

Э. П. БУРШТЕЙН, Г. В. ВОСКРЕСЕНСКИЙ

**Линейные ускорители  
электронов  
с интенсивными  
пучками**

**Э. Л. БУРШТЕЙН, Г. В. ВОСКРЕСЕНСКИЙ**

**ЛИНЕЙНЫЕ УСКОРИТЕЛИ  
ЭЛЕКТРОНОВ  
С ИНТЕНСИВНЫМИ  
ПУЧКАМИ**

**[ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ]**



**Атомиздат Москва 1970**

Бурштейн Э. Л., Воскресенский Г. В. **Линейные ускорители электронов с интенсивными пучками.** М., Атомиздат, 1970.

В книге изучаются особенности режимов работы сильно-точных линейных ускорителей электронов. Эти особенности, обусловленные влиянием собственного электромагнитного поля пучка электронов, проявляются при существенном увеличении тока или стремлении к высоким энергиям частиц. Рассмотрение проводится на основе расчета полей в сложных волноводных структурах. Исследуются вопросы нагрузки пучком сильноточных ускорителей. Особое внимание уделено вопросу неустойчивости пучка («эффекту укорочения импульса»). Указаны различные меры подавления неустойчивости.

Монография рассчитана на научных работников, занимающихся проектированием и сооружением ускорителей, а также на студентов и аспирантов физических факультетов высших учебных заведений.

В книге 42 рис., 110 библиографий и 1 таблица.

## ВВЕДЕНИЕ

За два последних десятилетия линейные ускорители элементарных частиц получили чрезвычайно широкое распространение. Производство линейных ускорителей на небольшие токи и энергии стало уже серийным. Линейные ускорители электронов используются как наиболее удобные источники нейтронов или  $\gamma$ -излучения в медицине, радиационной химии, атомной промышленности и в других отраслях науки и техники.

Важнейшая цель создания ускорителей — это получение уникальных инструментов для физических исследований, в частности в ядерной физике и в физике твердого тела. Нужды физического эксперимента обуславливают две тенденции развития ускорительной техники: 1) достижение все больших энергий частиц; 2) повышение интенсивности пучка. Вначале казалось, что оба эти требования не являются противоречивыми и, в частности, любого требуемого значения энергии можно достигнуть, просто увеличивая линейные размеры прибора. Однако, как показал опыт и последующий анализ, при значительном повышении энергии частиц начинают явно проявляться ограничения на значение тока ускоряемого пучка. В связи с этим любопытно привести диаграмму (рис. В. 1), на которой показаны энергия  $W$  и ускоряемый заряд в импульсе  $Q=IT$  ( $I$  — ток в импульсе,  $T$  — длительность импульса) некоторых наиболее важных из действующих и проектируемых линейных ускорителей. Цифрами на диаграмме отмечены порядковые номера ускорителей, приведенных в таблице. Как отчетливо видно из диаграммы, существующие ускорители расположены левее некоторой наклонной прямой, как бы ограничивающей достижимые энергии при фиксированном токе или ставящей предел по току для заданной энергии. Вряд ли сле-

дует приписывать физический смысл приведенной предельной кривой, но все же диаграмма явно указывает на определенную взаимосвязь между достижимыми значениями энергии и тока лучка. Цель настоящей монографии — установление этой связи, т. е. систематическое исследование эффектов взаимодействия тока с ускоряющей структурой, начинающих все сильнее

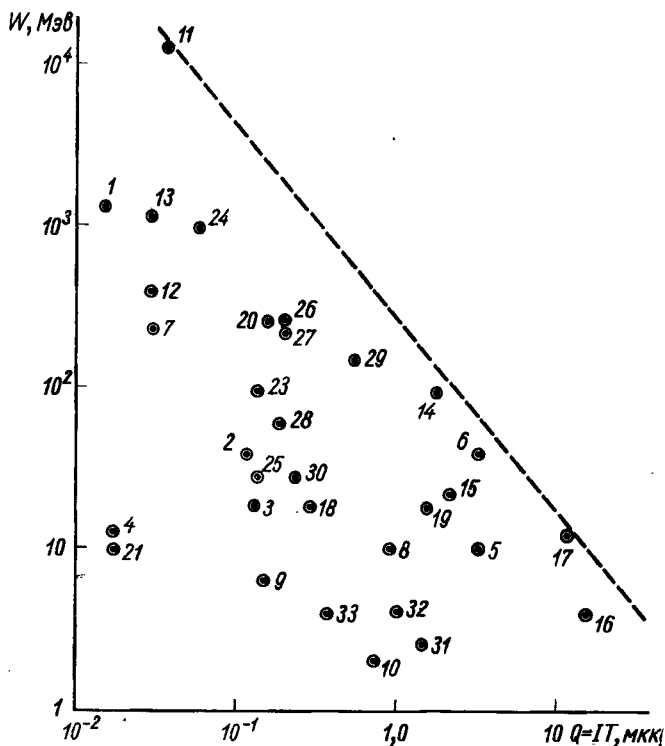


Рис. В.1. Диаграмма зависимости энергии электронов от тока в импульсе.

проявляться по мере повышения тока (лучка и, в конце концов, определяющих предельно достижимый ток в ускорителе.

Поскольку основным предметом рассмотрения будет взаимодействие тока с электромагнитными полями, мы начнем изложение с общего изучения высокочастотных электромагнитных полей, которые могут рас-

**Таблица токовых и энергетических характеристик важнейших  
линейных ускорителей электронов**

| № п/п          | Место расположения | Энергия электронов $W$ , Мэв | Ток в импульсе $I$ , а | Длительность импульса $T$ , мксек | Заряд в импульсе $Q$ , мкк |
|----------------|--------------------|------------------------------|------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| <b>СССР</b>    |                    |                              |                        |                                   |                            |
| 1              | Харьков            | 1800                         | 0,01                   | 1,2                               | 0,012                      |
| 2              | Москва             | 50                           | 0,1                    | 1,5                               | 0,15                       |
| 3              | »                  | 25                           | 0,25                   | 0,6                               | 0,15                       |
| 4              | »                  | 15                           | 0,05                   | 0,5                               | 0,025                      |
| 5              | »                  | 10                           | 1                      | 5,5                               | 5,5                        |
| 6              | » (проект)         | 60                           | 1                      | 5,5                               | 5,5                        |
| 7              | Харьков            | 400                          | 0,05                   | 1                                 | 0,05                       |
| 8              | Москва             | 10                           | 0,5                    | 2                                 | 1                          |
| 9              | »                  | 5                            | 0,1                    | 2                                 | 0,2                        |
| 10             | »                  | 3                            | 0,3                    | 3                                 | 0,9                        |
| <b>С Ш А</b>   |                    |                              |                        |                                   |                            |
| 11             | Станфорд           | 20 000                       | 0,04                   | 1,5                               | 0,06                       |
| 12             | »                  | 630                          | 0,05                   | 1                                 | 0,05                       |
| 13             | » (модерн.)        | 1200                         | 0,05                   | 1                                 | 0,05                       |
| 14             | Гейтсбург          | 100                          | 0,5                    | 6                                 | 3                          |
| 15             | Трой               | 35                           | 0,8                    | 4,6                               | 3,8                        |
| 16             | Сиэтл              | 6                            | 2,7                    | 8                                 | 21,6                       |
| 17             | Ливермор           | 15                           | 0,5                    | 30                                | 15                         |
| 18             | »                  | 27                           | 0,25                   | 2                                 | 0,5                        |
| 19             | Сан-Диего          | 25                           | 0,5                    | 4,5                               | 2,25                       |
| 20             | Мидлтон (проект)   | 440                          | 0,016                  | 15                                | 0,24                       |
| 21             | Станфорд (проект)  | 10                           | $0,25 \cdot 10^{-3}$   | 100                               | 0,025                      |
| 22             | »                  | 10                           | $0,25 \cdot 10^{-3}$   | Непрерывного действия             | —                          |
| <b>Канада</b>  |                    |                              |                        |                                   |                            |
| 23             | Саскатаун          | 100                          | 0,16                   | 1                                 | 0,16                       |
| <b>Франция</b> |                    |                              |                        |                                   |                            |
| 24             | Орсе               | 1300                         | 0,1                    | 1                                 | 0,1                        |
| 25             | Сакле              | 46                           | 0,085                  | 2                                 | 0,17                       |
| 26             | » (проект)         | 450                          | 0,033                  | 10                                | 0,33                       |
| <b>Италия</b>  |                    |                              |                        |                                   |                            |
| 27             | Фраскати           | 400                          | 0,1                    | 3,2                               | 0,32                       |
| <b>Бельгия</b> |                    |                              |                        |                                   |                            |
| 28             | Моль               | 80                           | 0,2                    | 1,5                               | 0,3                        |
| <b>ФРГ</b>     |                    |                              |                        |                                   |                            |
| 29             | Майнц              | 200                          | 0,3                    | 2,6                               | 0,78                       |
| 30             | Гамбург            | 46                           | 0,25                   | 1,6                               | 0,4                        |
| 31             | Англия             | 4                            | 1,0                    | 2                                 | 2                          |
| 32             | »                  | 5                            | 0,3                    | 4                                 | 1,2                        |
| 33             | Япония             | 6                            | 0,2                    | 3                                 | 0,6                        |

пространяться в замедляющей структуре ускорителя — диафрагмированном волноводе.

В первой главе дано описание дисперсионных свойств замедляющей структуры для собственных волн различной конфигурации, исследовано пространственное распределение полей, вводятся и исследуются основные энергетические характеристики собственных волн в структуре, необходимые для последующих расчетов.

Если ток пучка настолько мал, что возбуждаемым им вторичным электромагнитным полем можно пренебречь, то задача сводится к рассмотрению движения заряженных частиц в заданном высокочастотном волноводном поле. Подобные вопросы решаются во второй главе книги.

Следующие разделы работы посвящены расчету полей, возбуждаемых пучками частиц, и анализу их влияния на динамику этих частиц.

Третья глава содержит расчет возбуждения замедляющих структур отдельной заряженной частицей или пучком электронов. На основе строгого решения задачи возбуждения, которое удается провести для простейших замедляющих структур, выясняются пространственно-временные распределения генерируемых пучком полей. Результаты строгого электродинамического исследования используются затем для построения простого и наглядного энергетического метода расчета возбуждаемого пучком поля.

В четвертой главе изучаются основные энергетические особенности сильноточного ускорителя электронов. В основу расчета характеристик положено представление полного электромагнитного поля (симметричного относительно оси) как суперпозиции стороннего ускоряющего поля и поля, генерируемого пучком. Исследуются различные режимы работы ускорителя с большим током. Приведены примеры расчета сильноточного ускорителя электронов.

С физической точки зрения рассмотренные в этой главе эффекты соответствуют учету симметричных волн, возбуждаемых пучком.

Но наряду с симметричными волнами пучок электронов может возбуждать также гибридные несимметричные волны, ответственные за поведение пучка в поперечном направлении и приводящие, при опреде-

ленных условиях, к поперечной неустойчивости пучка. Исследованию этих эффектов посвящена пятая глава.

После краткого обзора экспериментальных данных по неустойчивости и описания их теоретических интерпретаций дается последовательное модельное исследование поперечной неустойчивости в самосогласованной постановке. Выводятся простые асимптотические формулы, описывающие развитие процесса неустойчивости. Анализируется зависимость скорости нарастания неустойчивости от характеристик пучка и параметров ускоряющей структуры. Попутно с исследованием характеристик неустойчивости обсуждаются меры подавления ее.



## ГЛАВА 1

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ, ПЕРИОДИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОМ ДИАФРАГМАМИ

### 1.1. СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ВОЛНОВОДА

Основным элементом линейного ускорителя электронов, обеспечивающим возможность интенсивного взаимодействия частиц с электромагнитным полем, в результате которого происходит увеличение кинетической энергии частиц, является волноводная замедляющая система. В большинстве действующих и проекти-

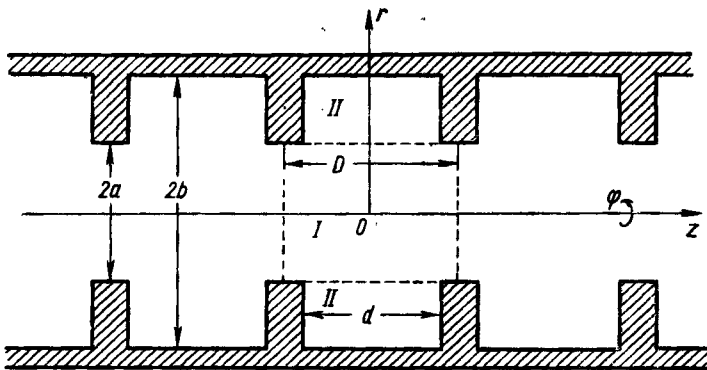


Рис. 1.1. Замедляющая структура линейного ускорителя электронов — волновод, нагруженный диафрагмами.

руемых линейных ускорителях электронов замедляющая система — волновод, нагруженный диафрагмами. На рис. 1.1 показана геометрия периодической замедляющей структуры и ее размеры в полярной системе координат.

Электромагнитное поле в замедляющей системе, вообще говоря, может иметь весьма сложный вид. Однако в силу линейности уравнений поля его можно

всегда представить как суперпозицию отдельных волн сравнительно простой структуры, так называемых собственных волн системы. Каждая собственная волна удовлетворяет уравнениям Максвелла, граничным условиям и характеризуется сравнительно простой зависимостью от координат и времени. В дальнейшем будем считать зависимость собственных волн от времени гармонической (пропорциональной  $e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  — круговая частота исследуемого монохроматического процесса). Электромагнитные поля с любой более сложной зависимостью от времени представляют собой суперпозицию (с непрерывным или дискретным спектром) таких гармонических волн.

Как известно (см., например, [1]), поле в замедляющей структуре ускорителя можно описать с помощью электрического  $\Pi^E$  и магнитного  $\Pi^H$  векторов Герца, каждый из которых обладает лишь продольной (вдоль оси структуры  $z$ ) составляющей. Векторы Герца должны удовлетворять однородным\* волновым уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Pi^E + k^2 \Pi^E &= 0, \\ \Delta \Pi^H + k^2 \Pi^H &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число. Составляющие электрического и магнитного полей определяются через векторы Герца по известным формулам:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= (\text{grad div} + k^2) \Pi^E + i k \text{rot} \Pi^H, \\ \mathbf{H} &= -i k \text{rot} \Pi^E + (\text{grad div} + k^2) \Pi^H. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

В силу периодической зависимости всех величин от азимутального угла  $\varphi$  (с периодом  $2\pi$ ) векторы Герца для собственных волн представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \Pi_z^E &= \Pi_m^E(r, z) e^{im\varphi}, \\ \Pi_z^H &= \Pi_m^H(r, z) e^{im\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

где целочисленный индекс  $m$  определяет азимутальную несимметрию поля (число вариаций по азимуту).

---

\* В настоящей главе исследуются свободные волны в структуре без источников поля.

Функции  $\Pi_m^E(r, z)$  и  $\Pi_m^H(r, z)$  удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Pi_m^{E, H} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) \Pi_m^{E, H} = 0. \quad (1.4)$$

Однокомпонентным векторам Герца из соотношений (1.2) и (1.3) соответствуют следующие выражения для составляющих электромагнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2 \Pi^E}{\partial r \partial z} - \frac{km}{r} \Pi^H; & H_r &= \frac{km}{r} \Pi^E + \frac{\partial^2 \Pi^H}{\partial r \partial z}; \\ E_\varphi &= \frac{im}{r} \frac{\partial \Pi^E}{\partial z} - ik \frac{\partial \Pi^H}{\partial r}; \\ H_\varphi &= ik \frac{\partial \Pi^E}{\partial r} + \frac{im}{r} \frac{\partial \Pi^H}{\partial z}; \\ E_z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \Pi^E; & H_z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \Pi^H. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Полное поле в структуре определяется суперпозицией таких волн. Собственные волны периодической структуры и, в частности, ее дисперсионные свойства исследовались неоднократно [2—18]. Однако точность расчетов, как правило, не была очень высокой. В своем изложении будем следовать работам [13, 15—18], в которых точность расчета доведена до экспериментальной.

Задача исследования собственных волн структуры сводится к отысканию решения уравнения (1.4), удовлетворяющего условию обращения в нуль тангенциальных составляющих электрического поля на гофрированных стенках структуры. Решим эту задачу методом частичных областей. За общую границу, на которой производится сшивание решений, справедливых в каждой из частичных областей, примем поверхность цилиндра  $r=a$ . Рассматриваемую задачу можно математически сформулировать в виде системы уравнений для распределений касательных составляющих электрического поля на поверхности раздела частичных областей  $r=a$

$$E_z = V_1 g_1(z) e^{im\varphi}, \quad E_\varphi = V_2 g_2(z) e^{im\varphi} \quad (1.6)$$

или уравнений для коэффициентов разложения полей (1.6) по какой-либо полной системе функций. Здесь

$g_1(z)$  и  $g_2(z)$  — искомые функции, отличные от нуля лишь в точках общей границы частичных областей и тождественно равные нулю на кромках диафрагм; постоянные  $V_1$  и  $V_2$  определяют величину напряженности продольного и поперечного электрических полей на цилиндрической поверхности  $r=a$ . Нормируем искомые распределения полей к единице

$$\int_{-D/2}^{D/2} g_1(z) dz = \int_{-D/2}^{D/2} g_2(z) dz = 1, \quad (1.7)$$

где постоянные  $V_1$  и  $V_2$  — амплитуды поперечного и продольного электрического напряжения между краями диафрагм центральной ячейки ( $-D/2 \leq z \leq D/2$ ). В силу периодичности замедляющей структуры (по продольной координате  $z$ ) собственные волны в системе удовлетворяют теореме Флоке, поэтому справедливы соотношения

$$g_j(z + nD) = e^{ihnD} g_j(z) \quad (j=1, 2), \quad (1.8)$$

где  $n$  — любое целое число. Соотношение (1.8) определяет постоянную распространения собственных волн системы  $h = h(\omega)$ . Для однозначности нахождения волнового числа  $h(\omega)$  волн в замедляющей структуре будем считать, что

$$-\frac{\pi}{D} \leq h \leq \frac{\pi}{D}. \quad (1.9)$$

Величина  $-h$ , так же как и  $h$ , является собственным значением постоянной распространения, соответствующей собственной волне, распространяющейся в замедляющей структуре в противоположном направлении, поэтому при исследовании дисперсионных свойств можно ограничиться рассмотрением лишь положительных постоянных

$$0 \leq h \leq \frac{\pi}{D}. \quad (1.10)$$

Соотношения (1.8) перепишем в виде

$$V_j g_j(z) = e^{ihz} f_j(z) \quad (j=1, 2), \quad (1.11)$$

где  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  — периодические функции  $z$  с периодом  $D$ . Разложив функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  в ряд Фурье, перепишем выражение (1.6) для касательных составляющих

щих электрического поля при  $r=a$  в виде

$$\left. \begin{aligned} E_z(r=a, z) &= e^{im\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{1n} e^{ih_n z}; \\ E_\varphi(r=a, z) &= e^{im\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{2n} e^{ih_n z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

где

$$h_n = h + \frac{2\pi}{D} n. \quad (1.13)$$

Величины  $f_{1n}$  и  $f_{2n}$ , которые можно назвать структурными коэффициентами искомого касательных составляющих электрического поля, представляют собой коэффициенты Фурье-гармоник распределений продольной и поперечной касательных составляющих поля  $E_\tau(r=a)$  и определяются формулами

$$f_{jn} = \frac{1}{D} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-i \frac{2\pi}{D} nz} f_j(z) dz \quad (j=1, 2). \quad (1.14)$$

Пределы интегрирования в выражении (1.14) поставлены с учетом обращения функций  $f_j(z)$  в нуль на кромке диафрагмы  $\frac{d}{2} \leq |z| \leq \frac{D}{2}$ . Поле в канале замедляющей структуры [область I:  $0 \leq r \leq a$  (рис. 1.1)] можно описать с помощью однокомпонентных векторов Герца  $\Pi^E$  и  $\Pi^H$ :

$$\left. \begin{aligned} \Pi^E(r, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{1}{p_n^2} A_{1n} \frac{I_m(p_n r)}{I_m(p_n a)} e^{ih_n z}, \\ \Pi^H(r, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{ikp_n} \left( \frac{mh_n}{p_n^2 a} A_{1n} - \right. \\ &\quad \left. - A_{2n} \right) \frac{I_m(p_n r)}{I'_m(p_n a)} e^{ih_n z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Здесь  $A_{1n}$  и  $A_{2n}$  — постоянные коэффициенты, индекс модифицированной функции Бесселя  $I_m(x)$  соответствует электромагнитной волне с  $m$  вариациями по азимуту (штрихом обозначено дифференцирование функции по аргументу), а  $p_n$  — радиальное волновое число:

$$p_n = \sqrt{h_n^2 - k^2}. \quad (1.16)$$

Вычислив тангенциальные составляющие электрического поля при  $r=a$  с учетом соотношений (1.15) и (1.5) и приравняв их выражениям (1.12), выразим постоянные  $A_{1n}$  и  $A_{2n}$  через структурные коэффициенты  $f_{1n}$  и  $f_{2n}$ :

$$A_{1n} = \frac{\pi d}{2D} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \alpha_{1n}^{(s)} f_{1s}; \quad A_{2n} = \frac{\pi d}{2D} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \alpha_{2n}^{(s)} f_{2s}, \quad (1.17)$$

где коэффициенты

$$\alpha_{jn}^{(s)} = \frac{\sin \pi \frac{d}{D} (s-n)}{\pi \frac{d}{D} (s-n)} \quad (1.18)$$

получаются в результате разложения функций распределения электрического поля при  $r=a$  с учетом равенства нулю касательных составляющих поля на торце диафрагм  $\left(\frac{d}{2} \leq |z| \leq D/2\right)^*$ .

Формулы (1.15) — (1.18) полностью описывают распределение поля электромагнитных собственных волн в канале диафрагмированного волновода, если известны коэффициенты разложения  $f_{jn}$  функций  $g_j(z)$ .

Представления полей в виде рядов, аналогичных разложениям (1.12), (1.15), которые иногда называют разложением по пространственным гармоникам, используются при исследовании процессов взаимодействия пучка с электромагнитным полем в периодической замедляющей структуре. Каждое из слагаемых суммы (1.15) можно рассматривать как гармонику поля, характеризуемую своим значением фазовой скорости:

$$v_n = \frac{\omega}{h_n} = \frac{\omega}{h + \frac{2\pi}{D}n}. \quad (1.19)$$

Эффективное взаимодействие поля с пучком в этом случае происходит лишь на синхронных (или резонансных) гармониках, для которых фазовая скорость близ-

\* Разложение (1.17) в ряд по  $f_{js}$  неоднозначно, так как для функции  $f_j(z)$ , обращаемой на торцах в нуль, коэффициенты  $f_{js}$  линейно зависимы. Формула (1.18) дает одно из допустимых значений  $\alpha_{jn}^{(s)}$ .

ка к скорости пучка. Действие остальных гармоник имеет осциллирующий возмущающий характер, и интегральный эффект его при прохождении частицами периода структуры равен нулю.

Скорость распространения электромагнитной энергии (групповая скорость)

$$v_{гp} = \frac{d\omega}{dh_n} = \frac{d\omega}{dh} \quad (1.20)$$

одинакова для всех пространственных гармоник, образующих собственную волну структуры. Если поле в канале структуры представлено набором бегущих вдоль оси  $z$  пространственных гармоник, то поле в резонаторной области  $H$  ( $a \leq r \leq b$ ) удобнее разложить по стоячим волнам, соответствующим резонаторной ячейке. Как легко видеть, поле, определяемое векторами Герца,

$$\left. \begin{aligned} {}^H\Pi^E(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{2 - \delta_{0n}}{4x_n^2} B_{1n} \frac{Z_{1m}(x_n r)}{Z_{1m}(x_n a)} \times \\ &\quad \times \cos \eta_n \left( z + \frac{d}{2} \right), \\ {}^H\Pi^H(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2kx_n} \left[ -\frac{m\eta_n}{x_n^2 a} B_{1n} - \right. \\ &\quad \left. - B_{2n} \right] \frac{Z_{2m}(x_n r)}{Z'_{2m}(x_n a)} \sin \eta_n \left( z + \frac{d}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

где  $\delta_{0n}$  — символ Кронекера;

$$x_n = \sqrt{k^2 - \eta_n^2}; \quad \eta_n = \frac{n\pi}{d}; \quad (1.22)$$

удовлетворяет граничным условиям на металлических границах: стенке волновода ( $r=b$ ) и плоских поверхностях диафрагм ( $z = \pm \frac{d}{2}$ ;  $a \leq r \leq b$ ). Здесь  $Z_i(x)$  — следующие линейные комбинации функций Бесселя:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1m}(x_n r) &= J_m(x_n r) N_m(x_n b) - N_m(x_n r) J_m(x_n b), \\ Z_{2m}(x_n r) &= J_m(x_n r) N'_m(x_n b) - N_m(x_n r) J'_m(x_n b). \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Постоянные коэффициенты разложения  $B_{1n}$  и  $B_{2n}$  выражаются через тангенциальные составляющие электрического поля при  $r=a$ , т. е. через  $f_{js}$ :

$$\left. \begin{aligned} B_{1n} &= \pi \sum_{s=-\infty}^{\infty} \beta_{1n}^{(s)} f_{1s}, \\ B_{2n} &= \pi \sum_{s=-\infty}^{\infty} \beta_{2n}^{(s)} f_{2s}, \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

где

$$\beta_{1n}^{(s)} = h_s d \frac{\sin\left(\frac{h_s d}{2} + \frac{n\pi}{2}\right)}{\left(\frac{h_s d}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}; \quad (1.25)$$

$$\beta_{2n}^{(s)} = -n\pi \frac{\sin\left(\frac{h_s d}{2} + \frac{n\pi}{2}\right)}{\left(\frac{h_s d}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}.$$

Выражения (1.15)—(1.18) и (1.21)—(1.25) определяют электромагнитное поле в частичных областях по касательным составляющим электрического поля на их границах. Чтобы найти эти составляющие, нужно использовать условие непрерывности касательных составляющих магнитного поля на границе частичных областей  $r = a$ ,  $|z| \leq \frac{d}{2}$ :

$$\left. \begin{aligned} {}^I H_z(r=a, z) &= {}^{II} H_z(r=a, z), \\ {}^I H_\varphi(r=a, z) &= {}^{II} H_\varphi(r=a, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Перепишем условие (1.26) в более явном виде:

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ p_n \frac{I_m(p_n a)}{I'_m(p_n a)} \left( \frac{m h_n}{p_n^2 a} A_{1n} - A_{2n} \right) \right] e^{i h_n z} = \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \left[ i^{t+1} x_t \frac{Z_{2m}(x_t a)}{Z'_{2m}(x_t a)} \left( \frac{m \eta_t}{x_t^2 a} B_{1t} - B_{2t} \right) \right] \times \\ &\quad \times \sin \eta_t \left( z + \frac{d}{2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$



$$\left. \begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_{1n} \left[ \left( \frac{mh_n}{ka\rho_n} \right)^2 \frac{I_m(\rho_n a)}{I'_m(\rho_n a)} - \frac{I'_m(\rho_n a)}{I_m(\rho_n a)} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{mh_n}{k^2 a} \frac{I_m(\rho_n a)}{I'_m(\rho_n a)} A_{2n} \right\} \frac{e^{ih_n z}}{\rho_n} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ B_{1t} \left[ \frac{2-\delta_{0t}}{2} \times \right. \right. \\
& \times \frac{Z'_{1m}(x_t a)}{Z_{1m}(x_t a)} - \left. \left. \left( \frac{m\eta_t}{ka x_t} \right)^2 \frac{Z_{2m}(x_t a)}{Z'_{2m}(x_t a)} \right] + \frac{m\eta_t}{k^2 a} \times \right. \\
& \left. \times \frac{Z_{2m}(x_t a)}{Z'_{2m}(x_t a)} B_{2t} \right\} \frac{i^t}{2x_t} \cos \eta_t \left( z + \frac{d}{2} \right).
\end{aligned} \right\} (1.27)$$

Полученные уравнения (1.27) с учетом равенств (1.14) и (1.24) можно рассматривать и как систему интегральных уравнений для неизвестных распределений касательного электрического поля на поверхности  $r=a$ . От соотношений (1.27) перейдем к бесконечной алгебраической однородной системе линейных уравнений для коэффициентов  $f_{js}$ . Это можно сделать, разложив экспоненциальные функции  $e^{ih_n z}$ , входящие в правую часть уравнений (1.27), по системам ортогональных на интервале  $|z| \leq d/2$  тригонометрических функций  $\sin \eta_t(z+d/2)$  и  $\cos \eta_t(z+d/2)$ , которые стоят в левой части тех же уравнений. В результате получаем

$$\left. \begin{aligned}
& \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_{1t} A_{st} + \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_{2t} B_{st} = 0 \quad (s = 1, 2, 3, \dots); \\
& \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_{1t} C_{st} + \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_{2t} D_{st} = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned} \right\} (1.28)$$

Условие существования отличного от нуля решения системы (1.28) — обращение в нуль детерминанта бесконечной матрицы:

$$M = \begin{vmatrix} C_{st} & D_{st} \\ A_{st} & B_{st} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots C_{0,-1} & D_{0,-1} & C_{0,0} & D_{0,0} & C_{0,1} & D_{0,1} & \dots \\ \dots A_{1,-1} & B_{1,-1} & A_{1,0} & B_{1,0} & A_{1,1} & B_{1,1} & \dots \\ \dots C_{1,-1} & D_{1,-1} & C_{1,0} & D_{1,0} & C_{1,1} & D_{1,1} & \dots \\ \dots A_{2,-1} & B_{2,-1} & A_{2,0} & B_{2,0} & A_{2,1} & B_{2,1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (1.29)$$

Это — дисперсионное уравнение, определяющее зависимость  $h = h(\omega)$ . Явные выражения для элементов матрицы (1.29) имеют вид

$$\begin{aligned}
 A_{st} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{1n}^{(t)} \frac{\sin\left(\frac{h_n d}{2} + \frac{\pi s}{2}\right)}{h_n^2 - \eta_s^2} \frac{I_m(\rho_n a)}{I'_m(\rho_n a)} \cdot \frac{m h_n}{\rho_n a} - \\
 &\quad - \frac{m D}{4 \chi_s a} \beta_{1s}^{(t)} \frac{Z_{2m}(\chi_s a)}{Z'_{2m}(\chi_s a)}; \\
 B_{st} &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{2n}^{(t)} \frac{\sin\left(\frac{h_n d}{2} + \frac{\pi s}{2}\right)}{h_n^2 - \eta_s^2} \cdot \frac{I_m(\rho_n a)}{I'_m(\rho_n a)} \rho_n + \\
 &\quad + \frac{\chi_s D}{4 \eta_s} \beta_{2s}^{(t)} \frac{Z_{2m}(\chi_s a)}{Z'_{2m}(\chi_s a)}; \\
 C_{st} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{1n}^{(t)} \frac{\sin\left(\frac{h_n d}{2} + \frac{\pi s}{2}\right)}{h_n^2 - \eta_s^2} \left[ \frac{I'_m(\rho_n a)}{I_m(\rho_n a)} - \right. \\
 &\quad - \left. \left( \frac{m h_n}{k a \rho_n} \right)^2 \frac{I_m(\rho_n a)}{I'_m(\rho_n a)} \right] \frac{h_n}{\rho_n} + \frac{D}{4 \chi_s} \beta_{1s}^{(t)} \left[ \frac{Z'_{1m}(\chi_s a)}{Z_{1m}(\chi_s a)} - \right. \\
 &\quad - \left. \left( \frac{m \eta_s}{k a \chi_s} \right)^2 \frac{Z_{2m}(\chi_s a)}{Z'_{2m}(\chi_s a)} \right]; \\
 D_{st} &= \frac{m}{k^2 a} \left[ \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_{2n}^{(t)} \frac{\sin\left(\frac{h_n d}{2} + \frac{\pi s}{2}\right)}{h_n^2 - \eta_s^2} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{I_m(\rho_n a)}{I'_m(\rho_n a)} \cdot \frac{h_n^2}{\rho_n} + \frac{\eta_s D}{4 \chi_s} \beta_{2s}^{(t)} \frac{Z_{2m}(\chi_s a)}{Z'_{2m}(\chi_s a)} \right].
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Зная  $h(\omega)$ , можно из соотношений (1.28) найти коэффициенты  $f_{js}$  и по формулам (1.17) и (1.24) вычислить амплитуды  $A_{jn}$  и  $B_{jn}$  (с точностью до общего множителя, определяемого условиями возбуждения).

## 1.2. УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА СТРУКТУР

Осуществить указанную выше схему решения практически оказывается сложно. В частности, из-за нерегулярности электрического поля на острых углах излома

диафрагм для достаточно точного его представления требуется большое число членов разложения поля в ряд Фурье. Чтобы обойти эту трудность, можно заранее учесть нерегулярность поведения поля вблизи острых краев граничной поверхности, выделив в функциях  $E_z, E_\phi$  множители, отвечающие квазистатической особенности поля вблизи ребра диафрагмы [17, 18]. Так, функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  на периоде  $(2n-1)D/2 \leq z \leq (2n+1)D/2$  представим в виде

$$f_1(z) = F_1(z) \left[ 1 - \left( \frac{2z}{d} \right)^2 \right]^{-1/2}; \quad f_2(z) = \\ = F_2(z) \left[ 1 - \left( \frac{2z}{d} \right)^2 \right]^{1/2} \left( |\xi| \leq \frac{D}{2}, \quad \xi = z - nD \right). \quad (1.31)$$

Определим коэффициенты Фурье для неизвестных (теперь уже регулярных) периодических функций  $F_j(z)$ . Расчет при этом несколько усложняется, но сходимость приближений существенно улучшается. Строго говоря, представление (1.31) соответствует расходимости электростатического поля для бесконечно тонкой диафрагмы. Для диафрагмы конечной толщины следовало бы принять иной закон нерегулярности статического поля (например,  $E_z \approx r^{-1/3}$ , где  $r$  — расстояние от края прямоугольной призмы). Это еще более усложняет расчет, но, как показал анализ, не повышает его точность по сравнению с подстановкой (1.31). Подстановка (1.31) приводит к тем же выражениям (1.17), (1.24) для  $A_{jn}$  и  $B_{jn}$  с заменой  $f_{jn} \rightarrow F_{jn}$  и с изменением вида коэффициентов  $\alpha_{jn}^{(s)}$  и  $\beta_{jn}^{(s)}$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1n}^{(s)} &= J_0 \left[ \pi \frac{d}{D} (s-n) \right]; & \alpha_{2n}^{(s)} &= \frac{J_1 \left[ \pi \frac{d}{D} (s-n) \right]}{\pi \frac{d}{D} (s-n)}; \\ \beta_{1n}^{(s)} &= J_0 \left( \frac{h_s d}{2} + \frac{n\pi}{2} \right) + (-1)^n J_0 \left( \frac{h_s d}{2} - \frac{n\pi}{2} \right); \\ \beta_{2n}^{(s)} &= \frac{J_1 \left( \frac{h_s d}{2} + \frac{n\pi}{2} \right)}{\frac{h_s d}{2} + \frac{n\pi}{2}} - (-1)^n \frac{J_1 \left( \frac{h_s d}{2} - \frac{n\pi}{2} \right)}{\frac{h_s d}{2} - \frac{n\pi}{2}}. \end{aligned} \right\} (1.32)$$

Здесь  $F_{jn}$  — амплитуда гармоник Фурье от искомой «регулярной части»  $F_j(z)$  распределения составляющих электрического поля:

$$F_{jn} = \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} F_j(z) e^{-i \frac{2\pi}{D} nz} dz \quad (j = 1, 2). \quad (1.33)$$

Требование непрерывности касательных составляющих магнитного поля на общей границе частичных областей приводит, как и раньше, к системе алгебраических уравнений (1.28), в которых  $f_{jn}$  надо заменить на новые неизвестные коэффициенты  $F_{jn}$ , а коэффициенты  $A_{st}$ ,  $B_{st}$ ,  $C_{st}$ ,  $D_{st}$  имеют тот же вид (1.30) с заменой  $\alpha_{jn}^{(t)}$  и  $\beta_{jn}^{(t)}$  их новыми значениями (1.32).

Нетрудно убедиться, что при больших значениях номера  $s$  и  $t$  для коэффициентов уравнения (1.28) справедливы следующие асимптотические оценки:

$$A_{st} \sim C_{st} \sim s^{-3/2} t^{-1/2}; \quad B_{st} \sim D_{st} \sim s^{-3/2} t^{-3/2}, \quad (1.34)$$

из которых видно, что коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  убывают значительно быстрее, чем в методе, рассмотренном в разд. 1.1.

Асимптотическое убывание элементов матрицы  $M$  системы (1.28) с ростом номера позволяет построить последовательность сходящихся приближенных решений: приближение порядка  $K$  получается при решении дисперсионного уравнения

$$\det M = 0, \quad (1.35)$$

в котором вместо бесконечной матрицы (1.29) используется матрица ранга  $4K+2$ . Способ «урезания» матрицы очевиден из представления (1.29). Заметим, что приближению порядка  $K$  соответствует аппроксимация точных искомых распределений  $F_j(z)$  рядами Фурье, содержащими  $2K+1$  экспоненциальных гармоник. Ниже во всех расчетах использовалась квадратная матрица ( $\max|s| = \max|t|$ ).

Как видно из формул (1.30), каждый из элементов матрицы  $M$  представляется в виде бесконечной суммы (по номеру  $n$ ), причем зависимость слагаемых от индекса определяется асимптотическим законом ( $\sim n^{-5/2}$ ). Ввиду такого быстрого убывания членов ряда для элементов детерминанта в дисперсионном уравнении при

вычислениях учитывалось лишь конечное число членов сумм ( $|n| \leq N$ ), т. е. ограниченное число пространственных гармоник в представлении поля. Хорошая сходимость членов сумм ( $\sim n^{-5/2}$ ) — следствие удачного способа регуляризации (1.31) распределения поля.

Дисперсионное уравнение (1.35) исследовалось на электронной вычислительной машине. Расчет состоял в нахождении волнового числа  $k = \omega/c$ , удовлетворяющего уравнению при заданном набеге фазы волны на периоде  $hD$ .

*Симметричные электромагнитные волны.* Ускорение электронов осуществляется аксиально симметричным электромагнитным полем ( $m=0$ ). В этом случае, как очевидно из выражений (1.30), элементы матрицы  $A_{st}$  и  $D_{st}$  тождественно равны нулю и дисперсионное уравнение (1.35) принимает вид:

$$\det \| B_{st} \| \cdot \det \| C_{st} \| = 0, \quad (1.36)$$

т. е. распадается на два независимых уравнения для симметричных продольных электрических и магнитных волн. Симметричным электрическим волнам, представляющим интерес с точки зрения линейных ускорителей, отвечает уравнение

$$\det \| C_{st} \| = 0. \quad (1.37)$$

Интересно сопоставить полученное точное дисперсионное уравнение (1.37) с известными из литературы приближенными дисперсионными уравнениями. Так, нулевое приближение (ранг матрицы  $2K+1=1$  при  $K=0$ ) дисперсионного уравнения (1.37)  $C_{00}(k, h(\omega))=0$ , или в явном виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{h_n d}{2}}{\frac{h_n d}{2}} \right)^2 \cdot \frac{k}{p_n} \cdot \frac{I'_0(p_n a)}{I_0(p_n a)} + \frac{D}{d} \cdot \frac{Z'_{10}(ka)}{Z_{10}(ka)} = 0, \quad (1.37a)$$

сходно с полученным в работе [4] уравнением в импедансном приближении, когда в структуре на протяжении одной длины волны расположено много диафрагм. Однако в уравнении (1.37a) учитывается полный набор пространственных гармоник поля в канале периодической структуры ( $r \leq a$ ).

Для иллюстрации приведем дисперсионные зависимости основной ускоряющей волны  $E_{01}$  и симметричной электрической волны типа  $E_{02}$  в структуре с параметрами

$$\left. \begin{aligned} a &= 1,98 \text{ см}; & b &= 6,515 \text{ см}; \\ D &= 5,5 \text{ см}; & d &= 4,9 \text{ см}. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

При этих параметрах структуры длине волны  $\lambda_0 = 16,5 \text{ см}$  соответствует ускорение на типе колебаний  $2\pi/3$  (т. е. набег фазы волны на периоде  $2\pi/3$ ), причем фазовая скорость ускоряющей волны на рабочей частоте равна скорости света  $c$ .

На рис. 1.2 представлены рассчитанные для названных параметров диаграммы Бриллюэна  $kD = \varphi(hD)$ . Расчет проводился для уравнения (1.37) с определителем пятого порядка (т. е. во втором приближении: для симметричных волн номер приближения  $K$  соответствует рангу матрицы  $2K+1$ ). Суммирование в элементах определителя проводилось до  $N=3$ . Сходимость приближений настолько быстрая, что дальнейшее увеличение порядка системы или числа членов суммы, учитываемых в элементах определителя, не приводит к изменениям решения в пределах графической точности.

**Несимметричные волны.** Дисперсионные уравнения собственных электромагнитных волн периодической структуры, зависящих от азимута ( $m \neq 0$ ), не расщепляются на независимые уравнения для чисто электрических и магнитных волн. Это означает, что несимметричные волны могут существовать лишь в виде «гибрида» электрических и магнитных волн, так что, вообще говоря, все компоненты электромагнитного поля отличны от нуля. Наибольший интерес представляет исследование волн с одной вариацией по азимуту ( $m=1$ ).

Рис. 1.2. Дисперсионные кривые аксиально симметричных электрических волн.

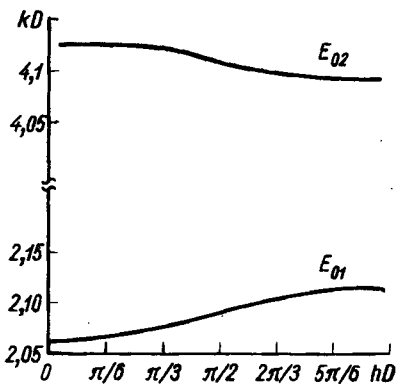


Рис. 1.2. Дисперсионные кривые аксиально симметричных электрических волн.

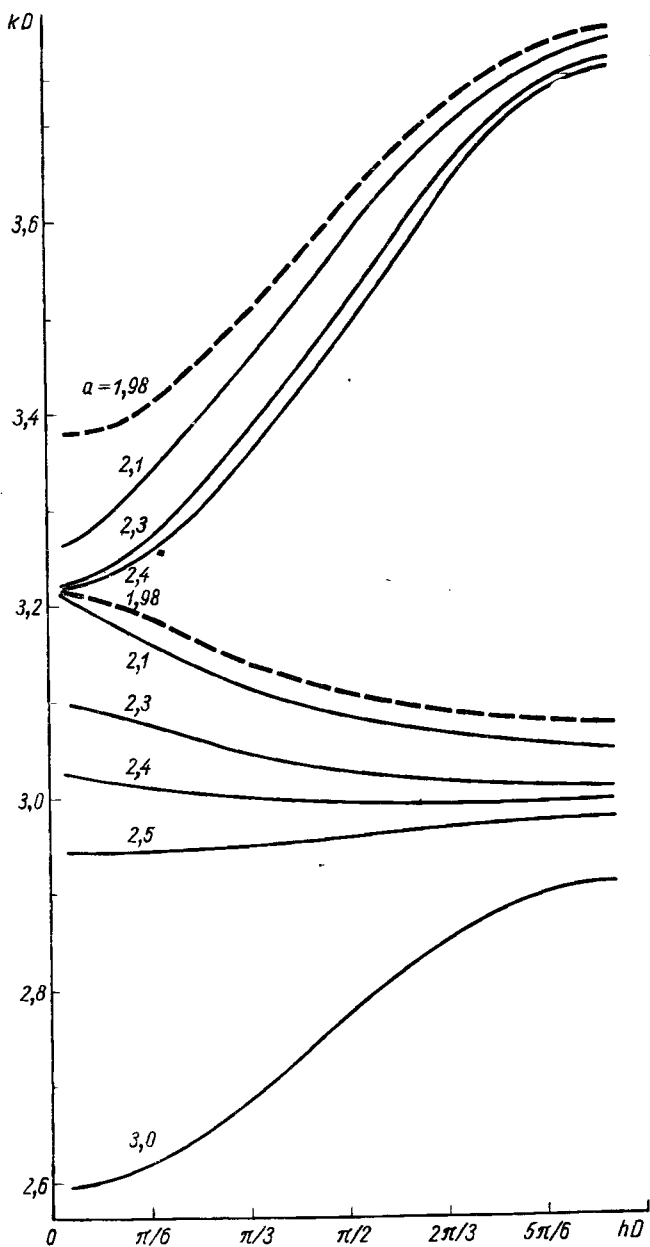


Рис. 1.3. Дисперсионные кривые волн с одной вариацией по азимуту для разных размеров отверстия в диафрагмах.

На рис. 1.3 пунктирной кривой даны диаграммы Бриллюэна такой волны, рассчитанные для диафрагмированного волновода с параметрами (1.38). Приведенные данные соответствуют расчету во втором приближении (при  $K=2$ , т. е. для ранга матрицы  $4K+2=10$ ) при суммировании до  $N=3$  в выражениях для элементов определителя. Дальнейшее увеличение  $N$  и  $K$  практически не уточняет результата.

Характерная особенность нижней ветви дисперсионной кривой (см. рис. 1.3, нижняя пунктирная кривая) — отрицательный знак групповой скорости  $v_{гр} = = d\omega/dh < 0$  волны с одной азимутальной вариацией. Это означает, что поток энергии, связанный с этой волной, направлен в сторону, противоположную направлению движения фазового фронта волны в структуре.

Интересно исследовать зависимость характера дисперсии от размера отверстий в диафрагмах. На том же рис. 1.3 непрерывными кривыми показаны результаты расчета для структуры (1.38) при различных значениях радиуса отверстия  $a$ . По мере увеличения размера канала структуры нижняя ветвь дисперсионной кривой смещается в область более низких частот и трансформируется настолько, что меняется знак дисперсии, верхняя ветвь кривой изменяется при этом несущественно.

Дисперсионные свойства диафрагмированных волноводов удобно представлять с помощью графиков взаимозависимостей различных параметров. Пример параметрического представления дисперсионных зависимостей — это графики, изображенные на рис. 1.4. На графиках показана зависимость от безразмерного геометрического параметра  $a/D$  диафрагмированного волновода других его характеристик: величины  $b/D$ ; безразмерных частот симметричной ( $k_0 D = h_0 D$ ) и несимметричной ( $k_1 D$ ) волн; групповой скорости гибридной волны  $\beta_{гр}$  для случая, когда фазовая скорость равна скорости света ( $\beta=1$ ), ускоряющая (симметричная) волна имеет заданное значение набега фазы  $\psi_0 = = h_0 D$  ( $\psi_0 = \pi/2$  и  $2\pi/3$ ) и зафиксирована безразмерная толщина диафрагм  $(D-d)/\lambda_0 = 0,04$ .

Если дисперсионные зависимости установлены, т. е. найдены частоты полей собственных электромагнитных волн для данной структуры и фиксированной фазовой



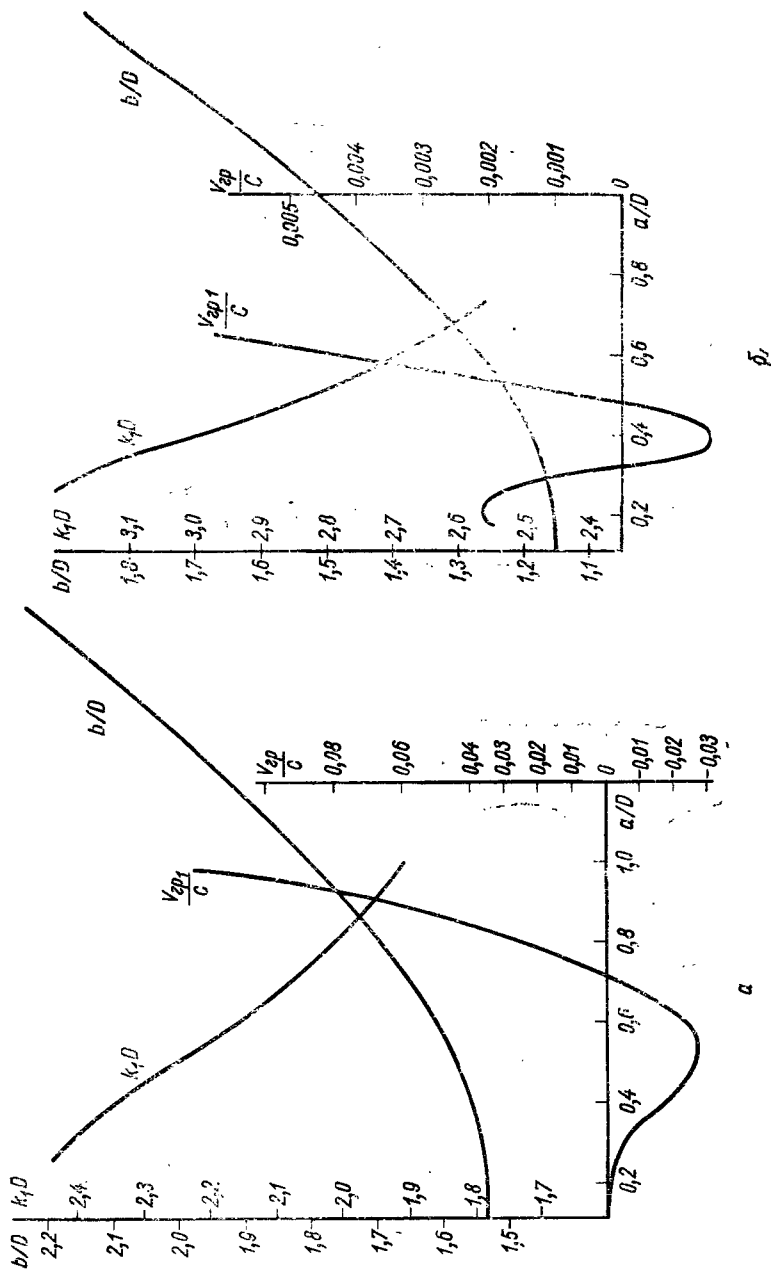


Рис. 1.4. Зависимость характеристик диафрагмированного волновода от коэффициента его нагруженности. а — структура с ускорением на  $\pi/2$ -виде колебаний; б — структура с ускорением на  $2\pi/3$ -виде колебаний.

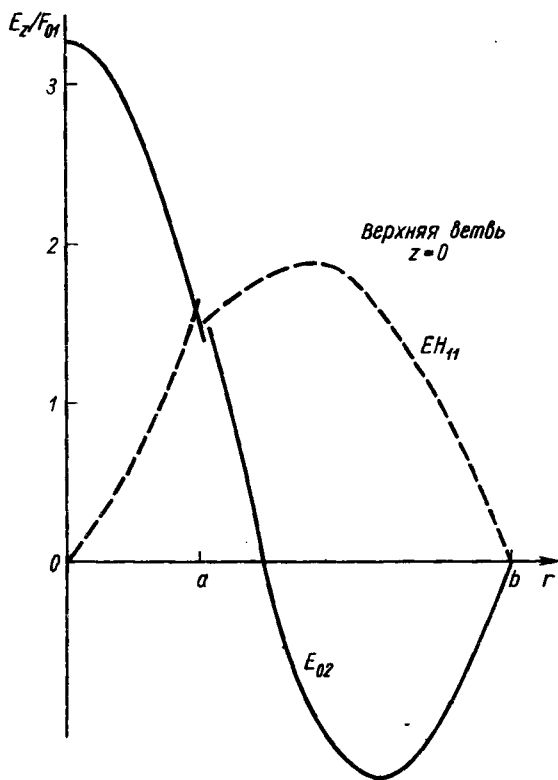
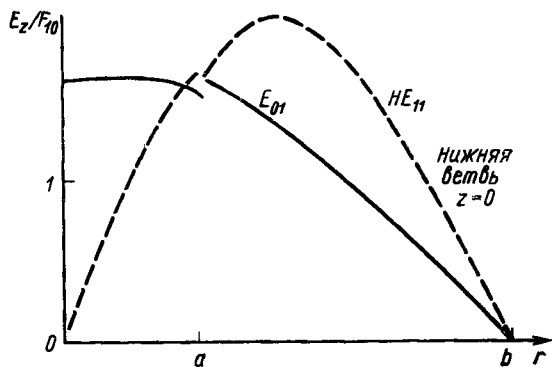


Рис. 1.5. Распределение продольной составляющей электрического поля  $E_z(r)$  в сечении  $z=0$ ;  $\beta=1$ ,  $a/D=0,36$ :

— — азимутально симметричная волна ( $m=0$ );  
 - - - - волна с одной вариацией по азимуту ( $m=1$ ).

скорости волны, выражения (1.28) и (1.32) позволяют получить относительные значения коэффициентов разложения полей  $F_{jn}$  ( $j=1, 2$ ). Рассчитав эти постоянные коэффициенты, можно определить пространственное распределение собственных волн.

Для иллюстрации подобного расчета геометрии поля на рис. 1.5 изображены распределения продольной составляющей электрического

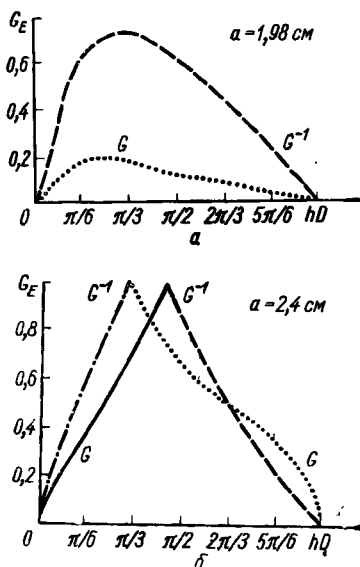


Рис. 1.6. Зависимость коэффициента гибридности поля  $G$  от набега фазы на периоде для двух значений радиуса ускоряющего канала.

поля  $E_z$  в сечении  $z=0$  для четырех ветвей дисперсионных зависимостей в структуре (1.38). Поле  $E_z$  при этом нормируется к амплитуде первой пространственной гармоники  $F_{10}$ . Распределение рассчитано для частот, на которых волны распространяются со скоростью света ( $h=k$ ). Видно, в частности, что нижние ветви дисперсионных кривых на обеих диаграммах и верхняя ветвь азимутально несимметричной волны соответствуют волнам с одной радиальной вариацией ( $E_{01}$  — для симметричной волны,  $HE_{11}$  — для несимметричной); верхняя ветвь дисперсионной кривой для симметричного поля относится к волне с двумя вариациями по радиусу (вида  $E_{02}$ ). Можно также иденти-

фицировать дисперсионные кривые и в других случаях.

Для выяснения соотношений между величинами различных компонент поля несимметричной гибридной волны рассчитано отношение усредненных по периоду структуры продольной составляющей электрического поля и его поперечной касательной составляющей (при  $r=a$ ) — «коэффициент продольности поля»  $V_1/V_2$  и отношение средних по периоду продольных составляющих электрического и магнитного полей — «коэффициент гиб-

ридности поля»:

$$G_E = \frac{V_1}{H_1} = \frac{\int_{-D/2}^{D/2} E_z(r=a, z) dz}{\int_{-D/2}^{D/2} H_z(r=a, z) dz}.$$

На рис. 1.6 показана зависимость коэффициентов гибридности  $G_E$  от набега фазы на периоде  $hD$  для двух ветвей дисперсионной кривой несимметричной волны с одной вариацией по азимуту для выбранной геометрии (1.38) при двух значениях радиуса канала  $a$ . На рис. 1.6 дана величина  $G_E$  (сплошная и пунктирная кривые соответственно для нижней и верхней ветви), если ее значение не превосходит единицы, и обратная ей величина  $1/G$  в противоположном случае. Функция  $G^{-1}$  для нижней ветви дисперсионной кривой изображается штриховой линией, а для верхней ветви — штрих-пунктиром. Видно, что соотношение отдельных компонент электромагнитного поля гибридной волны непрерывно меняется вдоль дисперсионной кривой. Кроме того, из рис. 1.6 следует, что собственные волны одинаковой пространственной симметрии на частотах, соответствующих разным частям дисперсионной кривой, имеют противоположную гибридность. На верхней ветви дисперсионной кривой [см. рис. 1.6,  $a$  ( $a=1,98$  см)] поле имеет характер преимущественно  $H$ -волны, а на границах полосы пропускания вырождается в чисто магнитную волну. При той же геометрии структуры поле на частотах, отвечающих нижней ветви, — преимущественно электрическая волна. При других геометрических параметрах структуры характер гибридности поля меняется на одной и той же ветви в зависимости от  $hD$ . Так (см. рис. 1.6,  $b$  ( $a=2,4$  см)), на нижней ветви волна преимущественно магнитная при  $0 \leq hD \leq 0,44\pi$ ; она перерождается в преимущественно электрическую при  $0,44\pi < hD \leq \pi$ . Для верхней ветви положение обратное.

Качественное исследование дисперсионных свойств ускоряющего поля можно найти в работе [2], в ней же имеются простые соотношения, позволяющие производить количественные оценки. Приближенному исследованию несимметричных волн посвящена работа [14]. Результаты экспериментальных исследований свойств диафрагмированных волноводов найдем в справочнике [19].

Для дальнейших расчетов необходимо знать поперечную составляющую силы Лоренца, действующую на заряженную частицу в канале ускорителя со стороны электромагнитного поля собственной волны замедляющей структуры. В соответствии с выражением (1.15) для векторов Герца  $\Pi^E$  и  $\Pi^H$  поперечные составляющие  $E_r$  и  $H_\varphi$  электромагнитного поля гибридной волны в канале периодической структуры представляются в виде

$$E_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_{1n} \frac{h_n}{i\rho_n^2} \left[ \rho_n \frac{I'_m(\rho_n r)}{I_m(\rho_n a)} - \frac{m^2}{ar} \frac{I_m(\rho_n r)}{\rho_n I'_m(\rho_n a)} \right] + \right. \\ \left. + A_{2n} \frac{m}{ir} \frac{I_m(\rho_n r)}{\rho_n I'_m(\rho_n a)} \right\} e^{ih_n z};$$

$$H_\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_{1n} \frac{k}{i\rho_n^2} \left[ \rho_n \frac{I'_m(\rho_n r)}{I_m(\rho_n r)} - \frac{m^2 h_n^2}{rak^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{I_m(\rho_n r)}{\rho_n I'_m(\rho_n a)} \right] + A_{2n} \frac{mh_n}{irk} \frac{I_m(\rho_n r)}{I'_m(\rho_n a)} \right\} e^{ih_n z}.$$

В результате выражение для радиальной составляющей лоренцевой силы, действующей на заряд  $e$ , запишется в виде

$$F_r = e \left\{ E_r - \frac{v_e}{c} H_\varphi \right\}_{\varphi=\varphi_0, r=\rho, z=z_0+v_e t} = \\ = e e^{im\varphi_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ih_n \left( z_0 + v_e t - \frac{\omega}{h_n} t \right)} \times \\ \times \left\{ A_{1n} \frac{I'_m(\rho_n \rho)}{i\rho_n I_m(\rho_n a)} (h_n - \beta_e k) - \frac{m}{i\rho k} \frac{I_m(\rho_n \rho)}{I'_m(\rho_n a)} \times \right. \\ \left. \times \left[ A_{1n} \frac{mh_n}{\rho_n^2 a} - A_{2n} \right] (k - \beta_e h_n) \right\}, \quad (1.39)$$

где  $\{\varphi=\varphi_0, r=\rho, z=z_0+v_e t\}$  — координаты движущегося со скоростью  $v_e$  заряда). Так как действие высокочастотного поля на заряд определяется в основном гармоникой силы (1.39), синхронной с частицей ( $h_n = \omega/v_e$ ),

при рассмотрении усредненного эффекта все остальные нерезонансные пространственные гармоники в формуле (1.39) можно опустить. При ультрарелятивистских скоростях частиц ( $v_e \approx c$ ) выражения для резонансных гармоник ( $h_n = k$ ) поперечных составляющих силы Лоренца принимают простой вид:

$$E_{\{\varphi\}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ i \end{Bmatrix} m \left( \frac{\rho}{a} \right)^{m-1} \frac{iV_{1\pi d}}{2kaD} \times \\ \times \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} \alpha_{ln}^{(s)} F_{1s} \right) e^{im\varphi_0 + ikz_0}. \quad (1.40)$$

Таким образом, поперечная сила Лоренца при достижении частицей ультрарелятивистской скорости обращается в нуль для поля с аксиальной симметрией ( $m=0$ ) и отлична от нуля в поле несимметричных волн.

Из приведенного выражения (1.40) следует, что радиальная и азимутальная составляющие силы равны по величине и сдвинуты по фазе на угол  $\pi/2$ . Зависимость поперечной отклоняющей силы от радиального смещения заряда характеризуется величиной  $(\rho/a)^{m-1}$ , т. е. существенно определяется степенью  $m$  азимутальной симметрии волнового поля. Так, при  $m=1$  отклоняющая сила одинакова во всем поперечном сечении канала ускорителя ( $r \leq a$ ). При  $m > 1$  сила, действующая на частицу, быстро убывает по мере приближения к оси. Поэтому если ограничиться рассмотрением хорошо сфокусированных аксиальных пучков, то в первую очередь следует учитывать действие сил, связанных с полем, имеющим одну вариацию по азимуту ( $m=1$ )\*.

Необходимо заметить, что поперечная отклоняющая сила, обусловленная действием поля несимметричных собственных волн, не зависит от знака групповой скорости волны.

### 1.3. КВАДРАТИЧНЫЕ (ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ) ХАРАКТЕРИСТИКИ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН

Знание дисперсионных свойств и пространственного распределения полей собственных волн замедляющей структуры позволяет рассчитать различные квадратич-

\* Влияние гармоник с  $m > 1$  ослабляется еще в большей степени, если учесть, что амплитуда возбуждаемого зарядом поля пропорциональна величине  $(\rho/a)^m$ , как будет показано далее.

ные энергетические характеристики и некоторые выражающиеся через них важные постоянные структуры. Важнейшими из таких энергетических величин являются погонная плотность энергии  $W_1$  и поток мощности вдоль замедляющей структуры  $P$ . Для монохроматической волны средние по времени значения запасенной энергии на единице длины структуры и продольного потока мощности определяются выражениями:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{16\pi D} \int_V (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) dv = \\ &= \frac{1}{8\pi D} \int_V |\mathbf{E}|^2 dv, \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$P = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{\Sigma} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_z ds. \quad (1.42)$$

При определении погонной запасенной энергии (1.41) следует проводить интегрирование по всему объему  $V$  одной ячейки структуры, т. е. вычислять сумму запасенной энергии в канале структуры и в резонаторной области между диафрагмами. Вычислять поток мощности удобно для поперечного сечения ускорителя, проходящего через диафрагму, например для сечения  $z = D/2$ , так как при этом используются выражения для полей лишь в приосевом канале.

Для замедляющих структур (в том числе и периодических) можно доказать важное равенство, связывающее основные энергетические характеристики собственных волн:

$$P = v_{\text{гр}} W_1, \quad (1.43)$$

где  $v_{\text{гр}}$  — групповая скорость рассматриваемой собственной волны, которая определяется по формуле (1.20). Если, воспользовавшись соотношениями для компонент поля, рассчитать  $P$  и  $W_1$ , то можно с помощью формулы (1.43) определить групповую скорость волн в структуре. Последняя является важной характеристикой структуры и, в частности, определяет время заполнения секции ускорителя высокочастотной энергией

$$t_{\text{гр}} = \frac{l}{v_{\text{гр}}}, \quad (1.44)$$

где  $l$  — протяженность секции ускорителя. Время заполнения характеризует длительность установления стадио-

нарного режима работы ускорителя. Это время — существенная характеристика структуры, так как все современные линейные ускорители работают в импульсном режиме.

Постоянные распространения собственных волн в структурах с идеально проводящими стенками чисто вещественны, т. е. электромагнитное поле распространяется вдоль таких структур без затухания. В реальных условиях проводимость стенок всегда конечна, что приводит к затуханию волн по мере распространения вдоль структуры.

Пусть  $\alpha$  — коэффициент затухания волны по полю и соответственно  $2\alpha$  — коэффициент затухания волны по мощности:

$$2\alpha = -\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dz}. \quad (1.45)$$

Эффективность замедляющих структур как ускорительных систем принято характеризовать отношением квадрата амплитуды ускоряющего электрического поля  $E_0$  (определяющего приращение энергии частиц на единице длины структуры) к погонным потерям мощности

$$R_{\text{ш}} = -\frac{E_0^2}{\frac{dP}{dz}} = \frac{E_0^2}{2\alpha P}. \quad (1.46)$$

Это отношение, имеющее размерность погонного сопротивления, называют шунтовым импедансом на единицу длины секции.

Отношение квадрата амплитуды ускоряющего поля к подводимой мощности

$$\frac{E_0^2}{P} = 2\alpha R_{\text{ш}} \quad (1.47)$$

можно назвать показателем взаимодействия волны с пучком, так как оно характеризует амплитуду взаимодействующей с пучком пространственной гармоникой поля при фиксированной мощности источника.

Как легко убедиться из дисперсионного уравнения, безразмерная комбинация величин  $E_0\lambda_0\sqrt{c}/V\sqrt{P_0}$  при заданных набеге фазы ускоряющей волны на периоде, скорости волны и относительной толщине диафрагм  $d/\lambda_0$



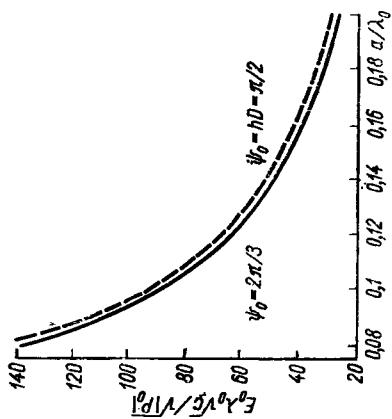


Рис. 1.7. Зависимость коэффициента взаимодействия с ускоряющим полем от геометрии волновода для симметричной структуры.

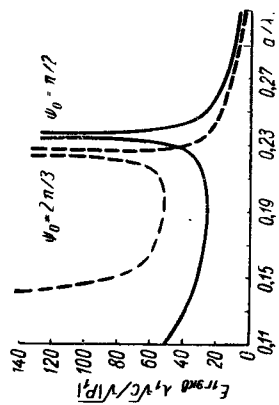


Рис. 1.8. Зависимость коэффициента поперечного взаимодействия от геометрии волновода для гибридной волны  $HE_{11}$ .

определяется лишь одним безразмерным параметром  $a/\lambda_0$ , характеризующим геометрию структуры.

На рис. 1.7 изображена зависимость величины  $E_0 \lambda_0 \sqrt{c / \sqrt{|P_0|}}$  от безразмерного радиуса отверстия в диафрагмах  $a/\lambda_0$ , полученная для структур с  $\beta=1$  и для набега фазы основной волны на периоде  $\pi/2$  и  $2\pi/3$ . Для характеристики взаимодействия пучка с поперечными составляющими электромагнитного поля можно аналогично ввести поперечное шунтовое сопротивление и показатель взаимодействия:

$$\left. \begin{aligned} R_{\perp} &= - \frac{\left( \frac{1}{k} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right)^2}{\frac{dP}{dz}}; \\ \frac{E_r^2 \text{ экв}}{P} &= \frac{\left( \frac{1}{e} F_r \right)^2}{P} = 2\alpha R_{\perp}, \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

где  $F_r$  — амплитуда радиальной составляющей силы Лоренца.

На рис. 1.8 показана зависимость показателя поперечного взаимодействия  $E_{1r \text{ экв}} \lambda_1 \sqrt{c / \sqrt{|P_1|}}$  для гибридной волны  $HE_{11}$  от размера отверстия  $a/\lambda_1$  (для структур, в которых фазовая скорость основной симметричной волны равна единице на видах колебаний  $\pi/2$  и  $2\pi/3$ ;  $E_{1r \text{ экв}} = \frac{1}{e} F_r$ ).

#### 1.4. О СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН

Приведем некоторые свойства собственных волн периодической замедляющей структуры [1, 20], необходимые для расчета возбуждения волноводов.

Пусть  $E_s, H_s$  — поле собственной электромагнитной волны, имеющей индекс  $s$  и характеризующейся волновым числом  $h_s(\omega)$ . Каждой прямой волне с номером  $s$  и волновым числом  $h_s$  можно поставить в соответствие встречную волну с волновым числом  $-h_s$ , которой можно присвоить индекс  $-s$ :  $h_{-s} = -h_s$ . Несколько общих соотношений, связывающих поля прямой и встречной волн, можно получить, основываясь на свойствах симметрии структуры. Для интересующих нас структур,

симметричных относительно плоскости  $z=0$ , справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{-s}^t(x, y, z) &= -\mathbf{E}_s^t(x, y, -z); & \mathbf{H}_{-s}^t(x, y, z) &= \\ &= \mathbf{H}_s^t(x, y, -z); \\ \mathbf{E}_{-s}^l(x, y, z) &= \mathbf{E}_s^l(x, y, -z); & \mathbf{H}_{-s}^l(x, y, z) &= \\ &= -\mathbf{H}_s^l(x, y, -z), \end{aligned} \right\} (1.49)$$

где верхними индексами  $t$  и  $l$  отмечены поперечные и продольные части полей.

Для структур с идеально проводящими стенками, в которых затухание отсутствует, распространяющиеся волны (т. е. волны с вещественными волновыми числами  $h_s$ ) удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{E}_{-s} = \mathbf{E}_s^*, \quad \mathbf{H}_{-s} = \mathbf{H}_s^*, \quad (1.50)$$

вытекающим непосредственно из однородных уравнений Максвелла для комплексно сопряженных векторов  $\mathbf{E}^*$  и  $\mathbf{H}^*$ .

Важным свойством собственных волн замедляющей структуры является их ортогональность [1]. Свойство ортогональности собственных волн в периодическом волноводе можно вывести с помощью леммы Лоренца. Для свободных собственных волн для любой замкнутой поверхности  $S$  ( $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $S$ ) из леммы Лоренца следует

$$\oint_S \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \mathbf{n} ds = 0. \quad (1.51)$$

Возьмем поверхность  $S$  в виде двух поперечных сечений диафрагмированного волновода  $S_1$  и  $S_2$  и заключенной между ними поверхности стенок замедляющей структуры  $S_0$ . На поверхности  $S_0$  рассматриваемый интеграл обращается в нуль в силу граничных условий на металлических стенках структуры\*. Отсюда следует, что интеграл

$$I_{ss'} = \int_{S_p} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \mathbf{n} ds, \quad (1.52)$$

взятый по любому поперечному сечению структуры  $S_p$ , не зависит от  $z$ . С другой стороны, из свойств собствен-

\* Равенство интеграла нулю справедливо не только при идеальной проводимости стенок, но и для хорошо проводящих поверхностей, на которых касательные составляющие векторов поля связаны условием Леонтовича.

ных волн, связанных с периодичностью структуры, вытекает, что

$$I_{ss'}(z + nD) = e^{i(h_s + h_{s'})nD} I_{ss'}(z). \quad (1.53)$$

Из последнего равенства следует выполнение соотношения ортогональности:

$$I_{ss'} = 0 \quad \text{при} \quad h_{s'} \neq -h_s + \frac{2\pi m}{D} \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ т. е. при } s' \neq -s. \quad (1.54)$$

Нормой собственной волны с индексом  $s$  назовем величину

$$N_s = \frac{c}{4\pi} I_{s, -s} = \frac{c}{4\pi} \int_{S_p} \{[E_s \mathbf{H}_{-s}] - [E_{-s} \mathbf{H}_s]\} ds. \quad (1.55)$$

Если для собственных волн справедливы условия (1.50), то норма отличается от комплексного потока мощности через поперечное сечение замедляющей структуры лишь численным множителем. Свойство ортогональности собственных волн структуры позволяет представить произвольное электромагнитное поле в ней в виде линейной суперпозиции таких волн. Это свойство особенно полезно для теории возбуждения рассматриваемых структур заданными источниками.

Приведем две важные теоремы Белла [20, 21], относящиеся к полю собственных электромагнитных волн в периодической структуре без затухания.

*Теорема 1.* Для распространяющихся волн среднее по времени значение энергии электрического поля, запасенной на периоде структуры, равно средней запасенной энергии магнитного поля.

Пусть замкнутая поверхность  $S$ , введенная выше, ограничивает объем одного периода структуры. Из леммы Лоренца следует, что

$$\int_S [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] nds = 0. \quad (1.56)$$

Исключая вектор  $\mathbf{H}^*$  с помощью уравнения Максвелла для комплексно-сопряженных величин  $-i\mathbf{k}\mathbf{H}^* = \text{rot } \mathbf{E}^*$  и применяя теорему Гаусса из векторного анализа, получаем

$$\int_V \text{div} [\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{E}^*] dv = 0, \quad (1.57)$$

где интеграл вычисляется по полному объему  $V$  одного периода структуры. Воспользовавшись далее векторным тождеством

$$\operatorname{div} [\mathbf{A}\mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (1.58)$$

перепишем равенство (1.57) в виде

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{E}^* \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} \, dv - \int_V \mathbf{E} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^* \, dv = 0.$$

Исключая выражения с ротором при помощи уравнений Максвелла и однородного волнового уравнения, окончательно получаем

$$\int_V |\mathbf{H}|^2 \, dv = \int_V |\mathbf{E}|^2 \, dv, \quad (1.59)$$

что и доказывает данную теорему.

*Теорема 2.* Для распространяющихся собственных волн среднее по времени значение потока мощности вдоль структуры равно произведению групповой скорости на среднее по времени значение погонной запасенной электромагнитной энергии.

Под погонной энергией здесь подразумевается отношение энергии, запасенной на периоде структуры, к величине периода. Будем считать, что равенство (1.57) записано для поля собственной волны  $\mathbf{E}_s$ , вычислим его производную по волновому числу  $k$ :

$$\frac{\partial}{\partial k} \left( \int_V \operatorname{div} [\mathbf{E}_s \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^*] \, dv \right) = 0. \quad (1.60)$$

Левую часть равенства можно, учитывая векторное тождество (1.58), преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \operatorname{div} \left[ \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial k} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^* \right] + \operatorname{div} \left[ \mathbf{E}_s \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}_s^*}{\partial k} \right] \right\} dv = \int_V \left\{ \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^* \times \right. \\ \left. \times \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial k} - \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial k} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^* + \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}_s^*}{\partial k} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{rot} \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_s \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}_s^*}{\partial k} \right\} dv. \quad (1.61) \end{aligned}$$

Вектор  $\partial \mathbf{E}_s^* / \partial k$ , как легко убедиться дифференцированием волнового уравнения, удовлетворяет уравнению:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}_s^*}{\partial k} = 2k \mathbf{E}_s^* + k^2 \frac{\partial \mathbf{E}_s^*}{\partial k}.$$

Используя это равенство, перепишем (1.61) в виде

$$\int_V \left\{ \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^* - k^2 \mathbf{E}_s^* \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial k} + \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}_s^*}{\partial k} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s - \right. \\ \left. - 2k \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^* - k^2 \frac{\partial \mathbf{E}_s^*}{\partial k} \mathbf{E}_s \right\} dv = 0,$$

или, группируя слагаемые,

$$2 \operatorname{Re} \int_V \left\{ \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial k} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^* - \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial k} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^* \right\} dv - \\ - 2k \int_V |\mathbf{E}_s|^2 dv = 0. \quad (1.62)$$

Воспользовавшись тождеством (1.58) и теоремой Гаусса, представим исследуемое выражение в виде поверхностного интеграла:

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \int_S \left[ \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial k} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^* \right] ds \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{E}_s^1}{\partial k} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^{1*} ds_1 + \right. \\ \left. + \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}_s^2}{\partial k} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^{2*} ds_2 \right\}, \quad (1.63)$$

где интегрирование сводится, очевидно, к вычислению интегралов по поперечным сечениям структуры  $S_1$  и  $S_2$ , отстоящим на период  $D$ . Выражения для векторов поля собственных волн на этих сечениях (отметим их индексами 1, 2) связаны теоремой Флоке:

$$\mathbf{E}_s^2 = \mathbf{E}_s^1 e^{i h_s D}; \\ (\operatorname{rot} \mathbf{E}_s^{2*}) = (\operatorname{rot} \mathbf{E}_s^{1*}) e^{-i h_s D}; \\ \mathbf{E}_s^{2*} = \mathbf{E}_s^{1*} e^{-i h_s D}; \\ \frac{\partial \mathbf{E}_s^2}{\partial k} = \frac{\partial \mathbf{E}_s^1}{\partial k} e^{i h_s D} + i D \frac{d h_s}{d k} \mathbf{E}_s^1 e^{i h_s D}.$$

Учитывая эти выражения, преобразуем интегралы по поверхности (1.63) к следующему виду:

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{E}_s^1}{\partial k} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^{1*} ds_1 + \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}_s^1}{\partial k} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^{1*} ds_2 + \right. \\ \left. + i D \frac{d h_s}{d k} \int_{S_2} \mathbf{E}_s^1 \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^{1*} ds_2 \right\}.$$

Первые два интеграла взаимно уничтожаются из-за противоположного направления внешней нормали к поверхностям  $S_1$  и  $S_2$ , и равенство (1.62) принимает вид

$$2 \operatorname{Re} \left\{ iD \frac{dh_s}{dk} \int_{S_2} \mathbf{E}_s^2 \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^{2*} ds_2 \right\} = 2k \int_V \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^* dv,$$

или после преобразований

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_S [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s^*] ds \right\} &= \frac{1}{2} \frac{1}{D} \frac{dk}{dh_s} \int_V |\mathbf{E}_s|^2 dv = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{D} \frac{dk}{dh_s} \int_V \left[ \frac{1}{2} |\mathbf{E}_s|^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{H}_s|^2 \right] dv. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Последнее равенство, показывающее идентичность групповой скорости для собственных волн периодической структуры и скорости распространения энергии на этих волнах, как раз и составляет содержание доказанной теоремы.

## ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНОВ В УСКОРИТЕЛЯХ ПРИ МАЛОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ПУЧКА

### 2.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При достаточно малой интенсивности пучка, проходящего волноводную структуру, в которой имеется стороннее поле (ускоряющее или отклоняющее), можно при рассмотрении движения частиц пренебречь собственным полем, создаваемым частицами пучка. Это означает: 1) что мы не учитываем взаимодействия частиц между собой (кулоновское отталкивание, притяжение параллельных токов), т. е. сводим общую задачу динамики многих частиц к одночастичной; 2) пренебрегаем влиянием нагрузки внешнего поля на пучок, т. е. изменением величины самого ускоряющего поля из-за возбуждения пучком противофазного поля такой же структуры. Эти эффекты рассмотрены в следующих главах. Наша задача, с учетом сделанных допущений, сводится к рассмотрению движения отдельной заряженной частицы в заданном внешнем электромагнитном поле, т. е. к решению уравнения движения \*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right), \quad (2.1)$$

где  $m$ ,  $e$ ,  $\mathbf{v}$  — масса, заряд и скорость частицы, а  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — заданные электрическое и магнитное поля. В линейном ускорителе электронов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — компоненты высокочастотного электромагнитного поля симметричной ускоряющей волны. К этим полям следует добавить еще поля специальных фокусирующих систем, располагаемых вдоль пути частиц.

В общем случае движения частиц в ускорителе в продольном и поперечном направлениях взаимосвязаны,

---

\* С подробностями расчета динамики частиц в заданном внешнем высокочастотном поле можно ознакомиться, например, в работах [1—6].



и рассматривать их приходится совместно. Однако если рассмотреть случай малых отклонений частиц от оси волновода, встречающийся на практике, то уравнение продольного движения вдоль оси  $z$  ускорителя приобретает вид \*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - (\dot{z}/c)^2}} \right) = eE_z(z, t), \quad (2.2)$$

т. е. не содержит характеристик поперечного движения и может рассматриваться независимо. При выводе формулы (2.2) опущены члены второго порядка по поперечным смещениям  $x$ ,  $y$  и их производным  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  и принято, что внешнее поле — это симметричная волна. Удобнее записать уравнение (2.2) в другом виде, приняв за независимую переменную продольную координату  $z$ :

$$\frac{d\gamma}{d\zeta} = \frac{eE_z(\zeta, t)\lambda}{mc^2}; \quad \frac{dt}{d\zeta} = \frac{\lambda}{v} = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (\dot{z}/c)^2}$  — безразмерная полная энергия частицы, а  $\zeta = z/\lambda$  — безразмерная продольная координата ( $\lambda$  — длина волны внешнего поля). Что касается поперечного движения частицы, то его уже нельзя рассматривать независимо от продольного хотя бы потому, что полная энергия частицы определяется продольным движением. Кроме того, сила, действующая на частицу в поперечном направлении, зависит от того, в какой фазе поля находится частица, т. е. от продольного ее движения. Уравнение поперечного движения имеет следующий вид (при отсутствии внешних фокусирующих полей):

$$v \frac{d}{dz} \left( \gamma v \frac{dr}{dz} \right) = \frac{e}{m} \left[ E_r(r, z, t) - \frac{v}{c} H_\varphi(r, z, t) \right], \quad (2.4)$$

где  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  — цилиндрические координаты частицы \*\*. Для малых  $r$  составляющие  $E_r$  и  $H_\varphi$  можно выразить через значения  $E_z(z, t)$  на оси ( $r=0$ ), тогда уравнение (2.4) в линейном приближении по  $r$  принимает вид

$$v \frac{d}{dz} \left( \gamma v \frac{dr}{dz} \right) = eB(z, t)r, \quad (2.5)$$

\* Точка означает дифференцирование по времени.

\*\* Строго говоря, уравнение (2.4) справедливо для каждой декартовой компоненты поперечного смещения.

где

$$B(z, t) = -\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{v}{c^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial t} \right)_{z=0} \right]. \quad (2.6)$$

Функции  $v(z)$  и  $t(z)$  известны из решения уравнения продольного движения, а  $E_z(z, t)$  и  $B(z, t)$  имеют для волны в диафрагмированном волноводе весьма сложную структуру. Их можно упростить, если из бесконечной суммы пространственных гармоник, описывающей поле, оставить лишь одну, фазовая скорость которой близка к фазовой скорости частицы. Для остальных волн частица быстро скользит по фазам, в среднем не взаимодействуя с ними. Учет влияния этих внешних гармоник рассмотрим ниже. Здесь же мы проведем анализ, пренебрегая высшими гармониками. Поле  $E_z$  записывается при этом в виде

$$E_z(\zeta, t) = E_0 \cos(\omega t - hz + \varphi_0),$$

или в более общем случае неоднородной по длине структуры

$$E_z(\zeta, t) = E_0(\zeta) \cos \left( \omega t - \lambda \int_{\zeta_0}^{\zeta} h(\zeta) d\zeta + \varphi_0 \right). \quad (2.7)$$

Зависимость амплитуды  $E_0$  от  $\zeta$  учитывает как затухание волны, так и изменение структуры волновода вдоль по  $\zeta$ . Введем фазу частицы

$$\varphi = \omega t - \lambda \int_{\zeta_0}^{\zeta} h(\zeta) d\zeta + \varphi_0. \quad (2.8)$$

Тогда уравнение продольного движения перепишем в виде двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\zeta} &= A(\zeta) \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{d\zeta} &= 2\pi \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_v(\zeta)} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

где  $A = eE_0\lambda/mc^2$ ,  $\beta = \sqrt{1-1/\gamma^2}$  — приведенная скорость частицы, а  $\beta_v = v_v/c = \omega/ch$  — приведенная скорость волны при данном  $\zeta$ .

Уравнение поперечного движения (2.5) соответственно примет вид

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \beta\gamma \frac{dr}{d\zeta} \right) + K \sin \varphi \cdot r = 0, \quad (2.10)$$

где

$$K = \pi \frac{eE_0 \lambda}{mc^2} \cdot \frac{1 - \beta\beta_v}{\beta\beta_v}. \quad (2.11)$$

Как уже указывалось, в рассматриваемом приближении продольное (фазовое) движение, определяемое уравнениями (2.9), не зависит от радиального, тогда как радиальное существенно зависит от фазы  $\varphi$ .

## 2.2. ПРОДОЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Даже полученные упрощенные уравнения движения (2.9) не поддаются в общем случае аналитическому решению: их решают численно или приближенно. Для качественной оценки характера движения достаточно рассмотреть частный случай постоянной скорости волны ( $\beta_v = \text{const}$ ) и постоянной амплитуды поля вдоль ускорителя ( $A(\xi) = \text{const}$ ), для которого можно провести аналитическое исследование. Для простоты примем  $\beta_v = 1$ , так как в электронных ускорителях скорость электрона очень быстро становится близкой к  $c$ , и можно считать, что  $\beta_v = 1$  с самого начала ускорения. Для этого случая запишем первый интеграл уравнений (2.9)

$$\frac{2\pi}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}} = A(C - \sin \varphi). \quad (2.12)$$

Он представляет собой уравнение фазовой траектории в переменных  $(\varphi, \gamma)$ . Здесь  $C$  — постоянная интегрирования. Это уравнение описывает монотонное увеличение  $\varphi$ . Монотонный характер движения следует из вида фазы при  $\beta_v = 1$ :

$$\varphi = \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + \varphi_0.$$

Так как  $v = \dot{z} < c$ , то фаза  $\varphi$  только растет, т. е. частица может лишь отставать от волны. Значение постоянной интегрирования  $C$  определяется начальными условиями:

$$C = \sin \varphi_n + \frac{2\pi}{A} \frac{1}{\gamma_n + \sqrt{\gamma_n^2 - 1}}.$$

Если  $C > 1$ , то частица не захватывается в синхронный режим ускорения. Это может иметь место при малых начальных энергиях электрона  $\gamma_n$  и малых ускоряющих

полях. Если же  $C < 1$ , то фаза частицы монотонно приближается к асимптотическому значению  $\varphi_\infty$ , причем

$$\sin \varphi_\infty = C = \sin \varphi_n + \frac{2\pi}{A} \frac{1}{\gamma_n + \sqrt{\gamma_n^2 - 1}}. \quad (2.13)$$

Вид фазовых кривых показан на рис. 2.1. Чтобы обеспечить описанный выше режим, необходимы достаточно сильное поле и достаточно высокая начальная энергия. Для оценки порядка величин потребуем выполнения следующего неравенства:  $\sin \varphi_\infty - \sin \varphi_n < 1$ . Отсюда  $A > 2\pi / (\gamma_n + \sqrt{\gamma_n^2 - 1})$ . На волне  $\lambda \approx 10$  см это означает, что при начальной энергии 100 кэВ поле должно быть больше 170 кВ/см, при 500 кэВ оно должно превышать 85 кВ/см, а при 1 МэВ достаточно 50 кВ/см. Таким образом, изменение фазы на всем протяжении ускорителя, исключая его начальный участок, носит характер медленного приближения к асимптотической фазе.

Для оценки величины отклонения  $\delta\varphi$  от асимптотического значения вернемся к уравнению (2.9). По порядку величины  $\gamma \sim \gamma_n + A \cdot \zeta \cos \varphi \sim \gamma_n + A \cdot \zeta \cos \varphi_\infty \sim A \cdot \zeta \cos \varphi_\infty$  (для не очень малых  $\gamma$ ). С другой стороны, из соотношений (2.12) и (2.13) имеем  $\sin \varphi_\infty - \sin \varphi \approx \cos \varphi_\infty \delta\varphi \approx \frac{2\pi}{A} \cdot \frac{1}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}} \approx \frac{\pi}{A\gamma}$ ,

$$\text{откуда} \quad \delta\varphi \approx \frac{\pi}{(A \cos \varphi_\infty)^2} \frac{1}{\zeta}. \quad (2.14)$$

Отклонение фазы частицы от асимптотической убывает обратно пропорционально энергии, причем множитель  $\pi / (A \cos \varphi_\infty)^2 \sim 1$ , поэтому уже на нескольких длинах волн успевает с большой точностью установиться асимптотическое значение фазы. Следовательно, при рассмотрении набора энергии и поперечного движения

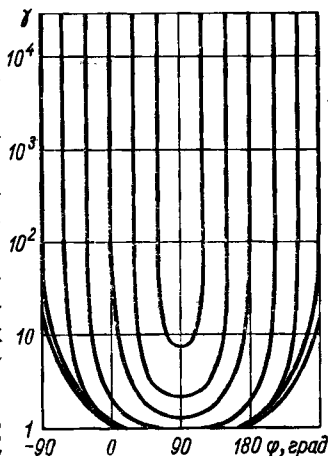


Рис. 2.1. Фазовые траектории частицы, движущейся в заданном поле ( $\beta=1$ ).

можно считать продольную скорость электрона в ускорителе на большие энергии заданной и равной скорости света, что мы и будем делать в дальнейшем. Что касается асимптотической фазы, то она зависит от начальных условий. Так как фаза определяет набор энергии на единице длины структуры, желательно, чтобы она была близка к нулю ( $\cos \varphi_\infty = 1$ ). В соответствии с этим начальный участок ускорителя (группирователь) рассчитывается так, чтобы на выходе из него большинство частиц находилось на фазовых траекториях, близких к траектории  $\sin \varphi_\infty = 0$ \*. Детальный расчет группирователей приведен в работах [7, 8].

Рассмотрим теперь вкратце влияние высших гармоник на продольное движение. Если учесть, что в релятивистской области скорость частицы практически постоянна и равна  $c$ , то можно показать, что высшие гармоники не производят в среднем работы над частицей, приводя лишь к модуляции ее энергии с периодом, равным времени пролета одного периода структуры. Действительно, к постоянной силе  $E_0 \cos \varphi$  в уравнении продольного движения добавляется переменная составляющая

$$\tilde{E} = \sum_{n \neq 0} E_n \cos \left( \varphi - \frac{2\pi n \lambda}{D} \zeta + \delta_n \right). \quad (2.15)$$

Работа этой силы на одном периоде равна нулю. Вносимое ею изменение энергии носит колебательный характер и равно

$$\Delta \gamma = \frac{e\lambda}{mc^2} \int \tilde{E} d\zeta = -\frac{e\lambda}{mc^2} \sum_{n \neq 0} \frac{E_n D}{2\pi n \lambda} \sin \left( \varphi - \frac{2\pi n \lambda}{D} \zeta + \delta_n \right). \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) отражает тот факт, что набор энергии на периоде структуры происходит неравномерно. На скорости частицы (в релятивистской области) это не отражается, а значит, не влияет и на ее излучение. Поэтому в дальнейшем эти мелкие колебания энергии мы не учитываем.

---

\* Или же группировались вокруг какого-либо другого значения  $\sin \varphi_\infty$ . Тогда, если ввести сдвиг по фазе, можно перевести частицы в область  $\sin \varphi_\infty \approx 0$ .

### 2.3. ПОПЕРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ

При отсутствии специальных внешних фокусирующих систем поперечное движение частицы определяется уравнением (2.10). Начальная часть ускорителя (группирователь) проектируется так, что  $\sin \varphi_\infty = 0$ , а фаза  $\varphi$  монотонно растет; поэтому в процессе ускорения, пока еще не достигнуто  $\varphi_\infty$ , значение  $\sin \varphi < 0$ , а входящая в выражение (2.10) сила носит характер дефокусирующей. Однако так как почти с самого начала ускорения действие магнитного поля почти компенсирует действие электрического ( $1 - \beta\beta_v \ll 1$ ) и, кроме того, частицы находятся вблизи максимума электрического поля ( $|\sin \varphi| \ll 1$ ), то дефокусирующая сила мала, и можно с достаточной точностью считать, что поперечное движение описывается уравнением

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \gamma \frac{dr}{d\zeta} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$r = r_n + \gamma_n \left( \frac{dr}{d\zeta} \right)_n \int_{\zeta_n}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\gamma(\zeta)}.$$

Считая приближенно рост энергии по длине ускорителя линейным ( $\gamma \approx A \cos \varphi_0 \zeta \approx A\zeta$ ), получаем

$$r = r_n + \frac{\gamma_n}{A} \left( \frac{dr}{d\zeta} \right)_n \ln \frac{\zeta}{\zeta_n}.$$

Очень медленный (логарифмический) рост поперечного отклонения частиц с увеличением энергии или длины, обусловленный релятивистским нарастанием массы электронов, приводит к тому, что на основной части ускорителя никакие дополнительные фокусирующие системы, как правило, не требуются. Тем не менее во многих случаях они применяются. Во-первых, в начальной части ускорителя дефокусирующие силы могут все же оказывать заметное влияние на движение частиц. Кроме того, применение фокусирующих систем повышает предельно допустимый ток в ускорителе.

В связи с этим рассмотрим вкратце поперечное движение частиц при наличии фокусировки.

Простейший метод фокусировки — продольное статическое магнитное поле  $H_0$ . Примем, что вблизи оси  $H_0$  не зависит от поперечных координат, хотя оно может зависеть от  $z$ . Уравнение (2.4), справедливое для каждой декартовой составляющей поперечного смещения  $x$  и  $y$ , переходит в систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v \frac{d}{dz} \left( \gamma v \frac{dx}{dz} \right) &= \frac{e}{m} \left[ E_x - \frac{v}{c} H_y + \frac{v}{c} \frac{dy}{dz} H_0 \right]; \\ v \frac{d}{dz} \left( \gamma v \frac{dy}{dz} \right) &= \frac{e}{m} \left[ E_y + \frac{v}{c} H_x - \frac{v}{c} \frac{dx}{dz} H_0 \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

или, если перейти к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} v \frac{d}{dz} \left( \gamma v \frac{dr}{dz} \right) &= \\ = \frac{e}{m} \left( E_r - \frac{v}{c} H_\varphi + \frac{v}{c} r \varphi' H_0 \right) + \gamma r v^2 (\varphi')^2, \\ \gamma r^2 v \varphi' + \frac{e}{2mc} r^2 H_0 &= \text{const} = K. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $z$ . Найдем из второго уравнения  $\varphi'$  и подставим его в первое, переходя одновременно к аргументу  $\zeta$ . Получим уравнение

$$\begin{aligned} - \frac{d}{d\zeta} \left( \beta \gamma \frac{dr}{d\zeta} \right) + K r \sin \varphi + \\ + \frac{1}{4c^2 \beta \gamma} \left( \frac{e H_0 \lambda}{m_0 c^2} \right)^2 - \frac{\lambda^2 K^2}{c^2 \beta \gamma r^3} = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В этом выражении член, пропорциональный  $H_0^2$ , обеспечивает дополнительную фокусировку пучка магнитным продольным полем. Последнее слагаемое, вносящее дефокусировку, обусловлено начальным значением  $r^2 H_0$  в точке инжекции, в случае же экранированных катодов оно пропадает. Подбором  $H_0$  можно обеспечить требуемую степень фокусировки. При отсутствии последнего члена уравнение (2.20) линейно по  $r$ , и его анализ не представляет труда.

Влияние переменных составляющих электромагнитного поля (как и в случае продольного движения) приводит лишь к «дрожанию» частицы и к дополнительной эффективной фокусировке знакопеременного типа.

Поперечные составляющие быстропеременного электромагнитного поля можно рассчитать из соотношения (2.6), где под  $E_z$  следует понимать быстропеременную часть поля (2.15). Подставляя выражение (2.15) в (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{B} = & \frac{1}{2m} \sum_{n \neq 0} \left( \omega \frac{\beta}{c} - \frac{\omega \beta_B}{c} - \frac{2\pi n}{D} \right) \times \\ & \times E_n \sin \left( \varphi - \frac{2\pi n \lambda}{D} \zeta + \delta_n \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

При  $n \neq 0$  можно положить  $\beta \approx \beta_B \approx 1$ , так что

$$\tilde{B}(\zeta, \varphi) = - \frac{\pi}{mD} \sum_{n \neq 0} n E_n \sin \left( \varphi - \frac{2\pi n \lambda}{D} \zeta + \delta_n \right). \quad (2.22)$$

Уравнение поперечного движения частицы с учетом этой знакопеременной фокусирующей силы принимает вид

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \beta \gamma \frac{dr}{d\zeta} \right) + \left[ K \sin \varphi - \frac{\lambda^2 e}{c^2 \beta} B(\varphi, \zeta) \right] r = 0. \quad (2.23)$$

Поскольку период изменения  $\tilde{B}(\zeta)$  во много раз меньше характерного времени изменения  $r$ , наличие знакопеременного члена сказывается на усредненном движении как некоторая дополнительная фокусирующая сила, так что для усредненного отклонения  $\bar{r}$  можно написать

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \beta \gamma \frac{d\bar{r}}{d\zeta} \right) + (K \sin \varphi + K_1) \bar{r} = 0. \quad (2.24)$$

Значение  $K_1$  можно найти методом, описание которого приведено в работе [9], или каким-либо другим, эквивалентным ему. [10]; оно оказывается равным

$$K_1 = \frac{1}{8\beta^2 \gamma^2} \sum_{n \neq 0} \left( \frac{e E_n \lambda}{m c^2} \right)^2. \quad (2.25)$$

На среднее движение частицы накладывается дрожание  $\tilde{r}$  с периодом внешней силы. Оценим его, используя соотношение

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{d\zeta^2} \approx \frac{\lambda^2 e}{c^2 \beta^2 \gamma} \tilde{B}(\varphi, \zeta) r, \quad (2.26)$$



в котором пренебрежем медленным изменением всех коэффициентов, и будем считать, что  $r$  справа равно его среднему значению  $\bar{r}$ . Непосредственное интегрирование дает

$$\frac{\bar{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\beta^2\gamma} \frac{D}{\lambda} \sum \frac{1}{n} \frac{eE_n\lambda}{mc^2} \sin\left(\varphi - \frac{2\pi n\lambda}{D}\zeta + \delta_n\right). \quad (2.27)$$

Отсюда можно оценить относительную модуляцию радиуса. Видно, что основное значение имеют низшие гармоники  $E_n$ . Чем меньше отношение  $D/\lambda$  (чаще модуляция), тем меньше амплитуда модуляции.

## ИЗЛУЧЕНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ИЛИ СГУСТКОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СТРУКТУРЕ

### 3.1. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДА ТОЧЕЧНЫМ ЗАРЯДОМ

Выше рассмотрено движение заряженных частиц под действием ускоряющего высокочастотного поля. Было показано, что на относительно коротком начальном участке происходит группировка непрерывно инжектируемого пучка в отдельные сгустки, движение которых можно считать далее заданным (равномерное движение со скоростью, практически равной  $c$ ) на всем протяжении ускорителя. Радиальное смещение частиц под действием симметричного ускоряющего поля увеличивается медленно (логарифмически), и поэтому для начальных оценок им можно пренебречь. Для большей части ускорителя пучок можно представить как последовательность точечных заряженных сгустков, движущихся с постоянной скоростью параллельно оси структуры и находящихся друг от друга на расстояниях, равных длине волны ускоряющего поля  $\lambda_0$ .

В этой главе проведен расчет электромагнитного поля, возбуждаемого пучком в замедляющих структурах различного вида, в приближении заданного тока, т. е. без учета влияния реакции излучения на динамику отдельных сгустков. Результаты расчета в дальнейшем использовались и для самосогласованного рассмотрения поперечного движения сгустков. При вычислении возбуждаемых полей мы будем в основном придерживаться метода расчета, изложенного в работах [1, 2].

Заметим, что задача, аналогичная исследуемой в этой главе, ставилась ранее в работах [3—6] в связи с исследованием эффекта Вавилова—Черенкова. До сих пор рассматривались замедляющие структуры лишь одного типа — диафрагмированный волновод. В некоторых ускорителях предлагалось использовать другие спо-

собы замедления электромагнитных волн, в частности однородные структуры — волноводы с диэлектрическим заполнением. Из-за ряда присущих таким структурам недостатков [7, 8] они не получили широкого распространения в ускорительной технике. Однако для простых замедляющих структур удастся провести до конца точный электродинамический расчет возбуждения электромагнитных волн и построить модель процесса взаимодействия пучка электронов с высокочастотным полем. Для таких структур удастся также рассмотреть и нестационарную задачу о пространственно-временном распределении поля излучения в секции ограниченной протяженности. Поэтому расчеты электромагнитных полей, возбуждаемых отдельными частицами или сгустками, движущимися в замедляющей структуре, мы начнем со строгого рассмотрения простейшей модельной задачи. В дальнейшем попытаемся обобщить это рассмотрение и на более сложные общепринятые периодические структуры. В ряде случаев для расчета возбуждения электромагнитного поля будем использовать простой и наглядный приближенный энергетический метод, обоснованием которого также может служить сопоставление с результатами точного электродинамического решения задачи.

Некоторые существенные черты анализа особенно наглядно проявляются при рассмотрении простейшей замедляющей системы — круглого волновода, сплошь заполненного диэлектриком [9]. Диэлектрическая постоянная среды  $\epsilon$ , вообще говоря, зависит от частоты  $\epsilon(\omega)$  и пренебрежение дисперсией приводит для рассматриваемой структуры к расходимости выражения для полных потерь энергии движущимися источниками. Однако вначале, для простоты, мы не будем учитывать дисперсию диэлектрика ( $\epsilon = \text{const}$ ). Заметим также, что зависимость  $\epsilon(\omega)$  существенна, если в рабочем диапазоне частот  $\epsilon$  обращается в нуль. Это может быть справедливо, например, для волноводов с плазменным заполнением. В последнем случае необходимо учитывать не только излучения черенковского типа, но и потери на возбуждение колебаний плазмы — так называемое бортовое излучение. Этот эффект мы также рассматривать не будем.

Пусть заряд  $q$  движется равномерно со скоростью  $v$  параллельно оси структуры  $z$  на расстоянии  $\rho$  от нее;

азимутальный угол  $\theta$  определяет плоскость, проходящую через ось и траекторию частицы. Плотность тока, возбуждающего волновод, задается следующим соотношением:

$$j(\mathbf{r}, t) = j_z = qv \frac{\delta(r-\rho)}{r} \delta[z - z_1(t)] \delta(\varphi - \theta). \quad (3.1)$$

Здесь используется цилиндрическая система координат, ось которой совпадает с осью волновода,  $z_1(t) = vt$ ,  $\delta(x)$  — дельта-функция. (Норма  $\delta$ -функции выбрана так, что интеграл по всей области изменения ее аргумента равен единице).

Представим выражение для плотности тока  $j_z(\mathbf{r}, t)$  в виде интеграла Фурье

$$j(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} j(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.2)$$

где

$$j(\omega) = \frac{q\delta(r-\rho)\delta(\varphi-\theta)}{2\pi r} e^{i\frac{\omega}{v}z} \quad (-\infty \leq z \leq \infty).$$

Поле, возбуждаемое произвольным распределением гармонических источников в волноводе произвольного сечения, можно представить в виде набора собственных волноводных волн с определенными коэффициентами [1, 2]. Вычислив поля [2], возбуждаемые источниками  $j(\omega)$ , мы найдем тем самым фурье-изображение для искомого поля, а применив затем обратное преобразование Фурье, определим поле.

Электрический ток  $j_z$  может возбуждать лишь волны, у которых отлична от нуля продольная составляющая электрического вектора, т. е. волны поперечно-магнитного типа (ТМ). Возбуждаемые собственные волны с  $m$ -вариациями по азимуту в круглом волноводе можно описать продольным электрическим вектором Герца

$$P_s^E = \frac{\epsilon}{\chi_{ms}^2} J_m(\chi_{ms}r) e^{im\varphi + ih_{ms}z}. \quad (3.3)$$

Здесь  $J_m$  — функция Бесселя;  $\chi_{ms} = \mu_{ms}/b$  — поперечные волновые числа;  $b$  — радиус волновода;  $\mu_{ms}$  — корень уравнения  $J_m(\mu) = 0$ ,  $h_{ms} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - \chi_{ms}^2}$  — волновые числа собственных волн. Система собственных волноводных волн состоит из бегущих волн, распространяю-

щихся в положительном направлении оси  $z$  (они обозначаются положительным индексом  $s > 0$ ), и связанных с ними соотношениями (1.49), (1.50) волн того же типа, направленных в противоположную сторону ( $s < 0$ ).

Распределения полей прямых волн устанавливаются с помощью уравнения (3.3) согласно известным формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \text{grad div } \Pi^E + k^2 \Pi^E; \quad \mathbf{H} = -ik \text{rot } \Pi^E.$$

Полное поле, возбуждаемое в волноводе током  $j_z(\omega)$ , можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\omega) &= \sum_s (C_s \mathbf{E}_s + C_{-s} \mathbf{E}_{-s}) + \frac{4\pi}{i\omega\varepsilon} j_z(\omega) \mathbf{z}_0, \\ \mathbf{H}(\omega) &= \sum_s (C_s \mathbf{H}_s + C_{-s} \mathbf{H}_{-s}). \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Коэффициенты разложения  $C_{\pm s}$  по собственным волнам определяются интегральными равенствами:

$$\left. \begin{aligned} C_s(z, \omega) &= \frac{1}{N_s(\omega)} \int_{(z_1, z)} \mathbf{j}(\omega) \mathbf{E}_{-s} dv, \\ C_{-s}(z, \omega) &= \frac{1}{N_s(\omega)} \int_{(z, z_2)} \mathbf{j}(\omega) \mathbf{E}_s dv. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Здесь скобка  $(z_1, z)$  означает, что интегрирование проводится по всем источникам, расположенным левее рассматриваемого сечения  $z$  (вплоть до левой границы области источников  $z_1$ );  $(z, z_2)$  означает интегрирование по всем источникам, находящимся правее сечения  $z$  (вплоть до правой границы области источников  $z_2$ ). В рассматриваемом случае

$$C_{\pm s}(z, \omega) = \frac{qe^{-im\theta}}{2\pi i N_s(\omega)} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{v} \mp h_{ms}\right)}}{\frac{\omega}{v} \mp h_{ms}}. \quad (3.6)$$

Нормировочный множитель  $N_s(\omega)$  определяется соотношением (1.55):

$$N_s(\omega) = \frac{c}{4\pi} \int_S \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{-s}] - [\mathbf{E}_{-s} \mathbf{H}_s]\} \mathbf{z}_0 ds.$$

Интегрирование проводится по поперечному сечению волновода  $S$ . Для круглого волновода с однородным диэлектрическим заполнением имеем

$$N_s(\omega) = -\frac{b^2 h_{ms} k c \varepsilon}{2\chi_s^2} [J'_m(\mu_{ms})]^2. \quad (3.7)$$

Поле, возбуждаемое летящим зарядом, в функции координат и времени имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

где  $\mathbf{E}(\omega)$  и  $\mathbf{H}(\omega)$  определяются с учетом соотношений (3.4), (3.6) и (3.7).

Проведя вычисления, получим, например, для продольной составляющей электрического поля выражение:

$$\begin{aligned} E_z(\mathbf{r}, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4q\varepsilon_m J_m(\chi_{ms} \rho) J_m(\chi_{ms} r) \cos m(\varphi - \theta)}{v^2 b^2 [J'_m(\mu_{sm})]^2} \times \\ &\times \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(1 - \varepsilon\beta^2) e^{-i\omega(t-z/v)}}{\frac{\omega^2}{v^2} (1 - \varepsilon\beta^2) + \chi_{ms}^2} \cdot \frac{d\omega}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где 
$$\varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0, \\ 1 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

(При вычислении  $E_z(\mathbf{r}, t)$  использовалось представление  $\delta$ -функции в виде разложения Фурье—Бесселя.) Каждое из слагаемых в суммах (3.9) представляет гармонику возбуждаемого зарядом поля излучения с фиксированным числом азимутальных и радиальных вариаций. Входящий в выражение для  $E_z$  интеграл можно вычислить при помощи вычетов. Для упрощения выкладок предположим вначале, что среда не обладает дисперсией, т. е.  $\varepsilon(\omega) = \text{const}$ . В дальнейшем следует различать случаи, когда скорость частицы  $v$  соответственно меньше или больше фазовой скорости  $c/\sqrt{\varepsilon}$  волн в безграничном диэлектрике.

При  $\epsilon\beta^2 < 1$  (рис. 3.1, а) подынтегральное выражение в (3.9) имеет два полюса, лежащих на мнимой оси:  $\omega = \pm i \kappa_{ms} v / \Delta_1$  ( $\Delta_1^2 = 1 - \epsilon\beta^2 > 0$ ). Замыкая контур интегрирования в комплексной плоскости полуокружностью бесконечного радиуса, на которой выполнялись бы условия леммы Жордана (эта полуокружность лежит в верхней полуплоскости при  $t - z/v < 0$  и в нижней при  $t - z/v > 0$ ), и вычисляя вычеты, получаем

$$E_z(r, t) = \mp \sum_{s, m} \frac{4\epsilon_m q J_m(\kappa_{ms} r) J_m(\kappa_{ms} r) \cos m(\theta - \varphi)}{b^2 \epsilon [J'_m(\nu_{ms})]^2} \times \\ \times e^{\mp \frac{\kappa_{ms} v}{\Delta_1} (t - z/v)} \left( t - \frac{z}{v} \gtrless 0 \right). \quad (3.10)$$

Неравенство  $t - z/v > 0$  выполняется для точек, лежащих в области, которую частица уже пролетела; обратное неравенство  $t - z/v < 0$  соответствует области впереди частицы. Аналогично можно вычислить и другие компоненты электромагнитного поля.

Из формул (3.10) видно, что в рассматриваемом случае поле экспоненциально убывает при отходе от точки расположения частицы  $z = vt$ . Из вида функции  $E_z(r, t)$  (антисимметричной относительно плоскости  $z = vt$ ) следует, что среднее значение  $E_z$  в точке, где находится частица, равно нулю, а следовательно, нет потерь энергии частицей.

В подвижной системе координат, жестко связанной с частицей, составляющие поля записываются особенно просто. В этой системе координат магнитное поле обращается в нуль, а электрическое постоянно во времени (это кулоновское поле точечного заряда, покоящегося внутри трубы).

В случае, когда выполняется условие черенковского излучения  $\epsilon\beta^2 > 1$ , подынтегральное выражение в формуле (3.9) имеет два чисто действительных полюса:  $\omega = \pm \kappa_{ms} v / \Delta$  ( $\Delta^2 = \epsilon\beta^2 - 1 > 0$ ). Оба полюса лежат на вещественной оси, поэтому для вычисления интеграла нужно установить пути обхода особенностей.

Допуская, как обычно принято, наличие малых потерь в диэлектрике, легко проверить, что интегрирование должно проводиться вдоль действительной оси с обходом особенностей по петле, охватывающей полюс

сверху (см. рис. 3.1). Контур обхода можно выбирать и не вводя малого затухания, а требуя, чтобы поле удовлетворяло начальным условиям обращения в нуль при  $t \rightarrow -\infty$ . Замыкая контур интегрирования дугой окружности бесконечного радиуса и вычисляя вычеты, получаем

$$E_z(r, t) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8q\epsilon_m J_m(x_{ms}\rho) J_m(x_{ms}r) \cos m(\theta - \varphi)}{\epsilon b^2 [J'_m(\nu_{ms})]^2} \times \\ \times \cos \frac{x_{ms}v}{\Delta} \left( t - \frac{z}{v} \right) \text{ при } t - \frac{z}{v} > 0, \\ 0 \quad \text{при } t - \frac{z}{v} < 0. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Таким образом, если выполняется условие  $\epsilon\beta^2 > 1$  (рис. 3.1, б), то при равномерном движении заряда

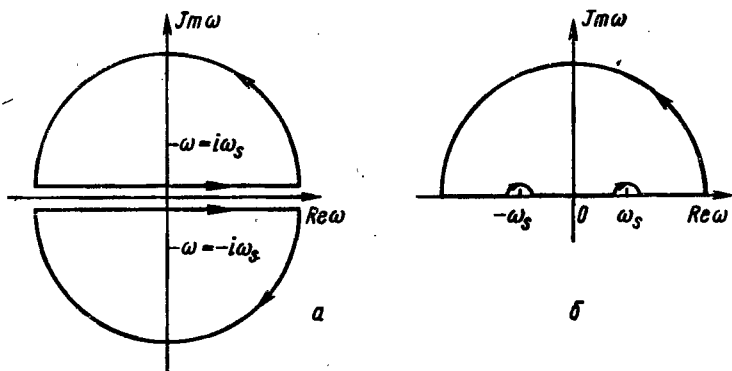


Рис. 3.1. Контурсы интегрирования на комплексной плоскости  $\omega$ .

устанавливается следующее распределение поля: в области перед зарядом ( $t - z/v < 0$ ) поле отсутствует; в области, пройденной зарядом ( $t - z/v > 0$ ), распространяется без затухания система волн с волновыми числами  $h_{ms} = x_{ms}/\Delta$ .

Потери энергии заряда на излучение (отнесенные к единице длины) можно определить как работу возбуждаемого зарядом поля над самой частицей. Для них



в рассматриваемом случае получим

$$W = qE_z(r = \rho, \varphi = \theta, z = vt) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4q^2 \varepsilon_m}{b^2 \varepsilon} \times \\ \times \frac{J_m^2(\nu_{ms} \rho / b)}{[J'_m(\nu_{ms})]^2}. \quad (3.12)$$

При движении частицы по оси волновода  $\rho=0$ , когда возбуждаются лишь волны с азимутальной симметрией, из соотношения (3.12) следует известное [3] выражение

$$W = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2q^2}{\varepsilon b^2 J_1^2(\nu_{0s})}. \quad (3.13)$$

Если учитывать дисперсию диэлектрика, заполняющего волновод ( $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ ), то полное электромагнитное поле оказывается состоящим из двух частей, различающихся по своему характеру. Одна часть — волновое поле, представляет собой набор незатухающих распространяющихся гармоник разной частоты; это поле излучения типа Вавилова—Черенкова. Другая часть поля состоит из экспоненциально затухающих гармоник, локализованных в окрестности движущегося источника (эту часть можно назвать кулоновским полем, имея в виду соответствующую электростатическую аналогию). Выражение для волновой части продольной составляющей поля излучения записывается в несколько более сложном виде, чем равенство (3.11):

$$E_z(r, t) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s, m} \frac{8q\varepsilon_m J_m(\nu_{ms} \rho) J_m(\nu_{ms} r) \cos m(\theta - \varphi)}{c^2 b \nu_{ms} [J'_m(\nu_{ms})]^2} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{1}{\varepsilon(\omega_s) \beta^2} \right] \left| \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega \sqrt{\varepsilon \beta^2 - 1}}{v} \right) \right|_{\omega=\omega_s}^{-1} \times \\ \times \cos \omega_s \left( t - \frac{z}{v} \right) \text{ при } t - \frac{z}{v} > 0, \\ 0 \quad \text{при } t - \frac{z}{v} < 0. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Здесь суммирование проводится по тем волнам, для которых выполняется условие черенковского излучения,

а  $\omega_s$  — действительные корни уравнения:

$$\frac{\omega}{v} \sqrt{\varepsilon(\omega) \beta^2 - 1} = \frac{v_{ms}}{b}. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) помимо действительных корней  $\omega_s$  допускает еще и чисто мнимые решения  $i\Omega_s$ . Сумма вычетов в этих чисто мнимых полюсах как раз и представляет кулоновское поле движущегося заряда. Волновое поле обеспечивает дальнейшее взаимодействие нескольких одновременно движущихся в структуре пространственно-разнесенных источников. Спадающее с расстоянием кулоновское поле существенно лишь в непосредственной близости от движущегося источника.

Мы рассматривали идеальную замедляющую структуру, в которой электромагнитное поле распространяется без затухания. Для определения коэффициента затухания поля, возбуждаемого летящим зарядом, считаем, что диэлектрик обладает малыми потерями: диэлектрическая постоянная комплексна  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon + i\varepsilon' = \varepsilon + i4\pi\sigma/\omega$  ( $\sigma$  — малая проводимость диэлектрика). Выражение (3.9) для поля  $E_z$  приближенно представим в виде

$$E_z = \sum_{s, m} \frac{8q\varepsilon_m J_m(x_{ms}\rho) J_m(x_{ms}r) \cos m(\theta - \varphi)}{v^2 b^2 \varepsilon [J'_m(v_{ms})]^2} \times \\ \times \left\{ (\varepsilon\beta^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega e^{-i\omega(t-z/v)}}{\omega^2 (\tilde{\varepsilon}\beta^2 - 1) - x_{ms}^2 v^2} d\omega + \right. \\ \left. + i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(t-z/v)}}{\omega^2 (\tilde{\varepsilon}\beta^2 - 1) - x_{ms}^2 v^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \right\}. \quad (3.16)$$

Второе слагаемое, пропорциональное малой величине  $4\pi\sigma/\omega$ , значительно меньше первого и в дальнейшем опускается. Определяя вычеты, получаем

$$E_z(r, t) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s, m} \frac{8q\varepsilon_m J_m(x_{ms}\rho) J_m(x_{ms}r) \cos m(\theta - \varphi)}{\varepsilon b^2 [J'_m(v_{ms})]^2} \times \\ \times e^{-\frac{2\pi\varepsilon\beta^2}{\Delta^2}(t-z/v)} \cos \frac{x_{ms}v}{\Delta} \left(t - \frac{z}{v}\right) \text{ при } t - \frac{z}{v} > 0; \\ 0 \quad \text{при } t - \frac{z}{v} < 0. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Отсюда для коэффициента затухания черенковской волны получаем

$$\alpha_1 = \frac{2\pi\sigma\beta^2}{\Delta^2 v}. \quad (3.18)$$

Коэффициент затухания  $\alpha$  свободно распространяющейся собственной волны (например, возбуждаемой сторонним генератором) в круглом волноводе, заполненном диэлектриком с потерями, равен

$$\alpha = \frac{k^2 \epsilon'}{2h} = \frac{2\pi\sigma v}{c^2}. \quad (3.19)$$

Таким образом, коэффициенты затухания для черенковских волн и для стороннего поля существенно различны.

При отсутствии черенковского излучения ( $\epsilon\beta^2 < 1$ ) учет затухания приводит к некоторой асимметрии поля относительно плоскости  $z=vt$ , в которой расположена частица. Поле в области перед частицей спадает быстрее на множитель  $\exp\left\{-\frac{2\pi\sigma\beta^2}{\Delta^2_1}\left(t - \frac{z}{v}\right)\right\}$ , чем при отсутствии затухания, а за частицей — на столько же медленнее.

### 3.2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДА

#### С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ СГУСТКОМ ЗАРЯДОВ И СИСТЕМОЙ СГУСТКОВ

До сих пор рассматривалось возбуждение замедляющей структуры при движении одиночной заряженной частицы. Интересно также вычислить поля, возбуждаемые в замедляющей системе протяженным сгустком зарядов. Будем для простоты считать, что сгусток движется с постоянной скоростью вдоль оси волновода. В этом случае в структуре возбуждаются лишь аксиально симметричные поля. Для простоты расчета считаем, что сгусток имеет форму кругового цилиндра (радиусом  $R$ , длиной  $l_1$ ), а заряд распределения в нем с однородной плотностью  $\rho$ . При этом плотность тока, возбуждающего волновод, равна

$$j(r, z, t) = j_z = v\rho(r, z - vt),$$

$$\rho(r, z - vt) = \begin{cases} \frac{q}{\pi R^2 l_1} & \text{при } |z - vt| \leq l_1/2, r \leq R; \\ 0 & \text{вне объема сгустка,} \end{cases} \quad (3.20)$$

где  $q$  — полный заряд сгустка.

Спектральная плотность такого тока имеет вид

$$j_z(\omega) = \begin{cases} \frac{2q}{(2\pi R)^2} \frac{\sin \frac{\omega l_1}{2v}}{\frac{\omega l_1}{2v}} e^{i \frac{\omega}{v} z} & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (3.21)$$

Последующий расчет возбуждения замедляющей структуры заряженным сгустком полностью аналогичен соответствующему расчету для одной частицы. Продольная составляющая электрического поля представляется при этом в виде

$$E_z(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{8qJ_0(x_s r)}{v^2 b^2 J_1^2(\mu_{0s})} \frac{J_1(x_s R)}{x_s R} \cdot \frac{1}{2\pi i} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \epsilon\beta^2) \omega}{v^2 (1 - \epsilon\beta^2) + x_s^2} \cdot \frac{\sin \frac{\omega l_1}{2v}}{\frac{\omega l_1}{2v}} \cdot e^{-i\omega \left(t - \frac{z}{v}\right)} \frac{d\omega}{\epsilon},$$

отсюда, вычисляя интегралы с помощью вычетов, в случае, когда выполняется условие черенковского излучения, получаем

$$E_z(r, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t - z/v < -l_1/2v; \\ -\sum_s A_s \sin \frac{x_s v}{\Delta} \left(t - \frac{z}{v} + \frac{l_1}{2v}\right) & \text{при } \left|t - \frac{z}{v}\right| < \frac{l_1}{2v}; \\ \sum_s 2A_s \sin \frac{x_s l_1}{2\Delta} \cos \frac{x_s v}{\Delta} \left(t - \frac{z}{v}\right) & \text{при } t - \frac{z}{v} > \frac{l_1}{2v}, \end{cases} \quad (3.22)$$

$$A_s = \frac{8q\Delta J_1(x_s R) J_0(x_s r)}{\epsilon b^2 x_s^2 R l_1 J_1^2(\mu_s)}. \quad (3.23)$$

Как следует из выражения (3.22), учет конечных размеров сгустка приводит к появлению в выражении для

составляющих возбуждаемого поля характерных интерференционных множителей, зависящих от размеров сгустка  $R$  и  $l_1$ :

$$\frac{2J_1(x_s R)}{x_s R} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \frac{x_s l_1}{2\Delta}}{\frac{x_s l_1}{2\Delta}}. \quad (3.24)$$

Кроме того видно, что при малости линейных размеров сгустка (т. е. при условиях  $x_s R \ll 1$   $x_s l_1 / 2\Delta \ll 1$ ), как и следовало ожидать, частицы в сгустке излучают когерентно.

Из выражений (3.22) видно, что зависимость отдельных гармоник продольной составляющей излученного электрического поля от продольной координаты определяется в пределах сгустка ( $|t - \frac{z}{v}| < l_1/2v$ ) функцией  $\sin[(x_s v / \Delta)(t - z/v + l_1/2v)]$ . Таким образом, для сгустков, малых по сравнению с длиной волны, поле излучения монотонно возрастает вдоль сгустка от его переднего торца ( $z = vt + l_1/2$ ). При достаточно малой протяженности сгустка рост амплитуды поля, обусловленный интерференцией полей излучения отдельных частей сгустка, можно считать линейным. При тех же условиях радиальная составляющая поля излучения [зависящая от координаты по закону  $\cos \omega_s(t - z/v + l_1/2v) \approx 1$ ] не меняется вдоль сгустка. Выделим из поля излучения сгустка постоянную часть, соответствующую среднему полю излучения, возбуждаемому данным сгустком. Оставшаяся переменная часть поля излучения (равная нулю в центре сгустка при  $z = vt$  и нарастающая к торцам сгустка) представляет силу расталкивания между частицами сгустка, обусловленную действием излученного поля.

Потери протяженного заряженного сгустка на излучение можно определить, проинтегрировав выражение для потерь энергии каждой частицы (оно равно работе силы торможения, действующей на частицу со стороны возбуждаемого сгустком поля) по объему, занятому сгустком:

$$W = - \int_V (\mathbf{jE}) dv.$$

Для круглого цилиндрического ступка полные потери на излучение определяются выражением

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{2\pi qv}{\pi R^2 l_1} \int_0^R \int_{-l_1/2}^{l_1/2} E_z(r, z - vt) r dr dz (z - vt) = \\
 &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2q^2 v}{b^2 \varepsilon J_1^2(\chi_s)} \left[ \frac{2J_1(\chi_s R)}{\chi_s R} \frac{\sin \frac{\chi_s l_1}{2\Delta}}{\frac{\chi_s l_1}{2\Delta}} \right]^2. \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

В частном случае ступка в виде бесконечного тонкого диска ( $l_1 \rightarrow 0$ ) радиусом  $R = b$  можно вычислить сумму в выражении для потерь; полные потери оказываются равными

$$W = \frac{2q^2 v}{\varepsilon b^2}. \quad (3.26)$$

Аналогично можно рассчитать возбуждение волновода заряженными ступками более сложного вида или структуры, например круглым цилиндрическим ступком, в котором плотность заряда меняется по гармоническому закону.

Рассмотрим возбуждение волновода системой  $n$  ступков, движущихся друг за другом с равными скоростями. Для простоты считаем все ступки одинаковыми (цилиндры радиусом  $R$ , длиной  $l_1$ , с зарядом  $q$ ), а расстояние между центрами соседних ступков  $L$  постоянным.

Спектральная плотность тока, возбуждающего систему, в этом случае определяется выражением

$$j(\omega) = \frac{q}{2\pi R^2} \frac{\sin \frac{\omega l_1}{2v}}{\frac{\omega l_1}{2v}} e^{i \frac{\omega}{v} z} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i \frac{\omega}{v} kL} \quad (-\infty < z < \infty). \quad (3.27)$$

Возбуждаемые таким током поля легко вычисляются, в частности, для продольной составляющей электрического поля получаем

$$\begin{aligned}
 & E_z(r, z, t) = \\
 & \left. \begin{aligned}
 & 0 \quad \text{при } t - \frac{z}{v} \equiv \tau < -l_1/2v; \\
 & \sum_s 2A_s \sin \frac{x_s l_1}{2\Delta} \frac{\sin(j+1) \frac{x_s L}{2\Delta}}{\sin \frac{x_s L}{2\Delta}} \cos \frac{x_s}{\Delta} \left( z - vt - \right. \\
 & \left. - \frac{l_1}{2} - j \frac{L}{2} \right) \quad \text{при } -\frac{L}{v}(j+1) + \frac{l_1}{2v} \leq \tau \leq \\
 & \leq -\frac{L}{v}j - \frac{l_1}{2v}; \\
 & \sum_s A_s \left\{ \sin \frac{x_s}{\Delta} \left( z - vt + \frac{l_1}{2} - jL \right) + 2 \sin \frac{x_s l_1}{2\Delta} \times \right. \\
 & \left. \times \frac{\sin j \frac{x_s L}{2\Delta}}{\sin \frac{x_s L}{2\Delta}} \cos \frac{x_s}{\Delta} \left( z - vt - \frac{j-1}{2} L \right) \right\} \\
 & \quad \text{при } -\frac{L}{v}j - \frac{l_1}{2v} \leq \tau \leq -\frac{L}{v}j + \frac{l_1}{2v}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Значения  $\tau$ , определяемые неравенствами  $-\frac{L}{v}(j+1) + \frac{l_1}{2v} < \tau < -\frac{L}{v}j - \frac{l_1}{2v}$ , соответствуют области между  $j$ -м и  $(j+1)$ -м сгустками, значения  $\tau$ , удовлетворяющие неравенствам  $-\frac{L}{v}j - \frac{l_1}{2v} < \tau < -\frac{L}{v}j + \frac{l_1}{2v}$ , соответствуют области, занимаемой  $j$ -м сгустком.

Применяя выражение (3.28) для  $E_z$ , определяем потери на излучение системы сгустков. Для интенсивности излучения сгустка с номером  $j$  получаем

$$\begin{aligned}
 W^j = & \sum_s \frac{2q^2}{b^2 \varepsilon J_1^2(\nu_s)} \left( \frac{2J_1(x_s R)}{x_s R} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{x_s l_1}{2\Delta}}{\frac{x_s l_1}{2\Delta}} \right)^2 \times \\
 & \times \left( \frac{\sin \frac{x_s L}{2\Delta} (2j+1)}{\sin \frac{x_s L}{2\Delta}} \right). \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Из формулы (3.29) видно, что потери энергии сгустков зависят от их полржения по отношению к остальным сгусткам. На головной сгусток ( $j=0$ ) последующие не действуют: он теряет энергию так же, как одиночный. Все последующие сгустки движутся в суммарном поле излучения предыдущих. Поэтому потери каждого из них зависят от числа сгустков, летящих впереди. Полные потери на излучение  $n$  сгустков будут, очевидно, равны

$$W = \sum_{j=0}^{n-1} W^j = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2q^2}{b^2 \epsilon J_1^2(\nu_s)} \left( \frac{2J_1(x_s R)}{x_s R} \right)^2 \times \\ \times \left( \frac{\sin \frac{x_s l_1}{2\Delta}}{\frac{x_s l_1}{2\Delta}} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{x_s L}{2\Delta} n}{\sin \frac{x_s L}{2\Delta}} \right)^2. \quad (3.30)$$

Если сгустки расположены через одну длину волны  $s$ -го типа, их излучение когерентно. Полная мощность излучения системы сгустков для этого типа волны равна  $W = n^2 W_{\text{ср}}$ , где  $W_{\text{ср}}$  — мощность излучения одиночного сгустка.

Заметим, что, так как длины волн остальных типов, вообще говоря, не находятся в простых кратных отношениях с длиной волны основного (когерентного) типа, для них излучение различных сгустков некогерентно, а полная мощность излучения таких волн значительно меньше мощности излучения когерентной волны при достаточно большом числе сгустков.

Точный электродинамический расчет был проведен и для более сложной однородной замедляющей структуры — волновода с кольцевым диэлектрическим заполнителем. В этой структуре снижение фазовой скорости собственных волн также достигается с помощью диэлектрика с большим  $\epsilon$ , но пучок движется в незаполненном диэлектриком канале. Последнее обстоятельство позволяет избежать в ходе рассмотрения появления эффектов, вызванных близостью зарядов и диэлектрика, отсутствующих в действительности. В частности, для такой структуры получается конечное выражение для полных потерь на излучение движущегося заряда даже без учета дисперсии диэлектрика ( $\epsilon = \text{const}$ ).

В работе [10] рассчитано полное электромагнитное поле, возбуждаемое в указанной замедляющей структу-



ре летящим сгустком зарядов, и тем самым определялись как потери на излучение, так и силы расталкивания в сгустке. Проведенное сопоставление величин сил расталкивания частиц в сгустке, отвечающих волновым и кулоновским полям, показывает, что силы взаимодействия частиц в продольном направлении при достаточно больших скоростях ( $\beta \approx 1$ ) определяются в основном полем излучения.

Выше рассмотрели теорию электромагнитного возбуждения замедляющих структур, однородных вдоль оси. Проведенный анализ удается распространить и на периодические замедляющие структуры. В последнем случае для получения точных количественных результатов необходимо проводить довольно сложные расчеты, но качественные особенности поля излучения можно легко выяснить. Для простоты остановимся лишь на случае возбуждения структуры зарядом, летящим вдоль ее оси. Собственные волны в канале волновода, периодически нагруженного диафрагмами, представляются суперпозицией экспоненциальных пространственных гармоник и описываются формулами (1.15) \*. Введя наряду с волнами  $E_s$ , распространяющимися в положительном направлении оси  $z$ , также и волны  $E_{-s}$ , бегущие в обратную сторону, вычислим коэффициенты возбуждения полной системы собственных волн:

$$C_{\pm s}(z, \omega) = \frac{q}{2\pi i N_s(\omega)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{I_0(p_n a)} \times \\ \times \frac{1}{\frac{\omega}{v} \pm h_{sn}(\omega)} e^{i\left(\frac{\omega}{v} \mp h_{sn}\right)z}. \quad (3.31)$$

Заметим, что интегрирование по продольной координате  $z$  при вычислении коэффициентов  $C_{\pm s}$  следует проводить последовательно для каждого из периодов замедляющей структуры, используя теорему Флоке для того, чтобы связать выражения полей на каждом из этих периодов.

---

\* Так как пучок взаимодействует с электромагнитным полем в канале структуры, для вычисления коэффициентов возбуждения нам понадобятся выражения для собственных волн лишь в этой области.

Волновую часть поля, возбужденного движущейся частицей, можно записать в виде

$$E_z(r, t) = \frac{q}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \left(t - \frac{z}{v}\right)} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{N_s(\omega)} \times$$

$$\times \sum_{n, l=-\infty}^{\infty} \frac{A_n A_l}{I_0(\rho_n a) I_0(\rho_l a)} \times$$

$$\times I_0(\rho_l r) \left[ \frac{e^{i \frac{2\pi}{D} (l-n) z}}{\frac{\omega}{v} - h_s - \frac{2\pi n}{D}} + \frac{e^{i \frac{2\pi}{D} (n-l) z}}{\frac{\omega}{v} + h_s + \frac{2\pi n}{D}} \right] d\omega. \quad (3.32)$$

Здесь нормировочный множитель  $N_s(\omega)$  совпадает с комплексным продольным потоком мощности в структуре (1.55);  $h_s(\omega)$  — постоянная распространения основной (нулевой) пространственной гармоники поля. Как нетрудно убедиться, например, с помощью графического построения, уравнения  $\omega/v = \pm h_{sn}(\omega)$  имеют решение лишь при одном значении индекса  $n$ . Физически это означает, что взаимодействие частицы с полем происходит лишь на одной (синхронной источнику) пространственной гармонике. Вычислив в формуле (3.32) интеграл по частотам, представим поле излучения заряда в виде

$$E_z(r, t) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } t - z/v < 0, \\ \sum_{s=1}^{\infty} 2q \left[ \frac{1}{N_s(\omega)} \cdot \frac{A_n}{I_0(\rho_n a)} \cdot \frac{1}{\frac{\omega}{v} - \frac{dh_s}{d\omega}} \right]_{\omega=\omega_s} \times \\ \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{A_l}{I_0(\rho_l a)} I_0(\rho_l r) \cos \left[ \omega t - z \left( \frac{\omega}{v} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{2\pi}{D} (l-n) \right) \right] \right\}_{\omega=\omega_s} & \text{при } t - \frac{z}{v} > 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Как и следовало ожидать, движущийся заряд возбуждает в замкнутой периодической замедляющей структуре дискретный набор собственных волн; причем волновое поле заполняет волновод по мере прохождения

его источником и отсутствует в области впереди летящего заряда.

В заключение заметим, что периодическую структуру с очень частыми гофрами ( $D/\lambda \ll 1$ ) можно однозначно сопоставить с однородной структурой, в которой замедление достигается за счет заполнения диэлектриком [10].

### 3.3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СТРУКТУРЕ

До сих пор мы рассматривали излучение, сопровождающее движение частиц в бесконечной волноводной замедляющей структуре. Между тем торцовые стенки системы влияют на установление полей излучения Вавилова—Черенкова, поэтому интересно оценить это влияние.

Из последующего анализа будет видно, что существенное влияние для данной модели оказывает лишь один из торцов волновода — входной. В связи с этим рассмотрим возбуждение волн в полубесконечной замедляющей структуре — волноводе с металлическим торцом в сечении  $z=0$  [11—13]. Для выяснения основных качественных особенностей распределения излученного поля достаточно исследовать случай симметричного возбуждения простейшей структуры волновода, полностью заполненной диэлектриком с  $\varepsilon = \cos^2 t$ . Итак, пусть в момент времени  $t=0$  в центре торцевой стенки появляется заряженная частица и равномерно движется вдоль оси со скоростью  $v$ . Плотность тока, создаваемого точечным зарядом, и ее спектральная амплитуда представляются в этом случае в виде

$$j_z(r, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{q\delta(r)}{2\pi r} v\delta(z-vt) & \text{при } t > 0; \end{cases} \quad (3.34)$$

$$j_z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ \frac{q}{4\pi^2} \frac{\delta(r)}{r} e^{i\frac{\omega}{v}r} & \text{при } z > 0. \end{cases}$$

Найдем сначала поле, создаваемое гармоническим током  $j_z(\omega)$ , а затем, проведя обратное преобразование Фурье, получим распределение поля в волноводе в различные моменты времени.

За полную систему волн, по которой разлагается поле в полубесконечном волноводе, примем волны

$$\left. \begin{aligned} E_{sz} &= \kappa_s J_0(\kappa_s r) e^{ih_s z}; & E_{-sz} &= -2\kappa_s J_0(\kappa_s r) \cos h_s z; \\ H_{s\varphi} &= -ik\epsilon J_1(\kappa_s r) e^{ih_s z}; & H_{-s\varphi} &= 2ik\epsilon J_1(\kappa_s r) \cos h_s z. \\ E_{sr} &= -ih_s J_1(\kappa_s r) e^{ih_s z}; & E_{-sr} &= -2h_s J_1(\kappa_s r) \sin h_s z; \end{aligned} \right\} (3.35)$$

Зависимость от продольной координаты  $z$  у волн с индексом  $s > 0$  аналогична соответствующим волнам в неограниченном волноводе ( $\sim e^{ih_s z}$ ); собственные волны с отрицательным индексом ( $s < 0$ ) выбираются как стоячие, у которых электрическая составляющая, касательная к металлическому торцу, при  $z=0$  обращается в нуль. Полное поле, возбуждаемое в волноводе гармоническим током  $j_z(\omega)$ , представляется суперпозицией волн этой системы (3.4) с коэффициентами возбуждения  $C_{\pm s}$ , равными

$$\begin{aligned} C_s(z, \omega) &= \frac{2q\kappa_s}{\pi b^2 \epsilon \omega h_s J_1^2(\mu_s)} \cdot \frac{1}{\frac{\omega^2}{v^2} - h_s^2(\omega)} \left\{ e^{i\frac{\omega}{v}z} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( i\frac{\omega}{v} \cos h_s z + h_s \sin h_s z \right) - i\frac{\omega}{v} \right\}, \\ C_{-s}(z, \omega) &= \frac{iq\kappa_s}{\pi b^2 \epsilon \omega h_s J_1^2(\mu_s)} \cdot \frac{1}{\frac{\omega}{v} + h_s(\omega)} e^{i\left(\frac{\omega}{v} + h_s\right)z}. \end{aligned} (3.36)$$

В результате, согласно соотношению (3.4), получим следующие выражения для фурье-преобразования продольной составляющей электрического поля в волноводе:

$$\begin{aligned} E_z(\omega) &= E_z^0(\omega) + E_z^1(\omega) = \\ &= -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{4q\omega(\epsilon\beta^2 - 1) J_0(\kappa_s r)}{v^2 b^2 \epsilon J_1^2(\mu_s)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{e^{i\frac{\omega}{v}z}}{\frac{\omega^2}{v^2} - h_s^2} + \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4q\kappa_s^2 J_0(\kappa_s r)}{h_s v b^2 \epsilon J_1^2(\mu_s)} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{e^{ih_s z}}{\frac{\omega^2}{v^2} - h_s^2}. \end{aligned} (3.37)$$

Остальные составляющие аксиально симметричного электромагнитного поля ( $E_r$  и  $H_\varphi$ ) можно найти, зная  $E_z$ , из уравнений Максвелла.

При переходе от  $E_z(\omega)$  к пространственно-временному распределению  $E_z(r, t)$  интегрирование по  $\omega$  должно проводиться вдоль действительной оси с обходом чисто действительных особенностей по петле, охватывающей их сверху: при этом поле удовлетворяет начальным условиям обращения в нуль при  $t < 0$  (в отсутствие источников).

Продольная составляющая электрического поля представляется в виде двух слагаемых [соответственно двум слагаемым формулы (3.37)]:

$$E_z(r, z, t) = E_z^0(r, z, t) + E_z^1(r, z, t). \quad (3.38)$$

Первый член  $E_z^0(r, z, t)$  совпадает, как легко убедиться, с полем, возбуждаемым летящим зарядом в бесконечной структуре (3.9)–(3.11). Проведем оценку второго слагаемого продольной составляющей поля  $E_z^1(r, z, t)$  в формуле (3.37), связанного с влиянием торцевой стенки волновода. Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \omega_s &= \frac{x_s v}{\Delta}; & \omega_{cs} &= \frac{x_s c}{\sqrt{\epsilon}}; \\ U &= \frac{z \sqrt{\epsilon}}{tc}; & U_{кр} &= \frac{v_{гп} t \sqrt{\epsilon}}{tc} = \frac{c}{v \sqrt{\epsilon}}; \\ \Delta^2 &= \epsilon \beta^2 - 1 > 0; & A_s &= \frac{4q x_s^2 J_0(x_s r) v c}{b^2 \epsilon^{3/2} \Delta J_1^2(\mu_s)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Используя соотношения (3.39), переписываем  $E_z^1$  в виде

$$E_z^1(r, z, t) = - \sum_s A_s I_s(t), \quad (3.40)$$

где

$$I_s(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t [i\omega - iU \sqrt{\omega^2 - \omega_{cs}^2}]} (\omega^2 - \omega_s^2) \sqrt{\omega^2 - \omega_{cs}^2}}{d\omega}.$$

Точно вычислить интеграл  $I(t)$  (индекс  $s$  далее опускаем) можно лишь численно. Используя метод перевала\*, получим наглядные асимптотические оценки его

\* Оценки интегралов подобного вида проводятся при исследовании распространения импульсных сигналов в диспергирующих средах [14, 15]. Большие значения  $t$  означают времена, много больше времени распространения волны поперек волновода.

для больших значений  $t$ . При этом применялась модификация метода, предложенная в работе [16].

Подынтегральное выражение в формуле (3.40) определено однозначно на двухлистной поверхности Римана. Разрезы удобно провести из точек ветвления  $\omega = \pm \omega_c$  по линии  $\text{Im} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} = 0$  (что соответствует отрезкам вещественной оси, уходящим из точек ветвления и замыкающимся на бесконечности); в этом случае листы поверхности Римана различаются знаком мнимой части корня  $\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$ . Для выполнения начальных условий ( $I(t) = 0$  при  $t < 0$ ) нужно интегрирование проводить на листе, где  $\text{Im} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} > 0$ .

Для больших значений  $|\omega|$  показатель степени экспоненты подынтегрального выражения принимает вид  $\{-i\omega(t - z/c \sqrt{\epsilon})\}$ . Если  $t < z \sqrt{\epsilon}/c$  (что соответствует точкам перед фронтом, распространяющимся со скоростью  $c/\sqrt{\epsilon}$ ), можно, не меняя значения интеграла, замкнуть контур в верхней полуплоскости, при этом получим, что поле  $E_z^1$  отсутствует в точках, до которых еще не дошел предвестник сигнала, распространяющийся со скоростью, равной фазовой скорости волны в безграничном диэлектрике\*.

Рассмотрим случай  $t \geq z/c \sqrt{\epsilon}$ . Согласно работе [16], перейдем к новой переменной интегрирования, проведя следующую замену:

$$p = i \left( \omega - U \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \right). \quad (3.41)$$

Интеграл (3.40) примет в этом случае вид

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_p} e^{-tp} \Phi(p) dp, \quad (3.42)$$

где 
$$\Phi(p) = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_s^2) \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \frac{d\omega}{dp} =$$

$$= (1 - U^2)^2 \left\{ \sqrt{p^2 + \omega_c^2 (1 - U^2)} \left[ p - U \sqrt{p^2 + \omega_c^2 (1 - U^2)} - i\omega_s (1 - U^2) \right] \left[ p - U \sqrt{p^2 + \omega_c^2 (1 - U^2)} + i\omega_s (1 - U^2) \right] \right\}^{-1}.$$

\* Если учесть зависимость  $\epsilon$  от  $\omega$  (при  $\omega \rightarrow \infty$  значение  $\epsilon$  приближается к единице), то поле будет равно нулю при условии  $t < z \sqrt{\epsilon(\infty)}/c = z/c$ .

Контур интегрирования  $C_p$  в комплексной плоскости  $p$ , соответствующий прежнему контуру интегрирования, изображен на рис. 3.2, а. Точки ветвления расположены при  $p = p_B = \pm i\omega_c \sqrt{1-U^2}$ , а полюса функции  $\Phi(p)$  — при  $p = p_{II} = \pm i\omega_s (1-U \sqrt{1-\omega_c^2/\omega_s^2})$ . Контур  $C_p$  можно, не задевая особенностей, деформировать в прямую, параллельную мнимой оси и проходящую слева

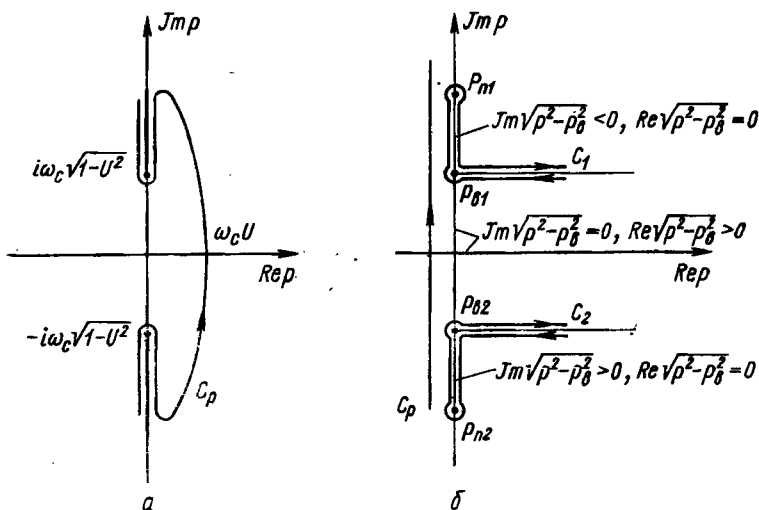


Рис. 3.2. Деформация контура интегрирования на комплексной плоскости  $p$ .

от нее; линии разрезом удобно провести параллельно действительной оси, как показано на рис. 3.2, б. Там же показано распределение знаков действительной и мнимой частей корня  $\sqrt{p^2 + \omega_c^2(1-U^2)}$  на осях комплексной плоскости  $p$ , соответствующее верхнему листу поверхности Римана (т. е. тому, на котором расположен контур интегрирования).

При  $t \geq \frac{z}{c} \sqrt{\varepsilon}$  параметр  $U$  изменяется в пределах  $0 \leq U \leq 1$ . Легко показать, что при всех этих значениях  $|p_B| \leq |p_{II}|$ . Равенство справедливо при  $U = U_{кр} = \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega_s^2} = c/v \sqrt{\varepsilon}$ ; в этом случае полюс совпадает с точкой ветвления. Можно убедиться, что при  $U < U_{кр}$  полюс лежит на том же листе, что и контур интегрирования, а при  $U > U_{кр}$  — на другом.

Замыкая контур интегрирования бесконечно удаленным контуром в правой полуплоскости переменной  $p$ , сводим интеграл  $I(t)$  к сумме двух интегралов по контурам  $C_1$  и  $C_2$  (см. рис. 3.2, б), каждый из которых обходит в указанном направлении разрез и огибает соседний с ним полюс\*. Интеграл по  $C_2$  комплексно сопряжен с интегралом по  $C_1$ . Поэтому достаточно вычислить лишь один из них, скажем, по контуру  $C_1$ . Этот интеграл  $I_1(t)$  сводится к вычету в полюсе  $p_{п1}$  и интегралу по обеим сторонам разреза.

Вычет в полюсе  $p_{п1}$  легко вычисляется:

$$I_{п1} = \frac{1}{2\omega_s^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_s^2}}} \exp \left\{ -it\omega_s \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - U \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_s^2}} \right) \right\}. \quad (3.43)$$

Вычет в полюсе  $p_{п2}$  комплексно сопряжен к (3.43).

Поле, соответствующее части интеграла  $I(t)$ , обусловленной обоими вычетами, представляется в виде

$$E_{zn}^1(r, z, t) = \sum_s \frac{4q x_s^2 J_0(x_s r) v c}{b^2 \epsilon^{3/2} \Delta^2 J_1^2(\mu_s)} \times \\ \times \frac{\cos \omega_s t \left( 1 - U \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_s^2}} \right)}{\omega_s^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_s^2}}} = \sum_s \frac{4q J_0(x_s r)}{b^2 \epsilon J_1^2(\mu_s)} \times \\ \times \cos \frac{x_s v}{\Delta} \left( t - \frac{z}{v} \right) = -E_z^0(r, z, t). \quad (3.44)$$

Подчеркнем, что вклад в поле  $E_z$ , обусловленный полюсами, нужно учитывать только в тех случаях, когда полюса расположены на верхнем листе поверхно-

\* Если  $U > U_{кр}$ , так что полюс лежит на нижнем листе, контуры интегрирования могут быть стянуты к разрезам.



сти Римана (т. е. при  $U < U_{кр}$ ). Полюса переходят на этот лист при значении  $U = U_{кр} = \sqrt{1 - \omega_c^2 / \omega_s^2}$ , т. е. при  $z/t = U_{кр} c / \sqrt{\epsilon} = c^2 / v\epsilon$ . Таким образом, фронт волны от полюсов (фронт поля  $E_{zp}^1$ ) перемещается со скоростью  $v_{гр} = c^2 / v\epsilon$ , равной групповой скорости в волноводе. Сопоставление полученного выражения с формулой (3.9) показывает, что поле, обусловленное полюсами, отличается лишь знаком от поля в бесконечном волноводе. Таким образом, позади группового фронта ( $z < v_{гр}t$ ) волна от полюсов гасит поле  $E_z^0$ .

Остается вычислить интеграл  $I_{p1}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p1}} e^{-pt} \Phi(p) dp$

по берегам верхнего разреза. Перейдем в нем к новой переменной интегрирования  $s = (p - p_{в1})^{1/2} = [\rho - i\omega_c \sqrt{1 - U^2}]^{1/2}$ . Интеграл  $I_{p1}$  запишем в виде

$$I_{p1}(t) = -\frac{1}{2\pi i} e^{-i\omega_c \sqrt{1 - U^2} t} 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ts^2} \psi(s) ds, \quad (3.45)$$

где

$$\psi(s) = (1 - U^2)^2 \left( s \sqrt{s^2 + 2i\omega_c \sqrt{1 - U^2}} \right)^{-1} \left[ s^2 + i\omega_c \sqrt{1 - U^2} - i\omega_c (1 - U^2) - Us \sqrt{s^2 + 2i\omega_c \sqrt{1 - U^2}} \right]^{-1} \left[ s^2 + i\omega_c \sqrt{1 - U^2} + i\omega_s (1 - U^2) - Us \sqrt{s^2 + 2i\omega_c \sqrt{1 - U^2}} \right]^{-1}. \quad (3.46)$$

Эта функция имеет полюса первого порядка в точке  $s = 0$  и в точке

$$s = s_n = b = \begin{cases} + |p_{п1} - p_{в1}|^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} & \text{при } U > U_{кр}; \\ - |p_{п1} - p_{в1}|^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} & \text{при } U < U_{кр}. \end{cases}$$

При вычислении интеграла (3.45) следует учитывать возможность близости полюса к точке перевала  $s = 0$ . Представим  $\psi(s)$  в виде

$$\psi(s) = \frac{\alpha}{s(s - b)} + \frac{1}{s} X(s), \quad (3.47)$$

где  $X(s)$  — регулярная функция, не имеющая полюсов при  $s=0$  и  $s=b$ , а  $\alpha$  — коэффициент старшего члена ряда Лорана для функции  $s\psi(s)$ , в окрестности полюса равный

$$\alpha = \frac{1}{4\omega_s^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_s^2}}}. \quad (3.48)$$

Интеграл по разрезу, распадается, таким образом, на два слагаемых

$$I_{p1}(t) = \gamma K + L, \quad (3.49)$$

где

$$K = -2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ts^2} \frac{ds}{s-b},$$

$$L = \frac{1}{\pi i} e^{-i\omega_c \sqrt{1-U^2} t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ts^2} X(s) ds, \quad (3.50)$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\pi i} e^{-i\omega_c \sqrt{1-U^2} t}.$$

Во втором слагаемом подынтегральное выражение не содержит особенностей и легко вычисляется при достаточно больших  $t$ :

$$L \approx -\frac{a}{\sqrt{\pi} i} t^{-1/2} e^{-i\omega_c \sqrt{1-U^2} t}. \quad (3.51)$$

Здесь

$$a = X(s=0) = [s\psi(s)]_{s=0} + \frac{\alpha}{b} =$$

$$= -\frac{(1-U^2)^{3/4}}{\sqrt{2\omega_c} [\omega_c^2 - \omega_s^2 (1-U^2)]} \pm$$

$$\pm \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4\omega_s^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_s^2} |p_{n1} - p_{n1}|^{1/2}}}. \quad (3.52)$$

В частности, при  $U \rightarrow U_{кр}$  (в этом случае  $|\rho_{п1} - \rho_{в1}| \rightarrow 0$ )

$$a_0 = \lim_{U \rightarrow U_{кр}} a = \frac{(1 + U_{кр}^2) e^{-\pi/4}}{4 \sqrt{2} \omega_c \omega_s^{3/2} U_{кр}^2} \quad (3.53)$$

и

$$L \approx - e^{-i\omega_c \sqrt{1-U^2} t} \frac{(1 + U_{кр}^2) e^{-\pi/4}}{4 \sqrt{2\pi} i \omega_c \omega_s^{3/2} U_{кр}^2} t^{-1/2}. \quad (3.54)$$

Исследуем теперь второе слагаемое интеграла по разрезу

$$K = -2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ts^2} \frac{ds}{s-b} = -4b \int_0^{\infty} e^{-ts^2} \frac{ds}{s^2 - id}, \quad (3.55)$$

где

$$d = |\rho_{п1} - \rho_{в1}| = -ib^2. \quad (3.56)$$

Умножим обе части равенства (3.55) на  $e^{idt}$  и продифференцируем по  $t$ :

$$\frac{d}{dt} (e^{idt} K) = 4b \int_0^{\infty} e^{-t(s^2 - id)} ds = 2be^{idt} \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Интегрируя по  $t$  от  $t$  до  $\infty$ , получаем

$$\begin{aligned} K &= -e^{-idt} 2b \sqrt{\pi} \int_t^{\infty} e^{idt} t^{-1/2} dt = \\ &= -e^{-idt} 2 \sqrt{2\pi} b d^{-1/2} \left\{ F(\infty) - F\left(\sqrt{\frac{2dt}{\pi}}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где  $F(x) = \int_0^x e^{i\pi z^2/2dz}$  — интеграл Френеля. Следует подчеркнуть, что как при  $U < U_{кр}$ , так и при  $U > U_{кр}$  аргумент  $\sqrt{2dt/\pi}$  функции Френеля положителен, так что  $\left\{ F(\infty) - F\left(\sqrt{\frac{2dt}{\pi}}\right) \right\}$  — монотонная функция аргумента, изменяющаяся от  $F(\infty) = (1+i)/2$  при  $d=0$  до 0 при  $d=\infty$ .

Выражая  $b$  и  $d$  через  $(\rho_{\text{пл}} - \rho_{\text{вп}})$ , окончательно получаем

$$K = \pm \exp[-(\rho_{\text{пл}} - \rho_{\text{вп}})t] \times \\ \times 2\sqrt{2} \pi e^{i\frac{\pi}{4}} \left\{ F(\infty) - F\left(\sqrt{\frac{2|\rho_{\text{пл}} - \rho_{\text{вп}}|t}{\pi}}\right) \right\}, \quad (3.58)$$

где верхний знак относится к случаю  $U < U_{\text{кр}}$ , а нижний — к случаю  $U > U_{\text{кр}}$ .

Таким образом, интеграл по разрезу выражается асимптотически (при больших  $t$ ) через интегралы Френеля.

Зависимость модуля нормированной функции  $K$ , описывающей прохождение через область группового фронта, от  $x = [2|\rho_{\text{пл}} - \rho_{\text{вп}}|t/\pi]^{1/2}$  приведена на рис. 3.3. При этом групповому фронту соответствует точка  $x=0$ . Границами переходной области можно условно считать точки, где аргумент функции Френеля равен единице, т. е.  $|F(\infty) - F(x)|$  отличается от своего предельного значения при  $x \rightarrow 0$  приблизительно вдвое. Таким образом, на границах переходной области  $|\rho_{\text{пл}} - \rho_{\text{вп}}|t = \pi/2$ . Отсюда для границ переходной области получим приближенное (справедливое при  $U$ , близком  $U_{\text{кр}}$ ) соотношение

$$z_{\text{гр}} = v_{\text{гр}}t \pm \sqrt{\pi} \frac{c^2}{v^3} \frac{\Delta^{3/2}}{v^{3/2} x_s^{1/2}} t^{1/2}. \quad (3.59)$$

Первое слагаемое характеризует движение точки  $z_{\text{гр}}$  вместе с групповым фронтом, а второе — расширение переходной области со временем.

Учитывая формулы (3.43), (3.51) и (3.58), получаем следующее выражение для поля  $E_z^1$ :

$$E_z^1(r, z, t) = -\varepsilon_1 E_z^0 + \sum_s \frac{2}{\sqrt{\pi}} A_s |a| t^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \omega_{c_s} \sqrt{1 - U^2} t\right) - \varepsilon_2 \left\{ \sum_s E_{zs}^0 [C(x_s) + S(x_s)] - \right.$$

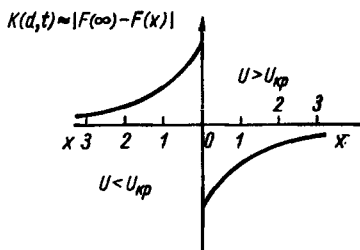


Рис. 3.3. Зависимость функции  $K$  от аргумента  $x$ .

$$\begin{aligned}
 & - \sum_s \frac{A_s}{2\omega_s \sqrt{1 - \frac{\omega_{cs}^2}{\omega_s^2}}} [C(x_s) - S(x_s)] \times \\
 & \times \sin \omega_s t \left( 1 - U \sqrt{1 - \frac{\omega_{cs}^2}{\omega_s^2}} \right). \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \begin{cases} 0 & \text{при } U > U_{\text{кр}}; \\ 1 & \text{при } U < U_{\text{кр}}; \end{cases} \\
 \varepsilon_2 &= \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{при } U > U_{\text{кр}}; \\ -\frac{1}{2} & \text{при } U < U_{\text{кр}}; \end{cases} \\
 x_s &= \sqrt{\frac{2}{\pi} t | \rho_{\text{п1s}} - \rho_{\text{в1s}} |},
 \end{aligned}$$

$C(x)$ ,  $S(x)$  — интегралы Френеля,  $A_s$  и  $|a|$  определяются соответственно по формулам (3.39) и (3.52). При малых и при больших значениях аргумента интегралов Френеля удобно пользоваться их разложениями [17].

При малых  $x$ , т. е. в окрестности  $U_{\text{кр}}$ , получим

$$E_z^1(r, z, t) = -\frac{1}{2} E_z^0(r, z, t) + o(t^{-1/2}). \quad (3.61)$$

Здесь первый член как при  $U > U_{\text{кр}}$ , так и при  $U < U_{\text{кр}}$  в точности равен половине предельного значения поля  $E_z^1$ , а второе слагаемое описывает постепенный переход через область группового фронта.

В противоположном случае больших значений  $x$  имеем

$$\begin{aligned}
 E_z^1(r, z, t) &= -\varepsilon_1 E_z^0(r, z, t) - \sum_s \frac{4qJ_0(x_s r)}{b^2 J_1^2(\mu_s) \varepsilon \kappa_s v} \times \\
 &\times \frac{(1 - U^2)^{3/4}}{U^2 - U_{\text{кр}}^2} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \omega_{cs} t \sqrt{1 - U^2} \right). \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

Это приближенное выражение для поля  $E_z^1$  можно было бы получить сразу методом перевала, если при вычислении интегралов по разрезам пренебречь влиянием близко расположенного полюса. Оно справедливо вне переходной области, выделяемой соотношением (3.59).

Без учета убывающего со временем вклада от разрезов общую картину распределения поля в замедляющей структуре можно представить себе следующим образом: в области перед летящим зарядом ( $z > z_1 = vt$ ) поле излучения отсутствует; между сечением  $z_1 = vt$ , перемещающимся вместе с зарядом, и сечением  $z_{гр} = v_{гр}t$ , движущимся с групповой скоростью  $v_{гр}$  для данного волновода, поле совпадает с полем излучения Вавилова — Черенкова  $E^0$ , возбуждаемым частицей в бесконечной трубе; наконец, в области за фронтом, перемещающимся с групповой скоростью, полное поле равно нулю — поле, обусловленное полюсами, полностью гасит поле излучения  $E^0$ . На эту идеализированную модель налагается еще дополнительное поле, обусловленное интегралами по разрезам. Вдали от фронта  $z_{гр} = v_{гр}t$  оно определяется вторым слагаемым формулы (3.62) и, как видно, убывает по мере удаления от этой точки.

Для определения поля в переходной области, вблизи точки  $z_{гр} = v_{гр}t$  выражение (3.62) неприменимо: здесь сказывается близость полюсов к линиям разрезов и следует пользоваться более точным выражением (3.58), согласно которому амплитуда полного поля при наличии торца монотонно нарастает при переходе из области  $z < v_{гр}t$  в область  $z > v_{гр}t$  от 0 до  $E^0$ ; в частности, при  $z = v_{гр}t$  она равна, согласно формуле (3.59), половине предельного значения  $E^0$ .

Описанную картину распределения поля нетрудно интерпретировать на основе простых физических соображений. Действительно, поле излучения заряда можно представить себе как результат интерференции волн покоящихся импульсных эквивалентных источников, распределенных вдоль оси, каждый из которых дает вспышку излучения в момент, соответствующий прохождению заряда через сечение, где расположен этот источник. Излученные импульсы электромагнитного поля распространяются вдоль структуры с групповой скоростью, что и соответствует дрейфу поля излучения и убыванию его до нуля за групповым фронтом.

В рассмотренной модели для волны, распространяющейся вправо (в сторону положительных  $z$ ), групповая скорость положительна, поэтому существенно влияние левого (входного) торца волновода. Для волн с отрицательной групповой скоростью существенным окажется влияние выходного торца секции волновода.

#### 3.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СТРУКТУРАХ

Для произвольной замедляющей структуры, однородной вдоль своей оси, можно найти амплитуды полей излучения, возбужденных равномерно движущимся зарядом, из простых соображений, не решая непосредственно электродинамической задачи возбуждения такой структуры. Будем с самого начала считать известными основные качественные характеристики поля излучения:

1. Возбуждаемое равномерно движущейся по оси структуры частицей волновое поле локализовано в полупространстве за частицей (по ходу ее движения).

2. Возбуждаемое поле представляется суперпозицией волноводных волн, перемещающихся с фазовой скоростью, равной скорости частицы.

Рассмотрим подробно возбуждение основной симметричной волны в структуре зарядом, движущимся по оси, а затем укажем, какие изменения следует вводить в расчет возбуждения поля в более общем случае. Отметим, что в силу ортогональности собственных волн в структуре можно рассматривать уравнение энергетического баланса для каждого типа волны в отдельности.

Введем наряду с полем, создаваемым зарядом, стороннее ускоряющее поле, возбуждаемое генератором заданной частоты и имеющее фазовую скорость, равную скорости частицы. Продольную составляющую этого поля на оси замедляющей структуры (волновода) можно записать в виде

$$E = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(hz - \omega t - \delta)} \quad (z > 0), \quad (3.63)$$

где  $E_0 e^{-i\delta}$  — комплексная амплитуда поля при  $z=0$  (в месте подключения генератора);  $\alpha$  — коэффициент затухания поля вдоль оси;  $h(\omega)$  — постоянная распространения волны в волноводе. Энергия, приходящаяся на единицу длины волновода,  $W_1 = \rho |E|^2$ , где  $\rho$  — коэффи-

циент, зависящий от структуры волны. Поток мощности через любое сечение равен  $P = v_{гp} W_1 = v_{гp} \rho |E|^2$ , где  $v_{гp}$  — групповая скорость волны.

Пусть в волноводе равномерно движется вправо частица со скоростью  $v$ , так что ее координата  $z_1(t) = z_0 + vt$ . Частица создает за собой [т. е. при  $z < z_1(t)$ ] волны с частотами  $\omega$ , которые определяются из дисперсионного уравнения

$$\frac{\omega}{h(\omega)} = v \quad (3.64)$$

и являются функциями скорости частицы.

Рассмотрим волну, частота которой совпадает с частотой стороннего ускоряющего поля. Эта волна зависит от разностного аргумента  $z - z_1(t)$  и в то же время имеет структуру, определяемую формулой (3.63); продольную составляющую волны можно записать в виде

$$E_q = qAe^{i(hz - \omega t - hz_0)} e^{-\alpha_1(z_1 - z)} \quad (z < z_1), \quad (3.65)$$

где  $\alpha_1$  — неизвестный пока коэффициент затухания волны излучения,  $A = A_0 e^{i\varphi_A}$  — искомая комплексная амплитуда поля излучения. Пропорциональность амплитуды излученного поля заряду частицы следует из линейности уравнений электродинамики.

Таким образом, при наличии ускоряющего поля (3.63) и поля движущегося заряда (3.65) полное поле слева от заряда равно \*

$$E_n = e^{i(hz - \omega t - \delta)} [E_0 e^{-az} + qA_0 e^{-\alpha_1(z_1 - z)} e^{i\psi}], \quad (3.66)$$

где  $\psi = \delta - hz_0 + \varphi_A$  ( $\varphi = \delta - hz_0$  — фаза ускоряющего поля в точке, где находится частица), а поле справа

$$E_{np} = e^{i(hz - \omega t - \delta)} E_0 e^{-az}. \quad (3.67)$$

Уравнение энергетического баланса для этих волн имеет вид

$$dP = d\mathcal{E} + dQ + dA. \quad (3.68)$$

Здесь  $dP$  — поток энергии в некоторый заключенный между сечениями  $z'$  и  $z''$  фиксированный объем  $V$ , включающий частицу (рис. 3.4) за время  $dt$ . Очевидно, что этот поток равен

$$dP = (P' - P'') dt. \quad (3.69)$$

\* Индексом 1 и штрихами отмечаются значения функций в сечениях  $z = z_1$ ,  $z = z'$ ,  $z = z''$ .



Изменение электромагнитной энергии в объеме  $V$  за это время  $d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_1 + d\mathcal{E}_2$  обусловлено перемещением частицы

$$d\mathcal{E}_1 = v\rho (|E_{л1}|^2 - |E_{пр}|^2) dt \quad (3.70)$$

и затуханием поля излучения во времени

$$d\mathcal{E}_2 = (z_1 - z') \frac{d\omega_n}{dt} dt. \quad (3.71)$$

Тепловые потери  $dQ$  в объеме  $V$  равны

$$dQ = (z_1 - z') \Gamma \omega_n dt + (z'' - z_1) \Gamma \omega_{пр} dt. \quad (3.72)$$

Здесь  $\Gamma$  — коэффициент пропорциональности между тепловыми потерями на единицу длины волновода и плотностью энергии  $\omega$ .

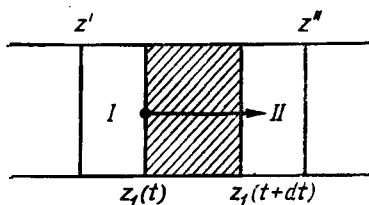


Рис. 3.4. К расчету амплитуды поля, излучаемого движущимся в волноводе зарядом.

Работа поля при перемещении заряда

$$dA = qvE_{эфф} dt, \quad (3.73)$$

где  $E_{эфф}$  — некоторое эффективное поле, действующее на заряд\*.

Подставляя выражения (3.69) — (3.73) в уравнение (3.68), выражая  $P$  и  $\omega$  через поля, а величины полей в точках  $z'$  и  $z''$  через их значение при  $z = z_1$ , придем к соотношению

$$\begin{aligned} v_{гр} \rho \left[ |E_{л1}|^2 - |E_{пр1}|^2 - \left( \frac{\partial |E_n^2|}{\partial z} \right)_1 (z_1 - z') - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial |E_{пр}^2|}{\partial z} \right)_1 (z'' - z_1) \right] = v\rho [|E_{л1}|^2 - |E_{пр1}|^2] + \\ + \rho \frac{\partial |E_{л1}^2|}{\partial t} (z_1 - z') + \Gamma \rho [|E_{л1}|^2 (z_1 - z') + \\ + |E_{пр1}|^2 (z'' - z_1)] + qvE_{эфф}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

\* Если считать очевидным, что для черенковского излучения эффективное поле, действующее на частицу, равно  $1/2 E_q$ , т. е. сумме полей справа и слева от заряда, то в рассмотрение можно не вводить вспомогательное стороннее поле.

Это соотношение должно выполняться тождественно относительно аргументов  $(z_1 - z')$  и  $(z'' - z_1)$ , так что можно последовательно приравнять друг другу члены без  $z'$  и  $z''$ , члены содержащие лишь  $(z_1 - z')$ , и члены, содержащие  $(z'' - z_1)$ . Первое условие приводит к равенству

$$v_{грp} [|E_{л1}|^2 - |E_{пр1}|^2] = v\rho [|E_{л1}|^2 - |E_{пр1}|^2] + qvE_{эфф}, \quad (3.75)$$

из которого нетрудно для  $E_{эфф}$  получить выражение

$$E_{эфф} = -2A_0\rho \left(1 - \frac{v_{гр}}{v}\right) \left[E_0 e^{-az_1} \cos \psi + \frac{1}{2} qA_0\right]. \quad (3.76)$$

Равенство (3.76) должно выполняться тождественно относительно  $\delta$ ,  $z$  и  $q$ , и, в частности, при  $q \rightarrow 0$  дает:

$$E_{эфф} = -2A_0\rho \left(1 - \frac{v_{гр}}{v}\right) E_0 e^{-az_1} \cos(\varphi_A + \varphi). \quad (3.77)$$

В этом случае, т. е. при равенстве заряда нулю, действующее поле, очевидно, равно

$$(\text{Re } E)_{z=z_1} = E_0 e^{-az_1} \cos \varphi. \quad (3.78)$$

Сопоставляя соотношения (3.78) и (3.77), получаем два универсальных соотношения

$$A_0 = \left. \begin{array}{l} \varphi_A = \pi, \\ \left[2\rho \left(1 - \frac{v_{гр}}{v}\right)\right]^{-1} \end{array} \right\} \quad (3.79)$$

определяющих фазу и амплитуду волны, излучаемой зарядом.

Приравнивая в выражении (3.74) коэффициенты перед  $(z'' - z_1)$ , получаем известное соотношение

$$\Gamma = 2\alpha\omega_{гр}, \quad (3.80)$$

связывающее временной  $\Gamma/2$  и пространственный  $\alpha$  коэффициенты затухания.

Наконец, приравняв коэффициенты при  $(z_1 - z')$ , получим формулу

$$\alpha_1 = \alpha \frac{v_{гр}}{v - v_{гр}}, \quad (3.81)$$

устанавливающую связь пространственного коэффициента затухания волны излучения  $\alpha_1$  с коэффициентом затухания свободной собственной волноводной волны  $\alpha$ .

Соотношение (3.81) можно вывести и непосредственно, рассматривая пространственно-временное распределение поля излучения. Будем считать, что заряд в каждой точке  $z$  испускает единичный импульс излучения, который распространяется затем в структуре с групповой скоростью  $v_{гр}$  и затухает во времени с коэффициентом затухания  $\Gamma/2$ . Поле в точке  $z_0$  по прошествии времени  $\Delta t$  после пролета заряда через эту точку отличается от единичного поля в месте нахождения заряда (при  $z = z_0 + \Delta z$ ) на множитель

$$e^{-\frac{\Gamma}{2} \Delta t} = e^{-\frac{\Gamma}{2} \frac{\Delta z}{v - v_{гр}}} = e^{-\alpha v_{гр} \frac{\Delta z}{v - v_{гр}}} \equiv e^{-\alpha_1 \Delta z},$$

откуда и следует соотношение (3.81).

Для иллюстрации эффективности энергетического метода расчета излучения вычислим амплитуду поля симметричной волны, возбуждаемого зарядом, движущимся по оси круглого волновода с диэлектрическим заполнением. Коэффициент пропорциональности  $\rho$  в этом случае для симметричной электрической волны имеет вид

$$\rho = \frac{W_1}{|E_0|^2} = \frac{1}{8} \epsilon^2 b^2 J_1^2(\mu) \frac{k^2}{\alpha^2}.$$

Используя известные выражения для фазовой и групповой скоростей в волноводе, с помощью формул (3.65) и (3.79) получаем

$$E_q = \frac{4q}{\epsilon b^2 J_1^2(\mu)}.$$

Найденное при помощи энергетического метода значение амплитуды излучаемой волны совпадает с амплитудой черенковской волны низшей частоты (3.11) для поля излучения, рассчитанного строго электродинамически. При наличии малой мнимой части у диэлектрической проницаемости заполнителя (т. е. при учете затухания поля из-за потерь в диэлектрике) нетрудно проверить выполнение равенства (3.81) для рассматриваемой замедляющей структуры.

Учитывая соотношения (3.79), можно представить полное эффективное поле, действующее на точечный заряд в ускоряющем поле, в виде

$$E_{эфф} = E_0 \cos \varphi - \frac{1}{2} qA. \quad (3.82)$$

Первое слагаемое тривиально и выражает действие стороннего ускоряющего поля; второе слагаемое определяет действие поля излучения. Из равенства (3.82) видно, что это поле всегда имеет тормозящий характер. Величина его равна полусумме амплитуд поля излучения справа (0) и слева ( $qA$ ) от частицы.

Применяя уравнения баланса энергии к произвольной однородной структуре с поглощением, находим фазу и выражаем амплитуду и коэффициент затухания основной излучаемой волны через известные характеристики ( $v_{ф}$ ,  $v_{гр}$ ,  $\rho$ ) симметричной волны в волноводе. Характеристики других излучаемых волн можно получить аналогичным образом, например, используя вспомогательное стороннее поле, совпадающее по частоте с рассматриваемой  $\omega_s$ . Для них получаются, конечно, те же соотношения (3.79) — (3.81), в которых  $\rho$ ,  $v_{гр}$  и  $\alpha$  относятся теперь к рассматриваемым высшим типам волн. При расчете амплитуды поля излучения для волны с азимутальной несимметрией следует помнить, что такие поля обращаются в нуль на оси структуры (радиальная зависимость продольной электрической составляющей этих полей описывается множителем вида  $I_m(\rho r)/I_m(\rho a)$ ). Поэтому амплитуда поля, возбуждаемого зарядом, летящим параллельно оси, оказывается (при  $\beta \approx 1$ , т. е.  $h \approx k$ ) пропорциональной  $m$ -й степени радиального смещения траектории частицы  $(r/a)^m$ .

Проведенное рассмотрение относилось к однородным вдоль оси структурам, но его можно без труда распространить и на периодические замедляющие устройства. В этом случае величину погонной запасенной энергии  $W_1$  следует рассчитывать как среднее на периоде структуры и учитывать соотношение (1.43), связывающее запасенную энергию с продольным потоком мощности. Под величиной  $E_0$  в случае периодических структур следует понимать амплитуду синхронной с зарядом пространственной гармоникой, а при вычислении реакции излучения заряда (работы излученного поля) необходимо учитывать лишь вклад этой синхронной гармоникой.

Для примера приведем выражение амплитуды резонансной (синхронной с зарядом) пространственной гармоникой поля с  $m$  азимутальными вариациями, рассчитанной из условия энергетического баланса (3.68):

$$f_n = \frac{q}{2} \frac{I_m(\rho n r)}{I_m(\rho n a)} \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{v_{gp}}{v}\right)} \approx \frac{q}{2\rho \left(1 - \frac{v_{gp}}{v}\right)} \left(\frac{r}{a}\right)^m, \quad (3.83)$$

где коэффициент  $\rho$ , характеризующий распределение поля по сечению, связан с продольным потоком мощности для рассматриваемой волны формулой

$$\rho = \frac{P}{v_{gp} |f_n|^2} = \frac{1}{2(k_1 a)^2 \alpha_1 v_{gp1} R_{\perp}}. \quad (3.84)$$

Как следует из равенства (3.83), наибольшей амплитудой среди несимметричных волн, возбуждаемых параксиальным пучком ( $r \ll a$ ), движущимся параллельно оси волновода, обладает волна с одной вариацией по азимуту ( $m=1$ ).

### 3.5. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПУЧКА ЧАСТИЦ В ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СТРУКТУРЕ

Зная поле излучения, создаваемое одной частицей, можно определить простым суммированием поле, возбуждаемое в замедляющей структуре произвольной системой частиц, движущихся с заданной скоростью. Напомним, что, говоря о процессах в электронном линейном ускорителе, можно считать заданным заранее движение всех сгустков, образующих пучок, лишь при рассмотрении эффектов, которые связаны с действием азимутально симметричного поля излучения. В таком поле на релятивистские электроны не действует поперечная отклоняющая сила, и, следовательно, их радиальное положение остается неизменным, несмотря на то что частицы в хвостовой части пучка движутся в поле, возбужденном головными электронами\*. Поэтому последующий расчет относится к описанию лишь эффектов на частоте основной волны. Анализ взаимодействия поля

\* Действие продольной составляющей поля излучения также не изменяет скорость частиц в силу предположения о релятивистском характере движения, а лишь меняет их энергию.

излучения с пучком для волн другого типа, возбуждаемых на более высоких частотах, требует самосогласованного рассмотрения, которое будет проведено в гл. 5.

Пусть распределение равномерно движущихся зарядов в момент  $t$  описывается функцией  $q(z-vt)$  (для простоты считаем, что все частицы сосредоточены на оси волновода). Описывая поле каждого элемента заряда  $q(z_1-vt) dz_1$  формулой (3.65), получаем для поля излучения всей системы зарядов (пучка) в точке  $z$  выражение \*

$$E_{\pi} = -A_0 e^{ihz + \alpha_1 z} \int_z^{\infty} q(z_1 - vt) e^{-ihz_1 - \alpha_1 z_1} dz_1. \quad (3.85)$$

Интегрирование здесь проводится по всем источникам правее точки наблюдения  $z$ . Выражение (3.85) можно представить в виде, аналогичном (3.65):

$$E_{\pi} = -QA e^{i\zeta(hz - \omega t - hz_0)},$$

где  $Q(\zeta) = e^{\alpha_1 \zeta} \int_{\zeta}^{\infty} q(z_1) e^{-ihz_1 - \alpha_1 z_1} dz_1$ , ( $\zeta = z - vt$ ) можно назвать эффективным комплексным зарядом.

Для теории линейных ускорителей наиболее интересен случай, когда  $q(z)$  описывает систему одинаковых сгустков, расположенных через одну длину волны  $\lambda_{\text{гр}} = 2\pi/h$ . При этом следует различать стационарное распределение поля, соответствующее бесконечному цугу сгустков, и нестационарное, соответствующее конечному цугу. При бесконечном цуге сгустков можно, разбивая интеграл  $Q(\zeta)$  на сумму интегралов по периодам, представить его в виде

$$Q = \frac{e^{-\alpha_1 \Delta}}{1 - e^{-\alpha_1 \lambda}} q + e^{\alpha_1 (\lambda - \Delta)} \int_{\lambda - \Delta}^{\lambda} e^{-ihz_1 - \alpha_1 z_1} q(z_1) dz_1, \quad (3.86)$$

где  $q = \int_0^{\lambda} e^{-ihz_1} q(z_1) dz_1 = q_0 e^{-ihz_{\text{эфф}}}$  — комплексный заряд на одном периоде  $(0, \lambda)$ ;  $\Delta = z_m - \zeta$ , а  $z_m$  — наименьшее число вида  $m\lambda$ , т. е. ближайшая к  $\zeta$  справа граница периода.

Первое слагаемое в выражении (3.86) учитывает влияние в точке  $z$  всех зарядов правее  $z_m$ , второе —

\* Здесь учтено, что фаза поля излучения  $\varphi_A = \pi$ .

влияние заряда на последнем (неполном) периоде. Будем считать затухание поля излучения настолько малым, что его можно не учитывать на протяжении одного периода. Тогда знаменатель дроби  $1 - e^{-\alpha_1 \lambda}$  заменим  $\alpha_1 \lambda$ , пренебрежем вторым слагаемым в формуле (3.86), а в первом слагаемом опустим экспоненты  $e^{-\alpha_1 \lambda}$  и  $e^{-z_1 z_1}$ . В результате формула упрощается:

$$Q = \frac{1}{\alpha_1 \lambda} \int_0^\lambda e^{-i h z_1} q(z_1) dz_1 = \frac{q_0}{\alpha_1 \lambda} e^{-i h z_{\text{эфф}}} . \quad (3.87)$$

Как видно из полученной формулы, полный эффективный заряд пучка пропорционален заряду одного сгустка с коэффициентом пропорциональности  $1/\alpha_1 \lambda$ . Множитель  $1/\alpha_1 \lambda$  показывает, что бесконечный цуг частиц при наличии затухания ( $\alpha_1 \neq 0$ ) эквивалентен конечному числу

$$n_\infty = 1/\alpha_1 \lambda \quad (3.88)$$

сгустков в системе без поглощения, которое можно назвать эффективным числом сгустков. Величина  $Q$  не зависит от координаты точки: при малом затухании эффективный заряд для всех точек одинаков.

Окончательно для поля излучения бесконечного цуга сгустков получаем выражение

$$E_n = - \frac{q_0}{\alpha_1 \lambda} A_0 e^{i [h z - \omega t - h(z_0 + z_{\text{эфф}})]} . \quad (3.89)$$

Амплитуда поля постоянна вдоль цуга. Добавляя это поле к стороннему (ускоряющему) полю (3.63) и считая для простоты, что  $\delta = h(z_0 + z_{\text{эфф}})$ , т. е. центры сгустков расположены в максимуме ускоряющего поля, получаем выражение для полного поля

$$E = (E_0 e^{-\alpha z} - E_\infty) e^{i(h z - \omega t - \delta)} , \quad (3.90)$$

где  $E_\infty$  — стационарное значение амплитуды поля излучения системы частиц, вычисленное с учетом затухания в замедляющей структуре и равно

$$E_\infty = \frac{r A_0}{\alpha_1 \lambda} . \quad (3.91)$$

Соотношение (3.90) было получено ранее другими авторами (см., например, работу [2], гл. 4) при применении уравнения энергетического баланса непосредственно к стационарному случаю.

Аналогичным образом можно рассмотреть излучение конечного цуга сгустков. Если  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  — граничные точки движущейся последовательности сгустков, то поле излучения приближенно (при малом затухании и незначительной величине заряда каждого из сгустков) представляется в виде

$$E_{\Pi} = \begin{cases} E_{\Pi}^I = -E_{\infty} [1 - e^{-\alpha_1(\zeta_2 - \zeta_1)}] e^{-\alpha_1(\zeta_1 - \zeta)} \times \\ \quad \times e^{i(hz - \omega t - \delta_{\text{эфф}})} \quad \text{при } \zeta < \zeta_1; \\ E_{\Pi}^{II} = -E_{\infty} [1 - e^{-\alpha_1(\zeta_2 - \zeta)}] e^{i(hz - \omega t - \delta_{\text{эфф}})} \quad (3.92) \\ \quad \text{при } \zeta_1 < \zeta < \zeta_2; \\ E_{\Pi}^{III} = 0 \quad \text{при } \zeta > \zeta_2, \end{cases}$$

где верхний индекс характеризует область, в которой расположена точка наблюдения.

Из выражения (3.92) видно, что поле излучения отсутствует, как и следовало ожидать, в области III перед движущимся цугом сгустков. В области II, занятой источниками, поле излучения по мере удаления от правой границы цуга  $\zeta_2$  в глубь токового импульса растет вначале линейно, а затем более медленно, приближаясь (для цуга бесконечной длины) к стационарному значению  $E_{\infty}$ , определяемому тем, что спадание поля на длине  $\lambda$  из-за затухания компенсируется увеличением поля, обусловленным дополнительным эффективным зарядом на той же длине. Наконец, в области I, пройденной всеми сгустками импульса тока, поле экспоненциально затухает по мере удаления от левой границы цуга  $\zeta_1$ .

Для последующих расчетов необходимо знать выражения для поля излучения системы частиц в полуограниченном волноводе. Пусть инжекция электронного цуга началась в момент времени  $t=0$ . Распределение амплитуды поля излучения этого цуга в бесконечном волноводе описывается выражением  $E_{\Pi}^{II}$  формулы (3.92), где  $\zeta_2 = vt$ . Это выражение не учитывает нестационарного характера распределения поля, связанного с его дрейфом вдоль структуры с групповой скоростью и выражающегося в существовании «волны гашения» черенковского поля для бесконечной структуры [см. (3.3)]. Чтобы учесть такое распределение поля в ограниченной структуре, достаточно заменить  $\zeta_2$  на  $\hat{z}$ , где  $\hat{z}$  — мини-



мальное из чисел  $\zeta_2$  и  $z_{\text{гp}}$ , а  $z_{\text{гp}}$  — координата частицы, для которой групповой фронт достиг в момент  $t$  точки  $z$ . Если эта частица инжектирована в момент  $t_i$ , то  $z = v_{\text{гp}}(t - t_i)$ ,  $z_{\text{гp}} = v(t - t_i)$ , откуда  $z_{\text{гp}} = zv/v_{\text{гp}}$  и, следовательно,  $\hat{z} = \min(vt, zv/v_{\text{гp}})$ .

Полученное соотношение имеет простой физический смысл; если  $z > v_{\text{гp}}t$  (т. е. групповой фронт для головной частицы еще не дошел до  $z$ ), то в точке  $z$  сказывается влияние полей всех летящих впереди частиц, вплоть до головной ( $\zeta_2 = vt$ ); при  $z < v_{\text{гp}}t$  (групповой фронт для головной частицы уже прошел точку  $z$ , и ее поле погашено) влияют лишь электроны, расположенные левее точки  $z_{\text{гp}} = zv/v_{\text{гp}}$ . В первом случае ( $z > v_{\text{гp}}t = z_{\text{гp}}$ )  $E_{\text{п}} = -E_{\infty}(1 - e^{-\alpha z_{\text{гp}} e^{\alpha_1(z - z_{\text{гp}})})$ . Во втором случае ( $z < v_{\text{гp}}t$ )  $\hat{z} - z = z_{\text{гp}} - z = \frac{v - v_{\text{гp}}}{v_{\text{гp}}}z$  и, следовательно,  $\alpha_1(\hat{z} - z) = \alpha z$ , так что  $E_{\text{п}} = -E_{\infty} e^{-\alpha z}$ .

Таким образом, начальный участок кривой  $E_{\text{п}}(z, t)$  (область  $z < z_{\text{гp}}$ ) не зависит от  $t$ , а описывает установившееся поле. Второй участок ( $z > z_{\text{гp}}$ ) описывает еще не установившееся поле (кривые  $E_{\text{п}}(z)$  для различных  $t$  изображены на рис. 3.5 пунктиром).

Считая, как и ранее, что  $v_{\text{гp}} \ll v$ , т. е.  $\alpha_1 \ll \alpha$ , можно в выражении для амплитуды излучаемого поля опустить множитель  $e^{\alpha_1(z - z_{\text{гp}})}$ . При этом для поля излучения в пределах ускоряющей секции длины  $l$  получим

$$E_{\text{п}}(z, t) = \begin{cases} -E_{\infty}(1 - e^{-\alpha z_{\text{гp}}}) & \text{при } l > z > v_{\text{гp}}t; \\ -E_{\infty}(1 - e^{-\alpha z}) & \text{при } z < v_{\text{гp}}t = z_{\text{гp}}. \end{cases} \quad (3.93)$$

Приведенные формулы (3.93) описывают распределение поля излучения для непрерывающегося цуга сгустков в полубесконечном волноводе. Если ток прекращается в момент  $T_1$ , то начиная с этого момента следует добавить поле  $E_{\text{п1}}$ , связанное с обрывом цуга и равное, очевидно,

$$E_{\text{п1}} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < T_1; \\ E_{\infty}(1 - e^{-\alpha z}) & \text{при } z < v_{\text{гp}}(t - T_1), t > T_1; \\ E_{\infty}(1 - e^{-\alpha v_{\text{гp}}(t - T_1)}) & \text{при } z > v_{\text{гp}}(t - T_1), \\ & t > T_1. \end{cases} \quad (3.94)$$

Динамику изменения поля удобно проследить на рис. 3.6, где приведено черенковское поле  $E = E_{\text{п}} + E_{\text{пл}}$  для различных моментов времени. До момента  $T_1$  черенковское поле растет, достигая (при  $z < l_1$ ) \* предельного значения и останавливаясь на нем, а при  $z > l_1$  — не доходя до предельного значения. При  $t > T_1$  черенковское поле начинает уменьшаться, спадая до нуля по мере продвижения группового фронта до конца цуга. При  $t > T_1 + l/v_{\text{гр}}$  в пределах ускоряющей секции черенковское поле уже полностью исчезает.

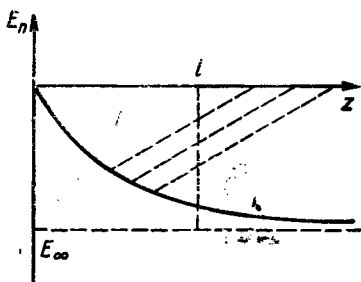


Рис. 3.5. Пространственно-временное распределение поля, излученного пучком.

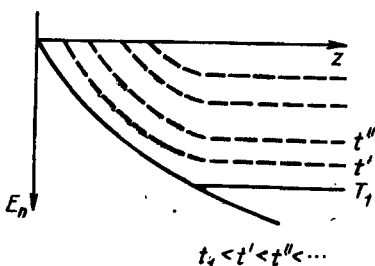
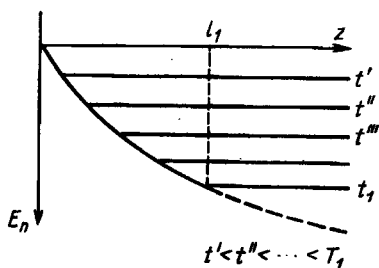


Рис. 3.6. Картина установления поля излучения в замедляющей структуре.

\* Координата  $z = l_1 = v_{\text{гр}} T_1$  соответствует точке, в которую групповой фронт от головных частиц приходит одновременно с концом их цуга.

## ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРОННОГО УСКОРИТЕЛЯ НА БОЛЬШИЕ ТОКИ

### 4.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В УСКОРИТЕЛЕ

Первые работы, посвященные рассмотрению эффектов, связанных с обратной реакцией пучка электронов в линейном ускорителе [1, 2], основывались обычно на уравнении энергетического баланса. При этом влияние пучка сводилось к тому, что наряду с омическими потерями из-за конечной проводимости стенок ускоряющей секции появляются дополнительные потери мощности вдоль ускорителя, обусловленные затратой высокочастотным полем работы на ускорение пучка. Очевидно, такое простое энергетическое рассмотрение справедливо лишь для установившегося режима, когда как высокочастотное поле генератора, так и поля, возбужденные частицами, достигли уже своих стационарных значений. Проведенное в предыдущих главах исследование полей, создаваемых частицами и сгустками, движущимися в замедляющих структурах, позволяет более последовательно и детально изучить эффект влияния пучка в ускорителе с большим током. В частности, можно рассмотреть нестационарные режимы работы, что и является в значительной степени предметом обсуждения в настоящей главе [3—5].

Уже самые грубые прикидки показывают, что высокопоточный электронный ускоритель на значительную энергию должен быть многосекционным. Действительно, если ускоряемый ток равен, например,  $2a$ , а ускоряющее поле  $E \approx 10^7$  в/м, то мощность, расходуемая только на ускорение пучка, составляет  $20$  Мвт на  $1$  м длины установки, т. е. имеет порядок мощности лучших современных клистронов. При этом энергия электронов повышается на  $10$  Мэв, так что ускоритель на  $30$  Мэв придется разбить по крайней мере на три секции. Каждая из секций обычно снабжается независимым высокочастотным питанием; при релятивистских энергиях (т. е. при энергии в несколько мегаэлектронвольт для элект-

тронов) все секции могут быть идентичными. Здесь мы, будем рассматривать характеристики одной секции.

Рассмотрим три режима работы ускорителя.

1. Стационарный, когда как ускоряющее поле, создаваемое генератором, так и поле излучения, возбуждаемое пучком, принимают стационарное значение. Предполагается, что высокочастотная энергия вводится от генератора непрерывно на одном уровне и пучок частиц также инжектируется непрерывно.

2. Переходный от момента включения генератора (или момента начала инжекции пучка) до установления стационарного режима. При этом высокочастотная мощность и ускоряемые частицы вводятся в ускоритель непрерывно начиная с определенного момента.

3. Импульсный, когда высокочастотное поле генератора имеет стационарное значение, а частицы инжектируются короткими импульсами, за время которых созданное ими поле не успевает достигнуть своего стационарного значения. Как будет показано, такой режим позволяет получать очень большие импульсные значения тока ускоренных частиц.

Прежде чем перейти к анализу различных режимов работы ускорителя, рассмотрим общую характеристику полей в системе. Полное продольное поле, действующее на частицы, складывается из трех составляющих: 1) ускоряющее поле, создаваемое генератором (стороннее поле); 2) тормозящее поле излучения пучка; 3) поле кулоновского взаимодействия частиц. Как показывает оценка [3], продольное кулоновское поле расталкивания, соответствующее экспоненциально затухающим волнам, значительно слабее поля излучения, так что его можно рассматривать лишь как поправку. В настоящей главе оно не будет учитываться. Здесь уместно подчеркнуть еще раз, что в этой главе поле, излученное пучком, аппроксимируется лишь одной частотной гармоникой, соответствующей симметричной электрической волне такой же геометрии, как и у ускоряющего поля. Влиянием аксиально симметричных волн, излучаемых на более высоких частотах, можно пренебречь из-за относительной малости их амплитуд и некогерентности волн, возбуждаемых различными сгустками. Взаимодействие же пучка с возбуждаемыми им несимметричными волнами будет специально рассматриваться в следующей главе.

**Ускоряющее поле.** Максимальное значение поля в замедляющей структуре ограничено некоторой величиной  $E_{\text{макс}}$ , определяемой условиями пробоя. В используемых обычно замедляющих структурах  $E_{\text{макс}} \approx (100 \div 150)$  кв/см. Поле, создаваемое генератором, убывает вдоль секции ускорителя, а черенковское поле частиц (имеющее обратный знак), наоборот, по мере приближения к началу секции, поэтому [формула (3.92) в гл. 3] полное поле достигает наибольшей величины в начале секции, где оно совпадает с полем генератора. Будем считать, что амплитуда поля, создаваемого генератором в начале секции ( $z=0$ ), определяется соотношением

$$E_r = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_r, \\ E_{\text{макс}} & \text{при } t \geq t_r, \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $t_r$  — момент включения генератора. Будем упрощенно считать, что это значение поля распространяется вдоль секции (в сторону увеличения  $z$ ) с групповой скоростью  $v_{\text{гр}}$ , испытывая при этом затухание с коэффициентом  $\alpha$ . Тогда ускоряющее поле в момент  $t$  в точке  $z$  будет равно:

$$E_r(z, t) = E_r \left( t - t_r - \frac{z}{v_{\text{гр}}} \right) e^{-\alpha z}. \quad (4.1a)$$

Пусть для простоты сгустки находятся в максимуме ускоряющего поля, так что в формулу (4.1a) фазовый множитель не включен; для релятивистских частиц мало перемещающихся по фазе, его учет не представляет труда. Будем также считать, что источником высокочастотной мощности является генератор постоянного поля, т. е. что амплитуда стороннего ускоряющего поля не зависит от степени нагрузки системы пучком. Вопрос о воздействии пучка на работу генератора — радиотехническая задача, которую следует решать с учетом специфики системы возбуждения ускоряющего высокочастотного поля.

При рассмотрении удобно перейти к безразмерному полю генератора  $e_r(z, t) = E_r(z, t)/E_{\text{макс}}$ . Тогда

$$e_r(z, t) = 0 \quad \text{при } t < t_r; \quad (4.1б)$$

$$e_r(z, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{z}{v_{\text{гр}}} > t - t_r; \quad 0 < t - t_r < t_{\text{гр}}, \\ e^{-\alpha z} & \text{при } \frac{z}{v_{\text{гр}}} < t - t_r; \quad 0 < t - t_r < t_{\text{гр}}; \end{cases} \quad (4.1в)$$

$$e_r(z, t) = e^{-\alpha z} \quad \text{при } t - t_r > t_{\text{гр}}. \quad (4.1г)$$

Здесь  $t_{гр} = l/v_{гр}$  — время заполнения ускоряющей секции длиной  $l$ . Стационарному режиму соответствует выражение (4.1г).

*Поле, возбуждаемое электронным пучком.* Выражения для поля излучения, генерируемого в ускоряющей секции пучком электронов, получены в гл. 3 [см. формулы (3.90) и (3.91)]. Их можно переписать в безразмерном виде. В случае, когда инжекция пучка происходит непрерывно, поле излучения в пределах ускоряющей секции длиной  $l$  распределено по закону:

$$e_{п}(z, t) = \begin{cases} -\chi(1 - e^{-az}) & \text{при } z < z_{гр} = v_{гр}t; \\ -\chi(1 - e^{-az_{гр}}) & \text{при } z_{гр} < z < l. \end{cases} \quad (4.2)$$

Здесь мы перешли к безразмерному полю пучка  $e_{п} = E_{п}/E_{макс}$  и ввели коэффициент нагрузки током  $\chi = E_{\infty}/E_{макс}$ . Используя выражение (3.88) для амплитуды стационарного поля излучения  $E_{\infty}$ , переписываем коэффициент  $\chi$  в виде

$$\chi = \frac{E_{\infty}}{E_{макс}} = \frac{IR_{ш}}{E_{макс}} = \frac{IE_{макс}}{Q}, \quad (4.3)$$

где  $Q$  — погонные потери на джоулево тепло. Из равенства (4.3) видно, что нагрузка током характеризует соотношение потерь высокочастотной мощности, расходуемой на ускорение пучка и на омический нагрев стенок замедляющей структуры. Напомним, что нижняя строчка в соотношении (4.2) описывает неустановившееся поле излучения непрерывного туга, а верхняя — определяет стационарное распределение черенковского поля. Если в секцию ускорителя инжектируется импульс тока конечной длительности  $T_1$ , то к распределению поля (4.2) следует добавить поле  $e_{п1}$ , связанное с обрывом туга и определяемое формулами:

$$e_{п1} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < T_1; \\ \chi \left[ 1 - e^{-av_{гр}(t-T_1)} \right] & \text{при } t > T_1, \\ & z > v_{гр}(t - T_1); \\ \chi \left[ 1 - e^{-az} \right] & \text{при } t > T_1, z < v_{гр}(t - T_1). \end{cases} \quad (4.2a)$$

Полное поле в ускоряющей секции описывается суммой выражений (4.2) и (4.2a). Эти выражения служат осно-

вой для анализа работы ускорителя в различных режимах.

Для того чтобы яснее представить себе соотношения величин стороннего ускоряющего поля и поля излучения, можно рассмотреть некоторые характеристики ускорителя, связанные со свойствами пучка. Назовем критическим заряд  $q_1$  для одного сгустка, создающего за собой поле излучения  $E_{\text{п}} = q_1 A$ , равное принятому предельно допустимому электрическому полю  $E_{\text{макс}}$  \*. Очевидно,  $q_1 = E_{\text{макс}}/A$  или, согласно соотношениям (3.79):

$$q_1 = 2\rho \left(1 - \frac{v_{\text{гр}}}{v}\right) E_{\text{макс}}. \quad (4.4)$$

Этому критическому заряду легко сопоставить критический ток

$$I_1 = \frac{vq_1}{\lambda} = \frac{2\rho}{\lambda} (1 - v_{\text{гр}}/v) E_{\text{макс}}. \quad (4.5)$$

Аналогично для бесконечного цуга сгустков можно ввести критический заряд  $q_{\infty}$  и соответственно критический ток  $I_{\infty}$ , при котором поле бесконечного цуга равно  $E_{\text{макс}}$ . Очевидно,

$$q_{\infty} = q_1/n_{\infty} = 2\rho\alpha_1\lambda (1 - v_{\text{гр}}/v) E_{\text{макс}} \approx 2\rho\alpha\lambda (v_{\text{гр}}/v) E_{\text{макс}}, \quad (4.4a)$$

$$I_{\infty} = I_1/n_{\infty} = 2\rho\alpha v_{\text{гр}} E_{\text{макс}} = \frac{\alpha P_{\text{макс}}}{E_{\text{макс}}} = \frac{E_{\text{макс}}}{R_{\text{ш}}}, \quad (4.5a)$$

где  $P_{\text{макс}} = \rho v_{\text{гр}} E_{\text{макс}}^2$  — поток мощности, соответствующий предельному полю  $E_{\text{макс}}$ , а  $R_{\text{ш}} = E_{\text{макс}}^2/Q_{\text{ш}} = E_{\text{макс}}^2/2\alpha P_{\text{макс}} = 1/2\alpha\rho v_{\text{гр}}$  — шунтовое сопротивление ускоряющей секции.

Для конечного цуга из  $m$  сгустков критические заряд и ток определяются соотношениями:

$$q_m = \frac{q_1}{n_m}, \quad (4.4b)$$

$$I_m = \frac{I_1}{n_m}, \quad (4.5b)$$

где  $n_m = (1 - e^{-2\alpha_1\lambda m}) / (1 - e^{-\alpha_1\lambda})$  — эффективное число сгустков в цуге.

---

\* Как показано в гл. 3, поле излучения экспоненциально возрастает от нуля (возле левого торца секции) до своего предельного значения. Поэтому вводимые критические характеристики имеют смысл лишь для длинных ускоряющих секций.

Оценим критический ток для бесконечного цуга. Если для шунтового сопротивления  $R_{ш}$  принять значение  $R_{ш}=40 \text{ Мом/м}$ , а для допустимого поля  $E_{\text{макс}}=12 \text{ Мв/м}$ , то, согласно формуле (4.5а),  $I_{\infty}=0,3 \text{ а}$ . Это означает, что токи, сравнимые с  $0,3 \text{ а}$ , должны оказывать влияние на поле в ускорителе.

Оценим критический ток для одного импульса. Для этого найдем связь между эффективным числом сгустков  $n_{\infty}$  [см. формулу (3.88)] с добротностью  $Q$ :  $n_{\infty}=1/\alpha_1 \lambda \approx 1/\alpha \lambda \cdot v/v_{\text{гр}}=v/c \cdot Q/\pi \approx Q/\pi$ . Добротность  $Q$  при фиксированной частоте меняется сравнительно слабо. Из приведенного соотношения видно, что добротность определяет число периодов высокочастотного поля, за которое устанавливается стационарное значение поля. Если считать, например,  $Q=10^4 \approx 3,3 \pi \cdot 10^3$ , то число периодов, за которое устанавливается стационарное значение поля излучения в бесконечном волноводе, оказывается равным  $n_{\infty}=3300$ . Это приводит к значению критического тока для одного сгустка  $I_1=10^3 \text{ а}$ . Таким образом, для импульсных токов порядка одного или нескольких ампер влияние поля одного сгустка гораздо меньше влияния внешнего ускоряющего поля.

#### 4.2. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ

Стационарный режим наступает, очевидно, после того, как высокочастотное поле генератора достигает конца ускоряющей секции и «волна гашения» черенковского поля, идущая от торца, тоже достигает конца секции. После установления этот режим длится до момента прекращения инъекции тока в ускоритель. Таким образом, он имеет место для промежутков времени  $t$ , удовлетворяющих неравенствам  $\text{max}(t_{\text{гр}}, t_{\text{гр}}+t_{\text{г}}) < t < T_1$ . Стационарный режим может наступить лишь при достаточно большой длительности цуга  $T_1$ , во всяком случае превосходящей время заполнения секции  $t_{\text{гр}}$ .

Полное поле в ускорителе при стационарном режиме равно, согласно формулам (4.1)—(4.2):

$$E(z) = E_{\text{г}}(z) + E_{\text{п}}(z) = E_{\text{макс}} e^{-\alpha z} - E_{\infty} (1 - e^{-\alpha z}), \quad (4.6)$$

или в безразмерных обозначениях

$$e(z) = (1 + \chi) e^{-\alpha z} - \chi. \quad (4.6a)$$



Это же соотношение можно получить из уравнения баланса энергии для волновода, нагруженного пучком [см. работу [2], формулу (2.5)].

Поле спадает вдоль секции тем быстрее, чем больше коэффициент нагрузки пучком  $\chi$ . В конце секции  $l$  оно достигает значения

$$\xi = e(l) = (1 + \chi)e^{-\Lambda} - \chi, \quad (4.7)$$

где  $\Lambda = \alpha l = l/l_0$  — безразмерная приведенная длина секции ( $l_0$  — длина, на которой поле затухает в  $e$  раз при отсутствии пучка).

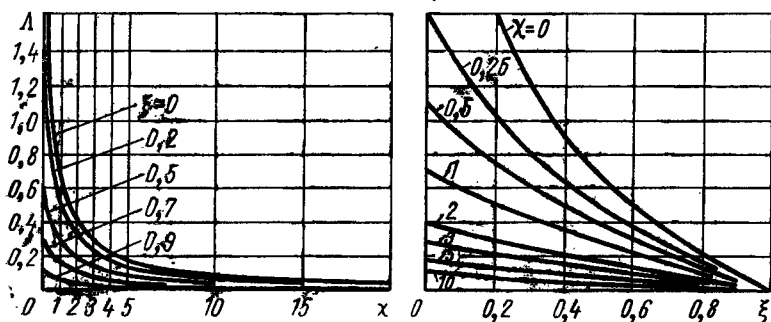


Рис. 4.1. Зависимость приведенной длины ускоряющей секции  $\Lambda$  от относительного уровня поля на выходе  $\xi$  и нагрузки током  $\chi$ .

Соотношение (4.7) определяет длину секции в функции коэффициента нагрузки  $\chi$  при данном уровне поля на конце  $\xi$ :

$$\Lambda = \ln \frac{1 + \chi}{\xi + \chi}. \quad (4.8)$$

Потребуем, чтобы на всей длине секции поле было ускоряющим ( $\xi \geq 0$ ), тогда получим соотношение

$$\chi \leq \frac{e^{-\Lambda}}{1 - e^{-\Lambda}}, \quad (4.9)$$

определяющее предельную нагрузку при данной длине секции или, наоборот, предельную длину секции при фиксированной нагрузке.

На рис. 4.1 приведены графики зависимости  $\Lambda$  от  $\xi$  и  $\chi$ . При больших значениях коэффициента нагрузки током ( $\chi \gg 1$ )

$$\Lambda \approx \frac{1 - \xi}{\chi} - \frac{1 - \xi^2}{2\chi^2} + \dots, \quad (4.8a)$$

т. е. длина секции убывает обратно пропорционально току пучка. Среднее значение поля в секции, согласно равенству (4.6), равно

$$e_{cp} = \frac{1}{l} \int_0^l [(1 + \chi) e^{-\alpha z} - \chi] dz = \frac{(1 + \chi)(1 - e^{-\Lambda})}{\Lambda} - \chi \equiv$$

$$\equiv \frac{1 - \xi}{\Lambda} - \chi \equiv \frac{1 - \xi}{\ln \frac{1 + \chi}{\xi + \chi}} - \chi. \quad (4.10)$$

При больших токах ( $\chi \gg 1$ )  $e_{cp} \approx 1 + \xi/2$ .

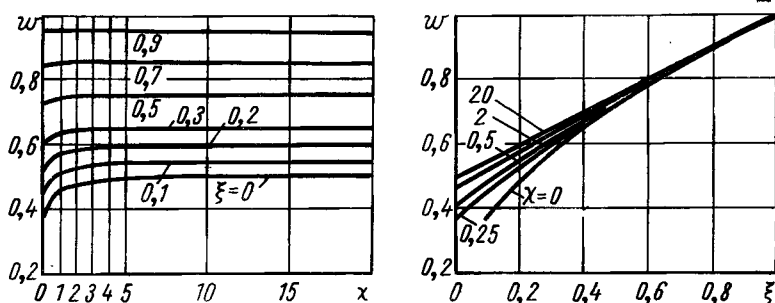


Рис. 4.2. Зависимость приращения энергии частиц  $w$  на секции от относительного уровня поля на выходе  $\xi$  и нагрузки током  $\chi$ .

Энергия  $W_{cp}$ , приобретаемая частицами на одной секции, равна  $qE_{cp}l$ . Составим отношение этой энергии к максимально возможной  $W_{max} = qE_{max}l$ , получим для безразмерной энергии \*  $w = W_{cp}/W_{max}$  выражение

$$w = \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} - \chi \left( 1 - \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} \right). \quad (4.11)$$

График  $w = w(\xi, \chi)$  приведен на рис. 4.2. При больших токах ( $\chi \gg 1$ )

$$w \approx 1 - \frac{\chi \Lambda}{2}. \quad (4.11a)$$

Рассмотрим коэффициент полезного действия  $\kappa$  секции ускорителя, который можно определить как отноше-

\* Величину  $w = e_{cp}$  назовем коэффициентом эффективности поля.

ние мощности, передаваемой пучку, к полной вводимой мощности\*:

$$\kappa = \frac{1}{P_0} \int_0^l IE(z) dz = 2\chi\omega\Lambda = 2\chi \left( 1 - \xi - \chi \ln \frac{1+\chi}{\xi+\chi} \right) =$$

$$= 2\chi\Lambda \left[ \frac{1-e^{-\Lambda}}{\Lambda} (1+\chi) - \chi \right]. \quad (4.12)$$

Зависимость  $\kappa = \kappa(\xi, \chi)$  приведена на рис. 4.3. При больших коэффициентах нагрузки ( $\chi \gg 1$ ) к. п. д. стре-

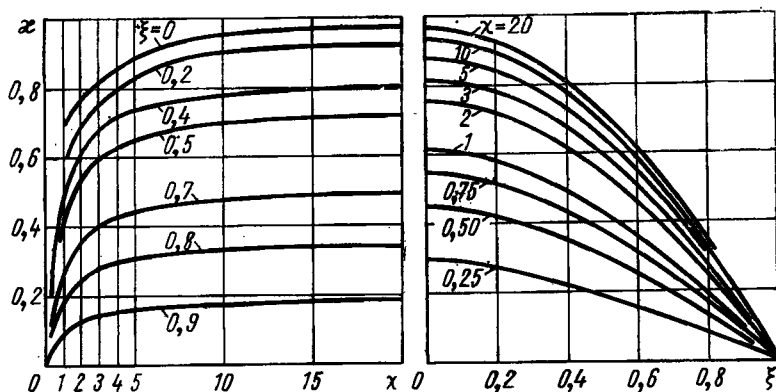


Рис. 4.3. Зависимость коэффициента полезного действия  $\kappa$  от нагрузки током  $\chi$  и уровня поля на выходе секции  $\xi$ .

мится к постоянному пределу  $1 - \xi^2$ , что физически очевидно ( $\xi^2$  — неиспользованная доля мощности на выходе секции).

Из приведенных на рис. 4.1—4.3 графиков следует, что с увеличением нагрузки пучком (с ростом  $\chi$ ) приведенная длина секции сильно падает, а относительная приобретаемая энергия и к. п. д. растут. На этих графиках различные характеристики ускорителя представлены в функции двух параметров  $\chi$  и  $\xi$ . Можно поставить вопрос о выборе некоторого оптимального значения поля в конце секции ( $\xi_{\text{опт}}$ ). Представим энергию, приобретаемую частицами в ускоряющей секции, в виде

$$W_{\text{ср}} = qE_{\text{ср}}l = q\sqrt{P_0 l R_{\text{ш}}} \omega \sqrt{2\Lambda} = q\sqrt{P_0 l R_{\text{ш}}} \Pi(\omega, \Lambda). \quad (4.13)$$

\* При расчете полного к. п. д. следует учитывать, что на возбуждение основной ускоряющей гармоник приходится лишь часть общей мощности генератора.

При заданных \*  $P_0$ ,  $I$  и  $R_{ш}$  зависимость энергии, приобретаемой частицей в секции, от остальных параметров определяется функцией  $\Pi(\omega, \Lambda) = \omega \sqrt{2\Lambda}$ . Найдем максимальное значение  $\Pi^{**}$  (т. е. максимальный прирост энергии) при заданном токе  $I$ . При этом надо иметь

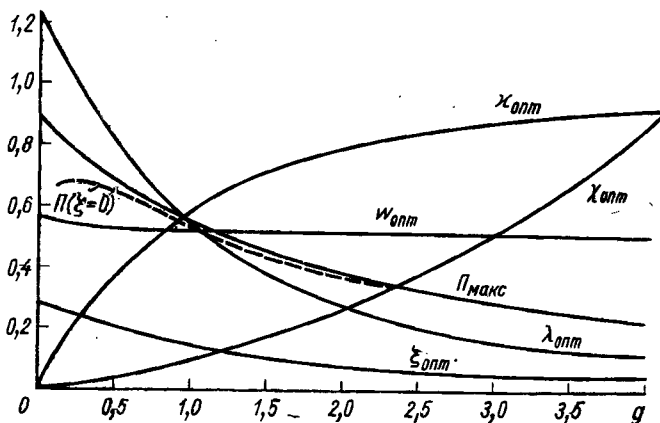


Рис. 4.4. Зависимость оптимальных параметров ускорителя от относительного значения тока  $g$ .

в виду, что при фиксированном токе параметр  $\chi$  оказывается сложной функцией  $\xi$ :  $\xi = g / \sqrt{2\Lambda(g, \xi)}$ , где  $g = I/I_0$ , ( $I_0 = \sqrt{P_0/R_{ш}l}$ ), а  $\Lambda$  — функция  $\xi$  и  $g$  согласно формуле (4.8). Условие максимума  $\Pi$  при заданном  $g$  определяется соотношением

$$2g [1 - e^{-\Lambda} (1 + \Lambda)] = \sqrt{2\Lambda} [e^{-\Lambda} (1 + 2\Lambda) - 1],$$

из которого находится  $\Lambda_{opt}(g)$ . По найденному оптимальному значению  $\Lambda_{opt}$  можно вычислить  $\omega_{opt}$ ,  $\chi_{opt}$ ,  $\lambda_{opt}$ ,  $\Pi_{max}$  и  $\xi_{opt}$  в функции от  $g$  (рис. 4.4). Из рис. 4.4 видно, что оптимальное значение  $\xi$  меняется от 0,284 при слабой токовой нагрузке ( $g \rightarrow 0$ ) до нуля при бесконечной нагрузке током. Следует отметить, что даже

\* Напомним, что шунтовое сопротивление  $R_{ш}$  (при фиксированной длине волны ускоряющего поля) практически не зависит от конкретных параметров замедляющей структуры.

\*\* Заметим, что требование  $\Pi = \max$  — условие минимальной стоимости установки, если считать, что она складывается из двух частей, одна из которых пропорциональна длине, а вторая — потребляемой мощности.

существенное отклонение  $\xi$  от  $\xi_{\text{опт}}$  не приводит к значительному уменьшению  $\Pi$ . На рис. 4.4 пунктиром приведено значение  $\Pi(g)$  при  $\xi=0$ . За исключением случая очень малых токов ( $g \ll 1$ ), эта кривая близка к  $\Pi_{\text{макс}}$ . Значения  $\Pi(g)$  для  $\xi=0,3$  отличаются от  $\Pi_{\text{макс}}(g)$  не больше, чем на 0,02. Таким образом, выбор конкретного значения уровня поля на выходе секции в диапазоне от 0 до 0,3 фактически несуществен. В дальнейших расчетах будет приниматься значение  $\xi = 1/3$ .

Полученные выражения характеристик ускорителя позволяют также производить оптимальный выбор и других параметров. Например, можно рассмотреть условия достижения максимума коэффициента полезного действия. Потребуем максимума к.п.д. ускорителя, тогда из выражения (4.12) получим оптимальное значение токовой нагрузки  $\chi$  для заданной структуры ( $\Lambda = \text{const}$ ). Из условия  $\left. \frac{\partial \chi}{\partial \chi} \right|_{\Lambda = \text{const}} = 0$  имеем

$$\chi_{\text{опт}} = \frac{1-a}{2a}, \quad (4.14)$$

где  $a = 1 - (1 - e^{-\Lambda})/\Lambda$ . Можно, наоборот, при заданной величине тока в импульсе  $I = \text{const}$  определить оптимальное значение приведенной длины секции  $\Lambda$ . Условие  $\left. \frac{\partial \chi}{\partial \Lambda} \right|_{\chi = \text{const}} = 0$  дает

$$\chi_{\text{опт}} = \frac{e^{-\Lambda}}{1 - e^{-\Lambda}}. \quad (4.15)$$

На рис. 4.5 на плоскости  $(\chi, \Lambda)$  изображены графики  $\chi_{\text{опт}}(\Lambda)$  (кривая 1) и  $\Lambda_{\text{опт}}(\chi)$  (кривая 2), а также представлены зависимости к.п.д. от токовой нагрузки  $\chi(\chi)$ , соответствующие этим двум оптимальным случаям. Впрочем, рассмотренные здесь условия достижения оптимальных характеристик имеют лишь относительную ценность. Во-первых, потому, что они получены из анализа, учитывающего действие лишь одной (симметричной) моды возбуждаемого поля: как покажет дальнейший анализ (см. гл. 5), может оказаться, что такой оптимальный ускоритель просто не будет работать из-за поперечной неустойчивости пучка. Во-вторых, требование максимального к.п.д. далеко не всегда отвечает действительно оптимальным условиям эксплуатации ускорителя, наоборот, часто бывает целесообразнее

разумно повысить интенсивность пучка, хотя бы и за счет некоторого снижения к. п. д.

Отметим, что интересные результаты, полученные для стационарного режима ускорения из анализа уравнения баланса мощности, можно найти в работах [6—9].

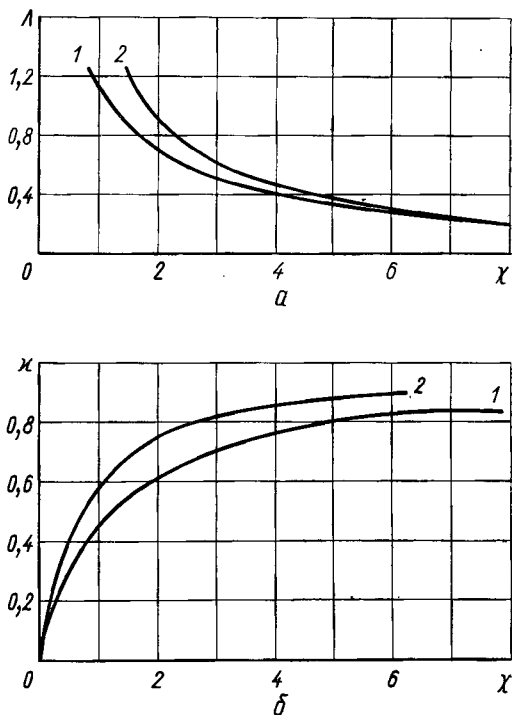


Рис. 4.5. Оптимальная зависимость токовой нагрузки  $\chi$  от приведенной длины секции  $\Lambda(a)$ , обеспечивающая максимум к. п. д. при заданной структуре ускорителя (кривая 1); зависимость  $\Lambda_{\text{опт}}(\chi)$  (кривая 2), обеспечивающая максимум к. п. д. при заданном значении импульсного тока, и зависимости к. п. д. от  $\chi$ , соответствующие этим оптимумам ( $\delta$ ).

#### 4.3. ПЕРЕХОДНЫЙ РЕЖИМ

В течение времени с момента включения генератора высокочастотного поля  $t_r$  (или момента начала инъекции пучка  $t=0$ ) до момента установления стационарного режима длится переходный режим работы ускорителя.

теля. Считаем, что на протяжении этого промежутка времени ток инжекции не прерывается (импульсный режим работы ускорителя рассмотрен в следующем разделе). Безразмерное поле в ускоряющей секции можно, согласно соотношениям (4.1) и (4.2), записать в виде

$$e(z, t) = \begin{cases} -\chi (1 - e^{-\alpha \hat{z}}) & \text{при } z > v_{\text{гp}}(t - t_r), \\ e^{-\alpha z} \chi (1 - e^{-\alpha \hat{z}}) & \text{при } z < v_{\text{гp}}(t - t_r), \end{cases} \quad (4.16)$$

где

$$\hat{z} = \min(z, v_{\text{гp}}t). \quad (4.17)$$

Введем безразмерные интервалы времени, отнесенные к интервалу  $t_{\text{гp}}$ :

$$x = t_i/t_{\text{гp}}, \quad y = (t_i - t_r)/t_{\text{гp}}, \quad u = t_r/t_{\text{гp}}. \quad (4.18)$$

Проинтегрировав поле  $e(z, t)$  по длине секции, найдем прирост энергии частиц, инжектированных в различные моменты времени  $t_i$ . Для приобретаемой энергии в безразмерных величинах получим [см. формулу (4.11)]

$$\omega(t_i) = \frac{1}{t} \int_0^l e(z, t) dz. \quad (4.19)$$

Для различных областей изменения переменных приращение энергии  $\omega$  представится в виде:

$$\omega_1 = \frac{1 - e^{-\Lambda y}}{\Lambda} - \frac{\chi}{\Lambda} \{ \Lambda x - (1 - e^{-\Lambda x}) \times \\ \times [1 - \Lambda(1 - x)] \} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (4.19a)$$

$$\omega_2 = \frac{1 - e^{-\Lambda y}}{\Lambda} - \frac{\chi}{\Lambda} [\Lambda - (1 - e^{-\Lambda})] \\ \text{при } x \geq 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (4.19б)$$

$$\omega_3 = \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} - \frac{\chi}{\Lambda} \{ \Lambda x - (1 - e^{-\Lambda x}) [1 - \Lambda \times \\ \times (1 - x)] \} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad y \geq 1; \quad (4.19в)$$

$$\omega_4 = \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} - \frac{\chi}{\Lambda} [\Lambda - (1 - e^{-\Lambda})] \\ \text{при } x \geq 1, \quad y \geq 1; \quad (4.19г)$$

$$\omega_5 = -\frac{\chi}{\Lambda} \{ \Lambda x - (1 - e^{-\Lambda x}) [1 - \Lambda(1 - x)] \} \\ \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad y \leq 0; \quad (4.19д)$$

$$\omega_6 = -\frac{\chi}{\Lambda} [\Lambda - (1 - e^{-\Lambda})] \quad \text{при } x \geq 1, \quad y \leq 0. \quad (4.19e)$$

Здесь индексы относятся к различным областям изменения переменных: область 1 — неустановившийся режим генератора и излучения частицы; в области 2 поле, возбуждаемое сгустками, уже достигло своего стационарного значения; в области 3 устанавливается стационарное поле генератора; 4 — стационарный режим работы ускорителя [см. формулу (4.11)]; 5 и 6 — характеризуют переходный и установившийся режимы излучения при невключенном поле генератора высокой частоты.

На рис. 4.6 приведены рассчитанные по формулам (4.19) кривые зависимости энергии частиц  $\omega$  от момента инжекции  $x = t_i/t_{гр}$  для различных времен включения генератора  $u = x - y = t_r/t_{гр}$  при нагрузке током, равной  $\chi = \infty$  ( $\Lambda = 0$ ,  $\chi\Lambda = 0,667$ );  $\chi = 6,67$  ( $\Lambda = 0,098$ );  $\chi = 1$  ( $\Lambda = 0,406$ );  $\chi = 0$  ( $\Lambda = 1,099$ ).

При построении кривых  $\omega = \omega(x)$  значения  $\Lambda$  выбирались для заданной нагрузки  $\chi$  так, чтобы в случае стационарного режима поле спадало на протяжении секции до  $1/3$  своего начального значения.

При сильной нагрузке пучком ( $\chi \gg 1$  и соответственно  $\Lambda \ll 1$ ) вместо формул (4.19) можно применять более простые приближенные соотношения, получающиеся разложением по степеням  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx y - \Lambda\chi x \left(1 - \frac{x}{2}\right); \quad \omega_2 \approx y - \frac{\Lambda\chi}{2}; \\ \omega_3 &\approx 1 - \Lambda\chi x \left(1 - \frac{x}{2}\right); \quad \omega_4 \approx 1 - \frac{\Lambda\chi}{2}; \quad (4.20) \\ \omega_5 &\approx 1 - \Lambda\chi x \left(1 - \frac{x}{2}\right); \quad \omega_6 \approx -\frac{\Lambda\chi}{2}. \end{aligned}$$

Из соотношений (4.20) видно, что при большой нагрузке на пучок существенно лишь значение произведения  $\Lambda\chi$ , а не каждого параметра в отдельности\*. Графики на рис. 4.6, а построены по формулам (4.20). Из графиков видно, что характерное время установления как для поля генератора, так и для поля излучения сгустков — время  $t_{гр} = l/v_{гр}$ . Второе характерное время  $t_0 = l_0/v_{гр}$  (установление поля излучения в бесконечном волноводе) не сказывается на построенных кривых, так как они относятся к случаю, когда длина секции  $l$  мно-

\* Согласно формуле (4.8а) оно равно  $(1 - \xi)$  при больших токах.



го меньше характерной длины  $l_0 = ct_0$  переходной части дуга сгустков. Так как время установления поля излучения равно  $t_0 = n_\infty \lambda / c = 1/\alpha_1 \lambda \cdot \lambda / c = 1/\alpha_1 c \approx 1/\alpha v_{гр}$ , то  $l_0 = 1/\alpha$ , т. е. равно длине затухания. Другими сло-

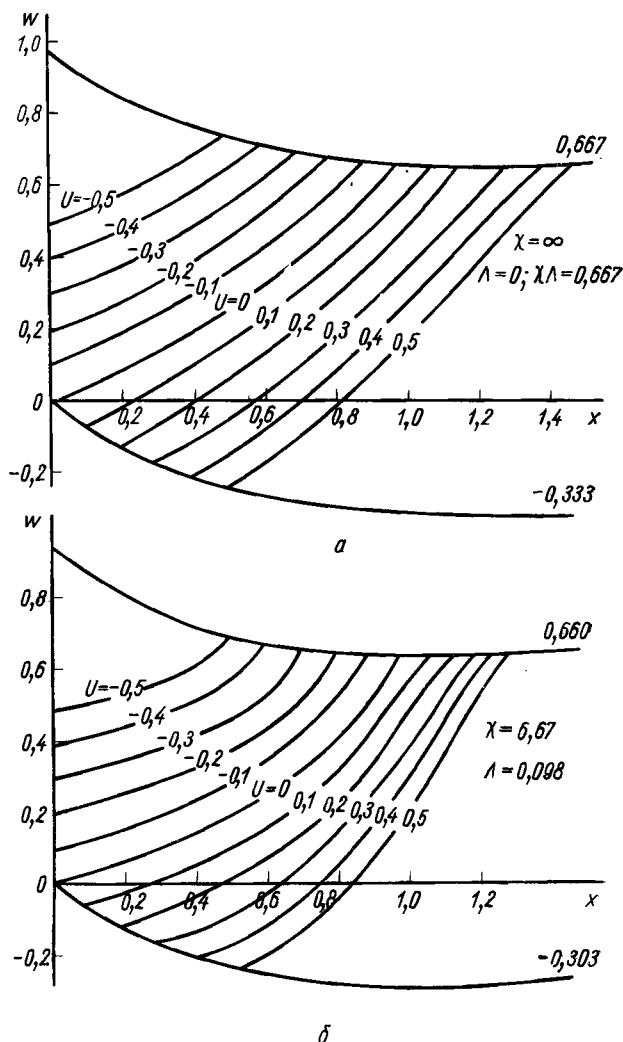
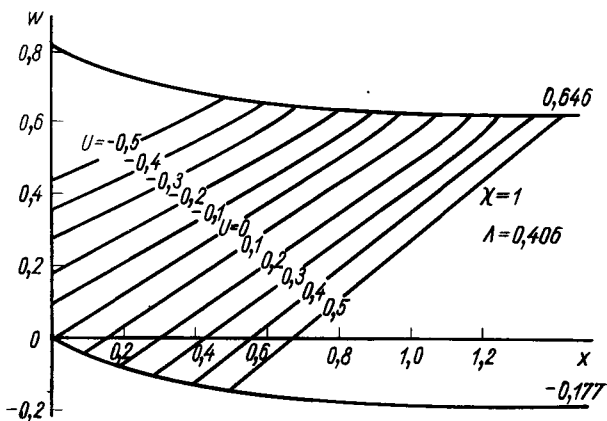


Рис. 4.6. Зависимость приращения энергии заряженных частиц  $w$

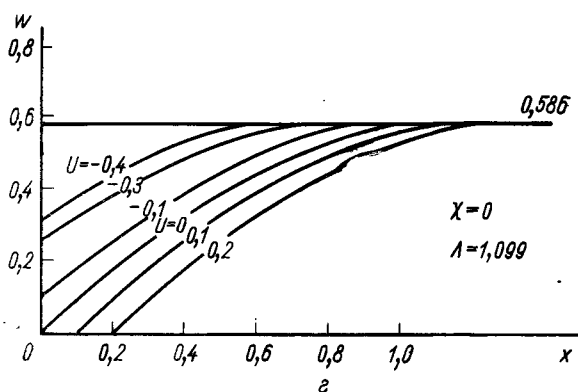
вами, приведенные графики соответствуют случаю  $l \ll l_0 (\Lambda \ll 1)$ , когда омическое затухание на длине секции мало.

При рассмотрении противоположного частного случая, когда  $l \gg l_0 (\Lambda \gg 1)$ , из соотношений (4.19) получаем, что во всех областях (при  $\chi \gg 1$ )  $\omega \approx -\chi(1 - e^{-\Lambda x})$ , т. е. характерным временем, определяемым показателем экспоненты  $\Lambda x = l/l_0 \cdot t/t_{rp} = t/t_0$  является действительно  $t_0$ .

Из графиков также видно, что при включении генератора до впуска пучка ( $u < 0$ ) переходный режим



$\delta$



от момента инжекции  $x$  и момента включения генератора  $u (\xi = 1/3)$ .

длиться в течение времени  $t_{гр}$  от момента впуска пучка (до  $x=1$ ), необходимого для заполнения секции ускоряющим высокочастотным полем. При этом энергия, приобретаемая частицами в переходном режиме, вначале растет за счет заполнения все большей части секции высокочастотным полем генератора, достигая значения энергии выше стационарного  $\omega_4$ . Затем из-за роста тормозящего поля  $e_{п}$  энергия частиц спадает до стационарного значения. При  $u=0$  (моменты включения генератора и инжекции пучка совпадают) энергия частиц монотонно возрастает до стационарного значения. Наконец, если генератор высокочастотного поля включается после начала инжекции пучка в ускоритель ( $u>0$ ), электроны тормозятся собственным полем излучения, что соответствует отрицательным значениям  $\omega(x)$  (области 5 и 6). По истечении времени  $t_{гр}$  после включения генератора устанавливается стационарный режим ускорения.

Из сравнения кривых, представленных на рис. 4.6, видно, что нагрузка пучком не приводит к существенному изменению характера кривых  $\omega(x)$ . Наиболее характерные особенности переходного процесса в ускорителе с нагрузкой на пучок — максимум функции  $\omega(x)$  при раннем включении генератора ( $u<0$ ) и существование области отрицательных  $\omega(x)$  (область торможения пучка в собственном черенковском поле) при позднем включении генератора ( $u>0$ ). Из работ, посвященных исследованию энергетических характеристик ускорителя в переходном режиме, следует отметить работу [8], где соотношения для поля, аналогичные (4.19), получены не из модельных представлений, а из уравнения баланса мощности для ускоряющего поля, обобщенного на нестационарный случай.

#### 4.4. ИМПУЛЬСНЫЙ РЕЖИМ

Импульсный режим работы ускорителя — это режим, при котором инжекция частиц прекращается раньше, чем устанавливается стационарное состояние. Практически представляет интерес лишь случай, когда высокочастотное поле уже установилось к моменту инжекции ( $y>1$ ), а поле излучения за время инжекции достигает значений, существенно меньших стационарного ( $x\ll 1$ ). Только при таком режиме кратковременных импульсов

можно получить значения импульсного тока существенно больше, чем при стационарном режиме.

Так как головной сгусток частиц проходит секцию при неослабленном поле, а все последующие — в поле, ослабленном предыдущими сгустками, ограничение на  $\chi$  налагается теперь не условием (4.9) \*, а требованием на однородность спектра энергии ускоренных частиц. В интересующем нас случае  $y > 1$ ,  $x \ll 1$  энергия ускоренных частиц определяется соотношением (4.19 в). Так как нас интересует случай  $x \ll 1$  [только в этом случае допускаются значения  $\chi$ , существенно бóльшие определяемых по формуле (4.9)], то можно считать  $\Lambda x \ll 1$  и разложить  $\omega = \omega_3$  в ряд по  $\Lambda x$ . Ограничиваясь первой степенью  $x$ , получаем

$$\omega = \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} - \Lambda \chi x. \quad (4.21)$$

Нетрудно найти связь безразмерной переменной  $x$  с номером сгустка  $m$  (считая головной сгусток нулевым):  $x = m/\Lambda n_\infty$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $n_\infty = (\alpha_1 \lambda)^{-1}$  — эффективное число сгустков для непрерывного пучка в бесконечном волноводе с потерями ( $\lambda$  — длина волны ускоряющего поля). Таким образом,

$$\omega = \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} - \chi \frac{m}{n_\infty} \quad (m \ll n_\infty \Lambda). \quad (4.21a)$$

Из формулы (4.21) следует, что при заданном разбросе энергии у частиц  $\Delta\omega$  безразмерную длительность импульса инжекции можно записать в виде  $x_{\text{макс}} = \Delta\omega/\chi\Lambda$ . Разброс энергий  $\Delta\omega$  должен быть существенно меньше единицы. В то же время величина  $\chi\Lambda$  даже в ускорителе, рассчитанном на стационарный режим, порядка единицы, а при импульсном режиме целесообразно применение еще больших  $\chi$  (так что  $\chi\Lambda > 1$ ). Отсюда следует, что максимальное значение  $x$  действительно должно быть очень мало, и, таким образом, использование приближения  $x \ll 1$  вполне оправдано.

Если в пучке  $M$  сгустков ( $m = 0, 1, \dots, M-1$ ), то разброс энергии частиц [т. е. разница энергий для головной

---

\* Из-за малой длительности пучка ( $x \ll 1$ ) даже при значительных импульсных токах ( $\chi \gg 1$ ) стационарный режим не достигается, и ограничение (4.9) перестает быть справедливым.

частицы первого сгустка и последней частицы ( $M-1$ )-го сгустка] равен

$$\Delta\omega = M\chi/n_{\infty} \quad (4.22)$$

(напомним, что мы считаем сгустки расположенными в максимумах волны ускоряющего поля).

Таким образом, задание разброса энергии определяет произведение  $M\chi$ , т. е. полное число ускоряемых частиц, имеющих энергию в заданных пределах. Повышая  $\chi$ , мы увеличиваем импульсный ток в ускорителе, соответственно уменьшая число используемых сгустков.

Для оценки возможной длины цуга примем в формуле (4.22)  $n_{\infty} = 3300$  (это соответствует  $\alpha = 0,3 \text{ м}^{-1}$ ,  $\lambda = 10 \text{ см}$ ) и  $\Delta\omega = 0,1$ , тогда  $\chi M = 3300$ . Если  $\chi = 0,66$  (это соответствует току  $I = 0,2 \text{ а}$  при  $E_{\text{макс}} = 120 \text{ кв/см}$ ), то получим, что число ускоряемых сгустков  $M$  равно 500. Увеличение  $\chi$  в 100 раз (ток возрастает до  $I = 20 \text{ а}$ ) и требование  $\Delta\omega = 0,1$  приводит к укорочению цуга до 5 сгустков. Для некоторых экспериментов такое сокращение длительности ускоряющего цуга с соответствующим повышением импульсной плотности тока может оказаться целесообразным.

В заключение раздела приведем выражения для полного поля  $e(z, t) = e_r + e_{\pi} + e_{\pi 1}$  в ускорителе, нагруженном импульсным током длительностью  $t_1$ , для различных областей изменения переменных  $t$  и  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} e^{(1)} &= e^{-\alpha z} - \chi(1 - e^{-\alpha v_{\text{гp}} t}) && \text{при } v_{\text{гp}} t < l_1, v_{\text{гp}} t < z; \\ e^{(2)} &= e^{-\alpha z} - \chi(1 - e^{-\alpha z}) && \text{при } v_{\text{гp}} t < l_1, v_{\text{гp}} t > z; \\ e^{(2')} &= e^{-\alpha z} - \chi(1 - e^{-\alpha l_1}) e^{-\alpha(v_{\text{гp}} t - l_1)} && \text{при } v_{\text{гp}} t > l_1, v_{\text{гp}} t < z; \\ e^{(3)} &= e^{-\alpha z} - \chi[e^{-\alpha(v_{\text{гp}} t - l_1)} - e^{-\alpha z}] && \text{при } v_{\text{гp}} t > l_1, v_{\text{гp}} t > z, v_{\text{гp}} t < z + l_1; \\ e^{(4)} &= e^{-\alpha z} && \text{при } v_{\text{гp}} t > z + l_1, \end{aligned} \right\} (4.23)$$

где  $l_1 = v_{\text{гp}} t_1$ . Так как  $x_{\text{макс}} = t_1/l_1 \approx v_{\text{гp}} t_1/l = l_1/l$ , величина  $l_1$  при импульсном режиме гораздо меньше  $l$ . Координата  $z = l_1$  соответствует точке, в которую групповой фронт от головных частиц приходит в момент обрыва цуга. При  $z < l_1$  поле описывается последовательно формулами  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$ ,  $e^{(3)}$ ,  $e^{(4)}$ , при  $z > l_1$  — формулами  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2')}$ ,  $e^{(3)}$ ,  $e^{(4)}$ . Наибольшее значение ( $e = 1$ ) поле имеет при  $z = 0$ , наименьшее — при  $z = l$ . При этом минимум поля

$e(l, t)$  во времени достигается при  $t=t_1$ :

$$e(l, t_1) = e^{-\Lambda} - \chi(1 - e^{-\alpha l_1}) \approx e^{-\Lambda} - \chi \alpha l_1.$$

Отсюда для наибольшего падения поля из-за черенковского излучения получим

$$\Delta e_{\text{макс}} \approx -\chi \alpha l_1 = -\Delta \omega.$$

Приведенные соотношения справедливы, если ускоритель работает в режиме однократных импульсов или если от импульса к импульсу успевает установиться стационарное значение поля  $e^{-\alpha z}$ , т. е.  $v_{\text{гp}} T > l$ , где  $T$  — промежуток времени от конца импульса тока до начала следующего импульса (см. формулу для  $e^{(4)}$  выше).

Если же  $T < l/v_{\text{гp}}$ , то восстановление поля происходит не полностью. При подаче следующего импульса тока в волноводе имеется, согласно соотношению (4.23), дополнительное поле

$$e_{\text{доп}} = \begin{cases} -\chi(1 - e^{-\alpha l_1}) e^{-\alpha v_{\text{гp}}(t-t_1)} & \text{при } v_{\text{гp}} t < z; \\ -\chi[e^{-\alpha v_{\text{гp}}(t-t_1)} - e^{-\alpha z}] & \text{при } v_{\text{гp}} t > z > v_{\text{гp}}(t-t_1); \\ 0 & \text{при } v_{\text{гp}}(t-t_1) > z, \end{cases}$$

где  $t$  отсчитывается от начала впуска предыдущего импульса. Переходя к новому началу отсчета времени  $t' = t - (T + t_1)$ , получаем

$$e_{\text{доп}} = \begin{cases} -\chi(1 - e^{-\alpha l_1}) e^{-\alpha v_{\text{гp}} T} e^{-\alpha v_{\text{гp}} t'} & \text{при } z > v_{\text{гp}}(t' + T + t_1); \\ -\chi[e^{-\alpha v_{\text{гp}} T} e^{-\alpha v_{\text{гp}} t'} - e^{-\alpha z}] & \text{при } v_{\text{гp}}(t' + T) < z < v_{\text{гp}}(t' + T + t_1); \\ 0 & \text{при } z < v_{\text{гp}}(t' + T). \end{cases}$$

Нетрудно подсчитать дополнительное изменение энергии частиц, которое вносит это поле (считая  $\alpha v_{\text{гp}} t' \ll 1$ ), ограничиваясь для простоты случаем  $\Lambda \ll 1$ :  $\Delta \omega_{\text{доп1}} = -\chi \Lambda \chi_1 (1 - 1/M)$ , где  $\chi_1 = t_1/t_{\text{гp}}$ , а  $M \approx l/v_{\text{гp}}(T + t_1) = t_{\text{гp}}/(T + t_1)$  — число импульсов тока, подаваемых за время  $t_{\text{гp}} = l/v_{\text{гp}}$ . К моменту приходá следующего, третьего импульса оставшееся от первого импульса поле приводит к потере энергии  $\Delta \omega_{\text{доп2}} = -\chi \Lambda \chi_1 (1 - 2/M)$  и т. д. К последнему  $M$ -му импульсу  $\Delta \omega_{\text{допM}} = 0$ , т. е. поле первого импульса полностью гасится. Суммируя вклад всех

импульсов, предшествующих  $k$ -му, получаем потерю энергии  $k$ -го импульса:  $\Delta\omega^{(k)} = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 + \dots + \Delta\omega_k = -\chi\Lambda x_1 k(1 - (k+1)/2M)$ . Стационарное значение достигается при  $k=M$  и равно  $\Delta\omega^{(\infty)} = -\chi\Lambda x_1 (M-1)/2 \approx -\chi\Lambda x_1 M/2$ . Представив  $x_1 M/2$  в виде  $x_1 M/2 = l_1/2l \cdot l/\alpha v_{гр}(T+t_1) = \frac{1}{2}t_1/(T+t_1)$ , получим  $\Delta\omega^{(\infty)} = -\chi\Lambda/2 \cdot t_1/(T+t_1)$ . При  $T \rightarrow 0$  (сплошной импульс тока) это выражение переходит в соответствующее выражение  $\omega_4$  [см. формулу (4.20)]; в случае применения модуляции тока снижается токовая нагрузка пропорционально коэффициенту скважности  $t_1/(T+t_1)$ .

Нестационарный режим ускорения частиц рассматривался также в работе [10] с более точным учетом реальных дисперсионных свойств периодической замедляющей структуры и использованием для расчетов электронной вычислительной машины. При этом в работе [10] был сделан вывод о существовании аномально высокой токовой нагрузки для очень коротких импульсов. Последующий анализ показал ошибочность этого вывода и подтвердил справедливость приближенного расчета, аналогичного приведенному в этом разделе, и для малых длительностей импульса инжекции [11].

#### 4.5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР НА ВЫХОДЕ СИЛЬНОТОЧНОГО УСКОРИТЕЛЯ

Полученные при рассмотрении стационарного и переходного режимов работы ускорителя (см. разд. 3 и 4 настоящей главы) зависимости  $\omega = \omega(x)$  характеризуют изменение энергии ускоряемых электронов во времени. При определении этих зависимостей считалось, что все частицы движутся в максимуме волны ускоряющего высокочастотного поля, а обратная реакция пучка учитывалась по вносимому им ослаблению ускоряющего поля. В действительности энергия электронов в каждом отдельном сгустке зависит еще от ряда факторов: фазы ускоряющего поля в точке расположения частицы (отличающейся от равновесной фазы), действующей на частицы силы кулоновского отталкивания и расталкивающего действия поля излучения. Наличие этих факторов приводит к неоднородности энергии частиц в отдельном сгустке на выходе ускорителя. Определим спектр энергии ускоренных частиц. Продольную составляющую полного электрического поля в ускоряющей

секции запишем в виде  $E(z, t) = E_r + E_n + E_k$ , где  $E_r$  — поле генератора, действующее на рассматриваемую частицу,  $E_n$  и  $E_k$  — соответственно поля излучения и кулоновское в точке расположения частицы.

Для простоты расчета считаем, что электроны движутся одинаковыми сгустками  $l_1$  с однородным распределением заряда ( $q$  — полный заряд сгустка,  $q/l_1$  — линейная плотность заряда). Амплитуду высокочастотного ускоряющего поля запишем в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} E_r &= E_{\max} e^{-\alpha z} \cos \varphi = E_{r.ц} + E_{r.р} = \\ &= E_{\max} e^{-\alpha z} - E_{\max} e^{-\alpha z} [1 - \cos \varphi e^{-\alpha(z_0 - z)}] = \\ &= E_{\max} e^{-\alpha z} - E_{\max} e^{-\alpha z} (1 - \cos hy e^{-\alpha y}), \end{aligned} \quad (4.24)$$

где  $z = z(t)$  — координата центра сгустка,  $z_0 = z + y$  — координата рассматриваемой частицы, смещенной от центра на расстояние  $y$  ( $|y| < l_1/2$ ),  $h$  — постоянная пространства ускоряющей волны. Первое слагаемое в выражении (4.24) определяет значение амплитуды ускоряющего поля (с учетом его затухания вдоль секции), действующего на частицы, расположенные в центре сгустка\*; второе слагаемое учитывает отличие фазы частицы  $\varphi = hy$  от нуля (равновесная фаза) и затухание ускоряющего поля в пределах сгустка\*\*.

Продольную составляющую излучения можно определить, используя формулы (3.90), (3.91). Согласно этим формулам, для рассматриваемого распределения зарядов поле излучения в  $(m+1)$ -м сгустке (считая от начала дуга) меняется в функции расстояния от его центра ( $y$ ) следующим образом:

$$\begin{aligned} E_n &= -qA_0 e^{-(hz - \omega t - \delta)} \left\{ \frac{\sin \frac{h}{2} \left( \frac{l_1}{2} - y \right)}{\frac{hl_1}{2}} e^{-i \frac{h}{2} \left( y - \frac{l_1}{2} \right)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \frac{hl_1}{2}}{\frac{hl_1}{2}} e^{-\alpha_1 \left[ \lambda - \frac{l_1}{2} + y \right]} \frac{1 - e^{-\alpha_1 m \lambda}}{1 - e^{-\alpha_1 \lambda}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

\* Считается, что центр сгустка движется синфазно с гребнем волны ускоряющего высокочастотного поля.

\*\* Изменение поля генератора, обусловленное затуханием в пределах сгустка, эквивалентно действию продольной фокусирующей силы.



Из этого выражения получим формулу для распределения амплитуды поля излучения в сгустке малой величины

$$E_{\text{и}} = -qA_0 \left\{ \frac{1}{l_1} \left( \frac{l_1}{2} - y \right) \cos \frac{h}{2} \left( y - \frac{l_1}{2} \right) + e^{-\alpha_1 \left( \lambda - \frac{l_1}{2} + y \right)} \frac{1 - e^{-\alpha_1 m \lambda}}{1 - e^{-\alpha_1 \lambda}} \right\}. \quad (4.25a)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках этой формулы характеризует рост поля при перемещении вдоль сгустка от его переднего края, обусловленный увеличением числа излучающих зарядов данного сгустка, которые расположены правее точки наблюдения; второе слагаемое определяет вклад в поле излучения, вносимый всеми сгустками, движущимися правее рассматриваемого. Поле излучения, так же как и поле генератора, разобьем на два слагаемых  $E_{\text{и}} = E_{\text{и.ц}} + E_{\text{и.р}}$ . Поле, действующее на частицы в центральном сечении сгустка  $E_{\text{и.ц}}$  и добавочное поле, связанное со смещением частицы относительно центра  $E_{\text{и.р}}$ . Эти слагаемые поля соответственно равны\*:

$$E_{\text{и.ц}} = -qA_0 \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\alpha_1 (\lambda - l_1/2)} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha_1 m \lambda}}{1 - e^{-\alpha_1 \lambda}} \right\}, \quad (4.25б)$$

$$E_{\text{и.р}} = qA_0 \left\{ \frac{y}{l_1} + e^{-\alpha_1 (\lambda - l_1/2)} \frac{1 - e^{-\alpha_1 m \lambda}}{1 - e^{-\alpha_1 \lambda}} \cdot (1 - e^{-\alpha_1 y}) \right\}. \quad (4.25в)$$

Амплитуда полного поля, действующего на частицу, представляется, согласно выражениям (4.24) и (4.25), в виде

$$\begin{aligned} E &= (E_{\text{г.ц}} + E_{\text{и.ц}}) + (E_{\text{г.р}} + E_{\text{и.р}} + E_{\text{к}}) = \\ &= E_{\text{макс}} e^{-\alpha z} - qA_0 \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\alpha_1 \left( \lambda - \frac{l_1}{2} \right)} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha_1 m \lambda}}{1 - e^{-\alpha_1 \lambda}} \right\} - \\ &\quad - E_{\text{макс}} e^{-\alpha z} \left[ \frac{(hy)^2}{2} + \alpha y \right] + qA_0 \left\{ \frac{y}{l_1} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_1 y \frac{1 - e^{-\alpha_1 m \lambda}}{1 - e^{-\alpha_1 \lambda}} e^{-\alpha_1 \left( \lambda - \frac{l_1}{2} \right)} \right\} + E_{\text{к}}. \quad (4.26) \end{aligned}$$

\* Члены порядка малости  $(l_1/\lambda)^2$  и выше в фигурных скобках опущены.

Два первых слагаемых в соотношении (4.26) определяют усредненное по сгустку поле генератора и среднее поле излучения. Совместное действие этих полей подробно рассматривалось в предыдущих разделах; в частности, это среднее поле использовалось для вычисления энергии ускоренных частиц. Остальные слагаемые определяют составляющие поля, обуславливающие разброс энергии от среднего значения для различных частиц в сгустке. Заметим, что наибольший интерес представляет вычисление разброса энергии частиц, связанного с этими слагаемыми поля при стационарном режиме работы: при импульсном режиме они дают лишь малую поправку к определяющему спектр на выходе ускорителя линейному изменению энергии частиц для соседних сгустков (см. предыдущий раздел). При стационарном режиме можно в усредненном по сгустку поле пренебречь излучением частиц самого сгустка ( $-qA_0/2$ ) по сравнению с излучением предыдущих сгустков  $[-qA_0(1 - e^{-\alpha_1 m \lambda})/\alpha_1 \lambda]$ .

Считая затухание поля излучения на расстоянии порядка длины волны малым ( $\alpha_1 \lambda \ll 1$ ), заменяя дискретную переменную  $m$  на приблизительно равную ей непрерывно меняющуюся величину  $(\xi_2 - z)/\lambda$  ( $\xi_2$  — координата начала цуга) и переходя к введенным ранее безразмерным величинам, переписываем формулу (4.26) в виде

$$e = \frac{E}{E_{\max}} = \{e_r(t) - \chi(1 - e^{-\alpha_1(\xi_2 - z)})\} + \chi \alpha_1 y \left[ \frac{\lambda}{l_1} + (4.27) \right. \\ \left. + (1 - e^{-\alpha_1(\xi_2 - z)}) \right] - e_r(t) \left[ \alpha y + \frac{(hy)^2}{2} \right] + e_k.$$

Из формулы (4.27) видно, что расталкивающее действие поля излучения вызвано в основном изменением поля излучения, создаваемого рассматриваемым сгустком, а суммарное действие излучения предыдущих сгустков составляет лишь поправку к нему порядка  $l_1/\lambda$ . Напомним также, что при достаточно больших скоростях действие кулоновского поля  $E_k$  оказывается малым по сравнению с расталкивающим действием черенковского поля одного сгустка.

Проинтегрировав формулу (4.27) по длине ускоряющей секции (длина секции  $l$ ), получим безразмерную (отнесенную к энергии  $W_{\max} = eE_{\max}l$ ) величину энер-

гии частицы, которую она набирает на единице длины волновода,  $\omega = \frac{1}{l} \int_0^l e(z) dz = \omega_{\text{ц}} + \Delta\omega$ , где  $\omega_{\text{ц}}$  — стационарное значение энергии частиц, вычисленное с учетом влияния нагрузки на пучок, определяемое формулой (4.11):

$$\Delta\omega = \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} \left[ \alpha y + \frac{(\hbar y)^2}{2} \right] + \alpha_1 y \chi \times \\ + \left[ \frac{\lambda}{l_1} + \left( 1 - \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} \right) \right] + e_{\text{к}}. \quad (4.28)$$

Первое слагаемое в выражении (4.28) — отклонение энергии от расчетной величины из-за отличия фазы частиц от равновесного значения, оно учитывает и затухание ускоряющего поля за счет джоулевых потерь. Первое слагаемое не зависит явно от нагрузки пучком; описываемый им разброс энергии справедлив и для ускорителя с малым током; оно устанавливает связь между допустимым отклонением энергии от расчетного значения и длиной сгустков (или шириной фазовой области, занятой частицами).

Учет нагрузки на пучок приводит к дополнительному разбросу энергий, равному

$$\Delta\omega \left( \frac{l_1}{2} \right) = \frac{1}{2} \alpha_1 \lambda \chi = \frac{1}{2} \chi \frac{1}{n_{\infty}}. \quad (4.29)$$

При  $\chi = 6,6$  (что соответствует  $l = 2$  а) и  $n_{\infty} = 3300$ , например, первое слагаемое дает отклонения энергии от расчетного значения лишь на десятые доли процента. Таким образом, в этом случае нагрузка пучком слабо сказывается на изменении спектрального состава ускоренных частиц.

#### 4.6. ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ УСКОРИТЕЛЬ С ПОСТОЯННОЙ АМПЛИТУДОЙ УСКОРЯЮЩЕГО ПОЛЯ

Амплитуда ускоряющего поля в структуре с постоянной геометрией медленно убывает вдоль секции из-за омических потерь в стенках. Нагрузка пучком приводит к еще более сильному спадаанию амплитуды поля. Можно, однако, использовать в ускорителе замедляющую структуру с переменными размерами [ $a = a(z)$ ,  $b = b(z)$ ] и при этом подобрать закон изменения геомет-

рических параметров таким образом, чтобы обеспечить заданное распределение ускоряющего поля вдоль секции.

Остановимся вкратце на расчете характеристик такого ускорителя [12]. Рассмотрим характеристики ускорителя с неоднородными по длине секциями, исходя из уравнения энергетического баланса для такой системы\*:

$$\frac{dP}{dz} = -Q - IE, \quad (4.30)$$

где  $dP/dz$  — погонные потери мощности;  $Q = 2\alpha P$  — джоулевы потери на единице длины;  $E(z) = \delta\sqrt{P}$  — распределение поля вдоль ускорителя.

В отличие от ускорителя с постоянными параметрами коэффициенты затухания  $\alpha = \alpha(z)$  и связи поля с мощностью  $\delta = \delta(z)$  изменяются теперь вдоль ускорителя. В то же время погонное шунтовое сопротивление волновода остается приблизительно постоянным:

$$R_{ш} = \frac{\delta^2}{2\alpha} \approx \text{const}. \quad (4.31)$$

Подбирая величину отверстия в диафрагмах  $a$  и соответственно размер волновода  $b$  так, чтобы фазовая скорость ускоряющей волны на частоте генератора оставалась равной скорости света, изменяем коэффициенты  $\alpha$  и  $\delta$  вдоль ускорителя. Для простейших оценок связь  $\alpha$  и  $\delta$  с геометрическими параметрами системы в данном сечении можно установить по приближенным формулам [13]:

$$\alpha = \frac{6.4 \left(1 + \frac{d}{b}\right)}{D(ka)^4 \sqrt{30\lambda\sigma}} \text{ м}^{-1}; \quad \delta = 7 \frac{\lambda}{a^2} \text{ ом} \cdot \text{м}^{-1}. \quad (4.32)$$

Из формул (4.31) и (4.32) следует приближенное выражение для шунтового сопротивления:  $R_{ш} = 6 \cdot 10^3 \sqrt{30\lambda\sigma} \frac{D/\lambda}{1 + \frac{d}{b}} \text{ ом} \cdot \text{м}^{-1}$ . Видно, что погонное шун-

товое сопротивление при фиксированной длине волны действительно слабо зависит от геометрических параметров ускорителя и вообще не зависит от размера отверстий в диафрагмах.

\* Анализировается лишь работа ускорителя в стационарном режиме.

Для более точных расчетов необходимо использовать данные, полученные при точном теоретическом рассмотрении или из эксперимента (см., например, рис. 1.4).

Учитывая явную зависимость амплитуды ускоряющего поля  $E$  от мощности  $P$ , переписываем уравнение баланса (4.30) в виде

$$\frac{2}{\delta^2} \cdot \frac{dE}{dz} - \frac{2}{\delta^3} \frac{d\delta}{dz} E = -\frac{2\alpha}{\delta^2} E - I. \quad (4.33)$$

В случае постоянного ускоряющего поля вдоль ускорителя ( $E=E_0$ , т. е.  $dE/dz=0$ ) при нагрузке током  $I_0$  уравнение (4.33) переписывается в виде

$$\frac{1}{\delta^3} \cdot \frac{d\delta}{dz} = \frac{1}{2E_0} \left( \frac{E_0}{R_{\text{ш}}} + I_0 \right). \quad (4.34)$$

Полученное уравнение определяет закон изменения параметра  $\delta(z)$  вдоль ускорителя. Интегрируя формулу (4.34), получаем

$$\delta^{-2} = C - \frac{\frac{E_0}{R_{\text{ш}}} + I_0}{E_0} z.$$

Постоянная интегрирования  $C$  определяется значением поля  $E_0$  и мощности  $P_0$  на входе секции:  $C = 1/\delta^2(0) = P_0/E_0^2$ . Окончательно получаем

$$\delta^2(z) = \frac{E_0^2}{P_0 - \left( \frac{E_0^2}{R_{\text{ш}}} + I_0 E_0 \right) z}; \quad \alpha(z) = \frac{1}{2} \frac{P_0}{P_0 - \left( \frac{E_0^2}{R_{\text{ш}}} + I_0 E_0 \right) z}. \quad (4.35)$$

Таким образом, в ускорителе с постоянным продольным электрическим полем при расчетном значении тока  $I = I_0$  мощность линейно убывает вдоль секции

$$P(z) = P_0 - \left( \frac{E_0^2}{R_{\text{ш}}} + I_0 E_0 \right) z = P_0 - P_1 z, \quad (4.36)$$

где  $P_1 = E_0^2/R_{\text{ш}} + I_0 E_0 = E_0^2(1 + \chi_0)/R_{\text{ш}}$  — полные погонные потери мощности в ускоряющей секции,  $\chi_0 = I_0 E_0/(E_0^2/R_{\text{ш}}) = I_0 R_{\text{ш}}/E_0$  — нагрузка пучком при токе  $I_0$  и ускоряющем поле  $E_0$ . Величина

$$\hat{l} = \frac{P_0}{\frac{E_0^2}{R_{\text{ш}}} + I_0 E_0} = \frac{1}{2\alpha(1 + \chi_0)} \quad (4.37)$$

определяет характерный линейный размер секции. Для секции такой длины вводимая мощность полностью расходуется к концу секции.

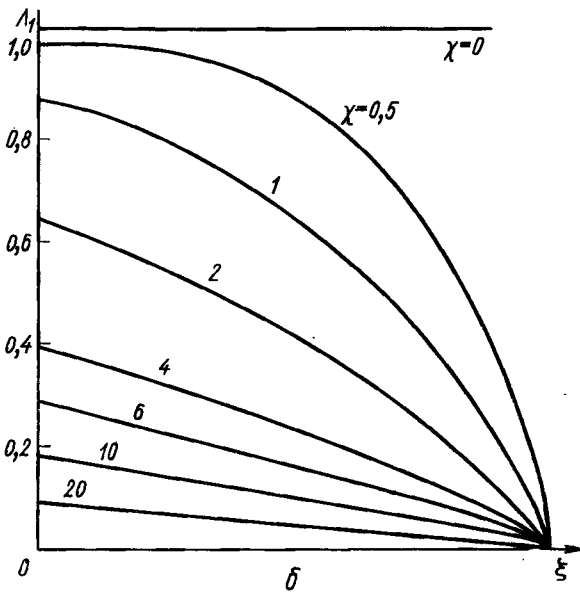
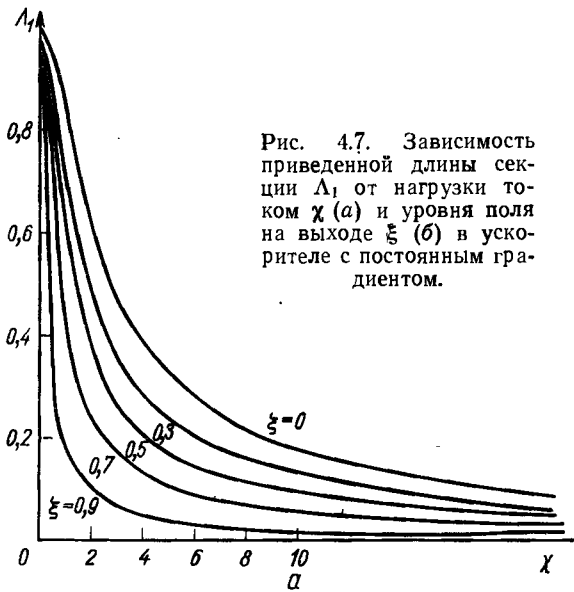
При произвольном значении тока  $I$  (отличном от  $I_0$ ) легко получить следующие законы изменения амплитуды поля и высокочастотной мощности вдоль ускоряющей секции:

$$\left. \begin{aligned} &\text{при } \chi_0 \neq 0 \\ &E(z) = E_0 \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\chi}{\chi_0} \right) \left( 1 - \frac{z}{\hat{l}} \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\chi_0}{1+\chi_0}} \right], \\ &P(z) = P_0 \left( 1 - \frac{z}{\hat{l}} \right) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\chi}{\chi_0} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 - \frac{z}{\hat{l}} \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\chi_0}{1+\chi_0}} \right]^2; \\ &\text{при } \chi_0 = 0 \\ &E(z) = E_0 \left[ 1 + \frac{\chi}{2} \ln \left( 1 - \frac{z}{\hat{l}} \right) \right], \\ &P(z) = P_0 \left( 1 - \frac{z}{\hat{l}} \right) \left[ 1 + \frac{\chi}{2} \ln \left( 1 - \frac{z}{\hat{l}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (4.38)$$

Здесь  $\chi = IR_{\text{ш}}/E_0$  — нагрузка пучком для тока  $I$ , а длина на  $\hat{l}$  определена формулой (4.37).

Как следует из формул (4.38), при отсутствии пучка ( $\chi=0$ ) в ускорителе, рассчитанном на большую токовую нагрузку ( $\chi_0 > 1$ ), поле в конце секции  $E(l)$  может значительно превысить начальное значение  $E_0$ . (Если, например, выбрать длину секции  $l = 0,9 \hat{l}$ , то в отсутствие пучка  $E(l) \approx 3E_0$  для  $\chi_0 \gg 1$ .) Так как обычно значение поля  $E_0$  выбирают близким к пробойному, а превышение этого значения недопустимо, то практический интерес, по-видимому, представляют структуры, в которых поле постоянно или лишь слегка нарастает вдоль секции в отсутствие пучка.

Исследуем стационарные характеристики такого ускорителя (с  $\chi_0 = 0$ ) аналогично тому, как это сделано в разд. 2 данной главы для системы с постоянным значением параметров  $\alpha$  и  $\delta$ . При учете нагрузки пучком



поле монотонно спадает вдоль ускорителя, достигая в конце его величины\*:

$$e(l) = \xi = 1 + \frac{\chi}{2} \ln \left( 1 - \frac{l}{\hat{l}} \right). \quad (4.39)$$

Из формулы (4.39) следует, что приведенная длина секции  $\Lambda_1 = 2\alpha l = \widehat{l/l}$  при заданном уровне поля на конце  $\xi$  и коэффициенте нагрузки пучком  $\chi$  определяется соотношением

$$\Lambda_1 = 1 - e^{-\frac{2}{\chi}(1-\xi)}. \quad (4.40)$$

На рис. 4.7 представлены графики зависимости  $\Lambda_1$  от  $\xi$  и  $\chi$ . Используя соотношение (4.38), получаем выражение для среднего значения поля в ускорителе  $E_{\text{ср}} = \eta E_0$  ( $\eta$  — коэффициент эффективности поля):

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{ср}} &= \frac{1}{l} \int_0^l E(z) dz = \eta E_0; \\ \eta &= 1 - \frac{\chi}{2} \left[ \frac{1 - \Lambda_1}{\Lambda_1} \ln(1 - \Lambda_1) + 1 \right] = 1 - \frac{\chi}{2} + \\ &+ (1 - \xi) \frac{e^{-\frac{2}{\chi}(1-\xi)}}{1 - e^{-\frac{2}{\chi}(1-\xi)}}. \end{aligned} \right\} (4.41)$$

При больших токовых нагрузках ( $\chi \gg 1$ )  $\eta \approx 1 - \xi/2$ , как и для системы с постоянными параметрами  $\alpha$  и  $\delta$ . На рис. 4.8 показана зависимость  $\eta$  от  $\chi$  и  $\xi$ .

Для к. п. д. описываемой ускоряющей секции получим

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{P_0} \int_0^l I E dz = \frac{I E_0 l}{P_0} \eta = \chi \Lambda_1 \eta = \\ &= \chi \left( 1 - e^{-\frac{2}{\chi}(1-\xi)} \right) \left[ 1 - \frac{\chi}{2} + (1 - \xi) \frac{e^{-\frac{2}{\chi}(1-\xi)}}{1 - e^{-\frac{2}{\chi}(1-\xi)}} \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

\* Длина  $l \leq \widehat{l}$ , и, таким образом,  $\ln(1 - l/\widehat{l})$  всегда отрицателен.



Зависимость  $\kappa = \kappa(\chi, \xi)$  представлена на рис. 4.9. Для больших токовых нагрузок ( $\chi \gg 1$ ), как и следовало ожидать, к. п. д. рассматриваемой структуры совпадает со значением, полученным для структуры с постоянными параметрами  $\kappa \approx 1 - \xi^2$ .

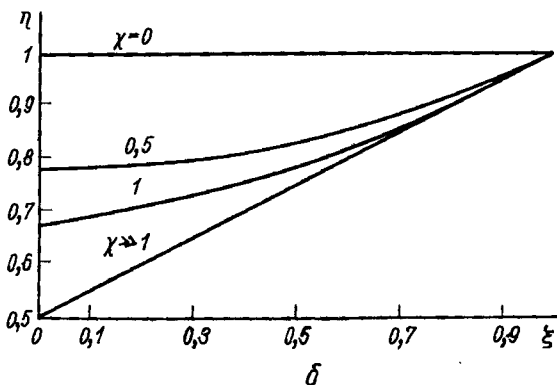
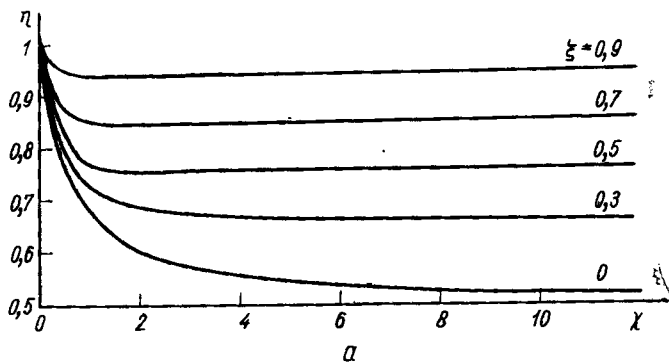


Рис. 4.8. Зависимость коэффициента эффективности поля  $\eta$  от нагрузки током  $\chi$  (а) и уровня поля на выходе  $\xi$  (б) в ускорителе с постоянным градиентом.

Сравнивая характеристики ускоряющей секции замедляющей структуры с постоянными геометрическими параметрами и структуры с постоянным продольным электрическим полем при больших нагрузках на пучок, видим, что с энергетической точки зрения модифицированная структура не улучшает заметно параметров ус-

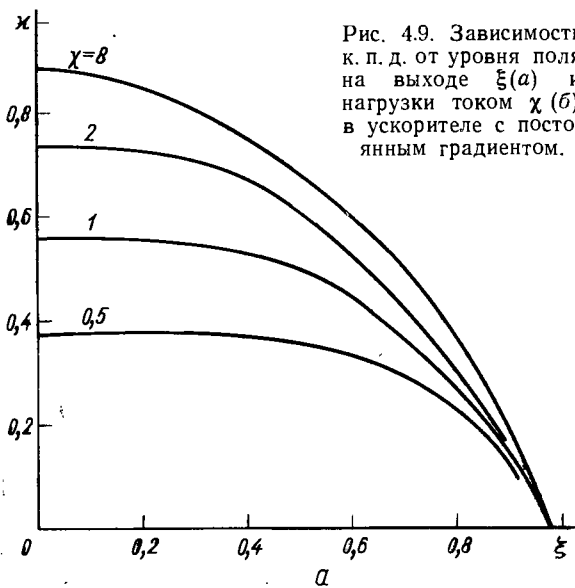
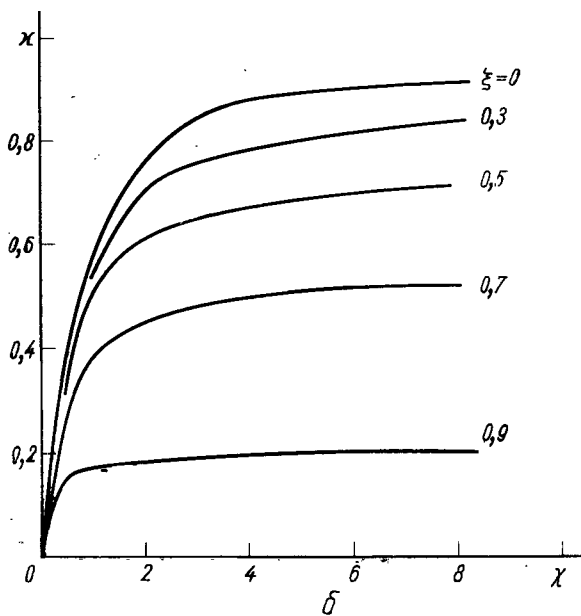


Рис. 4.9. Зависимость к. п. д. от уровня поля на выходе  $\xi(a)$  и нагрузки током  $\chi$  (б) в ускорителе с постоянным градиентом.



корителя\*. При незначительной нагрузке пучком применение системы с постоянным значением продольного электрического поля позволяет существенно (в 1,5—2 раза) уменьшить общую длину ускорителя, при этом величина к. п. д. несколько падает.

#### 4.7. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ УСКОРИТЕЛЯ

В заключение проведем некоторые численные оценки для линейных ускорителей с большим током [14]. Для расчета примем, что  $I=1,5$  а — импульсный ток ускоряемых электронов;  $W=30$  Мэв — конечная энергия электронов;  $\lambda=16,5$  см ( $\nu=1818$  Мгц) — длина волны (частота) ускоряющего поля;  $P_0=25$  Мвт — мощность генератора ускоряющего поля.

Относительный размер отверстия  $a/\lambda$  в диафрагмах, нагружающих волновод, определяется при известных длине волны  $\lambda$  и мощности генератора  $P_0$  требуемой амплитудой ускоряющего поля  $E_0$ , которая, в свою очередь, выбирается из условий электрической прочности и экономичности ускорителя. Если, например,  $a/\lambda=0,12$ , тогда ускоряющее поле  $E_0 \approx 105$  кв/см.

Для того чтобы снизить групповую скорость несимметричной гибридной волны, выберем ускоряющую структуру с видом колебания  $2\pi/3$ , т. е. такую, в которой нагружающие диафрагмы расположены через интервал  $D=\lambda/3$ . Условие равенства фазовой скорости ускоряющей волны скорости света  $\beta=1$  на рабочей частоте  $\nu$  при заданной толщине диафрагм ( $t=D-d=0,6$  см) позволяет определить внутренний радиус волновода  $b=6,515$  см. В результате мы приходим к замедляющей структуре (1.38). Найденные геометрические параметры структуры при заданном материале стенок определяют ее радиотехнические характеристики:  $\alpha=5,7 \cdot 10^{-4}$  см<sup>-1</sup> — омическое затухание ускоряющего поля;  $R_{ш}=0,43$  Мом·см<sup>-1</sup> — погонное шунтовое сопротивление;  $Q=16 \cdot 10^3$  — добротность системы;  $v_{гр}=0,22$  с — групповая скорость. Необходимо еще выбрать уровень использования высокочастотного поля  $\xi$ , пусть, например,  $\xi=1/3$ .

---

\* Как будет показано в следующей главе, целесообразно применять замедляющую структуру с меняющимися вдоль секции параметрами для ослабления действия паразитной обратной волны, возбуждаемой пучком.

Приведенные данные полностью определяют характеристики ускорителя. Задание конечной энергии частиц  $W$  устанавливает число секций ускорителя  $N$ , которое, согласно формуле (4.13), оказывается равным

$$N = \frac{W}{W_1} = \frac{\alpha W}{qE_{\max}} \cdot \frac{1}{\omega \Lambda}. \quad (4.43)$$

Полная длина ускорителя при этом, очевидно, равна

$$L = Nl = \frac{W}{qE_{\max} \omega}. \quad (4.44)$$

Зная характеристики ускоряющих секций,  $R_{ш}$ ,  $E_m$ ,  $\alpha$  и расчетный ток  $I$ , по формулам (4.4), (4.8), (4.11) и (4.12) определяем коэффициент нагрузки током  $\chi$ , приведенную длину секции  $\Lambda$ , безразмерное (отнесенное к максимально возможному для секции приросту энергии) значение приобретаемой в секции энергии  $\omega$  и к. п. д.  $\kappa$ . Для этих величин получаем соответственно  $\chi=6,15$ ,  $\Lambda=0,108$ ,  $\omega=0,67$ ,  $\kappa=0,79$ . Неиспользованная доля мощности равна  $\xi^2=0,1$ , так что около 79% мощности (45 Мвт) идет на ускорение пучка, 11% расходуется на джоулево тепло в стенках и 10% должно поглощаться конечной нагрузкой. Полная расходуемая мощность составляет 50 Мвт. Найденному значению  $\Lambda$  соответствует длина секции  $l=1,9$  м. Полная длина ускорителя  $L$ , согласно (4.43), оказывается равной приблизительно 4,3 м. Таким образом, ускоритель может состоять всего из двух секций.

Для ориентировочного выбора характеристик ускорителя может оказаться полезной система графиков, изображенных на рис. 4.10. Графики эти представляют зависимости основных параметров ускорителя ( $a$ ,  $2\alpha$ ,  $\delta$ ,  $l$ ,  $W_1$ ,  $N$ ) от мощности, подводимой к секции. Зависимости эти получены на основе простых приближенных соотношений:

$$\delta = \frac{E_{\max}}{\sqrt{P_{\max}}}; \quad \alpha = \frac{E_{\max}^2}{2R_{ш}P_{\max}};$$

$$a = \left[ \frac{7\lambda_0 \sqrt{P_{\max}}}{E_{\max}} \right]^{1/2}; \quad l = \frac{2\Lambda R_{ш}P_{\max}}{E_{\max}^2};$$

$$W_1 = \frac{2\omega \Lambda R_{ш}P_{\max}}{E_{\max}}; \quad N = \frac{W}{W_1},$$

справедливых при заданных значениях тока  $I$ , энергии на выходе ускорителя  $W_{в.}$ , амплитуды  $E_{max}$  и длины волны ускоряющего поля  $\lambda_0$ , шунтового сопротивления  $R_{ш.}$ , уровня поля на выходе секции  $\xi$ .

Из графиков, на рис. 4.10, легко определить параметры ускорителя, фиксируя значение одного из них.

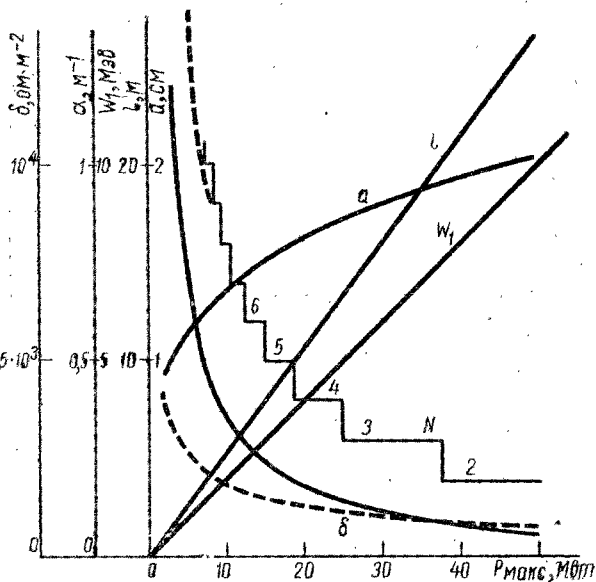


Рис. 4.10. Зависимости основных параметров ускорителя от мощности генератора ускоряющего поля.

Подводя итоги, можно сказать, что в принципе линейный электронный ускоритель на большие токи (порядка нескольких ампер) можно осуществить простой модификацией известных слаботочных линейных ускорителей. Ускоритель на большие токи отличается от обычного ускорителя с малой нагрузкой пучком главным образом большим потреблением мощности на единицу длины. Поэтому он должен состоять из большого числа относительно коротких секций и использовать мощные источники высокочастотного поля. Повышение интенсивности пучка ускоряемых частиц приводит к большей экономичности ускорения: значение к. п. д. может достигать 70—80%.

## ГЛАВА 5

### ПОПЕРЕЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПУЧКА В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ УСКОРИТЕЛЯХ

#### 5.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЯВЛЕНИЯ

В начале 60-х годов при попытках увеличить интенсивность пучка на различных небольших действующих линейных электронных ускорителях было обнаружено

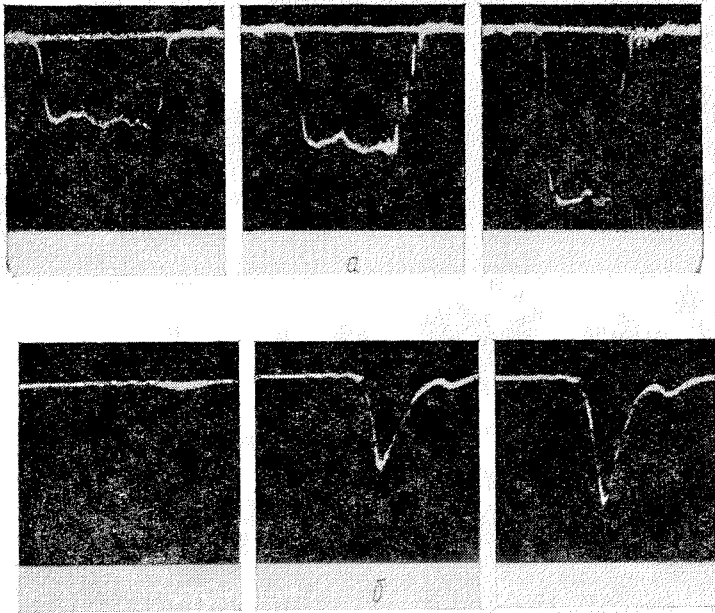
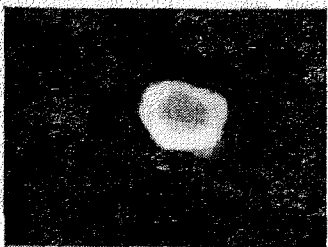
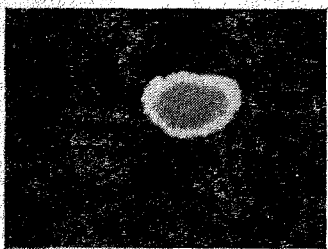
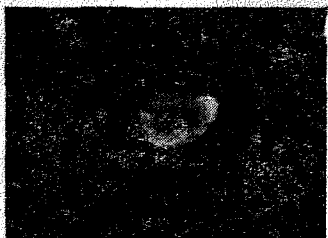


Рис. 5.1. Экспериментальное наблюдение неустойчивости пучка при повышении импульсного тока:

*a* — осциллограмма тока на выходе секции; *б* — генерация поля несимметричной волны  $HE_{11}$ .

существование верхнего предела по току. При превышении характерного максимума тока в процессе увели-

чения интенсивности пучка для фиксированной длительности импульса инъекции или, наоборот, при достижении некоторой критической величины длительности импульса (и неизменном значении импульсного тока) наблюдалось разрушение пучка.



Характерная картина изменения формы импульса ускоряемых частиц при увеличении тока пучка показана на рис. 5.1, а. Эти фотографии токовых импульсов взяты из работы [1], посвященной исследованию неустойчивости пучка на секции харьковского ускорителя с энергией 2 Гэв.

Такая же картина наблюдается при превышении максимально допустимого тока и в других ускорителях, независимо от их типа. Изображенные осциллограммы соответствуют трем различным значениям импульсного тока при определенной ( $T=1,5$  мксек) длительности импульса инъекции. Видно, что с увеличением тока длительность импульса ускоренных электронов становится меньше длительности импульса инъекции и при дальнейшем повышении интенсивности пучка быстро уменьшается. Большая часть электронов, попавших в ускорение в конце импульса инъекции, не доходит до выхода ускорителя, а попадает на стенки замедляющей структуры, что легко индицируется, на-

Рис. 5.2. Поперечное сечение электронного пучка при повышении тока в импульсе.

пример, по резкому возрастанию интенсивности  $\gamma$ -излучения от стенок структуры. Замеченное явление получило название «эффекта укорочения импульса», или «обрыва тока» («pulse shortening effect», «beam blow-up», «beam break-up»).

На рис. 5.2 приведены фотографии поперечного сечения электронного пучка при различных значениях тока в импульсе, полученные в работе [2]. Как видно из этих фотографий, с ростом тока (при этом увеличивается яркость самого пучка), начиная с определенного значения, поперечные размеры пучка резко возрастают, причем с явно выраженной несимметрией.

Впервые описание эффекта укорочения импульса появилось в работе [3]. Как указывалось в этой работе, эффект укорочения начинает проявляться для ускорителей, работающих в 10-см диапазоне длин волн, при импульсных токах от 300 до 600 *ма* и длительности импульсов от 1 до 2 *мксек*. Переход к ускорению в 30-см диапазоне сопровождался повышением предельных токов до 1—2 *а*; наоборот, для ряда ускорителей фирмы Виккерс, использующих 3-см диапазон волн, эффект проявлялся уже при токах порядка 40—50 *ма*. На основании этих данных авторами был сделан вывод, что для ускорителей со сходными длинами и приростами энергии, но работающими в различных диапазонах, предельный ток пропорционален квадрату длины волны ускоряющего поля.

Эксперименты с отдельной ускоряющей секцией показали, что разрушение пучка происходит сначала вблизи выходного торца волновода: группирователь и начальная часть секции могли пропускать гораздо большие токи, чем те, для которых наблюдался обрыв импульса на выходе. Использование секции с переменными размерами приводило к значительному (в несколько раз) повышению тока. При увеличении уровня высокочастотной мощности ускоряющего поля также повышалось предельное значение ускоряемого тока. В работе [3] еще не была установлена причина наблюдаемой неустойчивости пучка.

Вслед за первой публикацией [3] появился целый ряд статей [4—7], авторы которых наблюдали аналогичный эффект. В этих работах отмечалась характерная связь распада пучка с интенсивной генерацией волны с одной азимутальной вариацией (типа  $HE_{11}$ ) на ча-



стоте, приблизительно в полтора раза большей частоты ускоряющего поля. Эта несимметричная волна способна отклонять электронный пучок, причем при обратном характере волны возможно появление положительной обратной связи. Этим было дано качественное объяснение возникновения и развития неустойчивости электронного пучка.

На рис. 5.1, б показаны фотографии импульсов возбуждаемой пучком несимметричной гибридной волны типа  $HE_{11}$ . Видно, что амплитуда гибридной волны весьма мала при слабом токе пучка и тем больше, чем более развит процесс неустойчивости.

Обстоятельное экспериментальное исследование эффекта обрыва импульса и первый количественный теоретический анализ явления проведены в работах [8—10]. В основу расчетов авторами этих работ положен механизм возбуждения высокочастотной мощности, аналогичный механизму работы СВЧ-генератора с обратной волной [11].

Подобно тому как это сделано в линейной теории электронных волн в замедляющих структурах (см., например, работу [12]), автор работы [9] составляет самосогласованную систему уравнений движения зарядов и возбуждаемых токами электромагнитных полей с одной азимутальной вариацией (волна  $HE_{11}$ ). В отличие от линейной теории лампы обратной волны в этой работе рассматривается не одномерная задача, соответствующая чисто продольному взаимодействию электронного пучка с электромагнитным полем, а учитывается также и влияние поперечных составляющих поля. Линеаризация полученной замкнутой цепочки уравнений для системы пучок — поле приводит, как обычно, к дисперсионному соотношению, определяющему постоянные распространения электронных волн на частоте, для которой фазовая скорость возбуждаемых волн равна продольной скорости пучка. Дисперсионное уравнение имеет три решения, которые соответствуют трем существующим на данной частоте волнам простраивенного заряда. Наложение краевых условий [отсутствие модуляции пучка на входе в секцию ( $z=0$ ), т. е. равенство нулю переменной части скорости частиц и переменной части тока], а также задание начального значения амплитуды обратной волны, взаимодействующей с пучком на выходе из секции ( $z=l$ ), позволяет определить коэф-

коэффициент усиления высокочастотного поля для одной секции ускорителя. Требование бесконечного коэффициента усиления, т. е. конечного значения поля на входе секции при его нулевой начальной амплитуде, — это условие самовозбуждения системы, оно определяет стартовый ток в функции параметров пучка и характеристик секции. Однако теоретические значения стартового тока, полученные в работе [9], оказались почти на порядок выше экспериментальных. Это расхождение тем более существенно, так как экспериментальные данные были получены на секциях с включенным ускоряющим полем, влияние которого не учитывалось в расчетах. В то же время, как следует из других экспериментов, ускоряющее поле повышает стартовый ток.

Одно из наиболее интересных первых модельных рассмотрений явления укорочения импульса появилось в статье Бьеркхольма и Хайнемана [13]. При анализе взаимодействия электронного пучка с паразитной несимметричной электромагнитной волной типа  $HE_{11}$  авторы этой работы исходили из уравнения баланса мощности в замедляющей структуре, учитывающего распространение энергии возбуждаемого поля с групповой скоростью. Уравнение баланса решалось совместно с уравнением поперечного движения электронов пучка. Показано, что неустойчивость пучка развивается экспоненциально со временем. К сожалению, получение каких-либо количественных оценок достигается лишь с помощью электронно-вычислительной машины. Кроме того, количественные результаты зависят от двух неопределенных постоянных: начального возмущения, вызывающего неустойчивость, и величины скольжения излучаемого поля относительно частиц пучка. Введение скольжения поля излучения относительно пучка нельзя считать достаточно обоснованным, а его неопределенная величина подбиралась в процессе численных расчетов таким образом, чтобы скорость развития неустойчивости была максимальной.

После обнаружения неустойчивости пучка на гигантских линейных ускорителях в Станфорде и Харькове появилось много работ, содержащих результаты новых тщательных экспериментальных исследований [1, 2, 14—24]. Поперечная неустойчивость пучка проявлялась в этих многосекционных ускорителях в такой мере, что вначале не удалось достичь проектного (вообще говоря,

довольно малого) значения тока пучка. При этом укорочения импульса не удалось избежать даже при использовании ускоряющих секций с переменной геометрией, для которых нарушается когерентность полей, излучаемых в различных участках секции.

В работах [1, 2, 14—18, 25] приведены полученные экспериментально зависимости предельного тока от длительности импульса инжекции, протяженности ускорителя и величины ускоряющего поля. Здесь мы не будем подробно излагать эти результаты, а сошлемся на них в дальнейшем при сопоставлении с расчетными данными. Наиболее общую замеченную при экспериментах закономерность развития явления укорочения импульса можно сформулировать следующим образом: неустойчивость пучка проявляется тем раньше, чем больше интенсивность пучка и длина ускорителя.

## **5.2. ИСХОДНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И УРАВНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА**

Перейдем к исследованию радиальной неустойчивости пучка под действием возбуждаемого им в структуре собственного поля излучения. При этом мы будем использовать в принципе ту же модель, на основе которой исследовались энергетические режимы ускорителя, т. е. считать, что сгруппированный пучок состоит из идентичных точечных сгустков, движущихся с постоянной скоростью и следующих друг за другом на расстоянии  $\lambda_0$ , равном длине волны ускоряющего поля. Для анализа неустойчивости можно считать, что пучок возбуждает лишь несимметричную гибридную волну типа  $HE_{11}$  (с одной вариацией по азимуту), и рассматривать взаимодействие сгустков пучка только с этой волной, а действие ускоряющего поля учитывать феноменологически, т. е. через прирост энергии частиц пучка. Простых представлений о свойствах электромагнитного поля с одной вариацией по радиусу (в частности, постоянства радиальной компоненты силы Лоренца, которая действует в таком поле на заряженную частицу, летящую вдоль ускорителя, и пропорциональности амплитуды поля такого вида, возбуждаемого движущимся зарядом, радиальному смещению частицы от оси) оказывается достаточно для качественного объяснения

возможности развития неустойчивости электронного пучка.

Пусть момент  $t=0$  — начало инжекции в секцию ускорителя. Предположим, что головной сгусток влетает в секцию с некоторым начальным радиальным отклонением и движется параллельно ее оси. Он возбуждает в секции высокочастотное поле с одной азимутальной вариацией. Как следует из сравнения компонент силы реакции излучения, продольная и поперечная компоненты сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Поэтому для поля, возбуждаемого чисто продольным током, реакция излучения собственного поля сгустка в поперечном направлении отсутствует и радиальное отклонение головного сгустка остается неизменным. Второй сгусток пучка движется в поле излучения головного сгустка. Если расстояние между сгустками кратно полуволновому числу длин волн излучаемого поля (типа  $HE_{11}$ ) и все сгустки имеют одинаковое радиальное отклонение, то суммарное поле каждых двух соседних сгустков равно нулю: амплитуды полей в этом случае равны по величине, а фазы различаются на  $\pi$ . В действительности частота возбуждаемой несимметричной моды не кратна частоте ускоряющего симметричного поля и поперечная составляющая поля излучения головного сгустка отлична от нуля в месте расположения второго сгустка. В результате второй сгусток испытывает действие силы, нормальной к оси, и получает некоторое смещение в поперечном направлении. В соответствии с изменившимся радиальным положением второго сгустка изменится и амплитуда несимметричной волны, возбуждаемой им при пролете вдоль секции ускорителя. Третий сгусток движется в суммарном поле излучения первых двух; он также испытывает действие поперечной силы и получает дополнительное отклонение от оси и т. д. Можно предположить, что описанный процесс, лавинообразно нарастая, приведет к такому увеличению поперечных размеров пучка, что электроны «высадутся» на стенки замедляющей структуры.

Для получения количественных характеристик неустойчивости электронного пучка следует решить самоогласованное уравнение поперечного движения сгустков [21, 26—35]. Ниже мы приведем такой последовательный расчет поперечного движения каждого сгустка пучка в суммарном поле излучения, наведенном всеми

ранее пролетевшими сгустками. Продольное движение сгустков считаем заданным: они движутся равномерно со скоростью света. При вычислении амплитуды полей, возбуждаемых сгустками, будем учитывать лишь работу продольной составляющей тока: из-за относительной малости поперечной скорости сгустка электромагнитные поля, наводимые радиальной составляющей тока, составляют лишь малую добавку к рассматриваемым. В расчете учтем, что импульс поля излучения распространяется вдоль замедляющей структуры с групповой скоростью [32—33].

Запишем уравнение поперечного движения сгустка с номером  $n^*$  (отсчет ведется от головного сгустка, которому присвоен номер  $n=0$ ) в полном электромагнитном высокочастотном поле несимметричной волны типа  $HE_{11}$ , возбуждаемом предшествующей частью пучка. Считаем, что на сгусток действует стационарное фокусирующее продольное однородное магнитное поле  $H$ . Будем проводить рассмотрение в декартовых координатах  $x, y, z$ , ось  $z$  которых совмещена с осью замедляющей структуры ускорителя. Уравнения движения сгустка в поперечной плоскости  $xy$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx_n}{dt} \right) &= F_{xn}^{BЧ} + F_x^{\Phi}, \\ \frac{d}{dt} \left( m \frac{dy_n}{dt} \right) &= F_{yn}^{BЧ} + F_y^{\Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( W \frac{dx_n}{dz} \right) &= F_{xn}^{BЧ} + F_x^{\Phi}, \\ \frac{d}{dz} \left( W \frac{dy_n}{dz} \right) &= F_{yn}^{BЧ} + F_y^{\Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (5.1a)$$

где переменная  $t$  — время, отсчитываемое от момента влета сгустка в секцию;  $x_n, y_n$  — составляющие поперечного отклонения от оси для сгустка с номером  $n$ ;  $m$  — масса частицы;  $W = mc^2$  — энергия частицы. Явное

---

\* Номер сгустка  $n$  совпадает с целочисленными значениями безразмерной переменной  $n = tv_0$ , где отсчет времени  $t$  ведется от момента инжекции пучка, и служит характеристикой длительности импульса инжекции, точнее длительности участка импульса инжекции, предшествующего впуску  $n$ -го сгустка.

выражение для фокусирующей силы  $F^\Phi$  и поперечной силы Лоренца, действующей на частицы со стороны высокочастотного поля  $F_n^{\text{ВЧ}}$ , имеет вид

$$\left. \begin{aligned} F^\Phi &= \frac{e}{c} [\mathbf{vH}\Phi] = \frac{e}{c} \left\{ \frac{dy_n}{dt} H, -\frac{dx_n}{dt} H, 0 \right\}, \\ F_{\perp}^{\text{ВЧ}} &= e \left\{ \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}]_{\perp} \right\} = \frac{eI\pi\lambda_0}{\lambda_1} \times \\ &\times \frac{E_{r1}^2}{P} \beta_{\text{Грп1}} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \end{Bmatrix} \sin(hz - \omega t + \omega t_k). \end{aligned} \right\} (5.2)$$

Каждое из слагаемых в сумме (5.2), определяющей силу Лоренца, описывает действие поля излучения одного из предшествующих сгустков на рассматриваемый  $n$ -й сгусток. Выражение для сил, обусловленных действием возбуждаемых в структуре полей, будем аппроксимировать лишь синхронной с зарядом пространственной гармоникой [см. формулу (3.83)]. Действие ускоряющего поля можно учитывать феноменологически, задавая закон возрастания энергии частиц вдоль  $W(z)$  вдоль секции; как правило, считаем приращение энергии с расстоянием линейным. В общем случае учтем также затухание поля излучения по мере удаления его от источника, поток мощности поля излучения вдоль секции и ее конечную протяженность.

Перепишем уравнения (5.1) в безразмерном виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \left[ \gamma(\zeta) \frac{d\xi_n}{d\zeta} \right] &= - \sum_{k=0}^n e^{-\Gamma k} \xi_{n-k}(\zeta + k\kappa) \{ 1 - \\ &- \Pi(\zeta + k\kappa - L) \} \sin k\psi + \Omega \frac{d\eta_n}{d\zeta}, \\ \frac{d}{d\zeta} \left[ \gamma(\zeta) \frac{d\eta_n}{d\zeta} \right] &= - \sum_{k=0}^n e^{-\Gamma k} \eta_{n-k}(\zeta + k\kappa) \{ 1 - \\ &- \Pi(\zeta + k\kappa - L) \} \sin k\psi - \Omega \frac{d\xi_n}{d\zeta}, \end{aligned} \right\} (5.3)$$

где

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Здесь использованы следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\xi_n = x_n/r_0, \eta_n = y_n/r_0 \quad (5.4)$$

смещения сгустка  $n$  в поперечных направлениях, отнесенные к величине  $r_0$ , характеризующей начальную несимметрию пучка (более точно мы определим величину  $r_0$  ниже, рассматривая начальные условия задачи);

$$\zeta = z/z_0 \quad (5.4a)$$

безразмерная продольная координата;

$$\Omega = 120\pi e z_0 H/W_i \quad (5.5)$$

частота вращения сгустка в продольном фокусирующем магнитном поле  $H$ .

Для секций, в которых движение частиц можно считать равномерным (как принято в нашей модели), их энергия нарастает вдоль ускорителя почти линейно  $\gamma(\zeta) = W/W_i = 1 + \varepsilon\zeta$ . Коэффициент приращения энергии равен

$$\varepsilon = e z_0 E_0/W_i, \quad (5.6)$$

где  $E_0$  — эффективное ускоряющее поле;  $W_i$  — энергия инжекции пучка, выраженная в электронвольтах. Эффективное поле  $E_0$  не совпадает с амплитудой ускоряющей волны, оно должно также учитывать нагрузку током (и фазовое положение сгустков относительно максимума поля).

Входящая в выражения (5.4) — (5.6) величина  $z_0$ , имеющая размерность длины, зависит от характеристик ускоряющей секции и параметров пучка и определяется формулой

$$\frac{1}{z_0} = \sqrt{\frac{\pi I}{W_i} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \cdot \frac{E_{r1}^2}{P} \beta_{гр1}}, \quad (5.7)$$

где  $I$  — импульсный ток пучка;  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  — длины волн соответственно ускоряющего и несимметричного полей;  $\beta_{гр1} = v_{гр1}/c$  — безразмерная групповая скорость несимметричной волны; отношение квадрата амплитуды радиальной составляющей несимметричной волны к продольному потоку мощности (коэффициент поперечного взаимодействия)  $E_{r1}^2/P$  определяется геометрией структуры и характеризует отклоняющее поле в ней.

Значение высокочастотного отклоняющего поля, возбужденного сгустком с номером  $k$  в месте расположения рассматриваемого  $n$ -го сгустка, пропорционально величине  $\sin(n-k)\psi$ , где  $\psi = 2\pi\lambda_0/\lambda_1$  — набег фазы гибридной волны на расстоянии между двумя соседними сгустками. Знак минус перед символами сумм в соотношениях (5.3) соответствует отсчету фаз в направлении, противоположном направлению фазовой скорости, взаимодействующей с пучком (т. е. синхронной с частицами) пространственной гармонике гибридной волны.

Затухание поля несимметричной волны по мере удаления от источника описывается экспоненциальным множителем  $e^{-k\Gamma}$ , где  $\Gamma \approx \alpha\beta_{\text{гр}1}\lambda_0$  — показатель спадания поля на расстоянии между двумя соседними сгустками.

Как было показано в разд. 3.3, возбуждаемое движущимся источником поле медленно изменяется во времени: картина распределения поля смещается с групповой скоростью рассматриваемой волны. Для учета дрейфа распределения электромагнитного поля, излученного отдельными сгустками пучка, функции  $\xi_{n-k}$  и  $\eta_{n-k}$ , входящие в суммарную силу Лоренца в уравнениях (5.3), вычисляются для запаздывающих аргументов  $(\zeta + k\kappa)$ , где безразмерный параметр

$$\kappa = \frac{|v_{\text{гр}1}|}{v} \cdot \frac{\lambda_0}{z_0} \quad (5.8)$$

определяет величину смещения картины поля за один высокочастотный период ускоряющего поля.

Обычно замедляющая структура ускорителя состоит из ряда независимых секций, развязанных по высокой частоте: электромагнитное поле из одной секции не может проникать в соседнюю. Таким образом, после пролета сгустком рассматриваемой секции длины  $l$  (безразмерная длина секции при этом равна  $L = l/z_0$ ) его поле излучения не должно сказываться на процессах, происходящих в данной секции. Множитель в фигурных скобках  $\{1 - \Pi(\zeta, k)\}$  как раз и описывает это «выключение» источника после того, как он покинет рассматриваемую секцию ( $0 \leq \zeta \leq L$ ), т. е. учитывает ограниченную протяженность секций ускорителя.

Заметим, что уравнения движения в поперечной плоскости (5.3) относятся к случаю, когда гибридная волна обладает отрицательной дисперсией (излученное



поле смещается в направлении, противоположном направлению движения заряженных сгустков:  $v_{гр1} < 0$ ). Если поле несимметричной волны имеет положительную групповую скорость, то в уравнениях (5.3) следует изменить знак  $\kappa$ , а выражение в фигурной скобке заменить на величину  $\Pi(\zeta - k\kappa)$ . Этот множитель учитывает смещение поля излучения за время между влетом сгустков с номерами  $n-k$  и  $n$  и тем самым описывает влияние конечной протяженности секции при положительной дисперсии.

Для однозначного решения системы уравнений поперечного движения сгустков следует задать начальные условия, т. е. начальные отклонения и начальные поперечные скорости сгустков (или начальную угловую расходимость пучка). Начальные условия — мера несимметрии системы, обусловленной неравномерностью распределения заряда в сгустке, общим отклонением его от оси, искажениями замедляющей структуры и другими причинами, приводящими к развитию неустойчивости.

В отсутствие стороннего фокусирующего поля ( $\Omega = 0$ ) уравнения (5.3) независимы и для анализа неустойчивости достаточно рассмотреть лишь одно из них. Можно для простоты считать, что все начальные возмущения пучка лежат в плоскости  $yoz$  и изучать развитие процесса неустойчивости в этой плоскости, т. е. решать уравнение системы (5.3) для  $\eta_n(\zeta)$ . Если задано начальное распределение отклонений и радиальных скоростей сгустков  $y_s(0)$  и  $dy_s(0)/dz = v_{ys}/v_z$ , то в силу линейности уравнения решение можно представить в виде

$$y_n(\zeta) = \sum_{s=0}^n [y_s(0) \eta_n^s(\zeta) + y'_s(0) \eta_n^{s*}(\zeta)], \quad (5.9)$$

где

$$y'_s(0) = \left. \frac{dy_s}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \left. \frac{dy_s}{dz} \right|_{z=0} z_0 \quad (5.10)$$

характеризует начальную расходимость пучка в момент инъекции сгустка с номером  $s$ . Используемые в равенстве (5.9) функции  $\eta_n^s(\zeta)$  и  $\eta_n^{s*}(\zeta)$  — решения уравнения (5.3) с единичными начальными условиями для сгустка номера  $s$ :

1.  $\eta_n^s(\zeta)$  соответствует начальным условиям

$$\eta_n^s(0) = \delta_n^s, \frac{d\eta_n^s(0)}{d\zeta} = 0, \quad (5.11)$$

т. е. случаю, когда сгусток  $s$  инжектируется с единичным начальным (безразмерным) отклонением параллельно оси, а все остальные сгустки пучка впускаются точно по оси;

2.  $\eta_n^{s*}(\zeta)$  соответствует начальным условиям

$$\eta_n^{s*}(0) = 0, \frac{d\eta_n^{s*}(0)}{d\zeta} = \delta_n^s, \quad (5.11a)$$

т. е. случаю, когда возмущение инжектируемого пучка состоит лишь в наличии поперечной скорости у  $s$ -го сгустка.

Заметим, что выбор начальных условий в форме (5.11) однозначно определяет характерный размер, к которому следует нормировать смещение сгустков. В первом случае за норму естественно взять начальное смещение  $r_s(0)$ ; во втором — нормирующая постоянная определяется формулой (5.10).

Отметим здесь также справедливость следующих очевидных равенств:

$$\left. \begin{aligned} \eta_n^s(\zeta) &= \eta_{n-s}^0(\zeta), \\ \eta_n^{s*}(\zeta) &= \eta_{n-s}^{0*}(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

означающих, что для пучка с начальным возмущением  $s$ -го сгустка этот сгусток играет роль головного, с которого начинает развиваться неустойчивость. Таким образом, решения  $\eta_n^0(\zeta)$  и  $\eta_n^{0*}(\zeta)$  с начальным возмущением у головного сгустка фундаментальные: при любых других условиях (5.11) решение можно получить из них просто заменой  $n$  величиной  $n-s$ .

Общее решение (5.9) запишем в виде

$$y_n(\zeta) = \sum_{s=0}^n [y_s(0) \eta_{n-s}^0(\zeta) + y'_s(0) \eta_{n-s}^{0*}(\zeta)]. \quad (5.13)$$

В дальнейшем, как правило, мы будем искать эти фундаментальные решения с начальным возмущением головного сгустка.

### 5.3. АНАЛИЗ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА ДЛЯ СТРУКТУР С МАЛОЙ ГРУППОВОЙ СКОРОСТЬЮ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ВОЛНЫ\*

В предыдущем разделе мы получили уравнение поперечного движения сгустков в весьма общем виде. Решить эти уравнения — задача довольно сложная, поэтому целесообразно для первоначального анализа максимально упростить ее. В качестве первого упрощающего предположения примем, что групповая скорость несимметричной волны и длительность импульса инжекции малы. При этом высокочастотное электромагнитное поле, излученное сгустком при прохождении некоторого сечения структуры  $z = \text{const}$ , не успевает заметно сместиться из этого сечения за время импульса инжекции и может считаться локализованным в данном месте в течение всего процесса. Положим, таким образом, в уравнениях (5.3)  $\kappa = 0$ .

Так же как и в предыдущем разделе, в первую очередь рассмотрим фундаментальные задачи о неустойчивости пучка, обусловленной начальным возмущением лишь головного сгустка. При этом предположим, что фокусирующее поле отсутствует ( $\Omega = 0$ ) и начальное возмущение, а следовательно, и развитие процесса неустойчивости ограничены лишь одной плоскостью (например,  $yoz$ ). Для еще большего упрощения анализа считаем также, что ускоряющее поле в секции отсутствует ( $\varepsilon = 0$ ) и энергия частиц неизменна и равна энергии инжекции. Затуханием поля вначале пренебрежем ( $\Gamma = 0$ ).

В принятых предположениях дифференциально-разностное уравнение поперечного движения имеет вид:

$$\frac{d^2 \eta_n}{d\xi^2} = - \sum_{k=0}^n \eta_{n-k}(\xi) \sin k\psi. \quad (5.3a)$$

Его следует решать при начальных условиях (5.11) или (5.11a). Решение задачи можно получить либо итерациями в виде сходящихся рядов, либо в интегральном виде с помощью преобразования Лапласа. Остановимся сначала на первом способе решения.

\* Изложение ведется в соответствии с работой [26].

Будем искать решения обеих фундаментальных задач в виде конечных сумм:

$$\eta_n(\zeta) = \sum_{m=0}^n a_{mn} F_m(\zeta), \quad (5.14)$$

$$\eta_n^*(\zeta) = \sum_{m=0}^n a_{mn}^* F_m^*(\zeta), \quad (5.14a)$$

где  $a_{mn}$  — постоянные коэффициенты, а  $F_m(\zeta)$  — функции продольной координаты, зависящие только от одного текущего индекса. Рассмотрим сначала задачу с начальными условиями (5.11) для  $\eta_n(\zeta)$ . Подставляя выражение (5.14) в уравнение (5.3а) и меняя порядок суммирования в его правой части, получаем соотношение

$$\sum_{m=0}^n a_{mn} F_m'' = - \sum_{m=0}^n F_{m-1} \sum_{k=1}^{n-m+1} a_{m-1, n-k} \sin k\psi, \quad (5.15)$$

которое должно выполняться при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \eta_n(0) &= \sum_{m=0}^n a_{mn} F_m(0) = \delta_n^0, \\ \eta_n'(0) &= \sum_{m=0}^n a_{mn} F_m'(0) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Полученные условия справедливы, если выполняются следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения:

$$a_{0n} = \delta_n^0, \quad a_{mn} = \sum_{k=1}^{n-m+1} a_{m-1, n-k} \sin k\psi \quad \text{при } m \geq 1 \quad (5.16)$$

и рекуррентная система уравнений

$$F_0 = 1; \quad F_m''(\zeta) = F_{m-1}(\zeta) \quad \text{при } m \geq 1 \quad (5.17)$$

с однородными начальными условиями

$$F_m(0) = F_m'(0) = 0 \quad (m \geq 1).$$

Решение системы (5.17) — функции

$$F_m(\zeta) = \frac{\zeta^{2m}}{(2m)!} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.18)$$

Величины  $a_{mn}$  можно представить как полиномы по  $n$  степени  $(m-1)$ , коэффициентами которых служат ог-

раниченные по величине комбинации тригонометрических функций от  $\psi$ . Обычно практический интерес представляют большие значения  $n$ . Действительно,  $n \approx \nu_0 T$ , где  $T$  — длительность импульса инжекции, а  $\nu_0$  — частота ускоряющего поля; частотам  $\nu_0 \approx 3 \cdot 10^9$  гц (десятисантиметровый диапазон) и длительностям импульса в несколько микросекунд отвечают  $n \approx 10^3 - 10^4$ . В этом случае вместо точных формул (5.18) гораздо удобнее пользоваться приближенными выражениями для  $a_{mn}$ , соответствующими удержанию лишь старших степеней полиномов по  $n$ :

$$a_{0n} = \delta_n^0; \quad a_{mn} \approx \frac{n^{m-1}}{2^{m-1}(m-1)!} \cos\left(n\psi + m \frac{\pi}{2}\right) (m \geq 1). \quad (5.19)$$

В результате получаем следующее приближенное (большие  $n$ ) выражение решения  $\eta_n(\zeta)$  фундаментальной задачи с начальным единичным отклонением головного сгустка:

$$\eta_n^0(\zeta) = \delta_n^0 + \frac{2}{n} \sum_{m=1}^n \left(\frac{n\zeta^2}{2}\right)^m \frac{\cos(n\psi + m\pi/2)}{(m-1)!(2m)!}. \quad (5.20)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть задачу и для  $\eta_n^{0*}(\zeta)$  в случае пучка, в котором головной сгусток имеет единичную поперечную скорость:

$$a_{mn}^* = a_{mn}, \quad F_m^*(\zeta) = \frac{\zeta^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

откуда следует, что

$$\eta_n^{0*}(\zeta) = \zeta \delta_n^0 + \sum_{m=1}^n \frac{n^{m-1} \zeta^{2m+1}}{2^{m-1}(m-1)!(2m+1)!}. \quad (5.20a)$$

Как легко видеть, решения двух элементарных задач о неустойчивости пучка связаны простым соотношением

$$\frac{d\eta_n^*}{d\zeta} = \eta_n(\zeta), \quad (5.21)$$

причем характер зависимости решений от номера сгустка и от продольной координаты совершенно одинаковый.

Зная элементарные фундаментальные решения (5.20), можно с помощью общего решения (5.13) определить относительное поперечное отклонение сгустков при произвольном распределении отклонений от оси и радиальных скоростях сгустков на входе ускорителя. Пусть, например, все сгустки влетают в ускоритель параллельно оси с одинаковым поперечным отклонением:  $\eta_n^s(0) = 1$ ;  $\eta_n^{s'}(0) = 0$ . Из соотношений (5.13) и (5.20) следует, что отклонение сгустка с номером  $n$  в сечении  $\zeta = \text{const}$  при таких начальных условиях выражается формулой

$$\eta_n(\zeta) = \sum_{s=0}^n \eta_{n-s}^0(\zeta) = 1 + \frac{1}{2 \cos \frac{\psi}{2}} \times \\ \times \sum \frac{n^{m-1} r_0^{2m} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \psi + m \frac{\pi}{2} \right]}{2^{m-1} (m-1)! (2m)!}, \quad (5.22)$$

т. е. отличается от решения аналогичной элементарной задачи лишь множителем  $1/2 \cos(\psi/2) \approx 1/2$ . Таким же оказывается и различие в амплитуде поперечного отклонения для задач о неустойчивости, обусловленной радиальной скоростью лишь у головного сгустка или постоянной расходимостью пучка на входе в ускоритель.

Как показывает сравнение различных выражений для поперечного отклонения  $n$ -го сгустка, характер зависимости отклонения от переменных  $n$ ,  $\zeta$  одинаков для различных начальных условий, отличие же заключается лишь в численном множителе порядка единицы.

Ввиду того что различные виды начальных возмущений приводят к одинаковому характеру зависимости смещения от  $n$  и  $\zeta$ , можно все разнообразие начальных условий заменить некоторым «эффективным» значением начального смещения  $r_0$ , определяемым на опыте. При этом достаточно знать лишь решение фундаментальной задачи (5.20). Перепишем выражение (5.20) в виде

$$\eta_n(\zeta) = \delta_n^0 + \frac{2}{n} [f_1(n, \zeta) \cos n\psi + f_2(n, \zeta) \sin n\psi]. \quad (5.23)$$

Амплитуда огибающей поперечных отклонений пропорциональна функции

$$\max |\eta_n| = \frac{2}{n} \sqrt{f_1^2(n, \zeta) + f_2^2(n, \zeta)}, \quad (5.24)$$

где функции  $f_1(n, \zeta)$  и  $f_2(n, \zeta)$  определяются суммами

$$\left. \begin{aligned} f_1(n, \zeta) &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n^{2k} \zeta^{4k}}{2^{2k} (2k-1)! (4k)!}, \\ f_2(n, \zeta) &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n^{2k-1} \zeta^{4k-2}}{2^{2k-1} (2k-2)! (4k-2)!}. \end{aligned} \right\} (5.25)$$

Факториальные множители в членах сумм обеспечивают их очень быструю сходимость, поэтому верхние пределы сумм можно считать равными бесконечности ( $n \gg 1$ ). В результате функции\*  $f_1$ ,  $f_2$  и  $|\eta_n|$  оказываются зависящими явно лишь от комбинации переменных  $\zeta n^{1/2}$ .

На рис. 5.3 в логарифмическом масштабе изображена зависимость  $|\eta_n|$ , с помощью которой можно определить относительное смещение от оси сгустка с номером  $n$  при заданных значениях  $z_0$  (определяемых параметрами ускорителя) и фиксированном расстоянии  $z$  вдоль ускорителя. Как видно из рисунка, зависимость  $|\eta_n|$  несколько медленнее экспоненциальной. Из полученных аналитических выражений и приведенных графиков следует, что действие поля излучения несимметричной волны типа  $HE_{11}$  приводит к резкому возрастанию отклонения частиц от оси. Более подробный анализ математического закона, описывающего неустойчивость пучка, проведем после того, как получим асимптотическое выражение решения. Динамику радиального движения сгустков можно исследовать при более сложных начальных характеристиках пучка. Будем, например, считать, что радиальные смещения сгустков на входе секции ускорителя  $y_s(0)$  статистически независимы и распределены по некоторому закону, характеризованному математическим ожиданием  $M_0$  и дисперсией  $D_0$ . Определим статистические характеристики отклонения  $n$ -го сгустка  $r_n(z)$ . Нетрудно показать, что математическое ожидание  $M[r_n(z)]$  определяется произведением  $M_0 \cdot \eta_n(z)$ , где  $\eta_n(z)$  — отклоне-

\* Здесь и в дальнейшем  $|\eta_n|$  обозначает  $\max|\eta_n|$ , т. е. амплитуду огибающей  $\eta_n(\zeta)$ .

ние  $n$ -го сгустка при одинаковых единичных начальных отклонениях [ $\eta_n(0)=1$ ], задаваемое формулой (5.22). Вычисление дисперсии дает:

$$D(r_n) = D_0 \sum_{s=0}^n (\eta_n^s)^2, \quad (5.26)$$

где

$$\eta_n^s = 1 + \sum_{m=1}^{n-s} \frac{\zeta^{2m} (n-s)^{m-1} \sin \left[ (n-s)\psi - \frac{m\pi}{2} \right]}{2^{m-1} (2m)! (m-1)!}$$

вклад  $s$ -го сгустка в относительное (отнесенное к начальному смещению  $n$ -го сгустка) отклонение  $n$ -го сгу-

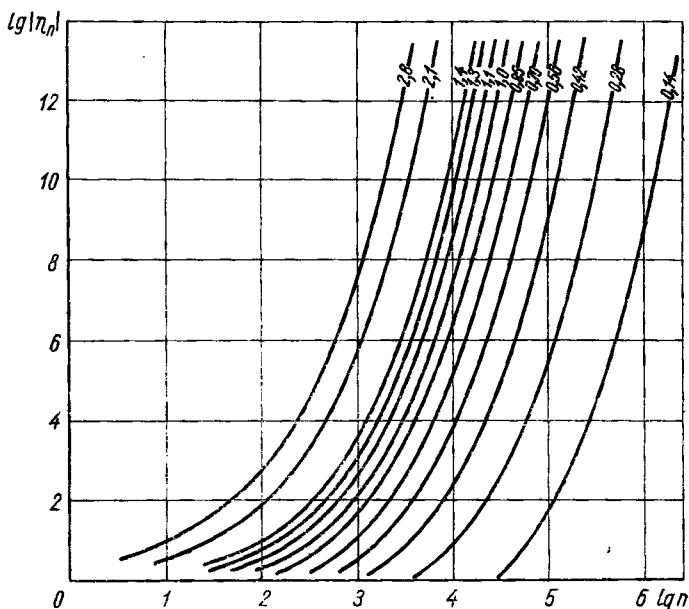


Рис. 5.3. Зависимость амплитуды огибающей поперечного отклонения сгустков  $\eta_n$  от номера сгустка при различных значениях параметра  $\zeta$ .

стка. Как следует из приведенного выражения (5.26), даже при равном нулю математическом ожидании распределения начальных отклонений, т. е. при симметрии инжектируемого пучка в среднем происходит быстрое увеличение радиальных размеров пучка во времени.



Не представляет труда получить решение задачи и при учете потерь в замедляющей структуре ускорителя. Потери приводят к экспоненциальному затуханию амплитуды поля при удалении от источника с коэффициентом затухания  $\alpha_1 \approx \alpha \beta_{\text{группы}}$  [см. формулу (3.81)]. В результате уравнение для поперечного отклонения  $n$ -го сгустка принимает вид

$$\frac{d^2 \eta_n}{d\xi^2} = - \sum_{k=0}^n \eta_{n-k} e^{-k\Gamma} \sin k\psi. \quad (5.36)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$\hat{\eta}_n = \eta_n(\xi) e^{n\Gamma}, \quad (5.27)$$

тогда задача определения ее в случае начального возмущения лишь головного сгустка сводится, как и прежде, к уравнению (5.3а) с начальными условиями (5.11). Решение задачи о развитии неустойчивости отличается от (5.20) лишь добавлением множителя  $e^{-n\Gamma}$ : неограниченно развивающийся во времени процесс демпфируется теперь затуханием излученного пучком поля. Единичное начальное возмущение пучка приводит вначале (когда малое затухание проявляется еще слабо) к нарастанию поперечного отклонения частиц, которое затем, достигнув максимума, монотонно убывает до нуля по прошествии достаточно долгого времени от момента возмущения.

Решение, аналогичное (5.20), можно получить с учетом изменения энергии частиц вдоль ускорителя. При этом уравнение для поперечного смещения сгустка номера  $n$  имеет вид

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \gamma(\xi) \frac{d\eta_n}{d\xi} \right] = - \sum_{k=0}^n \eta_{n-k}(\xi) \sin k\psi. \quad (5.3в)$$

Прямое решение уравнения (5.3в) при помощи подстановок (5.14) приводит к выражению для  $F_m(\xi)$  через гипергеометрические функции. Можно, однако, получить простое приближенное решение (5.3в), если энергия  $\gamma(\xi)$  — медленно меняющаяся функция координаты. В этом случае удобно ввести приведенное расстояние вдоль секции

$$\hat{\xi} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\gamma^{1/2}(\xi)} \quad (5.28)$$

и использовать замену функции  $\eta_n$  на новую  $\Phi_n$ , определяемую соотношением

$$\eta_n = \frac{1}{\gamma^{1/2}(\zeta)} \Phi_n(\hat{\zeta}). \quad (5.29)$$

Как нетрудно убедиться, функция  $\Phi_n(\hat{\zeta})$  приближенно [с точностью до членов второго порядка малости  $\sim d^2\gamma/d\zeta^2$  и  $(d\gamma/d\zeta)^2$ ] удовлетворяет уже исследованному простому уравнению (5.3б), и, таким образом, для представления решения можно воспользоваться суммами типа (5.20). Как видно из сказанного, наиболее существенное изменение решения при учете набора энергии частицами — замена реального пути  $\zeta$  на «приведенный»  $\hat{\zeta}$ . Если считать закон нарастания энергии частиц линейным  $\gamma(\zeta) = 1 + \varepsilon\zeta$ , то для приведенного пути получаем

$$\hat{\zeta} = \frac{2}{\varepsilon} (\sqrt{1 + \varepsilon\zeta} - 1). \quad (5.30)$$

В заключение заметим, что выражения для поперечного отклонения в виде сумм получены также в работах [19, 21].

Полученное в начале раздела решение задачи о неустойчивости пучка полностью описывает физическое явление и может служить для его количественного анализа. Все же найденный вид решения не вполне удовлетворителен из-за чрезмерной сложности. В случае больших значений  $n$ , т. е. при достаточно длительных импульсах инжекции можно найти асимптотическое поведение решения и записать его в простом и прозрачном аналитическом виде. Кроме этого, асимптотические методы можно легко распространить на решение более сложных задач. Получение и исследование асимптотической формы решения составляет основное содержание настоящего раздела.

Рассмотрим задачу о развитии неустойчивости в пучке из-за возмущения головного сгустка. При этом достаточно воспользоваться лишь одним из фундаментальных решений, например решением для случая начального отклонения головного сгустка от оси, так как и в этом случае выполняется соотношение (5.21).

Будем искать поперечное отклонение  $n$ -го сгустка [удовлетворяющего уравнению (5.3) и краевым условиям (5.11)] в виде

$$\eta_n(\zeta) = \delta_n^0 + \operatorname{Re} \{ R_n(\zeta, n) e^{i n \psi} \}, \quad (5.31)$$

где  $R_n(\zeta, n)$  — комплексная амплитуда поперечного смещения, а  $\exp(in\psi)$  — быстроосциллирующий (при больших  $n$ ) в функции номера множитель. Подставляя выражение (5.31) в уравнение (5.3), получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ \ddot{R}_n e^{i n \psi} \} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2} e^{i n \psi} \sum_{k=0}^n R_{n-k} (1 + e^{2i k \psi}) \right\} - \\ - \sum_{k=0}^n \delta_{n-k}^0 \sin k \psi. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Учитывая, что при  $n \gg 1$  сумма  $\sum_{k=0}^n R_{n-k} e^{-12k\psi}$  гораздо меньше величины  $\sum_{k=0}^n R_{n-k}$ , и заменяя суммирование по  $k$  интегрированием, приходим к приближенному интегро-дифференциальному уравнению для комплексной амплитуды поперечного смещения сгустков\*:

$$\frac{d^2 R_n}{d\zeta^2} = i + \frac{i}{2} \int_0^n R_k(\zeta) d\zeta. \quad (5.33)$$

Как ясно из замены (5.31), полученное уравнение (5.33) следует решать при однородных краевых условиях для искомой функции:

$$\left. \begin{aligned} R_n(\zeta = 0) &= 0, \\ \frac{dR_n(0)}{d\zeta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

---

\* Можно было бы не упрощать исходное дифференциально-разностное уравнение, а использовать более сложное дискретное преобразование по номеру [37]. Конечный асимптотический приближенный результат для отклонения  $|\eta_n|$  при этом совпадает с приводимым ниже выражением (5.38).

Решение уравнения (5.33) найдем с помощью преобразования Лапласа. В результате преобразований получим следующее замкнутое интегральное представление искомой функции:

$$\begin{aligned}
 R_n(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp\left\{i \frac{n}{2\rho^3} + \zeta\rho\right\} \frac{d\rho}{\rho^3} = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\zeta}{n} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp\left\{n^{1/3}\zeta^{2/3} \left(\frac{i}{2u^2} + u\right)\right\} \frac{du}{u^3}. \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

( $a$  — абсцисса сходимости).

Здесь произведена удобная замена переменной  $u = \rho(\zeta/n)^{1/3}$ . В случае достаточно больших значений величины  $n^{1/3}\zeta^{2/3}$  полученное интегральное выражение (5.35) можно оценить методом перевала [36]. При вычислении удобно трансформировать контур интеграла Лапласа в окружность с центром в начале координат. Положение перевальных точек определяется условием

$$\frac{d}{du} \left( u + \frac{i}{2u^2} \right) = 0. \quad (5.36)$$

Из трех точек перевала, удовлетворяющих кубическому уравнению (5.36), наибольший вклад в оцениваемый интеграл дает  $u_{\text{пер}} = e^{i \frac{\pi}{6}}$ . Окончательно для функции  $R(n, \zeta)$  получаем следующую асимптотическую оценку:

$$\begin{aligned}
 R(n, \zeta) &= \frac{\zeta^{2/3}}{n^{5/6} \sqrt{6\pi}} \exp\left\{ \frac{3}{2} e^{i \frac{\pi}{6}} n^{1/3} \zeta^{2/3} + i \frac{7\pi}{12} \right\} + \\
 &+ O\{n^{-1/3} \zeta^{-2/3}\}. \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

Асимптотическое выражение для относительного поперечного отклонения сгустков находится по соотношению (5.31). Амплитуда функции  $R(n, \zeta)$  определяет значение огибающей максимумов поперечного отклонения

$$|\eta_n| = |R(n, \zeta)| = \frac{\zeta^{2/3}}{n^{5/6} \sqrt{6\pi}} \exp\left\{ \frac{3\sqrt{3}}{4} n^{1/3} \zeta^{2/3} \right\}. \quad (5.38)$$

Аналогичный расчет для задачи с начальной расходимостью пучка приводит к сходному закону развития неустойчивости:

$$|\eta_n^*| = \frac{\xi^{1/3}}{n^{7/6} \sqrt{6\pi}} \exp \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{4} n^{1/3} \xi^{2/3} \right\}. \quad (5.38a)$$

Сравнивая численные значения амплитуд поперечного отклонения, полученные по асимптотической формуле (5.38) и по формуле (5.24), содержащей степенные ряды, видим, что асимптотические соотношения дают хорошую точность вычисления. Так, при значении  $n^{1/3} \xi^{2/3} = 10$  амплитуды поперечного отклонения, вычисленные двумя способами, отличаются не более чем на один процент.

Учет затухания поля приводит к асимптотическим выражениям для относительного отклонения, отличающимся от (5.38) лишь экспоненциальным множителем  $e^{-n\Gamma}$ , описывающим убывание возбужденного поля во времени.

Полученные асимптотические оценки устанавливают аналитический закон развития неустойчивости пучка. Как видно из (5.38), процесс неустойчивости развивается экспоненциально быстро. При этом амплитуда радиального смещения сгустков от оси зависит как от длительности импульса инжекции  $T$ , так и от расстояния  $z$  вдоль ускорителя. Для рассматриваемого случая движения сгустков без ускорения характерна несколько более сильная зависимость поперечного отклонения от расстояния  $[\exp(\xi^{2/3})]$ , чем от длительности импульса  $[\exp(n^{1/3})]$ . Зависимость расширения пучка от свойств ускорителя и, в частности, от значения тока в импульсе также входит (через параметр  $z_0$ ) в показатель экспоненты. При этом заметим, что длительность импульса  $T$  и ток  $I$  входят в показатель экспоненты [см. соотношение (5.38)] в одинаковой степени  $(T^{1/3} I^{1/3})$ , так что достигаемое радиальное отклонение частиц зависит от величины ускоряемого заряда.

Максимально допустимое отклонение электронов ограничено, очевидно, размером апертуры ускорителя ( $r \leq a$ ), поэтому естественно использовать для расчета предельно достижимых параметров требование  $r = r_0 \max |\eta| = a$ . Однако ввиду неопределенности величины  $r_0$  в приводимых ниже количественных оценках

за критические значения параметров ускорителя (например, тока или длительности импульса инжекции) будем принимать такие, при которых происходит увеличение радиального отклонения частиц на один или на два порядка:

$$\lg(\max |\eta_n|) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \lg e \left( \frac{z^2}{z_0^2} n \right)^{1/3} + \lg \left[ \frac{1}{2\sqrt{6\pi}} \times \left( \frac{z^2}{z_0^2} \cdot \frac{1}{n^5} \right)^{1/6} \right] = \begin{cases} 1, \\ 2. \end{cases} \quad (5.39)$$

Следует заметить, что от  $z$ ,  $z_0$ ,  $n$  и аргументов, входящих в  $z_0(I, W$  и др.), радиальное смещение зависит экспоненциально, от начальных условий — линейно.

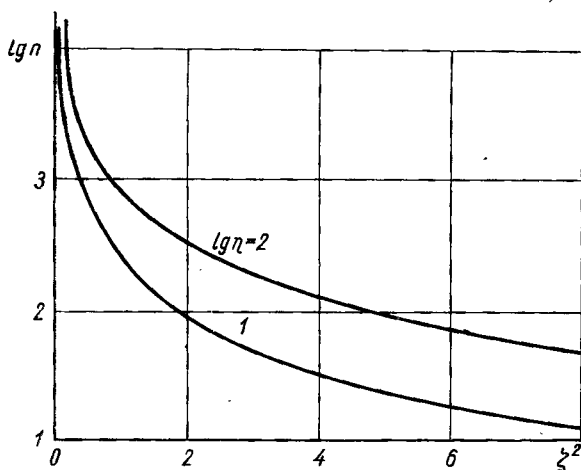


Рис. 5.4. Зависимости  $\lg n$  от  $\zeta^2$ , отвечающие критическим значениям параметров ускорителя.

Асимптотические соотношения (5.39) устанавливают связь переменных  $n$  и  $\zeta$ , соответствующих критическим значениям параметров ускорителя. Графики  $n=n(\zeta^2)$ , удовлетворяющие этим соотношениям, приведены на рис. 5.4. При заданной геометрии ускоряющей секции можно, воспользовавшись приведенными кривыми, найти связь критических значений любых двух величин из  $T$ ,  $I$  и  $l$ , если третья из них фиксирована. Пусть, например, задана максимальная длительность импульса ин-

жекции электронов  $T$ . Тогда по кривым (см. рис. 5.4) определяются значения постоянных  $\xi_T^{1,2}$ , соответствующих условиям  $\lg|\eta_n|=1$  и  $\lg|\eta_n|=2$ , и зависимость критического тока  $I$  от длины ускорителя  $l$ :

$$I = A \frac{(\xi_T^{1,2})^2}{l^2}, \quad (5.40)$$

где постоянная  $A$  определяется геометрией ускоряющей секции [см. выражение (5.7)]. Видно, что зависимость

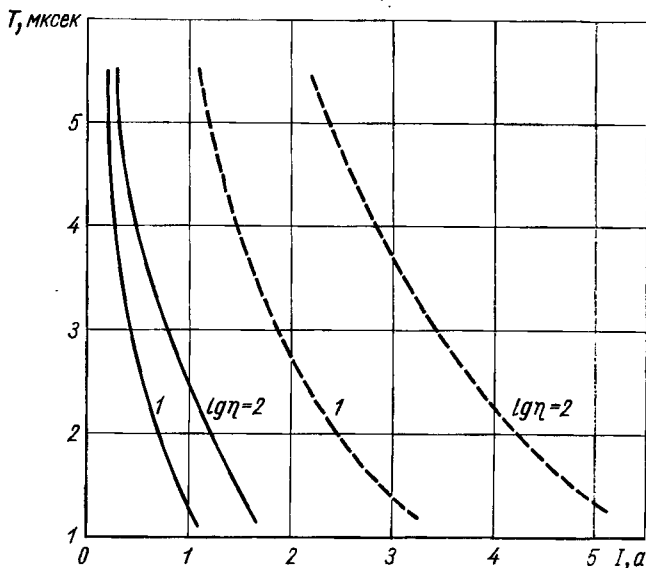


Рис. 5.5. Зависимость критических значений длительности импульса  $T$  от импульсного тока  $I$ :

— с учетом дрейфа электромагнитной энергии вдоль секции;  
 - - - в приближении малой групповой скорости.

$I(l)$  весьма сильная и по мере прохождения сгустками участка ускорителя, на котором выключено ускоряющее поле, быстро развивается неустойчивость пучка.

С помощью параметрических кривых (см. рис. 5.4) нетрудно построить зависимость допустимой длительности импульса от тока в импульсе для ускорителей заданной длины. На рис. 5.5 прерывистой линией изображены такие кривые, построенные для секции ускорителя длиной  $l=1,5$  м и с заданной геометрией (1.38).

Используя аналитические выражения, аналогичные полученным выше, выясним, какое влияние на развитие неустойчивости электронного пучка оказывает действие ускоряющего высокочастотного электрического поля и сторонняя фокусировка, например, стационарным магнитным полем. Для более ясного понимания механизма действия названных факторов и упрощения анализа рассмотрим влияние ускоряющего и фокусирующего полей порознь. Пусть  $\gamma(\xi) = 1 - \varepsilon\xi$  — линейный закон нарастания энергии частиц вдоль ускорителя, тогда уравнение поперечного движения сгустков с учетом изменения энергии частиц допускает прямое решение [30]. Лапласово изображение амплитуды радиального смещения сгустков  $R(p, \xi)$  выражается при этом в виде комбинации цилиндрических функций, а интегральное представление  $R(n, \xi)$  оценивается с помощью метода перевала.

Проще, хотя и несколько менее строго, получить искомое решение (при условии адиабатически медленного ускорения) методом Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ) [см. выражения (5.28) — (5.30)]. Приближенные асимптотические выражения для поперечного отклонения (5.37), (5.38) при этом практически не изменяются [добавляется лишь множитель  $\gamma^{-1/4}(\xi)$ ], но продольная координата в них заменяется на приведенную длину  $\xi \rightarrow \hat{\xi} = \int_0^{\xi} d\xi/\gamma^{1/2}(\xi) = 2(\sqrt{1 - \varepsilon\xi} - 1)/\varepsilon$ , которая зависит от прироста энергии частиц  $\varepsilon$ . При этом допустимые критические значения характеристик ускорителя, как и раньше, определяются при помощи условий (5.39) или по эквивалентным им графикам (см. рис. 5.4).

Определим зависимость критического значения тока в импульсе от длины ускорителя. Заменяя в формуле (5.40) безразмерное расстояние вдоль секции  $\xi$  на приведенную длину  $\hat{\xi}(l, I, \varepsilon)$ , получаем следующее явное соотношение:

$$I = B \left[ \frac{\zeta_T^{1,2} E_0}{\sqrt{1 + C E_0 l} - 1} \right]^2 \approx D \frac{E_0}{l}, \quad (5.40a)$$

где  $B, C, D$  — константы, а  $E_0$  — эффективное ускоряющее поле. Сопоставляя формулы (5.40) и (5.40a) ви-



дим, что рост энергии частиц изменяет закон зависимости допустимого тока от длины: ток теперь обратно пропорционален первой степени протяженности ускорителя. Повышение критического значения тока в ускорителе при использовании ускоряющего поля объясняется, очевидно, увеличением жесткости пучка с возрастанием энергии частиц.

Аналогичным образом можно исследовать и другие характерные зависимости параметров ускорителя. Подробный анализ, как и следовало ожидать, показывает заметное улучшение характеристик ускорителя (т. е. ослабление неустойчивости пучка) при использовании повышенных значений ускоряющего поля и укорочении протяженности секций. Простые зависимости [см., например, формулу (5.40а)] между критическим значением тока, длительностью импульса и расстоянием вдоль ускорителя, следующие из асимптотического выражения для амплитуды поперечного смещения, проверялись экспериментально [17]. Было найдено, что они выполняются довольно точно.

Исследуем влияние фокусировки на развитие поперечной неустойчивости пучка. При наложении внешнего фокусирующего однородного продольного магнитного поля  $H$  уравнения для проекций отклонения сгустка от оси структуры  $z$  на координатные оси в поперечной плоскости оказываются связанными [см. систему уравнений (5.3) при  $\Omega \neq 0$ ,  $\chi = \Gamma = \varepsilon = 0$ ]. При отыскании решения удобно ввести комплексное отклонение в поперечной плоскости

$$\rho_n = \xi_n + i \eta_n \quad (5.41)$$

( $|\rho_n|$  определяет безразмерное радиальное отклонение  $n$ -го сгустка). Система уравнений (5.3) заменяется в этом случае эквивалентным уравнением

$$\ddot{\rho}_n + i \Omega \dot{\rho}_n = - \sum_{k=0}^n \rho_{n-k} \sin k\psi. \quad (5.42)$$

За начальное возмущение пучка примем для простоты лишь отклонение головного сгустка по одной из поперечных осей, например по оси  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \rho_n^0(0) = \xi_n^0(0) = 1; \operatorname{Im} \rho_n^0(0) = \eta_n^0(0) = 0; \\ \dot{\xi}_n(0) = \dot{\eta}_n(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Найдем асимптотическое (справедливое при больших значениях номера  $n$ ) решение задачи (5.42), (5.43). Для этого используем метод, уже описанный выше. Уравнение для комплексной функции  $R(n, \zeta)$ , определяемой соотношением и описывающей амплитуду отгибающей поперечного смещения пучка, при учете фокусирующих сил принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{R}_n + i\Omega \dot{R}_n &= i + \frac{i}{2} \int_0^n R_{n-k} dk; \\ R_n(0) &= R_n'(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

Нетрудно получить решение краевой задачи (5.44) в виде интеграла Лапласа

$$\begin{aligned} R_n(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} R_n(p, \zeta) e^{p\zeta} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\exp\left\{\frac{in}{2p(p+i\Omega)} + \zeta p\right\}}{p^2(p+i\Omega)} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\zeta}{n} \int_C \frac{\exp\left\{n^{1/3} \zeta^{2/3} \left[u + \frac{i}{2u(u+i\mu)}\right]\right\}}{u^2(u+i\mu)} du, \end{aligned} \quad (5.45)$$

где введена новая переменная интегрирования  $u = p(\zeta/n)^{1/3}$  и использована замена

$$\mu = \Omega \left(\frac{\zeta}{n}\right)^{1/3}. \quad (5.46)$$

Интеграл (5.45) при больших значениях  $n$  можно приближенно вычислить методом перевала. Положение перевальных точек определяется решениями алгебраического уравнения четвертой степени:

$$u^2(u+i\mu)^2 - iu + \frac{\mu}{2} = 0. \quad (5.47)$$

Решение (5.47) и последующее вычисление интеграла (5.45), представляющее функцию  $R(n, \zeta)$ , можно проводить, вообще говоря, при любых значениях параметра  $\mu$ . Рассмотрим здесь решения для двух простейших случаев, соответствующих крайним предельным значениям параметра:  $\mu \ll 1$  и  $\mu \gg 1$ . При условии  $\mu =$

$= \Omega (\zeta/n)^{1/3} \sim H (z/nI^2)^{1/3} \ll 1$ , т. е. при сравнительно малых фокусирующих магнитных полях или больших значениях ускоряемого тока или больших длительностях импульса, справедливо следующее соотношение\*:

$$u_{\text{пер}} = u^0 - \frac{i\mu}{2} - \frac{\mu^2}{6} e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad (5.48)$$

где  $u^0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$  — значение перевальной точки в отсутствие фокусировки. Приближенное вычисление интеграла (5.45) приводит к следующей оценке для амплитуды поперечного смещения пучка:

$$\max | \rho_n | = | \rho_{0n} | e^{-\frac{\sqrt{3}}{16} \mu^2 n^{1/3} \zeta^{2/3}} \left( 1 + \frac{\mu}{4} \right), \quad (5.49)$$

где  $| \rho_{0n} |$  — амплитуда поперечного смещения в отсутствие фокусировки, определяемая формулой (5.38). Таким образом, в этом предельном случае фокусирующее действие магнитного поля весьма слабо и развитие неустойчивости приводит к быстрой потере пучка. Отмеченное в работе [10] слабое влияние фокусирующего магнитного поля на развитие неустойчивости пучка, по-видимому, можно объяснить малой величиной использованных в экспериментах продольных магнитных полей.

В предельном случае больших  $\mu$   $\mu = \Omega (\zeta/n)^{1/3} \gg 1$  точки перевала легко найти из уравнения (5.47):

$$u_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\mu}}; \quad u_{3,4} = -i \left( \mu \mp \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \right). \quad (5.50)$$

Искомое нарастающее решение соответствует вкладу в интеграл (5.45), который определяется точкой перевала  $u_1 = 1/\sqrt{2\mu}$ . Асимптотическое приближенное значение амплитуды огибающей поперечного смещения  $| \rho_n |$  определяется выражением

$$\begin{aligned} & | \rho_n | \sim \\ & = \frac{\zeta^{1/3}}{\sqrt{6\pi} n^{5/6}} \left( \frac{18}{\mu} \right)^{1/4} \exp \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{4} n^{1/3} \zeta^{2/3} - \frac{4\sqrt{6}}{9} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \right\} = \\ & = \frac{\zeta^{1/4}}{(2\Omega)^{1/4} \sqrt{\pi} n^{3/4}} \exp \left\{ \sqrt{\frac{2}{\Omega}} n^{1/2} \zeta^{1/2} \right\} + O(n^{-1/3} \zeta^{-2/3}). \end{aligned} \quad (5.51)$$

\* Здесь приведено значение лишь одной из четырех точек перевала, определяющих основной вклад в интеграл (5.45).

Сопоставляя соотношения (5.51) и (5.38), видим, что инкремент нарастания радиального отклонения (или амплитуды отклоняющего поперечного электрического поля  $E_{nr}$ ) при наложении фокусирующего магнитного поля в случае  $\mu \gg 1$  уменьшается приблизительно в  $\sqrt{\mu}$  раз по сравнению с характерным постоянным показателем степени экспоненты, определяющим развитие неустойчивости в отсутствие фокусировки. Предэкспоненциальный множитель в выражении (5.51) также убывает ( $\sim \mu^{-1/4}$ ) по сравнению с амплитудой поперечного отклонения в отсутствие магнитного поля. Как показывают расчеты, проведенные на основании точного решения уравнения (5.47) при произвольном значении параметра  $\mu$ , выражение (5.51) выполняется довольно точно уже для  $\mu \geq 5$ .

При заданных длительности импульса инжекции и величине ускоряемого тока из условия  $\mu \gg 1$  определим значение магнитного поля, начиная с которого фокусировка становится эффективной. Для секции ускорителя с параметрами (1.38) при  $I=1$  а,  $T=5,5$  мксек,  $l=1,65$  м из условия  $\mu=1$  находим

$$H_{\text{мин}} = \frac{W n^{1/3}}{e 120 \pi z_0^2 l^{1/3}} \approx 0,7 \frac{10^9}{\pi} \text{ а/см} \approx 300 \text{ э.}$$

Для двукратного уменьшения инкремента нарастания поперечного отклонения частиц потребуются фокусирующее поле  $H \approx 1200$  э. Таким образом, для ощутимого результата фокусировки необходимы большие значения магнитного поля.

Как видно из асимптотического выражения (5.51), требование  $\lg |\rho_n| = \frac{1}{2}$  устанавливает простую связь между величиной  $\lg n$  и переменной  $\zeta/\Omega$ . Построив графики этих зависимостей, можно получить простые соотношения между различными характеристиками ускорителя ( $I$ ,  $T$ ,  $L$  и  $H$ ), подобные найденным ранее, но с учетом фокусировки.

#### **5.4. РАЗВИТИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА С УЧЕТОМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОЛЯ ВДОЛЬ СТРУКТУРЫ**

В предыдущем разделе мы изучили влияние различных факторов на развитие процесса неустойчивости: затухания поля, прироста энергии частиц, фокусировки пучка. Однако рассмотрение велось все время в при-

ближении «весьма слабо связанных» резонаторов, когда каждая из ячеек, образующих замедляющую структуру, считается независимо возбуждаемой пролетающими зарядами. Связь таких независимых резонаторов учитывается лишь при анализе дисперсионных зависимостей структуры, но не принимается в расчет при определении амплитуды возбуждаемого поля. В настоящем разделе, рассматривая развитие неустойчивости, мы учтем перераспределение электромагнитного поля, возбуждаемого пучком, обусловленное потоком энергии вдоль структуры.

Рассмотрим сначала простейшую задачу для выяснения зависимости характеристик неустойчивости от величины групповой скорости ( $\kappa \neq 0$ ,  $\varepsilon = \Gamma = \Omega = 0$ ). Влияние остальных факторов оценим несколько позже.

Дифференциально-разностное уравнение, описывающее поперечное отклонение сгустка номера  $n$  в плоскости  $yoz$ , имеет вид

$$\frac{d^2 \eta_n}{d\zeta^2} = F_n(n, \zeta) = - \sum_{k=0}^n \eta_{n-k} (\zeta + k\kappa) \sin k\psi \{1 - \Pi(\zeta + k\kappa - L)\}. \quad (5.3г)$$

Пусть начальное возмущение — единичное относительное отклонение головного сгустка  $\eta_n(0) = \delta_n^0$ ,  $\dot{\eta}_n(0) = 0$ .

Уравнение (5.3г), учитывающее отличную от нуля групповую скорость несимметричной волны, более сложно, чем аналогичные уравнения, рассмотренные в предыдущем разделе, так как суммируемые в его правой части функции берутся от смещенного аргумента. Поэтому его нельзя решить способами, примененными ранее. Для дальнейшего анализа оказывается более удобным рассматривать не поперечное смещение сгустков  $\eta(n, \zeta)$ , а поперечную составляющую силы Лоренца, действующей на  $n$ -й сгусток (так как сила пропорциональна амплитуде высокочастотного поля, можно для простоты говорить об отклоняющем поле излучения). Представим эту силу в виде произведения комплексной амплитуды  $E(n, \zeta)$  на осциллирующий в функции номера экспоненциальный множитель:

$$F(n, \zeta) = - \sum_{k=0}^n \eta_{n-k} (\zeta + k\kappa) \sin k\psi \{1 - \Pi(\zeta + k\kappa - L)\} = \\ = \text{Re} \{E(n, \zeta) e^{in\psi}\}. \quad (5.52)$$

Двукратное интегрирование уравнения (5.52) приводит к соотношению, связывающему поперечное смещение с отклоняющим полем:

$$\eta_n(\zeta) = \eta_n(0) + \zeta \dot{\eta}_n(0) + \operatorname{Re} \left\{ e^{in\psi} \int_0^\zeta d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} E(n, \zeta_2) d\zeta_2 \right\}. \quad (5.53)$$

Используя это соотношение, перейдем от уравнения (5.3г) к интегральному уравнению для амплитуды отклоняющего поля:

$$E(n, \zeta) = E^0(n, \zeta) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \int_0^{\zeta+k\kappa} d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} E(n-k, \zeta_2) \times \\ \times \{1 - \Pi(\zeta_2 + k\kappa - L)\} d\zeta_2, \quad (5.54)$$

где

$$E^0(n, \zeta) = i \sum_{k=0}^n e^{-ik\psi} \{1 - \Pi(\zeta + n\kappa - k\kappa - L)\} \times \\ \times \{\eta_k(0) + [\zeta + (n-k)\kappa] \dot{\eta}_k(0)\} \quad (5.55)$$

функция, определяемая начальными возмущениями сгустков, образующих пучок. Функция  $E^0(n, \zeta)$  характеризует начальный уровень отклоняющего поля, генерируемого возмущенными сгустками. Для рассматриваемых начальных условий  $E^0(n, \zeta)$  имеет вид  $E^0(n, \zeta) = i[1 - \Pi(\zeta + n\kappa - L)]$ .

Из уравнения (5.54) и выражения (5.55) следует граничное условие для амплитуды поля излучения на выходе из секции:

$$E(n, \zeta = L) = E^0(n, \zeta = L) = 0. \quad (5.56)$$

Физический смысл однородного условия (5.56) ясен: полное поле излучения пучка должно быть равно нулю на выходе секции из-за «оттока» электромагнитной энергии.

При достаточно больших значениях  $n$  можно заменить суммирование в уравнении (5.54) интегрированием и перейти от интегрального соотношения к более удобному для анализа интегро-дифференциальному уравнению для амплитуды поля излучения:

$$\frac{\partial E(n, \zeta)}{\partial n} - \kappa \frac{\partial E}{\partial \zeta} = \frac{\partial E^0(n, \zeta)}{\partial n} - \kappa \frac{\partial E^0(n, \zeta)}{\partial \zeta} + \\ + \frac{i}{2} \int_0^\zeta (\zeta - \zeta_1) E(n, \zeta_1) d\zeta_1. \quad (5.57)$$

Полученное уравнение следует решать с начальным условием

$$E(0, \zeta) = E^0(0, \zeta) = i \quad (5.58)$$

и однородным краевым условием (5.56).

Уравнение (5.57) можно интерпретировать как своеобразное условие баланса: полное приращение амплитуды поля, складывающееся из изменения поля во времени и изменения его за счет потока энергии вдоль волновода (дифференциальные слагаемые), равно работе, совершаемой над полем движущимися сгустками (интеграл от поля вдоль структуры).

В полученном уравнении для амплитуды излученного поля по сравнению с уравнением (5.3г) переменные разделяются. Ищем решение  $E(n, \zeta)$  в виде

$$E(n, \zeta) = \sum_q a_q e^{s_q n} f_q(\zeta), \quad (5.59)$$

где  $s_q$  — собственные значения, а  $f_q(\zeta)$  — собственные функции, удовлетворяющие уравнению

$$s_q f_q - \kappa \frac{df_q}{d\zeta} = \frac{i}{2} \int_0^\zeta (\zeta - \zeta_1) f_q(\zeta_1) d\zeta_1 \quad (5.60)$$

и однородному краевому условию  $f_q(L) = 0$ , следующему из равенства (5.56). Постоянные коэффициенты разложения по собственным функциям  $a_q$  определяются начальным условием (5.58).

Решение уравнения (5.60) при помощи преобразований Лапласа приводит к замкнутому интегральному представлению для функций

$$\begin{aligned} f_q(\zeta) &= \frac{f_q(0)}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{p^2 e^{s_q p}}{p^3 - \frac{s_q}{\kappa} p^2 + \frac{i}{2\kappa}} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{p^2 e^{s_q p} dp}{(p - p_l) \left[ p^2 - (p + p_l) \left( \frac{s_q}{\kappa} - p_l \right) \right]}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Постоянный множитель  $f_q(\zeta=0)$  здесь считаем равным единице, при этом нормирующую константу включаем в коэффициент  $a_q$ . Подынтегральное выражение в соотношении (5.61) имеет, как видно, три полюса (случай

вырождения для простоты не рассматриваем) в точках, определяемых корнями  $p_i$  характеристического уравнения третьей степени:

$$p^3 - \frac{s_q}{\kappa} p^2 + \frac{i}{2\kappa} = 0. \quad (5.62)$$

Контур интегрирования в выражении (5.61) проводится таким образом, чтобы все особенности подынтегрального выражения лежали слева от него. Вычисляя интеграл (5.61) с помощью вычетов, получаем следующее представление для собственных функций  $f_q(\zeta)$ :

$$f_q(\zeta) = \kappa \sum_{i=1}^3 \frac{p_i e^{p_i \zeta}}{3\kappa p_i - 2s_q}. \quad (5.63)$$

Требую выполнение граничного условия  $f_q(L) = 0$ , получим уравнение, определяющее собственные значения краевой задачи  $s_q$ \*:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{p_i(s_q) e^{p_i(s_q)L}}{3\kappa p_i(s_q) - 2s_q} = 0. \quad (5.63a)$$

Покажем, что найденные собственные функции  $f_q(\zeta)$  обладают своеобразным свойством ортогональности (соотношение ортогональности типа свертки):

$$\int_0^L f_q(L-x) f_s(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq q \\ \Phi_q = \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{2p_k + Lp_k^2}{\left(3p_k - 2\frac{s_q}{\kappa}\right)^2} - \frac{2p_k \frac{s_q}{\kappa}}{\left(3p_k - 2\frac{s_q}{\kappa}\right)^3} \right] e^{p_k L} & \text{при } s = q. \end{cases} \quad (5.64)$$

\* Заметим, что уравнение (5.63a) определяет комплексные величины  $s_q = s_q^1 + i s_q^2$  и эквивалентно системе двух уравнений для действительных величин  $s_q^1$  и  $s_q^2$ .



Воспользовавшись свойством (5.64), определим неизвестные постоянные коэффициенты  $a_q$  в решении (5.59) так, чтобы выполнялось начальное условие (5.58):

$$a_q = i \frac{f_q^1(L)}{\Phi_q}, \quad (5.65)$$

где

$$f_q^1(\xi) = \int_0^{\xi} f_q(\xi) d\xi. \quad (5.66)$$

Соотношения (5.59), (5.63)—(5.66) полностью определяют искомое решение задачи. Для получения количественных данных о характеристиках ускорителя следует вычислить собственные числа задачи  $s_q$ . Уравнение (5.63а) определяет зависимость  $s_q$  от двух параметров задачи: длины ускоряющей секции  $L$  и безразмерного параметра  $\kappa$ .

Удобно ввести «приведенные» собственные значения

$$\sigma_q = \sigma_q^1 + i\sigma_q^2 = s_q \kappa^{-2/3}; \quad (5.67)$$

они оказываются зависящими лишь от одного сложного параметра

$$\Lambda = L\kappa^{-1/3}. \quad (5.68)$$

Собственные значения вычислялись на ЭВМ. Оказалось, что фиксированному значению параметра  $\Lambda = \text{const}$  отвечает дискретная последовательность комплексных собственных чисел  $\sigma_q$ , действительная часть которых ограничена некоторой величиной, а мнимая — положительна.

На рис. 5.6 изображены графики зависимостей действительной  $\sigma_q^1$  (сплошная кривая) и мнимой  $\sigma_q^2$  (штриховая кривая) частей собственных значений от параметра  $\Lambda$  для трех низших индексов  $q=1, 2, 3$ . Нумерация начинается с собственного значения, имеющего наибольшую положительную действительную часть. Видно, что действительная часть собственных чисел  $\sigma_q^1$  (см. рис. 5.6), определяющая зависимость неустойчивости от времени, становится положительной, а процесс — неустойчивым лишь начиная с некоторого значения параметра  $\Lambda$ . В частности, такое пороговое значение параметра для низшего собственного числа —  $\Lambda=2,5$ . С увеличением параметра  $\Lambda$  появляются новые

собственные значения с положительной реальной частью, можно сказать, что с увеличением  $\Lambda$  становятся неустойчивыми более высокочастотные «типы колебаний пучка». При этом с ростом  $\Lambda$  действительные и мнимые части собственных значений краевой задачи стремятся к некоторым асимптотическим величинам (например,  $\sigma_1 \rightarrow \frac{3}{2} e^{-\frac{\pi}{6}}$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$ ). После оты-

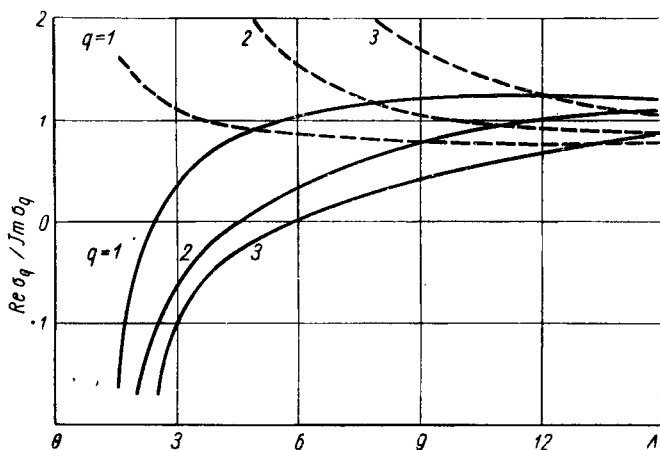


Рис. 5.6. Зависимость собственных значений  $\sigma_q$  от параметра  $\Lambda$ .

скания собственных значений можно, пользуясь формулой (5.63), построить собственные функции задачи.

На рис. 5.7 изображены для примера первые две собственные функции, построенные при значении параметра  $\Lambda=4,5$  (сплошной кривой построена действительная, а штриховой — мнимая часть функций). Видно, что характер изменения собственных функций напоминает поведение собственных колебаний закрепленной струны, причем первая собственная функция наименьшее число раз меняет знак на рассматриваемом интервале  $0 < \xi < L$ . Это показывает соответствие способа нумерации собственных функций общепринятому.

На рис. 5.8 показаны зависимости модуля первой собственной функции  $|f_1(\xi)|$  (а) и модуля двукратного интеграла этой функции  $|f_1^2(\xi)|$  (б) от продольной ко-

ординаты  $\xi x^{-1/3}$ . Первая из кривых определяет приближенный закон распределения амплитуды отклоняющего поперечного поля вдоль секции. Видно, что поле равно нулю у выхода секции (из-за оттока энергии поля из-

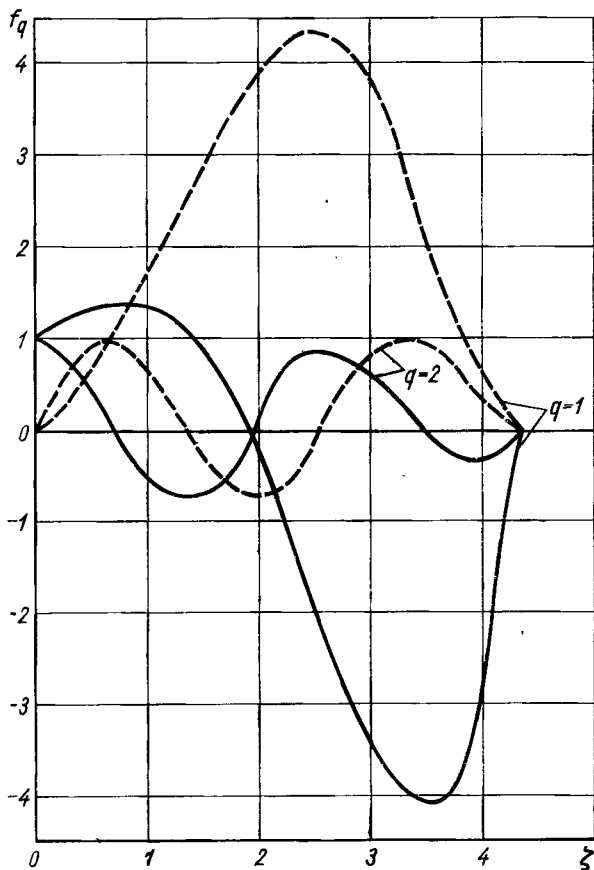


Рис. 5.7. Распределение собственных функций  $f_q (q=1,2)$ .

лученного пучком) и имеет максимум в центральной ее области.

Малое значение поля у входа объясняется слабым отклонением пучка от оси в этой области. Амплитуду отклонения  $n$ -го сгустка от оси можно определить двукратным интегрированием отклоняющего поля [см. фор-

мулу (5.53)]. В результате имеем

$$|\eta_n(\xi)| = \left| \sum_q \frac{f_q^{(1)}(L) f_q^{(2)}(\xi)}{\Phi_q} e^{s_q n} \right|, \quad (5.69)$$

где

$$f_q^{(2)}(\xi) = \int_0^\xi f_q^{(1)}(\zeta) d\zeta.$$

Как показывают расчеты, решение в виде разложения по собственным функциям  $f_q$  обладает настолько быстрой сходимостью,

что определяется практически лишь одним членом суммы (5.59). Таким образом, поле  $E(n)$ , а следовательно, и отклонение  $\eta_n$  зависят от  $n$  экспоненциально ( $E, \eta \sim e^{s_1 n}$ ). Зависимость отклонения пучка от продольной координаты  $\xi$  характеризуется в этом случае функцией  $f_1^{(2)}(\xi)$ .

Амплитуда поперечного отклонения частиц быстро нарастает вдоль секции (см. рис. 5.8). Из сказанного следует, что наибольший интерес представляет исследование первых собственных значений. Сопоставляя полученный результат с данными рассмотрения неустойчивости без учета конечного значения групповой скорости, видим, что развитие процесса описывается качественно разной зависимостью от времени.

Интересно выяснить связь и взаимопереход между этими двумя различными представлениями для поперечного отклонения сгустков  $\eta_n(\xi)$ . Исходя из уравне-

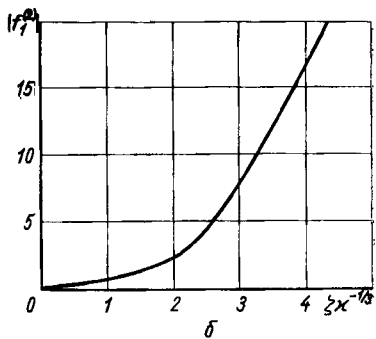
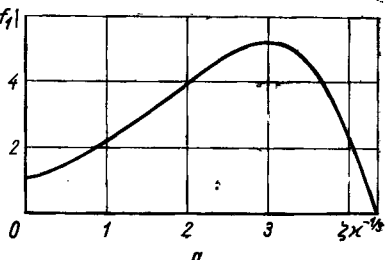


Рис. 5.8. Распределение амплитуды отклоняющего поля ( $|f_1(\xi)|$ ) (а) и поперечное отклонение пучка ( $|f_1^{(2)}(\xi)|$ ) вдоль секции (б).

ния (5.3г), удается получить уточненные асимптотические выражения для отклонения от оси, учитывающие малые, но отличные от нуля значения  $\varkappa$ :

$$|\eta_n(\xi)| = \frac{\xi^{1/3}}{\sqrt{6\pi} n^{5/6}} \exp \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A + \frac{2}{\sqrt{A}} + \frac{2a}{A^2} \right] n^{1/3} \xi^{2/3} \right\}, \quad (5.70)$$

где введенная для сокращения величина  $A = \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 4a} \right]^{2/3}$  определяется через малый параметр задачи

$$a = \frac{n\varkappa}{L} = \frac{v_{групп}}{l} \ll 1. \quad (5.71)$$

Амплитуда смещения  $|\eta_n|$  зависит теперь от времени сложным образом (через параметр  $a$ ) и, следовательно, закон нарастания неустойчивости во времени действительно изменяется.

Одно из условий применимости метода перевала при асимптотической оценке смещения — малость величины  $a$  — имеет ясный физический смысл: в течение длительности импульса инжекции сигнал должен распространиться на расстояние много меньше размера секции. Другим условием применимости уточненных асимптотических формул является достаточная длительность импульса инжекции или большая протяженность секций:

$$nL^2 = n\varkappa^{2/3} \Lambda \gg 1. \quad (5.72)$$

Значение поперечного смещения сгустков, полученное из уточненного асимптотического выражения, совпадает с найденным при расчете по формуле (5.59), если выполняется условие  $a \ll 1$ . В случае  $\Lambda \geq 10$ , когда собственные числа  $s_q$  близки друг к другу и в формуле (5.59) следует учитывать не одно, а несколько экспоненциальных слагаемых, расчет по (5.59) и по асимптотической формуле (5.70) дает близкие результаты; для  $\Lambda < 10$  можно учитывать только один член формулы (5.59). Таким образом, устанавливается непрерывный переход между противоречивыми на первый взгляд законами нарастания неустойчивости во времени для нулевой и конечной групповой скорости.

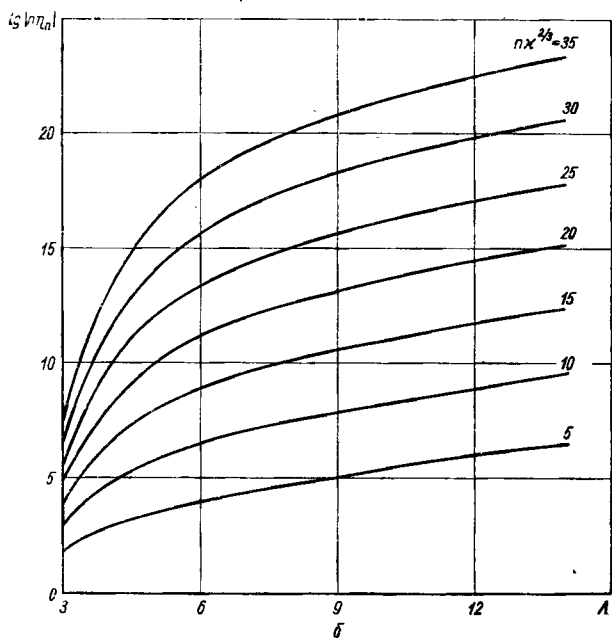
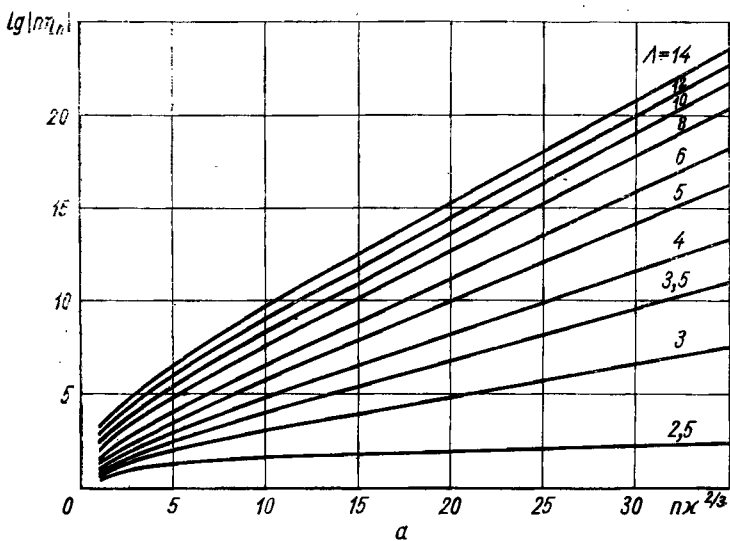


Рис. 5.9. Зависимости амплитуды поперечного отклонения сгустков от длительности импульса  $пх^{2/3}(a)$  и от протяженности секции  $A(б)$ .

Простейшие количественные оценки характеристик ускорителя можно получить, основываясь уже на исследовании инкремента нарастания процесса неустойчивости. В частности, требование обращения инкремента нарастания в нуль (выполняющееся при  $\Lambda=2,5$ ) определяет пороговые значения для величины тока в импульсе  $I$  или протяженности секции  $l$ . Условие достижения инкрементом граничного значения перепишем в более развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{l}{z_0} \left( \frac{z_0}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\beta_{гр1}} \right)^{1/3} &\equiv \left( \frac{\pi I}{cW_i} \right)^{1/3} \cdot \frac{l}{\lambda_1} \left( \frac{E_1^2 \lambda_1^2 c}{P} \right) \equiv \\ &\equiv \left( \frac{\pi I}{cW_i} \right)^{1/3} \cdot \frac{l}{\lambda_1} \varphi \left( \frac{a}{\lambda_1} \right) \leq 2,5. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Условие (5.73) — это в некотором смысле абсолютный критерий, устанавливающий предельные значения характеристик: среднее значение амплитуды отклонения сгустков от оси или амплитуды отклоняющего поля при выполнении этого условия не зависит от длительности импульса инжекции и от начальных условий для электронного пучка. Как следует из соотношения (5.73), устойчивость пучка, описываемая этим абсолютным критерием, не зависит явно от скорости распространения энергии электромагнитного поля в структуре, а определяется лишь параметрами пучка ( $I$  и  $\omega_i$ ), длиной секции  $l$  и величиной коэффициента взаимодействия [см. формулу (1.48) и рис. 1.8]. Из рис. 1.8 видно, что величина  $\varphi(a/\lambda_1)$  для структур с ускорением на  $\pi/2$ -колебании несколько ниже, чем для аналогичных структур с ускорением на виде  $2\pi/3$ ; поэтому первая из структур обладает некоторыми преимуществами в отношении начала процесса неустойчивости. Само же развитие неустойчивости, как мы увидим далее, наоборот, протекает медленнее в ускоряющих структурах с набегом фазы ускоряющего поля на периоде, равном  $2\pi/3$ , в соответствии с меньшей групповой скоростью у несимметричной волны для такой структуры (см. рис. 1.4).

Например, можно вычислить пороговые величины для секции с размерами (1.38) при энергии инжекции  $W_i=2$  Мэв. Как следует из условия (5.73), при импульсном токе  $I=1$  а пороговая длина секции оказывается равной 54 см. Наоборот, зафиксировав длину

секции  $l=165$  см, получим, согласно условию (5.73), значение порогового тока  $I_{\text{пор}}=34$  ма. Если условие (5.73) не выполняется, происходит экспоненциально быстрое развитие неустойчивости электронного пучка. В этом случае за критические значения параметров ускорителя (предельный ток или максимально допустимая длительность импульса) можно принять такие, при которых происходит возрастание радиального отклонения частиц  $\eta_n$  ( $\zeta=L$ ) на один или два порядка:

$$\lg \eta(I_{\text{кр}}, T_{\text{кр}}) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}, \quad (5.74)$$

где  $\eta$  определяется формулой (5.69).

Мы уже приводили (см. рис. 5.8, б) график зависимости амплитуды радиального отклонения сгустков от продольной координаты при значении параметра  $\Lambda=4,5$ . Семейство параметризованных кривых  $\lg|n\eta_n| = \varphi(n\chi^{2/3}, \Lambda=\text{const})$ , построенных в соответствии с выражением (5.69), изображено на рис. 5.9. Видно, что приведенные зависимости близки к линейным для широкой области изменения аргумента. Это соответствует хорошей аппроксимации решения одним экспоненциальным слагаемым (низшая собственная функция). При малых значениях  $n\chi^{2/3}$  зависимость  $\lg|n\eta_n| = \varphi(n\chi^{2/3})$  (рис. 5.9, а) становится явно нелинейной: закон изменения амплитуды отклонения сгустков от оси приближается к ранее исследованному  $\eta_n \approx \exp\{an^{1/3}J^{1/3}\zeta^{2/3}\}$  (см. разд. 5.4). При выполнении условия (5.74) можно построить зависимость критической длительности импульса от тока в импульсе для секции заданной длины, воспользовавшись графиком рис. 5.6. Результаты расчета таких зависимостей приведены на рис. 5.5 (сплошные кривые) вместе со штриховыми кривыми, полученными на основании аналогичного критерия, но без учета групповой скорости. Видно, что учет конечного значения скорости распространения энергии значительно снижает расчетную величину критического тока при той же длительности импульса. Физически этот результат ясен: при отрицательной групповой скорости поле излучения распространяется навстречу движущимся сгусткам, в результате сгустки быстрее попадают в область сильного поля, что и приводит к ускоренному развитию неустойчивости пучка.



Решение задачи с начальным возмущением лишь головного сгустка в пучке при учете затухания поля из-за омических потерь в стенках структуры ( $\Gamma \neq 0$ ) приводит к выражениям для относительного отклонения сгустков (или отклоняющего поля), отличающихся от приведенных выше лишь экспоненциальным множителем  $e^{-n^l}$ . Таким образом, влияние затухания сводится к умножению инкремента нарастания неустойчи-

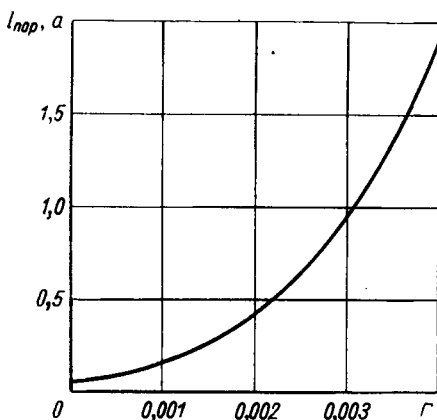


Рис. 5.10. Зависимость порогового тока от затухания поля несимметричной волны.

вости на величину  $\Gamma$ . При расчете критических значений параметров учет затухания не представляет труда. Так, «абсолютный» критерий  $s_1^1 = 0$  заменяется теперь равенством

$$\operatorname{Re} s_1^1 = \Gamma \quad (5.75)$$

или  $\sigma_1^1 = \Gamma \kappa^{-2/3}$ . При  $\Gamma = 0,5 \cdot 10^{-3}$  и  $\kappa = 6 \cdot 10^{-5}$  ( $I = 1 a$ ), например, получаем  $\sigma_1^1 \approx 0,3$ , что соответствует значению  $\Lambda = 3,0$ ; отсюда легко определить предельную длину секции  $l = 65$  см. Можно также, используя графики (см. рис. 5.6) и условие (5.69), связывающее величины  $s_1$  и  $\Lambda$  (так как при  $l = \text{const}$   $\kappa^{2/3}$  связано с  $\Lambda$ ), определить пороговое значение тока для данной секции; оно оказывается равным  $I_{пор} = 123$  ма. Интересно рассмотреть влияние затухания несимметричной волны на пороговый ток для секции заданной длины.

На рис. 5.10 приведена зависимость  $I_{\text{пор}}(\Gamma)$ ; видно, что даже небольшое увеличение затухания в сильной степени повышает пороговый ток. Селективное (в данном частотном диапазоне) затухание можно поэтому рекомендовать как средство подавления неустойчивости пучка. Нетрудно также ввести соответствующие поправки в расчет критических характеристик ускорителя, основанный на «относительном» критерии (5.74).

Некоторые более сложные случаи расчета неустойчивости с учетом распространения энергии вдоль структуры будут рассмотрены в следующем разделе; в заключение настоящего раздела остановимся на характеристиках процесса при положительной групповой скорости несимметричной гибридной волны в структуре. В этом случае ( $\kappa > 0$ ) возможно более простое аналитическое исследование уравнения (5.3г), чем при  $\kappa < 0$ , так как, несмотря на запаздывающие аргументы у функции  $\eta_{n-k}(\xi - k\kappa)$ , допустимо непосредственное применение интегрального преобразования Лапласа. Опуская выкладки [28], приведем окончательные выражения решений для поперечных отклонений сгустков при единичном отклонении первого сгустка пучка как в виде конечного ряда, так и в асимптотическом представлении:

$$\eta_n(\zeta) = \left\{ \begin{aligned} & \delta_n^0 + e^{-n\Gamma} \sum_{m=1}^n \frac{n^{m-1} (\zeta - n\kappa)^{2m} \cos\left(n\psi + m\frac{\pi}{2}\right)}{2^{m-1} (m-1)! (2m)!} \Pi(\zeta - k\kappa), \\ & \frac{(\zeta - n\kappa)^{1/2}}{\sqrt{6\pi} n^{2/6}} \exp\left\{\frac{3\sqrt{3}}{4} n^{1/2} (\zeta - n\kappa)^{2/3}\right\} \Pi(\zeta - n\kappa) \times \\ & \times \sin\left[n\psi + \frac{3}{4} n^{1/2} (\zeta - n\kappa)^{2/3} + \frac{7}{12} \pi\right] (n(\zeta - k\kappa)^2 \gg 1). \end{aligned} \right. \quad (5.76)$$

Вид закона для поперечного смещения практически совпадает с тем, который был получен в разд. 5.3 при рассмотрении задачи без учета дрейфа электромагнитной энергии в структуре, но здесь продольная координата  $\zeta$  заменена запаздывающим аргументом  $(\zeta - n\kappa)$  и появился множитель  $\Pi(\zeta - n\kappa)$ , обращающийся в

нуль при  $\xi > n\kappa$ . Очевидно, что поперечное отклонение сгустков  $\eta_n$  тем меньше, чем сильнее «дрейф» поля (чем больше параметр  $\kappa$ ). Таким образом, переход к структуре с положительной дисперсией для волны  $HE_{11}$  должен способствовать значительному ослаблению неустойчивости электронного пучка.

В работе [8] было предложено подавлять неустойчивость электронного пучка в ускорителе с помощью радиальных разрезов диафрагм замедляющей структуры. Как очевидно, тонкие разрезы диафрагм по линиям  $\varphi = \text{const}$  не должны сильно сказываться на распределении азимутально симметричных токов, отвечающих электромагнитному полю основной ускоряющей волны. В то же время такие разрезы должны сильно возмущать азимутальные составляющие токов, отвечающих несимметричным типам волн. Осуществление разрезов диафрагм нормально направлению токов, соответствующих несимметричным волнам, приводит к уменьшению амплитуды этих токов. Кроме того, разрезы изменяют частотные характеристики. Можно ожидать, что качественно это изменение носит тот же характер, что и при увеличении размеров отверстия в диафрагмах. При этом, как было показано в гл. 1, характер дисперсии гибридной волны существенно изменяется, причем групповая скорость основной паразитной волны  $HE_{11}$  становится положительной. Последнее, как было показано выше, должно приводить к сильному ослаблению неустойчивости.

### 5.5. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МОДЕЛИ

Остановимся кратко на учете действия ускоряющего и фокусирующего полей при одновременном учете конечности групповой скорости (считаем  $v_{гр1} < 0$ ). Рассмотрим также некоторые интересные задачи, отличающиеся более сложным заданием начальных условий, которые описывают состояние системы. Математическая формулировка задачи в этих условиях принципиально не отличается от описаний в предыдущих разделах, хотя и несколько более сложна.

Уравнение для амплитуды поперечной составляющей силы Лоренца при фокусировке пучка продольным магнитным полем ( $\Omega \neq 0$ ) нетрудно получить из соотношения (5.3), вводя комплексное отклонение сгустков

$\rho_n$  (5.41). Используя методику предыдущего раздела ла [см. формулы (5.52) — (5.57)], получаем

$$\frac{\partial E(n, \zeta)}{\partial n} - \kappa \frac{\partial E(n, \zeta)}{\partial \zeta} = \frac{i}{2} \int_0^{\zeta} \frac{e^{-i\Omega \zeta_1}}{\gamma(\varepsilon, \zeta_1)} \int_0^{\zeta_1} e^{i\Omega \zeta_2} \times \\ \times E(n_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (5.57a)$$

Здесь учтено также и изменение энергии частиц  $\gamma(\varepsilon, \zeta)$  вдоль секции. Уравнению (5.57a) для задачи с возмущением лишь одного сгустка соответствуют начальные условия  $E(0, \zeta) = i[1 - \Pi(\zeta - L)]$ . Потребуем, чтобы выполнялось однородное краевое условие  $E(n, L) = 0$ .

Как видно из сопоставления уравнений (5.57a) и (5.57), учет фокусировки и ускорения частиц приводит к усложнению ядра интегрального уравнения для отклоняющего поля. Рассмотрим сначала развитие неустойчивости пучка без ускорения ( $\gamma = 1$ ) в присутствии фокусирующего магнитного поля ( $\Omega \neq 0$ ).

Решение уравнения (5.57a) при  $\varepsilon = 0$ , как и ранее, ищем методом разделения переменных, т. е. в виде

$$E(n, \zeta, \Omega) = \sum_q \hat{a}_q e^{s_q n} \hat{f}_q(\zeta).$$

Теперь, однако, собственные числа  $\hat{s}_q$  и собственные функции  $\hat{f}_q(\zeta)$  оказываются зависящими от величины  $\Omega$ , пропорциональной фокусирующему магнитному полю. Собственные функции  $\hat{f}_q(\zeta, \Omega)$  представим в виде суперпозиции трех экспонент

$$\hat{f}_q(\zeta, \Omega) = \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_{iq} (\rho_{iq} + i\Omega) \exp(\rho_{iq} \zeta)}{3\rho_{iq}^2 - 2\rho_{iq} \left( \frac{\hat{s}_q}{\kappa} - i\Omega \right) - \frac{\hat{s}_q}{\kappa} i\Omega}, \quad (5.77)$$

где  $\rho_{iq}$  — корни кубического характеристического уравнения:

$$\rho_{iq}^3 + \rho_{iq}^2 \left( i\Omega - \frac{\hat{s}_q}{\kappa} \right) - \rho_{iq} i\Omega \frac{\hat{s}_q}{\kappa} + \frac{i}{2\kappa} = 0. \quad (5.78)$$

Собственные значения  $\hat{s}_q$  определяются из однородного краевого условия для собственных функций  $\hat{f}_q(\zeta = L, \Omega) = 0$ , а коэффициенты разложения  $\hat{a}_q$  подби-

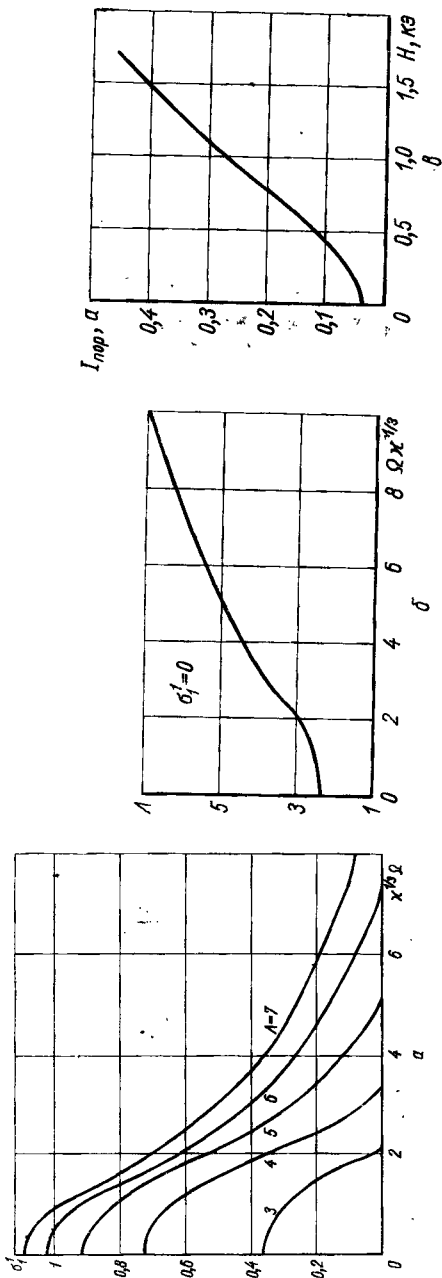


Рис. 5.11. Зависимость порога неустойчивости от силы фокусировки:  $\alpha$  — инкремент нарастания неустойчивости;  $\delta$  — обобщенная кривая для порогового тока;  $\delta$  — пороговый ток в функции фокусирующего магнитного поля.

раются так, чтобы удовлетворялись начальные условия.

Чтобы показать влияние магнитного поля на развитие неустойчивости, приведем зависимости реальной части первого собственного значения (инкремента нарастания процесса)  $\sigma_1^1 = \text{Re}(s_1 \chi^{-2/3})$  от величины  $\Omega \chi^{1/3}$ , рассчитанные для разных значений параметра  $\Lambda = L \chi^{-1/3}$ . Переменная  $\Omega \chi^{1/3}$  пропорциональна фокусирующему магнитному полю. Как видно из рис. 5.11, а, с повышением силы фокусировки ( $\Omega \chi^{1/3}$ ) инкремент нарастания неустойчивости уменьшается и при некотором значении  $\Omega \chi^{1/3}$  (соответствующем довольно большому магнитному полю) обращается в нуль. При этом для подавления неустойчивости в секциях большей протяженности или при большей интенсивности пучка (большие  $\Lambda$ ) естественно требуется более сильная фокусировка. С помощью графиков (см. рис. 5.11, а) нетрудно построить зависимость  $\Lambda = \Lambda(\Omega \chi^{1/3}, \sigma_1^1 = 0)$ , отвечающую условию обращения в нуль инкремента нарастания процесса (порога устойчивости). Такая зависимость, приведенная на рис. 5.11, б, связывает пороговые значения тока пучка, длины секции и фокусирующего поля. На рис. 5.11, в показан график изменения порогового тока в функции фокусирующего поля для секции длиной  $l = 165$  см.

Учет действия ускоряющего поля ( $\gamma \neq \text{const}$ ) приводит к еще большему усложнению рассматриваемой краевой задачи даже при отсутствии фокусировки ( $\Omega = 0$ ). Для частиц с нарастающей энергией ( $\gamma = \gamma(\zeta)$ ) не удастся отыскать явного аналитического выражения собственных функций  $f_q(\zeta)$ . Однако собственные значения задачи можно определить, решая уравнение для функции  $f_q(\zeta)$  численно, например методом Рунге—Кутты, и требуя удовлетворения однородного краевого условия при  $z = l$ . Такое численное интегрирование проведено на электронной вычислительной машине М-20. Полученные результаты позволяют оценить влияние ускоряющего поля на устойчивость пучка.

На рис. 5.12 приведена зависимость инкремента нарастания процесса  $\sigma_1^1$  (т. е. реальной положительной части низшего собственного значения) от параметра  $\epsilon \chi^{1/3}$ , пропорционального приросту энергии на единицу длины; расчет произведен при фиксированных пара-

метрах секции для  $\Lambda=4,5$ . Использование сильных ускоряющих полей способствует замедлению развития неустойчивости (см. рис. 5.12).

В работе [1] описаны эксперименты по стимулированию неустойчивости ВЧ-полем. Можно провести соответствующий теоретический анализ.

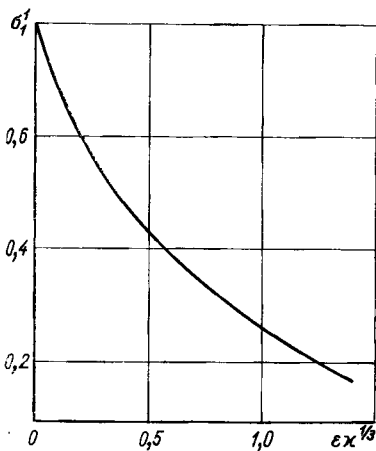


Рис. 5.12. Зависимость инкремента нарастания неустойчивости пучка от величины ускоряющего поля.

Рассмотренные до сих пор обобщения введенной ранее модели процесса математически выражались в усложнении ядра интегрального уравнения, описывающего неустойчивость. Некоторые другие интересные задачи сводятся к решению прежнего простого интегро - дифференциального уравнения (5.3) с заданной правой частью. В первую очередь сюда следует отнести задачу об искусственной стимуляции неустойчивости

при введении в секцию сторожного поля типа  $HE_{11}$ . Уравнения для поперечного отклонения сгустков и для отклоняющего поля имеют в этом случае следующий вид:

$$\frac{d^2 \gamma_n}{d\zeta^2} + \sum_{k=0}^n \eta_{n-k} (\zeta - k\kappa) \sin k\psi \{1 - \Pi(\zeta + \kappa k - L)\} = \frac{eA_0}{W_{Te}} \sin(\psi_0 - n\psi), \quad (5.3д)$$

$$\frac{\partial E}{\partial n} - \kappa \frac{\partial E}{\partial \zeta} - \frac{i}{2} \int_0^{\zeta} (\zeta - \zeta_1) E(n, \zeta_1) d\zeta_1 = \frac{i}{2} e^{i\psi_0} \frac{\zeta^2}{2}, \quad (5.576)$$

где  $A_0$  — амплитуда вводимого стороннего несимметричного поля, а  $\psi_0$  — его фаза.

Величины  $\eta_n(\zeta)$  и  $E(n, \zeta)$  связаны соотношением

$$\eta_n = \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{i\zeta^2}{2} e^{-i\psi_0} + \int_0^\zeta (\zeta - \zeta_1) E(n, \zeta_1) d\zeta_1 \right] e^{in\psi} \right\}. \quad (5.79)$$

Решая уравнение (5.576) с однородными начальными условиями (для невозмущенного пучка), получаем:

$$E(n, \zeta) = e^{i\psi_0} \sum_q a_q (e^{s_q n} - 1) f_q(\zeta), \quad (5.80)$$

что с точностью до несущественного множителя  $e^{i\psi_0}$ , зависящего от фазы стороннего поля, дает прежний результат для экспоненциально нарастающего во времени процесса. Это подтверждает слабую зависимость неустойчивости пучка от конкретного вида вызывающего его начального возмущения.

Обычно линейный ускоритель электронов состоит из отдельных, развязанных по высокой частоте, секций. Поэтому интересно исследовать развитие поперечной неустойчивости пучка в многосекционном ускорителе, что становится особенно важным при сооружении ускорителей на большие энергии (1 Гэв и выше), где устойчивость пучка проявляется уже при импульсных токах в десятки миллиампер [2, 16]. Секционирование ускорителя, очевидно, нарушает положительную обратную связь, обусловленную генерацией пучком гибридной обратной волны  $HE_{11}$ . Поэтому наряду с естественным разбиением на секции, связанным с энергетическими соображениями, можно применять секционирование как меру борьбы с неустойчивостью пучка. Наметим кратко схему расчета развития неустойчивости в многосекционном ускорителе [39].

Для описания процессов в каждой из эквивалентных независимых секций следует, как и раньше, решать уравнение (5.3г) для поперечного отклонения сгустков  $\eta_n(\zeta)$ , причем в качестве заданных начальных отклонений сгустков и расходимости пучка следует принимать распределения этих величин, соответствующие выходу предшествующей секции. Распределение отклонений  $\eta_n(L)$  и расходимость пучка  $\frac{d\eta_n(L)}{d\zeta}$  после прохождения первой секции найдены в разд. 5.4. Запи-



шем их в виде

$$\left. \begin{aligned} \eta_n(L) &= \delta_n^0 + \operatorname{Re} \left\{ i e^{in\psi} \sum_q \frac{f_q^{(1)}(L) f_q^{(2)}(L)}{\Phi_q} e^{s_q n} \right\} \equiv \\ &\equiv \delta_n^0 + \operatorname{Re} \{ i \chi^{2/3} M_1(n) e^{in\psi} \}; \\ \frac{d\eta_n(L)}{d\zeta} &= \operatorname{Re} \left\{ i e^{in\psi} \sum_q \frac{f_q^{(1)}(L) f_q^{(1)}(L)}{\Phi_q} e^{s_q n} \right\} \equiv \\ &\equiv \operatorname{Re} \{ i \chi^{1/3} N_1(n) e^{in\psi} \}. \end{aligned} \right\} \quad (5.81)$$

При решении задачи о неустойчивости с учетом конечной величины групповой скорости от уравнения для отклонений  $\eta_n$  перейдем к уравнению для амплитуды возбуждаемого пучком поля  $E(n, \zeta)$ . Последовательное рассмотрение от секции к секции приводит к неоднородному уравнению для распределения амплитуды поля излучения в  $s$ -й секции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(n, \zeta)}{\partial n} - \chi \frac{\partial E(n, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{i}{2} \int_0^\zeta (\zeta - \zeta_1) E(n, \zeta_1) d\zeta_1 = \\ = \frac{i}{2} \left[ i \chi^{2/3} \sum_{k=1}^{s-1} M_k(n) + i \chi^{1/3} \sum_{k=1}^{s-1} N_k(n) \right]. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Правая часть уравнения учитывает прохождение пучка через предыдущие секции многосекционной структуры.

Решая уравнение (5.76) при начальном условии  $E(0, \zeta) = i [1 - \Pi(\zeta - L)]$  и краевом условии  $E(n, L) = 0$  с помощью преобразования Лапласа по переменной  $n \chi^{2/3}$ , получаем отклонение от оси и угловую расходимость пучка на выходе из  $s$ -й секции:

$$\left. \begin{aligned} \eta_n(sL) &= \delta_n^0 + \operatorname{Re} \left\{ i \chi^{2/3} e^{in\psi} \sum_{k=1}^{s-1} M_k(n) \right\}; \\ \frac{d\eta_n(sL)}{d\zeta} &= \operatorname{Re} \left\{ i \chi^{1/3} e^{in\psi} \sum_{k=1}^{s-1} N_k(n) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.83)$$

Для нахождения величин  $M_k(n)$  и  $N_k(n)$  используются рекуррентные соотношения для их лапласовых изобра-

жений  $M_k(p)$ ,  $N_k(p)$ :

$$\begin{pmatrix} M_k(p) \\ N_k(p) \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} R_1(p) R_0(p) \\ R_2(p) R_1(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{k-1}(p) \\ N_{k-1}(p) \end{pmatrix}, \quad (5.84)$$

где элементы матрицы преобразования  $R_i$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} R_0(p) &= \frac{f^{(2)}(p) f^{(2)}(p)}{f(p)} + 2i [p f^{(2)}(p) - f^{(1)}(p)]; \\ R_1(p) &= \frac{f^{(1)}(p) f^{(2)}(p)}{f(p)} + 2i [p f^{(1)}(p) - f(p)]; \\ R_2(p) &= \frac{f^{(1)}(p) f^{(1)}(p)}{f(p)} - f^{(2)}(p). \end{aligned} \right\} (5.85)$$

Найдем основную количественную характеристику неустойчивости пучка в многосекционном ускорителе — огибающую «амплитуды отклонений» сгустков в  $s$ -й секции:

$$|n\eta_n(sL)| = n\chi^{2/3} \left| \sum_{k=1}^s M_k(n\chi^{2/3}) \right| \equiv n\chi^{2/3} \int A_s(p) e^{n\chi^{2/3} p} dp. \quad (5.86)$$

Эта величина зависит от трех переменных: числа секций  $s$ , длины секции  $L = L\chi^{-1/3}$  и длительности импульса  $n\chi^{2/3}$ . Приведенные выше соотношения определяют выражение этой величины в виде интеграла Лапласа.

Подынтегральная функция  $A_s(p) = \sum_{k=1}^s M_k(p)$  имеет полюса  $s$ -го порядка в точках  $p_q = s_q \chi^{-2/3}$ , удовлетворяющих уравнению  $f(p) = 0$ , т. е. при  $p$ , равных собственным значениям исследуемой краевой задачи. Интеграл (5.86) можно представить как сумму вычетов в этих полюсах. Если величины действительных частей чисел  $p_q$  не слишком близки (это имеет место при значениях  $L \leq 5$ ), точное значение интеграла (5.86) можно приближенно заменить на вклад от полюса с наибольшей реальной частью. Искомые величины вычетов находились численно с помощью вычислительной машины.

Приведем некоторые результаты расчетов. На рис. 5.13 приведены характеризующие развитие неустойчивости зависимости максимального значения амплитуды поперечного отклонения сгустков (в полупологарифмическом масштабе) от различных перемен-

ных. На рис. 5.13,а нанесены кривые, определяющие нарастание поперечного отклонения сгустков  $\lg|n\eta_n|$  во времени (в функции длительности импульса  $n\kappa^{2/3}$ ). Зависимости построены для ускорителей, состоящих из различного числа одинаковых секций ( $N=1, 2, 3, 5$ ) длиной  $\Lambda=L\kappa^{1/3}=4,3$ . Штриховыми кривыми на том же рисунке изображены аналогичные временные зависимости для односекционного ускорителя равной протяженности ( $L_{\text{полн}}=2L, 3L$ ). Видно, что при больших длительностях импульса (за которые успевает проявиться обрыв положительной обратной связи) неустойчивость развивается гораздо быстрее (относительное отклонение на несколько порядков больше при равной длительности импульса) в несекционированном ускорителе. Таким образом, применение коротких раз-

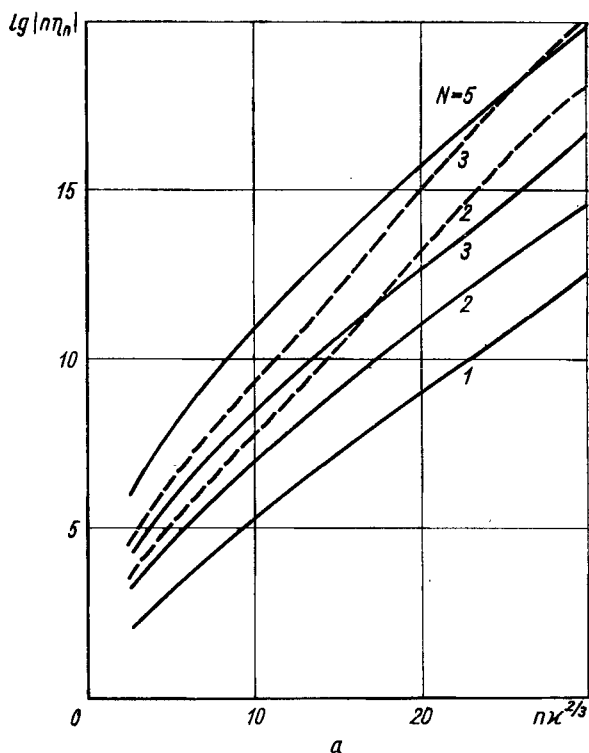
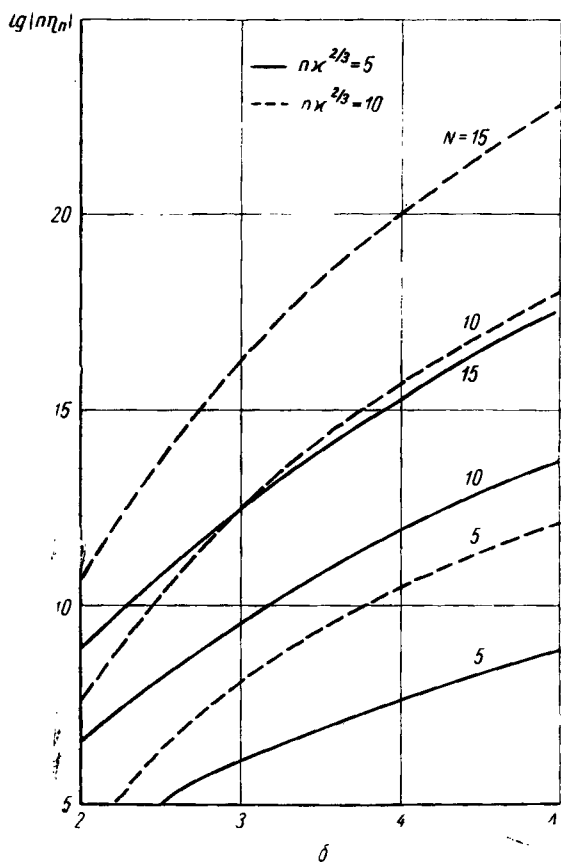


Рис. 5.13. Развитие неустойчивости

вязанных по частоте секций — одно из надежных средств подавления неустойчивости. Рис. 5.13, б иллюстрирует зависимость поперечного отклонения частиц от протяженности секции ускорителя  $\Lambda = L\chi^{2/3}$ , состоящего из заданного числа секций ( $N=5, 10, 15$ ) при фиксированном значении длительности импульса ( $n\chi^{2/3}=5$  и 10).

На рис. 5.14 построены графики зависимости поперечного отклонения сгустков от числа секций в уско-



пучка в многосекционном ускорителе.

рителе  $N$  (длина секции фиксирована,  $\Lambda=4,5$ ) при различных длительностях импульса инжекции ( $n\chi^{2/3}=5, 10, 15, 20$ ).

Проведены также расчеты  $|n\eta_n|$  для «допорогового» значения длины  $\Lambda=2$ . Сделан вывод, что, хотя развитие

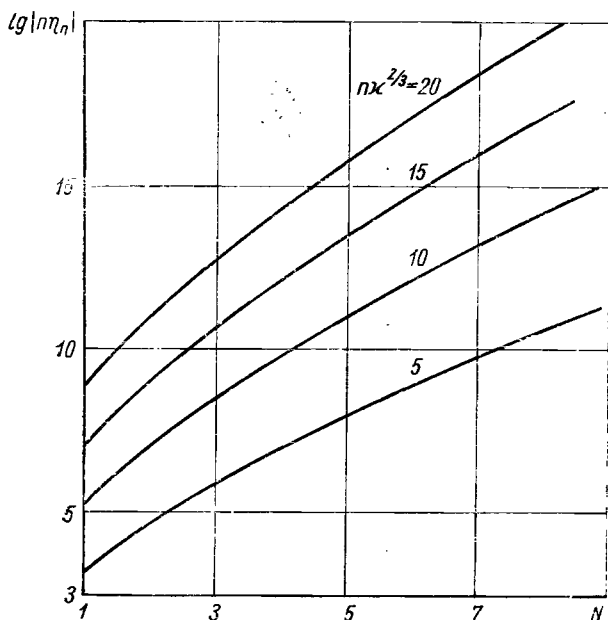


Рис. 5.14. Зависимость амплитуды поперечного отклонения сгустков от числа секций ускорителя.

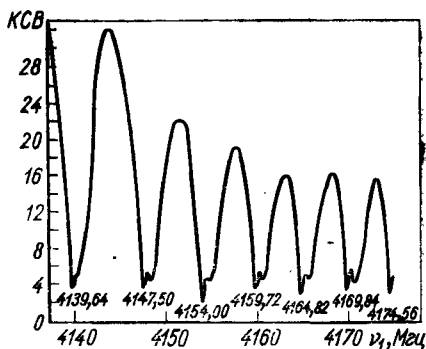
неустойчивости в ускорителе, набранном из таких секций, существенно ослаблено, все же величина амплитуды поперечного отклонения достигает весьма больших значений (например, при  $N > 10-15$ ).

### 5.6. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПУЧКА В СЕКЦИИ С ПЕРЕМЕННОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

В последнем разделе этой главы рассмотрим некоторые особенности развития неустойчивости электронного пучка в ускоряющей секции с переменной геометрией. Как было показано в разд. 4.4, использование секций, в которых основные поперечные размеры

структуры  $a$  и  $b$  изменяются по заданному закону ( $a = a(z)$ ,  $b = b(z)$ ), целесообразно с энергетической точки зрения. Действительно, уменьшение размера отверстия в диафрагме  $a$  приводит к увеличению амплитуды ускоряющего поля, что позволяет компенсировать убыль поля из-за омических потерь, и работы поля по ускорению частиц. Имеются простые качественные соображения, показывающие, что применение таких переменных структур полезно и с точки зрения ослабления неустойчивости. С одной стороны, использование переменной геометрии позволяет уменьшить общую протяженность секций, что способствует ослаблению неустойчивости. С другой стороны, и это представляется еще более важным, релятивистские сгустки, пролетая раз-

Рис. 5.15. Зависимость КСВ несимметричной волны от частоты для ускорителя с постоянным градиентом.



личные участки ускоряющей секции, возбуждают синхронные (т. е. с фазовой скоростью, равной скорости сгустков) электромагнитные поля, имеющие различные частоты в разных сечениях структуры из-за изменения характерных поперечных размеров от сечения к сечению. Некогерентность излучаемых волн несимметричного типа  $HE_{11}$  на протяжении секции должна, очевидно, привести к ослаблению неустойчивости. Резкое повышение порогового тока действительно наблюдалось в ряде ускорителей, состоящих из секций с переменной геометрией (см. работу [9], гл. 4). В результате использование секций с переменной геометрией предусмотрено в ряде сильноточных ускорителей (см. работу [14], гл. 4). Однако, как показал опыт наладки и эксплуатации гигантского ускорителя SLAC в Станфорде, переменность геометрии отдельных секций не уничтожает, а лишь ослабляет неустойчивость: при достаточ-

но большом числе секций вновь наблюдается явление обрыва импульса. Эксперименты по обрыву импульса в Станфордском ускорителе описаны в работе [17], а математический аппарат для детального численного анализа разработан Хелмом [20]. Полный обзор исследований неустойчивости приведен в работах [43—45].

В экспериментах установлено, что развитие неустойчивости сопровождается интенсивной генерацией несимметричной волны типа  $HE_{11}$  на дискретном фиксированном наборе частот, резко выделенных из широкого ( $\approx 200$  МГц) непрерывного спектра, возбуждаемого релятивистским пучком в секции с переменной геометрией. Показано, что эти резонансные значения соответствуют положениям минимумов на частотной зависимости коэффициента стоячей волны (КСВ), носящей квазипериодический характер (рис. 5.15). Частота, отвечающая наибольшей интенсивности возбуждаемого поля, соответствует первому из минимумов КСВ. Следующие резонансные частоты проявляются лишь при значительном повышении тока инжекции. Исследование распределения отклоняющего поля гибридной волны показывает, что интенсивное взаимодействие пучка с полем происходит на относительно коротком (протяженностью  $\approx 3 \lambda_0$ ) участке ускоряющей секции.

Перечисленным экспериментальным фактам можно дать простое качественное истолкование. Сравним возбуждение волн типа  $HE_{11}$  в секции с переменной геометрией для двух частот, которым отвечают два различных значения КСВ. Волна с большим значением КСВ распространяется в секции, претерпевая сильное отражение; в результате амплитуда поля, взаимодействующего с пучком, быстро уменьшается и генерация поля такой волны оказывается менее эффективной, чем для волны с меньшим КСВ. Таким образом, частоты, для которых поле распространяется в структуре с малым отражением, отвечают оптимальным условиям для взаимодействия поля паразитной гибридной волны с пучком. Из-за переменной геометрии структуры такая волна на фиксированной частоте локализована в области, примыкающей к сечению, где она синхронна с пучком (рис. 5.16). Протяженность этой области приблизительно определяется требованием, чтобы дополнительный набег фазы волны относительно частицы был не больше  $\pm \pi/2$  и составлял примерно десять длин резо-

нансных ячеек. Там, где отверстия в диафрагмах понижаются, область эффективного взаимодействия ограничена полосой непропускания для данной частоты. Малость области взаимодействия электронного пучка с полем гибридной волны приводит к сильному ослаблению неустойчивости, которая начинает проявляться при секциях переменной геометрии лишь в многосекционных ускорителях на большие энергии.

Для получения количественных результатов, характеризующих распад пучка в многосекционном ускорителе, набранном из секций переменной геометрии, следовало бы обобщать рассмотрение, приведенное выше. При этом можно было бы считать, что ускоритель состоит из отдельных коротких секций (протяженностью, равной длине участка эффективного взаимодействия), разделенных длинными холостыми промежутками, где частицы движутся свободно под действием импульса, со-

общенного им на активном участке секции. Здесь пучок взаимодействует с

полем гибридной волны, возбуждаемой на резонансной частоте. Фазовую скорость волны можно считать линейно меняющейся, чтобы учесть нарушение условия синхронизма частиц и поля вдоль секции; групповая скорость при этом должна убывать от некоторой конечной величины до нуля на краю участка взаимодействия, где частота становится запредельной. Описанная модель процесса очень сложна для проведения расчетов.

Более простая схема расчета неустойчивости в многосекционном ускорителе, рассматриваемом как цепочка разнесенных цилиндрических резонаторов, в которых осуществляется связь по пучку, была предложена и рассмотрена Пановским [18, 21]. Самосогласованное по поперечному движению уравнение, описывающее смещение сгустков от оси, совпадает при этом по су-

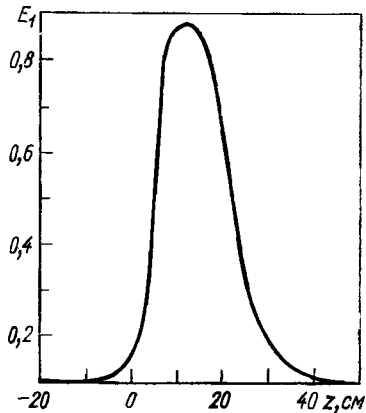


Рис. 5.16. Распределение амплитуды поля несимметричной волны на резонансной частоте.



шеству с уравнением (5.3) при  $\kappa=0$ , т. е. без учета дрейфа поля излучения вдоль структуры. Зависимость поперечного смещения сгустков от продольной координаты и времени определяется соотношениями вида (5.20), (5.29), (5.38). Как отмечалось в работах [17, 25], указанный закон развития неустойчивости вдоль ускорителя и во времени подтверждается и на опыте.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заканчивая описание особенностей линейного ускорения электронов при больших токах пучка, нам хочется подчеркнуть, что данная монография не является исчерпывающим пособием для разработчиков ускорителей. Основная цель книги — это выяснение характера физических процессов, возникающих при существенном повышении тока пучка, и создание на основе понимания этих процессов простых моделей, позволяющих производить правдоподобные количественные оценки. В данной монографии, как правило, проводился анализ традиционных схем линейного ускорения электронов, хотя многое из описанного может быть, по-видимому, использовано и при исследовании некоторых новых идей, связанных с ускорением электронов, например процессов в ускорителях с непрерывной инжекцией пучка [40] или проблемы ускорения протонов, захваченных в электронные кольца [41]. Следует, однако, отметить, что исследование сильноточных ускорителей еще далеко не достигло полной завершенности. В частности, теоретический анализ явления неустойчивости пучка нельзя считать уже вполне законченным. Развитые модельные представления явлений в сильноточных ускорителях, хотя и отражают существенные черты процессов, не учитывают всех сторон этих процессов в реальных ускорителях. Кроме того, сложность математического описания не всегда позволяет получить требуемые количественные результаты в общем случае. Экспериментальные исследования также не дали еще всех нужных ответов о свойствах систем с интенсивными пучками. Эти исследования проводились в основном на уже готовых ускорителях, что зачастую ограничивало возможность опытов, кроме того, результаты экспериментов не всегда представлены в виде, удобном для теоретического анализа. Интенсивное теор-

ретическое и экспериментальное исследование неустойчивостей электронного пучка еще продолжается. В последнее время появились интересные теоретические работы [42, 22, 23]. В работе [42], в частности, исследовано развитие неустойчивости при произвольной начальной модуляции пучка. Можно, однако, уже сейчас подвести некоторые итоги проведенных исследований, указать на основные особенности ускорителей с интенсивными пучками и сформулировать некоторые требования, которых следует придерживаться при конструировании таких ускорителей.

Ускоритель с интенсивным пучком отличается от обычного слаботочного большим потреблением высокочастотной мощности пучком на единице длины. В связи с этим ускоритель на большие токи должен иметь большую мощность источников питания, малую длину секций и большой коэффициент преобразования высокочастотной мощности в энергию ускоренных частиц.

Переход к схеме построения ускорителя из коротких секций целесообразен также и с точки зрения подавления когерентной неустойчивости электронного пучка, вызванной взаимодействием электронов с генерируемыми несимметричными волнами. Стремление подавить неустойчивость диктует также применения ряда других радикальных мер: тщательное центрирование и юстировка инжектирующего устройства, переход к ускорению на новом виде колебаний, модификация ускоряющей структуры (переход к переменной геометрии и разрезание диафрагм), использование фокусировки на всем протяжении ускорителя и систем обратной связи.

Введение системы обратной связи для подавления неустойчивости, как показало исследование в Станфорде, оказывается малоэффективным (из-за неопределенности поляризации и фазы паразитных полей) и требует значительного усложнения и удорожания оборудования ускорителя. Наиболее действенными способами борьбы с неустойчивостью следует, по-видимому, считать использование неоднородных замедляющих структур, уменьшение амплитуды аксиально несимметричных индуцированных токов с помощью радиальных разрезов на диафрагмах и усиление фокусировки вдоль всей траектории пучка. Можно надеяться, что комбинирование перечисленных методов позволит существенно продвинуться в сторону увеличения тока пучка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны, М., «Советское радио», 1957.
2. Вальднер О. А. Линейные ускорители электронов. М., Атомиздат, 1966.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
4. Теория и расчет линейных ускорителей. Сб. статей. М., Госатомиздат, 1962.
5. Chu E. L. The Theory of Linear Electron Accelerators. M. L. Rept., N 140, Stanford University (1951).
6. Johnson K. On the Theory of the Linear Accelerator. J. Griegs Boktrykkeri, Bergen, 1954.

### К главе 1

1. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М., «Советское радио», 1957.
2. Вальднер О. А., Шальнов А. В. Электромагнитные поля в диафрагмированных волноводах линейных электронных ускорителей. М., Госатомиздат, 1963.
3. Владимирский В. В. «Докл. АН СССР», 52, 3, 219 (1946); «Ж. техн. физ.», 17, 1269 (1947).
4. Walkinshaw W. J. Appl. Phys., 20, 6, 634 (1949).
5. Ахнезер А. И., Файнберг Я. Б. «Успехи физ. наук», 44, № 3, 321 (1951).
6. Combe R., Feix M. Nuovo Cimento, 15, 5, 760 (1960).
7. Garaullt Y. Comptes Rend. Acad. Scient., 254, 843 (1962); 254, 1391 (1962); 255, 2920 (1962); 256, 3268 (1963); 256, 4372 (1963).
8. Ломнев С. П. Методы расчета линейных электронных ускорителей. М., Госатомиздат, 1963.
9. Трагов А. Г. В сб. «Ускорители». Вып. III. М., Госатомиздат, 1962, стр. 148.
10. Трагов А. Г. В сб. «Ускорители». Вып. IV. М., Госатомиздат, 1962, стр. 127.
11. Краснушкин П. Е., Ломнев С. П. «Радиотехника и электроника», 6, 1050 (1966).
12. Зыков А. И. и др., «Ж. техн. физ.», 35, 3, 489 (1965).
13. Nahn H. Rev. Scient. Instrum., 34, 10, 1094 (1963).
14. Saxton G. et al. Proc. IEE, 110, 8, 1365 (1963).
15. Bell M., Hereward H. G. Disc-loaded deflecting waveguide. Rept., N 63—33 (1963); Rept., N 65—37 (1965) CERN, Geneva.
16. Воскресенский Г. В. и др. В сб. «Ускорители». Вып. IX. М., Атомиздат, 1967, стр. 77.
17. Авдеев Е. А., Воскресенский Г. В. В сб. «Ускорители». Вып. X. М., Атомиздат, 1968, стр. 52.
18. Авдеев Е. В. и др. В кн. «Труды Всесоюзной конференции по ускорителям». М., ВИНТИ 1969.

19. Вальднер О. А. и др. Справочник по диафрагмированным волноводам. М., Атомиздат, 1969.
20. Watkins D. A. Topics in electromagnetic theory. N. Y., J. Wiley, 1958.
21. Bell J. S. Group velocity and energy velocity in periodic waveguides. Harwell A. V. R. E. Techn. Rept., N 858 (1952).

## К главе 2

1. Слетер Ж. К. «Успехи физ. наук», 37, 3, 316 (1948); 4, 459 (1949).
2. Sarpan D., Akeley E. J. Appl. Phys., 23, N 6, 774 (1952).
3. Swihart J., Akeley E. J. Appl. Phys., 24, N 5, 640 (1953).
4. Chodogow M. et al. Rev. Scient. Instrum., 26, 2 134 (1955).
5. Власов А. Д. «Радиотехника и электроника», 4, 2, 295 (1959).
6. Зыков А. И., Островский Е. К. «Ж. техн. физ.», 33, 7, 892 (1963).
7. Вальднер О. А. В сб. «Ускорители». Вып. VII. М., Атомиздат, 1965, стр. 5.
8. Бурштейн Э. Л., Власов А. Д. «Приборы и техника эксперимента», 5, 26 (1959).
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
10. Бурштейн Э. Л., Соловьев Л. С. Научные труды РАИАН, 2, 2, 1 (1960).

## К главе 3

1. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М., «Советское радио», 1957; «Ж. техн. физ.», 23, 4, 654 (1953).
2. Вайнштейн Л. А. «Ж. техн. физ.», 27, 10, 2340 (1957).
3. Болотовский Б. М. «Успехи физ. наук», 62, 3, 201 (1957); 75, 2, 295 (1961).
4. Ахиезер А. И. и др. «Докл. АН СССР», 73, № 1, 55 (1950).
5. Ахиезер А. И. и др. «Ж. техн. физ.», 25, № 12, 2526 (1955).
6. Ломизе Л. Г. «Ж. техн. физ.», 31, 2, 301 (1961).
7. Nagvie R. V. R. Nature, 162, 890 (1948).
8. Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б. «Успехи физ. наук», 44, 3, 321 (1951).
9. Бурштейн Э. Л., Воскресенский Г. В. «Научные труды РАИАН», 3, 3, 3 (1961).
10. Воскресенский Г. В. «Научные труды РАИАН», 3, 3 36 (1961).
11. Бурштейн Э. Л., Воскресенский Г. В. «Научные труды РАИАН», 3, 3, 74 (1961).
12. Бурштейн Э. Л., Воскресенский Г. В. «Радиотехника и электроника», 7, 12, 2033 (1962).
13. Бурштейн Э. Л., Воскресенский Г. В. «Ж. техн. физ.», 33, 1, 34 (1963).
14. Brillouin L. Wave Propagation and Group Velocity N. Y., Academ. Press, 1960.
15. Karbowiak A. E. Proc. IEE, 104C, N 6, 339 (1957).
16. Van der Waerden. Appl. Sci. Res., 132, N 1, 33 (1951).
17. Янке Е. и др. Специальные функции. М., «Наука», 1964.

## К главе 4

1. Johnson K. Proc. Phys. Soc., **648**, 384, 1062 (1951); On the Theory of the Linear Accelerator. Bergen, 1954.
2. Neal R. V. J. Appl. Phys., **29**, N 7, 1019 (1958).
3. Воскресенский Г. В. «Научные труды РАИАН», **3**, 36 (1961).
4. Бурштейн Э. Л., Воскресенский Г. В. «Научные труды РАИАН», **3**, 3, 94 (1961).
5. Бурштейн Э. Л., Воскресенский Г. В. «Атомная энергия», **13**, 5, 446 (1962).
6. Глазков А. А. В сб. «Ускорители». Вып. 5. М., Госатомиздат, 1963, стр. 55.
7. Вальднер О. А., Селезнев В. Д. В сб. «Ускорители». Вып. VII. М., Атомиздат, 1965, стр. 39.
8. Гришаев И. А., Шендерович А. М., «Ж. техн. физ.», **37**, 11, 2013 (1967).
9. Haimson J. Trans. IEEE, **NS-12**, 3, 996 (1965).
10. Leiss J. E. Trans. IEEE, **NS-12**, 3, 556 (1965).
11. Epsztein B., Mangin J. LASL Linac Conf., Los Alamos, New Mexico, 332 (1966).
12. Neal R. V. Stanford University, Microwave Lab., Rept. N 513. (1958).
13. Левин Л. Современная теория волноводов. М., Изд-во иностр. лит. 1954.
14. Воронков Р. М. и др. В сб. «Линейные ускорители». Харьков, ФТИАН, УССР, 1966, стр. 53; «Атомная энергия», **26**, 4, 378 (1969).

## К главе 5 и заключению

1. Гришаев И. А. и др. «Ж. техн. физ.», **38**, 1, 139 (1968).
2. Artemov V. T. et al. Proc. VI Intern. Conf. High Energy Accelerators. Cambridge (USA), 1967, p. 408.
3. Kelliher M. G., Beadle R. Nature, **187**, N 4743, 1099 (1960).
4. Growley-Milling M. et al. Nature, **191** (1961), N 4787, 483.
5. Nygard J., Post R. Nucl. Instrum. Meth., **11**, N 1, 126 (1961).
6. Bell M. Nature, **198**, N 4877, 75 (1963).
7. Graerttner E. et al. Trans. IRE, **NS-9**, N 5, 23 (1962).
8. Wilson P. B. A Study of Beam Blow-up in Electron Linacs, HELP-297 Rept. (June, 1963), Stanford University.
9. Hirakawa H. J. Appl. Phys., Japan, **3**, N 1, 27 (1964).
10. Jarvis T. R. et al. Proc. IEE, **112**, N 9, 1795 (1965).
11. Johnson H. Proc. IRE, **43**, 684 (1955).
12. Вайнштейн Л. А. «Ж. техн. физ.», **26**, 1, 126 (1956).
13. Bjorkholm J., Hupeman R. Trans. IEEE, **ED-12**, N 5, 281 (1965).
14. Вишняков В. А. и др. «Ж. техн. физ.», **38**, 1, 143 (1968).
15. Вишняков В. А. и др. «Ж. техн. физ.», **36**, 11, 2091 (1966); **37**, 10, 1915 (1967).
16. Panofsky W. K. H., Neal R. V. Science, **152** (June 1966).
17. Altenmueller O. A. et al. LASL Linac Conf. Los Alamos, New Mexico, 267 (1966).
18. Panofsky W. K. H. Transient Behavior of Beam Break-up, SLAC Rept., TN-66-27 (1966).

19. Bander M. Solution of the Beam Break-up Equation, SLAC Rept., TN-66-28 (1966).
20. Helm R. LASL Linac Conf. Los Alamos, New Mexico, 254 (1966).
21. Рапофский W. K. H., Bander M. Rev. Scient. Instrum., 39, N 2, 206 (1968).
22. Gluckstern R. L., Butler H. S. Trans. IEEE, NS-12, N 3, 607 (1965).
23. Gluckstern R. L. et al. LASL Linac Conf. Los Alamos, New Mexico, 281 (1966).
24. Visscher W. M. LASL Linac Conf. Los Alamos, New Mexico, 284 (1966).
25. Farinholz E. V. et al. Proc. VI Intern. Conf. High Energy Accelerators. Cambridge (USA), 90 (1967).
26. Воскресенский Г. В. и др. «Атомная энергия», 20, № 1, 3 (1966).
27. Voskresensky G. V., Koroza V. I. Proc. V Intern. Conf. High Energy Accelerators (Frascati, 1965), 645 (1966).
28. Воскресенский Г. В. и др. В сб. «Ускорители». Вып. VIII. М., Атомиздат, 1966, стр. 136.
29. Воскресенский Г. В. и др. В сб. «Ускорители». Вып. IX. М., Атомиздат, 1967, стр. 83.
30. Серебряков Ю. Н. В сб. «Ускорители». Вып. IX. М., Атомиздат, 1967, стр. 93.
31. Воскресенский Г. В., Серебряков Ю. Н. «Научные труды РАИАН», 9, 4, 72 (1967).
32. Voskresensky G. V., Serebryakov Y. N. Proc. VI Intern. Conf. High Energy Accelerators. Cambridge (USA), A 46 (1967).
33. Воскресенский Г. В., Серебряков Ю. Н. «Атомная энергия», 25, 6, 507 (1968).
34. Воскресенский Г. В., Серебряков Ю. Н. В сб. «Ускорители». Вып. X. М., Атомиздат, 1968, стр. 130.
35. Серебряков Ю. Н. и др. «Ж. вычислит. математики и матем. физ.», 9, 3 (1969).
36. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М., Изд-во иностр. лит., М., 1961.
37. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., «Наука», 1965.
38. Levin V. M. et al. Proc. VI Intern. Conf. High Energy Accelerators. Cambridge (USA), A39 (1968).
39. Воскресенский Г. В., Серебряков Ю. Н. В сб. «Ускорители». Вып. XI. М., Атомиздат, 1969, стр. 21. В кн. «Труды Всесоюзного совещания по ускорителям». ВИНТИ, 1969.
40. Wilson P. V., Chambers E. E. Proc. VI Intern. Conf. High Energy Accelerators. Cambridge (USA), 378 (1967).
41. Векслер В. И., Саранцев В. П. и др. «Атомная энергия», 24, 4, 317 (1968).
42. Курилко В. И. «Ж. техн. физ.», 38, 1, 119 (1968).
43. Loew G. A. Trans. IEEE, NS-14, 5, 529 (1967).
44. Loew G. A. et al. Proc. VI Intern. Conf. High Energy Accelerators. Cambridge (USA), 90 (1968).
45. Loew G. A. et al. В кн. «Труды VII Международной конференции по ускорителям, Ереван, 1969».

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| <i>Введение</i> . . . . .  | 3   |
| <b>Глава 1. Электромагнитные поля в волноводе, периодически нагруженном диафрагмами</b> . . . . .                    | 8   |
| 1.1. Собственные волны волновода . . . . .   | 8   |
| 1.2. Улучшение сходимости метода. Дисперсионные свойства структур . . . . .  | 17  |
| 1.3. Квадратичные (энергетические) характеристики собственных волн . . . . .   | 29  |
| 1.4. О свойствах собственных волн . . . . .  | 33  |
| <b>Глава 2. Динамика электронов в ускорителях при малой интенсивности пучка</b> . . . . .                            | 39  |
| 2.1. Основные уравнения . . . . .  | 39  |
| 2.2. Продольное движение . . . . .   | 42  |
| 2.3. Поперечное движение . . . . .   | 45  |
| <b>Глава 3. Излучение отдельных заряженных частиц или сгустков, движущихся в замедляющей структуре</b> . . . . .     | 49  |
| 3.1. Возбуждение волновода точечным зарядом . . . . .  | 49  |
| 3.2. Возбуждение волновода с диэлектрическим заполнением сгустком зарядов и системой сгустков . . . . .              | 58  |
| 3.3. Излучение заряда в полубесконечной замедляющей структуре . . . . .  | 66  |
| 3.4. Энергетический расчет поля излучения равномерно движущихся заряженных частиц в замедляющих структурах . . . . . | 78  |
| 3.5. Поле излучения пучка частиц в замедляющей структуре . . . . .   | 84  |
| <b>Глава 4. Основные особенности линейного электронного ускорителя на большие токи</b> . . . . .                     | 90  |
| 4.1. Электрическое поле в ускорителе . . . . .   | 90  |
| 4.2. Стационарный режим . . . . .  | 95  |
| 4.3. Переходный режим . . . . .  | 101 |
| 4.4. Импульсный режим . . . . .  | 106 |
| 4.5. Энергетический спектр на выходе сильноточного ускорителя . . . . .  | 110 |
| 4.6. Линейный электронный ускоритель с постоянной амплитудой ускоряющего поля. . . . .                               | 114 |
| 4.7. Расчет параметров ускорителя . . . . .  | 122 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 5. Поперечная неустойчивость пучка в линейных электронных ускорителях . . . . .</b>                        | <b>125</b> |
| 5.1. Общая характеристика явления . . . . .   | 125        |
| 5.2. Исходные модельные представления и уравнение поперечного смещения электронного пучка . . . . .                 | 130        |
| 5.3. Анализ поперечной неустойчивости пучка для структур с малой групповой скоростью несимметричной волны . . . . . | 138        |
| 5.4. Развитие поперечной неустойчивости пучка с учетом распространения поля вдоль структуры . . . . .               | 155        |
| 5.5. Некоторые обобщения модели . . . . .   | 170        |
| 5.6. Неустойчивость пучка в секции с переменной геометрией . . . . .  | 180        |
| <i>Заключение . . . . .</i>   | <i>184</i> |
| <i>Литература . . . . .</i>   | <i>186</i> |



*Бүрштейн Эльхонн Лейбович,  
Воскресенский Георгий Викторович*

**Линейные ускорители электронов  
с интенсивными пучками**

Редактор Л. В. Белова

Худож. ред. А. С. Александров

Обложка художника М. И. Прокофьева

Технический редактор С. А. Бирюкова

Корректор М. И. Дунаевская

Сдано в набор 31/VII 1969 г.

Подписано к печати 29/I 1970 г. Т-03041

Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub> Бумага типографская № 2

Усл. печ. л. 10,08 Уч.-изд. л. 10,07 Тираж 1500 экз.

Цена 1 р. 16 к. Зак. изд. 1985 Зак. тип. 426

Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7.

Московская типография № 6 Главполиграфпрома

Комитета по печати при Совете Министров СССР

Москва, Ж-88, 1-я Южно-портовый пр., 17.