

Г.БРЕМЕРМАН  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ,  
КОМПЛЕКСНЫЕ  
ПЕРЕМЕННЫЕ  
И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
ФУРЬЕ

ADDISON-WESLEY SERIES IN MATHEMATICS

**Distributions,  
Complex Variables,  
and  
Fourier Transforms**

**Hans Bremermann**

*University of California, Berkeley*

Addison-Wesley Publishing Company,  
Reading, Massachusetts

1965

Г. БРЕМЕРМАН

Распределения,  
комплексные переменные  
и преобразования Фурье

*Перевод с английского .*

*В. П. Павлова и Б. М. Степанова*

*Под редакцией*

*В. С. Владимирирова*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

*Москва 1968*

В книге систематически излагается теория распределений Соболева — Шварца (в иашей терминологии — теория обобщенных функций). Особое внимание уделяется представлению распределений с помощью аналитических функций. Рассматривается ряд недавних результатов, связанных с аналитическим представлением распределений. Даются приложения теории распределений к квантовой теории поля, теории электрических цепей, теории вероятностей и математической статистике.

Книга представляет интерес для широких кругов научных работников, аспирантов и студентов — математиков, физиков и инженеров (особенно электриков), владеющих основами вещественного и комплексного анализа.

*Редакция литературы по математическим наукам*

## ОТ РЕДАКТОРА

Предлагаемая вниманию читателя монография „Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье“ написана известным немецким математиком (ныне работающим в США) профессором Гансом Бремерманом — специалистом по теории функций многих комплексных переменных, теории обобщенных функций и их приложениям к математической биологии.

В этой книге излагается теория распределений Соболева — Шварца. Основная ее особенность состоит в том, что в ней устанавливается и систематически изучается связь между распределениями и аналитическими функциями, а именно: распределения представляются через граничные значения функций, аналитических в трубчатых радиальных областях, призывающих друг к другу по общему остиву. Для этого вводится новая операция над распределениями, называемая аналитическим представлением, и подробно изучаются ее свойства. Устанавливается связь аналитического представления с обобщенным интегралом Коши и обобщенным преобразованием Карлемана — Фурье. Излагается ряд новых результатов, связанных с аналитическим представлением распределений. Даются интересные приложения теории распределений и, в частности, ее аналитического аппарата к квантовой теории поля, теории электрических цепей, теории вероятностей и математической статистике.

По рекомендации автора к книге добавлен перевод его статьи „Несколько замечаний об аналитических представлениях и о произведениях распределений“, представляющей текст доклада, прочитанного им на совещании по применениюм обобщенных функций (Нью-Йоркский университет, сентябрь 1966 г.).

Перевод первых восьми глав и статьи выполнен Б. М. Степановым; главы 9—15 перевел В. П. Павлов.

Книга может служить учебным пособием по теории обобщенных функций. Она представляет интерес для широкого круга научных работников, аспирантов и студентов — математиков, физиков, инженеров (особенно электриков), владеющих основами вещественного и комплексного анализа.

*В. Владимиров*

*Моим родителям*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга, за возможным исключением части IV (приложения), может служить учебным пособием по теории распределений для математиков. С другой стороны, главы 1, 2, 5, некоторые части глав 8 и 9 вместе с главами 10 и 11 могут быть использованы инженерами-электриками как введение в теорию распределений. Для физиков, вероятно, особый интерес представляют главы 1, 2, 3, 13, 14, 15 и, возможно, 12.

Написать эту книгу автора побудили занятия квантовой теорией поля, где его особенно заинтересовали вопросы представления распределений с помощью граничных значений аналитических функций. Книга содержит некоторые новые и неопубликованные результаты из этой области, а также многочисленные новые и упрощенные доказательства известных результатов. Аналитические представления исследовались также Кёте [1], Тильманом [1] и Сато [1], [2], [3]. Эти авторы широко пользуются методами функционального анализа и теорией топологических векторных пространств. В данной книге не акцентируется внимание на этих методах, хотя, в целях полноты изложения, в добавлении 1 излагается теория топологических векторных пространств и вводится топология в различных пространствах распределений.

Автора особенно заинтересовала связь между аналитическими представлениями распределений и разбиением на части областей интегрирования в преобразованиях Фурье. Один специальный вариант этой техники играет важную роль в теории поля (преобразования Фурье по световым конусам „будущего“ и „прошлого“,

функции Уайтмана). Ранее Карлеман [1] рассматривал обобщенные преобразования Фурье с помощью разложения интеграла; однако его работа была написана еще до того, как была развита теория распределений.

В основу книги положена теория распределений Шварца. Ее изложение начинается с исходных определений и доводится до доказательства многих важных теорем. Читатель, больше интересующийся теорией Шварца, чем аналитическими представлениями, найдет эту георию в главах 2, 3, 4, 8, 9, 13 и 14 и добавлении I.

Помимо основных сведений из вещественного и комплексного анализа, для чтения книги и какой специальной математической подготовки не требуется; книга содержит почти все необходимое для ее понимания. Читатель — физик или инженер, быть может, и захочет опустить кое-какие доказательства или некоторые разделы. Однако автор предпочел, чтобы ответственность за замену математической строгости интуицией, основанной на физических моделях, ложилась не на него, а на читателя.

Часть работы над материалом этой книги была сделана при поддержке Национального научного фонда. Автор благодарен своим сотрудникам за помощь и советы при подготовке рукописи; в частности, д-ру Дональду Джекобсону, сделавшему большой вклад на первоначальной стадии, Уильяму Робертсону, внесшему много предложений, когда рукопись приняла уже законченный вид, а также Говарду Резникову, Джону Г. Шварцу, Мохсену Пазирандеху, Стану Раинаку и Лю Ян-чену, которые сделали много критических замечаний. Автор выражает также свою благодарность профессорам Чарльзу Дезоэру и Максу Шифферу, внимательно прочитавшим рукопись. Особая благодарность выражается издательству за внимательное отношение к выпуску этой книги.

*Беркли, Калифорния,  
февраль 1965 г.*

*Г. Б.*

# ГЛАВА 1

## Введение

---

Во введении будет показано, какие математические трудности возникают при рассмотрении простой физической задачи и как эти трудности можно преодолеть, если ввести понятие *обобщенной функции*. Будет дан краткий очерк теории обобщенных функций и сравнение основных идей различных подходов к ней.

Читатель, желающий начать с точных определений, может обратиться сразу к гл. 2. Остальную часть книги можно читать независимо от введения.

### 1.1. Функция Хевисайда и задача о ее производной

Рассмотрим электрическую цепь, источник напряжения и выключатель (рис. 1.1). Предположим, что

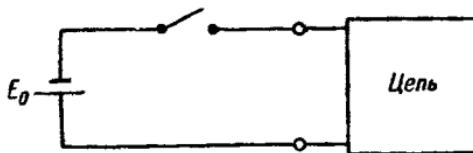


Рис. 1.1.

напряжение  $E_0$  источника постоянно во времени и что выключатель включен в момент  $t = 0$ . Тогда напряжение  $E(t)$  на зажимах цепи выражается формулой

$$E(t) = E_0 H(t),$$

где

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t > 0, \\ 0 & \text{для } t \leq 0. \end{cases}$$

Функция  $H(t)$  называется *функцией Хевисайда* (рис. 1.2).

Рассмотрим цепь, состоящую из сопротивления, индуктивности и емкости, включенных последовательно. Тогда электрический ток  $I(t)$  удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$L \dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt = E(t),$$

где точка обозначает дифференцирование по времени, а  $L$ ,  $R$  и  $C$  — индуктивность, сопротивление и емкость

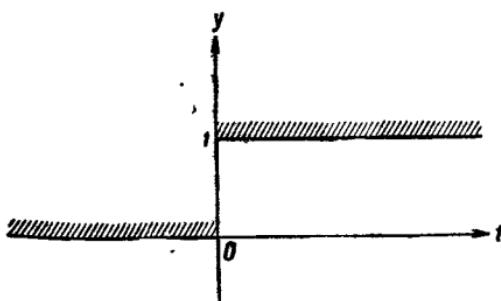


Рис. 1.2. График функции  $y = H(t)$ .

соответственно. Это уравнение непосредственно следует из законов Кирхгофа, которые в свою очередь выводятся из уравнений Максвелла. Дифференцируя обе части, получаем дифференциальное уравнение

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C} I(t) = \dot{E}(t).$$

В это уравнение входит  $\dot{E}(t) = E_0 \dot{H}(t)$ , но последняя величина не определена при  $t = 0$ , так как

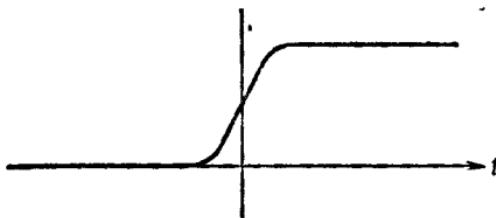
$$\frac{H(h) - H(0)}{h} = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{для } h > 0, \\ 0 & \text{для } h < 0, \end{cases}$$

и поэтому предел этого разностного отношения при  $h \rightarrow 0$ , т. е.  $\dot{H}(0)$ , не существует. Это рассуждение показывает, что описание простой физической задачи приводит к математической трудности.

## 1.2. Функция Хевисайда как идеализация

Выражение  $E(t) = E_0H(t)$  представляет собой идеализированное описание физического напряжения на зажимах цепи. Для достижения полного контакта в реальном выключателе требуется некоторое время. Выключатель действует подобно сопротивлению, которое за очень короткий промежуток времени изменяется от большого значения, определяемого свойствами изоляционного материала, до очень малого значения.

Полученное дифференциальное уравнение само является идеализацией. Реальные элементы контура представляют собой лишь приближения идеализированных



Р и е. 1.3.

сопротивлений, емкостей и индуктивностей. У реальной индуктивности между ее витками имеется емкость. Проводник обладает сопротивлением, происходит утечка энергии магнитного поля, имеется паразитная связь. Ценность идеализации состоит в том, что она делает описание электрической цепи достаточно простым для изучения при условии, что пренебрегаемые эффекты малы.

Напряжение в реальном процессе включения может иметь вид, указанный на рис. 1.3. При  $t=0$  идеализированная функция разрывна, тогда как в менее идеализированном описании эта функция могла бы быть непрерывной, и можно было бы предположить, что она дифференцируема и даже бесконечно дифференцируема.

Удобное описание гладкого перехода с производными произвольно высокого порядка дается семейством функций

$$f_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-nx^2} dx,$$

где  $f_n$  — гауссова функция ошибок. Хорошо известно, что

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx = 1 \quad \text{при всех } n.$$

Так как подинтегральное выражение положительно, то

$$0 < f_n(t) < 1 \quad \text{при всех } t.$$

Однако если  $n$  велико, то подинтегральное выражение практически равно нулю всюду, за исключением небольшой окрестности точки  $x=0$ , а потому чем больше  $n$ , тем сильнее  $f_n(t)$  напоминает функцию Хевисайда.

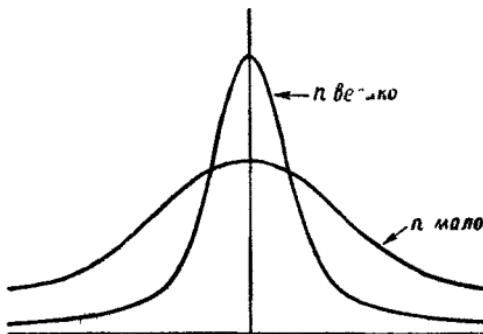


Рис. 1.4.

Производная  $f'_n = \sqrt{n/\pi} e^{-nt^2}$  ведет себя, как показано на рис. 1.4. Чем больше  $n$ , т. е. чем лучше  $f_n(t)$  приближает  $H(t)$ , тем уже становится кривая, изображающая  $f'_n(t)$ , и тем выше пик при  $t=0$ . Если перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , то производная как обычная функция перестанет существовать.

Этот предел представляет собой „идеализацию“. Цель идеализации — сделать описание простым: реальный физический процесс включения будет различным для каждой индивидуальной физической цепи и зависит от многих усложняющих деталей. Было бы желательно от них абстрагироваться.

В нашем случае, если мы хотим работать в рамках этой идеализации, надо обобщить понятие *функции*, так как производная от функции Хевисайда, предельный случай  $f'_n(t)$  при  $n \rightarrow \infty$ , не есть функция в обычном смысле. В течение какого-то времени производной от  $H(t)$  пользовались для практических вычислений, не давая точного ее определения. Она известна под названием *δ-функции Дирака* и обозначается через  $\delta(t)$ . Впоследствии были разработаны различные теории, в которых операции с δ-функцией Дирака и аналогичными величинами получили строгое обоснование.

### 1.3. Теория Темпля и Лайтхилла

Подход Темпля [1], [2], изложение которого дал Лайтхилл [1], не нуждается в математическом аппарате, выходящем за пределы классического анализа. Темпль рассматривает  $\delta(t)$  как предел последовательности приближающих функций

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2}$$

в следующем смысле: для любой непрерывной функции  $\varphi(t)$ , такой, что  $\varphi(t)$  на бесконечности растет не быстрее, чем  $Ce^{a|t|}$ , где  $C$  — константа,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} \varphi(t) dt = \varphi(0).$$

Другие „обобщенные функции“ определяются подобным же образом.

В теории Темпля следует учитывать тот факт, что различные последовательности могут определять одну и ту же обобщенную функцию. Поэтому желательно ввести отношение эквивалентности между различными последовательностями, определяющими одну и ту же обобщенную функцию.

Пусть  $\{f_n\}$  и  $\{g_n\}$  — последовательности функций, такие, что интегралы  $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \varphi(t) dt$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t) \varphi(t) dt$  существ-

вуют при любых  $n$  и для всех  $\varphi$  из какого-то заданного класса функций  $(\Phi)$ . Предположим также, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(t)dt$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\varphi(t)dt$  существуют. Две

последовательности называются „эквивалентными“ относительно  $(\Phi)$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\varphi(t)dt$$

для всех  $\varphi \in (\Phi)$ .

Выражение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(t)dt$  сопоставляет каждой

функции  $\varphi$  некоторое число. Такая величина называется *функционалом*. Поэтому рассматриваемый предел есть функционал, определенный на  $(\Phi)$ . Мы пишем  $\langle f_n, \varphi \rangle =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(t)dt$  и обозначаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle$  через  $\langle f, \varphi \rangle$ .

Таким образом, выражение  $\langle f, \varphi \rangle$  определено и является комплексным числом. Однако  $f$  не обязано быть функцией, имеющей определенные значения в каждой точке  $t$ . Мы называем  $f$  *обобщенной функцией*. Таким образом, обобщенные функции оказываются функционалами, и их можно было бы определить как функционалы с самого начала. Необходимость использования приближающих последовательностей тогда отпадает. Определение обобщенных функций через функционалы используется Л. Шварцем [1] и Гельфандом и Шиловым [1]<sup>1</sup>).

#### 1.4. Обобщенные функции

На функцию  $\varphi$  в выражении  $\langle f, \varphi \rangle$  можно налагать различные условия. Например, можно потребовать, чтобы  $\varphi$  была непрерывной, или  $m$  раз непрерывно дифференцируемой, или бесконечно дифференцируемой.

<sup>1</sup>) Еще раньше (1936 г.) это было сделано С. Л. Соболевым [1]. — Прим. ред.

Кроме таких условий на гладкость можно наложить еще условия на рост. Например, функция  $\varphi$  должна убывать на бесконечности быстрее любой (отрицательной) степени  $t$ . Или же можно потребовать, чтобы  $\varphi$  обращалась в нуль вне некоторого компактного множества. Все эти (и другие) классы функций приводят к различным классам обобщенных функций. Функции  $\varphi$  называются *основными функциями*.

Класс  $(\Phi)$  называется (комплексным) линейным пространством, если из того, что  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ , следует, что  $a\varphi_1 + b\varphi_2 \in \Phi$  для любых комплексных чисел  $a$  и  $b$ , причем имеют место обычные законы ассоциативности и коммутативности.

Через  $\langle T, \varphi \rangle$  мы будем обозначать значение функционала  $T$ , примененного к  $\varphi$ .

Функционал  $T$  на линейном пространстве  $(\Phi)$  называется *линейным*, если для любых  $\varphi_1, \varphi_2 \in (\Phi)$  и комплексных чисел  $a, b$

$$\langle T, a\varphi_1 + b\varphi_2 \rangle = a\langle T, \varphi_1 \rangle + b\langle T, \varphi_2 \rangle.$$

Функционал  $T$  называется *непрерывным*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \rangle.$$

Обозначение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  можно понимать в различных смыслах, например как точечную сходимость функций  $\varphi_n$ , как равномерную сходимость или как сходимость в каком-то другом смысле.

## 1.5. Распределения Шварца

Шварц выбирает следующий класс основных функций: это все функции  $\varphi$ , которые бесконечно непрерывно дифференцируемы и обращаются в нуль вне некоторого ограниченного множества. Будем обозначать этот класс через  $(\mathcal{D})$ . Шварц называет *распределениями* все функционалы, определенные на  $(\mathcal{D})$ , которые удовлетворяют условиям линейности и непрерывности.

Сходимость, которая вводится в  $(\mathcal{D})$ , определяется следующим образом: все функции  $\varphi_n$  должны

обращаться в нуль вне фиксированного ограниченного множества и сходиться равномерно относительно  $t$ . То же требование налагается и на каждую последовательность их производных любого порядка.

Пример.  $\delta$ -функция Дирака определяется как обобщенная функция с помощью соотношения

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

для всех комплекснозначных функций  $\varphi$ , определенных на вещественной оси. Это соответствие линейно и непрерывно, если функции  $\varPhi_n$  поточечно сходятся к предельной функции. Поэтому  $\delta$  есть непрерывный линейный функционал на классе всех комплекснозначных функций  $\varphi$  и для поточечной сходимости. Класс  $(\mathcal{D})$  есть более узкий класс функций с более сильным понятием сходимости; следовательно,  $\delta$ , несомненно, есть непрерывный линейный функционал на  $(\mathcal{D})$  и потому распределение.

Локально интегрируемые функции порождают распределения. Действительно, если  $f$  — локально интегрируемая функция, т. е. если  $\int_a^b f(t) dt$  существует для любого ограниченного интервала  $(a, b)$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

есть непрерывный линейный функционал на  $(\mathcal{D})$ . Поэтому  $f(t)$  порождает распределение  $f$ , определяемое соотношением

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt.$$

## 1.6. Производные обобщенных функций

Мы уже говорили, что  $\delta$ -функцию можно представить себе как производную от функции Хевисайда  $H(t)$ . А именно, между ними имеется следующая связь:

функция  $H(t)$  порождает распределение

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \varphi(t) dt.$$

Если бы формула интегрирования по частям была справедлива для этого интеграла, то мы имели бы

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} H'(t) \varphi(t) dt = H(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \varphi'(t) dt = \varphi(0). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $H(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$  для  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Поэтому

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Так как  $H'(t)$  не есть обычная функция, то интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} H'(t) \varphi(t) dt$  не определен в обычном смысле. Но если мы положим  $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$ , то это равенство можно считать определением обобщенной функции  $H'$  (равной  $\delta$ ).

Аналогично, производную  $f'$  от произвольной обобщенной функции мы определяем с помощью равенства  $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$ . Это определение согласуется с обычным: для всех функций  $f$ , определенных на всей вещественной оси и обладающих локально интегрируемой производной, имеем  $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$ .

Применяя это определение к  $\delta$ , получаем

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0),$$

и вообще

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta, \varphi^{(n)} \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

Уже здесь ясно, как выгодно пользоваться бесконечно дифференцируемыми основными функциями: описанный прием дает нам обобщенные производные сколь угодно высокого порядка.

### 1.7. Особенности

Во многих приложениях не так легко отказаться от привычного понятия *функции, определенной поточечно*. В квантовой теории поля, например, принято записывать функционал  $\langle T, \varphi \rangle$  в виде интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(t) \varphi(t) dt$$

даже в том случае, когда  $T(t)$  и интеграл понимаются лишь как символы, не имеющие общепринятого смысла.

Можно ли вообще определить  $T(t)$  как обычную функцию, имеющую особенности в некоторых точках? Например,  $\delta = H'$  можно рассматривать как обычную функцию при всех  $t \neq 0$ , так как  $H'(t) = 0$  при всех  $t \neq 0$ .

Аналогично, функция  $\delta^{(n)} = H^{(n+1)}$  равна нулю при всех  $t \neq 0$ ,  $\delta(0)$  есть „бесконечность“, так же как и  $\delta'(0)$ , но  $\delta(0)$  и  $\delta'(0)$  обращаются в бесконечность по-разному. Отсюда следует, что значения  $\delta(t)$  в регулярных точках ( $t \neq 0$ ) не определяют ее поведения в особой точке.

В противоположность этому поведение *аналитической функции комплексного переменного* во всех особых точках полностью определяется ее значениями в регулярных точках.

Возникает естественный вопрос: можно ли изучать эти особенности с помощью продолжения наших функций вещественного переменного до функций комплексного переменного? Это действительно так, хотя процесс оказывается нетривиальным. Поскольку нам предстоит иметь дело с функциями, обладающими особенностями, то нужно, в частности, уметь обращаться с функциями без особенностей. Мы обсудим сначала этот последний случай.

## 1.8. Представления функций вещественного переменного с помощью аналитических функций комплексного переменного

Рассмотрим произвольную функцию  $f(x)$  вещественного переменного  $x$ . Предположим, что мы хотим продолжить ее до аналитической функции  $g(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , такой, что ее сужение на вещественную ось равно  $f(x)$ :

$$g(x) = f(x) \text{ при всех (вещественных) } x.$$

Легко убедиться, что, вообще говоря, это невозможно. Свойство аналитичности налагает на функцию жесткие ограничения. Если  $g(z)$  равняется нулю на каком-то интервале оси  $x$  (или, если угодно, вообще на каком-то интервале комплексной плоскости), то из аналитичности функции  $g(z)$  следует, что она равна нулю тождественно. Из этого свойства вытекает, что никакую функцию  $f(x)$ , обращающуюся в нуль на каком-то интервале вещественной оси, но не равную нулю при всех  $x$ , нельзя продолжить до аналитической функции  $g(z)$ , такой, что  $g(x) = f(x)$ .

Если условие аналитичности функции  $g(z)$  на всей плоскости  $z$  заменить условием ее аналитичности всюду, за исключением вещественной оси, то мы выиграем мало. А именно, если функция  $f(x)$  непрерывна и  $g(x) = f(x)$ , причем функция  $g(z)$  аналитична при  $y \neq 0$ , то  $g(z)$  необходимо аналитична при всех  $z$ , включая и ось  $x$ . Это легко доказать с помощью интегральной формулы Коши (см. Хилле [1])<sup>1)</sup>.

И потому может показаться удивительным, что имеет место следующее свойство (доказательство см. в гл. 5):

*Пусть  $f(x)$  – ограниченная непрерывная функция, заданная на вещественной оси  $x$ . Тогда существует функция  $\hat{f}(z)$ , аналитическая на всей плоскости  $z$ , за исключением вещественной оси  $x$ , такая, что*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} [\hat{f}(x + i\epsilon) - \hat{f}(x - i\epsilon)] = f(x) \text{ при всех } x.$$

<sup>1)</sup> Это свойство доказывается, например, в книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата „Методы теории функций комплексного переменного“, Физматгиз, 1958.—Прим. перев.

## Разность

$$\hat{f}(x + i\epsilon) - \hat{f}(x - i\epsilon)$$

представляет собой „скакок“ функции  $\hat{f}(z)$  при переходе с верхнего берега вещественной оси на нижний. Итак, функцию  $f(x)$  нельзя представить как сужение некоторой аналитической функции, но ее все же можно представить в виде некоторого „скакка“.

## 1.9. Представление распределений

Не только обычные, но и обобщенные функции могут быть представлены подобным образом. В следующих главах будет доказано такое утверждение:

*Пусть  $T$  – распределение Шварца. Тогда существует функция  $F(z)$ , аналитическая всюду, за исключением (возможно) вещественной оси, такая, что*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(t + i\epsilon) - F(t - i\epsilon)] \Phi(t) dt = \langle T, \Phi \rangle$$

для любой основной функции  $\Phi$  из класса  $(\mathcal{D})$ . Мы будем называть функцию  $F(z)$  аналитическим представлением распределения  $T$ .

Таким образом, хотя выражение  $T(t)$ , вообще говоря, не определено, функция  $F(z)$ , дающая представление  $T$ , определена в точках, сколь угодно близких от вещественной оси.

Представление распределения  $T$  с помощью аналитической функции позволяет обогатить нашу теорию мощными методами комплексного анализа.

Во введении речь шла о распределениях от одного переменного. Столь же просто дать определение распределений от конечного числа переменных. Это будет сделано в следующей главе. Представление распределений от многих переменных с помощью аналитических функций многих комплексных переменных отличается от рассмотренного случая одной переменной. Мы сначала обсудим этот последний случай и перейдем к случаю многих переменных в последней части.

Кроме подходов, намеченных во введении, имеются еще и другие. Краткий обзор других подходов, отличных от рассмотренных, можно найти у Нааса и Шмита [1].

### ЗАДАЧИ

1. Доказать, что  $x^m \delta^{(n)} = 0$  при  $m \geq n + 1$ .
2. Вычислить  $\frac{d^3}{dt^3} |t|$ .
3. Доказать, что если функция  $\varphi(t)$  непрерывна и ограничена на оси  $(-\infty, \infty)$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2} \varphi(t) dt = \varphi(0).$$

4. Доказать, что не существует непрерывной функции  $f(t)$ , такой, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad \text{для всех } \varphi \in (\mathcal{D}).$$

# I. ТЕОРИЯ ШВАРЦА

## ГЛАВА 2

### Распределения Шварца

---

#### 2.1. Обобщенные функции

Пусть  $(\Phi)$  — комплексное линейное пространство комплекснозначных функций  $\varphi(t_1, \dots, t_n)$  от  $n$  вещественных переменных  $t_1, \dots, t_n$ . (Это означает, что элементы  $(\Phi)$  удовлетворяют аксиомам линейного (векторного) пространства над полем комплексных чисел. См. дополнение 1.) Пусть в  $(\Phi)$  определено понятие *сходимости*, удовлетворяющее следующему условию: каждая последовательность  $\{\varphi_j\}$  функций  $\varphi_j$  из  $(\Phi)$  либо *сходится*, либо *расходится*. Каждой сходящейся последовательности сопоставляется *непустое множество предельных функций*. Если последовательность  $\{\varphi_j\}$  сходится к функции  $\varphi_0 \in (\Phi)$ , а последовательность  $\{\psi_j\}$  сходится к  $\psi_0 \in (\Phi)$ , то последовательность  $\{a\varphi_j + b\psi_j\}$  сходится к  $a\varphi_0 + b\psi_0$  при любых комплексных числах  $a, b$ .

Функционал является отображением пространства  $(\Phi)$  в множество комплексных чисел. Символом  $\langle T, \varphi \rangle$  мы будем обозначать значение функционала, примененного к функции  $\varphi \in (\Phi)$ . Таким образом,  $\langle T, \varphi \rangle$  есть комплексное число. Если функция  $\varphi \in (\Phi)$  зависит, кроме переменных  $t$ , еще от каких-то дополнительных переменных  $s$ , то мы будем записывать функционал в виде  $\langle T_t, \varphi(t, s) \rangle$ , указывая тем самым, что  $T$  действует на  $\varphi$  как на функцию от переменных  $t$ . Так что  $\langle T_t, \varphi(t, s) \rangle$  будет комплекснозначной функцией  $s$ . Функционал  $T$  есть *линейный* функционал на  $(\Phi)$ , если

$$\langle T, a\varphi_1 + b\varphi_2 \rangle = a\langle T, \varphi_1 \rangle + b\langle T, \varphi_2 \rangle$$

для всех  $\varphi_1, \varphi_2 \in (\Phi)$  и для всех скаляров  $a, b$ . Функционал  $T$  *непрерывен* на  $(\Phi)$ , если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_j \rangle = \langle T, \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_j \rangle,$$

какова бы ни была последовательность  $\{\varphi_j\}$ , сходящаяся к функции  $\varphi_0 \in (\Phi)$  в смысле сходимости, определенной в пространстве  $(\Phi)$ , или, как мы будем говорить для краткости, „в смысле  $(\Phi)$ “. Мы называем *обобщенной функцией* линейный функционал на  $(\Phi)$ , удовлетворяющий условию непрерывности относительно сходимости в смысле  $(\Phi)$ . Через  $(\Phi')$  будем обозначать пространство всех обобщенных функций, определенных на  $(\Phi)$ .

Пример.  $\delta$ -функция, или  $\delta$ -функция Дирака, есть обобщенная функция, определенная на пространстве  $(\Phi)$  всех комплекснозначных функций. Сходимость в  $(\Phi)$  определяется как поточечная сходимость, а  $\delta$  определяется соотношением

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \text{для всех } \varphi \in (\Phi).$$

Аналогично определяется

$$\langle \delta_{(t_0)}, \varphi \rangle = \varphi(t_0) \quad \text{для всех } \varphi \in (\Phi).$$

Общепринято писать  $\delta(t - t_0)$  вместо  $\delta_{(t_0)}$  и  $\delta(t)$  вместо  $\delta$ . Эту запись не следует понимать в том смысле, что  $\delta(t - t_0)$  есть обычная функция.

## 2.2. Классы функций ( $C^k$ ) и ( $C^\infty$ ), сходимость и норма

Мы предполагаем, что читатель знаком с понятиями *открытого множества*, *замкнутого множества*, *замыкания* и *компактного множества в евклидовом пространстве*. Отметим, что в евклидовом пространстве любое компактное множество ограничено; это означает, что оно содержится в достаточно большом шаре конечного радиуса. В дальнейшем мы ограничимся пространствами функций, определенных на евклидовом пространстве  $E^n$ .

*Носителем непрерывной функции называется замыкание множества всех точек, в которых функция отлична от нуля.*

Мы будем пользоваться символом  $D^p$  для обозначения производной:

$$D^p\varphi = \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial t_1^{p_1} \dots \partial t_n^{p_n}} \varphi,$$

где  $p$  — вектор  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_1, \dots, p_n$  — неотрицательные целые числа<sup>1</sup>). Порядок производной  $D^p\varphi$  равен  $\|p\| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ .

Функция, определенная на  $E^n$ , имеющая непрерывные производные до  $k$ -го порядка включительно, называется функцией класса  $(C^k)$ . Непрерывные функции будем называть функциями класса  $(C^0)$ , а функции, которые принадлежат классу  $(C^k)$  при любом  $k$ , — функциями класса  $(C^\infty)$ . Через  $(C^0)$ ,  $(C^k)$ ,  $(C^\infty)$  мы будем также обозначать соответственно пространства всех комплекснозначных функций классов  $(C^0)$ ,  $(C^k)$ ,  $(C^\infty)$ . Они представляют собой комплексные линейные пространства.

Говорят, что последовательность  $\{\varphi_j\}$  функций класса  $(C^k)$  равномерно сходится на множестве  $S$  в  $m$ -м порядке,  $m \leq k$ , если при всех  $p$ , удовлетворяющих соотношению  $\|p\| = m$ , последовательность  $\{D^p\varphi_j\}$  равномерно сходится на  $S$ . Последовательность  $\{\varphi_j\}$  равномерно сходится на  $S$  вплоть до порядка  $m$ , если предыдущее условие имеет место для всех последовательностей  $\{D^p\varphi_j\}$  при  $0 \leq \|p\| \leq m$ . Аналогично говорят о последовательности функций класса  $(C^\infty)$ , сходящейся равномерно на  $S$  в любом порядке.

Пусть  $\varphi$  — функция класса  $(C^k)$  и  $S$  — какое-то множество. Мы вводим для  $m \leq k$  норму (см. задачу 8)

$$\|\varphi\|_{m, S} = \sup_{\substack{\|p\| \leq m \\ t \in S}} |D^p\varphi(t)|.$$

**Лемма 1.** Последовательность  $\{\varphi_j\}$  функций класса  $(C^k)$  равномерно сходится к нулю на множестве  $S$

<sup>1</sup>) Вектор  $p$  также называют мультииндексом.— Прим. ред.

вплоть до порядка  $m$ ,  $m \leq k$ , тогда и только тогда, когда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{m, S} = 0$$

(см. задачу 9).

**Лемма 2.** Последовательность  $\{\varphi_j\}$  функций класса  $(C^\infty)$  сходится равномерно к нулю на множестве  $S$  в любом порядке тогда и только тогда, когда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{m, S} = 0 \text{ при любых } m.$$

### 2.3. Функции класса $(C^\infty)$ с компактным носителем

В дальнейшем мы будем рассматривать пространство всех функций класса  $(C^\infty)$  с компактным носителем и обозначать его через  $(\mathcal{D})$ . Существование в  $(\mathcal{D})$  функций, отличных от  $\varphi(t) \equiv 0$ , представляет собой не совсем тривиальный факт. Вещественные аналитические функции дают готовый пример функций класса  $(C^\infty)$ , но среди них нет функций с компактным носителем, отличных от тождественного нуля. Вот пример ненулевой функции из  $(\mathcal{D})$ . Пусть  $\|t\| = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2}$ . Положим

$$\rho_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \|t\| > r, \\ k_r \exp\left[-\frac{r^2}{r^2 - \|t\|^2}\right] & \text{при } \|t\| \leq r, \end{cases}$$

где  $k_r = k/r^n$  и константа

$$k = \left\{ \int_{\|t\| \leq 1} \exp\left[-\frac{1}{1 - \|t\|^2}\right] dt \right\}^{-1}, \quad dt = dt_1 \dots dt_n.$$

Носителем  $\rho_r(t)$  является шар  $\{t : \|t\| \leq r\}$ . Функция  $\exp\left[-r^2/(r^2 - \|t\|^2)\right]$  имеет непрерывные производные любого порядка. Все ее производные обращаются в нуль на сфере  $\{t : \|t\| = r\}$ . Поэтому  $\rho_r(t)$  — функция класса  $(C^\infty)$ .

В следующей главе мы не раз будем пользоваться этой функцией. Имея в виду эти приложения, мы и

ввели константу  $k_r$ . Таким образом, имеем

$$\int_{E^n} \rho_r(t) dt = 1 \text{ при любых } r.$$

## 2.4. Пространства $(\mathcal{D}_K)$ и $(\mathcal{D}'_K)$

Пусть  $K$  — компактное множество в  $E^n$ , а  $(\mathcal{D}_K)$  обозначает множество всех функций класса  $(C^\infty)$ , носитель которых содержится в  $K$ . Мы показали, что  $(\mathcal{D}_K)$  содержит нетривиальные функции.

Говорят, что последовательность  $\{\varphi_j\}$  функций  $\varphi_j$  из  $(\mathcal{D}_K)$  сходится в смысле  $(\mathcal{D}_K)$ , если последовательность  $\{\varphi_j\}$  равномерно сходится на  $K$  в любом порядке. Заметим, что  $(\mathcal{D}_K)$  является полным пространством относительно этой сходимости: если  $\{\varphi_j\}$  сходится в себе в  $(\mathcal{D}_K)$  и  $\varphi_0$  — предельная функция, то  $\varphi_0 \in (\mathcal{D}_K)$ . Сходимость в смысле  $(\mathcal{D}_K)$  мы будем обозначать также через  $\varphi_j \xrightarrow{(\mathcal{D}_K)} \varphi_0$ . По лемме 2.2.2 последовательность  $\{\varphi_j\}$  сходится к нулю в смысле  $(\mathcal{D}_K)$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{m, K} = 0$  при любом  $m$ .

Через  $(\mathcal{D}'_K)$  мы будем обозначать *пространство обобщенных функций на  $(\mathcal{D}_K)$* .

## 2.5. Пространства $(\mathcal{D})$ и $(\mathcal{D}')$ , распределения Шварца

Пусть  $(\mathcal{D})$  — пространство всех функций класса  $(C^\infty)$  с компактным носителем. Пространство распределений  $(\mathcal{D}')$  есть пространство всех линейных функционалов на  $(\mathcal{D})$ , непрерывных в следующем смысле: функционал  $T \in (\mathcal{D}')$  называется непрерывным в смысле  $(\mathcal{D})$ , если его сужение на любое пространство  $(\mathcal{D}_K)$  непрерывно в смысле  $(\mathcal{D}_K)$ <sup>1</sup>.

Непрерывность будет иметь место тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: если  $\{\varphi_j\}$  —

<sup>1</sup>) Эта терминология отличается от принятой в советской математической литературе. Следуя Л. Шварцу [1], обобщенные функции (см. § 14) из  $(\mathcal{D}')$  автор называет распределениями (*distributions*). — Прим. ред.

последовательность функций в  $(\mathcal{D})$ , такая, что носитель каждой  $\varphi_j$  содержится в некотором фиксированном компактном множестве  $K$ , и если  $\{\mathcal{D}^p \varphi_j\}$  сходится равномерно на  $K$  при любом фиксированном  $p$ , то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_j \rangle = \langle T, \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j \rangle.$$

Любая локально интегрируемая функция  $f(t)$  на  $E^n$  порождает распределение  $f \in (\mathcal{D}')$ , если положить по определению (см. задачу 1)

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} f(t) \varphi(t) dt.$$

## 2.6. Пространства $(\mathcal{E})$ и $(\mathcal{E}')$

Пусть  $(\mathcal{E})$  — пространство всех комплекснозначных функций класса  $(C^\infty)$ , определенных на  $E^n$  (с произвольным носителем). Говорят, что последовательность  $\{\varphi_j\}$  функций  $\varphi_j \in (\mathcal{E})$  сходится в смысле  $(\mathcal{E})$ , если при любом фиксированном  $p$  последовательность  $\{\mathcal{D}^p \varphi_j\}$  равномерно сходится на любом компактном подмножестве из  $E^n$ . Заметим, что  $(\mathcal{E})$  полно относительно сходимости в смысле  $(\mathcal{E})$ .

Пусть  $(\mathcal{E}')$  — пространство обобщенных функций на  $(\mathcal{E})$ , т. е. пространство всех линейных функционалов на  $(\mathcal{E})$ , которые непрерывны для последовательностей, сходящихся в смысле  $(\mathcal{E})$ .

Любая обобщенная функция из  $(\mathcal{E}')$  является распределением из  $(\mathcal{D}') : (\mathcal{E}') \subset (\mathcal{D}')$  (см. задачу 2).

## 2.7. Мультиликаторы

Пусть  $a$  — функция, такая, что  $\varphi \in (\Phi)$  влечет  $a\varphi \in (\Phi)$ , и если  $\{\varphi_j\}$  сходится к  $\varphi$  в смысле  $(\Phi)$ , то  $\{a\varphi_j\}$  сходится к  $a\varphi$  в смысле  $(\Phi)$ . Тогда  $a$  называется *мультиликатором* в пространстве  $(\Phi)$ . Если  $f \in (\Phi')$ , то  $af$  определяется с помощью соотношения  $\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in (\Phi)$ . Очевидно,  $af$  обладает свойствами

линейности и непрерывности, а значит, является обобщенной функцией из  $(\Phi')$ .

Любая функция класса  $(C^\infty)$  является мультипликатором в  $(\mathcal{D})$  и  $(\mathcal{E})$  (задача 3).

## 2.8. Дифференцирование распределений

Пусть  $T$  — распределение. Тогда его производные определяются соотношениями

$$\langle D^p T, \varphi \rangle = (-1)^{p_1 + \dots + p_n} \langle T, D^p \varphi \rangle \quad \text{для всех } \varphi \in (\mathcal{D}).$$

Здесь

$$D^p \varphi = \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial t_1^{p_1} \dots \partial t_n^{p_n}} \varphi$$

обозначает обычную производную от  $\varphi$ .

Основные функции  $\varphi$  бесконечно дифференцируемы; поэтому любое распределение из  $(\mathcal{D}')$  имеет обобщенные производные любого порядка. Для распределений из  $(\mathcal{E}')$  мы вводим то же определение, но требуем, чтобы оно имело место для всех  $\varphi$  из  $(\mathcal{E})$ , а не только из  $(\mathcal{D})$ .

Если  $T$  порождается дифференцируемой функцией, то это определение согласуется с обычным (задача 4).

## 2.9. Первообразные распределений. Случай $n=1$

Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ . Тогда распределение  $S$ , такое, что  $\langle S', \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , называется первообразной<sup>1)</sup>  $T$ .

**Теорема.** Любое распределение  $T \in (\mathcal{D}')$  имеет первообразную, которая единственна с точностью до аддитивной постоянной.

Иными словами, если  $S_1$  и  $S_2$  — первообразные распределения  $T$ , то

$$\langle S_1 - S_2, \varphi \rangle = \langle C, \varphi \rangle = C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt \quad \text{для всех } \varphi \in (\mathcal{D}),$$

где  $C$  — некоторая константа.

<sup>1)</sup> В оригинале antiderivative. — Прим. ред.

Для доказательства теоремы установим сначала две леммы.

**Определение.** Обозначим через  $(\mathcal{H})$  пространство всех функций  $\chi(t) \in (\mathcal{D})$ , таких, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) dt = 0$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\varphi_0(t)$  — фиксированная функция из  $(\mathcal{D})$ , такая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t) dt = 1$ . Тогда любая функция  $\psi \in (\mathcal{D})$  может быть записана в виде

$$\psi(t) = \chi(t) + \lambda \varphi_0(t),$$

где  $\chi \in (\mathcal{H})$  и  $\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt$ .

Действительно, функция  $\chi(t)$  равна  $\psi(t) - \lambda \varphi_0(t)$  и обладает требуемыми свойствами.

**Лемма 2.** Пусть  $\chi(t) \in (\mathcal{D})$ . Тогда существует единственная функция  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , такая, что  $\chi(t) = \varphi'(t)$  тогда и только тогда, когда  $\chi \in (\mathcal{H})$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $\chi(t) = \varphi'(t)$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(t) dt = \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

откуда  $\chi \in (\mathcal{H})$ .

Обратно, предположим, что  $\chi \in (\mathcal{H})$ . Определим  $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t) dt$ . Тогда  $\varphi' = \chi$ . Так как  $\chi$  имеет компактный носитель, то  $\varphi(t)$  постоянна при больших  $t$ . В силу того что  $\chi \in (\mathcal{H})$ ,  $\varphi(t) = 0$  при больших  $t$ , и, значит, носитель  $\varphi$  компактен, откуда  $\varphi \in (\mathcal{D})$ .

**Доказательство теоремы.** Предположим, что  $T \in (\mathcal{D}')$ . Пусть  $\psi$  — какая-то функция из  $(\mathcal{D})$ . Запишем

$\psi = \chi + \lambda \varphi_0$ , как в лемме 1, и пусть  $\Phi$  — функция, такая, как в лемме 2. Определим  $S$  соотношением

$$\langle S, \psi \rangle = \langle S, \chi \rangle + \lambda \langle S, \varphi_0 \rangle = -\langle T, \Phi \rangle + \lambda C_0,$$

где  $C_0$  — константа. Функционал  $S$ , определенный таким образом, есть распределение (см. задачу 5). Этим доказана первая часть теоремы.

Для доказательства единственности  $S$  с точностью до константы предположим, что  $S'_1 = S'_2 = T$ . Тогда  $\langle S_1 - S_2, \varphi' \rangle = 0$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ ; отсюда  $\langle S_1 - S_2, \chi \rangle = 0$  для всех  $\chi \in (\mathcal{H})$ . Следовательно, если  $\psi \in (\mathcal{D})$ , то

$$\langle S_1 - S_2, \psi \rangle = \langle S_1 - S_2, \chi \rangle + \lambda \langle S_1 - S_2, \varphi_0 \rangle = C \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt,$$

где  $C = \langle S_1 - S_2, \varphi_0 \rangle$ . Тем самым теорема доказана.

## 2.10. Первообразные высших порядков

Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ . Тогда распределение  $R$ , такое, что  $\langle R^m, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , называется *первообразной*  $T$  порядка  $m$ .

**Теорема.** *Всякое распределение из  $(\mathcal{D}')$ ,  $n = 1$ , имеет первообразные любого порядка. Первообразная порядка  $m$  единственна с точностью до полинома порядка  $m - 1$ .*

**Доказательство.** Существование устанавливается путем повторного применения теоремы 2.9. Мы докажем единственность с точностью до полинома по индукции. Утверждение справедливо для  $m = 1$ ; это было доказано в теореме 2.9.

Предположим, что утверждение справедливо для  $m - 1$ . Пусть  $R_1$  и  $R_2$  — первообразные порядка  $m$  от  $T$ . Тогда  $R'_1$  и  $R'_2$  — первообразные порядка  $m - 1$ , а потому в силу предположения индукции

$$\langle R'_1 - R'_2, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{m-2}t^{m-2} + \dots + a_0)\varphi(t) dt$$

для всех  $\Phi \in (\mathcal{D})$ . Интегрируя по частям правую часть и преобразуя левую, находим

$$\langle R_1 - R_2, \Phi' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left( a_{m-2} \frac{t^{m-1}}{m-1} + \dots + a_0 t \right) \Phi'(t) dt.$$

Отсюда для произвольной функции  $\Psi \in (\mathcal{D})$

$$\langle R_1 - R_2, \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \chi(t) dt + \lambda \langle R_1 - R_2, \Phi_0 \rangle,$$

где  $\chi, \Phi_0$  и  $\lambda$ , такие, как в леммах 2.9.1 и 2.9.2, а  $P(t)$  — полином степени  $m-1$ . Пусть  $\int_{-\infty}^{\infty} P(t) \Phi_0(t) dt = C_1$ ,  $\langle R_1 - R_2, \Phi_0 \rangle = C_2$  и  $C = C_2 - C_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle R_1 - R_2, \Psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \Psi(t) dt + \lambda (C_2 - C_1) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [P(t) + C] \Psi(t) dt. \end{aligned}$$

Но  $P(t) + C$  есть полином степени  $m-1$ . Теорема доказана.

## 2.11. Первообразные распределений. Случай $n > 1$

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ ,  $n > 1$ . Тогда существует распределение  $S$ , такое, что  $\partial S / \partial t_1 = T$ .

**Доказательство.** Если  $\chi \in (\mathcal{D})$ , то  $\chi(t_1, \dots, t_n) = (\partial / \partial t_1) \varphi(t_1, \dots, t_n)$  с  $\varphi \in (\mathcal{D})$  тогда и только тогда, когда  $\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t_1, \dots, t_n) dt_1 = 0$ . (Это утверждение аналогично лемме 2.9.1.) Обозначим пространство функций  $\chi \in (\mathcal{D})$ , обладающих этим свойством, через  $(\mathcal{H}_1)$ .

Пусть  $\phi_0(t) \in (\mathcal{D})$  — функция одного переменного, такая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 1$ .

Пусть  $\psi$  — произвольная функция из  $(\mathcal{D})$  и

$$\chi(t_1, \dots, t_n) = \psi(t_1, \dots, t_n) - \lambda(t_2, \dots, t_n) \phi_0(t_1),$$

где  $\lambda(t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t_1, \dots, t_n) dt_1$ . Тогда  $\chi \in (\mathcal{H}_1)$ .

Пусть  $\Phi(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \chi(t_1, \dots, t_n) dt_1$ . Тогда  $\partial \Phi / \partial t_1 = \chi$  и  $\Phi \in (\mathcal{D})$ . Если теперь  $\partial S / \partial t_1 = T$ , то  $\langle \partial S / \partial t_1, \Phi \rangle = -\langle S, \partial \Phi / \partial t_1 \rangle = \langle T, \Phi \rangle$ . Отсюда

$$\langle S, \psi \rangle = \langle S, \chi \rangle + \langle S, \lambda \phi_0 \rangle = -\langle T, \Phi \rangle + \langle S, \lambda \phi_0 \rangle.$$

Мы можем приписать произвольное значение функционалу  $\langle S, \lambda \phi_0 \rangle$ . Для простоты будем считать его равным нулю и определим, таким образом,  $S$  условием

$$\langle S, \psi \rangle = -\langle T, \Phi \rangle.$$

Функционал  $S$  будет тогда распределением из  $(\mathcal{D}')$  (задача 6), причем для него выполнено условие  $\partial S / \partial t_1 = T$ . Теорема доказана.

**Л е м м а.** *Если  $S$  — первообразная от распределения  $T$ , так что  $\partial S / \partial t_1 = T$ , то  $S + R$  обладает тем же свойством, если  $R$  имеет вид*

$$\langle R, \Phi \rangle = \int_{E^n} f(t_2, \dots, t_n) \Phi(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n,$$

где  $f(t_2, \dots, t_n)$  — локально интегрируемая функция, не зависящая от  $t_1$ .

Это очевидно. Полученный результат можно обобщить на распределения, не зависящие от  $t_1$ . Мы не будем здесь заниматься этим вопросом и отсылаем читателя к работе Шварца [1].

## 2.12. Сходимость обобщенных функций

Говорят, что последовательность обобщенных функций  $\{f_v\}$ ,  $f_v \in (\Phi')$ , сходится к пределу  $f \in (\Phi')$ , если

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \langle f_v, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \text{ для всех } \varphi \in (\Phi).$$

В общем случае ни одно из пространств  $(\Phi)$  или  $(\Phi')$  не обязано быть полным. Отметим здесь только, что пространство распределений  $(\mathcal{D}')$  является полным (см. гл. 4, задача 3).

### ЗАДАЧИ

1. Докажите, что любая локально интегрируемая функция  $f(t)$ , заданная на  $E^n$ , порождает распределение  $\hat{f} \in (\mathcal{D}')$ , если положить по определению  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} f(t) \varphi(t) dt$ .

2. Докажите, что любая обобщенная функция из  $(\mathcal{D}')$  является распределением из  $(\mathcal{D})$ .

3. Докажите, что любая функция класса  $(C^\infty)$  есть мультипликатор в пространствах  $(\mathcal{D})$  и  $(\mathcal{E})$ .

4. Пусть распределение  $T \in (\mathcal{D}')$  порождается дифференцируемой функцией  $j(t)$ . Докажите, что производная  $T'$  распределения  $T$  порождается (обычной) производной  $j'(t)$  функции  $j(t)$ .

5. Пусть  $\psi \in (\mathcal{D})$  и  $\varphi_0$  — фиксированная функция, не принадлежащая  $(\mathcal{E})$ ,  $\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt$ ,  $\chi(t) = \psi(t) - \lambda \varphi_0(t)$ ,  $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t) dt$

и  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t) dt = 1$ . Задано распределение  $T \in (\mathcal{D}')$ . Определим функционал  $S$  соотношением  $\langle S, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi \rangle + \lambda C$ , где  $C$  — произвольная константа. Докажите, что  $S$  — распределение.

6. Пусть  $\psi \in (\mathcal{D}(E^n))$ , а  $\varphi_0$  — такая же функция, как в задаче 5. Пусть  $\chi(t_1, \dots, t_n) = \psi(t_1, \dots, t_n) - \lambda(t_2, \dots, t_n) \varphi_0(t_1)$ , где

$$\lambda(t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t_1, \dots, t_n) dt_1 \text{ и } \varphi(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \chi(t_1, \dots, t_n) dt_1.$$

Задано распределение  $T$ . Определим функционал  $S$  соотношением  $\langle S, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi \rangle + \langle S_0, \lambda \rangle$ , где  $S_0$  — произвольное распределение из  $(\mathcal{D}'(E^{n-1}))$ . (В частности, можно взять  $S_0 = 0$ .) Докажите, что  $S \in (\mathcal{D}'(E^n))$ .

7. Пусть  $S_1, S_2 \in (\mathcal{D}'(E^1))$  и  $\langle S_1, \varphi \rangle = \langle S_2, \varphi \rangle$  для всех тех функций  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , которые являются  $m$ -ми производными от каких-то функций из  $\mathcal{D}$ . Докажите, что  $S_1, S_2$  отличаются самое большое на полином степени  $m-1$ . (Это прямое следствие теоремы 2.10.)

8. Пусть  $\varphi$  — функция класса  $(C^k)$ ,  $S$  — множество пространства  $E^1$  и  $m \leq k$ . Докажите, что

$$\|\varphi\|_{m, S} = \sup_{\substack{\|p\| \leq m \\ t \in S}} |D^p \varphi(t)|$$

есть норма в  $(\mathcal{D}_S^m)$ , т. е. что  $\|\varphi\|_{m, S}$  удовлетворяет следующим условиям:

$$(1) \|0\|_{m, S} = 0 \text{ и } \|\varphi\|_{m, S} > 0, \text{ если } \varphi \neq 0;$$

$$(2) \|C\varphi\|_{m, S} = |C| \|\varphi\|_{m, S}, \text{ где } C \text{ — константа};$$

$$(3) \|\varphi_1 + \varphi_2\|_{m, S} \leq \|\varphi_1\|_{m, S} + \|\varphi_2\|_{m, S};$$

9. Докажите, что последовательность  $\{\varphi_j\}$  функций класса  $(C^k)$  сходится к нулю равномерно на множестве  $S$  вплоть до порядка  $m$ ,  $m \leq k$ , тогда и только тогда, когда  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{m, S} = 0$ .

10a. Покажите, что если  $\alpha$  — мультипликатор для пространства  $(\mathcal{D})$  или  $(\mathcal{E})$ , то  $\alpha'$  — тоже мультипликатор. (Следствие:  $\alpha$  есть функция класса  $(C^\infty)$ .)

10b. Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$  и  $\alpha$  — мультипликатор для распределения  $T$ . Докажите, что  $(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$ .

11. *Меры.* Мера часто определяется как „вполне аддитивная функция множества, заданная на вполне аддитивном классе множеств“. Ее, однако, можно определить также как линейный непрерывный функционал на пространстве  $(C^0)$  непрерывных функций, в котором введено следующее понятие сходимости:  $\{\varphi_j\} \rightarrow \varphi$  в смысле  $(C^0)$ , если выполнены два условия:

(1) существует ограниченное множество в  $E^n$ , содержащее носители всех  $\varphi_j$ ;

(2)  $\{\varphi_j\} \rightarrow \varphi$  равномерно в обычном смысле.

Эквивалентность этих двух определений устанавливается следующим образом. Если  $\mu$  — мера, то интеграл  $\int_E \varphi d\mu$  есть непрерыв-

ный линейный функционал на  $(C^0)$ . Если  $U$  — непрерывный линейный функционал на  $(C^0)$ , то теорема Рисса (см. § 4.7) утверждает, что существует единственная мера  $\mu$ , такая, что

$$\langle U, \varphi \rangle = \int_{E^n} \varphi d\mu.$$

Покажите, что распределения являются обобщениями мер, а именно:

(a) любая мера есть распределение; (b) не все распределения являются мерами. (Указание: рассмотрите  $\delta'$ .)

## ГЛАВА 3

### Регуляризация, локализация и носители распределений

---

В этой главе мы обсудим более глубокий подход к распределениям и разработаем аппарат, необходимый для дальнейших доказательств. Читатели, которых интересуют в основном приложения, при первом чтении могут опустить доказательства.

#### 3.1. Регуляризация функций

Пусть  $\rho_r(t)$  — функция, определенная в § 2.3, и  $f(t)$  — функция, локально интегрируемая в  $E^n$ . Тогда  $f * \rho_r$ , где  $*$  означает *свертку*, называется *регуляризацией*  $f$ , т. е.

$$\begin{aligned}(f * \rho_r)(x) &= \int_{E^n} f(t) \rho_r(x-t) dt = \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) \rho_r(x_1 - t_1, \dots, x_n - t_n) dt_1 \dots dt_n.\end{aligned}$$

*Регуляризованная функция*  $(f * \rho_r)(x)$  есть функция класса  $(C^\infty)$ . Чтобы установить дифференцируемость  $(f * \rho_r)(x)$ , рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\frac{(f * \rho_r)(x_1 + h_1, \dots, x_n) - (f * \rho_r)(x)}{h_1} &= \\&= \int_{E^n} f(t) \left[ \frac{\rho_r(x_1 + h_1 - t_1, \dots, x_n - t_n) - \rho_r(x - t)}{h_1} \right] dt.\end{aligned}$$

Но

$$\sup_{t \in E^n} \left| \frac{\rho_r(x_1 + h_1 - t_1, \dots, x_n - t_n) - \rho_r(x - t)}{h_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \rho_r(x - t) \right|$$

стремится к нулю при  $h_1 \rightarrow 0$ . Значит,  $\frac{\partial}{\partial x_i} (f * \rho_n)(x)$  существует. Из тех же соображений следует существование всех частных производных всех порядков. Таким образом,  $(f * \rho_r)(x)$  есть функция класса  $(C^\infty)$ .

Если  $K$  — носитель  $f$ , то носитель  $f * \rho_r$  содержится в множестве

$$\{t : t_0 \in K, \|t - t_0\| \leq r\}.$$

### 3.2. Приближение функции с помощью ее регуляризации

**Лемма 1.** Пусть функция  $f(t)$  непрерывна на  $E^n$ . Тогда при  $r \rightarrow 0$  регуляризованная функция  $f * \rho_r$ , стремится к  $f$  равномерно на любом компактном множестве пространства  $E^n$ .

**Доказательство.** В § 2.3 мы определили функцию  $\rho_r$ , такую, что

$$\int_{E^n} \rho_r(t - t_0) dt = 1 \quad \text{и} \quad \rho_r \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\min_{\|t - t_0\| \leq r} f(t) \leq (f * \rho_r)(t_0) \leq \max_{\|t - t_0\| \leq r} f(t).$$

На компактном множестве функция  $f$  равномерно непрерывна. Поэтому для любого компактного множества  $S$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $r > 0$ , такое, что  $|f(t_0) - f(t)| < \varepsilon$  для всех  $t_0 \in S$  и для всех  $t$ , таких, что  $|t - t_0| < r$ . Следовательно,  $|f(t_0) - (f * \rho_r)(t_0)| < \varepsilon$  для всех  $t_0 \in S$ , и, значит, регуляризация  $f * \rho_r$  сходится к функции  $f$  равномерно на  $S$ .

**Лемма 2.** Пусть  $f$  — функция класса  $(C^m)$  на  $E^n$ . Тогда  $f * \rho_r$  сходится равномерно к  $f$  вплоть до  $m$ -го порядка на любом компактном подмножестве  $E^n$ .

**Доказательство.**

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_j} f \right) * \rho_r = - \left( f * \frac{\partial \rho_r}{\partial t_j} \right) = f * \frac{\partial \rho_r}{\partial x_j}.$$

В § 3.1 мы доказали, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f * \rho_r)(x) = \left( f * \frac{\partial \rho_r}{\partial x_j} \right)(x).$$

Отсюда

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_j} f \right) * \rho_r = \frac{\partial}{\partial x_j} (f * \rho_r)(x).$$

Левая часть по лемме 1 равномерно сходится (на любом компактном множестве) к  $(\partial/\partial t_j)f$ . Те же соображения применимы к производным  $D^p f$  при  $\|p\| \leq m$ . Этим лемма доказана.

Для функций, которые локально интегрируемы, но не обязательно непрерывны, имеет место следующая лемма.

**Лемма 3.** *Пусть функция  $f$  локально интегрируема на  $E^n$  и  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Тогда*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{E^n} (f * \rho_r)(t) \varphi(t) dt = \int_{E^n} f(t) \varphi(t) dt.$$

**Доказательство.** Так как носитель  $\varphi$  компактен, то интегралы существуют. В силу теоремы Фубини можно изменить порядок интегрирования и, заметив, что  $\rho_r(t' - t) = \rho_r(t - t')$ , получить

$$\int_{E^n} (f * \rho_r)(t) \varphi(t) dt = \int_{E^n} f(t') (\varphi * \rho_r)(t') dt',$$

где функция  $\varphi * \rho_r$  равномерно сходится к  $\varphi$  на любом компактном множестве  $S$  пространства  $E^n$  и имеет компактный носитель, причем, если  $r \leq r_0$ , то носитель функции  $\varphi * \rho_r$  содержится в носителе функции  $\varphi * \rho_{r_0}$ . Отсюда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{E^n} f(t) (\varphi * \rho_r)(t) dt = \int_{E^n} f(t) \varphi(t) dt.$$

### 3.3. Регуляризация характеристических функций

Характеристическая функция  $f_S$  множества  $S$  определяется так:

$$f_S(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in S, \\ 0, & \text{если } t \notin S. \end{cases}$$

Функция  $f_S$  должна быть локально интегрируемой, чтобы к ней можно было применить регуляризацию. Это так, если множество  $S$  измеримо (по Лебегу). Любое открытое или замкнутое множество измеримо. Поэтому характеристическая функция любого открытого или замкнутого множества может быть регуляризована. Носитель любой функции замкнут; значит, характеристическая функция носителя всякой функции всегда может быть регуляризована.

Регуляризованная функция  $f_S * \rho_r$ , принадлежит классу  $(C^\infty)$  и равна самой функции  $f_S$  всюду, за исключением  $r$ -окрестности границы  $\partial S$  множества  $S$ . Иными словами,

$$f_S(t) - (f_S * \rho_r)(t) = 0 \text{ для всех } t \notin \{t : \|t - t_0\| < r, t_0 \in \partial S\}.$$

Можно сказать также, что отклонение регуляризованной функции от исходной  $f_S$  лимитировано узкой полоской вдоль  $\partial S$ . Выбирая  $r$  малым, можно сделать эту переходную полоску сколь угодно узкой.

В качестве примера можно рассмотреть функцию Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t > 0, \\ 0 & \text{для } t \leq 0. \end{cases}$$

Это характеристическая функция полупрямой  $t > 0$ . В гл. 1, где обсуждалась задача сглаживания  $H(t)$ , мы воспользовались функцией  $\sqrt{n/\pi} \int_{-\infty}^t e^{-nx^2} dx$ . Ее недостаток в том, что она нигде не обращается в нуль. С помощью регуляризации мы получаем более удобное приближение, которое в точности совпадает с  $H(t)$

за исключением некоторой окрестности точки  $t = 0$ , и эта окрестность может быть сделана сколь угодно малой.

### 3.4. Разложение единицы

Открытое покрытие множества  $E$  есть такая совокупность открытых множеств  $\{\Omega_i\}$ , где  $i$  пробегает множество индексов  $I$ , что каждая точка  $x \in E$  содержится хотя бы в одном  $\Omega_i$ .

Покрытие счетно, если множество индексов счетно. Тогда можно считать, что множество  $I$  состоит из натуральных чисел.

Пусть даны открытое множество  $\Omega$  и счетное открытое покрытие  $\{\Omega_i\}$  этого множества.

*Разложение единицы*, соответствующее покрытию  $\{\Omega_i\}$ , есть последовательность функций  $a_i$  класса  $(C^\infty)$ , обладающая следующими свойствами:

- (a)  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) = 1$  на  $\Omega$ ,  $0 \leq a_j(t) \leq 1$  для всех  $t \in \Omega$ ;
- (b) носитель  $a_j$  лежит в  $\Omega_j$ , и любое компактное подмножество множества  $\Omega$  пересекается с носителями лишь конечного числа  $a_j$ .

### 3.5. Покрытие и разложение единицы для $E^n$

Пусть  $Q_{v_1, \dots, v_n, r} = \{t : |t_1 - v_1| < r, \dots, |t_n - v_n| < r\}$  есть  $n$ -мерный куб с центром в точке  $t = (v_1, \dots, v_n)$ , длина стороны которого равна  $2r$ . Совокупность кубов  $\{Q_{v_1, \dots, v_n, r}\}$ , где  $v_1, \dots, v_n$  пробегают независимо все целые числа, есть открытое покрытие пространства  $E^n$ , если только  $r > 1/2$ .

В дальнейшем нам понадобится одно особое покрытие и соответствующее ему разложение единицы для  $E^n$ . Дадим их определения.

Перенумеруем  $Q_{v_1, \dots, v_n, r}$ , например, с помощью канторова приема и обозначим полученную последовательность кубов просто  $\{Q_{i,r}\}$ . Пусть  $\chi_i(t)$  — характеристическая функция куба  $Q_{i,1}$ , а  $N(x)$  — число кубов  $Q_{i,1}$ ,

содержащих точку  $x$ . Тогда  $1 \leq N(x) < \infty$  для всех  $x \in E^n$ . (Можно убедиться, что  $N(x) \leq 2^n$ .) Положим  $\beta_i(t) = \chi_i(t)/N(t)$ . Тогда  $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i(t) = 1$  на  $E^n$ . Носитель  $\beta_i$  содержится в  $Q_{i,r}$  при  $r > 1$ . Любому компактному подмножеству пространства  $E^n$  соответствует лишь конечное число членов суммы. Таким образом,  $\beta_i$  удовлетворяют условиям, налагаемым на разложение единицы, за исключением только того, что они не принадлежат классу  $(C^\infty)$ . Но функции  $\beta_i$  кусочно непрерывны и, значит, интегрируемы. Поэтому их можно сгладить с помощью функций  $\rho_r$  из § 2.3. Пусть

$$\alpha_i = \beta_i * \rho_{r_i}.$$

Тогда  $\alpha_i$  — функция класса  $(C^\infty)$  с носителем в кубе  $Q_{i,r}$  при  $r > 3/2$  и  $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(t) = 1$ . Обозначим  $Q_{i,2}$  просто через  $Q_i$ . Тогда  $\{\alpha_i\}$  есть разложение единицы, соответствующее покрытию  $\{Q_i\}$ .

### 3.6. Существование разложений единицы, соответствующих конечным покрытиям компактных множеств

**Теорема.** Пусть  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_k\}$  — конечное покрытие компактного множества  $K$ . Тогда существует разложение единицы, соответствующее покрытию  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_k\}$ .

Под разложением единицы мы понимаем здесь совокупность функций  $\alpha_i$  класса  $(C^\infty)$  с носителями в множествах  $\Omega_i$ , таких, что  $\sum_{i=1}^k \alpha_i(t) = 1$  при  $t \in K$ .

**Доказательство.** Предположим, что множества  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$  ограничены. Позднее мы откажемся от этого предположения. Пусть  $d(t)$  есть (евклидово) расстояние точки  $t$  до границы множества  $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$ , а  $d(K)$  — расстояние множества  $K$  до границы множества  $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$ .

Так как последнее множество открыто, а  $K$  замкнуто, то  $d(K) > 0$ . Положим

$$K' = \{t : t \in \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k \text{ и } d(t) \geq d(K)/2\}.$$

Это — множество всех тех точек множества  $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$ , расстояние которых до границы больше или равно  $d(K)/2$ . Далее,  $K \subset K' \subset \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$ . Но  $d(t)$  есть непрерывная функция  $t$  (задача 1). Поэтому множество  $K'$  секвенциально компактно<sup>1)</sup>. Оно ограничено, так как  $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$  ограничено. Поэтому  $K'$  — компактное множество.

Так как  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$  — покрытие множества  $K$ , то каждая точка  $K$  принадлежит хотя бы одному множеству  $\Omega_j$ . Пусть  $t \in \Omega_j$ . Пусть  $d_j(t)$  есть (евклидово) расстояние точки  $t$  до границы множества  $\Omega_j$ ;  $S_{j,t}$  означает шар  $\{t' : \|t' - t\| < d_j(t)/2\}$ , а  $S'_{j,t}$  — шар  $\{t' : \|t' - t\| < d_j(t)\}$ . Тогда каждой точке  $t \in K'$  соответствует хотя бы одна содержащая ее сфера  $S_{j,t}$ . Таким образом, совокупность сфер  $\{S_{j,t}\}, t \in K'$ , есть открытое покрытие  $K'$ . Отсюда, по теореме Гейне — Бореля, существует конечное подпокрытие  $\{S_{j_1,t^1}, \dots, S_{j_m,t^m}\}$  множества  $K'$ . Пусть  $\chi_{j,v}(t)$  — характеристическая функция  $S_{j,t^v}$ , а  $N(t)$  — число различных шаров  $S_{j,t^v}$ , содержащих точку  $t$ , так что  $1 \leq N(t) \leq m$ . Пусть

$$\beta_{j,v}(t) = \frac{\chi_{j,v}(t)}{N(t)}.$$

Положим  $\beta_{j,v}(t) = 0$ , если шар  $S_{j,t^v}$  не содержит точку  $t$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^m \beta_{j,v}(t) = 1 \quad \text{для } t \in K'.$$

Сгладим, наконец, функции  $\beta_{j,v}(t)$  с помощью  $\rho_r$ , где  $r$  выбрано меньше наименьшего из радиусов шаров  $S_{j,t^v}$ .

<sup>1)</sup> То есть из всякой последовательности точек множества  $K'$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого множества. — Прим. ред.

и меньше  $d(K)/2$ . Так как  $r < d(K)/2$ , то

$$\sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^m \beta_{j,v} * \rho_r = 1 \quad \text{для } t \in K.$$

Так как  $r$  меньше наименьшего из радиусов сфер  $S_{j,t^v}$ , то носитель функции  $\beta_{j,v}(t) * \rho_r$  содержится в сфере  $S'_{j,v}$  и, значит, в множестве  $\Omega_t$ . Отсюда носитель функции  $a_j(t) = \sum_{v=1}^m \beta_{j,v} * \rho_r$  содержитя в множестве  $\Omega_t$ , и мы имеем  $\sum_{j=1}^k a_j(t) = 1$  всюду на  $K$ . Этим теорема доказана для ограниченных множеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ .

Если не все множества  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$  ограничены, то их можно заменить ограниченными открытыми множествами  $\Omega'_1 \subset \Omega_1, \dots, \Omega'_k \subset \Omega_k$ , покрывающими  $K$ , так как  $K$  ограничено. После этого можно построить функции  $a_j$  для множеств  $\Omega'_1, \dots, \Omega'_k$ . Они автоматически дают разложение единицы, соответствующее покрытию  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ . Теорема доказана.

*Замечание.* Существование разложения единицы может быть доказано для счетных покрытий открытых множеств (см., например, А. Фридман [1]), а не только для конечных покрытий. Для наших целей достаточно доказанной теоремы.

### 3.7. Обращение в нуль распределения в открытом множестве

*Определение.* Говорят, что распределение  $T \in (\mathcal{D}')$  обращается в нуль в открытом множестве  $\Omega$ , если  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , носитель которых содержится в  $\Omega$ .

*Теорема.* Пусть  $\{\Omega_i\}$  — открытое покрытие открытого множества  $\Omega$ . Если  $T$  обращается в нуль в каждом  $\Omega_i$ , то  $T$  обращается в нуль в  $\Omega$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varphi \in (\mathcal{D})$ ,  $K$  — носитель  $\varphi$  и  $K \subset \Omega$ . Так как  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , то  $K$  — компактное множе-

ство. Семейство  $\{\Omega_i\}$  является открытым покрытием  $\Omega$ , а значит, и  $K$ . Так как  $K$  компактно, существует конечное подпокрытие  $\{\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_k}\}$  множества  $K$ . По теореме 3.6 существует разложение единицы  $a_1, \dots, a_k$ , соответствующее покрытию  $\{\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_k}\}$ . Следовательно,

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle T, \sum_{j=1}^k a_j \varphi \right\rangle = \sum_{j=1}^k \langle T, a_j \varphi \rangle,$$

где  $a_j \varphi$  имеет носитель в  $\Omega_{i_j}$ . Отсюда  $\langle T, a_j \varphi \rangle = 0$  при  $j = 1, \dots, k$ , так что  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Если  $T \in (\mathcal{D}')$  обращается в нуль в любом открытом множестве  $\Omega_i$  семейства  $\{\Omega_i\}$ , то оно обращается в нуль в их объединении.

### 3.8. Носитель распределений

Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$  и  $\Omega$  – объединение всех открытых множеств  $\Omega_i$ , таких, что  $T$  обращается в нуль в  $\Omega_i$ . Так как множество  $\Omega$  открыто и  $\{\Omega_i\}$  – открытое покрытие  $\Omega$ , то, согласно следствию 3.7,  $T$  обращается в нуль в  $\Omega$ . Поскольку  $\Omega$  содержит любое другое открытое множество, в котором распределение  $T$  обращается в нуль, то мы назовем  $\Omega$  *наибольшим открытым множеством, в котором  $T$  обращается в нуль*.

**Определение.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ . Тогда носитель  $T$  есть *дополнение наибольшего открытого множества, в котором  $T$  обращается в нуль*.

Заметим, что в силу этого определения носитель распределения всегда замкнут. Например, множество, в котором распределение обращается в нуль, может быть пустым или может совпадать со всем пространством  $E^n$ . Соответственно носителем распределения может быть все  $E^n$  или пустое множество.

### 3.9. Характеризация ( $\mathcal{E}'$ )

**Теорема.** Любое распределение  $T \in (\mathcal{E}')$  имеет компактный носитель.

**Доказательство.** Пусть  $K$  — носитель  $T$ . Предположим, что множество  $K$  не компактно. Тогда, поскольку  $K$  замкнуто, оно должно быть не ограниченным. Поэтому существует бесконечная последовательность различных точек  $t_v \notin K$ , не имеющая конечной предельной точки, так что  $|t_v| \rightarrow \infty$ .

Выберем открытый шар  $B_v$  с центром в точке  $t_v$  так, чтобы  $B_v$  не содержал ни одной другой точки  $t_\mu$  при  $\mu \neq v$ , и так, чтобы  $B_v$  не пересекался ни с одним из шаров  $B_\mu$  при  $\mu < v$ . Эта конструкция такова, что все шары  $B_v$  попарно не пересекаются.

В каждом шаре  $B_v$  можно определить функцию  $\Phi_v$  класса ( $C^\infty$ ) с носителем в  $B_v$ , такую, что  $\langle T, \Phi_v \rangle \neq 0$ . Действительно, допустим, что такая функция  $\Phi_v$  не существует. Тогда распределение  $T$  обращалось бы в нуль в  $B_v$  и, значит,  $B_v$  принадлежало бы дополнению носителя  $T$ . Отсюда  $t_v \notin K$ . Получили противоречие. Следовательно,  $\Phi_v$  существует.

Умножим каждую функцию  $\Phi_v$  на константу  $c_v$ , такую, что  $\langle T, c_v \Phi_v \rangle = 1$ . Пусть

$$\Phi = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \Phi_v.$$

Для любого компактного подмножества пространства  $E^n$  в сумму входит лишь конечное число не равных нулю членов, так как любое компактное множество содержит лишь конечное число точек последовательности  $t_v$ . Поэтому  $\Phi$  — функция класса ( $C^\infty$ ), определенная на всем  $E^n$ . Сумма  $\sum_{v=1}^N c_v \Phi_v$  сходится к  $\Phi$  в смысле ( $\mathcal{E}$ ). Отсюда по непрерывности мы должны иметь

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle T, \sum_{v=1}^N c_v \Phi_v \right\rangle = \langle T, \Phi \rangle.$$

Но  $\langle T, \sum_{v=1}^N c_v \Phi_v \rangle = N$ , и, значит, сумма стремится к бесконечности при  $N \rightarrow \infty$ , тогда как  $\langle T, \Phi \rangle$  конечно. Мы получили противоречие. Отсюда следует, что  $K$  должно быть компактым.

### 3.10. ( $\mathcal{D}$ ) плотно в ( $\mathcal{E}$ )

**Теорема.** Каждая функция  $\Phi \in (\mathcal{E})$  есть предел последовательности функций  $\Phi_N \in (\mathcal{D})$ , которые сходятся к  $\Phi$  в смысле ( $\mathcal{E}$ ), причем так, что носитель  $\Phi_N$  содержится в носителе  $\Phi$ .

**Доказательство.** Пусть  $a_i(t)$  – разложение единицы, соответствующее покрытию  $\{Q_i\}$  пространства  $E''$ , как это было сделано в § 35.

Пусть  $\Phi \in (\mathcal{E})$ . Тогда последовательность  $\Phi_N = \sum_{i=1}^N a_i \Phi$  сходится к функции  $\Phi$  в смысле ( $\mathcal{E}$ ). Действительно, любое компактное множество  $K$  пересекается лишь с конечным числом множеств  $Q_i$ . Пусть  $N_0(K)$  – наибольший индекс, для которого пересечение  $Q_i \cap K$  не пусто. Тогда  $\Phi(t) \equiv \Phi_N(t)$  при  $t \in K$  для всех  $N > N_0$ . Но из  $\Phi = \Phi_N$  следует, что  $D^\rho \Phi \equiv D^\rho \Phi_N$  на множестве  $K$  при  $N > N_0$ . Отсюда последовательность  $\{\Phi_N\}$  trivialно сходится к  $\Phi$  и, значит, равномерно на множестве  $K$  в любом порядке. Следовательно,  $\Phi_N$  сходится к  $\Phi$  в смысле ( $\mathcal{E}$ ). При всех  $N$ ,  $\Phi_N \in (\mathcal{D})$  и носитель  $\Phi_N$  содержится в носителе  $\Phi$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}'')$  и обращается в нуль на всех функциях  $\Phi \in (\mathcal{D})$ , носитель которых содержится в открытом множестве  $\Omega$ . Тогда  $\langle T, \Phi \rangle = 0$  для всех функций  $\Phi \in (\mathcal{E})$  (которые могут и не принадлежать ( $\mathcal{D}$ )) с носителем в  $\Omega$ .

Это прямое следствие теоремы.

**Следствие 2.** Пусть  $T, S \in (\mathcal{E}'')$ . Если  $\langle T, \Phi \rangle = \langle S, \Phi \rangle$  для всех  $\Phi \in (\mathcal{D})$ , то  $\langle T, \Psi \rangle = \langle S, \Psi \rangle$  для всех  $\Psi \in (\mathcal{E})$ .

**Доказательство.** Так как  $\langle T - S, \varphi \rangle = 0$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , то, по следствию 1,  $\langle T - S, \psi \rangle = 0$  для всех  $\psi \in (\mathcal{E})$ .

### 3.11. Изменение основных функций вне носителя распределения

**Лемма.** Пусть  $T$  — распределение из  $(\mathcal{D}')$  и  $a(t)$  — функция класса  $(C^\infty)$ , такая, что  $a(t) \equiv 1$  в окрестности носителя  $T$ . Тогда  $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Мы обозначаем распределение, определяемое функционалом  $\langle T, a\varphi \rangle$ , через  $aT$ .

**Доказательство.** В силу линейности  $T$  имеем:  $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle + \langle T, (1-a)\varphi \rangle$ . Носитель  $(1-a)\varphi$  содержится в дополнении носителя  $T$ . Кроме того,  $(1-a)\varphi \in (\mathcal{D})$ , если  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Поэтому  $\langle T, (1-a)\varphi \rangle = 0$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ ; следовательно,  $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Лемма доказана.

**Следствие.** Лемма остается справедливой для  $\varphi \in (\mathcal{E})$ , если  $T \in (\mathcal{E}')$ .

**Доказательство.** Если  $T \in (\mathcal{E}')$ , то  $T \in (\mathcal{D}')$ ; значит, по лемме  $\langle T - aT, \varphi \rangle = 0$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . А тогда по следствию 3.10.2  $T - aT$  обращается в нуль также и на  $(\mathcal{E})$ . Этим следствие доказано.

### 3.12. Продолжение распределений с компактным носителем из $(\mathcal{D})$ на $(\mathcal{E})$

**Теорема.** Любое распределение из  $(\mathcal{D}')$ , имеющее компактный носитель, можно продолжить до распределения, принадлежащего  $(\mathcal{E}')$ , и это продолжение единственное.

**Доказательство.** Продолжение в  $(\mathcal{E}')$  распределения  $T$ , принадлежащего  $(\mathcal{D}')$ , есть распределение  $S \in (\mathcal{E}')$ , такое, что сужение  $S$  на  $(\mathcal{D})$  совпадает с  $T$ , т. е.  $\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Продолжение, если оно возможно, обязательно единствено, так как,

согласно следствию 3.10 2, любые два распределения из  $(\mathcal{E}')$  тождественны, если они совпадают на  $(\mathcal{D})$ .

Пусть  $a(t)$  — функция класса  $(C^\infty)$  с компактным носителем, такая, что  $a(t) \equiv 1$  в окрестности носителя  $T$ . Функцию  $a(t)$  можно построить с помощью регуляризации характеристической функции окрестности носителя  $T$ . Расстояние между носителем  $a(t)$  и носителем  $T$  можно сделать меньше любого заданного числа. Положим  $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$  для  $\varphi \in (\mathcal{E})$ . Так как  $a\varphi \in (\mathcal{D})$ , то  $\langle T, a\varphi \rangle$  определено для всех  $\varphi \in (\mathcal{E})$ . Функционал  $S$ , очевидно, линеен. Кроме того, если  $\{\varphi_v\}$  сходится к  $\varphi_0$  в смысле  $(\mathcal{E})$ , то  $\{a\varphi_v\}$  сходится к  $a\varphi_0$  в смысле  $(\mathcal{D})$  (задача 2). Поэтому функционал  $S$  непрерывен. Значит,  $S \in (\mathcal{E}')$ . По лемме 3.11  $S = T$  на  $(\mathcal{D})$ . Теорема доказана.

### 3.13. Локализация распределений

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ . Тогда  $T$  можно записать в виде бесконечной суммы распределений  $T_j$  с компактными носителями, при этом будут выполнены следующие условия:

(1) любое компактное множество пересекается с носителями лишь конечного числа  $T_j$ ;

$$(2) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \text{ для всех } \varphi \in (\mathcal{D}).$$

**Доказательство.** Положим  $T_j = a_j T$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^N \langle T_j, \varphi \rangle = \left\langle T, \sum_{j=1}^N a_j \varphi \right\rangle,$$

где  $a_j$  — функции, определенные в § 3.5. Для любого компактного множества  $K$  существует  $N_0$ , такое, что  $\sum_{j=1}^N a_j \varphi \equiv \varphi$  на  $K$  для всех  $N > N_0$ . Носитель  $T_j = a_j T$  содержится в носителе  $a_j$  и потому компактен. Теорема доказана.

## ЗАДАЧИ

1. Пусть  $\Omega$  — открытое множество в  $E^n$ ,  $t \in \Omega$  и  $d(t)$  — евклидово расстояние точки  $t$  до границы множества  $\Omega$ . Докажите, что  $d(t)$  — непрерывная функция в  $\Omega$ .
2. Пусть  $\alpha(t) \in (\mathcal{D})$ ,  $\varphi_v \in (\mathcal{E})$  и  $\{\varphi_v\}$  сходится к  $\varphi_0$  в смысле  $(\mathcal{E})$ . Докажите, что  $\{\alpha\varphi_v\}$  сходится к  $\alpha\varphi_0$  в смысле  $(\mathcal{D})$ .
3. Докажите, что  $\rho_r(x) = r^{-n}\rho_1(x/r)$ , где  $\rho_r$  — функция, определенная в § 23.
4. Пусть  $f$  — непрерывная функция на  $E^n$  и  $f$  — распределение, заданное формулой  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} f(t)\varphi(t)dt$  для  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Докажите, что носители распределения  $f$  и функции  $f(t)$  совпадают. Дайте контрпример для разрывной функции.
5. Докажите, что носитель  $\delta$  есть  $\{0\}$ .
6. Докажите, что носитель  $T'$  содержится в носителе  $T$ .

## ГЛАВА 4

### Распределения конечного порядка

---

Материал этой главы представляет собой дальнейшее углубление теории распределений, но менее важен для приложений в физических науках. Читатель, интересующийся в первую очередь приложениями и выработкой техники, может пропустить эту главу.

#### 4.1. Пространства $(\mathcal{D}_K^m)$ и $(\mathcal{D}'_K^m)$

Пусть  $K$  — компактное множество. Обозначим через  $(\mathcal{D}_K^m)$  пространство всех функций класса  $(C^m)$  с носителем в  $K$ . Ясно, что  $(\mathcal{D}_K^m)$  — комплексное линейное (векторное) пространство. Говорят, что последовательность  $\{\varphi_j\}$  функций  $\varphi_j \in (\mathcal{D}_K^m)$  сходится в смысле  $(\mathcal{D}_K^m)$ , если каждая последовательность  $\{D^p \varphi_j\}$  с  $0 \leq p \leq m$  сходится равномерно на множестве  $K$ . (Отметим, что  $D^0 \varphi_j = \varphi_j$ .) Мы говорим также: „Последовательность  $\{\varphi_j\}$  сходится равномерно вплоть до порядка  $m$  на множестве  $K$ “.

Обозначим через  $(\mathcal{D}_K^m)$  пространство всех линейных функционалов на пространстве  $(\mathcal{D}_K^m)$ , которые непрерывны для последовательностей, сходящихся в смысле  $(\mathcal{D}_K^m)$ .

#### 4.2. Пространства $(\mathcal{D}^m)$ и $(\mathcal{D}'^m)$ . Распределения порядка $m$

Пусть  $(\mathcal{D}^m)$  — пространство всех функций класса  $(C^m)$  с компактным носителем. Это комплексное линейное (векторное) пространство. Все пространства  $(\mathcal{D}_K^m)$

являются подпространствами  $(\mathcal{D}^m)$ . Будем называть линейный функционал, заданный на  $(\mathcal{D}^m)$ , непрерывным, если его сужение на любое пространство  $(\mathcal{D}_K^m)$  непрерывно в  $(\mathcal{D}_K^m)$ .

Иными словами, пространства  $(\mathcal{D}^m)$  и  $(\mathcal{D}'^m)$  полностью аналогичны  $(\mathcal{D})$  и  $(\mathcal{D}')$  с тем лишь исключением, что в  $(\mathcal{D}^m)$  и  $(\mathcal{D}'^m)$  допустимы производные только до порядка  $m$ . Заметим, что если  $T \in (\mathcal{D}'^m)$ , то  $T \in (\mathcal{D}'^M)$  при всех  $M \geq m$ . Говорят, что распределение  $T \in (\mathcal{D}')$  имеет конечный порядок, если существует целое число  $M$ , такое, что  $T$  можно продолжить до  $(\mathcal{D}'^M)$ .

Если распределение  $T$  имеет конечный порядок, то наименьшее целое число  $m \geq 0$ , такое, что  $T$  может быть продолжено до  $(\mathcal{D}'^m)$ , называется порядком  $T$ .

### 4.3. Норма в пространстве $(\mathcal{D}_K^m)$

Введем в  $(\mathcal{D}_K^m)$  норму, полагая (см. задачу 2.8)

$$\|\varphi\|_m = \sup_{\substack{\|p\| \leq m \\ t \in K}} |D^p \varphi(t)|.$$

Последовательность  $\{\varphi_v\}$  сходится к нулю в смысле  $(\mathcal{D}_K^m)$  тогда и только тогда, когда  $\|\varphi_v\|_m \rightarrow 0$  (задача 2.9).

Линейный функционал  $T$  на  $(\mathcal{D}_K^m)$  называется ограниченным, если существует константа  $C$ , такая, что

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_m.$$

**Лемма.** Линейный функционал на  $(\mathcal{D}_K^m)$  непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

**Доказательство.** Если линейный функционал  $T$  ограничен и последовательность  $\{\varphi_v\}$  сходится к нулю в смысле  $(\mathcal{D}_K^m)$ , то  $\|\varphi_v\|_m \rightarrow 0$ ; отсюда  $|\langle T, \varphi_v \rangle| \leq C \|\varphi_v\|_m \rightarrow 0$ . Значит, функционал  $T$  непрерывен. Обратно, пусть  $T$  – непрерывный функционал. Предположим, что он не ограничен. Тогда для любого положительного целого числа  $v$  существовала бы функция

$\varphi_v \in (\mathcal{D}_K^m)$ , такая, что выполнялось бы неравенство  $|\langle T, \varphi_v \rangle| > v \|\varphi_v\|_m$ . Положим

$$\Psi_v = \frac{\varphi_v}{v \|\varphi_v\|_m}.$$

Тогда  $\|\Psi_v\| \rightarrow 0$  при  $v \rightarrow \infty$ , и вместе с тем  $|\langle T, \Psi_v \rangle| > 1$ . Это противоречит непрерывности функционала  $T$ . Значит, он ограничен. Лемма доказана.

#### 4.4. Распределения с компактными носителями имеют конечный порядок

**Теорема.** *Любое распределение с компактным носителем имеет конечный порядок.*

**Доказательство.** Пусть  $T$  — распределение с компактным носителем  $K_0$ . Пусть  $K$  — компактное множество, такое, что  $K_0$  содержится в его внутренности. Для доказательства установим сначала две леммы.

**Лемма 1.** *Существуют целое число  $m$  и константа  $C$ , такие, что  $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_m$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$ .*

**Доказательство.** Допустим, что лемма не верна. Тогда для любой константы  $C$  и, значит, в частности, для  $C = v$  ( $v$  — целое число) и для любого  $m$ , а потому, в частности, для  $m = v$  существовала бы функция  $\varphi_v \in (\mathcal{D}_K)$ , такая, что  $|\langle T, \varphi_v \rangle| > v \|\varphi_v\|_v$ .

Безусловно  $\|\varphi_v\|_v \neq 0$ , так как иначе бы  $\varphi_v = 0$  и, значит,  $\langle T, \varphi_v \rangle = 0$ , что невозможно. Поэтому можно делить на  $\|\varphi_v\|_v$ . Пусть

$$\Psi_v = \frac{\varphi_v}{v \|\varphi_v\|_v}.$$

Тогда  $\|\Psi_v\|_v = 1/v$ , откуда следует, что

$$\|\Psi_v\|_\mu \leq \frac{1}{v}, \quad \text{для всех } 0 \leq \mu \leq v.$$

Следовательно,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|\Psi_v\|_\mu = 0 \quad \text{для всех } \mu.$$

Поэтому  $\{\Psi_v\}$  сходится к нулю в смысле  $(\mathcal{D}_K)$ . Значит, по непрерывности,  $\langle T, \Psi_v \rangle \rightarrow 0$ . С другой стороны,  $|\langle T, \Psi_v \rangle| > 1$  при всех  $v$ . Мы получили противоречие, лемма доказана.

**Следствие.** Пусть  $T$ ,  $m$  — те же, что и в лемме 1. Тогда, если  $\{\Phi_v\}$  — любая последовательность функций  $\Phi_v \in (\mathcal{D}_K)$ , сходящаяся к нулю вплоть до порядка  $m$ , то  $\langle T, \Phi_v \rangle \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Если  $\{\Phi_v\}$  сходится к нулю равномерно вплоть до порядка  $m$  на множестве  $K$ , то  $\|\Phi_v\|_m \rightarrow 0$ ; отсюда, по лемме 1,  $|\langle T, \Phi_v \rangle| \rightarrow 0$ . Следствие доказано.

Из одного этого следствия еще нельзя заключить, что  $T$  — обобщенная функция, принадлежащая  $(\mathcal{D}'^m)$ . Обобщенные функции из  $(\mathcal{D}'^m)$  определены на функциях класса  $(C^m)$ , тогда как  $T$  определено до сих пор лишь на функциях класса  $(C^\infty)$ . Мы покажем, что  $T$  можно продолжить из  $(\mathcal{D}')$  до  $(\mathcal{D}'^m)$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\varphi$  — функция класса  $(C^m)$ , носитель которой содержится во внутренности множества  $K$ . Тогда  $\varphi * \rho_r$  будет функцией класса  $(C^\infty)$  с носителем в  $K$  при достаточно малом  $r$ ,  $\|\varphi * \rho_r\|_m \leq \|\varphi\|_m$  независимо от  $r$  и  $\varphi * \rho_r$  сходится к  $\varphi$  равномерно вплоть до порядка  $m$  на множестве  $K$ .

**Доказательство.** Последнее утверждение было доказано в § 3.2. Так как  $\rho \geq 0$ , то

$$|\varphi * \rho_r| \leq \int_{E^n} |\varphi(t)| \rho_r(x-t) dt \leq \sup_{t \in K} |\varphi(t)| \int_{E^n} \rho_r(x-t) dt.$$

Последний интеграл равен единице. Отсюда

$$\sup_K |\varphi * \rho_r| \leq \sup_K |\varphi|.$$

Кроме того,

$$\sup_K |D^p(\varphi * \rho_r)| = \sup_K |(D^p\varphi) * \rho_r| \leq \sup_K |D^p\varphi| \text{ при } \|p\| < m.$$

Следовательно,  $\|\varphi * \rho_r\|_m \leq \|\varphi\|_m$ .

*Продолжение T.* Пусть  $K^*$  — такое компактное множество, что  $K_0 \subset K^*$  и  $K^*$  содержится во внутренности множества  $K$ . Определим функционал  $T$  для функций  $\varphi \in (\mathcal{D}_{K^*}^m)$  с помощью соотношения

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \langle T, \varphi * \rho_r \rangle.$$

Так как  $\varphi * \rho_r$  сходится вплоть до порядка  $m$ , то предел существует (следствие). Очевидно, этот функционал линеен. Надо показать, что  $\langle T, \varphi \rangle$  непрерывно на  $(\mathcal{D}_{K^*}^m)$ . Пусть  $\{\varphi_v\}$  — последовательность функций из  $(\mathcal{D}_{K^*}^m)$ , сходящаяся к нулю в смысле  $(\mathcal{D}_{K^*}^m)$ . Тогда  $\|\varphi_v\|_m \rightarrow 0$ . Но  $\|\varphi_v * \rho_r\|_m \leq \|\varphi_v\|_m$ . По лемме 1 существует константа  $C$ , такая, что  $|\langle T, \varphi_v * \rho_r \rangle| \leq C \|\varphi_v * \rho_r\|_m \leq C \|\varphi_v\|_m$ . Следовательно,

$$|\lim_{r \rightarrow 0} \langle T, \varphi_v * \rho_r \rangle| \leq C \|\varphi_v\|_m.$$

Значит,  $\langle T, \varphi_v \rangle \rightarrow 0$  при  $\|\varphi_v\|_m \rightarrow 0$ , так что функционал  $T$  непрерывен, а потому принадлежит  $(\mathcal{D}_{K^*}^{m'})$ . Чтобы продолжить  $T$  на  $(\mathcal{D}^m)$ , умножим  $T$  на функцию  $a(t)$  класса  $(C^\infty)$ , такую, что  $a(t) \equiv 1$  в окрестности  $K_0$  и  $a(t) \equiv 0$  вне  $K^*$ .

Положим по определению

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle \text{ для } \varphi \in (\mathcal{D}^m).$$

Если  $\varphi \in (\mathcal{D}^m)$ , то  $a\varphi \in (\mathcal{D}_{K^*}^m)$ . Поэтому выражение  $\langle T, \varphi \rangle$  определено на пространстве  $(\mathcal{D}^m)$ . Значит, оно определяет линейный функционал  $T$ . Если  $\varphi_v$  сходится к нулю в смысле  $(\mathcal{D}^m)$ , то  $\|a\varphi_v\|_m \rightarrow 0$ . Следовательно, функционал  $T$  непрерывен на  $(\mathcal{D}^m)$ , а, значит,  $T$  есть распределение из  $(\mathcal{D}^{m'})$ . Заметим, что продолжение из  $(\mathcal{D})$  на  $(\mathcal{D}^m)$  единственно, если только оно возможно (задача 1). Теорема доказана.

*Замечание.* Можно ввести пространства  $(\mathcal{E}^m)$  и  $(\mathcal{E}'^m)$  по аналогии с  $(\mathcal{D}^m)$  и  $(\mathcal{D}'^m)$ . Рассмотренное только что продолжение из  $(\mathcal{D}_K^m)$  на  $(\mathcal{D}^m)$  аналогичным образом работает и для пространства  $(\mathcal{E}^m)$ .

#### 4.5. Обращение в нуль распределений конечного порядка

*Замечание.* Следующая теорема представляет теоретический интерес с точки зрения материала, излагаемого в §§ 4.6 и 7.17, но не важна для приложений.

*Теорема.* Пусть  $T$  – распределение порядка  $\leq m$  с компактным носителем  $K_0$ , а функция  $\varphi \in (\mathcal{E})$  такова, что  $\varphi$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно обращается в нуль на множестве  $K_0$ . Тогда  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

Ценность этой теоремы состоит в том, что она требует обращения в нуль функции  $\varphi$  и ее производных лишь на самом носителе  $K_0$ , а не в некоторой его окрестности.

*Доказательство.* Обозначим через  $K_d$  множество

$$K_d = \{t: \|t - t'\| < d, t' \in K_0\}.$$

Иными словами,  $K_d$  состоит из  $K_0$  плюс все точки, расстояние которых от  $K_0$  меньше чем  $d$ . Пусть

$$\varepsilon(d) = \sup_{\substack{t \in K_d \\ \|p\| \leq m}} |D^p \varphi(t)|.$$

Заметим, что  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $d \rightarrow 0$ . Пусть  $\chi(t)$  – характеристическая функция  $K_{d/2}$ , т. е.

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in K_{d/2}, \\ 0 & \text{при } t \notin K_{d/2}. \end{cases}$$

Сгладим  $\chi(t)$ , образуя свертку с  $\rho_r(t)$ ,  $r = d/2$ , где  $\rho_r(t)$  – функция, определенная в § 2.3. Пусть  $a_d = \chi * \rho_r$ .

$r = d/2$ . Тогда

$$a_d = \begin{cases} 1 & \text{в } K_0, \\ 0 & \text{при } t \notin K_d. \end{cases}$$

Будем писать  $\rho_r^{(p)}$  вместо  $D^p \rho_r$ . Имеем

$$|D^p a_d(t)| \leq \left| \int_{E^n} \chi(x) \rho_r^{(p)}(t-x) dx \right| \leq \int_{E^n} |\rho_r^{(p)}(t-x)| dx.$$

Замена переменных в последнем интеграле дает

$$|D^p a_d(t)| \leq \int_{E^n} |\rho_r^{(p)}(-x)| dx.$$

Напомним (см. § 2.3), что

$$\rho_r(x) = \frac{1}{r^n} \rho_1\left(\frac{x}{r}\right);$$

следовательно,

$$\rho_r^{(p)}(x) = \frac{1}{r^{n+\|p\|}} \rho_1^{(p)}\left(\frac{x}{r}\right).$$

Отсюда

$$|D^p a_d(t)| \leq r^{-n-\|p\|} \int_{E^n} \left| \rho_1^{(p)}\left(-\frac{x}{r}\right) \right| dx.$$

Замена переменных  $y = -x/r$  дает множитель  $r^n$ ; таким образом,

$$|D^p a_d(t)| \leq r^{-\|p\|} \int_{E^n} |\rho_1^{(p)}(y)| dy.$$

Пусть

$$C_p = 2^{\|p\|} \int_{E^n} |\rho_1^{(p)}(y)| dy$$

— константа, не зависящая от  $r$ . Вспомним, что  $r = d/2$ . Таким образом,  $|D^p a_d(t)| \leq d^{-\|p\|} C_p$  при всех  $t \in E^n$ . Пусть  $C_m$  — наибольшая из констант  $C_p$  при  $\|p\| \leq m$ . Тогда

$$|D^p a_d(t)| \leq d^{-\|p\|} C_m$$

при всех таких  $p$ , что  $\|p\| \leq m$ , и при всех  $t \in E^n$ .

Для вычисления производных от произведения воспользуемся формулой Лейбница

$$D^p(a_d\varphi) = \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} (D^{p-q}a_d) D^q\varphi,$$

где

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \frac{p_1! \dots p_n!}{q_1! \dots q_n!(p_1-q_1)! \dots (p_n-q_n)!}$$

и запись  $q \leq p$  означает  $q_1 \leq p_1, \dots, q_n \leq p_n$ .

Теперь надо получить оценку для  $|D^q\varphi|$ . Напомним, что  $D^p\varphi = 0$  в  $K_0$  при  $\|q\| \leq m$ . Мы можем записать  $D^q\varphi(t_1^{(0)}, \dots, t_n^{(0)})$  в виде интеграла

$$D^q\varphi(t^0) = \int_{t_1^{(1)}}^{t_1^{(0)}} D^{q_1+1, q_2, \dots, q_n}\varphi(t_1, t_2^{(0)}, \dots, t_n^{(0)}) dt_1,$$

где  $t_1^{(1)}$  — точка на поверхности  $K_0$  при условии, что

$$\|(q_1+1, q_2, \dots, q_n)\| \leq m.$$

Но

$$|D^{(q_1+1, q_2, \dots, q_n)}\varphi| \leq \varepsilon$$

в  $K_d$  при  $\|(q_1+1, q_2, \dots, q_n)\| \leq m$ . Длина пути интегрирования равна самое большое  $d$ . Поэтому

$$|D^q\varphi| \leq d\varepsilon.$$

Ту же оценку получаем, интегрируя по  $t_j$ , если только

$$\|(q_1, \dots, q_j+1, \dots, q_n)\| \leq m.$$

Повторяя процесс, в результате  $m - \|q\|$  интеграций получаем оценку  $|D^q\varphi| \leq ed^{m-\|q\|}$  в  $K_d$ . Комбинируя этот результат с оценкой для  $|D^q a|$  и пользуясь формулой Лейбница, получаем оценку

$$|D^p(\varphi a_d)| \leq \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} d^{-\|p-q\|} C_m \varepsilon d^{m-\|q\|}.$$

Но  $d^{-\|p-q\|+m-\|q\|} = d^{m-\|p\|}$ , так что

$$|D^p(\varphi a_d)| \leq d^{m-\|p\|} \varepsilon C_m \sum_{q \leq p} \binom{p}{q}, \quad \|p\| \leq m.$$

Обозначим через  $C$  наибольшую из констант

$$C_m \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} \quad \text{при } \|p\| \leq m.$$

Тогда

$$|D^p(\varphi a_d)| \leq \varepsilon C d^{m-\|p\|} \quad \text{при } \|p\| \leq m.$$

Заметим, что  $C$  не зависит от  $\varepsilon$  и  $d$ .

Вспомним теперь, что  $\varepsilon$  стремится к нулю, когда  $d$  стремится к нулю. Отсюда  $\{\varphi a_d\}$  есть последовательность функций класса  $(C^\infty)$ , сходящаяся к нулю равномерно вплоть до порядка  $m$  в пространстве  $E^n$ . Так как распределение  $T$  имеет порядок  $m$ , то по непрерывности имеем

$$\lim_{d \rightarrow 0} \langle T, a_d \varphi \rangle = 0.$$

Поскольку  $a_d \equiv 1$  в окрестности носителя  $T$  и  $a_d$  есть функция класса  $(C^\infty)$ , то по лемме 3.11 имеем

$$\langle T, a_d \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \text{при всех } d > 0.$$

Значит,  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ . Теорема доказана.

#### 4.6. Распределение с точечным носителем

*Теорема. Распределение с точечным носителем есть конечная линейная комбинация  $\delta$ -функции Дирака и ее производных.*

Выражение „точечный носитель“ означает, что носитель состоит из одной изолированной точки.

*Доказательство.* Пусть носитель распределения  $T$  есть точка  $t_0$ . В силу компактности носителя,  $T$  имеет конечный порядок  $m$ , согласно теореме 4.4. Любая функция  $\varphi$  класса  $(C^\infty)$  может быть разложена по формуле Тэйлора с остаточным членом:

$$\varphi(t) = \sum_{\|p\| \leq m} \frac{D^p \varphi(t_0)}{p!} (t - t_0)^p + R_m(t).$$

Остаточный член  $R_m(t)$  и все его производные до порядка  $m$  включительно обращаются в нуль в точке  $t_0$ .

Следовательно, по теореме 4.5

$$\langle T, R_m \rangle = 0.$$

Отсюда

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{\|\rho\| \leq m} \frac{D^\rho \varphi(t_0)}{\rho!} \langle T, (t - t_0)^\rho \rangle.$$

Если обозначить

$$\frac{\langle T, (t - t_0)^\rho \rangle}{\rho!}$$

через  $(-1)^\rho a_\rho$ , то можно написать

$$T = \sum_{\|\rho\| \leq m} a_\rho \delta^{(\rho)}(t - t_0).$$

Теорема доказана.

#### 4.7. Первообразные распределений конечного порядка

**Лемма.** Пусть  $n = 1$ . Если  $T \in (\mathcal{D}'^m)$  и  $S$  — первообразная от  $T$  первого порядка, то  $S \in (\mathcal{D}'^{m-1})$ . (См. задачу 2.)

Применяя лемму повторно, получаем такое утверждение: если  $T \in (\mathcal{D}'^m)$  и  $S$  — первообразная  $m$ -го порядка от  $T$ , то  $S \in (\mathcal{D}'^0)$ .

Значит,  $T$  есть  $m$ -я производная от непрерывного линейного функционала  $S$  на пространстве непрерывных функций с компактным носителем. Последовательность  $\{\varphi_v\}$  функций  $\varphi_v \in (\mathcal{D}^0)$  сходится в смысле  $(\mathcal{D}^0)$ , если она равномерно сходится на  $E^n$  и все  $\varphi_v$  имеют носитель в некотором фиксированном множестве.

Теорема Ф. Рисса (см. Ройден [1]) утверждает, что  $\langle S, \varphi \rangle = \int_{E^n} \varphi d\mu$ , где  $\mu$  — мера, определяемая едини-

ственным образом. Из этого факта следует, что  $S = f'$ , где обобщенная функция  $f$  порождается непрерывной функцией. Так как распределение с компактным носителем имеет конечный порядок, то мы получаем такое утверждение: пусть  $n = 1$  и  $T \in (\mathcal{E}')$ ; тогда  $T$  есть

производная конечного порядка от непрерывной функции. Тот же результат получается и при  $n > 1$ .

Теорема Рисса — это теорема функционального анализа. До сих пор мы проводили доказательства, не пользуясь мощной техникой функционального анализа; не понадобится она нам и в дальнейшем. Мы сможем доказать эту теорему с помощью техники преобразований Фурье, не прибегая к теореме Рисса (добавление А.3.11).

### ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если распределение  $T \in (\mathcal{D}')$  можно продолжить из  $(\mathcal{D})$  до  $(\mathcal{D}^m)$ , то это продолжение единственno.
2. Пусть  $T \in (\mathcal{D}'^m(E^!))$  и  $S$  — первообразная первого порядка от  $T$ . Докажите, что  $S \in (\mathcal{D}'^{m-1})$ .
3. Докажите полноту пространства  $(\mathcal{D}')$ , т. е. следующее: если  $\{f_v\}$  — последовательность распределений, таких, что  $\langle f_v, \Phi \rangle$  есть последовательность Коши для любой функции  $\Phi \in (\mathcal{D})$ , то существует распределение  $f \in (\mathcal{D}')$ , такое, что  $\lim_{v \rightarrow \infty} f_v = f$  (в смысле § 2.12). (Решение этой задачи весьма громоздко, если не пользоваться методами функционального анализа, нигде, впрочем, не используемыми в этой книге. См. Гельфанд — Шилов [1], выпуск 2.)<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Довольно простое доказательство этой теоремы содержится в § 9 книги Г. Е. Шилова „Математический анализ“, второй специальный курс, изд-во „Наука“, 1965. — Прим. ред.

## Добавление 1

---

Желая ограничить число понятий, с которыми должен ознакомиться читатель, мы до сих пор избегали применения терминологии и техники теории топологических линейных (векторных) пространств. Не понадобится эта терминология и в дальнейших главах. Тем не менее в целях полноты изложения и для установления связи с важными разделами математики мы вводим в этом добавлении топологию в пространства ( $\mathcal{X}$ ) и ( $\mathcal{E}$ ). Читатель, интересующийся в основном приложениями, может перейти прямо к гл. 5.

### A.1.1. Топологические пространства, сходимость в топологии

Топология  $T$  пространства  $X$  есть такая система подмножеств  $X$ , что:

(1) пустое множество  $\emptyset$  и все пространство  $X$  принадлежат  $T$ ;

(2) объединение любого числа множеств из  $T$  принадлежит  $T$ ;

(3) пересечение любого конечного числа множеств из  $T$  принадлежит  $T$ .

Множества системы  $T$  называются *открытыми множествами*.

База топологии  $T$  — это такая система множеств из  $T$ , что любое множество, принадлежащее  $T$ , можно представить как объединение множеств этой системы.

Окрестностью точки  $x_0 \in X$  называется любое подмножество  $X$ , содержащее открытое множество, которому принадлежит  $x_0$ .

*Последовательность* элементов  $x_v \in X$  *сходится* к  $x_0$  в топологии  $T$ , если для любой окрестности  $A$  точки  $x_0$  существует такое целое число  $v_0$ , что для всех  $v > v_0$   $x_v \in A$ .

*Базой окрестностей* точки  $x$  называется такая совокупность  $\{W\}$  окрестностей этой точки, что любая окрестность  $x$  содержит множество, принадлежащее  $\{W\}$ .

Если для каждого  $x \in X$  задана совокупность открытых множеств, образующих базу окрестностей  $x$ , то объединение всех этих совокупностей составит базу топологии пространства  $X$ .

*Прямое произведение*  $X \times Y$  двух топологических пространств  $X$  и  $Y$  есть совокупность всех упорядоченных пар  $(x, y)$ , таких, что  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ; таким образом,  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  тогда и только тогда, когда  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ . *Топологией произведения*  $X \times Y$  называется топология, порожденная всеми объединениями множеств  $\{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ , где  $A$  — открытое множество пространства  $X$ , а  $B$  — открытое множество пространства  $Y^1$ .

*Хаусдорфово пространство* — это топологическое пространство, любые две различные точки которого имеют непересекающиеся окрестности.

*Непрерывное отображение* топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$  есть такое отображение, при котором прообразы открытых множеств открыты.

## A.1.2. Топологические линейные пространства

*Топологическим линейным пространством* называется линейное пространство  $X$  с такой топологией, что оно является хаусдорфовым пространством и операции сложения и умножения на числа (скаляры) непрерывны, т. е. отображения  $(x, y) \rightarrow x + y$  из  $X \times X$  в  $X$  и  $(x, c) \rightarrow cx$  из  $X \times \{\text{числа}\}$  в  $X$  непрерывны. Если  $X$  — топологическое линейное пространство и  $B$  — база окрестностей точки  $0$ , то для любого  $x \in X$  совокупность

<sup>1)</sup> Произведение двух топологических линейных пространств с такой топологией называется тихоновским. — Прим. перев.

*сдвигов окрестностей*  $\{y: y = x + v, v \in V\}$ ,  $V \in B$ , есть база окрестностей точки  $x$ . База открытых окрестностей  $B$  точки нуль вместе с ее сдвигами образует базу топологии в пространстве  $X$ . База открытых окрестностей  $B$  точки 0 удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) Если  $V_1, V_2 \in B$ , то существует  $V_3 \in B$ , такое, что  $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ .
- (2) Если  $x \neq 0$ , то существует окрестность  $V \in B$ , такая, что  $x \notin V$ .
- (3) Если  $V \in B$ , то существует  $W \in B$ , такое, что  $\{w: w = x \pm y, x \in W, y \in W\} \subset V$ .
- (4) Если  $x \in V, V \in B$ , то существует  $U \in B$ , такое, что  $\{w: w = x + y, y \in U\} \subset V$ .
- (5) Если  $V \in B, \lambda \neq 0$ , то существует  $U \in B$ , такое, что  $\lambda U \subset V$ .
- (6) Если  $V \in B$  и  $x \in X$ , то существует число  $\varepsilon > 0$ , такое, что  $\lambda x \in V$  при  $|\lambda| < \varepsilon$ .
- (7) Если  $V \in B$ , то существует число  $\varepsilon > 0$ , такое, что  $\lambda V \subset V$  при  $|\lambda| < \varepsilon$ .

Обратно, если совокупность множеств  $B$  удовлетворяет этим свойствам, то  $X$  можно превратить в топологическое линейное пространство, беря в качестве базы топологии (задача 1) систему  $B$  и ее сдвиги. По поводу дальнейших деталей см. Келли [1] и А. Фридман [1]<sup>1)</sup>.

### A.1.3. Топология в $(\mathcal{E})$

Определим базу открытых окрестностей точки нуль следующим образом: пусть  $m$  — целое число,  $\varepsilon$  — положительное число,  $K$  — компактное множество в  $E^n$ . В качестве множеств базы  $B$  возьмем множества

$$V(m, \varepsilon, K) = \{\varphi: \varphi \in (\mathcal{E}), \|\varphi\|_{m, K} < \varepsilon\}.$$

Представляем читателю убедиться в том, что система  $B$  удовлетворяет условиям (1)–(7) § A.1.2 и порождает, таким образом, топологию в  $(\mathcal{E})$  (задача 2).

<sup>1)</sup> См. также И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов [1], вып. 2.—  
Прим. перев.

**Лемма.** Последовательность  $\{\Phi_v\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{E})$  тогда и только тогда, когда она сходится в топологии  $(\mathcal{E})$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать лемму для последовательностей, сходящихся к нулю. Даны окрестности  $V(m, \varepsilon, K)$  базы  $B$ . Пусть  $\{\Phi_v\}$  сходится к нулю в смысле  $(\mathcal{E})$ ; тогда  $\|\Phi_v\|_{m, K} \rightarrow 0$  (§§ 2.2 и 2.6). Значит, существует  $v_0$ , такое, что при всех  $v > v_0$   $\Phi_v \in V(m, \varepsilon, K)$ . Поэтому  $\{\Phi_v\}$  сходится к нулю в топологии  $(\mathcal{E})$ . Обратно, пусть  $\{\Phi_v\}$  сходится к нулю в топологии  $(\mathcal{E})$ . Тогда для любого  $V(m, \varepsilon, K)$  существует  $v_0$ , такое, что  $\Phi_v \in V(m, \varepsilon, K)$  при  $v > v_0$ . Значит, для любых  $m, K, \varepsilon$  существует  $v_0$ , такое, что  $\|\Phi_v\|_{m, K} < \varepsilon$  при всех  $v > v_0$ . Отсюда  $\lim_{v \rightarrow \infty} \|\Phi_v\|_{m, K} = 0$  при любых  $m, K$ . Следовательно,  $\{\Phi_v\}$  сходится к нулю в смысле  $(\mathcal{E})$  (§§ 2.2 и 2.6).

#### A.1.4. Топология в $(\mathcal{D})$

Пусть  $\{\varepsilon_j\}$  — монотонная последовательность положительных чисел,  $\lim \varepsilon_j = 0$ , и пусть  $\{m_j\}$  — последовательность целых чисел, монотонно возрастающая до  $\infty$ . Пусть  $\Omega_j = \{t: \|t\| < j\}$ ,  $\Omega_0 = \emptyset$ . Определим базу открытых окрестностей  $B$  точки  $0$  следующим образом:  $B$  состоит из множеств

$$V(\{m_j\}, \{\varepsilon_j\}) = \{\Phi: \Phi \in (\mathcal{D}), |D^p \Phi(t)| < \varepsilon_j \text{ при всех } \|p\| \leq m_j, t \notin \Omega_j, j = 0, 1, \dots\}.$$

Представляем читателю показать, что система  $B$  удовлетворяет условиям (1)–(7) § A.1.2 и порождает, таким образом, топологию в  $(\mathcal{D})$  (задача 3).

**Лемма.** Последовательность  $\{\Phi_v\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{D})$  тогда и только тогда, когда она сходится в топологии  $(\mathcal{D})$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать лемму для последовательностей, сходящихся к нулю. Если  $\{\Phi_v\}$

сходится в смысле  $(\mathcal{D})$ , то носители всех  $\varphi_v$  лежат в некотором фиксированном компактном множестве  $K$ ; поэтому существует  $j_0$ , такое, что  $K \subset \Omega_{j_0}$ ; значит,  $|D^p \varphi_v(t)| = 0$  при всех  $\|t\| > j_0$  и при всех  $v$ . Но

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|\varphi_v\|_{m_{j_0} K} = 0$$

при любом  $m$  (см. §§ 2.2 и 2.4). Поэтому существует такое  $v_0$ , что для всех  $v > v_0$

$$\|\varphi_v\|_{m_{j_0} K} < \varepsilon_{j_0}.$$

Но  $\varphi_v$  обращается в нуль вне  $K$ ; поэтому при  $v > v_0$

$$|D^p \varphi_v(t)| < \varepsilon_{j_0} \text{ при всех } \|p\| \leq m_{j_0} \text{ и всех } t \in E^n.$$

Так как при  $j \leq j_0$  имеем  $\varepsilon_j \geq \varepsilon_{j_0}$  и  $m_j \leq m_{j_0}$ , то при  $v > v_0$  для всех  $0 \leq j \leq j_0$

$$|D^p \varphi(t)| < \varepsilon_j \text{ при } \|p\| \leq m_j \text{ и всех } t \in E^n.$$

То же верно, если ослабить утверждение „при всех  $t \in E^n$ “ до утверждения „при всех  $t \notin \Omega_j$ “. Отсюда  $\varphi_v \in V(\{m_j\}, \{\varepsilon_j\})$  при всех  $v > v_0$ . Следовательно,  $\{\varphi_v\}$  сходится в топологии  $(\mathcal{D})$ .

Обратно, пусть  $\{\varphi_v\}$  сходится в топологии  $(\mathcal{D})$ . Мы покажем, что носители всех  $\varphi_v$  должны лежать в некотором компактном множестве  $K$ . Предположим обратное. Тогда для любого  $j$  существовали бы точка  $t^{(j)}$  с  $\|t^{(j)}\| \geq j$  и функция  $\varphi_{v_j}$ , такие, что  $\varphi_{v_j}(t^{(j)}) \neq 0$ . Возьмем  $\varepsilon_j = \frac{1}{2} |\varphi_{v_j}(t^{(j)})|$ ; числа  $m$  выберем произвольно. Тогда при всех  $j$ ,  $\varphi_{v_j} \notin V(\{m_j\}, \{\varepsilon_j\})$ . Поэтому последовательность  $\{\varphi_v\}$  не сходилась бы к нулю в топологии  $(\mathcal{D})$ . Это — противоречие. Следовательно, все  $\varphi_v$  имеют носители в некотором компактном множестве  $K$ .

Но  $|D^p \varphi_v(t)| < \varepsilon_0$  при  $t \notin \Omega_0 = \emptyset$ , т. е. при всех  $t \in E^n$  и при  $\|p\| \leq m_0$ . Выбирая  $\varepsilon_0$  сколь угодно малым, находим, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|\varphi_v\|_{m_0} = 0.$$

Здесь число  $m_0$  совершенно произвольно. Поэтому в силу изложенного в § 2.5 последовательность  $\{\varphi_n\} \rightarrow 0$  в смысле  $(\mathcal{D})$ . Лемма доказана.

**Замечание.** Секвенциальная сходимость не определяет единственным образом эквивалентную топологию (см. Келли [1], стр. 76).

### ЗАДАЧИ

1. Пусть  $B$  — система множеств пространства  $X$ , удовлетворяющая условиям, перечисленным в § A.1.2. Определите базу открытых окрестностей с помощью системы  $B$  и сдвигов множеств, принадлежащих  $B$ . Докажите, что  $X$  есть топологическое линейное пространство

2. Пусть  $m$  — целое число,  $\varepsilon$  — положительное число,  $K$  — компактное множество в  $E^n$  и  $B$  — система всех множеств вида

$$V(m, \varepsilon, K) = \{\varphi : \varphi \in (\mathcal{E}), \|\varphi\|_{m, K} < \varepsilon\}.$$

Докажите, что  $B$  удовлетворяет условиям (1)–(7) из § A.1.2.

3. Пусть  $B$  — система подмножеств пространства  $(\mathcal{D})$ , определенная в § A.1.4. Докажите, что  $B$  удовлетворяет условиям (1)–(7) из § A.1.2.

## II. СВЯЗЬ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

### ГЛАВА 5

#### Представление распределений с помощью аналитических функций

---

Между представлением одномерных распределений с помощью аналитических функций одного переменного и представлением  $n$ -мерных распределений с помощью аналитических функций многих переменных имеется ряд различий. Поэтому мы будем рассматривать эти два случая раздельно. Настоящая глава и некоторые разделы последующих глав посвящаются исключительно случаю одного переменного.

##### 5.1. Представление Коши распределений из $(\mathcal{E}')$

Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Назовем выражение

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\langle T_t, \left( \frac{1}{t-z} \right) \right\rangle$$

аналитическим представлением распределения  $T$  с помощью ядра Коши, или, для краткости, представлением Коши.

Теорема 1.  $\hat{T}(z)$  есть аналитическая функция  $z$  в дополнении носителя  $T$  (дополнение берется относительно плоскости  $z$ ).

Доказательство.  $[2\pi i(t-z)]^{-1}$  принадлежит  $(\mathcal{E})$  при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . Поэтому  $\hat{T}(z)$  определено для всех  $z$  с  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . (Символ  $\operatorname{Im} z$  означает „мнимая часть  $z$ “.) Для производной имеем

$$\frac{d}{dz} \hat{T}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left\langle T_t, \frac{1}{h} \left( \frac{1}{t-z-h} - \frac{1}{t-z} \right) \right\rangle.$$

Но  $h^{-1} [(t-z-h)^{-1} - (t-z)^{-1}]$  сходится к  $(t-z)^{-2}$  равномерно в любом порядке на любом компактном под-

множестве вещественной оси (задача 4). Поэтому в силу непрерывности распределения  $T$  на  $(\mathcal{E}')$

$$\frac{d}{dz} \hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \langle T_t, (t-z)^{-2} \rangle.$$

Значит, комплексная производная  $\frac{d}{dz} \hat{T}(z)$  существует при всех  $z$  с  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . Отсюда  $\hat{T}'(z)$  — аналитическая функция при всех  $z$  с  $\operatorname{Im} z \neq 0$ .

Вместе с тем мы показали, что

$$\frac{d}{dz} \hat{T}(z) = \hat{T}'(z),$$

где  $T'$  — производная в смысле теории обобщенных функций от распределения  $T$  и  $\hat{T}'(z)$  — аналитическое представление  $T'$ . Действительно,

$$\hat{T}'(z) = \frac{-1}{2\pi i} \langle T_t, \frac{d}{dt} (t-z)^{-1} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \langle T_t, (t-z)^{-2} \rangle.$$

В силу тех же соображений

$$\frac{d^n}{dz^n} \hat{T}(z) = \hat{T}^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \langle T_t, (t-z)^{-n-1} \rangle.$$

Здесь  $\hat{T}^{(n)}(z)$  означает представление Коши  $n$ -й производной распределения  $T$ .

Для завершения доказательства теоремы надо показать, что  $\hat{T}(z)$  остается аналитической при приближении  $z$  к вещественной оси из дополнения носителя  $T$ . Пусть  $K$  — носитель  $T$  и  $CK$  обозначает дополнение  $K$  относительно вещественной оси. Пусть функция  $a(t) \in (\mathcal{D})$  имеет носитель  $K^*$ , причем  $a(t) = 1$  в окрестности  $K$ . Тогда в силу леммы 3.11

$$\langle T_t, (t-z)^{-1} \rangle = \langle T_t, a(t)(t-z)^{-1} \rangle.$$

Если  $z$  приближается к точке  $x_0 \in CK^*$ , то функция

$$a(t)(t-z)^{-1} \rightarrow a(t)(t-x_0)^{-1}$$

равномерно в любом порядке на всей вещественной оси (задача 4). Отсюда в силу непрерывности  $T$  на  $(\mathcal{E}')$

$$\lim_{z \rightarrow x_0} \hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \langle T_t, a(t)(t-x_0)^{-1} \rangle.$$

Следовательно,  $T(z)$  непрерывна при приближении  $z$  к  $x_0 \in CK^*$ . Отсюда  $T(z)$  — аналитическая функция на  $CK^*$  (задача 5). Но  $K^*$  можно выбрать сколь угодно близким к  $K$ . Поэтому функция  $\hat{T}(z)$  является аналитической в  $CK$ . Теорема доказана.

Одновременно получено доказательство аналогичного факта и для производных. Сформулируем его в виде отдельной теоремы:

**Теорема 2.** Пусть  $\hat{T} \in (\mathcal{E}')$ . Тогда

$$\frac{d^n}{dz^n} \hat{T}(z) = \hat{T}^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \langle T_t, (t-z)^{-n-1} \rangle,$$

где  $\hat{T}^{(n)}(z)$  означает представление Коши  $n$ -й производной распределения  $T$ . Таким образом,  $n$ -я производная представления Коши распределения  $T$  есть представление Коши  $n$ -й производной от  $T$ .

## 5.2. Обращение функции $\hat{T}(z)$ в нуль на бесконечности. Разложение Лорана для $\hat{T}(z)$

**Лемма.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда  $|\hat{T}(z)| = O(|z|^{-1})$ .

**Доказательство.** Покажем сначала, что  $\hat{T}(z)$  обращается в нуль при  $|z| \rightarrow \infty$ . Пусть  $a(t) \in (\mathcal{D})$ ,  $a(t) = 1$  в окрестности носителя  $T$ . Тогда  $a(t)/(t-z)$  и все ее производные сходятся равномерно к нулю на любом компактном подмножестве из  $E^1$  при  $|z| \rightarrow \infty$  (задача 4). Следовательно,  $\hat{T}(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ .

После этого заметим, что  $\hat{T}(z)$  имеет разложение Лорана на бесконечности. В силу того что функция  $\hat{T}(z)$  стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , каким бы способом  $z$  ни стремился к бесконечности, точка  $\infty$  есть устранимая особая точка нашей функции и разложение Лорана имеет вид

$$\hat{T}(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots .$$

Это разложение сходится вне наименьшего диска, содержащего носитель  $T$ . Так как  $\hat{T}(z)$  стремится к нулю

на бесконечности,  $a_0 = 0$ . Следовательно,  $|\hat{T}(z)| = O(|z|^{-1})$ .

*Замечание.* Оценка  $|\hat{T}(z)| = O(|z|^{-1})$  точная (наилучшая из возможных). Случай  $T = \delta$  дает пример:  $\delta(z) = -1/2\pi iz$ .

*Следствие.* Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда  $\hat{T}(x + ie) - \hat{T}(x - ie) = O(|x|^{-2})$ .

*Доказательство.*

$$\hat{T}(z) - \hat{T}(\bar{z}) = \frac{a_1(-2iy)}{|z|^2} + O(|z|^{-2}).$$

Отсюда

$$\hat{T}(x + ie) - \hat{T}(x - ie) = O(|x|^{-2}).$$

### 5.3. Границные значения гармонических функций

*Теорема.* Пусть  $f(t)$  — кусочно-непрерывная ограниченная функция, определенная на вещественной оси. Положим

$$f^*(z) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{|t - z|^2} dt.$$

Тогда  $f^*(z)$  — гармоническая функция при  $\operatorname{Im} z \neq 0$  и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^*(t + ie) = f(t) \quad \text{при всех } t \in E^1,$$

в которых  $f(t)$  непрерывна. Иными словами,  $f^*$  принимает граничные значения  $f(t)$ .

Напомним, что функция  $f^*$  называется гармонической, если она дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f^* = 0.$$

Заметим также, что в соответствии с этим определением гармоническая функция может быть комплексно-

значной. Комплекснозначная функция является гармонической, если ее вещественная и мнимая части суть гармонические функции.

Задача отыскания гармонической функции, принимающей заданные граничные значения, носит название задачи Дирихле. То, что приведенный выше интеграл решает задачу Дирихле для верхней (нижней) полуплоскости, представляет из себя классический результат. Простое доказательство этого факта приведено в добавлении 2.

#### 5.4. Гармоническое представление функций класса ( $C^m$ )

**Лемма.** Пусть  $f(t)$  — функция класса ( $C^m$ ), такая, что  $f(t)$  и ее производные до  $m$ -го порядка ограничены при всех  $t$ . Тогда  $f^*(x + i\delta)$  сходится к  $f(x)$  равномерно до порядка  $m$  (включительно) на любом компактном подмножестве  $E^1$ .

**Доказательство.** Пусть  $\delta > 0$  и

$$f^*(x + i\delta) = \frac{\delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t - x)^2 + \delta^2} dt.$$

Разобьем последний интеграл:

$$\int_{|t-x| \leq \Delta} + \int_{|t-x| > \Delta} .$$

Так как  $f(t)$  ограничена, то существует такое  $M$ , что  $|f(t)| < M$  при всех  $t$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\pi} \int_{|t-x| > \Delta} f(t) \frac{1}{(t - x)^2 + \delta^2} dt &\leq M \int_{|t-x| > \Delta} \frac{\delta}{\pi[(t - x)^2 + \delta^2]} dt = \\ &= \frac{M}{\pi} \left( \operatorname{arctg} t' \Big|_{-\infty}^{-\Delta/\delta} + \operatorname{arctg} t' \Big|_{\Delta/\delta}^{\infty} \right). \end{aligned}$$

Если  $\Delta$  фиксировано и  $\delta \rightarrow 0$ , то это выражение стремится к нулю (см. добавление А.2.2). На любом компактном подмножестве  $K$  оси  $E^1$  функция  $f$  равномерно непрерывна: для заданного  $\epsilon > 0$  найдется такое  $\Delta$ , что

$|f(t) - f(x)| < \varepsilon/3$  при  $|t - x| < \Delta$ ,  $x \in K$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{\delta}{\pi} \int_{|t-x| \leq \Delta} \frac{1}{(t-x)^2 + \delta^2} dt \right| &< \\ &< \frac{\delta}{\pi} \int_{|t-x| \leq \Delta} |f(t)| \frac{1}{(t-x)^2 + \delta^2} dt < \\ &< \left[ f(x) + \frac{\varepsilon}{3} \right] \frac{\delta}{\pi} \int_{|t-x| \leq \Delta} \frac{1}{(t-x)^2 + \delta^2} dt. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\delta}{\pi} \int_{|t-x| \leq \Delta} \frac{1}{(t-x)^2 + \delta^2} dt = 1,$$

то при достаточно малых  $\delta$  (добавления А.2.1 и А.2.2)

$$\left| f(x) - \frac{\delta}{\pi} \int_{|t-x| \leq \Delta} f(t) \frac{1}{(t-x)^2 + \delta^2} dt \right| < \frac{2\varepsilon}{3} \text{ при всех } x \in K.$$

При достаточно малых  $\delta$  остаток интеграла может быть сделан меньше чем  $\varepsilon/3$ . Отсюда  $|f(x) - f^*(x + i\delta)| < \varepsilon$  при всех  $x \in K$  и  $0 < \delta \leq \delta^0$ . Следовательно,  $f^*(x + i\delta)$  сходится равномерно к  $f(x)$  на любом компактном подмножестве  $K$  оси  $E^1$ . Заметим, что

$$\frac{d}{dx} f^*(x + i\delta) = \frac{\delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \frac{1}{(t-x)^2 + \delta^2} dt.$$

Значит, эти же соображения применимы к  $f'$  и т. д. до  $m$ -й производной. Лемма доказана.

## 5.5. Теорема о представлении функций

**Теорема.** Пусть  $f(t)$  — функция класса  $(C^m)$ , и пусть, при  $0 \leq k \leq m$ ,  $f^{(k)}(t) = O(|t|^a)$ , где  $a$  — какое-то число, меньшее нуля. Определим функцию  $\hat{f}$  так:

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\hat{f}(x + ie) - \hat{f}(x - ie)] = f(x) \text{ при всех } x.$$

Аналогичные равенства имеют место для всех производных порядка  $k \leq m$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [D_c^k \hat{f}(x + i\varepsilon) - D_c^k \hat{f}(x - i\varepsilon)] = D^k f(x) \quad \text{при всех } x,$$

где  $D_c^k$  обозначает  $k$ -ю производную по комплексному переменному  $d^k/dz^k$  от  $\hat{f}(z)$ .

(Аналогичный результат впервые был получен Карлеманом [1], стр. 42 и далее.)

**Доказательство.** Интеграл, определяющий  $\hat{f}(z)$ , существует в силу того, что  $f = O(|t|^\alpha)$  при каком-то  $\alpha < 0$ . Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right) = \frac{y}{\pi} \frac{1}{|t-z|^2}.$$

Отсюда

$$\hat{f}(x + i\varepsilon) - \hat{f}(x - i\varepsilon) = f^*(x + i\varepsilon).$$

В силу леммы 5.4 предел этого выражения есть  $f(x)$ . Этим доказана первая часть нашей теоремы.

Пусть  $g(x) = f^{(k)}(x)$ ,  $k \leq m$ . Так как  $f^{(k)}(x)$  непрерывна, то в силу первой части нашей теоремы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\hat{g}(x + i\varepsilon) - \hat{g}(x - i\varepsilon)] = g(x),$$

где

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(t)}{t-z} dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f^{(k-1)}(t)}{t-z} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{(k-1)}(t)}{(t-z)^2} dt.$$

Мы предположили, что  $f^{(k-1)} = O(|t|^\alpha)$ ,  $\alpha < 0$ ; следовательно, первый член обращается в нуль. Интегрируя по частям  $k$  раз, находим:

$$\hat{g}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-z)^{k+1}} dt = \frac{d^k}{dz^k} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt \right].$$

Поэтому

$$\hat{g}(z) = D_c^k \hat{f}(z).$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [D_c^k \hat{f}(x + i\varepsilon) - D_c^k \hat{f}(x - i\varepsilon)] = f^{(k)}(x) \quad \text{при всех } x.$$

Теорема доказана.

### 5.6. Теорема о представлении распределений из $(\mathcal{E}')$

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$  и функция  $\Phi \in (\mathcal{S})$  ограничена вместе со всеми своими производными. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}(x + i\varepsilon) - \hat{T}(x - i\varepsilon)] \Phi(x) dx = \langle T, \Phi \rangle.$$

**Замечание.** Для любой функции  $\Phi \in (\mathcal{S})$  теорема, вообще говоря, не верна, а из того, что  $T \in (\mathcal{E}')$ , также еще не следует, что распределение, порождаемое функцией  $\hat{T}(x + i\varepsilon) - \hat{T}(x - i\varepsilon)$ , принадлежит  $(\mathcal{E}')$ . Например, мы знаем, что

$$\delta(z) = -\frac{1}{2\pi iz},$$

откуда

$$\delta(x + i\varepsilon) - \delta(x - i\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}.$$

**Доказательство.** Согласно лемме 5.2,  $\hat{T}(x + i\varepsilon) - \hat{T}(x - i\varepsilon) = O(|x|^{-2})$ . Значит, интеграл существует. Доказательство теоремы основано на следующей лемме:

**Лемма.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$  и функция  $\Phi$  удовлетворяет условиям теоремы. Положим

$$T^*(z) = \operatorname{sign} y(\hat{T}(z) - \hat{T}(\bar{z})) = \frac{|y|}{\pi} \left\langle T_t, \frac{1}{|t - z|^2} \right\rangle.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^*(x + i\varepsilon) \Phi(x) dx = \langle T_t, \Phi^*(t + i\varepsilon) \rangle.$$

**Доказательство.** Слева стоит интеграл Римана. Его можно приблизить суммами Римана

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^*(x + i\varepsilon) \varphi(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^N T^*(x_v + i\varepsilon) \varphi(x_v) \Delta x_v = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle T_t, \frac{e}{\pi} \sum_{v=0}^N \frac{\varphi(x_v) \Delta x_v}{|t - x_v - i\varepsilon|^2} \right\rangle.$$

Но

$$\frac{e}{\pi} \sum_{v=0}^N \frac{\varphi(x_v) \Delta x_v}{|t - x_v - i\varepsilon|^2}$$

сходится к

$$\frac{e}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{|x - t - i\varepsilon|^2} dx = \varphi^*(t + i\varepsilon)$$

в смысле  $(\mathcal{E})$  (задача 6). Отсюда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle T_t, \frac{e}{\pi} \sum_{v=0}^N \frac{\varphi(x_v) \Delta x_v}{|t - x_v - i\varepsilon|^2} \right\rangle = \langle T_t, \varphi^*(t + i\varepsilon) \rangle.$$

**Доказательство теоремы.** В силу только что доказанной леммы имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} T^*(x + i\varepsilon) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle T_t, \varphi^*(t + i\varepsilon) \rangle.$$

Согласно лемме 5.4,  $\varphi^*(t + i\varepsilon)$  сходится к  $\varphi(t)$  в смысле  $(\mathcal{E})$ . Отсюда  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle T_t, \varphi^*(t + i\varepsilon) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ . Теорема доказана.

## 5.7. Распределения как граничные значения гармонических функций

**Следствие.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} T^*(x + i\varepsilon) \varphi(x) dx = \langle T, \varphi \rangle$$

для любой  $\Phi \in (\mathcal{E})$ , такой, что  $\Phi$  ограничена вместе со всеми своими производными.  $T^*(z)$  есть гармоническая функция при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ .

Иными словами, любое распределение  $T \in (\mathcal{E}')$  есть граничное значение в смысле теории обобщенных функций некоторой гармонической функции. Это следствие вытекает из леммы 5.6; надо лишь доказать, что функция  $T^*(z)$  гармоническая.

Пусть  $f(z)$  — аналитическая функция, определенная при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . Тогда функция  $g(z) = f(z) - \bar{f}(\bar{z})$  определена при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ , непрерывна и удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно, функция  $g(z)$  гармоническая при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . Отсюда в силу того, что  $T^*(z) = -\operatorname{sign} y (\hat{T}(z) - \hat{T}(\bar{z}))$ , функция  $T^*(z)$  гармоническая при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ .

## 5.8. Неединственность аналитического представления

Теорема представления (теорема 5.6) справедлива для  $T \in (\mathcal{E}')$ . Так как  $(t-z)^{-1} \notin (\mathcal{D})$ , то в том виде, в каком эта теорема сформулирована, ее нельзя распространить на  $(\mathcal{D}')$ . Мы дадим сейчас более слабую теорему, которая является непосредственным следствием теоремы 5.6 и которую в дальнейшем мы обобщим.

Для каждого распределения  $T \in (\mathcal{E}')$  с носителем  $K$  найдется функция  $f(z)$ , аналитическая в комплексной плоскости  $z$ , за исключением  $K$ , такая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+ie) - f(x-ie)] \varphi(x) dx = \langle T, \varphi \rangle$$

для всех  $\varphi$  из  $(\mathcal{D})$ .

Действительно,  $\hat{T}(z)$  — пример такой функции  $f(z)$ . Если  $g(z)$  — целая функция (т. е. функция, аналитическая во всей плоскости  $z$ ), то тогда и  $f(z) = \hat{T}(z) + g(z)$  является функцией с требуемыми свойствами. (Заметим, что надо брать  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , чтобы гарантировать существование интеграла.)

Таким образом, представление распределений с помощью аналитических функций не единственно. К любой

функции, дающей представление распределения  $T$  в указанном смысле, можно прибавить произвольную целую функцию, и в результате получается функция, дающая другое представление того же распределения  $T$ .

### 5.9. Аналитическое представление распределений из $(\mathcal{D}')$

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ . Тогда существует функция  $f(z)$ , аналитическая в плоскости  $z$ , за исключением  $K$ , где  $K$  — носитель  $T$ , такая, что

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x + i\epsilon) - f(x - i\epsilon)] \varphi(x) dx = \langle T, \varphi \rangle$$

для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ .

Аналогичная теорема впервые была доказана Тильманом [2].

**Определение.** Любая функция, обладающая свойствами  $f$ , называется *аналитическим представлением*  $T$ .

**Доказательство теоремы.** Пусть  $\{a_v(t)\}$  — разложение единицы, соответствующее покрытию  $\{\Omega_v\}$  вещественной прямой, где  $\Omega_v = \{t: |t - v| < 1\}$ ,  $v = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$ . Напомним, что такое разложение единицы было построено в § 3.5. Функции  $a_v$  являются мультипликаторами для  $T$ . Пусть  $T_v = a_v T$ . Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{v=-N}^N \langle T_v, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \text{для всех } \varphi \in (\mathcal{D}).$$

Каждое распределение  $T_v$  имеет компактный носитель; следовательно,  $T_v$  имеет представление Коши  $\hat{T}_v(z)$ .

Но сумма  $\sum_{v=-N}^N \hat{T}_v(z)$  не обязана сходиться при  $N \rightarrow \infty$ .

Мы видоизменим эту сумму так, чтобы она сходилась.

При  $|v| \geq 2$  носитель  $T_v$  не пересекается с диском  $|z| \leq |v| - 1$ ; отсюда  $\hat{T}_v(z)$  — аналитическая функция

при  $|z| \leq |v| - 1$ . Разложим  $\hat{T}_v(z)$  в степенной ряд с центром в начале:

$$\hat{T}_v(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(v)} z^\mu.$$

Выберем число  $n_v$ , такое, что

$$\left| \hat{T}_v(z) - \sum_{\mu=0}^{n_v} a_\mu^{(v)} z^\mu \right| < 2^{-|v|} \quad \text{при } |z| \leq |v| - 1.$$

Это возможно, так как степенной ряд сходится равномерно при  $|z| \leq |v| - 1$ . Пусть

$$h_v(z) = \sum_{\mu=0}^{n_v} a_\mu^{(v)} z^\mu.$$

Тогда

$$f(z) = \hat{T}_0(z) + \sum_{v \neq 0} [\hat{T}_v(z) - h_v(z)]$$

сходится равномерно в любом компактном подмножестве плоскости  $z$ , если отбросить конечное число членов. Это означает следующее: дано компактное множество  $S$ , возьмем  $v_0$  достаточно большим, чтобы  $|z| \leq |v_0| - 1$  содержало  $S$ . Отбросим все члены до  $\hat{T}_{v_0-1}(z) - h_{v_0-1}(z)$  включительно, тогда остаток суммы, т. е.

$$\sum_{|v| \geq |v_0|} [T_v(z) - h_v(z)]$$

сходится равномерно на  $S$ .

Следовательно,  $f(z)$  — аналитическая функция во всей плоскости  $z$ , за исключением  $K$ .

Пусть  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Пусть  $N$  такое, что носитель  $\varphi$  содержится в  $|z| \leq N - 1$ . Тогда имеем

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|v| \leq N} \langle T_v, \varphi \rangle,$$

так как  $\sum_{|\nu| \leq N} a_\nu(t) = 1$  на носителе  $\varphi$ ; отсюда

$$\varphi(t) = \sum_{|\nu| \leq N} a_\nu(t) \varphi(t)$$

и

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\nu| \leq N} \langle T, a_\nu \varphi \rangle = \sum_{|\nu| \leq N} \langle T_\nu, \varphi \rangle.$$

Но  $T_\nu$  имеет компактный носитель, так что

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}_\nu(x + i\varepsilon) - \hat{T}_\nu(x - i\varepsilon)] \varphi(x) dx.$$

С другой стороны,

$$\sum_{|\nu| > N} [\hat{T}_\nu(z) - h_\nu(z)] + \sum_{0 < |\nu| \leq N} h_\nu(z)$$

есть аналитическая функция на носителе  $\varphi$ ; следовательно, ее „скакок“ есть нуль. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] \varphi(x) dx = \langle T, \varphi \rangle.$$

Теорема доказана.

Техника построения сходящихся рядов с помощью вычитания некоторых функций  $h_\nu(z)$  аналогична методу, развитому Миттаг-Леффлером. (Ср. с теоремой Миттаг-Леффлера, например, в книге Альфорса [1].)<sup>1)</sup>

### ЗАДАЧИ

- Пусть  $f$  принадлежит  $L_1$  или  $f$  — локально интегрируемая ограниченная функция. Пусть  $\tilde{f}(x) = f^*(x + ie)$ . Докажите, что  $\tilde{f}^*(x + i\delta) = f^*(x + i(e + \delta))$ . (По поводу определения  $L_1$ ,  $L_2$  см. § 8.1.)
- Пусть  $f \in L_2$  и  $f$  — граничное значение функции, аналитической в верхней полуплоскости. Докажите, что  $\tilde{f}(z) = 0$  при  $y < 0$ .
- Пусть  $f$  ограничена на  $E^1$ . Докажите, что если

$$\sup_{t \in E^1} |f(t + \Delta t) - f(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0,$$

<sup>1)</sup> См. также М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат „Методы теории функций комплексного переменного“, Физматгиз, 1958, § 71. — Прим. перев.

то

$$\sup_{t \in E^1} |f^*(t + i\Delta y) - f(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \Delta y \rightarrow 0.$$

4. (a) Покажите, что  $h^{-1}[(t - z - h)^{-1} - (t - z)^{-1}]$  сходится при  $h \rightarrow 0$  к  $(t - z)^{-2}$  в смысле (§), если  $\operatorname{Im} z \neq 0$ ,  $z$  фиксировано.

(b) Пусть  $a(t)$  — функция класса  $(C^\infty)$ ,  $x_0$  — вещественно и принадлежит дополнению носителя  $a(t)$  и  $z$  стремится к  $x_0$ . Покажите, что  $a(t)(t - z)^{-1}$  сходится к  $a(t)(t - x_0)^{-1}$  в смысле (§).

(c) Пусть  $a(t) \in (\mathcal{D})$ . Покажите, что при  $z \rightarrow \infty$  функция  $a(t)(t - z)^{-1}$  сходится к нулю в смысле (§).

5. Пусть  $f(z)$  — аналитическая функция при  $\operatorname{Im} z \neq 0$  и  $f(z)$  непрерывна в области  $D = \{z: \operatorname{Im} z \neq 0\} \cup \{x: a < x < b\}$ , где  $a < b$ . Покажите, что  $f(z)$  аналитическая в  $D$  (см. § 1.8).

6. Пусть  $\Phi \in (\mathcal{D})$ , и пусть  $D^p \Phi$  ограничены на  $E^1$  при любом  $p$ ,  $0 \leq p$ . Аппроксимируйте  $\Phi^*(t + ie)$  с помощью сумм Римана, как в § 5.6. Покажите, что суммы Римана сходятся к  $\Phi^*(t + ie)$  в смысле (§).

## ГЛАВА 6

### Промежуточные пространства $(\mathcal{G}_a)$ и $(\mathcal{G}'_a)$

---

Представление Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \left\langle T, \frac{1}{t-z} \right\rangle$$

существует не для всех  $T \in (\mathcal{D}')$ . Тем не менее, как показано в § 5.9, аналитическое представление распределения  $T$  можно построить. Его вычисление с помощью метода Миттаг-Леффлера (§ 5.9), вообще говоря, затруднительно. Прямое представление Коши намного удобнее. Достаточное, но не необходимое условие существования представления Коши состоит в том, что  $T \in (\mathcal{E}')$ .

Чтобы по возможности расширить круг распределений, допускающих представление через ядро Коши, мы вводим пространства распределений  $(\mathcal{G}'_a)$ , промежуточные между  $(\mathcal{D}')$  и  $(\mathcal{E}')$  и специально приспособленные для представлений Коши.

#### 6.1. Асимптотические грани

Заметим, что получаемые ниже результаты и некоторые последующие определения имеют место при произвольном  $n$ .

Пусть  $a(t)$  — неотрицательная функция, определенная на  $E^n$ . Говорят, что функция  $f(t)$ , определенная на  $E^n$ , имеет *асимптотическую грань*  $a(t)$ , если существуют константы  $R > 0$  и  $C > 0$ , такие, что при всех  $\|t\| > R$  справедливо неравенство  $|f(t)| \leq C a(t)$ . Мы пишем

$$f(t) = O(a(t)).$$

Аналогично говорят, что *распределение*  $T$  имеет *асимптотическую грань*  $a(t) \geq 0$ , если существуют кон-

станты  $R$  и  $C$ , такие, что для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$  с носителем в  $\{t: \|t\| > R\}$

$$\langle T, \varphi \rangle \leq C \int_{E^n} a(t) |\varphi(t)| dt.$$

Мы пишем  $T = O(a(t))$ . Если  $T$  порождается функцией  $T(t)$ , то  $T(t) = O(a(t))$  тогда и только тогда, когда  $T = O(a(t))$  (в смысле теории обобщенных функций) (задача 1).

## 6.2. Пространства $(\mathcal{O}_a)$ и $(\mathcal{O}'_a)$

Пусть  $(\mathcal{O}_a)$  — пространство всех функций  $\varphi(t)$  класса  $(C^\infty)$ , определенных на  $E^n$ , таких, что  $\varphi(t) = O(\|t\|^a)$  и  $D^k \varphi(t) = O(\|t\|^a)$  при всех  $k$ . Сходимость определяется так: говорят, что последовательность  $\{\varphi_j\}$  сходится в  $(\mathcal{O}_a)$ , если последовательность  $\{\varphi_j\}$  сходится равномерно в любом порядке на любом компактном подмножестве  $E^n$  и если для любого  $k$  найдется константа  $C_k$ , не зависящая от  $j$ , такая, что

$$|D^k \varphi_j(t)| \leq C_k \|t\|^a \quad \text{при всех } t.$$

Пространство  $(\mathcal{O}'_a)$  есть пространство всех непрерывных линейных функционалов на  $(\mathcal{O}_a)$ .

**Замечание.** Если  $\Phi \in (\mathcal{O}_a)$ , то все производные  $D^k \Phi \in (\mathcal{O}_a)$ , и если  $\beta < a$ , то  $(\mathcal{O}_\beta) \subset (\mathcal{O}_a)$  и  $(\mathcal{O}'_\beta) \supset (\mathcal{O}'_a)$ . Значит,  $(\mathcal{D}) \subset (\mathcal{O}_a)$  при любом  $a$  и сходимость в смысле  $(\mathcal{D})$  влечет сходимость в смысле  $(\mathcal{O}_a)$ . Отсюда  $(\mathcal{O}'_a) \subset (\mathcal{D}')$ , т. е. обобщенные функции из  $(\mathcal{O}_a)$  являются распределениями. Аналогично имеем  $(\mathcal{E}') \subset (\mathcal{O}'_a)$  при любом  $a$ .

## 6.3. Производные в $(\mathcal{O}_a)$

Пусть  $T \in (\mathcal{O}'_a)$ . Тогда производная  $D^k T$  определяется соотношением

$$\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle T, D^k \varphi \rangle \quad \text{для всех } \varphi \in (\mathcal{O}_a).$$

Если  $\varphi \in (\mathcal{G}_a)$ , то  $D^k \varphi \in (\mathcal{G}_a)$ . Значит, выражение  $\langle T, D^k \varphi \rangle$  определено. Очевидно, что  $\langle T, D^k \varphi \rangle$  — линейный функционал. Кроме того, если последовательность  $\{\varphi_j\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{G}_a)$ , то  $\{D^k \varphi_j\}$  тоже сходится в смысле  $(\mathcal{G}_a)$ . Следовательно,  $\langle T, D^k \varphi \rangle$  — непрерывный функционал и  $D^k T$  — распределение из  $(\mathcal{G}'_a)$ .

#### 6.4. Продолжение распределений из $(\mathcal{D}')$ на $(\mathcal{G}'_a)$

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$  и  $T = O(\|t\|^\beta)$ . Тогда  $T$  можно продолжить на  $(\mathcal{G}_a)$  при любом  $a$ , таком, что  $a + \beta + n < 0$ , где  $n$  есть размерность  $E^n$ . Это продолжение единственно.

**Доказательство.** Пусть  $\sigma_1(t)$  — функция класса  $(C^\infty)$ , обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= 1 \quad \text{для } \|t\| \leq 1, \\ 0 \leq \sigma_1(t) &\leq 1 \quad \text{для } 1 < \|t\| < 2, \\ \sigma_1(t) &= 0 \quad \text{для } \|t\| \geq 2.\end{aligned}$$

В качестве  $\sigma_1(t)$  можно взять регуляризацию характеристической функции шара  $\{t: \|t\| < 3/2\}$  с помощью  $\rho_{1/2}(t)$ , где  $\rho_r(t)$  — функция из § 2.3. Положим  $\sigma_r(t) = \sigma_1(t/r)$ .

Пусть  $a$  таково, что  $a + \beta + n < 0$ . Пусть  $\varphi \in (\mathcal{G}_a)$ . Тогда  $\varphi_r \in (\mathcal{D})$ . Покажем, что последовательность  $\langle T, \varphi_r \rangle$  сходится при  $r \rightarrow \infty$ . Пусть  $s > r$  и  $r > R$ , где  $R$  — константа из асимптотического условия, которому удовлетворяет  $T$ . Тогда

$$\begin{aligned}|\langle T, \varphi_r \rangle - \langle T, \varphi_s \rangle| &= \\ = |\langle T, \varphi_r - \varphi_s \rangle| &\leq C_0 M \int_{E^n} \|t\|^{a+3} |\sigma_r(t) - \sigma_s(t)| dt,\end{aligned}$$

где  $C_0$  — константа из асимптотического условия, которому удовлетворяет  $T$ , а  $M$  — максимум  $\varphi$  на  $E^n$ . Но  $\sigma_r(t) = \sigma_s(t) = 1$  при  $\|t\| \leq r$ ; отсюда

$$|\sigma_r(t) - \sigma_s(t)| = 0 \quad \text{при } \|t\| \leq r.$$

Кроме того,

$$|\sigma_r(t) - \sigma_s(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t.$$

Следовательно,

$$C_0 M \int_{E^n} \|t\|^{\alpha+\beta} |\sigma_r(t) - \sigma_s(t)| dt \leq C_0 M \int_{\|t\| > r} \|t\|^{\alpha+\beta} dt.$$

В сферических координатах имеем  $\|t\| = \rho$ ,  $dt = \rho^{n-1} d\rho d\Omega$ , где  $d\Omega$  — элемент поверхности единичной  $n$ -мерной сферы. Пусть  $C_n$  — поверхность этой единичной  $n$ -мерной сферы. Тогда

$$\int_{\|t\| > r} \|t\|^{\alpha+\beta} dt = C_n \int_{\rho > r} \rho^{\alpha+\beta+n-1} d\rho = \frac{-C_n}{\alpha+\beta+n} r^{\alpha+\beta+n}.$$

Заметим, что  $\alpha + \beta + n < 0$ , и потому интеграл сходится. Отсюда

$$|\langle T, \sigma_r \varphi \rangle - \langle T, \sigma_s \varphi \rangle| \leq C_0 M \frac{C_n}{|\alpha + \beta + n|} r^{\alpha+\beta+n},$$

$r^{\alpha+\beta+n} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\{\langle T, \sigma_r \varphi \rangle\}$  — последовательность Коши; поэтому предел при  $r \rightarrow \infty$  существует. Определим

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle T, \sigma_r \varphi \rangle.$$

Это выражение, очевидно, линейно. Надо доказать его непрерывность. Пусть  $\{\varphi_j\}$  сходится к  $\varphi_0$  в смысле  $(\mathcal{O}_a)$ . Тогда существует константа  $M'$ , такая, что  $|\varphi_j(t)| < M'$  для всех  $t$  независимо от  $j$ . Тогда имеем

$$|\langle T, \sigma_r \varphi_i \rangle - \langle T, \sigma_r \varphi_j \rangle| \leq C_0 M' \frac{C_n}{|\alpha + \beta + n|} r^{\alpha+\beta+n}.$$

Отсюда  $\langle T, \sigma_r \varphi_j \rangle$  сходится к  $\langle T, \varphi_j \rangle$  равномерно при всех  $j$ . Следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_j \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \langle T, \sigma_r \varphi_j \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, \sigma_r \varphi_j \rangle.$$

Но  $\{\sigma_r \varphi_j\}$  при фиксированном  $r$  сходится в смысле  $(\mathcal{D})$  к  $\sigma_r \varphi_0$ . Отсюда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_j \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle T, \sigma_r \varphi_0 \rangle = \langle T, \varphi_0 \rangle.$$

Следовательно,  $T$  непрерывно на  $(\mathcal{O}_a)$  и, значит,  $T \in (\mathcal{O}_a')$ .

Для доказательства единственности, допустим, что  $S_1 \in (\mathcal{G}'_a)$  и  $S_2 \in (\mathcal{G}'_a)$ , причем  $S_1 = S_2 = T$  на  $(\mathcal{D})$ . Пусть  $\varphi \in (\mathcal{G}_a)$ . Тогда  $\langle S_1, \sigma_r \varphi \rangle = \langle S_2, \sigma_r \varphi \rangle$ , так как  $\sigma_r \varphi \in (\mathcal{D})$ . Кроме того,  $\sigma_r \varphi \rightarrow \varphi$  в смысле  $(\mathcal{G}_a)$  (задача 2). Отсюда, переходя к пределу, получаем  $\langle S_1, \varphi \rangle = \langle S_2, \varphi \rangle$  для любого  $\varphi \in (\mathcal{G}_a)$ . Следовательно, продолжение из  $(\mathcal{D}')$  на  $(\mathcal{G}'_a)$  единственno. Теорема доказана.

### 6.5. Теорема представления для $(\mathcal{G}'_{-1})$ , $n = 1$

Отметим, что, начиная с этого параграфа и до гл. 12, мы рассматриваем лишь случай  $n = 1$ .

**Теорема.** Пусть  $n = 1$ ,  $a \geq -1$ ,  $T \in (\mathcal{G}'_a)$ . Положим

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \langle T, \frac{1}{t-z} \rangle.$$

Тогда  $\hat{T}(z)$  – аналитическая функция  $z$  в дополнении носителя  $T$ . Функция  $\hat{T}(z)$  дает представление распределения  $T$  в следующем смысле:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}(x + ie) - \hat{T}(x - ie)] \varphi(x) dx = \langle T, \varphi \rangle$$

для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Кроме того, производные  $\hat{T}(z)$  и  $T$  связаны между собой равенством

$$\frac{d^k}{dz^k} \hat{T}(z) = \hat{T}^{(k)}(z).$$

**Доказательство.** При  $\operatorname{Im} z \neq 0$  мы имеем  $(t-z)^{-1} = O(|t|^{-1})$  и

$$D^k (t-z)^{-1} = [(-1)^k k!] (t-z)^{-k-1} = O(|t|^{-k-1}),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда  $(t-z)^{-1} \in (\mathcal{G}_{-1})$  и  $(t-z)^{-1} \in (\mathcal{G}_a)$  при  $a \geq -1$ . Поэтому  $\hat{T}(z)$  существует при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . Заметим, что

$$\frac{1}{h} \left( \frac{1}{t-z-h} - \frac{1}{t-z} \right) \rightarrow \frac{1}{(t-z)^2}$$

в смысле  $(\mathcal{C}_{-1})$ , если только  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . Поэтому  $\hat{T}(z)$  — аналитическая функция при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . Анализичность  $\hat{T}(z)$  на вещественной оси в дополнении носителя  $T$  можно доказать так же, как в § 5.1, умножая  $T$  на функцию  $a(t)$  класса  $(C^\infty)$ , которая тождественно равна 1 в окрестности носителя  $T$  и носитель которой сколь угодно мало отличается от носителя  $T$ . Следовательно, функция  $\hat{T}(z)$  аналитическая, как и утверждалось.

Мы предположили, что  $\varphi \in (\mathcal{D})$ ; поэтому интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}(x + ie) - \hat{T}(x - ie)] \varphi(x) dx$$

существует. Как и в § 5.6, мы можем приблизить этот интеграл суммами Римана, а затем поменять местами взятие суммы и действие  $T$ . После этого изменения порядка суммы Римана будут сходиться в смысле  $(\mathcal{C}_{-1})$  к

$$\hat{\varphi}(x + ie) - \hat{\varphi}(x - ie).$$

Это выражение в свою очередь сходится к  $\varphi$  при  $e \rightarrow +0$  в смысле  $(\mathcal{C}_{-1})$ . Теорема доказана, за исключением соотношения

$$\frac{d^k}{dz^k} \hat{T}(z) = \hat{T}^{(k)}(z),$$

которое проверяется непосредственно.

*Замечание.*  $(\mathcal{C}'_a) \subset (\mathcal{C}'_{-1})$  при  $a \geq -1$ . Следовательно, предыдущая теорема дает представление для всех  $(\mathcal{C}'_a)$  с  $a \geq -1$ . Случай произвольного  $a$  рассматривается в следующем параграфе.

## 6.6. Представление распределений из $(\mathcal{C}'_a)$ при произвольном $a$

**Теорема 1.** Пусть  $T \in (\mathcal{C}'_a)$  и  $k$  таково, что при  $\operatorname{Im} z \neq 0$

$$(t - z)^{-k-1} = O(|t|^a).$$

Тогда

$$\hat{S}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \langle T, (t-z)^{-k-1} \rangle$$

есть аналитическая функция в дополнении (относительно плоскости  $z$ ) носителя  $T$ . Эта функция дает представление для  $k$ -й производной распределения  $T$  в следующем смысле:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{S}(x+i\epsilon) - \hat{S}(x-i\epsilon)] \varphi(x) dx = \langle T^{(k)}, \varphi \rangle$$

для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $(t-z)^{-k-1} = O(|t|^a)$  влечет  $(t-z)^{-k-1} \in (\mathcal{B}_a)$ . Доказательство аналитичности  $\hat{S}(z)$  проводится, как и в § 6.5. Кроме того, так же как и в § 6.5, доказывается, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{S}(x+i\epsilon) - \hat{S}(x-i\epsilon)] \varphi(x) dx = \\ = (-1)^k \langle T_t, [\hat{\varphi}^{(k)}(t+i\epsilon) - \hat{\varphi}^{(k)}(t-i\epsilon)] \rangle. \end{aligned}$$

Это выражение сходится к  $(-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle = \langle T^{(k)}, \varphi \rangle$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $f(z)$  — функция, голоморфная при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ , такая, что

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z) = \hat{S}(z)$$

и

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)] \varphi(x) dx$$

есть распределение в  $(\mathcal{D}')$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)] \varphi(x) dx + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} (c_0 + c_1 x + \dots + c_{k-1} x^{k-1}) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

где  $c_0, \dots, c_{k-1}$  — произвольные константы.

Иными словами,  $\langle T, \varphi \rangle$  и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] \varphi(x) dx$$

отличаются самое большее на полином степени  $k - 1$ .

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} D^k [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] \varphi(x) dx = \\ = (-1)^k \langle T, [\hat{\varphi}^{(k)}(x + i\varepsilon) - \hat{\varphi}^{(k)}(x - i\varepsilon)] \rangle. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} D^k [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] \varphi(x) dx = \\ = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] \varphi^{(k)}(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] \chi(x) dx = \langle T, \chi \rangle$$

для всех  $\chi \in (\mathcal{D})$ , являющихся  $k$ -ми производными от функций из  $(\mathcal{D})$ .

Два распределения из  $(\mathcal{D}')$ , которые совпадают на всех  $\chi \in (\mathcal{D})$ , являющихся  $k$ -ми производными функций из  $(\mathcal{D})$ , отличаются самое большее на полином степени  $k - 1$  (задача 7, гл. 2). Наш результат доказан.

**Замечание.** Приведенный метод является промежуточным, если сравнивать его с методом Миттаг-Леффлера и с прямым представлением через ядро Коши. Он имеет практическое значение в ряде конкретных случаев, которые мы обсудим в следующей главе.

### 6.7. Представление распределений из $(\mathcal{O}'_a)$ с помощью деления на полином

Пусть  $T \in (\mathcal{O}'_a)$ . Пусть  $P(t)$  — полином без вещественных корней степени  $k$ , такой, что  $-k - 1 \leq a$ . Тогда

$$\frac{1}{P(t)(t-z)} \in (\mathcal{O}_a).$$

Пусть

$$[T(\widehat{P}^{-1})](z) = \frac{1}{2\pi i} \left\langle T, \frac{1}{P(t)(t-z)} \right\rangle.$$

Можно показать, как и в §§ 5.6 и 6.5, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} [T(\widehat{P}^{-1})](x + ie)\varphi(x)dx = \left\langle T, \frac{1}{P(t)}[-\widehat{\varphi}(t - ie)] \right\rangle$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} [T(\widehat{P}^{-1})](x - ie)\varphi(x)dx = \left\langle T, \frac{1}{P(t)}[-\widehat{\varphi}(t + ie)] \right\rangle.$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \{ [T(\widehat{P}^{-1})](x + ie) - [T(\widehat{P}^{-1})](x - ie) \} P(x)\varphi(x)dx = \\ = \langle T, \varphi \rangle$$

для всех  $\varphi \in (\mathcal{D})$ .

#### ЗАДАЧИ

1. Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$  и  $T$  порождается локально интегрируемой ограниченной функцией  $T(t)$ . Докажите, что  $T$  имеет асимптотическую грань  $a(i)$  тогда и только тогда, когда  $T(t)$  имеет асимптотическую грань  $a(t)$ .

2. Докажите, что если  $\varphi \in (\mathcal{O}_a)$  и  $\sigma_r$  такое, как в § 6.4, то  $\varphi \sigma_r \rightarrow \varphi$  при  $r \rightarrow \infty$  в смысле  $(\mathcal{O}_a)$ . (Указание: воспользоваться формулой Лейбница для оценки производных.)

3. Докажите, что если  $f(z)$  — аналитическое представление распределения  $T \in (\mathcal{D}')$ , то  $f'(z)$  — аналитическое представление  $T'$ .

## ГЛАВА 7

### Примеры аналитических представлений

#### 7.1. $\delta(z)$ , представление Коши $\delta$ -функции

Имеем

$$\hat{\delta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \langle \delta, (t-z)^{-1} \rangle = -\frac{1}{2\pi iz}$$

и

$$\hat{\delta}^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{2\pi iz^{n+1}}.$$

#### 7.2. Распределение $\delta_+$

Часто используется распределение  $\delta_+$ . В определении  $\delta_+$  мы следуем Боголюбову и Ширкову ([1], стр. 431). Определение Ахиезера и Берестецкого [1] отличается множителем, равным 2, от этого определения.

Пусть  $\Phi \in \mathcal{O}_a$ ,  $a < 0$ . Определим

$$\langle \delta_+, \Phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t+i\epsilon} dt.$$

При любом  $\epsilon \neq 0$  интеграл существует, так как подинтегральная функция есть  $O(|t|^{-1+\alpha})$  и  $\alpha < 0$ .

Чтобы рассмотреть предел при  $\epsilon \rightarrow 0$ , напишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t+i\epsilon} dt = \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t+i\epsilon} dt + \int_{|t|>1} \frac{\Phi(t)}{t+i\epsilon} dt.$$

Последний интеграл сходится к

$$\int_{|t|>1} \frac{\Phi(t)}{t} dt.$$

Для вычисления первого интеграла напишем  $\varphi(t) = [\varphi(t) - \varphi(0)] + \varphi(0)$ . В силу теоремы о среднем

$$\varphi(t) - \varphi(0) = t\varphi'(t \cdot \xi(t)),$$

где  $0 \leq \xi \leq 1$ . Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t + i\varepsilon} dt$$

существует. Нужно лишь рассмотреть

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(0)}{t + i\varepsilon} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(0) \ln \frac{1 + i\varepsilon}{-1 + i\varepsilon} = \pi i \varphi(0).$$

(Заметим, что  $\varepsilon$  стремится к нулю, оставаясь положительным; в противном случае мы имели бы множитель  $-1$ .) Этим доказано существование предела. Значит,  $\delta_+$  есть функционал. Очевидно, он линеен. Остается показать, что  $\delta_+$  непрерывен.

Пусть  $\{\varphi_v\}$ —последовательность, сходящаяся в смысле  $(\mathcal{G}_a)$  к  $\varphi_0$ . Так как  $\delta_+$  линеен, то достаточно показать непрерывность для вещественноненулевых функций  $\varphi_v$ . В дальнейшем будем считать  $\varphi_v$  вещественными функциями. Напомним определение

$$\hat{\varphi}_v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_v(t)}{t - z} dt.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + i\varepsilon} \varphi_v(x) dx = \hat{\varphi}_v(-i\varepsilon).$$

Разобьем  $\hat{\varphi}_v(z)$  на вещественную и мнимую части:

$$\hat{\varphi}_v(z) = u_v(z) + iv_v(z).$$

Имеем  $u_v(z) = \frac{1}{2}[\hat{\varphi}_v(z) + \overline{\hat{\varphi}_v(z)}]$ . Но, так как  $\varphi_v$  вещественно, то  $\overline{\hat{\varphi}_v(z)} = -\hat{\varphi}_v(\bar{z})$ ; отсюда  $u_v(z) = \frac{1}{2}\varphi_v^*(z)$ , где  $\varphi_v^*(z)$  — гармоническая функция из § 5.3. Напомним

теперь хорошо известный факт из теории функций комплексного переменного. Сопряженная гармоническая функция  $v_v(z)$  связана с  $u_v(z)$  следующим соотношением<sup>1)</sup>:

$$v_v(z) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (u_{v_x} dy - u_{v_y} dx) + C_v,$$

где  $(x_0, y_0)$  — произвольная точка в верхней полуплоскости и  $C_v = v_v(z_0)$ , а интеграл берется по любому пути, соединяющему  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$ , лишь бы он оставался в области аналитичности функции  $u_v(z) + iv_v(z)$ . Выберем  $z_0 = i$  и проинтегрируем вдоль отрезка от  $(0, i)$  до  $(0, ie)$ . Тогда имеем

$$v_v(ie) = \int_1^e u_{v_x} dy + C_v.$$

Отсюда

$$\hat{\Phi}_v(ie) = \frac{1}{2} \left[ \Phi_v^*(ie) + i \int_1^e \Phi_{v_x}^*(iy) dy + 2iC_v \right].$$

Мы показали в § 5.4, что  $\Phi_v^*(x + iy)$  стремится к  $\Phi_v(x)$  при  $y \rightarrow 0$ . Мы показали также, что  $\Phi_{v_x}^*(x + iy)$  есть гармоническая функция, имеющая производную  $\Phi'_v(x)$  своим граничным значением. Поэтому  $\Phi_{v_x}^*(iy)$  непрерывна на замкнутом интервале  $0 \leqslant y \leqslant 1$ . Следовательно,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_1^e \Phi_{v_x}^*(iy) dy = \int_1^0 \Phi_{v_x}^*(iy) dy,$$

и мы имеем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{\Phi}_v(ie) = \frac{1}{2} \left[ \Phi_v(0) + i \int_1^0 \Phi_{v_x}^*(iy) dy + 2iC_v \right].$$

<sup>1)</sup> Здесь использованы обозначения  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ . — Прим. ред.

Но последовательность  $\{\varphi_v\}$  сходится к  $\varphi_0$  в смысле  $(\mathcal{O}_a)$ , и то же справедливо для последовательности  $\{\varphi'_v\}$ , сходящейся к  $\varphi'_0$ . Отсюда следует, что  $\varphi_{v_x}^*$  сходится к  $\varphi_{0_x}^*$  равномерно на  $0 \leq y \leq 1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}\lim_{v \rightarrow \infty} \langle \overline{\delta_+}, \overline{\varphi_v} \rangle &= \lim_{v \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\varphi}_v(i\varepsilon) = \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[ \varphi_v(0) + i \int_1^0 \varphi_{v_x}^*(iy) dy + 2iC_v \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varphi_0(0) + i \int_1^0 \varphi_{0_x}^*(iy) dy + 2iC_0 \right] = \langle \overline{\delta_+}, \overline{\varphi_0} \rangle.\end{aligned}$$

Значит,  $\delta_+$  — непрерывный функционал на  $(\mathcal{O}_a)$  и  $\delta_+$  — распределение из  $(\mathcal{O}'_a)$  при  $a < 0$ <sup>1)</sup>.

Заметим, что при доказательстве мы пользовались лишь свойствами сходимости последовательностей  $\{\varphi_v\}$  и  $\{\varphi'_v\}$ . Следовательно, для существования  $\langle \delta_+, \varphi \rangle$  достаточно, чтобы  $\varphi$  была лишь один раз непрерывно дифференцируема. Значит, на самом деле  $\delta_+$  есть распределение, определенное на более широком пространстве  $(\mathcal{O}_a^m)$  (с  $m \geq 1$ ,  $a < 0$ ). Определение  $(\mathcal{O}_a^m)$  такое же, как и  $(\mathcal{O}_a)$ , с той лишь разницей, что в нем участвуют лишь производные до порядка  $m$  включительно. Это пространство находится в таком же отношении к  $(\mathcal{O}_a)$ , в каком  $(\mathcal{D}^m)$  находится к  $(\mathcal{D})$ .

<sup>1)</sup> Вот более простое доказательство непрерывности функционала  $\delta_+$  в  $(\mathcal{O}_a)$ . В начале § 7.2 по существу было доказано равенство (формула Сохоцкого)

$$\delta_+ = \frac{1}{2} \delta - \frac{1}{2\pi i} \mathcal{F}(t^{-1}), \text{ где } (\mathcal{F}(t^{-1}), \varphi) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt,$$

откуда непосредственно и следует требуемое утверждение. —  
Прим. ред.

### 7.3. Существование $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{f}(x + i\epsilon)$

Примером функции  $f(t)$ , для которой  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{f}(x + i\epsilon)$  существует не при всех  $x$ , является функция  $f(t) = -H(t-1)H(1-t)$ , где  $H$  — функция Хевисайда:

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1-z}{1+z}.$$

Эта функция сингулярна при  $z = -1$  и  $z = 1$ , и пределы  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{f}(1 + i\epsilon)$  и  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{f}(-1 + i\epsilon)$  не существуют (тогда как  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{f}^*(1 + i\epsilon) = 1/2$ ).

Тем не менее если  $f$  достаточно гладкая, то  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{f}(x + i\epsilon)$  существует при всех  $x$ .

**Следствие.** Пусть  $f$  — функция класса  $(C^1)$ , и пусть  $f = O(|t|^\alpha)$  при каком-то  $\alpha < 0$ . Тогда  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{f}(x + i\epsilon)$  существует при всех  $x$ .

Этот результат был доказан в § 7.2.

### 7.4. Аналитическое представление $\delta_+$

Чтобы получить представление Коши для  $\delta_+$ , заметим, что если допустить комплексные значения  $t$ , то  $1/(t + i\epsilon)$  будет аналитической функцией в верхней полуплоскости, имеющей полюс в точке  $t = -i\epsilon$ . Отсюда, применяя к этой функции интегральную формулу Коши, находим для  $\epsilon > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t+i\epsilon} \frac{1}{t-z} dt = \begin{cases} \frac{1}{z+i\epsilon} & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ 0 & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

И мы получаем

$$\hat{\delta}_+(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi iz} & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ 0 & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

### 7.5. Главная часть $P(t^{-n})$

Другим полезным распределением является  $P(t^{-n})$ , главная часть  $t^{-n}$ . Вот его определение:

$$\langle P(t^{-n}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{(t+i\varepsilon)^n} + \frac{1}{(t-i\varepsilon)^n} \right] \varphi(t) dt.$$

**Лемма.**  $P(t^{-n})$  есть распределение из  $(\mathcal{O}'_a)$  при  $a < 0$ .

Это можно показать, представляя  $P(t^{-n})$  с помощью  $\delta_+$ . Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(t+i\varepsilon)^n} dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^{(n-1)}(t)}{t+i\varepsilon} dt.$$

Если  $\varphi \in (\mathcal{O}_a)$ , то  $\varphi^{(n-1)} \in (\mathcal{O}_a)$ . Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t+i\varepsilon)^n} \varphi(t) dt = \frac{-2\pi i}{(n-1)!} \langle \delta_+, \varphi^{(n-1)} \rangle.$$

Значит, это выражение есть распределение из  $(\mathcal{O}'_a)$ . Аналогично получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-i\varepsilon)^n} \varphi(t) dt = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \langle \delta_+, \varphi^{(n-1)}(-t) \rangle.$$

Этим доказано, что  $P(t^{-n})$  есть распределение из  $(\mathcal{O}'_a)$ . Одновременно имеем соотношение

$$\langle P(t^{-n}), \varphi \rangle = \frac{-i\pi}{(n-1)!} [\langle \delta_+, \varphi^{(n-1)}(t) \rangle - \langle \delta_+, \varphi^{(n-1)}(-t) \rangle].$$

В качестве представления Коши получаем

$$\hat{P}(t^{-n})(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z^n} & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\frac{1}{2z^n} & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

## 7.6. Эквивалентность $P(t^{-1})$ и главного значения Коши

Главное значение Коши интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$  определяется как

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} t^{-1} \varphi(t) dt + \int_{\delta}^{\infty} t^{-1} \varphi(t) dt \right].$$

Мы покажем, что это тождественно выражению

$$\langle P(t^{-1}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [(t + i\epsilon)^{-1} + (t - i\epsilon)^{-1}] \varphi(t) dt$$

для всех  $\varphi \in \mathcal{C}_a$ ,  $a < 0$ .

Следует сравнить только два предела для интегралов по конечному интервалу, содержащему 0, так как оба выражения равны при интегрировании по дополнению любого такого интервала. Для удобства выберем интервал  $(-1, 1)$ . Так как

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

есть непрерывная функция, то нужно рассмотреть лишь константы, причем достаточно взять константу 1. Имеем

$$\int_{-1}^{-\delta} t^{-1} dt + \int_{\delta}^{1} t^{-1} dt = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-1}^{1} [(t + i\epsilon)^{-1} + (t - i\epsilon)^{-1}] dt = \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [\ln(1 + i\epsilon) - \ln(-1 + i\epsilon) + \\ + \ln(1 - i\epsilon) - \ln(-1 - i\epsilon)] = 0. \end{aligned}$$

Этим устанавливается эквивалентность обоих определений.

### 7.7. Интегрирование вокруг полюса

Если  $\varphi(x)$  есть сужение на  $|x| \leq r$  функции  $\varphi(z)$ , аналитической в диске  $|z| \leq r$ , то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} (x + i\varepsilon)^{-n} \varphi(x) dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{-r} x^{-n} \varphi(x) dx + \int_C z^{-n} \varphi(z) dz + \int_r^{\infty} x^{-n} \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

где  $C$  — полуокружность в верхней полуплоскости от  $-r$  до  $r$  (рис. 7.1).

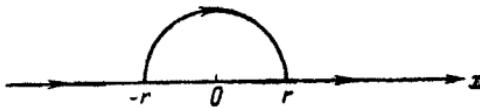


Рис. 7.1.

Этот метод часто используется в приложениях и известен как метод интегрирования вокруг полюса. Аналогично можно интегрировать вокруг полюса в нижней полуплоскости. Равенство является прямым следствием интегральной теоремы Коши.

### 7.8. Тождества, связывающие $\delta_+$ , $P(t^{-n})$ , $\delta$ и $\delta_-$

(1) Определим  $\delta_- = \delta - \delta_+$ , так что  $\delta = \delta_+ + \delta_-$  и

$$\widehat{\delta}_-(z) = \begin{cases} 0, \\ -\frac{1}{2\pi iz}. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \langle \delta_-, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{\delta}_-(t + i\varepsilon) - \widehat{\delta}_-(t - i\varepsilon)] \varphi(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t - ie} dt. \end{aligned}$$

(2) Для представлений Коши, которые были вычислены в §§ 7.1, 7.4 и 7.5, имеет место тождество

$$-2\pi i \delta_+(z) = \hat{P}\left(\frac{1}{t}\right)(z) - \pi i \delta(z).$$

Отсюда получаем эти же тождества для соответствующих распределений из  $(\mathcal{O}_a')$ ,  $a < 0$ . В физической литературе последнее тождество часто записывается в виде

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{t + i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{t}\right) - \pi i \delta^1.$$

Аналогично получаем равенство

$$2\pi i \delta_-(z) = \hat{P}\left(\frac{1}{t}\right)(z) + \pi i \delta(z),$$

которое в физической литературе записывается в виде

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{t - i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{t}\right) + \pi i \delta.$$

(3) Разрешая тождества относительно  $P(t^{-1})$ , получаем

$$P(t^{-1}) = \pi i (\delta_- - \delta_+).$$

(4) Учитывая представление из § 7.4, получаем тождество

$$\frac{d^n}{dz^n} \hat{P}(t^{-1})(z) = n! (-1)^n \hat{P}(t^{-n-1})(z).$$

Отсюда

$$P(t^{-n-1}) = \frac{(-1)^n \pi i}{n!} (\delta_-^{(n)} - \delta_+^{(n)}).$$

## 7.9. $\delta_+$ , $\delta_-$ и $P(t^{-1})$ как обобщенные функции в $(\mathcal{D}'^1)$

В § 7.2 показано, что  $\langle \delta_+, \varphi \rangle$  определено для  $\varphi \in (\mathcal{O}_a^1)$ ,  $a < 0$  (т. е. для функций класса  $(C^1)$ , таких, что  $\varphi, \varphi' = O(|t|^a)$ ,  $a < 0$ , с соответствующим понятием сходимости). Но  $(\mathcal{D}'^1) \subset (\mathcal{O}_a^1)$  при любом  $a$  и сходимость

<sup>1)</sup> Это известные формулы Сохоцкого. См. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат „Методы теории функций комплексного переменного“, Физматгиз, 1958, стр. 273. — Прим. перев.

в смысле  $(\mathcal{D}^1)$  влечет за собой сходимость в смысле  $(\mathcal{O}_a^1)$ . Отсюда  $\delta_+ \in (\mathcal{D}'^1)$ . Кроме того,  $\delta \in (\mathcal{D}^0)$ ; поэтому  $\delta_- \in (\mathcal{D}'^1)$ , и так как

$$P(t^{-1}) = \pi i(\delta_- - \delta_+),$$

то мы получаем следующее утверждение:

**Лемма.**  $\delta_+$ ,  $\delta_-$  и  $P(t^{-1})$  суть обобщенные функции из  $(\mathcal{D}'^1)$ .

**Следствие.**  $\delta_+^{(n)}$ ,  $\delta_-^{(n)}$  и  $P(t^{-n-1})$  суть обобщенные функции из  $(\mathcal{D}^{n+1})$ . (См. задачу 1.)

### 7.10. Произведение $P(t^{-1})$ на функцию класса $(C^1)$

**Лемма.** Пусть  $f(t)$  — функция класса  $(C^1)$ . Тогда  $f(t)P(t^{-1})$  есть обобщенная функция из  $(\mathcal{D}'^1)$ .

**Доказательство.** Так как  $f(t)$  есть мультипликатор в  $(\mathcal{D}^1)$ , то  $f(t)P(t^{-1})$  есть обобщенная функция в  $(\mathcal{D}'^1)$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \langle f(t)P(t^{-1}), \varphi(t) \rangle &= \langle P(t^{-1}), f(t)\varphi(t) \rangle = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{t+i\epsilon} + \frac{1}{t-i\epsilon} \right) f(t)\varphi(t) dt. \end{aligned}$$

### 7.11. Аналитическое представление полиномов

Пусть  $f(t)$  — полином,

$$f(t) = a_0 + \dots + a_n t^n.$$

Представление Коши не существует и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+2}} dt = 0.$$

Тем не менее вот очевидное аналитическое представление  $f$ :

$$\hat{f}_1(z) = \begin{cases} a_0 + \dots + a_n z^n & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Двумя другими представлениями будут

$$\hat{f}_2(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } y > 0, \\ -(a_0 + \dots + a_n z^n) & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

и

$$\hat{f}_3(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_0 + \dots + a_n z^n) & \text{при } y > 0, \\ -\frac{1}{2}(a_0 + \dots + a_n z^n) & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Из соображений симметрии условимся, если не оговорено противное, представлять полиномы с помощью  $\hat{f}_3(z)$ .

## 7.12. Аналитическое представление функции Хевисайда $H(t)$

Представление Коши для  $H(t)$  не сходится. Но мы имеем, однако,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \frac{1}{(t-z)^2} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{1}{(t-z)^2} dt = \frac{-1}{2\pi iz} = \hat{\delta}(z).$$

Это представление Коши производной  $H' = \delta$ . Интегрируя, получим

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \ln z.$$

Пусть  $z = re^{i\varphi}$ . Определим

$$\ln z = \ln r + i\varphi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi,$$

что соответствует разрезу вдоль отрицательной части вещественной оси.

Согласно теоремам 6.6.1 и 6.6.2, функция  $f(z)$  представляет  $H$  с точностью до полинома степени 0, т. е. с точностью до константы. Действительно, имеем

$$H(x) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} [\ln(x + ie) - \ln(x - ie)] \right\} = 1 \text{ при } x \neq 0.$$

В соответствии с § 7.11 представим константу 1 так:

$$\tilde{1} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } y > 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Отсюда мы получаем аналитическое представление

$$\hat{H}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \ln z + \frac{1}{2} & \text{при } y > 0, \\ -\frac{1}{2\pi i} \ln z - \frac{1}{2} & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Его можно записать в виде

$$\hat{H}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \ln(-z), \quad y \neq 0.$$

Определим  $H_-(t) = H(-t)$ . Аналогично получим

$$\hat{H}_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln z.$$

### 7.13. Аналитическое представление $\varepsilon(t)$ и $t^k H(t)$ , $k \geq 0$

Определим  $\varepsilon(t)$  как  $-H(-t) + H(t)$ . Представление  $\varepsilon(t)$  мы получим, сложив аналитические представления  $-H(-t)$  и  $H(t)$ :

$$\hat{\varepsilon}(z) = \frac{-1}{2\pi i} [\ln z + \ln(-z)],$$

где логарифм определен с помощью разреза, указанного в § 7.12.

Чтобы получить аналитическое представление  $f(t) = tH(t)$ , заметим, что  $(tH(t))' = H(t)$ . Интегрируя  $\hat{H}(z)$ , находим

$$\hat{f}(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int \ln(-z) dz = \frac{-1}{2\pi i} [z \ln(-z) + z], \quad y \neq 0.$$

В силу теоремы 6.6.2 функция  $\hat{f}(z)$  дает представление  $tH(t)$  с точностью до константы. Но

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\hat{f}(x + i\varepsilon) - \hat{f}(x - i\varepsilon) - xH(x)] = 0 \quad \text{при всех } x.$$

Поэтому константа равна нулю и  $\hat{f}(z)$  есть аналитическое представление  $tH(t)$ . Если дано какое-то аналитическое представление, то, прибавляя любой полином относительно  $z$ , мы получаем другое аналитическое представление. Воспользуемся этой возможностью и

прибавим  $z/2\pi i$ . Тогда для  $tH(t)$  получим представление

$$\frac{-1}{2\pi i} z \ln(-z), \quad y \neq 0.$$

Подобным образом можно построить представление  $f_k(t) = t^k H(t)$ . Имеем  $f'_k(t) = kf_{k-1}(t)$ . Значит, аналитическое представление  $f_k(t)$  можно получить с помощью  $k$ -кратного интегрирования функции  $(-1/2\pi i) \ln(-z)$  и умножения на  $k!$ . Снова, опуская члены, дающие представление нуля, получаем

$$\frac{-1}{2\pi i} z^k \ln(-z), \quad y \neq 0.$$

#### 7.14. Распределение $\int_{-\infty}^{\infty} t^a \varphi(t) dt$ , $a$ вещественно

Определим  $z^a$ , как обычно, с помощью разреза вдоль отрицательной вещественной оси. Пусть  $z = re^{i\theta}$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ . Положим тогда  $z^a = re^{ia\theta}$ . Заметим, что это определение исключает отрицательную вещественную ось.

Пусть  $a > 0$  и  $a$  не целое. Определим

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^a \varphi(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [(t + ie)^a + (t - ie)^a] \varphi(t) dt.$$

Ясно, что это выражение является распределением из  $(\mathcal{C}_\beta)$  при  $a + \beta < -1$ . Выберем целое число  $n$ , такое, чтобы  $a - n < 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t + ie)^a}{(t - z)^{n+1}} dt &= \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t + ie)^{a-n}}{t - z} dt = \\ &= \begin{cases} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} (z + ie)^{a-n} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^a}{(t - z)^{n+1}} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} z^{a-n} & \text{при } y > 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} z^{a-n} & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Отсюда, согласно § 6.6, мы получаем функцию  $\hat{f}(z)$ , дающую представление  $x^\alpha$ , с помощью  $n$ -кратного интегрирования. Находим

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} z^\alpha & \text{при } y > 0, \\ -\frac{1}{2} z^\alpha & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Эта функция дает представление  $x^\alpha$  в соответствии с изложенным в § 6.6 с точностью до полинома. В этом случае, очевидно, полином равен нулю.

Случай нецелого отрицательного  $\alpha$  с помощью интегрирования можно свести к случаю положительных степеней:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t + ie)^\alpha \varphi(t) dt = \frac{(-1)^n}{(\alpha + 1) \dots (\alpha + n)} \int_{-\infty}^{\infty} (t + ie)^{\alpha+n} \varphi^{(n)}(t) dt.$$

Если  $\alpha + n$  положительно, то предел выражения в правой части при  $e \rightarrow 0$  существует и является непрерывным линейным функционалом. Значит,

$$\lim_{e \rightarrow +0} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [(t + ie)^\alpha + (t - ie)^\alpha] \varphi(t) dt$$

есть распределение из  $(\theta'_B)$  при  $\alpha + \beta < -1 - n$ . Снова находим

$$\hat{z}^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} z^\alpha & \text{при } y > 0, \\ -\frac{1}{2} z^\alpha & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

в качестве аналитической функции, дающей представление  $x^\alpha$ .

Мы получили ту же формулу для отрицательных целых показателей (главное значение  $P(t^{-n})$ ). Условимся пользоваться этой формулой для нуля и целых положительных показателей (полиномы). Тогда она становится универсальной для всех вещественных  $\alpha$ .

### 7.15. Аналитическое представление функций из $L_2$

Пусть  $f(t)$  — функция, интегрируемая с квадратом по Лебегу на вещественной оси, т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ .

Так как  $(t - z)^{-1}$  принадлежит  $L_2$  при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ , то интеграл от произведения  $f$  на  $(t - z)^{-1}$  существует при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . Поэтому существует представление Коши

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{t - z} dt.$$

### 7.16. Аналитическое представление $e^{-t^2}$

Представление Коши

$$\hat{f}(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} (t - z)^{-1} dt$$

существует. Но  $e^{-x^2}$  есть сужение  $e^{-z^2}$ , хотя  $e^{-z^2}$  и не равно значению интеграла. Этот интеграл нельзя вычислить с помощью „замыкания контура“, так как интеграл по большей полуокружности от  $-R$  до  $R$  не обращается в нуль при  $R \rightarrow \infty$ . Это можно сделать с помощью техники преобразований Фурье (см. § 8.25 (10)).

### 7.17. Пример аналитической функции, которая не дает представления распределения

Любое распределение из  $(\mathcal{D}')$  можно представить с помощью аналитической функции (точнее, пары аналитических функций), однако обратное утверждение не верно. Покажем, что функция  $e^{-1/z^2}$  дает контрпример:  $e^{-1/z^2}$  — аналитическая функция при  $z \neq 0$ . Следовательно, если бы она давала представление распределения  $T \in (\mathcal{D}')$ , то носитель  $T$  состоял бы из точки  $z = 0$ . В § 4.6 мы показали, что любое распределение с точечным носителем в начале есть конечная линейная комбинация  $\delta$ -функции Дирака и ее производных. Значит,

$T$  имеет представление Коши

$$\hat{T}(z) = \sum_{v=1}^N a_v \frac{1}{z^v},$$

где коэффициенты  $a_v$  — константы. С другой стороны,

$$e^{-1/z^2} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v! z^{2v}}.$$

Оба разложения должны были бы давать представление одного и того же распределения. Пусть  $f(z) = e^{-1/z^2} - \hat{T}(z)$ . Тогда  $f(z)$  должна давать представление нуля, т. е.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x + i\epsilon) - f(x - i\epsilon)] \phi(x) dx = 0 \text{ для всех } \phi \in (\mathcal{D}).$$

Приведем контрпример. Пусть  $\phi_0(x) = a_r(x)x^{2N-1}$ , где  $a_r(x) \in (\mathcal{D})$  и  $a_r(x) = 1$  при  $|x| \leq r$ . Но

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}(x + i\epsilon) - \hat{T}(x - i\epsilon)] a_r(x)x^{2N-1} dx = \\ = \langle T, a_r(x)x^{2N-1} \rangle = 0, \end{aligned}$$

так как  $a_r(x)x^{2N-1}$  обращается в нуль в нуль вместе со своими производными до порядка  $2N - 2$ . Итак,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x + i\epsilon) - f(x - i\epsilon)] \phi_0(x) dx = \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{(x + i\epsilon)^2} \right] - \exp \left[ -\frac{1}{(x - i\epsilon)^2} \right] \right\} \phi_0(x) dx = \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{(x + i\epsilon)^2} \right] - \exp \left[ -\frac{1}{(x - i\epsilon)^2} \right] \right\} x^{2N-1} dx - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{(x + i\epsilon)^2} \right] - \exp \left[ -\frac{1}{(x - i\epsilon)^2} \right] \right\} \cdot [1 - a_r(x)] x^{2N-1} dx \right]. \end{aligned}$$

Первый интеграл равняется (независимо от  $\epsilon$ )  $-\int\limits_{-C} e^{-1/z^2} z^{2N-1} dz$ , где  $C$  — кривая, обходящая начало против часовой стрелки, что в свою очередь равно  $2\pi i$ , умноженному на вычет в нуле, т. е.

$$\frac{2\pi i(-1)^{N+1}}{N!}.$$

Второй интеграл может быть сделан сколь угодно малым при больших  $r$  независимо от  $\epsilon$ . Отсюда

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+ie) - f(x-ie)] \varphi_0(x) dx \neq 0.$$

Мы получили противоречие. Значит, не существует распределения  $T \in (\mathcal{D}')$ , такого, что функция  $e^{-1/z^2}$  дает его аналитическое представление.

## 7.18. Преобразование Гильберта

Пусть  $f$  — функция класса  $(C^1)$ , такая, что  $f = O(|t|^\alpha)$  при каком-то  $\alpha < 0$ . (Если угодно, это условие можно ослабить и считать  $f$  кусочно-непрерывно дифференцируемой.) Тогда преобразование Гильберта функции  $f$  определяется так:

$$\mathcal{H}[f, x] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Удобно опустить аргумент и писать  $\mathcal{H}[f]$ . В силу эквивалентности главного значения Коши и  $P(t^{-1})$  (см. § 7.6) имеем

$$\mathcal{H}[f] = -\frac{1}{\pi} P(t^{-1}) * f,$$

где  $*$  означает свертку (см. § 3.1). Напомним тождество  $(1/\pi)P(t^{-1}) = i(\delta_- - \delta_+)$  (§ 7.8). Следовательно,

$$\mathcal{H}[f] = i(\delta_+ - \delta_-) * f$$

и

$$\mathcal{H}[\mathcal{H}[f]] = -(\delta_+ - \delta_-) * [(\delta_+ - \delta_-) * f].$$

Заметим, что  $\delta_+ * (\delta_+ * f) = \delta_+ * f$ ,  $\delta_- * (\delta_+ * f) = \delta_+ * (\delta_- * f) = 0$  и  $(\delta_+ + \delta_-) * f = f$ . Отсюда выводим *фундаментальное свойство преобразования Гильберта*:

$$\mathcal{H}[\mathcal{H}[f]] = -f.$$

Если применить  $\mathcal{H}$  к функции  $g$ , являющейся гра-  
ничным значением аналитической в верхней полупло-  
скости функции, то  $\delta_- * g = 0$  и  $\delta_+ * g = 0$ , так что

$$\mathcal{H}[g] = ig.$$

(По поводу более детального изучения преобразования Гильберта см. Ловерье [1].)

### ЗАДАЧИ

1. Покажите, что  $\delta_+^{(n)}$ ,  $\delta_-^{(n)}$  и  $P(t^{-n-1})$  являются обобщенными функциями из  $(\mathcal{D}'^{n+1})$ .
2. Найдите аналитическое представление для  $|t|^\alpha$ ,  $\alpha$  — вещественно.
3. Найдите аналитическое представление для  $t_+^\alpha = H(t)t^\alpha$ ,  $\alpha$  — вещественно.
4. Пусть  $f$  — функция класса  $(C^1)$  и  $f = O(|t|^\alpha)$  при каком-то  $\alpha < 0$ . Покажите, что  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{f}(x + i\epsilon)$  — непрерывная функция на  $E^1$ .

## Добавление 2

---

### A.2.1. Вычисление интеграла

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{|t-z|^2} = \pm 1 \quad \text{при } y \geq 0, \quad z = x + iy.$$

Доказательство. При  $y > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t/y)^2 + 1} d(t/y) = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ R > 0}} [\operatorname{arctg} R - \operatorname{arctg}(-R)] = 1. \end{aligned}$$

Аналогично получаем значение  $-1$  для  $y < 0$ .

### A.2.2. Вычисление предела

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_{|t-x| \geq \Delta} \frac{dt}{|t-x-i\epsilon|^2} = 0 \quad \text{при любом } \Delta > 0.$$

Доказательство. Имеем с помощью замены переменной

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\pi} \int_{|t-x| \geq \Delta} \frac{dt}{|t-x-i\epsilon|^2} &= \frac{\epsilon}{\pi} \int_{|u| \geq \Delta} \frac{du}{u^2 + \epsilon^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|v| \geq \Delta/|\epsilon|} \frac{dv}{v^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{-\Delta}{|\epsilon|} \right) - \operatorname{arctg}(-\infty) + \operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} \left( \frac{\Delta}{|\epsilon|} \right) \right]. \end{aligned}$$

При фиксированном  $\Delta$  это выражение стремится к нулю при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Утверждение доказано.

### A.2.3. Обращение предела в нуль

Пусть  $f(t)$  — ограниченная, кусочно-непрерывная функция. Тогда, каково бы ни было  $\Delta > 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|t-x| \geq \Delta} \frac{f(t)dt}{|t-x-i\varepsilon|^2} = 0.$$

**Замечание.** Функция  $f(t)$  называется *кусочно-непрерывной*, если она непрерывна, за исключением конечного числа точек, в которых существуют правый  $f(x_+) = \lim_{\delta \rightarrow +0} f(x+\delta)$  и левый  $f(x_-) = \lim_{\delta \rightarrow +0} f(x-\delta)$  пределы.

**Доказательство.** Пусть  $M$  — граница для  $|f(t)|$ . Тогда

$$\left| \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{|t-x| \geq \Delta} \frac{f(t)dt}{|t-x-i\varepsilon|^2} \right| \leq M \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{|t-x| \geq \Delta} \frac{dt}{|t-x-i\varepsilon|^2}.$$

Как показано в § A.2.2, интеграл в правой части стремится к нулю, и утверждение доказано.

### A.2.4. Границные значения функции $f^*(x+ie)$ в точках непрерывности

Пусть  $f$  — кусочно-непрерывная и ограниченная функция. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f^*(x+ie) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{|t-x-i\varepsilon|^2} = f(x),$$

если  $f$  непрерывна в точке  $x$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать утверждение для вещественноненаправленных функций, так как комплекснозначные функции разлагаются на вещественную и мнимую части. Выберем  $\Delta$  так, чтобы  $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon'$

при  $|t-x| < \Delta$ . Тогда для  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} [f(x) - \epsilon'] \frac{\epsilon}{\pi} \int_{|t-x| < \Delta} \frac{dt}{|t-x-ie|^2} &< \\ &< \frac{\epsilon}{\pi} \int_{|t-x| < \Delta} \frac{f(t)dt}{|t-x-ie|^2} < \\ &< [f(x) + \epsilon'] \frac{\epsilon}{\pi} \int_{|t-x| < \Delta} \frac{dt}{|t-x-ie|^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_{|t-x| < \Delta} \frac{f(t)dt}{|t-x-ie|^2} - f(x) \right| < \epsilon'.$$

В силу изложенного в § A.2.3 имеем для любого  $\Delta > 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_{|t-x| < \Delta} \frac{f(t)dt}{|t-x-ie|^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{|t-x-ie|^2}.$$

Следовательно,

$$\left| \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{|t-x-ie|^2} - f(x) \right| < \epsilon'$$

для любого  $\epsilon' > 0$ . Утверждение доказано.

### A.2.5. Границные значения $f^*(x+ie)$ ; общий случай

Теорема. Пусть  $f(t)$  ограничена и кусочно-непрерывна. Тогда

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} f^*(x+ie) = \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)].$$

*Замечание.* Если  $f$  непрерывна в точке  $x$ , то  $\frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)] = f(x)$ .

*Доказательство.* Функция  $g(t) = f(t) + [f(x_-) - f(x_+)]H(t-x)$  непрерывна в точке  $x$ , причем  $g(x) = f(x_-)$ . ( $H$  — функция Хевисайда.) Имеем

$$g^*(x+ie) = f^*(x+ie) + [f(x_-) - f(x_+)] \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(t-x)dt}{|t-x-ie|^2}.$$

Из § A.2.4 известно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g^*(x + i\varepsilon) = g(x) = f(x_-).$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(t-x)dt}{|t-x-i\varepsilon|^2} &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+\varepsilon^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dv}{v^2+1} = \frac{1}{2} \quad \text{при } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f^*(x + i\varepsilon) &= f(x_-) - \frac{1}{2}[f(x_-) - f(x_+)] = \\ &= \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)]. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### A.2.6. Воспроизводящие ядра

Даны гильбертово пространство  $H$  функций со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и система функций  $\Phi_v \in H$ , ортонормированная:

$$\langle \Phi_\mu, \Phi_v \rangle = \delta_{\mu, v} \quad (\text{дельта Кронекера}),$$

и полная: если  $f \in H$ , то  $f = \sum_{v=1}^{\infty} \langle f, \Phi_v \rangle \Phi_v$ . Назовем обобщенным воспроизводящим ядром функцию или обобщенную функцию  $\Delta(x, \xi)$ , такую, что  $\langle \Delta(x, \xi), f(\xi) \rangle = f(x)$  для всех  $f \in H$ .

Для  $\Delta$  имеем формальное представление

$$\Delta(x, \xi) = \sum_{v=1}^{\infty} \Phi_v(x) \Phi_v(\xi).$$

Это представление формальное, так как сумма не обязана сходиться. Она дает представление  $\Delta$ , если принять следующее соглашение:

$$\langle \Delta, f \rangle = \left\langle \sum_{v=1}^{\infty} \Phi_v(\xi) \Phi_v(x), f \right\rangle = \sum_{v=1}^{\infty} \langle \Phi_v(\xi), f(\xi) \rangle \Phi_v(x).$$

Много примеров подобных формальных представлений, в которых  $\Phi_v$  являются собственными функциями какого-то оператора („спектральные представления“), можно найти в книге Б. Фридмана [1].

Совершенно ясно, что  $\sum \Phi_v(\xi) \Phi_v(x)$ , вообще говоря, не сходится при всех  $x, \xi$ . Рассмотрим, например,  $\Phi_v(x) = \sin vx$ . Эти функции ортонормированы, если скалярное произведение задать интегралом

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

Положим  $x = \xi = \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $\sin v \frac{\pi}{2} \sin v \frac{\pi}{2} = 1$  и сумма расходится.

В некоторых гильбертовых пространствах эта сумма сходится. Например, если  $H$  — пространство всех функций  $f(z)$ , аналитических в ограниченной области  $D$  комплексной плоскости  $z$  и таких, что

$$\iint_D |f(z)|^2 dx dy < \infty.$$

В этом случае сумма сходится и результирующая функция

$$\Delta(z, \bar{\xi}) = \sum_{v=1}^{\infty} \Phi_v(z) \overline{\Phi_v(\xi)}$$

не зависит от частного выбора ортонормированной системы (Бергман [2], Мешковский [1]).

Другой пример дает ядро Сегё: пусть  $D$  — ограниченная область комплексной плоскости, а ее граница  $\partial D$  — спрямляемая кривая. Пусть  $H$  — пространство всех функций  $f$ , которые аналитичны в  $D$  и непрерывны в замыкании  $\bar{D}$  области  $D$ . Зададим скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \int_{\partial D} \overline{f(z)} g(z) ds,$$

где  $ds$  — элемент длины дуги.

Для этого пространства формальная сумма сходится и результирующая функция не зависит от частного выбора ортонормированной системы. Она известна под названием *ядра Сеге* (Бергман [2], Бергман и Шиффер [1], Мешковский [1]).

Для полуплоскости ядро Сегё можно получить с помощью конформного отображения единичного круга. Оказывается, что оно тождественно ядру Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\xi - z}.$$

Вообще говоря, этот факт имеет место не всегда. С помощью ядра Сегё можно получать представления для функций и распределений подобно тому, как это делалось в § 5.1 для ядра Коши. То же справедливо для многих других ядер, рассматриваемых в книгах Бергмана и Шиффера [1] и Мешковского [1]. Мы здесь воздержимся от обсуждения этих интересных возможностей, так как требуемая для этого техника выходит за рамки настоящей книги.

### III. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ, СВЕРТКА

#### ГЛАВА 8

##### Преобразования Фурье

---

###### 8.1. Обозначения

Будем обозначать через  $L_p$  пространство всех измеримых (по Лебегу) функций  $f$ , для которых  $|f|^p$  интегрируема на оси  $(-\infty, \infty)$  и через l.i.m. — предел в среднем:

$$\text{l.i.m. } f_n(t) = f(t), \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_n(t)|^p dt = 0.$$

Говорят, что две функции равны п. в. (п. в. означает почти всюду), если они равны всюду, за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль.

###### 8.2. Преобразование Фурье функций класса $L_1$

Теорема. Пусть  $f \in L_1$ . Положим

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Тогда  $g(\omega)$  равномерно непрерывна и ограничена при  $-\infty < \omega < \infty$ , причем  $g(\omega) \rightarrow 0$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Если  $g(\omega) \in L_1$ , то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{п. в.}$$

Если  $f(t)$  непрерывна, то последнее равенство имеет место всюду. Заметим, что  $f \in L_1$  не влечет  $g \in L_1$ . Пример будет приведен в § 8.7.

Это классический результат (см. Бехнер [1], стр. 79, и Титчмарш [1], стр. 19). Независимое простое доказательство приведено в § A.3.3.

*Обозначения.* Мы будем пользоваться следующими обозначением и терминологией. Мы пишем

$$\mathcal{F}(f, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

$\mathcal{F}(f, \omega)$  называется *преобразованием Фурье* функции  $f$ . Определим также

$$\mathcal{F}^{-1}(g, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

$\mathcal{F}^{-1}(g, t)$  называется *обратным преобразованием Фурье*. Иногда, если нет необходимости указывать переменную, мы будем писать  $\mathcal{F}(f)$  вместо  $\mathcal{F}(f, \omega)$  и  $\mathcal{F}^{-1}(g)$  вместо  $\mathcal{F}^{-1}(g, t)$ .

Некоторые авторы вместо того, чтобы писать  $(2\pi)^{-1}$  только в обратном преобразовании, вводят множитель  $(2\pi)^{-1/2}$  как в преобразование Фурье, так и в обратное преобразование Фурье. Другие авторы (включая Л. Шварца [1]) пишут в экспоненте множитель  $2\pi i$  вместо  $i$ , чтобы исключить множители перед обоими интегралами<sup>1)</sup>. Но в этом случае множитель  $2\pi$  появляется при дифференцировании. Встречается также (например, у Винера [1] и Рудина [2]) определение преобразования Фурье со знаком минус, а обратного преобразования — со знаком плюс в экспоненте.

### 8.3. Преобразование Фурье функций класса $L_2$

**Теорема Планшереля.** Пусть  $f \in L_2$ . Тогда

$$g(\omega) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(t) e^{i\omega t} dt$$

существует,  $g \in L_2$  и

$$f(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

<sup>1)</sup> В более поздних работах Л. Шварца (см., например, [5]) множитель  $2\pi$  в экспоненте не фигурирует.— Прим. ред.

Это — классический результат, хорошо известный под названием теоремы Планшереля. (Доказательство см. в § A.3.9.) В дальнейшем нам не придется пользоваться этой теоремой. Для наших целей (за исключением некоторых частей §§ 8.4, 8.6 и 8.7) достаточно будет теоремы 8.2. В случае  $L_2$  снова пишем  $g(\omega) = \mathcal{F}(f, \omega)$ ,  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(g, t)$ .

#### 8.4. Формула Парсеваля

**Теорема.** Пусть  $f_1, f_2 \in L_2$  или  $f_1, f_2 \in L_1$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f_1, t) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) \mathcal{F}(f_2, \omega) d\omega$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(f_1, t) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) \mathcal{F}^{-1}(f_2, \omega) d\omega.$$

Для  $f_1, f_2 \in L_1$  эта формула является прямым следствием теоремы Фубини: если  $f_1, f_2 \in L_1$ , то  $|f_1(\omega)f_2(t)| = |f_1(\omega)f_2(t)e^{i\omega t}|$  интегрируема на  $E^2$ . Тогда, по теореме Фубини, повторные интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) f_2(t) dt \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{i\omega t} dt \right) d\omega$$

существуют и равны. Аналогичным образом доказывается формула для  $\mathcal{F}^{-1}$ . Доказательство для случая  $f_1, f_2 \in L_2$  см. в § A.3.10.

#### 8.5. Основания для обобщения определения

Константы, полиномы, функция Хевисайда не входят в классы  $L_1$  или  $L_2$ . Их преобразования Фурье не существуют в обычном смысле. (Не содержатся они также ни в одном из пространств  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .) Например,

$$\int_{-R}^R H(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^R e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega R} - 1).$$

Предел  $e^{i\omega R}$  при  $R \rightarrow \infty$  не существует (за исключением только точки  $\omega = 0$ ). Можно было бы все оставить по-прежнему, но в многочисленных задачах желательно иметь преобразование Фурье и для таких функций.

Если преобразование Фурье существует, то оно представляет собой функцию. Если же в обычном смысле оно не существует, то возникает вопрос, можно ли так расширить определение, чтобы обобщенное преобразование Фурье было распределением. В дальнейшем мы укажем условия, при которых на этот вопрос можно дать положительный ответ.

Разумно потребовать, чтобы обобщенные преобразования Фурье функций какого-то класса представляли собой распределения. Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда  $e^{i\omega t}$  будет основной функцией, и мы полагаем

$$\mathcal{F}(T, \omega) = \langle T_t, e^{i\omega t} \rangle.$$

В дальнейшем мы докажем, что  $\mathcal{F}(T, \omega)$  — аналитическая функция  $\omega$  при всех  $\omega$ . Чтобы сохранить *свойство обращения* преобразования Фурье, надо определить обратное преобразование Фурье от  $\mathcal{F}(T, \omega)$  так, чтобы оно давало  $T$ . Следовательно, обратные преобразования Фурье (и аналогично преобразования Фурье) некоторых целых функций должны быть *распределениями*. Пример:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\delta, \omega) &= \langle \delta, e^{i\omega t} \rangle = 1, \\ \mathcal{F}(\delta^{(n)}, \omega) &= \langle \delta^{(n)}, e^{i\omega t} \rangle = (-i\omega)^n.\end{aligned}$$

Таким образом, если должно быть определено преобразование Фурье константы 1, то оно должно равняться  $\delta$ -функции Дирака, а преобразование Фурье (и обратное преобразование Фурье) полинома должно быть линейной комбинацией  $\delta$ -функции Дирака и ее производных.

## 8.6. Представление Коши преобразований Фурье функций классов $L_1$ и $L_2$

В следующей теореме устанавливается связь между представлением Коши преобразования Фурье функций класса  $L_2$  и *разложением* преобразования Фурье на две части, каждая из которых дает аналитическую

функцию в полуплоскости. Разложенное преобразование сходится в классах функций, более широких чем  $L_2$ . В следующих параграфах этот факт будет положен в основу определения обобщенного преобразования Фурье.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L_2$ . Положим

$$g(\omega) = \mathcal{F}(f, \omega).$$

Пусть  $\hat{g}(z)$  – представление Коши функции  $g$ ,  $z = x + iy$ . Тогда

$$\hat{g}(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} f(t) e^{itz} dt & \text{при } y > 0, \\ - \int_{-\infty}^0 f(t) e^{itz} dt & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

**Доказательство.** Если  $f \in L_2$ , то  $g \in L_2$ ; отсюда  $\hat{g}(z)$ , определяемая следующим образом:

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - z} d\omega,$$

существует при  $y \neq 0$ . Имеем

$$\frac{1}{2\pi i(\omega - z)} = \begin{cases} \mathcal{F}^{-1}(H(t)e^{itz}, \omega) & \text{при } y > 0, \\ -\mathcal{F}^{-1}(H(-t)e^{itz}, \omega) & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Это тождество проверяется прямым вычислением входящих в него интегралов.

Из формулы Парсеваля (для функций класса  $L_2$ ), так как  $f$  и  $H(t)e^{itz} \in L_2$ , имеем

$$\hat{g}(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} f(t) e^{itz} dt & \text{при } y > 0, \\ - \int_{-\infty}^0 f(t) e^{itz} dt & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

**Теорема 2.** Утверждение теоремы 1 остается в силе, если предположение  $f \in L_2$  заменить предположением  $f \in L_1$  и  $g \in L_1$ .

**Доказательство.** Из  $g \in L_1$  следует, что  $\hat{g}(z)$  существует. Остальная часть доказательства остается прежней с той лишь разницей, что мы пользуемся формулой Парсеваля для функций класса  $L_1$ .

**Теорема 3.** Пусть  $g \in L_2$ ; положим

$$\hat{f}(t) = \mathcal{F}^{-1}(g, t)$$

и обозначим через  $\tilde{f}(z)$  представление Коши функции  $f$ . Тогда

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 g(\omega) e^{-i\omega z} d\omega & \text{при } y > 0, \\ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega z} d\omega & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Теорема остается верной, если условие  $g \in L_2$  заменить условием  $g \in L_1$  и  $f \in L_1$ .

## 8.7. Преобразование Фурье $H(t)e^{itz}$ и $(\omega - z)^{-1}$

**Следствие.**

$$\mathcal{F}^{-1}(H(t)e^{itz}, \omega) = \frac{1}{2\pi i(\omega - z)} \quad \text{при } y > 0,$$

$$\mathcal{F}^{-1}(H(-t)e^{itz}, \omega) = \frac{-1}{2\pi i(\omega - z)} \quad \text{при } y < 0$$

и

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi i(\omega - z)}, t\right) = H(t)e^{itz} \quad \text{n. в. при } y > 0,$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi i(\omega - z)}, t\right) = -H(-t)e^{itz} \quad \text{n. в. при } y < 0.$$

С первыми двумя тождествами мы уже встречались при доказательстве теоремы 8.6.1; два других тождества следуют из первых с помощью теоремы Планшереля.

### 8.8. Распределения медленного роста. Обобщенное преобразование Фурье

**Определение 1.** Пусть  $f$  — непрерывная функция и

$$|f| = O(|t|^\alpha)$$

при некотором вещественном  $\alpha$ . Тогда мы называем  $f$  функцией медленного роста<sup>1</sup>).

**Определение 2.** Пусть  $f$  — функция медленного роста. Положим

$$\hat{\mathcal{F}}(f, z) = \begin{cases} \int_0^\infty f(t) e^{itz} dt & \text{при } y > 0, \\ - \int_{-\infty}^0 f(t) e^{itz} dt & \text{при } y < 0, \end{cases}$$

а также

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1}(f, z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-itz} dt & \text{при } y > 0, \\ \frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty f(t) e^{-itz} dt & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Функция  $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$  называется „обобщенным преобразованием Фурье функции  $f$ “, а  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}(f, z)$  — „обобщенным обратным преобразованием Фурье функции  $f$ “.

**Лемма.**  $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$  и  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}(f, z)$  — аналитические функции при  $y \neq 0$ . Имеют место следующие тождества между  $\hat{\mathcal{F}}$  и обычным преобразованием Фурье: пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\hat{\mathcal{F}}(f, x + i\varepsilon) = \mathcal{F}(f(t)H(t)e^{-\varepsilon t}, x),$$

$$\hat{\mathcal{F}}(f, x - i\varepsilon) = -\mathcal{F}(f(t)H(-t)e^{\varepsilon t}, x).$$

<sup>1)</sup> В оригинале tempered function.— Прим. ред.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}(f, x + ie) - \hat{\mathcal{F}}(f, x - ie) &= \mathcal{F}(e^{-\epsilon|t|}f(t), x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon|t|}f(t)e^{itx} dt.\end{aligned}$$

**Доказательство.** Эти тождества следуют непосредственно из определений. Чтобы доказать аналитичность  $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$  при  $y \neq 0$ , заметим, что интеграл сходится равномерно на любом множестве  $\{z: |y| \geq \epsilon\}$ . Значит, можно дифференцировать под знаком интеграла; следовательно, функция  $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$  — аналитическая в любой области  $\{z: |y| > \epsilon\}$  и потому аналитическая в множестве  $\{z: y \neq 0\}$ . Аналогичные соображения применимы и к  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}(f, z)$ . Лемма доказана. Обобщенное преобразование Фурье впервые изучалось Карлеманом [1], стр. 47—52.

### 8.9. Теорема об обращении $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$

**Теорема.** Пусть  $f$  — функция медленного роста. Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\mathcal{F}}(f, x + ie) - \hat{\mathcal{F}}(f, x - ie)] e^{-ixt} dt = e^{-\epsilon|t|}f(t)$$

и

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\hat{\mathcal{F}}(f, x + ie) - \hat{\mathcal{F}}(f, x - ie), t) = f(t).$$

**Доказательство.** Если  $f$  медленного роста, то  $e^{-\epsilon|t|}f(t) \in L_1$ . Значит,  $e^{-\epsilon|t|}f(t)$  непрерывна. Теперь теорема следует из результатов §§ 8.3 и 8.8.

### 8.10. Связь с преобразованием Лапласа

Пусть  $f$  — функция медленного роста. Тогда

$$L(f, s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

называется преобразованием Лапласа функции  $f$ .  $L(f, s)$  — аналитическая функция  $s$  при  $\operatorname{Re} s > 0$ .

$\hat{\mathcal{F}}$  и  $L$  связаны следующими тождествами: пусть  $\epsilon > 0$ , тогда

$$\hat{\mathcal{F}}(f, x + i\epsilon) = L(f, -i(x + i\epsilon))$$

и

$$\hat{\mathcal{F}}(f, x - i\epsilon) = -L(f(-t), i(x - i\epsilon)).$$

Аналитичность  $L(f, s)$  при  $\operatorname{Re} s > 0$  следует из аналитичности  $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$  при  $\operatorname{Im} z > 0$ .

### 8.11. Преобразование Фурье функций из $(\mathcal{D})$

Пусть  $f$  — функция медленного роста. Тогда  $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$  определено и возникает вопрос (ответ см. в § 8.16), когда  $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$  является аналитическим представлением распределения. Это так, если

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\mathcal{F}}(f, x + i\epsilon) - \hat{\mathcal{F}}(f, x - i\epsilon)] \varphi(x) dx = \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{F}}(e^{-\epsilon |t|} f(t), x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

является линейным функционалом на  $(\mathcal{D})$ . С помощью формулы Парсеваля получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{F}}(f(t) e^{-\epsilon |t|}, x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\epsilon |t|} \hat{\mathcal{F}}(\varphi, t) dt.$$

Поэтому поставленный выше вопрос приводит к задаче: описать, какими свойствами обладает  $\hat{\mathcal{F}}(\varphi, t)$  для  $\varphi \in (\mathcal{D})$ .

Пусть  $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{i\omega z} d\omega$ . Так как  $\varphi$  имеет компактный носитель, то этот интеграл сходится равномерно на любом компактном множестве плоскости  $z$ . Следовательно, можно поменять порядок интегрирования и дифференцирования. Значит,  $\Phi(z)$  — аналитическая функция во всей плоскости  $z$ .

Имеем  $\varphi \in L_1$ . Отсюда (по теореме 8.3)  $\Phi(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Далее,  $\varphi$  имеет компактный носитель. Поэтому  $\varphi^{(m)} \in L_1$  при любом  $m$ . Следовательно, при  $|x| \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(m)}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = (-ix)^m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{i\omega x} d\omega \rightarrow 0.$$

Значит, при любом  $m \geq 0$

$$|x|^m \Phi(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

Пусть  $p \geq 0$ . Тогда

$$\Phi^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) (it)^p e^{itx} dt.$$

Положим  $\psi(t) = (it)^p \varphi(t)$ . Тогда  $\psi(t) \in (\mathcal{D})$ . Те же рассуждения, что и выше, применимы к

$$\Phi^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{itx} dt.$$

Отсюда  $|x|^m \Phi^{(p)}(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$  при любом  $m \geq 0$ . Подытожим эти факты в виде следующей леммы:

**Лемма.** Пусть  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Положим  $\Phi(z) = \mathcal{F}(\varphi, z)$ . Тогда  $\Phi(z)$  — аналитическая функция во всей плоскости  $z$  и при любых  $m \geq 0$ ,  $p \geq 0$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m |\Phi^{(p)}(x)| = 0.$$

## 8.12. Пространство (§) быстро убывающих функций

Свойства преобразований Фурье функций из  $(\mathcal{D})$  очень важны. Мы воспользуемся ими (за исключением аналитичности) для определения нового пространства функций.

**Определение.** Пусть  $(\mathcal{S})$  — линейное (векторное) пространство всех функций  $\Phi(t)$  класса  $(C^\infty)$ , таких, что при любых  $m \geq 0$ ,  $p \geq 0$

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^m \Phi^{(p)}(t) = 0.$$

Говорят, что последовательность функций  $\Phi_v \in (\mathcal{S})$  сходится к нулю в смысле  $(\mathcal{S})$ , если при любых  $m \geq 0$ ,  $p \geq 0$  последовательность  $\{|t|^m \Phi_v^{(p)}(t)\}$  сходится к нулю равномерно на  $E^1$ .

Пространство  $(\mathcal{S})$  называется пространством *быстро убывающих функций* класса  $(C^\infty)$ . В силу определения  $(\mathcal{S})$  лемму 8.11 можно сформулировать следующим образом:

**Лемма.** Пусть  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , и пусть  $\Phi(z) = \mathcal{F}(\varphi, z)$ . Тогда  $\Phi(x) \in (\mathcal{S})$  и  $\Phi(z)$  — целая (аналитическая) функция.

### 8.13. Преобразование Фурье функций из $(\mathcal{S})$

**Лемма.** Предположим, что  $\varphi \in (\mathcal{S})$  и  $\Phi(t) = \mathcal{F}(\varphi, t)$ . Тогда  $\Phi \in (\mathcal{S})$ .

**Доказательство.** Если  $\varphi \in (\mathcal{S})$ , то  $\varphi \in L_1$  и, значит,  $\Phi(t) \rightarrow 0$  при  $|t| \rightarrow \infty$ . Если  $\varphi \in (\mathcal{S})$ , то  $\varphi^{(m)}(\omega) \in (\mathcal{S})$ ; значит,  $|t|^m \Phi(t) \rightarrow 0$  при  $|t| \rightarrow \infty$  в силу соображений, использованных в § 8.11. Кроме того, если  $\varphi \in (\mathcal{S})$ , то  $|\omega|^p \varphi(\omega) \in (\mathcal{S})$ . Отсюда следует, как и в § 8.11, что  $|t|^m \Phi^{(p)}(t) \rightarrow 0$  при  $|t| \rightarrow \infty$ . Значит,  $\Phi(t) \in (\mathcal{S})$ . Лемма доказана.

### 8.14. Распределения медленного роста. Пространство $(\mathcal{S}')$

**Определение.** Обозначим через  $(\mathcal{S}')$  пространство всех линейных функционалов на  $(\mathcal{S})$ , непрерывных относительно сходимости в смысле  $(\mathcal{S})$ . Распределения из  $(\mathcal{S}')$  называются распределениями медленного роста<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В оригинале tempered distributions. — Прим. ред.

Заметим, что  $(\mathcal{D}) \subset (\mathcal{S}) \subset (\mathcal{E})$ . Последовательность, сходящаяся в  $(\mathcal{D})$ , сходится в  $(\mathcal{S})$ , а последовательность, сходящаяся в  $(\mathcal{S})$ , сходится в  $(\mathcal{E})$ . Значит,  $(\mathcal{D}') \supset (\mathcal{S}') \supset (\mathcal{E}')$ .

### 8.15. Преобразование Фурье распределений медленного роста

**Определение.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ . Определим преобразование Фурье  $\mathcal{F}(T)$  распределения  $T$  соотношением

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T_t, \mathcal{F}(\varphi, t) \rangle.$$

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ . Тогда  $\mathcal{F}(T)$  — распределение из  $(\mathcal{S}')$ .

**Доказательство.** Если  $\varphi \in (\mathcal{S})$ , то по лемме 8.13

$$\Phi(t) = \mathcal{F}(\varphi, t) \in (\mathcal{S}).$$

Кроме того,

$$\mathcal{F}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2, t) = \alpha\mathcal{F}(\varphi_1, t) + \beta\mathcal{F}(\varphi_2, t).$$

Значит,  $\mathcal{F}(T)$  — линейный функционал.

Далее, если  $\{\varphi_v\}$  сходится к функции  $\varphi_0$  в смысле  $(\mathcal{S})$ , то  $\{\mathcal{F}(\varphi_v, t)\}$  сходится к  $\mathcal{F}(\varphi_0, t)$  в смысле  $(\mathcal{S})$  (см. задачу 1). Значит,  $\mathcal{F}(T)$  — непрерывный функционал на  $(\mathcal{S})$ , и потому  $\mathcal{F}(T) \in (\mathcal{S}')$ . Теорема доказана.

### 8.16. Преобразование $\widehat{\mathcal{F}}$ функций медленного роста

**Теорема.** Пусть  $f$  — функция медленного роста. Тогда

$$\langle \mathcal{F}(f), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{\mathcal{F}}(f, x + i\varepsilon) - \widehat{\mathcal{F}}(f, x - i\varepsilon)) \varphi(x) dx$$

для всех  $\varphi \in (\mathcal{S})$ .

**Замечание.** Если  $f(t)$  — функция медленного роста, то  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$  — распределение медленного ро-

ста (см. задачу 2). Обозначим распределение, порождаемое функцией  $f(t)$ , снова через  $\hat{f}$ , тогда  $\hat{\mathcal{F}}(\hat{f})$  — преобразование Фурье распределения  $\hat{f}$  в смысле § 8.15.

**Доказательство.** Так как

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{f}, x + i\epsilon) - \hat{\mathcal{F}}(\hat{f}, x - i\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon|t|} f(t) e^{ixt} dt,$$

то, на основании формулы Парсеваля,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\mathcal{F}}(\hat{f}, x + i\epsilon) - \hat{\mathcal{F}}(\hat{f}, x - i\epsilon)) \Phi(x) dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon|t|} f(t) \Phi(t) dt, \end{aligned}$$

где  $\Phi(t) = \mathcal{F}(\Phi, t)$ . Но  $\Phi \in (\mathbb{S})$ . Значит, подинтегральное выражение последнего интеграла сходится при  $\epsilon \rightarrow +0$  к  $f(t)\Phi(t)$  равномерно на всей оси  $t$ . Поэтому интеграл сходится при  $\epsilon \rightarrow +0$  к  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Phi(t) dt$ , который по определению равен  $\langle \mathcal{F}(\hat{f}), \Phi \rangle$ . Теорема доказана.

### 8.17. Обратное преобразование Фурье

**Определение.** Пусть  $T \in (\mathbb{S}')$ . Тогда определим

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \Phi \rangle = \langle T_t, \mathcal{F}^{-1}(\Phi, t) \rangle.$$

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathbb{S}')$ . Тогда  $\mathcal{F}^{-1}(T) \in (\mathbb{S}')$  и

$$\langle \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)), \Phi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)), \Phi \rangle = \langle T, \Phi \rangle.$$

**Доказательство.**  $\mathcal{F}^{-1}(T) \in (\mathbb{S}')$  по тем же соображениям, что и  $\mathcal{F}(T) \in (\mathbb{S}')$ . По определению

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)), \Phi \rangle &= \langle \mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}(\Phi, t) \rangle = \\ &= \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\Phi, t)) \rangle = \langle T, \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично  $\langle \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)), \Phi \rangle = \langle T, \Phi \rangle$ :

### 8.18. Производные в $(\mathcal{S}')$

Определим производные, как обычно.

**Определение.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ . Тогда полагаем  
 $\langle T^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \langle T, \varphi^{(m)} \rangle$  для всех  $\varphi \in (\mathcal{S})$ .

**Теорема 1.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ . Тогда  $T^{(m)} \in (\mathcal{S}')$  при любом  $m > 0$ .

**Доказательство.** Если  $\varphi \in (\mathcal{S})$ , то  $\varphi^{(m)} \in (\mathcal{S})$ . Кроме того, если  $\{\varphi_v\} \xrightarrow{(\mathcal{S})} \varphi_0$ , то  $\{\varphi_v^{(m)}\} \xrightarrow{(\mathcal{S})} \varphi_0^{(m)}$ . Отсюда  $T^{(m)} \in (\mathcal{S}')$ .

**Теорема 2.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ . Тогда  $\mathcal{F}(T^{(m)}) = (-it)^m \mathcal{F}(T)$ .

Заметим, что  $(-it)^m$  есть мультипликатор в  $(\mathcal{S})$  (задача 7).

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(T^{(m)}), \varphi(t) \rangle &= \langle T^{(m)}, \mathcal{F}(\varphi, \omega) \rangle = \\ &= (-1)^m \left\langle T, \frac{d^m}{d\omega^m} \mathcal{F}(\varphi, \omega) \right\rangle = \langle T, \mathcal{F}((-it)^m \varphi(t), \omega) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{F}(T), (-it)^m \varphi(t) \rangle = \langle (-it)^m \mathcal{F}(T), \varphi(t) \rangle \end{aligned}$$

для всех  $\varphi \in (\mathcal{S})$ . Отсюда  $\mathcal{F}(T^{(m)}) = (-it)^m \mathcal{F}(T)$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ . Положим  $S = \mathcal{F}(T)$ . Тогда  $S^{(m)} = \mathcal{F}((i\omega)^m T)$ .

**Доказательство.** Так как

$$\begin{aligned} \langle S^{(m)}, \varphi(t) \rangle &= (-1)^m \langle S, \varphi^{(m)}(t) \rangle = \\ &= (-1)^m \langle T, \mathcal{F}(\varphi^{(m)}, \omega) \rangle = \langle T, (i\omega)^m \mathcal{F}(\varphi, \omega) \rangle = \\ &= \langle (i\omega)^m T, \mathcal{F}(\varphi, \omega) \rangle = \langle \mathcal{F}((i\omega)^m T), \varphi \rangle \end{aligned}$$

для всех  $\varphi \in (\mathcal{S})$ , то  $S^{(m)} = \mathcal{F}((i\omega)^m T)$ .

### 8.19. Первообразные преобразований Фурье функций класса $(C^1)$

**Теорема.** Пусть  $f$  — функция медленного роста класса  $(C^1)$  и  $T = \mathcal{F}(f)$ . Тогда  $S = \frac{1}{t} \mathcal{F}\left(P\left(\frac{1}{t}\right)f(t)\right)$  есть первообразная  $T$ .

**Доказательство.** На основании задачи 4

$$P\left(\frac{1}{t}\right)f(t) \in (\mathcal{S}').$$

Значит,

$$S = \frac{1}{t} \mathcal{F}\left(P\left(\frac{1}{t}\right)f(t)\right)$$

определен и  $S \in (\mathcal{S}')$ . Отсюда по теореме 8.18.3

$$S' = \frac{1}{t} \mathcal{F}\left(itP\left(\frac{1}{t}\right)f(t)\right) = \mathcal{F}(f) = T.$$

Следовательно,  $S$  — первообразная от  $T$ . Аналогично получаем

$$\frac{1}{t^m} \mathcal{F}\left(P\left(\frac{1}{t^m}\right)f(t)\right)$$

— первообразная порядка  $m$  от  $T = \mathcal{F}(f)$ , если только  $f$  — функция медленного роста класса  $(C^m)$  (задача 5).

### 8.20. Производные функций медленного роста

**Лемма.** Производная любого конечного порядка от функции медленного роста есть распределение медленного роста.

Это сразу же следует из теоремы 8.18.1 и того факта, что функция медленного роста порождает распределение медленного роста.

### 8.21. Распределения медленного роста как производные конечного порядка от функций медленного роста

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ . Тогда существуют функции медленного роста  $f$  и целое число  $m$ , такие, что  $f^{(m)} = T$ .

Иными словами, любое распределение медленного роста есть производная конечного порядка от функции медленного роста, т. е. от непрерывной функции, которая растет не быстрее полинома.

Доказательство этой теоремы дано в § A.3.12. Лемма 8.20 и теорема 8.21 вместе дают полную характеристизацию распределений медленного роста.

## 8.22. Обобщенное преобразование Фурье распределений медленного роста

**Определение.** Пусть  $T = f^{(m)}$ ,  $f$  — функция медленного роста. Положим  $\hat{\mathcal{F}}(T, z) = (-iz)^m \hat{\mathcal{F}}(f, z)$ . Мы называем  $\hat{\mathcal{F}}(T, z)$  обобщенным преобразованием Фурье распределения  $T$ .

**Замечание.** Если  $f^{(m)} = T$ , то и  $(f + P)^{(m)} = T$ , где  $P$  — полином степени, не превосходящий  $m - 1$ .

Имеем

$$\hat{\mathcal{F}}((it)^k, z) = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi iz^{k+1}}$$

(см. пример 8.25.2). Значит,  $(-iz)^m \hat{\mathcal{F}}(P, z)$  есть полином степени не выше  $m - 1$ . Его „скакок“ на оси  $x$  равен нулю. Отсюда, если  $(-iz)^m \hat{\mathcal{F}}(f, z)$  дает представление распределения, то  $(-iz)^m \hat{\mathcal{F}}(f + P, z)$  дает представление того же распределения.

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$  и  $\hat{\mathcal{F}}(T, z)$  — обобщенное преобразование Фурье  $T$ . Тогда  $\hat{\mathcal{F}}(T, z)$  есть аналитическое представление  $\mathcal{F}(T)$  в следующем смысле:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \langle \hat{\mathcal{F}}(T, x + ie) - \hat{\mathcal{F}}(T, x - ie), \varphi(x) \rangle = \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle$$

для всех  $\varphi \in (\mathcal{S})$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 8.21 существуют функция медленного роста  $f$  и целое число  $m$ , такие, что  $f^{(m)} = T$ , а  $\hat{\mathcal{F}}(T, z)$  определяется как

$(-iz)^m \hat{\mathcal{F}}(f, z)$ . Отсюда

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}(T, x + i\varepsilon) - \hat{\mathcal{F}}(T, x - i\varepsilon) &= \\ = (-i)^m [(x + i\varepsilon)^m \hat{\mathcal{F}}(f, x + i\varepsilon) - (x - i\varepsilon)^m \hat{\mathcal{F}}(f, x - i\varepsilon)] &= \\ = (-ix)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\varepsilon|t|} e^{itx} dt + \\ + m(-i)^m x^{m-1} (i\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\varepsilon|t|} [H(t) - H(-t)] e^{itx} dt + \\ &\quad + \text{члены высшего порядка по } \varepsilon.\end{aligned}$$

Проинтегрируем теперь это равенство, умножив его на произвольную основную функцию  $\Phi \in (\mathcal{S})$ ; тогда при  $\varepsilon \rightarrow +0$  первый член стремится к  $\langle \mathcal{F}(T), \Phi \rangle$ . Второй член содержит множитель  $\varepsilon$ , третий — множитель  $\varepsilon^2$  и т. д. Второй член, если опустить множитель  $\varepsilon$ , стремится к  $\langle \mathcal{F}(S), \Phi \rangle$ , где  $S = mg^{(m-1)}$ ,  $g = f(t)(H(t) - H(-t))$ ;  $g$  порождает распределение из  $(\mathcal{S}')$ ; следовательно,  $S \in (\mathcal{S}')$ ; отсюда  $\langle \mathcal{F}(S), \Phi \rangle$  конечно, а потому ввиду наличия множителя  $\varepsilon$  второй член стремится к нулю. Аналогичным образом устанавливается, что все остальные члены стремятся к нулю. Теорема доказана.

*Замечание.* В некоторых случаях просто вычислить обобщенное преобразование Фурье и в то же время трудно определить  $\mathcal{F}(T)$  с помощью формулы  $\langle \mathcal{F}(T), \Phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\Phi) \rangle$ .

Карлеман [1], по-видимому, был первым автором, рассмотревшим обобщенное преобразование Фурье (хотя он и не рассматривал распределения). Л. Шварц, с другой стороны, рассматривает преобразование Фурье лишь в смысле определения § 8.15.

## 8.23. Эквивалентность $\langle T_\omega, e^{i\omega t} \rangle$ и $\mathcal{F}(T)$ для $T \in (\mathcal{E}')$

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ ,  $\Phi \in (\mathcal{S})$ . Тогда

$$\langle \mathcal{F}(T), \Phi \rangle = \langle \langle T_\omega, e^{i\omega t} \rangle, \Phi(t) \rangle.$$

Заметим, что  $e^{i\omega t} \in (\mathcal{E})$ , и, значит,  $\langle T_\omega, e^{i\omega t} \rangle$  определено. Часто проще вычислять  $\langle T_\omega, e^{i\omega t} \rangle$ , чем находить  $\mathcal{F}(T)$  с помощью определения 8.15.

**Доказательство.** По определению 8.15 имеем  $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi, \omega) \rangle$ . Интеграл

$$\mathcal{F}(\varphi, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{i\omega t} dt$$

можно аппроксимировать суммами Римана:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{i\omega t} dt = \lim \sum_{v=1}^N \varphi(t_v) e^{i\omega t_v} \Delta t_v$$

Суммы эти сходятся к  $\mathcal{F}(\varphi, \omega)$  в смысле  $(\mathcal{E})$  (см. задачу 9). Отсюда

$$\begin{aligned} \langle T, \mathcal{F}(\varphi, \omega) \rangle &= \left\langle T, \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^N \varphi(t_v) e^{i\omega t_v} \Delta t_v \right\rangle = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^N \langle T, e^{i\omega t_v} \rangle \varphi(t_v) \Delta t_v = \int_{-\infty}^{\infty} \langle T, e^{i\omega t} \rangle \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### 8.24. Аналитичность $\langle T_\omega, e^{i\omega z} \rangle$ для $T \in (\mathcal{E}')$

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда  $\langle T_\omega, e^{i\omega z} \rangle$  — аналитическая функция во всей плоскости  $z$ .

Иными словами,  $\langle T_\omega, e^{i\omega z} \rangle$  — целая функция.

**Доказательство.**

$$\frac{d}{dz} \langle T_\omega, e^{i\omega z} \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle T_\omega, \frac{e^{i\omega(z+h)} - e^{i\omega z}}{h} \right\rangle.$$

Но  $(e^{i\omega(z+h)} - e^{i\omega z})/h$  сходится в смысле  $(\mathcal{E})$  к

$$\frac{d}{dz} e^{i\omega z} = i\omega e^{i\omega z}.$$

Отсюда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\langle T_\omega, \frac{e^{i\omega(z+h)} - e^{i\omega z}}{h} \right\rangle = \langle T_\omega, i\omega e^{i\omega z} \rangle.$$

Значит, комплексная производная  $\frac{d}{dz} \langle T_\omega, e^{i\omega z} \rangle$  существует для любого комплексного  $z$ . Следовательно,  $\langle T_\omega, e^{i\omega z} \rangle$  есть аналитическая функция при всех  $z$ . Теорема доказана.

## 8.25. Примеры

Пример 1. Пусть 1 обозначает распределение, порождаемое функцией  $\equiv 1$ . Тогда

$$\mathcal{F}(\delta) = 1.$$

Действительно,  $\langle \mathcal{F}(\delta), \varphi \rangle = \langle \langle \delta_\omega, e^{i\omega t} \rangle, \varphi(t) \rangle = \langle 1, \varphi \rangle$ . С помощью теоремы об обращении (теорема 8.17) мы имеем

$$\mathcal{F}^{-1}(1) = \delta.$$

Пример 2. Аналогично  $\mathcal{F}^{-1}(\delta) = 1/2\pi$ ,  $(1/2\pi)\mathcal{F}(1) = \delta$ ,

$$\mathcal{F}^{-1}((it)^p) = \delta^{(p)}, \quad \mathcal{F}((-it)^p) = 2\pi(-1)^p \delta^{(p)},$$

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1}((it)^p, z) = \hat{\delta}^{(p)}(z), \quad \hat{\mathcal{F}}((-it)^p, z) = 2\pi(-1)^p \hat{\delta}^{(p)}(z),$$

$$\hat{\mathcal{F}}(\delta^{(p)}, z) = \begin{cases} (-iz)^p & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Пример 3.  $\mathcal{F}(H) = 2\pi\delta_+$ .

В силу изложенного в § 8.22 достаточно показать, что  $\hat{\mathcal{F}}(H, z) = 2\pi\hat{\delta}_+(z)$ . Имеем

$$\hat{\mathcal{F}}(H, z) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{itz} dt = -1/iz & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Отсюда  $\hat{\mathcal{F}}(H, z) = 2\pi\hat{\delta}_+(z)$ . Аналогично имеем

$$\hat{\mathcal{F}}(H(-t)) = 2\pi\hat{\delta}_-.$$

Пример 4. Используя результат § 8.7, имеем

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{t+t_0}, \omega\right) = -2\pi i e^{-it_0\omega} H(-\omega) \quad \text{при } \operatorname{Im} t_0 > 0$$

и

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{t+t_0}, \omega\right) = 2\pi i e^{-it_0\omega} H(\omega) \quad \text{при } \operatorname{Im} t_0 < 0.$$

Выбирая  $t_0 = i\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , и устремляя  $\varepsilon \rightarrow +0$ , находим  $\mathcal{F}(\delta_+, \omega) = H(-\omega)$ . Аналогично  $\mathcal{F}(\delta_-, \omega) = H(\omega)$ .

Пример 5.  $\mathcal{F}(P(1/p), \omega) = \pi i \varepsilon(\omega)$ , где  $\varepsilon(\omega) = H(\omega) - H(-\omega)$ . Для вывода этой формулы воспользуемся тождеством

$$P(1/p) = \pi i (\delta_- - \delta_+)$$

(см. тождество 7.8 (3)).

Пример 6.

$$\mathcal{F}\left(P\left(\frac{1}{t^n}\right), \omega\right) = \frac{\pi i (\omega)^{n-1} \varepsilon(\omega)}{(n-1)!}.$$

Эта формула устанавливается с помощью примера 5 и тождества 7.8 (4):

$$\hat{P}\left(\frac{1}{t^n}\right)(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z^n} \\ -\frac{1}{2z^n} \end{cases} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \hat{P}\left(\frac{1}{t}\right)(z).$$

Пример 7.  $\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t}, \omega) = 2\pi \delta(\omega + \omega_0)$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(e^{i\omega_0 t}, \omega), \varphi(\omega) \rangle &= \langle e^{i\omega_0 t}, \mathcal{F}(\varphi, t) \rangle = \\ &= \left\langle 1, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{it(\omega+\omega_0)} d\omega \right\rangle = \\ &= \left\langle 1, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega - \omega_0) e^{it\omega} d\omega \right\rangle = \\ &= \langle 2\pi \delta, \varphi(\omega - \omega_0) \rangle = 2\pi \varphi(-\omega_0) = \\ &= \langle 2\pi \delta(\omega + \omega_0), \varphi(\omega) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t}, \omega) = 2\pi \delta(\omega + \omega_0).$$

Пример 8.  $\mathcal{F}(\sin \omega_0 t, \omega) = \frac{\pi}{i} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ .

**Доказательство.** Так как  $\sin \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$ , то в силу примера 7 мы получаем требуемое тождество. Аналогично получаем

$$\mathcal{F}(\cos \omega_0 t, \omega) = \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)].$$

**Пример 9.**  $\mathcal{F}(e^{-t^2}, \omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$ .

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-t^2}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t - t^2} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-i\omega/2)^2 - \omega^2/4} dt = \\ &= e^{-\omega^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t'^2} dt'.\end{aligned}$$

Но, как хорошо известно,  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t'^2} dt' = \sqrt{\pi}$ . Формула доказана.

**Пример 10.**

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-z} dt &= \hat{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4}, z\right) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/4+izt} dt & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/4+izt} dt & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Но

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/4+izt} dt = \frac{e^{-z^2}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(t/2-iz)^2} dt.$$

Замена переменных

$$u = \frac{t}{2} - iz$$

дает

$$\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-iz}^{R/2-iz} e^{-u^2} du.$$

Теперь можно прибавить интеграл от 0 до  $iz$ , а затем сдвинуть путь интегрирования на вещественную ось; это дает

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{e^{-z^2}}{2} - \frac{e^{-z^2/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-iz} e^{-u^2} du \quad \text{при } y > 0.$$

Аналогично для  $y < 0$  находим

$$-\frac{e^{-z^2}}{2} + \frac{e^{-z^2/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{iz} e^{-u^2} du.$$

Это — ответ на задачу из § 7.16.

Заметим, что скачок второго члена равен нулю. Отсюда *аналитическое представление* дается простой формулой

$$\begin{cases} \frac{e^{-z^2}}{2} & \text{при } y > 0, \\ -\frac{e^{-z^2}}{2} & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

### 8.26. $\hat{\mathcal{F}}(t^a, z)$ , $a$ — вещественное. Дифференцирование и интегрирование дробного порядка

Мы имеем

$$\hat{\mathcal{F}}(t^a, z) = \begin{cases} \int_0^\infty t^a e^{itz} dt, & y > 0, \\ - \int_{-\infty}^0 t^a e^{itz} dt, & y < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\int_0^\infty t^a e^{itz} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t^a e^{itz} dt, \quad y > 0.$$

Сделаем замену переменных:

$$t = \frac{iu}{z}, \quad dt = \frac{i}{z} du.$$

Тогда

$$\int_0^R t^a e^{itz} dt = \frac{i}{z} \int_0^{-izR} \left(\frac{iu}{z}\right)^a e^{-u} du.$$

Поворачивая путь интегрирования  $[0, -iz\infty)$  в  $[0, \infty)$ , находим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{i}{z} \int_0^{-izR} \left(\frac{iu}{z}\right)^a e^{-u} du = \frac{i}{z} \int_0^\infty \left(\frac{iu}{z}\right)^a e^{-u} du.$$

Нужно только, чтобы при повороте путь интегрирования не проходил через разрез функции  $(iu/z)^a$ . Это приводит к следующему условию:

$$0 < \arg z < \pi, \quad \text{если} \quad t^a = e^{i \frac{\pi}{2} a}.$$

Но

$$\int_0^\infty u^a e^{-u} du = \Gamma(a+1),$$

где  $\Gamma$  есть гамма-функция. Отсюда  $\hat{\mathcal{F}}(t^\alpha, z) = i|z^{\alpha+1}| \times \times \Gamma(\alpha + 1)$ , где  $t^{\alpha+1} = e^{i\frac{\pi}{2}(\alpha+1)}$ ,  $0 < \arg z < \pi$ .

Аналогично получаем при

$$\hat{\mathcal{F}}(t^\alpha, z) = \left(\frac{i}{z}\right)^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1),$$

где  $i^{\alpha+1} = e^{i\frac{\pi}{2}(\alpha+1)}$ ,  $\pi < \arg z < 2\pi$ . Таким образом, при нецелом  $\alpha$  функция  $z^{-\alpha-1}$  имеет разрез вдоль положительной вещественной оси.

*Замечание.* Для целых  $\alpha > 0$  имеем

$$\mathcal{F}((it)^\alpha, z) = 2\pi \delta^{(\alpha)} = \frac{i\alpha! (-1)^\alpha}{z^{\alpha+1}}.$$

Но  $\delta^{(\alpha)}$  — оператор дифференцирования порядка  $\alpha$ :

$$(-1)^\alpha \langle \delta^{(\alpha)}, \varphi(t - t_0) \rangle = \varphi^{(\alpha)}(t_0).$$

При  $\alpha = 0$  мы получаем тождественный оператор, а при отрицательных целых  $\alpha$ ,  $\mathcal{F}(t^\alpha P(t^\alpha))$  есть оператор интегрирования [ $P(t^\alpha)$  — главная часть]. Поэтому при нецелых  $\alpha$  можно интерпретировать  $\mathcal{F}((it)^\alpha, z)$  как оператор, обобщающий дифференцирование и интегрирование на нецелый порядок.

## 8.27. Пространство ( $\mathcal{Z}$ )

Пока мы определили преобразование Фурье для пространства ( $\mathcal{S}'$ ), но не для ( $\mathcal{D}'$ ). Л. Шварц [1] рассматривает лишь преобразование Фурье распределений из ( $\mathcal{S}'$ ). Пространство ( $\mathcal{S}'$ ) обладает тем важным свойством, что преобразование Фурье распределения из ( $\mathcal{S}'$ ) снова принадлежит ( $\mathcal{S}'$ ), и элементы ( $\mathcal{S}'$ ) суть производные конечного порядка от функций медленного роста.

Можно, однако, определить преобразование Фурье распределений из ( $\mathcal{D}'$ ), если ввести пространство основных функций ( $\mathcal{Z}$ ) и соответствующее пространство распределений ( $\mathcal{Z}'$ ), такие, что для  $T \in (\mathcal{D}')$ ,  $\mathcal{F}(T) \in (\mathcal{Z}')$ , и, обратно, если  $S \in (\mathcal{Z}')$ , то  $\mathcal{F}(S) \in (\mathcal{D}')$ . Пространства ( $\mathcal{Z}$ ) и ( $\mathcal{Z}'$ ) рассмотрены Гельфандом и Шило-

вым [1]. Эти пространства важны для некоторых задач со свертками распределений (гл. 9).

Читатель, интересующийся в основном приложениями, может опустить остальную часть этой главы.

**Определение.** Обозначим через  $(\mathcal{Z})$  пространство целых функций  $\Psi(z)$  комплексной переменной  $z$ , таких, что существуют константы  $C_{m,p}$  и  $a$ , для которых

$$|z|^p |D^m \Psi(z)| \leq C_{m,p} e^{a|y|} \text{ при всех } z,$$

где  $p, m$  — неотрицательные целые числа,  $y = \operatorname{Im} z$ .

Напоминаем: целая функция — это функция, аналитическая во всей плоскости  $z$ . Заметим, что носителем такой функции является либо вся плоскость, либо пустое множество.

Последовательность  $\{\Psi_v\}$  функций из  $(\mathcal{Z})$  сходится в смысле  $(\mathcal{Z})$ , если выполнены следующие свойства:

(а) последовательность  $\{\Psi_v\}$  сходится к предельной функции  $\Psi_0$  равномерно на каждом компактном множестве плоскости  $z$ ;

(б) для любого  $m \geq 0$ ,  $\{D^m \Psi_v\}$  сходится к  $D^m \Psi_0$  равномерно на каждом компактном множестве плоскости  $z$ ;

(с) существуют константы  $C_{m,p}$  и  $a$ , не зависящие от  $v$ , такие, что

$$|z|^p |D^m \Psi_v(z)| \leq C_{m,p} e^{a|y|} \text{ при всех } z \text{ и } v.$$

## 8.28. Преобразование Фурье функций из $(\mathcal{D})$ и $(\mathcal{Z})$

**Теорема I.** Если  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , то  $\mathcal{F}(\varphi, z) \in (\mathcal{Z})$ .  
Обратно, если  $\Psi \in (\mathcal{Z})$ , то  $\mathcal{F}^{-1}(\Psi, t) \in (\mathcal{D})$ .

**II.** Если носитель  $\varphi$  содержится в отрезке  $\{t: |t| \leq a\}$ , то  $|z|^p |D^m \mathcal{F}(\varphi, z)| \leq C_{m,p} e^{a|y|}$  при всех  $z$  (в экспоненте то же  $a$ ). Обратно, если  $|\Psi(z)| \leq C_0 e^{a|y|}$  и  $|z|^2 |\Psi(z)| \leq C_2 e^{a|y|}$  при всех  $z$ , то носитель  $\mathcal{F}(\Psi, t)$  содержитя в  $\{t: |t| \leq a\}$ .

**III.** Если последовательность  $\{\varphi_v\}$ ,  $\varphi_v \in (\mathcal{D})$ , сходится в смысле  $(\mathcal{D})$ , то  $\{\mathcal{F}(\varphi_v, z)\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{Z})$ ; верно и обратное.

**Доказательство.** Пусть  $\Phi \in (\mathcal{D})$  и ее носитель содержится в  $\{t: |t| \leq a\}$ . Тогда

$$|\psi(z)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)| |e^{itz}| dt \leq C e^{a|y|},$$

где  $C = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)| dt$ . Рассмотрим теперь  $D^p \Phi$ . Носитель  $D^p \Phi$  содержится в носителе  $\Phi$ . Поэтому

$$|z|^p |\psi(z)| = |(-iz)^p \mathcal{F}(\Phi, z)| = |\mathcal{F}(D^p \Phi, z)| \leq C_p e^{a|y|},$$

где  $C_p = \int_{-\infty}^{\infty} |D^p \Phi(t)| dt$ . Окончательно имеем

$$|z|^p |D^m \psi(z)| = |\mathcal{F}((it)^m D^p \Phi, z)| \leq C_{m,p} e^{a|y|},$$

где  $C_{m,p} = \int_{-\infty}^{\infty} |t^m| |D^p \Phi(t)| dt$ .

С помощью таких же соображений находим, что последовательность  $\{\Phi_v\}$ , сходящаяся в смысле  $(\mathcal{D})$ , преобразуется в последовательность  $\{\mathcal{F}(\Phi_v, z)\}$ , сходящуюся в смысле  $(\mathcal{Z})$ .

**Доказательство обратного утверждения.** Имеем

$$|\psi(z)| \leq C_0 e^{a|y|} \quad \text{и} \quad |z|^2 |\psi(z)| \leq C_2 e^{a|y|}.$$

Отсюда  $(1 + |z|^2) |\psi(z)| \leq (C_0 + C_2) e^{a|y|}$ . Положим  $C = C_0 + C_2$ . Тогда

$$|\psi(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|^2} e^{a|y|}.$$

Имеем

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ixt} dx.$$

Но  $\psi(z)$  — аналитическая функция при всех  $z$ . Учитывая поведение  $\psi(x)$  на бескоечности, мы можем сдвинуть

путь интегрирования до любой прямой параллельной оси  $x$ . Отсюда

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x + i\delta) e^{-i(x+i\delta)t} dx.$$

Таким образом,

$$|\Phi(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ce^{a|\delta| - \delta t}}{1+x^2} dx \leq C'e^{a|\delta| - \delta t}.$$

Устремляя  $\delta \rightarrow \pm \infty$ ; находим, что  $|\Phi(t)| = 0$  при  $|t| > a$ .

Аналогичное рассуждение показывает, что из сходимости последовательности  $\{\psi_v\}$  в смысле  $(\mathcal{Z})$  следует сходимость последовательности  $\{\mathcal{F}^{-1}(\psi_v, t)\}$  в смысле  $(\mathcal{D})$ .

### 8.29. Пространство $(\mathcal{Z}')$ . Преобразование Фурье распределений из $(\mathcal{D}')$

**Определение 1.** Через  $(\mathcal{Z}')$  мы обозначаем пространство всех непрерывных линейных функционалов на  $(\mathcal{Z})$ .

**Определение 2.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ . Тогда мы определяем преобразование Фурье  $T$  с помощью формулы Парсеваля:

$$\langle \mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\psi) \rangle \quad \text{для } \psi \in (\mathcal{Z})$$

и

$$\langle \mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}^{-1}(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\psi) \rangle \quad \text{для } \psi \in (\mathcal{Z}).$$

Индекс  $(\mathcal{Z})$  указывает, что  $\mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}(T)$  определено на  $(\mathcal{Z})$ . Мы будем опускать индекс там, где это не приведет к недоразумениям.

**Следствие.** Преобразования Фурье распределений из  $(\mathcal{D}')$  являются распределениями из  $(\mathcal{Z}')$ .

Это немедленно следует из теоремы 8.28.

### 8.30. Преобразование Фурье обобщенных функций из $(\mathcal{Z}')$

**Определение.** Пусть  $S \in (\mathcal{Z}')$ . Тогда полагаем

$$\langle \mathcal{F}_{(\mathcal{D})}(S), \varphi \rangle = \langle S, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \quad \text{для } \varphi \in (\mathcal{D})$$

*и*

$$\langle \mathcal{F}_{(\mathcal{D})}^{-1}(S), \varphi \rangle = \langle S, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \quad \text{для } \varphi \in (\mathcal{D}).$$

Индекс  $(\mathcal{D})$  указывает, что  $\mathcal{F}_{(\mathcal{D})}$  определено на  $(\mathcal{D})$ . Иногда мы будем опускать этот индекс.

**Следствие.** Если  $S \in (\mathcal{Z}')$ , то  $\mathcal{F}_{(\mathcal{D})}(S)$  — распределение из  $(\mathcal{D}')$ .

Это сразу же следует из теоремы 8.28.

### 8.31. Теорема об обращении преобразования Фурье обобщенных функций из $(\mathcal{D}')$ и $(\mathcal{Z}')$

**Теорема I.** Если  $T \in (\mathcal{D}')$ , то  $\mathcal{F}_{(\mathcal{D})}^{-1}(\mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}(T)) = \mathcal{F}_{(\mathcal{D})}(\mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}^{-1}(T))$ .

**II.** Если  $S \in (\mathcal{Z}')$ , то

$$\mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}^{-1}(\mathcal{F}_{(\mathcal{D})}(S)) = \mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}(\mathcal{F}_{(\mathcal{D})}^{-1}(S)) = S.$$

Это следует из § 8.30.

### 8.32. Мультиликаторы

Напомним определение мультиликатора. Пусть  $(\Phi)$  — пространство осионных функций. Тогда  $f$  называется мультиликатором в  $(\Phi)$ , если  $\varphi \in (\Phi)$  влечет  $f\varphi \in (\Phi)$ ; и если  $\Psi_v \in (\Phi)$  (причем последовательность  $\{\Psi_v\}$  сходится в смысле  $(\Phi)$ ), то последовательность  $\{f\Psi_v\}$  тоже сходится в смысле  $(\Phi)$ .

Если  $f$  — мультиликатор в пространстве  $(\Phi)$  и  $T \in (\Phi')$ , то  $fT$  определяется с помощью соотношения  $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in (\Phi)$ .

Приведем примеры мультиликаторов в некоторых пространствах:

(1) В  $(\mathcal{D})$  все функции  $f \in (\mathcal{E})$ .

(2) В ( $\mathfrak{S}$ ) все функции  $f \in (\mathcal{O}_a)$ ,  $a$  — произвольное вещественное число.

(3) В ( $\mathfrak{Z}$ ) все целые функции  $f(z)$ , для которых существуют константы  $a$  и  $\alpha$ , такие, что

$$|f(z)| = O(|z|^a e^{\alpha|y|})$$

и

$$|D^p f(z)| = O(|z|^a e^{\alpha|y|}) \text{ при любом } p \geq 0$$

(см. задачу 7).

### 8.33. Преобразование Фурье распределений с компактным носителем

**Лемма.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда  $\langle T_t, e^{itz} \rangle$  есть мультипликатор в ( $\mathfrak{Z}$ ).

**Доказательство.** Умножим  $T$  на функцию  $a(t)$  класса ( $C^\infty$ ), равную единице в окрестности носителя  $T$  и равную нулю вне некоторой большей окрестности. Тогда  $a(t)T = T$ . Пусть  $a$  таково, что  $\{t: |t| < a\}$  содержит носитель  $a(t)$ . Тогда

$$|a(t)e^{itz}e^{-a|y|}| \leq 1.$$

Значит, при  $p \geq 1$ ,  $z^{-p}a(t)e^{itz}e^{-ay}$  стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$  равномерно при всех  $t$ .

Напомним, что любое распределение с компактным носителем имеет конечный порядок. Пусть  $m$  есть порядок  $T$ . Положим

$$\varphi(z, t) = z^{-m-1}a(t)e^{itz}e^{-a|y|}.$$

Тогда при  $|z| \rightarrow \infty$  производные по  $t$  от  $\varphi(z, t)$  до порядка  $m$  равномерно сходятся к нулю. Отсюда

$$\langle T, a(t)e^{itz}e^{-a|y|}z^{-m-1} \rangle$$

стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ . Поэтому существует константа  $C$ , такая, что  $|\langle T, e^{itz} \rangle| \leq C e^{\alpha|y|} |z^{m+1}|$ . В силу тех же соображений имеем

$$|D^p \langle T, e^{itz} \rangle| = |\langle T, (it)^p e^{itz} \rangle| \leq C_p e^{\alpha|y|} |z^{m+1}|.$$

Лемма доказана.

Напомним теорему 8.23. Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда  $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle \langle T_t, e^{i\omega t} \rangle, \varphi(\omega) \rangle$  для всех  $\varphi \in (\mathfrak{S})$ .

Отсюда получаем такое следствие.

**Следствие.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда  $\mathcal{F}(T)$  есть мультипликатор в  $(\mathfrak{Z})$  и в  $(\mathfrak{S})$ .

### ЗАДАЧИ

1. Пусть  $\varphi_v \in (\mathfrak{S})$  и последовательность  $\{\varphi_v\}$  сходится к  $\varphi_0$  в смысле  $(\mathfrak{S})$ . Докажите, что последовательность  $\{\mathcal{F}(\varphi_v)\}$  сходится к  $\mathcal{F}(\varphi_0)$  в смысле  $(\mathfrak{S})$ .

2. Пусть  $f(t)$  — функция медленного роста. Докажите, что

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt — \text{распределение медленного роста.}$$

3. Докажите, что любой полином есть мультипликатор в  $(\mathfrak{S})$ .

4. Пусть  $f$  — функция медленного роста класса  $(C^1)$ . Докажите, что  $P(t^{-1})f(t)$  порождает распределение из  $(\mathfrak{S}')$ . (См. § 7.2 и § 7.9.)

5. Пусть  $f$  — функция медленного роста класса  $(C^m)$ . Докажите, что  $(1/t^m)\mathcal{F}(P(t^{-m})f(t))$  есть первообразная порядка  $m$  от  $T = \mathcal{F}(f)$ .

6. Дайте представление  $\delta$ -функции в виде производной от функции  $F(t)$ , такое, что

$$\hat{\mathcal{F}}(\delta^{(p)}, z) = (iz)^{p+1} \hat{\mathcal{F}}(F, z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-iz)^p & \text{при } y > 0, \\ -\frac{1}{2}(-iz)^p & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

7. Докажите, что следующие классы функций являются мультипликаторами: 1)  $(\mathfrak{g})$  для  $(\mathcal{D})$ ; 2)  $(\mathcal{O}_a)$ , где  $a$  — вещественное число для  $(\mathfrak{S})$ ; 3) класс целых функций  $f(z)$ , для которых существуют константы  $a$  и  $a$ , такие, что  $|D^p f(z)| = O(|z|^a e^{a|y|})$  при всех  $p \geq 0$ , для  $(\mathfrak{Z})$ .

8. Найдите преобразование Фурье функций  $\ln|x|$  и  $|x|^a$ ,  $a$  — вещественное число.

9. Пусть  $\varphi \in (\mathfrak{S})$ . Тогда интеграл  $\mathcal{F}(\varphi, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{i\omega t} dt$

можно аппроксимировать суммами Римана:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{i\omega t} dt = \lim \sum_{v=1}^N \varphi(t_v) e^{i\omega t_v} \Delta t_v.$$

Суммы сходятся к  $\mathcal{F}(\varphi, t)$  в смысле  $(\mathfrak{S})$ .

## ГЛАВА 9

### Свертка

---

#### 9.1. Свертка функций из $L_1$ и $L_2$ .

Определение. Пусть  $f, g \in L_2$  или  $f, g \in L_1$ . Тогда свертка  $f$  и  $g$  определяется соотношением

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Лемма 1. Свертка (для  $f, g \in L_2$  или  $f, g \in L_1$ ) коммутативна:

$$(f * g)(x) = (g * f)(x).$$

Доказательство. Заменить переменные.

Лемма 2. Пусть  $f, g \in L_1$ . Тогда  $f * g \in L_1$ .

Доказательство. Поскольку  $g \in L_1$ , существует интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx = C_1$ . Заменив переменную интегрирования, имеем  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)| dx = C_1$  при любом  $t$ .

Следовательно, выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)| dx \right) dt = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = C_1 C_2.$$

Тогда, по теореме Фубини, существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)g(x-t)| dx dt.$$

Следовательно, почти для всех  $x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt$  существует и принадлежит  $L_1$ .

**Лемма 3.** Пусть  $f, g \in L_2$ . Тогда функция  $(f * g)(x)$  равномерно ограничена для всех  $x$ .

**Доказательство.** Из неравенства Шварца следует оценка

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)|^2 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Следовательно,  $|(f * g)(x)| < C$  для всех  $x$ . Отметим, что мы не предполагали включения  $f * g \in L_2$ .

## 9.2. Преобразование Фурье свертки функций из $L_1$

**Теорема.** Пусть  $f, g \in L_1$ . Тогда справедливы следующие тождества:

$$\mathcal{F}(f * g, \omega) = \mathcal{F}(f, \omega) \cdot \mathcal{F}(g, \omega),$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f * g, \omega) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}(f, \omega) \cdot \mathcal{F}^{-1}(g, \omega).$$

**Доказательство.** В § 9.1 мы показали, что функция  $|f(t)g(x-t)|$  интегрируема в плоскости  $(x, t)$ . Поэтому функция  $|e^{i\omega x}f(t)g(x-t)|$  также интегрируема ( $\omega$  вещественно). Следовательно, по теореме Фубини,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt \right] dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) e^{i\omega x} dx \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{i\omega(x+t)} dx \right] dt = \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right] \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{i\omega x} dx. \end{aligned}$$

Этим доказано первое утверждение теоремы. Второе утверждение может быть получено из первого при помощи формулы

$$\mathcal{F}(f, \omega) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}(f, -\omega).$$

Теорема доказана.

Отметим, что теорема оставляет открытым вопрос, имеет ли функция  $\mathcal{F}(f, \omega) \cdot \mathcal{F}(g, \omega)$  преобразование Фурье.

### 9.3. Преобразование Фурье сверток функций из $L_2$

**Теорема.** Пусть  $f, g \in L_2$ . Тогда

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g))$$

и

$$f * g = 2\pi \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f) \cdot \mathcal{F}^{-1}(g)).$$

**Доказательство.** По формуле Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{-1}(f, \omega) \mathcal{F}(g(x-t), \omega) d\omega.$$

Заметим, что имеет место соотношение

$$\mathcal{F}(g(x-t), \omega) = e^{i\omega x} \mathcal{F}(g, -\omega) = 2\pi e^{i\omega x} \mathcal{F}^{-1}(g, \omega).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{-1}(f, \omega) \mathcal{F}^{-1}(g, \omega) e^{i\omega x} d\omega = \\ &= 2\pi \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f) \mathcal{F}^{-1}(g)). \end{aligned}$$

Вторая формула доказана. Первая следует из нее, поскольку имеет место тождество

$$\mathcal{F}^{-1}(f, \omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f, -\omega).$$

Отметим, что теорема оставляет открытым вопрос, имеет ли функция  $f * g$  обычное преобразование Фурье. Эта ситуация абсолютно противоположна той, которая возникла в § 9.2.

#### 9.4. Ассоциативность свертки функций из $L_1$

**Лемма.** Пусть  $f_1, f_2, f_3 \in L_1$ . Тогда

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) \text{ н. в.}$$

**Доказательство.** Функция  $|f_1(t)f_2(x-t)f_3(u-x)|$  интегрируема в пространстве  $(t, x, u)$ . Поэтому, по теореме Фубини, функция

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)f_2(x-t)f_3(u-x)| dx dt$$

существует почти для всех  $u$  и почти всюду справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(x-t) dt \right] f_3(u-x) dx = (f_1 * f_2) * f_3 = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-t)f_3(u-x) dx \right] dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)f_3(u-t-x) dx \right] dt = f_1 * (f_2 * f_3). \end{aligned}$$

#### 9.5. Аналитическое представление свертки функций из $L_1$

**Теорема.** Пусть  $f, g \in L_1$  и  $h(x) = (f * g)(x)$ . Тогда

$$\hat{h}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \hat{g}(z-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \hat{f}(z-t) dt.$$

**Доказательство.** Из  $f, g \in L_1$  следует, что  $\hat{f}(z)$  и  $\hat{g}(z)$  существуют и  $h \in L_1$  (лемма 9.1.2). Следовательно,  $\hat{h}(z)$  существует. Поскольку функция  $|f(t)g(u)|$  интегрируема в плоскости  $(t, u)$ , функция

$$\left| \frac{f(t)g(u)}{u+t-z} \right|$$

интегрируема в плоскости  $(t, u)$  для  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . Поэтому, по теореме Фубини,

$$\begin{aligned} 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \hat{g}(z-t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{u-(z-t)} du \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-(z-u)} du = 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \hat{f}(z-u) du. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)f(t)}{u+t-z} dt \right] du &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u-z} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(u-t)f(t) dt \right] du = 2\pi i \hat{h}(z). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

## 9.6. Примеры

Пример 1. Если  $f \in L_1$  или  $f \in L_2$ , то

$$\hat{f}(z) = (f(t) * \delta(t+iy))(x).$$

Пример 2. Напомним утверждение примера 8.25.4: почти всюду

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{t-z}, \omega\right) = 2\pi i H(\omega) e^{i\omega z} \quad \text{при } y > 0.$$

Функция  $2\pi i H(\omega) e^{i\omega z}$  при  $y > 0$  принадлежит  $L_1$  (а также и  $L_2$ ). Следовательно, по теореме 9.3

$$(2\pi i H(\omega) e^{i\omega z}) * (2\pi i H(\omega) e^{i\omega z}) = 2\pi \mathcal{F}\left(\frac{1}{(t-z)^2}\right).$$

Отсюда

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(t-z)^2}, \omega\right) = -2\pi H(\omega) \omega e^{i\omega z} \quad \text{при } y > 0.$$

Аналогично получаем

$$\mathcal{F} \left( \frac{1}{(t-z)^n}, \omega \right) = (i)^n 2\pi H(\omega) \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} e^{i\omega z} \quad \text{при } y > 0.$$

Последнюю формулу можно получить также, воспользовавшись тем, что

$$\frac{1}{(t-z)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{1}{t-z}.$$

### 9.7. Свертка распределений с функциями класса ( $C^\infty$ )

Пусть  $T \in (\mathcal{D}), (\mathcal{O}_a), (\mathcal{S}), (\mathcal{E})$  или  $(\mathcal{Z})$ , а  $\varphi$  — функция из соответствующего пространства основных функций. Тогда положим

$$(T * \varphi)(x) = \langle T_t, \varphi(x-t) \rangle.$$

**Лемма I.** Функция  $(T * \varphi)(x)$  является функцией класса ( $C^\infty$ ).

$$\text{II. } \frac{d^m}{dx^m} (T * \varphi)(x) = \langle T_t, \varphi^{(m)}(x-t) \rangle = \langle T_t^{(m)}, \varphi(x-t) \rangle.$$

**Доказательство.** Если  $\varphi(t) \in (\mathcal{D}), (\mathcal{O}_a), (\mathcal{S}), (\mathcal{E})$  или  $(\mathcal{Z})$ , то  $\varphi(x-t)$  при фиксированном  $x$  лежит в том же пространстве; следовательно, свертка  $(T * \varphi)(x)$  определена. Поскольку  $(T * \varphi)(x)$  является конечным числом для каждого  $x$ , эта функция задана на вещественной оси. Выражение  $[\varphi(x+h-t) - \varphi(x-t)]/h$  сходится к  $\varphi'(x-t)$  в смысле сходимости в рассматриваемом пространстве (см. задачу 1). Следовательно,

$$\frac{d}{dx} (T * \varphi)(x) = \langle T_t, \varphi'(x-t) \rangle = \langle T_t', \varphi(x-t) \rangle.$$

(Отметим, что  $(d/dt)\varphi(x-t) = -\varphi'(x-t)$ .) Повторяя те же рассуждения, получаем утверждение II:

$$\frac{d^m}{dx^m} (T * \varphi)(x) = \langle T_t, \varphi^{(m)}(x-t) \rangle = \langle T_t^{(m)}, \varphi(x-t) \rangle.$$

Следовательно, функция  $(T * \varphi)(x)$  бесконечно дифференцируема. Лемма доказана.

### 9.8. Носитель и классификация сверток $T * \varphi$ для $T \in (\mathcal{E}')$

**Лемма 1.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ , а  $\varphi \in (\mathcal{D})$ . Тогда  $T * \varphi \in (\mathcal{D})$ .

**Доказательство.** Согласно § 3.10,  $T$  имеет компактный носитель. Пусть  $K_T$  — носитель  $T$ ,  $K_\varphi$  — носитель  $\varphi$  и  $a(t)$  — функция класса  $(C^\infty)$ , равная 1 на  $K_T$  и обращающаяся в нуль вне окрестности  $N(K_T)$  области  $K_T$ . Тогда

$$\langle T, \varphi(x-t) \rangle = \langle T, a(t) \varphi(x-t) \rangle.$$

Носитель функции  $a(t)$  содержится в  $N(K_T)$ . Носителем функции  $\varphi(x-t)$  является множество  $\{t: x-t \in K_\varphi\}$ . Оно получается путем отражения  $K_\varphi$  относительно нуля и сдвигом на  $x$  вправо. Пересечение  $N(K_T) \cap \{t: x-t \in K_\varphi\}$  пусто для всех  $x$ , не принадлежащих некоторому компактному множеству. В этом случае  $a(t)\varphi(x-t) \equiv 0$  для всех  $t$  (при фиксированном  $x$ ). Если же это выполняется, то  $\langle T, \varphi(x-t) \rangle = 0$ . Итак, функция  $\langle T, \varphi(x-t) \rangle$  обращается в нуль для всех  $x$ , не принадлежащих некоторому компактному множеству. Следовательно, она имеет компактный носитель. Мы уже доказали, что она принадлежит классу  $(C^\infty)$ . Следовательно,  $\langle T, \varphi(x-t) \rangle \in (\mathcal{D})$ .

**Лемма 2.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ ,  $\varphi \in (\mathcal{S})$ . Тогда  $T * \varphi \in (\mathcal{S})$  (задача 2).

### 9.9. Преобразование Фурье свертки $T * \varphi$ для $T \in (\mathcal{E}')$ , $\varphi \in (\mathcal{S})$

**Лемма.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ ,  $\varphi \in (\mathcal{S})$ . Тогда  $\mathcal{F}(T * \varphi, \omega) = \mathcal{F}(T, \omega) \cdot \mathcal{F}(\varphi, \omega)$ .

**Доказательство.** Согласно лемме 9.8.2,  $T * \varphi \in (\mathcal{S})$ . Следовательно, существует

$$\mathcal{F}(T * \varphi, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T_t, \varphi(x-t) \rangle e^{i\omega x} dx.$$

Аппроксимируя интеграл суммами Римана, мы получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T * \varphi, \omega) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^N \langle T_t, \varphi(x_v - t) \rangle e^{i\omega x_v} \Delta x_v = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle T_t, \sum_{v=1}^N \varphi(x_v - t) e^{i\omega x_v} \Delta x_v \right\rangle.\end{aligned}$$

Далее,

$$\sum_{v=1}^N \varphi(x_v - t) e^{i\omega x_v} \Delta x_v$$

сходится в смысле  $(\mathcal{E})$  к интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - t) e^{i\omega x} dx = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\omega x} dx.$$

Следовательно, по непрерывности

$$\mathcal{F}(T * \varphi, \omega) = \left\langle T_t, e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\omega x} dx \right\rangle = \langle T_t, e^{i\omega t} \rangle \mathcal{F}(\varphi, \omega).$$

Итак, лемма доказана. Отметим, что  $\langle T_t, e^{i\omega t} \rangle \in (\mathcal{Z})$ ,  $\mathcal{F}(\varphi, \omega) \in (\mathcal{S})$ . Значит, их произведение принадлежит  $(\mathcal{S})$ . Последнее утверждение следует также из того, что  $T * \varphi \in (\mathcal{S})$ , и из того, что преобразование Фурье отображает  $(\mathcal{S})$  на  $(\mathcal{S})$ .

## 9.10. Свертка распределений

**Определение.** Пусть  $S \in (\mathcal{D}')$ , а  $T \in (\mathcal{E}')$ . Определим свертку  $S$  и  $T$  соотношением<sup>1)</sup>

$$S * T = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}(T)) = 2\pi \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(S) \mathcal{F}^{-1}(T)).$$

**Лемма 1.** Пусть  $S \in (\mathcal{D}')$ , а  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда  $S * T \in (\mathcal{D}')$ .

<sup>1)</sup> Более общее определение свертки дано в § 9 книги В. С. Владимирова „Уравнения математической физики“, изд-во „Наука“, 1967. — Прим. ред.

**Доказательство.** Напомним, что в силу результатов § 8.29  $S \in (\mathcal{D}')$  влечет  $\mathcal{F}(S) \in (\mathcal{Z}')$ , в то время как  $\mathcal{F}(T)$  является мультипликатором в  $(\mathcal{Z})$  (следствие 8.33). Следовательно, произведение  $\mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}(T)$  определено и лежит в  $(\mathcal{Z}')$ , а  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}(T))$  принадлежит  $(\mathcal{D}')$ .

**Лемма 2.** Пусть  $S \in (\mathcal{S}')$ ,  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда  $S * T \in (\mathcal{S}')$ .

Отметим, что  $S \in (\mathcal{S}')$  влечет  $S \in (\mathcal{D}')$ . Поэтому можно применить приведенное выше определение.

**Доказательство.** Из  $S \in (\mathcal{S}')$  следует, что  $\mathcal{F}(S) \in (\mathcal{S}')$ . Если  $T \in (\mathcal{E}')$ , то  $\mathcal{F}(T)$  является мультипликатором в  $(\mathcal{S})$ . Следовательно,  $S * T \in (\mathcal{S}')$ .

**Замечание.** Лемма не допускает усиления на случай, когда  $S \in (\mathcal{S}')$  и  $T \in (\mathcal{S}')$ . Пример:  $S = T = 1$  (распределение, порождаемое 1). Поскольку 1 является функцией медленного роста,  $S, T \in (\mathcal{S}')$ . Далее,  $\mathcal{F}(S) = -\mathcal{F}(T) = 2\delta$ . Однако произведение  $\delta \cdot \delta$  не определено (см. §§ 11.4 и 11.5). Итак, свертка  $S * T$  не определена.

**Лемма 3.** Если  $S \in (\mathcal{D}')$ ,  $T \in (\mathcal{E}')$ , а  $\Phi \in (\mathcal{D})$ , то

$$\langle S * T, \Phi \rangle = \langle S_y, \langle T_x, \Phi(x+y) \rangle \rangle$$

(задача 3).

## 9.11. Примеры

**Пример 1.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ . Тогда  $T * \delta = T$ ,  $T * \delta' = T'$ ,  $T * \delta^{(m)} = T^{(m)}$ .

**Пример 2.** Пусть  $T \in (\mathcal{C}'_{-1})$ . Тогда  $[T_t * \hat{\delta}(t+iy)](x) = \langle T_t, \hat{\delta}(z-t) \rangle = \hat{T}(z)$ . Следовательно,

$$[T_t * \hat{\delta}_+(t+iy)](x) = \begin{cases} \hat{T}(z), & y > 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

а также

$$[T_t * \hat{P}\left(\frac{1}{t}\right)(t+iy)](x) = \begin{cases} \pi i \hat{T}(z), & y > 0, \\ -\pi i \hat{T}(z), & y < 0. \end{cases}$$

## 9.12. Применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a_n \frac{d^n}{dx^n} u + \dots + a_1 \frac{d}{dx} u + a_0 u = f,$$

где  $f$  — функция (или распределение) из  $(\mathcal{D}')$ . Его *функциональным решением* называется любая функция или распределение  $u$  из  $(\mathcal{D}')$ , такая, что

$$a_n \frac{d^n}{dx^n} u + \dots + a_1 \frac{d}{dx} u + a_0 u = \delta.$$

*Функция Грина* — это функциональное решение, удовлетворяющее данному граничному, начальному или асимптотическому условию.

Воспользовавшись результатом примера 9.11.1, мы можем записать это уравнение в виде

$$(a_n \delta^{(n)} + \dots + a_1 \delta^{(1)} + a_0 \delta) * u = \delta.$$

Найдя обратное преобразование Фурье обеих его частей, получаем

$$2\pi [a_n (i\omega)^n + \dots + a_1 (i\omega) + a_0] \mathcal{F}^{-1}(u) = 1.$$

Пусть  $\omega_1, \dots, \omega_k$  — корни полинома, а  $\mu_1, \dots, \mu_k$  — их кратности. Тогда мы можем записать

$$2\pi [a_n (i\omega)^n + \dots + a_1 (i\omega) + a_0] = C (\omega - \omega_1)^{\mu_1} \dots (\omega - \omega_k)^{\mu_k},$$

где  $C = 2\pi a_n i^n$ . Обозначим этот полином через  $Q(\omega)$ . Мы получим функциональное решение, если найдем такую функцию  $u$ , что

$$\mathcal{F}^{-1}(u, \omega) = \frac{1}{Q(\omega)}.$$

Одной из таких функций является  $u = \mathcal{F}(1/Q(\omega))$ . Разлагая на простейшие дроби, получаем

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{A_{11}}{(\omega - \omega_1)} + \dots + \frac{A_{1\mu_1}}{(\omega - \omega_1)^{\mu_1}} + \dots + \frac{A_{k\mu_k}}{(\omega - \omega_k)^{\mu_k}},$$

где  $A_{11}, \dots, A_{k\mu_k}$  — постоянные. Преобразования Фурье этих членов известны, если мнимые части корней  $\omega_1, \dots, \omega_k$  не обращаются в нуль (см. § 9.6). Если какие-либо мнимые части равны нулю, то можно интерпретировать соответствующие члены как главные значения или как предельные случаи отрицательных (положительных) мнимых частей. Тогда преобразования Фурье также известны. Следовательно, фундаментальное решение можно легко вычислить.

Случай уравнения  $a_n u^{(n)} + \dots + a_0 u = f$ , где  $f$  — функция или распределение из  $(\mathcal{E}')$ , может быть изучен тем же методом.

Если  $f \in (\mathcal{E}')$ , то  $\mathcal{F}^{-1}(f) \in (\mathcal{Z})$ , а  $\mathcal{F}^{-1}(f)/Q(\omega) \in (\mathcal{S}')$ . Следовательно,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathcal{F}^{-1}(f)}{Q(\omega)}\right) \in (\mathcal{S}').$$

Итак, мы доказали следующее утверждение:

**Лемма 1.** Если  $f \in (\mathcal{E}')$ , то уравнение  $a_n u^{(n)} + \dots + a_0 u = f$  имеет решение в классе  $(\mathcal{S}')$ . Это решение имеет вид

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathcal{F}^{-1}(f)}{Q(\omega)}\right).$$

При  $f \in (\mathcal{D}')$  возникает трудность, состоящая в том, что  $1/Q(\omega)$  может не быть мультипликатором для  $\mathcal{F}^{-1}(f)$ . Однако, если  $Q(\omega)$  не имеет вещественных корней,  $1/Q(\omega)$  является мультипликатором в  $(\mathcal{S}')$  (ср. с задачей 8.7). Следовательно, мы имеем такой результат:

**Лемма 2.** Если  $f \in (\mathcal{S}')$ , а  $Q(\omega)$  не имеет вещественных корней, то уравнение  $a_n u^{(n)} + \dots + a_0 u = f$  имеет в  $(\mathcal{S}')$  решение, которое определяется формулой

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathcal{F}^{-1}(f)}{Q(\omega)}\right).$$

Любые два решения уравнения  $L\omega = f$  отличаются на решение однородного уравнения  $Lv = 0$ . Пусть  $v$  — решение однородного уравнения, и пусть  $v \in (\mathcal{D}')$ .

Тогда  $Q(\omega) \mathcal{F}_{(z)}^{-1}(v, \omega) = 0$ . Отметим, что  $Q(\omega)$  является мультиликатором в  $(\mathcal{Z}')$ . Далее, общее решение  $F$  из  $(\mathcal{Z}')$  уравнения  $Q(\omega)F = 0$  имеет вид (см. задачу 4)

$$F = a_{11}\delta(\omega - \omega_1) + \dots + a_{1\mu_1}\delta^{(\mu_1-1)}(\omega - \omega_1) + \dots \\ \dots + a_{k1}\delta(\omega - \omega_k) + \dots + a_{k\mu_k}\delta^{(\mu_k-1)}(\omega - \omega_k),$$

где  $a_{11}, \dots, a_{k\mu_k}$  — произвольные постоянные. Следовательно, если потребовать, чтобы  $v \in (\mathcal{D}')$ , то общее решение однородного уравнения  $Lv = 0$  задается формулой

$$v(t) = a_{11}e^{i\omega_1 t} + \dots + a_{1\mu_1}(it)^{(\mu_1-1)}e^{i\omega_1 t} + \dots \\ \dots + a_{k1}e^{i\omega_k t} + \dots + a_{k\mu_k}(it)^{(\mu_k-1)}e^{i\omega_k t},$$

где  $a_{11}, \dots, a_{k\mu_k}$  — произвольные постоянные. Эти постоянные можно определить так, чтобы выполнялись соответствующие граничные, начальные или асимптотические условия. В части IV в связи с приложениями будут проведены явные вычисления.

### 9.13. Интегральные уравнения типа свертки

Интегральное уравнение типа свертки — это уравнение вида

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)u(t)dt,$$

где  $f$  и  $k$  — заданные функции, а  $u$  — неизвестная функция.

Включая в рассмотрение и распределения, мы можем обобщить этот класс уравнений следующим образом. Пусть  $f, k \in (\mathcal{D}')$ . Найти  $u \in (\mathcal{D}')$ , такое, что

$$f = k * u.$$

Поскольку  $f, k \in (\mathcal{D}')$  — слишком широкое условие, чтобы гарантировать существование решения, понадобятся дополнительные условия. Мы уже отмечали, что любое дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка может быть записано в виде такой свертки с функцией  $k$  вида

$$k = a_n\delta^{(n)} + \dots + a_0\delta.$$

Иногда в литературе делается различие между уравнениями типа свертки первого рода (описанными выше) и уравнениями типа свертки второго рода, имеющими вид

$$f(t) = u(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} k_0(t-x) u(x) dx.$$

Однако при помощи  $\delta$ -функций уравнения второго рода также можно записать в виде  $f = k * u$  с  $k = k_0 + \delta$ . Найдя обратные преобразования Фурье, мы получим соотношение

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}(k) \mathcal{F}^{-1}(u).$$

Это уравнение можно решить делением, если  $[\mathcal{F}^{-1}(k)]^{-1}$  является мультипликатором для  $\mathcal{F}^{-1}(f)$ . Если это так, то

$$\mathcal{F}^{-1}(u) = \frac{\mathcal{F}^{-1}(f)}{2\pi \mathcal{F}^{-1}(k)}$$

и

$$u = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \left( \frac{\mathcal{F}^{-1}(f)}{\mathcal{F}^{-1}(k)} \right).$$

Последняя формула представляет собой *частное* решение уравнения типа свертки. Общее решение получается добавлением семейства решений уравнения  $k * v = 0$ .

Достаточными условиями существования описанных решений являются следующие условия:  $f, k \in (\mathcal{E}')$  или  $f \in (\mathcal{S}'), k \in (\mathcal{E}')$ , а  $\mathcal{F}^{-1}(k, z)$  не имеет вещественных корней.

## 9.14. Пример

Пусть  $k(t) = e^{-\lambda|t|}$ ,  $\lambda > 0$ . Тогда

$$2\pi \mathcal{F}^{-1}(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} e^{-\lambda|t|} dt = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}.$$

Таким образом,

$$u = \frac{1}{2\lambda} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f, \omega)(\lambda^2 + \omega^2)).$$

Далее,  $\lambda^2 + \omega^2$  является мультипликатором в  $(\mathcal{Z})$ ; следовательно, мы можем допустить, чтобы  $f \in (\mathcal{D}')$ , и тогда

$$u = \frac{\lambda}{2} f - \frac{1}{2\lambda} f''.$$

9.15. Свертка вида  $\int_0^t g(t-x)f(x)dx$

До сих пор мы рассматривали свертки, в которых интегрирование производилось от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Однако некоторые авторы термин *свертка* используют также и для интеграла

$$f \otimes g = \int_0^t g(t-x)f(x)dx, \quad t \geq 0.$$

(Мы ввели обозначение  $f \otimes g$ , чтобы отличить эту свертку от  $f * g$ .) Свертка  $f \otimes g$  легко может быть приведена к свертке типа  $*$ . Мы имеем

$$H(f \otimes g) = (Hf) * (Hg),$$

где  $H$  — функция Хевисайда. Найдя преобразование Фурье, получим

$$\mathcal{F}[H(f \otimes g)] = \mathcal{F}(Hf) \mathcal{F}(Hg) = (\delta_+ * \mathcal{F}f)(\delta_+ * \mathcal{F}g).$$

Привлекая определение обобщенного преобразования Фурье (определение 8.22), мы получаем

$$\hat{\mathcal{F}}(f \otimes g, z) = \begin{cases} \hat{\mathcal{F}}(f, z) \hat{\mathcal{F}}(g, z) & \text{для } y > 0, \\ 0 & \text{для } y < 0. \end{cases}$$

Напомним, что  $\hat{\mathcal{F}}(f, z) = \mathcal{L}(f, -iz)$ , где  $\mathcal{L}$  — преобразование Лапласа:  $\mathcal{L}(f, s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ . Таким образом, мы получили соотношение  $\mathcal{L}(f \otimes g, s) = \mathcal{L}(f, s) \times \mathcal{L}(g, s)$  для  $\operatorname{Re} s > 0$ .

На основании изложенного в § 9.1 имеем такое утверждение: если  $f, g$  — функции класса  $L_1(0, \infty)$ , то последнее равенство справедливо и для  $\operatorname{Re} s = 0$ . Для

локально интегрируемых функций  $f$  и  $g$ , растущих не быстрее полинома на бесконечности, преобразование Лапласа определено и равенство справедливо для  $\operatorname{Re} s > 0$ .

## 9.16. Операционное исчисление

Операционное исчисление основано на свертке  $\otimes$ . Мы имеем

$$H \otimes f = \int_0^t f(t) dt, \quad t \geq 0.$$

Обозначим  $H \otimes f$  через  $hf$ ;  $h$  можно интерпретировать как оператор интегрирования, который в применении к функции  $f$  дает  $\int_0^t f(t) dt$ . (Заметим, что  $H * f = \int_{-\infty}^t f(t) dt$ .)

Главную роль в операционном исчислении играет оператор  $h^{-1}$ , обратный к оператору интегрирования  $h$ . Он обозначается через  $p$ :  $p = h^{-1}$ ;  $p^n$  обозначает примененный  $n$  раз оператор  $p$ .

Известно (см., например, Микусинский [3], Эрдейи [1]), что для дифференцируемых функций (и для некоторых более общих объектов) справедливо равенство

$$p^n a(t) = a^{(n)}(t) + a^{(n-1)}(0) + a^{(n-2)}(0)p + \dots + a(0)p^{n-1}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами для функций, определенных на положительной полуоси  $\{t : t \geq 0\}$ , можно выразить через полиномы по  $p$  и начальные значения  $a(0), \dots, a^{(n-1)}(0)$  неизвестной функции. При этом выполняются равенства  $\mathcal{L}(hf, s) = \mathcal{L}(H \otimes f, s) = \mathcal{L}(H, s) \times \mathcal{L}(f, s) = (1/s) \mathcal{L}(f, s)$  и  $\mathcal{L}(pf, s) = s \mathcal{L}(f, s)$ .

Итак, умножение на операторы  $h$  и  $p$  переходит для преобразований Лапласа в численное умножение на  $1/s$  и  $s$ . Эту технику можно применять и в случае, когда для нахождения решений обыкновенных дифференциаль-

иных уравнений с постоянными коэффициентами применяется преобразование Фурье.

Преобразование Лапласа и операционное исчисление широко используются для решения задач, связанных с электрическими цепями. Однако распределения обладают в этом случае некоторыми преимуществами:  $\delta$ -функция Дирака имеет интуитивную интерпретацию, а преобразование Фурье можно трактовать как разложение на синусоидальные колебания. Для нахождения преобразований функций (и распределений) нет необходимости ограничиваться положительной вещественной полуосью. В частности, техника распределений позволяет легко вычислить импульсную реакцию цепи в момент времени нуль.

Область применения преобразования Лапласа при переходе ко многим комплексным переменным сужается, в то время как использование теории распределений за последние пять-шесть лет привело к большим успехам в теории дифференциальных уравнений с частными производными (Хёрмандер [1]). К тому же распределения широко используются в физике, в частности в квантовой теории поля, имеющей много общего с теорией электрических цепей. Теорию электрических цепей в терминах распределений можно обобщить и на многомерные цепи (протяженные цепи, в которых нельзя пренебречь временем распространения сигналов от одного места к другому).

В части IV наглядно демонстрируется применение распределений к электрическим цепям.

Операционное исчисление, как самостоятельная математическая теория, имеет много интересных особенностей. Например, в нем можно перемножать операторы и определить операторнозначные функции  $p$ . Относительно дальнейших подробностей см. Микусинский [3] и Эрдейи [1].

### **9.17. Обыкновенные дифференциальные уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами**

Методы преобразования Фурье менее действенны в применении к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. Однако они полезны для

нахождения решений обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$a_n(t)u^{(n)}(t) + \dots + a_0(t)u(t) = f(t),$$

в котором коэффициенты постоянны в каждом из интервалов

$$-\infty < t \leq t_1, \quad t_1 < t \leq t_2, \dots, \quad t_n < t < \infty.$$

Предположим, что начальные условия для  $u$  заданы в точке  $t_1$ . Для широкого класса функций (см. § 9.12) мы можем решить уравнение в интервале  $-\infty < t \leq t_1$ . Пусть это решение есть  $u_0(t)$ . Мы можем определить  $u_0(t)$  так, чтобы  $u_0(t), u'_0(t), \dots, u_0^{(n-1)}(t)$  принимали при  $t = t_1$  заданные значения. Затем мы решаем уравнение в интервале  $t_1 < t \leq t_2$ . Пусть это решение есть  $u_1(t)$ . Функцию  $u_1(t)$  можно определить так, чтобы  $u_1(t_1) = u_0(t_1), \dots, u_1^{(n-1)}(t) = u_0^{(n-1)}(t)$ . То же самое мы делаем для интервала  $t_2 < t \leq t_3$ , подбирая первые  $n$  производных в точке  $t_2$ , и т. д. Таким образом, мы получаем решение  $u(t) = u_j(t)$  для  $t_j < t \leq t_{j+1}$ , такое, что оно и его первые  $n - 1$  производных непрерывны при всех  $t$  (при условии, что  $f$  достаточно гладка).

Этот же метод применим и к системам уравнений и потому, например, к задачам об электрических цепях, содержащих выключатели, которые включают и выключают ток в заранее заданные моменты времени  $t_1, \dots, t_N$ . Подчеркнем, что эти моменты времени должны быть заданы заранее.

### ЗАДАЧИ

1. Пусть  $\Phi \in (\mathcal{D}), (\mathcal{O}_a), (\mathfrak{Z}), (\mathfrak{Z})$  или  $(\mathfrak{Z})$ . Доказать, что разностное отношение

$$[\Phi(t+h) - \Phi(t)]/h$$

сходится к  $\Phi'(t)$  в смысле сходимости в соответствующем пространстве.

2. Пусть  $T \in (\mathfrak{g}')$  и  $\Phi \in (\mathfrak{Z})$ . Доказать, что  $T * \Phi \in (\mathfrak{Z})$ .

3. Пусть  $S \in (\mathcal{D}')$ ,  $T \in (\mathfrak{g}')$  и  $\Phi \in (\mathcal{D})$ . Доказать, что  $\langle S * T, \Phi \rangle = \langle S_y, \langle T_x, \Phi(x+y) \rangle \rangle$ .

4. Пусть  $Q(\omega) = C(\omega - \omega_1)^{\mu_1} \dots (\omega - \omega_k)^{\mu_k}$ . Доказать, что общее решение  $F$  из  $(\mathcal{Z}')$  уравнения  $Q(\omega)F = 0$  имеет следующий вид:

$$F = a_{11} \delta(\omega - \omega_1) + \dots + a_{1\mu_1} \delta^{(\mu_1-1)}(\omega - \omega_1) + \dots \\ \dots + a_{k1} \delta(\omega - \omega_k) + \dots + a_{k\mu_k} \delta^{(\mu_k-1)}(\omega - \omega_k).$$

5. Доказать, что если  $S \in (\mathfrak{X}')$  и  $T \in (\mathfrak{Y}')$ , то  $S * T \in (\mathfrak{X}')$ .

6. Пусть  $S, T \in (\mathfrak{X}')$  и имеют иносители на полуоси  $\{t : t \geq 0\}$ . Определим

$$S * T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mathcal{F}}(S, x + i\varepsilon) \widehat{\mathcal{F}}(T, x + i\varepsilon)).$$

Показать, что  $S * T \in (\mathfrak{X}')$ .

## Добавление 3

---

В этом добавлении мы докажем основные теоремы о преобразованиях Фурье функций из  $L_1$  и  $L_2$ . Представленные ниже доказательства весьма просты и элементарны.

### A.3.1. Обращение преобразования Фурье для непрерывных функций из $L_1$

**Теорема.** Пусть  $f$ ,  $\mathcal{F}(f) \in L_1$  и  $f$  непрерывна. Тогда  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), x) = f(x)$ .

**Доказательство.** Для функций, принадлежащих  $L_1$ , из теоремы Фубини (см. § 8.4) сразу же следует формула Парсеваля.

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда по формуле Парсеваля мы имеем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f, \omega) e^{-i\omega x - \varepsilon |\omega|} d\omega &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathcal{F}(e^{-i\omega t - \varepsilon |\omega|}, t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\varepsilon dt}{\pi |t - x - i\varepsilon|^2} = f^*(x + i\varepsilon). \end{aligned}$$

(Отметим, что  $\mathcal{F}(e^{-i\omega t - \varepsilon |\omega|}, t)$  можно вычислить непосредственно, расщепив интеграл в точке 0.) Мы имеем

$$|\mathcal{F}(f, \omega) e^{-i\omega x - \varepsilon |\omega|}| = |\mathcal{F}(f, \omega) e^{-\varepsilon |\omega|}| \leq |\mathcal{F}(f, \omega)|.$$

По предположению  $|\mathcal{F}(f, \omega)| \leq L_1$ . Следовательно, возможен переход к пределу под знаком интеграла и интеграл в левой части этого соотношения сходится к  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f, \omega), x)$ . Оценка модуля не зависит от  $x$ , поэтому сходимость равномерная. По теореме 5.4 интеграл в правой части сходится к  $f(x)$ . Теорема доказана.

Для развития теории преобразований Фурье функций из  $L_2$  и распределений достаточно этой теоремы в той форме, в какой она установлена. Однако представляет самостоятельный интерес более сильное утверждение, для доказательства которого необходима приведенная ниже лемма.

### A.3.2. Единственность почти всюду граничных значений гармонических представлений

**Лемма.** Пусть  $f_1, f_2 \in L_1$ , а  $f_1^*$  и  $f_2^*$  — гармонические представления функций  $f_1, f_2$  (см. § 5.3). Пусть  $f_1^*(x+iy) \equiv f_2^*(x+iy)$  для всех  $y \neq 0$ . Тогда  $f_2(t) = f_1(t)$  почти всюду.

Лемма эквивалентна следующему утверждению: если  $f \in L_1$  и  $f^*(x+iy) \equiv 0$  для  $y \neq 0$ , то  $f = 0$  п. в.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi$  — непрерывная функция с компактным носителем. Тогда (по теореме Фубини)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x+i\varepsilon)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi^*(t+i\varepsilon)dt.$$

Далее,  $\varphi^*(t+i\varepsilon) \rightarrow \varphi(t)$  равномерно (см. § 5.4). Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi^*(t+i\varepsilon)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt.$$

Поэтому, если  $f^*(x+iy) \equiv 0$ , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt = 0$$

для всех непрерывных функций  $\varphi$  с компактным носителем. По известной теореме (ср. Ройден [1], стр. 102) отсюда следует, что  $f = 0$  почти всюду. Лемма доказана.

### A.3.3. Обращение преобразования Фурье для функций из $L_1$ . Общий случай

**Теорема.** Предположим, что  $f, \mathcal{F}(f) \in L_1$ . Тогда  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), x) = f(x)$  почти всюду.

**Доказательство.** Так же как и в § A.3.1, мы получаем

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f^*(x + i\varepsilon)$$

равномерно для всех  $x$ . Обозначим эту функцию через  $\tilde{f}(x)$ . Она непрерывна, поскольку (обратное) преобразование Фурье функции из  $L_1$  непрерывно (задача 2).

Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}^*(u + i\delta) = \frac{\delta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f^*(x + i\varepsilon) \frac{dx}{|x - u - i\delta|^2}.$$

Поскольку  $f^*(x + i\varepsilon)$  равномерно сходится к  $\tilde{f}(x)$ , имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}^*(u + i\delta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\delta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x + i\varepsilon) \frac{dx}{|x - u - i\delta|^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \tilde{f}^*(u + i(\delta + \varepsilon)) = \tilde{f}^*(u + i\delta). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу леммы A.3.2,  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}^*(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), x)$  п. в. Теорема доказана.

### A.3.4. Преобразование Фурье функций класса ( $C^\infty$ ) с компактным носителем

В §§ A.3.1 и A.3.3 предполагалось, что  $\mathcal{F}(f)$  принадлежит  $L_1$ . Это условие не следует из того, что  $f \in L_1$ . Пример: пусть  $f(t) = 1$  для  $|t| \leq A$  и обращается в нуль всюду вне этого отрезка. Тогда

$$\mathcal{F}(f, \omega) = 2 \frac{\sin A\omega}{\omega}.$$

Эта функция не принадлежит  $L_1$ . Однако, если  $f$  дважды непрерывно дифференцируема, то  $\mathcal{F}(f, \omega) \in L_1$ . В общем случае мы имеем следующий результат:

**Лемма.** *Если  $f$  — функция класса  $(C^m)$  с компактным носителем, то*

$$|\omega|^m |\mathcal{F}(f, \omega)| \leq M,$$

где  $M$  — постоянная.

**Следствие.** *Если  $f$  — функция класса  $(C^2)$  с компактным носителем, то  $\mathcal{F}(f, \omega) \in L_1$  и  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), x) = f(x)$ .*

**Доказательство.** Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D^m f(t) e^{i\omega t} dt = (-i\omega)^m \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

(интегрирование по частям), мы имеем

$$|\omega|^m |\mathcal{F}(f, \omega)| \leq M,$$

где  $M = \int_{-\infty}^{+\infty} |D^m f(t)| dt$ . Лемма доказана.

При  $m \geq 2$  имеем  $\mathcal{F}(f, \omega) \in L_1$  и по теореме A.3.1  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), x) = f(x)$ . Следствие доказано.

Перейдем к доказательству основных теорем о преобразованиях Фурье функций из  $L_2$ .

### A.3.5. Сохранение нормы в $L_2$ . Специальный случай

**Теорема.** *Пусть  $f$  — функция класса  $(C^2)$  с компактным носителем и  $g = \mathcal{F}(f)$ . Тогда*

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \|g\|^2.$$

*Доказательство.* Пусть носитель  $f$  содержится в  $(-A, A)$ . Тогда

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \int_{-A}^A \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), x) \overline{f(x)} dx = \\ &= \int_{-A}^A \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x - \epsilon |\omega|} d\omega \int_{-A}^A f(t) e^{i\omega t} dt \right] \overline{f(x)} dx.\end{aligned}$$

В силу равномерной сходимости (теорема А.3.1) имеем

$$\|f\|^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t - \epsilon |\omega|} d\omega \int_{-A}^A f(t) e^{i\omega t} dt \right] \overline{f(x)} dx.$$

По теореме Фубини мы можем поменять порядок интегрирования и получить

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-A}^A \overline{f(x)} e^{-i\omega x} dx \right] \left[ \int_{-A}^A f(t) e^{i\omega t} dt \right] e^{-\epsilon |\omega|} d\omega = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)|^2 e^{-\epsilon |\omega|} d\omega.\end{aligned}$$

Поскольку  $g$  непрерывна и  $g = O(|\omega|^{-2})$ , существует  $\|g\|^2$ . Поэтому возможен переход к пределу под знаком интеграла и мы имеем

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|g\|^2.$$

### A.3.6. Приближение функций из $L_2$ функциями класса $(C^\infty)$

1. *Множество функций из  $L_2$  с компактным носителем плотно в  $L_2$  относительно нормы в  $L_2$ .*

Действительно, пусть  $f \in L_2$ , и пусть  $f_A(t) = f(t)$  для  $|t| \leq A$ ,  $f_A(t) = 0$  для  $|t| \geq A$ . Тогда  $\|f_A\|^2 \rightarrow \|f\|^2$ ; следовательно,

$$\|f - f_A\| \rightarrow 0.$$

2. *Непрерывные функции с компактным носителем образуют плотное в  $L_2$  множество.* (В силу п. 1 доста-

точно приблизить только функции из  $L_2$  с компактным носителем.) Это — хорошо известное свойство класса  $L_2$  (см. Ройден [1], стр. 100).

**3. Множество функций класса ( $C^\infty$ ) с компактным носителем плотно в  $L_2$  (по норме в  $L_2$ ).**

В §§ 3.1 и 3.2 показано, что непрерывные функции с компактным носителем можно равномерно приблизить функциями класса ( $C^\infty$ ) с компактным носителем. Из равномерной сходимости следует сходимость по норме в  $L_2$ . Комбинируя это приближение с приближением п. 2, мы получим требуемое утверждение.

### A.3.7. Полнота $L_2$

*Пространство  $L_2$  полно.* (Это утверждение известно как теорема Рисса — Фишера.) Пусть  $\{f_n\}$  — последовательность Коши функций из  $L_2$ . Тогда существует элемент  $f_0 \in L_2$ , такой, что  $\|f_0 - f_n\| \rightarrow 0$  ( $\{f_n\}$  называется последовательностью Коши, если для каждого  $\epsilon > 0$  существует такое число  $n_0$ , что  $\|f_n - f_m\| < \epsilon$  для всех  $n, m > n_0$ ).

Доказательство читатель сможет найти в книге Ройдена [1], стр. 99.

### A.3.8. Норма преобразования Планшереля

**Теорема.** Пусть  $f \in L_2$ . Тогда

$$g(\omega) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) e^{i\omega t} dt$$

существует и принадлежит  $L_2$ . Кроме того,  $\|f\|^2 = (1/2\pi) \|g\|^2$ .

**Доказательство.** Введем обозначение  $g_R(\omega) = \int_{-R}^R f(t) e^{i\omega t} dt$ .

**Существование:** из  $f \in L_2$  следует, что  $f \in L_1(-R, R)$ . Произведение непрерывной функции и функции из  $L_1$

также принадлежит  $L_1(-R, R)$ . Следовательно,  $f(t) e^{i\omega t} \in L_1(-R, R)$  и  $g_R(\omega)$  существует для каждого  $\omega$ .

Пусть  $\{f_n\}$  — последовательность функций класса  $(C^2)$  с носителем в  $(-R, R)$ , приближающая  $f$  по норме  $\|\cdot\|_R$  в  $L_2(-R, R)$  (§ A.3.6). Пусть

$$g_{R,n}(\omega) = \int_{-R}^{+R} f_n(t) e^{i\omega t} dt.$$

Далее, из того, что  $\int_{-R}^R |f(t) - f_n(t)|^2 dt \rightarrow 0$ , следует, что

$\int_{-R}^R |f(t) - f_n(t)| dt \rightarrow 0$ . Следовательно,  $|g_{R,n}(\omega) - g_R(\omega)| \leq \int_{-R}^R |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0$  равномерно по  $\omega$ . По теореме A.3.5

$$\|g_{R,n}\|^2 = 2\pi \int_{-R}^R |f_n(t)|^2 dt.$$

Поэтому  $\|g_{R,n} - g_{R,m}\|^2 = 2\pi \int_{-R}^R |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt$ . Поскольку  $g_{R,n} \rightarrow g_R$  равномерно, мы имеем

$$\|g_{R,n} - g_R\|^2 = 2\pi \|f_n - f\|_R^2.$$

Значит,

$$\|g_R\|^2 = 2\pi \int_{-R}^R |f(t)|^2 dt.$$

При  $R \rightarrow \infty$  мы получаем последовательность Коши. Вследствие полноты  $L_2$  существует функция  $g \in L_2$ , такая, что  $g = \lim_{R \rightarrow \infty} g_R$ , и мы имеем:  $\lim_{R \rightarrow \infty} \|g_R\|^2 = 2\pi \|f\|^2$ . Теорема доказана.

### A.3.9. Теорема Планшереля

Теорема. Пусть  $f \in L_2$  и

$$g(\omega) = \liminf_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Тогда

$$\liminf_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A g(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = f(x).$$

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями  $\mathcal{F}(f, \omega)$  и  $\mathcal{F}^{-1}(g, x)$ . Для удобства мы будем также иногда опускать переменные и писать  $\mathcal{F}(f)$  и  $\mathcal{F}^{-1}(g)$ .

Доказательство. В § A.3.4 теорема была доказана для функций класса  $(C^2)$  с компактным носителем. Приблизим  $f$  последовательностью  $\{f_n\}$  таких функций (§ A.3.6). Положим

$$g_n = \mathcal{F}(f_n, \omega), \quad F_n = \mathcal{F}^{-1}(g_n, x), \quad F = \mathcal{F}^{-1}(g, x).$$

По теореме A.3.8,  $F$  существует. По теореме A.3.5,  $F_n = f_n$ . По теореме A.3.8 имеем

$$\begin{aligned} \|F - f_n\|^2 &= \|F - F_n\|^2 = \|\mathcal{F}^{-1}(g - g_n)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|g - g_n\|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f - f_n)\|^2 = \|f - f_n\|^2. \end{aligned}$$

Далее,  $\|f - f_n\|^2 \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\|F - f\| = \|\mathcal{F}^{-1}(g) - f\| = 0.$$

Теорема доказана.

### A.3.10. Формула Парсеваля

Теорема. Пусть  $f, g \in L_2$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathcal{F}(g, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f, \omega) g(\omega) d\omega.$$

Доказательство. По теореме Планшереля  $\mathcal{F}(g, t), \mathcal{F}(f, \omega) \in L_2$ . Произведение двух функций из  $L_2$  принадлежит  $L_1$ . Следовательно, интеграл существует.

Рассмотрим

$$\int_{-R}^R \left[ f(t) \int_{-A}^A e^{i\omega t} g(\omega) d\omega \right] dt.$$

Для конечных интервалов функции из  $L_2$  лежат в  $L_1$ . Поэтому существует интеграл

$$\int_{-R}^R \int_{-A}^A |f(t) g(\omega) e^{i\omega t}| d\omega dt,$$

и по теореме Фубини

$$\int_{-R}^R f(t) \left[ \int_{-A}^A e^{i\omega t} g(\omega) d\omega \right] dt = \int_{-A}^A g(\omega) \left[ \int_{-R}^R e^{i\omega t} f(t) dt \right] d\omega.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \int_{-A}^A e^{i\omega t} g(\omega) d\omega \right] dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-A}^A g(\omega) \left[ \int_{-R}^R e^{i\omega t} f(t) dt \right] d\omega.$$

Далее, из неравенства Шварца и теоремы § A.3.8 следует оценка

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-A}^A g(\omega) \left[ \int_{|t|>R} e^{i\omega t} f(t) dt \right] d\omega \right|^2 \leq \\ & \leq \int_{-A}^A |g(\omega)|^2 d\omega 2\pi \int_{|t|>R} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Правая часть неравенства стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-A}^A g(\omega) \left[ \int_{-R}^R e^{i\omega t} f(t) dt \right] d\omega = \int_{-A}^A g(\omega) \mathcal{F}(f, \omega) d\omega.$$

Из тех же соображений можно устремить к бесконечности  $A$ . Теорема доказана.

**A.3.11.** Каждое распределение в  $(\mathcal{E}')$  является производной конечного порядка непрерывной функции

Теорема. Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда существует число  $k$  и непрерывная функция  $f$ , такие, что  $T = f^{(k)}$ . Функция  $f$  может быть выбрана так, что  $f = O(|\omega|^{k-1})$ .

Доказательство. Согласно изложенному в § 4.4,  $T$  — конечного порядка, т. е. существует  $m$ , такое, что если  $\varphi_v \in (\mathcal{D})$  и последовательность  $\varphi_v$  сходится к нулю вплоть до порядка  $m$ , то  $\langle T, \varphi_v \rangle \rightarrow 0$ . Рассмотрим функцию

$$\left\langle T_\omega, \frac{e^{i\omega t}}{(it)^{m+1}} \right\rangle = \frac{1}{(it)^{m+1}} \mathcal{F}(T, t).$$

При  $|t| \rightarrow \infty$  функции семейства  $e^{i\omega t}/(it)^{m+1}$  сходятся к нулю вплоть до порядка  $m$ . Следовательно,

$$\left\langle T_\omega, \frac{e^{i\omega t}}{(it)^{m+1}} \right\rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } |t| \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\left\langle T_\omega, \frac{e^{i\omega t}}{(it)^{m+2}} \right\rangle = O(|t|^{-1}).$$

Чтобы получить функцию из  $L_2$ , вычтем подходящий полином  $P(t)$  по степеням  $1/it$  (максимальной степени  $m+2$ ). Обозначим получившуюся функцию через  $F(t)$ . Тогда

$$\frac{1}{(it)^{m+2}} \mathcal{F}(T, t) = F(t) + P(t).$$

Применим к этому равенству обратное преобразование Фурье. Дифференцированием можно проверить, что става мы получим первообразную  $T$  порядка  $m+2$ . В правой части мы получим функцию из  $L_2$  плюс

$$\mathcal{F}^{-1}(P, \omega) = a_0 e(\omega) + a_1 \omega e(\omega) + \dots + a_{m+1} \omega^{m+1} e(\omega),$$

где  $a_0, \dots, a_{m+1}$  — постоянные. Интегрируя еще раз, мы получаем непрерывную функцию  $f$ , равную первообразной  $T$  порядка  $k=m+3$ . Отметим, что  $f = O(|\omega|^{k-1})$ . Теорема доказана.

**A.3.12.** Каждое распределение в  $(\mathcal{S}')$  является производной конечного порядка функции медленного роста

Теорема. Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ . Тогда существуют число  $k$  и функция медленного роста  $f$ , такие, что  $T = f^{(k)}$ .

**Доказательство.** Из задачи 1 вытекает, что существуют  $m$  и  $p$ , такие, что если  $\Phi_v \in (\mathcal{S})$  и  $|\omega^m| |D^q \Phi_v| \leq C$  для  $0 \leq q \leq p$  независимо от  $v$  и если  $\{\Phi_v\}$  сходится к нулю вплоть до порядка  $p$ , то  $\langle T, \Phi_v \rangle \rightarrow 0$ . Для доказательства мы возьмем

$$\frac{1}{(it)^{m+p+2}} \langle T_\omega, e^{i\omega t} \rangle$$

вместо

$$\frac{1}{(it)^{m+2}} \langle T_\omega, e^{i\omega t} \rangle,$$

как это было сделано в § A.3.11. В дальнейшем доказательство проходит точно так же.

### ЗАДАЧИ

1. Доказать, что для каждого распределения  $T \in (\mathcal{S}')$  существуют целые числа  $m$  и  $p$ , такие, что если  $\Phi_v \in (\mathcal{S})$  и  $|\omega^m| |D^q \Phi_v| \leq C$  для  $0 \leq q \leq p$  независимо от  $v$ , а  $\{\Phi_v\}$  сходится к нулю вплоть до порядка  $p$ , то  $\langle T, \Phi_v \rangle \rightarrow 0$  (см. § 4.4). (Эта задача нетривиальна.)

2. Доказать, что преобразование Фурье функций из  $L_1$  равномерно непрерывно на  $E^1$ .

## IV. ПРИЛОЖЕНИЯ

### ГЛАВА 10

#### Электрические цепи

---

##### 10.1. Емкость, сопротивление и индуктивность. Законы Кирхгофа

Законы электродинамики, занимающейся изучением поведения электромагнитного поля в пространстве и времени, описываются уравнениями Максвелла. Особенno важны некоторые идеализированные конфигурации проводников. Они характеризуются *сопротивлением, емкостью и индуктивностью*, обычно обозначаемыми через  $R$ ,  $C$  и  $L$ .

Для любой цепи с элементами  $R$ ,  $C$ ,  $L$ , связанными (идеальными) проводами, которая включает внешние *электродвигущие силы* (э. д. с.), справедливы законы Кирхгофа. Их можно вывести из уравнений Максвелла в следующей форме:

1. *Сумма токов в каждом узле равна нулю (если считать вытекающие токи положительными, а втекающие — отрицательными).*

2. *Сумма электродвигущих сил и падений потенциалов по каждому замкнутому контуру равна нулю.*

Когда ток  $I(t)$  ( $t$  — время) течет по проводнику с индуктивностью  $L$ , он генерирует э. д. с.  $E_L(t)$ , связанную с  $I(t)$  уравнением

$$E_L(t) = L \frac{d}{dt} I(t)$$

далее мы будем писать  $\dot{I}(t)$  вместо  $(d/dt)I(t)$ .

Когда ток  $I(t)$  течет по проводнику с сопротивлением  $R$ , он генерирует э. д. с.

$$E_R(t) = RI(t),$$

а в проводнике с емкостью  $C$  — э. д. с.

$$E_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt.$$

Существует также и индуктивная связь. Пусть даны две катушки  $L_1$  и  $L_2$  с взаимной индуктивностью  $M$ . Тогда ток  $I_1(t)$ , текущий через  $L_1$ , индуцирует в  $L_2$  э. д. с.

$$E_1(t) = M\dot{I}_1(t)$$

и, наоборот, ток  $I_2(t)$ , текущий через  $L_2$ , индуцирует в  $L_1$  э. д. с.

$$E_2(t) = M\dot{I}_2(t).$$

Совокупность этих правил полностью определяет поведение цепи, если заданы внешние э. д. с. и токи (за исключением некоторых патологических случаев). Доказательство однозначности нетривиально. Ему посвящена обширная литература (см., например, Фридланд, Уинг и Эш [1]).

Как обычно, мы будем оперировать с комплексными решениями дифференциальных уравнений. Физические токи и напряжения соответствуют вещественным их частям.

## 10.2. Пример

Чтобы проиллюстрировать применение распределений, рассмотрим совсем простую цепь, изображенную на рис. 10.1. Она состоит только из одного контура, и поэтому имеется только один ток  $I(t)$ . Из законов Кирхгофа следует, что

$$L\dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt = E(t).$$

Продифференцировав один раз по  $t$ , мы получим чисто дифференциальное уравнение

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C} I(t) = \dot{E}(t),$$

где  $E(t)$  называется *внешней электродвижущей силой* (внешней э. д. с.). Теперь уравнение можно решить методом, описанным в § 9.12.

Рассмотрим случай  $E(t) = E_0 H(t)$ . Это означает, что в момент  $t = 0$  включается постоянное напряжение вели-

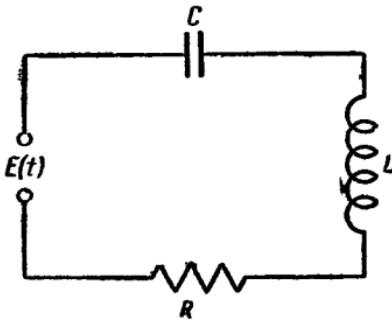


Рис. 10.1.

чины  $E_0$ . Тогда  $\dot{E}(t) = E_0 \delta(t)$ . Следовательно, применив обратное преобразование Фурье, мы получим

$$[\mathcal{F}^{-1}(I, \omega)] \left[ L(i\omega)^2 + Ri\omega + \frac{1}{C} \right] = \frac{E_0}{2\pi}.$$

Мы будем считать, что  $L \neq 0$  и  $C \neq 0$ . Тогда

$$\mathcal{F}^{-1}(I, \omega) = \frac{E_0/2\pi}{L(i\omega)^2 + Ri\omega + 1/C},$$

а отсюда

$$I = \frac{E_0}{2\pi} \mathcal{F} \left[ \frac{1}{L(i\omega)^2 + Ri\omega + 1/C} \right].$$

Корни полинома в знаменателе равны

$$\omega_{\pm} = \frac{iR \pm \sqrt{4L/C - R^2}}{2L}.$$

Поэтому мы имеем

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{E_0}{2\pi \sqrt{4L/C - R^2}} \mathcal{F} \left( \frac{1}{\omega - \omega_-} - \frac{1}{\omega - \omega_+} \right) = \frac{E_0}{\sqrt{4L/C - R^2}} \times \\ &\quad \times e^{-(R/2L)t} \frac{\exp \left[ i \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} t \right] - \exp \left[ -i \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} t \right]}{i} H(t) = \\ &= \frac{2E_0}{\sqrt{4L/C - R^2}} e^{-(R/2L)t} \sin \left[ \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} t \right] H(t). \end{aligned}$$

Сейчас мы имеем лишь частное решение неоднородного уравнения. Однако, если потребовать, чтобы система находилась в покое при  $t < 0$ , оно будет истинным решением, поскольку  $I(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ .

Очевидно, мы должны различать три случая:

$$(I) \frac{4L}{C} - R^2 > 0,$$

$$(II) \frac{4L}{C} - R^2 = 0,$$

$$(III) \frac{4L}{C} - R^2 < 0.$$

В случае (I),  $I(t)$  является затухающим синусоидальным колебанием с частотой

$$\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}$$

и амплитудой

$$\frac{2E_0}{\sqrt{4L/C - R^2}} e^{-(R/2L)t}.$$

Множитель  $e^{-(R/2L)t}$  описывает экспоненциальное затухание. При  $R \rightarrow 0$  решение приближает „незатухающие колебания“ с частотой  $1/\sqrt{LC}$ .

В случае (III) корень  $\sqrt{(4L/C) - R^2}$  чисто мнимый, а множитель

$$\exp \left( + i \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} t \right) - \exp \left( - i \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} t \right)$$

равен  $-2 \operatorname{sh}((1/2L) \sqrt{R^2 - 4L/C} t)$ . Поскольку  $R > \sqrt{R^2 - 4L/C}$ , решение  $e^{-(R/2L)t} \operatorname{sh}((1/2L) \sqrt{R^2 - 4L/C} t)$  описывает асимптотическое затухание.

Наконец, в случае (II) наше разбиение на простейшие дроби не справедливо. Мы имеем

$$I(t) = \frac{E_0}{2\pi} \mathcal{F} \left[ - \frac{1}{L(\omega - iR/2L)^2} \right].$$

Это преобразование вычислялось в § 9.6. Мы получаем

$$I(t) = \frac{E_0}{L} t H(t) e^{-(R/2L)t}.$$

Отметим, что для  $\dot{E}(t) = \delta(t)$  наше решение является фундаментальным решением дифференциального уравнения. Оно представляет собой функцию Грина для начальных условий  $I(t) = \dot{I}(t) = 0$  при  $t < 0$ . Обозначим ее через  $G(t)$ . В электротехнике эту функцию называют *откликом на единичный импульс*.

### ЗАДАЧИ

1. Показать, что при  $C = 0, L \neq 0, R \neq 0$

$$I(t) = \frac{E_0}{R} H(t) [1 - e^{-(R/L)t}].$$

2. Показать, что при  $L = 0, C \neq 0, R \neq 0$

$$I(t) = \frac{E_0}{R} H(t) e^{-(1/RC)t}.$$

### 10.3. Произвольная внешняя э. д. с.

Рассмотрим ту же простую цепь с произвольной внешней э. д. с. Согласно изложенному в § 9.12, мы имеем

$$I(t) = \mathcal{F} \left( \frac{\mathcal{F}^{-1}(\dot{E}, \omega)}{L(i\omega)^2 + Ri\omega + 1/C}, t \right) = \frac{1}{2\pi} \dot{E} * G.$$

Функция  $\dot{E}$  должна удовлетворять следующим условиям (см. § 9.12):

I) Если допустимы вещественные корни  $\omega_+, \omega_-$ , то  $\dot{E} \in (\mathcal{E}')$ .

II) Если  $\operatorname{Im} \omega_- \neq 0, \operatorname{Im} \omega_+ \neq 0$ , то  $\dot{E} \in (\mathcal{S}')$ .

Эти условия допускают простую интуитивную интерпретацию. Пусть, например,  $\dot{E} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta(t-v)$ . Тогда  $\dot{E} \in (\mathcal{D}')$ . Носитель состоит из всех точек  $t = v, v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Поэтому  $\dot{E} \notin (\mathcal{E}')$ . Если  $\operatorname{Im} \omega_- = \operatorname{Im} \omega_+ = R = 0$ , то  $G(t)$  представляет иезатухающее колебание:

$$G(t) = H(t) \frac{E_0}{\sqrt{L/C}} \sin \frac{t}{\sqrt{L/C}},$$

и мы получили бы равенство

$$\dot{E} * G = \frac{E_0}{V^{L/C}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sin \frac{t-v}{V^{LC}} H(t-v).$$

Вообще говоря, эта сумма расходится. Поскольку имеется бесконечно большое число внешних импульсов, нам приходится складывать бесконечное число незатухающих колебаний. Однако, если число импульсов конечно, решение существует. Оно существует и для прежней  $E$ , но при  $\operatorname{Im} \omega_- = \operatorname{Im} \omega_+ = R > 0$ . В этом случае колебания затухают достаточно быстро, так что при сложении мы получаем конечный ответ. Условие  $\dot{E} \equiv (\mathcal{S})$  сводится в сущности к следующему:  $\dot{E}$  при  $|t| \rightarrow \infty$  растет достаточно медленно, так что колебания „затухают“ достаточно быстро, и их сумма дает ответ, имеющий физический смысл.

### ЗАДАЧИ

Вычислить  $I(t)$  для:

- 1)  $E(t) = \delta'(t)$ ,  $I(t) = 0$  при  $t < 0$ ;
  - 2)  $E(t) = E_0[H(t-a) - H(t-b)]$ ,  $a < b$  (одиночный прямоугольный импульс),  $I(t) = 0$  при  $t < a$ ;
  - 3)  $E(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} E_v [H(t-a_v) - H(t-b_v)]$ , ...,  $a_{-1} < b_{-1} < a_0 < b_0 < a_1 < b_1 \dots$  (бесконечная последовательность импульсов).
- Найти общее решение. Показать, что условие  $|E_v| \leq |v|^a$  с некоторым  $a$  достаточно для того, чтобы  $\dot{E}(t) \equiv (\mathcal{S}')$ .

## 10.4. Многоконтурные цепи. Комплексный импеданс

До сих пор мы рассматривали только случай простого контура, состоящего из последовательно соединенных  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и внешней э. д. с. В общем случае цепь может содержать любое число узлов, соединенных с другими узлами элементами  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , и включать конечное число внешних э. д. с.  $E_1, \dots, E_N$ .

Для каждого узла имеет место первый закон Кирхгофа  $\sum I_j = 0$ . Если имеется  $n$  узлов, мы получаем  $n$  уравнений типа

$$I_{j_1} + I_{j_2} + \dots + I_{j_k} = I_{j_{k+1}} + \dots + I_{j_{k+l}}.$$

Они называются *узловыми уравнениями*. Для каждой петли по второму закону Кирхгофа мы имеем уравнение вида

$$\ddot{I}_{a_1}L_{a_1} + \ddot{I}_{a_2}L_{a_2} + \dots = \sum_{v=1}^N \dot{E}_v.$$

Такие уравнения называются *контурными уравнениями*. Применив обратное преобразование Фурье, мы получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(I_{a_1}, \omega) \left[ (i\omega)^2 L_{a_1} + i\omega R_{a_1} + \frac{1}{C_{a_1}} \right] + \dots &= \\ &= (i\omega) \mathcal{F}^{-1} \left( \sum_{v=1}^N \dot{E}_v \right). \end{aligned}$$

Обратное преобразование Фурье от узловых уравнений дает нам систему линейных уравнений для  $\mathcal{F}^{-1}(I_1, \omega), \dots, \mathcal{F}^{-1}(I_n, \omega)$ . В общем случае уравнений больше, чем неизвестных. Некоторые из уравнений линейно зависимы. Оказывается, что система (за исключением некоторых патологических случаев, когда цепь содержит трансформатор) всегда имеет решение вида

$$\mathcal{F}^{-1}(I_I, \omega) = \sum_{v=1}^N (\mathcal{F}^{-1} E_v) \frac{P_{v,I}(\omega)}{Q_{v,I}(\omega)},$$

где  $P_{v,I}(\omega)$  и  $Q_{v,I}(\omega)$  — полиномы по  $\omega$ . (См., например, Фридланд, Уинг и Эш [1], Гильемин [1].)

Доказано (Гильемин [1], [2]), что все нули полинома  $Q_v(\omega)$  лежат в нижней полуплоскости или в крайнем случае на вещественной оси; при этом их можно рассматривать как предельные значения корней, имеющих отрицательные мнимые части.

Полиномы можно разложить на простейшие дроби, и таким образом выписать ответ явно, как в § 10.3. Тот факт, что все полюсы лежат в нижней полуплоскости, приводит к появлению у решения множителя  $H(t)$ . Таким образом, если мы ищем решение, обращающееся в нуль при  $t < 0$  (система находится в покое), то мы его и получили.

Электродвижущие силы  $E_v$  должны удовлетворять тем же условиям, что и в § 10.3: если полиномы  $Q_v$  не имеют вещественных корней, то  $E_v \in (\mathcal{S}')$ , а в противном случае  $E_v \in (\mathcal{E}')$ .

Особенно интересен случай, когда все э. д. с. кроме одной,  $E$ , равны нулю. Если ток в контуре, содержащем  $E$ , обозначить через  $I$ , то

$$\mathcal{F}^{-1}(I, \omega) = \mathcal{F}^{-1}(E, \omega) \frac{P(\omega)}{Q(\omega)},$$

где  $P$  и  $Q$  — полиномы по  $\omega$ . Отношение

$$Z(i\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

называется *импедансом* цепи.

Задачи, в которых заданы некоторые из токов (*внешние токи*) и необходимо найти падение напряжения между разветвлениями, решаются аналогично, и решение имеет вид

$$\mathcal{F}^{-1}(E_j, \omega) = \sum \mathcal{F}^{-1}(I_v) \frac{\tilde{P}_{v,j}(\omega)}{\tilde{Q}_{v,j}(\omega)},$$

где  $\tilde{P}_{v,j}$  и  $\tilde{Q}_{v,j}$  — полиномы.

Если задан только один внешний ток, то падение напряжения между соответствующими узлами определяется формулой

$$\mathcal{F}^{-1}(E, \omega) = \mathcal{F}^{-1}(I, \omega) Y(i\omega),$$

где  $Y(i\omega)$  — отношение двух полиномов, называемое *адmittансом*. Ток  $I$  должен удовлетворять условиям, аналогичным условиям, налагавшимся на  $E$ .

Теперь мы проиллюстрируем эти методы на примере многоконтурных цепей, имеющих не более чем два внешних тока или внешних э. д. с., т. е. четырехполюсников.

## 10.5. Четырехполюсники

Важный класс цепей составляют четырехполюсники (цепи с двумя парами зажимов), изображенные на рис. 10.2. Прямоугольником обозначена некоторая слож-

ная цепь, соединяющая четыре зажима. Мы всегда можем назвать зажимы 1 и 2 входными, а зажимы 3 и 4 — выходными. Из последовательности простых

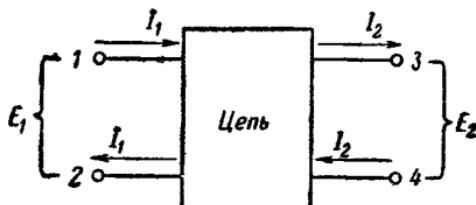


Рис. 10.2.

четырехполюсников можно образовать новый четырехполюсник. Таким образом строятся, например, некоторые фильтры.

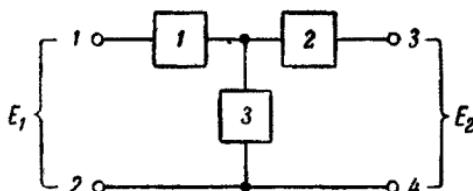
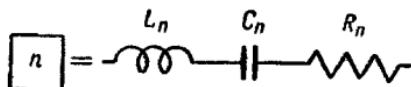


Рис. 10.3.

Для нахождения соотношений между  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $E_1$  и  $E_2$  мы применим законы Кирхгофа. Ограничимся для простоты четырехполюсником, называемым  $T$ -образной секцией (рис. 10.3), где



$n = 1, 2, 3$ . Уравнения Кирхгофа имеют вид

$$(L_1 + L_3)\ddot{I}_1 + (R_1 + R_3)\dot{I}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right)I_1 - L_3\ddot{I}_2 - R_3\dot{I}_2 - \frac{1}{C_3}I_2 = \dot{E}_1.$$

$$(L_2 + L_3)\ddot{I}_2 + (R_2 + R_3)\dot{I}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)I_2 - L_3\ddot{I}_1 - R_3\dot{I}_1 - \frac{1}{C_3}I_1 = -\dot{E}_2.$$

Применив теорему о свертке, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(I_1, \omega) [Z_1(\omega) + Z_3(\omega)] - \mathcal{F}^{-1}(I_2, \omega) Z_3(\omega) &= \mathcal{F}^{-1}(E_1, \omega), \\ \mathcal{F}^{-1}(I_2, \omega) [Z_2(\omega) + Z_3(\omega)] - \mathcal{F}^{-1}(I_1, \omega) Z_3(\omega) &= -\mathcal{F}^{-1}(E_2, \omega),\end{aligned}$$

где

$$Z_n(\omega) = i\omega L_n + R_n + \frac{1}{i\omega C_n}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Эти уравнения можно записать в более удобном виде:

$$\mathcal{F}^{-1}(E_1, \omega) = A(\omega) \mathcal{F}^{-1}(E_2, \omega) + B(\omega) \mathcal{F}^{-1}(I_2, \omega),$$

$$\mathcal{F}^{-1}(I_1, \omega) = C(\omega) \mathcal{F}^{-1}(E_2, \omega) + D(\omega) \mathcal{F}^{-1}(I_2, \omega),$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}.$$

#### ЗАДАЧА

1. *Пример четырехполюсника.* Рассмотрим четырехполюсник, изображенный на рис. 10.4. Вычислить ма-

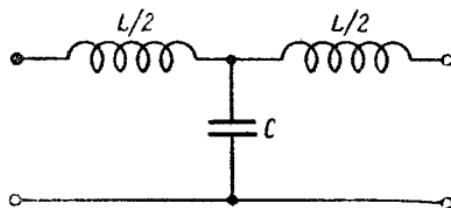


Рис. 10.4.

трицу. Вычислить  $I_1$  и  $I_2$  для внешних  $E_1$  и  $E_2$ , представляющих собой последовательность импульсов.

## 10.6. Линейные фильтры

*Линейным фильтром* называется устройство, преобразующее внешнюю входящую э. д. с. (или ток) в выходящую э. д. с. (или ток) по следующему закону:

$$E_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, t') E_1(t') dt',$$

где  $k(t, t')$  — вещественное значение функция из подходящего класса.

Если из условия  $E_1(t) = E_1(t + \tau)$  следует, что  $E_2(t) = E_2(t + \tau)$  для всех  $\tau$ , то фильтр называется *стационарным*. Это означает, что если входной сигнал сдвинут по времени на величину  $\tau$ , то фильтр выдает тот же сигнал, что и прежде, но сдвинутый по времени на  $\tau$ . При этом

$$\begin{aligned} E_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, t') E_1(t' + \tau) dt' = E_2(t + \tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(t + \tau, t') E_1(t') dt'. \end{aligned}$$

Следовательно, после замены переменных

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [k(t, t' - \tau) - k(t + \tau, t')] E_1(t') dt' = 0$$

для всех допустимых входящих функций  $E_1(t')$ . Если  $k$  локально интегрируема, а  $E_1(t) \in \mathcal{D}$  (самое меньшее, что мы можем потребовать), то  $k(t, t' - \tau) = k(t + \tau, t')$  почти всюду для всех  $\tau$ . Если  $k$  непрерывна, мы имеем это тождество для всех  $t, t', \tau$ . Из него следует, что  $k(t, t')$  является функцией *разности*  $t - t'$ . Для удобства обозначим эту функцию тем же символом  $k$ . Таким образом, стационарный фильтр описывается уравнением типа свертки

$$E_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t - t') E_1(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t') E_1(t - t') dt'.$$

Если  $k(t) = 0$  при  $t < 0$ , то фильтр называется *фильтром типа II*, а в противном случае — *фильтром типа I* (в терминологии Вайнштейна и Зубакова [1]). Таким образом, уравнение фильтра типа II принимает вид

$$E_2(t) = \int_{-\infty}^t k(t - t') E_1(t') dt' = \int_0^\infty k(t') E_1(t - t') dt'.$$

Фильтр типа II испытывает влияние величин  $E_1(t')$  только в моменты времени, предшествовавшие данному моменту  $t$ . Фильтром с конечной памятью называется фильтр, у которого  $k(t) = 0$  вне интервала  $0 < t < T$  (его же называют фильтром типа III).

Предположим, что  $E_1(t) = \delta(t)$ . Тогда  $E_2(t) = k(t)$ . Таким образом, функция  $k(t)$  имеет интуитивную интерпретацию:  $k(t)$  является импульсным откликом фильтра на  $\delta$ -образный сигнал. По этой причине  $k(t)$  называется *откликом фильтра на единичный импульс*.

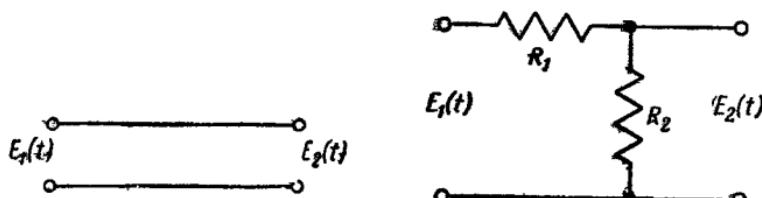


Рис. 10.5.

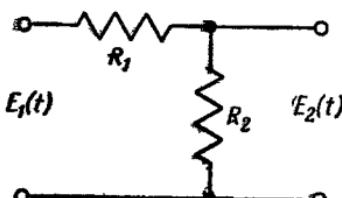


Рис. 10.6.

Ограничивать возможные  $k(t)$  обычными функциями неразумно. Тем самым исключается случай тождественного фильтра (рис. 10.5), для которого  $E_2(t) = E_1(t)$ . В этом случае  $k(t) = \delta(t)$ . Аналогично и для простого делителя напряжения (рис. 10.6), где

$$E_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1(t), \quad k(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t).$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что необходимо допустить в качестве отклика на единичный импульс распределения. Уравнение, описывающее фильтр, принимает вид

$$E_2 = k * E_1.$$

Мы требуем, чтобы  $k$  была *вещественной*, т. е. было вещественным  $\langle k, \varphi \rangle$  для любой вещественнозначной основной функции  $\varphi \in (\mathcal{D})$ .

Мы определили фильтр типа II следующим условием: носитель  $k$  должен содержаться в полупрямой  $\{t: t \geq 0\}$ . Фильтрам типа III отвечают  $k$  с компактным носителем.

Преобразование Фурье функции  $k$  называется *функцией передачи* фильтра и обозначается через  $K$ :

$$K(\omega) = \mathcal{F}(k, \omega).$$

Например, если  $k = \delta$ , то  $K(\omega) = 1$ . Отметим, что из условия вещественности  $k$  следует, что  $\overline{K(\omega)} = K(-\bar{\omega})$ . Справедливо и обратное утверждение: если  $\overline{K(\omega)} = K(-\bar{\omega})$ , то  $k$  вещественна.

Для четырехполюсника мы имели соотношения

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(E_1) &= A\mathcal{F}^{-1}(I_1) + B\mathcal{F}^{-1}(I_2), \\ \mathcal{F}^{-1}(E_2) &= C\mathcal{F}^{-1}(I_1) + D\mathcal{F}^{-1}(I_2).\end{aligned}$$

Если же четырехполюсник используется как фильтр, то  $I_2 = 0$ . (Любую „нагрузку“ на выходе следует учесть при вычислении  $A, B, C, D$ .) Таким образом, для четырехполюсника

$$\mathcal{F}(E_2) = \frac{C(-\omega)}{A(-\omega)} \mathcal{F}(E_1).$$

Итак, функция передачи четырехполюсника является рациональной функцией  $\omega$ . Из этого результата следует,

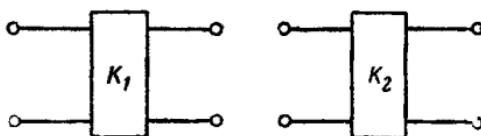


Рис. 10.7.

что фильтры, построенные из элементов  $R, C, L$ , составляют специальный подкласс рассматриваемых здесь фильтров. Отметим, что преобразование Фурье отношения  $C/A$  вещественно.

Если два фильтра соединены в цепь (рис. 10.7) и если входной импеданс второго фильтра велик по сравнению с выходным импедансом первого (так что  $k_1$  и  $k_2$  после соединения фильтров меняются незначительно), то единичная импульсная реакция этой комбинации равна  $k_1 * k_2$ , а ее функция передачи равна  $K_1(\omega) \cdot K_2(\omega)$ .

Функции передачи фильтров типа III не имеют особенностей.

Если носитель  $k$  содержится в  $\{t: t \geq 0\}$ , а  $k \in (\mathcal{S}')$  (наиболее общее из физически допустимых условий), то значения  $K(\omega)$  являются граничными значениями функции  $\hat{\mathcal{F}}(k, \omega)$ , аналитической в верхней полуплоскости, причем  $\hat{\mathcal{F}}(k, \omega)$  представляет собой обобщенное преобразование Фурье функции  $k$ . Действительно,  $\hat{\mathcal{F}}(k, \omega) = 0$  при  $\operatorname{Im} \omega < 0$ . Таким образом, если  $K(\omega)$  — функция передачи фильтра типа II, то она подчиняется некоторым условиям. В следующей главе мы покажем, что именно при этих условиях  $K(\omega)$  удовлетворяет *дисперсионному соотношению*.

## Дисперсионные соотношения. Умножение распределений

---

### 11.1. Абсорбтивная и дисперсивная части

Пусть  $K(\omega)$  — функция передачи линейного фильтра. Пусть  $K(\omega) = 1 + iM(\omega)$ ,  $M(\omega) = D(\omega) + iA(\omega)$ , где  $D(\omega)$  и  $A(\omega)$  — вещественная и мнимая части  $M(\omega)$ . Тогда  $D(\omega)$  называется *дисперсивной частью*, а  $A(\omega)$  — *абсорбтивной частью*. Такая терминология оправдана по следующим соображениям. Пусть  $E_1(t) = E_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}(E_0 e^{i\omega t})$ , т. е.  $E_1(t)$  — чисто синусоидальное „*физическое*“ напряжение. Тогда, учитывая, что  $\overline{K(\omega)} = K(-\bar{\omega})$ , мы имеем на выходе напряжение (задача 1)

$$E_2(t) = E_0 \cos \omega t [1 - A(\omega)] + E_0 D(\omega) \sin \omega t.$$

Таким образом,  $E_0 A(\omega)$  — потеря (или прирост) амплитуды первоначальной входящей „волны“ (при поглощении или усилении ее), а  $D(\omega) \sin \omega t$  — новая, сдвинутая по фазе „волна“, появившаяся на выходе.

Функция  $K(\omega)$  соответствует  $S$ -матрице квантовой теории поля. В этой теории аналог функции  $A(\omega)$  описывает амплитуду рассеяния вперед (часть пучка, „прошедшая насеквозд“), а функция  $D(\omega)$  — амплитуды отклоненных пучков (в различных направлениях) (см. Боголюбов [1], Бремерман, Эме и Тейлор [1], Клейн [1]).

### 11.2. Дисперсионное соотношение

**Теорема.** Пусть  $M(\omega)$  — кусочно-непрерывно дифференцируемая функция из  $L_2$ , такая, что значения  $M(\omega)$  являются граничными значениями функции, аналитической в верхней полуплоскости (комплексного)  $\omega$ . Тогда, если  $\omega_0$  — вещественная точка непрерывности,

выполняются соотношения

$$M(\omega_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{1}{\omega' - \omega_0}\right) M(\omega') d\omega'$$

и

$$D(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{1}{\omega' - \omega_0}\right) A(\omega') d\omega',$$

где  $P$  обозначает главное значение.

Последнее равенство называется *дисперсионным соотношением*. Оно связывает дисперсивную часть  $D(\omega)$  в точке  $\omega_0$  с интегралом от абсорбтивной части по всем частотам, взятым с весом  $P[1/(\omega' - \omega_0)]$ .

**Доказательство.** Поскольку  $M(\omega) \in L_2$ , существует интеграл

$$\hat{M}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'.$$

Так как  $M(\omega)$  является граничным значением функции, аналитической во всей верхней полуплоскости, интеграл Коши вдоль вещественной оси, т. е.  $\hat{M}(\omega)$ , равен нулю при  $\operatorname{Im} \omega < 0$ .

Поэтому (см. § 5.5 и задачу 5.2)

$$M(\omega_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{M}(\omega_0 + i\epsilon).$$

Если  $\omega_0$  — точка непрерывности, то мы имеем (см. § 7.3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{1}{\omega' - \omega_0}\right) M(\omega') d\omega' &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [\hat{M}(\omega_0 + i\epsilon) + \hat{M}(\omega_0 - i\epsilon)]. \end{aligned}$$

Поскольку  $\hat{M}(\omega_0 - i\epsilon) = 0$ , имеет место равенство

$$M(\omega_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{1}{\omega' - \omega_0}\right) M(\omega') d\omega'.$$

Взяв вещественную часть от нее, мы получаем

$$D(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{1}{\omega' - \omega_0}\right) A(\omega') d\omega'.$$

Теорема доказана.

**Следствие.** Если  $K$  — функция передачи фильтра типа II, которая является кусочно-непрерывной функцией класса  $L_2$ , то ее дисперсионная и абсорбтивная части удовлетворяют выписанному выше дисперсионному соотношению.

### 11.3. Дисперсионное соотношение с вычитаниями

Дисперсионное соотношение предыдущего параграфа было выведено при условии, что функция  $M(\omega)$  квадратично интегрируема. Это условие выполнено не всегда. Например, если

$$k(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t)$$

(см. § 10.6), а

$$K(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

то

$$M(\omega) = \frac{iR_1}{R_1 + R_2}.$$

Таким образом,  $M(\omega)$  постоянна и не принадлежит классу  $L_2$ . Сейчас мы покажем, что для функций  $M(\omega)$ , асимптотически ведущих себя как полином, мы имеем дисперсионное соотношение с вычитаниями.

**Теорема.** Пусть  $M(\omega)$  — кусочно-непрерывно дифференцируемая  $n+1$  раз функция,  $M(\omega) = O(|\omega|^n)$  и  $M(\omega)$  является граничным значением функции, аналитической в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$ . Тогда, если  $\omega_1$  и  $\omega_0$  — вещественные точки

непрерывности, имеет место формула

$$M(\omega_0) = \frac{(\omega_0 - \omega_1)^{n+1}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\omega') P\left(\frac{1}{(\omega' - \omega_1)^{n+1}}\right) P\left(\frac{1}{\omega' - \omega_0}\right) d\omega' + \\ + \frac{(\omega_0 - \omega_1)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\omega_1^n} \left[ M(\omega_1) P\left(\frac{1}{\omega_0 - \omega_1}\right) \right].$$

Второй член ее правой части равен

$$M(\omega_1) + \frac{M'(\omega_1)}{1!} (\omega_0 - \omega_1) + \dots + \frac{M^{(n)}(\omega_1)}{n!} (\omega_0 - \omega_1)^n.$$

Взяв вещественную часть формулы, мы получаем дисперсионное соотношение с вычитаниями:

$$D(\omega_0) - D(\omega_1) - \frac{D'(\omega_1)}{1!} (\omega_0 - \omega_1) - \dots - \frac{D^{(n)}(\omega_1)}{n!} (\omega_0 - \omega_1)^n = \\ = \frac{(\omega_0 - \omega_1)^{n+1}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega') P\left(\frac{1}{(\omega' - \omega_1)^{n+1}}\right) P\left(\frac{1}{\omega' - \omega_0}\right) d\omega'.$$

**Доказательство.** Пусть  $\omega_1$  вещественна. Тогда

$$\frac{M(\omega)}{(\omega - \omega_1 + i\varepsilon)^{n+1}} = O(|\omega|^{-1}).$$

Далее, функция  $1/(\omega - \omega_1 + i\varepsilon)^{n+1}$  имеет полюс в точке  $\omega = \omega_1 - i\varepsilon$  и аналитична во всех других точках. Поэтому функция  $M(\omega)/(\omega - \omega_1 + i\varepsilon)^{n+1}$  является граничным значением функции, аналитической в верхней полуплоскости. Следовательно, она удовлетворяет условиям теоремы 11.2. Поэтому

$$\frac{M(\omega_0)}{(\omega_0 - \omega_1 + i\varepsilon)^{n+1}} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M(\omega')}{(\omega' - \omega_1 + i\varepsilon)^{n+1}} P\left(\frac{1}{\omega' - \omega_0}\right) d\omega'.$$

Далее, мы имеем (см. тождества 7.8.2 и 7.8.4)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(\omega' - \omega_1 + i\varepsilon)^{n+1}} = P\left(\frac{1}{(\omega' - \omega_1)^{n+1}}\right) - \frac{\pi i (-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(\omega' - \omega_1).$$

Следовательно,

$$M(\omega_0) = \frac{(\omega_0 - \omega_1)^{n+1}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\omega') P\left(\frac{1}{(\omega' - \omega_1)^{n+1}}\right) P\left(\frac{1}{\omega' - \omega_0}\right) d\omega' - \\ - \frac{(\omega_0 - \omega_1)^{n+1} (-1)^n}{n!} \langle M(\omega') P\left(\frac{1}{\omega' - \omega_0}\right), \delta^{(n)}(\omega' - \omega_1) \rangle.$$

Заменим  $-P(1/(\omega' - \omega_0))$  на  $P(1/(\omega_0 - \omega'))$ . Тогда второй член примет вид

$$+ \frac{(\omega_0 - \omega_1)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\omega_1^n} \left[ M(\omega_1) P\left(\frac{1}{\omega_0 - \omega_1}\right) \right].$$

Теорема доказана.

**Замечание.** Дисперсионные соотношения — важное средство для синтеза электрических схем (например, приближенной реализации четырехполюсниками фильтра с заданной функцией передачи; см. Боде [1]). Дисперсионные соотношения играют также значительную роль в квантовой теории поля (см. библиографические ссылки в § 11.1). Доказательство того факта, что величины, соответствующие  $M(\omega)$ , имеют аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, потребовало в этой теории больших усилий.

**Следствие.** Если  $k \in (\mathbb{S})$ , а  $K(\omega)$  — кусочно-дифференцируемая достаточное раз функция, то соответствующие абсорбтивная и дисперсионная части удовлетворяют дисперсионному соотношению.

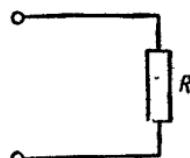
#### 11.4. Диссипация энергии и проблема умножения распределений

Энергия, рассеянная за промежуток времени  $(t_1, t_2)$  (вещественным) током  $I(t)$  при (вещественном) напряжении  $E(t)$ , равна

$$U = \int_{t_1}^{t_2} I(t) E(t) dt.$$

Пример. Рассмотрим простой пример двухполюсника, состоящего только из сопротивления (рис. 11.1). Напряжение  $E(t)$  индуцирует ток  $I(t) = E(t)/R$ . Тогда

$$U = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} [E(t)]^2 dt.$$



Рассмотрим случай, когда  $E(t) = E_0 \delta(t)$ . Мы получаем формально

$$U = \frac{E_0^2}{R} \int_{t_1}^{t_2} [\delta(t)]^2 dt.$$

Рис. 11.1.

Пусть  $t_1 < 0 < t_2$ . Тогда, поскольку  $\delta(t)$  равна нулю при  $t \neq 0$ , мы можем положить

$$U = \frac{E_0^2}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(t)]^2 dt = \frac{E_0^2}{R} \langle \delta, \delta \rangle.$$

Величина  $\langle \delta, \delta \rangle$  прежде не появлялась. Как следует ее интерпретировать? Можно было бы попытаться написать

$$\langle \delta, \delta \rangle = \delta(0).$$

Однако  $\delta(0)$  не представляет собой определенного конечного числа. Можно было бы попытаться одну из  $\delta(t)$  заменить ее аналитическим продолжением:

$$\langle \delta(t), \hat{\delta}(t-z) \rangle,$$

а затем устремить  $z$  к нулю. Однако интеграл равен

$$\hat{\delta}(-z) = 1/2\pi iz,$$

т. е. при  $z \rightarrow 0$  стремится к бесконечности.

Наконец, можно было бы попытаться приблизить  $\delta(t)$  функциями  $\sqrt{n/\pi} e^{-nt^2}$  и затем перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Мы получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} \right)^2 dt = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2nt^2} dt = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}.$$

При  $n \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{n/2\pi}$  стремится к бесконечности, т. е.  $U$  опять-таки будет бесконечной величиной.

### 11.5. Интерпретация примера

$\delta$ -функция Дирака является производной ступенчатой функции Хевисайда, которая описывает идеализированный и упрощенный процесс включения. „Реальная“ функция включения — не разрывная, а быстро меняющаяся от состояния „выключено“ к состоянию „включено“ функция. Пренебрегая „тонкой структурой“ этого перехода и заменяя его скачком, мы достигаем упрощения математической стороны вопроса. Это можно делать всегда (см. задачу 2), если только не приходится вычислять рассеиваемую энергию.

В этом случае мы не имеем права переходить к предельной величине  $\delta(t)$  и должны оставить функцию  $\sqrt{n\pi}e^{-nt^2}$ . Чтобы определить  $n$ , мы можем считать заданной энергию  $U$  „всплеска“, как характеристику генератора всплеска. Тогда можно найти  $n$  из условия

$$U = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \frac{E_0^2}{R}$$

в нашем примере и из аналогичного условия для других цепей.

### 11.6. Связь с квантовой теорией поля

Как мы видели, в теории электрических цепей вследствие идеализации появляется величина  $\langle \delta(t), \delta(t) \rangle$ , и поэтому не нужно интерпретировать  $\langle \delta(t), \delta(t) \rangle$  так, чтобы получить конечный ответ.

В квантовой теории поля ситуация иная. Вопрос об интерпретации произведения распределений (четырех и более переменных) возникает там в теории возмущений. Однако не известно, представляют ли распределения в этой теории идеализацию более сложной действительной ситуации.

Поэтому проблема умножения распределений привлекла к себе значительное внимание, и было построено несколько различных схем выделения „конечных частей“ из произведения распределений. (См. Шварц [1], Дайсон [1], Ахиезер и Берестецкий [1], Кёниг [1, 2, 3, 4], Боголюбов и Парасюк [1], Бремерман [1], Бремерман

и Дюран [1].) Некоторые из этих схем основаны на представлении рассматриваемых распределений как преобразований Фурье и формальном применении правил вычисления свертки. Так, например,  $\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}(1, t)$ ; поэтому формально (см. § 9.3)

$$2\pi\mathcal{F}^{-1}(\delta(t) \cdot \delta(t), \omega) = \\ = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}^{-1}(1, t) \cdot \mathcal{F}^{-1}(1, t), \omega) = 1 * 1.$$

Но  $1 * 1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$  расходится. Примерно таким образом

возникают расходящиеся фейнмановские интегралы квантовой теории поля. В теории перенормировок из расходящихся интегралов выделяются конечные части (регуляризация расходящихся интегралов). В ряде случаев эти результаты согласуются с экспериментом.

Недавно де Ягер [2] показал, что несколько различных процедур регуляризации и умножения, введенных некоторыми авторами, эквивалентны. Детальное освещение этого вопроса можно найти в оригинальной литературе.

### ЗАДАЧИ

1. Пусть  $K(\omega)$  — функция передачи линейного фильтра:  $\overline{K(\omega)} = K(-\omega)$ . Пусть  $K(\omega) = 1 - A(\omega) + iD(\omega)$ , где  $A(\omega)$  и  $D(\omega)$  вещественны. Задан входной сигнал  $E_1(t) = E_0 \cos \omega t$ . Показать, что выходной сигнал имеет вид  $E_2(t) = E_0 [1 - A(\omega)] \cos \omega t + E_0 D(\omega) \sin \omega t$ .

2. Рассмотрим пассивный двухполюсник. Пусть  $E_0(t) = H(t)$  и  $E_r(t) = H * \varphi_r(t)$  (регуляризованная функция Хевисайда). Показать, что  $I_0(t) - I_r(t) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  для всех  $t$ , за исключением  $t = 0$ .

3. Пусть  $K(\omega)$  — функция передачи четырехполюсника. Предположим, что  $K(\omega)$  не имеет полюсов на вещественной оси. Показать, что разность между  $k * \delta$  и  $k * (\sqrt{n/\pi} e^{-nt^2})$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $t \neq 0$ .

4. Показать, что если определить умножение для  $\delta(t)$ ,  $P(1/t)$  и  $t$  так, чтобы выполнялись равенства  $\delta(t) \cdot t = 0$ ,  $tP(1/t) = 1$ , то оно будет неассоциативным.

## δ-функция и обобщенное преобразование Фурье в теории вероятностей и статистике

---

### 12.1. Распределение вероятностей

Случайную переменную  $x$ , принимающую значения между  $-\infty$  и  $+\infty$ , можно характеризовать распределением вероятностей  $\Phi(t)$ , где  $\Phi(t)$  определяется как вероятность того, что  $x$  лежит в интервале  $(-\infty, t]$ . Поскольку достоверность соответствует единичной вероятности, имеем

$$\begin{aligned}\Phi(t) &\leq 1 && \text{при } -\infty < t < +\infty, \\ \Phi(t_1) &\leq \Phi(t_2) && \text{при } t_1 < t_2\end{aligned}$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 1.$$

Величина  $d\Phi(t)/dt = \varphi(t)$  называется *плотностью вероятности*. Например,

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^t e^{-t^2/2\sigma^2} dt$$

— известное распределение Гаусса, и в этом случае

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-t^2/2\sigma^2}.$$

*Замечание.*  $\Phi(t)$  — функция, а не функционал. Термины *распределение вероятностей* и *распределение* относятся к разным математическим объектам.

### 12.2. Разрывное распределение вероятностей

Предположим, что случайная величина  $x$  с достоверностью принимает значение  $x_0$ . Тогда

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= 0 && \text{при } t < x_0, \\ \Phi(t) &= 1 && \text{при } t > x_0.\end{aligned}$$

Таким образом,  $\Phi(t) = H(t - x_0)$ , где  $H(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда. В этом случае  $\Phi(t)$  не существует в обычном смысле. Если же мы допускаем распределения, то  $\Phi(t) = \delta(t - x_0)$ . Это хорошо известно. (См., например, Арлей и Бух [1], стр. 36.) Однако еще до создания последовательной теории  $\delta$ -функции в строгих исследованиях использовались интегралы Стильтьеса и теория меры. Но применение распределений Шварца и обобщенных преобразований Фурье имеет свои преимущества.

### 12.3. Дискретный случай

Предположим, что случайная величина  $x$  принимает значения  $t_1, \dots, t_v$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_v$ ,  $\sum_j p_j = 1$ . Тогда  $\Phi(t)$  — многоступенчатая функция и

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^n p_j \delta(t - t_j).$$

Аналогично можно рассмотреть случай бесконечно большого числа точек  $t_j$ .

Представление Коши для  $\Phi(t)$  имеет вид

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n p_j \frac{1}{t_j - z}.$$

Например, для известного биномиального распределения мы получаем

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^v \binom{v}{j} \theta^j (1-\theta)^{v-j} \delta(t - j).$$

Здесь  $\theta$  — параметр, а случайная величина принимает значения  $1, \dots, v$ .

### 12.4. Спектр

Носитель  $\Phi(t)$  называется *спектром* случайной величины  $x$ .

**Лемма.** Для любой плотности вероятности  $\Phi(t)$  существует представление Коши.

**Доказательство.** Поскольку функция  $\Phi(t)$  монотонна, она измерима. Так как  $0 \leq \Phi(t) \leq 1$ ,  $\Phi(t)$  ограничена. Далее, функция  $1/(t-z)^2$  принадлежит классу  $L_1$ . Следовательно, произведение этой функции и  $\Phi(t)$  принадлежит  $L_1$ . Значит, существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) \frac{1}{(t-z)^2} dt.$$

Согласно § 6.6, этот интеграл является представлением Коши функции  $\Phi'(t) = \phi(t)$ . Следовательно,  $\hat{\phi}(z)$  существует для любого распределения вероятностей  $\Phi(t)$ , и мы имеем

$$\hat{\Phi}'(z) = \hat{\phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) \frac{1}{(t-z)^2} dt.$$

Функция  $\hat{\phi}(z)$  аналитична в дополнении к носителю  $\Phi$ . Следовательно, множество особых точек функции  $\hat{\phi}(z)$  содержится в спектре случайной величины  $x$ .

## 12.5. Характеристические функции

Характеристическая функция  $\chi(t)$  для данной плотности вероятности  $\phi(t)$  определяется как

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \phi(x) dx.$$

Другими словами,  $\chi(t)$  есть преобразование Фурье  $\phi(x)$ . Поскольку  $\phi(x)$  — производная ограниченной функции  $\Phi(x)$ , преобразование Фурье всегда существует в обобщенном смысле.

Наоборот, если задана характеристическая функция  $\chi(t)$ , то  $\phi(x)$  определяется формулой

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t) e^{-itx} dt.$$

Преобразования Фурье в смысле распределений позволяют нам в равной мере рассматривать как непре-

рывные, так причинные и другие разрывные распределения вероятностей.

Например, если

$$\chi(t) = e^{i\mu t},$$

то

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{i\mu t}, x) = \delta(x - \mu).$$

## 12.6. Моменты

Определим  $k$ -й момент относительно точки 0 для распределения вероятностей с плотностью  $\varphi(x)$  следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) dx = \mu_k.$$

Интеграл существует не всегда. Если же он существует, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) e^{ixt} dx = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} \chi(t)$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) dx = (-i) \chi^{(k)}(0).$$

Если  $\varphi(x)$  — не обычная функция, но  $\varphi \in (\mathcal{E}')$ , мы пишем  $\mu_k = \langle \varphi, x^k \rangle$ . Например, для  $\varphi(x) = \delta(x)$  мы получаем  $\mu_k = 0$  для  $k > 0$ , в то время как  $\varphi(x) = \delta(x - x_0)$  приводит к  $\mu_k = x_0^k$ .

## 12.7. Преобразование Фурье распределений вероятностей

Распределение вероятностей  $\Phi(t)$  — монотонная функция со значениями между 0 и 1. Поэтому  $\Phi(t)$  не принадлежит ни  $L_1$ , ни  $L_2$ . Следовательно,  $\Phi(t)$  не имеет преобразования Фурье в смысле  $L_1$  или  $L_2$ . Однако  $\Phi(t)$  является производной функции медленного роста

(например, производной интеграла  $\int_0^t \Phi(t) dt$ , т. е. непрерывной функции). Поэтому  $\Phi(t)$  порождает обобщенную функцию медленного роста и, таким образом, имеет преобразование Фурье в смысле (§').

Отметим, что  $\Phi = H * \varphi$ . Поэтому, если  $\chi$  является мультипликатором для  $\delta_+$ , то

$$\mathcal{F}(\Phi) = 2\pi\delta_+ \cdot \mathcal{F}(\varphi) = 2\pi\delta_+\chi,$$

где  $\chi$  — характеристическая функция  $\varphi$ . Для того чтобы  $\chi$  была мультипликатором для  $\delta_+$ , достаточно, чтобы  $\varphi$  имела компактный носитель.

## 12.8. Примеры

**Пример 1.** Для однородного распределения между  $-1$  и  $1$  мы получаем

$$\mathcal{F}(\Phi, \omega) = 2\pi\delta_+(\omega) \int_{-1}^{+1} e^{i\omega t} dt = 4\pi\delta_+ \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

**Пример 2.** Для причинного распределения (функция Хевисайда) имеем

$$\mathcal{F}(H, \omega) = 2\pi\delta_+(\omega).$$

# V. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## ГЛАВА 13

### Аналитическое представление. Случай нескольких переменных

---

#### 13.1. Аналитические функции многих комплексных переменных

Обозначим через  $\mathbf{C}^n$  пространство, элементами которого являются наборы  $n$  комплексных чисел  $(z_1, \dots, z_n)$ ,  $z_j = x_j + iy_j$ ,  $x_j$ ,  $y_j$  вещественны. Пусть  $\|z\|$  — евклидова норма:

$$\|z\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2.$$

Топология порождается фундаментальной системой окрестностей

$$V(z^{(0)}, \varepsilon) = \{z: \|z - z^{(0)}\| < \varepsilon\}.$$

Областью называется открытое связное множество в  $\mathbf{C}^n$  (относительно топологии  $\mathbf{C}^n$ ).

Комплекснозначная функция  $f$  от  $n$  комплексных переменных называется *аналитической* в области  $D$ , если она в каждой точке  $D$  является аналитической функцией по каждой переменной в отдельности.

**Теорема.** Функция  $f$  аналитична в  $D$  тогда и только тогда, когда в каждой точке  $z^{(0)} \in D$  ее можно разложить в кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{\mu_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\mu_n=0}^{\infty} a_{\mu_1} \dots a_{\mu_n} (z_1 - z_1^{(0)})^{\mu_1} \dots (z_n - z_n^{(0)})^{\mu_n},$$

сходящийся в окрестности  $z^{(0)}$  (Берс [1], Бремерман [3]). Пусть  $f$  и  $g$  аналитичны в области  $D$ , и пусть  $f \equiv g$  в некотором открытом подмножестве  $D$  (как угодно малом). Тогда  $f \equiv g$  всюду в  $D$  (Берс [1], Бремерман [3], Бенке и Туллен [1]).

Эта теорема означает, что аналитическая функция определена ее значениями в как угодно малом открытом множестве.

*Аналитическое продолжение.* Пусть  $f$  аналитична в области  $D_1$ ,  $g$  аналитична в области  $D_2$ ,  $D_1 \subset D_2$  и  $f \equiv g$  в  $D_1$ . Тогда  $g$  называется *аналитическим продолжением*  $f$  из  $D_1$  в  $D_2$ . По предыдущей теореме  $g$  единственна. (Отметим, что повторное аналитическое продолжение может привести к различным значениям функции в одной и той же точке.)

### 13.2. $n$ -гармонические функции

Комплекснозначная функция  $n$  комплексных переменных  $z_1, \dots, z_n$  называется  *$n$ -гармонической*, если она является гармонической по каждой из переменных  $z_j$  в отдельности.

Пусть  $\Delta_j$  — оператор Лапласа по переменной  $z_j$ :

$$\Delta_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}.$$

Если  $h$  является  $n$ -гармонической, то  $\Delta_j h = 0$  для  $j = 1, \dots, n$ . Следовательно,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2} \right) h = 0.$$

Поэтому  $h$  является гармонической функцией  $2n$  вещественных переменных. При  $n = 1$  класс  $n$ -гармонических и класс гармонических функций совпадают.

*Вещественная часть* аналитической функции является (вещественномнозначной)  $n$ -гармонической функцией. Обратное утверждение справедливо для  $n = 1$ , но не для  $n > 1$  (см. Бремерман [2, 3]).

$n$ -гармонические функции являются *решением следующей краевой задачи*. Пусть  $D_j$  — область  $z_j$ -плоскости с достаточно гладкой границей  $\partial D_j$ , так что обычная задача Дирихле для  $D_j$  (см. § 5.3, Альфорс [1]) разрешима. Пусть функция  $b(z_1, \dots, z_n)$  непрерывна на границе  $\partial D_1 \times \dots \times \partial D_n$  (прямом произведении границ

$\partial D_1, \dots, \partial D_n$ ). Тогда в  $D = D_1 \times \dots \times D_n$  (прямом произведении областей  $D_1, \dots, D_n$ ) существует  $n$ -гармоническая функция  $h$ , такая, что

$$\lim_{z \rightarrow z^{(0)}} h(z) = b(z^0)$$

(задача 1). Далее,  $h$  единственна, если  $D$  ограничена. Если  $D$  не ограничена, то  $h$ , вообще говоря, не единственна (задача 2).

Отметим, что  $\partial D_1 \times \dots \times \partial D_n$  не является топологической границей области  $D$ . Она называется *существенной границей* области  $D$ .

В основном нас интересует случай, когда  $D_j = \{z: y_j > 0\}$  ( $D$  – произведение  $n$  верхних полуплоскостей); см. также Бергман [1].

### 13.3. Функции на $E^n$ как граничные значения $n$ -гармонических функций

Лемма. Пусть  $f(t_1, \dots, t_n)$  – ограниченная функция на вещественном пространстве  $E^n$ , и пусть  $\text{sign } y = (\text{sign } y_1) \dots (\text{sign } y_n)$ . Тогда функция

$$f^*(z_1, \dots, z_n) =$$

$$= (\text{sign } y) \frac{y_1 \dots y_n}{\pi^n} \int_{E^n} f(t_1, \dots, t_n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{\|t_j - z_j\|^2} dt_1 \dots dt_n$$

является  $n$ -гармонической при  $y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0$ . Верхние грани  $f^*$  и  $f$  совпадают:

$$\sup_{z \in C^n} f^*(z) = \sup_{x \in E^n} f(x).$$

Доказательство. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi \|t - z\|^2} dt = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ -1, & y < 0, \end{cases}$$

то

$$\text{sign } y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_2}{\pi \|t_2 - z_2\|^2} dt_2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1}{\pi \|t_1 - z_1\|^2} dt_1 \right]$$

существует и равен 1. Следовательно, по теореме Фубини, при  $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$  функция

$$\operatorname{sign} y \frac{y_1 y_2}{\pi^2 \|t_1 - z_1\|^2 \|t_2 - z_2\|^2}$$

интегрируема на  $E^2$  (и интеграл равен 1). Аналогично выводится, что при  $y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0$  функция

$$\operatorname{sign} y \frac{y_1 \dots y_n}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\|t_j - z_j\|^2}$$

интегрируема в  $E^n$  (и интеграл равен 1). Для удобства обозначим ее через  $K(t, z)$ . Поскольку  $f$  локально интегрируема и ограничена в  $E^n$ , произведение  $f(t_1, \dots, t_n) \times K(t, z)$  интегрируемо на  $E^n$ . Следовательно,  $f^*(z)$  существует при  $y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0$ . Далее,

$$|f^*(z)| \leq \left[ \sup_{t \in E^n} |f| \right] \int_{E^n} K(t, z) dt_1 \dots dt_n = \sup_{t \in E^n} |f|.$$

Поэтому

$$\sup_{z \in C^n} |f^*(z)| \leq \sup_{t \in E^n} |f|.$$

Для доказательства непрерывности  $f^*(z)$  при  $y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0$  рассмотрим модуль разности

$$\begin{aligned} |f^*(z + \Delta z) - f^*(z)| &= \left| \int_{E^n} f(t) [K(t, z + \Delta z) - K(t, z)] dt \right| = \\ &= \sup_{E^n} |f| \int_{E^n} |K(t, z + \Delta z) - K(t, z)| dt. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при  $\Delta z \rightarrow 0$  интеграл стремится к нулю. Следовательно,  $f^*(z)$  непрерывна при  $y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0$ .

Для доказательства  $n$ -гармоничности  $f^*(z)$  рассмотрим функцию  $\Psi(x_1) = f^*(x_1 + i\delta, z_2, \dots, z_n)$ ,  $\delta > 0$ . Тогда  $\Psi'(x_1 + iy_1) = f^*(x_1 + i(\delta + y_1), z_2, \dots, z_n)$  (см. задачу 51). Далее,  $\Psi(x_1)$  непрерывна и ограничена; из результатов § 53 следует, что функция  $\Psi^*(z_1)$  гармоническая. Поэтому функция  $f^*(z_1 + i\delta, z_2, \dots, z_n)$  гармоническая для

всех  $\delta > 0$  и  $y_1 > 0, y_2 \neq 0, \dots, y_n \neq 0$ . Следовательно,  $f^*(z_1, \dots, z_n)$  гармоническая при  $y_1 > 0, y_2 \neq 0, \dots, y_n \neq 0$ . Аналогично доказывается ее гармоничность при  $y_1 < 0$  и точно так же для других переменных.

### 13.4. *n*-гармоническое продолжение равномерно непрерывных функций

**Теорема.** Пусть  $f$  — равномерно непрерывная и ограниченная функция на  $E^n$ . Тогда  $f^*$  можно продолжить до равномерно непрерывной функции во всем пространстве  $C^n$  так, что на  $E^n$  она совпадает с  $f$ .

**Доказательство.** Построим функцию  $F(z)$ , обладающую требуемыми свойствами. Определим  $F(t) = f(t)$  на  $E^n$  и

$$F(x_1 + iy_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, \dots, t_n) \frac{y_1}{\pi \|t_1 - z_1\|^2} dt_1.$$

Интеграл можно записать в виде  $\langle f(t_1, \dots, t_n), K(t_1, z_1) \rangle$ . Поскольку  $f$  равномерно непрерывна, для каждого  $\varepsilon$  находится  $\delta > 0$ , такое, что при  $|\Delta t_1| < \delta, \dots, |\Delta t_n| < \delta$

$$|f(t_1 + \Delta t_1, \dots, t_n + \Delta t_n) - f(t_1, \dots, t_n)| < \varepsilon.$$

Отметим, что при  $n = 1$

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x + iy) &= \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{\|t - x - \Delta x - iy\|^2} = \\ &= \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t + \Delta x) dt}{\|t - x - iy\|^2}. \end{aligned}$$

Поэтому мы имеем

$$\begin{aligned} &|F(x_1 + \Delta x_1 + iy, t_2 + \Delta t_2, \dots, t_n + \Delta t_n) - F(x_1 + iy_1, t_2, \dots, t_n)| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t_1 + \Delta x_1, t_2 + \Delta t_2, \dots, t_n + \Delta t_n) - \right. \\ &\quad \left. - f(t_1, \dots, t_n)] K(t_1, z_1) dt_1 \right| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1, z_1) dt_1 = \varepsilon \text{ при } |\Delta x_1| < \delta, |\Delta t_2| < \delta, \dots, |\Delta t_n| < \delta \end{aligned}$$

для всех  $(x_1, t_2, \dots, t_n)$  и всех  $y > 0$ . Следовательно,

$$\sup_{\substack{(x_1, t_2, \dots, t_n) \in E^n \\ y_1 > 0}} |F(x_1 + \Delta x + iy, t_2 + \Delta t_2, \dots, t_n + \Delta t_n) - F(x_1 + iy, t_2, \dots, t_n)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим далее

$$F(x_1 + i(y_1 + \Delta y), t_2, \dots, t_n) - F(x_1 + iy_1, t_2, \dots, t_n).$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} F(x_1 + i(y_1 + \Delta y), t_2, \dots, t_n) = \\ = \langle F(t_1 + i\Delta y, t_2, \dots, t_n), K(t_1, x_1 + iy_1) \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, мы получаем

$$\begin{aligned} |F(x_1 + i(y_1 + \Delta y), t_2, \dots, t_n) - F(x_1 + iy_1, t_2, \dots, t_n)| = \\ = |\langle F(t_1 + i\Delta y, t_2, \dots, t_n) - F(t), K(t_1, x_1 + iy_1) \rangle| \leqslant \\ \leqslant \sup_{-\infty < t_1 < \infty} |F(t_1 + i\Delta y, t_2, \dots, t_n) - F(t)|. \end{aligned}$$

Далее, если при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\sup_{t \in E^1} |\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)| \rightarrow 0,$$

то при  $\Delta y \rightarrow 0$

$$\sup_{t \in E^1} |\varphi^*(t + i\Delta y) - \varphi(t)| \rightarrow 0$$

(задача 5.3). Аналогично, при условии

$$\sup_{t \in E^n} |F(t_1 + \Delta t_1, t_2, \dots, t_n) - F(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0$$

мы получаем

$$\sup_{t \in E^n} |F^*(t_1 + i\Delta y, t_2, \dots, t_n) - F(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \Delta y \rightarrow 0.$$

Последнее условие выполняется, поскольку значениями  $F$  на  $E^n$  является  $f$ , а она равномерно непрерывна. Далее,

$$\begin{aligned} |F(x + \Delta x + i(y + \Delta y), t_2 + \Delta t_2, \dots, t_n + \Delta t_n) - F(x, t_2, \dots, t_n)| \leqslant \\ \leqslant |F(x + \Delta x + i(y + \Delta y), t_2 + \Delta t_2, \dots, t_n + \Delta t_n) - \\ - F(x + i(y + \Delta y), t_2, \dots, t_n)| + \\ + |F(x + i(y + \Delta y), t_2, \dots, t_n) - F(x + iy, t_2, \dots, t_n)|. \end{aligned}$$

Мы показали, что оба члена в правой части равномерно малы. Следовательно, функция  $F(z, t_2, \dots, t_n)$  равномерно непрерывна при  $(t_2, \dots, t_n) \in E^{n-1}$ ,  $y > 0$ . Поскольку

$$F(x - iy, t_2, \dots, t_n) = F(x + iy, t_2, \dots, t_n),$$

функция  $F(z_1, t_2, \dots, t_n)$  равномерно непрерывна при всех комплексных  $z$  и всех вещественных  $t_2, \dots, t_n$ . Определим  $F(z_1, z_2, t_3, \dots, t_n) = \langle F(z_1, t_2, \dots, t_n), K(t_2, z_2) \rangle$ . Применив предыдущие рассуждения к  $F(z_1, z_2, t_3, \dots, t_n)$ , находим, что эта функция равномерно непрерывна при всех комплексных  $z_1, z_2$  и вещественных  $t_3, \dots, t_n$ . Аналогично мы определяем

$$F(z_1, z_2, z_3, t_4, \dots, t_n) = \langle F(z_1, z_2, t_3, \dots, t_n), K(t_3, z_3) \rangle$$

и т. д. По теореме Фубини  $F(z_1, \dots, z_n) = f^*(z_1, \dots, z_n)$ . Таким образом, мы продолжили  $f^*(z_1, \dots, z_n)$  до равномерно непрерывной в  $\mathbb{C}^n$  функции, совпадающей на  $E^n$  с функцией  $f(t_1, \dots, t_n)$ . Теорема доказана.

*Замечание 1.* Множество точек  $R = \{z: y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0\}$  плотно в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Следовательно, в силу непрерывности  $F$  с помощью предельного перехода мы можем получить  $F$  из  $f^*$  и в тех точках, где  $f^*$  не определена ( $\mathbb{C}^n - R$ ).

*Замечание 2.* Если  $f$  — функция класса  $(C^1)$ , такая, что частные производные первого порядка ограничены в  $E^n$ , то  $f$  равномерно непрерывна (теорема о среднем значении).

### 13.5. Пространства $(\mathcal{O}_{a_1, \dots, a_n})$ и $(\mathcal{O}'_{a_1, \dots, a_n})$

Пусть  $(\mathcal{O}_{a_1, \dots, a_n})$  — пространство функций класса  $(C^\infty)$ , таких, что  $f = O(|t_1|^{a_1} \dots |t_n|^{a_n})$  и  $D^p f = O(|t_1|^{a_1} \dots |t_n|^{a_n})$  для всех  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_j \geq 0$ . Последовательность  $\{\varphi_v\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{O}_{a_1, \dots, a_n})$ , если существуют постоянные  $M_p$ , такие, что  $|D^p \varphi_v| \leq M_p (|t_1|^{a_1} \dots |t_n|^{a_n} + 1)$ , а сходимость — равномерная на компактных подмножествах пространства  $E^n$  в каждом порядке. Пространство

$(\mathcal{C}_{a_1, \dots, a_n})$  — это пространство всех линейных функционалов, непрерывных в смысле сходимости в  $(\mathcal{O}_{a_1, \dots, a_n})$ . В частности, нас будут интересовать пространства  $(\mathcal{O}_0, \dots, 0)$  и  $(\mathcal{O}_0, \dots, 0)$ , которые мы будем обозначать кратко через  $(\mathcal{O}_0)$  и  $(\mathcal{O}_0)$ .

### 13.6. $n$ -гармоническое продолжение функций из $(\mathcal{O}_0)$

Лемма. Пусть  $f \in (\mathcal{O}_0)$ . Тогда при  $\max\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \rightarrow 0$  функция  $f^*(x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n)$  стремится в смысле  $(\mathcal{O}_0)$  к  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Утверждение сразу следует из теоремы 13.4 и того факта, что  $D^p f^* = (D^p f)^*$ .

### 13.7. Теорема о представлении для распределений из $(\mathcal{O}'_0)$

Теорема. Пусть  $T \in (\mathcal{O}'_0)$ ,  $\Phi \in (\mathcal{O}_0)$  и  $T^*(z) = \langle T_t, K(t, z) \rangle$ . Тогда  $T^*(z)$  является  $n$ -гармонической при  $y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0$  и

$$\langle T^*(x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n), \Phi \rangle = \langle T, \Phi^*(x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n) \rangle,$$

$$\lim_{\substack{\max\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \rightarrow 0 \\ \delta_1 \neq 0, \dots, \delta_n \neq 0}} \langle T^*(x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n), \Phi \rangle = \langle T, \Phi \rangle.$$

Доказательство. Поскольку  $K(t, z) \in (\mathcal{O}_0)$  при  $y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0$ , то  $T^*(z)$  существует для  $z \in D = \{z: y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0\}$ . Выражения  $\Delta_j K(t, z)$  равны нулю при  $j = 1, \dots, n$ . Следовательно, ядро  $K(t, z)$   $n$ -гармонично. Далее, разностное отношение, соответствующее  $\Delta_j K(t, z)$ , сходится к  $\Delta_j K(t, z)$  в смысле  $(\mathcal{O}_0)$ . Следовательно,  $\Delta_j \langle T_t, K(t, z) \rangle = \langle T_t, \Delta_j K(t, z) \rangle$ . Поэтому  $T^*(z)$   $n$ -гармонична в  $D$ . Как и в § 5.6, можно показать, что

$$\begin{aligned} \int_{E^n} T^*(x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n) \Phi(x) dx &= \\ &= \left\langle T, \int_{E^n} \Phi(t) K(t, x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n) dt \right\rangle. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\langle T^*(x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n), \varphi \rangle = \langle T, \varphi^*(x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n) \rangle.$$

Из леммы 13.6 следует, что  $\varphi^*(x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n)$  сходится к  $\varphi(x)$  в смысле  $(\mathcal{C}_0)$  при

$$\max(\delta_1, \dots, \delta_n) \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{\max(\delta_1, \dots, \delta_n) \rightarrow 0 \\ \delta_1 \neq 0, \dots, \delta_n \neq 0}} \langle T^*(x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n), \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Теорема доказана.

*Замечание.* Если  $T \in (\mathcal{E}')$ , то  $T \in (\mathcal{C}_0)$ ; следовательно, доказанная теорема применима к распределениям из  $(\mathcal{E}')$ .

### 13.8. Представление аналитическими функциями

В предыдущем параграфе мы видели, что распределение  $T \in (\mathcal{C}_0)$  (и, в частности,  $T \in (\mathcal{E}')$ ) можно представить как граничное значение  $n$ -гармонической функции  $T^*$ .

При  $n = 1$ ,  $T^*(z)$  можно представить в виде разности двух аналитических функций. При  $n > 1$  для этого требуется  $2^n$  аналитических функций.

**Л е м м а.** *Пусть*

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle T, \prod_{j=1}^n \frac{1}{t_j - z_j} \right\rangle, \quad T \in (\mathcal{C}'_{a_1, \dots, a_n}).$$

$a_1 = -1, \dots, a_n = -1$ . Тогда

$$\begin{aligned} T^*(z) &= \hat{T}(z_1, \dots, z_n) - \hat{T}(\bar{z}_1, z_2, \dots, z_n) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^n \hat{T}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n). \end{aligned}$$

(Если  $\hat{T}$  имеет нечетное число сопряженных переменных, его следует брать с отрицательным знаком, в противном случае — с положительным.)

**Доказательство.** Мы имеем

$$\prod_{j=1}^n \frac{y_j}{\pi \|t_j - z_j\|^2} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{t_j - z_j} - \frac{1}{t_j - \bar{z}_j} \right).$$

Далее, мы предположили, что  $T \in (\mathcal{C}'_{a_1, \dots, a_n})$  с  $a_1 = -1, \dots, a_n = -1$ . Следовательно,  $\hat{T}$  существует.

Итак, в то время как в случае размерности 1 распределение можно представить в виде граничных значений двух аналитических функций, в случае размерности  $n$  для этого требуется  $2^n$  функции и  $2^n$  областей  $\{z: \pm y_1 > 0, \dots, \pm y_n > 0\}$  (эти функции могут оказаться аналитическим продолжением друг друга).

Второе отличие от случая одной переменной состоит в том, что особенности представляющей функции могут не содержаться в носителе распределения.

**Пример:**

$$\delta = \langle \delta, \frac{1}{(2\pi i)^2(t_1 - z_1)(t_2 - z_2)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2 z_1 z_2}.$$

Здесь четыре функции в областях  $\{z: \pm y_1 > 0, \pm y_2 > 0\}$  являются аналитическим продолжением друг друга. Носитель  $\delta$  состоит из одной точки  $z_1 = 0, z_2 = 0$ . Однако множество особых точек  $\delta$  состоит из объединения двух двумерных областей  $\{z: z_1 = 0\}$  и  $\{z: z_2 = 0\}$ .

Тот факт, что особые точки аналитического представления  $\delta$  распределения  $\delta$  содержатся не только в носителе  $\delta$ , не связан с выбором определенного представления. *Аналитическая функция  $n$  комплексных переменных при  $n > 1$  не может иметь изолированных особых точек* (Берс [1], Бремерман [3]). Вообще справедливо следующее утверждение: если функция  $f$  аналитична вне ограниченного множества  $S$  и  $n > 1$ , то  $f$  может быть аналитически продолжена в  $S$  (Берс [1], Бремерман [3]).

Следовательно, если распределение  $T$  имеет компактный носитель, то невозможно, чтобы только в этом носителе содержалось множество особых точек функции,

являющейся аналитическим продолжением друг в друга  $2^n$  функций, образующих аналитическое представление распределения.

По этой причине метод § 5.9 (метод Миттаг-Леффлера) построения аналитических представлений в  $(\mathcal{D})$  для случая  $n=1$  не может быть обобщен для  $n > 1$ . Однако для  $(\mathcal{S}')$  мы можем получить представления при помощи „ядра Коши с весом“. Сначала мы обобщим определения пространств  $(\mathcal{S})$  и  $(\mathcal{S}')$  для числа измерений  $n > 1$ .

### 13.9. Пространства $(\mathcal{S})$ и $(\mathcal{S}')$

**Определение.** Пусть  $(\mathcal{S})$  — пространство всех функций  $\Phi$  класса  $(C^\infty)$ , таких, что для  $\Phi$  и всех производных  $D^p \Phi$  выполнены условия  $\Phi = O(|t_1|^{a_1} \dots |t_n|^{a_n})$  для всех  $a_1 \leq 0, \dots, a_n \leq 0$ . Последовательность  $\{\Phi_v\}$ ,  $\Phi_v \in (\mathcal{S})$ , сходится в смысле  $(\mathcal{S})$ , если  $\{\Phi_v\}$  сходится равномерно на каждом подмножестве пространства  $E^n$  и при этом выполнены следующие условия:

$$|\Phi_v(t)| \leq M_a (|t_1|^{a_1} \dots |t_n|^{a_n}) \text{ для больших } t$$

$$|D^p \Phi_v(t)| \leq M_{p,a} (|t_1|^{a_1} \dots |t_n|^{a_n}) \text{ для больших } t .$$

при всех  $v$ , где  $M_a$  и  $M_{p,a}$  — постоянные, не зависящие от  $t$  и  $v$ .

Пространство  $(\mathcal{S}')$ , как обычно, — пространство всех линейных функционалов на  $(\mathcal{S})$ , непрерывных в смысле сходимости в  $(\mathcal{S})$ .

### 13.10. Представление распределений из $(\mathcal{S}')$

Ядро

$$\frac{1}{2\pi i} \prod_{j=0}^n \frac{1}{t_j - z_j}$$

не принадлежит  $(\mathcal{S})$ , и поэтому оно не годится для получения аналитического представления распределения из  $(\mathcal{S}')$ . С другой стороны, как уже упоминалось,

использовавшийся в § 5.9 метод Миттаг-Леффлера построения аналитических представлений для  $(\mathcal{D}')$  нельзя применять тем же способом для размерностей  $n > 1$ . Однако мы можем найти весьма удобные представления распределений из  $(\mathcal{S}')$ , умноженных на экспоненту  $\exp [-(t_1^2 + \dots + t_n^2)]$ .

**Лемма 1.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ , а  $S = \exp [-(t_1^2 + \dots + t_n^2)] T$ . Тогда  $S \in (\mathcal{O}'_{a_1, \dots, a_n})$  для любых  $a_1, \dots, a_n$ .

**Доказательство.** Функция  $\exp [-(t_1^2 + \dots + t_n^2)]$  является мультипликатором в  $(\mathcal{O}_{a_1, \dots, a_n})$ . Если  $\varphi \in (\mathcal{O}_{a_1, \dots, a_n})$ , то  $\exp [-(t_1^2 + \dots + t_n^2)] \varphi(t) \in (\mathcal{S})$  для любых  $a_1, \dots, a_n$ . Итак, если последовательность  $\{\varphi_v\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{O}_{a_1, \dots, a_n})$ , то последовательность

$$\{\exp [-(t_1^2 + \dots + t_n^2)] \varphi_v(t)\}$$

сходится в смысле  $(\mathcal{S})$ . Следовательно,  $S$  является распределением из  $(\mathcal{O}'_{a_1, \dots, a_n})$ .

**Лемма 2.** Пусть  $T, S$  удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда  $n$ -гармоническое представление распределения  $S$  (и, следовательно, аналитическое представление  $S$ , если так же, как в § 13.8, ввести функцию  $S^*$ ) осуществляет представление  $T$  в следующем смысле:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \exp (t_1^2 + \dots + t_n^2) S^*(t_1 + i\delta_1, \dots, t_n + i\delta_n), \varphi(t_1, \dots, t_n) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

для любой  $\varphi \in (\mathcal{D})$ .

Отметим, что мы выбрали  $\varphi \in (\mathcal{D})$  так, что интеграл в левой части последнего равенства существует. Лемма 2 сразу следует из леммы 1 и теоремы 13.7.

**Замечание.** Функцию

$$\begin{aligned} \exp (t_1^2 + \dots + t_n^2) S^*(t_1 + i\delta_1, \dots, t_n + i\delta_n) = \\ = \exp (t_1^2 + \dots + t_n^2) [\hat{S}(t_1 + i\delta_1, \dots, t_n + i\delta_n) + \dots \\ \dots + (-1)^n \hat{S}(t_1 - i\delta_1, \dots, t_n - i\delta_n)] \end{aligned}$$

можно заменить на соответствующую комбинацию функций  $\exp(z_1^2 + \dots + z_n^2) \hat{S}(z)$ . Так получается „истинное“ аналитическое представление. Однако здесь мы не будем входить в детали такого перехода; представление, основанное на лемме 2, оказывается достаточно удобным.

### ЗАДАЧИ

1. Пусть  $D_j$  — область комплексной плоскости  $z_j$ , такая, что задача Дирихле имеет для нее решение. Пусть  $b(z_1, \dots, z_n)$  — функция, непрерывная на границе  $\partial D_1 \times \dots \times \partial D_n$ . Доказать, что в  $D = D_1 \times \dots \times D_n$  существует  $n$ -гармоническая функция  $h$ , такая, что  $\lim_{z \rightarrow z^{(0)}} h(z) = b(z^{(0)})$  при  $z$ , стремящемся к  $z^{(0)} \in \partial D_1 \times \dots \times \partial D_n$  изнутри  $D$ .
2. Пусть  $D$  и  $h$  удовлетворяют условиям задачи 1. Доказать, что если  $D$  ограничена, то  $h$  единственна. Дать контрпример для неограниченных  $D$ .

## Преобразования Фурье функций многих переменных

---

### 14.1. Преобразование Фурье функций из $L_1$

**Замечание.** Обозначим символом  $\langle t, \omega \rangle$  величину  $t_1\omega_1 + \dots + t_n\omega_n$ , где  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ .

**Лемма.** Пусть  $f \in L_1$ . Тогда преобразование Фурье

$$\mathcal{F}(f, \omega) = \int_{E^n} f(t) e^{i \langle t, \omega \rangle} dt$$

существует, при этом оно непрерывно и равномерно ограничено на  $E^n$ .

Вместо  $\mathcal{F}(f, \omega)$  мы будем писать также  $\mathcal{F}(f)$ , если нет необходимости указывать переменную.

**Доказательство.** Поскольку имеет место неравенство

$$\left| \int_{E^n} f(t) e^{i \langle t, \omega \rangle} dt \right| \leq \int_{E^n} |f(t)| dt,$$

функция  $\mathcal{F}(f, \omega)$  существует. Так как неравенство

$$|\mathcal{F}(f, \omega)| \leq \int_{E^n} |f(t)| dt$$

выполняется независимо от  $\omega$ , функция  $\mathcal{F}(f, \omega)$  равномерно ограничена. Для доказательства непрерывности воспользуемся соотношениями

$$|\mathcal{F}(f, \omega + h) - \mathcal{F}(f, \omega)| = \left| \int_{E^n} f(t) (e^{i \langle t, \omega+h \rangle} - e^{i \langle t, \omega \rangle}) dt \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \int_{E^n} f(t) e^{it \cdot \omega} (e^{it \cdot h} - 1) dt \right| \leq \\
 &\leq \int_{\|t\| < R} |f(t)| |e^{it \cdot h} - 1| dt + \int_{\|t\| > R} 2 |f(t)| dt.
 \end{aligned}$$

Для достаточно больших  $R$  второй член в последнем выражении может быть сделан меньше  $\varepsilon/2$ . Первый член можно сделать меньше  $\varepsilon/2$  для достаточно малых  $h$ . Следовательно,  $\mathcal{F}(f, \omega)$  непрерывна.

## 14.2. Преобразование Фурье функций из $(\mathcal{S})$

**Лемма.** Пусть  $\varphi \in (\mathcal{S})$ . Тогда  $\Phi = \mathcal{F}(\varphi, \omega) \in (\mathcal{S})$ .

**Доказательство.** Если  $\varphi \in (\mathcal{S})$ , то  $\varphi \in L_1$ . Следовательно, функция  $\Phi(\omega) = \mathcal{F}(\varphi, \omega)$  существует. Если  $\varphi \in (\mathcal{S})$ , то и  $D^p \varphi \in (\mathcal{S})$ . Поэтому функции  $\mathcal{F}(D^p \varphi, \omega) = (-i\omega)^p \Phi$  существуют и равномерно ограничены, причем через  $(-i\omega)^p$  обозначено произведение  $(-i\omega_1)^{p_1} (-i\omega_2)^{p_2} \dots (-i\omega_n)^{p_n}$ . Следовательно,  $\Phi(\omega) = O(|\omega|^{-p})$  для всех  $p$ , таких, что  $p_1 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ . Имеет место и соотношение  $D^p \Phi = \mathcal{F}((ix)^p \varphi, \omega)$ . При  $\varphi \in (\mathcal{S})$  справедливо включение  $(ix)^p \varphi \in (\mathcal{S})$ . Итак, те же самые рассуждения, которые были использованы для  $\Phi$ , приводят к оценке  $D^m \Phi = O(|\omega|^{-p})$  для всех  $p$ ,  $p_1 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ . Следовательно,  $\Phi \in (\mathcal{S})$ .

## 14.3. Обратное преобразование Фурье функций из $L_1$ и $(\mathcal{S})$

**Обозначение.** Пусть  $g(\omega) \in L_1$ . Тогда определим обратное преобразование Фурье функции  $g$  соотношением

$$\mathcal{F}^{-1}(g, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E^n} g(\omega) e^{-i\omega \cdot t} d\omega.$$

**Лемма.** Пусть  $f(t) \in L_1$  и  $\mathcal{F}(f, \omega) \in L_1$ . Тогда  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f, \omega), t) = f(t)$  почти всюду.

Это — классический результат (см. Бехнер [1], теорема 60). (Другому его доказательству посвящена задача 2.)

**Следствие.** Пусть  $f \in (\mathcal{S})$ . Тогда

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f, \omega), t) = f(t) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f, \omega), t).$$

**Доказательство.** Если  $f \in (\mathcal{S})$ , то  $f \in L_1$  и (см. § 14.2)  $\mathcal{F}(f, \omega) \in L_1$ ; из предыдущей леммы следует, что  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f, \omega), t) = f(t)$  почти всюду. Но из того, что  $f \in (\mathcal{S})$ , следует непрерывность  $f$ , а из того, что  $\mathcal{F}(f, \omega) \in L_1$ , следует (см. § 14.1), что функция  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f, \omega), t)$  непрерывна. Следовательно, равенство имеет место для всех  $t$ . Первая часть тождества доказана. Вторая часть его следует из соотношений

$$\mathcal{F}^{-1}(f, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(f, -\omega)$$

и

$$\mathcal{F}(g(-\omega), t) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(g(\omega), t).$$

#### 14.4. Свертка функций из $L_1$

**Определение.** Пусть  $f, g \in L_1$ . Тогда определим свертку  $f * g$  функций  $f$  и  $g$  соотношением

$$(f * g)(x) = \int_{E^n} f(t) g(x-t) dt.$$

**Теорема.** Пусть  $f, g \in L_1$ . Тогда

$$(f * g)(x) \in L_1 \quad \text{и} \quad \mathcal{F}(f * g, \omega) = \mathcal{F}(f, \omega) \cdot \mathcal{F}(g, \omega).$$

Доказательство проводится так же, как и для размерности  $n = 1$  (см. § 9.2).

#### 14.5. Формула Парсеваля

**Теорема.** Пусть  $f, g \in L_1$ . Тогда

$$\langle \mathcal{F}(f, \omega), g(\omega) \rangle = \langle f(t), \mathcal{F}(g, t) \rangle$$

и

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(f, \omega), g(\omega) \rangle = \langle f(t), \mathcal{F}^{-1}(g, t) \rangle.$$

**Замечание.** Теорему можно усилить, если допустить, что  $f, g \in L_2$ . Однако для сформулированного выше варианта доказательство значительно проще. Доказательству случая, когда  $f, g \in L_2$ , посвящена задача 3.

**Доказательство.** Имеет место равенство

$$\int_{E^n \times E^n} |f(t)g(\omega)e^{i\langle \omega, t \rangle}| dt d\omega = \int_{E^n} |f(t)| dt \int_{E^n} |g(\omega)| d\omega.$$

Поскольку  $f, g \in L_1$ , правая часть его существует. Следовательно, по теории Фубини

$$\int_{E^n} \left[ \int_{E^n} f(t) e^{i\langle \omega, t \rangle} dt \right] g(\omega) d\omega = \int_{E^n} \left[ \int_{E^n} g(\omega) e^{i\langle \omega, t \rangle} d\omega \right] f(t) dt.$$

Первое тождество доказано. Второе доказывается точно так же.

## 14.6. Преобразование Фурье распределений из $(\mathcal{S}')$

**Определение.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ . Тогда определим  $\mathcal{F}(T)$  соотношениями

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \quad \text{для всех } \varphi \in (\mathcal{S})$$

и

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \quad \text{для всех } \varphi \in (\mathcal{S}).$$

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ . Тогда  $\mathcal{F}(T), \mathcal{F}^{-1}(T) \in (\mathcal{S}')$  и  $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = T$ .

**Доказательство.** Очевидно,  $\mathcal{F}(T)$  является линейным функционалом на  $(\mathcal{S})$ . Если  $\{\varphi_v\}$  — последовательность функций из  $(\mathcal{S})$ , сходящаяся в смысле  $(\mathcal{S})$  к предельной функции, то  $\{\mathcal{F}(\varphi_v)\}$  также сходится в смысле  $(\mathcal{S})$  к предельной функции (задача 1). Следовательно,  $\mathcal{F}(T)$  непрерывен на  $(\mathcal{S})$ . Поэтому  $\mathcal{F}(T) \in (\mathcal{S}')$ . Аналогично  $\mathcal{F}^{-1}(T) \in (\mathcal{S}')$ , и равенства  $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = T$  сразу следуют из последнего определения и леммы 14.3.

### 14.7. Функции медленного роста

**Определение.** Функцией медленного роста называется непрерывная функция  $f$ , такая, что

$$f = O(|t_1|^{a_1} \dots |t_n|^{a_n})$$

для некоторых (вещественных)  $a_1, \dots, a_n$ .

Функция медленного роста, очевидно, порождает распределения из  $(\mathcal{S}')$ . Следовательно, любая производная конечного порядка функции медленного роста является распределением из  $(\mathcal{S}')$ .

Справедливо и обратное утверждение: каждое распределение из  $(\mathcal{S}')$  является производной конечного порядка функции медленного роста (задача 5).

### 14.8. Обобщенные преобразования Фурье

**Определение.** Пусть  $f$  — функция медленного роста. Тогда обобщенное преобразование Фурье  $\tilde{\mathcal{F}}(f, z)$  определяется следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{F}}(f, z) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(t) e^{i(t, z)} dt \quad \text{для } y_1 > 0, \dots, y_n > 0,$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(f, z) =$$

$$= - \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(t) e^{i(t, z)} dt \quad \text{для } y_1 < 0, \dots, y_n < 0$$

и т. д. ( $z_j = x_j + iy_j$ ).

Мы можем записать его в виде

$$\tilde{\mathcal{F}}(f, z) = \int_{E^n} f(t) e^{i(t, z)} \prod_{j=1}^n \sigma_j H(\sigma_j t_j) dt,$$

где  $\sigma_j = \operatorname{sign} y_j$ . Другими словами, определение  $\tilde{\mathcal{F}}(f, z)$  сводится к следующему: в „октанте“  $\{z: \sigma_1 y_1 > 0, \dots, \sigma_n y_n > 0\}$ , где каждая из  $\sigma_j$  равна либо  $+1$ , либо  $-1$ , интегрирование по  $t_j$  в определяющем  $\tilde{\mathcal{F}}$  интеграле

производится от 0 до  $\infty$  при  $\sigma_j = +1$  и от  $-\infty$  до 0 при  $\sigma_j = -1$ . Если общее число интегралов от  $-\infty$  до 0 четно, то все выражение берется со знаком +, а в противном случае со знаком -.

**Лемма.**  $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$  — аналитическая функция в области  $\{z: y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0\}$ .

### 14.9. Эквивалентность обобщенного преобразования Фурье и аналитического представления обычного преобразования Фурье

**Теорема.** Пусть  $f \in L_1$  и  $\mathcal{F}(f) \in L_1$ . Пусть  $F = \mathcal{F}(f)$ . Тогда аналитическое представление  $\hat{F}(z)$  функции  $F$  с ядром Коши (§ 13.8) равно  $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$ :

$$\hat{F}(z) = \hat{\mathcal{F}}(f, z).$$

**Доказательство.** Напомним (§ 8.7), что

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\sigma H(\sigma t) e^{itz}, \omega\right) = \frac{1}{2\pi i(\omega - z)},$$

где  $\sigma = \text{sign } y$ ,  $z = x + iy$ . Следовательно,

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{i(z, t)} \prod_{j=1}^n \sigma_j H(\sigma_j t_j), \omega\right) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j - z_j}.$$

Поскольку  $F \in L_1$  и  $e^{i(z, t)} \prod_{j=1}^n \sigma_j H(\sigma_j t_j) \in L_1$ , из теоремы 14.5 следует, что

$$\begin{aligned} \hat{F}(z) &= \left\langle F(\omega), \mathcal{F}^{-1}\left(e^{i(z, t)} \prod_{j=1}^n \sigma_j H(\sigma_j t_j), \omega\right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \mathcal{F}^{-1}(F, t), e^{i(z, t)} \prod_{j=1}^n \sigma_j H(\sigma_j t_j) \right\rangle = \\ &= \left\langle f(t), e^{i(z, t)} \prod_{j=1}^n \sigma_j H(\sigma_j t_j) \right\rangle = \mathcal{F}(f, z). \end{aligned}$$

**Следствие.** Пусть  $f \in (\S)$  и через  $F$  обозначено  $\mathcal{F}(f)$ . Тогда

$$\hat{F}(z) = \hat{\mathcal{F}}(f, z) \quad \text{при } y_1 \neq 0, \dots, y_n \neq 0.$$

**Доказательство** Из  $f \in (\mathcal{S})$  следует, что  $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{E}(\mathcal{S})$ , а  $(\mathcal{S}) \subset L_1$ .

**Замечание.** Теорема проливает свет на важный факт: аналитическое представление функции с помощью ядра Коши получается из ее преобразования Фурье расщеплением интегрирований по  $E^n$  на интегралы по „октантам“  $\{z: \sigma_1 y_1 > 0, \dots, \sigma_n y_n > 0\}$ .

При  $n = 1$  разбиение вещественной оси на две полуоси в некотором смысле единственно. Соответственно ядро  $1/2\pi i(t - z)$  – единственное производящее ядро для аналитической функции.

При  $n > 1$  существуют разбиения  $E^n$ , отличные от разбиения на октанты. Соответственно ядро

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{t_j - z_j}$$

лишь одно из многих возможных в интегральных формулах типа Коши (интегральных формулах, представляющих функции, аналитические в данной области).

Для квантовой теории поля важно разбиение  $E^n$  на световые конусы будущего и прошлого и на внешность светового конуса. Этот случай мы обсудим в гл. 15.

#### 14.10. Пространство $(\mathcal{Z})$

**Определение.** Обозначим через  $(\mathcal{Z})$  пространство целых функций  $p$  комплексных переменных  $\Psi(z)$ , таких, что существуют константы  $C_{m,p}$  и  $a_1, \dots, a_n$ , причем  $|z|^p |D^m \Psi(z)| \leq C_{m,p} \exp(a_1|y_1| + \dots + a_n|y_n|)$  для всех  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_j \geq 0$ , и  $m = (m_1, \dots, m_n)$ ,  $m_j \geq 0$ . Последовательность  $\{\Psi_v\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{Z})$ , если  $\{\Psi_v\}$  равномерно сходится к предельной функции в любом порядке и существуют постоянные  $C_{m,p}$  и  $a_1, \dots, a_n$ , не зависящие от  $v$ , такие, что  $|z|^p |D^m \Psi_v(z)| \leq C_{m,p} \exp(a_1|y_1| + \dots + a_n|y_n|)$ .

**Замечание.** Аналитическая функция  $p$  комплексных переменных называется целой, если она аналитична при всех  $z \in \mathbb{C}^n$ .

### 14.11. Преобразования Фурье функций из $(\mathcal{D})$ и $(\mathcal{Z})$

**Теорема.** Если  $\Phi \in (\mathcal{D})$ , то  $\mathcal{F}(\Phi, z) \in (\mathcal{Z})$ , и, обратно, если  $\Psi \in (\mathcal{Z})$ , то  $\mathcal{F}^{-1}(\Psi, t) \in (\mathcal{D})$ . Если носитель  $\Phi$  лежит в области  $\{t: |t_1| \leq a_1, \dots, |t_n| \leq a_n\}$ , то  $|z^p| |D^m \mathcal{F}(\Phi, z)| \leq C_{m,p} \exp(a_1|y_1| + \dots + a_n|y_n|)$ . Обратно, если

$$|\Psi| \leq C \exp(a_1|y_1| + \dots + a_n|y_n|)$$

и  $|z_1|^2 \dots |z_n|^2 |\Psi| \leq C_2 \exp(a_1|y_1| + \dots + a_n|y_n|)$ , то носитель  $\mathcal{F}(\Psi, t)$  содержится в области  $\{t: |t_1| \leq a_1, \dots, |t_n| \leq a_n\}$ . Далее, если последовательность  $\{\Phi_v\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{D})$ , то последовательность  $\{\mathcal{F}(\Phi_v, z)\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{Z})$ ; верно и обратное.

**Доказательство.** Пусть  $\Phi \in (\mathcal{D})$ , а носитель  $\Phi$  содержится в  $\{t: |t_1| \leq a_1, \dots, |t_n| \leq a_n\}$ . Тогда

$$|\Psi(z)| \leq \int_{E^n} |\Phi(t)| |e^{iz \cdot t}| dt \leq C \exp(a_1|y_1| + \dots + a_n|y_n|),$$

где

$$C = \int_{E^n} |\Phi(t)| dt.$$

Рассмотрим теперь  $D^p \Phi$ . Ее носитель содержится в том же  $n$ -мерном кубе. Мы получаем поэтому оценку

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(D^p \Phi, z)| &= |(-iz)^p \mathcal{F}(\Phi, z)| = \\ &= |z|^p |\Psi(z)| \leq C_p \exp(a_1|y_1| + \dots + a_n|y_n|), \end{aligned}$$

где

$$C_p = \int_{E^n} |D^p \Phi(t)| dt.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} z^p |D^m \Psi(z)| &= |\mathcal{F}((it)^m D^p \Phi, z)| \leq \\ &\leq C_{m,p} \exp(a_1|y_1| + \dots + a_n|y_n|), \end{aligned}$$

где

$$C_{m,p} = \int_{E^n} |t|^m |D^p \Phi(t)| dt.$$

С помощью тех же рассуждений мы приходим к выводу, что из сходимости  $\{\varphi_v\}$  в смысле  $(\mathcal{D})$  следует сходимость  $\{\mathcal{F}(\varphi_v, z)\}$  в смысле  $(\mathcal{Z})$ .

Для доказательства обратных утверждений обозначим для краткости через  $|y|$  набор  $(|y_1|, \dots, |y_n|)$ , а через  $a$  — набор  $(a_1, \dots, a_n)$ . Для  $p_j = 0$  или 2 мы имеем  $|\psi(z)| \leq C_0 e^{\langle a, |y| \rangle}$  и  $|z^p| |\psi(z)| \leq C_{0,p} e^{\langle a, |y| \rangle}$ . Следовательно,

$$|\psi(z)| [(1 + |z_1|^2) \cdots (1 + |z_n|^2)] \leq C e^{\langle a, |y| \rangle}.$$

Далее,

$$\varphi(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E^n} \psi(x_1, \dots, x_n) e^{-i \langle x, t \rangle} dx.$$

Поскольку  $\psi$  — целая функция, то, учитывая ее поведение на бесконечности, мы можем сдвинуть поверхность интегрирования (подобно тому, как мы сдвигали контур интегрирования в § 8.28). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| \int_{E^n} \psi(x_1 + i\delta_1, \dots, x_n + i\delta_n) e^{-i \langle x + i\delta, t \rangle} dx \right| \leq \\ &\leq \int_{E^n} \frac{C e^{\langle a, |\delta| \rangle + \langle \delta, t \rangle}}{(1 + |x_1|^2) \cdots (1 + |x_n|^2)} dx_1 \cdots dx_n \leq C' e^{\langle a, |\delta| \rangle + \langle \delta, t \rangle}, \end{aligned}$$

где

$$C' = \int_{E^n} \frac{1}{(1 + |x_1|^2) \cdots (1 + |x_n|^2)} dx_1 \cdots dx_n.$$

Пусть зафиксировано такое  $t$ , что по крайней мере для одной из компонент,  $t_{j_0}$ , выполняется неравенство  $|t_{j_0}| > a_{j_0}$ . Выберем  $\delta = (0, \dots, -\lambda t_{j_0}, \dots, 0)$ ,  $\lambda > 0$ . Тогда  $\langle a, |\delta| \rangle + \langle \delta, t \rangle = \lambda |t_{j_0}| (a_{j_0} - |t|_{j_0})$ . Следовательно, при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $C' e^{\langle a, |\delta| \rangle + \langle \delta, t \rangle} \rightarrow 0$ . Поэтому  $|\varphi(t)| = 0$  вне области  $\{t: |t_j| \leq a_j\}$ . Аналогичные рассуждения показывают, что если  $\{\varphi_v\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{Z})$ , то  $\{\mathcal{F}^{-1}(\varphi_v, t)\}$  сходится в смысле  $(\mathcal{D})$ . Теорема доказана.

### 14.12. Пространство ( $\mathcal{Z}'$ ). Преобразование Фурье распределений из ( $\mathcal{D}'$ )

**Определение 1.** Обозначим через ( $\mathcal{Z}'$ ) пространство всех непрерывных линейных функционалов на ( $\mathcal{Z}$ ).

Отметим, что  $S \in (\mathcal{Z}')$  не влечет  $S \in (\mathcal{D}')$ ; поэтому элементы из ( $\mathcal{Z}'$ ) мы называем не распределениями, а обобщенными функциями.

**Определение 2.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ . Определим преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье распределения  $T$  формулами

$$\langle \mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\psi) \rangle \quad \text{для } \psi \in (\mathcal{Z})$$

и

$$\langle \mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}^{-1}(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\psi) \rangle \quad \text{для } \psi \in (\mathcal{Z}).$$

Индекс ( $\mathcal{Z}$ ) обозначает, что  $\mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}$  является функционалом на ( $\mathcal{Z}$ ). Если это не вызовет недоразумений, мы будем этот индекс опускать.

**Теорема.** Преобразования Фурье распределений из ( $\mathcal{D}'$ ) являются обобщенными функциями из ( $\mathcal{Z}'$ ).

Утверждение сразу следует из теоремы 14.11.

### 14.13. Преобразование Фурье обобщенных функций из ( $\mathcal{Z}'$ )

**Определение.** Пусть  $S \in (\mathcal{Z}')$ . Определим ее преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье формулами

$$\langle \mathcal{F}_{(\mathcal{D})}(S), \varphi \rangle = \langle S, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \quad \text{для } \varphi \in (\mathcal{D})$$

и

$$\langle \mathcal{F}_{(\mathcal{D})}^{-1}(S), \varphi \rangle = \langle S, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \quad \text{для } \varphi \in (\mathcal{D}).$$

Индекс ( $\mathcal{D}$ ) снова означает, что  $\mathcal{F}_{(\mathcal{D})}$  определена на ( $\mathcal{D}$ ). Если это не вызовет недоразумений, мы будем этот индекс опускать.

**Теорема.** Если  $S \in (\mathcal{Z}')$ , то  $\mathcal{F}_{(\mathcal{D})}(S)$  является распределением из  $(\mathcal{D}')$ .

Это утверждение также сразу следует из теоремы 14.11.

#### 14.14. Теорема обращения для преобразований Фурье элементов из $(\mathcal{D}')$ и $(\mathcal{Z}')$

**Теорема.** Если  $T \in (\mathcal{D}')$ , то

$$\mathcal{F}_{(\mathcal{D})}^{-1}(\mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}(T)) = \mathcal{F}_{(\mathcal{D})}(\mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}^{-1}(T)) = T.$$

Аналогично, если  $S \in (\mathcal{Z}')$ , то

$$\mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}^{-1}(\mathcal{F}_{(\mathcal{D})}(S)) = \mathcal{F}_{(\mathcal{Z})}(\mathcal{F}_{(\mathcal{D})}^{-1}(S)) = S.$$

#### 14.15. Мультиликаторы

Напомним, что функция  $f$  называется мультиликатором в пространстве  $(\Phi)$ , если  $f\varphi \in (\Phi)$  для всех  $\varphi \in (\Phi)$  и сходимость  $\{\varphi_v\}$  в смысле  $(\Phi)$  влечет сходимость  $\{f\varphi_v\}$  в смысле  $(\Phi)$ .

Мультиликаторами являются:

- (1) для  $(\mathcal{D})$  — все функции  $f \in (\mathcal{E})$ ;
- (2) для  $(\mathcal{S})$  — все функции  $f \in (\mathcal{O}_a)$  для любых  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ;
- (3) для  $(\mathcal{Z})$  — все целые аналитические функции  $f(z)$ , такие, что для каждого  $p$ ,  $\|p\| \geq 0$ , справедлива оценка

$$|D^p f(z)| = O(|z^{a_p}| e^{|a| |y|}),$$

где  $a$  — постоянная, не зависящая от  $p$ , а  $a_p = (a_{1,p}, \dots, a_{n,p})$  не зависит от  $z$ , но может зависеть от  $p$ .

#### 14.16. Преобразование Фурье распределений с компактным носителем

**Лемма.** Пусть  $T \in (\mathcal{E}')$ . Тогда  $\langle T_t, e^{i\langle z, t \rangle} \rangle$  является мультиликатором в  $(\mathcal{Z}')$ .

**Доказательство.** Умножим  $e^{i\langle z, t \rangle}$  на функцию  $a(t)$ , равную 1 на носителе  $T$  и обращающуюся в нуль вне окрестности носителя  $T$ . Согласно результатам § 3.3, носитель  $a(t)$  мы можем выбрать как угодно близким

к носителю  $T$ . В силу следствия из леммы 3.11

$$\langle T_t, a(t) e^{t \langle z, t \rangle} \rangle = \langle T, e^{t \langle z, t \rangle} \rangle.$$

Пусть  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , такое, что носитель  $a(t)$  содержитя в области  $\{t: |t_1| \leq a_1, \dots, |t_n| \leq a_n\}$ . Тогда  $|a(t) e^{t \langle z, t \rangle - \langle a, |y| \rangle}|$  стремится к нулю при  $\|y\| \rightarrow \infty$ , а при  $\|x\| \rightarrow \infty$  это выражение остается ограниченным. Разделив его на  $z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n}$ , мы получим, что функция

$$|a(t) e^{t \langle z, t \rangle - \langle a, |y| \rangle}| |z_1^{-v_1}| \dots |z_n^{-v_n}|$$

стремится к нулю при  $\|z\| \rightarrow \infty$ , если  $v_1 > 0, \dots, v_n > 0$  и если  $|z_j| \geq \varepsilon > 0$ .

Напомним, что любое распределение с компактным носителем имеет конечный порядок (§ 4.4). Пусть порядок  $T$  равен  $m$ . Возьмем семейство функций  $\{\phi(z, t)\}$ , зависящих от  $t$  как от переменной, а от  $z$  как от параметра. Пусть  $D_t^p \phi(z, t) \rightarrow 0$  равномерно на носителе  $T$  при  $\|z\| \rightarrow \infty$  и при всех  $p$ , удовлетворяющих неравенству  $\|p\| \leq m$ . Тогда, так как  $m$  есть порядок распределения  $T$ ,  $\langle T, \phi(z, t) \rangle \rightarrow 0$ .

Такое семейство образуют функции

$$\{a(t) e^{t \langle z, t \rangle - \langle a, |y| \rangle} |iz_1|^{-m-1} \dots |iz_n|^{-m-1}\}.$$

Следовательно,

$$\langle T, a(t) e^{t \langle z, t \rangle - \langle a, |y| \rangle} (iz_1)^{-m-1} \dots (iz_n)^{-m-1} \rangle \rightarrow 0$$

при  $\|z\| \rightarrow \infty$  и при  $|z_j| \geq \varepsilon > 0$ . Следовательно,

$$\langle T, e^{t \langle z, t \rangle} \rangle = O(|z_1|^{m+1} \dots |z_n|^{m+1} e^{\langle a, |y| \rangle}).$$

Та же асимптотическая оценка справедлива для производных. Поэтому, согласно § 14.15 (3),  $\langle T, e^{t \langle z, t \rangle} \rangle$  является мультипликатором в (Ξ). Лемма доказана.

**Следствие.** Если  $S \in (\mathcal{E}')$ , то  $\mathcal{F}(S)$  — мультипликатор для (Ξ).

### 14.17. Свертка распределений

**Определение.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ ,  $S \in (\mathcal{E}')$ . Определим свертку распределений  $T$  и  $S$  формулой

$$T * S = \mathcal{F}_{(\mathcal{D})}^{-1} (\mathcal{F}_{(\mathcal{E})}(T) \mathcal{F}(S)).$$

**Лемма I.** Если  $T \in (\mathcal{D}')$ ,  $S \in (\mathcal{E}')$ , то  $S * T \in (\mathcal{D}')$ .  
**Лемма II.** Если  $T \in (\mathcal{S}')$ ,  $S \in (\mathcal{E}')$ , то  $S * T \in (\mathcal{S}')$

**Доказательство.** Если  $T \in (\mathcal{D}')$ , то, согласно теореме 14.12,  $\mathcal{F}_{(z)}(T) \in (\mathcal{Z}')$ . Поскольку  $\mathcal{F}(S)$  является мультипликатором в  $(\mathcal{Z})$  (§ 14.16 и задача 6), то произведение  $\mathcal{F}_{(z)}(T) \mathcal{F}(S)$  определено и принадлежит  $(\mathcal{Z}')$ . Следовательно,  $T * S \in (\mathcal{D}')$ . Аналогично, если  $T \in (\mathcal{S}')$ , то  $\mathcal{F}(T) \in (\mathcal{S}')$ . В силу следствия из теоремы 14.16,  $\mathcal{F}(S)$  является мультипликатором для  $(\mathcal{S})$ . Итак, в этом случае  $S * T \in (\mathcal{S}')$ .

### 14.18. Многократная свертка

**Определение.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}')$ , а  $S_1, \dots, S_n \in (\mathcal{E}')$ . Тогда определим многократную свертку следующим образом:

$$T * S_1 * \dots * S_n = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T) \cdot \mathcal{F}(S_1) \dots \mathcal{F}(S_n)).$$

**Лемма.** Если  $T \in (\mathcal{D}')$  а  $S_1, \dots, S_n \in (\mathcal{E}')$ , то  $T * S_1 * \dots * S_n \in (\mathcal{D}')$ . Если  $T \in (\mathcal{S}')$ , а  $S_1, \dots, S_n \in (\mathcal{E}')$ , то  $T * S_1 * \dots * S_n \in (\mathcal{S}')$ . Кроме того, многократная свертка ассоциативна и коммутативна.

**Доказательство** аналогично доказательству леммы 14.17.

#### ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если последовательность  $\{\varphi_v\}$  сходится к  $\varphi_0$  в смысле  $(\mathcal{S})$ , то  $\{\mathcal{F}(\varphi_v)\}$  сходится к  $\mathcal{F}(\varphi_0)$  в смысле  $(\mathcal{S})$  (см. § 8, задача 1).

2. Пусть  $f$ ,  $\mathcal{F}(f) \in L_1$ . Доказать, что  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), x) = f(x)$  почти всюду (доказывается почти так же, как теорема А.3.3).

3\*. Пусть  $f \in L_2$ . Доказать, что  $\mathcal{F}(f) \in L_2$  и что

$$\text{l.i.m. } \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \mathcal{F}(f, \omega) e^{-i\langle \omega, x \rangle} d\omega = f(x)$$

(см. § А.3.9).

4. Пусть  $S \in (\mathcal{S})$  и  $T = \mathcal{F}(S)$ . Доказать, что  $D^p(T) = (i\omega)^p \mathcal{F}(S)$ .

5\*. Доказать, что каждое распределение из  $(\mathcal{S}')$  является производной конечного порядка от функции медленного роста (см. § А.3.12).

6. Показать, что для  $T \in (\mathcal{S}')$  выполняется тождество  $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle \langle T, e^{i\langle \omega, t \rangle}, \varphi(\omega) \rangle \rangle$  при всех  $\varphi \in (\mathcal{S})$ .

## Аналитическое представление преобразований Фурье распределений с носителем в световом конусе

---

В квантовой теории поля многие важные величины обращаются в нуль вне „светового конуса“, т. е. вне области  $\{(x_0, x_1, x_2, x_3) : x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0\}$  пространства  $E^4$ . Поскольку это требует небольшой дополнительной работы, в дальнейшем мы будем рассматривать случай  $n$ -мерного пространства координат, а не трехмерного пространства координат квантовой теории поля.

### 15.1. Световой конус, трубы будущего и прошлого

Положим  $x^2 = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$ , где  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ . Область  $\{x : x^2 > 0\}$  называется *световым конусом*. Она представляет собой объединение двух не имеющих общих точек областей: *конуса будущего*  $\Gamma^+ = \{x : x^2 > 0, x_0 > 0\}$ , и *конуса прошлого*  $\Gamma^- = \{x : x^2 > 0, x_0 < 0\}$ .

Со световым конусом связаны следующие области в комплексном пространстве  $C^{n+1}$ : *труба будущего*

$$T^+ = \{z : y \in \Gamma^+, x \in E^{n+1}\},$$

где  $z_j = x_j + iy_j$ ,  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ , и *труба прошлого*

$$T^- = \{z : y \in \Gamma^-, x \in E^{n+1}\}.$$

### 15.2. Преобразование Фурье распределений с носителем в конусе будущего

**Теорема.** Пусть  $T \in (\mathcal{S}')$ , носитель  $T$  содержится в  $\Gamma^+$ ,  $a(t)$  — функция класса  $(C^\infty)$  с носителем в  $\Gamma^+$ ,  $0 \leq a(t) \leq 1$ , и  $a(t) \equiv 1$  на носителе  $T$ . Тогда  $\langle T_t, a(t)e^{it \cdot z} \rangle$

аналитична в трубе будущего  $T^+$ . Эта функция принимает как граничное значение преобразование Фурье  $\mathcal{F}(T)$  распределения  $T$  в следующем смысле:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \in \Gamma^+}} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T_t, a(t) e^{i(t, x+iy)} \rangle \Phi(x) dx = \langle \mathcal{F}(T), \Phi \rangle$$

для любой  $\Phi \in (\mathcal{S})$ .

**Доказательство.** Справедливы соотношения  $\langle \mathcal{F}(T), \Phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\Phi) \rangle = \langle T, a(t) \mathcal{F}(\Phi) \rangle$ . При  $y \in \Gamma^+$ ,  $y \rightarrow 0$  функция  $a(t) e^{-it, y} \mathcal{F}(\Phi, t)$  сходится к функции  $a(t) \mathcal{F}(\Phi, t)$  в смысле  $(\mathcal{S})$ . Следовательно, мы имеем

$$\langle \mathcal{F}(T), \Phi \rangle = \lim_{\substack{y \in \Gamma^+ \\ y \rightarrow 0}} \langle T_t, a(t) e^{-it, y} \mathcal{F}(\Phi) \rangle.$$

Далее,

$$\langle T_t, a(t) e^{-it, y} \mathcal{F}(\Phi) \rangle = \left\langle T_t, a(t) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{i(t, x+iy)} dx \right\rangle.$$

Как обычно, приблизим интеграл римановыми суммами, поменяем порядок интегрирования и действия  $T$  и перейдем к пределу. Мы получим соотношение

$$\langle T_t, a(t) e^{-it, y} \mathcal{F}(\Phi) \rangle = \int_{E^{n+1}} \langle T_t, a(t) e^{i(t, z)} \rangle \Phi(x) dx.$$

Для доказательства теоремы остается только проверить утверждение, что  $\langle T_t, a(t) e^{i(t, z)} \rangle$  аналитична в  $T^+$ . Это делается обычным образом.

### 15.3. Вычисление ядра

**Теорема.** Пусть  $\chi(t)$  — характеристическая функция конуса будущего. Тогда при  $z \in T^+$ ,  $\xi \in E^{n+1}$  справедлива формула<sup>1)</sup>

$$\mathcal{F}^{-1}(\chi(t) e^{i(t, z)}, \xi) = \frac{t^{n+1} \Gamma((n+2)/2)}{(2\pi)^{(n+3)/2} [(\xi - z)^2]^{(n+1)/2}}.$$

<sup>1)</sup> Эта формула получена Боннером [1, 2]. См. также Владимира [1].

В дальнейшем эту величину мы будем обозначать через  $k(\xi - z)$ .

**Доказательство.** Пусть  $|t| = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\chi(t) e^{it \cdot z}, \xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_0^\infty e^{it_0(z_0 - \xi_0)} dt_0 \times \\ &\quad \times \int_{|t| < t_0} e^{it_1(z_1 - \xi_1) + \dots + it_n(z_n - \xi_n)} dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

В дальнейшем, опустив множитель  $(2\pi)^{-n-1}$ , мы будем обозначать этот интеграл через  $I$ . Сначала рассмотрим случай, когда  $(z_1, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_n)$  вещественны, а  $y_0 > 0$ . Ортогональным преобразованием с единичным детерминантом можно так повернуть оси координат  $(t_1, \dots, t_n)$ , чтобы новая ось  $t_1$  совпадала с направлением вектора  $(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n)$ . Тогда

$$I = \int_0^\infty e^{it_0(z_0 - \xi_0)} dt_0 \int_{|t| < t_0} e^{it_1 r} dt_1 \dots dt_n,$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2}.$$

Перепишем внутренний интеграл в виде

$$\int_{-t_0}^{t_0} e^{it_1 r} dt_1 \int_{-t_0^2 - \dots - t_n^2}^{t_0^2 - t_1^2} dt_2 \dots dt_n.$$

Мы имеем:  $dt_2 \dots dt_n = \rho^{n-2} d\rho d\Omega$ , где

$$\rho = \sqrt{t_2^2 + \dots + t_n^2},$$

а  $d\Omega$  – элемент объема на  $(n-2)$ -мерной единичной сфере  $t_2^2 + \dots + t_n^2 = 1$ . Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{t_0^2 - t_1^2}}^{\sqrt{t_0^2 - t_1^2}} dt_2 \dots dt_n &= \int \rho^{n-2} d\rho d\Omega = \omega_{n-1} \frac{\rho^{n-1}}{n-1} \Big|_0^{\sqrt{t_0^2 - t_1^2}} = \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{n-1} (t_0^2 - t_1^2)^{(n-1)/2}, \end{aligned}$$

где  $\omega_{n-1}$  — объем  $(n-2)$ -мерной единичной сферы, а значение корня  $(t_0^2 - t_1^2)^{(n-1)/2}$  выбрано положительным. Подстановка  $t_1 = t_0 t_1^*$  приводит к такому равенству:

$$\int_{-t_0}^{t_0} e^{it_1 r} (t_0^2 - t_1^2)^{(n-1)/2} dt_1 = t_0^n \int_{-1}^1 e^{it_0 r t_1^*} (1 - t_1^2)^{(n-1)/2} dt_1^*.$$

После подстановки  $t_1^* = \cos \varphi$  правая часть последней формулы принимает вид

$$t_0^n \int_0^\pi e^{it_0 r \cos \varphi} [\sin \varphi]^n d\varphi.$$

Для функции Бесселя  $J_{n/2}(t)$  порядка  $n/2$  справедливо представление (см. Бохнер [1])

$$J_{n/2}(t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)} \int_0^\pi e^{-it \cos \varphi} [\sin \varphi]^n d\varphi.$$

Поэтому

$$t_0^n \int_0^\pi e^{it_0 r \cos \varphi} [\sin \varphi]^n d\varphi = t_0^{n/2} J_{n/2}(-t_0 r) \frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)2^{n/2}}{(-r)^{n/2}}.$$

Итак,

$$I = \frac{\omega_{n-1}}{n-1} \frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)2^{n/2}}{(-r)^{n/2}} \int_0^\infty e^{it_0(s_0 - \xi_0)} t_0^{n/2} J_{n/2}(-t_0 r) dt_0.$$

Пусть  $a > 0$ . Положим  $s = \sqrt{a}$ . Воспользовавшись тождеством (Бохнер [1])

$$\frac{J_p(x)}{x^p} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{J_{p-1}(x)}{x^{p-1}} \right),$$

получим соотношение

$$\frac{J_p(ap)}{a^p} = \left( \frac{-2}{p} \right)^m \frac{d^m}{ds^m} \left[ \frac{J_{p-m}(\sqrt{s} \rho)}{s^{(p-m)/2}} \right].$$

Рассмотрим случай четного  $n$ . Пусть  $p = n/2$ ,  $m = p$ . Тогда

$$J_{n/2}(-rt_0) = r^p \left(\frac{2}{t_0}\right)^p \frac{d^p}{ds^p} (J_0(-\sqrt{s}t_0)).$$

Подставив эту формулу в  $I$  и обозначив  $z_0 = z_0 - \xi_0$ , мы получим

$$I = \frac{\omega_{n-1}}{n-1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^n (-1)^{n/2} \frac{d^p}{ds^p} \times \\ \times \int_0^\infty e^{it_0 z'_0} J_0(-\sqrt{s}t_0) dt_0.$$

Теперь воспользуемся формулой (Бохнер [1])

$$\int_0^\infty e^{-up} J_0(ap) dp = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

Подставив  $iz_0$  вместо  $-u$  и  $-\sqrt{s}$  вместо  $a$ , мы имеем

$$\int_0^\infty e^{it_0 z'_0} J_0(-\sqrt{s}t_0) dt_0 = \frac{-1}{\sqrt{s - z_0^2}},$$

где выбрано такое значение корня, что  $\sqrt{-z_0^2} = iz'_0$ .  
Далее,

$$\frac{d^p}{ds^p} \int_0^\infty e^{it_0 z'_0} J_0(-\sqrt{s}t_0) dt_0 = \\ = (-1)^{p+1} \left(\frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} + p - 1\right) (s - z_0^2)^{-\left(\frac{1}{2} + p\right)}.$$

Учитывая, что

$$\omega_{n-1} = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)},$$

мы получаем

$$I = \frac{(-2)^{n+1} (\pi)^{(n-1)/2} [\Gamma((n+1)/2)]^2}{(n-1) \Gamma((n-1)/2) (r^2 - z_0^2)^{(n+1)/2}}.$$

Поскольку  $\frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ , получаем далее

$$I = \frac{i^{n+1} 2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(z_0^2 - r^2\right)^{(n+1)/2}},$$

где значение корня  $(z_0^2 - r^2)^{1/2}$  определяется условием  $\sqrt{z_0^2} = z'_0$ . Вспоминая, что  $z'_0 = z_0 - \xi_0$ , а  $r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2$ , мы получаем

$$k(\xi - z_0, x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \frac{2(\pi)^{-(n+3)/2} i^{n+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{[(z_0 - \xi_0)^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - \dots - (x_n - \xi_n)^2]^{(n+1)/2}}.$$

Утверждение теоремы получается теперь аналитическим продолжением последней формулы в трубу  $T^+$ . Теорема доказана для четных  $n$ . Доказательство ее для нечетных  $n$  аналогично. Мы предлагаем ее в виде задачи 1.

#### 15.4. Представление Владимира

для  $\square_z^s \langle T_t, a(t) e^{i(t, z)} \rangle$

**Теорема.** Пусть  $T$ ,  $a(t)$  и  $k(\xi - z)$  удовлетворяют условиям, сформулированным в § 15.2 и 15.3. Пусть

$$\square_z = \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial z_n^2},$$

а через  $\square_z^s$  обозначен оператор  $\square_z$ , повторенный  $s$  раз. Тогда существует целое  $s_0$ , такое, что для всех  $s \geq s_0$

$$\square_z^s \langle T_t, a(t) e^{i(t, z)} \rangle = \langle \mathcal{F}(T)_\xi, \square_\xi^s k(\xi - z) \rangle,$$

где  $\xi \in E^{n+1}$ ,  $z \in T^+$ . Мы называем это представление представлением Владимира.

**Доказательство.** Для  $z \in T^+$  функция  $a(t) \times e^{i(t, z)} \in (\mathcal{S})$ . Поэтому

$$\langle T_t, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}(a(t) e^{i(t, z)})] \rangle = \langle \mathcal{F}(T)_\xi, \mathcal{F}^{-1}(a(t) e^{i(t, z)}, \xi) \rangle.$$

Равенство справедливо для каждой  $a(t)$ , такой, что  $0 \leq a(t) \leq 1$ ,  $a(t) \equiv 1$  на носителе  $T$ , а носитель  $a(t)$  содержится в  $\Gamma^+$ . Отметим, что правая часть равенства не зависит от  $a$ .

Выберем теперь монотонную последовательность  $\{a_j\}$  функций  $a$ , сходящуюся к  $\chi$ . Функция  $\chi$  не принадлежит  $(S)$ , и, следовательно,  $\mathcal{F}^{-1}(\chi(t)e^{i\langle t, z \rangle}, \xi)$  также не принадлежит  $(S)$ .

Заметим, что каждое распределение из  $(S)$  имеет конечный порядок. Поэтому  $\mathcal{F}(T)$  непрерывно, так как для достаточно больших  $s$

$$\mathcal{F}^{-1}(a_j(t)(t^2)^s e^{i\langle t, z \rangle}, \xi) \rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\chi(t)(t^2)^s e^{i\langle t, z \rangle}, \xi).$$

Следовательно, для всех  $j$

$$\begin{aligned} \square_z^s \langle T_t, a_j(t) e^{i\langle t, z \rangle} \rangle &= \langle T_t, a_j(t) (-t^2)^s e^{i\langle t, z \rangle} \rangle = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}(T)_\xi, \mathcal{F}^{-1}(a_j(t) (-t^2)^s e^{i\langle t, z \rangle}, \xi) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{F}(T)_\xi, \mathcal{F}^{-1}(\chi(t) (-t^2)^s e^{i\langle t, z \rangle}, \xi) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{F}(T)_\xi, \square_z^s k(\xi - z) \rangle. \end{aligned}$$

Теорема Владимира [1, 2] доказана.

При  $s = 0$ , если существует граничное значение при вещественных  $z$ , мы имеем интегральное представление класса функций, голоморфных в трубе будущего, через их значения в  $E^{n+1}$ . (Заметим, что  $E^{n+1}$  не является топологической границей трубы  $T^+$ . Это — так называемая *существенная граница*  $T^+$  (см. § 13.2).) При  $s = 0$  достаточным условием существования представления является условие  $\mathcal{F}(T) \in L_p$ , где  $p < 2$ .

## 15.5. Преобразование Фурье распределений с носителем в световом конусе

Если носитель распределения лежит в конусе прошлого, то его преобразование Фурье аналитично в трубе прошлого. Если носитель распределения  $S$  лежит и в конусе прошлого, и в конусе будущего, то его преобразование Фурье можно представить в виде разности

двух функций, одна из которых аналитична в трубе будущего, а другая — в трубе прошлого.

Совместная граница трубы будущего и трубы прошлого — это пространство  $E^{n+1}$ . Если  $S$  обращается в нуль в некоторой области пространства  $E^{n+1}$ , то „скакок“ двух аналитических функций в этой области должен равняться нулю.

Можно показать, что в этом случае две функции являются аналитическим продолжением одна другой. Это утверждение называется теоремой об „острие клина“<sup>1)</sup>. Ее доказательство требует более глубокого развития теории функций многих комплексных переменных<sup>2)</sup>, чем это сделано в данной книге. Мы отсылаем читателя к следующей литературе: Боголюбов и Ширков [1], Бремерман, Эме и Тейлор [1], Браудер [1]. Доказательство Браудера, по-видимому, самое удовлетворительное из трех.

Наконец, может оказаться, что объединение трубы будущего, трубы прошлого и окрестности в  $C^{n+1}$  области  $D \subset E^{n+1}$  не является „областю голоморфности“, т. е. все функции, голоморфные в  $T^+ \cup T^- \cup D$ , можно аналитически продолжить в большую область, „оболочку голоморфности“. Оболочка голоморфности построена в некоторых частных случаях (Бремерман, Эме и Тейлор [1]). Далее, пересечение оболочки голоморфности области  $T^+ \cup T^- \cup D$  с пространством  $E^{n+1}$  обладает некоторыми геометрическими свойствами (выпуклости). Эти свойства были исследованы Владимировым [1, 2]. Из них следует, что распределение  $S$ , являющееся преобразованием Фурье распределения с носителем в световом конусе, не может обращаться в нуль в произвольной области пространства  $E^{n+1}$ . Это осу-

<sup>1)</sup> В оригинале edge of the wedge. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Эта теорема была сформулирована и при некоторых дополнительных предположениях доказана Н. Н. Боголюбовым (доклад на Международной конференции в Сиэтле, США, сентябрь 1956 г.). Полное доказательство опубликовано в монографии Н. Н. Боголюбова, Б. В. Медведева и М. К. Поливанова, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, 1958, Дополнение А, теорема I. — Прим. ред.

ществимо только для областей с некоторыми свойствами выпуклости. Детальный анализ см. у Владимира [1, 2].

### ЗАДАЧИ

1. Доказать теорему 15.3 для нечетных  $n$ . (Указание:  $J_{-1/2}(\sqrt{sp}) = \sqrt{2/\pi p} \cos(\sqrt{sp})$ .)
2. Доказать, что каждое распределение из (8') имеет конечный порядок. (См. гл. 4 и § A.3.12.)

Таблица аналитических представлений и преобразований Фурье

$T$	$\hat{T}$	$\mathcal{F}(T)$	$\widehat{\mathcal{F}}(T, z)$
$\delta$	$-\frac{1}{2\pi iz}$	1	$\begin{cases} \frac{1}{2}, & y > 0 \\ -\frac{1}{2}, & y < 0 \end{cases}$
$\delta^{(n)}$	$\frac{n!}{2\pi i(-z)^{n+1}}$	$(-i\omega)^n$	$\begin{cases} \frac{1}{2}(-iz)^n, & y > 0 \\ -\frac{1}{2}(-iz)^n, & y < 0 \end{cases}$
$\delta_+$	$\begin{cases} -\frac{1}{2\pi iz}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$	$H(-\omega)$	$\frac{1}{2\pi i} \ln z, \quad y \neq 0$
$\delta_-$	$\begin{cases} 0, & y > 0 \\ -\frac{1}{2\pi iz}, & y < 0 \end{cases}$	$H(\omega)$	$-\frac{1}{2\pi i} \ln z, \quad y \neq 0$
$\delta_+^{(n)}$	$\begin{cases} \frac{n!}{2\pi i(-z)^{n+1}}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$	$(-i\omega)^n H(-\omega)$	$\frac{(-iz)^n}{2\pi i} \ln z, \quad y \neq 0$

$P(t^n)$	$\begin{cases} \frac{1}{2z^n}, & y > 0 \\ -\frac{1}{2z^n}, & y < 0 \end{cases}$	$\frac{\pi i(\text{io})^{n-1} e(\Theta)}{(n-1)!}$	$\begin{cases} \frac{-(iz)^{n-1}}{2(n-1)!} (\ln z + \ln(-z)), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$
$t^n, n \geq 0$	$\begin{cases} \frac{1}{2} z^n, & y > 0 \\ -\frac{1}{2} z^n, & y < 0 \end{cases}$	$2\pi(-i)^n \delta(n)$	$\frac{i^{n+1} n!}{z^{n+1}}, \quad y \neq 0$
$H(t)$	$\frac{-1}{2\pi i} \ln(-z), \quad y \neq 0$	$2\pi\delta_+$	$\begin{cases} -\frac{1}{iz}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$
$H_-(t) = H(-t)$	$\frac{1}{2\pi i} \ln z$	$2\pi\delta_-$	$\begin{cases} 0, & y > 0 \\ -\frac{1}{iz}, & y < 0 \end{cases}$
$\mathfrak{e}(t) = H(t) - H(-t)$	$-\frac{1}{2\pi i} (\ln z + \ln(-z))$	$2\pi(\delta_+ - \delta_-)$	$-\frac{1}{iz}, \quad y \neq 0$

Продолжение

$f$	$\hat{f}$	$\mathcal{F}(T)$	$\hat{\mathcal{F}}(T, z)$
$t^k H(t), k \geq 0$	$-\frac{z^k}{2\pi i} \ln(-z)$	$(-t)^k 2\pi \delta_+^{(k)}$	$\begin{cases} \frac{k!}{(-iz)^{k+1}}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$
$t^\alpha, \alpha$ вещественно	$\begin{cases} \frac{1}{2} z^\alpha, & y > 0 \\ -\frac{1}{2} z^\alpha, & y < 0 \end{cases}$		$\begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(-iz)^{\alpha+1}}, & y > 0 \\ (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(iz)^{\alpha+1}}, & y < 0 \end{cases}$
$\frac{1}{2\pi i(z-z_0)}$			$\begin{cases} 0, & \text{если } y > 0, \\ \frac{1}{2\pi i(z-z_0)}, & \text{если } y_0 > 0, \\ -\frac{1}{2\pi i(z-z_0)}, & \text{если } y_0 > 0, \\ 0, & \text{если } y_0 < 0, \end{cases}$ <p style="text-align: center;"><math>H(\Phi) e^{t\Phi z_0}</math> почти всюду, если <math>y_0 &gt; 0</math> <math>-H(-\Phi) e^{t\Phi z_0}</math> почти всюду, если <math>y_0 &lt; 0</math></p>

$e^{i\omega_0 t}$ , $\omega_0$ вещественно	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{i(\omega + \omega_0)z}, & y > 0 \\ -\frac{1}{2} e^{i(\omega + \omega_0)z}, & y < 0 \end{cases}$	$2\pi\delta(\omega + \omega_0)$ $- \frac{1}{i(z + \omega_0)}$
$\sin \omega_0 t$ , $\omega_0$ вещественно	$\begin{cases} \frac{1}{2} \sin \omega_0 z, & y > 0 \\ -\frac{1}{2} \sin \omega_0 z, & y < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ $\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z + \omega_0} - \frac{1}{z - \omega_0} \right]$
$e^{-t^2}$	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{-z^2}, & y > 0 \\ -\frac{1}{2} e^{-z^2}, & y < 0 \end{cases}$	$\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$ см. пример 8.25.10
$\cos \omega_0 t$ , $\omega_0$ вещественно	$\begin{cases} \frac{1}{2} \cos \omega_0 z, & y > 0 \\ -\frac{1}{2} \cos \omega_0 z, & y < 0 \end{cases}$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ $\frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z + \omega_0} + \frac{1}{z - \omega_0} \right)$

## БИБЛИОГРАФИЯ

Альфорс (Ahlfors L.)

[1] Complex analysis, McGraw-Hill, New York, 1953.

Арлей и Бух (Arley N., Buch K. R.)

[1] Introduction to the theory of probability and statistics, Wiley and Sons, New York, 1950. (Русский перевод: Арлей Н., Бух К., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, ИЛ, М., 1951.)

Ахиезер А. И. и Берестецкий В. Б.

[1] Квантовая электродинамика. М., 1959

Бенке и Зоммер (Behnke H., Sommer F.)

[1] Theorie der analytischen Funktionen, Springer, Berlin, 1962.

Бенке и Туллен (Behnke H., Thullen P.)

[1] Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Ergebnisse der Mathemat., Vol. 3, Springer, Berlin, 1934.

Бергман (Bergman S.)

[1] Functions of extended class in the theory of function of several complex variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63 (1948), 523—547.  
[2] The kernel function and conformal mapping, American Mathematics Society, New York, 1950.

Бергман и Шиффер (Bergman S., Schiffer M.)

[1] Kernel functions and elliptic differential equations, Academic Press, New York, 1953.

Берс (Berg L.)

[1] Several complex variables, Notes, New York University, 1962—1963.

Боголюбов Н. Н. и Парасюк О. С.

[1] Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder, *Acta Math.*, 97 (1957), 227—266.

Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В.

[1] Введение в теорию квантованных полей, М.—Л., 1957.

Боде (Bode H. W.)

[1] Network analysis and feedback amplifier design, Van Nostrand, Princeton, 1945

Бохнер (Bochner S.)

[1] Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932. (Русский перевод: Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, 1962.)

[2] Group invariance of Cauchy's formula in several variables, *Ann. Math.*, 45 (1944), 686—707.

Бохнер и Чандraseкараи (Bochner S., Chandrasekharan K.)

[1] Fourier transforms, Annals of Math. Studies, No. 9, Princeton University Press, Princeton, 1949.

**Браудер (Browder F.)**

- [1] On the "edge of the wedge theorem", *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 125—131.

**Бремерман (Bremermann H. J.)**

- [1] On finite renormalization constants and the multiplication of causal functions in perturbation theory, ONR Report, Berkeley, 1959.  
[2] On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **91** (1959), 246—276.  
[3] Several complex variables, Notes, Seattle, 1957.

**Бремерман и Дюран (Bremermann H. J., Durand L.)**

- [1] On analytic continuation, multiplication, and Fourier transformations of Schwartz distributions, *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 240—258.

**Бремерман, Эме и Тейлор (Bremermann H. J., Oehme R, Taylor J. G.)**

- [1] A proof of dispersion relations in quantized field theories, *Phys. Rev.*, **109** (1958), 2178—2190.

**Бюро (Bureau F.)**

- [1] Divergent integrals and partial differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 143—202.

**Вайнштейн Л. А. и Зубаков В. Д.**

- [1] Выделение сигналов на фоне случайных помех, изд-во «Советское Радио», М., 1960.

**Ван дер Корпут (van der Corput J. G.)**

- [1] Introduction to the neutrix calculus, Technical Reports, Madison, Wisconsin, 1960.

**Винер (Wiener N.)**

- [1] The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge University Press, London, 1933 ((Русский перевод: Винер Н., Интеграл Фурье и некоторые его применения, Физматгиз, М., 1963.)

**Владимиров В. С.**

- [1] О построении оболочек голоморфности для областей специального вида и их применения, Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **60** (1960), 101—144.  
[2] Методы теории функций многих комплексных переменных, изд-во «Наука», М., 1964.

**Гальперин (Halperin I.)**

- [1] Introduction to the theory of distributions, University of Toronto Press, Toronto, 1952. (Русский перевод: Гальперин И., Введение в теорию обобщенных функций, ИЛ, М., 1954.)

**Гарнир (Garnir H. G.)**

- [1] Sur les distributions résolvantes des opérateurs de la physique mathématique, *Bull. Soc. Royale des Sci. de Liège* (1951), 174—296.

- [2] Sur deux équations de la théorie des distributions, *Bull. Soc. Royale des Sci. de Liège* (1951), 650—666.  
 [3] Sur la formulation des problèmes aux limites dans la théorie des distributions, *Bull. Soc. Royale des Sci. de Liège* (1951), 497—513; 639—649.

Гельфанд И. М. и Вilenкин Н. Я.

- [1] Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, Физматгиз, М., 1961.

Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е

- [1] Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, М., 1958.  
 [2] Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, *УМН*, 8 (1953), 3—54.  
 [3] Quelques applications de la théorie des fonctions généralisées, *J. Math. Pure et app.*, 35 (1956), 383—412.

Гильемин (Guillemin E. A.)

- [1] Introductory circuit theory, Wiley and Sons, New York, 1953.  
 [2] Synthesis of passive networks, Wiley and Sons, New York, 1951.

Грохендицк (Grothendieck A.) \*

- [1] Sur les espaces  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{D}\mathcal{F}$ . *Summa Brasiliense Mathematicae*, 3 (1954), 57—122. (Русский перевод: сб. *Математика* 2:3 (1958), 81—127.)

Гуревич Б. Л.

- [1] Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для систем конечноразностных уравнений, *ДАН СССР*, 99 (1954), 893—895.

Дайсон (Dyson F.)

- [1] The  $S$  matrix in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.*, 75 (1949), 1736—1745. (Русский перевод: сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, М., 1954.)

Дирак (Dirac P. A. M.)

- [1] The physical interpretation of the quantum dynamics, *Proc. Roy. Soc. London*, Section A 113 (1926—1927), 621—641.

Дьёдонне и Шварц (Dieudonné F., Schwartz L.)

- [1] La dualité dans les espaces  $(\mathcal{F})$  et  $(\mathcal{D}\mathcal{F})$ , *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 1 (1949), 61—101. (Русский перевод: сб. *Математика*, 2:2 (1958), 77—107.)

Карлеман (Carleman T.)

- [1] L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1944.

Карсон (Carson J. R.)

- [1] The Heaviside operational calculus, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 32 (1926), 43—68.

Келли (Kelly J. L.)

- [1] General Topology, Van Nostrand, Princeton, 1955. (Русский перевод: Келли Дж., Общая топология, изд-во «Наука», М., 1968.)

Кёнинг (König H.)

- [1] Neue Begründung der Theorie der Distributionen von L. Schwartz, *Math. Nachrichten*, 9 (1953), 129—148.

- [2] Multiplikation von Distributionen, *Math. Annalen*, 128 (1955), 420—452.

- [3] Multiplikation und Variablentransformation in der Theorie der Distributionen, *Arch. Math.*, 6 (1955), 391—396.

- [4] Multiplikationstheorie der verallgemeinerten Funktionen, Bayerische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Abhandlungen, Neue Folge, Heft 82, München, 1957.

Кёте (Köthe G.)

- [1] Die Randverteilungen analytischer Funktionen, *Math. Zeitschrift*, 57 (1952), 13—33.

Клейн (ред.) (Klein L.)

- [1] Dispersion relations and the abstract approach to field theory, Gordon and Breach, New York, 1961.

Коревар (Коревагер J.)

- [1] Distributions defined from the point of view of applied mathematics, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. A, 58 (1955); I, 368—378, II, 379—389; III, 483—493; IV, 494—503; V, 663—674.

Коши (Саучу А.)

- [1] Oeuvres complètes, I-ière série, tome I, Mémoire sur la théorie des ondes, Note XVIII, 228—299; Note VI, 133—139.

Крылов В. И.

- [1] О существовании обобщенных производных от суммируемых функций, *ДАН СССР*, 55, (1947), 379—382.

Курант (Courant R.)

- [1] Differential and integral calculus, Vol. II, Interscience, New York, 1956.

Курант и Гильберт (Courant R., Hilbert D.)

- [1] Methods of Mathematical Physics, Interscience, New York, Vol. I, 1953; Vol. II, 1962 (Русский перевод: Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, II, Гостехиздат, М.—Л., 1951; Курант Р., Уравнения с частными производными, изд-во «Мир», М., 1964.)

Лайтхилл (Lighthill M. J.)

- [1] An introduction to Fourier analysis and generalized functions, Cambridge University Press, London, 1958 (1959, 1960).

Лионс (Lions J. L.)

- [1] Problèmes aux limites en théorie des distributions, *Acta Math.*, 94 (1955), 13—153.

**Ловерье (L au w e r i e r H. A.)**

- [1] The Hilbert problem for generalized functions, *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 13 (1963), 157—166.

**Манроу (M un g r o e M. E.)**

- [1] Introduction to measure and integration, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1953.

**Маршан (M ar ch and J. P.)**

- [1] Distributions: an outline, Interscience, New York, 1962.

**Метэ (M eth é e P. D.)**

- [1] Sur les distributions invariantes dans les groupes des rotations de Lorentz, *Comm. Math. Helv.*, 28 (1954), 225—270.

- [2] Transformées de Fourier de distributions invariantes liées à la résolution de l'équation des ondes, Colloques Internationaux du C. N. R. S., 1956, 145—163.

**Мешковский (M esch k o w s k i H.)**

- [1] Hilbertsche Räume mit Kernfunktion, Springer, Berlin, 1962.

**Микусинский (M ikus i n s k i J.)**

- [1] Sur la méthode de généralisation de M. Laurent Schwartz et sur la convergence faible, *Fund. Math.*, 35 (1948), 235—239.

- [2] Sur les fondements du calcul opératoire, *Studia Math.*, 11 (1949), 41—70.

- [3] Operational calculus, Pergamon, London, 1959. (Русский перевод: Микусинский Я., Операторное исчисление, ИЛ, М., 1956.)

**Микусинский, Сикорский (M ikus i n s k i J., S i k o r s k i R.)**

- [1] The elementary theory of distributions, Warsaw, 1957. (Русский перевод. Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций, ИЛ, М., 1959, 1963.)

**Наас и Шмид (N a a s J., S c h m i d H. L.)**

- [1] Mathematischer Wörterbuch, Academie-Verlag GMBH, Berlin, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1961.

**Равец (R a v e t z J. R.)**

- [1] Distributions defined as limits, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 53 (1957), 76—92.

**Ройден (R o y d e n H. L.)**

- [1] Real analysis, Macmillan, New York, 1963.

**Рудин (R u d i n W.)**

- [1] Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, New York, 1953. (Русский перевод: Рудин У., Основы математического анализа, изд-во «Мир», М., 1966.)

- [2] Fourier analysis on groups, Interscience, New York, 1962.

**Румье (R oum i e u C.)**

- [1] Sur quelques extensions de la notion de distributions, *Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup.*, 3e Série, 77 (1960), 41—121.

**Сато (S a t o M.)**

- [1] On a generalization of the concept of function, *Proc. Japan Acad.*, 34 (1958), 126—130.

[2] Theory of hyperfunctions, I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I, **8** (1959), 139—193.

[3] Theory of hyperfunctions, II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I, **8** (1960), 387—437.

Себастьян э Сильва (e Silva S.)

[1] Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions, *Rivista Faculdad Ciências Lisboa*, II, Ser. A, **4** (1955), 79—186.

Скарфиелло (Scarfiello)

[1] Sur le changement de variables des distributions et leur transformées de Fourier, *Nuovo Cimento*, **12** (1954), 471—482.

Соболев С. Л.

[1] Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Матем. сборник*, **1** (1936), 39—71.

Темпль (Temple G.)

[1] Theories and applications of generalized functions, *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 134—148.

[2] The theory of generalized functions, *Proc. Roy. Soc., Ser A*, **288** (Feb.—Mar 1955), 175—190.

Тильман (Tilmann H. G.)

[1] Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen, *Math. Zeit.*, **59** (1953), 61—83.

[2] Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen, II, *Math. Zeit.*, **76** (1961), 5—21.

[3] Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen, *Math. Zeit.*, **77** (1961), 106—124.

Титчмарш (Titchmarsh E. C.)

[1] Introduction to the theory of Fourier integrals, Clarendon Press, Oxford, 1936, 2nd ed. 1948. (Русский перевод: Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., ГИТТЛ, 1948.)

Трев (Trèves J. F.)

[1] Distributions and general theory of differential operators, Technical Report 1, University of California, Berkeley, January, 1960.

Фельдман (Feldman J.)

[1] Locally convex linear spaces and distributions, Technical Report, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, July, 1958.

Фридланд, Уинг и Эш (Friedland B., Wing O., Ash R.)

[1] Principles of linear networks, McGraw-Hill, New York, 1961.

Фридман А. (Friedman A.)

[1] Generalized functions and partial differential equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.

Фридман Б. (Friedman B.)

[1] Principles and techniques of applied mathematics, Wiley and Sons, New York, 1956.

**Хевисайд (Heaviside O.)**

- [1] On operators in mathematical physics, *Proc. Roy. Soc. London*, 52 (1893), 504—529, 54 (1894), 105—143.

**Хёрмандер (Hörmander L.)**

- [1] Linear partial differential operators, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Band 116, Springer, Berlin, 1963. (Русский перевод: Хёрмандер Л., *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, изд-во «Мир», М., 1965.)
- [2] On the division of distributions by polynomials, *Ark. Math.*, 3 (1958), 555—568. (Перевод: сб. *Математика*, 3 : 5 (1959), 117—130.)

**Хилле (Hille E.)**

- [1] Analytic function theory, Ginn, Boston, vol. I, 1959; vol. II, 1962

**Шварц (Schwartz L.)**

- [1] Théorie des distributions, Hermann, Paris, vol. I, 1950; vol. II, 1951 (1957—1959).
- [2] Généralisation de la notion de fonction, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques, *Ann. Univ. Grenoble*, 21 (1945), 57—74.
- [3] Généralisation de la notion de fonction et de dérivation; théorie des distributions, *Ann. Télécommunications*, 3 (1948), 135—140.
- [4] Théorie des distributions et transformation de Fourier, *Ann. Univ. Grenoble*, 23 (1947—1948), 7—24.
- [5] Transformation de Laplace des distributions, Séminaire Math. Univ. Lund, tome suppl. dédié à M. Riesz, 1952, 196—206.
- [6] Distributions à valeur vectorielles, *Ann Inst. Fourier Grenoble*, 7 (1957), 1—141.
- [7] Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, 239 (1954), 847—848.
- [8] Application of distributions to the study of elementary particles in relativistic quantum mechanics, Technical Report, 7, University of California, Berkeley, March, 1961. (Перевод: Шварц Л., *Применение обобщенных функций к изучению элементарных частиц в релятивистской квантовой механике*, «Мир», М., 1964.)

**Эрдэйи (Erdélyi A.)**

- [1] Operational calculus and generalized functions, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962

**Эренпрейс (Ehrenpreis L.)**

- [1] Solution of some problems of division, *Amer. J. Math.*, 76 (1954).
- [2] Theory of distributions for locally compact spaces, *Memoirs Am. Math. Soc.*, № 21 (1956).

**де Ягер (de Jaager E. M.)**

- [1] Applications of distributions in mathematical physics, *Mathematical Center Tracts*, № 10, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1964
- [2] Divergent convolution integrals in electrodynamics, Technical Report, Depart of Math., University of California, Berkley, August, 1963.

## Несколько замечаний об аналитических представлениях и о произведениях распределений<sup>1)</sup>

---

**1. Представление распределений с помощью аналитических функций одного комплексного переменного.** В этом разделе дается краткий обзор результатов; большая часть доказательств содержится у автора [5]<sup>2)</sup>. Для сравнения укажем также книгу Бельтрами — Воллера [1]. Терминология и обозначения согласованы с принятыми у Л. Шварца [12]<sup>3)</sup>.

Пусть  $T$  — распределение из  $(\mathcal{E}'(E^1))$ , где  $E^1$  обозначает вещественную прямую, или  $T \in (\mathcal{D}'_L)$ ; тогда функция  $\hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \langle T, \frac{1}{t-z} \rangle$  будет аналитической при  $\operatorname{Im} z \neq 0$  ( $\operatorname{Im} z$  = мнимая часть  $z$ ).  $\hat{T}(z)$  есть представление  $T$  в следующем смысле:  $\hat{T}(x+i\varepsilon) - \hat{T}(x-i\varepsilon)$  сходится к  $T$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в топологии  $(\mathcal{D}')$ . Мы называем функцию  $\hat{T}(z)$  *представлением Коши* распределения  $T$ .

Для  $T \in (\mathcal{D}'(E^1))$  функция  $(t-z)^{-1}$  не является основной, и  $\hat{T}(z)$ , вообще говоря, не существует; тем не менее справедлив следующий результат: существует пара функций  $f_+(z)$  и  $f_-(z)$ , аналитических в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, таких, что  $f_+(x+i\varepsilon) - f_-(x-i\varepsilon)$  сходится к  $T$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в топологии  $(\mathcal{D}')$ . Мы называем  $f_+$  *верхней* функцией,  $f_-$  *нижней* функцией, а обе функции вместе — *аналитическим*

<sup>1)</sup> В гетегапп Н. І., Some remarks on analytic representations and products of distributions, *SIAM J. Appl. Math.*, 15 (1967), 929—943.

<sup>2)</sup> Ссылка на книгу Бремермана [5] относится к стр. 1—244 настоящего издания. — Прим. ред.

<sup>3)</sup> Здесь и далее ссылки относятся к литературе на стр. 265. — Прим. ред.

представлением  $T$ . Аналитические представления одного и того же распределения отличаются самое большое на целую функцию [14], [24].

Если пара аналитических функций дает представление  $T$ , то их комплексные производные дают представление  $T'$ .

Если дополнение носителя распределения не пусто, то для любого аналитического представления  $T$  верхняя и нижняя функции  $f_+$  и  $f_-$  являются аналитическими продолжениями друг друга и остаются аналитическими на дополнении носителя  $T$ .

Не любая пара функций, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, дает представление распределения:  $f_+(z) = f_-(z) = e^{1/z^2}$  является контрпримером.

*Функция медленного роста* есть непрерывная комплекснозначная функция, определенная на  $E^1$ , которая на бесконечности растет не быстрее полинома. Для функции медленного роста  $f$  интегралы  $\int_0^\infty f(t)e^{itz} dt$  и

$-\int_{-\infty}^0 f(t)e^{itz} dt$  сходятся при  $\operatorname{Im} z > 0$  и  $\operatorname{Im} z < 0$  соответственно.

Мы называем эту пару функций *преобразованием Карлемана — Фурье*. (В основном тексте книги [5] был принят термин „обобщенное преобразование Фурье“. Новое название более выразительно и отдает дань основополагающей работе Карлемана [8].) Это преобразование дает аналитическое представление преобразования Шварца — Фурье<sup>1</sup>) функции  $f$ . Если  $f \in L_2$ , то она совпадает с аналитическим представлением Коши преобразования Планшереля — Фурье функции  $f$ . Любое распределение медленного роста ( $T \in (\mathcal{S}')$ ) есть производная конечного порядка от некоторой функции медленного роста. Преобразование Карлемана — Фурье от  $f^{(m)}$ , где  $f$  — функция медленного

<sup>1)</sup> Это преобразование называется также преобразованием Фурье — Лапласа. — Прим ред.

роста, определяется как произведение  $(-iz)^m$  на преобразование  $f$ , а это — аналитическое представление преобразования Шварца — Фурье от  $f^{(m)}$ .

Преобразование Карлемана — Фурье от  $T \in (\mathcal{S}')$  на бесконечности ведет себя как полином, а в конечных точках  $x_0 \in E^1$  как  $(z - x_0)^{-m}$ , где  $m$  — какое-то конечное число. Обратно, пара функций с этими свойствами дает аналитическое представление распределения медленного роста (Владимиров [15]).

Если аналитическое представление обращается в нуль в нижней полуплоскости и удовлетворяет асимптотическим условиям, то оно является преобразованием Карлемана — Фурье распределения с носителем на неотрицательной вещественной оси. Обратно, если носитель распределения из  $(\mathcal{S}')$  принадлежит неотрицательной вещественной оси (это пространство мы обозначаем через  $(\mathcal{S}'_+)$ ), то преобразование Карлемана — Фурье этого распределения обращается в нуль в нижней полуплоскости.

Преобразование Карлемана — Фурье функции медленного роста с носителем на неотрицательной полуоси совпадает с преобразованием Лапласа, если  $iz$  заменить на  $-s$ .

Иногда бывает проще оперировать с преобразованием Карлемана — Фурье, чем с обычным односторонним преобразованием Лапласа (см. Робертс — Кауфман [11]). Например, в случае преобразования дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами,  $L(f', s) = sL(f, s) + f(0)$  ( $L$  — преобразование Лапласа), тогда как  $\mathcal{F}(f', z) = (-iz)\mathcal{F}(f, z)$  ( $\mathcal{F}$  — преобразование Карлемана — Фурье). Так, в частности, при наличии высших производных преобразование Карлемана — Фурье приводит к более простым выражениям.

При решении задач, связанных с электрическими цепями, и задач теории управления формально было бы удобнее пользоваться техникой Карлемана — Фурье, чем преобразованием Лапласа, но этому мешают сложившиеся традиции. (См. Бремерман [5], гл. 10 и 11. См. также Бельтрами — Волерс [1]. Последние авторы пользуются преобразованием Лапласа для распреде-

лений, которое совпадает с нашим преобразованием Карлемана — Фурье с точностью до множителя  $i$  в комплексном переменном.)

**2. Произведения преобразований Фурье распределений из  $(\mathcal{S}'_+)$ .** Мультипликаторы — это классы функций, для которых можно определить произведение со всеми распределениями из данного пространства (см. Бремерман [5]). Все функции класса  $(C^\infty)$  являются мультипликаторами для  $(\mathcal{D}')$ , и, обратно, если функция является мультипликатором для всех распределений из  $(\mathcal{D}')$ , то она принадлежит классу  $(C^\infty)$ .

Для отдельных распределений иногда можно определить произведение на множители, не являющиеся мультипликаторами. В частности, преобразования Карлемана — Фурье распределений из  $(\mathcal{S}'_+)$  образуют алгебру, которую мы обозначим через  $\hat{K}^+$ . Действительно, произведение двух аналитических функций из  $\hat{K}^+$  снова принадлежит  $\hat{K}^+$  и, значит, соответствует некоторому распределению из  $(\mathcal{S}'_+)$ . Мы обозначим алгебру соответствующих распределений через  $K^+$ , как это сделано в работе Владимира [15]. Произведение в  $K^+$  соответствует свертке в  $(\mathcal{S}'_+)$ :

$$\mathcal{F}(S, z) \mathcal{F}(T, z) = \mathcal{F}(S * T, z), \text{ где } S, T \in (\mathcal{S}'_+).$$

Если существуют (обычные) граничные значения двух функций из  $\hat{K}^+$ , то произведение этих функций будет аналитическим представлением обычного произведения граничных значений функций. Следовательно, произведение распределений, определяемое таким образом, согласуется с обычным умножением.

Распределения из  $K^+$  обладают тем свойством, что они не могут обращаться в нуль в открытом множестве, если они не равны нулю тождественно. Если  $T \in K^+$ , то существует представление  $f_+, f_-$ , такое, что  $f_- \equiv 0$ . Если бы дополнение носителя  $T$  было не пусто, то  $f_+$  стремилось бы к нулю на непустом открытом множестве вещественной оси, откуда следовало бы, что  $f_+(z) \equiv 0$  и, значит,  $T \equiv 0$ . В частности, в алгебре  $K^+$  не

могут входить распределения с компактным носителем (такие, как  $\delta$ -функция Дирака и ее производные).

С другой стороны, для распределений  $T$  из  $K^+$  можно определить не только их степени, но и некоторые аналитические функции. Если  $f_+ \in \hat{K}^+$  дает представление  $T$ , то  $g(T)$  мы определяем с помощью функции  $g(f_+(z))$ . Условие на  $g$  состоит просто в том, что  $g(f_+(z)) \in \hat{K}^+$ . Например, распределение  $\delta_+$  определяется как  $\delta_+ = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(H)$ , где  $H$  — функция Хевисайда,  $\mathcal{F}$  — преобразование Шварца — Фурье и

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(H, z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi iz} & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ 0 & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Таким образом, с помощью указанного приема можно определить  $\sqrt{\delta_+}$ ,  $\ln \delta_+$  и т. д. К сожалению, этим способом нельзя определить  $\sqrt{\delta}$ ,  $\ln \delta$  и т. д.

**3. Умножение распределений медленного роста.** Как показал Л. Шварц, нельзя определить умножение для  $P(1/x)$  (главной части  $1/x$ ),  $x$  и  $\delta$ , которое было бы ассоциативно и согласовывалось с умножением на мультипликаторы ( $x$  — мультипликатор):  $P(1/x)x = 1$ ,  $x\delta = 0$ ; 1 и 0 суть мультипликаторы; таким образом,  $[P(1/x)x]\delta = \delta$ , но  $P(1/x)[x\delta] = 0$ .

Все распределения  $P(1/x)$ ,  $x$  и  $\delta$  принадлежат  $(\mathcal{S}')$ . Если отказаться от единственности произведения, то можно определить ассоциативное и коммутативное умножение в  $(\mathcal{S}')$  следующим образом.

Пусть  $S, T \in (\mathcal{S}')$ . Пусть  $f_+, f_-$  — представление  $S$ , и  $g_+, g_-$  — представление  $T$ , где  $f_+, f_-$  из  $\hat{K}^+$ . Представление  $f_+, f_-$  единственно с точностью до целой функции (§ 1). Условие  $f_+ \in \hat{K}^+$  влечет за собой единственность с точностью до полинома. Пусть  $S \cdot T$  — распределение, определяемое с помощью  $(f_+g_+, f_-g_-)$ . Ясно, что  $f_+g_+$  определяет некоторое распределение из  $K^+$ , а  $f_-g_-$  из  $K^-$  ( $K^-$  определяется аналогично  $K^+$ ). Таким обра-

зом,  $S \cdot T$  определено и принадлежит  $(\$')$ . Так как  $(f_+, f_-)$  и  $(g_+, g_-)$  единственны с точностью до полинома, то  $S \cdot T$  определено с точностью до  $S \cdot p + T \cdot q$ , где  $p$  и  $q$  — произвольные полиномы. Например, если  $S = \delta$ ,  $T = \delta'$ , то  $S \cdot T$  определено с точностью до  $\delta(a_0 + \dots + a_n x^n) = a\delta$  и  $\delta'(b_0 + \dots + b_m x^m) = b_0 \delta' - b_1 \delta$ . Замечая, что

$$\delta(z) = \frac{-1}{2\pi i z}, \quad \delta'(z) = \frac{1}{2\pi i z^2},$$

мы находим, что

$$\delta \cdot \delta' = \frac{1}{4\pi i} \delta'' + C_0 \delta + C_1 \delta',$$

где  $C_0$  и  $C_1$  — произвольные константы.

В § 6 мы опишем совсем другой способ определения произведений (с помощью формального дифференцирования преобразований Фурье). Он приводит к той же самой произвольной части, но вместо  $\delta''/4\pi i$  дает нуль.

К сожалению, описанное умножение не согласуется с обычным умножением функций. Возникает соблазн определить произведение с помощью  $(f_+ - f_-)(g_+ - g_-)$ , хотя выражение  $f_-(x - i\varepsilon)g_+(x + i\varepsilon) + f_+(x + i\varepsilon)g_-(x - i\varepsilon)$ , вообще говоря не сходится к распределению. Можно было бы попытаться просто опустить „некороющие“ члены (как в других регуляризационных процедурах) и определить произведение с помощью  $f_+(x + i\varepsilon)g_+(x + i\varepsilon) + f_-(x - i\varepsilon)g_-(x - i\varepsilon)$  (вместо того, чтобы писать знак минус между обоими членами). Однако в силу первого определения произведение распределений с компактным носителем будет распределением с компактным носителем, тогда как при втором определении это не так. Например, для  $\delta$  имеем

$$f_+(z) = f_-(z) = \frac{1}{2\pi i z},$$

$$f_+^2(x + i\varepsilon) - f_-^2(x - i\varepsilon) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \delta',$$

тогда как

$$f_+^2(x + i\varepsilon) + f_-^2(x - i\varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{2\pi} P\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

где  $P(1/x^2)$  — главное значение  $1/x^2$ . Носитель  $P(1/x^2)$  — вся вещественная ось. Производ в обоих случаях один и тот же, а именно сб, где  $c$  — произвольная константа.

Для распределений с компактным носителем произведение можно определить через представление Коши. Представление Коши определяется единственным образом, если наложить такое условие:  $f_+(z), f_-(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Получаемое таким путем произведение единственно, но при этом нет никакой согласованности с обычным умножением, а значит, и с умножением на мультипликаторы. Это произведение изучалось также Итано [21]. Как и в случае  $K^+$ , мы можем определить некоторые аналитические функции от распределений. Но здесь это, по-видимому, имеет меньше смысла, чем в случае  $K^+$ .

**4. Аналитическое представление в случае нескольких переменных.** Пусть  $T \in (\mathcal{D}'(E^n))$ ; тогда

$$\hat{T}(z) = \left\langle T, \left[ (2\pi i)^n \prod_{j=1}^n (t_j - z_j) \right]^{-1} \right\rangle$$

является аналитической функцией от  $n$  комплексных переменных при  $\operatorname{Im} z_j \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$ . Сумма  $2^n$  членов

$$\begin{aligned} \hat{T}(x_1 + ie, \dots, x_n + ie) - \hat{T}(x_n - ie, \dots, x_n + ie) + \dots \\ \dots + (-1)^n \hat{T}(x_1 - ie, \dots, x_n - ie) \end{aligned}$$

сходится к  $T$  при  $e \rightarrow +0$  в топологии  $(\mathcal{D}')$  (см. Бремерман [5]). Мы называем  $\hat{T}(z)$  представлением Коши распределения  $T$ .

В отличие от случая одного переменного особенности  $\hat{T}(z)$  не содержатся в носителе  $T$  и зависят от выбора координат  $x_1, \dots, x_n$  в пространстве  $E^n$ . Примером может служить функция  $\hat{\delta}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2 z_1 z_2}$ .

*Функции медленного роста* определим, как и в случае  $n = 1$ . *Преобразование Карлемана — Фурье* (называемое в [5] обобщенным преобразованием Фурье) функци-

ции медленного роста  $f$  определим с помощью соотношения

Здесь  $t \cdot z$  обозначает  $t_1z_1 + \dots + t_nz_n$ . Преобразование Карлемана — Фурье производной

$$\frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial t_1^{p_1} \dots \partial t_n^{p_n}} f$$

от функции медленного роста  $f$  определяется как

$$(-iz_1)^{p_1} \dots (-iz_n)^{p_n} \mathcal{F}(f, z).$$

Это преобразование дает аналитическое представление преобразования Шварца — Фурье функции  $f$ , причем в случае функций класса  $L_2$  оно совпадает с представлением Коши преобразования Планшереля — Фурье.

5. Преобразование Фурье распределений, обращающихся в нуль вне светового конуса Представление Коши содержит  $2^n$  членов, т. е. довольно много, если  $n$  не мало, и зависит от выбора координат  $x_1, \dots, x_n$ . Представление с помощью функции Уайтмана, определяемых ниже, содержит всего только два члена. Если мы имеем распределение, инвариантное относительно преобразований Лоренца, то его представление Уайт-

мана также лоренц-инвариантно. С другой стороны, это представление применимо лишь к преобразованиям Фурье распределений, которые обращаются в нуль вне светового конуса. Положим

$$C^+ = \{x: x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 > 0, \quad x_0 > 0\},$$

$$C^- = \{x: x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 > 0, \quad x_0 < 0\}.$$

$C^+$  называется *световым конусом будущего*,  $C^-$  — *световым конусом прошлого*.  $C^+ \cup C^-$  называется *световым конусом*. Положим

$$T^+ = \{z: y \in C^+, \quad x \text{ произвольно}\},$$

$x = (x_0, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_0, \dots, y_n)$ ,  $z = x + iy$ .  $T^+$  называется *трубой будущего*, а  $T^- = \{z: y \in C^-, \quad x \text{ произвольно}\}$  — *трубой прошлого*.

Преобразование (Шварца) — Фурье распределения медленного роста с носителем в  $\overline{C^+}$  является граничным значением функции, аналитической в  $T^+$ , а если носитель расположен в  $\overline{C^-}$ , то преобразование Фурье будет граничным значением функции, аналитической в  $T^-$ . Таким образом, преобразование Фурье распределения с носителем в световом конусе имеет своим представлением пару аналитических функций. Такие аналитические представления мы называем *функциями Уайтмана*.

Если  $F(t)$  — функция медленного роста с носителем в световом конусе, то

$$\int_{C^+} F(t) e^{it \cdot z} dt, \quad - \int_{C^-} F(t) e^{it \cdot z} dt$$

— пара функций Уайтмана для преобразования (Шварца) — Фурье функции  $F$ . (Запись  $t \cdot z$  означает  $t_0 z_0 + t_1 z_1 + \dots + t_n z_n$ .)

Самое общее распределение медленного роста является производной конечного порядка  $D^\rho$  от неко-

торой функции медленного роста  $F^1$ ); пара функций Уайтмана получается умножением  $\int\limits_{C^+} F(t) e^{it \cdot z} dt$  и  $-\int\limits_{C^-} F(t) e^{it \cdot z} dt$  на  $(-iz)^p = (-iz_0)^{p_0} \dots (-iz_n)^{p_n}$ .

Если  $F(t)$  — функция класса  $L_2$ , то представление ее преобразования Планшереля — Фурье  $g(\xi)$  дается интегралом Бохнера:

$$\frac{t^{n+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{(n+3)/2}} \int\limits_{E^{n+1}} \frac{g(\xi)}{[(z - \xi)^2]^{(n+1)/2}} d\xi,$$

где

$$(z - \xi)^2 = (z_0 - \xi_0)^2 - (z_1 - \xi_1)^2 - \dots - (z_n - \xi_n)^2.$$

Ядро этого интеграла совпадает с интегралом  $\int\limits_{C^+} e^{it \cdot z} dz$  при  $z \in T^+$  и  $\int\limits_{C^-} e^{it \cdot z} dt$  при  $z \in T^-$  (ср. Боннер [2]).

В общем случае распределения медленного роста  $S$  с носителем в световом конусе мы имеем следующее представление Владимира для преобразования Шварца — Фурье  $\mathcal{F}(S)$ .

Найдется  $s_0$ , такое, что  $\langle \mathcal{F}(S), \square_\xi^s k(\xi - z) \rangle$  существует при всех  $s \geq s_0$ , является аналитической функцией при  $z \in T^+ \cup T^-$  и дает представление  $\square^s \mathcal{F}(S)$ . Здесь  $\square_\xi = \partial^2 / \partial \xi_0^2 - \partial^2 / \partial \xi_1^2 - \dots - \partial^2 / \partial \xi_n^2$ , а  $\square^s$  есть  $\square$ , примененное  $s$  раз (Владимиров [15], Бремерман [5]).

Если дополнение носителя  $\mathcal{F}(S)$  не пусто, то любые две функции Уайтмана являются аналитическими продолжениями друг друга в силу теоремы об „острие клина“. Ее можно сформулировать так:

<sup>1)</sup> Кроме того, нужно еще доказать, что  $F$  можно выбрать с носителем в замыкании светового конуса. По этому поводу см. теорему 1 в работе В. С. Владимира „Задача линейного сопряжения голоморфных функций многих комплексных переменных“, Изв. АН СССР, сер. матем., 29 (1965), 807—834. — Прим. ред.

**Теорема 1.** Пусть  $f_+, f_-$  — функции, аналитические соответственно в  $T^+$ ,  $T^-$ , и граничные значения  $f_+$  и  $f_-$  при  $y \rightarrow 0$ ,  $|y_1, \dots, y_n| \leq \lambda |y_0|$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , совпадают при  $x \in D \subset E^{n+1}$ . Тогда  $f_+$  и  $f_-$  являются аналитическими продолжениями одна другой, и эта функция будет аналитической в окрестности (относительно  $C^{n+1}$ )  $N(D)$  области  $D$  (Браудер [7], Торнхейв [23], Бремерман, Эме, Тейлор [6]<sup>1</sup>).

Область  $T^+ \cup T^- \cup N(D)$ , вообще говоря, не является областью голоморфности. Оболочка голоморфности  $T^+ \cup T^- \cup N(D)$  пересекает вещественное пространство  $E^{n+1}$  в общем случае по области  $E(D)$ , большей чем  $D$ .

Оболочку  $E(D)$  можно построить с помощью следующей теоремы о непрерывности.

**Теорема 2.** Пусть  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$  — две точки в  $D$ . Если  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$  могут быть соединены кривой  $x = x(t)$  в  $D$ , такой, что прямолинейный сегмент  $x^{(1)}x(t)$  остается в конусе  $C^+ \cup \{0\} + x(t)$ , когда  $x(t)$  пробегает кривую от  $x^{(1)}$  до  $x^{(2)}$  (включительно), то и весь двойной конус  $(C^+ + x^{(2)}) \cap (C^- + x^{(1)})$  принадлежит  $E(D)$ <sup>2</sup>.

Процесс присоединения точек можно повторять. Таким образом получается оболочка, которая не является выпуклой в обычном смысле слова, но, по терминологии Владимирова [15], [22], она *выпукла относительно времени-подобных кривых*.

Эти результаты можно обобщить на любые выпуклые конусы. Соответствующие трубчатые области тогда надо брать относительно сопряженных конусов, при этом прямолинейный сегмент  $x^{(1)}x(t)$  „времени-подобной“ допустимой кривой должен оставаться в *сопряженном конусе*.

Для любых  $\mathcal{F}(S)$ ,  $S \in (\mathbb{S}'(\bar{C}))$  существуют функции Уайтмана, которые на бесконечности ведут себя как полиномы, а величина  $[(z - x_0)^2]^m f(z)$  стремится к нулю,

<sup>1</sup>) См. также примечание на стр. 232.—*Прим. ред.*

<sup>2</sup>) Исправлена неточность, допущенная в оригиналe.—*Прим. ред.*

когда  $z \rightarrow x_0$ , причем  $y \rightarrow 0$ , оставаясь в световом конусе, а число  $t$  достаточно велико.

Распределения с  $f_- = 0$  образуют алгебру, которую мы снова обозначим через  $K^+$ , и все сказанное в § 2 переносится на этот случай почти дословно. Можно определить также произведения распределений аналогично тому, как это сделано в § 3. Получаемая таким образом алгебра изучена Владимировым [15], [16].

Теорию можно обобщить, переходя от конусов к симметрическим областям. Боннер [2] дал свои интегральные представления также и для них.

**6. Произведения распределений, используемые в квантовой теории поля:** До сих пор были определены произведения распределений либо для  $K^+$ , либо для  $K^-$ .

Произведения распределений, появляющиеся в квантовой теории поля, к сожалению, не всегда принадлежат  $K^+$ ,  $K^-$ , однако от них требуется, чтобы они принадлежали довольно специальному подклассу ( $\mathcal{S}'$ ) — классу преобразований Фурье некоторых рациональных функций<sup>1)</sup>.

Для функций класса  $L_2$  мы имеем тождество

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)),$$

где  $f * g$  обозначает свертку,  $\mathcal{F}$  — преобразование Планшереля — Фурье, а  $\mathcal{F}^{-1}$  — обратное преобразование Планшереля — Фурье. Здесь  $\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \in L_2$ , так что  $\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \in L_1$ . В том случае, когда  $\mathcal{F}(f)$  и  $\mathcal{F}(g)$  являются распределениями, можно было бы попытаться определить их произведение с помощью  $\mathcal{F}(f * g)$ . Но это все равно, что одеть левый ботинок на правую ногу. Вообще определить свертку  $f * g$  так же трудно, как и произведение  $\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ . Фактически в [5] свертка распределений определяется с помощью  $\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$  при условии, что либо один из этих мно-

<sup>1)</sup> В такой постановке задачи игнорируются фундаментальные физические требования: причинность, унитарность, лоренци-инвариантность. См. Б. М. Степанов „О построении  $S$ -матрицы по теории возмущений“, Изв. АН СССР, 29 (1965), 1037—1054.—Прим. перев.

жителей является мультиликатором для другого, либо и  $\mathcal{F}(f)$ , и  $\mathcal{F}(g)$  принадлежат  $K^+$  или  $K^-$ .

Интегралы Фейнмана, фигурирующие в разложении  $S$ -матрицы квантовой электродинамики по теории возмущений, вообще расходятся. Правда, расходимость эта „самое большое второго порядка“ в силу теоремы о подсчете степеней (см. Дайсон [18], Боголюбов и Ширков [3]). Если продифференцировать под знаком интеграла по свободным переменным (импульсам внешних линий), то во втором и третьем порядках интегралы Фейнмана будут сходиться.

Это обстоятельство в случае свертки (и аналогично для других интегралов Фейнмана) можно интерпретировать по-разному. Интеграл для свертки определяется на подпространстве  $(\mathbb{S})$ , состоящем из всех  $\varphi \in (\mathbb{S})$ , которые являются производными второго порядка от функций из  $(\mathbb{S})$ . Этот метод эквивалентен определению

$$D^p \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)) = \mathcal{F}^{-1}((iz)^p \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)),$$

что равносильно определению произведения  $(iz)^p \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$ , а не  $\mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$ . Это в свою очередь эквивалентно определению  $\mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$  на подпространстве всех функций  $\varphi \in (\mathbb{S})$ , обращающихся в нуль, как  $x^p$  на

$$\{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\} \cup \dots \cup \{x_n = 0\}.$$

*Примеры.*  $\delta \cdot \delta' = \mathcal{F}^{-1}(1) \mathcal{F}^{-1}(it)$ ;  $\mathcal{F}(\delta \cdot \delta')$  соответствует формально расходящейся свертке  $\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot (x - t) dt$ .

Дифференцируя формально дважды по  $x$ , получаем 0. Формально имеем также  $[\mathcal{F}(\delta \cdot \delta')]'' = -\mathcal{F}(\delta [\delta' \cdot t^2])$ . Но  $\delta \cdot [\delta' \cdot t^2] = [t^2 \cdot \delta] \cdot \delta' = 0$ . Поэтому мы интерпретируем  $\mathcal{F}(\delta \cdot \delta')$  как решение уравнения  $[\mathcal{F}(\delta \cdot \delta')]'' = 0$ , так что  $\mathcal{F}(\delta \cdot \delta') = a + b\omega$ , где  $a$  и  $b$  – произвольные постоянные. Отсюда  $\delta \cdot \delta' = c_0 \delta + c_1 \delta'$ , где  $c_0$  и  $c_1$  – произвольные постоянные. Эта произвольная часть соглаивается с произвольной частью произведения, определенного в § 3, но однозначно определяемые части различны!]

Описанный только что метод приводит к произведениям распределений, определенным на подпространстве  $(\mathcal{S})$ , и эти произведения могут быть затем продолжены на все  $(\mathcal{S})$ . Продолжение содержит некоторые произвольные постоянные; их число зависит от размерности остающегося пространства. Это последнее определение произведения распределений, определенных на подпространстве, легло в основу метода, который применил Кёниг [10] для построения своей общей теории. С другой стороны, метод дифференцирования, естественно, приводит к конкретным подпространствам вида  $\{\psi. \psi = x^\mu \phi, \phi \in (\mathcal{S})\}$ . В то же время мы получаем интерпретацию констант как постоянных интегрирования. Де Ягер [9] опубликовал исследования различных методов „регуляризации расходящихся сверточных интегралов“ и показал, что различные методы регуляризации, предложенные Фейнманом, Ахиезером, Паули и Вилларсом, автором и другими, можно интерпретировать совершенно одинаково: определение интегралов Фейнмана на подпространствах, состоящих из производных от функций из  $(\mathcal{S})$ . Продолжение на все пространство  $(\mathcal{S})$  и приводит к появлению произвольных постоянных.

Автор предложил в [4] интерпретировать наличие произвольных постоянных в том смысле, что теоретический аппарат квантовой электродинамики не совсем адекватно описывает природу, ввиду чего значения этих констант должны быть получены из эксперимента.

Бремерман [4] рассмотрел до конца лишь интегралы Фейнмана во втором и третьем порядках.

Дайсон [18], Богоцубов и Парасюк [19] и Хепп [17] показали, что интегралы Фейнмана можно одновременно регуляризовать во всех порядках с помощью „контрчленов“. Хепп описал эти методы как „конструктивную форму теоремы Хана — Банаха“, когда произведения распределений определяются сначала на подпространстве  $(\mathcal{S})$ , а затем продолжаются. Из-за комбинаторной сложности графов Фейнмана высших порядков эти подпространства довольно сложны. По мнению автора, те же результаты можно получить более про-

стым способом, дифференцируя по импульсам внешних линий. (Для сверток этот метод разъяснен выше.) Применительно к фейнмановым интегралам порядка два и три этот метод был проиллюстрирован Бремерманом [5]. Для полного доказательства нужно было бы показать, что таким способом можно сделать сходящимися интегралы Фейнмана во всех порядках.

Еще один способ регуляризации интегралов Фейнмана был предложен Гютtingером [20], [20a].

Тогда как физическая интерпретация расходящихся интегралов Фейнмана все еще является предметом споров, во многих других случаях (например, в случае энергии δ-импульса в теории цепей) появление расходящихся величин можно объяснить тем, что при математическом описании сложная физическая реальность излишне идеализируется (ср. Бремерман [5]).

**7. Произведения распределений и интеграл энтропии в теории информации.** Мы опишем сейчас другую задачу, в которой, появляются, по-видимому, плохо определенные произведения и функции распределений, и предложим способ преодоления трудностей с помощью новой постановки задачи и новой интерпретации входящих в нее величин.

Рассмотрим случайную величину  $x$ , принимающую вещественные значения из интервала  $(-\infty, \infty)$ . Ее функцию распределения вероятностей обозначим через  $\Phi(x)$ , а плотность распределения вероятностей — через  $\Phi'(x) = \phi(x)$ . Энтропия плотности  $\phi(x)$  определяется по Шеннону [13] как

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \ln \phi(x) dx,$$

и интеграл в зависимости от  $\phi(x)$  существует или не существует.

Рассмотрим, например, случайную величину, принимающую значения 1 и 2 с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$ , а все прочие значения — с вероятностью, равной нулю. Тогда  $p_1 + p_2 = 1$ ,  $\Phi(x) = p_1\delta(x-1) + p_2\delta(x-2)$ . Формально

энтропию можно записать как

$$-\int_{-\infty}^{\infty} [p_1 \delta(x-1) + p_2 \delta(x-2)] \ln [p_1 \delta(x-1) + p_2 \delta(x-2)] dx.$$

Здесь выражение  $\ln [p_1 \delta(x-1) + p_2 \delta(x-2)]$  не определено; распределение  $p_1 \delta(x-1) + p_2 \delta(x-2)$  не принадлежит алгебре  $K^+$ , для которой в § 2 был определен  $\ln$ .

Видимо, не имеет смысла определять  $\ln \delta(x)$ :  $\delta \equiv 0$  при  $x \neq 0$ ; следовательно,  $\ln \delta$  должен быть  $\equiv -\infty$  при  $x \neq 0$ . Совсем иначе обстоит дело с  $\delta \ln \delta$ . Можно попытаться применить метод, аналогичный методу регуляризации интегралов Фейнмана. Заменим приближенно  $\Phi(x)$  регуляризованной функцией  $\Phi_n$  и перейдем затем к пределу. В нашем случае  $\Phi_n$  можно интерпретировать как плотность распределения вероятностей случайной величины, принимающей не только значения 1 и 2, но также и другие значения, но с малыми вероятностями. Например, мы можем аппроксимировать  $\delta$ -функции, сосредоточенные в точках 1 и 2, с помощью гауссовых функций:

$$\delta_n(x-1) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-1)^2};$$

$\delta_n(x-2)$  аппроксимируется аналогично. Заметим, что

$$\lim [\delta_n(x-1) \ln (p_1 \delta_n(x-1) + p_2 \delta_n(x-2)) -$$

$$- \delta_n(x-1) \ln p_1 \delta_n(x-1)] = 0.$$

Обозначим через  $H_n$  регуляризованный интеграл энтропии

$$-\int_{-\infty}^{\infty} [p_1 \delta_n(x-1) + p_2 \delta_n(x-2)] \ln (p_1 \delta_n(x-1) + p_2 \delta_n(x-2)) dx.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ H_n + p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2 + p_1 \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x-1) \ln \delta_n(x-1) dx + \right.$$

$$\left. + p_2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x-2) \ln \delta_n(x-2) dx \right] = 0.$$

Замена переменной интегрирования и условие  $p_1 + p_2 = 1$  дают

$$p_1 \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x-1) \ln \delta_n(x-1) dx + \\ + p_2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x-2) \ln \delta_n(x-2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) \ln \delta_n(x) dx.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ H_n + p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) \ln \delta_n(x) dx \right] = 0.$$

Последовательность  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) \ln \delta_n(x) dx$  расходится. Казалось бы, расходящуюся часть можно просто отбросить и определить  $-p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2$  как „конечную часть“ интеграла энтропии, в частности, на том основании, что  $-\sum_{i=1}^2 p_i \ln p_i$  есть энтропия дискретного распределения вероятностей. Действительно, если два „события“ происходят с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$ , то мы можем без ограничения общности описать это с помощью случайной величины, принимающей значения 1 и 2 с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$ . (Вместо 1 и 2 можно взять любую другую пару различных вещественных чисел. В любом случае с помощью замены переменных интегрирования и условия  $p_1 + p_2 = 1$  расходящуюся часть можно привести к виду  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) \ln \delta_n(x) dx$ .)

Можно было бы провести аналогию между этим приемом отбрасывания расходящейся части и методом вычитания из регуляризованного интеграла Фейнмана некоторого расходящегося выражения, выбранного так, чтобы остаток был конечен и согласовывался с экспериментом. Это сделано для случая регуляризаций

Фейнмана и Паули—Вилларса (см. Боголюбов—Ширков [3] и де Ягер [9])<sup>1)</sup>.

В нашем случае, однако, расходящейся части можно дать некую интерпретацию. Когда  $n$  конечно,  $\delta_n(x)$  представляет собой плотность распределения вероятностей случайной величины с нулевым средним значением и средним квадратичным отклонением  $(2\sqrt{n})^{-1}$ . (Напомним, что „нулевое среднее значение“ получено в результате замены переменной интегрирования.) Интеграл энтропии

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) \ln \delta_n(x) dx$$

можно интерпретировать как количество информации (число битов), необходимой для задания вещественного числа в пределах точности (примерно)  $(2\sqrt{n})^{-1}$ . Если  $n$  стремится к бесконечности, то неопределенность стремится к нулю, но количество требуемой информации стремится к бесконечности. Равенство  $\varphi(x) = \delta(x - x_0)$  соответствует случаю, когда случайная переменная принимает с достоверностью значение  $x_0$ . Для записи вещественного числа  $x_0$  с абсолютной точностью на самом деле понадобится бесконечно много битов. Таким образом, расходящийся интеграл энтропии в известном смысле имеет реальное значение и его не надо отбрасывать.

Рассматривая снова случай конечной вероятности, мы замечаем, что наша предыдущая интерпретация была не полной. Мы не наблюдаем случайную величину, которая принимает точные значения, но наблюдаем ее, зная a priori, что она примет одно из конечного числа значений. Это априорное знание можно описать как распределение вероятностей. Это же соображение применимо и в непрерывном случае. Случайная величина наблюдается. До наблюдения задано распределение вероятностей (составляющее априорное

<sup>1)</sup> Корректная формулировка метода вычитания дается в теории R-операции; см. Н. Н. Боголюбов и О. С. Парасюк [19]. — Прим. перев.

знание, скажем, относительно пределов изменения величины). После измерения (или наблюдения) мы имеем новое распределение вероятностей. Неточность измерения находит свое отражение в результирующем распределении.

Таким образом, вместо того, чтобы иметь дело с информацией (энтропией), соответствующей распределению вероятностей, нам следовало бы иметь дело с приростом информации, задаваемой с помощью априорного распределения вероятностей и ненадежности.

Следуя аналогичным соображениям Шеннона [13], мы определяем прирост информации (называемый также „взаимной информацией“) как

$$G = H(x) - H_y(x),$$

где  $H(x)$  — энтропия априорного распределения вероятностей случайной величины  $x$ ,  $y$  — наблюданное значение и  $H_y(x)$  — ненадежность:

$$H_y(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(y) \int_{-\infty}^{\infty} p_y(x) \ln p_y(x) dx dy$$

( $p_y(x)$  — плотность распределения условной вероятности того, что произойдет событие  $x$ , если наблюдалось  $y$ ).

Замечая, что  $p(y)p_y(x) = p(x, y)$ , где  $p(x, y)$  — плотность распределения вероятностей совместного события  $(x, y)$ , мы можем написать

$$H_y(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \ln \frac{p(x, y)}{p(y)} dx dy.$$

Замечая, что  $\int \int p(x, y) \ln q(x) dx dy = \int q(x) \ln q(x) dx$ , где  $q(x)$  — плотность вероятности  $x$ , мы можем написать

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) [\ln p(x, y) - \ln (q(x)p(y))] dx dy.$$

Отметим, что  $G = H(x) + H(y) - H(x, y)$ , где  $H(x, y)$  — энтропия совместного события.

Если распределения вероятностей величин  $x$  и  $y$  независимы, то  $H(x, y) = H(x) + H(y)$  и  $G = 0$ . Действительно, если  $y$  независимо от  $x$ , то его измерение ничего не говорит о значении  $x$ . Заметим, что  $G$  не зависит от изменений шкалы (линейных преобразований величины  $x$ ), тогда как  $H(x)$  зависит.

Может оказаться, что  $G$  существует, тогда как индивидуальные энтропии  $H(x)$  и  $H_y(x)$  бесконечны. Рассмотрим случай  $p(x) = p_1\delta(x-1) + p_2\delta(x-2)$ , который мы обсуждали выше.

$$H(x) = - \sum_{i=1}^2 p_i \ln p_i$$

и

$$H_y(x) = - \sum_{i=1}^2 p_i \sum_{j=1}^2 p_i(j) \ln p_i(j) = H(x, y) - H(y)$$

обозначают энтропию и ненадежность, как они определены для конечной вероятности. Здесь  $p_j$  — вероятность того, что  $y$  принимает значение  $j$ ;  $p_i(j)$  — вероятность того, что  $x$  принимает значение  $i$ ;  $p_i(j)$  — условная вероятность того, что  $x$  принимает значение  $j$ , когда  $y$  приняло значение  $i$ ;  $p_{ij}$  — вероятность совместного события  $x=i$  и  $y=j$ .

Регуляризую, получаем для  $G$ :

$$\begin{aligned} G = & - \int \sum \sum p_{ij} \delta_n(x-i) \delta_n(y-j) \times \\ & \times \left[ \ln \sum \sum p_{ij} \delta_n(x-i) \delta_n(y-j) - \right. \\ & \left. - \ln \sum q_i \delta_n(x-i) - \ln \sum p_i \delta_n(y-j) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Рассуждая, как выше, мы приводим интеграл к виду

$$-\int \int \sum \sum p_{ij} \delta_n(x-i) \delta_n(y-j) [\ln p_{ij} \delta_n(x-i) \delta_n(y-j) -$$

$$- \ln q_i \delta_n(x-i) - \ln p_j \delta_n(y-j)] dx dy.$$

Этот интеграл разлагается в сумму

$$-H(x, y) + H(x) + H(y) = H(x) - H_y(x)$$

и

$$\int \int \sum \sum p_{ij} \delta_n(x-i) \delta_n(y-j) [\ln \delta_n(x-i) \delta_n(y-j) -$$

$$- \ln \delta_n(x-i) - \ln \delta_n(y-j)] dx dy = 0.$$

Таким образом расходящиеся части сокращаются. Заметим, что то же вычисление применимо в случае любого конечного числа  $m$  событий с вероятностями  $p_1, \dots, p_m$ , а также в случае высших размерностей.

Если бы мы применили подобное соображение к интегралам Фейнмана, то можно было бы попытаться интерпретировать регуляризацию как вычитание априорной информации.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бельтрами и Волерс (Beltrami E J, Wohlers M R), *Distributions and boundary values of analytic functions*, Academic Press, New York and London, 1966.
- [2] Боннер (Boschneig S), Group invariance of Cauchy's formula in several variables, *Ann of Math*, 45 (1944), 686—707.
- [3] Боголюбов Н Н и Ширков Д В, *Введение в теорию квантованных полей*, М—Л, 1957.
- [4] Бремерман (Bremmermann J H), On finite renormalisation constants and the multiplication of causal functions in perturbation theory, ONR Report, Berkeley, 1959.
- [5] —, Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, см стр 7—244 настоящей книги.
- [6] Бремерман, Эме и Тейлор (Bremmermann H J, Oehme R, Taylor J G), Proof of dispersion relations in quantized field theory, *Phys Rev*, (2), 109 (1958), 2178—2190.
- [7] Браудер (Browder F), On the edge of the wedge theorem, *Canad J Math*, 15 (1963), 125—131.
- [8] Карлеман (Carleman T), *L'integrale de Fourier et questions qui s'y rattachent*, Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1944.
- [9] де Ягер (de Jager E M), Divergent convolution integrals in electrodynamics, ONR Technical Report, Department of Mathematics, Berkeley, 1963.
- [10] Кониг (Konig H), Multiplikationstheorie der verallgemeinerten Distributionen, *Bayer. Akad. Wiss. Math-Nat.*, Kl. Abh. (N F), № 82 (1957), 80.
- [11] Робертс и Кауфман (Roberts G E, Kaufman H), *Table of Laplace transforms*, Saunders, Philadelphia, 1966.
- [12] Шварц Л (Schwartz L), *Theorie des distributions*, vol I, II Hermann, Paris, 1957, 1959.
- [13] Шеннон (Shannon C E), Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, М, 1963, 243—332.
- [14] Стэпп (Stapp H), Notes, Theoretical group, Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley, 1966. (Also. University of California, Radiation Laboratory, Rep. 16816, Appendix C.)

- [15] Владими́ров В. С., О построении оболочек голоморфности для областей специального вида и их применения, Труды матем. ин-та им. В. А Стеклова АН СССР, 60 (1961), 101—144.
- [16] Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», М., 1964
- [17] Хе́лп (Нэрр К.), Proof of Bogoliubov-Parasiuk theorem on renormalization, *Comm. Math. Physics*, 2 (1966), 301—326.
- [18] Да́йсон (Dyson F. J.), S-matrix in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.*, 75 (1949), 1736—1745
- [19] Бого́любов Н. Н. и Па́расюк О. С., Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder, *Acta Math.*, 97 (1957), 227—266.
- [20] Гю́тtingер (Güttlinger W.), Generalized functions and dispersion relations in physics, *Fortschr. Physik*, to appear.
- [20a] —, Generalized functions in elementary particle physics and passive system theory. Recent trends and problems, *SIAM Journ. of Appl. Math.*, 15 (1967), 964—1000.
- [21] Итанио (Itano M.), On the multiplicative products of distributions, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A-I Math., 29 (1965), 51—74.
- [22] Владими́ров В. С., О построении оболочек голоморфности для областей специального вида, *ДАН СССР*, 134 (1960), 251—254.
- [23] Торнхе́йв (Tornehave H.), On analytic functions of several variables, Analytic continuation by Schwartz's reflexion method, *Mat Tidsskr.*, B (1952), 29—37.
- [24] Райна́к (Rajnak S.), private communication.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- А**бсорбтивная часть 186  
Адмитанс 179  
Аналитическая функция 18  
— — многих переменных 199  
Аналитическое представление 20  
— — распределений 76  
— продолжение 200  
Асимптотическая грань 80
- Б**аза окрестностей 61  
— топологии 60
- В**ладимирова представление 230  
Воспроизводящее ядро 110
- Гармоническая функция 69  
 $n$ -гармоническая функция 200  
Гармоническое представление 70  
Гильберта преобразование 105  
Главное значение 95  
Грина функция 152
- Дираха  $\delta$ -функция 23  
Дирихле задача 70  
Дисперсивная часть 186  
Дисперсионное соотношение 187  
— с вычитаниями 188
- Единичный импульс 176  
Емкость 172
- Импеданс 179  
Индуктивность 172  
Интегральное уравнение типа свертки 154  
Интегрирование вокруг полюса 96
- Карлемана-Фурье преобразование 246  
Кирхгофа законы 172  
Класс функций ( $C^k$ ) 24  
Компактный носитель 25
- Конус будущего, прошлого 225  
Коши представление 66  
— ядро 66  
Кусочная непрерывность 108
- Лапласа преобразование 120  
Лейбница формула 56  
Линейный фильтр 181  
Локализация распределений 47  
Локальная интегрируемость 16  
Лорана разложение 68
- Миттаг-Леффлера метод 78  
Моменты распределения вероятностей 197  
Мультиплликатор 27
- Непрерывное отображение 61  
Норма 50  
Носитель распределения 43  
— функции 23
- Область 199  
Обобщенная функция 23  
Окрестность 54, 60  
Основная функция 15  
Открытое множество 60
- Парсеваля формула 115  
Первообразная распределения 28, 31  
Планшереля теорема 114, 168  
Плотность вероятности 194  
Покрытие 39  
Порядок распределения 50  
— сходимости 24  
Предел в среднем 113  
Продолжение распределений 46, 82  
Производная обобщенной функции 18  
— распределения 28  
— — дробного порядка 136  
Пространства ( $\mathcal{D}$ ) и ( $\mathcal{D}'$ ) 25  
— ( $\mathcal{D}_k$ ) и ( $\mathcal{D}'_k$ ) 26

- $(\mathcal{D}^m)$  и  $(\mathcal{D}_k^m)$  49  
 —  $(\mathcal{E})$  и  $(\mathcal{E}')$  27  
 —  $(\mathcal{O}_a)$  и  $(\mathcal{O}'_a)$  81  
 —  $(\mathcal{O}_{a_1}, \dots, a_n)$  и  $(\mathcal{O}'_{a_1}, \dots, a_n)$  205  
 —  $(\mathcal{S})$  и  $(\mathcal{S}')$  122  
 —  $(\mathcal{Z})$  и  $(\mathcal{Z}')$  136  
**Прямое произведение** 61
- Равенство почти всюду** 113  
**Равномерная сходимость** 24  
**Разложение единицы** 39  
**Распределение** 15  
 — вероятностей 194  
 — медленного роста 123  
 — с компактным носителем 51  
 — с точечным носителем 57  
 —  $\delta_+$  89  
 —  $P(t^{-n})$  94  
**Регуляризация** 35  
**Рисса теорема** 58  
**Рисса—Фишера теорема** 166
- Свертка** \* 143  
 аналитическое представление 146  
 ассоциативность 146  
 преобразование Фурье 144  
 распределений 150
- Свертка**  $\otimes$  156  
**Световой конус** 225  
**Сопротивление** 172  
**Союзского формулы** 97  
**Спектр случайной величины** 195  
**Существенная граница** 201  
**Сходимость** 22  
 ⇝ обобщенных функций 33
- Теорема об острье клина** 254  
**Топологическое линейное пространство** 61  
**Топология** 60  
 — в  $(\mathcal{D})$  и  $(\mathcal{E})$  62, 63  
**Труба будущего, прошлого** 225
- Уайтмана функция** 253  
**Умножение распределений** 249
- Фейнмана интегралы** 257  
**Фундаментальное решение** 152  
**Функционал** 14, 22  
**Фукция** 25  
 — медленного роста 119  
**Фурье—Лапласа преобразование** 246  
**Фурье преобразование** 114
- Характеристическая функция** 38  
 — — для плотности вероятности 196  
**Хевисайда функция** 9
- Э. д. с.** 172  
**Энтропия** 259
- Ядро Сереб** 112

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Функция Хевисайда и задача о ее производной . . . . .	9
1.2. Функция Хевисайда как идеализация . . . . .	11
1.3. Теория Темпля и Лайтчилла . . . . .	13
1.4. Обобщенные функции . . . . .	14
1.5. Распределения Шварца . . . . .	15
1.6. Производные обобщенных функций . . . . .	16
1.7. Особенности . . . . .	18
1.8. Представления функций вещественного переменного с помощью аналитических функций комплексного переменного . . . . .	19
1.9. Представление распределений . . . . .	20

### **Часть I. Теория Шварца**

<b>Глава 2. Распределения Шварца . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1. Обобщенные функции . . . . .	22
2.2. Классы функций ( $C^k$ ) и ( $C^\infty$ ), сходимость и норма .	23
2.3. Функции класса ( $C^\infty$ ) с компактным носителем .	25
2.4. Пространства ( $\mathcal{D}_K$ ) и ( $\mathcal{D}'_K$ ) . . . . .	26
2.5. Пространства ( $\mathcal{D}$ ) и ( $\mathcal{D}'$ ), распределения Шварца	26
2.6. Пространства ( $\mathcal{E}$ ) и ( $\mathcal{E}'$ ) . . . . .	27
2.7. Мультипликаторы . . . . .	27
2.8. Дифференирование распределений . . . . .	28
2.9. Первообразные распределений. Случай $n = 1$ . . .	28
2.10. Первообразные высших порядков . . . . .	30
2.11. Первообразные распределений. Случай $n > 1$ . .	31
2.12. Сходимость обобщенных функций . . . . .	33
<b>Глава 3. Регуляризация, локализация и носители распределений</b>	<b>35</b>
3.1. Регуляризация функций . . . . .	35
3.2. Приближение функций с помощью ее регуляризации . . . . .	36
3.3. Регуляризация характеристических функций . . .	38
3.4. Разложение единицы . . . . .	39

---

3.5. Покрытие и разложение единицы для $E^n$ . . . . .	39
3.6. Существование разложений единицы, соответствующих конечным покрытиям компактных множеств . . . . .	40
3.7. Обращение в нуль распределения в открытом множестве . . . . .	42
3.8. Носитель распределений . . . . .	43
3.9. Характеризация $(\mathcal{E}')$ . . . . .	44
3.10. $(\mathcal{D})$ плотно в $(\mathcal{E})$ . . . . .	45
3.11. Изменение основных функций вне носителя распределения . . . . .	46
3.12 Продолжение распределений с компактным носителем из $(\mathcal{D})$ на $(\mathcal{E})$ . . . . .	46
3.13. Локализация распределений . . . . .	47
 Глава 4. Распределения конечного порядка . . . . .	49
4.1. Пространства $(\mathcal{D}_K^m)$ и $(\mathcal{D}_K'^m)$ . . . . .	49
4.2. Пространства $(\mathcal{D}^m)$ и $(\mathcal{D}'^m)$ . Распределения порядка $m$ . . . . .	49
4.3. Норма в пространстве $(\mathcal{D}_K^m)$ . . . . .	50
4.4. Распределения с компактными носителями имеют конечный порядок . . . . .	51
4.5. Обращение в нуль распределений конечного порядка . . . . .	54
4.6. Распределение с точечным носителем . . . . .	57
4.7. Первообразные распределений конечного порядка	58
 Добавление I . . . . .	60
A.1.1. Топологические пространства, сходимость в топологии . . . . .	60
A.1.2. Топологические линейные пространства . . . . .	61
A.1.3. Топология в $(\mathcal{E})$ . . . . .	62
A.1.4. Топология в $(\mathcal{D})$ . . . . .	63

## Часть II. Связь с аналитическими функциями

 Глава 5. Представление распределений с помощью аналитических функций . . . . .	66
5.1. Представление Коши распределений из $(\mathcal{E}')$ . . . . .	66
5.2. Обращение функции $\tilde{T}(z)$ в нуль на бесконечности. Разложение Лорана для $\tilde{T}(z)$ . . . . .	68
5.3. Границные значения гармонических функций . . . . .	69
5.4. Гармоническое представление функций класса $(C^m)$ . . . . .	70
5.5. Теорема о представлении функций . . . . .	71

5.6. Теорема о представлении распределений из $(\mathcal{E}')$	73
5.7. Распределения как граничные значения гармонических функций . . . . .	74
5.8. Неединственность аналитического представления . . . . .	75
5.9. Аналитическое представление распределений из $(\mathcal{D}')$ . . . . .	76
<b>Глава 6. Промежуточные пространства <math>(\mathcal{O}_a)</math> и <math>(\mathcal{O}'_a)</math></b> . . . . .	80
6.1. Асимптотические грани . . . . .	80
6.2. Пространства $(\mathcal{O}_a)$ и $(\mathcal{O}'_a)$ . . . . .	81
6.3. Производные в $(\mathcal{O}_a)$ . . . . .	81
6.4. Продолжение распределений из $(\mathcal{D}')$ на $(\mathcal{O}'_a)$ . . . . .	82
6.5. Теорема представления для $(\mathcal{O}'_{-1})$ , $n = 1$ . . . . .	84
6.6. Представление распределений из $(\mathcal{O}'_a)$ при произвольном $a$ . . . . .	85
6.7. Представление распределений из $(\mathcal{O}'_a)$ с помощью деления на полином . . . . .	88
<b>Глава 7. Примеры аналитических представлений</b> . . . . .	89
7.1. $\delta(z)$ , представление Коши $\delta$ -функции . . . . .	89
7.2. Распределение $\delta_+$ . . . . .	89
7.3. Существование $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \hat{f}(x + i\epsilon)$ . . . . .	93
7.4. Аналитическое представление $\delta_+$ . . . . .	93
7.5. Главная часть $P(t^{-n})$ . . . . .	94
7.6. Эквивалентность $P(t^{-1})$ и главного значения Коши . . . . .	95
7.7. Интегрирование вокруг полюса . . . . .	96
7.8. Тождества, связывающие $\delta_+$ , $P(t^{-n})$ , $\delta$ и $\delta_-$ . . . . .	96
7.9. $\delta_+$ , $\delta_-$ и $P(t^{-1})$ как обобщенные функции в $(\mathcal{D}'^1)$ . . . . .	97
7.10. Произведение $P(t^{-1})$ на функцию класса $(C^1)$ . . . . .	98
7.11. Аналитическое представление полиномов . . . . .	98
7.12. Аналитическое представление функции Хевисайда $H(t)$ . . . . .	99
7.13. Аналитическое представление $\varepsilon(t)$ и $t^k H(t)$ , $k \geq 0$ . . . . .	100
7.14. Распределение $\int_{-\infty}^{\infty} t^a \Phi(t) dt$ , $a$ вещественно . . . . .	101
7.15. Аналитическое представление функций из $L_2$ . . . . .	103
7.16. Аналитическое представление $e^{-t^2}$ . . . . .	103
7.17. Пример аналитической функции, которая не дает представления распределения . . . . .	103
7.18. Преобразование Гильберта . . . . .	105

---

Добавление 2 . . . . .	107
A 2.1. Вычисление интеграла . . . . .	107
A 2.2. Вычисление предела . . . . .	107
A.2.3. Обращение предела в нуль . . . . .	108
A 2.4. Границные значения функции $f^*(x + ie)$ в точках непрерывности . . . . .	108
A.2.5. Границные значения $f^*(x + ie)$ ; общий случай . . . . .	109
A.2.6. Воспроизводящие ядра . . . . .	110

### Часть III. Преобразования Фурье, свертка

Глава 8. Преобразования Фурье . . . . .	113
8.1. Обозначения . . . . .	113
8.2. Преобразование Фурье функций класса $L_1$ . . . . .	113
8.3. Преобразование Фурье функций класса $L_2$ . . . . .	114
8.4. Формула Парсеваля . . . . .	115
8.5. Основания для обобщения определения . . . . .	115
8.6. Представление Коши преобразований Фурье функций классов $L_1$ и $L_2$ . . . . .	116
8.7. Преобразование Фурье $H(t)e^{itz}$ и $(\omega - z)^{-1}$ . . . . .	118
8.8. Распределения медленного роста. Обобщенное преобразование Фурье . . . . .	119
8.9. Теорема об обращении $\hat{\mathcal{F}}(f, z)$ . . . . .	120
8.10. Связь с преобразованием Лапласа . . . . .	120
8.11. Преобразование Фурье функций из $(\mathcal{D})$ . . . . .	121
8.12. Пространство $(S)$ быстро убывающих функций . . . . .	122
8.13. Преобразование Фурье функций из $(S)$ . . . . .	123
8.14. Распределения медленного роста Пространство $(S')$ . . . . .	123
8.15. Преобразование Фурье распределений медленного роста . . . . .	124
8.16. Преобразование $\hat{\mathcal{F}}$ функций медленного роста . . . . .	124
8.17. Обратное преобразование Фурье . . . . .	125
8.18. Производные в $(S')$ . . . . .	126
8.19. Первообразные преобразований Фурье функций класса $(C^1)$ . . . . .	127
8.20. Производные функций медленного роста . . . . .	127
8.21. Распределения медленного роста как производные конечного порядка от функций медленного роста . . . . .	127
8.22. Обобщенное преобразование Фурье распределений медленного роста . . . . .	128
8.23. Эквивалентность $\langle T_\omega, e^{i\omega t} \rangle$ и $\mathcal{F}(T)$ для $T \in (S')$ . . . . .	129
8.24. Аналитичность $\langle T_\omega, e^{i\omega t} \rangle$ для $T \in (S')$ . . . . .	130
8.25. Примеры . . . . .	131
8.26. $\hat{\mathcal{F}}(t^\alpha, z)$ , $\alpha$ — вещественное. Дифференцирование и интегрирование дробного порядка . . . . .	135
8.27. Пространство $(S)$ . . . . .	136

8.28. Преобразование Фурье функций из $(\mathcal{D})$ и $(\mathcal{Z})$ . . . . .	137
8.29. Пространство $(\mathcal{Z}')$ . Преобразование Фурье распределений из $(\mathcal{D}')$ . . . . .	139
8.30. Преобразование Фурье обобщенных функций из $(\mathcal{Z}')$ . . . . .	140
8.31. Теорема об обращении преобразования Фурье обобщенных функций из $(\mathcal{D}')$ и $(\mathcal{Z}')$ . . . . .	140
8.32. Мультиликаторы . . . . .	140
8.33. Преобразование Фурье распределений с компактным носителем . . . . .	141
<b>Глава 9. Свертка . . . . .</b>	<b>143</b>
9.1. Свертка функций из $L_1$ и $L_2$ . . . . .	143
9.2. Преобразование Фурье свертки функций из $L_1$ . . . . .	144
9.3. Преобразование Фурье сверток функций из $L_2$ . . . . .	145
9.4. Ассоциативность свертки функций из $L_1$ . . . . .	146
9.5. Аналитическое представление свертки функций из $L_1$ . . . . .	146
9.6. Примеры . . . . .	147
9.7. Свертка распределений с функциями класса $(C^\infty)$ . . . . .	148
9.8. Носитель и классификация сверток $T * \Phi$ для $T \in (\mathcal{E}')$ . . . . .	149
9.9. Преобразование Фурье свертки $T * \Phi$ для $T \in (\mathcal{E}')$ , $\Phi \in (\mathcal{S})$ . . . . .	149
9.10. Свертка распределений . . . . .	150
9.11. Примеры . . . . .	151
9.12. Применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами . . . . .	152
9.13. Интегральные уравнения типа свертки . . . . .	154
9.14. Пример . . . . .	155
9.15. Свертка вида $\int_0^t g(t-x)f(x)dx$ . . . . .	156
9.16. Операционное исчисление . . . . .	157
9.17. Обыкновенные дифференциальные уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами . . . . .	158
<b>Добавление 3 . . . . .</b>	<b>161</b>
A.3.1. Обращение преобразования Фурье для непрерывных функций из $L_1$ . . . . .	161
A.3.2. Единственность почти всюду граничных значений гармонических представлений . . . . .	162
A.3.3. Обращение преобразования Фурье для функций из $L_1$ . Общий случай . . . . .	163
A.3.4. Преобразование Фурье функций класса $(C^m)$ с компактным носителем . . . . .	163
A.3.5. Сохранение нормы в $L_2$ . Специальный случай . . . . .	164

A.3.6. Приближение функций из $L_2$ функциями класса $(C^\infty)$ . . . . .	165
A.3.7. Полнота $L_2$ . . . . .	166
A.3.8. Норма преобразования Плаишереля . . . . .	166
A.3.9. Теорема Планшереля . . . . .	168
A.3.10. Формула Парсеваля . . . . .	168
A.3.11. Каждое распределение в $(\mathcal{S}')$ является производной конечного порядка непрерывной функции . . . . .	170
A.3.12. Каждое распределение в $(\mathcal{S}')$ является производной конечного порядка функции медленного роста . . . . .	171
<b>Часть IV. Приложения</b>	
Глава 10. Электрические цепи . . . . .	172
10.1. Емкость, сопротивление и индуктивность. Законы Кирхгофа . . . . .	172
10.2. Пример . . . . .	173
10.3. Произвольная внешняя э. д. с. . . . .	176
10.4. Многоконтурные цепи. Комплексный импеданс .	177
10.5. Четырехполюсники . . . . .	179
10.6. Линейные фильтры . . . . .	181
Глава 11. Дисперсионные соотношения. Умножение распределений . . . . .	186
11.1. Абсорбтивная и дисперсивная части . . . . .	186
11.2. Дисперсионное соотношение . . . . .	186
11.3. Дисперсионное соотношение с вычитаниями .	188
11.4. Диссипация энергии и проблема умножения распределений . . . . .	190
11.5. Интерпретация примера . . . . .	192
11.6. Связь с квантовой теорией поля . . . . .	192
Глава 12. $\delta$ -функция и обобщенное преобразование Фурье в теории вероятностей и статистике . . . . .	194
12.1. Распределение вероятностей . . . . .	194
12.2. Разрывное распределение вероятностей . . . . .	194
12.3. Дискретный случай . . . . .	195
12.4. Спектр . . . . .	195
12.5. Характеристические функции . . . . .	196
12.6. Моменты . . . . .	197
12.7. Преобразование Фурье распределений вероятностей . . . . .	197
12.8. Примеры . . . . .	198
<b>Часть V. Аналитическое представление и преобразования Фурье многих переменных</b>	
Глава 13. Аналитическое представление. Случай нескольких переменных . . . . .	199

13.1.	Аналитические функции многих комплексных переменных . . . . .	199
13.2.	$n$ -гармонические функции . . . . .	200
13.3.	Функции на $E^n$ как граничные значения $n$ -гармонических функций . . . . .	201
13.4.	$n$ -гармоническое продолжение равномерно непрерывных функций . . . . .	203
13.5.	Пространства $(\mathcal{O}_{a_1}, \dots, a_n)$ и $(\mathcal{O}'_{a_1}, \dots, a_n)$ . . . . .	205
13.6.	$n$ -гармоническое продолжение функций из $(\mathcal{O}_0)$ . . . . .	206
13.7.	Теорема о представлении для распределений из $(\mathcal{O}'_0)$ . . . . .	206
13.8.	Представление аналитическими функциями . . . . .	207
13.9.	Пространства $(\mathfrak{F})$ и $(\mathfrak{F}')$ . . . . .	209
13.10.	Представление распределений из $(\mathfrak{F}')$ . . . . .	209
<b>Глава 14. Преобразования Фурье функций многих переменных</b>		212
14.1.	Преобразование Фурье функций из $L_1$ . . . . .	212
14.2.	Преобразование Фурье функций из $(\mathfrak{F})$ . . . . .	213
14.3.	Обратное преобразование Фурье функций из $L_1$ и $(\mathfrak{F})$ . . . . .	213
14.4.	Свертка функций из $L_1$ . . . . .	214
14.5.	Формула Парсеваля . . . . .	214
14.6.	Преобразование Фурье распределений из $(\mathfrak{F}')$ . . . . .	215
14.7.	Функции медленного роста . . . . .	216
14.8.	Обобщенные преобразования Фурье . . . . .	216
14.9.	Эквивалентность обобщенного преобразования Фурье и аналитического представления обычного преобразования Фурье . . . . .	217
14.10.	Пространство $(\mathfrak{F})$ . . . . .	218
14.11.	Преобразования Фурье функций из $(\mathcal{D})$ и $(\mathfrak{Z})$ . . . . .	219
14.12.	Пространство $(\mathfrak{Z}')$ . Преобразование Фурье распределений из $(\mathcal{D}')$ . . . . .	221
14.13.	Преобразование Фурье обобщенных функций из $(\mathfrak{Z}')$ . . . . .	221
14.14.	Теорема обращения для преобразований Фурье элементов из $(\mathcal{D}')$ и $(\mathfrak{Z}')$ . . . . .	222
14.15.	Мультиликаторы . . . . .	222
14.16.	Преобразование Фурье распределений с компактным носителем . . . . .	222
14.17.	Свертка распределений . . . . .	223
14.18.	Многократная свертка . . . . .	224
<b>Глава 15. Аналитическое представление преобразований Фурье распределений с носителем в световом конусе</b>		225
15.1.	Световой конус, трубы будущего и прошлого . . . . .	225
15.2.	Преобразование Фурье распределений с носителем в конусе будущего . . . . .	225
15.3.	Вычисление ядра . . . . .	226

---

15.4. Представление Владимирова для $\square_z^s \langle T_t, a(t) e^{i(t, z)} \rangle$	230
15.5. Преобразование Фурье распределений с носите- лем в световом конусе . . . . .	231
Таблица аналитических представлений и пре- образований Фурье . . . . .	234
Библиография . . . . .	238
Дополнение. Несколько замечаний об аналитических предста- влениях и о произведениях распределений . . . . .	245
Литература . . . . .	265
Предметный указатель . . . . .	267

Г. Бремерман

**РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, КОМПЛЕКСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ  
И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ**

Редактор Д. Ф. Борисова

Художник Л. Г. Ларский

Художественный редактор В. И. Шаповалов Технические редакторы Т. Чечик,  
И. А. Турсукова Корректор И. С. Цветкова

Сдано в производство 13/VI 1968 г. Подписано к печати 13/XI 1968 г.  
Бумага № 1 84×108<sup>1/32</sup> = 4,31 бум. л. Усл. 14,49 печ. л. Уч.-изд. л. 12,08  
Изд. № 1/4773 Цена 1 руб 05 коп. Зак. 1306.

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“  
Москва 1-й Рижский пер., 2

---

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.