n$ — борелевское множество (теорема XV. 11); поэтому e также борелево.

б) $f(X)$ — разрешимая функция. В самом деле, мы знаем, что

$$\int f dv_h^y = \bar{D}_{f,h}(y) \leq u(y).$$

Следовательно, интеграл конечен (и гармоничен), а так как функция f измерима, то она v_h^y -интегрируема и, значит, разрешима. Таким образом, $D_{f,h}$ существует и f конечна μ_h -почти всюду.

с) Согласно теоремам XVI. 11 и XVI. 12 $u \geq D_{f,h}$ и μ_h -почти всюду

$$\begin{aligned} (\text{тонкий } \lim(u/h) \text{ в } X) &\geq (\text{тонкий } \lim(D_{f,h}/h) \text{ в } X) = \\ &= f(X) = (\text{тонкий } \lim(u/h) \text{ в } X). \end{aligned}$$

Итак, u/h имеет μ_h -почти всюду конечный тонкий предел, равный f .

Обобщения. Из имеющихся обобщений отметим следующие.

а) Дуб [3, 4] доказал, что если обе функции u и h положительны и супергармоничны, то отношение u/h имеет конечный тонкий предел μ_h -почти всюду в $\Omega \cup \Delta_1$ (где μ_h — это мера на $\hat{\Omega}$, фигурирующая в представлении Рисса — Мартина функции h).

б) Для строго положительной функции h и для произвольной супергармонической функции u , таких, что отношение u/h ограничено снизу в некоторой тонкой окрестности каждой точки множества $A \subset \Delta_1$, это отношение имеет конечный тонкий предел μ_h -почти всюду на A (Дуб [4]).

Дополнения. а) Дуб [6] изучал также граничное поведение BLD-функций, введенных в гл. IX. Он доказал для них существование тонкого предела $f\mu_1$ -почти всюду на Δ_1 , а в случае гармонических функций u

равенство $u = D_{f,1}$; при этом интеграл Дирихле может быть выражен через f . Далее, $f = 0$ (μ_1 -почти всюду) в том и только в том случае, когда u является функцией *потенциального типа*, т. е. пределом (почти всюду, а также по норме Дирихле) последовательности BLD-функций класса C^∞ с компактным носителем. Дуб получил и другие результаты в этом направлении. Обобщение исследований Дуба на случай h -BLD-функций было дано Люме-Наим.

в) Гармоническая функция v называется *обобщенной сопряженной* для гармонической функции u , если $|\text{grad } v| \leq K |\text{grad } u|$ на Ω (K — константа). Если v имеет почти всюду на Δ_1 минимальный тонкий предел, то u обладает тем же свойством (см. Дуб [9], где этот результат приведен в несколько более общем виде).

5. Тонкая проблема Дирихле и различные типы регулярности. Даже в случае Мартина неизвестно, будет ли h -пренебрежимым множество h -иррегулярных точек (которые были для более общего случая определены в п. 1). Однако для других вариантов задачи Дирихле это будет так при надлежащем определении регулярности. Рассмотрим функции u , удовлетворяющие условиям теоремы XVI.11, случай b), и их нижнюю огибающую, равную $\bar{D}_{f,h}$. Положим также $\underline{D}_{f,h} = -\bar{D}_{-f,h}$ и для соответствующей *тонкой h -задачи Дирихле* определим понятия и разрешимости так же, как выше. Однако понятие *тонкой h -регулярной точки* X определим с помощью более слабого условия: $D_{f,h}/h \rightarrow f(X)$ ($X \in \Delta$) в тонкой топологии для произвольной конечной непрерывной на Δ функции f . Это определение немедленно приводит к желаемому свойству множества тонких h -иррегулярных точек.

В самом деле, рассмотрим счетное плотное множество $\{f_i\}$ в пространстве вещественных конечных непрерывных функций f на Δ (с топологией равномерной сходимости). Если e_i — исключительное множество, отвечающее функции f_i по теореме XVI.12,

то множество $\bigcup e_i$ будет h -пренебрежимо, и для любой точки $X \in \Delta_1 \setminus \bigcup e_i$ имеем $D_{f, h}/h \rightarrow f(X)$ в тонкой топологии.

Мы сейчас докажем большее и более глубоко проникнем в суть вопроса, введя некоторые новые понятия (при этом мы ограничимся здесь рассмотрением пространства $\hat{\Omega}$). См. Брело [17] и особенно Наим [1].

Фильтр \mathfrak{F} на Ω , сходящийся в $\hat{\Omega}$ к точке $X \in \Delta_1$, назовем *слабо h -регулярным*, если существует положительная супергармоническая на Ω функция v , такая, что $v/h \xrightarrow{\mathfrak{F}} 0$. Если же, кроме того, $\inf(v/h) > 0$ вне любой окрестности точки X в $\hat{\Omega}$, то фильтр назовем *сильно h -регулярным*.

Совсем не очевидно, что каждая из введенных h -регулярностей эквивалентна существованию соответствующей функции v лишь в окрестности точки X . Однако легко видеть, что обычная h -регулярность влечет за собой слабую h -регулярность и вытекает из сильной. Далее, слабая h -регулярность эквивалентна условию $G_{y_0}/h \xrightarrow{\mathfrak{F}} 0$ (очевидно, не зависящему от y_0), а сильная — условию $R_h^C(\delta \cap \Omega)/h \xrightarrow{\mathfrak{F}} 0$ для любой окрестности δ точки X .

Если фильтр \mathfrak{F} задается пересечениями множества Ω с (тонкими) окрестностями точки X , то эта точка называется соответственно (*тонкой*) *слабо h -регулярной* или (*тонкой*) *сильно h -регулярной*.

Напомним (теорема XV.8), что отношение G_{y_0}/h имеет в любой точке $X \in \Delta_1$ тонкий \limsup , равный \limsup в $\hat{\Omega}$; поэтому слабо h -регулярные точки совпадают с тонкими слабо h -регулярными точками.

Теорема XVI.17 (в основном Наим [1]). *Каждое из следующих подмножеств в Δ_1 является h -пренебрежимым:*

- a) множество (*тонких*) *слабо h -иррегулярных точек*,
- b) множество *тонких h -иррегулярных точек*,
- c) множество *тонких сильно h -иррегулярных точек*.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы XVI.13, а кроме того, является следствием двух других. Второе утверждение было уже доказано выше; кроме того, оно также является следствием последнего утверждения, которое мы и докажем. Рассмотрим счетный базис открытых множеств пространства $\hat{\Omega}$ и обозначим через δ_n те из множеств этого базиса, которые пересекаются с Δ_1 . Тогда отношение $R_n^C(\delta_n \cap \Omega) / h$ тонко стремится к нулю на $\delta_n \cap \Delta_1$ всюду, за исключением некоторого h -пренебрежимого множества e_n (теорема XVI.13, следствие 2). Следовательно, $\bigcup e_n$ h -пренебрежимо и содержит все тонкие сильно h -иррегулярные точки.

Упражнение. В открытом множестве $\omega \subset \subset \Omega \subset \hat{\Omega}$ можно поставить h -задачу Дирихле, используя границу множества ω в $\hat{\Omega}$ (см. Брело [17], где это сделано в более общей ситуации, описанной в п. 1). Определения h -регулярности оставим прежними. Тогда сильная h -регулярность фильтра \mathfrak{F} , сходящегося к $X \in \Delta_1$, эквивалентна h -регулярности относительно $\omega \cap \Omega$ для любой открытой окрестности ω точки X .

Замечание о равномерной интегрируемости. Для границы Мартина или минимальной тонкой границы можно получить лучшие результаты, чем для обычной евклидовой границы (гл. IX, п. 8). Данная гармоническая в Ω функция u является решением $D_{f,1}$ в том и только в том случае, когда она равномерно интегрируема относительно гармонических мер $\mu_{x_0}^{\omega_i}$ (здесь ω_i — относительно компактная область в Ω и $x_0 \in \omega_i$). В этом случае функция f μ_1 -почти всюду равна тонкому пределу u .

Супергармоническая функция, которая μ_1 -почти всюду имеет нулевой тонкий предел, будет потенциалом в том и только в том случае, когда она обладает указанным выше свойством равномерной интегрируемости. Это легко обобщается на случай отно-

шения u/h , где h — фиксированная положительная гармоническая функция.

6. Приложения. Дальнейшее изучение задачи Дирихле (краткие указания). С помощью введенных выше понятий можно более глубоко изучить поведение супергармонических функций в окрестности точек границы (см. Наим [1]). Например, если точка $X_0 \in \Delta$ слабо h -иррегулярна, то:

а) Если v — положительная супергармоническая функция, то v/h имеет тонкий предел $\Lambda_v \geq 0$ в X_0 .

б) Если фильтр \mathfrak{F} сходится к X_0 и $G_{y_\alpha}/h \xrightarrow{\mathfrak{F}} \rightarrow \limsup (G_{y_\alpha}/h)$ в X_0 , то для любой положительной гармонической функции u , для которой u/h ограничено, $u/h \xrightarrow{\mathfrak{F}} \Lambda_u$.

в) Если функция $f \geq 0$ на Δ h -разрешима, то $D_{f,h}/h$ имеет тонкий предел в X_0 , который может быть записан в виде $\int f d\nu^x$, где ν не зависит от f . При этом ν -измеримость совпадает с μ_h -измеримостью и множества ν -меры нуль и μ_h -меры нуль совпадают.

Для общей компактной границы (п. 1) аналогичный анализ нельзя продвинуть столь далеко, но некоторые результаты могут быть получены с помощью важной теоремы Наим, согласно которой при условии A_h общая задача Дирихле из п. 1 эквивалентна соответствующей задаче Дирихле для границы Мартина (так как с точностью до двух h -пренебрежимых множеств существует взаимно однозначное отображение исходной границы на Δ_1). Граница Δ наряду с евклидовой является наиболее важной из компактных границ, и было бы желательно провести более глубокий сравнительный анализ этих границ, чем это сделано до сих пор. Конечно, основной топологией остается тонкая топология.

Имеются очевидные обобщения на случай функций комплексного переменного и важные приложения к римановым поверхностям (напомним, что гиперболические римановы поверхности являются пространствами Грина), а именно к проблеме соответствия

между двумя гиперболическими поверхностями и их границами Мартина (см. Брело [17, 18, 29], Наим [1], Константиnescу и Корня [1], Дуб [5, 7]).

В следующей главе будет предпринято более глубокое изучение тонкой топологии и будут рассмотрены связи с более ранними классическими результатами.

Глава XVII

СРАВНЕНИЕ ДВУХ ТИПОВ РАЗРЕЖЕННОСТИ. ТОНКИЕ И НЕКАСАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ (КЛАССИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ. ПРИМЕРЫ)

1. Некоторые примеры сравнения. Теорема XVII. 1. *Рассмотрим пространство Грина Ω и полярную точку $x_0 \in \Omega$. Для любого множества из $\Omega_1 = \Omega \setminus \{x_0\}$ разреженность в точке x_0 в пространстве Ω эквивалентна минимальной разреженности относительно минимальной функции $G_{x_0}^\Omega$.*

Доказательство. Мы знаем (теорема XIV.6), что функция $G_{x_0}^\Omega$ минимальна в Ω_1 . Далее, множество $e \subset \Omega_1$ будет разреженным в точке x_0 в Ω в том и только в том случае, когда $(R_{G_{x_0}^\Omega}^e)_\Omega \not\equiv G_{x_0}^\Omega$. Но

$(R_{G_{x_0}^\Omega}^e)_\Omega = (R_{G_{x_0}^\Omega}^e)_{\Omega_1}$ на Ω_1 , так как положительные супергармонические функции на множестве Ω_1 являются сужениями на это множество положительных супергармонических функций на Ω . Таким образом, разреженность в x_0 эквивалентна минимальной разреженности для $G_{x_0}^\Omega$.

Другое по форме доказательство основано на совпадении потенциалов в $\Omega \setminus \{x_0\}$ и потенциалов в Ω для мер, не нагружающих $\{x_0\}$.

У п р а ж н е н и е. Если x_0 — неполярная точка в пространстве Ω (размерности ≥ 3), то разреженность в x_0 влечет за собой минимальную разреженность в Ω_1

относительно минимальной функции $G_{x_0}^\Omega$, но обратное неверно. Минимальная разреженность эквивалентна в этом случае разреженности множества, получаемого инверсией образа в \mathbb{R}^n окрестности точки x_0 (Брело [6]).

Для обобщения предыдущей теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма XVII. 2. *Рассмотрим область ω в пространстве Грина Ω и иррегулярную точку $x_0 \in \Omega$ для ω . Тогда $U = G_{x_0}^\Omega - R_{G_{x_0}^\Omega}^{C\omega}$ является в ω минимальной гармонической функцией.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим в ω гармоническую функцию u , $0 \leq u \leq U$. Если u_1 есть продолжение функции $u + R_{G_{x_0}^\Omega}^{C\omega}$ с ω на Ω посредством

функции $G_{x_0}^\Omega$, то \hat{u}_1 — потенциал. В самом деле, если v обозначает потенциал, равный бесконечности на множестве $e \subset \partial\omega \cap \Omega$, где $C\omega$ разрежено, то $u_1 + n^{-1}v$ есть неотрицательная супергармоническая функция,

и то же справедливо для функции $\widehat{\lim}(u_1 + n^{-1}v)$, вне e равной u_1 и, значит, \hat{u}_1 ; вне $\{x_0\}$ эта функция локально ограничена. Так как $u_1 \leq G_{x_0}^\Omega$, то \hat{u}_1 — действительно потенциал, и соответствующая мера μ не нагружает e , кроме, возможно, точки $\{x_0\}$ ¹⁾. Следовательно, $\hat{u}_1 = V + \alpha G_{x_0}^\Omega$, где V — потенциал сужения μ' меры μ на $C\{x_0\}$. Далее,

$$\hat{R}_{\hat{u}_1}^{C\omega} = \hat{R}_V^{C\omega} + \alpha \hat{R}_{G_{x_0}^\Omega}^{C\omega}, \quad \alpha \geq 0.$$

Но $\hat{R}_{\hat{u}_1}^{C\omega} = R_{G_{x_0}^\Omega}^{C\omega}$, так как $\hat{u}_1 = G_{x_0}^\Omega$ квазивсюду на $C\omega$, а $\hat{R}_V^{C\omega} = V$, потому что μ' сосредоточена на $C\omega$. Итак,

$$u = \hat{u}_1 - \hat{R}_{G_{x_0}^\Omega}^{C\omega} = \alpha (G_{x_0}^\Omega - R_{G_{x_0}^\Omega}^{C\omega}) = \alpha U \text{ на } \omega.$$

¹⁾ Если неотрицательная супергармоническая функция ω на ω конечна на полярном множестве e , а μ — ассоциированная с ней мера, то e имеет нулевую внутреннюю μ -меру.

Лемма XVII.3 (Наим). В обозначениях предыдущей леммы для всякого множества $e \subset \omega$

$$\left(\widehat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^{e \cup C\omega}\right)_{\Omega} = \left(\widehat{R}_U^e\right)_{\omega} + \left(\widehat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega}\right)_{\Omega} \text{ на } \omega.$$

Доказательство. Для любой неотрицательной супергармонической на Ω функции u , которая мажорирует $G_{x_0}^{\Omega}$ на $e \cup C\omega$, имеем $u - R_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega} \geq 0$, и на e эта разность мажорирует U . Поэтому $u - R_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega} \geq (R_u^e)_{\omega}$ на ω , и левая часть доказываемого равенства мажорирует правую. Обратно, функция U_1 , равная на ω сумме $(\widehat{R}_u^e)_{\omega} + \widehat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega}$ и продолженная на $C\omega$ как $G_{x_0}^{\Omega}$, такова, что \widehat{U}_1 есть неотрицательная супергармоническая функция в Ω (даже потенциал). Это доказывается теми же рассуждениями, что и в начале доказательства предыдущей леммы. Но \widehat{U}_1 мажорирует $G_{x_0}^{\Omega}$ квазिवсюду на $e \cup C\omega$ и потому мажорирует также $\left(\widehat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^{e \cup C\omega}\right)_{\Omega}$. Следовательно, то же верно для U_1 .

Теорема XVII.4 (Наим [1]). Рассмотрим пространство Грина Ω и в нем область ω с иррегулярной (и значит, полярной) граничной точкой $x_0 \in \Omega$. Разреженность множества $e \subset \omega$ в точке x_0 в Ω эквивалентна минимальной разреженности относительно минимальной функции $G_{x_0}^{\Omega} - R_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega}$ в ω , т. е. разреженности в соответствующей точке X_0 границы Мартина.

Иными словами, соответствие между пространствами $\omega \cup \{x_0\}$ и $\omega \cup \{X_0\}$, снабженными тонкой и минимальной тонкой топологиями, определяемое тождественным отображением на ω и соответствием $x_0 \leftrightarrow X_0$, есть гомеоморфизм.

Доказательство. Если e разрежено, то в силу разреженности $C\omega$ множество $e \cup C\omega$ будет также разрежено в x_0 , так что $\left(\widehat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^{e \cup C\omega}\right)_{\Omega} \neq G_{x_0}^{\Omega}$. Если бы равенство соблюдалось всюду на ω , то оно имело бы место

квазивсюду на $\omega \cup C\omega = \Omega$ и, следовательно, всюду. Поэтому существует точка x_1 , где $(\hat{R}_U^e)_\omega + R_{G_{x_1}^{\Omega}}^{C\omega} \neq G_{x_1}^\Omega$, т. е. $(\hat{R}_U^e)_\omega(x_1) \neq G_{x_1}^\Omega(x_1) - R_{G_{x_1}^{\Omega}}^{C\omega}(x_1) = U(x_1)$. Но это и означает минимальную разреженность. Обратно, из минимальной разреженности следует, что $(\hat{R}_U^e)_\omega \neq U$ в некоторой точке $x_2 \in \omega$. Поэтому $\hat{R}_{G_{x_2}^{\Omega}}^{e \cup C\omega}(x_2) \neq G_{x_2}^\Omega(x_2)$, т. е. имеет место разреженность множества $e \cup C\omega$ и, значит, множества e .

Упражнение. Предположим, что e разрежено в x_0 . Тогда $\hat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega}$ есть наибольшая гармоническая миноранта для $\hat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^e$ в ω и, следовательно, $\hat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^e - \hat{R}_{G_{x_0}^{\Omega}}^{C\omega}$ есть потенциал в ω . Отсюда вытекает минимальная разреженность множества e (отметим, что лемма 3 здесь не используется).

2. Примеры в полупространстве ω пространства \mathbb{R}^n . (В основном по Лелон [1].) Евклидово замыкание области ω в компактификации Александра пространства \mathbb{R}^n совпадает с пространством Мартина $\hat{\omega}$.

Теорема XVII.5. *Рассмотрим в полупространстве $\omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) нормальную область Штольца $\mathcal{C} \neq \omega$, т. е. часть открытого конуса вращения с вершиной в $x_0 \in \partial\omega$ и осью, перпендикулярной гиперплоскости $\partial\omega$, принадлежащую некоторому шару с центром x_0 . Тогда разреженность множества $e \subset \mathcal{C}$ в x_0 в пространстве \mathbb{R}^n эквивалентна его минимальной разреженности в x_0 в ω .*

Доказательство. Введем множества $I_p = \{s^{p+1} < |x - x_0| \leq s^p\}$, $0 < s < 1$, $I_p^e = I_p \cap e$. Критерий разреженности множества e можно записать в виде $\sum_p \gamma_p / s^{p(n-2)} < +\infty$ (где γ_p — внешняя емкость множества $e_p = e \cap I_p$ в \mathbb{R}^n). Это несколько видоизмененная форма общего критерия Винера (теорема IX.10).

Введем следующее обозначение. Пусть φ, ψ — вещественные переменные, определяемые некоторыми условиями (например, зависящие от переменной p , изменяющейся в некоторой заданной области). Будем называть их *сравнимыми* и писать $\varphi \simeq \psi$, если отношение φ/ψ для всех значений p , где оно имеет смысл, содержится между двумя фиксированными положительными числами (не зависящими от p). Элементарный расчет показывает, что в случае \mathbb{K}^n ($n \geq 3$) внешняя гринова емкость γ_p^ω подмножества e_p в ω сравнима с γ_p (переменная p). Это вытекает из того, что $|x - y|^{-(n-2)} |G^\omega(x, y)| \simeq 1$ для x и y , меняющихся в $I_p \cap \mathcal{E}$ (при переменном p). Предположим, что e разрежено. Тогда ряд $\sum_p \gamma_p^\omega / s^{p(n-2)}$ сходится.

Далее, γ_p^ω есть полная мера, отвечающая $(\hat{R}_1^{e,p})_\omega$. При $x \in \mathcal{E}$ имеем $G_{y_0}^\omega(x) \simeq \delta_x \simeq |x - x_0|$, где δ_x — расстояние от переменной точки x до $\partial\omega$. Эта величина на $I_p \cap \mathcal{E}$ сравнима с s^p (переменная p). Таким образом, $(R_1^{e,p})_\omega(y_0) \simeq \gamma_p^\omega s^p$ и $\gamma_p^\omega s^{-p(n-2)} \simeq (\hat{R}_1^{e,p})_\omega(y_0) s^{-p(n-1)}$ (переменная p). Но на I_p имеем $K_{x_0}(x) \simeq \delta_x |x - x_n|^{-n} \simeq s^{-p(n-1)}$ (переменная p). Следовательно, ряд $\sum_p \hat{R}_{K_{x_0}}^{e,p}(y_0)$ сходится, так что $\sum_N \hat{R}_{K_{x_0}}^{e,p}(y_0) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, и $R_{K_{x_0}}^{e \cap \{|x-x_0| < r\}}(y_0) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Отсюда мы заключаем, что e минимально разрежено.

Обратное утверждение является следствием сходимости ряда $\sum_p \hat{R}_{K_{x_0}}^{e,p}(y_0)$, которая эквивалентна минимальной разреженности согласно критерию типа Винера, приведенному ниже в упражнении а).

Дополнения. Как показала Лелон [1], указанная в теореме эквивалентность не имеет места для произвольного множества $e \subset \omega^1$; однако *разрежен-*

¹) Существуют (даже при $n \geq 2$) минимально разреженные множества, не являющиеся разреженными; это вытекает, например, из неразреженности замыкания следующего множества: шара, из которого удален меньший шар, касающийся первого в точке x_0 .

ность всегда влечет за собой минимальную разреженность (Шоке).

Случай \mathbb{R}^2 более труден для исследования; последнее утверждение по-прежнему верно для любого $e \subset \omega^1$ (Джексон [1]), обратное утверждение снова неверно.

Иными словами, тождественное отображение множества $\omega \cup \{x_0\}$ в \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), наделенного минимальной тонкой топологией, в то же множество, наделенное тонкой топологией, непрерывно, обратное же отображение нет.

Дальнейшие результаты см. в Лелон [1], Брело и Дуб [1], Наим [1], Джексон [1].

Упражнения. а) Критерий минимальной разреженности подмножества e полупространства $\omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) состоит в сходимости ряда $\sum_p R_{K_{x_0}}^{e \cap I_p}(y_0)$, при прежнем определении множеств I_p (Лелон, Наим). В случае \mathbb{R}^2 для множества e , лежащего в области Штольца, другой, очевидно эквивалентный критерий состоит в сходимости ряда $\sum_p \gamma_p^\omega$.

См. также некоторые примеры и приложения в статье Брело и Дуб [1].

б) Снова при $n \geq 2$ и при тех же обозначениях определим минимальную полуразреженность условием $R_{K_{x_0}}^{e \cap I_p}(y_0) \rightarrow 0$ (не зависящим от s и y_0). Тогда множество e , для которого $\delta_x / |x - x_0| \rightarrow 0$ ($x \in e$, $x \rightarrow x_0$), будет минимально полуразреженным.

с) В случае \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) полуразреженность e (см. гл. IX, п. 6) влечет за собой минимальную полуразреженность в ω .

Это можно вывести из справедливости этого факта для случая множеств e , лежащих в области Штольца. В этом случае мы используем при $n \geq 3$ сравнимость $\gamma_p \simeq \gamma_p^\omega$ и заключаем, что $\gamma_p / s^{p(n-2)} \simeq (R_{K_{x_0}}^{e \cap I_p}(y_0))_\omega$. При $n=2$ полуразреженность означает, что $p\gamma_p \rightarrow 0$, в то время как минимальная полуразреженность

¹) Этим опровергается утверждение о несравнимости обоих видов разреженности, высказанное без доказательства Лелон.

(в области Штольца) эквивалентна тому, что $\gamma_p^\omega \rightarrow 0$. Согласно Джексону, первое условие влечет второе.

d) В любом пространстве Грина Ω минимальная полуразреженность множества e в точке $X \in \Delta_1$ может быть определена следующим образом. Положим $\sigma_\lambda = \{x \mid K_X(x)/G_{y_0}^\Omega(x) \geq \lambda\}$ и потребуем, чтобы выполнялось одно из условий:

$$\alpha) R_{\lambda G_{y_0}^\Omega}^{e \cap \sigma_\lambda} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty) \quad (\text{Брело — Дуб}),$$

$$\beta) R_{K_X}^{(\sigma_{t^p} \setminus \sigma_{t^{p+1}}) \cap e} \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty), \\ t > 1 \quad (\text{Дуб, неопубликовано}).$$

Доказать их эквивалентность и провести сравнение с понятием разреженности. Показать согласованность этих определений с определениями, введенными в б) для случая полупространства в \mathbb{R}^n .

Нетрудно в предыдущих примерах заменить область ω на ее пересечение с шаром с центром x_0 . Желательно было бы, однако, обобщить эти результаты по крайней мере на случай ограниченных регулярных областей, у которых евклидова граница совпадает с границей Мартина.

Упражнение. Для такого рода областей Ω , регулярных хотя бы только в одной точке $X \in \partial\Omega$, существование двух шаров, касающихся друг друга в точке X и лежащих соответственно внутри и вне области, позволяет заключить, что разреженность (соотв. полуразреженность) в X влечет за собой минимальную разреженность (соотв. минимальную полуразреженность).

3. Сравнение статистических типов разреженности. (См. Брело [26, 27].) Так как неизвестно, верны ли результаты п. 2 для общих областей, то мы рассмотрим здесь некоторые более слабые утверждения, остающиеся верными и в аксиоматических теориях.

Определение XVII. 6. Рассмотрим область ω в пространстве Грина Ω и граничную точку x_0

области ω в Ω . Минимальная точка X границы Мартина области ω (т. е. $X \in \Delta_1$) называется *связанной* в x_0 , если для любой окрестности δ точки x_0 множество $\omega \setminus \delta$ минимально разрежено в X , т. е. $(\delta \cap \omega) \cup \{X\}$ есть тонкая окрестность точки X (другое эквивалентное условие (Наим [1]); x_0 есть единственный „полус” для X).

Теорема XVII.7. *Если множество $e \subset \omega$ 1-статистически разрежено на $\alpha \subset \partial\omega \cap \Omega$ (например, разрежено в каждой точке α), то оно 1-статистически минимально разрежено на множестве E точек из Δ_1^ω , связанных с точками множества α .*

Доказательство. Если δ — переменная окрестность множества α , то семейство $\{\delta \cap e\}$ является 1-исчезающим в Ω (теорема VIII.16) и, следовательно, в ω .

В $(\delta \cap \omega) \cup E$ — тонкая окрестность множества E , и ее пересечение с e есть $\delta \cap e$. Поэтому если V — переменная тонкая окрестность E в $\hat{\omega} = \omega \cup \Delta_1^\omega$, то семейство $\{V \cap e\}$ будет 1-исчезающим, и отсюда следует, что e минимально тонко разрежено μ_1 -почти всюду на E (теорема XV.16).

Обобщение. Пусть W — положительная супергармоническая функции в Ω , а H — ее положительная гармоническая миноранта в ω . Если множество e W -статистически разрежено на $\alpha \subset \partial\omega \cap \Omega$, то оно H -статистически разрежено на E (множестве точек из Δ_1^ω , связанных с точками множества α).

Это устанавливается с помощью тех же рассуждений, что и в гл. XV, п. 5.

4. Угловые (некасательные) пределы и тонкие пределы для функций, гармонических в полупространстве $\omega \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим (для определенности вещественную) функцию f в полупространстве ω и граничную точку x_0 . Число λ называют *некасательным* (или *угловым*) *пределом* функции f в точке x_0 , если $f \rightarrow \lambda$ (в евклидовой топологии) в любой области Штольца с вершиной в x_0 ; число λ называется *угловой предельной точкой* функции f , если $f(x_n) \rightarrow \lambda$ для

некоторой последовательности $x_n \rightarrow x_0$, лежащей в области Штольца.

Мы уже рассматривали множества в ω , *полностью касательные* в точке x_0 , т. е. такие, что $\delta_x / |x - x_0| \rightarrow 0$, $x \in e$, $x \rightarrow x_0$. Дополнения таких множеств относительно ω образуют фильтр $\mathfrak{F}_{x_0}^a$. Приведенные выше угловые понятия (предела, предельной точки) эквивалентны понятиям предела и предельной точки по фильтру $\mathfrak{F}_{x_0}^a$ (замечание Дуба).

Мы будем также рассматривать фильтры $\mathfrak{F}_{x_0}^m$, $\mathfrak{F}_{x_0}^s$, образованные дополнениями относительно ω множеств (минимально) разреженных, соответственно полуразреженных в точке x_0 . Этим фильтрам отвечают, как нам известно, понятия (минимального) тонкого предела и полутонкого предела. Кроме того, мы знаем, что первое из этих понятий эквивалентно понятию евклидова предела вне некоторого разреженного множества, и можно показать, что аналогичное положение имеет место для полутонких пределов и полуразреженных множеств.

Отметим, что фильтр \mathfrak{F}^s тоньше, чем \mathfrak{F}^m и чем \mathfrak{F}^a (см. упражнение b) из п. 2).

Лемма XVII. 8. *Рассмотрим в полупространстве ω переменный шар B_x с центром в x радиуса $R_x = \alpha \delta_x$, где $0 < \alpha < 1$ фиксировано. Тогда для фиксированных точек $y_0 \in \omega$, $x_0 \in \partial\omega$ имеем*

$$\liminf_{x \in \omega, x \rightarrow x_0} (R_1^{B_x}(y_0) / \delta_x^{n-1}) > 0.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда вектор $x_0 - y_0$ ортогонален к гиперплоскости $\partial\omega$ и x лежит на той же нормали, что x_0 и y_0 . Если ω_x есть полупространство $\{y \mid \delta_y > \delta_x\} \subset \omega$, то $R_1^{B_x}(y_0)$ мажорирует гармоническую меру $\partial\omega_x \cap B_x$ относительно ω_x в точке y_0 . Последняя с точностью до множителя совпадает с R_x^{n-1} или δ_x^{n-1} .

Классические результаты типа теоремы Фату о существовании почти всюду угловых или нормальных пределов у гармонических и супергармонических

функций (Кальдерон, Стейн, Зигмунд) могут быть получены из следующей общей теоремы о тонких пределах.

Теорема XVII.9 (Брело и Дуб [1], Константи-неску и Корня [1]). Пусть u и h — две строго положительные гармонические функции в полупространстве ω (или только в некоторой окрестности его граничной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$). Всякая угловая предельная точка отношения u/h в x_0 является также (минимально) тонкой и даже полутонкой предельной точкой. Следовательно, существование тонкого предела влечет за собой существование углового предела. Существование углового равносильно существованию полутонкого предела.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_p \rightarrow x_0$, принадлежащую области Штольца $\mathcal{V}_1 \subset \omega$, такую, что $u(x_p)/h(x_p) \rightarrow \lambda$ (этот предел будем считать конечным; в случае когда он бесконечен, рассуждения аналогичны). Задавшись числом $\varepsilon > 0$, мы построим последовательность шаров B_p с центрами x_p , принадлежащих некоторой большей области Штольца \mathcal{V}_2 , причем так, чтобы на всех шарах с номерами $p > p_0$ (где p_0 зависит от ε) выполнялось неравенство $|(u/h) - \lambda| < \varepsilon$ и чтобы объединение этих шаров не было разреженным и даже полурежеженным. Тогда любое множество из фильтра \mathfrak{I}^m или \mathfrak{I}^s будет содержать точку, где $|(u/h) - \lambda| < \varepsilon$, откуда и будет следовать, что всякая угловая предельная точка является и полутонкой предельной точкой.

Напомним, что если ω пробегает множество всех положительных гармонических функций в шаре с центром x_0 радиуса ρ , а x пробегает концентрический шар радиуса $\alpha\rho$, то величина

$$\theta(\alpha) = \sup_{\omega} \left(\sup_x \frac{\omega(x)}{\omega(x_0)} \right)$$

не зависит от ρ и удовлетворяет соотношению $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta(\alpha) = 1$ (следствие классического неравенства Гарнака).

Возвращаясь к нашей последовательности x_p , выберем сначала p_0 так, чтобы при $p > p_0$ иметь

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u(x_p)}{h(x_p)} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем возьмем в \mathcal{G}_2 шар B'_p с центром x_p и радиусом $\rho_p = \beta \delta_{x_p}$, где β — фиксированное достаточно малое число. Тогда в концентрическом шаре B''_p радиуса $\alpha \rho_p = \alpha \beta \delta_{x_p}$ ($\alpha < 1$) мы будем иметь

$$\frac{\lambda - \frac{\varepsilon}{2}}{\theta^2(\alpha)} < \frac{u}{h} < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right) \theta^2(\alpha).$$

Выбрав подходящим образом число α (оно не зависит от p , как и β), мы получим, что в каждом шаре B''_p ($p > p_0$)

$$\lambda - \varepsilon < \frac{u}{h} < \lambda + \varepsilon.$$

Согласно предыдущей лемме, $R_1^{B''_p}(y_0) > K \delta_{x_p}^{1-n}$ (где K не зависит от p). Так как $K_{x_0}(x) \simeq \delta_{x_p}^{1-n}$ на B''_p , то

$$\inf R_{K_{x_0}}^{B''_p}(y_0) > \eta > 0.$$

Каждый шар B''_p пересекает лишь конечное число ν_p множеств I_q , причем $\nu_p \leq \nu$ независимо от p (в силу соображений подобия). Если i — одно из этих пересечений, то $R_{K_{x_0}}^i(y_0) > \frac{\eta}{\nu}$. Таким образом, существуют произвольно большие q , для которых

$$R_{K_{x_0}}^{\bigcup_{p > p_0} B''_p \cap I_q}(y_0) > \frac{\eta}{\nu}.$$

Это показывает, что при $q \rightarrow \infty$ левая часть не стремится к нулю, и поэтому множество $\bigcup B''_p$ неразрезано и даже неполуразрезано. Шары B''_p и являются, таким образом, искомыми шарами B_p .

Итак, существование полутонкого предела у u/h влечет за собой существование углового. Обратное очевидно, поскольку фильтр \mathfrak{F}^a тоньше, чем \mathfrak{F}^s .

Дополнения (см. Брело и Дуб [1]). Вместо того чтобы предполагать, что $u > 0$, $h > 0$, достаточно предполагать, что $h > 0$, а u/h ограничено с одной стороны (в окрестности точки x_0). В случае \mathbb{R}^2 никаких ограничений на гармоническую функцию и налагать вообще не нужно вследствие некоторых специальных свойств разреженности в \mathbb{R}^2 . Изложенные выше результаты применимы к функциям, определенным лишь в близких к x_0 точках некоторого открытого конуса с вершиной x_0 (в общей области Штольца с вершиной x_0 ¹⁾).

Отметим важный контрпример Шоке, который показывает, что положительная гармоническая в полуплоскости функция может иметь угловой предел в точке x_0 , но не иметь тонкого предела.

В работе Брело и Дуба изучались также обратные статистические свойства. Например, для произвольной функции со значениями в компактном метрическом пространстве существование углового предела во всех точках множества $e \subset \partial\omega$ влечет за собой существование почти всюду (по мере Лебега) на e равного ему (минимального) тонкого предела.

Было бы интересно провести сравнение тонких и угловых пределов для гармонических BLD-функций.

Упражнения. 1) Рассмотрим в \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) полупространство ω , область Штольца \mathcal{V} с вершиной $x_0 \in \partial\omega$ и множество $e \subset \omega$, минимально разреженное или даже только полуразреженное в x_0 . Рассмотрим далее меньшую область Штольца \mathcal{V}' и пересечения I'_ρ области \mathcal{V}' с множествами $\{x \mid \theta_1 s^{\rho+1} < |x - x_0| < \theta_2 s^\rho\}$, $0 < \theta_2 < 1 < \theta_1$. Внешняя гармоническая мера множества $\partial I'_\rho \cap e$ относительно I'_ρ на I'_ρ равномерно стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$.

(Указание: непосредственно применить определения и сравнить указанную гармоническую меру с $R_1^{\partial I'_\rho \cap e}$.)

¹⁾ Общая область Штольца с вершиной x_0 — это пересечение некоторого открытого конуса вращения, содержащегося вместе со своим замыканием (но без точки x_0) в полупространстве, с некоторым шаром с центром x_0 .

В качестве приложения дать другое доказательство следующей части предыдущей теоремы:

2) Если u/h имеет в точке x_0 тонкий (или полутонкий) предел λ (u, h — положительные гармонические функции в ω), то существует равный ему угловой предел.

(Указание. Если $\lambda = +\infty$, то на I'_ρ отношение u/h стремится к $+\infty$. Если же λ конечно, то u/h остается ограниченным в любой области Штольца и стремится к λ вне некоторого открытого полуразреженного множества e . Введем функцию u' , равную u вне e и λh на e , и затем рассмотрим функцию $u - H'_u$. Используя упражнение 1), показать, что частное от деления этой функции на h стремится к нулю на I'_ρ , откуда и вытекает искомым результат.)

Применение к ранней теореме Фату. Сопоставляя теорему XVI.16 и теорему XVII.9 для полупространства ω , мы получаем, что для положительных гармонических в ω функций u и h угловой предел отношения u/h существует μ_h -почти всюду на гиперплоскости $\partial\omega$. (Если $h=1$, как в первоначальном случае Фату, то понятие „ μ_1 -почти всюду“ совпадает с понятием „почти всюду по лебеговой мере“.) Аналогичный результат имеет место для шара (как у самого Фату).

Укажем еще, что уточнение теоремы Фату, данное Кальдероном и Карлесоном, было далее уточнено Дубом (см. Брело и Дуб [1]) следующим образом: пусть h — по-прежнему положительная функция, гармоническая в полупространстве, а u — функция, гармоническая в открытом множестве $\omega_0 \subset \omega$; предположим, что ω_0 содержит переменную общую область Штольца, вершина которой описывает некоторое граничное множество $e \subset \partial\omega$. Пусть отношение u/h в каждой такой области ограничено либо сверху, либо снизу в зависимости от положения вершины. Тогда u/h имеет конечный угловой предел на e , если исключить множество лебеговой меры нуль и множество μ_h -меры нуль.

Важное замечание. Для супергармонических функций аналогичного свойства нет. См. контрпример Зигмунда (в \mathbb{R}^2 для $h=1$) у Толстеда [1]. Это показывает преимущество и силу понятия тонкого предела.

Обобщение на случай липшицевых областей (Хант и Уиден [1, 2]). Для такого рода ограниченных и регулярных областей Ω (которые в каждой граничной точке имеют внутренний и внешний конусы Штольца) более сложные в техническом отношении рассуждения приводят к следующим важным результатам: евклидово замыкание такой области гомеоморфно пространству Мартина $\hat{\Omega}$ (причем все его граничные точки минимальны); теорема XVII. 9 допускает при $h=1$ обобщение при соответствующем определении минимальной полуразреженности и углового предела. Отсюда получается и обобщение теоремы Фату (которое можно доказать также непосредственно).

5. Сравнение угловых, тонких и нормальных пределов (краткие указания). Дубу [7] удалось вывести из своей общей теоремы о тонких пределах классические результаты о нормальных пределах и тем самым продвинуться далее в этом круге вопросов.

Рассмотрим сначала множество A в полупространстве $\omega \subset \mathbb{R}^n$. *Нормальной предельной точкой* x_0 множества A называется точка из $\partial\omega$, принадлежащая евклидовому замыканию множества $A \cap n_{x_0}$, где n_{x_0} — нормаль к $\partial\omega$ в точке x_0 . Для почти всех (по мере Лебега на $\partial\omega$) таких точек x_0 множество A будет (минимально) неразрезано в x_0 (т. е. x_0 является (минимальной) тонкой предельной точкой A)¹⁾.

Рассмотрим теперь функцию f на ω со значениями в компактном метрическом пространстве E и обозначим через N_{x_0} , A_{x_0} , F_{x_0} предельные множества функции f

¹⁾ Доказательство Дуба сложно. Из приведенного результата следует аналогичное свойство с обычной разреженностью (в \mathbb{R}^n). Отметим, что последнее свойство (даже для произвольного $e \subset \mathbb{R}^n$) доказывается проще непосредственно, причем прямое доказательство дает даже „квазивсюду на $\partial\omega$ “ вместо „почти всюду на $\partial\omega$ “.

при приближении к x_0 соответственно по n_{x_0} или по фильтрам $\mathfrak{F}_{x_0}^a$, $\mathfrak{F}_{x_0}^m$. Тогда почти всюду на $\partial\omega$ имеем $N_{x_0} \subset F_{x_0}$; это показывает, что из существования почти всюду тонкого предела следует существование почти всюду равного ему нормального предела.

Если функция f супергармонична, то можно получить больше: в этом случае $E = [-\infty, +\infty]$ и для всех точек x_0 на $\partial\omega$, исключая множество лебеговой меры нуль, имеем либо

$$\alpha) \quad -\infty \in F_{x_0} \subset A_{x_0},$$

либо

б) существуют конечный тонкий предел и равный ему нормальный предел, хотя углового предела может и не быть.

Если f — супергармоническая функция с гармонической минорантой $u \leq 0$, то эта миноранта имеет конечный тонкий предел почти всюду на $\partial\omega$ и случай а) исключается. Следовательно, f имеет нормальный предел почти всюду. Это эквивалентно классическому результату Литлвуда — Привалова.

Доказательства и дальнейшие подробности см. у Дуба [7]. Отметим только, что в качестве приложения к теории функций Дуб получил следующее уточнение классической теоремы Плеснера. Если f — мероморфная функция в полуплоскости ω , то, как доказал Плеснер, почти всюду либо

а) A_{x_0} есть расширенная плоскость, либо

б) A_{x_0} состоит из одной точки (т. е. имеется угловой предел)¹⁾.

Дуб показал, что если исключить еще одно множество меры нуль на $\partial\omega$, то можно утверждать большее: случай а) разбивается на два подслучая: либо F_{x_0} также есть расширенная плоскость, либо F_{x_0} и N_{x_0} сводятся к одной и той же точке. Далее, б) допол-

¹⁾ Отметим, что (даже для функций f , принимающих значения в произвольном компактном метрическом пространстве E) A_{x_0} почти всюду совпадает с предельным множеством в любой области Штольца.

няется утверждением, что F_{x_0} также состоит из одной точки (той же самой, что и A_{x_0}).

Часть этой теоремы, не относящаяся к нормальным пределам, была доказана также Константинеску и Корня.

Глава XVIII

ПРОСТРАНСТВО МАРТИНА И МИНИМАЛЬНАЯ РАЗРЕЖЕННОСТЬ В АКСИОМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ (КРАТКИЙ ОБЗОР)

1. Различные предположения и обозначения. Будем исходить из аксиоматики Брело, указанной в гл. XI. Основное пространство Ω будет предполагаться имеющим счетный базис (хотя это не всегда необходимо). Будет предполагаться, далее, что выполнены аксиомы 1—3 и что существует положительный потенциал. Совокупность этих предположений обозначим через (A_1) . Мы дополним результаты гл. XII и обобщим результаты п. 5 гл. XIV.

Снабдим множество S разностей положительных супергармонических функций T -топологией Эрве и рассмотрим компактное метризуемое основание B конуса S^+ . Будем обозначать через Δ_1 множество минимальных гармонических в Ω функций, принадлежащих B , т. е. множество всех крайних элементов B (которое отождествляется с минимальной границей Ω). Символом (A_1^p) будем обозначать совокупность предположений (A_1) вместе с предположением о пропорциональности (всех потенциалов с одним и тем же точечным носителем). В таком случае принадлежащие B потенциалы этого типа, обозначаемые через p_x (где $\{x\}$ — носитель), образуют множество, гомеоморфное Ω (Гаурисанкаран [1]). Его T -замыкание есть *обобщенное пространство Мартина* $\hat{\Omega}$ (называемое так потому, что в классическом случае оно гомеоморфно ранее рассмотренному пространству Мартина). Граница

Мартин $\Delta = \hat{\Omega} \setminus \Omega$ содержит Δ_1 ; точки X последнего множества, являющиеся гармоническими функциями на Ω , обозначаются иногда через $p_X(y)$. В интегральном представлении Рисса супергармонической функции v соответствующая мера μ_v на B может рассматриваться как мера на $\hat{\Omega}$, сосредоточенная на $\Omega \cup \Delta_1$. Тогда

$$v(y) = \int_{\Omega} p_X(y) d\mu_v + \int_{\Delta_1} p_X(y) d\mu_v.$$

Возможное отсутствие функций типа $p_X(y)\lambda(x)$, аналогичных симметрической функции Грина, оправдывает использование сопряженных пучков Эрве и приводит к принятию дополнительного предположения о существовании базиса из *вполне определяющих областей* (см. гл. XI, п. 5). Совокупность A_1^P вместе с этим предположением будет обозначаться через (A_2) .

Хороший пример B дается условием $\int v d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$ (где $v \in S^+$, ω_0 — вполне определяющая область и $x_0 \in \omega_0$). Именно в этом B берутся потенциалы p_X , определяющие сопряженный пучок.

2. Тонкая топология на $\hat{\Omega} = \Omega \cup \Delta_1$. (См. Брело [33].) Продолжим обобщение результатов гл. XIV, используя материал гл. XII.

При введенных выше условиях (A_1) разреженность множества $e \subset \Omega$ в точке $X \in \Delta_1$ определяется условием $R_X^e \neq X$ или требованием, чтобы функция \hat{R}_X^e была потенциалом. Дополнения в Ω к таким разреженным множествам образуют, как известно, некоторый фильтр \mathfrak{F}_X ; предел по этому фильтру будем называть *минимально тонким*. Дадим соответствующую топологическую интерпретацию, уточняющую то, что было сказано в гл. XII.

Будем говорить, что топология θ' на $\hat{\Omega}$ есть *минимальное продолжение* топологии θ на Ω , если она индуцирует на Ω топологию θ и если окрестности любой точки $X \in \Delta_1$ пересекают Ω по множествам

фильтра \mathfrak{F}_X . Для тонкой топологии на Ω существуют минимальные продолжения на $\check{\Omega}$, причем такие, в которых Ω открыто. Среди них имеются сильнейшая (индуцирующая на Δ_1 дискретную топологию) и слабейшая. В случае (A_1^P) имеется единственное такое продолжение.

Внутренняя интерпретация (при условиях (A_2)). Рассмотрим на Ω семейство Φ_1 неотрицательных сопряженных гипергармонических функций, подсемейство Φ_2 сопряженных потенциалов (включая функцию $+\infty$) и подсемейство Φ_3 сопряженных потенциалов вида $\int p_x(y) d\mu(y)$, где $\mu \geq 0$ на Ω . Обозначим через $\Phi'_1, \Phi'_2, \Phi'_3$ соответствующие семейства функций на Ω , полученные с помощью полунепрерывного снизу продолжения в топологии T . Обозначим через T_1, T_2, T_3 (соотв. T'_1, T'_2, T'_3) топологии на Ω (соотв. на $\check{\Omega}$), определяемые исходной топологией T и одним из предыдущих семейств функций. Тогда T'_1, T'_2, T'_3 являются единственными минимальными продолжениями для T_1, T_2, T_3 .

Отметим, что T_1, T_2 — сопряженные тонкие топологии на Ω , минимальные продолжения которых можно интерпретировать как внутренние топологии T'_1, T'_2 на $\check{\Omega}$.

Отметим еще частный результат, состоящий в том, что любая неотрицательная сопряженная супергармоническая функция на Ω имеет в каждой точке $X \in \Delta_1$ предел по фильтру \mathfrak{F}_X , равный ее T -lim inf.

Далее, внутренняя разреженность или неразреженность в точке $X \in \Delta_1$ относительно классов Φ'_1, Φ'_2 или Φ'_3 на $\check{\Omega}$ с начальной T -топологией всегда строгая.

Подробности и доказательства, а также критерий минимальности точки $X \in \Delta$ см. у Брело [33].

3. Задача Дирихле и граничное поведение (обобщение результатов гл. XV и XVI). Принимая предположения (A_1) и первоначально еще аксиому D,

Гаурисанкаран [1] обобщил основную теорему (критерий равенства $R_h^e = h$ для положительной гармонической h) и доказал, что отношение v/h (где v — положительный потенциал) имеет тонкий предел нуль μ_h -почти всюду на Δ_1 . Он рассмотрел задачу Дирихле для h -гармонических функций в Ω с минимальной тонкой топологией для граничных условий. Приняв условие R_h (о том, что всякая T -равномерно непрерывная функция на Δ_1 h -разрешима), он обобщил теорему о разрешимости и получил результат типа Дуба для функций u/h (где u — положительная супергармоническая функция), т. е. доказал существование тонкого предела μ_h -почти всюду на Δ_1 . В случае (A_1^P) условие R_h всегда выполнено и можно изучать задачу Дирихле для h -гармонических функций с T -топологией на $\hat{\Omega}$; случаи разрешимости и сами решения совпадают для обеих задач.

Далее, Гаурисанкарану [4] удалось в предположениях (A_1) , без аксиомы D и каких-либо условий типа R_h , сделать следующее: получить основной критерий для равенства $R_h^e = h$ в случае открытого множества e ; описать граничное поведение любого потенциала w (именно w/h имеет тонкий предел нуль μ_h -почти всюду); исследовать задачу Дирихле (подобную рассмотренной в теореме XVI. 11) с граничными условиями

$$\text{тонкий } \liminf (v/h) \geq f \quad \mu_h\text{-почти всюду на } \Delta_1$$

или

$$\text{тонкий } \limsup (v/h) \geq f \quad \mu_h\text{-почти всюду.}$$

Огибающие (\inf) таких гипергармонических функций v , ограниченных снизу, совпадают для обеих задач, равно как и критерии разрешимости (μ_h -суммируемость функции f) и сами решения. Отсюда при одних предположениях (A_1) получается обобщение свойства Дуба (существование μ_h -почти всюду конечного тонкого предела у v/h для любой неотрицательной супергармонической функции v).

Гаурисанкаран [5] изучил также (без аксиомы D) задачу Дирихле для произвольной компактификации пространства Ω , обобщив результаты п. 1 гл. XVI, и

провел сравнение с-этиими результатами. Другие исследования по компактификациям и соответствующей задаче Дирихле были проведены Константинеску и Корня [3], Лозбом и Уолшем.

4. Вот некоторые другие обобщения классической теории, полученные при различных предположениях.

а) Теорема типа Фату — Дуба о граничном поведении в случае ограниченности снизу только в тонкой (минимальной) окрестности любой точки μ_h -измеримого множества $E \subset \Delta_1$ (при предположениях (A_1) и D).

б) Использование равномерной интегрируемости для характеристики решений задачи Дирихле.

с) Поведение различных емкостей для убывающих множеств (например, тонко замкнутых) (при предположениях (A_1) , D, а иногда и (A_2)).

д) Понятие W -полярного множества на $\tilde{\Omega}$ (т. е. такого, что $e \cap \Omega$ W -полярно, а $e \cap \Delta_1$ имеет нулевую μ_W -меру) и различные характеристики таких множеств (при предположениях (A_1) или (A_1^P)).

е) Соответствие между двумя пространствами, снабженными гармонической структурой, и соответствие между их минимальными границами (обобщение результатов Константинеску — Корня — Дуба, а также теоремы Рисса о двумерных римановых поверхностях), в основном при предположениях (A_1^P) и D в обоих пространствах.

ф) Задача Дирихле для компактных множеств, понятие устойчивой граничной точки, свойство квазианалитичности (в случае (A_2)).

г) Дважды гармонические функции $u(x, y)$ (x, y в двух различных пространствах) и их граничное поведение.

h) Изучение \mathcal{H}^p -гармонических функций, т. е. функций с конечной L^p -нормой относительно гармонической меры.

В связи с а), г) см. Гаурисанктан [3, 5] и Уолш [1]; в связи с б) — д) см. Брело [22, 30, 33]; в связи с е) — Константинеску и Корня [3] и Сибони [1, 2]; в связи с ф) — Прадель [1, 2] и в связи с h) — Люме-Наим [3].

Более слабые аксиоматики. Понятия минимальной разреженности и границы могут рассматриваться и в более слабых аксиоматиках, например в аксиоматике Бауэра. При этом сохраняют силу некоторые результаты Дуба, а также обобщаются некоторые результаты о соответствии между двумя пространствами. Сибони [2] получил результат Дуба в более общей форме, пригодной в теории эксцессивных функций. Он провел также исследование задачи Дирихле с граничными условиями, задаваемыми с помощью минимальных тонких фильтров.

В качестве заключительного замечания напомним еще раз, что мы оставили в стороне целый ряд других топологических вопросов теории потенциала, как, например, связанные с применением теории гильбертовых пространств (см. Дени [4]) и функционального анализа (см. важные исследования Лоэба; Уолша; Мокободского [2]), а также обширную область вероятностных интерпретаций (в качестве введения в которую см. Бауэр [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ¹⁾

Довольно подробный исторический обзор теории потенциала вместе с библиографией можно найти в статье Брело [35].

Альфортс и Хейнс (Ahlfors L. V., Heins M.)

- [1] Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelöf principle, *Ann. Math.*, 50 (1949), № 2, 341—346.

Бауэр (Bauer H.)

- [1] Silovscher Rand und Dirichletsches Problem, *Ann. Inst. Fourier*, 11 (1961), 89—136.
 [2] Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 146 (1962), 1—59.
 [3] Weiterführung einer axiomatischen Potentialtheorie ohne Kern (Existenz von Potentialen), *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1 (1963), 197—229.
 [4] Propriétés fines des fonctions hyperharmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 137—154.
 [5] Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Math., 22, Springer, 1966.
 [6] Recent developments in axiomatic potential theory, Symposium of Loutraki, Lecture Notes in Math., 31, Springer, 1967.
 [7] Harmonic spaces and associated Markov Processes, Summer course C. I. M. E. «Potential Theory. Stresa, 1969», Roma, 1970.

Блюменталь и Гетур (Blumenthal R. M., Gettoor R. K.)

- [1] Markov processes and potential theory, Academic Press, N. Y. & London, 1968.

Бобок, КонстантINESКУ и Корня (Boboc N., Constantinescu C., Cornea A.)

- [1] Axiomatic theory of harmonic functions, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 283—312.
 [2] Axiomatic theory of harmonic functions. — Balayage, *Ann. Inst. Fourier*, 15/2 (1965), 37—70.

Бобок, Корня (Boboc N., Cornea A.)

- [1] Behaviour of harmonic functions at a nonregular boundary point, *Bull. Math. Soc. Sc. Math. Phys. RSR*, 1965.

¹⁾ Для переводных книг в круглых скобках указан год выхода в свет оригинального издания.

Бони (Bony J. M.)

- [1] Détermination des axiomatiques de théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont différentiables, *Ann. Inst. Fourier*, 17/1 (1967), 353—382.
- [2] Opérateurs elliptique dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel, Summer Course C. I. M. E., «Potential Theory. Stresa, 1969», Roma, 1970.

Брело (Brelot M.)

- [1] Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques, *C. R.*, 207 (1938), 1157.
- [2] Critères de régularité et de stabilité, *Bull. Ac. royale des Belgique*, 25 (1939), 125—137.
- [3] Familles de Perron et problème de Dirichlet, *Acta Szeged*, 9 (1939), 133—153.
- [4] Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *J. de Math.*, 19 (1940), 319—337.
- [5] Sur les ensembles effilés, *Bull. Sc. Math.*, 68 (1944), 12—36.
- [6] Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 61 (1944), 301—332.
- [7] Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes, *Bull. Soc. Math. France*, 73 (1945), 55—73.
- [8] Minorantes sousharmoniques extrémales et capacités, *J. de Math.*, 24 (1945), 1—32.
- [9] Le problème de Dirichlet ramifié, *Ann. Univ. de Grenoble, Math. Phys.*, 22 (1946), 167—200.
- [10] Etude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point frontière irrégulier, *Ann. Univ. de Grenoble, Math. Phys.*, 22 (1946), 205—249.
- [11] Quelques propriétés et applications du balayage, *C. R.*, 227 (1948), 19.
- [12] Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin, *Ann. Univ. de Grenoble, Math. Phys.*, 23 (1948), 119—138.
- [13] Sur l'allure des fonctions harmoniques et sousharmoniques à la frontière, *Math. Nachr.*, 4 (1950), 298—307.
- [14] La théorie moderne du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 4 (1952), 113—140.
- [15] Etude et extension du principe de Dirichlet, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1953—54), 371—419.
- [16] On the behaviour of harmonic functions in the neighbourhood of an irregular boundary point, *J. Anal. Math.*, 4 (1954—56), 209—221.
- [17] Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin, *J. de Math.*, 35, (1956), 297—335.
- [18] Sur l'allure à la frontière des fonctions sousharmoniques ou holomorphes, *Ann. Ac. Scient. Fenn., A. Math.*, 250/4 (1958).

- [19] Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Sémin. Théorie du potentiel, 2, Paris, 1958.
- [20] Lectures on Potential Theory, Tata Institute, № 19, Bombay, 1960, re-issued 1967.
- [20bis] Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Kel-dych concernant le problème de Dirichlet, *J. Anal. Math.*, 8 (1960—61), 273—288.
- [21] Introduction axiomatique de l'effilement, *Annali di Mat.*, 57 (1962), 77—96.
- [22] Intégrabilité uniforme, quelques applications à la théorie du potentiel, Sémin. Théorie du potentiel, 6/1, Paris, 1962.
- [23] Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement (ibid.).
- [24] On Martin boundary (Hiroshima Univ., 1962. [Русский перевод: *Математика*, 9 : 5 (1965), 136—155.]
- [25] Основы классической теории потенциала, «Мир», М., 1964 (1959).
- [26] Etude comparé des deux types d'effilement, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 155—168.
- [27] Aspect statistique et comparé de deux types d'effilement, *Anais da Ac. Brasileira de ciências*, 37 (1965), № 1.
- [28] Axiomatique des fonctions harmoniques, Univ. de Montréal, 1966.
- [29] Théorie du potentiel et fonctions analytiques, Сб. «Современные проблемы теории аналитических функций», Ереван, 1965, «Наука», М., 1966, 47—56.
- [30] Capacity and balayage for decreasing sets, Symposium on Probability and Statistics, Berkeley, 1965.
- [31] La topologie fine en théorie du potentiel, Symposium of Loutraki, Lecture Notes in Math., 31, Springer, 1967.
- [32] Recherches axiomatiques sur un théorème de Choquet concernant l'effilement, *Nagoya Math. J.*, 30 (1967), 39—46.
- [33] Recherches sur la topologie fine et ses applications, *Ann. Inst. Fourier*, 17/2 (1967), 395—424.
- [34] Historical Introduction, Summer course C. I. M. E., «Potential Theory Stresa, 1969», Roma, 1970.
- [35] Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel, *L'Enseignement mathématique*, 18 (1972), № 1.
- Бредо и Дуб (Brelot M., Doob J. L.)
- [1] Limite angulaires et limites fines, *Ann. Inst. Fourier*, 13/2 (1963), 395—415. [Русский перевод: *Математика*, 11 : 3 (1967), 101—116.]
- Бредо и Шоке (Brelot M., Choquet G.)
- [1] Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier*, 3 (1951), 199—263.
- Буллан (Bouligand G.)
- [1] Fonctions harmoniques. Principe de Picard et de Dirichlet, Memorial des Sc. Math., fasc. II, Paris, 1926.

Валле-Пуссен (de la Vallée-Poussin Ch. J.)

- [1] Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surface à courbure bornée, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, sér. II, vol. 2 (1933).
- [2] Potentjel et problème généralisé de Dirichlet, *Math. Gazette*, 22 (1938), 17—36.
- [3] Le potentiel logarithmique. Balayage et représentation conforme, Louvain, 1949.

Винер (Wiener N.)

- [1] Certain notions in potential theory, *J. Math. Phys.*, 3 (1924), № 1, 24—51.
- [2] The Dirichlet problem, *J. Math. Phys.*, 3 (1924), № 3, 127—146.
- [3] Note on a paper of O. Perron, *J. Math. Phys.*, 4 (1925), № 1, 21—32.

Гаурисанкаран (Gowrisankaran K. N.)

- [1] Extreme harmonic functions and boundary value problems, *Ann. Inst. Fourier*, 13/2 (1963), 307—356.
- [2] Extreme harmonic functions and boundary value problems. II, *Math. Zeitschr.*, 94 (1966), 256—270.
- [3] Multiply harmonic functions, *Nagoya Math. J.*, 28 (1966), 27—48.
- [4] Fatou-Naïm-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier*, 16/2 (1966), 455—467.
- [5] On minimal positive harmonic functions, Sémin. Théorie du potentiel, 11, Paris, 1966—67.

Гетур (Getoor R. K.)

- [1] Additive functionals of a Markov process, Lectures at Hamburg Univ., 1964.

Дени (Deny J.)

- [1] Un théorème sur les ensembles effilés, *Ann. Univ. de Grenoble*, Math. Phys., 23, (1947—48), 139—142.
- [Ibis] Le principe des singularités positives de G. Bouligand et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine, *Revue Scient.*, 85^e année, fasc. 14, № 3279, 1947, 866—872.
- [2] Sur les infinis d'un potentiel, *C. R.*, 224 (1947), 524.
- [3] Les potentiels d'énergie finie, *Acta Math.*, 82 (1950), 107—183.
- [4] Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, Summer course C. I. M. E. «Potential Theory. Stresa, 1969», Roma, 1970.

Дени и Лионс (Deny J., Lions J. L.)

- [1] Les espaces du types de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1953—54), 305—370.

Джексон (Jackson H. L.)

- [1] Some results on thin sets in a half-plane, *Ann. Inst. Fourier*, 20/2 (1970), 201—218.

Дуб (Doob J. L.)

- [1] Semi-martingales and subharmonic functions, *Trans. Am. Math. Soc.*, 77 (1954), 86—121.
[2] Probability methods applied to the first boundary value problem, *Proc. 3^d Berkeley Symp.*, 2, 1954—55, 49—80.
[3] Conditional Brownian motion and boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 431—458.
[4] A non-probabilistic proof of the relative Fatou-theorem, *Ann. Inst. Fourier*, 9 (1959), 293—300.
[5] Conformally invariant cluster value theory, *Illinois J. Math.* 5, (1961), 521—547.
[6] Boundary properties of functions with finite Dirichlet integral, *Ann. Inst. Fourier*, 12 (1962), 573—621. [Русский перевод: *Математика*, 11 : 6 (1967), 95—131.]
[7] Some classical function theory theorems and their modern versions, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 113—136. [Русский перевод: *Математика*, 11 : 4 (1967), 133—150.]
[8] Application to Analysis of a topological definition of smallness of a set, *Bull. Am. Math. Soc.*, 72 (1966), 579—600.
[9] Remarks on the boundary limits of harmonic functions, *J. SIAM Numer. Anal.*, 3 (1966), № 2, 229—235.

Дынкин Е. Б.

- [1] Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963.
[2] Martin boundary and positive solutions of some boundary value problems, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 275—282.

Кальдерон (Calderon A.)

- [1] On the behaviour of the harmonic functions at the boundary, *Trans. Am. Math. Soc.*, 68 (1950), 47—54.

Картан А. (Cartan H.)

- [1] Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels, *Bull. Soc. Math. France*, 73 (1945), 74—106.
[2] Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, *Ann. Univ. de Grenoble, Math. Phys.*, 22 (1946), 221—280.

Константинеску (Constantinescu C.)

- [1] Die heutige Lage der Theorie der harmonischen Räume, *Rev. roum. Math. pures et appl.*, 9 (1966), № 9, 1041.

Константинеску и Корня (Constantinescu C., Cornea A.)

- [1] Ideale Ränder Riemannscher Flächen, *Ergeb. Math.*, Bd. 32, Springer, 1963.
[2] On the axiomatic of harmonic functions. I, II, *Ann. Inst. Fourier*, 13/2 (1963), 373—394.
[3] Compactifications of harmonic spaces, *Nagoya Math. J.*, 25 (1965), 1—57.

- [4] Potential theory on harmonic spaces, Grundlehren d. Math. Wiss., Bd. 158, Springer, 1972.

Лелон-Ферран (Lelong-Ferrand J.)

- [1] Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **66** (1949), 125—159.

Люме-Наим (Lumer-Naïm L.)

- [1] Sur le théorème de Fatou généralisé, *Ann. Inst. Fourier*, **12** (1962), 623—626.
 [2] Sur une extension du principe de Dirichlet en espace de Green, *C. R.*, **255** (1962), 1058.
 [3] H^p -spaces of harmonic functions, *Ann. Inst. Fourier*, **17/2** (1967), 425—469.

Мартин (Martin R. S.)

- [1] Minimal positive harmonic functions, *Trans. Am. Math. Soc.*, **49** (1941), 137—172.

Мейер (Meyer P. A.)

- [1] Вероятность и потенциалы, «Мир», М., 1973 (1966).
 [2] Processus de Markov, Lecture Notes in Math., 26 and 77, Springer, 1967.

Мокободский (Mokobodzki G.)

- [1] Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des réduites, *Ann. Inst. Fourier*, **15/1** (1965), 103—112.
 [2] Cônes de potentiels et noyaux subordonnés, Summer course C. I. M. E. «Potential Theory Stresa, 1969», Roma, 1970.

Мышкис А. Д.

- [1] К понятию границы, *Матем. сб.*, **25** (67) (1949), 387—414.

Наим (Naïm L.)

- [1] Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, **7** (1957), 183—281.

Парро (Parreau M.)

- [1] Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann, *Ann. Inst. Fourier*, **3** (1951), 103—197.

Прадель (de la Pradelle A.)

- [1] Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, **17/1** (1967), 383—399.
 [2] Remarque sur la valeur d'un potentiel à support ponctuel polaire en son pôle en théorie axiomatique, *Ann. Fourier*, **19/1** (1969), 275—276.

Рисс (Riesz F.)

- [1] Sur les fonctions sousharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.*, 48 (1926), 329—343; 54 (1930), 321—360.

Сибони (Sibony D.)

- [1] Allure à la frontière minimale d'une classe de transformations. Théorème de Doob généralisé, *Ann. Inst. Fourier*, 18/2 (1968), 91—120.
[2] Théorème de limites fines et problème de Dirichlet, *Ann. Inst. Fourier*, 18/2 (1968), 121—134.

Смирнелис (Smyrnelis E.)

- [1] Allure des fonctions harmoniques au voisinage d'un point-frontière irrégulier, *C. R.*, 267 (1968), 157.

Стампакья (Stampacchia G.)

- [1] Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1, 1965, 189—257.

Стейн (Stein E.)

- [1] On the theory of harmonic functions of several variables II. Behaviour near the boundary, *Acta Math.*, 106 (1961), 137—174.

Тода (Toda N.)

- [1] Etude des fonctions méromorphes au voisinage d'un point-frontière irrégulier, *Bull. Sc. Math.*, 89 (1965), 93—102.
[2] Sur l'allure des fonctions méromorphes, *Nagoya Math. J.*, 26 (1966), 173—181.

Толстед (Tolsted E.)

- [1] Limiting values of subharmonic functions, *Bull. Am. Math. Soc.* (1949), 636—647.

Уолш (Walsh J. B.)

- [1] Probability and a Dirichlet problem for multiply superharmonic functions, *Ann. Inst. Fourier*, 18/2 (1968), 221—279.

Фуглеле (Fuglede B.)

- [1] Le théorème du minimax et la théorie fine du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 15/1 (1965), 65—87.
[2] Esquisse d'une théorie axiomatique de l'effilement et de la capacité, *C. R.*, 261 (1965), 3272.
[3] Quasi-topology and fine topology, Sémin. Théorie du potentiel, 10, Paris, 1966.
[4] The quasi-topology associated with a countably subadditive set function, *Ann. Inst. Fourier*, 21/1 (1971), 123—170.
[5] Connexion en topologie fine et balayage des mesures, *Ann. Inst. Fourier*, 21/3 (1971), 227—244.
[6] Finely harmonic functions, Lecture Notes in Math., 289, Springer, 1972.

Хант (Hunt G. A.)

- [1] Марковские процессы и потенциалы, ИЛ, М., 1962 (1957, 1958).

Хант и Уиден (Hunt G. A., Wheeden R.)

- [1] On the boundary values of harmonic functions, *Trans. Am. Math. Soc.*, **132** (1968), 307—322.
 [2] Positive harmonic functions on Lipschitz domains, *Trans. Am. Math. Soc.*, **147** (1970), 507—000.

Хинриксен (Hinrichsen D.)

- [1] Randintegrale und nukleare Funktionenräume, *Ann. Inst. Fourier*, **17/1** (1967), 225—271.

Шоке (Choquet G.)

- [1] Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, **5** (1953—54), 131—295.
 [2] Existence et unicité des représentation intégrales, Sémin. Bourbaki, Dec. 1956.
 [3] Potentiels sur un ensemble de capacité nulle. Suites de potentiels, *C. R.*, **244** (1957), 1707.
 [4] Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, Sémin. Théorie du potentiel, I, Paris, 1957.
 [5] Forme abstraite du théorème de capacitabilité, *Ann. Inst. Fourier*, **9** (1959), 83—89.
 [6] Sur les points d'effilement d'un ensemble. Application à l'étude de la capacité, *Ann. Inst. Fourier*, **9** (1959), 91—102.
 [7] Démonstration non probabiliste d'un théorème de Gettoor, *Ann. Inst. Fourier*, **15/2** (1965), 409—413.

Шоке и Мейер (Choquet G., Meyer P. A.)

- [1] Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, *Ann. Inst. Fourier*, **14/2** (1964), 485—492.

Эрве (Hervé R. M.)

- [1] Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, **12** (1962), 415—571.

- [2] Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme

$$Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \text{ Ann. Inst. Fourier, } \mathbf{14} \\ (1964), 493—508.$$

- [3] Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associés à une équation uniformément elliptique de la forme

$$Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \text{ Ann. Inst. Fourier, } \\ \mathbf{15/2} (1965), 215—223.$$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Альфорс (Ahlfors L. V.) 131, 209
 Анандам (Anandam V.) 54
 Арсоув (Arsove M. G.) 174
- Бауэр (Bauer H.) 13, 111, 114, 118, 123, 124, 208, 209
 Берг (Berg C.) 48
 Блюменталь (Blumenthal R. M.) 7, 209
 Бобок (Boboc N.) 64, 123, 124, 209
 Бони (Bony J. M.) 125, 210
 Брело (Brelot M.) 6, 8, 9, 18, 27, 31, 39, 41, 43, 45, 48, 49, 52, 56, 57, 58, 59, 60, 63, 64, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 82, 84, 86, 91, 92, 93, 100, 104, 105, 108, 109, 111, 115, 118, 119, 121, 123, 126, 140, 151, 152, 156, 161, 166, 167, 169, 170, 171, 173, 174, 177, 185, 186, 188, 189, 193, 194, 197, 199, 200, 203, 204, 205, 207, 209, 210, 211
 Булигаи (Bouligand G.) 101, 151, 166, 211
- Валле-Пуссен (de la Vallée-Poussen Ch. J.) 64, 68, 80, 98, 100, 150, 212
 Василеску (Vasilescu F. H.) 104
 Винер (Wiener N.) 57, 100, 102, 212
- Гаурисанкаран (Gowrisankaran K. N.) 127, 129, 131, 132, 152, 163, 203, 206, 207, 212
- Гетур (Getoor R. K.) 7, 76, 209, 212
- Дени (Deny J.) 28, 34, 61, 104, 109, 166, 208, 212
 Джексон (Jackson H. L.) 193, 194, 213
 Джонсон (Johnson G.) 174
 Дуб (Doob J. L.) 6, 7, 27, 30, 37, 48, 75, 76, 108, 109, 110, 115, 127, 161, 178, 180, 182, 183, 184, 188, 193, 194, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 207, 208, 211, 213
 Дынкин Е. Б. 7, 213
- Зигмунд (Zygmund H. A.) 197, 200, 213
- Кальдерон (Calderon A.) 197, 200, 213
 Карлесон (Carleson L.) 200
 Картан (Cartan H.) 6, 11, 27, 28, 31, 37, 56, 64, 71, 78, 84, 93, 98, 108, 119, 213
 Келдыш М. В. 59
 Келлог (Lellog O. D.) 59, 104
 Константинеску (Constantinescu C.) 6, 7, 64, 116, 117, 118, 122, 123, 124, 135, 139, 188, 197, 203, 207, 209, 213
 Корня (Cornea A.) 6, 7, 64, 116, 117, 118, 123, 124, 135, 139, 188, 197, 203, 207, 209, 213
- Лаврентьев М. А. 59
 Ландкоф Н. С. 49

- Лелон-Ферран (Lelong-Fer-
 rand J.) 169, 191, 192, 193,
 214
 Лионс (Lions J. L.) 34, 109, 212
 Литтвуд (Littlewood J. E.) 202
 Лозб (Loeb P.) 116, 124, 207,
 208
 Люме-Наим (Lumer-Naïm L.)
 207, 214

 Мартин (Martin R. S.) 18, 140,
 142, 151, 169, 214
 Мейер (Meyer P. A.) 7, 48, 214,
 216
 Мокободский (Mokobodzki G.)
 116, 119, 124, 208, 214
 Мышкис А. Д. 127, 214

 Наим (Naïm L.) 6, 127, 131,
 132, 157, 160, 161, 163, 169,
 173, 177, 178, 179, 180, 181,
 182, 185, 188, 190, 193, 195,
 214

 Оцука (Ohtsuka M.) 174

 Парро (Parreau M.) 177, 181,
 182, 214
 Перрон (Perron) 57
 Плеснер А. И. 202
 Прадель (de la Pradelle A.) 123,
 207, 214
 Привалов И. И. 202
 Пуанкаре (Poincaré H.) 95

 Рамасвами (Ramaswamy S.) 8,
 45
 Рисс (Riesz F.) 50, 182, 215

 Сибони (Sibony D.) 124, 207,
 208, 215
 Смирнелис (Smyrnelis E.) 118,
 215
 Стампакья (Stampacchia G.)
 125, 215
 Стейн (Stein E.) 197, 215

 Тода (Toda N.) 109, 110, 215
 Толстед (Tolsted E.) 201, 215

 Уиден (Wheeden R.) 150, 201,
 216
 Уолли (Walsh J. B.) 116, 124,
 207, 208, 215

 Фату (Fatou) 200
 Фростман (Frostman O.) 64,
 79, 104
 Фуглде (Fuglede B.) 32, 42,
 48, 124, 215

 Хансен (Hansen W.) 124
 Хант (Hunt G. A.) 7, 150, 201,
 216
 Хейнс (Heins M.) 131, 209
 Хинриксен (Hinrichsen D.) 124,
 216

 Шоке (Choquet G.) 31, 32, 36,
 52, 61, 76, 84, 85, 110, 127,
 144, 174, 193, 211, 216

 Эванс (Evans G. C.) 59, 61
 Эрве (Hervé R. M.) 117, 118,
 119, 121, 122, 123, 125, 152,
 203, 204, 216

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- абстрактный потенциал** 53
аксиома Дуба 123
 — пучка 115
аппроксимационная лемма 57
- база** 74
 — множества 47
большая теорема сходимости 56
- вес** 32
 — внешний 34
 — непрерывный справа 32
 — счетно субаддитивный 32
 — типа Шоке 36
 — тонкий 32
внешний вес 34
внешняя емкость 85
 — — гринова 85
 — — ньютонова 34
 — иррегулярность 98
внутренне разреженное множество 10
внутренняя емкость 84
 — иррегулярность 98
 — размерность 108
 — тонкая топология 10
вполне определяющие множества 121
выметание 64
выметенная мера 65, 122
 — функция 65
- гармоническая в ω функция** 52
 — мера 115
 — функция 49
гипергармоническая в ω функция 52
 — функция 50, 51, 116
- глобальный пик** 10
граница Мартина 141
 — Шилова 111
 — Шоке 110
гриново множество 56
- емкость** 31, 42
 — внешняя 85
 — внутренняя 84
 — — гринова 85
 — — ньютонова 34
 — классическая 85
 — общая 84
 — Шоке 84
- задача Дирихле** 50
- интеграл Пуассона** 49
иррегулярная точка 58
- квазивсюду** 33, 54
квализамкнутое множество 32
квазинепрерывная функция 32
квазиоткрытое множество 32
классическая емкость 85
 — тонкая топология 34
ключевая теорема 78
компактификация Александрова 139
 — Керекьярто — Стоилова 139
 — Курамоти 140
 — Ройдена 140
 — Стоуна — Чеха 139
критерий Булигана 58
 — Винера 102

- лебегово острие 97
 лемма Келдыша 111
 локально полярное множество 54
 локальное свойство Шоке 40
 локальный критерий регулярности граничной точки 58
- мера выметенная 65, 122
 — гармоническая 115
 минимальная граница 133
 — граничная точка 133
 — полуразреженность 193
 — тонкая топология 134, 156
 — точка границы 143
 — функция 130
 минимально тонкий предел 204
 минимальное продолжение топологии 204
 множество гриново 56
 — квазизамкнутое 32
 — квазиоткрытое 32
 — неразрезанное 11
 — — строго 25
 — полуполярное 47
 — полуразреженное 105
 — — минимально 193
 — полярное 15, 54
 — — в ω 54
 — — локально 54
 — — строго 15
 — пренебрежимое 27
 — разреженное 10, 47
 — — внутреннее 10, 108
 — — относительно минимальной функции 131
 — — порядка φ 108
 — — статистическая 91
 — — слабо 43
 — — строго 21
 — — h -статистически 167
 — — W -статистически 92
 — регулярное 115
 — сверхразреженное 15
 — W -полярное 92, 207
- наилучшая гармоническая миноранта 79
 некасательный предел 195
 неразрезанное множество 11
- нормальная область Штольца 191
 — предельная точка 201
 носитель потенциала 120
- обобщенная сопряженная гармоническая функция 184
 обобщенное пространство Мартина 203
 — решение задачи Дирихле 57
 образ меры 94
 общая емкость 84
 — область Штольца 199
- полностью касательные множества 196
 полуполярное множество 47
 полуразреженность 105
 полярная точка 15
 полярное в ω множество 54
 — множество 15, 54
 потенциал 53, 117
 представление Рисса 60
 пренебрежимое множество 27
 приведенная граница 111
 — функция 18
 привязанность к нулю 165
 принцип доминирования в сильной форме 78
 — Мариа — Фростмана 53
 — минимума 116, 177
 — положительных особенностей 166
- пространство Грина 55
 — — регулярное 59
 — Мартина 141
- разложение Рисса — Мартина 153
 разреженное множество 10, 47
 разреженность внутренняя 108
 — относительно минимальной функции 131
 — порядка φ 108
 — статистическая 91
 — W -статистическая 92
 разреженный базис фильтра 12
 разрешимая функция 57
 регулярная граничная точка 58

- регулярное множество 115
 — пространство Грина 59
- сверхразреженное множество 15
 свойство Шоке 35, 169
 — — локальное 40
 связанные точки 195
 семиограниченная функция 93
 сильно h -регулярная точка 185
 — h -регулярный фильтр 185
 сингулярная точка 44
 слабо разреженное множество 43
 слабо h -регулярная точка 185
 — h -регулярный фильтр 185
 специальный порядок 61, 118
 сравнимость 192
 статистическая разреженность 91
 статистическое свойство 167
 строгая субаддитивность 84
 строго неразреженное множество 25
 — полярная точка 15
 — полярное множество 15
 — разреженное множество 21
 супергармоническая функция 51, 116
- теорема Гетура 76
 — Картана 11
 — ключевая 78
 — Константинеску — Корня 135
 — Рамасвами 44
 — сходимости большая 56
 тонкая окрестность 11
 — топология 10, 70
 — — классическая 34
 — h -задача Дирихле 184
 — h -регулярная точка 184
 тонкий предел 11
 тонкое замыкание 11
 тонкость в точке \bar{h} 133
 точка граничная минимальная 133, 143
 — — регулярная 58
 — — h -регулярная 173
 — иррегулярная 58
- точка нормальная предельная 201
 — полярная 15
 — сильно h -регулярная 185
 — сингулярная 44
 — слабо h -регулярная 185
 — строго полярная 15
 — тонкая h -регулярная 184
 — угловая предельная 195
 — устойчивая 60
 — \mathcal{E} -экстремальная 110
- угловая предельная точка 195
 угловой предел 195
 устойчивая точка 60
 уточненное свойство Лебега — Бёрлинга 97
- функция выметенная 65
 — гармоническая 49
 — — в ω 52
 — гипергармоническая 50, 51, 116
 — — в ω 52
 — Грина 55
 — квазинепрерывная 32
 — минимальная 130
 — обобщенная сопряженная гармоническая 184
 — потенциального типа 184
 — приведенная 18
 — привязанная к нулю 165
 — разрешимая 57
 — семиограниченная 93
 — супергармоническая 51, 116
 — BLD- 108, 109
 — h -гармоническая 116, 171
 — h -гипергармоническая 117
 — h -разрешимая 171
- эквивалентные минимальные функции 132
- ядро 74
 — Пуассона 147
- BLD-функция 108, 109
 \mathcal{E} -пространство 52

- \mathcal{E} -экстремальная точка 110
 f_0 -исчезающее семейство множеств 41
 G^Ω -потенциал 60
 h -гармоническая функция 116, 171
 h -гипергармоническая функция 117
 h -разрешимая функция 171
 h -регулярная граничная точка 173
 h -регулярный базис фильтра 173
 h -статистическая разреженность 167
 W -полярное множество 92, 207
 W -статистическая разреженность 92

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства	5
К русскому изданию	5
Предисловие	6

ЧАСТЬ 1

Внутренняя тонкая топология

Глава I. Общие понятия разреженности и тонкой топологии	9
Глава II. Понятие приведенной функции. Применения. Строгая разреженность и строгая неразреженность	18
Глава III. Общие результаты в тонких пределах	27
Глава IV. Квазитопологические понятия	31
Глава V. Слабая разреженность	43
Глава VI. Понятия классической теории потенциала	48
Глава VII. Классическая тонкая топология. Общие свойства	70
Глава VIII. Применения к выметанию, весам и емкостям	77
Глава IX. Дальнейшее изучение классической разреженности. Некоторые приложения	93
Глава X. Связи с границей Шоке	110
Глава XI. Обобщение на случай аксиоматических теорий гармонических функций (краткие сведения)	115

ЧАСТЬ 2

Граничные теории и минимальная разреженность

Глава XII. Абстрактная минимальная разреженность. Минимальная граница. Минимальная тонкая топология	126
Глава XIII. Общая компактификация Константеску — Корня. Первые примеры применения	135
Глава XIV. Классическое пространство Мартина. Интегральное представление Мартина	140

Глава XV. Классическое пространство Мартина и минимальная разреженность	153
Глава XVI. Классическая граница Мартина. Проблема Дирихле и поведение на границе	170
Глава XVII. Сравнение двух типов разреженности. Тонкие и некасательные пределы. (Классический случай. Примеры)	188
Глава XVIII. Пространство Мартина и минимальная разреженность в аксиоматических теориях. (Краткий обзор)	203
Список литературы	209
Именной указатель	217
Предметный указатель	218

М. Брело

О ТОПОЛОГИЯХ И ГРАНИЦАХ
В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Редактор В. И. Авербух
Художник В. М. Новоселова
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Л. П. Вирюкова
Корректор Е. Г. Литвак

Сдано в набор 29/1 1974 г. Подписано к печати 12/V 1974 г. Бумага
тнп. № 3 84×103¹/₂=3,50 бум. л. 11,76 усл. п. л. Уч.-изд л. 10,25. Изд. № 1/6964.
Цена 92 коп. Зак. 60

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Орден Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29