

Дж.Д.Бьёркен, С.Д.Дрелл
РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ
т. 2. Релятивистские квантовые поля

Настоящая книга является вторым томом двухтомника по квантовой теории. В нем последовательно и продуманно изложены основы квантовой теории поля, а также ряд специальных вопросов, включающий методы ренорм-группы и методы дисперсионных соотношений.

В конце каждой главы помещены задачи, способствующие пониманию изложенного.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава 11. Общий формализм	9
§ 65. Следствия полевого описания	10
§ 66. Канонический формализм и квантование для частиц	12
§ 67. Канонический формализм и квантование полей	18
§ 68. Преобразования симметрии и законы сохранения	25
§ 69. Другие формулировки	31
Задачи	31
Глава 12. Поле Клейна — Гордона	33
§ 70. Квантование и интерпретация в терминах частиц	33
§ 71. Симметрия состояний	40
§ 72. Измеримость поля и принцип микропричинности	42
§ 73. Вакуумные флуктуации	43
§ 74. Заряженное скалярное поле	45
§ 75. Фейнмановский пропагатор	49
Задачи	51
Глава 13. Вторичное квантование поля Дирака	52
§ 76. Квантовая механика n тождественных частиц	52
§ 77. Представление чисел заполнения для фермионов	54
§ 78. Теория Дирака	63
§ 79. Разложение в импульсном пространстве	65
§ 80. Релятивистская ковариантность	71
§ 81. Фейнмановский пропагатор в теории Дирака	73
Задачи	74
Глава 14. Квантование электромагнитного поля	75
§ 82. Введение	75
§ 83. Квантование	76
§ 84. Ковариантность и процедура квантования	80
§ 85. Разложение в импульсном пространстве	82
§ 86. Спин фотона	85
§ 87. Фейнмановский пропагатор для поперечных фотонов	86
Задачи	89
Глава 15. Взаимодействующие поля	90
§ 88. Введение	90

§ 89. Электромагнитное взаимодействие	90
§ 90. Лоренцева инвариантность и инвариантность при трансляциях	95
§ 91. Разложение в импульсном пространстве	96
§ 92. Собственная энергия вакуума; нормальное упорядочивание	98
§ 93. Другие взаимодействия	101
§ 94. Симметрия взаимодействий	104
§ 95. Сильная связь между π -мезонами и нуклонами	106
§ 96. Свойства симметрии странных частиц	108
§ 97. Несобственные преобразования симметрии	115
§ 98. Четность	115
§ 99. Зарядовое сопряжение	120
§ 100. Обращение времени	126
§ 101. СРТ-теорема	132
Задачи	136
Глава 16. Вакуумные средние и S-матрица	138
§ 102. Введение	138
§ 103. Свойства физических состояний	138
§ 104. In-поля и in-состояния; асимптотическое условие	141
§ 105. Спектральное представление для вакуумного среднего от коммутатора и функция распространения скалярного поля	146
§ 106. Out-поля и out-состояния	150
§ 107. Определение и общие свойства S-матрицы	152
§ 108. Редукционная формула для скалярных полей	155
§ 109. In- и out-поля и спектральное представление в теории Дирака	159
§ 110. Редукционная формула для дираковских полей	168
§ 111. In- и out-состояния и редукционная формула для фотонов	172
§ 112. Спектральное представление для фотонов	175
§ 113. Связь спина со статистикой	179
Задачи	181
Глава 17. Теория возмущений	182
§ 114. Введение	182
§ 115. S-матрица	183
§ 116. Теория возмущений для τ -функций и S-матрица	187
§ 117. Теорема Вика	190
§ 118. Графическое представление	193
§ 119. Вакуумные амплитуды	196
§ 120. Спин и изотопический спин; π -мезон-нуклонное рассеяние	198
§ 121. π - π -рассеяние	201
§ 122. Графическая техника в квантовой электродинамике	206
§ 123. Излучение мягких фотонов и инфракрасная катастрофа	211
Задачи	216
Глава 18. Дисперсионные соотношения	217
§ 124. Причинность и соотношения Крамерса — Кронига	217

§ 125. Приложение к физике высоких энергий	221
§ 126. Аналитические свойства вершинных диаграмм в теории возмущений	224
§ 127. Обобщение на случай произвольных диаграмм и аналогия с электрическими цепями	228
§ 128. Пороговые особенности функций распространения	235
§ 129. Особенности произвольных диаграмм и правила Ландау	239
§ 130. Аналитическая структура вершинных диаграмм; аномальные пороги	244
§ 131. Дисперсионные соотношения для вершинной функции	250
§ 132. Сингулярности амплитуд рассеяния	253
§ 133. Применение к π -мезон-нуклонному рассеянию вперед	261
§ 134. Аксиоматический вывод дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния вперед	271
§ 135. Динамические расчеты π — π -рассеяния с использованием дисперсионных соотношений	278
§ 136. Электромагнитная структура пиона	287
Задачи	290
Глава 19. Перенормировки	292
§ 137. Введение	292
§ 138. Свойства диаграмм собственной энергии и вершинных частей и электрон-позитронное ядро	293
§ 139. Интегральные уравнения для собственно-энергетической и вершинной частей	299
§ 140. Интегральные уравнения для t -функций и ядра K ; скелетные графики	302
§ 141. Топологическая теорема	307
§ 142. Тождество Уорда	308
§ 143. Определение перенормировочных констант и правила перенормировки	312
§ 144. Сводка формул: перенормированные интегральные уравнения	319
§ 145. Аналитическое продолжение и промежуточная перенормировка	322
§ 146. Степень расходимости и критерий сходимости	327
§ 147. Доказательство конечности перенормируемой теории	341
§ 148. Пример перенормировки заряда в четвертом порядке	357
§ 149. Низкоэнергетическая теорема для комптоновского рассеяния	370
§ 150. Асимптотическое поведение фейнмановских амплитуд	378
§ 151. Ренормализационная группа	382
Задачи	390
Приложение В. Коммутаторы и функции распространения	392
Дополнения редактора перевода	396
Литература	401
Предметный указатель	405

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой перевод второго тома двухтомной монографии известных американских физиков-теоретиков Джеймса Бьёркена и Сиднея Дрелла. На английском языке книга появилась в 1965 году и с тех пор является за рубежом одним из основных учебников по квантовой теории поля. В большинстве статей по теории элементарных частиц, если авторам надо сослаться на основы теории, обозначения или нормировки, которые они используют, они обычно ссылаются на книгу Бьёркена и Дрелла. Книга играет роль как бы своеобразного эталона. Многочисленные ссылки на эту книгу содержатся и в целом ряде монографий, написанных за рубежом уже после ее выхода, и переведенных на русский язык в 70-х годах. Поэтому настоящее издание монографии Бьёркена и Дрелла является более чем желательным. Инициатором этого издания и редактором перевода был профессор Владимир Борисович Берестецкий (1913—1977) — автор известных монографий по квантовой электродинамике и квантовой теории поля, ставших настольными книгами физиков-теоретиков во всем мире. Владимир Борисович высоко ценил книгу Бьёркена и Дрелла и считал, что ее перевод на русский язык заполнит существенный пробел в отечественной литературе.

Первый том монографии представляет собой введение в технику работы с фейнмановскими диаграммами. При этом диаграммы вводятся на основе наглядных физических соображений и упор делается на то, чтобы продемонстрировать, каким образом, используя их, можно количественно описать широчайший круг явлений физики элементарных частиц.

Второй том содержит теоретико-полевое обоснование тех наглядных и простых правил, которые в первом томе формулировались на полуинтуитивном уровне. Он начинается с квантования свободных полей, затем описывается взаимодействие между квантованными полями. Заканчивается книга рассмотрением процедуры перенормировок в произвольном порядке теории возмущений и изложением основных идей ренормгруппы. Наряду с этим в книге большое внимание уделено S -матричному

подходу, не использующему теорию возмущений: дисперсионным соотношениям, особенностям Ландау (исследованию которых была посвящена диссертация Бьёркена), применению дисперсионных соотношений к $\pi - N$ - и $\pi - \pi$ -рассеянию.

Со времени написания книги теория элементарных частиц изменилась до неузнаваемости. Центральными объектами в ней стали калибровочные поля и механизмы спонтанного нарушения симметрии, о которых в книге ничего не говорится. Важную роль в этом преобразовании облика современной физики элементарных частиц сыграли авторы книги. Достаточно упомянуть о бьёркеновском скейлинге, чарме, модели партонов Фейнмана — Бьёркена, механизме образования лептонных пар в столкновении адронов, предложенном Дреллом и Яном, работах Дрелла, посвященных моделям мешков и решеток.

Было бы совершенно неправильно думать, что новейшее развитие теоретической физики делает неважными или неинтересными те вопросы, которым посвящена эта книга. Новейшие теоретические идеи и открытия, несмотря на всю их необычность, это новые ветви все той же квантовой теории поля. Чем интенсивнее будут разрастаться эти ветви, тем чаще все более широкому кругу физиков придется обращаться к основам теории, которым посвящена эта книга.

Л. Б. Окунь

ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

В первом томе этой книги при изложении метода функций распространения и при выводе практических правил для вычисления (в рамках теории возмущений) взаимодействия релятивистских частиц использовались интуитивные аргументы, основанные на принципе соответствия. Теперь мы обратимся к систематическому выводу этих правил, используя формализм квантовых полей. Наша цель заключается в том, чтобы, во-первых, «заштопать все дыры» в теории пропагаторов, и, во-вторых, развить метод решения задач, для которых неприменима теория возмущений. Примером таких задач является расчет реакций с участием сильно связанных мезонов и нуклонов.

Идея нового метода лучше всего иллюстрируется на примере электромагнитного поля. Потенциалы $A^\mu(x)$ удовлетворяют уравнениям Максвелла и описывают динамическую систему с бесконечным числом степеней свободы. Под этим мы подразумеваем то, что в каждой точке пространства поле $A^\mu(x)$ можно рассматривать как независимую обобщенную координату. Для перехода от классической теории к квантовой необходимо, согласно общим принципам, сформулированным в главе 1¹⁾, заменить координаты и соответствующие обобщенные импульсы на операторы, действующие в гильбертовом пространстве допустимых физических состояний, а также наложить на эти операторы квантовые условия. В результате мы приходим к канонической процедуре квантования, представляющей собой непосредственное обобщение метода квантования в нерелятивистской механике на случай полевых функций, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям, выведенным из лагранжиана. При этом возникает интерпретация электромагнитного поля в терминах частиц — в смысле боровского принципа дополнительности.

¹⁾ Ссылки на гл. 1—10 и соответствующие формулы означают ссылки на первый том этой книги (М., «Наука», 1978) (*прим. перев.*).

Поскольку фотоны естественным образом возникают при квантовании максвелловских полей, естественно ожидать, что и другие частицы, наблюдаемые в природе, также можно связать посредством аналогичной процедуры с соответствующими полями. Основываясь на этой идее, Юкава предсказал существование π -мезонов из самого факта существования ядерных сил. И наоборот, с этой точки зрения естественно связать с каждой наблюдаемой частицей поле $\varphi(x)$, удовлетворяющее некоторому полевому уравнению. После же квантования возникает интерпретация поля φ в терминах частиц.

При квантовании поля необходимо сначала определить импульсы $\pi(x)$, сопряженные полевому координатам $\varphi(x)$. Это удобно сделать, используя лагранжиан, из которого выводятся уравнения для каждого из полей $\varphi(x)$ и их сопряженных импульсов. Проквантовав поля с помощью коммутационных соотношений гл. I, мы получим кванты, подчиняющиеся бозе-статистике, например фотоны. Оказывается, что для описания в теории квантованных полей ферми-частиц, удовлетворяющих принципу исключения, достаточно только заменить коммутационные соотношения на антикоммутационные. Таким образом, мы получаем единый метод описания обоих сортов частиц. Другим преимуществом лагранжевого формализма является то, что, как мы скоро убедимся, он непосредственно приводит к законам сохранения.

§ 65. Следствия полевого описания

Прежде чем перейти к детальному рассмотрению квантования классических полей, имеет смысл, возможно, обсудить отличительные черты намеченной программы. Прежде всего, мы имеем дело с локальной волновой теорией. Полевые функции являются непрерывными функциями непрерывных же переменных x и t , поэтому изменение поля в точке x определяется его свойствами в соседней точке, бесконечно близкой x .

Для большинства волн (например, звуковых или волн упругих колебаний струн и мембран) такое описание представляет идеализацию, справедливую для расстояний, много больших, чем некоторая характерная длина, которая определяет масштаб зернистости вещества. Для меньших расстояний эти теории существенно модифицируются.

Электромагнитное поле представляет замечательное исключение. До тех пор, пока специальная теория относительности не устранила необходимость введения механистической интерпретации, физики потратили немало усилий для того, чтобы получить описание поля излучения в терминах механического движения. Однако когда отказались от понятия «эфира», в котором

распространяется свет, стало естественным распространить основные идеи теории электромагнитного поля для описания наблюдаемых волновых свойств электрона и сопоставить ему свое поле $\psi(x)$. Действительно, не существует никаких причин считать, что электронная волна $\psi(x, t)$ распространяется в каком бы то ни было эфире. Однако предположение о том, что волновое описание, справедливое для «больших» расстояний (т. е. атомных длин $\approx 10^{-8}$ см), применимо для сколь угодно малых расстояний (например, меньших, чем ядерные длины $\approx 10^{-13}$ см), представляет по существу ничем не оправданную экстраполяцию существующих экспериментальных данных.

Мы уже видели, что в релятивистской теории предположение о справедливости полевого описания для сколь угодно малых пространственно-временных интервалов приводит — в теории возмущений — к расходящимся выражениям для собственной энергии электрона и «голого» заряда. Теория перенормировок позволяет обойти трудности с расходимостями, что, возможно, указывает на недостатки теории возмущений. Тем не менее распространено мнение, что эти расходимости симптоматичны и не связаны с применением теории возмущений, а указывают скорее на хронический недостаток теории при описании малых пространственно-временных интервалов.

Естественно задать вопрос, почему локальные теории, т. е. теории полей, которые подчиняются дифференциальным законам распространения волн, повсеместно признаны и столь широко используются. Для этого существуют несколько причин, и важнейшая из них та, что именно в рамках полевой теории было получено большое число предсказаний, согласующихся, как уже отмечалось в первом томе, с экспериментом. Однако основная причина очень проста: не существует какой-либо приемлемой формы теории, которая обходилась бы без дифференциальных уравнений.

Теория релятивистских частиц должна с очевидностью быть очень сложной с математической точки зрения. Из-за существования процессов рождения и уничтожения она с самого начала есть задача многих тел. В настоящее время известно только, как построить приближенное решение этой задачи, поэтому предсказания любой теории подобного рода неполны и в лучшем случае не лишены неопределенностей.

В этой ситуации самое разумное — это сохранить при построении новой теории те общие принципы, которые ранее применялись для более ограниченного класса задач. В этом случае для формулировки правил квантования мы должны исходить из существования гамильтониана H . Поскольку H генерирует, согласно уравнению Шредингера, бесконечно малые временные смещения, мы приходим к дифференциальному описанию

временной зависимости, а тогда инвариантность относительно лоренцевых преобразований требует, чтобы координатная зависимость также описывалась дифференциальным образом. В не-локальной, «зернистой» теории гамильтониан может и не существовать; если это так, то теряется связь с методом квантования в нерелятивистских теориях.

Допуская лоренц-инвариантное микроскопическое описание в терминах непрерывных переменных x и t , следует ожидать, что влияние взаимодействия в пространстве-времени не может распространяться со скоростью, большей c . Такое представление о «микрочинности» является серьезным аргументом в пользу полевой концепции. Если пространство на малых расстояниях зернисто, и мы хотим сохранить микрочинность, то воздействие одной «гранулы» на другую должно быть запаздывающим. Наиболее естественно это обстоятельство можно было бы описать, вводя дополнительные поля; в результате наша задача еще более усложнилась бы, не став от этого сколько-нибудь яснее.

В настоящее время не существует никаких экспериментальных доказательств дискретности пространства при малых расстояниях¹⁾. Под этим понимается только то, что имеются несомненные указания на применимость специальной теории относительности при высоких энергиях и, если угодно, на справедливость принципа микрочинности²⁾. Поскольку не существует сколько-нибудь приемлемой альтернативной теории, мы ограничимся в дальнейшем формализмом локальных причинных полей. Любая модифицированная теория, без сомнения, должна содержать теорию локального поля как предел для описания больших расстояний. Тем не менее еще раз подчеркнем, что рассматриваемый формализм пригоден лишь в пределе больших расстояний (например, расстояний, больших 10^{-13} см), в то время как истинные свойства физического мира на субмикроскопических расстояниях могут быть совсем иными.

§ 66. Канонический формализм и квантование для частиц

Мы начнем с напомним обычного способа квантования классической динамической системы в квантовой механике. Для иллюстрации рассмотрим частицу, совершающую одномерное движение в консервативном поле сил. Пусть q — обобщенная

¹⁾ В квантовой электродинамике согласие между теорией и экспериментом проверено с большой точностью, как в низко- так и в высокоэнергетической области (см., например, [1—4]).

²⁾ Под этим мы понимаем экспериментальную проверку дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния вперед, которые мы рассмотрим в гл. 18.

координата, $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ — скорость частицы, $L(q, \dot{q})$ — лагранжиан. Согласно принципу Гамильтона динамика системы определяется из условия

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0. \quad (11.1)$$

Уравнение (11.1) означает, что истинная траектория $q(t)$, по которой частица движется от (q_1, t_1) до (q_2, t_2) , обладает тем свойством, что вдоль нее действие J стационарно. Таким образом, малые вариации этой траектории $q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t)$, показанные на рис. 11.1, оставляют действие неизменным с точностью до членов второго порядка малости.

Принцип Гамильтона непосредственно приводит к уравнениям движения в форме Эйлера — Лагранжа¹⁾

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (11.2)$$

Чтобы применить каноническую процедуру квантования, перепишем это уравнение в гамильтоновом виде. Для этого определим импульс p , сопряженный q ,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (11.3)$$

и введем с помощью преобразования Лежандра гамильтониан

$$H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}). \quad (11.4)$$

В терминах H уравнение движения (11.2) приобретает следующий вид:

$$\{H, q\}_{\text{PB}} = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \quad \text{и} \quad \{H, p\}_{\text{PB}} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p}, \quad (11.5)$$

где символ $\{ \}_{\text{PB}}$ означает скобки Пуассона.

При квантовании уравнений (11.5) мы будем считать, что q является эрмитовым оператором, действующим в гильбертовом

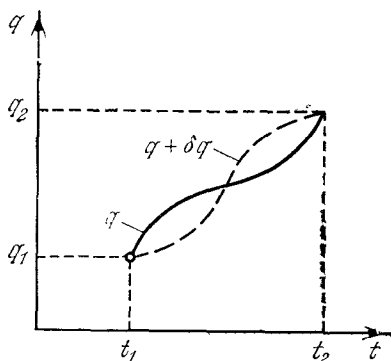


Рис. 11.1. Допустимая вариация траектории с фиксированными концами, рассматриваемая при формулировке принципа действия.

¹⁾ См. [5]. Уравнение (11.2) справедливо в том случае, когда L не содержит производных выше первого порядка.

пространстве, и заменим p на $-i \frac{\partial}{\partial q}$; при этом сопряженный импульс и координата удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[p, q] = -i, \quad (11.6)$$

которое заменяет классические скобки Пуассона $\{p, q\}_{PB} = 1$. По определению p также является эрмитовым оператором. Динамика частицы содержится в уравнении Шредингера

$$H(p, q) \Psi(t) = i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t}, \quad (11.7)$$

где Ψ означает волновую функцию или вектор состояния в гильбертовом пространстве. Если задать начальное состояние Ψ в произвольный момент времени, скажем, $t = 0$, то уравнение Шредингера определит состояние и, следовательно, средние значения, имеющие физический смысл, в любой другой момент времени.

Такое описание изменения состояния частицы во времени, когда от времени зависит волновая функция Ψ , а операторы p и q постоянны, называется представлением Шредингера. Можно, однако, описывать временную эволюцию системы и по-другому, а именно, считать, что от времени зависит не вектор Ψ , а операторы $p(t)$ и $q(t)$. Это описание известно как гейзенберговское представление. Оба представления эквивалентны, что может быть формально продемонстрировано построением унитарного преобразования, связывающего одно представление с другим. Действительно, интегрируя уравнение Шредингера (11.7), получаем

$$\Psi_S(t) = e^{-iHt} \Psi_S(0) \equiv e^{-iHt} \Psi_H. \quad (11.8)$$

В случае эрмитового гамильтониана H оператор e^{-iHt} унитарен и описывает изменение во времени функции $\Psi_S(t)$. В момент времени $t = 0$ вектор Ψ_S совпадает с гейзенберговским вектором состояния $\Psi_H \equiv \Psi_S(0)$. Не зависящие от времени операторы O_S связаны с зависящими от времени гейзенберговскими операторами соотношением

$$O_H(t) = e^{iHt} O_S e^{-iHt}, \quad (11.9)$$

причем унитарное преобразование (11.9) не меняет вида матричных элементов и тем самым физических наблюдаемых.

В квантовой теории решение динамической задачи заключается в нахождении матричных элементов операторов, которые сопоставляются физическим наблюдаемым, в произвольный момент времени, если эти матричные элементы заданы в некоторый предшествующий момент времени, скажем $t = 0$. В представлении Шредингера для этого нужно решить уравнение

(11.7), описывающее изменение во времени волновой функции. В представлении же Гейзенберга нужно решить уравнения движения, описывающие развитие во времени гейзенберговских операторов. Эти уравнения, согласно (11.9), имеют вид¹⁾

$$\frac{dO_H(t)}{dt} = i[H, O_H(t)]. \quad (11.10)$$

До тех пор, пока мы имеем дело с нерелятивистской теорией, указанные два подхода почти совпадают. Действительно, в силу (11.9) $H_H(t) = H_S = H$, и если зависящие от времени внешние силы отсутствуют, то из уравнения (11.10) следует, что $dH/dt = 0$. Тогда в представлении Шредингера мы получаем для собственных функций оператора энергии $\psi_n(q, t) = e^{-i\omega_n t} u_n(q)$, а соответствующий вектор состояния в представлении Гейзенберга есть $u_n(q)$.

Мы увидим, однако, что в релятивистской теории поля более удобен гейзенберговский подход. Это объясняется тем, что в релятивистском случае неудобно работать с явным видом вектора состояния Ψ и гораздо легче описать развитие во времени операторов, нежели вектора состояния. Кроме того, лоренцева инвариантность теории в представлении Гейзенберга более наглядно прослеживается, поскольку в этом представлении полевые операторы зависят, наряду с пространственными координатами, также и от времени.

Из уравнений (11.6) и (11.9) следует, что фундаментальное коммутационное соотношение сохраняет свой вид

$$[p(t), q(t)] = -i \quad (11.11)$$

для произвольного времени t , и мы можем написать

$$p(t) = -i \frac{\partial}{\partial q(t)} \quad \text{и} \quad q(t) = i \frac{\partial}{\partial p(t)}.$$

Таким образом, уравнениям (11.10), записанным для канонических координат и импульсов

$$\frac{dp(t)}{dt} = i[H, p(t)], \quad \frac{dq(t)}{dt} = i[H, q(t)], \quad (11.12)$$

можно придать вид классических уравнений движения, записанных, однако, уже для операторов

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q(t)}, \quad \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p(t)}.$$

¹⁾ Для операторов, явно зависящих от времени, имеем вместо (11.10)

$$\frac{dO_H(t)}{dt} = i[H, O_H(t)] + \frac{\partial O_H}{\partial t}.$$

Такая формулировка квантоводинамической задачи очень напоминает исходную классическую постановку задачи. В дальнейшем мы будем часто обращаться к классическим уравнениям и брать их за образец при построении квантовой теории. Динамические переменные $p(t)$ и $q(t)$ в квантовой механике являются эрмитовыми операторами, которые удовлетворяют уравнениям, в точности совпадающим с классическими уравнениями (11.5). Для того чтобы полностью определить задачу, мы должны еще задать матричные элементы операторов p и q в некоторый начальный момент времени. При этом начальные условия для $p(0)$ и $q(0)$ должны быть дополнены требованием, чтобы соотношения коммутации (11.11) при $t = 0$ выполнялись для любого физического состояния. Поскольку мы постулируем, что физические состояния системы, например состояния с фиксированной энергией, образуют полный набор, условие коммутации при $t = 0$ можно рассматривать как операторные уравнения вида (11.11).

В качестве примера мы проквантуем простой одномерный гармонический оператор в гейзенберговском представлении. В этом случае гамильтониан равен

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 q^2), \quad (11.13)$$

и уравнения движения имеют вид

$$p(t) = \frac{dq(t)}{dt} \equiv \dot{q}(t), \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Для того чтобы решить эти уравнения, введем удобные линейные комбинации:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\omega_0}} (\omega_0 q + ip), \quad a^+ = \sqrt{\frac{1}{2\omega_0}} (\omega_0 q - ip), \quad (11.14)$$

для которых уравнения движения есть

$$\dot{a}(t) = -i\omega_0 a(t), \quad \dot{a}^+(t) = +i\omega_0 a^+(t).$$

Решением последних является

$$a(t) = a_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad a^+(t) = a_0^+ e^{i\omega_0 t}, \quad (11.15)$$

где a_0 , a_0^+ — не зависящие от времени операторы, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям, следующим из (11.11):

$$\begin{aligned} [a(t), a^+(t)] &= [a_0, a_0^+] = 1, & [a(t), a(t)] &= [a_0, a_0] = 0, \\ [a^+(t), a^+(t)] &= [a_0^+, a_0^+] = 0. \end{aligned} \quad (11.16)$$

В терминах операторов a и a^+ гамильтониан равен

$$H = \frac{1}{2}\omega_0 (a^+a + aa^+) = \frac{1}{2}\omega_0 (a_0^+a_0 + a_0a_0^+). \quad (11.17)$$

Поскольку любое состояние Ψ может быть разложено в ряд по стационарным собственным функциям Ψ_n гамильтониана H , достаточно выяснить свойства Ψ_n . Из (11.17) имеем

$$[H, a_0] = -\omega_0 a_0 \quad \text{и} \quad [H, a_0^+] = +\omega_0 a_0^+. \quad (11.18)$$

Таким образом, если $H\Psi_n = \omega_n\Psi_n$, то $Ha_0^+\Psi_n = (\omega_n + \omega_0)a_0^+\Psi_n$, и мы получаем бесконечный набор состояний с возрастающей энергией, действуя последовательно оператором a_0^+ на состояние Ψ_n с энергией ω_n : $a_0^+\Psi_n = \Psi_{n+1}$. Наоборот, так как

$$H\Psi_n = \omega_n\Psi_n, \quad Ha_0\Psi_n = (\omega_n - \omega_0)a_0\Psi_n,$$

то мы получим набор состояний с меньшей энергией, действуя на состояние Ψ_n оператором a_0 : $a_0\Psi_n = \Psi_{n-1}$. Этот последний ряд, однако, должен оборваться, поскольку гамильтониан (11.13) равен сумме квадратов эрмитовых операторов и, следовательно, не может иметь отрицательных собственных значений. Основное состояние с наименьшей энергией определяется из условия $a_0\Psi_0 = 0$. Его энергия равна

$$H\Psi_0 = \frac{1}{2}\omega_0 a_0 a_0^+ \Psi_0 = \frac{1}{2}\omega_0 [a_0, a_0^+] \Psi_0 = \frac{1}{2}\omega_0 \Psi_0,$$

а энергия n -го состояния

$$\Psi_n \equiv (a_0^+)^n \Psi_0 \quad (11.19)$$

равна

$$\omega_n = (n + \frac{1}{2})\omega_0.$$

Энергетический спектр одномерного осциллятора не вырожден и различные состояния (11.19) взаимно ортогональны¹⁾

$$(\Psi_n, \Psi_m) = \delta_{nm} (n!) (\Psi_0, \Psi_0). \quad (11.20)$$

Можно вычислить матричные элементы оператора a_0^+ в гейзенберговском представлении, если заметить, что

$$\langle \Psi_n | \frac{H}{\omega_0} + \frac{1}{2} | \Psi_n \rangle = \langle \Psi_n | a_0 a_0^+ | \Psi_n \rangle = |\langle \Psi_{n+1} | a_0^+ | \Psi_n \rangle|^2 = n + 1.$$

Поэтому можно положить

$$\langle \Psi_{n+1} | a_0^+ | \Psi_n \rangle = \sqrt{n+1} = \langle \Psi_n | a_0 | \Psi_{n+1} \rangle. \quad (11.21)$$

¹⁾ Отметим, что состояния Ψ_n не нормированы.

В произвольный момент времени матричный элемент гейзенберговского оператора равен

$$\langle \Psi_{n+1} | a^+(t) | \Psi_n \rangle = e^{i\omega_0 t} \langle \Psi_{n+1} | a_0^+ | \Psi_n \rangle = \\ = \langle e^{-i\omega_{n+1} t} \Psi_{n+1} | a_0^+ | e^{-i\omega_n t} \Psi_n \rangle. \quad (11.22)$$

В этом частном случае только те матричные элементы отличны от нуля, которые меняют n на ± 1 . Уравнения (11.13) — (11.22) дают полное квантовомеханическое решение рассмотренной задачи. Эти уравнения описывают развитие во времени операторов, допустимых физических состояний, а также матричных элементов операторов в энергетическом представлении.

Сформулированный подход непосредственно обобщается для системы с n степенями свободы. В этом случае мы вводим в картину Гейзенберга n эрмитовых операторов $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, и n сопряженных импульсов $p_i(t)$. Динамическое описание системы по-прежнему дается $2n$ классическими уравнениями движения:

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11.23)$$

Определив матричные элементы операторов p_i и q_i в момент времени $t = 0$ и потребовав, чтобы они подчинялись коммутационным соотношениям

$$[p_i(0), q_j(0)] = -i\delta_{ij}, \quad [p_i(0), p_j(0)] = 0, \quad [q_i(0), q_j(0)] = 0, \quad (11.24)$$

мы полностью формулируем квантовомеханическую задачу. Квантовомеханический аналог уравнения (11.23), как в случае (11.12), есть

$$\dot{p}_i(t) = i[H, p_i(t)], \quad \dot{q}_i(t) = i[H, q_i(t)] \quad (11.25)$$

для каждой из n независимых координат и импульсов, описывающих систему с n степенями свободы.

§ 67. Канонический формализм и квантование полей ¹⁾

Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, мы получим теорию, в которой поле в каждой точке пространства-времени рассматривается как независимая переменная. Простым примером такого перехода в классической физике является поле колебаний массивной струны. Если рассматривать струну как N материальных точек, то нужно решать систему N уравнений для связанных осцилляторов. Взяв же предел $N \rightarrow \infty$, мы получаем непрерывную струну, смещение которой описывается полем $\varphi(x, t)$, которое непре-

¹⁾ См. [6, 7].

ривно зависит от x и t . По своему смыслу φ означает смещение струны относительно состояния покоя, а производная по времени $d\varphi(x, t)/dt$ есть скорость в точке (x, t) .

Следуя этой аналогии, можно ожидать, что при динамическом квантовании поле $\varphi(x, t)$ играет роль координаты $q_i(t)$, а производная $d\varphi(x, t)/dt$ отвечает обобщенной скорости $\dot{q}_i(t)$. При этом дискретный индекс i заменяется непрерывной координатой x ; в результате поле в представлении Гейзенберга является функцией как пространственных, так и временных координат $x = (x, t)$. При таком подходе координата и время входят на равных основаниях, и мы видим преимущество гейзенберговской

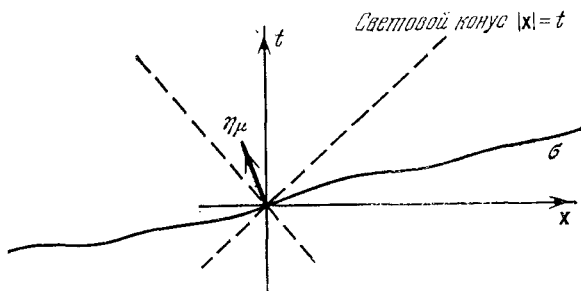


Рис. 11.2. Произвольная пространственно-подобная поверхность σ с нормалью η_μ .

картины, в которой явным образом подчеркнута лоренц-инвариантность формализма. Единственным упоминанием о выделенной роли времени является задание начальных условий и коммутационных соотношений в некоторый момент времени, например $t = 0$. Гиперповерхность $t = 0$ является единственным нековариантным элементом теории. Эту трудность, однако, легко преодолеть, если заменить гиперповерхность $t = 0$ ковариантной пространственно-подобной поверхностью и задать на поверхности начальные условия и коммутационные соотношения. Эта пространственно-подобная поверхность представляет собой трехмерную поверхность σ , нормаль к которой η_μ всюду временноподобна: $\eta_\mu \eta^\mu = 1 > 0$. Условимся всегда выбирать вектор η^μ лежащим в переднем световом конусе, так что $\eta^0 > 0$. В дальнейшем мы будем подразумевать, что выражения «в данный момент времени» и «на пространственно-временной поверхности σ » означают одно и то же; таким образом, мы можем придать выбранным начальным условиям ковариантную формулировку.

Путь к квантованию классических полей начинается с рассмотрения полевых уравнений. Исходя из этих уравнений, мы ищем лагранжиан, который в силу принципа Гамильтона приводит к этим уравнениям. Построив лагранжиан, можно затем

определить канонические импульсы и выполнить квантование согласно уравнению (11.24). В результате поля $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ и канонические импульсы $\pi_i(\mathbf{x}, t)$ становятся операторами в гильбертовом пространстве, которые действуют на векторы состояния Φ . Как и в одночастичной теории, упомянутой в самом начале гл. 1, мы постулируем, что физические состояния Φ образуют полный набор в гильбертовом пространстве. Наиболее часто мы будем сталкиваться с векторами состояния в гейзенберговском представлении, т. е. с собственными векторами гамильтониана, построенного из полей φ_i и импульсов π_i по аналогии с одночастичной теорией:

$$H(\varphi_i, \pi_i)\Phi_n = E_n\Phi_n.$$

Напомним сначала способ нахождения лагранжиана L из уравнений движения в классической механике. Затем мы повторим те же самые выкладки, чтобы построить лагранжиан в теории поля. Начнем с уравнений Ньютона

$$m_i\ddot{q}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} V(q_1, \dots, q_n),$$

умножим их на δq_i и просуммируем по $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^n m_i\ddot{q}_i \delta q_i = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i = -\delta V.$$

Интегрируя затем по времени от t_1 до t_2 и полагая $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, т. е. что концы траекторий частиц закреплены, получим после интегрирования по частям

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i \delta \dot{q}_i - \delta V \right) = 0.$$

Это уравнение и представляет собой принцип Гамильтона для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i^2 - V.$$

Теперь, рассматривая поле $\varphi(x)$, мы в точности следуем той же процедуре. Пусть, для примера, $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \varphi = 0. \quad (11.26)$$

Сумма по i , которая встречалась выше, в этом случае заменяется трехмерным интегралом по пространственной координате \mathbf{x} .

Умножим вначале уравнение (11.26) на бесконечно малую вариацию амплитуды в точке x :

$$\delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x)$$

и проинтегрируем по всем координатам x и по всем временам от t_1 до t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi + m^2 \varphi \right) \delta\varphi = 0.$$

На вариацию $\delta\varphi$ снова наложим условие $\delta\varphi(t_1) = \delta\varphi(t_2) = 0$. Предположим также, что система локализована в пространстве, так что вклад от граничной поверхности при $x \rightarrow \pm\infty$ отсутствует¹⁾. Тогда имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \delta \left[+\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] = 0$$

или

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) = 0,$$

где

$$\mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - m^2 \varphi^2 \right). \quad (11.27)$$

Величина \mathcal{L} представляет собой лоренц-инвариантный функционал, зависящий от полей φ и первых производных $\partial\varphi/\partial x^\mu$; эта величина называется плотностью лагранжиана. Ясно, что лагранжиан L , играющий ту же роль, что и в классической механике, равен объемному интегралу от плотности

$$L \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right).$$

В общем случае мы будем всегда полагать, что уравнения могут быть выведены из некоторой плотности лагранжиана \mathcal{L} . По аналогии с принципом Гамильтона в классической механике (11.1) потребуем, чтобы действие было стационарно для полей, удовлетворяющих уравнениям движения

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} = 0. \quad (11.28)$$

¹⁾ Этого можно также достигнуть, заключив систему в ящик и наложив периодические граничные условия.

Варьируя поля таким образом, чтобы их граничные значения при t_1 и t_2 оставались, как в классической механике, фиксированными, мы получаем из (11.28) уравнения Эйлера — Лагранжа для полей. В частности, в том простом случае, когда система описывается единственным полем φ и лагранжева плотность \mathcal{L} зависит только от φ и $\partial\varphi/\partial x^\mu$, получаем из (11.28)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\mathcal{L} \left(\varphi + \delta\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \delta \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \right) - \mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \right) \right] = \\ = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)} \delta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и используя соотношение

$$\delta \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\varphi + \delta\varphi) - \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\delta\varphi),$$

имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4x \delta\varphi \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)} \right] = 0.$$

Поскольку вариации $\delta\varphi$ произвольны, отсюда получаем уравнение для поля

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0. \quad (11.29)$$

В том частном случае, когда \mathcal{L} определяется из (11.27), уравнение (11.29) приводит в точности к уравнению Клейна — Гордона (11.26).

Полевые уравнения, полученные таким образом, являются дифференциальными уравнениями и отвечают локальной теории. Если \mathcal{L} содержит производные полей выше первого порядка, то порядок полевого уравнения больше двух¹⁾. До тех пор, пока \mathcal{L} содержит производные конечного порядка, сами поля удовлетворяют дифференциальным уравнениям и теория является «локальной». Мы примем гипотезу локального действия, в связи с чем уместно напомнить оговорки, сделанные в § 65. Весьма вероятно, что в том случае, когда пространство нелокально и зернисто на малых расстояниях, описанный здесь канонический

¹⁾ В дальнейшем мы всегда будем подразумевать, что \mathcal{L} есть функционал, зависящий только от полей и их производных. Кроме того, \mathcal{L} не будет явно зависеть от пространственно-временных координат. Это означает, что мы рассматриваем только «замкнутые» системы, т. е. такие системы, которые не обмениваются энергией и импульсом с внешними источниками.

формализм применим только на больших расстояниях в духе принципа соответствия.

В любом случае выбор конкретной формы лагранжиана определяется видом полевого уравнения, которое мы рассматриваем. Плотность лагранжиана вида (11.27) выбрана так, чтобы она приводила к уравнению Клейна — Гордона; другими интересующими нас примерами являются лагранжианы Дирака и Максвелла. Для системы, описываемой более чем одним независимым полем, скажем, набором полей $\varphi_r(x)$, $r = 1, \dots, n$, мы получаем n уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x^\mu)} = 0, \quad r = 1, \dots, n, \quad (11.30)$$

которые выводятся из принципа Гамильтона независимой вариацией по каждому из полей.

Возвращаясь теперь к каноническому формализму и квантованию, мы, как и в механике частиц, используем для определения канонического импульса лагранжиан \mathcal{L} . Чтобы выявить полную аналогию между теорией поля и теорией частиц, мы рассмотрим поле как систему с конечным числом степеней свободы, разбив трехмерное пространство на ячейки объема ΔV_i и определив i -ю координату $\varphi_i(t)$ как среднее значение $\varphi(x)$ в i -й ячейке

$$\varphi_i(t) \equiv \frac{1}{\Delta V_i} \int_{(\Delta V_i)} d^3x \varphi(\mathbf{x}, t).$$

Обозначив $\dot{\varphi}_i(t)$ среднее значение $\partial \varphi(\mathbf{x}, t) / \partial t$ в i -й ячейке, перепишем лагранжиан в виде

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \rightarrow \sum_i \Delta V_i \bar{\mathcal{L}}_i(\dot{\varphi}_i(t), \varphi_i(t), \varphi_{i \pm s}(t), \dots). \quad (11.31)$$

Различные φ_i отвечают независимым степеням свободы, кроме того, $\varphi_{i+s}(t)$ содержит координаты $\bar{\mathcal{L}}_i$, отвечающие соседним ячейкам, поскольку для вычисления градиента $\nabla \varphi$ необходимо вычислять соответствующие разности. Так как каждый член $\bar{\mathcal{L}}_i$ содержит только одну производную по времени $\dot{\varphi}_i(t)$, канонические импульсы равны просто

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} = \Delta V_i \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_i}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} \equiv \Delta V_i \pi_i(t). \quad (11.32)$$

Тогда, согласно (11.4), гамильтониан равен

$$H = \sum_i p_i \dot{\varphi}_i - L = \sum_i \Delta V_i (\pi_i \dot{\varphi}_i - \bar{\mathcal{L}}_i). \quad (11.33)$$

Возвращаясь к непрерывным обозначениям, определим импульс, сопряженный $\varphi(\mathbf{x}, t)$, соотношением

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)}. \quad (11.34)$$

Усредняя этот импульс по i -й ячейке, получим как раз $\pi_i(t)$ в формуле (11.32). Гамильтониан теперь записывается в виде объемного интеграла от гамильтоновой плотности $\mathcal{H}(\pi, \varphi)$, которая выбирается, как подсказывает нам равенство (11.33), в виде

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\pi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}, t)), \quad \mathcal{H} = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}. \quad (11.35)$$

Определив канонические импульсы, мы следуем далее обычной процедуре квантования, заменяя динамические переменные $\varphi_i(t)$, $p_i(t)$ эрмитовыми операторами с коммутационными соотношениями вида (11.24)

$$[\varphi_i(t), \varphi_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0, \quad [p_i(t), \varphi_j(t)] = -i\delta_{ij}$$

или в терминах $\pi_i(t)$

$$[\pi_i(t), \varphi_j(t)] = -\frac{i\delta_{ij}}{\Delta V_i}.$$

На языке непрерывных обозначений эти соотношения приобретают вид

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] &= [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [\pi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] &= -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (11.36)$$

где дираковская δ -функция возникает как предел $\delta_{ij}/\Delta V_i$ при $\Delta V_i \rightarrow 0$ в соответствии с определением

$$\int d^3x' \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}).$$

Уравнения (11.34)–(11.36) вместе с уравнениями движения представляют основу канонической квантовой теории поля. Обобщение для физической системы, описываемой несколькими независимыми полями $\varphi_r(\mathbf{x}, t)$, получается, если ввести импульсы, сопряженные каждому полю,

$$\pi_r(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_r(\mathbf{x}, t)} \quad (11.37)$$

и плотность гамильтониана

$$\mathcal{H}(\pi_r, \dots, \varphi_r, \dots) = \sum_{r=1}^n \pi_r \dot{\varphi}_r - \mathcal{L}. \quad (11.38)$$

Коммутаторы, необходимые для квантования, имеют вид:

$$\begin{aligned} [\varphi_r(\mathbf{x}, t), \varphi_s(\mathbf{x}', t)] &= 0, \quad [\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [\pi_r(\mathbf{x}, t), \varphi_s(\mathbf{x}', t)] &= -i\delta_{rs}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (11.39)$$

Наконец, чтобы закончить наше полное аналогий сопоставление механики частиц и квантовой теории поля, укажем, что из (11.37) — (11.39) следует, что аналог (11.25) есть

$$\pi_r(\mathbf{x}, t) = i[H, \pi_r(\mathbf{x}, t)], \quad \varphi_r(\mathbf{x}, t) = i[H, \varphi_r(\mathbf{x}, t)]. \quad (11.40)$$

§ 68. Преобразования симметрии и законы сохранения

Лагранжева формулировка очень удобна для последовательного определения констант движения в классической теории поля, а также при выводе явных выражений для этих констант. Исходя из скалярного лагранжиана, можно показать, что каждому непрерывному преобразованию симметрии, оставляющему инвариантными плотность лагранжиана \mathcal{L} и уравнения движения, отвечает некоторая теорема сохранения и константа движения. Соответствующая теорема¹⁾ (теорема Нетер), позволяющая описывать наблюдаемые в природе правила отбора в терминах условий симметрии, налагаемых на лагранжиан, оказывается весьма полезной при конструировании новых лагранжианов со взаимодействием. Мы рассмотрим поэтому, как эта теорема работает в квантовой теории поля.

Рассмотрим вначале законы сохранения, связанные с трансляционной инвариантностью в классической теории. При бесконечно малом смещении

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu \quad (11.41)$$

плотность лагранжиана \mathcal{L} изменяется на величину

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \varepsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}. \quad (11.42)$$

С другой стороны, если плотность лагранжиана трансляционно инвариантна, то она не зависит от координат: $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\varphi_r, \partial\varphi_r/\partial\varphi_\mu)$, так что

$$\delta\mathcal{L} = \sum_r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r(x)} \delta\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x_\mu)} \delta\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_\mu}\right) \right], \quad (11.43)$$

где

$$\delta\varphi_r = \varphi_r(x + \varepsilon) - \varphi_r(x) = \varepsilon_\nu \frac{\partial\varphi_r(x)}{\partial x_\nu}. \quad (11.44)$$

Приравнивая два выражения для $\delta\mathcal{L}$ и используя уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)} = 0, \quad (11.45)$$

¹⁾ Подробное обсуждение этой теоремы дано, например, в статье [8] (см. также [9], *прим. перев.*)

получаем

$$\epsilon_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left[\sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x_{\mu})} \epsilon_{\nu} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{\nu}} \right]. \quad (11.46)$$

Так как смещение ϵ_{μ} произвольно, то

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (11.47)$$

где $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ есть тензор энергии-импульса

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x_{\mu})} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^{\nu}}. \quad (11.48)$$

Из дифференциального закона сохранения (11.47) можно получить сохраняющиеся величины

$$P_{\nu} = \int d^3x \mathcal{F}_{0\nu} = \int d^3x \left[\sum_r \pi_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^{\nu}} - g_{0\nu} \mathcal{L} \right], \quad \frac{\partial P_{\nu}}{\partial t} = 0. \quad (11.49)$$

В предыдущем параграфе мы уже видели, что \mathcal{F}_{00} есть плотность гамильтониана

$$\mathcal{F}_{00} = \sum_r \pi_r \dot{\varphi}_r - \mathcal{L} = \mathcal{H} \quad (11.50)$$

и

$$\int d^3x \mathcal{F}_{00} = H,$$

поэтому мы можем рассматривать P_{ν} как сохраняющийся 4-вектор энергии-импульса.

Аналогичным образом можно построить выражения для сохраняющегося углового момента, рассматривая бесконечно малое лоренцево преобразование

$$x'_{\nu} = x_{\nu} + \epsilon_{\nu\mu} x^{\mu}, \quad \epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}. \quad (11.51)$$

Для проверки лоренцевой инвариантности нужно подставить в уравнения движения¹⁾

$$\varphi_r(x) \rightarrow S_{rs}^{-1}(\epsilon) \varphi_s(x') \quad (11.52)$$

и выяснить, сохраняют ли они в штрихованной системе координат ту же форму, что и в исходной системе. Здесь $S_{rs}(\epsilon)$ — матрица преобразования полей φ_r , которая отлична от единицы, если поля не скалярны. Мы уже сталкивались с такой ситуацией

¹⁾ Здесь и далее по повторяющимся индексам компонент поля r и s подразумевается суммирование.

при рассмотрении уравнения Дирака. Из уравнения Дирака мы можем заключить, что ¹⁾

$$S_{rs}(\varepsilon) = \delta_{rs} + \frac{1}{8} [\gamma^u, \gamma^v]_{rs} \varepsilon_{\mu\nu}.$$

Подставим теперь (11.52) в лагранжиан и потребуем, чтобы плотность лагранжиана была скаляром и не менялась бы при этой подстановке, т. е.

$$\mathcal{L} \left(S_{rs}^{-1} \varphi_s(x'), \frac{\partial}{\partial x'_\mu} S_{rs}^{-1} \varphi_s(x') \right) = \mathcal{L} \left(\varphi_r(x'), \frac{\partial \varphi_r(x')}{\partial x'_\mu} \right). \quad (11.53)$$

Последнее равенство гарантирует инвариантность уравнений движения, которые получаются из \mathcal{L} с помощью инвариантного принципа действия. Для бесконечно малого смещения

$$\delta \varphi_r(x) = S_{rs}^{-1}(\varepsilon) \varphi_s(x') - \varphi_r(x) = \varphi_r(x') - \varphi_r(x) - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \varphi_s(x),$$

причем

$$S_{rs}(\varepsilon) = \delta_{rs} + \frac{1}{2} \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}. \quad (11.54)$$

Раскладывая (11.53) вблизи точки x и используя уравнения Эйлера — Лагранжа (11.45), получаем

$$\mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) = \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x^\mu)} \delta \varphi_r \right]. \quad (11.55)$$

Уравнения (11.54) и (11.55) приводят к закону сохранения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathfrak{M}^{\mu\nu\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ (x^\lambda g^{\mu\nu} - x^\nu g^{\mu\lambda}) \mathcal{L} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x^\mu)} \left[\left(x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - x^\lambda \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \varphi_r + \Sigma_{rs}^{\nu\lambda} \varphi_s \right] \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[(x^\nu \mathcal{F}^{\mu\lambda} - x^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x^\mu)} \Sigma_{rs}^{\nu\lambda} \varphi_s \right] = 0. \end{aligned} \quad (11.56)$$

Сохраняющийся угловой момент равен

$$\begin{aligned} M^{\nu\lambda} &= \int d^3x \mathfrak{M}^{0\nu\lambda} = \int d^3x \left[(x^\nu \mathcal{F}^{0\lambda} - x^\lambda \mathcal{F}^{0\nu}) + \pi_r \Sigma_{rs}^{\nu\lambda} \varphi_s \right], \quad (11.57) \\ \frac{\partial M^{\nu\lambda}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Действуя в том же духе, можно получить дополнительные законы сохранения, если лагранжиан обладает «внутренними симметриями», т. е. если при *локальных* преобразованиях

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi_r(x) - i \varepsilon \lambda_{rs} \varphi_s(x) \quad (11.58)$$

¹⁾ В теории Дирака аналогичное уравнение имеет вид (2.11).

плотность лагранжиана остается инвариантной. В формуле (11.58) λ_{rs} — постоянные коэффициенты, не зависящие от x^μ и ϵ — бесконечно малый параметр. Диагональные элементы матрицы λ отвечают просто изменению фазы полей, в то время как недиагональные элементы перепутывают различные поля, входящие в \mathcal{L} симметрично. Если \mathcal{L} инвариантно при подстановке (11.58), то, повторяя те же выкладки, которые привели нас к уравнению (11.46), получаем

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} \delta\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)} \delta \frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\mu} = \\ = -i\epsilon \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)} \lambda_{rs} \varphi_s \right]. \quad (11.59)$$

Таким образом, для каждой «внутренней симметрии» вида (11.58), оставляющей \mathcal{L} инвариантной, существует сохраняющийся в дифференциальном смысле ток

$$\frac{\partial J^\mu(x, \lambda)}{\partial x^\mu} = 0, \quad (11.60)$$

где

$$J^\mu(x, \lambda) = -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)} \lambda_{rs} \varphi_s, \quad (11.61)$$

а также сохраняющийся «заряд»

$$Q(\lambda) = -i \int d^3x \pi_r \lambda_{rs} \varphi_s, \quad \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial t} = 0. \quad (11.62)$$

Обращаясь теперь к квантовой теории поля, нужно выяснить, остается ли при этом справедливым тот факт, имеющий место для классических полей, что скалярность \mathcal{L} гарантирует лоренцеву инвариантность теории и приводит, в силу теоремы Нетер, к сохраняющимся величинам энергии-импульса и углового момента. В квантовой теории поля амплитуды $\varphi_r(x)$ приобретают смысл операторов, действующих на функции состояния, которые представляются векторами в гильбертовом пространстве. Если наложить условия лоренцевой ковариантности на матричные элементы этих операторов, через которые выражаются наблюдаемые в двух различных лоренцевых системах, то мы придем к некоторому операторному условию для $\varphi_r(x)$. В квантовой теории поля скалярность еще недостаточна для релятивистской инвариантности; нужно еще проверить, что поля удовлетворяют дополнительным операторным условиям.

Чтобы показать, как возникают эти дополнительные условия, возьмем матричный элемент полевого оператора $\varphi_r(x)$ между двумя функциями состояния

$$(\Phi_\alpha, \varphi_r(x) \Phi_\beta). \quad (11.63)$$

Всевозможный набор таких матричных элементов, нумеруемых значками α и β , образует полный набор амплитуд в квантовой теории поля, который заменяет классические полевые амплитуды $\varphi_r(x)$. Аналогичную роль в шредингеровской квантовой механике играют матричные элементы оператора $q(t)$. Для наблюдателя в другой лоренцевой системе, связанной с исходной преобразованием координат

$$x'^{\mu} = a_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + b^{\mu},$$

амплитуды (11.63) равны

$$(\Phi'_{\alpha}, \varphi_r(x') \Phi'_{\beta}), \quad (11.64)$$

где векторы Φ'_{α} и Φ'_{β} представляют те же самые физические состояния α и β , но в штрихованной системе координат, причем сами операторы $\varphi_r(x')$ вычисляются в новой точке x' . Амплитуды (11.64) представляют квантовомеханическое обобщение классических полей $\varphi'_r(x') \equiv S_{rs} \varphi_s(x)$ в штрихованной системе координат. Классическое правило преобразования полей может быть теперь записано в виде

$$(\Phi'_{\alpha}, \varphi_r(x') \Phi'_{\beta}) = S_{rs}(a) (\Phi_{\alpha}, \varphi_s(x) \Phi_{\beta}). \quad (11.65)$$

Это уравнение представляет собой математическое выражение правила, устанавливающего связь между двумя лоренцевыми наблюдателями. Кроме того, мы требуем существования унитарного оператора $U(a, b)$, который устанавливает связь между векторами состояний в двух лоренцевых системах. Последняя дается уравнением

$$\Phi'_{\alpha} = U(a, b) \Phi_{\alpha}. \quad (11.66)$$

Как следует из (11.65), полевые операторы преобразуются согласно

$$U(a, b) \varphi_r(x) U^{-1}(a, b) = S_{rs}^{-1}(a) \varphi_s(ax + b). \quad (11.67)$$

Рассматривая вначале трансляции, мы, в частности, получаем

$$U(b) \varphi_r(x) U^{-1}(b) = \varphi_r(x + b), \quad (11.68)$$

где $U(b)$ — унитарный оператор, генерирующий смещения координат. Для бесконечно малых смещений $x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$ можно написать

$$U(\epsilon) = \exp(i\epsilon_{\mu} \mathbf{P}^{\mu}) \approx 1 + i\epsilon_{\mu} \mathbf{P}^{\mu}, \quad (11.69)$$

где \mathbf{P}^{μ} — эрмитов оператор. Уравнение (11.68) в этом случае приводится к виду

$$i[\mathbf{P}^{\mu}, \varphi_r(x)] = \frac{\partial \varphi_r(x)}{\partial x_{\mu}}. \quad (11.70)$$

Сравнение с классической канонической механикой и нерелятивистской шредингеровской теорией (уравнение (11.10)) позволяет отождествить \mathbf{P}^μ в (11.69), (11.70) с 4-вектором энергии-импульса $\mathbf{P}^\mu \equiv P^\mu$. Поскольку мы уже вывели явное выражение (11.49) для P^μ , мы можем теперь в любой теории проверить, согласуется ли это тождество с коммутационными соотношениями при квантовании. Таким образом, можно установить, является ли равенство (11.69) операторным уравнением и коммутируют ли компоненты \mathbf{P} с гамильтонианом

$$[H, \mathbf{P}] = 0, \quad (11.71)$$

т. е. остается ли \mathbf{P} константой движения.

Если уравнения (11.70) и (11.71) не противоречат коммутационным соотношениям, то квантовая теория трансляционно-инвариантна. В противном случае либо оператор \mathbf{P}^μ , удовлетворяющий уравнениям (11.70), (11.71), следует определять каким-либо другим способом (при этом нужно изменить условия на коммутаторы), либо теория оказывается противоречивой и ее следует отбросить. Для теорий, которые мы рассматриваем, правильные значения P_μ и $M_{\mu\nu}$ могут быть найдены из теоремы Нетер.

Аналогичным образом можно точно сформулировать, что означает инвариантность квантовой теории поля относительно лоренцевых преобразований. Унитарный оператор, генерирующий инфинитезимальное лоренцево преобразование $x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon_{\nu}^{\mu} x^\nu$, записывается в виде

$$U(\epsilon_{\mu\nu}) = 1 - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{M}^{\mu\nu}, \quad (11.72)$$

где $\mathbf{M}^{\mu\nu}$ — эрмитов оператор, удовлетворяющий операторному уравнению

$$\varphi_r(x) - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} [\mathbf{M}^{\mu\nu}, \varphi_r(x)] = S_{rs}^{-1}(\epsilon^{\mu\nu}) \varphi_s(x + \epsilon x),$$

которое следует из (11.67).

Используя (11.54), это уравнение можно привести к виду

$$i[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \varphi_r(x)] = x^\mu \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^\nu} - x^\nu \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^\mu} + \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \varphi_s(x). \quad (11.73)$$

Далее мы снова используем связь с классической и нерелятивистской теорией, чтобы отождествить оператор $\mathbf{M}^{\mu\nu}$, генерирующий лоренцевы преобразования, с тензором углового момента (11.57): $\mathbf{M}^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}$. Пространственные компоненты в уравнении (11.73) выражают просто-напросто обычные коммутационные соотношения в нерелятивистской механике для оператора углового момента $L = (M^{12}, M^{23}, M^{31})$, который генерирует трехмерные пространственные вращения. Согласованность подобного

отождествления тензора $M^{\mu\nu}$ с тензором углового момента и с коммутационными соотношениями есть дополнительное условие в теории, инвариантной при лоренцевых преобразованиях. Непосредственная проверка производится здесь так же, как и для оператора P^μ .

Для большинства полевых теорий, которые чаще всего обсуждаются сейчас в физических приложениях, лагранжевы подход и теорема Нетер могут быть непосредственно применены в квантовой области без каких-либо дополнительных трудностей. Именно в квантовой формулировке эти теории и обнаруживают свою практическую ценность, как это будет иллюстрировано в последующих главах.

§ 69. Другие формулировки

Описанный выше подход использует как исходный пункт классический лагранжиан, позволяющий вывести непротиворечивые уравнения поля и коммутационные соотношения. Подчеркнем здесь, что физика заключается не в самом лагранжиане, а в уравнениях поля и их решениях, а также в коммутационных соотношениях и свойствах векторов состояний системы.

Можно сформулировать теорию *ab initio* в терминах квантового принципа действия, в этом случае лагранжиан играет более важную роль. Этот мощный, но более абстрактный подход к квантовой теории поля широко обсуждался в литературе, особенно Швингером [10, 11].

Наоборот, возможна такая формулировка теории, которая не требует использования лагранжианов. Общий подход такого типа с аксиоматической точки зрения был сформулирован Леманом, Шиманчиком и Циммерманном [12, 13].

ЗАДАЧИ

Волновое уравнение для массивной частицы со спином 1 имеет вид

$$\left[g_{\mu\nu} (\square + \mu^2) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right] \varphi^\nu(x) = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial x^\nu} = 0.$$

1. Построить из этого уравнения плотность лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\mu} \right) + \frac{\mu^2}{2} \varphi_\nu \varphi^\nu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial x^\nu} \right)^2.$$

2. Построить плотность гамильтониана

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \pi_i^2 - \frac{1}{2} (\nabla \varphi_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^j} \right)^2 - \frac{\mu^2}{2} \varphi_0^2 + \frac{\mu^2}{2} \varphi_j^2 - \frac{1}{2} \pi_0^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \pi_\mu \pi^\mu - \frac{1}{2} (\nabla \varphi_\mu) (\nabla \varphi^\mu) - \frac{\mu^2}{2} \varphi_\mu \varphi^\mu, \end{aligned}$$

где

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\mu}$$

и

$$\pi_0 = \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = \nabla_i \varphi^i, \quad \pi_i = \dot{\varphi}^i.$$

3. Проверить, что гамильтоновы уравнения движения

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu} = \dot{\varphi}^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi^\mu} = -\dot{\pi}_\mu$$

с дополнительным условием

$$\pi_0 = \nabla \boldsymbol{\varphi} = -\dot{\varphi}_0$$

воспроизводят первоначальное волновое уравнение.

4. Предполагая, что \mathcal{L} не инвариантна относительно некоторого преобразования внутренней симметрии, связать изменение \mathcal{L} с дивергенцией соответствующего тока.

ПОЛЕ КЛЕЙНА — ГОРДОНА

§ 70. Квантование и интерпретация в терминах частиц

Простейшим примером поля является действительное скалярное поле $\varphi(x)$, которое удовлетворяет свободному уравнению Клейна — Гордона

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0. \quad (12.1)$$

Это поле рассматривалось ранее в целях иллюстрации. Лагранжева плотность, из которой выводится уравнение (12.1), записывается в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} - m^2\varphi^2 \right), \quad (12.2)$$

а сопряженный импульс равен

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}. \quad (12.3)$$

При квантовании π и φ становятся эрмитовыми операторами, которые удовлетворяют одновременным коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\varphi(x, t), \varphi(x', t)] &= [\pi(x, t), \pi(x', t)] = 0, \\ [\pi(x, t), \varphi(x', t)] &= -i\delta^3(x - x'). \end{aligned} \quad (12.4)$$

В результате мы получаем квантовую теорию, инвариантную относительно трансляций и лоренцевых преобразований координат, что можно непосредственно проверить прямым вычислением коммутаторов (11.70) и (11.73). Из (12.2) и (12.3) получаем выражение для гамильтониана

$$P^0 = H = \int d^3x \mathcal{H}(\pi, \varphi),$$

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi) = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\pi^2(x, t) + |\nabla\varphi(x, t)|^2 + m^2\varphi^2(x, t)] \quad (12.5)$$

и оператора импульса

$$P = - \int \pi \nabla \varphi d^3x. \quad (12.6)$$

Используя (12.4), можно убедиться, что

$$i[P^\mu, \varphi(\mathbf{x}, t)] = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_\mu},$$

как и должно быть. Аналогичным образом можно вычислить $M^{\mu\nu}$ в (11.57) и проверить выполнение условия (11.73), причем для скалярного поля $\Sigma_{rs}^{\mu\nu} = 0$.

Для дальнейшего рассмотрения нам потребуется ввести полный набор векторов состояния Φ . Этот набор можно построить, используя алгебру операторов, которая задается коммутационными соотношениями; при этом удобно работать с собственными функциями оператора энергии-импульса.

Заметим, что любое решение уравнения (12.1) может быть разложено в интеграл Фурье по плоским волнам

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} [a(k) e^{ik \cdot \mathbf{x} - i\omega_k t} + a^+(k) e^{-ik \cdot \mathbf{x} + i\omega_k t}] \equiv \\ &\equiv \int d^3k [a(k) f_k(\mathbf{x}) + a^+(k) f_k^*(\mathbf{x})], \end{aligned} \quad (12.7)$$

где

$$\omega_k = + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad \text{и} \quad f_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ik \cdot \mathbf{x}}.$$

В классической теории амплитуда $a^+(k)$ комплексно сопряжена $a(k)$, поскольку поле $\varphi(\mathbf{x})$ действительно. В квантовой теории эти амплитуды являются эрмитово сопряженными операторами. Алгебру операторов $a(k)$ и $a^+(k)$ можно получить, если переписать коммутационные соотношения для φ (12.4) в терминах коэффициентов $a(k)$.

Из (12.7) получаем¹⁾

$$\begin{aligned} \int f_k^*(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) d^3x &= \frac{1}{2\omega_k} [a(k) + a^+(-k) e^{2i\omega_k t}], \\ \int f_k^*(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) d^3x &= -\frac{i}{2} [a(k) - a^+(-k) e^{2i\omega_k t}], \end{aligned} \quad (12.8)$$

¹⁾ Функции f_k и f_k^* удовлетворяют условию ортогональности (9.6):

$$\int f_k^*(\mathbf{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\mathbf{x}, t) d^3x = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

$$\int f_k(\mathbf{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\mathbf{x}, t) d^3x = 0.$$

откуда

$$\begin{aligned}
 a(k) &= \int d^3x f_k^*(\mathbf{x}, t) [\omega_k \varphi(\mathbf{x}, t) + i\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)] = \\
 &= i \int d^3x \left[f_k^* \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial f_k^*}{\partial t} \right) \varphi(\mathbf{x}, t) \right] = \\
 &= i \int d^3x f_k^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (12.9)
 \end{aligned}$$

В последней строке использовано обозначение $\overleftrightarrow{\partial}_0$, которое имеет следующий смысл:

$$a(t) \overleftrightarrow{\partial}_0 b(t) = a(t) \frac{\partial b}{\partial t} - \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right) b(t).$$

Правая часть в (12.9) по теореме Грина не зависит от времени, поскольку $f_k(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi(\mathbf{x}, t)$ являются решениями¹⁾ уравнения (12.1). Выражение (12.9) представляет аналог внутреннего произведения, которое мы рассматривали в гл. 9 при обсуждении метода функций распространения в применении к уравнению Клейна — Гордона.

Искомые коммутационные соотношения получаются теперь из (12.4) и (12.9). Поскольку $a(k)$ не зависят от времени, мы можем при вычислении коммутатора в (12.4) взять операторы φ и π в один и тот же момент времени; в результате получим

$$\begin{aligned}
 [a(k), a^+(k')] &= \int d^3x d^3y [f_k^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\mathbf{x}, t), f_{k'}(\mathbf{y}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\mathbf{y}, t)] = \\
 &= +i \int d^3x f_k^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}^*(\mathbf{x}, t) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}').
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned}
 [a(k), a(k')] &= (i)^2 \int d^3x d^3y [f_k^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\mathbf{x}, t), f_{k'}^*(\mathbf{y}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\mathbf{y}, t)] = \\
 &= -i \int d^3x f_k^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}^*(\mathbf{x}, t) = 0
 \end{aligned}$$

и

$$[a^+(k), a^+(k)] = 0. \quad (12.10)$$

Оператор энергии-импульса для свободного поля Клейна — Гордона имеет простой вид в терминах коэффициентов $a(k)$ и $a^+(k)$.

¹⁾ Это утверждение справедливо и в более общем случае, когда в качестве ортогональных функций, по которым производится разложение полевого оператора $\varphi(\mathbf{x}, t)$ в (12.7), используются волновые пакеты, составленные из плоских волн (см. [12]).

Непосредственное вычисление по формулам (12.5) — (12.7) приводит к следующему результату¹⁾:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k [a^+(k) a(k) + a(k) a^+(k)], \\ P &= \frac{1}{2} \int d^3k k [a^+(k) a(k) + a(k) a^+(k)]. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Мы получаем, таким образом, представление гамильтониана в форме непрерывной суммы членов

$$H_k = \frac{1}{2} \omega_k [a^+(k) a(k) + a(k) a^+(k)],$$

каждый из которых имеет вид гамильтониана простого гармонического осциллятора с частотой ω_k . В самом деле, $a^+(k)$ и $a(k)$ есть повышающие и понижающие операторы, которые уже обсуждались на примере с осциллятором в гл. 11, причем эти операторы удовлетворяют, с точностью до нормировки, тем же самым коммутационным соотношениям. Чтобы пояснить различие в нормировке и выявить полную аналогию с предыдущим рассмотрением одномерного осциллятора, мы снова вернемся к дискретным обозначениям. Разбивая k -пространство на ячейки объема ΔV_k , имеем

$$\int d^3k \rightarrow \sum_k \Delta V_k \quad \text{и} \quad \delta^3(k - k') \rightarrow \frac{\delta_{kk'}}{\Delta V_k}. \quad (12.12)$$

¹⁾ Желая сохранить формальную ковариантность, мы можем переписать разложение по плоским волнам в инвариантном виде, используя тождество

$$\int \frac{d^3k}{2\omega_k} = \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0).$$

Обозначив $A(k) = \sqrt{2\omega_k} a(k)$, получим

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) [A(k) e^{-ikx} + A^+(k) e^{ikx}]$$

и

$$A(k) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\sigma \eta_\mu e^{ikx} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} \varphi(x),$$

где σ — плоская пространственно-подобная поверхность, η_μ — нормаль к этой поверхности. Аналогичным образом имеем

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) k^\mu [A^+(k) A(k) + A(k) A^+(k)],$$

причем коэффициенты $A(k)$, подобно φ , являются лоренцевыми скалярами.

Тогда H имеет вид суммы гамильтонианов осцилляторов H_k , соответствующих набору ячеек импульсного пространства:

$$H = \sum_k H_k = \sum_k \frac{1}{2} \omega_k (a_k^+ a_k + a_k a_k^+), \quad a_k = \sqrt{\Delta V_k} a(k), \quad (12.13)$$

причем

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'}, \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^+, a_{k'}^+] = 0. \quad (12.14)$$

Указанной аналогии с гармоническим осциллятором не следует удивляться, поскольку классическое поле Клейна — Гордона может быть представлено в виде разложения по своим собственным частотам. Коэффициенты в этом разложении $a(k)$ и являются гармоническими осцилляторами. Все, что мы сделали, — это проквантовали каждый из осцилляторов $a(k)$.

При квантовании мы ожидаем, что классическая энергия поля станет равна сумме энергий отдельных осцилляторов. Чтобы вычислить собственное значение оператора энергии и построить соответствующие собственные функции, рассмотрим каждый гамильтониан H_k по отдельности. Поскольку H имеет вид суммы взаимно коммутирующих для каждого волнового числа k и частоты $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ операторов H_k , то его собственные функции представляются в виде произведения собственных функций Φ_k , отвечающих каждому из H_k . Произвольный вектор состояния Φ может быть далее записан в виде суперпозиции таких произведений со всевозможными значениями k в соответствии с постулатом полноты, гл. 1.

Решение задачи на собственное значение для осциллятора с данным волновым числом k характеризуется целым индексом $n_k = 0, 1, 2, \dots$, который нумерует собственные функции и собственные значения

$$H_k \Phi_k(n_k) = \omega_k \left(n_k + \frac{1}{2}\right) \Phi_k(n_k), \quad (12.15)$$

$$\Phi_k(n_k) = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (a_k^+)^{n_k} \Phi_k(0). \quad (12.16)$$

Здесь $\Phi_k(0)$ — основное состояние, определяемое из условия

$$a_k \Phi_k(0) = 0. \quad (12.17)$$

Состояния в (12.16) нормированы согласно

$$(\Phi_k(n_k), \Phi_k(n'_k)) = \delta_{n_k n'_k}.$$

Аналогично можно записать оператор импульса

$$P = \sum_k P_k = \sum_k \frac{1}{2} k (a_k^+ a_k + a_k a_k^+), \quad (12.18)$$

где

$$P_k \Phi_k(n_k) = k \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \Phi_k(n_k), \quad n_k = 0, 1, 2, \dots$$

Собственные функции оператора энергии-импульса Φ записываются в виде произведения функций Φ_k , отвечающих отдельным импульсным ячейкам; они характеризуются набором n_k для каждого значения k :

$$\begin{aligned} \Phi(n_{k_1} \dots n_{k_\alpha} \dots) &= \prod_k \Phi_k(n_k), \\ P^\mu \Phi(\dots n_{k_\alpha} \dots) &= \sum_k k^\mu \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \Phi(\dots n_{k_\alpha} \dots). \end{aligned} \quad (12.19)$$

В основном состоянии, т. е. в состоянии с наименьшей энергией, все $n_k = 0$:

$$\Phi_0 = \prod_k \Phi_k(0). \quad (12.20)$$

В этом состоянии, которое имеет физический смысл вакуума, не возбуждена ни одна из мод нормальных колебаний.

Энергия вакуума

$$E = \sum_k \frac{1}{2} \omega_k \quad (12.21)$$

расходится, представляя по своему смыслу сумму энергий нулевых колебаний бесконечного числа осцилляторов, по одному на каждую нормальную моду или степень свободы поля. Это первый пример в ряду бесконечностей, с которыми мы будем еще сталкиваться в теории поля. В данном случае от бесконечности в (12.21) проще всего избавиться, вычитая из H бесконечную константу так, чтобы сократить член $\sum_k \frac{1}{2} \omega_k$. Подобная

процедура является оправданной, поскольку физический смысл имеют не абсолютные энергии, которые неизмеримы, а лишь их разности. Согласно (12.17) и (17.20) вычитаемая константа равна вакуумному среднему оператору энергии; она автоматически исчезает, если переписать оператор энергии-импульса в виде

$$P'_\mu = P_\mu - (\Phi_0, P_\mu \Phi_0) = \sum_k k_\mu a_k^+ a_k \quad (12.22)$$

или, используя непрерывные обозначения,

$$P'_\mu = \int d^3k k_\mu a^+(k) a(k). \quad (12.23)$$

До тех пор, пока поля не подчинены коммутационным соотношениям, операторы P_μ и P'_μ тождественны, поскольку классические амплитуды нормальных колебаний коммутируют; при этом нулевая энергия отсутствует.

В квантовой же теории замена P_μ и P'_μ эквивалентна записи всех полевых операторов в выражениях для \mathcal{L} и P_μ таким образом, чтобы положительно-частотная часть φ :

$$\varphi^{(+)}(x) = \int d^3k a(k) f_k(x) \quad (12.24a)$$

всегда стояла бы за отрицательно-частотной частью

$$\varphi^{(-)}(x) = \int d^3k a^+(k) f_k^*(x). \quad (12.24b)$$

Такой порядок множителей называется нормальным порядком и обозначается символом

$$:\varphi\varphi: = \varphi^{(-)}\varphi^{(-)} + 2\varphi^{(-)}\varphi^{(+)} + \varphi^{(+)}\varphi^{(+)}. \quad (12.25)$$

Из формулы (12.17) и эрмитово сопряженного ей выражения следует, что вакуумное среднее любого оператора равно нулю, если только этот оператор выражается через величины, записанные в нормальном виде. В данном случае единственным эффектом, к которому приводит нормальное упорядочивание, является избавление от бесконечной энергии нулевых колебаний; при этом нуль энергии определяется как энергия вакуумного состояния Φ_0 .

Из (12.19) и (12.22) получаем собственные значения оператора P'_μ :

$$P'_\mu \Phi(\dots n_{k_\alpha} \dots) = \sum_k n_k k_\mu \Phi(\dots n_{k_\alpha} \dots), \quad n_k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.26)$$

Собственные векторы для каждой нормальной моды k несут 4-импульс, отвечающий n_k квантам, каждый из которых имеет 4-импульс k^μ и массу m , причем, согласно соотношению Эйнштейна, $k_\mu k^\mu = m^2$. Мы видим здесь, как при канонической процедуре квантования возникает интерпретация поля в терминах частиц. Целые числа n_k называются числами заполнения для k -го импульсного состояния; при этом задание наборов n_{k_α} полностью определяет вектор состояния $\Phi(\dots n_{k_\alpha} \dots)$.

Удобно ввести оператор числа частиц

$$N_k = a_k^\dagger a_k \quad (12.27)$$

с целыми собственными значениями

$$N_k \Phi(\dots n_k \dots) = n_k \Phi(\dots n_k \dots), \quad n_k = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.28)$$

через который можно выразить оператор энергии-импульса¹⁾

$$P^\mu = \sum_k k^\mu N_k. \quad (12.29)$$

С помощью (12.14) можно проверить, что

$$[N_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'} a_{k'}^+ \quad \text{и} \quad [N_k, a_{k'}] = -\delta_{kk'} a_{k'}. \quad (12.30)$$

Сравнив с (12.29), мы видим, что a_k^+ есть оператор рождения кванта с импульсом k^μ . Этот оператор, действуя на состояние, содержащее n_k квантов с импульсом k^μ , образует состояние с $n_k + 1$ квантами, поскольку

$$\begin{aligned} P_\mu a_k^+ \Phi(\dots n_k \dots) &= a_k^+ [P_\mu + k_\mu] \Phi(\dots n_k \dots) = \\ &= \left(\sum_{k'} n_{k'} k'_\mu + k_\mu \right) a_k^+ \Phi(\dots n_k \dots). \end{aligned}$$

Аналогичным образом оператор a_k уничтожает квант с импульсом k и, в частности, действуя на состояние, не содержащее таких квантов вообще, дает нуль, поскольку $a_k \Phi_k(0) = 0$ согласно (12.17).

Единственными отличными от нуля матричными элементами операторов a_k и a_k^+ являются те, которые, как и в примере с осциллятором (гл. 11), связывают состояния с $n'_k = n_k \pm 1$:

$$(\Phi_k(n'_k), a_k \Phi_k(n_k)) \equiv \langle n'_k | a_k | n_k \rangle = \sqrt{n_k} \delta_{n'_k, n_k - 1}, \quad (12.31)$$

$$\langle n'_k | a_k^+ | n_k \rangle = \sqrt{n_k + 1} \delta_{n'_k, n_k + 1}.$$

§ 71. Симметрия состояний

При каноническом квантовании классического поля Клейна — Гордона возникает многочастичная интерпретация поля в терминах чисел заполнения n_k . Для свободного поля операторы N_k и H коммутируют, поэтому число квантов сохраняется. Интересная физическая задача возникает, если ввести члены с взаимодействием, которые меняют n_k . Для свободного же поля остается только показать, что кванты представляют систему тождественных частиц, т. е. подчиняются статике Бозе — Эйнштейна.

Любое состояние представляет суперпозицию базисных состояний

$$\Phi(\dots n_{k_\alpha} \dots) = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (a_k^+)^{n_k} \Phi_k(0). \quad (12.32)$$

¹⁾ Здесь и далее мы опускаем штрихи при записи операторов с нормальным порядком множителей.

Вектор (12.32) полностью определен набором чисел заполнения n_k для каждого k . Отдельные кванты не различимы, поскольку, согласно (12.14), все операторы a_k^+ взаимно коммутируют и их порядок несуществен. Это обстоятельство находит отражение в свойствах симметрии коэффициентов разложения произвольного вектора по базисным векторам (12.32). Возвращаясь снова к непрерывной нормировке, запишем это разложение в виде ¹⁾

$$\Phi = \left[c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int d^3k_1 \dots d^3k_n c_n(k_1, \dots, k_n) \times \right. \\ \left. \times a^+(k_1) a^+(k_2) \dots a^+(k_n) \right] \Phi_0. \quad (12.33)$$

Множитель $1/\sqrt{n!}$ выбран из соображений удобства; при этом условие нормировки для c_n имеет простую форму:

$$1 = (\Phi, \Phi) = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3k_1 \dots d^3k_n |c_n(k_1, k_2, \dots, k_n)|^2. \quad (12.34)$$

Коэффициенты c_n описывают распределение по импульсам компоненты вектора состояния, содержащей n квантов. Они имеют смысл волновой функции в импульсном пространстве системы тождественных частиц, которая характеризуется заданным набором импульсов k_α . В силу коммутативности операторов $a^+(k)$, в (12.33) эти функции есть симметричные функции своих аргументов

$$c(\dots k_i \dots k_j \dots) = + c(\dots k_j \dots k_i \dots). \quad (12.35)$$

Как отмечалось выше, состояние характеризуется только числами квантов с различными k . Кванты неразличимы, и вероятность состояния, в котором квант a имеет импульс k_i , а квант b импульс k_j , равна вероятности состояния, в котором кванты a и b переставлены:

$$|c(\dots k_i \dots k_j \dots)|^2 = |c(\dots k_j \dots k_i \dots)|^2. \quad (12.36)$$

Условие симметрии (12.35), которое является следствием алгебры коммутаторов операторов $a^+(k)$, означает, что частицы, возникающие при квантовании, подчиняются симметричной (или бозе-эйнштейновской) статистике.

¹⁾ Мы предполагаем здесь, что вероятность нахождения двух частиц в одном и том же состоянии k бесконечно мала, т. е. в непрерывном пределе $n_k \rightarrow 1$ или $n_k \rightarrow 0$. В случае сильно вырожденных систем, таких, как основное состояние свободного бозе-газа, когда все частицы находятся в одном и том же состоянии с $k=0$, удобно сохранить дискретную нормировку. В теории поля нас интересуют произвольные состояния рассеяния, для которых вопроса вообще не возникает.

§ 72. Измеримость поля и принцип микропричинности

В классической теории поле $\varphi(x)$ является наблюдаемым и его величина может быть измерена в любой точке x . В гл. 11 мы ввели, с некоторыми оговорками, понятие локального полевого оператора $\varphi(x)$, в квантовом смысле определенного в точке x .

Коммутационные соотношения в квантовой теории накладывают некоторые ограничения на точное измерение величин поля. Так, например, точное измерение полей в двух различных пространственно-временных точках x и y возможно только в том случае, если коммутатор $[\varphi(x), \varphi(y)]$ обращается в нуль.

Полевой коммутатор можно вычислить, используя явное решение (12.7) для свободного поля Клейна — Гордона. С учетом (12.10) получаем

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} ([a(k), a^+(k')] e^{-ikx + ik'y} + \\ &+ [a^+(k), a(k')] e^{ikx - ik'y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) = \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{ik \cdot (x-y)} \sin \omega_k (x_0 - y_0) \equiv i\Delta(x-y). \end{aligned} \quad (12.37)$$

В теории поля мы постоянно сталкиваемся с целым зверинцем инвариантных функций, к которому принадлежит и $\Delta(x-y)$. Сводка формул, относящихся к этим функциям, дана в приложении В. Лоренцева инвариантность Δ непосредственно следует из выражения (12.37), в котором инвариантная экспонента интегрируется по инвариантному же фазовому объему

$$\int \frac{d^3k}{2\omega_k} = \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0).$$

Вводя нечетную функцию

$$\varepsilon(k_0) = \begin{cases} +1, & k_0 > 0, \\ -1, & k_0 < 0, \end{cases} \quad (12.38)$$

которая также лоренц-инвариантна для времениподобного вектора $k^2 > 0$, можно представить Δ в более компактной форме:

$$\Delta(x-y) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k_0) e^{-ik(x-y)}. \quad (12.39)$$

Из определения функции Δ посредством коммутатора в левой части равенства (12.37) следует, что Δ есть решение свободного

уравнения Клейна — Гордона, причем она является нечетной функцией своих аргументов

$$(\square_x + m^2) \Delta(x - y) = 0, \quad \Delta(x - y) = -\Delta(y - x). \quad (12.40)$$

Поскольку одновременный коммутатор в (12.37) зануляется, $\Delta(x - y, 0) = 0$. Тогда из лоренцевой инвариантности получаем

$$\Delta(x - y) = 0 \quad \text{для всех } (x - y)^2 < 0, \quad (12.41)$$

т. е. два поля, разделенные пространственноподобным интервалом, коммутируют. Таким образом, напряженности полей φ , рассматриваемые как физически наблюдаемые, могут быть измерены однозначно и независимо друг от друга в любых двух точках x и y , которые нельзя связать световым или каким-либо другим физическим сигналом, $(x - y)^2 > 0$. Производная по времени функции Δ сингулярна в начале координат

$$\left. \frac{\partial \Delta(x - y)}{\partial x_0} \right|_{x_0=y_0} = -\delta^3(x - y), \quad (12.42)$$

в результате, комбинируя (12.42) и (12.37), мы воспроизводим канонические коммутационные соотношения (12.4).

Условие обращения в нуль коммутаторов для любых, даже сколь угодно малых пространственно-временных интервалов составляет содержание *принципа микропричинности*. Для того чтобы придать какой-либо физический смысл этому математическому утверждению, следует придать смысл процедуре *измерения поля в точке* — недостатки подобной концепции уже обсуждались в предыдущих параграфах¹⁾.

§ 73. Вакуумные флуктуации

Мы уже отмечали, что квантование поля представляет не что иное, как квантование бесконечного набора гармонических осцилляторов. При этом энергия вакуума оказывается аналогом нулевой энергии осцилляторов. Если осциллятор находится в состоянии с фиксированной энергией, то его координата не является строго определенной величиной, т. е.

$$(\Psi_n, q^2 \Psi_n) > (\Psi_n, q \Psi_n)^2 = 0. \quad (12.43)$$

Аналогичное положение имеет место и в полевой теории — координаты $\varphi(x)$ флуктуируют. Например, в основном состоянии

$$\Delta_+(x, y) = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle \neq 0, \quad (12.44)$$

¹⁾ Детальный анализ коммутационных соотношений на языке процессов измерения был выполнен для квантовой электродинамики Н. Бором и Л. Розенфельдом [14].

несмотря на то, что

$$\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0. \quad (12.45)$$

Функцию $\Delta_+(x, y)$ можно вычислить, используя выражения (12.7), (12.10) и (12.17); в результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta_+(x, y) &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} e^{-ikx} e^{ik'y} \langle 0 | a(k) a^+(k') | 0 \rangle = \\ &= \int_{(k_0 = +\omega_k)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik(x-y)} = \Delta_+(x-y). \end{aligned}$$

При $y \rightarrow x$ это выражение переходит в квадратично расходящийся интеграл для вакуумных флуктуаций:

$$\langle 0 | \varphi^2(x) | 0 \rangle = \Delta_+(0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}. \quad (12.46)$$

В отличие от нулевой энергии, расходимость в (12.46) не может быть полностью устранена простым вычитанием. Мы уже знаем, что вакуумные флуктуации приводят к наблюдаемым конечным физическим эффектам в лэмбовском сдвиге, которые обсуждались именно с такой точки зрения в гл. 4.

Расходимость в (12.46) не вызывает, однако, беспокойства, поскольку на самом деле квадрат амплитуды поля в *любой точке* не является измеримой величиной. Локализация изолированной точки в пространстве и времени требует бесконечной энергии и соответственно бесконечно малой длины волны, что недостижимо при конечных энергиях. При практических вычислениях расходимость в (12.46) также не приводит к серьезным затруднениям. Тем не менее то обстоятельство, что аппарат теории поля постоянно оперирует с выражениями типа \mathcal{L} и P^μ , которые, подобно (12.46), содержат произведение полевых операторов, вычисляемых в одной и той же пространственно-временной точке, не может считаться удовлетворительным.

При этом следует иметь в виду, что с формальной математической точки зрения строго определено лишь произведение полей, усредненное по некоторой пространственно-временной области; только оно и имеет смысл физической наблюдаемой. К расходящимся результатам вида (12.46) следует относиться, как к указанию на ограниченность концепции непрерывного поля, которая представляет идеализацию, описывающую физическую реальность для больших пространственно-временных интервалов в смысле принципа соответствия. Задачей эксперимента остается установить, насколько малы интервалы, для которых требуется количественная модификация теории.

§ 74. Заряженное скалярное поле ¹⁾

Обсудив квантовую теорию действительного скалярного поля, мы можем обобщить полученные результаты для описания заряженных частиц, которые рассматривались в гл. 9. Эти частицы описываются комплексной волновой функцией

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)],$$

где φ_1 и φ_2 — действительные величины. Рассмотрим вначале два одинаковых невзаимодействующих действительных поля такого вида. Полевые уравнения

$$(\square_x + m^2)\varphi_1(x) = 0, \quad (\square_x + m^2)\varphi_2(x) = 0, \quad (12.47)$$

получаются из лагранжевой плотности

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} : \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\mu} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x^\mu} - m^2\varphi_1^2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\mu} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x^\mu} - m^2\varphi_2^2 \right) :, \quad (12.48)$$

где $: \dots :$ означает нормальное произведение, определенное выражениями (12.24), (12.25). Канонические импульсы, как и прежде, равны

$$\pi_1 = \dot{\varphi}_1, \quad \pi_2 = \dot{\varphi}_2, \quad (12.49)$$

а канонические коммутационные соотношения записываются в виде

$$[\varphi_k(x), \varphi_l(y)] = i\delta_{kl}\Delta(x-y). \quad (12.50)$$

Поскольку гамильтониан равен сумме двух членов типа (12.23), состояния с фиксированной энергией записываются в виде прямого произведения собственных векторов гамильтонианов, отвечающих квантам 1 и 2. В отсутствие членов с взаимодействием число частиц типа 1 и 2 сохраняется по отдельности, поэтому снова удобно нумеровать состояния собственными значениями операторов числа частиц

$$N_1(k) = a_1^+(k) a_1(k), \quad N_2(k) = a_2^+(k) a_2(k). \quad (12.51)$$

Как и в (12.30), (12.31), операторы $a_i^+(k)$, $a_i(k)$ соответственно рождают и уничтожают кванты типа i с импульсом \mathbf{k} и связывают, таким образом, состояния, различающиеся числами заполнения на ± 1 .

Все сказанное до сих пор справедливо для произвольных масс m_1 и m_2 в (12.47). В случае же равенства масс $m_1 = m_2 =$

¹⁾ См. [15].

$= m$ можно заменить два уравнения (12.47) одним уравнением для комплексной волновой функции

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2), \quad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 - i\varphi_2), \quad (12.52)$$

которая также удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (\square + m^2)\varphi^* = 0. \quad (12.53)$$

В терминах комплексных координат φ и φ^* плотность лагранжиана приобретает следующий вид:

$$\mathcal{L} = : \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} - m^2 \varphi^* \varphi :. \quad (12.54)$$

Канонические импульсы, соответствующие этим координатам, равны

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^* = \frac{\dot{\varphi}_1 - i\dot{\varphi}_2}{\sqrt{2}}$$

и

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_1 + i\dot{\varphi}_2}{\sqrt{2}}.$$

В результате для гамильтоновой плотности получаем

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} = \pi^* \pi + (\nabla \varphi^*) (\nabla \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi. \quad (12.55)$$

При этом коммутационные соотношения записываются в виде

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 = [\varphi^*(x), \varphi^*(y)], \quad [\varphi(x), \varphi^*(y)] = i\Delta(x-y). \quad (12.56)$$

При равных временах выражения (12.56) переходят в канонические коммутаторы

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] = [\pi^*(\mathbf{x}, t), \varphi^*(\mathbf{x}', t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Взяв фурье-преобразование решений, мы получим аналогично (12.7)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} [a_+(k) e^{-ikx} + a_-^+(k) e^{ikx}], \\ \varphi^*(x) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} [a_+^+(k) e^{ikx} + a_-^-(k) e^{-ikx}], \end{aligned} \quad (12.57)$$

где

$$\begin{aligned} a_+(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1(k) + ia_2(k)], & a_+^+(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1^+(k) - ia_2^+(k)], \\ a_-(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1(k) - ia_2(k)], & a_-^+(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1^+(k) + ia_2^+(k)]. \end{aligned} \quad (12.58)$$

Уравнения (12.7) и (12.57) различаются тем, что $\varphi(x)$ — теперь комплексное поле, и, следовательно, при квантовании ему сопоставляется неэрмитов оператор; согласно (12.58) $a_{\pm}^+(k) \neq a_{\pm}^{\dagger}(k)$.

Коммутаторы для $a_{\pm}(k)$ легко вычислить, повторяя выкладки, которые привели нас к (12.10):

$$\begin{aligned} [a_{+}(k), a_{\pm}^{\dagger}(k')] &= [a_{-}(k), a_{\pm}^{\dagger}(k')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [a_{+}(k), a_{-}^{\dagger}(k')] &= [a_{-}(k), a_{+}^{\dagger}(k')] = 0, \\ [a_{\pm}(k), a_{\pm}^{\dagger}(k')] &= [a_{\pm}^{\dagger}(k), a_{\pm}^{\dagger}(k')] = 0. \end{aligned} \quad (12.59)$$

Поскольку алгебра операторов $a_{\pm}(k)$ и $a_1(k)$, $a_2(k)$ одинакова, операторы числа частиц, записанные в терминах a_{+} и a_{-} , должны иметь один и тот же вид и одинаковые собственные значения. Запишем, возвращаясь к дискретной нормировке, операторы числа частиц для \pm квантов

$$N_{\mathbf{k}}^{+} = a_{+, \mathbf{k}}^{\dagger} a_{+, \mathbf{k}}, \quad N_{\mathbf{k}}^{-} = a_{-, \mathbf{k}}^{\dagger} a_{-, \mathbf{k}}. \quad (12.60)$$

Тогда

$$P_{\mu} = \sum_{\mathbf{k}} k_{\mu} (N_{\mathbf{k}}^{+} + N_{\mathbf{k}}^{-}). \quad (12.61)$$

Мы видим, что существует полная аналогия с теорией эрмитова скалярного поля (§ 70). Например,

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{k}}^{+} [a_{+, \mathbf{k}} \Phi(\dots n_{\mathbf{k}}^{+} \dots, \dots n_{\mathbf{k}}^{-} \dots)] &= \\ = a_{+, \mathbf{k}} (N_{\mathbf{k}}^{+} - 1) \Phi(\dots n_{\mathbf{k}}^{+} \dots, \dots n_{\mathbf{k}}^{-} \dots) &= \\ = (n_{\mathbf{k}}^{+} - 1) [a_{+, \mathbf{k}} \Phi(\dots n_{\mathbf{k}}^{+} \dots, \dots n_{\mathbf{k}}^{-} \dots)] &; \end{aligned}$$

при этом, вакуумное состояние с наименьшей энергией не содержит квантов любого вида, так что

$$a_{\pm, \mathbf{k}} \Phi_0 = 0. \quad (12.62)$$

Операторы $a_{\pm, \mathbf{k}}$ имеют смысл операторов уничтожения $+$ и $-$ квантов с импульсом \mathbf{k} , а $a_{\pm, \mathbf{k}}^{\dagger}$ представляют соответствующие операторы рождения. При нормальном упорядочении операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения, как в (12.60).

Из сказанного ясно, что не существует никакого различия между описанием полей в терминах эрмитовых амплитуд φ_1 и φ_2 и описанием посредством комплексно-сопряженных амплитуд φ , φ^* . Состояния с равным успехом могут характеризоваться числом квантов типа 1 и 2 или $+$ и $-$.

Уравнение (12.53) для комплексного поля φ наводит на мысль, что можно определить сохраняющийся ток, который мы рассматривали в гл. 9:

$$j^{\mu} = i(\varphi^* \nabla^{\mu} \varphi - \varphi \nabla^{\mu} \varphi^*),$$

причем

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

и

$$Q = i \int d^3x (\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi} \varphi^*) = \text{const.} \quad (12.63)$$

Легко проверить, что в рассматриваемой квантовой теории с лагранжианом (12.54) оператор Q остается константой движения. С этой целью достаточно записать Q в k -пространстве и убедиться, что Q коммутирует с H . При этом мы получаем

$$Q = \int d^3k [a_+^\dagger(k) a_+(k) - a_-^\dagger(k) a_-(k)]$$

или, в дискретных обозначениях,

$$Q = \sum_k (N_k^+ - N_k^-), \quad (12.64)$$

причем, согласно (12.59), $[Q, P_\mu] = 0$.

Из (12.64) следует, что $+$ и $-$ кванты несут заряды соответственно $+1$ и -1 . Поскольку $[P_\mu, a_+^\dagger(k)] = +k_\mu a_+^\dagger(k)$ и $[Q, a_+^\dagger(k)] = +a_+^\dagger(k)$, оператор $a_+^\dagger(k)$ увеличивает энергию на k^μ и заряд на $+1$, другими словами, $a_+^\dagger(k)$ — оператор рождения кванта с 4-импульсом k^μ и зарядом $+1$. Аналогично $a_+(k)$ — оператор уничтожения такого кванта, а $a_-^\dagger(k)$ и $a_-(k)$ — операторы рождения и уничтожения квантов с импульсом k^μ и зарядом -1 .

Согласно формулам (12.59), (12.61) и (12.64) кванты с зарядом ± 1 возникают в рассматриваемой теории симметричным образом. Для того чтобы придать какой-либо физический смысл заряду Q , необходимо ввести взаимодействие, которое различает знак и величину заряда. В теории уравнения Клейна — Гордона, гл. 9, ток j^μ был связан с электромагнитным полем, а величина Q отождествлялась с электрическим зарядом. В более общем случае мы можем считать кванты, отвечающие положительным собственным значениям оператора Q , *частицами*, а кванты, отвечающие отрицательным собственным значениям, *античастицами*. Зарядовая симметрия в квантовой теории поля при этом сводится к утверждению об инвариантности теории при замене частицы на античастицу. Комплексные амплитуды удобны для построения собственных векторов оператора заряда. Таковыми могут быть, например, π^+ - и π^- -мезоны, которые получаются действием на вакуум операторов $a_+^\dagger(k)$ и $a_-^\dagger(k)$ соот-

ветственно. В то же время описанный аппарат применим и для описания электрически нейтральных скалярных частиц, таких, например, как K^0 - и \bar{K}^0 -мезоны, которые различаются «странным» зарядом.

§. 75. Фейнмановский пропагатор

При рассмотрении в первом томе заряженной клейн-гордоновской частицы мы сталкивались с фейнмановской функцией Грина, которая удовлетворяет физическому граничному условию: в отсутствие взаимодействия только положительно-частотная часть решения движется вперед во времени. Посмотрим теперь, какая величина играет роль фейнмановского пропагатора в том случае, когда заряженная клейн-гордоновская частица рассматривается в формализме теории поля. Рассмотрим с этой целью пространственно-временное поведение состояния, содержащего 1 квант. Для того чтобы образовать (не нормированное) одночастичное состояние с зарядом $+1$, подействуем на вакуум оператором

$$\Psi_+(\mathbf{x}, t) = \varphi^*(\mathbf{x}, t) \Phi_0 \equiv \varphi^*(\mathbf{x}, t) |0\rangle. \quad (12.65)$$

В (12.65) вносит вклад только отрицательно-частотная часть оператора $\varphi^*(\mathbf{x})$, содержащая операторы рождения. Поэтому можно написать:

$$\Psi_+(\mathbf{x}^*, t) = \varphi^{*(-)}(\mathbf{x}, t) |0\rangle, \quad (12.66)$$

где отрицательно-частотная часть определена следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi^{*(-)}(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} a_+^\dagger(k) e^{ikx}, \\ \varphi^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} a_-^\dagger(k) e^{ikx}. \end{aligned} \quad (12.67)$$

Соответствующие положительно-частотные части полей в (12.57) будем обозначать через $\varphi^{*(+)}$ и $\varphi^{(+)}$.

Вероятность обнаружить состояние (12.65) в момент времени $t' > t$ в точке (\mathbf{x}', t') равна

$$\begin{aligned} \theta(t' - t) &< \Psi_+(\mathbf{x}', t') | \Psi_+(\mathbf{x}, t) \rangle = \\ &= \langle 0 | \varphi(\mathbf{x}', t') \varphi^*(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle \theta(t' - t) = \\ &= \langle 0 | \varphi^{(+)}(\mathbf{x}', t') \varphi^{*(-)}(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle \theta(t' - t). \end{aligned} \quad (12.68)$$

Это выражение представляет собой матричный элемент, описывающий рождение кванта с зарядом $+1$ в точке (\mathbf{x}, t) и

поглощение его в точке x' в некоторый более поздний момент времени $t' > t$. Другой способ увеличить заряд на $+1$ в точке (x, t) и уменьшить его на -1 в точке (x', t) — это создать квант с зарядом -1 в точке x' , t' , который, достигая затем точки x , будет поглощен вакуумом в момент времени $t > t'$. Амплитуда этого перехода равна

$$\begin{aligned} \theta(t - t') \langle \Psi_-(x, t) | \Psi_-(x', t') \rangle &= \\ &= \langle 0 | \varphi^*(x, t) \varphi(x', t') | 0 \rangle \theta(t - t') = \\ &= \langle 0 | \varphi^{*(+)}(x, t) \varphi^{(-)}(x', t') | 0 \rangle \theta(t - t'). \end{aligned} \quad (12.69)$$

Фейнмановский пропагатор равен сумме амплитуд (12.68) и (12.69)

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x' - x) &= \langle 0 | \varphi(x') \varphi^*(x) | 0 \rangle \theta(t' - t) + \\ &+ \langle 0 | \varphi^*(x) \varphi(x') | 0 \rangle \theta(t - t'). \end{aligned} \quad (12.70)$$

Используя (12.57), можно проверить, что это выражение совпадает с обычным выражением для фейнмановского пропагатора (9.10), (9.11) из гл. 9

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x' - x) &= \int \frac{d^3k}{2\omega_k (2\pi)^3} [\theta(t' - t) e^{-ik(x' - x)} + \theta(t - t') \times \\ &\times e^{ik(x' - x)}] = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x' - x)}, \end{aligned} \quad (12.71)$$

$$(\square_{x'} + m^2) \Delta_F(x' - x) = -\delta^4(x' - x).$$

При записи Δ_F в виде (12.71) непосредственно проявляется лоренцева инвариантность фейнмановского пропагатора. Поскольку полевые операторы коммутируют для пространственно-подобных интервалов, их произведение в (12.70) может быть упорядочено по времени лоренц-инвариантным образом. Удобно обозначать такое упорядочение, вводя хронологический оператор T , определенный согласно

$$T(a(x) b(x')) = a(x) b(x') \theta(t - t') + b(x') a(x) \theta(t' - t). \quad (12.72)$$

Оператор T означает, что поля надо располагать справа налево в порядке возрастания времени. Хронологическую операцию можно применить к произведению любого числа операторов. Фейнмановский пропагатор при этом записывается в виде

$$i\Delta_F(x' - x) = \langle 0 | T(\varphi(x') \varphi^*(x)) | 0 \rangle, \quad (12.73)$$

или, в терминах эрмитовых полей,

$$i\delta_{ij} \Delta_F(x' - x) = \langle 0 | T(\varphi_i(x') \varphi_j(x)) | 0 \rangle. \quad (12.74)$$

Фейнмановский пропагатор в квантовой теории поля, как в одночастичной теории, играет главную роль при вычислении амплитуд перехода. Функция $\Delta_F(x', x)$ описывает распространение частицы из точки x в точку x' , если $t' > t$, если же $t > t'$, то $\Delta_F(x', x)$ описывает распространение античастицы из точки x' в точку x . В результате мы получаем ту же самую физическую картину, которая обсуждалась в гл. 6, 9 при рассмотрении решений, отвечающих частицам и античастицам.

ЗАДАЧИ

1. Проверить, что для скалярного поля $-(i/2) \epsilon^{\mu\nu} [M_{\mu\nu}, \varphi] = \delta\varphi$.
2. Вычислить

$$\langle 0 | \bar{\varphi}^2 | 0 \rangle,$$

где

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{V} \int_V d^3x \varphi(x)$$

и V — сферическая область радиуса R .

ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ ПОЛЯ ДИРАКА

§ 76. Квантовая механика n тождественных частиц

В предыдущих параграфах мы рассмотрели те следствия, которые возникают при каноническом квантовании поля. В результате было получено непротиворечивое описание частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна. Описанный формализм, достаточно гибкий, чтобы включить процессы рождения и уничтожения частиц, успешно устранил также трудности однопчастичной теории, связанные с решениями с отрицательной частотой и отрицательными вероятностями.

Представляется естественным обсудить с этой точки зрения и другие примеры многочастичных задач, рассматривая лагранжианы, приводящие либо к уравнению Шредингера либо к уравнению Дирака для частиц со спином $1/2$. При этом, однако, мы сталкиваемся с той трудностью, что при квантовании возникают бозе — эйнштейновские частицы, в то время как известно, что частицы со спином $1/2$, например электроны и протоны, описываются статистикой Ферми — Дирака и удовлетворяют принципу запрета. Мы сталкиваемся, таким образом, с необходимостью изменить некоторые промежуточные этапы квантования. Эти изменения необходимы, как мы вскоре убедимся, и с другой точки зрения. Мы имеем в виду связь между спином и статистикой — один из наиболее значительных результатов квантовой теории поля.

Для того чтобы наиболее естественно ввести в метод квантования необходимые изменения, мы временно вернемся назад и рассмотрим многочастичную теорию фермионов, основанную на n -частичном уравнении Шредингера, которое мы постараемся переформулировать на языке теории поля. Другими словами, вместо того чтобы получить многочастичную теорию в результате квантования классического поля, как это было сделано в предыдущей главе, мы начнем сразу с задачи n частиц, имея при этом целью найти такую форму полевой теории, которая не противоречит принципу запрета [16—18].

Рассмотрим уравнение Шредингера для n тождественных невзаимодействующих частиц

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t) = \mathbf{H}\Psi, \quad (13.1)$$

где $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n H(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$ — сумма одночастичных гамильтонианов одинакового вида. Переменные в задаче разделяются и частное решение имеет вид произведения

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t) = \prod_{i=1}^n u_{\alpha_i}(\mathbf{x}_i, t) \quad (13.2)$$

решений $u_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ одночастичного уравнения Шредингера

$$\mathbf{H}u_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial u_{\alpha}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (13.3)$$

Общее решение уравнения (13.1) представляет суперпозицию частных решений (13.2) и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\mathbf{N}} c(\alpha_1, \dots, \alpha_n) u_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1, t) \dots u_{\alpha_n}(\mathbf{x}_n, t), \end{aligned} \quad (13.4)$$

где множитель $1/\sqrt{n!}$ выбран из соображений удобства. В формуле (13.4) \mathbf{N} есть число одночастичных уровней. Если функции $u_{\alpha_i}(\mathbf{x}_i, t)$ образуют ортонормированную систему, то условие нормировки коэффициентов разложения имеет вид

$$\frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\mathbf{N}} |c(\alpha_1, \dots, \alpha_n)|^2 = 1. \quad (13.5)$$

Набор коэффициентов c в (13.4) определяет n -частичное состояние и должен удовлетворять принципу неразличимости тождественных частиц. Другими словами, плотность $|\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t)|^2$ должна быть инвариантна при перестановке аргументов, т. е. Ψ сама по себе может быть либо симметричной, либо антисимметричной функцией¹⁾. Коэффициенты $c(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ соответственно симметричны или антисимметричны при перестановке индексов

$$c(\dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots) = \pm c(\dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots). \quad (13.6)$$

Конкретный выбор знака в (13.6) ведет либо к статистике Бозе — Эйнштейна, либо к статистике Ферми — Дирака.

¹⁾ В том случае, когда сам вектор Ψ записывается в виде столбца, возможен более общий вид статистики (см. в этой связи [19—21]).

Уравнение (13.6) несет в себе огромное количество информации, поскольку из него следует, что если известен какой-либо один коэффициент $c(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в (13.4), то из (13.6) получаются остальные $n! - 1$ коэффициентов. Поэтому разложение (13.4) можно записать в более компактной форме, если упорядочить α и определить новые коэффициенты

$$\bar{c}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} c(\alpha_1, \dots, \alpha_n), & \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При этом разложение (13.4) в случае статистики Ферми — Дирака может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^N \bar{c}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \sum_P \delta_P u_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1, t) \dots u_{\alpha_n}(\mathbf{x}_n, t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^N \bar{c}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \left\| \begin{array}{c} u_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1, t) \dots u_{\alpha_n}(\mathbf{x}_1, t) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_{\alpha_1}(\mathbf{x}_n, t) \dots u_{\alpha_n}(\mathbf{x}_n, t) \end{array} \right\|, \quad (13.7) \end{aligned}$$

где \sum — сумма по всем перестановкам P индексов α_i , δ_P — четность перестановки P .

§ 77. Представление чисел заполнения для фермионов

Информация, которую несет в себе волновая функция (13.4) или (13.7), заключается не в том, *какие именно* частицы имеют определенные квантовые числа, а в том, *сколько* тождественных частиц находится на том или ином квантовом уровне. В этом обстоятельстве и заключается аналогия с квантово-полевым описанием уравнения Клейна — Гордона. Состояние поля как n -частичной системы описывается числом квантов, или частиц, занимающих определенный одночастичный уровень. Разница при этом заключается лишь в том, что в случае антисимметричного решения числа заполнения для каждого состояния равны 0 или 1. Имея в виду указанную аналогию, мы рассмотрим теперь динамику n -частичной фермионной системы на языке квантовой теории поля.

Для начала изменим обозначения в (13.7) и вместо суммирования по уровням $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 1, \dots, N$ будем суммировать по числам заполнения n_α , которые указывают, свободен ($n_\alpha = 0$) или занят ($n_\alpha = 1$) уровень α . Обозначим через $\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; n_1, \dots, n_N; t)$ n -частичный детерминант Слэтера (вида (13.7)), составленный из одночастичных волновых функций u_{α_i} , где символы α_i обозначают занятые уровни. Пусть столбцы детер-

минанта упорядочены естественным образом, т. е. $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, причем

$$n_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \alpha_i \text{ для некоторого } i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Например, если в системе, содержащей семь уровней, частицы находятся на 2-м, 4-м и 5-м уровнях ($\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 5$), то

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3; 0101100; t) = \begin{vmatrix} u_2(\mathbf{x}_1, t) & u_4(\mathbf{x}_1, t) & u_5(\mathbf{x}_1, t) \\ u_2(\mathbf{x}_2, t) & u_4(\mathbf{x}_2, t) & u_5(\mathbf{x}_2, t) \\ u_2(\mathbf{x}_3, t) & u_4(\mathbf{x}_3, t) & u_5(\mathbf{x}_3, t) \end{vmatrix}. \quad (13.8)$$

В новых обозначениях волновая функция (13.7) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; t) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^1 c'(n_1, \dots, n_N) \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n_1, \dots, n_N; t), \end{aligned} \quad (13.9)$$

где

$$c'(n_1, \dots, n_N) = \bar{c}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (13.10)$$

и числа n_α определены, как и раньше.

Условие нормировки теперь имеет вид

$$\sum_{n_1, \dots, n_N=0}^1 |c'(n_1, \dots, n_N)|^2 = 1, \quad (13.11)$$

откуда следует, что коэффициенты $c'(n_1, \dots, n_N)$ можно интерпретировать как амплитуду вероятности появления данного набора $\{n_1, \dots, n_N\}$.

Для описания n -частичной фермионной системы на языке теории поля нужно ввести удобный способ построения, исходя из вакуумного состояния, n -частичной волновой функции. Из предварительного рассмотрения дырок в теории Дирака (т. 1) ясно, что центральную роль при динамическом описании системы играют процессы рождения и уничтожения частиц. Включение взаимодействия между частицами в (13.1) приведет к переходам между состояниями с различными квантовыми числами. Поэтому нас интересует амплитуда перехода частицы из состояния α в состояние α' .

С этой целью, следуя рецепту, сформулированному при рассмотрении теории Клейна — Гордона, введем операторы рожде-

ния и уничтожения, в терминах которых можно построить и связать между собой состояния α и α' . Прежде всего определим вакуумное состояние Φ_0 . Вакуум не содержит частиц вообще, поэтому его импульс и энергия равны нулю. Это следует и из решений уравнений (13.1) или (13.3). Оператор рождения определяется таким образом, что, действуя на Φ_0 , он образует одночастичное состояние Φ_α с квантовыми числами α :

$$a_\alpha^+ \Phi_0 = \Phi_\alpha \equiv |00 \dots 1 \dots\rangle. \quad (13.12)$$

Прежде чем связать эти состояния с волновой функцией в (13.1), построим простое и удобное представление. В силу принципа запрета состояние α либо занято, либо пусто. Представим эти две возможности столбцами $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_\alpha$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_\alpha$ соответственно. Тогда вакуумное состояние есть произведение столбцов, отвечающих всем пустым состояниям

$$\Phi_0 = \prod_{\alpha=1}^N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_\alpha, \quad (13.13)$$

а одночастичное состояние имеет вид

$$\Phi_{\alpha'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha'} \prod_{\alpha \neq \alpha'} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_\alpha. \quad (13.14)$$

Оператор рождения $a_{\alpha'}^+$ может быть поэтому представлен 2×2 -матрицей, действующей в пространстве α' -го состояния, которая, действуя на столбец $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\alpha'}$, дает $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha'}$. Эта матрица имеет вид $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}_{\alpha'}$ с произвольными x и y . В силу принципа Паули оператор $a_{\alpha'}^+$, действуя на занятое состояние $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha'}$, дает нулевой вектор. Поэтому мы положим $x = y = 0$, тогда

$$a_{\alpha'}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\alpha'}. \quad (13.15)$$

Аналогичным образом из условий $a_{\alpha'} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\alpha'}$ и $a_{\alpha'} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\alpha'} = 0$ находим оператор уничтожения

$$a_{\alpha'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\alpha'}, \quad (13.16)$$

эрмитово сопряженный $a_{\alpha'}^{\dagger}$. Из (13.15) и (13.16) получаем набор антикоммутиационных соотношений¹⁾ для $a_{\alpha'}$ и $a_{\alpha'}^{\dagger}$

$$\{a_{\alpha'}, a_{\alpha'}\} = 0, \quad (13.17a)$$

$$\{a_{\alpha'}^{\dagger}, a_{\alpha'}^{\dagger}\} = 0, \quad (13.17б)$$

$$\{a_{\alpha'}, a_{\alpha'}^{\dagger}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv 1. \quad (13.17в)$$

Таким образом, принцип Паули приводит вместо коммутаторов (12.10) в теории бозонов к антикоммутиационным соотношениям для операторов рождения и уничтожения. Уравнения (13.17а) и (13.17б) выражают тот факт, что нельзя создать или уничтожить два фермиона в одном и том же состоянии. Собственные значения произведения $a_{\alpha'}^{\dagger} a_{\alpha'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ для занятого и пустого состояний равны 1 и 0 соответственно. Это произведение имеет смысл оператора числа частиц, который обозначим

$$N_{\alpha'} = a_{\alpha'}^{\dagger} a_{\alpha'}.$$

Оператор $N_{\alpha'}$ отличается от оператора числа частиц для бозонов, поскольку его собственные значения равны 0 и 1.

Теперь можно простым образом связать результаты, полученные на языке одночастичных волновых функций $u_{\alpha}(x)$, с нашим операторным формализмом. Определим полевые операторы:

$$\chi(x, t) = \sum_{\alpha=1}^N u_{\alpha}(x, t) a_{\alpha}, \quad \chi^*(x, t) = \sum_{\alpha=1}^N u_{\alpha}^*(x, t) a_{\alpha}^{\dagger}. \quad (13.18)$$

Тогда волновая функция $u_{\alpha_i}(x, t)$ равна матричному элементу поля $\chi(x, t)$ между вакуумным состоянием Φ_0 и одночастичным состоянием Φ_{α_i} :

$$(\Phi_0, \chi(x, t), \Phi_{\alpha_i}) = u_{\alpha_i}(x, t). \quad (13.19)$$

Действуя в том же духе, можно получить из поля n -частичную волновую функцию (13.8), а также гамильтониан, собственные значения которого совпадают со спектром оператора N в (13.1). С этой целью рассмотрим состояния, содержащие несколько частиц. Операторы a_{α_i} и $a_{\alpha_i}^{\dagger}$ в (13.15), (13.16) комму-

¹⁾ Матрицы (13.15), (13.16) и соотношения (13.17) показывают, что существует полная аналогия между операторами $a_{\alpha'}$, $a_{\alpha'}^{\dagger}$ и матрицами Паули $\sigma_x - i\sigma_y$, $\sigma_x + i\sigma_y$. Вакуумное состояние (13.13) отвечает спиновому состоянию, в котором все спины направлены вниз; оператор $a_{\alpha'}^{\dagger}$ переворачивает спин α' -го состояния; таким образом, занятое состояние отвечает спину, направленному вверх.

тируют с a_{α_j} , $a_{\alpha_j}^+$, $j \neq i$, поскольку они действуют в различных подпространствах состояний. Например, если $i \neq j$, то

$$a_{\alpha_i}^+ a_{\alpha_j}^+ \Phi_0 = \Phi_{\alpha_i \alpha_j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha_i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha_j} \prod_{\alpha \neq \alpha_i, \alpha_j} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\alpha} = \Phi_{\alpha_j \alpha_i}. \quad (13.20)$$

Действуя на вакуум различными операторами $a_{\alpha_i}^+$, мы получим волновые функции, которые характеризуются некоторым порядком состояний α . При этом $\Phi_{\alpha_i \alpha_j}$ в (13.20) симметричны при перестановке индексов α_i и α_j , в то время как состояние Ψ , определенное выражением вида (13.8), антисимметрично. Поэтому с математической точки зрения удобно изменить операторы a_{α} , a_{α}^+ таким образом, чтобы они удовлетворяли антикоммутационным соотношениям [17] как в том случае, когда они действуют на одинаковые состояния, так и в том случае, когда они действуют на различные состояния. Это, в частности, означает, что для различных состояний α и α' модифицированные операторы b_{α}^+ удовлетворяют соотношениям

$$b_{\alpha}^+ b_{\alpha'}^+ |0\rangle = - b_{\alpha'}^+ b_{\alpha}^+ |0\rangle, \quad (13.21)$$

а не $a_{\alpha}^+ a_{\alpha'}^+ |0\rangle = + a_{\alpha'}^+ a_{\alpha}^+ |0\rangle$. Для того чтобы обеспечить знак минус в формуле (13.21) и в то же время сохранить интерпретацию b_{α}^+ как операторов рождения, положим

$$b_{\alpha}^+ = a_{\alpha}^+ \eta_{\alpha}, \quad (13.22)$$

где η_{α} — диагональный в пространстве чисел заполнения оператор. Подставляя (13.22) в (13.21), мы видим, что для выполнения условия (13.21) необходимо, чтобы

$$a_{\alpha_i}^+ \eta_{\alpha_j} = - \eta_{\alpha_j} a_{\alpha_i}^+, \quad a_{\alpha_j}^+ \eta_{\alpha_i} = \eta_{\alpha_i} a_{\alpha_j}^+ \quad \text{для } \alpha_i < \alpha_j. \quad (13.23)$$

Диагональный оператор $(1 - 2N_{\alpha})$ антикоммутирует¹⁾ с a_{α}^+ , поэтому

$$\eta_{\alpha_i} = \prod_{\alpha=1}^{\alpha_i-1} (1 - 2N_{\alpha}) = \prod_{\alpha=1}^{\alpha_i-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\alpha} \quad (13.24)$$

и

$$\eta_{\alpha_i} \Psi(n_1 \dots n_N) = \prod_{\alpha=1}^{\alpha_i-1} (-1)^{n_{\alpha}} \Psi(n_1 \dots n_N).$$

Оператор

$$b_{\alpha} = \eta_{\alpha} a_{\alpha} = a_{\alpha} \eta_{\alpha}$$

¹⁾ Оператор $(1 - 2N_{\alpha})$ аналогичен матрице Паули — σ_z .

эрмитово сопряжен b_α^+ ; его можно интерпретировать как оператор уничтожения. Оператор $b_{\alpha_i}^+$, действуя на свободное состояние $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\alpha_i}$, дает состояние $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha_i}$ с фазой $+1$ или -1 , которая зависит от того, четное или нечетное число частиц находится на уровнях $\alpha < \alpha_i$, поэтому состояние, в котором заняты уровни α_i и α_j , антисимметрично при перестановке индексов α_i и α_j . Операторы b_α и b_α^+ удовлетворяют тем же антикоммутиационным соотношениям, что и a_α и a_α^+

$$\{b_\alpha^+, b_\alpha^+\} = \{b_\alpha, b_\alpha\} = 0, \quad \{b_\alpha, b_\alpha^+\} = 1. \quad (13.25)$$

Более того, справедливы и более общие коммутационные соотношения

$$\{b_\alpha, b_{\alpha'}^+\} = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad \{b_\alpha, b_{\alpha'}\} = \{b_\alpha^+, b_{\alpha'}^+\} = 0, \quad (13.26)$$

которые могут быть проверены непосредственным вычислением. Например, при $\alpha > \alpha'$

$$\begin{aligned} b_\alpha b_{\alpha'} + b_{\alpha'} b_\alpha &= \eta_\alpha a_\alpha a_{\alpha'} \eta_{\alpha'} + \eta_{\alpha'} a_{\alpha'} a_\alpha \eta_\alpha = \\ &= -a_\alpha a_{\alpha'} \eta_\alpha \eta_{\alpha'} + a_{\alpha'} a_\alpha \eta_{\alpha'} \eta_\alpha = 0, \quad \alpha > \alpha'. \end{aligned}$$

Оператор числа частиц в терминах b и b^+ равен просто

$$N_\alpha = a_\alpha^+ a_\alpha = b_\alpha^+ b_\alpha. \quad (13.27)$$

Состояния

$$(b_N^+)^{n_N} \dots (b_\alpha^+)^{n_\alpha} \dots (b_1^+)^{n_1} \Phi_0 \equiv \Phi(n_1, \dots, n_N) \quad (13.28)$$

являются собственными функциями оператора N_α и образуют полный ортогональный набор

$$(\Phi(n'_1, \dots, n'_N), \Phi(n_1, \dots, n_N)) = \prod_{\alpha=1}^N \delta_{n_\alpha n'_\alpha}.$$

Образовав произвольную суперпозицию, получим

$$\Phi = \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^1 c'(n_1, \dots, n_N) (b_N^+)^{n_N} \dots (b_1^+)^{n_1} \Phi_0, \quad (13.29)$$

причем коэффициенты $c'(n_1, \dots, n_N)$ имеют смысл соответствующих амплитуд вероятностей:

$$(\Phi, \Phi) = \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^1 |c'(n_1, \dots, n_N)|^2 \quad (13.30)$$

и могут быть поэтому отождествлены с коэффициентами в сумме (13.9). Неисчезающие матричные элементы операторов b_α и b_α^+ равны

$$\begin{aligned} \langle \Phi(n'_1, \dots, n'_N), b_{\alpha_k}^+ \Phi(n_1, \dots, n_N) \rangle &= \\ &= \langle \Phi_0, b_{\alpha'_1} \dots b_{\alpha'_{n'}} b_{\alpha_k}^+ b_{\alpha_n}^+ \dots b_{\alpha_1}^+ \Phi_0 \rangle = \\ &= \begin{cases} (-)^{n'-k}, & \text{если } n_\alpha = n'_\alpha \text{ для } \alpha \neq \alpha_k \text{ и } n_{\alpha_k} = 0; n'_{\alpha_k} = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.31)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(n'_1, \dots, n'_N), b_{\alpha_k} \Phi(n_1, \dots, n_N) \rangle &= \\ &= \begin{cases} (-)^{n-k}, & \text{если } n_\alpha = n'_\alpha \text{ для } \alpha \neq \alpha_k \text{ и } n'_{\alpha_k} = 0; n_{\alpha_k} = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \end{aligned}$$

где $n = \sum_{\alpha=1}^N n_\alpha$, $n' = \sum_{\alpha=1}^N n'_\alpha$, α_k — k -й член упорядоченного набора $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $\alpha_{k'}$ — k' -й член набора $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'}\}$.

Точно так же как были построены одночастичные волновые функции (13.19), можно построить и антисимметричные n -частичные волновые функции. С этой целью введем полевой оператор $\varphi(\mathbf{x}, t)$, который отличается от (13.18) тем, что операторы a_α заменены в нем на взаимно антикоммутирующие операторы b_α :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^N u_\alpha(\mathbf{x}, t) b_\alpha, \quad \varphi^*(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^N u_\alpha^*(\mathbf{x}, t) b_\alpha^+. \quad (13.32)$$

Образовав матричный элемент между вакуумом и произвольным состоянием Φ вида (13.29) от произведения n полевых амплитуд $\varphi(\mathbf{x}_i, t)$, получим с учетом (13.31)

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \Phi_0, \varphi(\mathbf{x}_1, t) \dots \varphi(\mathbf{x}_n, t) \Phi \rangle = \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t), \quad (13.33)$$

где Ψ — антисимметричная волновая функция (13.9) системы n частиц.

С помощью антикоммутационных соотношений для операторов рождения и уничтожения можно получить антикоммута-

ционные соотношения для операторов φ и φ^* :

$$\{\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)\} = 0,$$

$$\{\varphi^*(\mathbf{x}, t), \varphi^*(\mathbf{x}', t)\} = 0,$$

$$\begin{aligned} \{\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi^*(\mathbf{x}', t)\} &= \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \{b_{\alpha}, b_{\alpha'}^{\dagger}\} u_{\alpha}(\mathbf{x}, t) u_{\alpha'}^*(\mathbf{x}', t) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N u_{\alpha}(\mathbf{x}, t) u_{\alpha}^*(\mathbf{x}', t) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (13.34)$$

Используя построенные операторы и векторы состояния, можно теперь сняться с якоря, оставив язык волновой функции, и перейти к формулировке N -частичного уравнения Шредингера (13.1) в теории квантовых полей. Перепишем уравнение (13.3) в терминах полевого оператора (13.32)

$$H(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (13.35)$$

По аналогии с теорией Клейна — Гордона это уравнение можно рассматривать как уравнение для классического поля φ , полученного из соответствующего лагранжиана. Наложив коммутационные соотношения (13.34), мы интерпретируем далее (13.35) как операторное уравнение, причем главное его отличие от уравнения Клейна — Гордона заключается в использовании антикоммутаторов вместо коммутаторов. Это отличие приводит к статистике Ферми — Дирака вместо статистики Бозе — Эйнштейна. Описанная процедура носит название *вторичного квантования*. При первом квантовании координаты классической частицы заменяются на квантовомеханические операторы, действующие в пространстве волновых функций. После этого одночастичное уравнение Шредингера само рассматривается как полевое уравнение, причем, налагая квантовые условия на амплитуды поля, мы получаем операторы, удовлетворяющие соотношениям (13.14). Выше мы показали, что новый подход приводит к тем же результатам, что и многочастичное уравнение Шредингера. Коэффициенты разложения $c'(n_1, \dots, n_N)$ как в (13.9), так и в (13.29) описывают состояние n -частичной системы в том или ином формализме. Полная энергия, выраженная

¹⁾ Здесь мы видим преимущество введения операторов b_{α}^{\dagger} вместо a_{α}^{\dagger} . Уравнения (13.33) и (13.34) не имеют столь простого вида, если использовать в (13.28) операторы a_{α}^{\dagger} .

через волновые функции, равна, согласно (13.9),

$$\int d^3x_1 \dots d^3x_n \Psi^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t) \sum_{i=1}^n H(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t) = \\ = \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^1 |c'(n_1, \dots, n_N)|^2 \left(\sum_{\alpha=1}^N n_{\alpha} E_{\alpha} \right). \quad (13.36)$$

Это выражение можно рассматривать также как среднее значение оператора гамильтониана

$$\mathbf{H} = \int d^3x \varphi^*(\mathbf{x}, t) H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \varphi(\mathbf{x}, t) = \\ = \sum_{\alpha=1}^N N_{\alpha} \int d^3x u_{\alpha}^* H u_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N N_{\alpha} E_{\alpha} \quad (13.37)$$

в состоянии (13.29), причем \mathbf{H} , как и следовало ожидать, имеет смысл гамильтонового оператора поля.

В заключение построим функцию Грина, описывающую распространение частицы от точки (\mathbf{x}, t) до точки (\mathbf{x}', t') ($t' > t$) и сравним ответ с результатами гл. 6. Для этого нам нужна амплитуда вероятности рождения частицы из вакуума в точке (\mathbf{x}, t) и последующего ее уничтожения при (\mathbf{x}', t') .

Волновая функция частицы, локализованной в точке \mathbf{x} , пропорциональна

$$\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}', t) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sum_{\alpha=1}^N u_{\alpha}(\mathbf{x}', t) u_{\alpha}^*(\mathbf{x}, t). \quad (13.38)$$

Из сравнения (13.38) с (13.9) и (13.29) получаем аналог (13.38) в методе вторичного квантования

$$\Psi_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^N u_{\alpha}^*(\mathbf{x}, t) b_{\alpha}^+ \Phi_0 = \varphi^*(\mathbf{x}, t) \Phi_0. \quad (13.39)$$

Функция Грина получается, если спроектировать $\Psi_1(\mathbf{x}, t)$ для частицы, образованной в точке (\mathbf{x}, t) , на одночастичное состояние $\Psi_1(\mathbf{x}', t')$ в более поздний момент времени $t' > t$:

$$G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = -i(\Psi_1(\mathbf{x}', t'), \Psi_1(\mathbf{x}, t)) \theta(t' - t) = \\ = -i\theta(t' - t) \langle 0 | \varphi(\mathbf{x}', t') \varphi^*(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle.$$

Используя (13.31) и (13.32), мы приводим это выражение к виду

$$G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = -i\theta(t' - t) \sum_{\alpha} u_{\alpha}(\mathbf{x}', t') u_{\alpha}^*(\mathbf{x}, t),$$

который совпадает с результатом (6.28), полученным для записывающей функции Грина в гл. 6.

Мы закончим наше сопоставление многочастичной теории и вторично-квантованного уравнения Шредингера, отметив два преимущества теоретико-полевого описания. Эти преимущества проявляются при вычислении матричных элементов, представляющих физический интерес, и привели в последнее время к широкому использованию методов теории поля в нерелятивистской задаче многих тел. Во-первых, операторы b_α и b_α^+ по своему построению автоматически обеспечивают антисимметрию волновых функций. Во-вторых, в терминах этих операторов мы получаем достаточно гибкий и в то же время простой и естественный язык для описания физических систем с переменным числом степеней свободы.

§ 78. Теория Дирака

Вернемся теперь к основному содержанию настоящей главы, а именно — к уравнению Дирака. Чтобы подчеркнуть близкую аналогию с теорией Клейна — Гордона, перейдем вначале к лагранжиану. Будем рассматривать 4 компоненты поля ψ_α и 4 компоненты сопряженного поля $\bar{\psi}_\alpha$ как 8 независимых переменных.

Построим лагранжиан, исходя из свободного уравнения Дирака

$$(i\hat{V} - m)\psi = 0. \quad (13.40)$$

Умножив это уравнение слева на $\delta\bar{\psi}$ и проинтегрируем по пространственно-временным координатам от t_1 до t_2 :

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \delta\bar{\psi}(x) (i\hat{V} - m)\psi(x) = \delta \int_{t_1}^{t_2} d^4x \bar{\psi}(x) (i\hat{V} - m)\psi(x). \quad (13.41)$$

Из (13.41) следует выражение для плотности лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) (i\hat{V} - m)\psi(x). \quad (13.42)$$

Варьируя действие в (13.41) по ψ , получим сопряженное уравнение

$$\bar{\psi}(-i\hat{V} - m) = 0.$$

Канонический метод дает импульс, сопряженный ψ :

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\dot{\psi}_\alpha^+. \quad (13.43)$$

Поскольку (13.41) не содержит производных $\dot{\bar{\psi}}$, импульс, сопряженный ψ_α^+ , равен нулю, а из уравнения (13.41) следует, что

$i\psi_\alpha^+$ есть импульс, сопряженный ψ_α . В результате получим гамильтонову плотность

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = \psi^+ (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi = \psi^+ i \frac{\partial}{\partial t} \psi, \quad (13.44)$$

причем последнее выражение в (13.44) следует из уравнения Дирака. Такой вид — одночастичный гамильтониан, зажатый между двумя спинорами, — согласуется с результатом в (13.37), полученным из нерелятивистского рассмотрения.

Из инвариантности \mathcal{L} при трансляциях и лоренцевых преобразованиях следует полный набор законов сохранения энергии, импульса и углового момента. Из (11.48) и (11.49) находим

$$\mathcal{F}^{\nu\mu} = i\bar{\psi}\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi, \quad (13.45)$$

откуда, с учетом (11.49), получаем выражения для операторов энергии и импульса

$$\begin{aligned} H &= \int \mathcal{F}^{00} d^3x = \int \psi^+ (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi d^3x, \\ \mathbf{P} &= \int \psi^+ (-i\nabla) \psi d^3x. \end{aligned} \quad (13.46)$$

Оператор плотности углового момента $\mathfrak{M}^{\mu\nu\lambda}$ и сохраняющийся оператор углового момента $M^{\nu\lambda}$ равны

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{\mu\nu\lambda} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu \left(x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - x^\lambda \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \Sigma^{\nu\lambda} \right) \psi, \\ M^{\nu\lambda} &= \int d^3x \mathfrak{M}^{0\nu\lambda}, \end{aligned} \quad (13.47)$$

где $\Sigma^{\nu\lambda} = 1/4 [\gamma^\nu, \gamma^\lambda]$ — спинорная матрица лоренцевых вращений, которая добавляется к спиновому угловому моменту в $\mathfrak{M}^{\mu\nu\lambda}$. В частности, для пространственных компонент получаем

$$\mathbf{J} \equiv (M^{23}, M^{31}, M^{12}) = \int d^3x \psi^+ \left(\mathbf{r} \times \frac{1}{i} \nabla + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) \psi. \quad (13.48)$$

Это выражение имеет обычный вид суммы орбитального и спинового углового момента, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

Для свободного уравнения Дирака можно определить еще один закон сохранения, если вспомнить, что из этого уравнения следует $\frac{\partial \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}{\partial x^\mu} = 0$ и что поэтому величина

$$Q = \int d^3x \psi^+ \psi \quad (13.49)$$

имеет смысл постоянного полного «заряда». Этот заряд аналогичен сохраняющемуся заряду (12.63) в теории Клейна — Гордона с неэрмитовыми полями.

Далее, чтобы получить полную квантовую теорию, нам остается только наложить коммутационные соотношения. Мы уже знаем, однако, что использование коммутационных соотношений (11.39) приводит к системе многих частиц, которые подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Поэтому, чтобы при построении квантовой теории электронов учесть принцип Паули, мы должны, как в предыдущем разделе, использовать не коммутаторы, а антикоммутаторы.

§ 79. Разложение в импульсном пространстве

Обратимся теперь к квантованию уравнения Дирака. Вначале перейдем в импульсное пространство и введем операторы рождения и уничтожения. После этого мы сможем непосредственно применить метод, обсуждавшийся в начале главы, причем для квантования нам нужны операторы вида (13.32), которые рожают частицы с учетом принципа Паули.

Общий вид разложения по плоским волнам для решения свободного уравнения Дирака (13.40) в соответствии с результатами гл. 3 имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} [b(p, s) u(p, s) e^{-ipx} + \\ + d^+(p, s) v(p, s) e^{ipx}], \quad (13.50) \\ \psi^+(\mathbf{x}, t) = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} [b^+(p, s) \bar{u}(p, s) \gamma_0 e^{ipx} + \\ + d(p, s) \bar{v}(p, s) \gamma_0 e^{-ipx}], \end{aligned}$$

где $E_p = p_0 = +\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$. В гл. 3 были выведены следующие полезные соотношения для спиноров¹⁾ $u(p, s)$ и $v(p, s)$:

а) Уравнение Дирака

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m) u(p, s) = 0, \quad \bar{u}(p, s) (\hat{p} - m) = 0, \\ (\hat{p} + m) v(p, s) = 0, \quad \bar{v}(p, s) (\hat{p} + m) = 0. \end{aligned}$$

¹⁾ См., например, (3.16) и (3.30). Напомним, что $u(-p, s)$ означает $u(\sqrt{p^2 + m^2}, -p, s)$, т. е. знак энергии в аргументе спинора всегда выбирается положительным. Нормировка амплитуд b и b^+ выбрана так, чтобы кванты поля имели заряд ± 1 .

б) Ортогональность

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, s) u(p, s') &= \delta_{ss'} = -\bar{v}(p, s) v(p, s'), \\ u^+(p, s) u(p, s') &= \frac{E_p}{m} \delta_{ss'} = v^+(p, s) v(p, s'), \\ \bar{v}(p, s) u(p, s') &= 0 = v^+(p, s) u(-p, s'). \end{aligned} \quad (13.51)$$

в) Полнота

$$\begin{aligned} \sum_{\pm s} [u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) - v_\alpha(p, s) \bar{v}_\beta(p, s)] &= \delta_{\alpha\beta}, \\ \sum_{\pm s} u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) &= \left(\frac{\hat{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta} \equiv (\Lambda_+(p))_{\alpha\beta}, \\ - \sum_{\pm s} v_\alpha(p, s) \bar{v}_\beta(p, s) &= \left(\frac{m - \hat{p}}{2m} \right)_{\alpha\beta} \equiv (\Lambda_-(p))_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

При вторичном квантовании дираковского поля коэффициенты разложения $b(p, s)$, $b^+(p, s)$, $d(p, s)$ и $d^+(p, s)$ становятся операторами, которые уничтожают и рождают частицы. Поскольку в нашем случае необходимо учесть требования принципа Паули, эти операторы следует подчинить антикоммутиационным соотношениям вида (13.26). В непрерывных обозначениях (13.50) имеем

$$\begin{aligned} \{b(p, s), b^+(p', s')\} &= \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ \{d(p, s), d^+(p', s')\} &= \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ \{b(p, s), b(p', s')\} &= \{d(p, s), d(p', s')\} = 0, \\ \{b^+(p, s), b^+(p', s')\} &= \{d^+(p, s), d^+(p', s')\} = 0, \\ \{b(p, s), d(p', s')\} &= \{b(p, s), d^+(p', s')\} = 0, \\ \{d(p, s), b(p', s')\} &= \{d(p, s), b^+(p', s')\} = 0. \end{aligned} \quad (13.52)$$

Отсюда легко вывести антикоммутиационные соотношения для полей (13.50). Например, с учетом (13.51) находим

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^+(\mathbf{x}', t)\} &= \\ &= \sum_{\pm s, \pm s'} \iint \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_p} \frac{m}{E_{p'}}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \times \\ &\times [u_\alpha(p, s) \bar{u}_\tau(p', s') \gamma_{\tau\beta}^0 e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} + v_\alpha(p, s) \bar{v}_\tau(p', s') \gamma_{\tau\beta}^0 e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}] = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \{[(\hat{p} + m) \gamma^0]_{\alpha\beta} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} - [(m - \hat{p}) \gamma^0]_{\alpha\beta} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} 2E_p \delta_{\alpha\beta} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (13.53)$$

Аналогичным образом можно получить

$$\{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}', t')\} = 0, \quad \{\psi^+(\mathbf{x}, t), \psi^+(\mathbf{x}', t')\} = 0. \quad (13.54)$$

Как и в шредингеровской теории, мы интерпретируем b^+ и d как операторы рождения для электронов. В теории Дирака мы сталкиваемся, однако, с той трудностью, что операторы d рожают состояния с отрицательной энергией. Это легко увидеть, если выразить энергию и импульс в терминах операторов b , d , b^+ и d^+ . Подставляя (13.50) в (13.46) и используя (13.51), получаем

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \sum_{\pm s, \pm s'} \iint \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m^2}{E_p E_{p'}}} E_{p'} \times \\ &\quad \times [b^+(p, s) \bar{u}(p, s) \gamma_0 e^{ipx} + d(p, s) \bar{v}(p, s) \gamma_0 e^{-ipx}] \times \\ &\quad \times [b(p', s') u(p', s') e^{-ip'x} - d^+(p', s') v(p', s') e^{ip'x}] = \\ &= \sum_{\pm s, \pm s'} \int d^3p m [b^+(p, s) b(p, s') u^+(p, s) u(p, s') - \\ &\quad - d(p, s) d^+(p, s') v^+(p, s) v(p, s')] = \\ &= \sum_{\pm s} \int d^3p E_p [b^+(p, s) b(p, s) - d(p, s) d^+(p, s)]. \quad (13.55) \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\mathbf{P} = \sum_{\pm s} \int d^3p \mathbf{p} [b^+(p, s) b(p, s) - d(p, s) d^+(p, s)]. \quad (13.56)$$

Из этих выражений и из (13.52) следует, что $d(p, s)$ рождает частицу с отрицательной энергией $-E_p$ и импульсом $-\mathbf{p}$, а $b^+(p, s)$ рождает частицу с положительной энергией E_p и импульсом \mathbf{p} , что же касается операторов $d^+(p, s)$ и $b(p, s)$, то они имеют смысл соответствующих операторов уничтожения.

Отметим также, что гамильтониан в (13.55) не является положительно определенным оператором. Это приводит к очевидной трудности в теории, поскольку в этом случае всегда можно построить состояние с энергией, меньшей любой наперед заданной, добавляя необходимое количество частиц с отрицательной энергией. Тем не менее эту трудность можно устранить, используя теорию дырок, которая обсуждалась в гл. 5. Согласно этой теории вакуум определяется как состояние, в котором заполнены все состояния с отрицательной энергией и свободны лишь уровни с положительной энергией. Тот факт, что подобное определение вакуума *в принципе* возможно, суще-

ственным образом опирается на принцип Паули и метод квантования с антикоммутирующими соотношениями. При попытке квантования поля Дирака с коммутаторами мы немедленно столкнулись бы с фундаментальными неразрешимыми противоречиями. Согласно статистике Бозе — Эйнштейна, в любое данное состояние всегда можно добавить неограниченное число частиц, при этом для гамильтониана (13.55) не существует основного состояния с наименьшей энергией. Связь между антикоммутирующими и теорией Дирака является частным случаем фундаментальной теоремы в теории локального, лоренц-инвариантного поля. Эта теорема, впервые доказанная Паули в 1940 г., утверждает, что частицы с полуцелым спином подчиняются статистике Ферми — Дирака, а частицы с целым спином подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна¹⁾. В гл. 16 мы рассмотрим этот вопрос с более общей точки зрения.

Возвращаясь к теории дырок, перепишем 4-вектор энергии-импульса в виде

$$P^\mu = \sum_{\pm s} \int d^3p p^\mu [b^+(p, s) b(p, s) + d^+(p, s) d(p, s) - \{d(p, s), d^+(p, s)\}]. \quad (13.57)$$

При действии на вакуум первые два члена в (13.57) дают нуль, поскольку в состоянии вакуума нет электронов с положительной энергией и дырок с отрицательной энергией. Последний же член в (13.57) дает бесконечную константу. Эту константу можно не учитывать, если все энергии и импульсы отсчитывать от энергии и импульса вакуума. Выполнение же последнего условия можно обеспечить, переопределив P^μ в терминах нормальных произведений полевых амплитуд. Произведение операторов полей в нормальной форме пишется так, что положительно-частотные части

$$\begin{aligned} \psi^{(+)} &= \sum_{\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} b(p, s) u(p, s) e^{-ipx}, \\ \bar{\psi}^{(+)} &= \bar{\psi}^{(-)} = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} d(p, s) \bar{v}(p, s) e^{-ipx} \end{aligned}$$

¹⁾ См. [22]. Если нарушить связь спина со статистикой в выражениях (12.14) и (12.15) для квантов со спином 0, то 4-вектор энергии-импульса не будет более представлять собой оператор, собственные векторы которого описывают физические состояния системы, а сведется лишь к бесконечной константе.

стоят всегда справа от отрицательно-частотных частей

$$\psi^{(-)} = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} d^+(p, s) v(p, s) e^{ipx},$$

$$\bar{\psi}^{(-)} = \bar{\psi}^{(+)} = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} b^+(p, s) \bar{u}(p, s) e^{ipx}.$$

Для антикоммутирующих полей нормальное произведение определяется так, что каждый член меняет знак при каждой перестановке, необходимой для приведения полей к нормальной форме, например:

$$:\bar{\psi}_\alpha \psi_\beta: = \bar{\psi}_\alpha^{(+)} \psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\beta^{(-)} - \psi_\beta^{(-)} \bar{\psi}_\alpha^{(+)}. \quad (13.58)$$

При таком определении билинейная форма 4-вектора энергии-импульса только c -числом отличается от

$$P^\mu = \sum_{\pm s} \int d^3 p p^\mu [b^+(p, s) b(p, s) + d^+(p, s) d(p, s)]. \quad (13.59)$$

Оператор $b(p, s)$ уничтожает, а оператор $b^+(p, s)$ рождает электроны с положительной энергией; по аналогии с теорией Клейна — Гордона можно ввести оператор числа частиц

$$N^{(+)}(p, s) = b^+(p, s) b(p, s).$$

Собственные значения оператора $N^{(+)}(p, s) d^3 p$ равны числу электронов со спином s в интервале импульсов $d^3 p$. Оператор $d^+(p, s)$ уничтожает электроны с отрицательной энергией; этот процесс в теории дырок рассматривается как рождение позитрона. Аналогично $d(p, s)$ уничтожает позитрон, и

$$N^{(-)}(p, s) = d^+(p, s) d(p, s)$$

есть оператор числа частиц с положительной энергией. Выражение (13.59) содержит вклад частиц обоих сортов

$$P^\mu = \sum_{\pm s} \int d^3 p p^\mu [N^{(+)}(p, s) + N^{(-)}(p, s)]. \quad (13.60)$$

Аналогичным образом можно построить оператор заряда. Подставляя (13.50) в (13.49) и учитывая нормальный порядок операторов, получим прямым вычислением

$$Q = \int d^3 x : \psi^\dagger \psi : = \sum_{\pm s} \int d^3 p : b^+(p, s) b(p, s) + d(p, s) d^+(p, s) : =$$

$$= \sum_{\pm s} \int d^3 p [N^{(+)}(p, s) - N^{(-)}(p, s)]. \quad (13.61)$$

Нормальное упорядочивание в (13.61) позволяет избавиться от бесконечной константы — полного заряда всех электронов с отрицательными энергиями. В выражениях (13.60) и (13.61) проявляется симметрия квантовой теории поля Дирака относительно перестановки электронов и позитронов, имеющих одинаковые массы, но противоположные заряды. В гл. 5 мы уже обсуждали зарядовую симметрию в применении к теории позитрона. При этом сохраняющийся ток $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ был связан с электромагнитным полем и заряд (13.61) рассматривался именно как *электрический* заряд. Такое отождествление основывается на классической аналогии, тем не менее возможна и более общая интерпретация сохраняющегося заряда — мы обсудим ее в гл. 15.

Рассмотрим теперь оператор углового момента. С учетом нормального порядка операторных множителей в (13.48), легко показать, что состояние, в котором позитрон находится в покое и имеет проекцию спина $+1$ на ось z

$$\begin{aligned} \Psi_{1 \text{ positron}} &= d^+(p, s)|0\rangle, \\ p &= (m, 0, 0, 0), \quad s = (0, 0, 0, +1) \end{aligned} \quad (13.62)$$

есть собственное состояние оператора

$$J_z = \int d^3x : \psi^+ \left[\left(\mathbf{r} \times \frac{1}{i} \nabla \right)_z + \frac{1}{2} \sigma_z \right] \psi :,$$

отвечающее собственному значению $+1/2$, и поэтому действительно описывает частицу с проекцией спина $+1/2$. Запишем далее

$$J_z \Psi_{1 \text{ positron}} = [J_z, d^+(p, s)]|0\rangle,$$

где использовано соотношение $J_z|0\rangle = 0$, и вычислим коммутатор:

$$\begin{aligned} J_z \Psi_{1 \text{ positron}} &= \\ &= - \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} e^{-ipx} v^+(p, s) \left[\left(\mathbf{r} \times \frac{1}{i} \nabla \right)_z + \frac{1}{2} \sigma_z \right]. \end{aligned}$$

Так как оператор углового момента $L_z = -i(\mathbf{r} \times \nabla)_z$ эрмитов, мы можем подействовать им налево, при этом для частицы в покое $L_z \rightarrow 0^1$). Поскольку при нашем выборе s в (13.62) спинор $v(p, s)$ равен

$$v(p, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

¹⁾ Для строгого доказательства возможности проведения интегрирования по частям лучше использовать вместо плоских волн волновые пакеты.

мы получаем

$$v^+(p, s) \sigma_z = -v^+(p, s),$$

$$\begin{aligned} J_z \Psi_{1 \text{ positron}} &= + \frac{1}{2} \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx} \sqrt{\frac{m}{E_p}} v^+(p, s) \psi(x) |0\rangle = \\ &= \frac{1}{2} d^+ (p, s) |0\rangle = + \frac{1}{2} \Psi_{1 \text{ positron}}. \end{aligned}$$

Таким образом, метод вторичного квантования в сочетании с теорией дырок приводит к разумному результату: спин позитрона противоположен спину дополнительного электрона с отрицательной энергией.

§ 80. Релятивистская ковариантность

Квантовая теория поля Дирака инвариантна при трансляциях и преобразованиях Лоренца. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить совместность антикоммутационных соотношений (13.53) и (13.54) и гейзенберговских уравнений (11.70) и (11.73):

$$i[P^\mu, \psi(x)] = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu},$$

$$i[M^{\mu\nu}, \psi(x)] = x^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\nu} - x^\nu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi(x). \quad (13.63)$$

Эта проверка с использованием выражений (13.46) и (13.47) для P^μ и $M^{\mu\nu}$ производится непосредственным вычислением, которое мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Поскольку явное решение (13.50) для свободного поля Дирака известно, можно вычислить антикоммутационные соотношения и для неравных времен, причем результат может быть записан в ковариантном виде. Рассматривая (13.53) при неравных временах, получим

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x, t), \psi_\beta^+(x', t')\} &= \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{[(\beta + m) \gamma^0]_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')} - [(m - \beta) \gamma^0]_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')}\} = \\ &= (i\hat{\nabla}_x + m)_{\alpha\beta} \Delta(x - x'), \end{aligned}$$

где $\Delta(x - x')$ — инвариантная сингулярная функция, определенная выражением (12.37).

Умножив антикоммутатор на γ^0 , приведем его к виду

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = i(i\hat{\nabla}_x + m)_{\alpha\beta} \Delta(x - x') \equiv -iS_{\alpha\beta}(x - x'). \quad (13.64)$$

Проделав аналогичные вычисления для антикоммутаторов (13.54), получим

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = 0. \quad (13.65)$$

В ковариантности этих выражений можно убедиться, подействовав на поля лоренцевым преобразованием (11.67)

$$U(a, b)\psi(x)U(a, b)^{-1} = S^{-1}(a)\psi(ax + b),$$

причем для спинорного поля матрица S удовлетворяет условию

$$S^{-1}\gamma^\mu S = a^\mu_\nu \gamma^\nu.$$

Правая часть в (13.64) есть c -число и не изменяется при преобразовании $U(a, b) \dots U^{-1}(a, b)$ с унитарными операторами U . В левой же части получаем

$$\begin{aligned} U(a, b)\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}U^{-1}(a, b) &= \\ &= S_{\alpha\tau}^{-1}(a)\{\psi_\tau(ax + b), \bar{\psi}_\lambda(ax' + b)\}S_{\lambda\beta}(a) = \\ &= S_{\alpha\tau}^{-1}(a)(-\hat{\nabla}_{ax} + im)_{\tau\lambda}S_{\lambda\beta}(a)\Delta(ax - ax') = \\ &= (-\hat{\nabla}_x + im)_{\alpha\beta}\Delta(x - x'), \end{aligned}$$

где учтено, что $\Delta(x - x')$ — инвариантная функция и $S^{-1}(a)\hat{\nabla}_{ax}S(a) = \hat{\nabla}_x$. Тем самым мы видим, что выражение (13.64) ковариантно, поскольку обе части его преобразуются при лоренцевых преобразованиях одинаковым образом. Аналогичный результат сразу же получается для антикоммутаторов в (13.65). В § 72 мы уже показали, что функция $\Delta(x - y)$ равна нулю для пространственно-временных интервалов $(x - y)^2 < 0$; то же самое относится, следовательно, и к $S(x - y)$. Поэтому, хотя сами по себе поля при $(x - y)^2 < 0$ и не коммутируют, билинейные формы, локальным образом построенные из полей, коммутируют, если только координаты разделены пространственно-подобным интервалом:

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x), \bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\tau(x')] &= \bar{\psi}_\alpha(x)\{\psi_\beta(x), \bar{\psi}_\lambda(x')\}\psi_\tau(x') - \\ &- \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\lambda(x')\}\psi_\beta(x)\psi_\tau(x') + \bar{\psi}_\lambda(x')\bar{\psi}_\alpha(x)\{\psi_\beta(x), \psi_\tau(x')\} - \\ &- \bar{\psi}_\lambda(x')\{\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\tau(x')\}\psi_\beta(x) = 0 \quad \text{для } (x - x')^2 < 0. \end{aligned} \quad (13.66)$$

Так как все амплитуды, которым можно придать тот или иной физический смысл, например плотность заряда или импульса, содержат билинейные произведения операторов и удовлетворяют условию (13.66), то теория Дирака, так же как и теория Клейна — Гордона, согласуется с нашим интуитивным представлением о микропричинности.

§ 81. Фейнмановский пропагатор в теории Дирака

В заключение построим одночастичную функцию Грина, соответствующую фейнмановскому пропагатору в позитронной теории. Амплитуда, описывающая рождение позитрона в точке $x = (x, t)$, равна

$$\Psi_{\alpha}(x) = \psi_{\alpha}^{+}(x) | 0 \rangle,$$

где индекс $\alpha = 1, 2, 3, 4$ нумерует спинорные компоненты. Амплитуда, описывающая распространение этого электрона в точку x' (при $t' > t$), описывается спин-тензором

$$\langle 0 | \psi_{\beta}(x') \psi_{\alpha}^{+}(x) | 0 \rangle \theta(t' - t). \quad (13.67)$$

Согласно результатам гл. 6 фейнмановский пропагатор не зануляется при $t' < t$, поскольку наряду с распространением электрона он описывает также распространение позитрона с положительной энергией, рожденного в точке x' и движущегося вперед во времени в точку x , где он уничтожается. Как и в уравнении Клейна — Гордона, соответствующая амплитуда получается перестановкой операторов в (13.67):

$$\langle 0 | \psi_{\alpha}^{+}(x') \psi_{\beta}(x) | 0 \rangle. \quad (13.68)$$

Каждая из амплитуд (13.67), (13.68) увеличивает на единицу заряд в точке x' и уменьшает его на единицу в точке x ; взяв их разность, мы получим полную функцию Грина. Определим далее функцию $S_F(x', x)$ соотношением

$$(S_F(x', x) \gamma^0)_{\beta\alpha} = -i \langle 0 | \psi_{\beta}(x') \psi_{\alpha}^{+}(x) | 0 \rangle \theta(t' - t) + \\ + i \langle 0 | \psi_{\alpha}^{+}(x) \psi_{\beta}(x') | 0 \rangle \theta(t - t'). \quad (13.69)$$

Легко проверить, что

$$(i\hat{\nabla}_{x'} - m)_{\lambda\beta} (S_F(x', x) \gamma^0)_{\beta\alpha} = \\ = \gamma_{\lambda\beta}^0 \langle 0 | \{ \psi_{\beta}(x'), \psi_{\alpha}^{+}(x) \} | 0 \rangle \delta(t' - t) = \gamma_{\lambda\alpha}^0 \delta^4(x' - x),$$

или

$$(i\hat{\nabla}_{x'} - m) S_F(x' - x) = \delta^4(x' - x). \quad (13.70)$$

Функция $S_F(x' - x)$ совпадает с фейнмановским пропагатором, который мы уже определили и постоянно использовали в первом томе при рассмотрении позитронной теории. Непосредственное вычисление матричных элементов в (13.69) приводит к знакомой сумме по волновым функциям (6.48).

В квантовой теории поля мы приходим к функции Грина, рассматривая электроны и позитроны с положительной энергией,

которые всегда движутся вперед во времени. Действительно, и те и другие симметрично содержатся в выражении (13.69), причем относительный знак двух членов в (13.69) выбран так, чтобы получить затем антикоммутатор в формуле (13.70). В позитронной же теории мы рассматриваем распространение заряда, который движется либо вперед, либо назад во времени в зависимости от знака энергии. Подобное отождествление позитрона с положительной энергией, движущегося вперед по времени с электроном с отрицательной энергией, движущимся назад во времени, уже встречалось в гл. 5.

Фейнмановский пропагатор (13.69) играет центральную роль при различного рода вычислениях в теории поля. Его можно выразить в более компактной форме, если ввести хронологически-упорядоченное произведение полей, которое уже встречалось в (13.69) на примере уравнения Клейна — Гордона. Для того чтобы учесть знак минус в (13.69), мы изменим определение T -операции, вводя минус для каждой перестановки полей, которые квантуются с антикоммутаторами. Другими словами, для двух полей Ферми — Дирака $a(x)$ и $b(x)$

$$\begin{aligned} T(a(x)b(x')) &= a(x)b(x')\theta(t-t') - b(x')a(x)\theta(t'-t) = \\ &= -T(b(x')a(x)). \end{aligned} \quad (13.71)$$

В результате фейнмановский пропагатор равен

$$S_F(x', x)_{\beta\alpha} = -i \langle 0 | T(\psi_\beta(x'), \bar{\psi}_\alpha^+(x)) | 0 \rangle. \quad (13.72)$$

ЗАДАЧИ

1. Выписать n -частичный гамильтониан в уравнении Шредингера и в квантовой теории поля с учетом двухчастичных потенциалов взаимодействия.

2. Доказать, что $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathfrak{M}^{\mu\nu\lambda} = 0$ и что оператор $M^{\nu\lambda} = \int d^3x \mathfrak{M}^{0\nu\lambda}$ равен не зависящей от времени константе.

3. Проверить (13.54) и (13.56).

4. Вывести уравнения (13.63); получить соответствующий результат в p -пространстве.

КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 82. Введение

Поскольку электромагнитное поле является классической наблюдаемой, казалось бы, что его квантование следует рассмотреть в первую очередь. По иронии судьбы, однако, из всех рассматриваемых полей это поле наиболее трудно для квантования. В частности, наиболее распространенный метод квантования электромагнитного поля, развитый Гупта и Блейером [23], противоречит одному из важнейших принципов теории поля, которого мы до сих пор неукоснительно придерживались, — постулату положительной вероятности. Возможен тем не менее и канонический метод квантования. В действительности именно каноническим способом и было в 1929 г. впервые проквантовано электромагнитное поле [24]. Однако этот способ обладает тем недостатком, что процедура квантования не обладает явной ковариантностью. Метод Гупта — Блейера, возникший лишь двадцать лет спустя, был стимулирован развитием современной техники ковариантного вычисления в теории поля. Этот метод обеспечивает ковариантную формулировку квантования, хотя и ценой потери ясной физической интерпретации.

В нашем изложении мы будем следовать канонической схеме квантования. Метод Гупта — Блейера изложен во многих учебниках, например у Швебера, Яуха и Рорлиха, Боголюбова и Ширкова, Ахиезера и Берестецкого [25—28].

Трудности при квантовании возникают из-за использования числа переменных большего, чем число независимых степеней свободы. Электромагнитное поле обычно описывается в терминах четырех компонент вектора потенциала A_μ . Хотя непосредственный физический смысл имеют напряженности поля, определяемые тензором

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (14.1)$$

именно потенциалы A_μ естественным образом входят в члены с взаимодействием и в амплитуды перехода. Мы уже сталкивались с этим обстоятельством при выполнении расчетов в первом томе. Но четыре компоненты A_μ не могут одновременно рассматриваться как независимые переменные. Поэтому каноническая схема квантования приводит к ряду трудностей. Именно с этими трудностями мы уже сталкивались при попытке применить классический канонический формализм для максвелловского поля.

Все вышесказанное непосредственно связано с тем обстоятельством, что разложение электромагнитного поля по плоским волнам содержит только поперечные компоненты, т. е. волны, вектор поляризации которых пространственно-подобен и ортогонален волновому вектору. Условие поперечности накладывает ограничения на ориентацию вектора-потенциала. Динамическими же переменными являются только две поперечные компоненты вектора-потенциала, только их и нужно рассматривать при квантовании. С другой стороны, не существует какого-либо инвариантного способа выбрать два независимых поперечных вектора поляризации, отвечающих данному волновому вектору, поскольку всегда существует набор выделенных лоренцевых систем, в которых зануляется временная компонента каждого вектора поляризации. Именно в этом месте и начинаются трудности с лоренцевой ковариантностью. Вскоре, когда мы детально рассмотрим квантование, это обстоятельство станет даже слишком очевидным.

При последующем рассмотрении мы отбросим требование явной лоренцевой ковариантности и выберем векторы поляризации фотона каким-либо специальным образом. При этом мы исходим, однако, из лоренц-инвариантных уравнений для максвелловского поля, и в конце концов, когда дым рассеется, мы получим те же самые ковариантные правила вычислений, которые были уже выведены в гл. 7, 8 с помощью более или менее интуитивных соображений. Эти правила дают одинаковый результат во всех лоренцевых системах.

§ 83. Квантование

Компоненты напряженностей электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{B} образуют антисимметричный тензор второго ранга, обозначаемый через

$$F^{\mu\nu} = \begin{matrix} \begin{matrix} \mu \downarrow & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{matrix} \end{matrix}. \quad (14.2)$$

Связь $F^{\mu\nu}(x)$ с векторным потенциалом $A^\mu(x) = (\Phi, \mathbf{A})$ дается, согласно (14.1), уравнениями

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (14.3)$$

Эти уравнения можно написать в виде двух уравнений Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (14.4)$$

Два оставшихся уравнения Максвелла в отсутствие источников зарядов и токов имеют вид

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

или

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \dot{\mathbf{E}}. \quad (14.5)$$

Ясно далее, что все компоненты поля удовлетворяют волновому уравнению

$$\square F_{\mu\nu}(x) = 0. \quad (14.6)$$

Для данных напряженностей поля $F^{\mu\nu}(x)$ существует много потенциалов, отличающихся друг от друга градиентным преобразованием

$$\tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x^\mu}, \quad (14.7)$$

где $\Lambda(x)$ — произвольная функция \mathbf{x} и t . Уравнение (14.7) выражает градиентную свободу в выборе векторного потенциала: если $A_\mu(x)$ удовлетворяет уравнению (14.1), то ему удовлетворяет и $\tilde{A}_\mu(x)$. Вопрос о конкретном выборе калибровки мы пока оставим открытым.

Для того чтобы с помощью принципа Гамильтона вывести уравнения (14.5) из лагранжиана, умножим это уравнение на бесконечно малую вариацию $\delta A_\mu(x)$, которая исчезает при t_1 и t_2 , и проинтегрируем по всему пространству и по времени в интервале (t_1, t_2) :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} d^4x \frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} \delta A_\mu(x) = - \int_{t_1}^{t_2} d^4x F^{\mu\nu} \delta \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \\ &= - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} d^4x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = - \frac{1}{4} \delta \int_{t_1}^{t_2} d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Отсюда видно, что подходящей плотностью лагранжиана для свободного максвелловского поля является выражение

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2). \quad (14.9)$$

При таком выборе \mathcal{L} принцип Гамильтона воспроизводит полевые уравнения (14.5), если каждая из четырех компонент вектора $A^\mu(x)$ рассматривается как независимая степень свободы.

Далее, используя стандартные правила, построим сопряженные импульсы

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0, \quad \pi^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = -\dot{A}^k - \frac{\partial A_0}{\partial x^k} = E^k. \quad (14.10)$$

В результате для плотности гамильтониана получаем

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^3 \pi^k \dot{A}_k - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla \Phi, \quad (14.11)$$

а сам гамильтониан равен

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x (E^2 + B^2), \quad (14.12)$$

причем последний член в (14.11) исчезает при интегрировании по частям с использованием уравнения Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

При квантовании максвелловского поля мы рассматриваем $A^\mu(x)$ как оператор и вводим коммутационные соотношения между A^μ и каноническими импульсами π^k . Попробуем близко следовать каноническому методу и рассмотрим зануляющиеся одновременные коммутаторы

$$\begin{aligned} [A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] &= 0, \\ [\pi^k(\mathbf{x}, t), \pi^l(\mathbf{x}', t)] &= 0, \\ [\pi^k(\mathbf{x}, t), A^0(\mathbf{x}', t)] &= 0. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Мы видим, что скалярный потенциал оказывается выделенным, в результате теряется явная ковариантность теории. Поскольку импульс $\pi^0(x)$, сопряженный $A^0(x)$, равен нулю, $A^0(x)$ коммутирует со всеми операторами и, следовательно, является не оператором, а c -числом в противоположность пространственным компонентам $A^k(x)$. В этом месте нам приходится пожертвовать лоренцевой ковариантностью. Продолжая рассмотрение канонического метода квантования, мы, однако, имеем в виду, что исходные уравнения лоренц-ковариантны. И хотя в дальнейшем мы будем сталкиваться со многими выражениями, которые не лоренц-, не градиентно-инвариантны, в конце концов мы обнаружим, что наши физические результаты — амплитуды перехода (S -матричные элементы) — лоренц-инвариантны и не зависят от выбора калибровки.

Для одновременных коммутаторов между потенциалами $A_j(\mathbf{x}', t)$ и сопряженными импульсами $\pi^k(\mathbf{x}, t)$ канонический метод дает¹⁾

$$[\pi^i(\mathbf{x}, t), A_j(\mathbf{x}', t)] = -[E^i(\mathbf{x}, t), A^j(\mathbf{x}', t)] = \\ = -i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (14.14)$$

Однако эти уравнения противоречат уравнениям Максвелла. Закон Гаусса

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

не содержит производных по времени и накладывает ограничение на электрическое поле. Поэтому дивергенция от левой части (14.14) равна нулю, а дивергенция от правой части, содержащей δ -функцию, нулю не равна. Удобно записать эту дивергенцию, переходя к импульсному пространству:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} k_j. \quad (14.15)$$

Отсюда видно, что для того, чтобы получить равную нулю дивергенцию от правой части (14.14), необходимо модифицировать величину $\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, вводя в ее фурье-разложение член, пропорциональный k_j . На самом деле этот член должен быть пропорционален $k_i k_j$ — единственному тензору второго ранга, который (помимо δ_{ij}) имеется в нашем распоряжении. Коэффициент при $k_i k_j$ однозначно определяется из условия обращения в нуль дивергенции, в результате рецепт получения «поперечной δ -функции», т. е. функции с равной нулю дивергенцией заключается в замене

$$\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow \delta_{ij}^{\text{tr}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (14.16)$$

При этом коммутаторы (14.14) заменяются на

$$[\pi^i(\mathbf{x}, t), A^j(\mathbf{x}', t)] = +i\delta_{ij}^{\text{tr}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (14.17)$$

Отсюда следует, что величина $\nabla \cdot \mathbf{A}$ коммутирует со всеми операторами, поскольку дивергенция по \mathbf{x}' от правой части (14.17) равна нулю. То, что $\nabla \cdot \mathbf{A}$ является c -числом, следует уже из определения \mathbf{E} через \mathbf{A} и Φ и закона Гаусса

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \Phi - \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}. \quad (14.18)$$

Поскольку мы уже знаем, что Φ есть c -число, таковым является и $\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}$, за исключением, быть может, вклада членов, отвечающих нулевой частоте.

¹⁾ Согласно уравнениям (14.10) и (14.11) π^i сопряжен $A_i = -A^i$,

Таким образом, продольная часть вектора \mathbf{A} (т. е. компонента \mathbf{A} в фурье-пространстве, параллельная волновому вектору) и скалярный потенциал в действительности не являются динамическими степенями свободы. И действительно, при подходящем выборе калибровки величины $\nabla \cdot \mathbf{A}$ и Φ можно сделать равными нулю. Опишем соответствующее градиентное преобразование, причем выполним его в два этапа. Вначале выполним преобразование

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_0^t \Phi(\mathbf{x}, t') dt', \quad (14.19)$$

в результате которого обращается в нуль скалярный потенциал. Для того чтобы устранить затем продольный потенциал, найдем функцию $\Lambda(\mathbf{x})$, удовлетворяющую уравнению

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}'' = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \nabla^2 \Lambda(\mathbf{x}).$$

Выбрав Λ в виде

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{x}'}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{x}', t),$$

мы обращаем продольную часть потенциала в нуль, причем с учетом равенств (14.18) и $\Phi' = 0$, получаем

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \Phi'' = \Phi' = 0.$$

Калибровка, в которой

$$\Phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (14.20)$$

называется калибровкой излучения. В дальнейшем мы будем работать именно в этой калибровке, теряя при этом лоренцеву и градиентную ковариантность теории. Преимуществом же калибровки излучения является то, что формализм теории содержит только две поперечные степени свободы поля излучения.

§ 84. Ковариантность и процедура квантования

Рассмотренный выше метод квантования может считаться удовлетворительным только в том случае, если коммутационные соотношения (14.13) и (14.17) сохраняют инвариантность теории при пространственных вращениях и трансляциях. Что же касается лоренцевых преобразований, то неинвариантные относительно этих преобразований члены должны компенсироваться в результате изменения калибровки.

Трансляционная инвариантность будет гарантирована, если выполнено условие (11.70), где P_μ определяется из теоремы Нетер (11.49)

$$P^0 = H = \frac{1}{2} \int d^3x : E^2 + B^2 : = \frac{1}{2} \int d^3x : \dot{A}^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 :, \quad (14.21)$$

$$\mathbf{P} = \int d^3x : \mathbf{E} \times \mathbf{B} : = - \int d^3x \sum_{i=1}^3 : \dot{A}_i \nabla A_i :.$$

Двоеточия в (14.21), как и в теории скалярного поля, означают нормальное упорядочивание. Аналогичным образом можно проверить выполнение условия (11.73), подставив для пространственных компонент M^{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, определенных согласно (11.57), выражения

$$M^{ij} = \int d^3x : \sum_{r=1}^3 \dot{A}^r \left(x^i \frac{\partial}{\partial x_j} - x^j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) A^r - (\dot{A}^i A^j - \dot{A}^j A^i) :, \quad (14.22)$$

причем тензор Σ_{rs}^{ij} в (11.57), согласно (11.54), равен

$$\Sigma_{rs}^{ij} = g^{ir} g_s^j - g_s^i g^{jr}. \quad (14.23)$$

Наконец, преобразование, описывающее переход между двумя лоренцевыми системами, генерируется операторами

$$M^{0k} = \int d^3x : \left[x^0 \sum_{r=1}^3 \dot{A}^r \frac{\partial A^r}{\partial x_k} - \frac{x^k}{2} (\dot{A}^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2) \right] :. \quad (14.24)$$

В действительности при лоренцевых преобразованиях A_μ преобразуется не как 4-вектор, но приобретает дополнительное калибровочное слагаемое¹⁾. При бесконечно малом лоренцевом преобразовании с генераторами M^{0k} (11.72) и (11.73)

$$U(\epsilon) A^\mu(x) U^{-1}(\epsilon) = A^\mu(x') - \epsilon^{\mu\nu} A_\nu(x') + \frac{\partial \Lambda(x', \epsilon)}{\partial x'_\mu}, \quad (14.25)$$

где $\Lambda(x', \epsilon)$ — операторная калибровочная функция²⁾. Ясно, что калибровочный член в (14.25) необходим, поскольку, если

$$\Phi(x) = A_0(x) = 0,$$

то

$$U\Phi(x)U^{-1} = 0 \quad (14.26)$$

для любого унитарного преобразования U . Структура выражения (14.25) гарантирует лоренцеву ковариантность градиентно-

¹⁾ Несмотря на это, мы будем по-прежнему называть преобразования, генерируемые операторами (14.24), лоренцевыми.

²⁾ См. задачу 2 к данной главе.

инвариантных уравнений Максвелла. Единственное дополнительное требование заключается в том, что

$$\nabla' \cdot A'(x') = 0 \quad (14.27)$$

и что одновременные коммутационные соотношения (14.13) и (14.17) остаются по-прежнему справедливыми в штрихованной системе координат. Выполнение этих условий может быть проверено непосредственным вычислением. Таким образом, результаты, полученные для квантовой электродинамики в калибровке излучения двумя наблюдателями, находящимися в движущихся друг относительно друга системах O и O' , могут быть связаны между собой, поскольку всегда существует унитарное преобразование, связывающее состояния в системах O и O' .

Нетривиальные вычисления, ведущие к выражениям (14.21) — (14.27), а также проверку ковариантности одновременных коммутационных соотношений мы оставляем читателю в качестве упражнения.

§ 85. Разложение в импульсном пространстве

Разложив потенциалы по плоским волнам и наложив коммутационные соотношения (14.13) и (14.17), мы можем интерпретировать, как и в теории Клейна — Гордона, коэффициенты разложения как операторы рождения и уничтожения. Отличительной чертой максвелловской теории является, однако, то, что эти кванты несут целый спин.

В калибровке излучения вектор $A(x, t)$ чисто поперечен. В разложении $A(x, t)$ по плоским волнам:

$$A(x, t) = \int d^3k \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon(k, \lambda) A(k, \lambda, t) e^{ik \cdot x} \quad (14.28)$$

для каждого значения k два единичных вектора $\varepsilon(k, \lambda)$, $\lambda = 1, 2$, ортогональны k

$$\varepsilon(k, \lambda) \cdot k = 0, \quad (14.29)$$

так что $\nabla \cdot A = 0$. Удобно выбрать эти векторы также ортогональными друг другу для каждого k

$$\varepsilon(k, \lambda) \cdot \varepsilon(k, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (14.30)$$

Тогда векторы $\varepsilon(k, 1)$, $\varepsilon(k, 2)$ и $\hat{k} = k/|k|$ образуют трехмерный ортогональный базис, показанный на рис. 14.1. Условимся также считать, что, как показано на этом рисунке,

$$\varepsilon(-k, 1) = -\varepsilon(k, 1), \quad \varepsilon(-k, 2) = +\varepsilon(k, 2). \quad (14.31)$$

С учетом (14.30) это означает, что

$$\varepsilon(k, \lambda) \cdot \varepsilon(-k, \lambda') = (-1)^\lambda \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (14.32)$$

Из уравнений Максвелла следует, что $\mathbf{A}(x)$ в калибровке излучения по-прежнему удовлетворяет волновому уравнению

$$\square \mathbf{A} = 0,$$

поэтому можно записать

$$\mathbf{A}(x, t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega} (2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon(k, \lambda) [a(k, \lambda) e^{-ikx} + a^+(k, \lambda) e^{ikx}], \quad (14.33)$$

где

$$k_0 = \omega = |\mathbf{k}| \quad \text{и} \quad k^2 = k_\mu k^\mu = 0.$$

Далее, так же как и в теории Клейна — Гордона, мы можем разрешить (14.33) относительно $a(k, \lambda)$. Используя (14.30) и

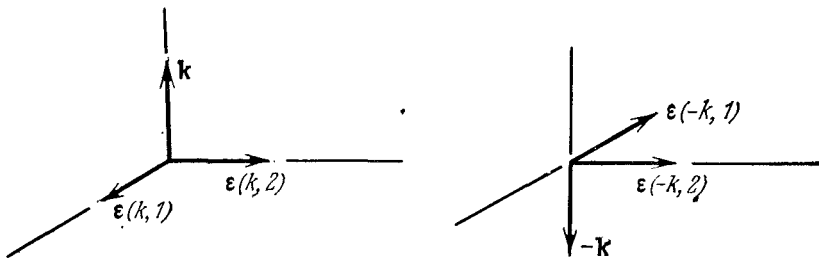


Рис. 14.1. Единичные векторы поляризации фотонов с импульсами \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$.

(14.32), получим вначале

$$\begin{aligned} \omega \int d^3x e^{ikx} \varepsilon(k, \lambda) \cdot \mathbf{A}(x) &= \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3 \omega}{2}} [a(k, \lambda) + (-1)^\lambda a^+(-k, \lambda) e^{2i\omega t}], \\ i \int d^3x e^{ikx} \varepsilon(k, \lambda) \cdot \dot{\mathbf{A}}(x) &= \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3 \omega}{2}} [a(k, \lambda) - (-1)^\lambda a^+(-k, \lambda) e^{2i\omega t}], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} a(k, \lambda) &= \int \frac{d^3x e^{ikx}}{\sqrt{2\omega} (2\pi)^3} \varepsilon(k, \lambda) \cdot [\omega \mathbf{A}(x) + i \dot{\mathbf{A}}(x)] = \\ &= i \int \frac{d^3x e^{ikx}}{\sqrt{2\omega} (2\pi)^3} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varepsilon(k, \lambda) \cdot \mathbf{A}(x), \\ a^+(k, \lambda) &= -i \int \frac{d^3x e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega} (2\pi)^3} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varepsilon(k, \lambda) \cdot \mathbf{A}(x). \end{aligned} \quad (14.34)$$

Для коммутационных соотношений между $a(k, \lambda)$ и $a^+(k, \lambda)$ получаем из (14.13) и (14.17)

$$\begin{aligned} [a(k, \lambda), a^+(k', \lambda')] &= \\ &= \int \frac{d^3x d^3x' e^{i(kx - k'x')}}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega\omega'}} (\omega' + \omega) \sum_{i, j=1, 2, 3} \varepsilon_i(k, \lambda) \varepsilon_j(k', \lambda') \delta_{ij}^{\text{tr}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

При вычислении интеграла используем определение δ_{ij}^{tr} (14.16), тогда, учитывая соотношения ортогональности для векторов поляризации, получаем

$$[a(k, \lambda), a^+(k', \lambda')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (14.35)$$

Аналогично получаем

$$[a(k, \lambda), a(k', \lambda')] = [a^+(k, \lambda), a^+(k', \lambda')] = 0. \quad (14.36)$$

Таким образом, коэффициенты разложения для двух поперечных компонент векторного потенциала квантуются с теми же коммутационными соотношениями, что и в теории Клейна — Гордона. Поэтому мы можем интерпретировать $a^+(k, \lambda)$ и $a(k, \lambda)$ как операторы рождения и уничтожения квантов с энергией ω и импульсом \mathbf{k} . Действительно, с учетом (14.3), (14.21) и (14.33) гамильтониан (14.12) может быть записан в импульсном пространстве в виде

$$H = \int \frac{d^3x}{2} : (E^2 + B^2) : = \int d^3k \omega \sum_{\lambda=1}^2 a^+(k, \lambda) a(k, \lambda). \quad (14.37)$$

Аналогичным образом для полного импульса получаем

$$\mathbf{P} = \int d^3x : \mathbf{E} \times \mathbf{B} : = \int d^3k \mathbf{k} \sum_{\lambda=1}^2 a^+(k, \lambda) a(k, \lambda). \quad (14.38)$$

Вакуумное состояние, т. е. состояние с наименьшей энергией, есть собственный вектор операторов H и \mathbf{P} и удовлетворяет уравнению

$$a(k, \lambda) \Phi_0 = 0 \quad (14.39)$$

в полной аналогии с уравнением (12.17) для теории Клейна — Гордона. Оператор $a^+(k, \lambda)$ интерпретируется как оператор рождения фотона с 4-импульсом k_μ , причем $k^2 = k_\mu k^\mu = 0$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно построить состояние

$$\Phi_{1, k\lambda} \equiv a^+(k, \lambda) \Phi_0 \equiv a^+(k, \lambda) |0\rangle \quad (14.40)$$

и показать, что

$$P^\mu \Phi_{1, k\lambda} = \int d^3k' k'^\mu \sum_{\lambda'=1}^2 a^+(k', \lambda') a(k', \lambda') a^+(k, \lambda) |0\rangle = k^\mu \Phi_{1, k\lambda} \quad (14.41)$$

§ 86. Спин фотона

Фотоны отличаются от квантов клейн-гордоновского поля в нескольких отношениях. Поскольку они удовлетворяют соотношению Эйнштейна $k_\mu k^\mu = 0$, их масса покоя равна нулю. Кроме того, векторный потенциал $A(x)$ действителен и при квантовании становится эрмитовым оператором. Поэтому фотоны не несут заряда и похожи в этом отношении на нейтральные мезоны, которые возникают при квантовании действительного поля Клейна — Гордона. Другой отличительной чертой является наличие у каждого фотона вектора поляризации $\varepsilon(k, \lambda)$, который связан со спиновым угловым моментом. В частности, векторный характер потенциала A ведет к тому, что фотоны имеют единичный спин; при этом условие поперечности устраняет одну из степеней свободы. Проекция спинового углового момента на направление распространения фотона не может равняться нулю, а равна только ± 1 . Чтобы показать это, рассмотрим оператор углового момента (14.22) и вычислим компоненты углового момента одnofотонного состояния

$$M^{12} \Phi_{1, k\lambda} = [M^{12}, a^+(k, \lambda)] |0\rangle, \quad (14.42)$$

причем будем считать, что импульс фотона параллелен третьей оси, т. е. $kx = \omega(t - x^3)$. M^{12} состоит из двух членов, первый из которых можно отождествить с орбитальным угловым моментом. Его проекция вдоль направления движения равна нулю, что можно проверить прямым вычислением коммутатора. Остается только вклад спиновых членов, который с помощью (14.22) и (14.33) приводится к виду

$$\begin{aligned} [M^{12}, a^+(k, \lambda)] = \\ = \int \frac{d^3x e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega} (2\pi)^3} [\varepsilon^1(k, \lambda) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 A^2(x) - \varepsilon^2(k, \lambda) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 A^1(x)]. \end{aligned} \quad (14.43)$$

Используя (14.34) и определение векторов поляризации (рис. 14.1), получаем

$$[M^{12}, a^+(k, \lambda)] = i\varepsilon^1(k, \lambda) a^+(k, 2) - i\varepsilon^2(k, \lambda) a^+(k, 1). \quad (14.44)$$

Образовав линейные комбинации

$$\begin{aligned} a_R^+(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a^+(k, 1) + ia^+(k, 2)], \\ a_L^+(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a^+(k, 1) - ia^+(k, 2)], \end{aligned} \quad (14.45)$$

которые описывают право- и левополяризованные волны, имеем

$$[M^{12}, a_R^+(k)] = +a_R^+(k), \quad [M^{12}, a_L^+(k)] = -a_L^+(k), \quad (14.46)$$

откуда следует, что проекция спина вдоль направления движения для право-поляризованного фотона равна $+1$, а для левополяризованного равна -1 .

§ 87. Фейнмановский пропагатор для поперечных фотонов

Для того чтобы описать развитие в пространстве и во времени состояния, содержащего поперечно поляризованный фотон, мы рассмотрим фейнмановский пропагатор. Так же как в § 75, где мы рассматривали клейн-гордоновские кванты, построим амплитуду для поперечного фотона, который рождается в точке x с проекцией поляризации μ и движется вперед во времени в точку x' , где он поглощается, имея при этом проекцию ν :

$$\langle 0 | A_\nu(x') A_\mu(x) | 0 \rangle \theta(t' - t). \quad (14.47)$$

Если $t > t'$, то мы строим амплитуду для фотона, рожденного в точке x' с проекцией ν и поглощенного в точке x с проекцией μ :

$$\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle \theta(t - t'). \quad (14.48)$$

Сумма выражений (14.47) и (14.48) определяет фейнмановский пропагатор

$$\begin{aligned} iD_F^{\text{tr}}(x', x)_{\nu\mu} &= \langle 0 | A_\nu(x') A_\mu(x) | 0 \rangle \theta(t' - t) + \\ &+ \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle \theta(t - t') = \langle 0 | T(A_\nu(x') A_\mu(x)) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (14.49)$$

где T означает хронологический оператор, определенный в (12.72) и (13.71).

Далее найдем явный вид $D_F^{\text{tr}}(x', x)_{\nu\mu}$, используя разложение полей по плоским волнам

$$\begin{aligned} D_F^{\text{tr}}(x', x)_{\nu\mu} &= \\ &= -i \int \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_\nu(k, \lambda) \varepsilon_\mu(k, \lambda) [\theta(t' - t) e^{-ik(x'-x)} + \\ &+ \theta(t - t') e^{ik(x'-x)}]. \end{aligned} \quad (14.50)$$

В калибровке излучения временная компонента векторов $\varepsilon_\nu(k, \lambda)$ равна нулю

$$\varepsilon^0(k, \lambda) = (0, \varepsilon(k, \lambda))$$

и условие поперечности фотона (7.54) зависит только от направления вектора \mathbf{k} , а не от частоты ω . Фиксируя систему отсчета, можно записать фейнмановский пропагатор в виде четырехкратного интеграла

$$D_F^{\text{tr}}(x' - x)_{\nu\mu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x'-x)}}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\nu(k, \lambda) \varepsilon_\mu(k, \lambda). \quad (14.51)$$

Функция распространения, записанная в виде (14.51), который мы впервые ввели в гл. 6, а затем использовали в гл. 12, будет часто встречаться в последующих вычислениях. Выражение (14.51) не лоренц-инвариантно, поскольку пространственные компоненты векторов $\varepsilon_\nu(k, \lambda)$ определены в фиксированной системе отсчета. Для того чтобы явным образом отделить координатную зависимость, введем в той системе отсчета, в которой мы выполнили квантование, единичный времениподобный вектор $\eta^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Тогда для данного k^μ имеется четыре независимых ортогональных единичных вектора $\varepsilon^\mu(k, 1)$, $\varepsilon^\mu(k, 2)$, η^μ и

$$\hat{k}^\mu = \frac{k^\mu - (k\eta)\eta^\mu}{\sqrt{(k\eta)^2 - k^2}}. \quad (14.52)$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\nu(k, \lambda) \varepsilon_\mu(k, \lambda) &= -g_{\nu\mu} + \eta_\nu \eta_\mu - \hat{k}_\nu \hat{k}_\mu = \\ &= -g_{\nu\mu} - \frac{k_\nu k_\mu}{(k\eta)^2 - k^2} + \frac{(k\eta)(k_\nu \eta_\mu + \eta_\nu k_\mu)}{(k\eta)^2 - k^2} - \frac{k^2 \eta_\nu \eta_\mu}{(k\eta)^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (14.53)$$

Подставляя (14.53) в (14.51), имеем

$$\begin{aligned} D_F^{\text{tr}}(x' - x)_{\nu\mu} &= g_{\nu\mu} D_F(x' - x) - \\ &- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x'-x)}}{k^2 + i\varepsilon} \frac{k^2 \eta_\nu \eta_\mu - (k\eta)(k_\nu \eta_\mu + \eta_\nu k_\mu) + k_\nu k_\mu}{(k\eta)^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (14.54)$$

В этом выражении первый член

$$g_{\nu\mu} D_F(x' - x) = \lim_{m^2 \rightarrow 0} (-g_{\nu\mu}) \Delta_F(x' - x, m)$$

есть обычный фейнмановский пропагатор, который использовался при расчетах электромагнитных эффектов в гл. 7, 8, 9, причем $\Delta_F(x' - x, m)$ — пропагатор бозона с нулевым спином, введенный в гл. 9.

Зависимость D_F^{tr} от η_μ содержится во втором члене выражения (14.54). Как показывает последующее рассмотрение, при

вычислении физических амплитуд в теории поля пропагатор $D_F^{\text{tr}}(x' - x)_{\nu\mu}$ всегда стоит между сохраняющимися токами, которые являются источниками электромагнитного поля. В результате члены, пропорциональные k_μ и k_ν , исчезают в силу сохранения тока. Это обстоятельство было отмечено нами ранее (см. (7.61)) и использовалось при вычислении поляризации вакуума (8.9). Остающийся в (14.54) член, зависящий от η , в системе координат, где $\eta^\mu = (1, 0, 0, 0)$, равен

$$-\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x'-x)}}{(k\eta)^2 - k^2} \eta_\nu \eta_\mu = \frac{-g_{\nu 0} g_{\mu 0} \delta(t' - t)}{4\pi |x' - x|}. \quad (14.55)$$

Это выражение имеет вид обычного статического кулоновского взаимодействия между двумя зарядами. При вычислении полного взаимодействия между двумя зарядами в точках x и x' (14.55) сокращается с кулоновским взаимодействием, которое необходимо учесть в дополнение к полю излучения. В результате пропагатор сводится к лоренц-ковариантному первому члену в (14.54).

Указанное обстоятельство, которое будет строго доказано в гл. 17 для произвольных S -матричных элементов, позволяет получать на самом деле лоренц- и градиентно-инвариантные выражения при вычислении физических амплитуд рассеяния. Дополнительные, зависящие от калибровки члены в $D_F^{\text{tr}}(x' - x)_{\nu\mu}$ вносят вклад в ненаблюдаемые величины, такие, как константы перенормировки Z_1 и Z_2 , введенные в гл. 8, которые не градиентно-инвариантны. Их появление в функции D_F^{tr} является расплатой за квантование уравнения Максвелла каноническим методом. Все эти нежелательные члены, однако, исчезают при вычислении скоростей перехода и сечений, которые непосредственно могут быть измерены на опыте.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить коммутационные соотношения между напряженностями поля и показать, что они обращаются в нуль для пространственно-временных интервалов.

Ответ.

$$[B_i(x'), B_j(x)] = \left[\delta_{ij} \nabla' \nabla - \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] iD(x' - x),$$

$$[E_i(x'), B_j(x)] = -\frac{\partial}{\partial x'_0} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^k} iD(x' - x),$$

$$[E_i(x'), E_j(x)] = \left(\delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x'_0} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^j} \right) iD(x' - x),$$

2. Вывести выражения для операторов энергии-импульса и углового момента (14.21), (14.22) и (14.24). Проверить, что при лоренцевых преобразованиях потенциалы $A^u(x)$ действительно преобразуются по формуле (14.25) и построить явные выражения для $\Lambda(x', \varepsilon)$ и $U(\varepsilon)$. Дополнить доказательство ковариантности максвелловских уравнений, проквантованных в калибровке излучения, проверив равенство (14.27), а также ковариантность одновременных коммутаторов. Учесть, что если $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{0k}$, то

$$\frac{\partial \Lambda(x', \varepsilon)}{\partial x'_\mu} = -\varepsilon_{0k} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \int \frac{d^3x}{4\pi|x-x'|} \frac{\partial A^k}{\partial x_0}.$$

Непосредственным вычислением показать, что M_{lj} и M_{0k} коммутируют с H .

3. Рассмотреть лагранжиан Максвелла с (нековариантной) «фотонной массой», т. е. членом $-\lambda^2 A^2(x)$ (λ^2 мало). Проквантовать электромагнитное поле в этом случае, используя только одно дополнительное условие $A_0 \equiv 0$. Построить вначале гамильтониан и показать, что из гамильтоновых уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial \pi^k} = \dot{A}_k, \quad \frac{\partial H}{\partial A_k} = -\dot{\pi}^k$$

при $\lambda \rightarrow 0$ получаются уравнения Максвелла с единственным исключением — добавлением членов с нулевой частотой в формулу Гаусса:

$$\nabla \dot{E} = -\nabla \ddot{A}(x) = \lambda^2 \nabla \cdot A(x).$$

Наложить канонические коммутационные соотношения, например

$$i[\pi^k(x, t), A_j(x', t)] = \delta_{kj} \delta^3(x - x')$$

и проквантовать как продольные, так и поперечные составляющие. Показать, в частности, что возникающие при этом кванты поля подчиняются дисперсионному закону $\omega^2 = \lambda^2$.

4. а) Решить уравнение Максвелла для того случая, когда электромагнитное поле заключено между двумя бесконечными параллельными проводящими пластинами, расстояние между которыми равно a . Проквантовать электромагнитное поле с учетом граничных условий.

б) Вычислить энергию нулевых колебаний E_0 на единицу площади, используя обрезание, зависящее только от частоты. Показать, что E_0 имеет вид:

$$E_0 = C_1 a + C_2 + \frac{\pi \hbar c}{a^3} \frac{B_4}{4!},$$

где C_1 и C_2 — величины, зависящие от обрезания, $B_4 = -1/30$ — четвертое число Бернулли.

в) Показать, что сила, действующая между (нейтральными) пластинами, обусловлена только последним членом, и вычислить ее величину (см. [29]).

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ

§ 88. Введение

Теория одних только свободных полей лишена какого-либо физического содержания. Физическая реальность раскрывается только посредством взаимодействия между полями, к рассмотрению которых мы теперь и приступаем.

При построении лагранжианов взаимодействий различного вида мы будем руководствоваться аналогией с электромагнитным полем. Поэтому вначале обсудим теорию электромагнитного взаимодействия заряженной частицы в методе вторичного квантования.

В случае же неэлектромагнитных взаимодействий структуру членов со взаимодействием лучше всего выяснять, используя факт существования экспериментально наблюдаемых законов сохранения. Последние могут быть введены в теорию посредством требования, чтобы лагранжиан обладал определенному виду симметрией, поскольку для каждого непрерывного преобразования симметрии теорема Нетер автоматически приводит к некоторой сохраняющейся величине.

§ 89. Электромагнитное взаимодействие

Ранее в качестве рецепта введения электродинамической связи мы использовали «минимальную» подстановку

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu, \quad (15.1)$$

которая отвечает классическому взаимодействию точечного заряда. Можно сохранить эту аналогию и подставить (15.1) в лагранжеву плотность для полей электрона и фотона; в результате получим

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) (i\hat{V} - e_0\hat{A}(x) - m_0) \psi(x) - 1/4 F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x). \quad (15.2)$$

Плотность лагранжиана (15.2) описывает локальное взаимодействие между электроном и фотоном в одной и той же точке x .

Независимо варьируя (15.2) по полям ψ и A , получим систему связанных уравнений

$$(i\hat{\nabla} - m_0)\psi(x) = e_0\hat{A}\psi(x), \quad (15.3a)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = e_0\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (15.3б)$$

Первое из этих уравнений имеет ту же форму, что и уравнение одночастичной теории. Теперь, однако, поле $A_\mu(x)$ не является внешним полем, а включено в рассматриваемую динамическую систему, поскольку оно связано с электронным током в (15.3б). Этот ток в свою очередь определяется из решения уравнения (15.3а), которое описывает движение электрона под действием поля A_μ .

Ясно, что при включении связи между полями мы сталкиваемся с очень сложной нелинейной задачей. Эта задача сложна уже в классическом случае, как это видно из рассмотрения радиационного затухания и решений, отвечающих расходящимся электромагнитным волнам в задаче о движении классических зарядов под действием либо их собственного поля, либо каких-то других полей (см., например, [30]). Очевидно, что в квантовом случае задача не становится легче.

Система связанных уравнений (15.3) неявно уже использовалась нами при вычислении электрон-электронного рассеяния, комптоновского эффекта и собственной энергии электрона (см. гл. 7, 8). В случае рассеяния электронов мы вычислили движение каждого из зарядов под действием поля другого заряда. Для комптоновского рассеяния было вычислено изменение поля излучения, обусловленное присутствием электрона. Наконец, в задаче о собственной энергии рассматривалось взаимодействие электрона со своим собственным полем излучения.

Когда рассматривается движение электрона под действием внешнего электромагнитного поля, необходимо только добавить в (15.1) в дополнение к полю излучения потенциал внешнего поля $A_\mu^{\text{ext}}(x)$. Тогда уравнения приобретают вид

$$(i\hat{\nabla} - m_0)\psi(x) = e_0[\hat{A}(x) + \hat{A}^{\text{ext}}(x)]\psi(x), \quad (15.4)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = e_0\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x).$$

В формулах (15.4) мы приписали индекс массе m_0 и заряду e_0 , предвосхищая то обстоятельство, что эти величины не равны физически наблюдаемым значениям m и e . Мы уже видели в гл. 8, как возникают поправки к m_0 и e_0 в теории возмущений. При этом обнаружилось, что в низшем порядке по e поправки

к массе и заряду логарифмически расходятся. Мы не будем здесь обсуждать вопрос о том, останутся ли константы перенормировки $m_0 - m$ и Z_3^{-1} бесконечными при точном вычислении. Более важно осознавать то, что логическая необходимость перенормировки сама по себе никак не связана с величиной перенормировочных констант. Тем не менее ввиду трудностей, возникающих в теории возмущений, необходимо тщательно отделить все бесконечности от конечных наблюдаемых физических величин. Начиная с 1948 г. в этом направлении был достигнут большой прогресс и в настоящее время квантовая электродинамика представляет теорию, в которой имеющиеся бесконечности не препятствуют вычислению с любой желаемой степенью точности физических амплитуд, причем точность вычислений на практике ограничивается только объемом работы, которую при этом необходимо выполнить [31].

Для обобщения классической теории на квантовый случай определим вначале канонические импульсы и выпишем одно-временные коммутационные соотношения. Член со взаимодействием в (15.2), введенный по классической аналогии,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e_0 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x) \quad (15.5)$$

не содержит производных от полей по времени. Поэтому канонические импульсы не меняются по сравнению с теорией свободных полей и в калибровке излучения (кулоновской калибровке) по-прежнему даются выражениями (13.43) и (14.10)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (15.6)$$

В указанной калибровке скалярный потенциал уже не равен нулю; из теоремы Гаусса и (15.6) следует, что

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(x) &= -\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}(x) - \nabla^2 \Phi(x) = \\ &= -\nabla^2 \Phi(x) = e_0 \psi^+(x) \psi(x) \neq 0. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Тем не менее скалярный потенциал все еще не является независимой динамической переменной, поскольку он определяется мгновенным распределением заряда $\rho(x, t) \equiv \psi^+(x, t) \psi(x, t)$:

$$\begin{aligned} A_0(x, t) = \Phi(x, t) &= e_0 \int \frac{d^3 x' \psi^+(x', t) \psi(x', t)}{4\pi |x' - x|} = \\ &= e_0 \int \frac{d^3 x' \rho(x', t)}{4\pi |x' - x|}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Так как независимые переменные остаются такими же, как и в теории свободных полей, мы примем для них перестановоч-

ные соотношения вида (13.53), (13.54), (14.13) и (14.17):

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^+(\mathbf{x}', t)\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{x}', t)\} &= \{\psi_\alpha^+(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^+(\mathbf{x}', t)\} = 0, \\ [\dot{A}_i(\mathbf{x}, t), A_j(\mathbf{x}', t)] &= -i\delta_{ij}^{\text{tr}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad i, j = 1, 2, 3, \\ [A_i(\mathbf{x}, t), A_j(\mathbf{x}', t)] &= [\dot{A}_i(\mathbf{x}, t), \dot{A}_j(\mathbf{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Чтобы дополнить этот набор, потребуем чтобы одновременные коммутаторы между полями Дирака и Максвелла также равнялись нулю:

$$[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \dot{A}_i(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (15.10)$$

Эти соотношения непротиворечивы, поскольку ψ_α и A_i есть независимые канонические переменные. Как уже было отмечено, скалярный потенциал Φ не является независимым, а определяется через ψ посредством соотношения (15.8) и потому удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\Phi(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{x}', t)] &= [\Phi(\mathbf{x}, t), \dot{A}_i(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [\Phi(\mathbf{x}, t), \psi_\alpha(\mathbf{x}', t)] &= -\frac{e_0}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \psi_\alpha(\mathbf{x}', t). \end{aligned} \quad (15.11)$$

Переходя, согласно каноническому методу, к гамильтониану и повторяя те же выкладки, что и в теории свободных полей, получаем

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^k} \dot{A}^k - \mathcal{L}, \quad (15.12)$$

откуда следует, что

$$\mathcal{H} = \psi^+ (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_0) \psi + 1/2 (E^2 + B^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla \Phi + e_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu. \quad (15.13)$$

В результате находим выражение для гамильтониана:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H} = \\ &= \int d^3x \left\{ \psi^+(x) \left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{i} \nabla - e_0 \mathbf{A} \right) + \beta m_0 \right] \psi(x) + \frac{1}{2} [E^2(x) + B^2(x)] \right\}, \end{aligned} \quad (15.14)$$

причем в (15.14) учтено, что член $\mathbf{E} \cdot \nabla \Phi$ при интегрировании

по частям дает $-e_0\psi^+\psi\Phi$ и, кроме того, опущен несущественный поверхностный член¹⁾.

Выражение (15.14) на первый взгляд кажется удивительным, поскольку оно явно содержит только связь тока электронов с поперечным векторным потенциалом. Возникает вопрос, где же содержится электромагнитное взаимодействие между зарядами. На самом деле оно включено в член с электрической энергией $\frac{1}{2} \int E^2 d^3x$. Чтобы пояснить это, разложим \mathbf{E} на поперечную и продольную составляющие:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_t, \quad \mathbf{E}_l \equiv -\nabla\Phi, \quad \mathbf{E}_t \equiv -\dot{\mathbf{A}}. \quad (15.15)$$

Тогда полная энергия поля представляется в виде суммы двух членов

$$\frac{1}{2} \int d^3x (E^2 + B^2) = \frac{1}{2} \int d^3x E_l^2 + \frac{1}{2} \int d^3x (E_t^2 + B^2), \quad (15.16)$$

причем член с $\mathbf{E}_l \cdot \mathbf{E}_t$ после интегрирования по частям обращается в нуль. Первый член в первой части выражения (15.16) равен энергии, связанной с кулоновским полем. Действительно, используя теорему Гаусса и выразив его через заряды, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int E_l^2 d^3x &= \frac{e_0^2}{8\pi} \int d^3x d^3y \frac{\psi^+(x, t) \psi(x, t) \psi^+(y, t) \psi(y, t)}{|x - y|} = \\ &= \frac{e_0^2}{8\pi} \int d^3x d^3y \frac{\rho(x, t) \rho(y, t)}{|x - y|}. \end{aligned}$$

Второй член в (15.16) равен полной энергии поперечного поля излучения, связанного с током $\mathbf{j} = \psi^+ \boldsymbol{\alpha} \psi$, и имеет тот же вид, что и в случае свободного поля.

¹⁾ Квантовая теория связанных электромагнитного и клейн-гордоновского заряженного полей во многих отношениях похожа на теорию фотонов и электронов, и мы не будем ее здесь обсуждать (см., например, [7]). Отметим только, что в этой теории возникает то неприятное обстоятельство, что подстановка (15.1) приводит к членам в лагранжиане взаимодействия, содержащим производные; при этом лагранжева плотность имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - ie_0 A_\nu \right) \psi^* \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + ie_0 A_\nu \right) \psi \right] - m_0^2 \psi^* \psi - \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \left[\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\nu} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \right) - m_0^2 \psi^* \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] + \\ & + \left[-ie_0 A_\nu \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\nu} \right) \psi \right) + e_0^2 \psi^* \psi A_\nu A^\nu \right]. \end{aligned}$$

Поскольку второй член в \mathcal{L} , описывающий взаимодействие, содержит производные, выражение для канонических импульсов в этом случае изменяется:

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}^* - ie_0 A_0 \psi^*, \quad \pi^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = \dot{\psi} + ie_0 A_0 \psi.$$

§ 90. Лоренцева инвариантность и инвариантность при трансляциях

С помощью канонической процедуры мы получили оператор энергии H (15.14). Аналогично можно определить оператор импульса

$$\mathbf{P} = \int d^3x (-i\psi^+ \nabla \psi + \mathbf{E}_t \times \mathbf{B}). \quad (15.17)$$

Поскольку взаимодействие не содержит производных, это выражение совпадает с суммой операторов импульса свободных полей (13.46) и (14.21).

Соотношения Гейзенберга

$$\begin{aligned} [P_\mu, \psi(x)] &= -i \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu}, \\ [P_\mu, A^k(x)] &= -i \frac{\partial A^k(x)}{\partial x^\mu}, \end{aligned} \quad (15.18)$$

выполнение которых необходимо в трансляционно-инвариантной теории, могут быть выведены из коммутационных соотношений (15.9), (15.10) и уравнений поля (15.3). Коммутационные соотношения и уравнения поля, таким образом, образуют самосогласованный набор уравнений, на которых основывается наша теория.

Чтобы проверить лоренцеву инвариантность, рассмотрим тензор углового момента, который можно построить, используя теорему Нетер (см. (11.56) и (11.57)). Пространственные компоненты M^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) совпадают с суммой операторов угловых моментов для свободных частиц. Поскольку коммутационные соотношения также не изменяются по сравнению с теорией свободных частиц, соотношения (11.72) и (11.73) для трехмерных вращений сохраняют свой вид. Взаимодействие приводит к дополнительным членам в генераторах M^{0k} ($k = 1, 2, 3$) лоренцевых преобразований, связывающих между собой движущиеся системы. Имеем

$$M^{0k} = P^{kt} - \int d^3x \left[x^k \mathcal{H}(x) - \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^k \psi(x) \right], \quad (15.19)$$

где \mathcal{H} — гамильтонова плотность (15.13). Выполнив бесконечно малое преобразование Лоренца, генерируемое операторами M^{0k} в (11.72), мы снова обнаруживаем, что электромагнитные потенциалы

$$A^\mu(x) = (\Phi(x), \mathbf{A}(x))$$

претерпевают градиентное преобразование, которое восстанавливает

ливаает поперечную калибровку в новой координатной системе [33]. Аналогично уравнению (14.25) для свободного поля получаем

$$U(\varepsilon) A^\mu(x) U^{-1}(\varepsilon) = A^\mu(x') - \varepsilon^{\mu\nu} A_\nu(x') + \frac{\partial \Lambda(x', \varepsilon)}{\partial x'_\mu},$$

где ¹⁾

$$\Lambda(x, \varepsilon) = \varepsilon_{0k} \int d^3y \frac{E^k(y) + e_0 \rho(y)(y^k - x^k)}{4\pi |x - y|}. \quad (15.20)$$

Дираковский оператор $\psi(x)$ в дополнение к лоренцеву преобразованию также подвергается фазовому преобразованию:

$$U(\varepsilon) \psi(x) U^{-1}(\varepsilon) = [1 - ie_0 \Lambda(x, \varepsilon)] S_{rs}^{-1}(\varepsilon) \psi_s(x'), \quad (15.21)$$

которое необходимо для того, чтобы уравнения поля преобразовывались под действием оператора U ковариантным образом, например;

$$U(\varepsilon) \bar{\psi}(x) [i\hat{\nabla} - e_0 \hat{A}(x)] \psi(x) U^{-1}(\varepsilon) = \bar{\psi}(x') [i\hat{\nabla}_{x'} - e_0 \hat{A}(x')] \psi(x').$$

Чтобы дополнить проверку лоренцевой инвариантности квантовой теории поля, необходимо еще проверить инвариантность одновременных коммутационных соотношений ²⁾ (15.9) и (15.10). Соответствующие вычисления весьма громоздки и не совсем тривиальны, мы оставляем их читателю в качестве упражнения. Мы не выписываем здесь результатов, поскольку заранее известно, что правило «минимальной» подстановки (15.1) обеспечивает градиентную инвариантность и гарантирует релятивистскую ковариантность физических результатов даже в том случае, если при квантовании используется специальный выбор калибровки.

§ 91. Разложение в импульсном пространстве

При включении взаимодействия разложения в импульсном пространстве (13.50) и (14.33) для $\psi(x)$ и $A(x)$ следует модифицировать, поскольку их координатная зависимость не имеет больше вида плоских волн. Более того, так как точные решения системы связанных уравнений (15.3) неизвестны, мы вообще не знаем явного вида координатной зависимости решений. В этой

¹⁾ При вычислении этого выражения полный дифференциал $\nabla \cdot (E\Phi)$ в (15.13) дает нуль, в отличие от члена $E_t \cdot E_t = \nabla \cdot (A\Phi)$.

²⁾ Мы не можем, как в теории свободных полей, выписать явный вид ковариантных коммутаторов для времениподобных интервалов, поскольку решения уравнений движения неизвестны.

ситуации удобно перейти к трехмерному интегралу Фурье, считая время фиксированным, например $t = 0$, и описывать развитие амплитуд во времени гейзенберговскими уравнениями (15.18). Формально интегрируя эти уравнения, получаем

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\psi(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt}, \quad (15.22)$$

после чего можно использовать разложения по плоским волнам вида (13.50) и (14.33):

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, 0) &= \sum_{\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} [b(p, s)u(p, s)e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \\ &\quad + d^+(p, s)v(p, s)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}], \\ \psi^+(\mathbf{x}, 0) &= \sum_{\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} [b^+(p, s)\bar{u}(p, s)\gamma_0 e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \\ &\quad + d(p, s)\bar{v}(p, s)\gamma_0 e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}], \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^2 \boldsymbol{\varepsilon}(k, \lambda) [a(k, \lambda)e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \\ &\quad + a^+(k, \lambda)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \\ \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, 0) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}(2\pi)^3} (-i\omega) \sum_{\lambda=1}^2 \boldsymbol{\varepsilon}(k, \lambda) [a(k, \lambda)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \\ &\quad - a^+(k, \lambda)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \end{aligned} \quad (15.23)$$

где $E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$, $\omega = |\mathbf{k}|$, $u(p, s)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(k, \lambda)$ определены выражениями (13.51) и (14.29) и т. д. Коэффициенты $b(p, s)$, $d(p, s)$, $a(k, \lambda)$ в операторном разложении и эрмитово сопряженные коэффициенты удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям (13.52), (14.35) и (14.36), что и в теории свободных полей. Кроме того,

$$\begin{aligned} [a(k, \lambda), b(p, s)] &= [a^+(k, \lambda), b(p, s)] = [a(k, \lambda), d(p, s)] = \\ &= [a^+(k, \lambda), d(p, s)] = 0. \end{aligned} \quad (15.24)$$

В результате канонические коммутационные соотношения (15.9) и (15.10) справедливы при $t = 0$ и, более того, согласно (15.22), выполняются в любой момент времени t .

Поля, из которых выделена их временная зависимость, используются в шредингеровском представлении. Они совпадают с гейзенберговскими полями (15.22) при $t = 0$.

Формальная связь между разложениями (12.7), (12.57), (13.50), (14.33) и (15.23) может быть суммирована следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Свободные поля} & \text{Взаимодействующие поля} \\
 a(k, \lambda) e^{-i\omega t} \rightarrow & e^{iHt} a(k, \lambda) e^{-iHt}, \\
 a^+(k, \lambda) e^{i\omega t} \rightarrow & e^{iHt} a^+(k, \lambda) e^{-iHt}, \\
 b(p, s) e^{-i\omega t} \rightarrow & e^{iHt} b(p, s) e^{-iHt}.
 \end{array} \quad (15.25)$$

Коэффициенты в полученных операторных разложениях теперь уже, однако, не имеют простого смысла операторов рождения и уничтожения одиночных квантов с фиксированной массой, как это было, например, в (14.41).

§ 92. Собственная энергия вакуума; нормальное упорядочивание

В квантовой теории поля на каждом шагу можно столкнуться с противоречием — вот одно из них. Возьмем теорему Гаусса, записанную в операторной форме (15.7), и вычислим среднее значение по вакууму

$$\langle 0 | \nabla \cdot \mathbf{E} | 0 \rangle = e_0 \langle 0 | \psi^+(x) \psi(x) | 0 \rangle = e_0 \sum_n |\langle 0 | \psi^+(x) | n \rangle|^2,$$

где сумма берется по всем возможным состояниям. Мы видим, что вакуум обладает зарядовой плотностью, которая к тому же еще и бесконечна. Физический смысл заряда вакуума очевиден — это бесконечный электростатический заряд моря электронов с отрицательной энергией.

Возникающую при этом неприятную ситуацию можно, однако, легко устранить. Изменим нашу теорию, добавив внешний однородный заряд противоположного знака, который нейтрализует заряд вакуума. С формальной точки зрения для этого достаточно во всех предыдущих уравнениях, включая и уравнения Максвелла, сделать замену

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi \Rightarrow 1/2 [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi], \quad (15.26)$$

т. е. антисимметризуя электрический ток относительно перестановки дираковских полей, что приводит к вычитанию бесконечной c -числовой константы из оператора тока $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$. Указанная модификация фактически эквивалентна использованию нормального порядка в операторных множителях. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим снова поля (15.22) и их разложения (15.23) и заметим, что произведение взаимодействующих полей, каждое из которых взято в один и тот же момент вре-

мени t , может быть применением оператора $e^{iHt} \dots e^{-iHt}$ приведено к моменту времени $t = 0$. Но, согласно (15.24), при $t = 0$ алгебра взаимодействующих полей совпадает с алгеброй свободных полей. Поэтому нормальное произведение для взаимодействующих полей может быть определено так же, как и раньше, например,

$$: b(p, s) d^+(p', s') + b^+(p, s) b(p', s') + d(p, s) a^+(k, \lambda) : = \\ = - d^+(p', s') b(p, s) + b^+(p, s) b(p', s') + a^+(k, \lambda) d(p, s).$$

Тогда в (15.26) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] &= \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} \{ \bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x) \} = \\ &= : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : + \{ \bar{\psi}^{(+)}(x), \gamma_\mu \psi^{(-)}(x) \} - \frac{1}{2} \{ \bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x) \} = \\ &= : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : + 2\delta^3(0) g_{\mu 0} - 2\delta^3(0) g_{\mu 0}, \quad (15.27) \end{aligned}$$

При выводе (15.27) мы использовали коммутационные соотношения для свободных полей, которым удовлетворяют операторы a , b , d и т. д. Таким образом, сингулярные члены в операторе плотности, который отвечает $\mu = 0$ в (15.27) сокращаются. Знаки (+) и (—) в (15.27) означают, что соответствующее выражение сводится к той части оператора в (15.23), которая содержит либо a , b , d , либо a^+ , b^+ , d^+ . Последние же, как это следует из (15.25), совпадают с операторами рождения и уничтожения для свободных полей.

Хотя мы строго и не показали, что замена (15.26) устраняет фоновый заряд и нейтрализует вакуум, уместно напомнить, что, как было отмечено при обсуждении свободного поля Дирака, вакуумное среднее от нормального произведения всегда равно нулю. В § 99 мы рассмотрим зарядовую инвариантность в квантовой электродинамике и убедимся в том, что равенство

$$\langle 0 | : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : | 0 \rangle = 0$$

есть следствие этой симметрии. В настоящий же момент мы примем это равенство без какого-либо дополнительного обсуждения, тогда

$$\begin{aligned} H = \int d^3x \mathcal{H}(x) &= \int d^3x : \psi^+(x) [\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla - e_0 \mathbf{A}(x)) + \beta m_0] \psi(x) + \\ &\quad + \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{A}}(x)^2 + (\nabla \times \mathbf{A}(x))^2] : + \\ &\quad + \frac{e_0^2}{8\pi} \int \frac{d^3x d^3y}{|x - y|} [: \rho(x, t) : : \rho(y, t) :]. \quad (15.28) \end{aligned}$$

Далее вычтем из гамильтониана его вакуумное среднее, другими словами, будем отсчитывать все энергии от энергии вакуума.

Условие

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = 0$$

позволяет избежать рассмотрения некоторых неприятных расходимостей в выражении (15.28). Первая из них — это нулевая энергия осцилляторов поля, которая, как и в теории Клейна — Гордона (см. (12.46)), равна

$$\langle 0 | \dot{A}^2(x) | 0 \rangle = \infty.$$

Кроме того, имеется еще одна расходимость, обусловленная последним членом в (15.28). Эта расходимость возникает из-за того, что плотность заряда $:\rho(x):$ не коммутирует с гамильтонианом, несмотря на то, что полный заряд $Q = \int :\rho(x): d^3x$ коммутирует с H :

$$[Q, H] = 0.$$

В результате в теории возникают флуктуации плотности заряда вакуума, причем обусловленная этими флуктуациями кулоновская энергия равна бесконечности.

Возникает вопрос об истинной природе указанных вакуумных флуктуаций. Точные решения системы связанных полевых уравнений не известны и, более того, до сих пор не удалось показать, исходя из формализма теории, что вакуум, как наименьшее энергетическое состояние гамильтониана, действительно существует. Однако если допустить, что спектр гамильтониана не ограничен снизу, любая попытка построения физически разумной теории заранее обречена на неудачу. Вопрос о существовании вакуума отнюдь не является тривиальным, что можно увидеть уже из следующего простого примера. Рассмотрим теорию, в которой частицы и античастицы отталкиваются друг от друга. В такой теории энергетически выгодно рождение пар, причем необходимая для этого энергия возникает за счет изменения потенциальной энергии, поскольку образующиеся частицы и античастицы разлетаются в разные стороны [34].

Если ввести нормальное упорядочивание в операторах энергии-импульса и углового момента, то все полевые уравнения можно записать в нормальной форме, например вместо (15.3) имеем

$$(\hat{i}\nabla - m_0)\psi(x) = e_0 : \hat{A}\psi(x) :, \quad \frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = e_0 : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \quad (15.29)$$

В дальнейшем будем подразумевать, что все операторные выражения автоматически имеют нормальный порядок множителей. Что же касается вычитания вакуумных средних, то эта процедура не влияет на результаты, поскольку она сводится к вычитанию из гамильтониана c -числа (возможно бесконечного).

§ 93. Другие взаимодействия

Представляется естественным обобщить рассмотренный выше лагранжев формализм для описания взаимодействия других частиц, например мезонов и нуклонов. Первое, хотя и не слишком оригинальное, что приходит в голову — это сопоставить каждой частице свое поле, удовлетворяющее волновому уравнению, которое описывает спин, массу и заряд частицы. Взаимодействие между частицами можно строить по образцу известного взаимодействия дираковских или скалярных частиц с электромагнитным полем. При этом предполагается, что взаимодействие должно быть локальным и, кроме того, может быть выведено из некоторой лагранжевой плотности. Мы будем требовать также инвариантность взаимодействий при пространственно-временных смещениях и собственных однородных преобразованиях Лоренца, другими словами, лагранжева плотность должна быть лоренцевым скаляром. Если взаимодействие оказывается инвариантным относительно несобственных преобразований симметрии таких, как четность, обращение времени или зарядовое сопряжение, то на лагранжиан накладываются дополнительные ограничения. Наконец, законы сохранения числа нуклонов, лептонов, электрического заряда, а также приближенные законы сохранения изотопического спина и странности в свою очередь накладывают дополнительные ограничения на вид взаимодействия.

Решающим, хотя и не слишком физическим принципом, которым мы будем руководствоваться в дальнейшем, является соображение простоты. Именно так мы поступили, например, при обсуждении мезон-нуклонного рассеяния в гл. 10. В этой главе мы рассмотрели в предположении зарядовой независимости волновые уравнения (10.33) и (10.34)

$$(i\hat{\nabla} - M_0)\Psi = g_0 i\gamma_5 (\tau\phi)\Psi,$$

$$(\square + \mu_0^2)\phi = -g_0 \bar{\Psi} i\gamma_5 \tau\Psi,$$

где нуклонное поле рассматривается как изотопический спинор

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_n(x) \end{bmatrix},$$

а мезонное поле — как изотопический вектор —

$$\phi(x) = \left(\frac{\varphi_+(x) + \varphi_-(x)}{\sqrt{2}}, i \frac{\varphi_+(x) - \varphi_-(x)}{\sqrt{2}}, \varphi_0(x) \right).$$

Эти уравнения могут быть выведены из лагранжевой плотности

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\hat{\nabla} - M_0) \Psi + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) - \mu_0^2 \Phi \cdot \Phi \right] - ig_0 \bar{\Psi} \gamma_5 \tau \bar{\Psi} \cdot \Phi \quad (15.30)$$

независимой вариацией по $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$. В (15.30) мы опять приписали индекс массам и константе связи с тем, чтобы подчеркнуть, что эти параметры не связаны непосредственно с экспериментально наблюдаемыми величинами и изменяются при перенормировке, подобно тому, как это имеет место при взаимодействии фотонов и электронов, которое было рассмотрено в гл. 8.

Следует отметить ту легкость, с которой связанные уравнения поля получаются в лагранжевом методе. Утонченные аргументы, касающиеся выбора знака в уравнениях (10.17), (10.19), (10.21) и (10.24), заменяются здесь требованием, чтобы при $g_0 \rightarrow 0$ лагранжиан сводился бы к сумме свободных лагранжианов, знаки которых определяются из условия положительной определенности гамильтоновой плотности для свободных частиц. Связь в (15.30) однозначно определяется следующими требованиями:

- 1) отсутствие производных в лагранжиане взаимодействий;
- 2) линейность по мезонному полю и билинейность по нуклонным полям, что приводит к элементарным процессам, изображенным на рис. 10.4 и 10.5;
- 3) связь сохраняет изотопическую инвариантность свободного лагранжиана.

Подчеркнем снова, что лагранжиан (15.30) можно в лучшем случае рассматривать как грубое приближение. В частности, можно было бы дописать члены

$$\frac{i}{\mu} \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \tau \Psi(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_\mu}$$

или

$$g \bar{\Psi}(x) \Psi(x) (\Phi\Phi)^4.$$

Первый из них, однако, обычно считается неприемлемым, поскольку он приводит к выражениям теории возмущений, расходящимся даже после перенормировки массы и константы связи. Второй же член нарушает «принцип максимальной простоты»; этот член нужно вводить в дополнение к последнему члену в (15.30), а не вместо него, поскольку сам по себе он не описывает процессы с образованием одного мезона¹⁾.

¹⁾ «Максимальная простота», однако, может оказаться обманчивой. Например, («простой») эйнштейновский лагранжиан гравитационного поля содержит квадратный корень из детерминанта метрического тензора и приводит к ряду трудностей,

Сингулярное поведение при высоких энергиях теории с производными можно было попытаться устранить, вводя формфактор, который размывает взаимодействие, например:

$$\mathcal{L}'(x) = \int d^4y d^4z g \bar{\Psi}(z) \gamma_5 \gamma_\mu \tau \Psi(y) \cdot \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z_\mu} F((x-y)^2, (x-z)^2).$$

Это выражение сохраняет свой вид при смещениях, а также при преобразованиях Лоренца. Однако оно нелокально, поскольку изменение пионного поля в точке z вызывает изменение нуклонного поля в другой пространственно-временной точке; при этом нарушаются основные принципы, на которые мы опираемся при построении теории поля, сформулированные в гл. 11. Кроме того, нелокальные лагранжианы приводят к дополнительным математическим трудностям¹⁾.

Что же касается более сложных лагранжианов взаимодействия, то они практически не исследованы. К тому же не имеется убедительных физических соображений, с помощью которых можно было бы дать предпочтение одному из них. Тем не менее возможность использования таких лагранжианов нельзя исключить полностью.

Отметим еще, что подход, в котором каждой частице сопоставляется свое поле и свой член в лагранжиане взаимодействия, вряд ли может считаться удовлетворительным, его в лучшем случае следует рассматривать как феноменологический способ описания взаимодействий. Неясно, в частности, какие частицы являются «связанными» или «возбужденными» состояниями более фундаментальных полей²⁾. В настоящее время известны попытки переформулировать теорию поля без привлечения лагранжианов, опираясь только на фундаментальные аксиомы теории поля. Вместо введения с помощью лагранжиана «голых» частиц, которые затем «одеваются», т. е. приобретают структуру в результате своих взаимодействий, аксиоматический метод сразу исходит из существования физических частиц и затем постепенно «раздевает» их, рассматривая пространственную структуру теории. Можно думать, что по своим физическим следствиям аксиоматический метод, являясь по самой своей сути феноменологическим подходом, вполне эквивалентен лагранжеву формализму [38].

¹⁾ Некоторые проблемы, возникающие в нелокальной квантовой теории поля, обсуждаются в статье [35] (см. также [135], *прим. перев.*).

²⁾ Хотя составные частицы могут быть описаны локальными полями [36, 37], получающиеся при этом волновые уравнения оказываются весьма сложными, а сам лагранжев формализм в лучшем случае неудобным.

§ 94. Симметрия взаимодействий

При рассмотрении взаимодействий мы руководствуемся соображениями простоты и экспериментальными фактами. Конструируя лагранжианы физических систем, мы сопоставляем каждому наблюдаемому закону сохранения то или иное свойство симметрии \mathcal{L} . С этой точки зрения мы обсудили в гл. 11 законы сохранения энергии, импульса и углового момента, при этом соответствующие лагранжианы строились таким образом, чтобы они были трансляционно- и лоренц-инвариантными. Кроме того, сохранению заряда, числа нуклонов, изотопического спина и т. д. также можно сопоставить некоторые «внутренние» симметрии лагранжиана. Как было показано в гл. 11 (см. (11.58) и ниже), инвариантность \mathcal{L} при локальном преобразовании полей

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi_r(x) - i\epsilon \lambda_{rs} \varphi_s(x), \quad (15.31)$$

где ϵ — бесконечно малый параметр, ведет к сохраняющемуся току

$$J_\mu(x) = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_r(x) / \partial x_\mu)} \lambda_{rs} \varphi_s(x), \quad (15.32)$$

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

и сохраняющемуся «заряду»

$$Q = \int d^3x J_0(x) = -i \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r(x)} \lambda_{rs} \varphi_s(x), \quad (15.33)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Используя это обстоятельство, мы смогли построить электромагнитный ток заряженных частиц. Например, лагранжиан электронов и фотонов инвариантен при фазовом преобразовании

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) - i\epsilon \psi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x), \quad (15.34)$$

поэтому, согласно (15.32), существует сохраняющийся электромагнитный ток

$$j_\mu(x) = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x_\mu)} \psi(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x). \quad (15.35)$$

Аналогичный результат имеет место и для заряженных бесспиновых частиц.

При переходе к квантовой механике ток $j_\mu(x)$ становится оператором. Удобно считать его нормально-упорядоченным оператором (см. (15.26) и (15.27))¹⁾, т. е. сделать следующую замену

¹⁾ Здесь и в дальнейшем при рассмотрении сохраняющихся величин мы предполагаем, что вакуумное среднее всех операторов равно нулю.

$j_\mu(x) \rightarrow : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) :$. Эта замена не нарушает закона сохранения, поскольку она сводится к вычитанию (возможно, бесконечной) константы, не зависящей от координат и времени:

$$\langle 0 | j_\mu(x) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{iPx} j_\mu(0) e^{-iPx} | 0 \rangle = \langle 0 | j_\mu(0) | 0 \rangle.$$

Сохраняющаяся величина Q в (15.33), подобно P_μ и $M_{\mu\nu}$, имеет смысл генератора преобразования. Образовав унитарный оператор

$$U(\varepsilon) = e^{i\varepsilon Q} \approx 1 + i\varepsilon Q, \quad (15.36)$$

где ε — бесконечно малый параметр и Q — эрмитов оператор, получим с учетом (15.31)

$$U(\varepsilon) \varphi_r(x) U^{-1}(\varepsilon) = \varphi_r(x) + i\varepsilon [Q, \varphi_r(x)] = \varphi_r(x) - i\varepsilon \lambda_{rs} \varphi_s(x), \quad (15.37)$$

или

$$[Q, \varphi_r(x)] = -\lambda_{rs} \varphi_s(x).$$

Результат находится в соответствии с (11.69) и (11.70). Используя коммутационные соотношения (11.39) и (15.37), получаем

$$Q = -i \int d^3x : \pi_r(x) \lambda_{rs} \varphi_s(x) : \quad (15.38)$$

в согласии с (15.33). Можно проверить, что (15.38) сохраняет смысл генератора преобразования и в теориях, квантуемых с антикоммуторами, при условии, что матрица λ_{rs} связывает между собой одни только ферми-поля, удовлетворяющие одновременным перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} \{\psi_{i,\alpha}(x,t), \psi_{j,\beta}^+(x',t)\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta^3(x-x'), \\ \{\psi_{i,\alpha}(x,t), \psi_{j,\beta}(x',t)\} &= 0, \quad \{\psi_{i,\alpha}^+(x,t), \psi_{j,\beta}^+(x',t)\} = 0. \end{aligned} \quad (15.39)$$

В (15.39) индексы $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ нумеруют спинорные компоненты, а $i, j = 1, 2, \dots$ относятся к различным ферми-полям, например к полям протона и нейтрона.

В дальнейшем мы будем всегда требовать, чтобы различные ферми-поля не коммутировали, а антикоммутировали друг с другом. Кроме того, потребуем чтобы различные бозе-поля коммутировали друг с другом и чтобы при равных временах ферми-поля коммутировали с бозе-полями¹⁾. Для свободных полей указанные правила коммутации означают только соглашение о выборе фазы. Однако для взаимодействующих полей отказ от антикоммуторов приводит к противоречиям уже при

¹⁾ В случае фотонов электромагнитные потенциалы не независимы и вместо (11.39) мы используем коммутационные соотношения (15.9) в калибровке излучения. Правила же коммутации электромагнитных потенциалов с другими полями не изменяются.

рассмотрении гейзенберговских уравнений движения. Действительно, для мезон-кулонного взаимодействия (15.30) гамильтониан равен

$$H = \int d^3x \left[\Psi^+ (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta M_0) \Psi + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} + \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \mu_0^2 \phi \cdot \phi) + ig_0 \bar{\Psi} \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi} \Psi \right]; \quad (15.40)$$

при этом уравнение для протонного поля имеет вид

$$(i\hat{\nabla} - M_0) \psi_p(x) = ig_0 \boldsymbol{\gamma}_5 (\sqrt{2} \varphi_+(x) \psi_n(x) + \varphi_0(x) \psi_p(x)).$$

Для выполнения соотношения Гейзенберга

$$[H, \psi_p(x)] = -i \frac{\partial \psi_p(x)}{\partial t}$$

необходимо потребовать, чтобы оператор $\psi_p(\mathbf{x}, t)$ коммутировал с билинейной формой $\psi_n^+(\mathbf{x}, t) \dots \psi_n(\mathbf{x}, t)$, а также чтобы выполнялось условие

$$\{\psi_p(\mathbf{x}, t), \varphi_+(\mathbf{x}, t) \psi_n(\mathbf{x}, t)\} = 0. \quad (15.41)$$

При указанном выше выборе перестановочных соотношений оба эти условия, как легко видеть, выполняются. Отметим также, что антикоммутаторы в (15.39) инвариантны под действием преобразования (15.37), другими словами, теория, построенная в терминах преобразованных полей

$$\varphi'_r(x) = U(\epsilon) \varphi_r(x) U^{-1}(\epsilon), \quad (15.42)$$

не отличается от исходной теории, оперирующей с полями $\varphi_r(x)$.

§ 95. Сильная связь между π -мезонами и нуклонами

Свойства симметрии особенно важны при рассмотрении сильных взаимодействий. В случае π -мезон-нуклонных взаимодействий модельный лагранжиан (15.30) инвариантен при одновременном изменении фазы у нейтронного и протонного полей

$$\Psi \rightarrow \Psi - i\epsilon\Psi. \quad (15.43)$$

Это преобразование отвечает выбору $\lambda_{rs} = \delta_{rs}$ ($r, s = 1, 2$) в выражениях (15.37). Оно приводит к сохраняющемуся току вида (15.32)

$$J_\mu^N(x) = \bar{\Psi} \boldsymbol{\gamma}_\mu \Psi = J_\mu^p(x) + J_\mu^n(x) \quad (15.44)$$

и к константе движения вида (15.33)

$$N = \int d^3x J_0^N(x) = \int d^3x \{\psi_p^+ \psi_p + \psi_n^+ \psi_n\} = N_p + N_n, \quad (15.45)$$

которую можно назвать числом нуклонов. Ранее мы уже рассматривали этот закон сохранения (см. (10.39) и (10.40)). В теории без взаимодействия оператор N имеет смысл числа протонов и нейтронов минус число антипротонов и антинейтронов. Если включить взаимодействие, то N уже нельзя вычислить в явном виде. Тем не менее при тех предположениях о состояниях взаимодействующей системы, которые будут обсуждаться в § 106, этот оператор сохраняет свой смысл при условии, конечно, что он все еще остается константой движения.

Модельный лагранжиан (15.30) допускает также преобразование симметрии, отвечающее сохранению заряда. При этом преобразовании только заряженные частицы приобретают общую фазу:

$$\begin{aligned}\psi_p &\rightarrow \psi_p - i\epsilon\psi_p, \\ \psi_n &\rightarrow \psi_n, \\ \varphi_+ &\rightarrow \varphi_+ - i\epsilon\varphi_+, \\ \varphi_- = \varphi_+^* &\rightarrow \varphi_- + i\epsilon\varphi_-, \\ \varphi_0 &\rightarrow \varphi_0.\end{aligned}\tag{15.46}$$

В изотопическом формализме эти соотношения имеют вид

$$\Psi \rightarrow \Psi - i\epsilon \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \right) \Psi, \quad \Phi \rightarrow \Phi - \epsilon (\Phi \times \Phi_0),\tag{15.47}$$

где вектор $\Phi_0 = (0, 0, 1)$ был определен выражениями (10.36). Инвариантность \mathcal{L} при преобразовании (15.47) может быть проверена непосредственным вычислением; согласно (15.32), (15.33) эта инвариантность приводит к сохраняющемуся электромагнитному току:

$$j_\mu(x) = \bar{\Psi} \gamma_\mu \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \right) \Psi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \times \Phi \right) \cdot \Phi_0,\tag{15.48}$$

$$Q = \int j_0(x) d^3x = \int d^3x [\psi_p^+(x) \psi_p(x) + \varphi_1(x) \dot{\varphi}_2(x) - \varphi_2(x) \dot{\varphi}_1(x)].$$

Вид тока в (15.48) согласуется с выражениями (10.37) и (10.38), полученными с помощью метода функций распространения.

Инвариантность \mathcal{L} в (15.30) при вращениях в изотопическом пространстве ведет к сохранению изотопического спина. Мы оставляем читателю непосредственную проверку того, что выражение (15.30) инвариантно при вращениях

$$\Psi \rightarrow \Psi - i\epsilon \frac{1}{2} \tau \cdot \hat{\Phi} \Psi, \quad \Phi(x) \rightarrow \Phi(x) - \epsilon (\Phi(x) \times \Phi),\tag{15.49}$$

где Φ — набор единичных векторов: $\hat{\Phi}_1 = (1, 0, 0)$, $\hat{\Phi}_2 = (0, 1, 0)$, $\hat{\Phi}_3 = (0, 0, 1)$. Сохраняющийся изотопический ток

$$J_\mu(x) = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma_\mu \tau \Psi + \left(\Phi \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right), \quad (15.50)$$

который получается из (15.32) и (15.49), и три компоненты изотопического спина

$$I = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Psi^\dagger \tau \Psi + (\Phi \times \Phi) \right] \quad (15.51)$$

являются константами движения. Эти выражения согласуются с (10.43) и (10.44). Сложив $N/2$ в (15.45) и третью компоненту вектора (15.51), получим с учетом (15.48) соотношение

$$Q = \frac{N}{2} + I_3, \quad (15.52)$$

которое также было выведено в гл. 10 (см. (10.41)). Используя коммутационные соотношения, можно проверить, что три компоненты вектора I удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям

$$[I_i, I_j] = i I_k, \quad (15.53)$$

что и компоненты углового момента. Поэтому; как и в гл. 10, мы можем нумеровать состояния собственными значениями операторов I_3 и I^2 .

Мы обнаружили, таким образом, что наш модельный лагранжиан (15.30) допускает преобразования симметрии (15.43), (15.47) и (15.49), которым отвечают законы сохранения числа нуклонов, заряда и изотопического спина. Хотя лагранжиан (15.30) слишком прост, чтобы описать полное π -мезон-нуклонное рассеяние, мы в дальнейшем при обсуждении более общих лагранжианов сохраним указанные симметрии, а также рассмотрим другие преобразования симметрии, существование которых обусловлено экспериментально наблюдаемыми правилами отбора.

§ 96. Свойства симметрии странных частиц

При построении лагранжианов для гиперонов и K -мезонов, которые также принимают участие в сильных взаимодействиях, удобно учитывать требования симметрии, приводящие в свою очередь к тем или иным законам сохранения. Экспериментально было известно, что эти частицы группируются в зарядовые мультиплеты и что их сильные взаимодействия подчиняются определенным правилам отбора. Поэтому естественно рассматривать лагранжианы, инвариантные при тех преобразованиях

симметрии, которые генерируются операторами, связанными с наблюдаемыми константами движения.

В дальнейшем термином «странные частицы» будем называть те частицы, которые в дополнение к лептонам, π -мезонам и нуклонам стабильны при выключенном слабом взаимодействии¹⁾. Энергетические уровни всех этих частиц указаны на рис. 15.1. Как обычно, при обозначении барионов (N , Σ , Λ , Ξ) и лептонов (μ , e , ν , ν') мы указываем только частицы, а не античастицы. Различие между последними обычно ясно проявляется в эксперименте. Законы сохранения барионного и лептонного числа, надежно установленные в настоящее время, позволяют в схеме на рис. 15.1 отождествить с барионом, например Ξ^- -гиперон, а не его положительно заряженную античастицу $\bar{\Xi}^-$. В случае же мезонов на рисунке указаны как частицы, так и античастицы.

Для π^- - и K^- -мезонов античастицами являются противоположно заряженные π^+ - и K^+ -мезоны; π^0 -мезон, который не обладает зарядом, является своей собственной античастицей. В то же время K^0 -мезон отличается от своей античастицы \bar{K}^0 , поскольку реакция



разрешена, а реакция



запрещена.

Из эксперимента известно, что спин K -мезона равен нулю. Спины всех барионов, за исключением Σ^0 и Ξ^0 , измерены и равны $1/2$; мы будем считать, что спины Σ^0 и Ξ^0 также

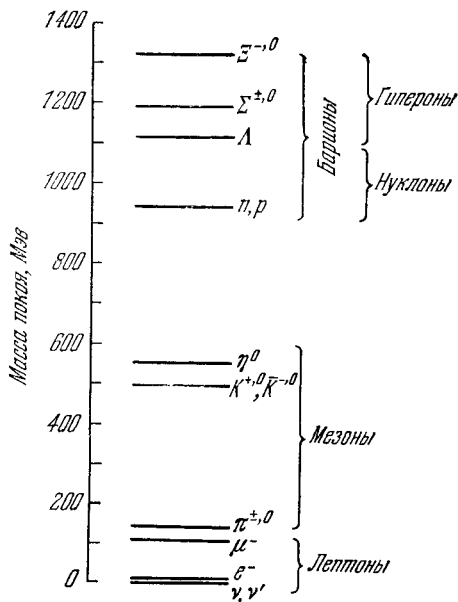


Рис. 15.1. Диаграмма энергетических уровней низколежащих барионов, мезонов и лептонов.

¹⁾ К странным частицам относится и Σ^0 -гиперон, хотя его распад $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ обусловлен электромагнитным взаимодействием; в то же время Ω^- -гиперон по нашей терминологии не относится к странным частицам.

равны $1/2$)¹⁾, поэтому барионы (в отсутствие взаимодействий) описываются уравнением Дирака с соответствующей массой, а π - и K -мезоны — уравнением Клейна — Гордона²⁾.

Мультиплетная структура уровней на рис. 15.1 указывает на то, что к странным частицам применима концепция изотопического спина, введенная первоначально только для π -мезонов и нуклонов. Поскольку эксперимент указывает на то, что изотопический спин во всех сильных взаимодействиях между мезонами и барионами сохраняется, удобно с самого начала рассматривать изотопически симметричные лагранжианы. Тем самым мы гарантируем изотопическую инвариантность теории при условии, что электромагнитные потенциалы выключены.

В изотопическом пространстве поле Σ , подобно π -мезонному полю, является вектором:

$$\Psi_{\Sigma}(x) = \left(\frac{\psi_{\Sigma^+}(x) + \psi_{\Sigma^-}(x)}{\sqrt{2}}, i \frac{\psi_{\Sigma^+}(x) - \psi_{\Sigma^-}(x)}{\sqrt{2}}, \psi_{\Sigma^0}(x) \right). \quad (15.55)$$

В теории свободного поля оператор $\psi_{\Sigma^+}(x)$ уничтожает частицу Σ^+ и рождает античастицу $\bar{\Sigma}^+$, в то время как оператор $\psi_{\Sigma^-}(x)$ уничтожает Σ^- и рождает $\bar{\Sigma}^-$ -частицы. Так как гипероны отличаются от антигиперонов (например, Σ^+ не совпадают с $\bar{\Sigma}^-$), то поле $\psi_{\Sigma}(x)$, подобно изотопическому вектору π -мезона, не является эрмитовым. Для (15.55) эрмитово сопряженное поле есть

$$\Psi_{\Sigma}^+(x) = \left(\frac{\psi_{\Sigma^+}^+(x) + \psi_{\Sigma^-}^+(x)}{\sqrt{2}}, -i \frac{\psi_{\Sigma^+}^+(x) - \psi_{\Sigma^-}^+(x)}{\sqrt{2}}, \psi_{\Sigma^0}^+(x) \right).$$

Волновая функция Λ -гиперона является скаляром в изотопическом пространстве, а каскадный Ξ -гиперон и K -мезон, подобно нуклону, описываются изотопическими спинорами

$$\Psi_{\Xi}(x) = \begin{bmatrix} \psi_{\Xi^0}(x) \\ \psi_{\Xi^-}(x) \end{bmatrix}, \quad (15.56)$$

$$\Phi_K(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{K^+}(x) \\ \varphi_{K^0}(x) \end{pmatrix}. \quad (15.57)$$

При бесконечно малом вращении в изотопическом пространстве вокруг произвольного единичного вектора \hat{u} различные поля

¹⁾ В настоящее время спины Σ^0 и Ξ^0 измерены из угловых корреляций в распадах $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ и $\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$ и равны $1/2$ (см. [139]) (прим. перев.).

²⁾ Обсуждение теоретических схем, описывающих симметрию между восьмью барионами и мезонами (включая η -мезон), содержится в книге [39] (см. также [40, 41], прим. перев.).

преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Phi_\pi &\rightarrow \Phi_\pi - \varepsilon \Phi_\pi \times \hat{\mathbf{u}}, \\
 \Phi_K &\rightarrow \Phi_K - \frac{i\varepsilon}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{u}} \Phi_K, \\
 \Psi_N &\rightarrow \Psi_N - \frac{i\varepsilon}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{u}} \Psi_N, \\
 \Psi_\Lambda &\rightarrow \Psi_\Lambda, \\
 \Psi_\Sigma &\rightarrow \Psi_\Sigma - \varepsilon \Psi_\Sigma \times \hat{\mathbf{u}}, \\
 \Psi_\Xi &\rightarrow \Psi_\Xi - \frac{i\varepsilon}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{u}} \Psi_\Xi.
 \end{aligned} \tag{15.58}$$

С учетом (15.58) и (15.32) или (15.37) получаем следующее выражение для сохраняющегося изотопического тока¹⁾:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_\mu(x) = & \frac{1}{2} \bar{\Psi}_N \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \Psi_N + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_\Xi \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \Psi_\Xi - i \bar{\Psi}_\Sigma \gamma_\mu \times \Psi_\Sigma + \\
 & + \Phi_\pi \times \frac{\partial \Phi_\pi}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} i \left(\Psi_K^+ \boldsymbol{\tau} \frac{\partial \Phi_K}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_K^+}{\partial x^\mu} \boldsymbol{\tau} \Phi_K \right), \tag{15.59}
 \end{aligned}$$

причем сохраняющийся полный изотопический спин равен

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{J}_0(x) d^3x.$$

Эти формулы являются обобщением выражений (15.50) и (15.51), которые справедливы только для нуклонов и π -мезонов. В частности, вычислив третью компоненту \mathbf{I} , получаем

$$\begin{aligned}
 I_3 = & \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Psi_p^+ \Psi_p - \frac{1}{2} \Psi_n^+ \Psi_n + \frac{1}{2} \Psi_{\Xi^0}^+ \Psi_{\Xi^0} - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \Psi_{\Xi^-}^+ \Psi_{\Xi^-} + \Psi_{\Sigma^+}^+ \Psi_{\Sigma^+} - \Psi_{\Sigma^-}^+ \Psi_{\Sigma^-} + \left. \left(\Phi_{1\pi} \dot{\Phi}_{2\pi} - \Phi_{2\pi} \dot{\Phi}_{1\pi} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} i \left(\Phi_K^+ \dot{\Phi}_{K^+} - \dot{\Phi}_{K^+} \Phi_K^+ - \Phi_{K^0}^+ \dot{\Phi}_{K^0} + \dot{\Phi}_{K^0}^+ \Phi_{K^0} \right) \right] = \\
 = & \frac{1}{2} (N_p - N_n + N_{\Xi^0} - N_{\Xi^-} + N_{K^+} - N_{K^0}) + N_{\Sigma^+} - N_{\Sigma^-} + N_{\pi^+}. \tag{15.60}
 \end{aligned}$$

Легко снова убедиться, что оператор \mathbf{I} по своим коммутационным свойствам аналогичен оператору углового момента (15.53),

¹⁾ Формула (15.59) справедлива в том случае, когда \mathcal{L} не содержит связей с производными.

поэтому состояния системы могут быть характеризованы одновременно собственными значениями операторов I_3 и I^2 .

Закон сохранения изотопического спина является приближенным. Он справедлив для сильных взаимодействий и нарушается электромагнитными взаимодействиями. В частности, небольшая разница в массах между членами каждого мультиплета на рис. 15.1 обусловлена электромагнитными эффектами. При написании зарядово-симметричного лагранжиана, инвариантного при преобразованиях (15.58), этой разницей масс мы пренебрегли.

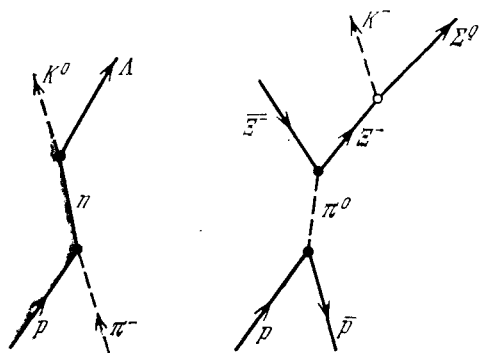


Рис. 15.2. Примеры реакций, в которых сохраняется разность барионов и антибарионов.

минус число антибарионов или, на языке фейнмановских диаграмм, что барионная линия не может оборваться или возникнуть в вершине (рис. 15.2). При этом плотность лагранжиана \mathcal{L} должна быть инвариантна при одновременном фазовом преобразовании всех барионных полей:

$$\begin{aligned} \Psi_N &\rightarrow \Psi_N - ie\Psi_N, \\ \Psi_\Lambda &\rightarrow \Psi_\Lambda - ie\Psi_\Lambda, \\ \Psi_\Sigma &\rightarrow \Psi_\Sigma - ie\Psi_\Sigma, \\ \Psi_\Xi &\rightarrow \Psi_\Xi - ie\Psi_\Xi. \end{aligned} \quad (15.61)$$

Для сохраняющегося оператора барионного числа B получаем

$$B = N_N + N_\Lambda + N_\Sigma + N_\Xi, \quad (15.62)$$

что и является обобщением (15.45).

Наконец, закон сохранения заряда можно связать с требованием, чтобы \mathcal{L} была инвариантна при одновременном фазовом преобразовании вида (15.47) только заряженных частиц.

При этом плотность лагранжиана должна быть инвариантна при изотопических вращениях вокруг вектора $\hat{\mathbf{u}}_3 \equiv (0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned}\Phi_\pi &\rightarrow \Phi_\pi - \varepsilon \Phi_\pi \times \hat{\mathbf{u}}_3, \\ \Phi_K &\rightarrow \Phi_K - \frac{i\varepsilon}{2} (1 + \tau_3) \Phi_K, \\ \Psi_N &\rightarrow \Psi_N - \frac{i\varepsilon}{2} (1 + \tau_3) \Psi_N, \\ \Psi_\Lambda &\rightarrow \Psi_\Lambda, \\ \Psi_\Sigma &\rightarrow \Psi_\Sigma - \varepsilon \Psi_\Sigma \times \hat{\mathbf{u}}_3, \\ \Psi_\Xi &\rightarrow \Psi_\Xi - \frac{i\varepsilon}{2} (-1 + \tau_3) \Psi_\Xi,\end{aligned}\quad (15.63)$$

что приводит к следующему выражению для оператора заряда:

$$\begin{aligned}Q = \int d^3x &[\psi_p^+ \psi_p + \psi_{\Sigma^+}^+ \psi_{\Sigma^+} - \psi_{\Sigma^-}^+ \psi_{\Sigma^-} - \psi_{\Xi^-}^+ \psi_{\Xi^-} + \\ &+ (\varphi_{1\pi} \dot{\varphi}_{2\pi} - \varphi_{2\pi} \dot{\varphi}_{1\pi}) + i(\varphi_{K^+}^+ \dot{\varphi}_{K^+} - \dot{\varphi}_{K^+}^+ \varphi_{K^+})] = \\ &= N_p + N_{\Sigma^+} - N_{\Sigma^-} - N_{\Xi^-} + N_{\pi^+} + N_{K^+}.\end{aligned}\quad (15.64)$$

Преобразование (15.63) состоит из вращения вокруг 3-й оси в изотопическом пространстве и фазового преобразования K -, и N - и Ξ -полей:

$$\Phi_K \rightarrow \Phi_K - \frac{i\varepsilon}{2} \Phi_K, \quad \Psi_N \rightarrow \Psi_N - \frac{i\varepsilon}{2} \Psi_N, \quad \Psi_\Xi \rightarrow \Psi_\Xi + \frac{i\varepsilon}{2} \Psi_\Xi.\quad (15.65)$$

Поскольку плотность лагранжиана инвариантна при вращениях вокруг 3-й оси изотопического пространства (напомним, что отсюда следует сохранение I_3 в (15.60)), преобразования (15.65) также представляют некоторую операцию симметрии. Эта операция связана с сохранением величины Y , которая называется «гиперзарядом»

$$Y = N_K + N_N - N_\Xi.\quad (15.66)$$

С учетом (15.60) и (15.64) получаем соотношение

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3.\quad (15.67)$$

С гиперзарядом Y тесно связана «странность» S , определяемая как

$$S = Y - B.\quad (15.68)$$

Странность также сохраняется в сильных взаимодействиях. Так как константы движения S , Y , B , I_3 и Q можно выразить в терминах операторов числа частиц, мы можем приписать соответствующие квантовые числа каждой из частиц, для которой

справедливы обсуждаемые аддитивные законы сохранения. В таблице указаны квантовые числа для барионов и мезонов, квантовые же числа антибарионов противоположны по знаку квантовым числам барионов.

	Q	T_3	B	Y	S
π	1, 0, -1	1, 0, -1	0	0	0
K	1, 0	$1/2, -1/2$	0	1	1
N	1, 0	$1/2, -1/2$	1	1	0
Λ	0	0	1	0	-1
Σ	1, 0, -1	1, 0, -1	1	0	-1
Ξ	0, -1	$1/2, -1/2$	1	-1	-2

Законы сохранения гиперзаряда Y и странности S есть следствия сохранения Q , I_3 и B . Они приводят к экспериментально наблюдаемым правилам отбора в реакциях ассоциативного рождения. Например, K -мезоны могут рождаться только вместе с Λ - или Σ -гиперонами (см. реакцию (15.54a)), в то время как реакция (15.54б) нарушает закон сохранения S и Y на две единицы [42—44].

До сих пор мы рассматривали только сильные взаимодействия. Если при включении электромагнитных взаимодействий использовать минимальную подстановку

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu,$$

то B , Y и S по-прежнему сохраняются, поскольку электромагнитная связь не зависит от барионного числа, гиперзаряда или странности. В силу (15.67) сохранение Q означает сохранение I_3 . Другими словами, та часть лагранжиана, которая содержит электромагнитное взаимодействие, должна быть инвариантна при вращениях вокруг 3-й оси в изотопическом пространстве. Что же касается полной симметрии лагранжиана при изотопических вращениях, то она, разумеется, нарушается электромагнитными взаимодействиями. Это обстоятельство приводит, например, к тому, что в реакциях фотообразования

$$\gamma + p \rightarrow \begin{cases} p + \pi^0, \\ n + \pi^+, \end{cases}$$

конечное состояние содержит как $I = 1/2$, так и $I = 3/2$ каналы.

В слабых взаимодействиях I_3 не сохраняется, поэтому из (15.67) и (15.68) следует, что нарушаются также законы сохранения странности и гиперзаряда. Именно слабая связь обуславливает распады странных частиц такие, как, например,

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-.$$

При этом абсолютно сохраняются только заряд Q и барионное число B (а также лептонные числа L_e и L_μ (см. задачу (15.22)). Никаких нарушений этих законов сохранения в настоящее время не обнаружено.

§ 97. Несобственные преобразования симметрии

Рассмотренные до сих пор преобразования симметрии генерировались операторами бесконечно малых преобразований. Существуют, однако, и «несобственные» или дискретные преобразования, которые нельзя получить последовательным применением бесконечно малых преобразований. Эти преобразования также играют важную роль, поскольку они приводят к определенным правилам отбора и, следовательно, содержат информацию о виде лагранжианов взаимодействия. К дискретным преобразованиям относятся: инверсия пространства или преобразование четности \mathcal{P} , операция отражения времени \mathcal{T} и зарядовое сопряжение \mathcal{C} .

§ 98. Четность

Чтобы определить смысл операции четности, добавив в плотность лагранжиана член, описывающий взаимодействие (обычно электромагнитное) квантовой системы с измерительным прибором

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - j_\mu(x) A_{\text{ext}}^\mu(x). \quad (15.69)$$

В (15.69) $A_{\text{ext}}^\mu(x)$ представляет классическое внешнее поле, которое взаимодействует с оператором тока системы $j_\mu(x)$. Если обратить измерительный прибор, т. е. рассмотреть новую физическую систему, для которой внешнее поле, приготавливающее и анализирующее ее состояния, равно

$$\tilde{A}_{\text{ext}}^\mu(x) = (A_{\text{ext}}^0(-\mathbf{x}, t), -\mathbf{A}_{\text{ext}}(-\mathbf{x}, t)) = A_{\text{ext}}^{\text{ext}\mu}(-\mathbf{x}, t), \quad (15.70)$$

то, если четность сохраняется, динамическое поведение новой системы будет таким же, как и у исходной системы. В частности, если действие новой системы

$$J = \int d^4x [\mathcal{L} - j_\mu(x) \tilde{A}_{\text{ext}}^\mu(x)]$$

связано с действием исходной системы J унитарным преобразованием \mathcal{P} , то уравнения движения не изменятся. Потребуем, чтобы оператор \mathcal{P} удовлетворял следующим соотношениям:

$$\mathcal{P}\mathcal{L}(x, t)\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{L}(-\mathbf{x}, t), \quad (15.71)$$

$$\mathcal{P}j_\mu(x, t)\mathcal{P}^{-1} = j^\mu(-\mathbf{x}, t), \quad (15.72)$$

и чтобы \mathcal{P} не менял перестановочные соотношения. В этом случае динамика новой и исходной квантовых систем одинакова, и мы говорим, что четность сохраняется.

Рассмотрим вначале теорию свободного поля и построим оператор \mathcal{P} в явном виде. В случае поля Клейна—Гордона (см. (12.2), (12.4) и (12.63)) равенство (15.71) выполняется, если оператор \mathcal{P} удовлетворяет условию

$$\mathcal{P}\varphi(\mathbf{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = \pm \varphi(-\mathbf{x}, t). \quad (15.73)$$

При этом, очевидно, не меняются и коммутационные соотношения.

Выбор знака в (15.73) определяется тем, что называется «внутренней четностью» частицы, связанной с полем; знак плюс выбирается для скалярных частиц, знак минус для псевдоскалярных (например, для π -мезонов в лагранжиане (15.30)). Этот знак определяет фазу одночастичного состояния

$$\varphi(\mathbf{x})|0\rangle \quad (15.74)$$

и может быть однозначно определен только при рассмотрении всевозможных связей между различными частицами¹⁾. Внутренняя четность отличается от пространственной четности, связанной с четностью волновой функции частицы в состоянии с данным орбитальным моментом. Обозначим одночастичное состояние с угловым моментом l через $|n=1; l\rangle$, а соответствующую волновую функцию через $\mathcal{F}_l(\mathbf{x})$, тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l(\mathbf{x}, t) &= \langle n=1; l | \varphi(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = \\ &= (-1)^l \langle n=1; l | \varphi(-\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = (-1)^l \mathcal{F}_l(-\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (15.75)$$

Это равенство по существу содержит лишь утверждение о четности или нечетности функции $\mathcal{F}_l(\mathbf{x})$. С другой стороны, четность состояния $|n=1; l\rangle$ по отношению к вакууму, четность которого по определению положительна:

$$\mathcal{P}|0\rangle = |0\rangle, \quad (15.76)$$

можно определить, рассмотрев следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \langle n=1; l | \mathcal{P}\varphi(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle &= \langle n=1; l | \mathcal{P}\varphi(\mathbf{x}, t)\mathcal{P}^{-1} | 0 \rangle = \\ &= \pm \langle n=1; l | \varphi(-\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = \pm (-1)^l \mathcal{F}_l(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (15.77)$$

Мы видим, что эта четность равна произведению внутренней четности ± 1 и орбитальной четности $(-1)^l$. Например, псевдоскалярный π -мезон в p -состоянии имеет положительную четность.

¹⁾ В (15.73) можно добавить произвольную фазу $e^{i\varphi}$, для нашего рассмотрения это несущественно.

Перейдем в (15.73) к разложению в импульсном пространстве (см. (12.7) или (12.57)), тогда получим¹⁾

$$\mathcal{P}a(k)\mathcal{P}^{-1} = \pm a(-k), \quad \mathcal{P}a^+(k)\mathcal{P}^{-1} = \pm a^+(-k). \quad (15.78)$$

Действуя на состояние с заданным импульсом, оператор \mathcal{P} образует новое состояние, в котором импульсы k_1, \dots, k_n заменяются на $-k_1, \dots, -k_n$, а все остальные квантовые числа — заряд, число частиц и т. д. не меняются.

Уравнения (15.73) или (15.78) для оператора \mathcal{P} проще всего решить в импульсном пространстве. Положив

$$\mathcal{P} = e^{iP}, \quad (15.79)$$

перепишем (15.78) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{P}a(k)\mathcal{P}^{-1} &= a(k) + i[P, a(k)] + \frac{i^2}{2!}[P, [P, a(k)]] + \dots \\ &\dots + \frac{i^n}{n!}[P, [\dots [P, a(k)]] \dots] + \dots = -a(-k). \end{aligned} \quad (15.80)$$

Для определенности рассмотрим псевдоскалярное поле и в правой части (15.80) выберем знак минус. Тогда

$$[P, a(k)] = \frac{\lambda}{2} [a(k) \pm a(-k)], \quad (15.81)$$

причем величину λ и знак плюс или минус в уравнении еще следует определить. Имеем, далее,

$$[P, [P, a(k)]] = \frac{1}{2} \lambda^2 [a(k) \pm a(-k)]$$

и, в силу (15.80),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}a(k)\mathcal{P}^{-1} &= \\ &= a(k) + \frac{1}{2} \left[i\lambda + \frac{(i\lambda)^2}{2!} + \dots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} + \dots \right] [a(k) \pm a(-k)] = \\ &= \frac{1}{2} [a(k) \mp a(-k)] + \frac{1}{2} e^{i\lambda} [a(k) \pm a(-k)]. \end{aligned} \quad (15.82)$$

Выбрав в (15.81) знак плюс и положив $\lambda = \pi$, получим²⁾

$$P_{ps} = -\frac{\pi}{2} \int d^3k [a^+(k)a(k) + a^+(k)a(-k)] = P_{ps}^+$$

и

$$\mathcal{P}_{ps} = \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \int d^3k [a^+(k)a(k) + a^+(k)a(-k)] \right\}. \quad (15.83)$$

¹⁾ Замена $k \rightarrow -k$ в аргументе операторов рождения и уничтожения относится только к пространственным компонентам импульса.

²⁾ См. [45]. Отметим, что в координатном пространстве операторы P и \mathcal{P} являются нелокальными, как и должно быть для преобразований, переводящих частицу из точки x в точку $-x$.

Для скалярного поля (в этом случае в правой части формулы (15.80) нужно взять знак плюс) имеем

$$\mathcal{P}_s = \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \int d^3k [a^+(k)a(k) - a^+(k)a(-k)] \right\}. \quad (15.84)$$

Унитарность оператора \mathcal{P} гарантируется эрмитовостью P в (15.83) и (15.84), а соглашение (15.76) о четности вакуума обеспечивается нормальным порядком операторных множителей в P .

Аналогичным образом можно построить оператор \mathcal{P} , удовлетворяющий условию (15.73), и для взаимодействующих полей. При этом, если выполняются соотношения (15.71) и (15.72), т. е. если \mathcal{P} как оператор симметрии коммутирует с гамильтонианом

$$[\mathcal{P}, H] = 0, \quad (15.85)$$

то четность \mathcal{P} является константой движения.

Чтобы построить общий вид оператора \mathcal{P} , построим вначале оператор \mathcal{P}_0 , удовлетворяющий (15.73) в момент времени $t = 0$. Оператор \mathcal{P}_0 строится так же, как и в теории свободных полей, поскольку при $t = 0$ коэффициенты разложения взаимодействующих полей удовлетворяют алгебре коммутаторов свободных полей (см. (15.23)). Поэтому для \mathcal{P}_0 по-прежнему справедливы выражения (15.83) или (15.84), в которых операторы рождения и уничтожения нужно рассматривать как коэффициенты разложения взаимодействующего поля при $t = 0$. Далее применим гамильтонов оператор, чтобы выполнить смещение во времени. Если

$$\mathcal{P}_0 \varphi(\mathbf{x}, 0) \mathcal{P}_0^{-1} = \pm \varphi(-\mathbf{x}, 0), \quad (15.86)$$

то оператор

$$\mathcal{P}(t) = e^{iHt} \mathcal{P}_0 e^{-iHt} \quad (15.87)$$

удовлетворяет (15.73) в произвольный момент времени t . Наконец, если оператор \mathcal{P} коммутирует с гамильтонианом, то немедленно получаем, что

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_0.$$

Фундаментальные соотношения (15.71) и (15.72) для поля Дирака будут выполнены, если потребовать, чтобы вместо (15.73) выполнялось условие

$$\mathcal{P} \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{P}^{-1} = \gamma_0 \psi(-\mathbf{x}, t), \quad (15.88)$$

причем коммутационные соотношения (13.53) и (13.54) при таком преобразовании не меняются. Инвариантность уравнения Дирака относительно преобразования (15.88) была показана

в гл. 2 (см. (2.33)). Снова удобно перейти в формуле (15.88) к разложению по плоским волнам. Имеем

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sum_{\pm s} [\mathcal{P} b(p, s) \mathcal{P}^{-1} u(p, s) e^{-iE_p t + i\mathbf{p}x} + \\ & \quad + \mathcal{P} d^+(p, s) \mathcal{P}^{-1} v(p, s) e^{iE_p t - i\mathbf{p}x}] = \\ & = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sum_{\pm s} [b(p, s) \gamma_0 u(p, s) e^{-iE_p t - i\mathbf{p}x} + \\ & \quad + d^+(p, s) \gamma_0 v(p, s) e^{iE_p t + i\mathbf{p}x}]. \quad (15.89) \end{aligned}$$

Заменяя \mathbf{p} на $-\mathbf{p}$ и используя свойства спиноров u и v :

$$\gamma_0 u(-p, s) = u(p, s), \quad \gamma_0 v(-p, s) = -v(p, s), \quad (15.90)$$

получим

$$\mathcal{P} b(p, s) \mathcal{P}^{-1} = b(-p, s), \quad \mathcal{P} d^+(p, s) \mathcal{P}^{-1} = -d^+(-p, s) \quad (15.91)$$

и аналогичные соотношения для операторов b^+ и d .

Вспомнив, что оператор b^+ , действуя на вакуум, образует одноэлектронное (или барионное) состояние, а d^+ уничтожает позитрон (антибарион), мы видим, что четности электрона и позитрона в одном и том же орбитальном состоянии противоположны. Независимо от выбора фазы (15.88) электронные состояния под действием оператора \mathcal{P} преобразуются как скаляры, а позитронные — как псевдоскаляры. Поэтому электрон-позитронная пара в s -состоянии имеет отрицательную четность. Точно так же в любой теории, в которой \mathcal{P} является оператором симметрии, четность барион-антибарионной пары отрицательна:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int d^3 p f(\mathbf{p}^2) b^+(p, s) d^+(p, s) |0\rangle & = \\ & = - \int d^3 p f(\mathbf{p}^2) b^+(p, s) d^+(p, s) |0\rangle. \quad (15.92) \end{aligned}$$

Для того чтобы построить явный вид оператора четности для дираковского поля, нужно только повторить все выкладки, ведущие к выражению (15.84). В результате получим

$$\mathcal{P}_{\text{Dirac}} = \exp(iP_{\text{Dirac}}),$$

$$\begin{aligned} P_{\text{Dirac}} & = -\frac{\pi}{2} \int d^3 p [b^+(p, s) b(p, s) - b^+(p, s) b(-p, s) + \\ & \quad + d^+(p, s) d(p, s) + d^+(p, s) d(-p, s)]. \quad (15.93) \end{aligned}$$

Так как оператор четности содержит матрицу γ_0 , величина $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ является псевдоскаляром:

$$\mathcal{P} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{P}^{-1} = -\bar{\psi}(-\mathbf{x}, t) \gamma_5 \psi(-\mathbf{x}, t). \quad (15.94)$$

Это обстоятельство играет важную роль в теории мезон-нуклонного рассеяния. Например, наш модельный лагранжиан (15.30) только в том случае удовлетворяет условию (15.71), в котором оператор \mathcal{P} действует на все мезоны и нуклоны:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_p \mathcal{P}_n \mathcal{P}_\pi + \mathcal{P}_\pi^0 \mathcal{P}_{\pi^-},$$

когда \mathcal{P}_π псевдоскалярный оператор (15.83). Этот выбор находится в согласии с экспериментальными данными.

Внутренняя четность электромагнитного поля определяется принципом соответствия, поскольку оно может быть связано с классическими токами. Поэтому для фотонов мы полагаем

$$\mathcal{P} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \mathcal{P}^{-1} = -\mathbf{A}(-\mathbf{x}, t). \quad (15.95)$$

Это преобразование оставляет уравнения Максвелла инвариантными. Явный вид оператора \mathcal{P} находится так же, как и в теории Клейна — Гордона.

§ 99. Зарядовое сопряжение

Операция зарядового сопряжения связана с перестановкой частиц и античастиц. В гл. 5 было показано, что в частном случае поля электронов эта операция сводится к изменению знака электрического заряда и электромагнитного поля. Если снова рассмотреть модельный лагранжиан (15.69), включающий внешнее поле A_μ^{ext} , которое описывает измерительный прибор, то такая интерпретация сводится к утверждению, что в зарядово-симметричной теории существует унитарный оператор \mathcal{C} такой, что

$$\mathcal{C} \mathcal{L}(x) \mathcal{C}^{-1} = \mathcal{L}(x), \quad \mathcal{C} j_\mu(x) \mathcal{C}^{-1} = -j_\mu(x), \quad (15.96)$$

где j_μ — электромагнитный ток. Чтобы законы сохранения странности, числа барионов и изотопического спина были инвариантными при зарядовом сопряжении, нейтральные частицы, описываемые неэрмитовыми полями, под действием оператора \mathcal{C} должны переходить в соответствующие античастицы. Например, действуя на K^0 , n и Λ , оператор \mathcal{C} переводит их в \bar{K}^0 , \bar{n} и $\bar{\Lambda}$. Фотоны и π^0 -мезоны, которые описываются эрмитовыми полями, не отличаются от своих античастиц, поэтому при \mathcal{C} -преобразовании эрмитово поле может самое большое приобрести множитель -1 . Электромагнитное поле под действием оператора \mathcal{C} должно преобразовываться следующим образом:

$$\mathcal{C} \mathbf{A}(x) \mathcal{C}^{-1} = -\mathbf{A}(x), \quad (15.97)$$

при этом член $j(x) \cdot A(x)$ в лагранжиане взаимодействия остается инвариантным. Из (15.97) следует, что

$$Ca^+(k, \lambda) C^{-1} = -a^+(k, \lambda). \quad (15.98)$$

Повторяя выкладки, аналогичные выкладкам предыдущего параграфа, получаем

$$C = \exp \left[i\pi \int d^3k \sum_{\lambda=1}^2 a^+(k, \lambda) a(k, \lambda) \right]. \quad (15.99)$$

Если включены взаимодействия, то C в выражении (15.99) может и не быть оператором симметрии теории. В этом случае мы определим C соотношением, аналогичным (15.87) для оператора \mathcal{P} , а именно:

$$C(t) = e^{iHt} C_0 e^{-iHt}, \quad (15.100)$$

где C_0 удовлетворяет условию (15.97) в момент времени $t = 0$ и имеет вид (15.99), причем под a^+ , a нужно понимать коэффициенты взаимодействующего фотонного поля при $t = 0$. В теории свободного поля вакуумное состояние $|0\rangle$ не вырождено, поэтому оно является собственным состоянием оператора симметрии C . Будем считать, что вакуум есть не только четное (см. (15.76)), но и зарядово-четное собственное состояние:

$$C|0\rangle = +|0\rangle. \quad (15.101)$$

Тогда, с учетом (15.97), собственное значение оператора C для n -фотонного состояния равно $(-1)^n$. В дальнейшем будем называть собственные значения оператора C зарядовой четностью состояния. В случае, когда в лагранжиане присутствуют члены со взаимодействием, мы по-прежнему будем считать вакуум невырожденным и зарядово-четным.

Зарядовую четность π^0 -мезона можно определить из самого факта существования распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Если сильные и электромагнитные взаимодействия инвариантны под действием оператора C , то π^0 -мезон должен быть зарядово-четным, поскольку он связан с зарядово-четным состоянием двух фотонов.

Перейдем далее к заряженным π -мезонам. Рассмотрим поля φ и φ^* , которые рождают отрицательно и положительно заряженные частицы. Поскольку при замене $\varphi \rightleftharpoons \varphi^*$ имеем $\mathcal{L}(x) \rightarrow -\mathcal{L}(x)$ и $j_\mu(x) \rightarrow -j_\mu(x)$, то оператор C с точностью до произвольной фазы должен удовлетворять соотношениям

$$C\varphi(x) C^{-1} = \varphi^*(x), \quad C\varphi^*(x) C^{-1} = \varphi(x). \quad (15.102)$$

В терминах операторов рождения и уничтожения π^+ - и π^- -мезонов (12.57), эти соотношения имеют вид

$$C a_+^\dagger(k) C^{-1} = a_-^\dagger(k), \quad C a_-^\dagger(k) C^{-1} = a_+^\dagger(k). \quad (15.103)$$

Переходя к эрмитовым полям φ_1 и φ_2 , получаем

$$C \varphi_1(x) C^{-1} = \varphi_1(x), \quad C \varphi_2(x) C^{-1} = -\varphi_2(x), \quad (15.104)$$

или

$$C a_1(k) C^{-1} = a_1(k), \quad C a_2(k) C^{-1} = -a_2(k). \quad (15.105)$$

Эти соотношения показывают, что C имеет смысл оператора отражения в (1,3)-плоскости изоспинового пространства. Отсюда следует, что собственные векторы оператора C должны содержать равное число π^+ - и π^- -мезонов и, следовательно, должны быть электрически нейтральными. Формально это следует из соотношения

$$CQ = -QC. \quad (15.106)$$

При построении явного вида оператора зарядового сопряжения следует помнить, что C не коммутирует только с φ_2 . Поэтому

$$C = \exp \left[i\pi \int d^3k a_2^\dagger(k) a_2(k) \right]. \quad (15.107)$$

В том случае, когда C не является константой движения он определяется формальным выражением (15.100).

Аналогичное рассмотрение применимо и к K -мезонам. Все сказанное выше непосредственно относится к K^+ - и K^- -полям. Поскольку для K^+ -мезонов $Q_{K^+} = S_{K^+} = Y_{K^+}$ (см. (15.64), (15.66), (15.68)), то из (15.105) следует, что C антикоммутирует с S и Y . Кроме того, под действием оператора C состояния K^0 и \bar{K}^0 должны переходить друг в друга. В этом смысле система $K^0\bar{K}^0$ аналогична системе K^+K^- , единственная разница заключается в том, что заряд Q теперь равен нулю. Что же касается операторов S и Y , то они по-прежнему антикоммутируют с C . Поскольку операторы $\varphi_{K^0}^*$ и φ_{K^0} рождают K^0 - и \bar{K}^0 -мезоны, которые есть собственные векторы оператора странности, эрмитовые линейные комбинации¹⁾

$$\varphi_{K_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{K^0} - \varphi_{K^0}^*), \quad \varphi_{K_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{K^0} + \varphi_{K^0}^*) \quad (15.108)$$

по аналогии с φ_1 и φ_2 в (15.104) рождают соответственно зарядово-четные и зарядово-нечетные состояния. Эти состояния иг-

¹⁾ Известно, что K^0 имеет отрицательную внутреннюю четность. Поэтому согласно (15.108), состояние K_1 четно относительно комбинированной операции $C\mathcal{P}$, а состояние K_2 нечетно.

рают важную роль в теории слабых распадов нейтральных К-мезонов¹⁾.

Зарядовое сопряжение для дираковской частицы уже обсуждалось в первом томе. Напомним, что свободное уравнение Дирака инвариантно при замене

$$\psi(x) \rightarrow C\bar{\psi}^T(x), \quad (15.109)$$

где C — 4×4 матрица, удовлетворяющая условиям

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \quad \text{или} \quad C_{\alpha\beta}\gamma_{\beta\lambda}^\mu C_{\lambda\tau}^{-1} = -\gamma_{\tau\alpha}^\mu. \quad (15.110)$$

В уравнении (5.6) мы выбрали эту матрицу в виде

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^+ = -C^T \quad (15.111)$$

в представлении, где $\gamma_0 = \gamma_0^T$, $\gamma_2 = \gamma_2^T$. В теории поля мы ищем унитарный оператор C , генерирующий преобразование (15.109):

$$C\psi_\alpha(x)C^{-1} = C_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta(x) = (C\gamma^0)_{\alpha\beta}\psi_\beta^+(x)$$

и

$$C\bar{\psi}_\alpha(x)C^{-1} = -\psi_\beta(x)C_{\beta\alpha}^{-1}, \quad (15.112)$$

где матрица C по-прежнему определяется соотношениями (15.110), (15.111) с точностью до несущественного фазового множителя. Порядок матриц в (15.112) явно указан индексами, и его нужно тщательно придерживаться.

Легко проверить, что при C -преобразовании перестановочные соотношения (13.53) и (13.54), а также уравнение Дирака остаются инвариантными. Что же касается плотности лагранжиана \mathcal{L} в (13.42), то она изменяется только на несущественную полную дивергенцию.

Поддействуем далее оператором C на $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$; при этом получим

$$C\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C^{-1} = -\psi_\alpha(x)C_{\alpha\beta}^{-1}\gamma_{\beta\lambda}^\mu C_{\lambda\tau}\bar{\psi}_\tau(x) = \psi_\alpha(x)\gamma_{\tau\alpha}^\mu\bar{\psi}_\tau(x). \quad (15.113)$$

В § 92 мы отмечали, однако, что отождествление величины $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ с электромагнитным током приводит к ряду трудностей и что поэтому для тока следует использовать выражение, антисимметризованное по фермионным полям, или, что эквивалентно, выражение с нормальным порядком операторных множителей. Если

$$j_\mu(x) = 1/2[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu\psi(x)],$$

¹⁾ См. [46, 47].

то непосредственно из (15.113) следует, что

$$C j_{\mu}(x) C^{-1} = -j_{\mu}(x). \quad (15.114)$$

Таким образом, электромагнитный ток меняет знак при C -преобразовании, как и должно быть. Отметим также, что если вакуум не вырожден и является собственным вектором оператора C , то $\langle 0 | j_{\mu}(x) | 0 \rangle = 0$.

Чтобы построить явный вид оператора C для фермионного поля, вспомним (см. гл. 5), что электронные и позитронные спиноры связаны соотношениями

$$(C \gamma^0)_{\alpha\beta} u_{\beta}^{+}(p, s) = v_{\alpha}(p, s) e^{i\phi(p, s)},$$

$$(C \gamma^0)_{\alpha\beta} v_{\beta}^{+}(p, s) = u_{\alpha}(p, s) e^{i\phi(p, s)}.$$

Переходя к (15.112) к разложению по импульсам, получаем

$$C b(p, s) C^{-1} = d(p, s) e^{i\phi(p, s)},$$

$$C d^{+}(p, s) C^{-1} = b^{+}(p, s) e^{i\phi(p, s)}.$$

Эти выражения показывают, что, в согласии с определением, преобразование зарядового сопряжения переставляет операторы частиц и античастиц. Явный вид оператора C можно построить так же, как и в случае бозонных полей. Удобно сначала представить C в виде произведения двух унитарных преобразований

$$C = C_2 C_1, \quad (15.115)$$

причем C_1 выбрать так, чтобы устранить фазовый множитель ϕ :

$$C_1 b(p, s) C_1^{-1} = e^{i\phi(p, s)} b(p, s),$$

$$C_1 d^{+}(p, s) C_1^{-1} = e^{i\phi(p, s)} d^{+}(p, s).$$

Непосредственным вычислением находим

$$C_1 = \exp \left\{ -i \int d^3 p \sum_{\pm s} \phi(p, s) [b^{+}(p, s) b(p, s) - d^{+}(p, s) d(p, s)] \right\}. \quad (15.116)$$

Для C_2 , используя ту же технику, что и при вычислении оператора четности (15.84), получаем

$$C_2 = \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} \int d^3 p \sum_{s=1}^2 [b^{+}(p, s) - d^{+}(p, s)] [b(p, s) - d(p, s)] \right\}. \quad (15.117)$$

Если C_1 не является константой движения, то выражения (15.116) и (15.117) справедливы при $t=0$, в произвольный

же момент времени оператор \mathcal{C} определяется выражением (15.100).

Проверку того факта, что введение π -мезон-нуклонной связи в лагранжевой модели (15.30) не нарушает зарядовую инвариантность теории при условии, что \mathcal{C} -преобразование применяется одновременно ко всем полям, входящим в \mathcal{L} , мы оставляем читателю в качестве упражнения. В случае электромагнитной связи симметрия сохраняется; в действительности именно с помощью этой связи мы определили само понятие зарядовой симметрии.

Чтобы проиллюстрировать, как зарядовая инвариантность приводит к определенным правилам отбора, рассмотрим распад позитрония. Как и в случае нейтральных K -мезонов, мы можем образовать зарядово-четные и зарядово-нечетные состояния позитрония. С этой целью построим вначале состояние позитрония с данным угловым моментом, образовав суперпозицию электрон-позитронных пар с различными спинами и импульсами

$$\Psi_{e^+e^-} = \int d^3p d^3p' \sum_{s,s'} \mathfrak{F}(p, s; p', s') b^+(p, s) d^+(p', s') |0\rangle. \quad (15.118)$$

Хотя в присутствии электромагнитной связи состояние (15.118) не является точным собственным вектором гамильтониана, оно в силу инвариантности электромагнитных взаимодействий относительно \mathcal{C} -преобразования имеет те же свойства симметрии, что и точное физическое состояние. Поэтому нужно только выяснить, какие из амплитуд $\mathfrak{F}(p, s; p', s')$ отвечают зарядово-четным состояниям, распадающимся на два фотона, и какие — зарядово-нечетным состояниям, распадающимся на три фотона. Подействуем на (15.118) оператором \mathcal{C} ; используя алгебру антикоммутирующих операторов b^+ и d^+ , получим¹⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\Psi_{e^+e^-} &= \int d^3p d^3p' \sum_{s,s'} \mathfrak{F}(p, s; p', s') d^+(p, s) b^+(p', s') |0\rangle = \\ &= - \int d^3p d^3p' \sum_{s,s'} \mathfrak{F}(p', s'; p, s) b^+(p, s) d^+(p', s') |0\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что состояние, *четное* при перестановке электрона и позитрона,

$$\mathfrak{F}(p, s; p', s') = + \mathfrak{F}(p', s'; p, s)$$

является нечетным при \mathcal{C} -преобразовании и наоборот. Таким образом, позитроний в триплетном состоянии 3S_1 распадается

¹⁾ Мы опустили здесь фазу $\phi(p, s)$; для обоснования см. задачу 23 этой главы.

с испусканием трех фотонов, синглетное же 1S_0 состояние распадается на два γ -кванта.

Симметричное состояние бозона и антибозона четно при C -преобразовании, поскольку в этом случае отсутствует знак минус, связанный с антикоммутиационными соотношениями. Уместно сформулировать здесь и более общее правило, утверждающее, что зарядовая четность пары частица — античастица равна $+1$, если частицы находятся в состоянии, разрешенном для двух тождественных частиц (это состояние четно для бозонов и нечетно для фермионов). Для состояний с зарядовой четностью -1 ситуация в точности противоположна.

§ 100. Обращение времени

Операция обращения времени заключается в замене направления времени t на $t' = -t$. При рассмотрении одночастичного уравнения Дирака мы обнаружили, что обращение времени является преобразованием симметрии только в том случае, когда оно включает, наряду с заменой t на t' , комплексное сопряжение волновой функции и умножение ее на матрицу $T = i\gamma^1\gamma^3$ (в представлении, где только матрица γ^2 является мнимой). В теории поля мы строим оператор \mathcal{F} , который преобразует физические состояния, развивающиеся вперед во времени, в состояния, развивающиеся назад во времени, которые выглядят так, как если бы запустить фильм задом наперед $t' = -t$. Из (11.70) ясно, что этот оператор, как и в одночастичной теории, не может быть линейным. Действительно, рассмотрим, например,

$$[H, \varphi_r(\mathbf{x}, t)] = -i \frac{\partial \varphi_r(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (15.119)$$

Для унитарного оператора \mathcal{U} , который оставляет действие инвариантным и преобразует поля $\varphi_r(\mathbf{x}, t)$ в $\mathcal{W}_{rs}\varphi_s(\mathbf{x}, t') = \mathcal{U}\varphi_r(\mathbf{x}, t)\mathcal{U}^{-1}$, должно выполняться соотношение

$$[\mathcal{U}H\mathcal{U}^{-1}, \varphi_s(\mathbf{x}, t')] = +i \frac{\partial \varphi_s(\mathbf{x}, t')}{\partial t'}. \quad (15.120)$$

Для того чтобы это соотношение совпадало с (15.119), необходимо чтобы оператор \mathcal{U} переводил H в $-H$. Это, однако, является неприемлемым с физической точки зрения, поскольку как до, так и после преобразования собственные значения гамильтониана должны оставаться положительными по отношению к вакууму. Поэтому, как и в уравнении (5.14), следует отказаться от требования унитарности \mathcal{F} , вводя, в дополнение к оператору \mathcal{U} , оператор комплексного сопряжения K ,

действующий на все c -числа¹⁾. При этом, если

$$\mathcal{F} = UK \quad \text{и} \quad \mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1} = H, \quad (15.121)$$

то перестановочное соотношение (15.119) под действием преобразования \mathcal{F} остается инвариантным. На языке лагранжевой плотности (15.69), включающей взаимодействие с внешним полем, инвариантность теории при обращении времени означает, что в этой теории существует оператор \mathcal{F} , оставляющий коммутационные соотношения неизменными и удовлетворяющий условиям

$$\mathcal{F}\mathcal{L}(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{L}(\mathbf{x}, -t), \quad (15.122)$$

$$\mathcal{F}j_{\mu}(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1} = j^{\mu}(\mathbf{x}, -t). \quad (15.123)$$

Отметим, что в правиле преобразования электромагнитных токов (15.123) заряды не меняют знака при обращении времени, в полной аналогии с классической теорией. Действительно, при обращении времени внешнее электромагнитное поле преобразуется как

$$A_{\mu}(\mathbf{x}, t) \rightarrow A^{\mu}(\mathbf{x}, -t) \quad (15.124)$$

поэтому, если ток преобразуется по (15.123), то

$$j_{\mu}(\mathbf{x}, t)A^{\mu}(\mathbf{x}, t) \rightarrow +j_{\mu}(\mathbf{x}, -t)A^{\mu}(\mathbf{x}, -t).$$

Найдем далее изменение действия:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}J(t_2, t_1)\mathcal{F}^{-1} &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d^3x dt \mathcal{L}(\mathbf{x}, -t) = \int_{t_2}^{t_1} d^3x dt \mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = J(-t_1, -t_2). \end{aligned} \quad (15.125)$$

Новое действие $J(-t_1, -t_2)$ отличается от $J(t_2, t_1)$ только сдвигом по времени — операцией, которая также является преобразованием симметрии теории. Мы видим, таким образом, что выполнение соотношений (15.122), (15.123) достаточно для инвариантности при обращении времени.

Построим явный вид оператора \mathcal{F} для различных полей, обсуждавшихся до сих пор. В случае электромагнитного поля

$$\mathcal{F}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1} = -\mathbf{A}(\mathbf{x}, -t), \quad (15.126)$$

поскольку, согласно (15.123), токи, генерирующие поля, меняют знак. Соотношение (15.122) выполняется для максвелловского лагранжиана (14.9) в поперечной калибровке. Преобразование \mathcal{F} благодаря наличию оператора K оставляет инвариантными

¹⁾ Оператор K является нелинейным; оператор \mathcal{F} называется поэтому антилинейным или антиунитарным оператором. См. [48—50].

перестановочные соотношения (14.13) и (14.17). Переходя в импульсное пространство и подставляя разложение (14.33) в (15.126), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^{-1} &= \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \sum_{\lambda=1}^2 \boldsymbol{\varepsilon}(k, \lambda) [\mathcal{U} a(k, \lambda) \mathcal{U}^{-1} e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \\ &\quad + \mathcal{U} a^+(k, \lambda) \mathcal{U}^{-1} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}] = -\mathbf{A}(\mathbf{x}, -t) = \\ &= - \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \sum_{\lambda=1}^2 \boldsymbol{\varepsilon}(k, \lambda) [a(k, \lambda) e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a^+(k, \lambda) e^{-i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]. \end{aligned} \quad (15.127)$$

Вспомнив наше соглашение (14.31) о векторах поляризации

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k, 1) = -\boldsymbol{\varepsilon}(-k, 1), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(k, 2) = +\boldsymbol{\varepsilon}(-k, 2),$$

получаем

$$\mathcal{U} a(k, 1) \mathcal{U}^{-1} = +a(-k, 1), \quad \mathcal{U} a(k, 2) \mathcal{U}^{-1} = -a(-k, 2). \quad (15.128)$$

Эти уравнения по своей форме совпадают с уравнениями (15.78) для оператора четности, поэтому их решение по аналогии с (15.83), (15.84) выписывается немедленно:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \exp \left\{ \frac{-i\pi}{2} \int d^3 k [a^+(k, 1) a(k, 1) - a^+(k, 1) a(-k, 1) + \right. \\ \left. + a^+(k, 2) a(k, 2) + a^+(k, 2) a(-k, 2)] \right\} \end{aligned} \quad (15.129)$$

В случае невзаимодействующего эрмитового поля Клейна — Гордона уравнения (15.122) и (15.123) выполняются, если положить

$$\mathcal{F} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^{-1} = \pm \varphi(\mathbf{x}, -t). \quad (15.130)$$

Для заряженного же поля правило преобразования тока (15.123) означает, что

$$\mathcal{F} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^{-1} = \pm \varphi^*(\mathbf{x}, -t). \quad (15.131)$$

Объединяя эти два уравнения, получаем

$$\mathcal{F} \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}, t) \\ \varphi_2(\mathbf{x}, t) \\ \varphi_3(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix} \mathcal{F}^{-1} = \pm \begin{bmatrix} +\varphi_1(\mathbf{x}, -t) \\ -\varphi_2(\mathbf{x}, -t) \\ +\varphi_3(\mathbf{x}, -t) \end{bmatrix}, \quad (15.132)$$

причем фаза в правой части может быть выбрана произвольно. При построении явного вида оператора \mathcal{F} нужно повторить выкладки, которые были сделаны для электромагнитного поля.

Рассмотрим далее спинорное поле. Оператор \mathcal{F} определяется следующим образом:

$$\mathcal{F}\psi_\alpha(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1} = T_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{x}, -t). \quad (15.133)$$

Кроме того, он должен удовлетворять соотношениям (15.122) и (15.123) и оставлять инвариантными антикоммутирующие (13.53) и (13.54). Легко проверить, что все эти условия можно выполнить, если матрицу T выбрать в том же виде, что и в одночастичной теории (см. (5.15)), а именно:

$$T = i\gamma^1\gamma^3, \quad T\gamma_\mu T^{-1} = \gamma_\mu^T = \gamma^{\mu*}, \quad T = T^+ = T^{-1} = -T^*, \quad (15.134)$$

причем используется представление, в котором мнимая только матрица γ^2 . Проверим, например, уравнение (15.123)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}j_\mu(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1} &= \\ &= \psi^+(\mathbf{x}, -t)T^{-1}(\gamma_0\gamma_\mu)^*T\psi(\mathbf{x}, -t) - \langle 0 | \bar{\psi}\gamma_\mu\psi | 0 \rangle = \\ &= \bar{\psi}(\mathbf{x}, -t)\gamma^\mu\psi(\mathbf{x}, -t) - \langle 0 | \bar{\psi}\gamma_\mu\psi | 0 \rangle = j^\mu(\mathbf{x}, -t). \end{aligned}$$

Отметим, что правило преобразования (15.133) отличается от аналогичного правила в одночастичной теории: $\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow T\psi^*(\mathbf{x}, -t)$. В теории поля преобразование $\psi \rightarrow T\psi^+$ является неприемлемым, поскольку оно переводит, например, покоящийся электрон в позитрон.

Переходя в (15.133) к импульсному пространству, получаем

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{\pm s} [\mathcal{U}b(p, s)\mathcal{U}^{-1}u^*(p, s)e^{iEt-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \\ &\quad + \mathcal{U}d^+(p, s)\mathcal{U}^{-1}v^*(p, s)e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}] = \\ &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{\pm s} [b(p, s)Tu(p, s)e^{iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \\ &\quad + d^+(p, s)Tv(p, s)e^{-iEt-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}]. \quad (15.135) \end{aligned}$$

Из рассмотрения одночастичной теории (см. (5.16)) мы знаем, что

$$Tu(p, s) = u^*(-p, -s)e^{i\alpha_+(p, s)}, \quad Tv(p, s) = v^*(-p, -s)e^{i\alpha_-(p, s)}, \quad (15.136)$$

где α — фазовые множители, зависящие от спинового состояния.

Поддействуем еще раз оператором T на обе части уравнений (15.136). Поскольку $T^2 = 1$, получим

$$\alpha_{\pm}(p, s) = \pi + \alpha_{\pm}(-p, -s). \quad (15.137)$$

Поэтому из (15.135) и (15.136) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{U}b(p, s)\mathcal{U}^{-1} &= -b(-p, -s)e^{i\alpha_+(p, s)}, \\ \mathcal{U}d^+(p, s)\mathcal{U}^{-1} &= -d^+(-p, -s)e^{i\alpha_-(p, s)}. \end{aligned} \quad (15.138)$$

Представим далее \mathcal{U} в виде произведения двух унитарных преобразований

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_2\mathcal{U}_1. \quad (15.139)$$

Оператор \mathcal{U}_1 выберем так, чтобы устранить фазовые множители

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1b(p, s)\mathcal{U}_1^{-1} &= e^{i\alpha_+(p, s)}b(p, s), \\ \mathcal{U}_1d^+(p, s)\mathcal{U}_1^{-1} &= e^{i\alpha_-(p, s)}d^+(p, s). \end{aligned} \quad (15.140)$$

Явный вид этого оператора есть

$$\mathcal{U}_1 = \exp \left\{ -i \int d^3p \sum_{\pm s} [\alpha_+(p, s)b^+(p, s)b(p, s) - \alpha_-(p, s)d^+(p, s)d(p, s)] \right\}. \quad (15.141)$$

Оператор \mathcal{U}_2 удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{U}_2b(p, s)\mathcal{U}_2^{-1} = -b(-p, -s), \quad \mathcal{U}_2d^+(p, s)\mathcal{U}_2^{-1} = -d^+(-p, -s). \quad (15.142)$$

Используя ту же технику, что и при построении оператора четности, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2 = \exp \left\{ -i \frac{\pi}{2} \int d^3p \sum_{\pm s} [b^+(p, s)b(p, s) + \right. \\ \left. + b^+(p, s)b(-p, -s) - d^+(p, s)d(p, s) - \right. \\ \left. - d^+(p, s)d(-p, -s)] \right\}. \end{aligned} \quad (15.143)$$

Равенство (15.138) означает, что обращенное по времени состояние электрона или позитрона с энергией-импульсом E_p , \mathbf{p} и спином s представляет состояние с собственными значениями E_p , $-\mathbf{p}$, $-s$, т. е. состояние с обращенными спином и импульсом, но по-прежнему с положительной энергией. Соответствующие

волновые функции связаны при этом следующим образом¹⁾:

$$\begin{aligned}
 \psi_{E, p, s}(\mathbf{x}, t) &= \langle 0 | \psi(\mathbf{x}, t) | 1 \text{ электрон; } \mathbf{p}, \mathbf{s} \rangle = \\
 &= \langle K0 | K\psi(\mathbf{x}, t) | 1 \text{ электрон; } \mathbf{p}, \mathbf{s} \rangle^* = \\
 &= \langle K0 | \mathcal{U}^{-1} \mathcal{U} K \psi(\mathbf{x}, t) | 1 \text{ электрон; } \mathbf{p}, \mathbf{s} \rangle^* = \\
 &= \langle 0 | \mathcal{F} \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^{-1} | \mathcal{F} (1 \text{ электрон; } \mathbf{p}, \mathbf{s}) \rangle^* = \\
 &= - e^{i\alpha_+ (\mathbf{p}, \mathbf{s})} T^* \langle 0 | \psi(\mathbf{x}, -t) | 1 \text{ электрон; } -\mathbf{p}, -\mathbf{s} \rangle^* = \\
 &= e^{i\alpha_+ (\mathbf{p}, \mathbf{s})} T \psi_{E, -\mathbf{p}, -\mathbf{s}}^*(\mathbf{x}, -t). \tag{15.144}
 \end{aligned}$$

Это уравнение показывает, что волновые функции обращенных по времени состояний, как и в одночастичной теории, комплексно сопряжены.

Мы можем воспользоваться построенными операторами и в теории взаимодействующих полей, несмотря на то, что разложение полевых амплитуд возможно лишь в фиксированный момент времени, например, $t = 0$. Поскольку при $t = 0$ все коммутаторы совпадают с коммутаторами свободных полей, можно построить оператор \mathcal{F}_0 , удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_0 \psi_\alpha(\mathbf{x}, 0) \mathcal{F}_0^{-1} &= T_{\alpha\beta} \psi_\beta(\mathbf{x}, 0), \\
 \mathcal{F}_0 \varphi(\mathbf{x}, 0) \mathcal{F}_0^{-1} &= \pm \varphi(\mathbf{x}, 0), \\
 \mathcal{F}_0 \dot{\varphi}(\mathbf{x}, 0) \mathcal{F}_0^{-1} &= \mp \dot{\varphi}(\mathbf{x}, 0), \\
 \mathcal{F}_0 \mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) \mathcal{F}_0^{-1} &= -\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0), \\
 \mathcal{F}_0 \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, 0) \mathcal{F}_0^{-1} &= +\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, 0),
 \end{aligned} \tag{15.145}$$

совпадающими по своей форме с аналогичными соотношениями для операторов свободных полей. Решения уравнений (15.145) совпадают с соответствующими решениями в теории свободных полей с заменой операторов a^+ , b , d и т. д. на коэффициенты операторного разложения в (15.23), вычисленные при $t = 0$. Чтобы найти \mathcal{F} в произвольный момент времени t , положим²⁾

$$\mathcal{F} = e^{-iHt} \mathcal{F}_0 e^{-iHt}. \tag{15.146}$$

¹⁾ Отметим, что во второй строке цепочки равенств (15.144) мы, совершив комплексное сопряжение, явно выделили нелинейный оператор K . В силу (15.134) $T^* = -T$.

²⁾ Знак в первой экспоненте отличен от знака в аналогичных формулах для \mathcal{P} и \mathcal{C} . Это связано с тем, что при обращении времени нужно рассматривать смещение аргумента $t \rightarrow 0 \rightarrow -t$, а не $t \rightarrow 0 \rightarrow t$, как при остальных преобразованиях симметрии.

Легко видеть, что такой вид оператора \mathcal{F} приводит к выполнению всех требуемых условий. Проверим, например, выполнение равенства (15.133):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\psi_\alpha(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1} &= e^{-iHt}\mathcal{F}\psi(\mathbf{x}, 0)\mathcal{F}_0^{-1}e^{iHt} = \\ &= e^{-iHt}T_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{x}, 0)e^{iHt} = \\ &= T_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{x}, -t). \end{aligned}$$

Точно так же получаем, что

$$\mathcal{F}\varphi(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1} = \pm\varphi(\mathbf{x}, -t) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1} = -\mathbf{A}(\mathbf{x}, -t).$$

Если \mathcal{F} удовлетворяет условиям (15.122) и (15.123), то он представляет оператор симметрии теории. В этом случае

$$[\mathcal{F}, H] = 0 \tag{15.147}$$

и

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0.$$

§ 101. $\mathcal{F}\mathcal{C}\mathcal{P}$ -теорема

Легко проверить, что электромагнитные взаимодействия, а также модельный лагранжиан (15.30) π -мезон-нуклонного взаимодействия инвариантны относительно каждого из преобразований симметрии \mathcal{F} , \mathcal{C} и \mathcal{P} , рассмотренных в предыдущих параграфах на примерах различных взаимодействий. Разумеется, всегда можно ввести в члены со взаимодействием несколько чисто мнимых констант или матриц γ_5 и тем самым нарушить инвариантность какого-либо дискретного преобразования симметрии, сохранив при этом инвариантность теории относительно преобразований Лоренца и пространственно-временных смещений. Замечательным фактом, однако, является то обстоятельство, что произведение \mathcal{F} , \mathcal{C} и \mathcal{P} по-прежнему остается преобразованием симметрии в любой теории, для которой выполнены следующие условия:

1) теория должна быть локальной, инвариантной относительно собственных лоренцевых преобразований, и в ней должна быть определена нормально-упорядоченная эрмитова лагранжева плотность;

2) при квантовании полевых уравнений используется обычная связь между спином и статистикой, например поля Максвелла и Клейна — Гордона должны квантоваться с коммутаторами, что приводит к квантовой статистике Бозе — Эйнштейна, а дираковское поле должно квантоваться с антикоммутаторами, что приводит к принципу запрета.

Сформулированное утверждение составляет содержание $\mathcal{F}\mathcal{C}\mathcal{P}$ -теоремы, доказанной Людгерсом и Зумино, Паули и Швингером [50]. В этом параграфе мы докажем эту теорему для

взаимодействующих полей Клейна — Гордона, Максвелла и Дирака. Конкретно мы покажем, что при последовательном применении операторов $\mathcal{F}(t)$, $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{P}(t)$, взятых в один и тот же момент времени t , гамильтониан H удовлетворяет условию

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = H. \quad (15.148)$$

Поскольку наши исходные предположения относятся к свойствам лагранжевой плотности, удобно проводить все рассуждения именно для \mathcal{L} и лишь в конце доказательства вернуться к гамильтониану. Итак, покажем вначале, что

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}\mathcal{L}(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{L}(-\mathbf{x}, -t),$$

где все операторы вычисляются в момент времени t .

Лоренцева инвариантность лагранжевой плотности означает, что \mathcal{L} является эрмитовым оператором, который содержит скаляры, построенные из полей $\varphi_r(x)$, $A_\mu(x)$, их производных $\partial/\partial x^\mu$ и билинейных форм $\bar{\psi}^A\Gamma^B\psi^B$ спинорных полей или их производных, преобразующихся как тензоры. Индексы A и B относятся к различным фермионным полям (p , e^- , ν и т. д.), а Γ — одна из шестнадцати линейно независимых матриц Дирака: I , $i\gamma_5$, γ_μ , $\gamma_5\gamma_\mu$, $\sigma_{\mu\nu}$. При действии оператора $\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}$ на скалярное эрмитово поле φ_r получаем

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}\varphi_r(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = \pm \varphi_r(-\mathbf{x}, -t), \quad (15.149)$$

где знак плюс или минус определяется выбором знака в (15.132). В терминах операторов, образующих состояния с определенным зарядом, уравнение (15.149) имеет вид

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}\varphi(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = \pm \varphi^*(-\mathbf{x}, -t),$$

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}\varphi^*(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = \pm \varphi(-\mathbf{x}, -t).$$

Для спинорных полей, используя уравнения (15.88), (15.112) и (15.133), получаем

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}\psi_\alpha^A(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} =$$

$$= -i(\gamma_5^0\gamma_5)_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta^A(-\mathbf{x}, -t) = +i\gamma_{\alpha\beta}^5\psi_\beta^{A+}(-\mathbf{x}, -t)$$

и

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}\bar{\psi}_\alpha^A(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = -i\psi_\beta^A(-\mathbf{x}, -t)(\gamma_5\gamma_0)_{\beta\alpha}. \quad (15.150)$$

Отсюда можно найти правила преобразования для билинейных форм спинорных полей

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}\bar{\psi}_\alpha^A\Gamma_{\alpha\beta}^B\psi_\beta^B(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} =$$

$$= -\psi_\lambda^A(-\mathbf{x}, -t)(\gamma_5\gamma_0\Gamma^*\gamma_0\gamma_5)_{\lambda\tau}\bar{\psi}_\tau^B(-\mathbf{x}, -t) =$$

$$= -\psi_\lambda^A(-\mathbf{x}, -t)\Gamma'_{\tau\lambda}\bar{\psi}_\tau^B(-\mathbf{x}, -t), \quad (15.151)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \Gamma & \text{для } \Gamma = 1, i\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}, \\ \Gamma' &= -\Gamma & \text{для } \Gamma = \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu. \end{aligned}$$

Вспомнив, что различные фермиевские поля ψ^A и ψ^B антикоммутируют друг с другом и что \mathcal{L} представляет нормальное произведение спинорных полей, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F} : \bar{\psi}_\alpha^A(\mathbf{x}, t) \Gamma_{\alpha\beta} \psi_\beta^B(\mathbf{x}, t) : \mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} &= \\ &= + : \bar{\psi}_\tau^B(-\mathbf{x}, -t) \Gamma'_{\tau\lambda} \psi_\lambda^A(-\mathbf{x}, -t) :. \quad (15.152) \end{aligned}$$

Отметим, что при переходе от (15.151) к (15.152) наше соглашение о нормальной форме операторов существенно только для случая векторной связи $\Gamma = \gamma^\mu$ и одинаковых спинорных полей $A = B$, поскольку в остальных случаях в силу (15.39)

$$\begin{aligned} -\psi_\lambda^A(-\mathbf{x}, -t) \Gamma'_{\tau\lambda} \bar{\psi}_\tau^B(-\mathbf{x}, -t) &= \\ &= + \bar{\psi}_\tau^B(-\mathbf{x}, -t) \Gamma'_{\tau\lambda} \psi_\lambda^A(-\mathbf{x}, -t) - \delta_{AB} \delta^3(0) \text{Sp}(\gamma_0 \Gamma'). \end{aligned}$$

Напомним, однако, что при рассмотрении дискретных преобразований необходимо знать именно свойства векторного тока (см. (15.72), (15.96) и (15.123)). При комбинированном действии \mathcal{P} , \mathcal{C} и \mathcal{F} имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F} j^\mu(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} &= -j^\mu(-\mathbf{x}, -t) = \\ &= - : \bar{\psi}(-\mathbf{x}, -t) \gamma^\mu \psi(-\mathbf{x}, -t) :. \quad (15.153) \end{aligned}$$

Для электромагнитного поля аналогичная формула получается с помощью уравнений (15.95), (15.97) и (15.126)

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = -\mathbf{A}(-\mathbf{x}, -t). \quad (15.154)$$

Применив $\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}$ -преобразование к уравнению (15.8) для $A_0(\mathbf{x}, t)$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F} A_0(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} &= \\ &= - \int \frac{d^3 y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j_0(-\mathbf{y}, -t) = -A_0(-\mathbf{x}, -t), \end{aligned}$$

что непосредственно следует также из (15.152). Поэтому

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F} A_\mu(\mathbf{x}) \mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = -A_\mu(-\mathbf{x}). \quad (15.155)$$

В том случае, когда плотность лагранжиана содержит производные полей, мы используем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = - \frac{\partial}{\partial(-x_\mu)}. \quad (15.156)$$

Таким образом, эффект \mathcal{PCT} -преобразования сводится к следующему:

1. Все координаты x_μ заменяются на $x'_\mu = -x_\mu$; при этом

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

2. Эрмитовы скалярные поля $\varphi_r(x)$ переходят в $\pm\varphi_r(x')$, где для определенности мы выбрали фазу равной $+1$. Электромагнитное поле $A_\mu(x)$ переходит в $-A_\mu(x')$.

3. Все тензоры четного ранга, содержащие билинейные формы фермиевых полей и их производных, переходят в эрмитово сопряженные величины, а тензоры нечетного ранга — в эрмитово сопряженные тензоры со знаком минус.

4. Все c -числа заменяются комплексно-сопряженными.

Так как \mathcal{L} — скалярная величина, тензорные индексы в каждом члене сворачиваются; при этом получается четное число знаков минус, связанных с условием 3, которые, тем самым, оказываются несущественными. Чистый эффект \mathcal{PCT} -преобразования сводится к эрмитовому сопряжению плотности лагранжиана. Вопрос порядка множителей устраняется благодаря записи операторов в нормальной форме. Именно в этом месте и проявляется связь между спином и статистикой, поскольку операция нормального упорядочивания вносит знак минус (см. (13.58)) для антикоммутирующих полей со спином $1/2$ и знак плюс для бозевских полей со спином 0 и 1 (см. (12.25)). Поэтому, если \mathcal{L} — эрмитов оператор, то

$$\mathcal{PCT}\mathcal{L}(x)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(-x, -t). \quad (15.157)$$

Переход от \mathcal{L} к гамильтоновой плотности выполняется обычным способом

$$\mathcal{H}(x) = -\mathcal{L}(x) + \sum_r : \pi_r(x) \dot{\varphi}_r(x) :, \quad (15.158)$$

где сумма берется по всем ферми- и бозе-полям, входящим в \mathcal{L} . Поскольку каждое из преобразований \mathcal{F} , \mathcal{C} и \mathcal{P} по построению оставляет инвариантными коммутационные соотношения для бозе-полей

$$[\pi_r(x, t), \varphi_s(x', t)] = -i\delta^3(x - x')\delta_{rs}$$

и коммутационные соотношения для ферми-полей

$$\{\pi_r(x, t), \varphi_s(x', t)\} = +i\delta^3(x - x')\delta_{rs},$$

то из

$$\mathcal{PCT}\varphi_r(x, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = \eta_r\varphi_r(-x, -t) \quad (15.159)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}\phi_r(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} &= \\ &= -\eta_r \frac{\partial}{\partial(-t)} \phi_r(-\mathbf{x}, -t) \equiv -\eta_r \dot{\phi}_r(-\mathbf{x}, -t) \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}\pi_r(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = -\eta_r^* \pi_r(-\mathbf{x}, -t).$$

Отсюда заключаем, что

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{H}(-\mathbf{x}, -t),$$

откуда следует (15.148), и $\mathcal{F}\mathcal{C}\mathcal{P}$ -теорема доказана¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что в калибровке излучения $\square A = e_0 j_{lr}$, и построить оператор поперечного тока.

2. Показать, что в низшем порядке по e_0 зарядовая плотность вакуума кубично расходуется.

3. Проверить, что в квантовой электродинамике полный заряд сохраняется, т. е. что $[Q, H] = 0$.

4. Проверить гейзенберговские уравнения (15.18).

5. Проверить формулы (15.20) и (15.21) преобразования полевых операторов при преобразованиях Лоренца.

6. Дополнить доказательство лоренцевой инвариантности квантовой электродинамики в калибровке излучения, проверив инвариантность одновременных коммутаторов (15.9) и (15.10).

7. Проквантовать поле заряженной скалярной частицы, выбрав калибровку $A_0 = 0$ и добавив в лагранжиан, как и в задаче 14.3, член с массой фотона $-\lambda^2 A^2(x)$, где λ^2 мало. Соответствующий лагранжиан выписан в примечании на стр. 94 и в приложении Б (см. т. 1).

8. Прodelать те же выкладки для заряженной дираковской частицы.

9. Используя условие (15.41), проверить справедливость гейзенберговских уравнений движения для изотопически-инвариантного мезон-нуклонного взаимодействия (15.40). Что получится при попытке построить теорию с этим гамильтонианом, в которой поля протона и нейтрона коммутируют друг с другом?

10. Проверить, что для модельного лагранжиана (15.30) число нуклонов, изотопический спин и заряд сохраняются; в явном виде построить соответствующие константы движения, используя теорему Нетер.

11. Выписать общий вид лагранжиана \mathcal{L} , билинейного по восьми барионным полям, линейного по бозонным полям (без связей с производными) и инвариантного при преобразованиях, генерируемых операторами барионного числа, изотопического спина, заряда и странности. Ввести в этот лагранжиан электромагнитную связь и вычислить сохраняющиеся токи.

12. Разложив поле по сферическим волнам и используя свойства сферических гармоник, проверить уравнение (15.75).

13. Вывести уравнение (15.93) для оператора четности поля Дирака.

14. Построить оператор четности для электромагнитного поля и проверить инвариантность лагранжиана и перестановочных соотношений в квантовой электродинамике при пространственных отражениях.

¹⁾ В аксиоматическом методе доказана изящная теорема о связи $\mathcal{F}\mathcal{C}\mathcal{P}$ -преобразования, спина, статистики и слабой локальной коммутативности [51].

15. Проверить инвариантность уравнения Дирака и коммутационных соотношений (13.53) и (13.54) при зарядовом сопряжении. Вывести формулы (15.116) и (15.117).

16. Показать, что при зарядовом сопряжении векторный и тензорный токи, построенные из билинейных форм дираковских полей, нечетны, а скалярный, аксиальный и псевдоскалярный токи четны. Обсудить CP -инвариантные лагранжианы для β -распада.

17. Построить оператор C для лагранжиана (15.30).

18. При классификации сильно взаимодействующих частиц удобно использовать преобразование $G = e^{i\pi/2} C$. Выяснить, как барионы и мезоны преобразуются под действием этого оператора. Показать, в частности, что n -пионное состояние с $Q = 0$ имеет G -четность, равную $(-1)^n$.

19. Построить оператор \mathcal{F} для π -мезонного поля, удовлетворяющий соотношениям (15.132).

20. Как при обращении времени преобразуется состояние, содержащее право-поляризованный фотон?

21. Проверить уравнения (15.141) и (15.143).

22. Построить феноменологический слабый лагранжиан для лептонов, нуклонов и мезонов, основываясь на идеях, обсуждавшихся в гл. 10. Обсудить соответствующие законы сохранения и свойства симметрии лагранжиана.

23. Как зависят фазы $\phi(p, s)$ в формулах преобразования операторов b и d^+ при зарядовом сопряжении (см. стр. 124) от импульса p и спина s ? Показать, что при вычислении на стр. 125 функции \mathcal{F} , описывающей состояние позитрония с данным L и S , этими фазами можно пренебречь.

ВАКУУМНЫЕ СРЕДНИЕ И S-МАТРИЦА**§ 102. Введение**

Цель квантовой теории поля как физической теории состоит в динамическом описании наблюдаемых на опыте взаимодействующих частиц. В предыдущих главах мы уже видели, как при формальном квантовании классических полей возникает интерпретация в терминах частиц и как при построении лагранжианов учитываются свойства симметрии взаимодействия и определяются константы движения. Нам остается теперь задача изучения и вычисления различных матричных элементов, описывающих динамику взаимодействующих частиц.

Мы интересуемся как амплитудами, отвечающими распространению в пространстве-времени одной частицы, т. е. одночастичными функциями Грина, так и амплитудами перехода между различными начальными и конечными состояниями, т. е. S-матрицей. Одним из главных результатов здесь является обоснование, исходя из формализма теории поля, фейнмановских правил, обсуждавшихся в первом томе этой книги.

§ 103. Свойства физических состояний

Задача построения точных решений для системы связанных нелинейных уравнений вида (15.4), описывающих взаимодействующие поля, до настоящего времени не решена. Поэтому, прежде чем рассматривать приближенные методы ее решения имеет смысл выяснить, как далеко можно продвинуться в определении свойств точных состояний Φ и пропагаторов, исходя только из принципов инвариантности. Особенно важную роль при таком рассмотрении играют лоренцева инвариантность и инвариантность при пространственно-временных смещениях, поскольку эти две симметрии являются общими для всех случаев, представляющих физический интерес.

Начнем с рассмотрения собственных векторов Φ оператора энергии-импульса. Эти векторы действительно существуют, по-

скольку мы предполагаем инвариантность теории при пространственно-временных смещениях. В дальнейшем мы будем работать в гейзенберговском представлении, нумеруя векторы Φ собственными значениями оператора P_μ и всех остальных взаимно коммутирующих сохраняющихся операторов.

Из физических соображений можно наложить некоторые ограничения на спектр оператора P^μ . В отсутствие точных решений эти ограничения остаются, конечно, недоказанными. Тем не менее мы сделаем следующие предположения.

1. Собственные значения операторов энергии и импульса лежат внутри переднего светового конуса

$$P^2 = P_\mu P^\mu \geq 0, \quad P^0 \geq 0. \quad (16.1)$$

2. Существует невырожденное лоренц-инвариантное основное состояние с наименьшей энергией, называемое вакуумным состоянием

$$\Phi_0 \equiv |0\rangle.$$

По определению начало отсчета энергии выбирается так, что

$$P^0 |0\rangle = 0. \quad (16.2)$$

Тогда из (16.1) следует, что

$$P |0\rangle = 0.$$

Условие (16.2) лоренц-инвариантно, поэтому вектор $|0\rangle$ является вакуумным состоянием во всех лоренцевых системах.

3. Для каждой частицы с массой m_i существует стабильное одночастичное состояние

$$\Phi_{1(i)} \equiv |P^{(i)}\rangle,$$

где $P_\mu^{(i)} P^{(i)\mu} = m_i^2$.

Временно игнорируя «инфракрасные» осложнения, связанные с существованием систем фотонов и нейтрино с полной нулевой массой, добавим четвертое предположение.

4. Вакуум и одночастичное состояние образуют дискретный спектр операторов P^μ . На фиг. 16.1 в качестве примера изображен спектр для π -мезонов. Конечно, π -мезон в действительности не является стабильной частицей, он распадается в основном по каналу

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu',$$

причем наблюдаемое время жизни $\sim 2 \cdot 10^{-8}$ сек. Эта величина гораздо больше естественной частоты $\hbar/m_\pi c^2 \sim 5 \cdot 10^{-24}$ сек, поэтому в первом приближении разумно пренебречь слабой связью и рассматривать π -мезон как стабильную частицу. Далее можно сопоставить π -мезону поле ϕ и построить лагранжиан и соответ-

ствующий 4-вектор энергии-импульса, спектр которого и указан на рис. 16.1.

Аналогичным образом каждому дискретному (или почти дискретному) состоянию в спектре оператора P^μ можно сопоставить свое поле $\varphi(x)$ или $\psi(x)$. Такой подход по существу основывается на предположении о возможности использовать теорию возмущений. Действительно, рассматривая поля, отвечающие стабильным частицам, мы предполагаем, что взаимодействия

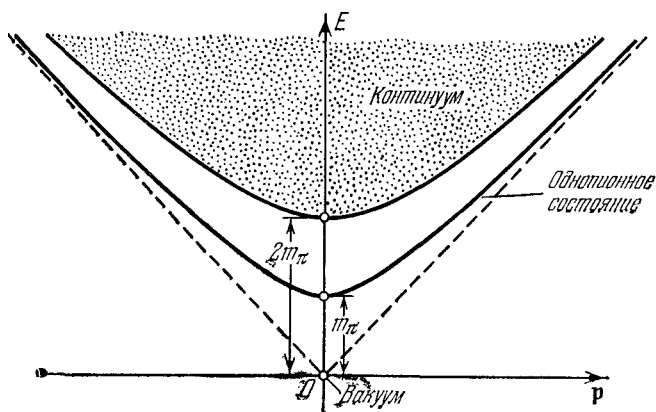


Рис. 16.1. Спектр оператора энергии-импульса для π -мезонов

этих частиц не слишком сильно искажают спектр затравочных состояний. Это предположение является весьма сильным, в частности оно автоматически исключает рассмотрение связанных состояний. Хааг, Нишиджима и Циммерманн [52] в рамках аксиоматического метода несколько продвинулись в понимании того, как можно построить локальное поле, определенное в каждой пространственно-временной точке x и описывающее связанное состояние двух элементарных полей, например, как представить дейтрон, образованный из двух нуклонов¹⁾. Однако точная связь между составным полем и лагранжианом взаимодействия элементарных полей остается при этом неясной²⁾.

¹⁾ Рецепт весьма прост. Для скалярного одночастичного «составного» состояния α , связанного с бесспиновыми полями $A(x)$ и $B(x)$, полевой оператор φ_α можно выбрать в виде

$$\varphi_\alpha(x) = \lim_{\substack{\varepsilon^2 < 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{A(x + \varepsilon) B(x - \varepsilon)}{\sqrt{2E_\alpha} (2\pi)^3 \langle 0 | A(x + \varepsilon) B(x - \varepsilon) | \alpha \rangle}.$$

²⁾ См. в этой связи замечания С. Вейнберга и А. Салама [53].

§ 104. In-поля и in-состояния; асимптотическое условие

Поскольку мы интересуемся главным образом задачами рассеяния, попытаемся прежде всего построить состояния, которые описывают физическую систему в начальный момент времени $t \rightarrow -\infty$. В этот момент времени рассеивающиеся частицы еще не взаимодействуют и распространяются под влиянием своего собственного поля. Поэтому прежде всего нужно построить операторы рождения частиц с физическим значением массы. Как обычно, мы предположим, что всевозможные состояния, различающиеся числом частиц и их импульсом, образуют полный набор.

В случае невзаимодействующих частиц одночастичное состояние получается при действии на вакуум одного из операторов рождения, в разложении свободного поля. Действуя последовательно на вакуум n операторами рождения, мы получаем n -частичное состояние. Напомним, что указанная интерпретация поля в терминах частиц возникает при рассмотрении спектра оператора энергии-импульса P^μ с учетом алгебры операторов рождения и уничтожения. Построим теперь аналогичные операторы рождения в теории взаимодействующих полей. Рассмотрим вначале простой пример эрмитового мезонного поля $\varphi(x)$, удовлетворяющего уравнению

$$(\square + m_0^2)\varphi(x) = j(x) \quad (16.3)$$

и одновременным перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [\varphi(x, t), \varphi(y, t)] &= [\pi(x, t), \pi(y, t)] = 0, \\ [\pi(x, t), \varphi(y, t)] &= -i\delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (16.4)$$

Будем считать, что ток $j(x)$ в (16.3) представляет оператор, локальным образом построенный из поля $\varphi(x)$. В том простом случае, когда ток не содержит связь с производными, имеем

$$\pi(x) = \dot{\varphi}(x).$$

В остальном форма тока может быть произвольной. Он может содержать связь с нуклонным источником или, например, самодействие вида

$$j(x) = \lambda\varphi^3(x).$$

В последнем случае уравнение поля может быть выведено из лагранжевой плотности

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} - m_0^2\varphi^2 + \frac{1}{2} \lambda\varphi^4 \right).$$

Обозначим оператор, который генерирует одночастичные физические состояния, через $\varphi_{in}(x)$, Оператор φ_{in} представляет

собой функционал, зависящий от $\varphi(x)$ и любых других полей, входящих в $j(x)$; существование этого оператора будет продемонстрировано ниже явным построением. Для того чтобы $\varphi_{in}(x)$ можно было интерпретировать как оператор рождения физического мезона, потребуем выполнения следующих условий, которые уже встречались в предыдущих главах при рассмотрении свободных полей.

1. При преобразованиях Лоренца и пространственно-временных смещениях $\varphi_{in}(x)$ преобразуется так же, как и соответствующее поле $\varphi(x)$. Это условие гарантирует ковариантность одночастичного состояния, построенного с помощью оператора $\varphi_{in}(x)$. Из инвариантности при трансляциях, в частности, следует, что

$$[P^\mu, \varphi_{in}(x)] = -i \frac{\partial \varphi_{in}(x)}{\partial x_\mu}. \quad (16.5)$$

2. Пространственно-временная зависимость оператора $\varphi_{in}(x)$ описывается уравнением Клейна—Гордона с физическим значением массы

$$(\square + m^2)\varphi_{in}(x) = 0. \quad (16.6)$$

Покажем, что из (16.5) и (16.6) следует, что оператор $\varphi_{in}(x)$ действительно генерирует физическое одночастичное состояние. С этой целью рассмотрим произвольный собственный вектор

$$P^\mu |n\rangle = p_n^\mu |n\rangle \quad (16.7)$$

и вычислим матричный элемент

$$-i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \langle n | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle = \langle n | [P^\mu, \varphi_{in}(x)] | 0 \rangle = p_n^\mu \langle n | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle.$$

Дифференцируя еще раз это выражение и используя (16.6), получим

$$(\square + m^2) \langle n | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle = (m^2 - p_n^2) \langle n | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle = 0, \quad (16.8)$$

откуда следует, что состояния, полученные из вакуума применением оператора $\varphi_{in}(x)$, удовлетворяют условию $p_n^2 = m^2$ и являются, таким образом, одночастичными состояниями с массой m . Поскольку $\varphi_{in}(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона, его фурье-разложение имеет такой же вид, как и для свободного поля (см. (12.7)):

$$\varphi_{in}(x) = \int d^3k [a_{in}(k) f_k(x) + a_{in}^+(k) f_k^*(x)],$$

где

$$f_k(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ikx}, \quad (16.9)$$

и

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \equiv k^0,$$

причем

$$a_{in}(k) = i \int d^3x f_k^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \Phi_{in}(x),$$

как в уравнении (12.9). Операторы $a_{in}(k)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[P^\mu, a_{in}(k)] = -k^\mu a_{in}(k), \quad [P^\mu, a_{in}^+(k)] = +k^\mu a_{in}^+(k), \quad (16.10)$$

которые следуют из уравнения (16.5).

Последовательно действуя операторами $a_{in}^+(k)$ на вакуум, мы получаем произвольное n -частичное состояние. Используя выражение (16.10) и предположение о существовании вакуумного состояния с нулевой энергией, получаем

$$\begin{aligned} P^\mu a_{in}^+(k_1) \dots a_{in}^+(k_N) |0\rangle &\equiv P^\mu |k_1 \dots k_N in\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^N k_i^\mu a_{in}^+(k_1) \dots a_{in}^+(k_N) |0\rangle, \quad (16.11) \\ a_{in}(k) |0\rangle &= 0, \end{aligned}$$

причем

$$\langle p_1 \dots p_M in | k_1 \dots k_N in \rangle = 0,$$

если $M \neq N$ и набор (p_1, \dots, p_M) не совпадает с (k_1, \dots, k_N) . Как отмечалось выше, мы предполагаем, что набор состояний с различными N и k_i^μ является полным.

Для того чтобы выразить оператор $\Phi_{in}(x)$ через поле $\varphi(x)$, перепишем уравнение (16.3), добавив к обеим частям его массовый контрчлен

$$\delta m^2 \varphi(x) \equiv (m^2 - m_0^2) \varphi(x), \quad (16.12)$$

при этом получим

$$(\square + m^2) \varphi(x) = j(x) + \delta m^2 \varphi(x) \equiv \tilde{j}(x). \quad (16.13)$$

Новый ток $\tilde{j}(x)$ теперь является источником, который приводит к рассеянию. Вычитая из $\varphi(x)$ рассеянные волны, мы получим невозмущенное решение с массой m , т. е. оператор $\Phi_{in}(x)$. Поэтому¹⁾

$$\sqrt{Z} \Phi_{in}(x) = \varphi(x) - \int d^4y \Delta_{ret}(x-y; m) \tilde{j}(y), \quad (16.14)$$

¹⁾ Константа Z обычно обозначается через Z_3 ; мы сохраним, однако, обозначение Z_3 для фотонов.

где $\Delta_{\text{ret}}(x - y; m)$ есть запаздывающая функция Грина (см. приложение В)

$$(\square_x + m^2) \Delta_{\text{ret}}(x - y; m) = \delta^4(x - y), \quad (16.15)$$

$$\Delta_{\text{ret}}(x - y; m) = 0 \quad \text{для} \quad x_0 < y_0. \quad (16.16)$$

Оператор $\varphi_{\text{in}}(x)$ в (16.14) удовлетворяет, очевидно, обоим условиям (16.5) и (16.6) для in-полей. Например, так как $\tilde{j}(y)$ — скалярный оператор, то

$$\begin{aligned} \sqrt{Z} \varphi_{\text{in}}(x + a) &= \varphi(x + a) - \int d^4y \Delta_{\text{ret}}(x + a - y) \tilde{j}(y) = \\ &= e^{iPa} \varphi(x) e^{-iPa} - \int d^4y' \Delta_{\text{ret}}(x - y') \tilde{j}(y' + a) = \\ &= e^{iPa} \left[\varphi(x) - \int d^4y' \Delta_{\text{ret}}(x - y') \tilde{j}(y') \right] e^{-iPa} = \\ &= e^{iPa} \sqrt{Z} \varphi_{\text{in}}(x) e^{-iPa}. \end{aligned}$$

Константа \sqrt{Z} в (16.14) определяется из того условия, чтобы матричный элемент оператора $\varphi_{\text{in}}(x)$ между вакуумом и одночастичным состоянием был нормирован на единицу. Эту константу мы вскоре вычислим. На первый взгляд кажется, что при $x_0 \rightarrow -\infty$ член с взаимодействием в (16.14) исчезает:

$$\varphi(x) \xrightarrow{?} \sqrt{Z} \varphi_{\text{in}}(x) \quad \text{при} \quad x_0 \rightarrow -\infty, \quad (16.17)$$

т. е. что, в соответствии с интуитивным представлением о причинности, оператор поля при $x_0 = -\infty$ равен невозмущенному оператору.

Асимптотическое условие вида (16.17) справедливо в одночастичной квантовой механике и рассматривалось, в частности, в первом томе этой книги (см. гл. 6, 9) как гипотеза. Мы использовали это условие, чтобы выключить взаимодействие в начальном и конечном состояниях. Другими словами, эта адиабатическая гипотеза утверждает возможность построения локализованных волновых пакетов, которые как до, так и после рассеяния находятся на большом расстоянии друг от друга и не взаимодействуют.

Выражение (16.17) является, однако, операторным уравнением. Внимательное рассмотрение показывает, что оно приводит к противоречию, связанному, по существу, с тем фактом, что невозможно разделить вклады операторов $\varphi(x)$ и $\tilde{j}(y)$, поскольку последний содержит все собственные взаимодействия при $x_0 \rightarrow -\infty$. В квантовой теории аналогом волновой функции являются матричные элементы операторов поля, поэтому асимпто-

тическое условие следует формулировать непосредственно для матричных элементов. Мы приведем корректную формулировку асимптотического условия, следуя Леману, Шиманзику и Циммерманну [12]. Пусть $\varphi^f(t)$ представляет оператор $\varphi(x)$, усредненный по пространственно-подобной области

$$\varphi^f(t) = i \int d^3x f^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (16.18)$$

где $f(\mathbf{x}, t)$ — произвольное *нормируемое* решение уравнения Клейна — Гордона

$$(\square + m^2)f(x) = 0, \quad (16.19)$$

и пусть $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ — два нормированных вектора состояний. Тогда асимптотическое условие означает¹⁾

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \varphi^f(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \varphi_{in}^f | \beta \rangle, \quad (16.20)$$

где оператор

$$\varphi_{in}^f = i \int d^3x f^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{in}(\mathbf{x}, t) \quad (16.21)$$

по теореме Грина (см. (16.6) и (16.19)) не зависит от времени.

Уравнение (16.20) носит название «слабого асимптотического условия». Оно накладывает ограничения на локализованные пакеты, описывающие частицы в начальном состоянии. Состояния (16.11), образованные in-операторами

$$\begin{aligned} |k_1 \dots k_n in\rangle &= a_{in}^+(k_1) |k_2 \dots k_n in\rangle = \\ &= a_{in}^+(k_1) a_{in}^+(k_2) \dots a_{in}^+(k_n) |0\rangle \end{aligned} \quad (16.22)$$

в дальнейшем будут пониматься как предел нормированных состояний, образованных операторами φ_{in}^f в (16.21), причем волновые пакеты $f^*(\mathbf{x}, t)$ в (16.21) заменяют монохроматические плоские волны $f_k^*(x)$ в (16.9). Полный набор in-состояний и асимптотическое условие — это все что требуется, чтобы задать начальное состояние в эксперименте по рассеянию.

Уравнение (16.14) определяет оператор φ_{in} при условии, что $\sqrt{Z} \neq 0$. К сожалению, мы не можем быть заранее уверены в том, что константа Z не равна нулю, поскольку рассматриваемая теория с локальными лагранжианами и локальными полевыми операторами является математической идеализацией и

¹⁾ Смысл уравнения (16.20), который существенно отличает его от (16.17), заключается в том, что в этом уравнении нужно сначала построить нормированные волновые пакеты и образовать матричный элемент, а затем перейти к пределу $t \rightarrow -\infty$ (см. [37], а также [54]).

приводит к выражениям, расходящимся с ростом энергии. Указанная неприятная ситуация действительно может возникнуть, если наше рассмотрение представляет предел некоторой более тонкой теории. Тем не менее ниже мы рассмотрим формальный вывод общего выражения, определяющего константу Z , основываясь только на предположениях (16.1), (16.2) о спектре оператора P^μ и канонических коммутационных соотношениях (16.4).

§ 105. Спектральное представление для вакуумного среднего от коммутатора и функция распространения скалярного поля

Для вычисления константы Z построим общее выражение для вакуумного среднего от коммутатора двух полей

$$i\Delta'(x, x') \equiv \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(x')] | 0 \rangle. \quad (16.23)$$

В гл. 12 этот коммутатор был вычислен для случая свободных полей. Теперь же коммутатор в (16.23) нельзя вычислить явно, поскольку решения полевых уравнений неизвестны. Тем не менее, основываясь только на аргументах, связанных с трансляционной инвариантностью теории, и используя свойства спектра оператора P^μ , можно найти общий вид функции Δ' в (16.23).

Вставим между двумя операторами в (16.23) полный набор состояний (16.7). Трансляционная инвариантность означает, что

$$\begin{aligned} \langle n | \varphi(x) | m \rangle &= \langle n | e^{iPx} \varphi(0) e^{-iPx} | m \rangle = \\ &= e^{i(p_n - p_m)x} \langle n | \varphi(0) | m \rangle, \end{aligned} \quad (16.24)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \Delta'(x, x') &= -i \sum_n \langle 0 | \varphi(0) | n \rangle \langle n | \varphi(0) | 0 \rangle \times \\ &\times (e^{-ip_n(x-x')} - e^{ip_n(x-x')}) = \Delta'(x-x'). \end{aligned} \quad (16.25)$$

Удобно далее объединить состояния, отвечающие одному и тому же значению p_n . С этой целью используем тождество

$$1 = \int d^4q \delta^4(p_n - q);$$

тогда (16.25) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta'(x-x') &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4q \left[(2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q) |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2 \right] \times \\ &\times (e^{-iq(x-x')} - e^{iq(x-x')}). \end{aligned} \quad (16.26)$$

Величина в квадратных скобках называется спектральной функцией¹⁾

$$\rho(q) \equiv (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q) |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2. \quad (16.27)$$

Эта величина определяет вклад в Δ' всех состояний с 4-импульсом q . Из лоренцевой инвариантности следует, что $\rho(q)$ есть функция только q^2 . Действительно, поскольку

$$U(a) | 0 \rangle = | 0 \rangle$$

и

$$U(a) \varphi(0) U^{-1}(a) = \varphi(0),$$

то

$$\rho(q) \equiv (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q) |\langle 0 | \varphi(0) | U(a) n \rangle|^2, \quad (16.28)$$

где a — матрица коэффициентов собственного лоренцева преобразования. Лоренцева инвариантность δ -функции очевидна из ее фурье-разложения, поэтому

$$\delta^4(p_n - q) = \delta^4[(p_n - q) a^{-1}]. \quad (16.29)$$

Наконец, выполнив суммирование по полному набору векторов $|m\rangle = U(a) |n\rangle$ с импульсами

$$p_m^\mu = \langle m | P^\mu | m \rangle = \langle n | U^{-1}(a) P^\mu U(a) | n \rangle = (p_n a^{-1})^\mu, \quad (16.30)$$

приходим к следующему результату:

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_m \delta^4(p_m - qa^{-1}) |\langle 0 | \varphi(0) | m \rangle|^2 = \rho(qa^{-1}).$$

Так как в силу предположенного свойства спектра оператора P^μ спектральная функция $\rho(q)$ обращается в нуль вне переднего светового конуса, то

$$\rho(q) = \rho(q^2) \theta(q_0), \quad (16.31)$$

причем $\rho(q)$ равна нулю для $q^2 < 0$ и вещественна и неотрицательна при $q^2 \geq 0$. Уравнение (16.26) может быть поэтому записано в виде интеграла от инвариантной функции свободного поля с весовой функцией ρ

$$\begin{aligned} \Delta'(x - x') &= - \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q \rho(q^2) \theta(q_0) (e^{-iq(x-x')} - e^{iq(x-x')}) = \\ &= - \frac{i}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \int d^4q \delta(q^2 - \sigma^2) \varepsilon(q_0) e^{-iq(x-x')} = \\ &= \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \Delta(x - x', \sigma), \quad (16.32) \end{aligned}$$

¹⁾ В терминах неперенормированных полей.

где $\theta(q_0)$, $\varepsilon(q_0)$ и инвариантная функция Δ с массой σ определены в приложении В.

Выражение (16.32) называется спектральным представлением вакуумного среднего от коммутатора. В квантовой электродинамике оно было получено Челленом в 1952 г., а для рассматриваемого случая — Леманом в 1954 г.¹⁾ Приведенный выше вывод применим без каких-либо изменений и для различных функций Грина в теории поля. Например,

$$\Delta'_F(x-x') = -i \langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(x')) | 0 \rangle = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \Delta_F(x-x', \sigma) \quad (16.33)$$

или, в импульсном пространстве,

$$\Delta'_F(p) = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \frac{1}{p^2 - \sigma^2 + i\varepsilon},$$

причем функция ρ здесь та же, что и в (16.32).

Хотя спектральная амплитуда (16.27) не вычисляется в явном виде, мы можем, выделив в ней вклад одночастичного состояния, доказать условие

$$0 \leq Z < 1, \quad (16.34)$$

а также показать противоречивость выражения (16.17) как *операторного уравнения*. Для этого заметим, что в силу наших предположений о свойствах спектра оператора P^μ (см. рис. 16.1) функция $\rho(\sigma^2)$ при $\sigma^2 = m^2$ определяется только одночастичным матричным элементом $\langle 0 | \varphi(x) | p \rangle$ в (16.27). Согласно (16.14)

$$\langle 0 | \varphi(x) | p \rangle = \sqrt{Z} \langle 0 | \varphi_{\text{in}}(x) | p \rangle + \int d^4y \Delta_{\text{ret}}(x-y; m) \langle 0 | \tilde{j}(y) | p \rangle. \quad (16.35)$$

Но второй член в этом выражении обращается в нуль в силу (16.13):

$$\begin{aligned} \langle 0 | \tilde{j}(y) | p \rangle &= \langle 0 | (\square + m^2) \varphi(y) | p \rangle = \\ &= (\square + m^2) e^{-ipy} \langle 0 | \varphi(0) | p \rangle = \\ &= (m^2 - p^2) \langle 0 | \varphi(y) | p \rangle = 0. \end{aligned} \quad (16.36)$$

Поэтому

$$\langle 0 | \varphi(x) | p \rangle = \sqrt{Z} \langle 0 | \varphi_{\text{in}}(x) | p \rangle. \quad (16.37)$$

¹⁾ См. [55—57], а также А. Wightman (не опубликовано, 1953), цитируется в книге [25]. При нашем выводе мы, не задумываясь, меняли порядок интегрирования и суммирования. Для обоснования возможности этой замены см. цитированную литературу.

По определению оператор $\varphi_{in}(x)$ нормирован так, что матричный элемент $\langle 0 | \varphi_{in}(x) | p \rangle$ совпадает с матричным элементом свободного поля. Используя (16.9) и (16.11), получим

$$\langle 0 | \varphi_{in}(x) | p \rangle = \int d^3k \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \langle 0 | a_{in}(k) | p \rangle = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}. \quad (16.38)$$

Соответствующий матричный элемент для $\varphi(x)$ отличается от (16.38) множителем \sqrt{Z} .

Таким образом, вклад одночастичного состояния в $\rho(q)$ равен

$$(2\pi)^3 \int d^3p \delta^4(p - q) \frac{Z}{(2\pi)^3 2\omega_p} = Z \delta(q^2 - m^2) \theta(q_0). \quad (16.39)$$

Отделив этот вклад в спектральной функции, перепишем (16.32) в виде

$$\Delta'(x - x') = Z \Delta(x - x', m) + \int_{m_1^2}^{\infty} d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \Delta(x - x'; \sigma), \quad (16.40)$$

где пороговое значение m_1^2 определяется квадратом массы наименьшего состояния континуума; для π -мезонов, например, $m = m_\pi$ и $m_1^2 = 4m_\pi^2$.

Взяв в (16.40) производную по времени и полагая $t = t'$, мы получаем требуемый результат. Действительно, используя определения (16.23) и (12.42) функций Δ' и Δ , а также канонические перестановочные соотношения (16.4), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t' \rightarrow t} \left(i \frac{\partial}{\partial t} \Delta'(x - x') \right) &= \langle 0 | [\dot{\varphi}(x, t), \varphi(x', t)] | 0 \rangle = \\ &= -i \delta^3(x - x') = \lim_{t' \rightarrow t} \left(i \frac{\partial}{\partial t} \Delta(x - x'; \sigma) \right), \end{aligned} \quad (16.41)$$

откуда

$$1 = Z + \int_{m_1^2}^{\infty} \rho(\sigma^2) d\sigma^2. \quad (16.42)$$

Поскольку $\rho(\sigma^2)$ не отрицательна, из (16.42) следует, что

$$0 \leq Z < 1 \quad (16.43)$$

при условии, что наши вычисления имеют смысл и интеграл в (16.42) существует. Интуитивно представляется естественным, что $Z \neq 1$, если имеется связь с континуумом. Действительно, можно ожидать, что амплитуда рождения одночастичного состояния из вакуума полем $\varphi(x)$ меньше единицы, поскольку это

поле рождает еще и состояния континуума. Однако константа Z не может равняться и нулю, так как в этом случае уравнение (16.14), определяющее поле $\varphi_{in}(x)$, с помощью которого строятся произвольные многочастичные состояния (16.22), теряет смысл. Поэтому было бы весьма неприятно обнаружить, что отдельные члены в ряду теории возмущений нарушают условие $Z \neq 0$.

Покажем далее, что в присутствии взаимодействия условие $Z < 1$ находится в противоречии с сильным асимптотическим условием. Предположив, что условие (16.17) справедливо и проводя вычисления, аналогичные вычислениям в (16.41), получим

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle 0 | [\varphi(x, t), \varphi(x', t)] | 0 \rangle = -i\delta^3(x - x') \stackrel{?}{=} \stackrel{?}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} Z \langle 0 | [\varphi_{in}(x, t), \varphi_{in}(x', t)] | 0 \rangle. \quad (16.44)$$

С другой стороны, взяв производную от коммутатора двух in-полей

$$\langle 0 | [\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(x')] | 0 \rangle = i\Delta(x - x') \quad (16.45)$$

и сравнив с (16.44), мы приходим к заключению, что $Z = 1$. Очевидно, что в рассматриваемом случае возможность перестановки операций суммирования и интегрирования не может быть строго обоснована.

§ 106. Out-поля и out-состояния

Точно так же, как мы рассмотрели динамическое описание системы при $t \rightarrow -\infty$ в терминах in-полей, можно рассмотреть предел $t \rightarrow +\infty$ и ввести подходящим образом определенные out-поля $\varphi_{out}(x)$. Состояния при $t \rightarrow +\infty$ представляют конечные состояния в рассеянии, поэтому целесообразно иметь простой аппарат для описания физической системы в этот момент времени.

Свойства оператора $\varphi_{out}(x)$ вполне аналогичны свойствам $\varphi_{in}(x)$. Этот оператор, по аналогии с (16.5) и (16.6), удовлетворяет соотношениям

$$[P^\mu, \varphi_{out}(x)] = -i \frac{\partial \varphi_{out}(x)}{\partial x_\mu}, \quad (16.46)$$

$$(\square + m^2) \varphi_{out}(x) = 0, \quad (16.47)$$

откуда следует, что, действуя на вакуум, $\varphi_{out}(x)$ образует только одночастичные состояния. Из разложения, аналогичного (16.9),

$$\varphi_{out}(x) = \int d^3k [a_{out}(k) f_k(x) + a_{out}^+(k) f_k^*(x)] \quad (16.48)$$

получаем

$$[P^\mu, a_{\text{out}}(k)] = -k^\mu a_{\text{out}}(k), \quad [P^\mu, a_{\text{out}}^+(k)] = k^\mu a_{\text{out}}^+(k), \quad (16.49)$$

что находится в полной аналогии с (16.10).

Теперь, однако, в противоположность (16.20), мы рассматриваем асимптотическое условие в виде

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | \varphi^f(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \varphi_{\text{out}}^f | \beta \rangle \quad (16.50)$$

или просто

$$\varphi(x) \rightarrow \sqrt{Z} \varphi_{\text{out}}(x) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad (16.51)$$

где последнее выражение понимается в смысле слабой операторной сходимости. Для определения оператора $\varphi_{\text{out}}(x)$ мы вместо (16.14) используем уравнение

$$\sqrt{Z} \varphi_{\text{out}}(x) = \varphi(x) - \int d^4y \Delta_{\text{adv}}(x-y; m) \tilde{j}(y), \quad (16.52)$$

где $\Delta_{\text{adv}}(x-y; m)$ — опережающая функция Грина:

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2) \Delta_{\text{adv}}(x-y; m) &= \delta^4(x-y), \\ \Delta_{\text{adv}}(x-y; m) &= 0, \quad \text{если } x_0 - y_0 > 0. \end{aligned} \quad (16.53)$$

Нормировочная константа \sqrt{Z} снова вводится для того, чтобы амплитуда образования из вакуума одночастичного состояния с помощью оператора $\varphi_{\text{out}}(x)$ была равна единице. Используя уравнения (16.36) — (16.38), можно показать, что эта константа тождественна с \sqrt{Z} в (16.14):

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi(x) | p \rangle &= \sqrt{Z} \langle 0 | \varphi_{\text{out}}(x) | p \rangle = \\ &= \sqrt{Z} \langle 0 | \varphi_{\text{in}}(x) | p \rangle = \sqrt{Z} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} e^{-ipx}. \end{aligned} \quad (16.54)$$

Поэтому вакуумные средние от коммутаторов $\varphi_{\text{in}}(x)$ и $\varphi_{\text{out}}(x)$ выражаются через функции Δ для свободных полей

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\varphi_{\text{in}}(x), \varphi_{\text{in}}(y)] | 0 \rangle &= i\Delta(x-y), \\ \langle 0 | [\varphi_{\text{out}}(x), \varphi_{\text{out}}(y)] | 0 \rangle &= i\Delta(x-y). \end{aligned} \quad (16.55)$$

На самом деле указанные коммутаторы сами по себе представляют c -числа [37]; другими словами, уравнения (16.55) остаются справедливыми и без вычисления вакуумного среднего в левой их части

$$[\varphi_{\text{in}}(x), \varphi_{\text{in}}(y)] = [\varphi_{\text{out}}(x), \varphi_{\text{out}}(y)] = i\Delta(x-y). \quad (16.56)$$

Проверку этого факта мы оставляем читателю в качестве упражнения.

§ 107. Определение и общие свойства S-матрицы

В предыдущих параграфах мы рассмотрели свойства операторов $\varphi_{\text{in}}(x)$ и $\varphi_{\text{out}}(x)$. Теперь, используя развитую технику, можно перейти к рассмотрению и изучению амплитуд перехода, или S-матричных элементов, непосредственно наблюдаемых на опыте. Рассмотрим начальное состояние n невзаимодействующих (т. е. пространственно разделенных) частиц с квантовыми числами p_1, \dots, p_n :

$$|p_1 \dots p_n \text{ in}\rangle = |\alpha \text{ in}\rangle. \quad (16.57)$$

Индекс p означает, помимо импульса, все квантовые числа, характеризующие частицу, такие, как заряд, странность и т. д. Отметим, что in-состояние действительно можно характеризовать дополнительными квантовыми числами, отвечающими различным преобразованиям симметрии системы, поскольку, согласно определению (16.14), поле $\varphi_{\text{in}}(x)$ при преобразованиях симметрии имеет те же трансформационные свойства, что и $\varphi(x)$. Например, если

$$[Q, \varphi_r(x)] = -\lambda_{rs}\varphi_s(x),$$

то

$$[Q, \tilde{j}_r(x)] = (\square + m^2)[Q, \varphi_r(x)] = -\lambda_{rs}\tilde{j}_s(x),$$

поэтому из (16.14) следует

$$[Q, \varphi_r^{\text{in}}(x)] = -\lambda_{rs}\varphi_s^{\text{in}}(x).$$

Таким образом, мы можем интерпретировать константы движения для взаимодействующей системы в терминах квантовых чисел начальных и конечных состояний. В частности, систему свободных частиц в in- и out-состояниях можно характеризовать квантовыми числами операторов, введенных в гл. 15 при рассмотрении сильно взаимодействующих частиц. S-матричный элемент для перехода из n -частичного состояния (16.67) в m -частичное состояние

$$|p'_1 \dots p'_m \text{ out}\rangle = |\beta \text{ out}\rangle \quad (16.58)$$

дается амплитудой вероятности

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta \text{ out} | \alpha \text{ in} \rangle. \quad (16.59)$$

Это уравнение определяет $\beta\alpha$ -элемент S-матрицы.

Поучительно сравнить (16.59) с определением S-матричного элемента в нерелятивистской теории. В уравнении (6.16) мы определили

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x \varphi_f^*(x, t) \Psi_i^+(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_f(x, t), \Psi_i^+(x, t)), \quad (16.60)$$

где $\Psi_i^+(\mathbf{x}, t)$ — точное решение уравнения Шредингера (6.74) с граничным условием, которое заключается в том, что при $t = -\infty$ Ψ_i совпадает с плоской волной. Величина S_{fi} равна скалярному произведению Ψ_i^+ (при $t \rightarrow +\infty$) и $\varphi_f(\mathbf{x}, t)$, где $\varphi_f(\mathbf{x}, t)$ — плоская волна с квантовыми числами f конечного состояния. Для того чтобы переписать (16.60) в виде, аналогичном (16.59), рассмотрим точное решение $\Psi_f^-(\mathbf{x}, t)$ уравнения Шредингера с граничным условием при $t \rightarrow +\infty$: $\Psi_f^-(\mathbf{x}, t) \rightarrow \varphi_f(\mathbf{x}, t)$. Функция $\Psi_f^-(\mathbf{x}, t)$ состоит из плоской волны и из суперпозиции сферических волн, сходящихся при $t \rightarrow -\infty$ к рассеивающему центру и исчезающих при $t \rightarrow +\infty$. Эта функция представляет решение уравнения Шредингера (6.14), в котором запаздывающая функция Грина заменена на опережающую

$$\Psi_f^-(x') = \varphi_f(x') + \int d^4x'_1 G_0^{\text{adv}}(x'; x'_1) V(x'_1) \Psi_f^-(x'_1), \quad (16.61)$$

где

$$G_0^{\text{adv}}(x', t'; x'_1, t'_1) = 0 \quad \text{при} \quad t' > t'_1.$$

Так как $\Psi_f^-(x', t') \rightarrow \varphi_f(x', t')$ при $t' \rightarrow +\infty$, то из (16.60) получаем

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\Psi_f^-(\mathbf{x}, t), \Psi_i^+(\mathbf{x}, t)) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x \Psi_f^{-*}(\mathbf{x}, 0) e^{iHt} e^{-iHt} \Psi_i^+(\mathbf{x}, 0) = \\ &= (\Psi_f^-(\mathbf{x}, 0), \Psi_i^+(\mathbf{x}, 0)), \end{aligned} \quad (16.62)$$

где $\Psi(\mathbf{x}, 0)$ — волновая функция в гейзенберговском представлении, из которой выделена ее временная зависимость. Уравнение (16.62) представляет аналог (16.59) с волновыми функциями, удовлетворяющим in- и out-граничным условиям.

Из (16.59) и предположения о полноте in- и out-состояний следуют выражения для матричных элементов оператора S

$$\langle \beta \text{ in} | S = \langle \beta \text{ out} |, \quad \langle \beta \text{ out} | S^{-1} = \langle \beta \text{ in} |, \quad (16.63)$$

откуда

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta \text{ in} | S | \alpha \text{ in} \rangle.$$

S-матрица играет центральную роль в динамических вычислениях, поскольку ее матричные элементы непосредственно связаны с измеряемыми на опыте физическими амплитудами. Используя наши предположения о спектре состояний, а также свойства операторов $\varphi_{\text{in}}(x)$ и $\varphi_{\text{out}}(x)$, сформулируем далее важнейшие ее свойства.

1. Стабильность вакуума означает, что $|S_{00}| = 1$ или

$$\langle 0 \text{ in} | S = \langle 0 \text{ out} | = e^{i\varphi_0} \langle 0 \text{ in} |.$$

По определению вакуумное состояние единственно. Полагая фазу φ_0 равной нулю, получим

$$\langle 0 \text{ out} | = \langle 0 \text{ in} | = \langle 0 | \quad (16.64)$$

и $S_{00} = 1$.

2. Стабильность одночастичного состояния в свою очередь означает

$$\langle p \text{ in} | S | p \text{ in} \rangle = \langle p \text{ out} | p \text{ in} \rangle = \langle p \text{ in} | p \text{ in} \rangle = 1, \quad (16.65)$$

поскольку, согласно (16.54), $|p \text{ in} \rangle = |p \text{ out} \rangle = |p \rangle$.

3. S-матрица преобразует in-поля в out-поля:

$$\varphi_{\text{in}}(x) = S \varphi_{\text{out}}(x) S^{-1}. \quad (16.66)$$

Чтобы доказать это, рассмотрим матричный элемент

$$\langle \beta \text{ out} | \varphi_{\text{out}}(x) | \alpha \text{ in} \rangle = \langle \beta \text{ in} | S \varphi_{\text{out}}(x) | \alpha \text{ in} \rangle.$$

Поскольку $\langle \beta \text{ out} | \varphi_{\text{out}}(x)$ есть out-состояние, то в силу (16.63)

$$\langle \beta \text{ out} | \varphi_{\text{out}}(x) = \langle \beta \text{ in} | \varphi_{\text{in}}(x) S, \text{ откуда}$$

$$\langle \beta \text{ in} | \varphi_{\text{in}}(x) S | \alpha \text{ in} \rangle = \langle \beta \text{ in} | S \varphi_{\text{out}}(x) | \alpha \text{ in} \rangle.$$

Поскольку in-состояния образуют полный набор, то из последнего равенства следует выражение (16.66).

4. S-матрица унитарна. Действительно, из (16.63) получаем

$$S^+ | \alpha \text{ in} \rangle = | \alpha \text{ out} \rangle. \quad (16.67)$$

Следовательно,

$$\langle \beta \text{ in} | S S^+ | \alpha \text{ in} \rangle = \langle \beta \text{ out} | \alpha \text{ out} \rangle = \delta_{\beta\alpha} \quad (16.68)$$

и

$$S S^+ = S^+ S = 1. \quad (16.69)$$

5. S-матрица трансляционно и лоренц-инвариантна¹⁾, т. е.

$$U(a, b) S U^{-1}(a, b) = S, \quad (16.70)$$

¹⁾ Следует иметь в виду, что в квантовой электродинамике выполнение одного только условия (16.70) еще недостаточно для градиентной инвариантности теории. Действительно, чтобы восстановить в новой системе координат калибровку излучения, каждое лоренцево преобразование нужно дополнить соответствующим градиентным преобразованием. Поэтому в квантовой электродинамике следует дополнительно установить градиентную инвариантность S-матрицы.

где $U(a, b)$ — определенный выражениями (11.66), (11.69) и (11.72) — унитарный оператор, генерирующий преобразование координат

$$x'_\mu = a_\mu^\nu x_\nu + b_\mu.$$

Для доказательства подставим (16.66) в уравнение (11.67), выражающее закон преобразования полевых операторов

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{in}}(ax + b) &= U(a, b) \varphi_{\text{in}}(x) U^{-1}(a, b) = \\ &= US\varphi_{\text{out}}(x) S^{-1} U^{-1} = USU^{-1} \varphi_{\text{out}}(ax + b) US^{-1} U^{-1}. \end{aligned} \quad (16.71)$$

Учитывая далее, что $\varphi_{\text{in}}(ax + b) = S\varphi_{\text{out}}(ax + b) S^{-1}$, немедленно получаем (16.70).

§ 108. Редукционная формула для скалярных полей

Сформулировав общие свойства S -матрицы и интересуясь далее ее матричными элементами, квадрат которых $|S_{\beta\alpha}|^2$ имеет смысл вероятности экспериментально наблюдаемых переходов между in-состояниями α и out-состояниями β , мы сталкиваемся, однако, с весьма нетривиальной задачей их реального вычисления.

До 1954 г. единственный систематический метод вычисления S -матрицы основывался на использовании рядов теории возмущений по степеням тока $\tilde{j}(x)$ в (16.13). После проявления работ вначале Лоу [58], а затем Лемана, Шиманзика и Циммермана [12, 13] (LSZ) возник новый подход к этой проблеме, основанный не на разложении по степеням малой константы связи, а на использовании общих свойств S -матрицы. Асимптотические условия (16.20) и (16.50) позволяют выразить интересующие нас матричные элементы в терминах вакуумных средних полевых операторов. Мы уже видели преимущества такого подхода при вычислении полевого коммутатора в (16.40). При этом мы получили общее выражение для функции $\Delta'(x - x')$, используя только лоренцеву инвариантность и некоторые весьма общие свойства теории.

Ниже мы рассмотрим вычисление вакуумных средних от произведения полевых операторов. Эти величины в некотором смысле более удобны, чем матричные элементы вида (16.59). Далее мы разложим операторы $\varphi(x)$ в ряды теории возмущений и получим таким образом общий вид разложения S -матричных элементов в терминах вакуумных средних свободных in-полей. Соответствующие формулы в точности совпадают с фейнмановскими правилами, введенными при рассмотрении функций пространства. Отметим еще, что требования инвариантности, аналогичные тем, которые использовались при вычислении функ-

ции $\Delta'(x - x')$, наиболее легко сформулировать для матричных элементов гейзенберговских операторов $\Phi(x)$ между единственным образом определенным и инвариантным вакуумным состоянием. Этот подход приводит к ряду новых результатов, которые не связаны с использованием теории возмущений.

Приступим теперь шаг за шагом к построению общей «редукционной техники». Эта техника позволяет извлечь всю информацию, заключенную в определении физических состояний (16.59) и перенести ее на произведение полевых операторов, зажатых между вакуумными состояниями.

Рассмотрим S-матричный элемент

$$S_{\beta, \alpha p} = \langle \beta \text{ out} | \alpha p \text{ in} \rangle, \quad (16.72)$$

где индекс β означает частицы в out-состоянии $|\beta \text{ out}\rangle$, а $|\alpha p \text{ in}\rangle$ означает совокупность частиц α в in-состоянии плюс еще одну налетающую частицу с импульсом p .

Используя асимптотическое условие, мы можем извлечь из in-состояния частицу p , вводя вместо нее подходящий полевой оператор. С учетом (16.22), (16.9) и (16.48) ¹⁾ имеем

$$\begin{aligned} \langle \beta \text{ out} | \alpha p \text{ in} \rangle &= \langle \beta \text{ out} | a_{\text{in}}^+(p) | \alpha \text{ in} \rangle = \\ &= \langle \beta \text{ out} | a_{\text{out}}^+(p) | \alpha \text{ in} \rangle + \langle \beta \text{ out} | a_{\text{in}}^+(p) - a_{\text{out}}^+(p) | \alpha \text{ in} \rangle = \\ &= \langle \beta - p_{\text{out}} | \alpha \text{ in} \rangle - i \langle \beta \text{ out} | \int d^3x f_p(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 [\Phi_{\text{in}}(x) - \Phi_{\text{out}}(x)] | \alpha \text{ in} \rangle. \end{aligned} \quad (16.73)$$

Здесь $|\beta - p_{\text{out}}\rangle$ есть состояние, из которого в том случае, когда частица p содержится в наборе β , нужно удалить эту частицу, в противном случае первый член в (16.73) равен нулю. Если $|\alpha p \text{ in}\rangle$ представляет начальное двухчастичное состояние, то первый член в (16.73) вносит вклад только в амплитуду упругого рассеяния на нулевой угол, причем в ту ее часть, которая отвечает сохраняющимся квантовым числам налетающей частицы и частицы мишени. Правая часть в (16.73) по теореме Грина не зависит от времени. Используя асимптотические условия (16.20) и (16.50), можно заменить $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, x_0)$ при $x_0 \rightarrow -\infty$ и $\Phi_{\text{out}}(\mathbf{x}, x_0)$ при $x_0 \rightarrow +\infty$ на $(1/\sqrt{Z})\Phi(\mathbf{x}, x_0)$; при этом получаем

$$\begin{aligned} \langle \beta \text{ out} | \alpha p \text{ in} \rangle &= \langle \beta - p_{\text{out}} | \alpha \text{ in} \rangle + \\ &+ \frac{i}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x f_p(\mathbf{x}, x_0) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \beta \text{ out} | \Phi(\mathbf{x}, x_0) | \alpha \text{ in} \rangle. \end{aligned} \quad (16.74)$$

¹⁾ Строго говоря, следует работать с нормированными состояниями и использовать операторы Φ_{in}^f , определенные в (16.21), вместо $a_{\text{in}}(p)$. Тем не менее при практических вычислениях мы будем использовать, с известной осторожностью, простые плосковолновые решения.

Тем самым выполнен первый этап в редукционном разложении. Желая сохранить ковариантную форму вычислений, мы перепишем выражение (16.74) в виде четырехкратного интеграла, используя тождество

$$\begin{aligned} \left(\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x g_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \frac{\partial}{\partial x_0} [g_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g_2(x)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[g_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} g_2(x) - \frac{\partial^2 g_1(x)}{\partial x_0^2} g_2(x) \right]. \end{aligned} \quad (16.75)$$

Учтем далее, что $f_p(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$\frac{\partial^2 f_p(x)}{\partial x_0^2} = (\nabla^2 - m^2) f_p(x). \quad (16.76)$$

Интегрируя член с ∇^2 по частям¹⁾, получим искомый результат

$$\begin{aligned} \langle \beta \text{ out} | \alpha p \text{ in} \rangle &= \langle \beta - p \text{ out} | \alpha \text{ in} \rangle + \\ &+ \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x f_p(x) (\square + m^2) \langle \beta \text{ out} | \varphi(x) | \alpha \text{ in} \rangle. \end{aligned} \quad (16.77)$$

Далее можно последовательно применять описанную процедуру до тех пор, пока мы не вытащим все частицы из обкладок матричного элемента и не представим наше выражение в виде вакуумного среднего от произведения полевых операторов. Пусть, например, в (16.77) $\beta = \gamma p'$. Повторяя предыдущие выкладки и используя при этом там, где нужно, эрмитовое сопряжение, мы можем исключить out-частицу p' из набора $\gamma p'$, в результате получаем

$$\begin{aligned} \langle \beta \text{ out} | \varphi(x) | \alpha \text{ in} \rangle &= \langle \gamma \text{ out} | \varphi(x) | \alpha - p' \text{ in} \rangle + \\ &+ \langle \gamma \text{ out} | a_{\text{out}}(p') \varphi(x) - \varphi(x) a_{\text{in}}(p') | \alpha \text{ in} \rangle = \langle \gamma \text{ out} | \varphi(x) | \alpha - p' \text{ in} \rangle - \\ &- i \int d^3y \langle \gamma \text{ out} | \varphi_{\text{out}}(y) \varphi(x) - \varphi(x) \varphi_{\text{in}}(y) | \alpha \text{ in} \rangle \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} f_{p'}^*(y). \end{aligned} \quad (16.78)$$

Асимптотическое условие снова позволяет заменить в матричном элементе (16.78) in- и out-поля при $y_0 \rightarrow -\infty$ и $y_0 \rightarrow +\infty$ соответственно на $(1/\sqrt{Z}) \varphi(y)$, в результате (16.78) записывается в виде хронологического произведения (12.72):

$$\begin{aligned} \langle \gamma \text{ out} | \varphi_{\text{out}}(y) \varphi(x) - \varphi(x) \varphi_{\text{in}}(y) | \alpha \text{ in} \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} - \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \right) \langle \gamma \text{ out} | T(\varphi(y) \varphi(x)) | \alpha \text{ in} \rangle. \end{aligned} \quad (16.79)$$

¹⁾ Поскольку физическая система локализована в пространстве, при таком интегрировании не возникает никаких поверхностных членов.

Используя (16.75) и (16.76), получаем

$$\langle \gamma p' \text{ out} | \varphi(x) | \alpha \text{ in} \rangle = \langle \gamma \text{ out} | \varphi(x) | \alpha - p' \text{ in} \rangle + \\ + \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4 y \langle \gamma \text{ out} | T(\varphi(y) \varphi(x)) | \alpha \text{ in} \rangle \overleftarrow{(\square_y^2 + m^2)} f_{p'}^*(y). \quad (16.80)$$

Теперь ясно, какой вид имеет окончательный результат:

$$\langle p_1 \dots p_n \text{ out} | q_1 \dots q_m \text{ in} \rangle = \\ = \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{m+n} \prod_{i=1}^m \int d^4 x_i \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j f_{q_i}(x_i) \overrightarrow{(\square_{x_i} + m^2)} \times \\ \times \langle 0 | T(\varphi(y_1) \dots \varphi(y_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_m)) | 0 \rangle \times \\ \times \overleftarrow{(\square_{y_j} + m^2)} f_{p_j}^*(y_j), \text{ если все } p_i \neq q_j. \quad (16.81)$$

В формуле (16.81) мы предположили для простоты, что все $p_i \neq q_j$, и опустили члены, отвечающие рассеянию на нулевой угол, которые содержатся в выражениях (16.77) и (16.80). Учет этих членов не представляет никаких трудностей, поскольку к ним может быть также применена описанная редуционная техника.

Уравнение (16.81) является основой всех вычислений в современной квантовой теории поля. Уместно в этой связи сделать следующее замечание. Величина $\langle 0 | T(\varphi(z_1) \dots \varphi(z_r)) | 0 \rangle$

равна точной r -частичной функции Грина (см. рис. 16.2), представляя по своему смыслу сумму всех фейнмановских графиков, в которых частицы рождаются или уничтожаются в точках (z_1, \dots, z_r) . При этом операторы $(\square_i + m^2)$ в (16.81) устраняют пропагаторы внешних линий, поскольку в импульсном пространстве каждый из них равен $m^2 - p_i^2$ и сокращается с соответствующим пропагатором $i/(p_i^2 - m^2)$. Таким образом, S -матричный элемент в силу редуционной формулы (16.81) равен просто функции Грина для $r = n + m$ частиц, в которой нужно выделить внешние концы, а все внешние импульсы взять на массовой

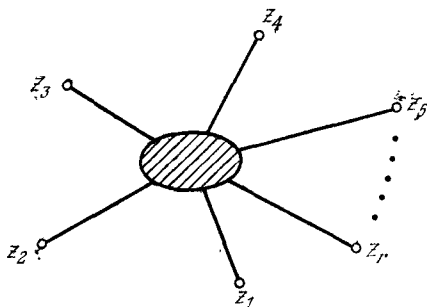


Рис. 16.2. Полная r -частичная функция Грина.

поверхности, $p_i^2 = q_j^2 = m^2$. Этот факт будет широко использоваться в дальнейшем.

Отметим еще близкую аналогию редукционной формулы (16.81) с представлением для S -матрицы, полученным в методе функций распространения (см. (6.30)). Эта аналогия становится особенно ясной, если переписать объемные интегралы в (6.30) в четырехмерной форме. Используя свойства запаздывающей функции Грина, а также уравнение Шредингера

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2\right) \varphi = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \lim_{t' \rightarrow +\infty} \int d^3x' \int d^4x \varphi_i^*(x', t') \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial t}} [G(x'; x) \varphi_i(x, t)] = \\ &= \lim_{t' \rightarrow +\infty} \int d^3x' \int d^4x \varphi_i^*(x') G(x'; x) \left(-i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla_x^2}{2m}\right) \varphi_i(x) = \\ &= -i \int d^4x' \int d^4x \varphi_i^*(x') \overrightarrow{\left(i \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\nabla_{x'}^2}{2m}\right)} G(x', x) \times \\ &\quad \times \overleftarrow{\left(-i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla_x^2}{2m}\right)} \varphi_i(x). \quad (16.82) \end{aligned}$$

Сравнивая (16.81) и (16.82), мы видим, что в одночастичной теории полная r -частичная функция Грина с точностью до нерелятивистской подстановки

$$(\square + m^2) \rightarrow \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\right)$$

заменяется на запаздывающую одночастичную функцию Грина $G(x', x)$ в заданном внешнем поле. Мы предлагаем читателю показать, что аналогичный результат имеет место и в позитронной теории (см. (6.56)), где роль функции G играет точный фейнмановский пропагатор.

§ 109. In- и out-поля и спектральное представление в теории Дирака

Продолжим наше обсуждение, включив в рассмотрение спинорное и электромагнитное поля. При этом мы сталкиваемся лишь с формальными трудностями. Спин усложняет алгебру в дираковском случае, а градиентная инвариантность вносит некоторые осложнения при рассмотрении уравнений Максвелла. Основные же идеи, использовавшиеся при построении in- и out-состояний и при обсуждении спектрального представления

вакуумного среднего от коммутаторов, а также при выводе редуцированной формулы, остаются при этом неизменными [56, 59].

Рассмотрим уравнение Дирака с физической массой m , вводя, по аналогии с (16.13), массовый контрчлен

$$(i\hat{V} - m)\psi(x) = \tilde{j}(x), \quad \tilde{j}(x) \equiv j(x) - (m - m_0)\psi(x). \quad (16.83)$$

Поля $\psi(x)$ удовлетворяют обычным одновременным перестановочным соотношениям (15.9)

$$\{\psi_\alpha(x, t), \psi_\beta(y, t)\} = 0, \quad \{\psi_\alpha(x, t), \psi_\beta^+(y, t)\} = \delta^3(x - y) \delta_{\alpha\beta}.$$

Снова определим in-поле $\psi_{in}(x)$ как неоднородный член в интегральном уравнении, соответствующем уравнению (16.83), т. е.

$$\sqrt{Z_2} \psi_{in}(x) = \psi(x) - \int d^4y S_{ret}(x - y; m) \tilde{j}(y), \quad (16.84)$$

где $S_{ret}(x)$ — запаздывающая функция Грина:

$$(i\hat{V}_x - m) S_{ret}(x - y; m) = \delta^4(x - y), \quad (16.85)$$

$$S_{ret}(x - y) = 0 \quad \text{при } x_0 < y_0.$$

Константа $\sqrt{Z_2}$ по-прежнему выбирается из условия, чтобы матричный элемент оператора $\psi_{in}(x)$ между вакуумом и одночастичным состоянием был равен единице.

Из определения следует, что оператор $\psi_{in}(x)$ удовлетворяет свободному уравнению Дирака с массой m :

$$(i\hat{V} - m)\psi_{in}(x) = 0 \quad (16.86)$$

и обладает теми же трансформационными свойствами, что и поле $\psi_{in}(x)$, в частности

$$[P_\mu, \psi_{in}(x)] = -i \frac{\partial \psi_{in}(x)}{\partial x^\mu}. \quad (16.87)$$

Так как каждая компонента спинора $\psi_{in}(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, то, как и в (16.8), можно показать, что $\psi_{in}(x)$, действуя на вакуум, приводит к одночастичному состоянию с массой m .

Фурье-разложение поля $\psi_{in}(x)$ имеет тот же вид, что и разложение свободного дираковского поля (см. гл. 13). Запишем его в виде

$$\psi_{in}(x) = \int d^3p \sum_{\pm s} [b_{in}(p, s) U_{ps}(x) + d_{in}^+(p, s) V_{ps}(x)], \quad (16.88)$$

где

$$U_{ps}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u(p, s) e^{-ipx},$$

$$V_{ps}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} v(p, s) e^{ipx}$$

и $E_p = + \sqrt{|p|^2 + m^2}$. Обратив уравнение (16.88) и эрмитово сопряженное уравнение, для коэффициентов разложения получим

$$\begin{aligned} b_{in}(p, s) &= \int d^3x U_{ps}^+(x) \psi_{in}(x), \\ b_{in}^+(p, s) &= \int d^3x \psi_{in}^+(x) U_{ps}(x), \\ d_{in}(p, s) &= \int d^3x \psi_{in}^+(x) V_{ps}(x), \\ d_{in}^+(p, s) &= \int d^3x V_{ps}^+(x) \psi_{in}(x). \end{aligned} \quad (16.89)$$

Эти коэффициенты удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [P^\mu, b_{in}(p, s)] &= -p^\mu b_{in}(p, s), \\ [P^\mu, b_{in}^+(p, s)] &= +p^\mu b_{in}^+(p, s), \\ [P^\mu, d_{in}(p, s)] &= -p^\mu d_{in}(p, s), \\ [P^\mu, d_{in}^+(p, s)] &= +p^\mu d_{in}^+(p, s), \end{aligned} \quad (16.90)$$

которые следуют из (16.87).

Выражения (16.90) совпадают с перестановочными соотношениями для свободного поля. Поэтому мы можем построить произвольное n -частичное состояние, последовательно действуя на вакуум операторами b_{in}^+ и d_{in}^+ по аналогии с (16.11). При этом мы снова предположим, что вакуум представляет единственное состояние с нулевой энергией и что набор состояний, полученный применением in-операторов, является полным.

Асимптотическое условие, как и в случае скалярного поля, имеет вид

$$\psi(x) \rightarrow \sqrt{Z_2} \psi_{in}(x) \quad \text{при } t \rightarrow -\infty,$$

причем это уравнение понимается в смысле слабой операторной сходимости. Другими словами, мы предполагаем выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \psi^f(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z_2} \langle \alpha | \psi_{in}^f | \beta \rangle, \quad (16.91)$$

где ψ_{in}^f определяется первым из уравнений (16.89), в котором U_{ps}^+ нужно заменить на локализованный пакет. Оператор $\psi^f(t)$ определяется тем же уравнением с заменой $\psi_{in}(x)$ на $\psi(x)$.

Аналогичным образом можно ввести out-поля, описывающие физическую систему при $t \rightarrow +\infty$. Вместо (16.84) имеем

$$\sqrt{Z_2} \psi_{out}(x) = \psi(x) - \int d^4y S_{adv}(x-y) \tilde{j}(y), \quad (16.92)$$

где

$$(i\hat{\nabla}_x - m) S_{\text{adv}}(x - y) = \delta^4(x - y),$$

$$S_{\text{adv}}(x - y) = 0 \quad \text{для } x_0 > y_0. \quad (16.93)$$

При этом уравнения (16.86) — (16.90) по-прежнему справедливы для out-операторов, причем асимптотическое условие имеет теперь вид

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | \psi^f(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z_2} \langle \alpha | \psi'_{\text{out}} | \beta \rangle. \quad (16.94)$$

Уравнение, определяющее Z_2 — вероятность образования одночастичного состояния с массой m из вакуума, — выводится в полной аналогии со случаем скалярной теории. Определим

$$S'_{\alpha\beta}(x, x') = i \langle 0 | \{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \} | 0 \rangle. \quad (16.95)$$

Вставим далее полный набор состояний

$$P^\mu |n\rangle = p_n^\mu |n\rangle$$

и сместим операторы поля в начало координат

$$S'_{\alpha\beta}(x, x') = S'_{\alpha\beta}(x - x') =$$

$$= i \sum_n [\langle 0 | \psi_\alpha(0) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle e^{-ip_n(x-x')} +$$

$$+ \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(0) | n \rangle \langle n | \psi_\alpha(0) | 0 \rangle e^{ip_n(x-x')}]. \quad (16.96)$$

Введем снова спектральную амплитуду, объединив в сумме по n состояния с данным 4-импульсом q

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q) \langle 0 | \psi_\alpha(0) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle. \quad (16.97)$$

Используя соображения, связанные с лоренцевой инвариантностью, можно выяснить общий вид функции $\rho_{\alpha\beta}(q)$. Она представляет 4×4 -матрицу и может быть, таким образом, разложена по шестнадцати линейно независимым матрицам Дирака

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = \rho(q) \delta_{\alpha\beta} + \rho_\mu(q) \gamma_{\alpha\beta}^\mu + \rho_{\mu\nu}(q) \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + \bar{\rho}(q) \gamma_{\alpha\beta}^5 + \bar{\rho}_\mu(q) (\gamma^\mu \gamma^5)_{\alpha\beta}. \quad (16.98)$$

Коэффициенты в этом разложении можно найти из условия лоренцевой ковариантности¹⁾. Действительно, отдельные члены

¹⁾ Излагаемые в этом параграфе аргументы неприменимы, когда поле $\psi(x)$ связано с полем излучения. В этом случае необходимо дополнить лоренцево преобразование градиентным преобразованием с тем, чтобы восстановить поперечную калибровку, используемую при квантовании. В то же время функция $S'(x, x')$ не градиентно-инвариантна (см задачу 8 этой главы).

в (16.98) должны преобразовываться так же, как и $\rho_{\alpha\beta}$ в (16.97). Напомним в этой связи, что при преобразовании Лоренца

$$\begin{aligned} U(a) \psi_\alpha(0) U^{-1}(a) &= S_{\alpha\lambda}^{-1}(a) \psi_\lambda(0), \\ U(a) \bar{\psi}_\alpha(0) U^{-1}(a) &= \bar{\psi}_\lambda(0) S_{\lambda\alpha}(a), \end{aligned} \quad (16.99)$$

где S — матрица, определенная в гл. 2,

$$S^{-1} \gamma^\mu S = a^\mu_\nu \gamma^\nu. \quad (16.100)$$

Тогда, в предположении лоренцевой инвариантности вакуума $U|0\rangle = |0\rangle$,

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}(q) &= \sum_n (2\pi)^3 \delta^4(p_n - q) S_{\alpha\lambda}^{-1}(a) S_{\delta\beta}(a) \times \\ &\times \langle 0 | \psi_\lambda(0) | U(a) n \rangle \langle U(a) n | \bar{\psi}_\delta(0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (16.101)$$

Используя инвариантность δ -функции (см. (16.29)), перепишем (16.101) в виде суммы по полному набору состояний $|m\rangle = |U(a)n\rangle$:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}(q) &= S_{\alpha\lambda}^{-1}(a) \sum_m (2\pi)^3 \delta^4(p_m - qa^{-1}) \times \\ &\times \langle 0 | \psi_\lambda(0) | m \rangle \langle m | \bar{\psi}_\delta(0) | 0 \rangle S_{\delta\beta}(a). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho(q) = S^{-1}(a) \rho(qa^{-1}) S(a). \quad (16.102)$$

Это уравнение определяет вид коэффициентов $\rho(q)$, $\rho_\mu(q)$ и т. д. в выражении (16.98). Если подставить (16.98) в (16.102), то получим, например,

$$\rho(q) = \rho(qa^{-1}),$$

т. е. что $\rho(q)$ преобразуется, как скаляр. Аналогичным образом находим, что

$$\rho_\mu(q) = a^\nu_\mu \rho_\nu(qa^{-1})$$

преобразуется, как 4-вектор, и т. д. Так как $\rho_{\alpha\beta}$ зависит только от q и обращается в нуль вне переднего светового конуса, то ρ и $\bar{\rho}$ в (16.98) зависят только от q^2 . Поэтому $\rho_\mu(q)$ и $\bar{\rho}_\mu(q)$ можно представить в виде скалярных функций от q^2 , умноженных на q_μ , точно так же $\rho_{\mu\nu}$ пропорционально $q_\mu q_\nu$. В результате получаем

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = \rho_1(q^2) \hat{q}_{\alpha\beta} + \rho_2(q^2) \delta_{\alpha\beta} + \bar{\rho}_1(q^2) (\hat{q}\gamma^5)_{\alpha\beta} + \bar{\rho}_2(q^2) \gamma^5_{\alpha\beta}. \quad (16.103)$$

Далее используем инвариантность теории при пространственном отражении

$$\mathcal{P}\psi_\alpha(0) \mathcal{P}^{-1} = \gamma^0_{\alpha\beta} \psi_\lambda(0). \quad (16.104)$$

Подставив (16.104) в (16.97) и выполнив выкладки, аналогичные тем, которые были проделаны при рассмотрении лоренцевых преобразований, получим

$$\rho_{\alpha\beta}(q, q_0) = \gamma_{\alpha\lambda}^0 \rho_{\lambda\delta}(-q, q_0) \gamma_{\beta\delta}^0. \quad (16.105)$$

Подстановка (16.103) в (16.105) приводит к результату

$$\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_2 = 0, \quad (16.106)$$

поскольку матрица γ^5 антикоммутирует с γ^0 . В результате получаем окончательное выражение для $\rho_{\alpha\beta}(q)$:

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = \rho_1(q^2) \hat{q}_{\alpha\beta} + \rho_2(q^2) \delta_{\alpha\beta}. \quad (16.107)$$

Дальнейшее рассмотрение основывается на представлении $\rho_{\alpha\beta}$ в виде (16.107). В том случае, когда включены слабые взаимодействия, отражение пространства уже не является преобразованием симметрии теории, и для $\rho_{\alpha\beta}$ нужно рассматривать более общее выражение (16.103). При этом константа перенормировки Z_2 является матрицей вида $a + b\gamma_5$. Соответствующие вычисления можно найти в оригинальных статьях [60, 61].

Спектральная амплитуда для второго члена в (16.96) может быть выражена непосредственно через (16.97) с помощью $\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}$ -преобразования. Действительно,

$$\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = \langle K0 | K \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) 0 \rangle^* = \langle K \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) 0 | K0 \rangle,$$

где K — оператор комплексного сопряжения, который содержится в операторе обращения времени $\mathcal{F} = \mathcal{U}K$. Используя $\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}$ -инвариантность вакуума

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F} | 0 \rangle \equiv \theta | 0 \rangle = | 0 \rangle$$

и учитывая, что $1 = (\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{U})^{-1} (\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{U})$, получаем

$$\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = \langle \theta \bar{\psi}_\beta(x') \theta^{-1} \theta \psi_\alpha(x) \theta^{-1} 0 | 0 \rangle. \quad (16.108)$$

С учетом правил преобразования (15.150) дираковских полей под действием оператора $\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \theta \psi_\alpha(x) \theta^{-1} &= -i (\gamma_0 \gamma_5 \bar{\psi}(-x))_\alpha = i (\gamma_5 \psi^+(-x))_\alpha, \\ \theta \bar{\psi}_\beta(x') \theta^{-1} &= -i (\psi(-x') \gamma_5 \gamma_0)_\beta \end{aligned}$$

и учитывая, что $\gamma_5 = \gamma_5^T$, находим

$$\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = -(\gamma^5)_{\alpha\tau} \langle 0 | \psi_\tau(-x) \bar{\psi}_\lambda(-x') | 0 \rangle (\gamma^5)_{\lambda\beta}. \quad (16.109)$$

Подставляя (16.109) вместе с (16.107) в (16.96), получаем окончательно

$$S'_{\alpha\beta}(x-x') = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \theta(q_0) ([\hat{q}\rho_1(q^2) + \rho_2(q^2)]_{\alpha\beta} e^{-iq(x-x')} - \{\gamma_5[\hat{q}\rho_1(q^2) + \rho_2(q^2)]\gamma_5\}_{\alpha\beta} e^{iq(x-x')}) = \\ = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \theta(q_0) [i\hat{\nabla}_x \rho_1(q^2) + \rho_2(q^2)]_{\alpha\beta} (e^{-iq(x-x')} - e^{iq(x-x')}). \quad (16.110)$$

Поскольку ρ обращается в нуль для пространственно-подобных q^2 , это выражение с помощью подстановки

$$\rho(q^2) = \int_0^\infty dM^2 \rho(M^2) \delta(q^2 - M^2)$$

может быть записано в виде интеграла по массам

$$S'_{\alpha\beta}(x-x') = - \int dM^2 [i\rho_1(M^2) \hat{\nabla}_x + \rho_2(M^2)]_{\alpha\beta} \Delta(x-x'; M) = \\ = \int dM^2 \{ \rho_1(M^2) S_{\alpha\beta}(x-x'; M) + \\ + [M\rho_1(M^2) - \rho_2(M^2)]_{\alpha\beta} \Delta(x-x'; M) \}, \quad (16.111)$$

где инвариантные функции Δ и S определены в приложении В.

Приведенный выше вывод спектрального представления практически не меняется для вакуумного среднего от упорядоченного по времени произведения дираковских полей, при этом нужно только заменить S и Δ в (16.111) на фейнмановские пропагаторы S_F и Δ_F :

$$S'_{F\alpha\beta}(x-x') = + \int dM^2 [i\rho_1(M^2) \hat{\nabla}_x + \rho_2(M^2)]_{\alpha\beta} \Delta_F(x-x'; M) \quad (16.112)$$

или, в импульсном пространстве,

$$S'_F(p) = \int_0^\infty dM^2 [\rho_1(M^2) + \rho_2(M^2)] \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon}.$$

Аналогичный результат может быть выведен и для остальных функций Грина.

Сопоставляя (16.111) и (16.32), мы видим, что учет спиновых степеней свободы в уравнении Дирака приводит к тому, что спектральное представление записывается в виде интеграла, содержащего не одну, а две скалярные функции ρ_1 и ρ_2 . Свойства этих функций аналогичны свойствам $\rho(q^2)$:

- 1) $\rho_1(M^2)$ и $\rho_2(M^2)$ вещественны,
 - 2) $\rho_1(M^2) \geq 0$,
 - 3) $M\rho_1(M^2) - \rho_2(M^2) \geq 0$.
- (16.113)

Условие 1) проверяется непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}^*(q) &= \sum_n (2\pi)^3 \delta^4(p_n - q) \langle n | \bar{\psi}_\tau(0) | 0 \rangle \gamma_{\tau\alpha}^0 \gamma_{\beta\lambda}^0 \langle 0 | \psi_\lambda(0) | n \rangle = \\ &= [\gamma_0 \rho(q) \gamma_0]_{\beta\alpha} = [\rho_1(q^2) \hat{q}^* + \rho_2(q^2)]_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Чтобы доказать 2), рассмотрим $\text{Sp}(\gamma_0 \rho)$; используя (16.97) и (16.107), получаем

$$\begin{aligned} \text{Sp} \gamma_0 \rho(q) &= 4q_0 \rho_1(q^2) = \\ &= \sum_n (2\pi)^3 \delta^4(p_n - q) \sum_{\alpha=1}^4 \langle 0 | \psi_\alpha(0) | n \rangle \langle n | \psi_\alpha^\dagger(0) | 0 \rangle = \\ &= \sum_n (2\pi)^3 \delta^4(p_n - q) \sum_{\alpha=1}^4 |\langle 0 | \psi_\alpha(0) | n \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $q_0 > 0$, следует $\rho_1(q^2) > 0$.

Условие 3) доказывается аналогичным образом, для этого нужно рассмотреть квадрат модуля $(i\hat{\nabla} - M)\psi$. Конкретные выкладки мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Теперь, как и в случае скалярного поля, можно выделить из спектральных амплитуд вклад одночастичного состояния и вывести условие для Z_2 , аналогичное (16.42). Для этого вычислим матричные элементы операторов в правой и левой части уравнения (16.83) между вакуумом и одночастичным состоянием $|ps\rangle$:

$$\begin{aligned} (i\hat{\nabla} - m) \langle 0 | \psi(x) | ps \rangle &= (\hat{p} - m) \langle 0 | \psi(0) | ps \rangle e^{-ipx} = \\ &= \langle 0 | \tilde{j}(0) | ps \rangle e^{-ipx}. \end{aligned} \quad (16.114)$$

Из (16.99) следует, что $\langle 0 | \psi(0) | ps \rangle$ при лоренцевых преобразованиях преобразуется как спинор с импульсом p и спином s :

$$\langle 0 | \psi_\alpha(0) | ps \rangle = \langle 0 | U(a) \psi_\alpha(0) U^{-1}(a) | U(a) ps \rangle = S_{\alpha\beta}^{-1}(a) \langle 0 | \psi_\beta(0) | p's' \rangle.$$

Поэтому ¹⁾

$$\langle 0 | \psi(0) | ps \rangle = au(p, s) + bv(p, -s) = (a + b\gamma_5)u(p, s). \quad (16.115)$$

Потребовав, чтобы теория была инвариантна при отражении пространства, мы устраним член с b в (16.115). Действительно, из (15.88) и (15.91) получаем

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(0) | p_0, -p, s \rangle &= (a + b\gamma_5)u(-p, s) = \langle 0 | \mathcal{P}\psi(0) \mathcal{P}^{-1} | ps \rangle = \\ &= \gamma_0(a + b\gamma_5)u(p, s) = (a - b\gamma_5)u(-p, s), \end{aligned} \quad (16.116)$$

¹⁾ См. задачу 9 этой главы.

где учтено, что в силу уравнения Дирака $u(-p, s) = \gamma_0 u(p, s)^1$. Поэтому $b = 0$. Из (16.114) имеем

$$\langle 0 | \tilde{j}(0) | ps \rangle = a(\hat{p} - m) u(p, s) = 0 \quad (16.117)$$

и

$$\langle 0 | \psi(x) | ps \rangle = \sqrt{Z_2} \langle 0 | \psi_{\text{in}}(x) | ps \rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{Z_2}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u(p, s) e^{-ipx}, \quad (16.118)$$

$$\langle 0 | \psi(x) | ps \rangle = \sqrt{Z_2} \langle 0 | \psi_{\text{out}}(x) | ps \rangle. \quad (16.119)$$

По аналогии с (16.55) отсюда следует, что

$$\langle 0 | \{ \psi_\alpha^{\text{in}}(x), \bar{\psi}_\beta^{\text{in}}(y) \} | 0 \rangle = -i S_{\alpha\beta}(x - y), \quad (16.120)$$

а также, что антикоммутаторы в (16.120) являются сами по себе c -числами, т. е.

$$\{ \psi_\alpha^{\text{in}}(x), \bar{\psi}_\beta^{\text{in}}(y) \} = \{ \psi_\alpha^{\text{out}}(x), \bar{\psi}_\beta^{\text{out}}(y) \} = -i S_{\alpha\beta}(x - y). \quad (16.121)$$

Непосредственную проверку этих утверждений мы оставляем читателю. Используя (16.118), выделим вклад одночастичного состояния в спектральную амплитуду (16.97); этот вклад равен

$$\begin{aligned} Z_2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{\pm s} (2\pi)^3 \delta^4(p - q) \frac{m}{E_p} u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) = \\ = Z_2 (\hat{q} + m)_{\alpha\beta} \delta(q^2 - m^2) \theta(q_0). \end{aligned}$$

Подставив в (16.111), найдем

$$\begin{aligned} S'_{\alpha\beta}(x - x') = Z_2 S_{\alpha\beta}(x - x', m) - \\ - \int_{m_1^2}^{\infty} dM^2 [i\rho_1(M^2) \hat{\nabla}_x + \rho_2(M^2)]_{\alpha\beta} \Delta(x - x'; M), \quad (16.122) \end{aligned}$$

где спектральный интеграл начинается от порогового значения m_1^2 непрерывного спектра.

При $t = t'$ левая часть (16.122) выражается через антикоммутатор полей $\psi(x)$:

$$S'_{\alpha\beta}(x - x'; 0) = i \langle 0 | \{ \psi_\alpha(x, t), \bar{\psi}_\beta(x', t) \} | 0 \rangle = i \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta^3(x - x'). \quad (16.123)$$

Отсюда получаем уравнение для Z_2 :

$$1 = Z_2 + \int_{m_1^2}^{\infty} dM^2 \rho_1(M^2) \quad (16.124)$$

¹⁾ Напомним используемое обозначение: $u(-p, s) \equiv u(p_0, -p, s)$.

или, с учетом (16.113),

$$0 \leq Z_2 < 1 \quad (16.125)$$

в полной аналогии с (16.34).

При выводе неравенства (16.125) для вероятности образования дираковской частицы из вакуума использовалось только свойство лоренцевой инвариантности. Как известно, в том случае, когда теория содержит электромагнитную связь, каждое лоренцево преобразование следует дополнить соответствующим градиентным преобразованием. Поскольку функция $S'(x - x')$ не градиентно-инвариантна, условие (16.125) не выполняется в квантовой электродинамике; при этом Z_2 зависит от калибровки и не имеет простой физической интерпретации.

§ 110. Редукционная формула для дираковских полей

В § 108 мы использовали общие свойства S-матрицы для вывода редукционной формулы в случае скалярных полей. Обобщение на случай матричных элементов между дираковскими частицами требует лишь небольших технических усложнений.

Из выражений (16.88), (16.90) и (16.121) видно, что n -частичное in- (или out-) состояние может быть, как и в случае свободного поля Дирака, получено последовательным применением операторов

$$\begin{aligned} b_{in}^+(p, s) &= \int \psi_{in}^+(x) U_{ps}(x) d^3x, \\ d_{in}^+(\bar{p}, \bar{s}) &= \int V_{\bar{p}\bar{s}}^+(x) \psi_{in}(x) d^3x. \end{aligned} \quad (16.126)$$

Например, произвольное in-состояние может быть записано в виде

$$\begin{aligned} |(\bar{p}_k \bar{s}_k) \dots (\bar{p}_1 \bar{s}_1); (p_j s_j) \dots (p_1 s_1); q_1 \dots q_n \text{ in}\rangle = \\ = d_{in}^+(\bar{p}_k \bar{s}_k) \dots d_{in}^+(\bar{p}_1, \bar{s}_1) b_{in}^+(p_j s_j) \dots b_{in}^+(p_1 s_1) \times \\ \times a_{in}^+(q_1) \dots a_{in}^+(q_n) |0\rangle. \end{aligned} \quad (16.127)$$

Квантовые числа этого состояния записаны в порядке, который при чтении справа налево в точности соответствует последовательности, в которой частицы рождаются из вакуума, при этом частицы $(p_i s_i)$ предшествуют античастицам $(\bar{p}_i \bar{s}_i)$. Указанное соглашение фиксирует фазу состояний и помогает разобраться в кухне, связанной с алгеброй антикоммутаторов в случае фермионных полей.

Как обычно в редукционной процедуре, мы извлекаем сначала дираковскую частицу из in-состояния и заменяем ее матричным элементом соответствующего полевого оператора. Для

этого повторим выкладки, которые мы проделали в (16.73), (16.74). Используя асимптотическое условие в форме (16.91) и (16.94), получим

$$\begin{aligned} \langle \beta \text{ out} | (ps), \alpha \text{ in} \rangle &= \langle \beta - (ps) \text{ out} | \alpha \text{ in} \rangle + \\ &+ \langle \beta \text{ out} | b_{\text{in}}^{\dagger}(ps) - b_{\text{out}}^{\dagger}(ps) | \alpha \text{ in} \rangle = \langle \beta - (ps) \text{ out} | \alpha \text{ in} \rangle + \\ &+ \int d^3x \langle \beta \text{ out} | [\psi_{\text{in}}^{\dagger}(x) - \psi_{\text{out}}^{\dagger}(x)] | \alpha \text{ in} \rangle U_{ps}(x) = \\ &= \langle \beta - (ps) \text{ out} | \alpha \text{ in} \rangle - \\ &- \frac{1}{\sqrt{Z_2}} \int d^4x \langle \beta \text{ out} | \frac{\partial}{\partial x^0} (\bar{\psi}(x) \gamma^0 U_{ps}(x) | \alpha \text{ in} \rangle. \end{aligned} \quad (16.128)$$

Поскольку $U_{ps}(x)$ есть решение свободного уравнения Дирака, подставим

$$\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} U_{ps}(x) = (-\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - im) U_{ps}(x)$$

и проинтегрируем по частям член с $-\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla$. В результате второй член в правой части (16.128) приобретает вид

$$- \frac{i}{\sqrt{Z_2}} \int d^4x \langle \beta \text{ out} | \bar{\psi}(x) | \alpha \text{ in} \rangle \overleftarrow{(-i\hat{V} - m)} U_{ps}(x). \quad (16.129)$$

В том случае, когда in-состояние содержит не частицу, а античастицу, имеем

$$\frac{i}{\sqrt{Z_2}} \int d^4x \bar{V}_{\bar{p}\bar{s}} \overrightarrow{(i\hat{V} - m)} \langle \beta \text{ out} | \psi(x) | \alpha \text{ in} \rangle. \quad (16.130)$$

Для out-состояний при извлечении из обкладок частицы и античастицы получаем соответственно

$$- \frac{i}{\sqrt{Z_2}} \int d^4x \bar{U}_{p's'}(x) \overrightarrow{(i\hat{V} - m)} \langle \beta \text{ out} | \psi(x) | \alpha \text{ in} \rangle, \quad (16.131)$$

$$\frac{i}{\sqrt{Z_2}} \int d^4x \langle \beta \text{ out} | \bar{\psi}(x) | \alpha \text{ in} \rangle \overleftarrow{(-i\hat{V} - m)} V_{\bar{p}'\bar{s}'}(x). \quad (16.132)$$

Отметим, что выражение (16.129) для амплитуды, описывающей взаимодействие электрона с квантовыми числами ps в начальном in-состоянии, и выражение (16.132) для амплитуды, описывающей взаимодействие позитрона $\bar{p}'\bar{s}'$ в конечном out-состоянии, тесно связаны друг с другом: одно получается из другого заменой $U_{ps}(x)$ на $-V_{\bar{p}'\bar{s}'}(x)$, т. е. $u(p, s)e^{-ipx}$ на $-v(\bar{p}', \bar{s}')e^{-i(-\bar{p}')x}$. Это обстоятельство, которое является теоретико-полевой формулировкой нашего старого результата, полученного в гл. 6 при обсуждении метода функций распространения, позволяет нам рассматривать позитрон как электрон с отрицательной энергией, движущиеся назад во времени. Аналогич-

ная связь имеет место между амплитудами (16.130) и (16.131), отвечающими электрону в конечном и позитрону в начальном состояниях.

Мы можем продолжить редукционную процедуру до тех пор, пока не извлечем все частицы из in- или out-состояний. В результате мы получим вакуумное среднее от хронологически-упорядоченного произведения полей. Рассмотрим, например, случай, когда in-состояние содержит дираковскую частицу, а сам матричный элемент вычисляется от произведения скалярных и спинорных полей. Имеем

$$\begin{aligned} & \langle \beta \text{ out} | T(x_1, \dots, z_p)_{\alpha_1 \dots \beta_p} | (ps) \alpha \text{ in} \rangle \equiv \\ & \equiv \langle \beta \text{ out} | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \psi_{\alpha_1}(y_1) \dots \psi_{\alpha_m}(y_m) \times \\ & \quad \times \bar{\psi}_{\beta_1}(z_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_p}(z_p) | (ps) \alpha \text{ in} \rangle = \\ & = (-1)^{m+p} \langle \beta - (ps) \text{ out} | T(x_1 \dots z_p)_{\alpha_1 \dots \beta_p} | \alpha \text{ in} \rangle + \\ & \quad + \langle \beta \text{ out} | T(x_1 \dots z_p)_{\alpha_1 \dots \beta_p} b_{\text{in}}^+(p, s) | \alpha \text{ in} \rangle - \\ & \quad - \langle \beta \text{ out} | (-1)^{m+p} b_{\text{out}}^+(p, s) T(x_1 \dots z_p)_{\alpha_1 \dots \beta_p} | \alpha \text{ in} \rangle, \quad (16.133) \end{aligned}$$

где знак $(-1)^{m+p}$ определяется числом перестановок фермионных полей (см. (13.71)), как это следует из определения хронологического произведения фермионных полей:

$$T(\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)) = \psi_\alpha(x) \psi_\beta(y) \theta(x_0 - y_0) - \psi_\beta(y) \psi_\alpha(x) \theta(y_0 - x_0).$$

Во втором члене используем асимптотическое условие; тогда, повторяя выкладки, приведшие к выражению (16.129), получаем

$$\begin{aligned} & - \frac{i}{\sqrt{Z_2}} \int d^4x \langle \beta \text{ out} | T(\varphi(x_1) \dots \psi_{\alpha_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_p}(z_p) \bar{\psi}_\lambda(x) | \alpha \text{ in} \rangle \times \\ & \quad \times \overleftarrow{(-i\nabla_x - m)_{\lambda\tau}} U_{ps}(x)_\tau. \quad (16.134) \end{aligned}$$

Если in-состояние содержит не частицу, а античастицу, то (16.134) заменяется на

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\sqrt{Z_2}} \int d^4x \bar{V}_{\bar{\rho}\bar{s}}(x)_\tau \overrightarrow{(i\hat{\nabla}_x - m)_{\tau\lambda}} \times \\ & \quad \times (-1)^{m+p} \langle \beta \text{ out} | T(\bar{\psi}_\lambda(x) \varphi(x_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_p}(z_p)) | \alpha \text{ in} \rangle. \quad (16.135) \end{aligned}$$

В том случае, когда частица и античастица извлекаются из out-состояния, имеем соответственно

$$\begin{aligned} & - \frac{i}{\sqrt{Z_2}} \int d^4x \bar{U}_{\rho's'}(x)_\tau \overrightarrow{(i\hat{\nabla}_x - m)_{\lambda\tau}} \times \\ & \quad \times \langle \beta \text{ out} | T(\psi_\lambda(x) \varphi(x_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_p}(z_p)) | \alpha \text{ in} \rangle, \quad (16.136) \end{aligned}$$

и

$$\frac{i}{\sqrt{Z_2}} \int d^4x \langle \beta \text{ out} | T(\varphi(x_1) \dots \bar{\psi}_{\beta p}(z_p) \bar{\psi}_\lambda(x) | \alpha \text{ in}) \times \\ \times (-1)^{m+p} \overleftarrow{(-i\hat{\nabla}_x - m)}_{\lambda\tau} V_{\bar{\beta}'\beta'}(x)_\tau. \quad (16.137)$$

Описанная процедура приводит в конце концов к вакуумному среднему

$$\langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots) | 0 \rangle. \quad (16.138)$$

В следующей главе будет показано, что выражение (16.138) представляет сумму всех фейнмановских диаграмм, отвечающих рождению и уничтожению бозонов в точках x_i , рождению фермионов и уничтожению антифермионов в точках z_i и рождению антифермионов и уничтожению фермионов в точках y_i . Операторы Клейна — Гордона и Дирака в редуccionной формуле

$$\int d^4x f_p(x) (\square_x + m^2), \quad \int d^4x \bar{U}_{p's'}(x) (i\hat{\nabla} - m) \text{ и т. д.}$$

исключают концы диаграмм, отвечающие внешним частицам, и сажает эти частицы на массовую поверхность. Множители i/\sqrt{Z} , $-i/\sqrt{Z_2}$ и $i/\sqrt{Z_2}$ для каждой бозонной, фермионной или антифермионной линии обеспечивают перенормировку соответствующей волновой функции, в результате окончательный результат непосредственно равен амплитуде перехода.

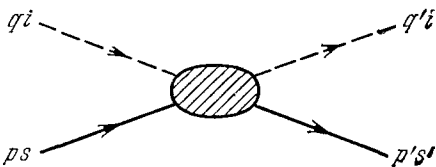


Рис 16.3 Мезон-протонное рассеяние.

В качестве примера мы рассмотрим рассеяние мезона на протоне. Кинематика указана на рис. 16.3, где i означает зарядовое состояние мезона. Применяя редуccionную технику, получим

$$S_{fi} = \langle q'; p's' \text{ out} | q; pS \text{ in} \rangle = \\ = \delta_{fi} + \frac{1}{Z_2 Z} \int d^4x d^4x' d^4z d^4z' f_q^*(x') (\overrightarrow{\square}_{x'} + \mu^2) \times \\ \times [\bar{U}_{p's'}(z') (i\hat{\nabla}_{z'} - m)]_\sigma \langle 0 | T(\psi_\sigma(z') \bar{\psi}_\tau(z) \varphi_i(x) \varphi_i(x')) | 0 \rangle \times \\ \times \overleftarrow{(-i\hat{\nabla}_x - m)} U_{pS}(z)_r (\square_x + \mu^2) f_q(x), \quad (16.139)$$

где μ , m — масса мезона и протона соответственно, а $\delta_{fi} \neq 0$ только в том случае, когда in- и out-состояния совпадают, т. е. для рассеяния вперед. При практических вычислениях в (16.139)

обычно используются плоские волны (16.9) и (16.88):

$$\begin{aligned} \dot{f}_q(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{-iqx}, \\ U_{ps}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u(p, s) e^{-ipx}, \end{aligned} \quad (16.140)$$

представляющие предельный случай нормированных волновых пакетов, при этом δ_{fi} в (16.139) имеет вид

$$\delta_{fi} = \delta^3(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{s's}.$$

§ 111. In- и out-состояния и редуционная формула для фотонов

В заключение применим формализм, обсуждавшийся в этой главе, к полю излучения. Указанный случай требует отдельного рассмотрения ввиду трудностей, обусловленных нековариантным выбором калибровки при квантовании уравнений Максвелла.

Напомним, что в калибровке излучения векторный потенциал поперечен и описывается уравнением

$$\square \mathbf{A} = e_0 \mathbf{j}^{\text{tr}}, \quad (16.141)$$

где

$$e_0 \mathbf{j}^{\text{tr}} \equiv e_0 \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}_I}{\partial t},$$

а поперечный ток определяется из условий

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = e_0 \rho = e_0 j_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{j}^{\text{tr}} = 0.$$

Продольная часть векторного потенциала в этой калибровке равна нулю, при этом скалярный потенциал определяется из формулы Гаусса

$$\nabla^2 A_0 = e_0 \rho.$$

Таким образом, имеются две независимые компоненты векторного потенциала, каждая из которых удовлетворяет (16.141). Одновременные перестановочные соотношения для этих компонент имеют вид (см. (15.9))

$$\begin{aligned} [A_i(\mathbf{x}, t), A_k(\mathbf{x}', t)] &= [A_i(\mathbf{x}, t), \dot{A}_k(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [A_i(\mathbf{x}, t), \dot{A}_k(\mathbf{x}', t)] &= i \delta_{ij}^{\text{tr}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (16.142)$$

Ситуация вполне аналогична канонической теории свободных полей, отличаясь от последней лишь в том отношении, что масса квантов равна нулю и поле поперечно, так что в (16.142) входит лишь поперечная часть δ -функции.

По аналогии с теорией скалярного поля введем поперечные in- (и out-) поля, удовлетворяющие, в соответствии с (16.5) и (16.6), соотношениям

$$[P^\mu, \mathbf{A}_{\text{in}}(x)] = -i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_{\text{in}}(x), \quad \square \mathbf{A}_{\text{in}}(x) = 0. \quad (16.143)$$

Поле $\mathbf{A}_{\text{in}}(x)$, действуя на вакуум, рождает только¹⁾ однофотонные состояния с $P_n^2 = 0$. Это можно показать тем же способом, каким мы получили уравнение (16.8). Поскольку масса фотонов равна нулю, уравнение (16.143) теперь не содержит массового члена.

Выпишем далее фурье-разложение оператора $\mathbf{A}_{\text{in}}(x)$:

$$\mathbf{A}_{\text{in}}(x) = \int d^3k \sum_{\lambda=1}^2 [a_{\text{in}}(k, \lambda) \mathbf{A}_{k, \lambda}(x) + a_{\text{in}}^+(k, \lambda) \mathbf{A}_{k, \lambda}^*(x)], \quad (16.144)$$

где

$$\mathbf{A}_{k, \lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} e^{-ikx} \mathbf{e}(k, \lambda).$$

Обратив (16.144), получим

$$\begin{aligned} a_{\text{in}}(k, \lambda) &= i \int d^3x \mathbf{A}_{k, \lambda}^*(x) \cdot \overleftrightarrow{\partial}_0 \mathbf{A}_{\text{in}}(x) = \\ &= -i \int d^3x \mathbf{A}_{k, \lambda}^*(x)_u \overleftrightarrow{\partial}_0 \mathbf{A}_{\text{in}}(x)^u. \end{aligned} \quad (16.145)$$

Последовательно действуя операторами $a_{\text{in}}^+(k, \lambda)$ на вакуум, мы получаем in-состояние, содержащее n фотонов, в полном соответствии с (16.10) и (16.11). Аналогичные результаты имеют место для out-полей и out-состояний. Как обычно, мы предполагаем, что in- и out-состояния образуют полный набор.

Выпишем уравнения, связывающие $\mathbf{A}_{\text{in}}(x)$ и $\mathbf{A}_{\text{out}}(x)$ с $\mathbf{A}(x)$. Эти уравнения в точности аналогичны уравнениям (16.14) и (16.52) для скалярного поля:

$$\begin{aligned} \sqrt{Z_3} \mathbf{A}_{\text{in}}(x) &= \mathbf{A}(x) - e_0 \int d^4y D_{\text{ret}}(x-y) \mathbf{j}^{\text{tr}}(y), \\ \sqrt{Z_3} \mathbf{A}_{\text{out}}(x) &= \mathbf{A}(x) - e_0 \int d^4y D_{\text{adv}}(x-y) \mathbf{j}^{\text{tr}}(y). \end{aligned} \quad (16.146)$$

Здесь D_{ret} и D_{adv} — предельные значения соответствующих функций Грина при $m \rightarrow 0$, а константа $\sqrt{Z_3}$ определяется из усло-

¹⁾ Мы не обсуждаем здесь осложнения, связанные с инфракрасной расходимостью, которая возникает при рассмотрении многофотонных состояний с нулевой частотой. Мы уже убедились (гл. 8) в том, что при конкретных вычислениях эту проблему следует каждый раз рассматривать отдельно. Мы еще вернемся к этому вопросу в гл. 17.

вия единичной нормировки матричного элемента in- и out-операторов между вакуумным и одночастичным состоянием.

Пока что все напоминает формулы скалярной теории. Похожий вид имеют и асимптотические условия, понимаемые, как обычно, в смысле слабой операторной сходимости (16.20):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \sqrt{Z_3} \mathbf{A}_{\text{In}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{при } t \rightarrow -\infty, \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \sqrt{Z_3} \mathbf{A}_{\text{Out}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (16.147)$$

Лишь редуцированная формула для фотонов немного отличается от выражения (16.81) для скалярного поля

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{Z}} f_{q_i}(x_i) (\overrightarrow{\square}_{x_i} + m^2) \langle 0 | \dots \varphi(x_i) \dots | 0 \rangle &\rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{Z_3}} \mathbf{A}_{k_i, \lambda_i}(x_i) \overrightarrow{\square}_{x_i} \cdot \langle 0 | \dots \mathbf{A}(x_i) \dots | 0 \rangle = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{Z_3}} A_{k_i, \lambda_i}^\mu(x_i) \overrightarrow{\square}_{x_i} \langle 0 | \dots A_\mu(x_i) \dots | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (16.148)$$

Например, если фотон с квантовыми числами $k'\lambda'$ «вытаскивается» из out-состояния, (16.80) заменяется на

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(k'\lambda') \text{ out} | \varphi(x) | \alpha \text{ in} \rangle &= \langle \gamma \text{ out} | \varphi(x) | \alpha - (k'\lambda') \text{ in} \rangle + \\ &+ \frac{-i}{\sqrt{Z_3}} \int d^4y \langle \gamma \text{ out} | T(A_\mu(y) \varphi(x)) | \alpha \text{ in} \rangle \overleftarrow{\square}_y A_{k', \lambda'}^\mu(y), \end{aligned} \quad (16.149)$$

причем дополнительный по сравнению с (16.80) знак минус в (16.149) связан с тем обстоятельством, что единичный вектор поляризации пространственно-подобен:

$$\epsilon_\mu \epsilon^\mu = -\epsilon \cdot \epsilon = -1.$$

Таким образом, потеря явной ковариантности при квантовании не приводит к каким-либо новым трудностям при рассмотрении редуцированной техники. В следующей главе, анализируя член за членом в ряду теории возмущений, мы установим, что S-матрица в присутствии электромагнитных взаимодействий градиентно-инвариантна, а потому в силу (16.70) также и лоренц-инвариантна. В низших порядках по константе связи этот факт был проверен явным вычислением (см. гл. 7 и 8). Здесь же мы укажем только, что нормировочная константа Z_3 , равно как и остальные члены в уравнении (16.146), градиентно-инвариантны.

Предвосхищая дальнейшее обсуждение, отметим важное свойство константы Z_3 , которое отличает ее от соответствующих констант для заряженного фермионного и бозонного полей Z_2 и Z . В гл. 8 мы обнаружили, что если собрать воедино различные поправки порядка e^3 к вершинной функции, то единственной ве-

личной, зависящей от радиуса обрезания является Z_3 , константа перенормировки волновой функции и заряда ($e = \sqrt{Z_3} e_0$). Вскоре мы убедимся, что Z_3 из гл. 8 совпадает с Z_3 , обсуждавшейся в настоящей главе. Таким образом, свойство градиентной инвариантности физического заряда определяется градиентной инвариантностью Z_3 в (16.146).

§ 112. Спектральное представление для фотонов

Продолжим наше сопоставление с теорией скалярного поля и рассмотрим вакуумное среднее от коммутатора

$$iD'_{ij}(x, x')^{\text{tr}} \equiv \langle 0 | [A_i(x), A_j(x')] | 0 \rangle. \quad (16.150)$$

Тот факт, что при квантовании максвелловского поля теряется явная лоренцева инвариантность, приводит к некоторым трудностям. Рассмотрим вначале матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_i(x) A_j(x') | 0 \rangle &= \sum_n e^{-ip_n(x-x')} \langle 0 | A_i(0) | n \rangle \langle n | A_j(0) | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \theta(q_0) e^{-iq(x-x')} \rho_{ij}(q) \end{aligned} \quad (16.151)$$

и обычным образом определим спектральную амплитуду:

$$\rho_{ij}(q) \equiv \sum_n \langle 0 | A_i(0) | n \rangle \langle n | A_j(0) | 0 \rangle (2\pi)^3 \delta(p_n - q). \quad (16.152)$$

Выделив, как в (16.37), однофотонное состояние

$$\langle 0 | \mathbf{A}(x) | p\lambda \rangle = \sqrt{Z_3} \langle 0 | \mathbf{A}_{\text{In}}(x) | p\lambda \rangle, \quad (16.153)$$

получим

$$\rho_{ij}(q) = Z_3 \delta(q^2) \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_i(q, \lambda) \varepsilon_j(q, \lambda) + \pi_{ij}(q). \quad (16.154)$$

Второй член в (16.150) также можно выразить через (16.154), если использовать \mathcal{FCP} -инвариантность электродинамики. При преобразовании $\theta = \mathcal{FCP}$

$$\theta \mathbf{A}(x) \theta^{-1} = -\mathbf{A}(-x) \quad \text{и} \quad \theta | 0 \rangle = | 0 \rangle.$$

Поэтому, записывая $\mathcal{F} = \mathcal{UK}$, где K — оператор комплексного сопряжения, получаем

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_j(x') A_i(x) | 0 \rangle &= \langle K0 | K A_j(x') A_i(x) 0 \rangle^* = \\ &= \langle 0 | \theta A_j(x') \theta^{-1} \theta A_i(x) \theta^{-1} | 0 \rangle^* = \langle 0 | A_i(-x) A_j(-x') | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (16.155)$$

В последней строчке этого равенства использовано тождество $\langle A|B \rangle^* = \langle B|A \rangle$ и учтена эрмитовость поля $A(x)$. Отсюда следует, что тензор $\rho_{ij}(q)$ симметричен относительно перестановки индексов; учитывая (16.152), заключаем также, что ρ_{ij} — действительная функция

$$\rho_{ij}(q) = \rho_{ji}(q) = \rho_{ij}^*(q). \quad (16.156)$$

Выражение (16.150), с учетом (16.151) и (16.154), приводится к виду

$$D'_{ij}(x-x')^{\text{tr}} = Z_3 D_{ij}(x-x')^{\text{tr}} - i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q_0) (e^{-iq(x-x')} - e^{iq(x-x')}) \pi_{ij}(q), \quad (16.157)$$

где

$$D_{ij}(x-x')^{\text{tr}} = -i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q_0) \delta(q^2) = (e^{-iq(x-x')} - e^{iq(x-x')}) \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|q|^2} \right).$$

При выводе общего выражения для спектральной функции $\pi_{ij}(q)$ мы, следуя Эвансу и Фултону [62], рассмотрим вначале градиентно-инвариантный лоренцев тензор

$$J_{\mu\nu}(q) = \sum_n \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | j_\nu(0) | 0 \rangle (2\pi)^3 \delta^4(p_n - q). \quad (16.158)$$

Операторы тока в (16.158), которые являются источниками электромагнитного поля, удовлетворяют дифференциальному закону сохранения

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0 \quad (16.159)$$

и являются, таким образом, градиентно-инвариантными 4-векторами. Например, для дираковского электрона

$$j_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \langle 0 | \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) | 0 \rangle. \quad (16.160)$$

Из (16.158) следует, что $J_{\mu\nu}$ есть лоренцев тензор второго ранга и не меняется при градиентном преобразовании, которое сопутствует лоренцеву преобразованию, отвечающему переходу к новой системе отсчета. Уравнение непрерывности накладывает дальнейшие ограничения на вид тензора $J_{\mu\nu}(q)$. Из (16.159) следует, что

$$p_n^\alpha \langle 0 | j_\alpha(x) | n \rangle = 0. \quad (16.161)$$

Поэтому

$$q^\mu J_{\mu\nu} = q^\nu J_{\mu\nu} = 0. \quad (16.162)$$

Таким образом, 4-дивергенция тензора $J_{\mu\nu}(q)$ равна нулю. Используя те же аргументы, с помощью которых мы определим структуру тензора поляризации вакуума (8.16), получаем

$$J_{\mu\nu}(q) = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) J(q^2). \quad (16.163)$$

Для того чтобы связать $J(q^2)$ с интересующей нас спектральной функцией $\rho_{ij}(q)$, достаточно вычислить $J_{\mu\nu}(q)$ в данной лоренцевой системе, используя при этом для потенциалов калибровку излучения. Согласно определению $\rho_{ij}(q)$ в (16.152) и волновому уравнению (16.141), достаточно рассмотреть только поперечную часть электромагнитного тока:

$$\begin{aligned} e_0^2 \sum_n \langle 0 | j_i^{\text{tr}}(0) | n \rangle \langle n | j_j^{\text{tr}}(0) | 0 \rangle (2\pi)^3 \delta^4(p_n - q) = \\ = (q^2)^2 \rho_{ij}(q) = (q^2)^2 \pi_{ij}(q). \end{aligned} \quad (16.164)$$

Последнее равенство в (16.164) следует из (16.154) и формулы $x^2 \delta(x) = 0$.

Вид тензора $\pi_{ij}(q)$ можно найти из условия инвариантности при трехмерных вращениях

$$\pi_{ij}(q) = \delta_{ij} \pi(q_0, |\mathbf{q}|^2) - \frac{q_i q_j}{|\mathbf{q}|^2} \bar{\pi}(q_0, |\mathbf{q}|^2). \quad (16.165)$$

Поскольку

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^{\text{tr}}(x) = 0,$$

то

$$q_i \pi_{ij}(q) = q_j \pi_{ij}(q) = 0$$

и, следовательно,

$$\pi_{ij}(q) = \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|\mathbf{q}|^2} \right) \pi(q_0, |\mathbf{q}|^2). \quad (16.166)$$

Заметим далее, что *поперечные* части $\pi_{ij}(q)$ и $J_{\mu\nu}(q)$ простым образом связаны между собой. Действительно, рассмотрим в выбранной системе координат две величины

$$\varepsilon_i \varepsilon_j \pi_{ij}(q) \quad \text{и} \quad \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu J^{\mu\nu}(q),$$

где

$$\varepsilon_\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{q} = -\varepsilon_\mu q^\mu = 0. \quad (16.167)$$

Так как, согласно (16.141),

$$e_0 \langle 0 | \mathbf{j}^{\text{tr}}(x) | n \rangle = e_0 \langle 0 | \mathbf{j}(x) | n \rangle - \langle 0 | \nabla \dot{\Phi}(x) | n \rangle, \quad (16.168)$$

то

$$\varepsilon_i \langle 0 | j_i^{\text{tr}}(0) | n \rangle = \varepsilon_i \langle 0 | j_i(0) | n \rangle$$

Для любого состояния $|n\rangle$, удовлетворяющего условию

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_n = 0,$$

Интересующие нас матричные элементы удовлетворяют именно этому условию. В результате, используя (16.158), (16.164) и (16.168), находим искомую связь между $\pi_{ij}(q)$ и $J_{\mu\nu}(q)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \varepsilon_j \pi_{ij}(q) &= \frac{e_0^2}{q^4} \sum_n \langle 0 | \varepsilon \cdot \mathbf{j}^{\text{tr}}(0) | n \rangle \langle n | \varepsilon \cdot \mathbf{j}^{\text{tr}}(0) | 0 \rangle (2\pi)^3 \delta^4(q - p_n) = \\ &= \frac{e_0^2}{q^4} \sum_n \langle 0 | \varepsilon \cdot \mathbf{j}(0) | n \rangle \langle n | \varepsilon \cdot \mathbf{j}(0) | 0 \rangle (2\pi)^3 \delta^4(q - p_n) = \frac{e_0^2}{q^4} \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu J^{\mu\nu}(q). \end{aligned} \quad (16.169)$$

Сравнив с общим видом $J_{\mu\nu}$ и ρ_{ij} , получим

$$\pi_{ij}(q) = \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|\mathbf{q}|^2} \right) \pi(q_0, |\mathbf{q}|^2) = e_0^2 \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|\mathbf{q}|^2} \right) \frac{J(q^2)}{q^4}. \quad (16.170)$$

Таким образом мы выразили тензор $\pi_{ij}(q)$ через скалярную, градиентно-инвариантную функцию $J(q^2)$. Подставим далее (16.170) в (16.157), тогда, используя равенство

$$J(q^2) = \int dM^2 \delta(q^2 - M^2) J(M^2)$$

и вводя поперечную функцию Δ_{ij}^{tr} с произвольной массой M :

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}(x - x', M^2)^{\text{tr}} &= \\ &= -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) = \left(\delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \right) (e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}), \end{aligned} \quad (16.171)$$

приходим к компактному виду спектрального представления

$$D'_{ij}(x - x')^{\text{tr}} = Z_3 D_{ij}(x - x')^{\text{tr}} + \int dM^2 \Delta_{ij}(x - x', M^2)^{\text{tr}} \Pi(M^2), \quad (16.172)$$

где

$$\Pi(M^2) = e_0^2 \frac{J(M^2)}{M^4}. \quad (16.173)$$

В импульсном пространстве фейнмановский пропагатор равен

$$D'_{Fij}(q)^{\text{tr}} = \left(\frac{Z_3}{q^2 + i\varepsilon} + \int_0^\infty \frac{dM^2 \Pi(M^2)}{q^2 - M^2 + i\varepsilon} \right) \left\{ \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|\mathbf{q}|^2} \right\}.$$

Для того чтобы, как в (16.42), выразить константу Z_3 через интеграл от спектральной функции $\Pi(M^2)$, достаточно вычислить

производную в (16.171) при $t = t'$ и использовать коммутаторы (16.142) и определение $iD'_{ij}(x, x')^{\text{tr}}$, в результате находим

$$1 = Z_3 + \int_{M_1^2}^{\infty} dM^2 \Pi(M^2). \quad (16.174)$$

Инвариантность величины Z_3 при градиентных и лоренцевых преобразованиях теперь очевидна. Из (16.169) и (16.170) следует, что весовая функция $\Pi(M^2)$ всюду неотрицательна

$$0 \leq \varepsilon_i \varepsilon_j \pi_{ij}(q) = \frac{e_0^2 J(q^2)}{q^4} = \pi(q^2).$$

Поэтому

$$0 \leq Z_3 = 1 - \int_{M_1^2}^{\infty} dM^2 \Pi(M^2) < 1. \quad (16.175)$$

Таким образом, вероятность образования фотона полем $\mathbf{A}(x)$ из вакуума заключена в пределах между нулем и единицей в полном соответствии с результатами, полученными для бозонных и фермионных полей в отсутствие электромагнитной связи¹⁾.

§ 113. Связь спина со статистикой

Обсудим теперь, используя спектральные представления, полученные в этой главе, некоторые вопросы, касающиеся связи спина со статистикой [51], отмеченные ранее в гл. 15. Мы рассмотрим только поля со спином 0 и 1/2. В локальной, лоренц-инвариантной теории поля, обладающей единственным основным состоянием, существует теорема, устанавливающая, что поля с целым спином должны квантоваться как бозе-поля, а поля полужелым спином — как ферми-поля, при условии, что выполнено условие микропричинности. Последнее означает, что локальные плотности наблюдаемых операторных величин

$$\mathcal{O} \equiv \int d^3x \mathcal{O}(\mathbf{x}, t)$$

не интерферируют и поэтому должны коммутировать для пространственно-подобных интервалов:

$$[\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)] \equiv 0 \quad \text{для} \quad (x - y)^2 < 0. \quad (16.176)$$

Покажем, что это условие несовместимо с квантованием полей Клейна — Гордона с антикоммутаторами и дираковских полей с коммутаторами.

¹⁾ Обсуждение случая $Z_3 = 0$ дано в работе [63].

Наблюдаемые в этих теориях, такие как заряд и плотность тока, в общем случае представляют квадратичные формы полевых амплитуд. С помощью простых алгебраических выкладок нетрудно убедиться, что (16.176) справедливо для билинейных форм

$$\mathcal{O}(x) \equiv \varphi_a(x) \varphi_b(x)$$

при условии, что поля коммутируют или антикоммутируют для пространственно-временных интервалов:

$$[\varphi_r(x), \varphi_s(y)] = 0, \quad (x - y)^2 < 0 \quad (16.177a)$$

или

$$\{\varphi_r(x), \varphi_s(y)\} = 0, \quad (x - y)^2 < 0. \quad (16.177b)$$

Здесь $\varphi_r(x)$ и $\varphi_s(y)$ означают различные комбинации клейн-гордоновских полей φ и (или) φ^* или различные спинорные компоненты ψ и $\bar{\psi}$ дираковских полей.

Для взаимодействующего поля Клейна — Гордона соотношение (16.177a) выполняется, если рассматриваемая теория лоренц-инвариантна и квантуется с коммутаторами. Использование же антикоммутирующих при квантовании немедленно ведет к противоречию. Действительно, рассмотрим вакуумное среднее

$$\langle 0 | \{\varphi_r(x), \varphi_s(y)\} | 0 \rangle \equiv \Delta'_1(x - y). \quad (16.178)$$

Используя ту же технику, которую мы применяли при выводе выражения (16.32), получим

$$\Delta'_1(x - y) = Z \Delta_1(x - y; m^2) + \int_{m_1^2} d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \Delta_1(x - y; \sigma^2),$$

где

$$\Delta_1(x - y) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (e^{-ik(x-y)} + e^{ik(x-y)}).$$

Функция $\Delta_1(x - y)$ по-прежнему удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, но не обращается в нуль для пространственно-подобных интервалов $(x - y)^2 < 0$. В самом деле, для интервалов $-(x - y)^2 > \frac{1}{m^2}$

$$\Delta_1(x, t, m^2) \sim \frac{\exp(-m\sqrt{|x|^2 - t^2})}{|x|^2 - t^2}.$$

Отсюда для больших x

$$\Delta'_1(x, 0) \sim \frac{Ze^{-m|x|}}{|x|^2} + \int_{m_1^2}^{\infty} d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \frac{e^{-\sigma|x|}}{|x|^2}.$$

Поэтому выражение (16.177b) не может быть справедливым и условие микропричинности нарушается. Этим и устанавливается связь спина со статистикой.

При попытке квантовать фермиевское поле с коммутаторами происходит то же самое. Изменение относительного знака двух членов, отвечающих различному порядку операторов, приводит к замене функции Δ в спектральном представлении (16.111) на функцию Δ_1 ; в результате снова возникает противоречие с принципом микропричинности. Укажем, что приведенные соображения носят весьма общий характер и применимы к полям с произвольным спином, поскольку последние всегда могут быть построены из произведения полей со спином $1/2$.

В заключение имеет смысл отметить, что при квантовании, скажем, бозе-полей с антикоммутаторами, нарушение принципа микропричинности происходит на расстояниях порядка комптоновской длины волны частицы $\sim 10^{-13}$ см. Поэтому экспериментальное согласие с принципом микропричинности — одним из наиболее важных следствий локальной теории поля — указывает на применимость концепции локального поля, по крайней мере вплоть до расстояний, сравнимых с комптоновской длиной волны элементарных частиц.

ЗАДАЧИ

1. Рассмотреть выражение

$$\int d^4x \int d^4y f_a^*(x) f_b^*(y) (\square_x + m^2) (\square_y + m^2) T(\varphi(x) \varphi(y))$$

и показать, изменяя порядок интегрирования, что

$$[\Phi_{\text{in}}(x), \Phi_{\text{in}}(y)] = [\Phi_{\text{out}}(x), \Phi_{\text{out}}(y)].$$

Рассмотреть затем тот же самый интегральный оператор, содержащий произведение трех полей $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$ и показать, что

$$[[\Phi_{\text{in}}(x), \Phi_{\text{in}}(y)], \varphi(z)] = 0.$$

(Обоснование возможности изменения порядка интегрирования см. в работе [37].) Аналогичным образом доказать соотношение (16.121).

2. Показать, что S -матрица (6.56) может быть непосредственно выражена через фейнмановский пропагатор S'_F по аналогии с (16.82).

3. Предполагая сдвиг массы δm^2 в скалярной теории конечным, выразить его через спектральную весовую функцию $\rho(p^2)$ в (16.27).

4. Показать, что $S = \theta_{\text{in}}^{-1} \theta$, где $\theta = \mathcal{FCS}$.

5. Показать, что $\langle 0 | [\Phi_{\text{in}}(x), \Phi_{\text{out}}(y)] | 0 \rangle = +i\Delta(x - y, m)$.

6. На примере фермионных и неэрмитовых скалярных полей проверить выполнение условий 1—5 для S -матрицы, сформулированных в § 107.

7. Доказать неравенство 3 в формулах (16.113).

8. Построить спектральное представление для электрона в квантовой электродинамике и обсудить свойства спектральной функции.

9. Доказать (16.115).

Указание. См. § 9 первого тома.

10. Установить связь спина со статистикой для фермионных полей, используя при этом закон сохранения четности (который подразумевается в (16.111)).

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 114. Введение

В настоящее время известно два общих подхода к вычислению амплитуд перехода и матричных элементов, которые позволяют сравнить предсказания квантовой теории поля с экспериментом. Первый из них основывается на разложении по степеням константы связи. В этом методе точные поля $\varphi(x)$ выражаются через in-поля $\varphi_{\text{in}}(x)$, временная зависимость которых определяется гамильтонианом свободных частиц. При этом мы снова приходим к тем же диаграммам и фейнмановским правилам (а вместе с ними к расходимостям), которые рассматривались в гл. 7, 8, 9 в формализме одночастичной теории. Вторым подходом основывается на редукционной технике, с помощью которой вакуумное среднее от коммутаторов выражается через вакуумное среднее от произведения трех и более полей, после чего можно применить аппарат теории аналитических функций. При этом не используется малость константы связи, которая играет важную роль при построении теории возмущений. Этот метод мы детально обсудим в следующей главе; в настоящей же главе рассмотрим ковариантную теорию возмущений.

Наша задача заключается в том, чтобы записать амплитуды перехода и матричные элементы в виде (бесконечной) суммы по степеням константы связи и установить правила, с помощью которых может быть вычислен каждый отдельный член в этой сумме. Для этого следует выразить точное поле $\varphi(x)$ через асимптотические поля $\varphi_{\text{in}}(x)$, свойства которых известны. Фундаментальным предположением, на котором основывается вся теория возмущений, является предположение о том, что спектр точных состояний находится во взаимно однозначном соответствии со спектром невозмущенных состояний. В частности, предполагается, что для каждого поля $\varphi(x)$ в лагранжиане существует свое in-поле $\varphi_{\text{in}}(x)$. Аналогичное условие имеет место и

в нерелятивистской потенциальной теории: борновский ряд для амплитуды рассеяния может расходиться, если в потенциале имеется связанное состояние.

Представляется весьма сомнительным, чтобы теория возмущений была применима в теории сильных взаимодействий. Если быть оптимистом, то можно предположить, что ряд теории возмущений сходится в квантовой электродинамике, поскольку в этом случае параметр разложения $\alpha = 1/137$. Напомним, что в гл. 7, 8 мы обнаружили впечатляющее количественное согласие с экспериментом уже первых приближений теории возмущений в электродинамике. Применимость же теории возмущений к слабым взаимодействиям остается в настоящее время весьма проблематичной.

Исходным пунктом для разложения полевых операторов в терминах in-полей, являются интегральные уравнения вида (16.14), (16.84) и (16.146), в которых оператор тока $j(x)$ следует выразить через in-поля. Указанная процедура не приводит, однако, непосредственно к фейнмановским диаграммам [64], поскольку вместо $\Delta_F(x)$ при этом появляется функция $\Delta_{\text{ret}}(x)$. Поэтому для вывода фейнмановских правил непосредственно из теории поля мы, следуя Дайсону [65, 66], сформулируем теорию возмущений, основанную на формализме U -матрицы.

§ 115. U -матрица

Одновременные перестановочные соотношения для взаимодействующих полей $\phi(x, t)$ и сопряженных импульсов $\pi(x, t)$ совпадают¹⁾ с соответствующими величинами для in-полей²⁾ $\phi_{\text{in}}(x, t)$ и $\pi_{\text{in}}(x, t)$. In-поля образуют полный операторный набор, поскольку, согласно нашему предположению, последовательным действием на вакуум операторами ϕ или ϕ_{in} можно построить полный набор состояний. Если предположить далее, что поля ϕ и ϕ_{in} находятся во взаимно однозначном соответствии, то связь между ними выражается³⁾ с помощью унитарного

¹⁾ Мы не рассматриваем здесь случай связей с производными. Примером таких теорий являются взаимодействия заряженного бозона или векторной частицы с электромагнитным полем. Обсуждение теории возмущений в этом случае см. в [67—69].

²⁾ Здесь $\phi(x)$ означает бозонное или фермионное поле. Специфические свойства поля, такие, как спин и изоспин, не играют сколько-нибудь существенную роль в нашем рассмотрении.

³⁾ Хотя это утверждение представляет известную теорему обычной квантовой механики, ее нельзя доказать для систем с бесконечным числом степеней свободы (см. [70, 71] и задачу 2 этой главы). Здесь мы просто предположим существование оператора $U(t)$.

оператора ¹⁾ $U(t)$:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = U^{-1}(t) \varphi_{in}(\mathbf{x}, t) U(t), \quad (17.1)$$

$$\pi(\mathbf{x}, t) = U^{-1}(t) \pi_{in}(\mathbf{x}, t) U(t). \quad (17.2)$$

Поскольку уравнения движения для $\varphi(x)$ и $\varphi_{in}(x)$ известны, нетрудно получить уравнение, описывающее изменение оператора $U(t)$ во времени. Это уравнение следует, в частности, из перестановочных соотношений, которым удовлетворяют in-поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{in}(x)}{\partial t} &= i[H_{in}(\varphi_{in}, \pi_{in}), \varphi_{in}], \\ \frac{\partial \pi_{in}(x)}{\partial t} &= i[H_{in}(\varphi_{in}, \pi_{in}), \pi_{in}]. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Здесь $H_{in}(\varphi_{in}, \pi_{in})$ — гамильтониан свободных полей, содержащий физическую массу m . Для точных гейзенберговских полей трансляционная инвариантность означает, что

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial t} = i[H(\varphi, \pi), \varphi(x)] \quad (17.4)$$

и

$$\frac{\partial \pi(x)}{\partial t} = i[H(\varphi, \pi), \pi(x)]. \quad (17.5)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{in}(x) &= \frac{\partial}{\partial t} U(t) \varphi(\mathbf{x}, t) U^{-1}(t) = \\ &= [\dot{U}(t) U^{-1}(t), \varphi_{in}(x)] + i[H(\varphi_{in}, \pi_{in}), \varphi_{in}(x)] = \\ &= \dot{\varphi}_{in}(x) + [\dot{U}U^{-1} + iH_I(\varphi_{in}, \pi_{in}), \varphi_{in}(x)] \end{aligned} \quad (17.6)$$

и

$$\dot{\pi}_{in}(x) = \dot{\pi}_{in}(x) + [\dot{U}U^{-1} + iH_I(\varphi_{in}, \pi_{in}), \pi_{in}(x)],$$

где

$$H_I(\varphi_{in}, \pi_{in}) = H(\varphi_{in}, \pi_{in}) - H_{in}(\varphi_{in}, \pi_{in}) \equiv H_I(t) \quad (17.7)$$

есть гамильтониан взаимодействия, выраженный через in-поля. В (17.7) мы явно выписали зависимость гамильтониана от вре-

¹⁾ Оператор U может быть ковариантно определен на произвольной пространственноподобной поверхности, что не приводит, однако, к каким-либо преимуществам (см. [72, 73]).

мени t . Напомним, что $H_I(t)$ содержит массовый контрчлен (см. гл. 7) ¹⁾. Из (17.6) получаем

$$i\dot{U}(t)U^{-1}(t) = H_I(t) + E_0(t),$$

где $E_0(t)$ коммутирует с $\varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ и $\pi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ и является, таким образом, c -числом. Определив

$$H'_I(t) = H_I(t) + E_0(t),$$

находим уравнение, определяющее U :

$$i \frac{\partial U(t)}{\partial t} = H'_I(t) U(t). \quad (17.8)$$

Решение этого уравнения в терминах in-полей представляет основу для разложения в ряд теории возмущений. С помощью оператора U можно выразить вакуумное среднее от произведения полевых амплитуд, через которые выражаются S -матричные элементы, в виде бесконечного ряда, содержащего in-поля. Последние же могут быть вычислены в явном виде, поскольку свойства свободных полей нам известны.

Продолжим рассмотрение и выпишем итерационный ряд для (17.8). При этом нужно задать начальное условие, которое удобно ввести с помощью оператора

$$U(t, t') \equiv U(t) U^{-1}(t'), \quad (17.9)$$

который также есть решение для (17.8). При $t = t'$ $U(t, t')$ равен единичному оператору ²⁾

$$i \frac{\partial U(t, t')}{\partial t} = H'_I(t) U(t, t'), \quad (17.10)$$

$$U(t, t) = 1.$$

Уравнение (17.10) уже встречалось при рассмотрении нестационарной теории возмущений в нерелятивистской квантовой

¹⁾ Для модели самодействующего скалярного поля

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} : \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} - \mu_0^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} \lambda_0 \varphi^4 \right] :$$

имеем

$$\mathcal{L}_{\text{in}}(\varphi_{\text{in}}) = \frac{1}{2} : \left[\frac{\partial \varphi_{\text{in}}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi_{\text{in}}}{\partial x^\mu} - \mu^2 \varphi_{\text{in}}^2 \right] :$$

и

$$\mathcal{L}_I(\varphi_{\text{in}}) = -\mathcal{H}_I(\varphi_{\text{in}}) = \frac{1}{2} : \left[\frac{1}{2} \lambda_0 \varphi_{\text{in}}^4 + (\mu^2 - \mu_0^2) \varphi_{\text{in}}^2 \right] :.$$

Для фермионных полей массовый контрчлен в $\mathcal{H}_I(\varphi_{\text{in}})$ имеет вид

$$(m_0 - m) : \bar{\psi}_{\text{in}} \psi_{\text{in}} :.$$

²⁾ В дальнейшем будем писать $H_I(t)$ вместо $H_I(\varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t))$.

механике, поэтому решение этого уравнения нам уже известно. Записав (17.10) в форме

$$U(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t dt_1 H'_I(t_1) U(t_1, t'),$$

получаем итерационное разложение для $U(t, t')$:

$$\begin{aligned} U(t, t') = & 1 - i \int_{t'}^t dt_1 H'_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t'}^t dt_1 H'_I(t_1) \int_{t'}^{t_1} dt_2 H'_I(t_2) + \dots \\ & \dots + (-i)^n \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n H'_I(t_1) \dots H'_I(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (17.11)$$

Поскольку $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$, каждый член в (17.11) хронологически упорядочен. Поэтому вместо $H'_I(t_1) \dots H'_I(t_n)$ можно написать $T(H'_I(t_1) \dots H'_I(t_n))$, в результате имеем

$$\begin{aligned} U(t, t') = & \\ = & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n T(H'_I(t_1) \dots H'_I(t_n)). \end{aligned} \quad (17.12)$$

Хронологическое произведение симметрично относительно перестановки аргументов t_1, \dots, t_n , поскольку каждая такая перестановка включает четное число перестановок фермионных полей и, следовательно, четное число знаков минус. Это свойство симметрии подынтегрального выражения можно использовать, чтобы промежуток интегрирования в каждом интеграле распространить вплоть до t . Для $n = 2$

$$\begin{aligned} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 (T(H'_I(t_1) H'_I(t_2))) &= \int_{t'}^t dt_2 \int_{t'}^{t_2} dt_1 T(H'_I(t_1) H'_I(t_2)) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^t dt_2 T(H'_I(t_1) H'_I(t_2)). \end{aligned}$$

Для произвольного n можно аналогично выполнить $n!$ перестановок n индексов и распространить область интегрирования на n -мерный куб. Так как каждый из $n!$ членов вносит равный вклад, то

$$\begin{aligned} U(t, t') = & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \dots \int_{t'}^t dt_n T(H'_I(t_1) \dots H'_I(t_n)) \equiv \\ \equiv & T \left(\exp \left[-i \int_{t'}^t H'_I(t) dt \right] \right) = T \exp \left[-i \int_{t'}^t d^4x \mathcal{H}_I(\varphi_{1n}(x)) \right], \end{aligned} \quad (17.13)$$

где T -экспонента означает символическую запись суммы упорядоченных по времени членов, с которой она совпадает при разложении по степеням константы связи.

Отметим полезное мультипликативное правило, следующее либо из определения (17.9), либо из (17.13)

$$U(t, t') = U(t, t'') U(t'', t'). \quad (17.14)$$

В частности,

$$U(t, t') = U^{-1}(t', t). \quad (17.15)$$

§ 116. Теория возмущений для τ -функций и S -матрица

Используя (17.1) и (17.13), можно выразить S -матричные элементы через вакуумные средние от in -полей. Из предыдущей главы известно, что S -матричные элементы выражаются через одну фундаментальную величину — вакуумное среднее от T -произведения гейзенберговских полей $\varphi(x)$:

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | 0 \rangle. \quad (17.16)$$

Из (17.1) и (17.9) получаем

$$\tau(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \langle 0 | T(U^{-1}(t_1) \varphi_{\text{in}}(x_1) U(t_1, t_2) \varphi_{\text{in}}(x_2) U(t_2, t_3) \dots$$

$$\dots U(t_{n-1}, t_n) \varphi_{\text{in}}(x_n) U(t_n)) | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | T(U^{-1}(t) U(t, t_1) \varphi_{\text{in}}(x_1) U(t_1, t_2) \dots$$

$$\dots U(t_{n-1}, t_n) \varphi_{\text{in}}(x_n) U(t_n, -t) U(-t)) | 0 \rangle,$$

где аргумент времени t мы в дальнейшем устремим к ∞ . В этом пределе t больше, чем все t_i , а $-t$ меньше, поэтому $U^{-1}(t)$ и $U(t)$ можно вынести из хронологического произведения. В результате находим

$$\tau(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \langle 0 | U^{-1}(t) T \left(\varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int_{-t}^t H'_I(t') dt' \right] \right) U(-t) | 0 \rangle,$$

$$(17.17)$$

где использована символическая запись (17.13).

Уравнение (17.17) выражает τ -функции и, следовательно, S -матричные элементы через in -поля. Зависимость от $U^{-1}(t)$ и $U(-t)$ на самом деле исчезает, поскольку вакуум является собственным состоянием этих операторов при $t \rightarrow \infty$. Действительно, рассмотрим произвольное состояние $|\alpha p \text{ in}\rangle$, содержащее

частицу p и произвольный набор α других частиц. Пусть p — клейн-гордоновская частица; тогда из (16.9) и (16.73) следует

$$\langle \rho \alpha \text{ in} | U(-t) | 0 \rangle = \langle \alpha \text{ in} | a_{\text{in}}(p) U(-t) | 0 \rangle =$$

$$= -i \int d^3x f_p^*(\mathbf{x}, -t') \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial t'} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t'} \right) \langle \alpha \text{ in} | \varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}, -t') U(-t) | 0 \rangle. \quad (17.18)$$

Используя (16.126) и (16.145), получаем аналогичное выражение в случае фермионов и фотонов. Далее, в силу (17.1) выражение (17.18) приобретает вид

$$\langle \rho \alpha \text{ in} | U(-t) | 0 \rangle =$$

$$= -i \int d^3x f_p^*(\mathbf{x}, -t') \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \alpha \text{ in} | U(-t') \varphi(\mathbf{x}, -t') U^{-1}(-t') U(-t) | 0 \rangle,$$

где

$$\overleftrightarrow{\partial}_0 \equiv \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial t'} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t'}.$$

Согласно асимптотическому условию (16.20) при $t = t' \rightarrow \infty$ получаем

$$\sqrt{Z_3} \langle \alpha \text{ in} | U(-t) a_{\text{in}}(p) | 0 \rangle + i \int d^3x f_p^*(\mathbf{x}, -t) \times$$

$$\times \langle \alpha \text{ in} | \dot{U}(-t) \varphi(\mathbf{x}, -t) + U(-t) \varphi(\mathbf{x}, -t) \dot{U}^{-1}(-t) U(-t) | 0 \rangle. \quad (17.19)$$

Очевидно, что

$$a_{\text{in}}(p) | 0 \rangle = 0,$$

поскольку вакуумное состояние не содержит in-частиц. Поэтому первый член в (17.19) равен нулю. Простые выкладки показывают, что и второй член в этом выражении также обращается в нуль:

$$\dot{U} \varphi + U \varphi \dot{U}^{-1} U = \dot{U} U^{-1} \varphi_{\text{in}} U + \varphi_{\text{in}} U \dot{U}^{-1} U =$$

$$= [\dot{U} U^{-1}, \varphi_{\text{in}}] U = -i [H_I, \varphi_{\text{in}}] U = 0.$$

Здесь мы использовали (17.1), (17.8) и предположение о том, что H_I не содержит связей с производными; общий аргумент t опущен. Поэтому

$$\langle \rho \alpha \text{ in} | U(-t) | 0 \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

для всех in-состояний αp , содержащих частицу. Отсюда

$$U(-t) | 0 \rangle = \lambda_- | 0 \rangle \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (17.20)$$

Аналогичным образом убеждаемся в том, что

$$U(t) | 0 \rangle = \lambda_+ | 0 \rangle \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Константы λ_- , λ_+ входят в (17.17) в виде произведения $\lambda_- \lambda_+^*$. В пределе $t \rightarrow \infty$ это произведение равно

$$\begin{aligned} \lambda_- \lambda_+^* &= \langle 0 | U^{-1}(t) | 0 \rangle \langle 0 | U(-t) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | U(-t) U^{-1}(t) | 0 \rangle = \langle 0 | U(-t, t) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | T \left(\exp \left[i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right] \right) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | T \left(\exp \left[-i \int_{-t}^t dt' H_I'(t') \right] \right) | 0 \rangle^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, τ -функция (17.17) может быть записана в виде $\tau(x_1, \dots, x_n) =$

$$\frac{\langle 0 | T \left(\varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int_{-t}^t dt' H_I'(t') \right] \right) | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left(\exp \left[-i \int_{-t}^t dt' H_I'(t') \right] \right) | 0 \rangle}, \quad (17.21)$$

где $t \rightarrow \infty$. Наконец, сократим c -числовой множитель

$$\exp \left[-i \int_{-t}^t dt' E_0(t') \right],$$

заменяв $H_I'(t)$ на $H_I(t)$, и возьмем предел при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \tau(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{\langle 0 | T \left(\varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right] \right) | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left(\exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right] \right) | 0 \rangle} = \\ &= \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 y_1 \dots d^4 y_m \times \right. \\ &\times \langle 0 | T \left(\varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_n) \mathcal{H}_I(\varphi_{\text{in}}(y_1)) \dots \mathcal{H}_I(\varphi_{\text{in}}(y_m)) \right) | 0 \rangle \times \\ &\times \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 y_1 \dots d^4 y_m \times \right. \\ &\times \left. \langle 0 | T \left(\mathcal{H}_I(\varphi_{\text{in}}(y_1)) \dots \mathcal{H}_I(\varphi_{\text{in}}(y_m)) \right) | 0 \rangle \right\}^{-1}. \quad (17.22) \end{aligned}$$

Уравнение (17.22) представляет фундаментальный результат. S -матрица в уравнениях, например, (16.81) или (16.139) вначале выражается через τ -функции, а затем, согласно (17.22), в виде ряда, целиком содержащего только in -операторы. Теперь диаграммная интерпретация уравнения (17.22) и вывод фейнмановских правил вычисления представляют чисто алгебраическую задачу.

§ 117. Теорема Вика

Для того чтобы представить каждый член в (17.22) в виде, удобном для вычисления, переставим каждый оператор уничтожения шаг за шагом направо, а каждый оператор рождения налево; при этом в конце концов мы приходим к выражению, в котором операторы рождения и уничтожения действуют непосредственно на вакуумное состояние и дают в результате нуль. Указанная процедура нормального упорядочивания хронологического произведения, из которой непосредственно получаются фейнмановские амплитуды, была впервые выполнена в 1949 г. Дайсоном [65, 66], а позднее Виком [74], которые сформулировали и доказали следующую теорему:

$$\begin{aligned}
 T(\Phi_{\text{in}}(x_1) \dots \Phi_{\text{in}}(x_n)) = & \Phi_{\text{in}}(x_1) \dots \Phi_{\text{in}}(x_n) : + \\
 & + [\langle 0 | T(\Phi_{\text{in}}(x_1) \Phi_{\text{in}}(x_2)) | 0 \rangle : \Phi_{\text{in}}(x_3) \dots \Phi_{\text{in}}(x_n) : + \\
 & \quad + \text{перестановки}] + \\
 & + [\langle 0 | T(\Phi_{\text{in}}(x_1) \Phi_{\text{in}}(x_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\Phi_{\text{in}}(x_3) \Phi_{\text{in}}(x_4)) | 0 \rangle \times \\
 & \quad \times : \Phi_{\text{in}}(x_5) \dots \Phi_{\text{in}}(x_n) : + \text{перестановки}] + \dots + \\
 + & \left\{ \begin{aligned} & [\langle 0 | T(\Phi_{\text{in}}(x_1) \Phi_{\text{in}}(x_2)) | 0 \rangle \dots \langle 0 | T(\Phi_{\text{in}}(x_{n-1}) \Phi_{\text{in}}(x_n)) | 0 \rangle + \\ & \quad + \text{перестановки}], \quad (n \text{ четно}), \\ & [\langle 0 | T(\Phi_{\text{in}}(x_1) \Phi_{\text{in}}(x_2)) | 0 \rangle \dots \\ & \quad \dots \langle 0 | T(\Phi_{\text{in}}(x_{n-2}) \Phi_{\text{in}}(x_{n-1}) | 0 \rangle \Phi_{\text{in}}(x_n) + \\ & \quad + \text{перестановки}], \quad (n \text{ нечетно}). \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{17.23}$$

Вакуумные средние, или *свертки* полей в (17.23) возникают при (анти) коммутации полей, необходимой для приведения произведения полей к нормальному порядку множителей. Как мы убедились при рассмотрении свободных полей, эти свертки представляют теоретико-полевой аналог фейнмановских амплитуд. Напомним в этой связи определение нормального

произведения операторов:

$$: \Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n) :.$$

Разложим каждый оператор на положительно- и отрицательно-частотную части

$$\Phi_{in}(x) = \Phi_{in}^{(+)}(x) + \Phi_{in}^{(-)}(x), \quad (17.24)$$

где $\Phi_{in}^{(+)}(x)$ содержит операторы уничтожения, а $\Phi_{in}^{(-)}$ — операторы рождения. Затем переставим операторы так, чтобы все операторы рождения оказались слева от операторов уничтожения. Учтем также, что при каждой перестановке ферми-полей возникает знак минус; тогда получим:

$$: \Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n) : = \sum_{A, B} \delta_p \prod_{i \in B} \Phi_{in}^{(-)}(x_i) \prod_{j \in A} \Phi_{in}^{(+)}(x_j), \quad (17.25)$$

где сумма вычисляется по всем наборам A и B n индексов (причем каждый индекс входит в сумму один раз), а δ_p означает четность перестановки ферми-полей. Вакуумное среднее от нормального произведения всегда равно нулю, поскольку

$$\Phi_{in}^{(+)}|0\rangle = \langle 0|\Phi_{in}^{(-)} = 0. \quad (17.26)$$

Именно это свойство оказывается весьма полезным при рассмотрении дайсоновского упорядочивания хронологического произведения. В силу (17.22) при вычислении S -матричных элементов нужно рассматривать только вакуумные средние. Из (17.23) следует, что

$$1. \text{ Если } n \text{ нечетно, то } \langle 0|T(\Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n))|0\rangle = 0.$$

$$2. \text{ Если } n \text{ четно, то}$$

$$\begin{aligned} & \langle 0|T(\Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n))|0\rangle = \\ & = \sum_{\text{перестановки}} \delta_p \langle 0|T(\Phi_{in}(x_1)\Phi_{in}(x_2))|0\rangle \dots \times \\ & \quad \times \langle 0|T(\Phi_{in}(x_{n-1})\Phi_{in}(x_n))|0\rangle. \end{aligned} \quad (17.27)$$

Последнее равенство и есть требуемый результат. Оно выражает S -матрицу через известные фейнмановские пропагаторы свободных частиц с физическим значением массы.

Теорема Вика, из которой следует (17.27), может быть доказана по индукции. Выражение (17.23), несомненно, справедливо для $n = 1$; проверим его справедливость для $n = 2$. Пусть Φ_{in} — эрмитово бозонное поле. Имеем

$$T(\Phi_{in}(x_1)\Phi_{in}(x_2)) = : \Phi_{in}(x_1)\Phi_{in}(x_2) : + c\text{-число,}$$

так как хронологическое упорядочивание отличается от нормального лишь порядком следования операторов рождения и уничтожения, причем коммутаторы, возникающие при перестановке

операторов, представляют собой c -числа. Взяв вакуумное среднее, получим

$$T(\Phi_{in}(x_1)\Phi_{in}(x_2)) = \\ = : \Phi_{in}(x_1)\Phi_{in}(x_2) : + \langle 0 | T(\Phi_{in}(x_1)\Phi_{in}(x_2)) | 0 \rangle, \quad (17.28)$$

поскольку вакуумное среднее от нормального произведения операторов равно нулю. Легко видеть, что аналогичный результат получается и для фермиевских полей:

$$T(\Psi_{in}(x_1)\bar{\Psi}_{in}(x_2)) = : \Psi_{in}(x_1)\bar{\Psi}_{in}(x_2) : + \langle 0 | T(\Psi_{in}(x_1)\bar{\Psi}_{in}(x_2)) | 0 \rangle. \quad (17.29)$$

Таким образом, (17.23) справедливо для $n = 2$. Предположим теперь, что (17.23) выполняется для n множителей, и покажем, что отсюда следует его справедливость для $n + 1$ множителей. С этой целью рассмотрим выражение

$$T(\Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_{n+1})).$$

Пусть для определенности t_{n+1} меньше t_1, \dots, t_n , тогда

$$T(\Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_{n+1})) = T(\Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n))\Phi_{in}(x_{n+1}) = \\ = : \Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n) : \Phi_{in}(x_{n+1}) + \\ + \sum_{\text{перестановки}} \langle 0 | T(\Phi_{in}(x_1)\Phi_{in}(x_2)) | 0 \rangle \times \\ \times : \Phi_{in}(x_3) \dots \Phi_{in}(x_n) : \Phi_{in}(x_{n+1}) + \dots \quad (17.30)$$

Для того чтобы переписать это выражение в виковской форме, нужно внести поле $\Phi_{in}(x_{n+1})$ внутрь нормального произведения n полей. Используя (17.25) и (17.26), получаем

$$: \Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n) : \Phi_{in}(x_{n+1}) = \\ = \sum_{A, B} \delta_p \prod_{i \in A} \Phi_{in}^{(-)}(x_i) \prod_{j \in B} \Phi_{in}^{(+)}(x_j) [\Phi_{in}^{(+)}(x_{n+1}) + \Phi_{in}^{(-)}(x_{n+1})] = \\ = \sum_{A, B} \delta_{p'} \prod_{i \in A} \Phi_{in}^{(-)}(x_i) \prod_{j \in B} \Phi_{in}^{(+)}(x_j) \Phi_{in}^{(+)}(x_{n+1}) + \\ + \sum_{A, B} \delta_{p'} \prod_{i \in A} \Phi_{in}^{(-)}(x_i) \Phi_{in}^{(-)}(x_{n+1}) \prod_{j \in B} \Phi_{in}^{(+)}(x_j) + \\ + \sum_{A, B} \delta_{p'} \prod_{i \in A} \Phi_{in}^{(-)}(x_i) \sum_{\substack{k \in B \\ j \neq k}} \prod_{j \in B} \Phi_{in}^{(+)}(x_j) \langle 0 | \Phi_{in}^{(+)}(x_k) \Phi_{in}^{(-)}(x_{n+1}) | 0 \rangle, \quad (17.31)$$

где $\delta_{p'}$ — четность перестановки, необходимой для упорядочивания множителей в каждом отдельном члене (17.31). При введении $\Phi_{in}(x_{n+1})$ внутрь нормального произведения мы получаем

цепочку членов (последняя строчка в (17.31)), которые содержат коммутатор (или антикоммутатор) $\varphi_{in}^{(-)}(x_{n+1})$ с полями $\varphi_{in}^{(+)}(x_k)$ из набора B . Этот коммутатор затем заменяется вакуумным средним. Используя далее (17.26), можно выразить эти вакуумные средние через фейнмановские пропагаторы:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi_{in}^{(+)}(x_k) \varphi_{in}^{(-)}(x_{n+1}) | 0 \rangle &= \\ &= \langle 0 | \varphi_{in}(x_k) \varphi_{in}(x_{n+1}) | 0 \rangle = \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_k) \varphi_{in}(x_{n+1})) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $t_{n+1} < t_k$. Наконец, переписав (17.31) в виде $:\varphi_{in}(x_1) \dots \varphi_{in}(x_n) : \varphi_{in}(x_{n+1}) = :\varphi_{in}(x_1) \dots \varphi_{in}(x_{n+1}) : +$
 $+ \sum_k \delta_\rho : \varphi_{in}(x_1) \dots \varphi_{in}(x_{k-1}) \varphi_{in}(x_{k+1}) \dots \varphi_{in}(x_n) : \times$
 $\times \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_k) \varphi_{in}(x_{n+1})) | 0 \rangle,$

мы видим, что выражение (17.30) совпадает с (17.23), записанным для $n+1$ множителей. Тем самым теорема Вика доказана. Мы рекомендуем читателю тщательно проделать все выкладки для $n=3$ и $n=4$, после чего станут ясными детали доказательства и в общем случае.

Применим теперь теорему Вика к (17.22). Напомним, что плотность гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}_I(\varphi_{in}(y))$ уже имеет нормальную форму¹⁾. Поэтому при упрощении хронологических произведений не появляется сверток, содержащих произведение полевых амплитуд, взятых в одной и той же точке y . Указанные произведения входят в (17.22) уже нормально упорядоченными, причем очевидно, что

$$T: \varphi_{in}(y) \varphi_{in}(y) := : \varphi_{in}(y) \varphi_{in}(y) :. \quad (17.32)$$

§ 118. Графическое представление

При рассмотрении (17.23) появляется три типа не равных нулю сверток: для эрмитового (12.74) или комплексного (12.70) поля Клейна — Гордона

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1) \varphi_{in}(y)) | 0 \rangle &= i \Delta_F(x-y, \mu^2) = \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \quad (17.33a) \end{aligned}$$

$$\langle 0 | T(\varphi_{in}(x) \varphi_{in}^*(y)) | 0 \rangle = i \Delta_F(x-y, \mu^2); \quad (17.33б)$$

¹⁾ Исключение представляет статическое кулоновское взаимодействие в (15.28) (см. также § 127). Однако и в этом случае не возникают свертки, содержащие произведение амплитуд, взятых в одной и той же пространственно-временной точке.

для поля Дирака (13.72)

$$\langle 0 | T (\psi_{\alpha}^{\text{in}}(x) \bar{\psi}_{\beta}^{\text{in}}(y)) | 0 \rangle = i S_F(x-y, m)_{\alpha\beta} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)} (\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (17.33\text{В})$$

и, наконец, для электромагнитного поля (14.51), (14.53)

$$\begin{aligned} \langle 0 | T (A_{\mu}^{\text{in}}(x) A_{\nu}^{\text{in}}(y)) | 0 \rangle &= i D_F^{\text{tr}}(x-y)_{\mu\nu} = \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \left[-g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k\eta)^2 - k^2} + \frac{(k\eta)(k_{\mu}\eta_{\nu} + \eta_{\mu}k_{\nu})}{(k\eta)^2 - k^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^2 \eta_{\mu}\eta_{\nu}}{(k\eta)^2 - k^2} \right]. \quad (17.33\text{Г}) \end{aligned}$$

В последнем выражении вектор $\eta = (1, 0, 0, 0)$ определен в той лоренцевой системе, в которой производится квантование. Указанные свертки можно, как и в фейнмановском подходе, представить графически; правила соответствия указаны на рис. 17.1.

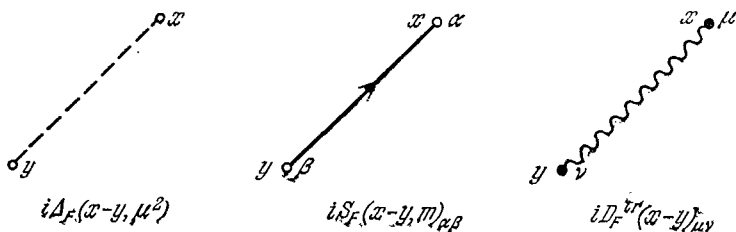


Рис. 17.1. Пропагаторы для полей Клейна — Гордона, Дирака и Максвелла.

В дальнейшем при записи функции распространения мы будем опускать аргумент массы во всех случаях, когда это не ведет к недоразумению.

Теперь, рисуя каждый раз для свертки, возникающих при разложении Дайсона — Вика для τ -функции, линии, указанные на рис. 17.1, мы можем графически изобразить каждый член в (17.22). Поскольку рассматриваемые гамильтонианы содержат произведения полей, взятых в одной и той же точке, пропагаторы, сопоставляемые сверткам этих полей, должны «стягиваться» в те же самые точки; сами же эти точки называются *вершинами*.

Проиллюстрируем графическую технику на конкретном примере самовзаимодействующего скалярного поля:

$$\mathcal{H}_I(\Phi_{\text{in}}(x)) = -1/4 \lambda_0 : \Phi_{\text{in}}^4(x) : + 1/2 (\mu_0^2 - \mu^2) : \Phi_{\text{in}}^2(x) : \dots \quad (17.34)$$

Во втором порядке по λ_0 и первом по $\delta\mu^2$ вклад в $\tau(x_1, x_2, x_3, x_4)$ равен

$$\frac{\lambda_0^2 \delta\mu^2}{32} \langle 0 | T(\Phi_{\text{in}}(x_1) \Phi_{\text{in}}(x_2) \Phi_{\text{in}}(x_3) \Phi_{\text{in}}(x_4) \times \\ \times : \Phi_{\text{in}}^4(y_1) : : \Phi_{\text{in}}^4(y_2) : : \Phi_{\text{in}}^4(y_3) :) | 0 \rangle. \quad (17.35)$$

Применяя теорему Вика и используя диаграммную технику, получаем набор графиков, типичный вид которых показан на рис. 17.2. Взаимодействие, содержащее константу λ_0 , изображается 4-лучевой вершиной, а взаимодействие, содержащее массовый контрчлен — 2-лучевой вершиной (рис. 17.3). Каждая линия,

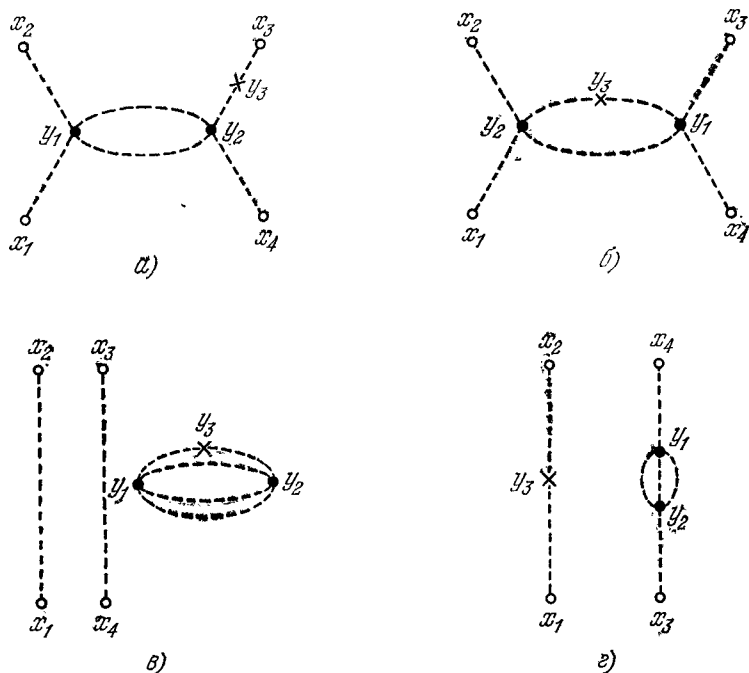


Рис. 17.2. Типичные диаграммы, содержащиеся в уравнении (17.35).

выходящая из вершины, отвечает свертке полей в \mathcal{H}_1 . Типичная диаграмма, которая не содержится в разложении Дайсона — Вика, изображена на рис. 17.4; она исключается из рассмотрения, поскольку гамильтониан \mathcal{H}_1 имеет нормальный вид и не содержит свертки двух полей, взятых в одной и той же вершине.

Таким образом, мы получаем соответствие между отдельными членами в разложении τ -функции и фейнмановскими графиками. Для того чтобы прийти к фейнмановским правилам, остается только решить простую комбинаторную задачу и выяснить, сколько раз каждая диаграмма входит в разложение Дайсона — Вика (различаясь при этом только нумерацией вершин). Например, для диаграмм, отвечающих (17.35), имеется $3!$ перестановок вершин y_1, y_2, y_3 ; при этом каждый график, отличающийся только перестановкой аргументов, дает один и тот

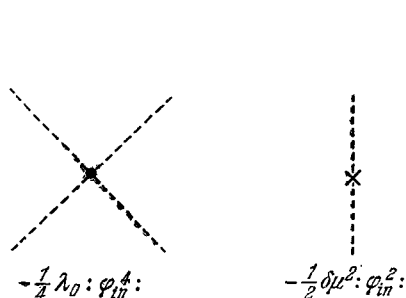


Рис. 17.3. Вершины для мезон-мезонного рассеяния и массового контрчлена.

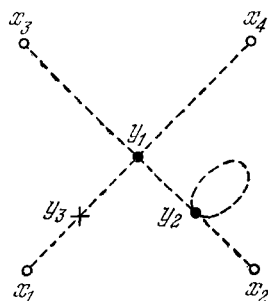


Рис. 17.4. Собственно-энергетическая диаграмма с «головастиком», не содержащаяся в уравнении 17.35.

же вклад в τ . В общем случае существует $m!$ диаграмм, отличающихся перестановкой вершин y_1, \dots, y_m , причем возникающий отсюда $m!$ сокращается с $1/m!$ в (17.22). Точно так же для диаграмм, указанных на рис. 17.2, имеется $4!$ перестановок полей в 4-лучевой вершине $1/4 \lambda_0 : \phi_{in}^4 :$ и $2!$ перестановок в 2-лучевой вершине $-1/2 \delta \mu^2 : \phi_{in}^2 :$. Общее правило гласит: если взаимодействие содержит оператор поля в степени r , соответствующая диаграмма умножается на $r!$.

§ 119. Вакуумные амплитуды

На рис. 17.5 показаны некоторые диаграммы, возникающие при разложении знаменателя в (17.22). Точно такие же диаграммы содержатся и в разложении числителя (см. рис. 17.2, в). Как мы увидим, вклад вакуумных петель в числителе и знаменателе сокращается и выпадает из полного ответа.

Графики, связанные с числителем, отличаются от графиков, связанных со знаменателем, тем, что они обладают *внешними концами*. Эти внешние линии отвечают операторам $\phi_{in}(x_1) \dots$

... $\varphi_{in}(x_n)$, которые содержатся в $\tau(x_1, \dots, x_n)$. Назовем совокупность графиков, не связанных с внешними концами диаграммы несвязанной частью. Графики, не содержащие несвязанной части, назовем *связанными*. Каждый график в числителе может быть отнесен либо к связанной, либо к несвязанной части.

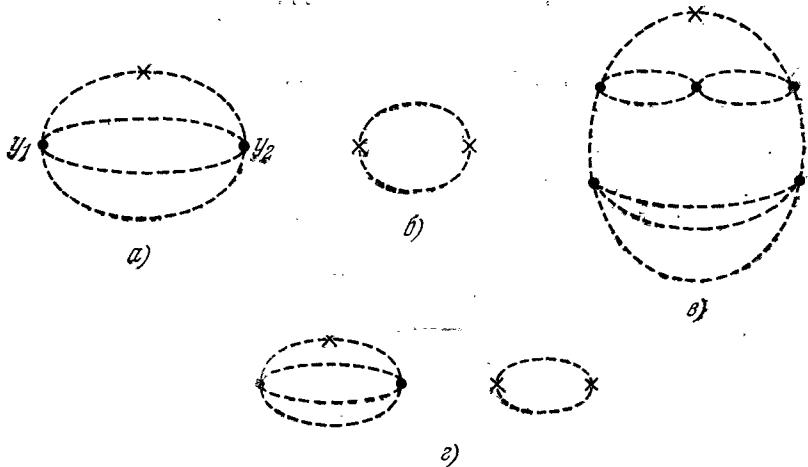


Рис. 17.5. Вакуумные петли.

Точно так же на две части разбивается и аналитическое выражение для функции τ .

Суммарный вклад связанных графиков s -го порядка в числитель функции τ равен

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int d^4 y_1 \dots d^4 y_p \times$$

$$\times \langle 0 | T (\varphi_{in}(x_1) \dots \varphi_{in}(x_n) \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_s)) | 0 \rangle_c \times$$

$$\times \frac{p!}{s!(p-s)!} \langle 0 | T (\mathcal{H}_I(y_{s+1}) \dots \mathcal{H}_I(y_p)) | 0 \rangle, \quad (17.36)$$

где значок c означает, что вакуумное среднее вычисляется только от связанной части. Комбинаторный множитель

$$\binom{p}{s} = \frac{p!}{s!(p-s)!}$$

означает число способов, которым можно извлечь s множителей

из полного числа p множителей \mathcal{H}_I . Выражение (17.36) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{(-i)^s}{s!} \int d^4 y_1 \dots d^4 y_s \times \\ & \times \langle 0 | T(\varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_n) \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_s)) | 0 \rangle_c \times \\ & \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-i)^r}{r!} \int d^4 z_1 \dots d^4 z_r \langle 0 | T(\mathcal{H}_I(z_1) \dots \mathcal{H}_I(z_r)) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (17.37)$$

Это выражение имеет вид связанной амплитуды s -го порядка, умноженной на бесконечную сумму вакуумных петель, изображенную на рис. 17.5. Последняя в точности сокращает знаменатель в (17.22). Таким образом,

$$\begin{aligned} \tau(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\sum_i G_i(x_1, \dots, x_n)}{\sum_k D_k} = \frac{\sum_i G_i^c(x_1, \dots, x_n) \sum_k D_k}{\sum_k D_k} = \\ &= \sum_i G_i^c(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (17.38)$$

где G_i^c — вклад связанных, а D_k — несвязанных диаграмм. Другими словами, при вычислении τ -функции несвязанные графики выпадают из ответа, и последняя сводится к сумме всех *связанных* фейнмановских диаграмм.

§ 120. Спин и изотопический спин; π -мезон-нуклонное рассеяние

В большинстве вычислений, представляющих физический интерес, мы рассматриваем гамильтонианы, содержащие поля со спином и изотопическим спином. Примером является π -мезон-нуклонное взаимодействие, рассмотренное в гл. 15:

$$\mathcal{H}_I = g : \bar{\psi} i \gamma_5 \tau \cdot \phi \psi : - \frac{1}{2} \delta \mu^2 : \phi \cdot \phi : - \delta M : \bar{\psi} \psi :. \quad (17.39)$$

В (17.39) явно выписан массовый контрчлен. Для того чтобы разобраться в кухне индексов, рассмотрим вклад графиков первого отличного от нуля порядка. Соответствующее выражение (16.39) для π -мезон-нуклонного рассеяния содержит

$$\langle 0 | T(\psi(z_2)_{\alpha r} \bar{\psi}(z_1)_{\beta s} \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2)) | 0 \rangle, \quad (17.40)$$

где индексы α, β и r, s означают соответственно спин и изотопический спин нуклонов, а (i, j) — изотопические индексы

π -мезонов. В первом исчезающем порядке получаем

$$\tau_{ij, \alpha\beta, rs}^{(2)}(x_1, x_2, z_1, z_2) = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4y_1 d^4y_2 \times \\ \times \langle 0 | T (\psi_{\alpha r}^{\text{in}}(z_2) \bar{\psi}_{\beta s}^{\text{in}}(z_1) \varphi_i^{\text{in}}(x_1) \varphi_j^{\text{in}}(x_2) \mathcal{H}_I(y_1) \mathcal{H}_I(y_2)) | 0 \rangle_c, \quad (17.41)$$

где индекс c снова указывает на то, что рассматриваются только связанные диаграммы, а диаграммы, изображенные на рис. 17.6, не учитываются.

Массовые контрчлены в (17.39) порядка g^2 , поэтому при вычислениях с точностью g^2 каждый из них должен учитываться только один раз. Эти контрчлены модифицируют диаграммы собственной энергии (рис. 17.7).

В гл. 8 мы уже обсуждали диаграммы собственной энергии в связи с вычислением радиационных поправок к рассеянию электронов. Учет контрчленов в диаграммах рис. 17.8 приводит к тому, что физические частицы имеют (с точностью g^2) наблюдаемую массу. Ниже мы рассмотрим рассеяние на угол, не

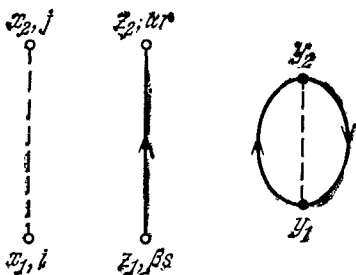


Рис. 17.6. Несвязанные диаграммы, которые не дают вклад в π -мезон-нуклонную амплитуду.

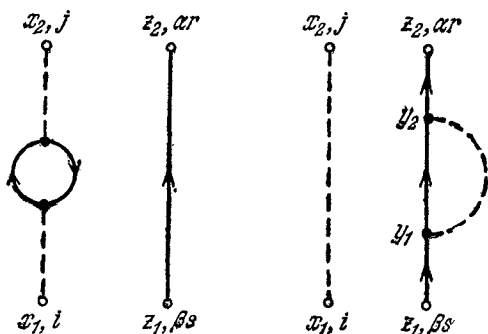


Рис. 17.7. Диаграммы собственной энергии в π -мезон-нуклонной амплитуде.

равный нулю; в этом случае диаграммы рис. 17.7 и 17.8 вклада не дают.

Остающаяся часть выражения (17.41) отвечает диаграммам, указанным на рис. 17.9. Эти диаграммы отвечают переходам с изменением квантовых чисел π -мезонов и нуклонов.

Соответствующие аналитические выражения имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{ij, \alpha\beta, rs}^{(2a)}(x_1, x_2, z_1, z_2) = \\ = \frac{(-i)^2}{2!} 2!g^2 \int d^4y_1 d^4y_2 (\tau_i \tau_j)_{rs} i\Delta_F(y_1 - x_1) i\Delta_F(x_2 - y_2) \times \\ \times [iS_F(z_2 - y_2) i\gamma_5 iS_F(y_2 - y_1) i\gamma_5 iS_F(y_1 - z_1)]_{\alpha\beta}, \quad (17.42a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij, \alpha\beta, rs}^{(2b)}(x_1, x_2, z_1, z_2) = \\ = \frac{(-i)^2}{2!} 2!g^2 \int d^4y_1 d^4y_2 (\tau_i \tau_j)_{rs} i\Delta_F(y_2 - x_1) i\Delta_F(x_2 - y_1) \times \\ \times [iS_F(z_2 - y_2) i\gamma_5 iS_F(y_2 - y_1) i\gamma_5 iS_F(y_1 - z_1)]_{\alpha\beta}. \quad (17.42b) \end{aligned}$$

Ничто не заменяет опыта! Мы настоятельно рекомендуем читателю самому вывести формулы (17.42), внимательно проверить все множители и спиновые и изоспиновые индексы.

Для того чтобы вычислить амплитуду перехода, подставим (17.42) в редукционную формулу, связы-

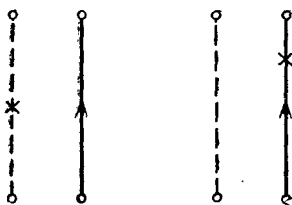


Рис. 17.8. Массовые контрольные в π -мезон-нуклонной амплитуде.

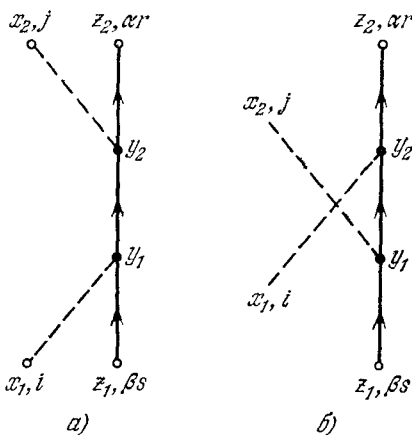


Рис. 17.9. Вклад второго порядка в π -мезон-нуклонное рассеяние. Соответствующие амплитуды определены выражениями (17.42a) и (17.42b) соответственно.

вающую τ -функцию с S -матрицей. Отбрасывая при этом член, отвечающий рассеянию вперед, получаем

$$\begin{aligned} S^{(2)}(p_2, q_2; p_1, q_1) = \left(\frac{i}{\sqrt{Z_3}}\right)^2 \left(\frac{-i}{\sqrt{Z_2}}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4z_1 d^4z_2 f_{q_2}^*(x_2) \hat{\Phi}_{2j}^* \times \\ \times [\bar{U}_{p_2 s_2}(z_2) (i\hat{V}_{z_2} - M)]_{\alpha} \overrightarrow{(\square_{x_2} + \mu^2)} \chi_r^+(2) \tau_{ij, \alpha\beta, rs}^{(2)}(x_1, x_2, z_1, z_2) \times \\ \times \chi_s(1) \overleftarrow{(-i\hat{V}_{z_1} - M) U_{p_1 s_1}(z_1)}_{\beta} \overleftarrow{(\square_{x_1} + \mu^2)} \hat{\Phi}_{1i} f_{q_1}(x_1), \quad (17.43) \end{aligned}$$

где f_q — нормированная волновая функция бозона с импульсом q , U_{ps} — нормированная волновая функция фермиона, $\hat{\phi}_i$ и χ_r — изотопические волновые функции.

При вычислении с точностью g^2 следует, в соответствии с подходом теории возмущений, положить $Z_2 = Z_3 = 1$. Операторы Клейна — Гордона и Дирака устраняют внешние линии, поскольку

$$(\square_x + \mu^2) \Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y),$$

$$(i\hat{\nabla}_x - M) S_F(x - y) = S_F(x - y) \overleftarrow{(-i\hat{\nabla}_y - M)} = \delta^4(x - y). \quad (17.44)$$

Другими словами, пропагаторы заменяются на волновые функции частиц в начальном и конечном положениях. Выполнив интегрирование с учетом δ -функций, получим

$$\begin{aligned} S^{(2)}(p_2, q_2; p_1, q_1) = & -g^2 \int \frac{d^4 y_1 d^4 y_2}{(2\pi)^6 \sqrt{2\omega_1 2\omega_2}} \sqrt{\frac{M^2}{E_1 E_2}} \times \\ & \times \{e^{i(q_2 + p_2) y_2} [\chi^+(2) \tau \cdot \hat{\phi}_2^* \tau \cdot \hat{\phi}_1 \chi(1)] \times \\ & \times [\bar{u}(p_2, s_2) i\gamma_5 i S_F(y_2 - y_1) i\gamma_5 u(p_1, s_1)] e^{-i(p_1 + q_1) y_1} + \\ & + e^{i(p_2 - q_1) y_2} [\chi^+(2) \tau \cdot \hat{\phi}_1 \tau \cdot \hat{\phi}_2^* \chi(1)] \times \\ & \times [\bar{u}(p_2, s_2) i\gamma_5 i S_F(y_2 - y_1) i\gamma_5 u(p_1, s_1)] e^{-i(p_1 - q_2) y_1}. \end{aligned} \quad (17.45)$$

Выполнив далее фурье-преобразование и переходя в импульсное пространство, мы снова приходим к выражению (16.54).

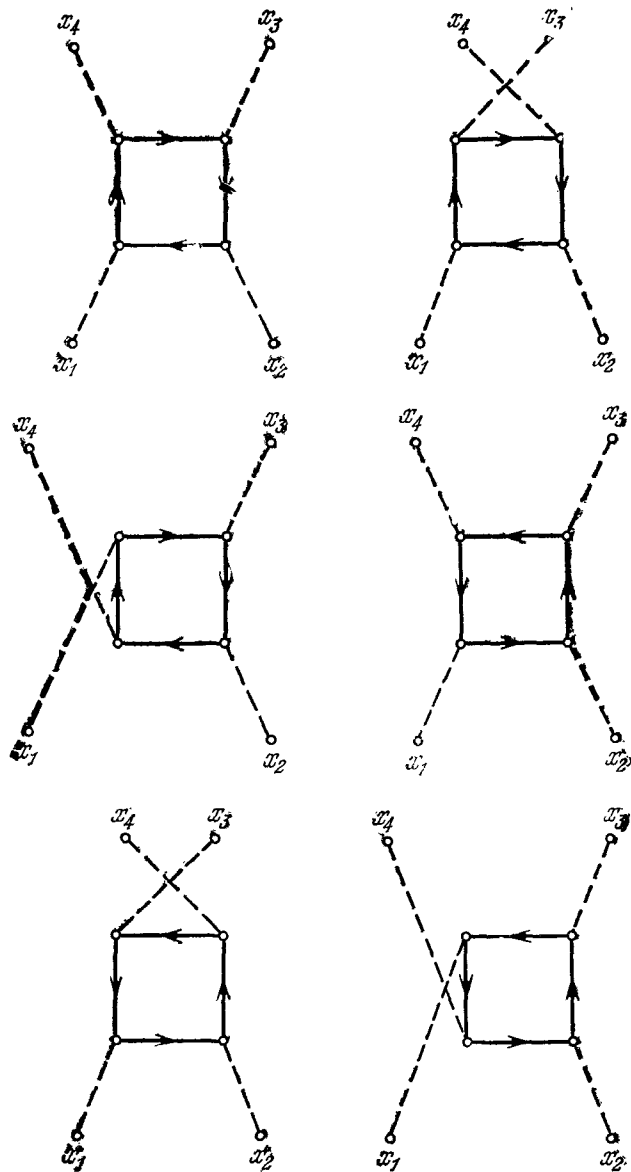
Отметим, что из редукционной формулы непосредственно следует кроссинг-симметрия амплитуды, отмеченная ранее в (10.54) и (10.55). Выражение (17.40), очевидно, не меняется при замене $i \leftrightarrow j$, $x_1 \leftrightarrow x_2$. Поэтому, если в (17.43) заменить $\phi_{1i} \leftrightarrow \phi_{2i}^*$ и $f_{q_1}(x_1) \leftrightarrow f_{-q_2}(x_1)$, то S -матрица не изменится. Гелл-Манн и Голдбергер показали, что в пределе $q_1 = q_2 \rightarrow 0$ амплитуда $\pi - N$ -рассеяния не зависит от изотопического спина, в этом случае $S_{ij} = \delta_{ij} S$. Подробности доказательства мы оставляем читателю в качестве упражнения. Другим важным результатом, следующим из кроссинг-симметрии, является теорема Померанчука [75]

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \sigma_{\text{tot}}(A + B \rightarrow A + B) = \lim_{E \rightarrow \infty} \sigma_{\text{tot}}(\bar{A} + B \rightarrow \bar{A} + B).$$

В гл. 18 мы обсудим эту теорему при рассмотрении дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния на нулевой угол.

§ 121. π — π-рассеяние

Приведем еще один пример применения редукционной техники Дайсона — Вика. Снова рассмотрим взаимодействие (17.39) и вычислим в низшем порядке амплитуду $\pi - \pi$ -рассеяния. Графики, отвечающие вкладу $\sim g^4$ в эту амплитуду,

Рис. 17.10. Диаграммы четвертого порядка для $\pi-\pi$ -рассеяния.

изображены на рис. 17.10. Диаграммы, показанные на рис. 17.11, дают вклад только в амплитуду рассеяния вперед; их мы рассматривать не будем. Для графиков рис. 17.10 полагаем $Z_3 = 1$

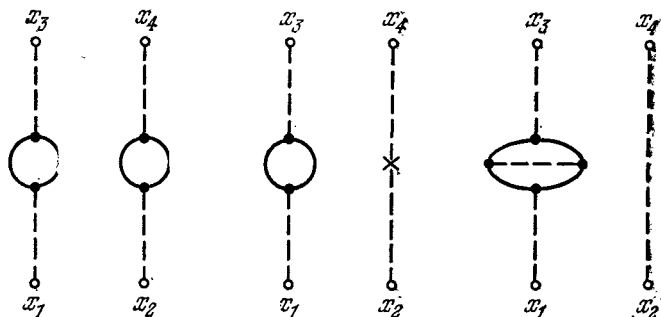


Рис. 17.11. Диаграммы четвертого порядка для π-π-рассеяния вперед.

и не учитываем массовый контрчлен; тогда

$$S(q_3, q_4; q_1, q_2) = \frac{1}{(2\pi)^6 \sqrt{2\omega_1 2\omega_2 2\omega_3 2\omega_4}} \times \\ \times \int d^4x_1 \dots d^4x_4 \{ \exp i[q_3x_3 + q_4x_4 - q_1x_1 - q_2x_2] \} \times \\ \times \hat{\phi}_{1i} \hat{\phi}_{2j} \hat{\phi}_{3k}^* \hat{\phi}_{4l}^* K_{x_1} K_{x_2} K_{x_3} K_{x_4} \tau_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (17.46)$$

где $\hat{\phi}_i$ — изотопические функции и

$$K_x = \square_x + \mu^2.$$

В рассматриваемом порядке

$$\tau_{ijkl}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(-ig)^4}{4!} 4! \int d^4y_1 \dots d^4y_4 \langle 0 | T(\varphi_i(x_1) \varphi_r(y_1)) | 0 \rangle \times \\ \times \langle 0 | T(\varphi_j(x_2) \varphi_s(y_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi_k(x_3) \varphi_t(y_3)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi_l(x_4) \varphi_u(y_4)) | 0 \rangle \times \\ \times \langle 0 | T(\bar{\psi}(y_1) i\gamma_5 \tau_r \psi(y_1) : \bar{\psi}(y_2) i\gamma_5 \tau_s \psi(y_2) : : \bar{\psi}(y_3) i\gamma_5 \tau_t \psi(y_3) : \times \\ \times : \bar{\psi}(y_4) i\gamma_5 \tau_u \psi(y_4) :) | 0 \rangle = \\ = -g^4 \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 d^4y_4 \Delta_F(x_1 - y_1) \Delta_F(x_2 - y_2) \Delta_F(x_3 - y_3) \times \\ \times \Delta_F(x_4 - y_4) \text{Sp } \tau_i \tau_j \tau_k \tau_l \text{Sp } i\gamma_5 iS_F(y_1 - y_2) i\gamma_5 iS_F(y_2 - y_3) \times \\ \times i\gamma_5 iS_F(y_3 - y_4) i\gamma_5 iS_F(y_4 - y_1) + \\ + 5 \text{ членов, получаемых перестановкой внешних линий.} \quad (17.47)$$

Отметим знак минус в (17.47). Он обусловлен тем, что при вычислении свертки $\psi(y_4)$ с $\bar{\psi}(y_1)$ необходимо выполнить нечетное число перестановок. В общем случае произвольной диаграммы при вычислении замкнутой электронной петли вклад соответствующей диаграммы умножается на -1 . Действительно,

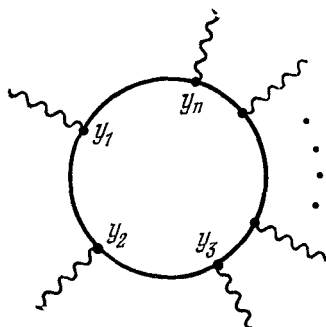


Рис. 17.12. Замкнутая фермионная петля как часть некоторой произвольной диаграммы.

виковское произведение для замкнутой петли, изображенной на рис. 17.12, равно

$$\begin{aligned} &+ \langle 0 | T (\bar{\psi}(y_1) \Gamma \psi(y_1) \bar{\psi}(y_2) \Gamma \psi(y_2) \dots \bar{\psi}(y_n) \Gamma \psi(y_n)) | 0 \rangle = \\ &= - \langle 0 | T (\psi(y_n) \bar{\psi}(y_1) \Gamma \psi(y_1) \bar{\psi}(y_2) \Gamma \dots \psi(y_{n-1}) \bar{\psi}(y_n) \Gamma | 0 \rangle = \\ &= (-1) \text{Sp } i S_F(y_n - y_1) \Gamma i S_F(y_1 - y_2) \Gamma \dots i S_F(y_{n-1} - y_n) \Gamma + \\ &\quad + \text{перестановки.} \quad (17.48) \end{aligned}$$

Объединив (17.46) и (17.47), получаем в импульсном пространстве

$$S(q_3, q_4; q_1, q_2) = - \frac{i(2\pi)^4 \delta^4(q_3 + q_4 - q_1 - q_2)}{(2\pi)^6 \sqrt{16\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}} \mathfrak{M},$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= -ig^4 \text{Sp } \tau \cdot \hat{\phi}_1 \tau \cdot \hat{\phi}_2 \tau \cdot \hat{\phi}_3 \tau \cdot \hat{\phi}_4^* \times \\ &\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp } i\gamma_5 \frac{i}{\not{p} + \not{q}_1 - M + i\epsilon} i\gamma_5 \frac{i}{\not{p} + \not{q}_1 + \not{q}_2 - M + i\epsilon} i\gamma_5 \times \\ &\times \frac{i}{\not{p} + \not{q}_4 - M + i\epsilon} i\gamma_5 \frac{i}{\not{p} - M + i\epsilon} + 5 \text{ перестановок.} \quad (17.49) \end{aligned}$$

Выражение (17.49) в точности согласуется с выражением, полученным по фейнмановским правилам (см. прил. Б, т. 1).

К сожалению, интеграл по внутреннему импульсу p логарифмически расходится¹⁾. Для того чтобы устранить эту расходимость, необходимо ввести дополнительный контрчлен в лагранжиан мезонного взаимодействия. Простейший контрчлен имеет вид

$$- \mathcal{L}_1 = \mathcal{H}_1(\varphi) = 1/4 \delta\lambda :(\Phi \cdot \Phi)^2:, \quad (17.50)$$

где $\delta\lambda$ — бесконечная константа, которая сокращает расходимость в (17.49); при этом конечный ответ для амплитуды π — π -рассеяния получается после вычитания бесконечных контрчленов. Вычисление интегралов и шпуров в (17.49) требует громоздких выкладок; помимо всего прочего, такое вычисление не слишком полезно, поскольку трудно ожидать, что ряд теории возмущений сходится ($g^2/4\pi = 15$). Установим далее некоторые общие свойства амплитуды рассеяния, определяемые требованиями симметрии.

1. \mathfrak{M} — скалярная функция инвариантов

$$s = (q_1 + q_2)^2, \quad t = (q_1 - q_3)^2, \quad u = (q_1 - q_4)^2, \quad (17.51)$$

где

$$s + t + u = 4\mu^2.$$

В физической области рассеяния $q_1 + q_2 \rightarrow q_3 + q_4$ $s \geq 4\mu^2$, $t \leq 0$, $u \leq 0$.

2. В предположении зарядовой независимости \mathfrak{M} имеет следующую изоспиновую структуру:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = & (\hat{\Phi}_1 \cdot \hat{\Phi}_2) (\hat{\Phi}_3^* \cdot \hat{\Phi}_4^*) A(s, t, u) + (\hat{\Phi}_1 \cdot \hat{\Phi}_3) (\hat{\Phi}_2 \cdot \hat{\Phi}_4) B(s, t, u) + \\ & + (\hat{\Phi}_1 \cdot \hat{\Phi}_4) (\hat{\Phi}_2 \cdot \hat{\Phi}_3) C(s, t, u). \end{aligned} \quad (17.52)$$

3. Амплитуда \mathfrak{M} обладает свойством кроссинг-симметрии, т. е. не меняется при перестановке любой из внешних частиц:

$$\begin{aligned} q_2 &\leftrightarrow -q_3, & \hat{\Phi}_2 &\leftrightarrow \hat{\Phi}_3^*; & s &\leftrightarrow t, \\ q_2 &\leftrightarrow -q_4, & \hat{\Phi}_2 &\leftrightarrow \hat{\Phi}_4^*; & s &\leftrightarrow u, \\ q_3 &\leftrightarrow q_4, & \hat{\Phi}_3^* &\leftrightarrow \hat{\Phi}_4^*; & t &\leftrightarrow u. \end{aligned}$$

Это свойство следует из (17.46) и симметрии τ -функции. Отсюда

$$\begin{aligned} A(s, t, u) = B(t, s, u) = C(u, t, s) = A(s, u, t) = \\ = B(u, s, t) = C(t, u, s). \end{aligned} \quad (17.53)$$

¹⁾ Эта расходимость не возникает в квантовой электродинамике, где в силу градиентной инвариантности на амплитуду рассеяния света на свете налагаются дополнительные условия. Дальнейшее обсуждение этого пункта см. в § 146.

В приложениях часто используется амплитуда с данным изотопическим спином. Для того чтобы получить выражения для этих амплитуд, введем изотопические инварианты P_I , которые отвечают определенному изотопическому спину в реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1/3 (\hat{\Phi}_1 \cdot \hat{\Phi}_2) (\hat{\Phi}_3^* \cdot \hat{\Phi}_4^*), \\ P_1 &= 1/2 [(\hat{\Phi}_1 \cdot \hat{\Phi}_3^*) (\hat{\Phi}_2 \cdot \hat{\Phi}_4^*) - (\hat{\Phi}_1 \cdot \hat{\Phi}_4^*) (\hat{\Phi}_2 \cdot \hat{\Phi}_3^*)], \\ P_2 &= 1/2 [(\hat{\Phi}_1 \cdot \hat{\Phi}_3^*) (\hat{\Phi}_2 \cdot \hat{\Phi}_4^*) + \\ &\quad + (\hat{\Phi}_1 \cdot \hat{\Phi}_4^*) (\hat{\Phi}_2 \cdot \hat{\Phi}_3^*)] - 1/3 (\hat{\Phi}_1 \cdot \hat{\Phi}_2) (\hat{\Phi}_3^* \cdot \hat{\Phi}_4^*). \end{aligned} \quad (17.54)$$

Определив

$$P_I = \hat{\Phi}_{1i} \hat{\Phi}_{2j} \hat{\Phi}_{3k}^* \hat{\Phi}_{4l}^* P_I (ijkl), \quad (17.55)$$

легко проверить, что

$$\sum_{m, n=1}^3 P_I (ijmn) P_I (mnkl) = P_I (ijkl) \delta_{II}. \quad (17.56)$$

Подробные выкладки мы оставляем читателю. Далее имеем

$$\mathfrak{M}(q_3, q_4; q_1, q_2) = A_0 P_0 + A_1 P_1 + A_2 P_2,$$

где

$$A_0 = 3A + B + C, \quad A_1 = B - C, \quad A_2 = B + C, \quad (17.57)$$

причем A_I — искомые амплитуды рассеяния с полным изоспином I . В симметричной точке $s = t = u = 4\mu^2/3$, согласно (17.53), $A = B = C$ и

$$A_0 = 5/2 A_2, \quad A_1 = 0, \quad s = t = u. \quad (17.58)$$

Эти соотношения будут использованы в § 135 при рассмотрении техники дисперсионных соотношений.

§ 122. Графическая техника в квантовой электродинамике

В предыдущих параграфах мы вывели фейнмановские правила вычисления диаграмм, суммированные в приложении Б 1-го тома и уже использовавшиеся в первом томе. Однако случай квантовой электродинамики требует отдельного рассмотрения. В квантовой электродинамике имеется два типа диаграмм. Первый из них содержит обмен поперечным фотоном. Соответствующая вершина равна $-ie_0\gamma_\mu$, а пропагатор, согласно (17.33), равен

$$\begin{aligned} iD_F^{\text{tr}}(q, \eta)_{\mu\nu} &= \\ &= \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left[-g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{(q\eta)^2 - q^2} + \frac{(q\eta)(q_\mu \eta_\nu + \eta_\mu q_\nu)}{(q\eta)^2 - q^2} - \frac{q^2 \eta_\mu \eta_\nu}{(q\eta)^2 - q^2} \right], \end{aligned} \quad (17.59)$$

где вектор $\eta = (1, 0, 0, 0)$ определен в той лоренцевой системе, в которой выполняется квантование. Второй класс диаграмм содержит мгновенное кулоновское взаимодействие (15.28)

$$H_I = \frac{e_0^2}{2} \int \frac{d^3x d^3x' : \bar{\psi}(x) \hat{\eta} \psi(x) : \bar{\psi}(x') \hat{\eta} \psi(x') :}{4\pi |x - x'|}. \quad (17.60)$$

Докажем утверждения, сформулированные в § 87.

1. Из сохранения тока следует, что члены в (17.59), пропорциональные q_μ или q_ν , не вносят вклад в амплитуду рассеяния¹⁾.

2. Последний член в (17.59) сокращается с кулоновским взаимодействием (17.60).

Отсюда следует, что при практических вычислениях можно использовать ковариантный пропагатор

$$iD_F^{\mu\nu} = -ig^{\mu\nu} / (q^2 + i\epsilon).$$

Тем самым гарантируется ковариантность электродинамических амплитуд.

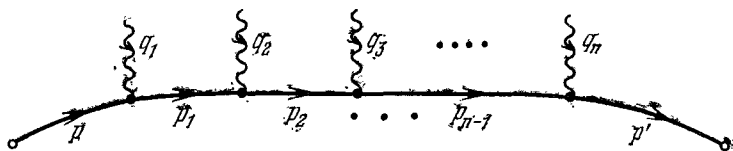


Рис. 17.13. Фермионная линия с n реальными или виртуальными фотонами.

Докажем вначале 1²⁾. Рассмотрим фермионную линию, которая соединена с n фотонными линиями (рис. 17.13). Соответствующая амплитуда равна

$$g(p, p'; q_1, a_1; \dots q_n, a_n) = \frac{1}{\not{p}' - m} \hat{a}_n \frac{1}{\not{p}_{n-1} - m} \hat{a}_{n-1} \dots \hat{a}_2 \frac{1}{\not{p}_1 - m} \hat{a}_1 \frac{1}{\not{p} - m}. \quad (17.61)$$

Вставим еще один фотон, реальный или виртуальный с импульсом q и вершиной \hat{q} , тогда получим диаграмму, изображенную на рис. 17.14. При этом g заменяется на \tilde{g}_r :

$$\tilde{g}_r(p, p', q; q_i, a_i) = \frac{1}{\not{p} + \not{q} - m} \hat{a}_n \frac{1}{\not{p}_{n-1} + \not{q} - m} \hat{a}_{n-1} \dots \dots \hat{a}_{r+1} \frac{1}{\not{p}_r + \not{q} - m} \hat{q} \frac{1}{\not{p}_r - m} a_r \dots \hat{a}_1 \frac{1}{\not{p} - m}. \quad (17.62)$$

¹⁾ В гл. 7 мы уже использовали это обстоятельство (для случая реальных фотонов) при вычислении поляризационных сумм с помощью фейнмановской техники.

²⁾ Приведенные ниже аргументы неприменимы в случае, когда рассматриваются радиационные поправки к внешним электронным линиям (см. [140]). В общем случае неперенормированные S -матричные элементы зависят от калибровки и становятся градиентно-инвариантными только после умножения на зависящую от калибровки константу Z . (Прим. перев.)

Далее используем тождество

$$\frac{1}{\hat{p}_r + \hat{q} - m} \hat{q} \frac{1}{\hat{p}_r - m} = \frac{1}{\hat{p}_r - m} - \frac{1}{\hat{p}_r + \hat{q} - m}$$

и перепишем \tilde{g}_r в виде ¹⁾

$$\begin{aligned} \tilde{g}_r(p, p', q; q_i, a_i) &= \frac{1}{\hat{p}' + \hat{q} - m} \hat{a}_n \dots \frac{1}{\hat{p}_{r+1} + \hat{q} - m} \hat{a}_{r+1} \frac{1}{\hat{p}_r - m} \hat{a}_r \dots \\ &\dots \hat{a}_1 \frac{1}{\hat{p} - m} - \frac{1}{\hat{p}' + \hat{q} - m} \hat{a}_n \times \dots \\ &\dots \times \frac{1}{\hat{p}_{r+1} + \hat{q} - m} \hat{a}_{r+1} \frac{1}{\hat{p}_r + \hat{q} - m} \hat{a}_r \frac{1}{\hat{p}_{r-1} - m} \hat{a}_{r-1} \dots \hat{a}_1 \frac{1}{\hat{p} - m}. \end{aligned} \quad (17.63)$$

Суммируя все такие диаграммы, различающиеся местом присоединения фотонной линии на рис. 17.14, мы видим, что в (17.63)

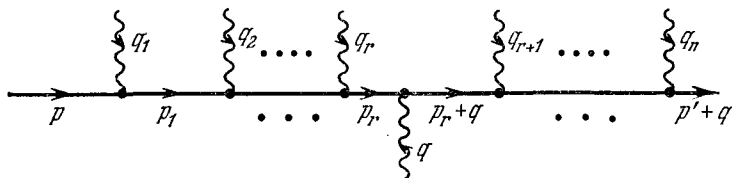


Рис. 17.14. Фермионная линия с n фотонами и дополнительной вершиной, в которой передается импульс q .

попарно сокращаются все члены, кроме тех двух, в которых фотон q присоединяется правее q_n и левее q_1 ²⁾:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(p, p', q; q_i, a_i) &= \sum_r \tilde{g}_r = \frac{1}{\hat{p}' - m} \hat{a}_n \frac{1}{\hat{p}_{n-1} - m} \hat{a}_{n-1} \dots \\ &\dots \hat{a}_1 \frac{1}{\hat{p} - m} - \frac{1}{\hat{p}' + \hat{q} - m} \hat{a}_n \frac{1}{\hat{p}_{n-1} + \hat{q} - m} \hat{a}_{n-1} \dots \hat{a}_1 \frac{1}{\hat{p} + \hat{q} - m} = \\ &= g(p, p'; q_1, a_1; \dots; q_n, a_n) - g(p + q, p' + q; q_1, a_1; \dots; q_n, a_n). \end{aligned} \quad (17.64)$$

Заметим теперь, что внешние концы диаграммы на рис. 17.14 либо принадлежат свободным частицам, либо замыкаются, об-

¹⁾ Мы предлагаем читателю убедиться в том, что приведенное доказательство сохраняется и в том случае, когда фермионная линия содержит массовый контрчлен.

²⁾ В том случае, когда q относится к виртуальной фотонной линии, оба конца которой присоединяются к одной и той же электронной линии, сумма диаграмм, отвечающих всем перестановкам обоих концов фотонной линии, равна умноженной на два сумме диаграмм, отвечающих всем перестановкам оставшихся $n - 2$ вершин.

разуя петлю (см. рис. 17.15). В первом случае S -матричный элемент равен

$$S \propto \bar{u}(p' + q) \times \\ \times \left[\lim_{\substack{p^2 \rightarrow m^2 \\ (p+q)^2 \rightarrow m^2}} (\hat{p}' + \hat{q} - m) \tilde{g}(p, p', q; q_i, a_i) (\hat{p} - m) \right] u(p) = 0. \quad (17.65)$$

Для электронной петли имеем

$$\mathcal{R} \propto \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \hat{a}_0 \tilde{g}(p, p', q; q_i, a_i) = \\ = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \hat{a}_0 [g(p, p'; q_i, a_i) - g(p + q, p' + q; q_i, a_i)]. \quad (17.66)$$

Во втором из интегралов (17.66) сделаем замену переменных, обращаясь с этим интегралом так, как если бы он был сходящимся. Для обоснования этой процедуры необходимо, как и при вычислении поляризации вакуума, сначала регуляризовать подынтегральное выражение, а затем сделать замену переменных. В результате получим $\mathcal{R} = 0$.

Таким образом, утверждение 1 доказано, и при вычислении S -матричных элементов $D_F^{\text{tr}}{}_{\mu\nu}$ можно заменить на

$$iD_F^{\text{tr}}{}_{\mu\nu} \rightarrow +ig_{\mu\nu}D_F(q) - \frac{i\eta_\mu\eta_\nu}{(q\eta)^2 - q^2}. \quad (17.67)$$

В координатном пространстве (см. (14.55)) имеем

$$iD_F^{\text{tr}}(x)_{\mu\nu} \rightarrow +ig_{\mu\nu}D_F(x) - \frac{i\delta(t)\eta_\mu\eta_\nu}{4\pi|\mathbf{x}|}. \quad (17.68)$$

Последний член в (17.68) имеет тот же вид, что и кулоновское взаимодействие в (17.60). Покажем, что на самом деле указанные два члена в точности сокращаются (утверждение 2).

Для доказательства нужно лишь тщательно пересчитать графики. Гамильтониан взаимодействия содержит как член с поперечными фотонами

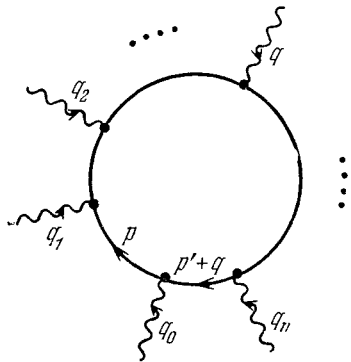


Рис. 17.15. Замкнутая фермионная петля, содержащая n фотонных линий.

$$\int H_I^{\text{tr}}(t) dt = e_0 \int d^4 y : \bar{\Psi}_{\text{in}}(y) \gamma_\mu \Psi_{\text{in}}(y) : A_{\text{in}}^\mu(y) \equiv e_0 \int d^4 y j_\mu^{\text{in}}(y) A_{\text{in}}^\mu(y), \quad (17.69)$$

так и мгновенное кулоновское взаимодействие

$$\int H_I^{к\у\lambda} dt = \frac{1}{2} e_0^2 \int d^4 z d^4 z' \delta(z_0 - z'_0) j_u^{in}(z') \frac{\eta^\mu \eta^\nu}{4\pi |z' - z|} j_\nu^{in}(z'). \quad (17.70)$$

Рассмотрим отдельный член в разложении (17.22), содержащий $2n$ множителей H_I^{tr} и m множителей $H_I^{к\у\lambda}$. Порядок этого члена есть $N = 2n + m$. Однако его статистический вес в формуле Вика равен не $[N!]^{-1} = [(2n + m)!]^{-1}$, а $[(2n)!m!]^{-1}$, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{N!} \left(\int H_I^{tr} dt + \int H_I^{к\у\lambda} dt \right)^N &= \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{m=0}^N \frac{N!}{m!(N-m)!} \left[\int H_I^{tr} dt \right]^{N-m} \left[\int H_I^{к\у\lambda} dt \right]^m. \end{aligned}$$

Легко видеть, что статистические множители сокращаются, если просуммировать все топологически эквивалентные графики. Действительно, имеется $(2n!)m!$ тождественных диаграмм, полученных перестановкой аргументов y_i друг с другом и аргументов z_i

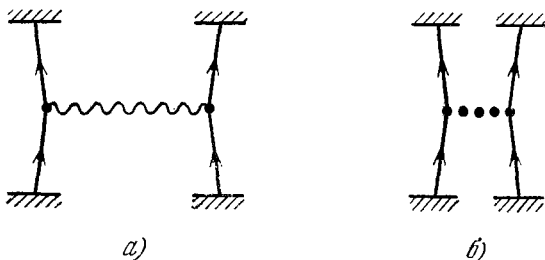


Рис. 17.16. Произвольная диаграмма, содержащая обмен поперечным фотоном (а), мгновенное кулоновское взаимодействие (б).

друг с другом. Кроме того, имеется 2^m топологически эквивалентных графиков, полученных перестановкой пар аргументов z_i и z'_i , в результате сокращаются множители $1/2$ в $H_I^{к\у\lambda}$.

Таким образом, статистический вес каждого топологически неэквивалентного графика равен единице. Любой диаграмме, содержащей обмен поперечным фотоном (рис. 17.16, а), можно сопоставить диаграмму с тем же самым статистическим весом, отвечающую мгновенному кулоновскому взаимодействию (рис. 17.16, б). Используя (17.68) и (17.17), найдем вклад этих диаграмм в τ -функцию. Для поперечных фотонов этот вклад равен

$$\int d^4 x d^4 x' (-ie_0 \gamma_\mu) \left[+ ig^{\mu\nu} D_F(x - x') - \frac{i\delta(t - t') \eta^\mu \eta^\nu}{4\pi |x - x'|} \right] (-ie_0 \gamma_\nu), \quad (17.71)$$

а для кулоновских сил

$$-ie_0^2 \int d^4x d^4x' \gamma_\mu \frac{\delta(t-t') \eta^\mu \eta^\nu}{4\pi |x-x'|} \gamma_\nu. \quad (17.72)$$

Таким образом, кулоновское взаимодействие сокращает неприятный член в правой части (17.71), в результате мы приходим к ковариантному фотонному пропагатору.

§ 123. Излучение мягких фотонов и инфракрасная катастрофа

Мы завершим эту главу рассмотрением взаимодействия поля излучения с классическим распределением токов. Эта интересная с физической точки зрения задача допускает точное решение. Вычислим, в частности, число испускаемых фотонов и их распределение по частоте. С этой целью мы явно построим оператор S и проведем вычисление интересующих нас матричных элементов.

В калибровке излучения уравнение для поля имеет вид¹⁾

$$\square \mathbf{A}(x) = \mathbf{j}(x), \quad (17.73)$$

где $\mathbf{j}(x)$ — заданная c -числовая функция, причем

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(x) = 0. \quad (17.74)$$

Перепишем (17.73) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= \mathbf{A}_{\text{in}}(x) + \int d^4y D_{\text{ret}}(x-y) \mathbf{j}(y) = \\ &= \mathbf{A}_{\text{out}}(x) + \int d^4y D_{\text{adv}}(x-y) \mathbf{j}(y), \end{aligned} \quad (17.75)$$

где положено $Z_3 = 1$, поскольку \mathbf{A} , \mathbf{A}_{in} и \mathbf{A}_{out} отличаются только на c -число и удовлетворяют одним и тем же перестановочным соотношениям. Согласно (16.66), S -матрица удовлетворяет соотношению

$$S^{-1} \mathbf{A}_{\text{in}}(x) S = \mathbf{A}_{\text{out}}(x) \quad (17.76)$$

или

$$S^{-1} \mathbf{A}_{\text{in}}(x) S = \mathbf{A}_{\text{in}}(x) + \int d^4y D(x-y) \mathbf{j}(y), \quad (17.77)$$

где

$$-D(z) = D_{\text{adv}}(z) - D_{\text{ret}}(z) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} e^{-ikz} \delta(k^2) \varepsilon(k_0) \quad (17.78)$$

(см. приложение В).

¹⁾ Величина заряда включена в определение тока \mathbf{j} .

Удобно перейти в импульсное пространство, разложив $j(y)$ в интеграл Фурье:

$$j(y) = \int_0^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon(k, \lambda) [j(k, \lambda) e^{-ikx} + j^*(k, \lambda) e^{ikx}], \quad (17.79)$$

тогда (17.77) приобретает вид

$$\begin{aligned} a_{\text{out}}(k, \lambda) &= S^{-1} a_{\text{in}}(k, \lambda) S = a_{\text{in}}(k, \lambda) + \frac{ij(k, \lambda)}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}, \\ S^{-1} a_{\text{in}}^+(k, \lambda) S &= a_{\text{in}}^+(k, \lambda) - \frac{ij^*(k, \lambda)}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}, \quad k^2 = 0. \end{aligned} \quad (17.80)$$

Уравнение (17.80) можно решить в явном виде, поскольку поля $a_{\text{in}}(k, \lambda)$ под действием оператора S смещаются лишь на c -число. С этой целью используем тождество

$$e^B A e^{-B} = A + [B, A], \quad (17.81)$$

справедливое в том случае, когда коммутатор $[B, A]$ есть c -число. Выражение (17.81) наводит на мысль, что B следует выбрать в виде линейной комбинации операторов a_{in} и a_{in}^+ . Условие унитарности позволяет записать следующее общее выражение для оператора S :

$$S = \exp \left\{ i \int d^3k \sum_{\lambda=1}^2 [f(k, \lambda) a_{\text{in}}^+(k, \lambda) + f^*(k, \lambda) a_{\text{in}}(k, \lambda)] \right\}. \quad (17.82)$$

Подставив (17.82) в (17.80), получим

$$f(k, \lambda) = \frac{j(k, \lambda)}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}. \quad (17.83)$$

Для вычисления матричных элементов между in -состояниями удобно представить S -матрицу в нормальной форме. При этом оказывается полезной следующая теорема.

Теорема.

Если $[A, B] = C$ есть c -число, то

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-1/2 [A, B]}. \quad (17.84)$$

Доказательство.

Определим

$$F(\lambda) = e^{\lambda(A+B)} e^{-\lambda B} e^{-\lambda A}.$$

Тогда

$$\frac{dF}{d\lambda} = e^{\lambda(A+B)} [A, e^{-\lambda B}] e^{-\lambda A}.$$

Непосредственно из (17.81) следует, что

$$[A, e^{-\lambda B}] = -\lambda C e^{-\lambda B} \quad \text{и} \quad \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = -\lambda C F(\lambda).$$

Поскольку $F(0) = 1$, $F(\lambda)$ является c -числом, в частности

$$F(1) = e^{-1/2 C}.$$

Применяя эту теорему, получаем

$$\begin{aligned} S = & \exp \left[i \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 j(k, \lambda) a_{\text{in}}^+(k, \lambda) \right] \times \\ & \times \exp \left[i \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 j^*(k, \lambda) a_{\text{in}}(k, \lambda) \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{2|\mathbf{k}|} \sum_{\lambda=1}^2 |j(k, \lambda)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (17.85)$$

Теперь мы можем вычислить вероятность P_n процесса, в котором при взаимодействии с током испускается n фотонов с заданными импульсами и поляризацией:

$$\begin{aligned} P_n(\mathcal{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \sum_{k_i \in \mathcal{R}} |\langle k_1 \lambda_1 \dots k_n \lambda_n \text{ out} | 0 \text{ in} \rangle|^2 = \\ &= \sum_{k_i \in \mathcal{R}} |\langle k_1 \lambda_1 \dots k_n \lambda_n \text{ in} | S | 0 \text{ in} \rangle|^2, \end{aligned} \quad (17.86)$$

где \mathcal{R} — некоторая область в $3n$ -мерном фазовом пространстве. Обращаясь к (17.85), мы замечаем, что вклад в S дает только член, содержащий n операторов рождения и не содержащий операторов уничтожения вовсе. Поэтому

$$\begin{aligned} P_n(\mathcal{R}, \lambda_1 \dots \lambda_n) &= \left\{ \exp \left[-\int \frac{d^3 k}{2|\mathbf{k}|} \sum_{\lambda=1}^2 |j(k, \lambda)|^2 \right] \right\} \times \\ & \times \sum_{k_i \in \mathcal{R}} |\langle k_1 \lambda_1 \dots k_n \lambda_n \text{ in} | \frac{i^n}{n!} \times \\ & \times \left(\int \frac{d^3 k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 j(k, \lambda) a_{\text{in}}^+(k, \lambda) \right)^n | 0 \text{ in} \rangle|^2. \end{aligned} \quad (17.87)$$

Если мы интересуемся вероятностью испускания фотонов с произвольной поляризацией в заданный интервал импульсов R

(т. е. $k_1 \in R, \dots, k_n \in R$), то выражение (17.87) можно упростить. Запишем сначала:

$$P_n(R) = P_0 \sum_{\lambda_i=1}^2 \sum_{k_i \in R} |\langle k_1 \lambda_1 \dots k_n \lambda_n \text{ in} | \times \\ \times \frac{i^n}{n!} \left[\int_R \frac{d^3 k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 j(k, \lambda) a_{\text{in}}^+(k, \lambda) \right]^n |0 \text{ in}\rangle|^2, \quad (17.88)$$

где

$$P_0 = \exp \left[- \int \frac{d^3 k}{2|\mathbf{k}|} \sum_{\lambda=1}^2 |j(k, \lambda)|^2 \right] \quad (17.89)$$

есть вероятность того, что не испускается ни один фотон¹⁾. Поскольку интеграл в (17.88) вычисляется по ограниченной области R , внешнее суммирование может быть формально выполнено по всем k_i ; при этом очевидно, $P_n(R)$ не изменится. В результате получим

$$P_n(R) = P_0 \sum_a |\langle a \text{ in} | \frac{i^n}{n!} \left[\int_R \frac{d^3 k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 j(k, \lambda) a_{\text{in}}^+(k, \lambda) \right]^n |0 \text{ in}\rangle|^2 = \\ = \frac{P_0}{(n!)^2} \langle 0 \text{ in} | \left[\int_R \frac{d^3 k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 j^*(k, \lambda) a_{\text{in}}(k, \lambda) \right]^n \times \\ \times \left[\int_R \frac{d^3 k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 j(k, \lambda) a_{\text{in}}^+(k, \lambda) \right]^n |0 \text{ in}\rangle = \\ = \frac{P_0}{n!} \left[\int_R \frac{d^3 k}{2|\mathbf{k}|} \sum_{\lambda=1}^2 |j(k, \lambda)|^2 \right]^n. \quad (17.90)$$

В том случае, когда R есть все импульсное пространство, вероятность P_n излучения n фотонов имеет вид распределения Пуассона

$$P_n = \frac{e^{-\bar{n}} (\bar{n})^n}{n!}, \quad (17.91)$$

¹⁾ При рассеянии на внешнем потенциале, например при рассеянии электронов в кулоновском поле (гл. 7), для получения конечного результата необходимо учитывать графики с виртуальными фотонами в промежуточном состоянии. Вклад таких графиков содержится в $P_0 = \langle 0 \text{ out} | 0 \text{ in} \rangle$, поскольку в этом случае электронное состояние включено в $|0 \text{ in}\rangle$ и $|0 \text{ out}\rangle$.

где среднее число испускаемых фотонов \bar{n} равно:

$$\bar{n} = \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|} \sum_{\lambda=1}^2 |j(k, \lambda)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n. \quad (17.92)$$

Очевидно, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, что отвечает сохранению полной вероятности.

То обстоятельство, что для числа испускаемых фотонов справедливо распределение Пуассона, означает, что фотоны излучаются статистически независимо. Статистическая независимость в свою очередь есть следствие сделанного предположения о классическом характере источников тока, на которые излучение не оказывает обратного воздействия; в результате каждый фотон испускается в одинаковых условиях.

Для вычисления полной энергии излучения используем (17.86):

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1 \lambda_1, \dots, k_n \lambda_n} |\langle k_1 \lambda_1 \dots k_n \lambda_n \text{ in} | S | 0 \text{ in} \rangle|^2 \times \\ \times (k_1 + k_2 + \dots + k_n) = \langle 0 \text{ in} | S^{-1} H_0(A_{\text{in}}) S | 0 \text{ in} \rangle, \quad (17.93)$$

где

$$H_0(A_{\text{in}}) = \int d^3k k \sum_{\lambda=1}^2 a_{\text{in}}^+(k, \lambda) a_{\text{in}}(k, \lambda)$$

— гамильтониан свободного поля излучения. Учитывая (17.80), получаем

$$\bar{E} = \langle 0 \text{ in} | \int d^3k k \sum_{\lambda=1}^2 \left[a_{\text{in}}^+(k, \lambda) - \frac{ij^*(k, \lambda)}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \right] \times \\ \times \left[a_{\text{in}}(k, \lambda) + \frac{ij(k, \lambda)}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \right] | 0 \text{ in} \rangle = \frac{1}{2} \int d^3k \sum_{\lambda=1}^2 |j(k, \lambda)|^2 \quad (17.94)$$

в согласии с известным результатом классической электродинамики.

Поскольку источник тока излучает конечное количество энергии на единичный интервал частот при $k \rightarrow 0$, то $j(k, \lambda) \sim 1/k$ при $k \rightarrow 0$. Например, для точечного заряда, который мгновенно меняет направление своего движения,

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon(k, \lambda) j(k, \lambda) \sim e \left(\frac{\beta}{k - \mathbf{k} \cdot \beta} - \frac{\beta'}{k - \mathbf{k} \cdot \beta'} \right),$$

где β (β') — скорость до (после) излучения. Если ток ведет себя указанным образом, то среднее число испускаемых фотонов

равно бесконечности, поскольку, согласно (17.92), бесконечно число фотонов с частотой $k \sim 0$. Мы сталкиваемся, таким образом, с «инфракрасной катастрофой», обсуждавшейся ранее в гл. 7 и 8. В том случае, когда свойства тока приближаются к классическим, имеется конечная вероятность испустить любое число фотонов с $k \sim 0$; например, если выбрать R в виде $0 \leq |\mathbf{k}| \leq \Delta$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(|\mathbf{k}| \leq \Delta) = \exp \left[- \int_{k > \Delta} \frac{d^3 k}{2|\mathbf{k}|} \sum_{\lambda=1}^2 |j(k, \lambda)|^2 \right]. \quad (17.95)$$

Отношение вероятности излучения $n+1$ фотонов к вероятности излучения n фотонов равно

$$\frac{1}{n+1} \int d^3 k \frac{|j(k, \lambda)|^2}{2|\mathbf{k}|} \sim \alpha \int \frac{dk}{k}$$

и расходится при $k \rightarrow 0$. Таким образом, теория возмущений, основанная на разложении по степеням α , неприменима в предельном случае больших длин волн. Близкий к нашему изложению анализ возникающих при этом расходимостей был дан Блохом и Нордсиком [76] (см. также [77]) в 1937 г.

ЗАДАЧИ

1. Вывести формулу (17.5), описывающую развитие во времени канонического импульса.

2. Вычислить U -матрицу для клейн-гордоновской частицы, связанной с постоянным s -числовым током: $(\square + m^2)\varphi = j$. Обсудить результат в связи с теоремой Хаага (см. примечание на стр. 183), согласно которой в данном случае оператор $U(t)$ не существует. Построить S -матрицу.

3. Показать, что вакуумные петли, содержащиеся в $\sum_k D_k$ в (17.38), можно собрать в $\exp \left(\sum_i \frac{1}{\eta_i} B_i \right)$, где B_i — связанные петли, а η_i — их порядок.

4. Выписать общую спиновую и изоспиновую структуру πN -амплитуды.

5. Проверить, что S -матрица π -мезон-нуклонного рассеяния в пределе $q \rightarrow 0$ (q — 4-импульс пиона) не зависит от изотопического спина (см. § 120).

6. Вычислить расходящуюся часть в (17.49) и показать, что расходимость можно устранить подходящим выбором контрчлена в (17.50).

7. Доказать свойство кроссинг-симметрии (17.53) для амплитуды $\pi - \pi$ -рассеяния.

8. Показать, что результат (17.64) не изменится, если учесть массовый контрчлен.

9. Вычислить Φ_{in} и Φ_{out} для лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_S + g : \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} :,$$

где \mathcal{L}_D и \mathcal{L}_S — свободные лагранжианы для дираковской и скалярной частиц, и показать, что $S = 1$. Совпадает ли в этом случае точный фейнмановский пропагатор для дираковской частицы со свободным: $S'_F = S_F$?

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

§ 124. Причинность и соотношения Крамерса — Кронига

Обсуждавшийся до сих пор метод вычисления амплитуд перехода ограничивается случаем малой константы связи, которая является параметром разложения рядов теории возмущений. Например, в квантовой электродинамике этот параметр равен $\alpha = 1/137$. В предыдущей главе, исходя из формализма теории поля, мы развили систематический (хотя и формальный) метод, основанный на использовании диаграммной техники, а также сформулировали правила вычисления фейнмановских диаграмм.

Указанный подход оказывается, однако, совершенно бесполезным в том случае, когда мы рассматриваем сильные взаимодействия. В гл. 10 при обсуждении мезон-нуклонного и нуклон-нуклонного рассеяния мы убедились в необходимости привлечения иной, более адекватной техники. В настоящее время наиболее плодотворным методом в теории сильных взаимодействий является метод «дисперсионных соотношений», который основывается на экстраполяции в комплексную плоскость. Локальная структура коммутационных соотношений и полевые уравнения накладывают некоторые ограничения на поведение амплитуд рассеяния, рассматриваемых как функции энергии и переданного импульса, при аналитическом продолжении амплитуд по этим переменным от физических значений в нефизическую комплексную плоскость. При этом оказывается возможным установить ряд соотношений, позволяющих либо вычислить эти амплитуды, либо выразить их через другие наблюдаемые величины [78, 79].

Метод дисперсионных соотношений в теории поля был инспирирован соотношениями Крамерса — Кронига в оптике [80], которые мы кратко рассмотрим для иллюстрации основных идей дисперсионного подхода. Соотношения Крамерса — Кронига выражают действительную часть амплитуды рассеяния вперед

света на атомах через интеграл от сечения поглощения. В макроскопическом смысле это соотношение устанавливает связь между показателем преломления в веществе и интегралом (по всем частотам) от коэффициента поглощения. При выводе соотношений Крамерса — Кронига нужно прежде всего убедиться в том, что амплитуда рассеяния на нулевой угол аналитична в верхней полуплоскости комплексной ω -плоскости. Этот факт в свою очередь является математическим выражением того обстоятельства, что электромагнитные сигналы не могут распространяться со скоростью, большей скорости света.

Переходя к выводу соотношений Крамерса — Кронига, рассмотрим монохроматическую волну с амплитудой a_{inc} , которая распространяется вдоль оси x и падает затем на рассеивающий центр:

$$a_{\text{inc}}(\omega) e^{-i\omega(t-x)}.$$

Амплитуда рассеянной вперед волны a_{scatt} линейно связана с амплитудой падающей волны

$$a_{\text{scatt}}(\omega) = f(\omega) a_{\text{inc}}(\omega),$$

где $f(\omega)$ — амплитуда рассеяния на нулевой угол. Асимптотически

$$a_{\text{scatt}}(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} a_{\text{scatt}}(\omega) \frac{e^{-i\omega(t-x)}}{x}.$$

Взяв суперпозицию волн с различными частотами, получим

$$A_{\text{inc}}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' a_{\text{inc}}(\omega') e^{-i\omega'(t-x)}, \quad (18.1)$$

$$A_{\text{scatt}}(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' f(\omega') a_{\text{inc}}(\omega') e^{-i\omega'(t-x)} \quad (18.2)$$

для падающей и рассеянной на нулевой угол волн соответственно. Учтем далее, что (18.1) представляет световой сигнал, поэтому $A_{\text{inc}}(x, t) = 0$ при $x > t$. Этому требованию, вытекающему из физических соображений, можно придать математическую формулировку, рассмотрев фурье-амплитуды

$$a_{\text{inc}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dx A_{\text{inc}}(x, 0) e^{-i\omega x}, \quad (18.3)$$

где верхний предел выбран в соответствии с условием $A_{\text{inc}}(x, 0) = 0$ при $x \geq 0$. Из (18.3) следует, что $a_{\text{inc}}(\omega)$ может

быть аналитически продолжена в верхнюю часть комплексной ω -плоскости. Действительно, при $\omega \rightarrow \omega + i|\gamma|$

$$a_{\text{Inc}}(\omega + i|\gamma|) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dx A_{\text{Inc}}(x, 0) e^{-i\omega x - |\gamma||x|}, \quad (18.4)$$

и интеграл абсолютно сходится. Принцип причинности означает, что

$$A_{\text{scatt}}(x, t) = 0 \quad \text{при } x > t,$$

т. е. что световой сигнал не может достигнуть точек, лежащих впереди фронта падающей волны. Используя те же аргументы, что и выше, мы заключаем из (18.2), что функция $a_{\text{Inc}}(\omega)f(\omega)$

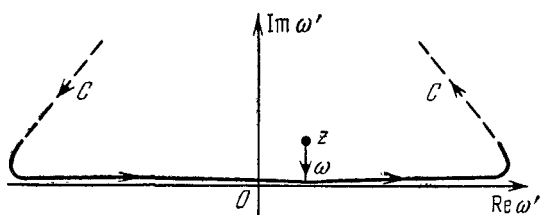


Рис. 18.1. Контур в верхней полуплоскости ω' , используемый в формуле Коши.

также аналитична в верхней полуплоскости. Следовательно¹⁾, функция $f(\omega)$ сама по себе является аналитической в верхней полуплоскости. Запишем для нее формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\omega' f(\omega')}{\omega' - z}, \quad (18.5)$$

которая справедлива для любого $z = \omega + i|\gamma|$ в верхней полуплоскости. Контур C в (18.5) указан на рис. 18.1. Если z стремится к физическому значению ω , оставаясь при этом в верхней полуплоскости, то

$$f(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\omega + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' f(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{1}{2} f(\omega) + \frac{1}{2} C_{\infty}, \quad (18.6)$$

где $P \int \dots$ означает главное значение интеграла. Второй член в этом выражении возникает при интегрировании по полуокружности, окружающей полюс $\omega' = \omega$, а комплексная константа

¹⁾ Амплитуда f не имеет полюсов, связанных с нулями в $a_{\text{Inc}}(\omega)$, поскольку функция $a_{\text{Inc}}(\omega)$ — фурье-компонента волнового пакета — совершенно произвольна.

$C_\infty = C_\infty + iC'_\infty$ есть вклад интеграла по полуокружности бесконечно большого радиуса. Разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\operatorname{Re} f(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} f(\omega')}{\omega' - \omega} + C_\infty, \quad (18.7a)$$

$$\operatorname{Im} f(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Re} f(\omega')}{\omega' - \omega} + C'_\infty. \quad (18.7b)$$

Легко видеть, что уравнение (18.7a) есть действительная часть от выражения

$$f(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\omega + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} f(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + C_\infty, \quad (18.8)$$

которое и представляет наиболее общий вид дисперсионного соотношения.

Величина C_∞ не равна нулю в том случае, когда $f(\omega)$ не исчезает при $\omega \rightarrow \infty$. Вклад большого полукруга можно устранить, сделав «вычитания». С этой целью запишем теорему Коши не для $f(\omega)$, а для $f(\omega)/\omega$; в этом случае подынтегральная функция имеет дополнительный полюс при $\omega = 0$, но зато лучше ведет себя на бесконечности. Если $f(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ ограничена константой, то вместо (18.7a) получаем

$$\frac{\operatorname{Re} f(\omega)}{\omega} = \frac{\operatorname{Re} f(0)}{\omega} + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} f(\omega')}{\omega'(\omega' - \omega)}. \quad (18.9)$$

Эта формула называется дисперсионным соотношением с одним вычитанием. В том случае, когда $f(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, величина $C_\infty = 0$ и вычитания не нужны.

Дисперсионные соотношения в форме (18.7) или (18.9) позволяют вычислить амплитуду рассеяния, если известна ее мнимая часть. Если необходимо одно вычитание, то нужно дополнительно задать функцию $f(\omega)$ при $\omega = 0$, если же требуется несколько вычитаний, то нужно задать еще и производные $f(\omega)$ при $\omega = 0$. Отметим, что для вычисления амплитуды при какой-либо одной частоте нужно знать мнимую часть при всех частотах — этот факт является до некоторой степени компенсацией за преимущества дисперсионного метода.

На практике, однако, это обстоятельство не приводит к затруднениям, поскольку мнимая часть амплитуды рассеяния вперед с частотой $\omega > 0$ связана, в силу оптической теоремы, с полным сечением поглощения света с той же частотой

$$\operatorname{Im} f(\omega) = \frac{\omega}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}(\omega), \quad (18.10)$$

Далее, можно избавиться от области отрицательных ω в дисперсионном интеграле (18.7), заметив, что поскольку амплитуды падающей и рассеянной волн вещественны, то

$$a_{\text{inc}}(-\omega) = a_{\text{inc}}^*(\omega), \quad f(-\omega) = f^*(\omega)$$

и

$$\text{Im } f(-\omega) = -\text{Im } f(\omega).$$

Поэтому дисперсионный интеграл содержит только положительные частоты

$$\text{Re } f(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \text{Im } f(\omega') \quad (18.11a)$$

или

$$\text{Re } f(\omega) = \text{Re } f(0) + \frac{2\omega^2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{d\omega' \text{Im } f(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}. \quad (18.11b)$$

Таким образом, принцип причинности распространения световых сигналов в сочетании с оптической теоремой, которая выражает сохранение вероятности при рассеянии, позволяет сформулировать следующее утверждение. Действительная часть когерентной амплитуды рассеяния света вперед на атомах вещества, т. е. коэффициент поглощения может быть вычислен из дисперсионных соотношений, если в последних задать более простую величину, измеренную на опыте, либо вычисленную независимо, которая описывает поглощение света в веществе. Выражение

$$\text{Re } f(\omega) = \text{Re } f(0) + \frac{\omega^2}{2\pi^2} P \int_0^{\infty} \frac{d\omega' \sigma_{\text{tot}}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (18.12)$$

и представляет соотношение Крамерса — Кронига.

§ 125. Приложение к физике высоких энергий

Метод дисперсионных соотношений находится в близкой аналогии с соотношениями Крамерса — Кронига. Этот метод целиком основывается на принципе причинности, который позволяет сделать определенные утверждения о свойствах аналитичности амплитуд. После того как область аналитичности установлена, амплитуды по теореме Коши выражаются через вычеты в полюсах и скачки на разрезах («абсорптивные части») вида (18.8)¹⁾

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [f(\omega + i\varepsilon) - f(\omega - i\varepsilon)] = 2i \text{Im } f(\omega). \quad (18.13)$$

¹⁾ Мы используем принцип отражения Шварца $f(\omega^*) = f^*(\omega)$, позволяющий определить f в нижней полуплоскости, которая отделена разрезом от верхней полуплоскости.

Чтобы затем получить соотношения между измеренными величинами, нужно использовать унитарность S -матрицы. Это свойство позволяет выразить абсорптивные части через другие величины, непосредственно измеряемые на опыте. Хотя проблемы, с которыми приходится сталкиваться при конкретной реализации указанной программы, гораздо более серьезны, чем в примере с соотношениями Крамерса — Кронига, основные идеи остаются при этом теми же самыми.

Отправной точкой при строгом доказательстве дисперсионных соотношений в теории поля являются аксиомы, сформулированные в гл. 16, и особенно важнейшая из них, утверждающая, что коммутаторы бозе-эйнштейновских полей и антикоммутаторы ферми-дираковских полей равны нулю для пространственно-подобных интервалов

$$\begin{aligned} \{\psi_i(x), \bar{\psi}_j(y)\} &= \{\psi_i(x), \psi_j(y)\} = 0, \\ [\varphi_i(x), \varphi_j(y)] &= 0, \\ [\varphi_i(x), \psi_j(y)] &= 0, \quad (x - y)^2 < 0. \end{aligned} \quad (18.14)$$

Выписанные соотношения локальной коммутативности заменяют условие причинности, использованное в предыдущем параграфе при обсуждении рассеяния света на атомах. Эти соотношения действительно выражают свойство микропричинности в теории поля, поскольку из них следует, что измерения амплитуд бозе-эйнштейновских полей независимы, коль скоро эти поля разделены пространственно-подобным интервалом. То же относится и к билинейным формам полей Ферми — Дирака, посредством которых выражаются локальные плотности физических величин таких, как заряд или энергия.

Условие микропричинности позволяет установить область аналитичности функций Грина и S -матричных элементов, когда один или несколько их аргументов аналитически продолжаются от своих физических значений. Нахождение области аналитичности представляет главную проблему в дисперсионном методе; при этом мы сталкиваемся с задачей, несравненно более сложной, чем рассмотренный выше случай рассеяния света на свете на нулевой угол. Пожалуй, простейший пример строгого доказательства такого рода основывается на рассмотрении представления Челлена — Лемана для функций распространения.

В гл. 16 мы показали, что из аксиом теории поля, в частности из перестановочных соотношений (18.14), можно вывести спектральное разложение для функции Грина (например, бозонных полей):

$$\Delta'_F(x - y) = -i \langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(y)) | 0 \rangle = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \Delta_F(x - y, \sigma). \quad (18.15)$$

Выполнив фурье-преобразование

$$\Delta_F(q) = \int_0^{\infty} \frac{d\sigma^2 \rho(\sigma^2)}{q^2 - \sigma^2 + i\epsilon},$$

мы видим, что Δ_F аналитична всюду в q^2 -плоскости, за исключением разреза вдоль положительной вещественной полуоси. Поэтому Δ_F полностью определяется через скачок на разрезе, т. е. спектральную функцию (16.27)

$$\rho(\sigma^2) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - \sigma) |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2. \quad (18.16)$$

Эта функция практически, конечно, может быть вычислена лишь приближенно. Выражение (18.16) имеет тот же смысл, что и оптическая теорема в примере Крамерса — Кронига. Это уравнение выражает скачок $2\pi\rho(\sigma^2)$ через вероятность распада виртуального мезона $\varphi(0)|0\rangle$ с массой σ в энергетически разрешенные физические состояния $|n\rangle$. Структура выражения (18.16) типична для всех выражений, определяющих скачки в дисперсионных задачах.

При обобщении дисперсионного подхода на случай вычисления вершинных функций и амплитуд рассеяния мы сталкиваемся с огромными математическими трудностями; при этом приходится иметь дело с большим числом переменных, причем число сингулярностей быстро растет, а их структура становится все более и более сложной. В этом случае не только задача исследования комплексной плоскости оказывается весьма трудной, но и найденные сингулярности имеют весьма необычный вид и находятся при нефизических значениях аргументов, недоступных непосредственному измерению. В такой ситуации возникает необходимость аналитически продолжать само условие унитарности, позволяющее вычислить скачки амплитуд. Несмотря на указанные трудности, в теории дисперсионных соотношений был получен ряд строгих результатов, в частности были доказаны дисперсионные соотношения по переданному импульсу для π -мезон-нуклонного рассеяния [81, 82].

Ниже мы ограничимся более скромной задачей. Мы рассмотрим положение особенностей отдельных фейнмановских диаграмм. Тем самым мы сможем сделать определенные утверждения об области аналитичности суммы всех фейнмановских диаграмм, хотя последняя может иметь и дополнительные сингулярности [83]. Объединяя далее эти свойства аналитичности с унитарностью S -матрицы, мы проиллюстрируем полезность применения дисперсионного метода для вычисления вершинных функций и амплитуд.

§ 126. Аналитические свойства вершинных диаграмм в теории возмущений

Чтобы пояснить метод нахождения особенностей произвольных фейнмановских диаграмм, рассмотрим вклад простейших диаграмм в электромагнитный форм-фактор π -мезона. Будем полагать, что форм-фактор обусловлен связью π -мезона с нуклон-антинуклонной парой. Соответствующая диаграмма изо-

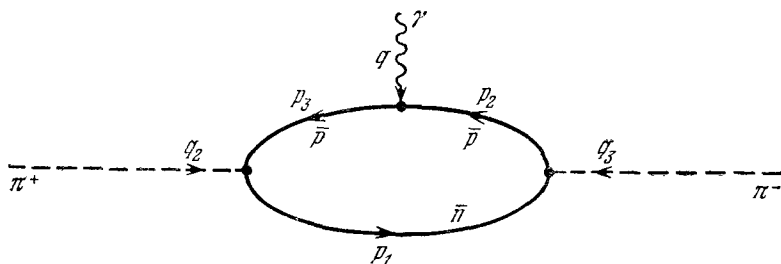


Рис. 18.2. Вклад нуклонной петли в электромагнитный форм-фактор заряженного пиона.

бражена на рис. 18.2, а отвечающая ей амплитуда с точностью до несущественных множителей равна

$$(q_2 - q_3)_\mu F_\pi(q^2) \sim \int d^4 p_1 \text{Sp} \gamma_5 \frac{1}{\hat{p}_1 - M} \gamma_5 \frac{1}{\hat{p}_3 - M} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}_2 - M}. \quad (18.17)$$

Импульсы указаны на рисунке, причем

$$p_2 = p_1 + q_3, \quad p_3 = p_1 - q_2, \quad q = -q_2 - q_3, \quad (18.18)$$

а внешние импульсы удовлетворяют условию

$$q_2^2 = q_3^2 = \mu^2.$$

Предполагается, что масса нуклона M имеет бесконечно малую отрицательную мнимую часть.

Векторная форма выражения (18.17), равно как и зависимость F_π только от переменной q^2 , обусловлены лоренцевой инвариантностью. Кроме того, в силу сохранения тока (гл. 10) член, пропорциональный $q_\mu = -(q_2 + q_3)_\mu$, отсутствует. Нас интересуют свойства аналитичности функции $F_\pi(q^2)$. Для их исследования введем вначале фейнмановские параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так, чтобы знаменатели в (18.17) можно было записать в виде, удобном для последующего интегрирования по импульсу.

Используя формулу ¹⁾

$$\frac{1}{ABC} = 2! \int_0^1 da_1 \int_0^1 da_2 \int_0^1 da_3 \frac{\delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)}{(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3)^3}, \quad (18.19)$$

имеем

$$(q_2 - q_3)_\mu F_\pi(q^2) \sim \int d^4 p_1 \int_0^1 da_1 da_2 da_3 \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i\right) \times \\ \times \frac{\text{Sp } \gamma_5 (\hat{p}_1 + M) \gamma_5 (\hat{p}_3 + M) \gamma_\mu (\hat{p}_2 + M)}{\left[\sum_{i=1}^3 (p_i^2 - M^2) \alpha_i\right]^3}. \quad (18.20)$$

Интеграл в (18.17) или (18.20) расходится на верхнем пределе, что отвечает бесконечной перенормировке вершины (см. гл. 8), и приобретает смысл либо после обрезания при больших импульсах, либо с помощью регуляризации. Эта расходимость, однако, несущественна при рассмотрении аналитических свойств $F_\pi(q^2)$.

Изменим порядок интегрирования ²⁾ и вычислим вначале интеграл по импульсу. С этой целью введем новую переменную интегрирования l :

$$p_1 = k_1 + l, \quad p_2 = k_2 + l, \quad p_3 = k_3 + l, \quad (18.21)$$

где векторы k_i снова удовлетворяют соотношениям вида (18.18), вытекающим из сохранения импульса:

$$k_1 = k_2 - q_3 = k_3 + q_2. \quad (18.22)$$

Знаменатель подынтегрального выражения в (18.20) равен кубу выражения

$$D = \sum_i (k_i^2 - M^2) \alpha_i + l^2 \sum_i \alpha_i + 2l \sum_i k_i \alpha_i. \quad (18.23)$$

Для того чтобы устранить последний член в D , положим

$$\sum_{i=1}^3 k_i \alpha_i = 0. \quad (18.24)$$

¹⁾ Напомним формулу (8.58). Отметим, что эта формула верна при условии, что мнимые части A , B и C имеют один и тот же знак.

²⁾ Такая перестановка возможна, поскольку после регуляризации интеграл абсолютно сходится.

Четыре уравнения (18.24) совместно с восемью уравнениями (18.22) позволяют однозначно определить импульсы k_i :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{q_2 \alpha_3 - q_3 \alpha_2}{\Delta}, & k_3 &= \frac{q \alpha_2 - q_2 \alpha_1}{\Delta}, \\ k_2 &= \frac{q_3 \alpha_1 - q \alpha_3}{\Delta}, & \Delta &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1. \end{aligned} \quad (18.25)$$

Выполнив интегрирование по d^4l , получаем¹⁾

$$\begin{aligned} F_\pi(q^2) \sim \int_0^1 da_1 \int_0^1 da_2 \int_0^1 da_3 \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i\right) \times \\ \times \left[\frac{N_1(q^2, \alpha_i)}{J(q^2, \alpha_i)} + N_2(q^2, \alpha_i) \ln \frac{\Lambda^2}{-J(q^2, \alpha_i)} \right] \end{aligned} \quad (18.26)$$

Величины N_1 и N_2 возникают из числителя в (18.20), они сводятся к полиномам по q^2 с коэффициентами, зависящими от α_i ; Λ^2 есть параметр обрезания. Аналитические свойства $F_\pi(q^2)$ определяются функцией $J(q^2, \alpha_i)$, которая остается в знаменателе после интегрирования по d^4l :

$$\begin{aligned} J(q^2, \alpha_i) &= \sum_{i=1}^3 (k_i^2 - M^2) \alpha_i = \\ &= q^2 \alpha_2 \alpha_3 + q_3^2 \alpha_2 \alpha_1 + q_2^2 \alpha_1 \alpha_3 - M^2 = \\ &= q^2 \alpha_2 \alpha_3 + \mu^2 \alpha_1 (1 - \alpha_1) - M^2. \end{aligned} \quad (18.27)$$

Последнее выражение в (18.27) следует из (18.25); в (18.27) учтено также, что π -мезон находится на массовой поверхности $q_2^2 = q_3^2 = \mu^2$.

Из (18.26) следует, что особенность в $F_\pi(q^2)$ может возникнуть в том и только в том случае, когда J обращается в нуль в некоторой точке, лежащей внутри-области интегрирования по α . Поскольку нули J определяют аналитическую структуру функции $F_\pi(q^2)$, последняя имеет те же аналитические свойства, что и

$$I(q^2) = \int_0^1 da_1 \int_0^1 da_2 \int_0^1 da_3 \frac{\delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)}{q^2 \alpha_2 \alpha_3 + \mu^2 \alpha_1 (1 - \alpha_1) - M^2 + i\epsilon}. \quad (18.28)$$

Здесь мы опустили несущественные численные множители и выписали в явном виде бесконечно малую мнимую добавку, которая возникает из мнимых добавок в массах фейнмановских пропагаторов.

¹⁾ Вычисления производятся как и в гл. 8, см. примечание на стр. 172 первого тома.

Функция $I(q^2)$, а вместе с ней и $F_\pi(q^2)$, аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной q^2 . Действительно, интеграл (18.28) существует для всех $q^2 = u + iv$ с $v > 0$. Если $I(q^2)$ вещественна для некоторых вещественных q^2 , то с помощью принципа отражения Шварца форм-фактор $F_\pi(q^2)$ может быть аналитически продолжен в нижнюю полуплоскость:

$$F_\pi(u - iv) = F_\pi^*(u + iv).$$

Из физических соображений можно ожидать, что функция $F_\pi(q^2)$ в некоторой области переменной q^2 должна быть вещественной. Действительно, рассмотрим пространственно-подобные значения q^2 ($q^2 < 0$). В этой области $F_\pi(q^2)$ дает вклад в амплитуду электрон-пионного рассеяния, причем в борновском приближении по электрическому заряду этот вклад чисто вещественный, что можно проверить явным вычислением. При $q^2 = 0$ знаменатель J отрицателен:

$$J(0, \alpha_i) = \mu^2 \alpha_1 (1 - \alpha_1) - M^2 \leq \frac{\mu^2}{4} - M^2 < 0, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq 1,$$

если $\mu^2 < 4M^2$, что действительно имеет место для пионов и нуклонов¹⁾. В результате мнимая часть (18.28) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0^+$ равна нулю, причем этот результат, очевидно, справедлив и для $q^2 < 0$.

В рассматриваемом случае $F_\pi(q^2)$ можно аналитически продолжить в нижнюю полуплоскость q^2 , в результате $F_\pi(q^2)$ оказывается аналитичной во всей комплексной плоскости, за исключением, быть может, разреза вдоль вещественной положительной оси. Положение разреза можно найти, вычислив максимум J по отношению к параметрам α_i . Максимизируя по α_2 и α_3 , получаем

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1 - \alpha_1}{2}$$

$$J \leq q^2 \left(\frac{1 - \alpha_1}{2} \right)^2 + \mu^2 \alpha_1 (1 - \alpha_1) - M^2. \quad (18.29)$$

Правая часть в (18.29) может достигать максимального значения либо при $\alpha_1 = 0$, либо при некотором $0 < \alpha_1 < 1$. Прямым вычислением можно убедиться в том, что при $q^2 > 2\mu^2$ максимальное значение достигается на конце интервала: $\alpha_1 = 0$. Для физических значений масс π -мезона и нуклона $\mu^2/M^2 \approx 0,022$

¹⁾ Отметим, что соотношение $\mu^2 < 4M^2$ представляет собой как раз условие стабильности π^- -мезона по отношению к распаду на $n\bar{p}$.

и функция J все еще отрицательна при $q^2 = 2\mu^2$. Поэтому пороговое значение q_i^2 , при котором начинается разрез, равно¹⁾ $q_i^2 = 4M^2$. Это значение отвечает точке

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1/2, \quad q_i^2 = 4M^2 \quad (18.30)$$

в пространстве параметров α_i , в которой $J = 0$. Пороговая энергия $q_i^2 = 4M^2$ представляет собой как раз то значение энергии, при котором виртуальный времениподобный фотон, образованный при столкновении электрон-позитронной пары, может перейти в реальную нуклон-antinуклонную пару, которая затем аннигилирует в пару $\pi^+ + \pi^-$. Указанный процесс также изображается диаграммой рис. 18.2, на которой в этом случае необходимо изменить направление пионных линий. Мы видим, таким образом, что при обсуждении аналитических свойств вершинной функции $F_\pi(q^2)$ необходимо одновременно рассматривать образование пар и рассеяние π -мезонов. В случае рассеяния π -мезонов переданный импульс пространственноподобен, а в случае образования пар — времениподобен.

Результат (18.30) означает, что сингулярности функций Грина лежат при тех же значениях импульсов, при которых разрешены процессы поглощения. Установление подобной связи между сингулярностями и вероятностью абсорптивных процессов является большим достижением дисперсионного подхода.

§ 127. Обобщение на случай произвольных диаграмм и аналогия с электрическими цепями

Переходя от рассмотренного примера к произвольным диаграммам, полезно отделить существенные факторы от несущественных и ввести стандартные обозначения для импульсов и параметров интегрирования. Некоторые пункты ясны уже сейчас.

1. Произвольный матричный элемент имеет вид

$$\mathfrak{M} = \sum_i \mathcal{O}_i F_i(q_1, \dots, q_m), \quad (18.31)$$

где \mathcal{O}_i — произведения внешних импульсов, спиновых матриц и волновых функций, а F_i — зависящие от скалярных произведений внешних импульсов, инвариантные функции, аналитической структурой которых мы интересуемся.

2. Числители в подынтегральных выражениях (например, шпур в (18.20)) несущественны, поскольку после параметриза-

¹⁾ Если $\mu^2 > 2M^2$, то разрез начинается при $q_i^2 = 4\mu^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{4M^2}\right)$. В этом случае, который мы обсудим позднее, разрез называется аномальным.

ции подынтегрального выражения и вычисления интеграла по внутренним импульсам они сводятся к полиномиальным множителям. Эти множители входят в F_i только в виде полиномов, зависящих от скалярных произведений $q_i q_j$.

3. Проблема ультрафиолетовой расходимости здесь не существенна. Если для сходимости интеграла необходимо иметь некоторую степень в знаменателе, этого всегда можно добиться, продифференцировав нужное число раз по внешним импульсам или массам внутренних линий. Такое дифференцирование не изменяет аналитические свойства функции, определенной интегралом. Например, дополнительная степень знаменателя в выражении (18.20) приведет к сходимости интеграла по $d^4 p_1$, при этом его сингулярности, которые определяются нулями J в (18.27), не изменятся.

Удобно рассматривать внешние импульсы всегда входящими в диаграмму; обозначим их через q_1, \dots, q_m . Будем рассматривать только связанные диаграммы, для которых

$$\sum_{s=0}^m q_s = 0.$$

Каждой внутренней линии мы приписываем импульс p_j и массу m_j , как показано на рис. 18.3. В каждой вершине выполняется закон сохранения импульса

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} p_j + \sum_{s=1}^m \bar{\varepsilon}_{is} q_s = 0, \quad (18.32)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если внутренняя линия } j \text{ входит в вершину } i, \\ -1, & \text{если внутренняя линия } j \text{ выходит из вершины } i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Величина $\bar{\varepsilon}_{is}$ аналогичным образом определяется для внешних линий, которые, по определению, всегда входят в вершины.

Каждая диаграмма имеет определенное число k внутренних петель или замкнутых контуров интегрирования. Обозначим переменные, по которым выполняется интегрирование в замкнутых петлях, через l_r . Хотя число независимых l_r определено однозначно, конкретный выбор этих переменных можно осуществить

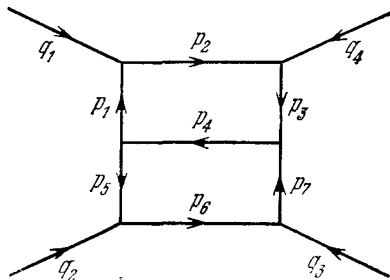


Рис. 18.3. Произвольная фейнмановская диаграмма, в которой внутренние линии обозначены своими импульсами p_j , а внешние, входящие в диаграмму линии — импульсами q_s .

разными способами. Например, на рис. 18.4 указаны два различных способа выбора замкнутых контуров для диаграммы 18.3. Выбрав определенным образом контуры и направления их обхода, нужно определить переменные l_r таким образом, чтобы можно было выполнить интегрирование по импульсам. В примере (18.20) мы выбрали переменные так, чтобы дополнить D

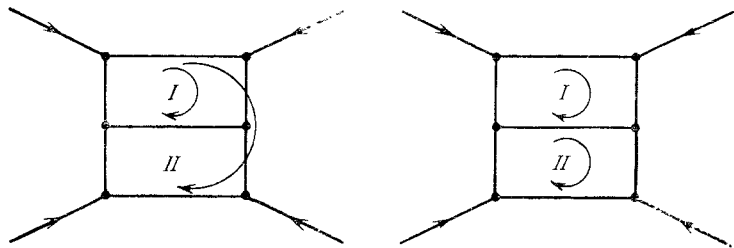


Рис. 18.4. Два возможных способа выбора контуров интегрирования.

до полного квадрата (см. (18.21) — (18.24)). Аналогично следует выбирать переменные для каждой петли и в общем случае.

Положим

$$p_j = k_j + \sum_{r=1}^k \eta_{jr} l_r, \quad (18.33)$$

где

$$\eta_{jr} = \begin{cases} +1, & \text{если } j\text{-я внутренняя линия входит в } r\text{-ю петлю} \\ & \text{и векторы } p_j \text{ и } l_r \text{ параллельны,} \\ -1, & \text{если } j\text{-я внутренняя линия входит в } r\text{-ю петлю} \\ & \text{и векторы } p_j \text{ и } l_r \text{ антипараллельны,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Оптимальный выбор векторов k_j можно сделать после введения фейнмановских параметров. Опишем эту процедуру в общем случае.

Для определения аналитической структуры скалярного «форм-фактора» F_i в (18.31) для каждого данного графика достаточно рассмотреть интеграл

$$\begin{aligned} I(q_1, \dots, q_m) &= \int \frac{d^4 l_1 \dots d^4 l_k}{(p_1^2 - m_1^2) \dots (p_n^2 - m_n^2)} \sim \\ &\sim \int d^4 l_1 \dots d^4 l_k \int_0^1 \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta\left(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j\right)}{\left[\sum_{j=1}^n (p_j^2 - m_j^2) \alpha_j\right]^n} = \end{aligned}$$

$$= \int d^4 l_1 \dots d^4 l_k \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta\left(1 - \sum_j \alpha_j\right) \times \\ \times \frac{1}{\left[\sum_j (k_j^2 - m_j^2) \alpha_j + 2 \sum_{i,r} k_j \alpha_j \eta_{jr} l_r + \sum_{i,r,r'} \alpha_j \eta_{jr} \eta_{jr'} l_r l_{r'}\right]^n}. \quad (18.34)$$

Чтобы устранить в знаменателе (18.34) член, содержащий $l_r l_{r'}$, положим

$$\sum_{j=1}^n k_j \alpha_j \eta_{jr} = 0 \quad (18.35)$$

для каждой петли $r = 1, \dots, k$. Диагонализовав эрмитову матрицу

$$z_{rr'} = \sum_{j=1}^n \eta_{jr} \eta_{jr'} \alpha_j,$$

можно выполнить интегрирование по l_r , при этом имеем

$$I \propto \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta\left(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j\right)}{\Delta^2 \left[\sum_{j=1}^n (k_j^2 - m_j^2) \alpha_j\right]^{n-2k}}, \quad (18.36)$$

где

$$\Delta = \det \|z\|.$$

Импульсы k_j зависят от внешних импульсов q_s и фейнмановских параметров. Они определяются уравнениями (18.35) и законами сохранения импульса (18.32) в каждой вершине, в которых p_j нужно заменить на k_j :

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} k_j + \sum_{s=1}^m \tilde{\varepsilon}_{is} q_s = 0. \quad (18.37)$$

Легко видеть также, что из определения ε_{ij} и η_{jr} следует

$$\sum_j \varepsilon_{ij} \eta_{jr} = 0.$$

Уравнениям (18.35) и (18.37) можно придать форму, которая обнаруживает их полную аналогию с уравнениями электрических цепей. Опустив в некоторых случаях знак минус, получаем

$$\sum_{k_j \text{ в петле } r} k_j \alpha_j = 0, \quad (18.38a)$$

$$\sum_{k_j, q_s \text{ входят в вершину } i} (k_j + q_s) = 0. \quad (18.38b)$$

Эти уравнения естественно интерпретировать, сопоставив фейнмановским диаграммам электрическую цепь, а импульсам — ток. Тогда импульсы k_j имеют смысл внутренних токов в цепи, а q_s — внешних токов, втекающих в рассматриваемый контур. Сопоставим далее параметрам α_j сопротивления j -го участка цепи; тогда уравнения (18.38) в точности совпадают с уравнениями Кирхгофа¹⁾. Уравнение (18.38а) означает, что полное «падение напряжений» на замкнутом контуре равно нулю, а уравнение (18.38б) означает, что равна нулю алгебраическая сумма «токов», входящих в каждую вершину²⁾.

Поучительно снова рассмотреть выражения (18.34) — (18.36), имея на этот раз в виду аналогию с электрическим током. Если пренебречь постоянным членом $-\sum_j m_j^2 \alpha_j$, выражение $\sum_j p_j^2 \alpha_j$ в знаменателе (18.34) можно рассматривать как мощность, выделяющуюся в цепи. По закону сохранения энергии эта мощность равна сумме мощностей, обусловленных внешними и внутренними источниками q_s и l_r :

$$\sum_j p_j^2 \alpha_j = \sum_j k_j^2 \alpha_j + \sum_{rr'} l_r l_{r'} z_{rr'}$$

Здесь k_j — токи в цепи в отсутствие внутренних источников l_r . Эти токи определяются из законов Кирхгофа.

Таким образом, токи и сопротивления сопоставляются импульсам и фейнмановским параметрам. Чтобы дополнить сопоставление, нужно найти физическую аналогию «падению напряжения». Поскольку «напряжение» есть потенциал и очевидным образом связан с вершиной, естественно связать напряжение с координатой вершины x_μ . Тогда первый закон Кирхгофа (18.38а) сводится к утверждению, что сумма разностей координат вершин в любом замкнутом контуре диаграммы равна нулю.

Смысл обсуждаемой аналогии раскрывается глубже при выяснении физического смысла закона Ома

$$V = IR.$$

На нашем языке этот закон имеет вид

$$\Delta x_\mu = k_\mu \alpha, \quad (18.39)$$

где k_μ — импульс некоторой линии, α — соответствующий фейнмановский параметр, Δx_μ — разность координат вершин, которые соединяются этой линией. Уравнение (18.39) можно интерпрети-

¹⁾ Параметры α_j действительны, поэтому рассматриваемая цепь не содержит емкости и индуктивности.

²⁾ При этом предполагается, что импульсы k_j определены однозначно.

ровать как уравнение движения свободной частицы; это становится особенно ясным, если написать (18.39) отдельно для пространственных и временной компонент:

$$\Delta \mathbf{x} = k\alpha, \quad \Delta t = k_0\alpha, \quad \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{k}}{k_0}. \quad (18.40)$$

Поскольку параметр α всегда положителен, уравнения (18.40) согласуются с нашими представлениями о причинности

$$\Delta t/k_0 = \alpha > 0.$$

Действительно, частица, распространяющаяся в направлении \mathbf{k} , движется либо вперед, либо назад во времени в зависимости от знака энергии k_0 . Аналогичную интерпретацию мы использовали в теории фейнмановских функций распространения в гл. 6. Тот факт, что $\alpha \geq 0$, есть прямое следствие наличия мнимой отрицательной добавки $i\epsilon$ к массе в фейнмановском пропагаторе. Чтобы наглядно продемонстрировать это обстоятельство, вернемся назад к (8.12) и (8.18). Имеем

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j + i\epsilon} &= i^{-n} \int_0^\infty d\alpha_1 \dots d\alpha_n \left\{ \exp \left[i \sum_j \alpha_j a_j - \epsilon \left(\sum_j \alpha_j \right) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \delta \left(1 - \frac{\sum_j \alpha_j}{\lambda} \right) = \\ &= (n-1)! \int_0^\infty d\alpha_1 \dots d\alpha_n \frac{\delta \left(1 - \sum_j \alpha_j \right)}{\left(\sum_j \alpha_j \alpha_j + i\epsilon \right)^n}. \quad (18.41) \end{aligned}$$

Сформулируем окончательно правила соответствия, на которых основывается наша аналогия с теорией электрических цепей:

координата \leftrightarrow напряжение,

импульс \leftrightarrow ток,

фейнмановский параметр $\alpha = \frac{\text{собственное время}}{\text{масса}} \leftrightarrow$

\leftrightarrow сопротивление > 0 ,

уравнения движения свободной частицы \leftrightarrow законы Ома,

причем условие положительности «сопротивления» α связано с принципом причинности в распространении частиц.

Указанная аналогия оказывается весьма полезной, поскольку при изучении фейнмановских диаграмм мы можем пользоваться наглядной картиной и теоремами теории цепей. Рассмотрим, например, вершинную функцию с тремя внешними линиями

и произвольным числом внутренних линий. Такой черный ящик с сопротивлениями всегда можно заменить эквивалентной цепью с сосредоточенными сопротивлениями [84] (см. рис. 18.5). Мощность P , выделяемая в такой цепи, равна

$$P = \zeta_1 q_1^2 + \zeta_2 q_2^2 + \zeta_3 q_3^2, \quad \zeta_i \geq 0, \quad (18.42)$$

где эквивалентные сопротивления ζ_i есть неотрицательные функции исходных сопротивлений α_j . При этом выражение (18.36) может быть записано в виде

$$I(q_1^2, q_2^2, q_3^2) \sim \int_0^1 \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta(1 - \sum \alpha_j)}{\Delta^2 (\zeta_1 q_1^2 + \zeta_2 q_2^2 + \zeta_3 q_3^2 - \sum m_j^2 \alpha_j^2 + i\epsilon)^{n-2k}}, \quad (18.43)$$

где явно выписана мнимая добавка $i\epsilon$. Уравнение (18.43) представляет обобщение результата, найденного для диаграммы низжайшего порядка (рис. 18.2), на случай произвольного порядка

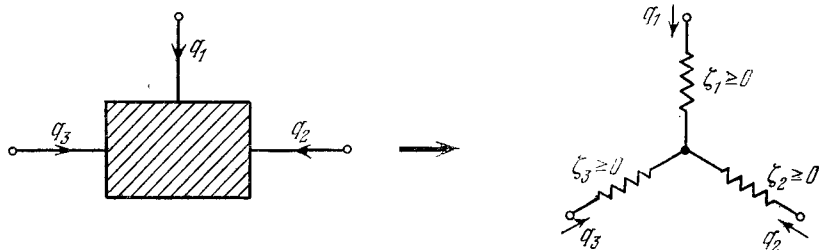


Рис 18.5 Эквивалентная сосредоточенная цепь для вершины с тремя внешними линиями

теории возмущений. Поскольку ζ_i неотрицательны, функция $I(q_1^2, q_2^2, q_3^2)$ как функция любого из трех внешних импульсов аналитична в верхней полуплоскости q_i^2 , когда остальные два ее аргумента положительны и вещественны. Можно показать, что $I(q_1^2, q_2^2, q_3^2)$ при одновременном продолжении всех трех своих аргументов в верхнюю полуплоскость по-прежнему остается аналитичной.

На первый взгляд кажется, что обсуждавшийся в этом параграфе метод исследования аналитических свойств никак не связан с условием причинности, использованном при выводе соотношений Крамерса — Кронига. Тем не менее именно свойство причинности в уравнении (18.40), которое выражено в форме $\alpha \geq 0$, обеспечивает выполнение неравенств в (18.42), что ведет в свою очередь к установлению требуемых аналитических свойств.

§ 128. Пороговые особенности функции распространения

Выведем теперь необходимые условия для появления особенностей произвольных диаграмм. Вначале рассмотрим функции распространения. Снова будем использовать отмеченную в предыдущем параграфе аналогию с теорией электрических цепей. Эта аналогия поможет нам разобраться с множеством внутренних линий произвольной диаграммы и найти положение особенностей форм-факторов F_i из рассмотрения знаменателей

$$J = \sum_i (k_i^2 - m_i^2) \alpha_i \quad (18.44)$$

в выражениях вида (18.36) или (18.43).

Аналитические свойства пропагатора частицы со спином 0, а также частиц с ненулевым спином, выражаются представлением Челлена — Лемана. Поучительно, однако, заново установить положение сингулярностей пропагатора, используя наглядную картину электрических цепей, поскольку аналогичная техника может быть затем применена при рассмотрении вершинных функций и амплитуд рассеяния. Для диаграммы собственной энергии имеется только один внешний импульс, при этом аналитические свойства форм-факторов F_i совпадают с аналитическими свойствами интеграла в (18.36)

$$I(q^2) = \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta\left(1 - \sum_i \alpha_i\right)}{\Delta^2 (\zeta q^2 - \sum m_i^2 \alpha_i + i\epsilon)^{n-2k}}. \quad (18.45)$$

Величина ζq^2 в знаменателе (18.45) представляет мощность, выделяемую в блоке с двумя внешними линиями, отвечающем графику собственной энергии, поэтому эквивалентное сосредоточенное сопротивление не может быть отрицательным. Используя те же аргументы, что и при рассмотрении простейшей вершинной диаграммы, мы заключаем¹⁾ из (18.45), что:

- 1) I — аналитическая функция в верхней полуплоскости q^2 ;
- 2) I — вещественная функция для вещественных отрицательных q^2 ;

3) в силу принципа отражения Шварца I также аналитична и в нижней полуплоскости, обладая, самое большее, точками ветвления при $q^2 \geq 0$.

Чтобы найти начало разреза q_i^2 , найдем наименьшее значение q^2 , для которого знаменатель J в (18.45) обращается в нуль. Будем увеличивать q^2 , начиная от нуля, до такого значения q_i^2 , при котором имеется хотя бы одна точка $(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$ в n -мер-

¹⁾ Отметим, что $\Delta > 0$ для $\alpha_j \geq 0$, если $\sum \alpha_j > 0$ (см. задачу 1). При обобщении аналитических свойств $I(q^2)$ величина Δ^2 несущественна.

ном α -пространстве, для которой

$$J(q_i^2; \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0) = 0. \quad (18.46)$$

Поскольку J удовлетворяет масштабному закону

$$J(\lambda \alpha_j) = \lambda J(\alpha_j), \quad (18.47)$$

эту точку всегда можно выбрать так, чтобы удовлетворить условию $\sum_j \alpha_j = 1$. Справедливость (18.47) следует либо из (18.44), либо из того факта, что мощность, выделяемая в цепи, линейно связана с величинами всех сопротивлений цепи. Поэтому мы можем игнорировать δ -функцию в (18.45) и рассматривать J как функцию n неотрицательных независимых параметров α_j .

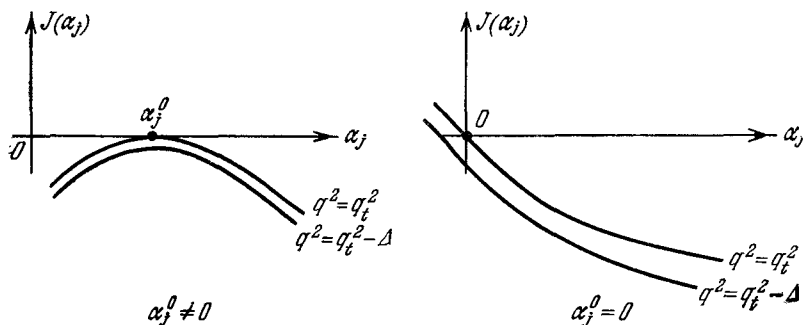


Рис. 18.6. Обращение в нуль «действия» $J(\alpha)$ в точке пороговой сингулярности $q^2 = q_t^2$. В первом случае J имеет максимум при $\alpha_j = \alpha_j^0$, во втором случае $J = 0$ на границе области интегрирования.

Хотя $J = 0$ при $q^2 = q_t^2$ и $\alpha_j = \alpha_j^0$, функция J ввиду непрерывности по переменной q^2 не может быть положительной в остальной области интегрирования по α_j :

$$J(q_i^2; \alpha_1^0, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n^0) \leq 0 \quad \text{для всех } \alpha_j \geq 0. \quad (18.48)$$

Значения $\alpha_j = \alpha_j^0$, при которых J имеет максимум, лежат либо внутри области интегрирования, либо на ее границе. Другими словами, для каждого α_j либо

$$\left. \frac{\partial J(q_i^2; \alpha_1^0, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n^0)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_j = \alpha_j^0} = 0, \quad \text{если } \alpha_j^0 \neq 0, \quad (18.49a)$$

либо

$$\alpha_j^0 = 0. \quad (18.49b)$$

Как отмечалось выше, необходимое условие для возникновения аномального порога имеет вид

$$\mu^2 > \sum_i m_i^2,$$

где μ — масса внешней частицы, m_i — массы внутренних частиц. В теории сильных взаимодействий форм-факторы π - и K -мезонов и нуклонов не содержат аномальных порогов, хотя эти пороги существуют для Λ -, Σ - и Ξ -гиперонов. В физической области времениподобных переданных импульсов аномальные пороги в форм-факторах стабильных частиц отсутствуют, и особенности определяются только одномерными приведенными диаграммами. Следует подчеркнуть, что вопрос о существовании обсуждаемых порогов тесно связан с величинами масс и правилами отбора в вершине взаимодействия. Тем самым этот вопрос окончательно нельзя выяснить, не привлекая дополнительных физических аргументов.

§ 131. Дисперсионные соотношения для вершинной функции

Поскольку во всех порядках по сильному взаимодействию единственной сингулярностью электромагнитного форм-фактора $F_\pi(q^2)$ является разрез от $q^2 = 4\mu^2$ до $q^2 = \infty$, мы можем написать следующее дисперсионное соотношение:

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dq'^2 F_\pi(q'^2)}{q'^2 - q^2}, \quad (18.68)$$

где q^2 — произвольная точка в комплексной q^2 -плоскости, лежащая внутри контура C , указанного на рис. 18.18. Поскольку функция $F_\pi(q^2)$ действительна при $q^2 < 4\mu^2$, то используя принцип отражения Шварца, можно выразить скачок на разрезе через мнимую часть $F_\pi(q^2)$. Когда q^2 стремится к действительной оси, оставаясь при этом в верхней полуплоскости,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F_\pi(q^2 + i\epsilon) = \text{Re } F_\pi(q^2) + i \text{Im } F_\pi(q^2),$$

откуда

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [F_\pi(q^2 + i\epsilon) - F_\pi(q^2 - i\epsilon)] = 2i \text{Im } F_\pi(q^2). \quad (18.69)$$

Разделим в дисперсионном интеграле вклады от интегрирования по разрезу и по бесконечно большому кругу C_∞

$$F_\pi(q^2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F_\pi(q^2 + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{2i \text{Im } F_\pi(q'^2) dq'^2}{q'^2 - q^2 - i\epsilon} + C_\infty. \quad (18.70)$$

где δl_r — вариации переменных интегрирования во внутренних петлях. Знаковые множители η_{jr} определены в (18.33). Подставив (18.51) в (18.50), получим, с учетом законов Кирхгоффа, требуемое сокращение. В результате

$$\delta J = \sum_j (k_j^2 - m_j^2) \delta a_j = 0 \quad \text{при} \quad a_j = a_j^0. \quad (18.52)$$

Таким образом, для каждой линии редуцированного графика $k_j^2 = m_j^2$. При этом необходимые условия существования пороговых особенностей $q^2 = q_j^2$ функции $I(q^2)$ можно сформулировать следующим образом.

1. Диаграмма должна быть представлена в виде блоков, внутри которых все $\alpha_j = 0$ и которые соединены между собой линиями, изображающими частицы на массовой поверхности, для которых $k_j^2 = m_j^2$.

2. Уравнения Кирхгоффа (18.38) должны быть выполнены для положительных значений «сопротивлений» α_j , что отвечает правильному причинному поведению теории.

Поясним физический смысл условия 1. Сингулярности амплитуды отвечают случаю, когда взаимодействие не ограничено в пространстве и (или) во времени. Обычно пространственно-временной интервал, на котором разыгрываются события, ограничен принципом неопределенности. Однако может возникнуть ситуация, в которой промежуточные частицы становятся «реальными», т. е. удовлетворяют кинематическим соотношениям для свободных частиц. При этом взаимодействие неограниченно растет, а соответствующая амплитуда имеет особенность. Условие же 2 положительности сопротивлений гарантирует тот факт, что реальные промежуточные частицы распространяются в соответствии с принципом причинности; при этом законы Кирхгоффа выражают геометрические и кинематические ограничения, которым подчинено распространение частиц.

Сформулированные результаты оказываются весьма полезными, если дополнить их какими-либо диаграммными или интуитивными критериями для нахождения реальных промежуточных состояний. Эта задача особенно просто решается для функций распространения. Для времениподобного q^2 выберем систему координат, в которой $q_\mu = (q, 0, 0, 0)$. Поскольку источник тока имеет только временную компоненту, у внутренних токов k_j , удовлетворяющих законам Кирхгоффа, отличны от нуля также только временные компоненты. Для возникновения сингулярностей необходимо, чтобы диаграммы содержали реальные промежуточные состояния. Примеры таких диаграмм изображены на рис. 18.8. Законы Кирхгоффа позволяют приписать каждой вершине редуцированного

графика свое «время». При этом в силу «причинности» закона Ома (все α_i положительны) ток течет в одном и том же направлении от t_1 до t_2 и затем от t_2 до t_3 . Величина тока равна массе

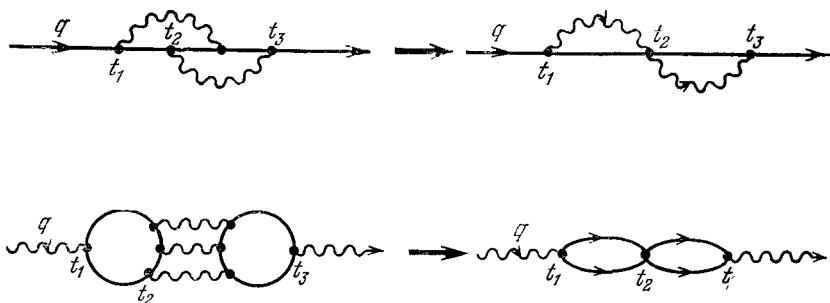


Рис. 18.8 Некоторые редуцированные графики, дающие вклад в функцию распространения

промежуточного состояния, поэтому сингулярности возникают при тех значениях, для которых

$$q = \sum m_i,$$

где сумма берется по всем частицам в промежуточном состоянии. При этом пороговое значение q_t определяется массой легчайшего промежуточного состояния, в которое могут перейти внешние частицы. В гл. 16 мы получили этот результат, исходя из более общих аргументов¹⁾.

§ 129. Особенности произвольных диаграмм и правила Ландау

Следует ожидать, что при переходе от графиков, дающих вклад в функцию Грина, к произвольным фейнмановским диаграммам выражения (18.52), определяющие положение особенностей диаграмм, не изменятся. Ниже мы покажем, что это действительно так. Условия (18.52) не только имеют простой и наглядный смысл, но и были выведены, исходя из весьма общего интегрального представления (18.36), справедливого и для более сложных диаграмм:

$$I(q_1, \dots, q_m) = \int_0^1 \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta(1 - \sum \alpha_j)}{\Delta^2 \left[\sum_j (k_j^2 - m_j^2) \alpha_j + i\epsilon \right]^{n-2k}}, \quad (18.53)$$

¹⁾ В действительности в гл. 16 мы продвинулись немного дальше и показали, что если при вычислении электронного пропагатора S'_F пренебречь калибровочными членами (что всегда можно сделать, если мы интересуемся только S -матричными элементами), то пропагатор удовлетворяет спектральному представлению.

где импульсы k_j линейно зависят от внешних импульсов q_s , см. (18.37). Знаменатель J в (18.53) можно записать в виде

$$J = \sum_j (k_j^2 - m_j^2) \alpha_j + i\epsilon = \sum_{i,j=1}^m \zeta_{ij} q_i q_j - \sum_j m_j^2 \alpha_j + i\epsilon, \quad (18.54)$$

где коэффициенты ζ_{ij} снова выражаются через параметры α_j . Уравнения (18.53) и (18.54) известны под названием интегрального представления Намбу [85]; частными случаями этого представления являются выражения (18.45) для функции Грина и (18.43) для вершинной функции. Поскольку представление Намбу справедливо для произвольной фейнмановской амплитуды, рассматриваемой как функции комплексных переменных $q_i q_j$, мы можем теперь, исходя из этого представления, в общем случае сформулировать необходимые условия появления сингулярностей в любом фейнмановском графике.

1. Каждой сингулярности отвечает «редуцированный» график, полученный стягиванием в точку некоторых внутренних линий.

2. Промежуточные частицы в редуцированном графике должны быть реальными:

$$k_j^2 = m_j^2, \quad (18.55)$$

где k_j — кирхгофовские импульсы, которые, наряду с фейнмановскими параметрами α_j , сопоставляются каждой внутренней линии. Эти импульсы связаны соотношениями Кирхгоффа (18.35) и (18.37).

Сформулированные утверждения называются условиями Ландау [86]. Они позволяют свести задачу нахождения особенностей произвольных фейнмановских диаграмм к простой алгебраической задаче. Если мы рассматриваем особенности по переменным $q_i q_j$ на первом «физическом» листе, то справедливо дополнительное ограничение, вытекающее из причинности:

$$\alpha_j \geq 0, \quad \text{Im } \alpha_j = 0 \quad \text{для всех } j. \quad (18.56)$$

В том случае, когда функция I аналитически продолжается в область комплексных значений $q_i q_j$, доходя при этом до далеких нефизических листов, уравнения Ландау по-прежнему сохраняют свой смысл при условии, что параметры α_j могут принимать комплексные значения.

Представление Намбу оказывается, однако, не столь удобным, когда оно применяется для рассмотрения диаграмм с более чем тремя внешними концами, например для диаграмм, описывающих рассеяние. Причина этого заключается в том, что в этом случае число различных комбинаций $q_i q_j$ превышает число независимых инвариантов, которые можно составить из импуль-

сов. Тем не менее ряд предсказаний (см. § 132) может быть получен и в этом случае. Отметим, что формулы (18.53) и (18.54) позволяют выполнить аналитическое продолжение амплитуды из области вещественных значений инвариантов независимо от того, являются ли эти значения физическими или нет. Поэтому все амплитуды, полученные с помощью правила подстановки, например, амплитуды комптоновского рассеяния, аннигиляции пары в два фотона и образования пары фотонами, описываются одной и той же аналитической функцией, но при разных предельных значениях своих аргументов.

Вернемся теперь к нашей основной задаче и выведем необходимые условия появления сингулярностей функции в (18.53). Прежде всего устраним ограничения, налагаемые δ -функцией на область изменения параметров α . Для этого используем масштабные свойства (18.47). Выполним в (18.34) и (18.36) однородное масштабное преобразование

$$\alpha_j \rightarrow \frac{\alpha_j}{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Перепишем далее (18.53) в виде

$$I = \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta\left(1 - \sum_j \frac{\alpha_j}{\lambda}\right)}{\Delta^2(\alpha_j) [J(\alpha_j)]^{n-2k}}.$$

Очевидно, что I в (18.34) не зависит от λ , поэтому δ -функцию можно устранить с помощью следующего приема:

$$I = \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda I} = \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n (\sum \alpha_j) \exp(-\sum \alpha_j)}{\Delta^2(\alpha_j) [J(\alpha_j)]^{n-2k}}. \quad (18.57)$$

Выполним вначале интегрирование по α_1 при фиксированных значениях $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, причем инварианты $q_i q_j$ будем считать вещественными:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\alpha_2, \dots, \alpha_n; q_i q_j) &= \\ &= \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 (\sum_j \alpha_j) \exp(-\sum_j \alpha_j)}{\Delta^2 [J(\alpha_j)]^{n-2k}} = \int_0^\infty d\alpha_1 \mathcal{F}_1(\alpha_1 \dots \alpha_n; q_i q_j). \end{aligned} \quad (18.58)$$

Очевидно, функция \mathcal{F}_2 определена до тех пор, пока при некотором α_1 величина J в знаменателе не станет равна нулю, т. е. пока функция \mathcal{F}_1 не сингулярна. Однако даже в этом случае особенность в подынтегральном выражении можно обойти, сместив контур интегрирования в комплексную плоскость α_1 , как показано на рис. 18.9. В результате функция \mathcal{F}_2 не будет иметь

особенностей. В этом случае малые изменения импульсов q_s или параметров $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ приведут к малому изменению положения величин сингулярностей в α_1 плоскости, что есть следствие существования самого интеграла и его производных. Функция \mathcal{F}_2 становится сингулярной лишь в том случае, когда особенность α_1 находится в граничной точке $\alpha_1 = 0$, либо когда две

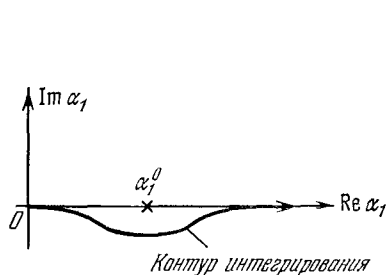


Рис. 18.9 Контур при интегрировании по α_1 . Деформация контура позволяет избежать особенности в точке α_1^0 .

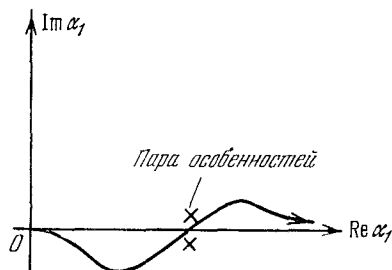


Рис. 18.10. Пара особенностей, зажимающих контур интегрирования

сингулярности \mathcal{F}_1 совпадают и зажимают контур интегрирования, как показано на рис. 18.10. Поэтому необходимые условия для появления сингулярностей в \mathcal{F}_2 имеют вид

$$J(\alpha_1^0, \alpha_2, \dots, \alpha_n; q_i q_j) = 0, \quad (18.59a)$$

причем либо

$$\alpha_1^0 = 0, \quad \text{либо} \quad \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1 = \alpha_1^0} = 0, \quad (18.59b)$$

поскольку в последнем случае J имеет двойной нуль при $\alpha_1 = \alpha_1^0$. Мы получили, таким образом, правила Ландау; в действительности выражение (18.59) имеет тот же вид, что и (18.49).

Перейдем далее к интегрированию по α_2 :

$$\mathcal{F}_3(\alpha_3, \dots, \alpha_n; q_i q_j) = \int_0^\infty d\alpha_2 \mathcal{F}_2(\alpha_2, \dots, \alpha_n; q_i q_j). \quad (18.60)$$

Снова функция \mathcal{F}_3 будет сингулярной, если \mathcal{F}_2 имеет двойную особенность либо если ее сингулярность находится в граничной точке $\alpha_2 = 0$. В первом случае

$$J(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3, \dots, \alpha_n; q_i q_j) = 0 \quad (18.61a)$$

и

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha_2} \right|_{\alpha_2 = \alpha_2^0} = 0. \quad (18.61b)$$

Уравнение (18.61б) включает также вариацию по α_1^0 , поскольку в силу (18.59а) α_1^0 определяется через α_2 и остальные фейнмановские параметры. С учетом (18.59б) получаем

$$\frac{dJ}{d\alpha_2} \Big|_{\alpha_2=\alpha_2^0} = 0 = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \right)_{\alpha_2=\alpha_2^0} = \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha_2=\alpha_2^0}.$$

Эту процедуру можно по индукции продолжить до тех пор, пока мы не исчерпаем все α -интегрирования. В результате получаем требуемые условия

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_j=\alpha_j^0} = (k_j^2 - m_j^2) = 0, \quad (18.62)$$

либо

$$\alpha_j^0 = 0.$$

Мы видим, таким образом, что полученные ранее уравнения (18.52) представляют в точности уравнения Ландау. Отметим,

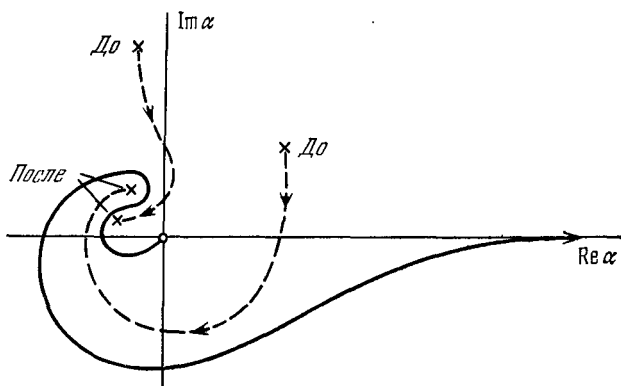


Рис. 18.11 Траектории нулей функции J . Начальные точки отвечают вещественным значениям $q_i q_j$, конечные — комплексным.

что в том случае, когда переменные $q_i q_j$ принимают вещественные значения, не возникает необходимость деформации контуров интегрирования по переменным α , поскольку мнимая добавка $i\epsilon$ предохраняет от появления любого нуля в функции J , лежащего на расстоянии ближе чем $O(\epsilon)$ от вещественной оси. Поэтому для возникающих при этом сингулярностей справедливо условие $\alpha_j \geq 0$, следующее из принципа причинности. К сингулярностям такого вида относится большинство случаев, представляющих физический интерес.

Если же переменные $q_i q_j$ принимают комплексные значения, то нули J могут пересекать контуры интегрирования, при этом

последние необходимо деформировать так, как показано на рис. 18.11. Сингулярность интеграла снова появляется лишь тогда, когда сингулярности подинтегрального выражения зажимают контур интегрирования либо совпадают с граничной точкой $\alpha_j = 0$. Таким образом, правила Ландау применимы и в этом случае при условии, однако, что область определения параметров α включает комплексные значения¹⁾.

§ 130. Аналитическая структура вершинных диаграмм; аномальные пороги

Применим теперь уравнения Ландау для нахождения особенностей вершинных графиков, аналитическая структура которых может быть гораздо сложнее, чем у функций Грина. Вернемся к рассмотренному ранее примеру с электромагнитным форм-фактором π -мезона. Используя интегральное представление (18.43), мы заключаем, что функция $F_\pi(q^2)$ во всех порядках теории возмущений аналитична в верхней полуплоскости q^2 . Более того, следует ожидать, что $F_\pi(q^2)$ действительна при $q^2 < 0$ во всех порядках по сильному взаимодействию, поскольку простые физические соображения, приведенные в § 126 для треугольной диаграммы, должны быть справедливы и в более общем случае. Для строгого доказательства достаточно заметить, что при $q_\mu = 0$ вершинная диаграмма кинематически эквивалентна одночастичной функции Грина. Применяя результаты § 128, мы заключаем, что поскольку $\mu < \sum_i m_i$, где $\sum_i m_i$ — масса любого промежуточного состояния, связанного с π -мезоном, знаменатель J в интегральном представлении любой диаграммы отрицателен на массовой поверхности $q_2^2 = q_3^2 = \mu^2$. Отсюда, в частности, следует, что знаменатель $J(q^2)$ в фейнмановском интеграле, отвечающем любой диаграмме, которая вносит вклад в F_π , отрицательно определен при $q^2 = 0$ и, тем самым, при $q^2 < 0$. Поэтому с помощью принципа отражения Шварца можно определить $F_\pi(q^2)$ в нижней полуплоскости. Таким образом, мы заключаем, что единственными сингулярностями $F_\pi(q^2)$ являются точки ветвления на положительной вещественной полуоси.

Чтобы найти начало разреза и остальные точки ветвления, следует рассмотреть все редуцированные графики, дающие вклад в сингулярную часть $F_\pi(q^2)$. Редуцированный график для

¹⁾ Уравнения Ландау, являясь по своей структуре алгебраическими уравнениями, имеют лишь конечное число решений. Поэтому они не приводят к появлению естественной границы области аналитичности при аналитическом продолжении по переменным $q_i q_j$ на другие листы. Сингулярности, отвечающие случаю $\alpha = \infty$, обсуждаются в статье [87].

треугольной диаграммы изображен на рис. 18.12; он приводит к особенности при $q^2 = 4M^2$. При этом мы снова можем дать наглядную физическую картину рассматриваемого процесса в координатном пространстве. Времениподобный фотон с $q_\mu = (q, 0, 0, 0)$ распадается при $t = t_1$ на нуклон-антинуклонную пару, которая через некоторое время при $t = t_2$ переходит в два

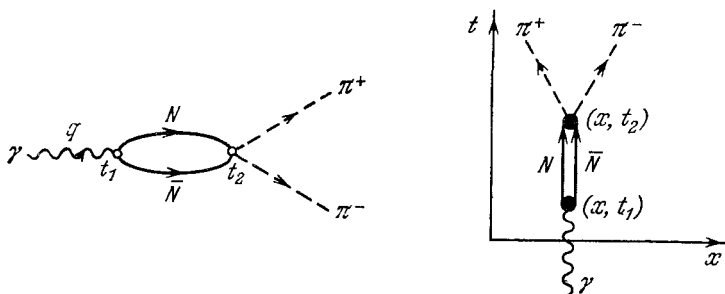


Рис. 18.12. Редуцированная диаграмма для пионной электромагнитной вершины и соответствующая пространственно-временная картина.

реальных пиона. Ясно, что указанный распад происходит только при $q_0 \geq 2M$.

Существуют, однако, и другие редуцированные графики, отвечающие более сложным диаграммам, которые понижают значение порога от $q_i^2 = 4M^2$ до $q_i^2 = 4\mu^2$. Эти графики, например, изображенные на рис. 18.13, включают перерасcеяние пионов

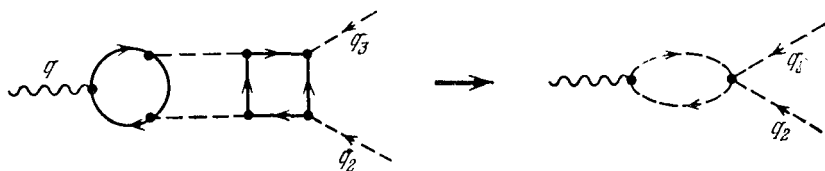


Рис. 18.13. Редуцированная диаграмма высшего порядка, приводящая к пороговой особенности в точке $q_i^2 = 4\mu^2$.

в конечном состоянии. Тогда $q^2 = 4\mu^2$ является порогом для реакции

$$e^- + e^+ \leftrightarrow \pi^+ + \pi^-,$$

в которой можно измерять $F_\pi(q^2)$ при $q^2 > 0$. Для пространственноподобных значений $q^2 < 0$ форм-фактор $F_\pi(q^2)$ определяется из упругого электрон-пионного рассеяния. Между указанными двумя областями лежит нефизический интервал $0 \leq q^2 \leq 4\mu^2$.

Перейдем к рассмотрению редуцированных диаграмм в нефизической области. Сделаем импульсы внешних пионов q_2 и q_3 комплексными и посмотрим, какие редуцированные графики при этом появляются. Для удобства выберем координатную систему, в которой компоненты импульсов равны

$$\begin{aligned} q &= (q, 0, 0, 0), \\ q_2 &= \left(-\frac{q}{2}, i\sqrt{\mu^2 - \frac{q^2}{4}}, 0, 0\right), \\ q_3 &= \left(-\frac{q}{2}, -i\sqrt{\mu^2 - \frac{q^2}{4}}, 0, 0\right). \end{aligned} \quad (18.63)$$

Законы Кирхгофа означают, что все внутренние «токи» или импульсы имеют вид

$$k = (k_0, ik_1, 0, 0), \quad (18.64)$$

где k_0 и k_1 вещественны. Другими словами, вторые и третьи компоненты внутренних токов равны нулю, если равны нулю эти компоненты у внешних токов. Далее, если компоненты внешних токов чисто мнимы, таковыми являются и первые компоненты всех внутренних токов. Поскольку пространственные компоненты импульсов в (18.63) и (18.64) чисто мнимы, можно с помощью очевидной замены переменных перейти к вещественным векторам с евклидовой метрикой. Условия Ландау, согласно которым сингулярности произвольной диаграммы появляются при $k_j^2 = m_j^2$,

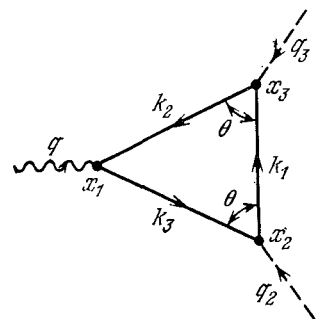


Рис. 18.14. Двумерная редуцированная диаграмма.

применимы в этом случае и в силу евклидовости пространства векторов имеют простую геометрическую интерпретацию. Сингулярности возникают только в том случае, когда можно нарисовать редуцированный график с двумерными векторами, отвечающими внутренним частицам на массовой поверхности и удовлетворяющими законам сохранения импульса в каждой вершине, другими словами, когда существует двумерный редуцированный график. Рассмотрим, например, треугольную диаграмму и предположим, что для нее возможен двумерный редуцированный график, изображенный на рис. 18.14. Угол θ определяется из сохранения импульса и условия «реальности» промежуточных частиц:

$$q_3^2 = \mu^2 = (k_1 - k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 \cos(\pi - \theta) = 2M^2(1 + \cos \theta). \quad (18.65)$$

Для того чтобы замкнуть такой треугольник, необходимо выполнение условия $\theta < \pi/2$ или $\mu^2 > 2M^2$. Поскольку в случае π -мезонов и нуклонов эти условия не выполняются¹⁾, указанный редуцированный график не дает вклада в сингулярности $F_\pi(q^2)$. Отметим, что в общем случае углы замкнутых многоугольников, отвечающих двумерным редуцированным диаграммам, определяются законами сохранения импульса в каждой вершине, а длины сторон определяются разностью напряжений (или током, умноженным на сопротивление) вершин, которые эти стороны соединяют.

Рассмотрим теперь произвольную диаграмму, отвечающую высшим порядкам по взаимодействию. Чтобы найти сингулярности, обусловленные двумерными редуцированными графиками ($q^2 \leq 4\mu^2$), заметим, что любой такой график должен целиком содержаться в треугольнике, вершины которого x_1 , x_2 и x_3 равны координатам точек, в которых взаимодействуют внешние частицы. Стороны этого треугольника не должны иметь изгибов, другими словами, ни одна из внутренних линий не должна проходить через сторону треугольника, как показано на рис. 18.15. В противном случае эта линия выйдет за пределы треугольника, поскольку не существует такого внешнего импульса, после встречи с которым внутренняя линия могла бы повернуть назад к вершине и поглотиться. Построив такой треугольник, мы замечаем, что по крайней мере в одной из его вершин угол θ должен быть острым. В этой вершине внешний пион диссоциирует, образуя ливень частиц с импульсами k_i и массами m_i , причем

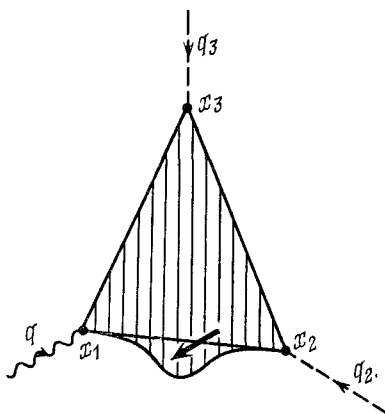


Рис 18.15 Двумерная редуцированная диаграмма с деформированной стороной (невозможный случай)

$$q^2 = \mu^2 = \left(\sum_i k_i \right)^2 = \sum_i k_i^2 + \sum_{i \neq j} k_i k_j > \sum_i m_i^2. \quad (18.64)$$

Таким образом, сингулярности (если она существует) отвечает связанное с π -мезоном состояние, для которого

$$\mu^2 > \sum_i m_i^2.$$

¹⁾ См. (18.29) и примечание на стр. 227.

Такое состояние, однако невозможно, если мы не рассматриваем слабые и электромагнитные взаимодействия. Отметим далее, что при учете только сильных взаимодействий ни один одномерный редуцированный график не вносит вклад в $F_\pi(q^2)$ в области $0 \leq q^2 < 4\mu^2$, поскольку легчайшим состоянием, составленным из сильно взаимодействующих частиц и связанным с π -мезоном, является состояние 2π . Поэтому мы заключаем,

что $F_\pi(q^2)$ аналитична во всей плоскости q^2 с разрезом, который начинается от порога $q_t^2 = 4\mu^2$ и отвечает приведенным графикам, содержащим промежуточное состояние 2π .

Сингулярности, связанные с двумерными приведенными диаграммами, называются аномальными порогами». Хотя эти сингулярности отсутствуют в рассматриваемом случае, они интересны сами по себе. Аномальные особенности могут возникать в форм-факторах слабо связанных составных частиц, удовлетворяющих условию (18.65), и также в форм-факторах нестабильных частиц, для которых это условие заведомо выполняется. Например, при учете слабых взаимодействий в $F_\pi(q^2)$ появляется аномальный разрез, причем он находится в физической области $q^2 < 0$. Этот

разрез отвечает редуцированному графику на рис. 18.16. При этом возникает следующая картина: пион, образованный в Беркли с импульсом $q/2$, распадается на покоящийся μ -мезон и нейтрино с импульсом $q/2$, которое летит в Станфорд, где оно рассеивается на γ -кванте и возвращается в Беркли с импульсом $-q/2$, после чего, захватив μ -мезон, снова превращается в пион. Импульс q , при котором F_π становится сингулярным, равен

$$\frac{|q|^2}{4} = E_\pi^2 - \mu^2,$$

причем

$$m^2 + \mu^2 - 2mE_\pi = 0,$$

где m — масса μ -мезона. Отсюда получаем

$$|q| = \frac{(m + \mu)(\mu - m)}{m} = 79 \text{ Мэв/с}. \quad (18.66)$$

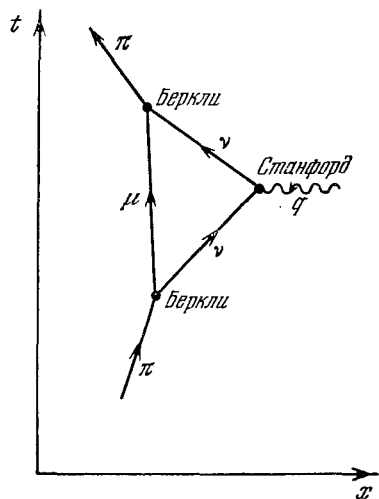


Рис. 18.16. Пример редуцированной диаграммы, которая имеет аномальный порог в физической области, отвечающий нестабильной частице

Эта сингулярность, разумеется, весьма слабая, но в принципе она существует.

При переходе от нестабильных частиц к стабильным аномальный порог смещается из области пространственно-подобных q^2 в область времениподобных. В результате для систем, подобных дейтрону, должен существовать двумерный редуцированный график в евклидовой области. Два таких графика

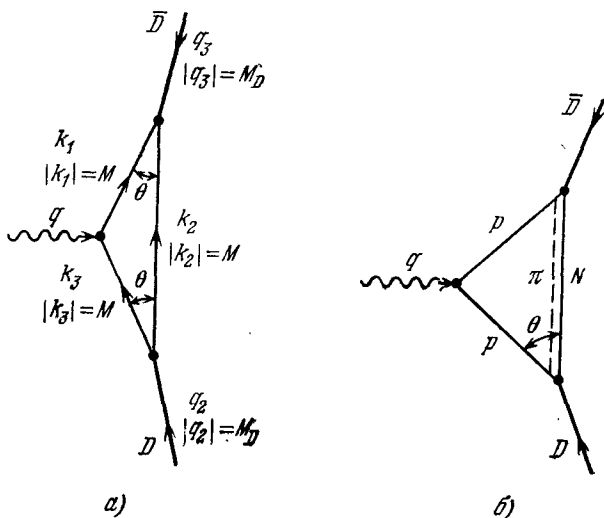


Рис. 18.17. Редуцированные диаграммы, приводящие к аномальному порогу в дейтронном форм-факторе:

$$\cos \theta = \frac{M_D^2 - 2M^2}{2M^2} \approx 1 - \frac{2\varepsilon}{M} \quad (a); \quad \cos \theta = \frac{M_D^2 - M^2 - (M + \mu)^2}{2M(M + \mu)} \approx 1 - \frac{2\mu}{M} \quad (б).$$

указаны на рис. 18.17. Для графика рис. 18.17, а угол θ весьма мал, что связано с малостью энергии связи дейтрона ε :

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{(2M - \varepsilon)^2 - 2M^2}{2M^2} \approx 1 - \frac{2\varepsilon}{M}.$$

Из этого рисунка заключаем, что сингулярность находится при

$$q = 2M \sin \theta \approx 2M\theta \approx 4 \sqrt{M\varepsilon}. \quad (18.67)$$

В пределе нулевой связи дейтрона $q \rightarrow 0$. Таким образом, форм-фактор дейтрона становится сингулярным при времениподобных переданных импульсах, равных по порядку величины среднему импульсу k в дейтроне $k^2/2M \sim \varepsilon$.

Как отмечалось выше, необходимое условие для возникновения аномального порога имеет вид

$$\mu^2 > \sum_i m_i^2,$$

где μ — масса внешней частицы, m_i — массы внутренних частиц. В теории сильных взаимодействий форм-факторы π - и K -мезонов и нуклонов не содержат аномальных порогов, хотя эти пороги существуют для Λ -, Σ - и Ξ -гиперонов. В физической области времениподобных переданных импульсов аномальные пороги в форм-факторах стабильных частиц отсутствуют, и особенности определяются только одномерными приведенными диаграммами. Следует подчеркнуть, что вопрос о существовании обсуждаемых порогов тесно связан с величинами масс и правилами отбора в вершине взаимодействия. Тем самым этот вопрос окончательно нельзя выяснить, не привлекая дополнительных физических аргументов.

§ 131. Дисперсионные соотношения для вершинной функции

Поскольку во всех порядках по сильному взаимодействию единственной сингулярностью электромагнитного форм-фактора $F_\pi(q^2)$ является разрез от $q^2 = 4\mu^2$ до $q^2 = \infty$, мы можем написать следующее дисперсионное соотношение:

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dq'^2 F_\pi(q'^2)}{q'^2 - q^2}, \quad (18.68)$$

где q^2 — произвольная точка в комплексной q^2 -плоскости, лежащая внутри контура C , указанного на рис. 18.18. Поскольку функция $F_\pi(q^2)$ действительна при $q^2 < 4\mu^2$, то используя принцип отражения Шварца, можно выразить скачок на разрезе через мнимую часть $F_\pi(q^2)$. Когда q^2 стремится к действительной оси, оставаясь при этом в верхней полуплоскости,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F_\pi(q^2 + i\epsilon) = \text{Re } F_\pi(q^2) + i \text{Im } F_\pi(q^2),$$

откуда

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [F_\pi(q^2 + i\epsilon) - F_\pi(q^2 - i\epsilon)] = 2i \text{Im } F_\pi(q^2). \quad (18.69)$$

Разделим в дисперсионном интеграле вклады от интегрирования по разрезу и по бесконечно большому кругу C_∞

$$F_\pi(q^2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F_\pi(q^2 + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{2i \text{Im } F_\pi(q'^2) dq'^2}{q'^2 - q^2 - i\epsilon} + C_\infty. \quad (18.70)$$

В том случае, когда $F_{\pi}(q^2)$ на бесконечности стремится к нулю, мы получаем дисперсионное соотношение без вычитаний

$$F_{\pi}(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F_{\pi}(q'^2) dq'^2}{q'^2 - q^2 - i\epsilon}. \quad (18.71)$$

Поскольку, однако, в теории возмущений $F_{\pi}(q^2)$ на бесконечности к нулю не стремится, то, проявляя известную осторожность, следует записать дисперсионное соотношение с одним

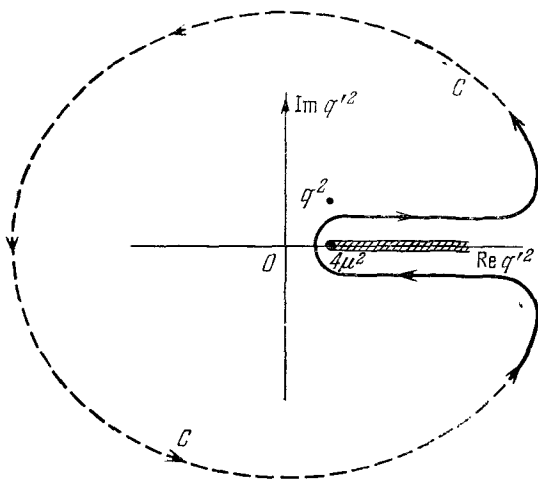


Рис. 18.18. Контур в комплексной q'^2 -плоскости в дисперсионном интеграле для $F_{\pi}(q^2)$.

вычитанием. Записывая его для функции $F_{\pi}(q^2)/q^2$, снова получаем $C_{\infty} = 0$. Повторяя выкладки, которые мы проделали при выводе формулы (18.9), находим окончательно

$$F_{\pi}(q^2) = F_{\pi}(0) + \frac{q^2}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{dq'^2 \text{Im } F_{\pi}(q'^2)}{q'^2(q'^2 - q^2 - i\epsilon)}. \quad (18.72)$$

Уравнения (18.71) и (18.72) аналогичны соотношениям Крамера — Кронига. В то время как последние с учетом требования унитарности — оптической теоремы — связывают между собой экспериментально наблюдаемые величины в (18.12), смысл дисперсионных соотношений (18.71) и (18.72) заключается в том, что с помощью этих формул задача вычисления форм-фактора $F_{\pi}(q^2)$ сводится к вычислению его скачка для положительных $q^2 > 4\mu^2$. Практическая ценность этого результата

заключается в следующем. Было показано, что для возникновения сингулярности в F_{π} необходимо существование редуцированного графика, в котором виртуальный времениподобный фотон связан с реальными промежуточными состояниями. Поскольку пионный форм-фактор не содержит аномальных порогов, все редуцированные графики для него одномерны. Таким образом, вычисление $\text{Im } F_{\pi}(q^2)$ сводится к вычислению амплитуды перехода фотона в реальное состояние $|n\rangle$ и вычислению амплитуды последующего перехода $|n\rangle$ в пару $\pi^+\pi^-$. Соответствующее аналитическое выражение, в точности аналогичное формуле (18.16), выражающей скачок функции Грина на разрезе, мы подробно обсудим позже при рассмотрении конкретных расчетов в рамках дисперсионного метода. Здесь же отметим только, что в

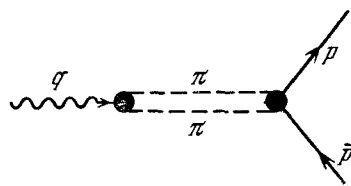


Рис. 18.19. Редуцированная диаграмма для электромагнитной вершины протона.

спектральную сумму в области $(2\mu)^2 \leq q^2 \leq (4\mu)^2$ вносят вклад только двухпионные состояния, поскольку трехпионные состояния не могут перейти в пару пионов в силу законов сохранения.

Практически дисперсионные расчеты всегда основываются на приближении, в котором учитывается вклад простейших промежуточных состояний. Например, при использовании дисперсионных соотношений (18.72) с одним вычитанием для вычисления $F_{\pi}(q^2)$ при малых q^2 можно в первом приближении учесть только состояние 2π , масса которого меньше всех других состояний, поскольку, из-за подынтегрального множителя $1/q^4$ основной вклад в дисперсионный интеграл вносит пороговая область. В этом приближении уравнение (18.72) устанавливает связь между электромагнитным форм-фактором пиона и амплитудой π - π -рассеяния, которая может быть проверена экспериментально. Подробные выкладки мы сделаем в § 136. Здесь же уместно подчеркнуть, что дисперсионные соотношения связывают различные физические амплитуды и представляют поэтому основу для развития ряда приближенных схем, не связанных с разложением по степеням большой константы связи.

К сожалению, связь с наблюдаемыми величинами часто оказывается не столь непосредственной, как в рассмотренном выше примере. Например, при рассмотрении электромагнитного форм-фактора протона нужно учитывать редуцированный график, изображенный на рис. 18.19. Вклад его пропорционален пионному форм-фактору, умноженному на амплитуду перехода $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \bar{p} + p$. К несчастью, этот график имеет смысл в евклидовой нефизической области, в частности при $q^2 = 4\mu^2$, в то время как

процесс аннигиляции разрешен лишь выше порога $4M^2$. В результате возникает необходимость аналитического продолжения амплитуды аннигиляции, равно как и условия унитарности, используемого при вычислении скачков в дисперсионном методе. Вернемся теперь к непосредственному рассмотрению этих вопросов и обсуждению аналитических свойств амплитуд рассеяния.

§ 132. Сингулярности амплитуд рассеяния

При выводе ряда аналитических свойств амплитуд рассеяния мы можем использовать развитые выше методы. Однако, как отмечалось выше, и в рассматриваемом случае эти методы не столь плодотворны, поскольку инварианты, составленные из внешних импульсов q_i , оказываются теперь линейно зависимыми. Вместо скалярных произведений $q_i q_j$ удобно ввести следующие переменные:

$$\begin{aligned} s &= (q_1 + q_2)^2, & t &= (q_1 + q_3)^2, \\ u &= (q_1 + q_4)^2. \end{aligned} \quad (18.73)$$

Кинематика указана на рис. 18.20. Величина s равна квадрату энергии в системе центра масс « s -канала» для которого начальные импульсы равны q_1 и q_2 , а конечные импульсы равны $-q_3$ и $-q_4$. Величины t и u имеют аналогичный смысл в «кроссинговых» каналах. Согласно правилу подстановки одна и та же фейнмановская амплитуда описывает все три реакции в s -, t - и u -каналах. Для этой амплитуды снова справедливо представление Намбу

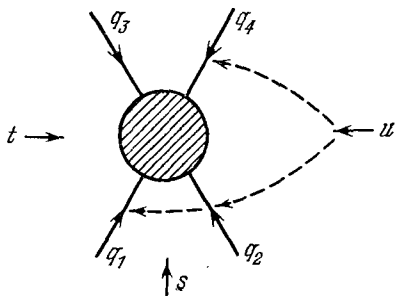


Рис. 18.20. Кинематические переменные для амплитуды рассеяния.

$$\begin{aligned} I(s, t, u) &= \int_0^\infty da_1 \dots da_n \delta\left(1 - \sum_i a_i\right) \times \\ &\times \left\{ \Delta^2 \left(\xi_1 s + \xi_2 t + \xi_3 u + \sum_{i=1}^4 \xi'_i m_i^2 - \sum_j m_j^2 \alpha_j + i\epsilon \right)^{n-2k} \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (18.74)$$

мнимая добавка $i\epsilon$ в котором позволяет аналитически продолжить I от действительных значений инвариантов s , t и u . Однако поскольку величины s , t и u не независимы, а связаны соотношением

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2, \quad (18.75)$$

проблема установления аналитических свойств, исходя из представления (18.74), является теперь более трудной. Например, из (18.75) следует, что если s изменяется в верхней полуплоскости при фиксированном значении t , то u меняется в нижней полуплоскости. Поэтому, хотя и можно показать, что величины ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 в (18.74) положительны¹⁾, это представление еще не

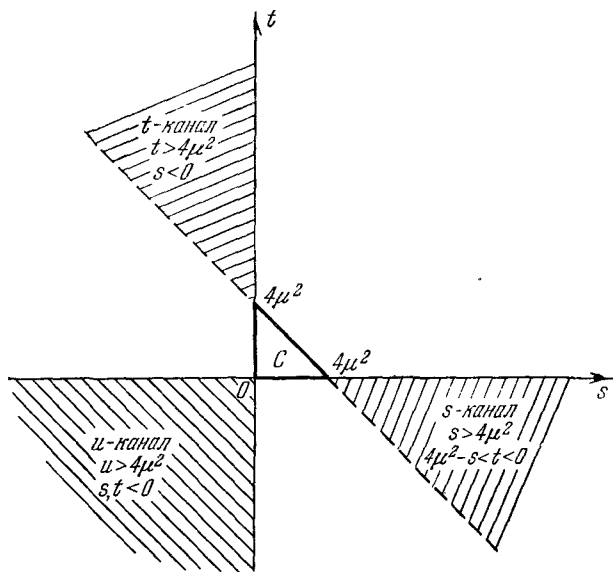


Рис. 18.21. Физические области s -, t - и u -каналов в $\pi - \pi$ -рассеянии.

гарантирует отсутствия сингулярностей всюду в комплексной s -плоскости.

В результате мы сталкиваемся с гораздо более сложной задачей, чем в случае вершинных функций. Эта задача до настоящего времени полностью еще не решена. Положение сингулярностей существенно зависит от масс частиц, участвующих в реакции, и, чтобы свести кинематические усложнения к минимуму, мы рассмотрим $\pi - \pi$ -рассеяние.

В этом случае физическим областям s -, t - и u -каналов отвечают заштрихованные области на рис. 18.21. Значения инвариантов s , t и u могут быть выражены через импульс k в системе центра масс и угол рассеяния θ в s -канале:

$$s = 4(k^2 + \mu^2), \quad t = -2k^2(1 - \cos \theta), \quad u = -2k^2(1 + \cos \theta). \quad (18.76)$$

¹⁾ См. задачу 2 этой главы.

Прямая $t = 0$ отвечает $\pi - \pi$ -рассеянию вперед, которое мы и рассмотрим в первую очередь. Перепишем интегральное уравнение (18.74) для амплитуды $A(s, t)$ в более компактной форме:

$$A(s, t) = \int_0^{\infty} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{(\zeta s + \zeta' t - \sigma^2 + i\varepsilon)^{n-2k}}. \quad (18.77)$$

Так как величины ζ , ζ' и σ^2 не обязательно положительно определены, разобьем $A(s, 0)$ на два слагаемых:

$$A(s, 0) = \int_0^{\infty} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{(\zeta s - \sigma^2 + i\varepsilon)^{n-2k}} [\theta(\zeta) + \theta(-\zeta)] \equiv A_+(s) + A_-(s). \quad (18.78)$$

Первое слагаемое A_+ аналитично в верхней полуплоскости s при $\varepsilon \rightarrow 0^+$, а второе аналитично в нижней полуплоскости. Если существует некоторая область действительных переменных s , для которых знаменатель J в (18.78) не равен нулю, то функции A_+ и A_- в этой области действительны. Тогда, согласно принципу Шварца, можно аналитически продолжить A_+ в нижнюю полуплоскость и A_- в верхнюю полуплоскость. Если указанное обстоятельство действительно имеет место, то можно показать, что $A(s, 0)$ аналитична в комплексной s -плоскости всюду, за исключением разреза вдоль той части вещественной оси, где знаменатель в представлении Намбу обращается в нуль, после чего сразу можно выписать дисперсионные соотношения.

Таким образом, основная проблема заключается в том, чтобы найти такую область действительных значений s , для которой знаменатель в интегральном представлении амплитуды $A(s, 0)$ не равен нулю и через которую можно выполнить аналитическое продолжение $A_+(s)$ и $A_-(s)$. Из рис. 18.21 мы заключаем, что единственно подходящей областью для аналитического продолжения является отрезок $0 \leq s \leq 4\mu^2$. При $s \geq 4\mu^2$ мы попадаем в физическую область s -канала. В этой области амплитуда комплексна и равна сумме членов вида $e^{i\delta} \sin \delta$ для каждой парциальной волны. При $s \leq 0$ имеем $u \geq 4\mu^2$, и мы находимся в физической области u -канала, причем в этой области амплитуда, согласно правилу подстановки, описывается той же аналитической функцией $A(s, t)$, что и в s -канале. Интервал $0 \leq s \leq 4\mu^2$, равно как и треугольник $s \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$, обозначенный на рис. 18.21 буквой C , является нефизической областью. Анализ амплитуды в этой области может быть выполнен так же, как и анализ евклидовой области в случае диаграмм, отвечающих вершинной функции.

Покажем, что знаменатель J в (18.77) отрицательно определен в C и не может иметь здесь особенностей. В результате окажется возможным аналитическое продолжение функций A_+ и A_- . Как и в предыдущем разделе, введем в C евклидову метрику. Поскольку каждая из переменных s , t и u положительна в рассматриваемой области, можно выбрать импульсы следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{s}, i\sqrt{t}, i\sqrt{u}, 0), \\ q_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{s}, -i\sqrt{t}, -i\sqrt{u}, 0), \\ q_3 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{s}, i\sqrt{t}, -i\sqrt{u}, 0), \\ q_4 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{s}, -i\sqrt{t}, i\sqrt{u}, 0), \end{aligned} \quad (18.79)$$

в полном соответствии с (18.73). Убрав затем с помощью замены переменных множитель i из пространственных компонент векторов q_i , мы тем самым изменим метрический тензор $g_{\mu\nu}$ на $\delta_{\mu\nu}$. Применяя законы Кирхгоффа, снова убеждаемся в том, что все внутренние импульсы диаграммы вещественны, причем аналитические свойства амплитуды в новой метрике остаются неизменными.

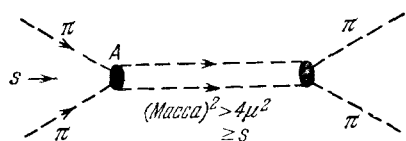


Рис. 18.22. Одномерная редуцированная диаграмма.

Критерий существования сингулярностей в области C остается по существу неизменным с тем, однако, различием, что теперь импульсы и тем самым координаты («напряжения») в вершинах трехмерны и редуцированный график может быть уже не плоским, а объемным. Одномерные редуцированные диаграммы, указанные на рис. 18.22, мы можем немедленно исключить из рассмотрения, поскольку масса легчайшего состояния, связанного с двумя π -мезонами, равна 2μ , и, таким образом, это состояние в силу законов сохранения не может быть построено для $s, t, u < 4\mu^2$ в (18.79). Аргументация при этом такая же, как и в случае электромагнитного форм-фактора пиона, поскольку два внешних пиона, сходящихся в вершине A , кинематически эквивалентны фотону с массой $\sqrt{s} < 2\mu$. В этой области форм-фактор F_π не содержит сингулярностей. Аналогичные соображения показывают, что двумерные редуцированные графики (рис. 18.23) не приводят к аномальным порогам в евклидовой области C ; напомним, что такие сингулярности отсутствуют и в вершинной функции.

При рассмотрении трехмерных редуцированных графиков мы должны заключить все линии во внутренность тетраэдра, к вер-

шинам которого присоединяются внешние частицы (рис. 18.24). Как и в случае вершинных функций, мы снова можем исключить возможность выпуклости граней тетраэдра. Благодаря евклидовости геометрии по крайней мере в одной из вершин все три плоских угла являются острыми. Поэтому тетраэдр можно построить только в том случае, когда массы промежуточных частиц таковы, что указанная вершина с острыми углами действительно существует. Пусть, например, это будет вершина A на рис. 18.24. Тогда направления импульсов любых двух частиц,

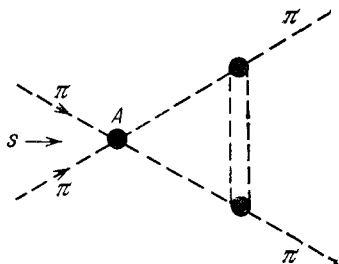


Рис. 18.23. Двумерная редуцированная диаграмма.

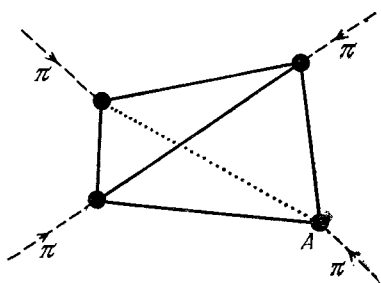


Рис. 18.24. Трехмерная редуцированная диаграмма.

на которые диссоциирует пион в точке A , должны образовывать острый угол. В этом случае должно было бы выполняться неравенство (18.65)

$$\mu^2 = \left(\sum_i k_i \right)^2 > \sum_i m_i^2, \quad (18.80)$$

которое, однако, не может быть выполнено. Поэтому амплитуда π — π -рассеяния не имеет сингулярностей в евклидовом треугольнике C на рис. 18.21. Чтобы завершить наше доказательство нужно еще показать, что амплитуды $A_{\pm}(s, 0)$ вещественны при $0 \leq s \leq 4\mu^2$. Тогда, используя принцип симметрии Шварца, мы сможем аналитически продолжить A_+ в нижнюю полуплоскость s , а A_- в верхнюю полуплоскость. Для того чтобы убедиться в вещественности знаменателя, будем равномерно уменьшать внешние импульсы

$$q_i \rightarrow \lambda q_i, \quad \lambda \rightarrow 0,$$

начав с некоторой точки в евклидовой области, например, $s = t = u$. Поскольку условие (18.80) при такой однородной деформации тем более невыполнимо, ни в одной точке при этом не возникает особенностей. В точке $\lambda = 0$ знаменатель $J = -\sum_j m_j^2 \alpha_j < 0$. Возвращаясь теперь обратно к исходным значениям импульсов, мы видим, что знаменатель всюду

остаётся отрицательным, поскольку если бы в некоторой промежуточной точке J обратился в нуль, то должен был бы существовать редуцированный график, отвечающий этому условию. Мы показали, однако, что такие графики отсутствуют.

Выпишем теперь дисперсионные соотношения для амплитуды π — π -рассеяния вперед. Действительность $A(s, 0)$ на отрезке $0 \leq s \leq 4\mu^2$ позволяет аналитически продолжить A_+ и A_- через «брешь», в результате мы заключаем, что единственными особенностями $A(s, 0)$ являются разрывы от $s = 4\mu^2$ до $s = \infty$ и от $s = 0$ до $s = -\infty$, изображенные на рис. 18.25. Временно

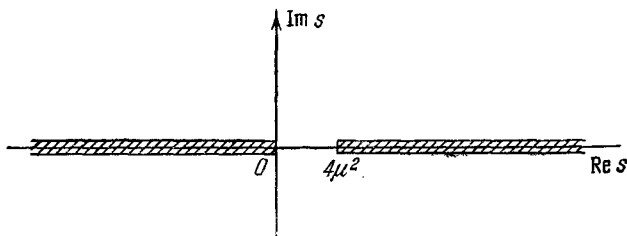


Рис. 18.25. Разрывы в s -плоскости амплитуды π — π -рассеяния на нулевой угол

игнорируя вопрос о вычитаниях, запишем дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$A(s, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds' \operatorname{Im} A(s', 0)}{s' - s - i\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{ds' \operatorname{Im} A(s', 0)}{s' - s - i\varepsilon} + C_{\infty}. \quad (18.81)$$

Уравнения (18.81) по своему смыслу и форме очень напоминают оригинальные соотношения Крамерса—Кронига (18.8), с которых начинается вся дисперсионная техника. Эти уравнения позволяют выразить амплитуду рассеяния вперед $A(s, 0)$ через интеграл от ее мнимой части. Последняя обладает теми же притягательными свойствами, что и абсорптивные части в соотношениях Крамерса—Кронига и дисперсионных соотношениях для электромагнитного форм-фактора $F_{\pi}(q^2)$, а именно: она отлична от нуля только в физической области рассеяния. Поэтому можно использовать оптическую теорему и выразить $\operatorname{Im} A(s, 0)$ через полные сечения в s - и u -каналах. Тем самым мы получаем соотношение между измеримыми (в принципе) величинами. Явная связь между $\operatorname{Im} A(s, 0)$ и полным сечением получается из условия унитарности S -матрицы: $SS^{\dagger} = 1$; при этом нужно только правильно учесть нормировочные множители. Конкретные вычисления будут проделаны в § 135, где мы используем свойства аналитичности, унитарности и кроссинг-симметрии для динамического описания π — π -системы.

До сих пор мы обсуждали дисперсионные соотношения при $t = 0$, используя вещественность $A(s, 0)$ на границе евклидового треугольника и представление (18.77). Используя это представление, мы можем получить другой чрезвычайно полезный результат, а именно, доказать дисперсионные соотношения для

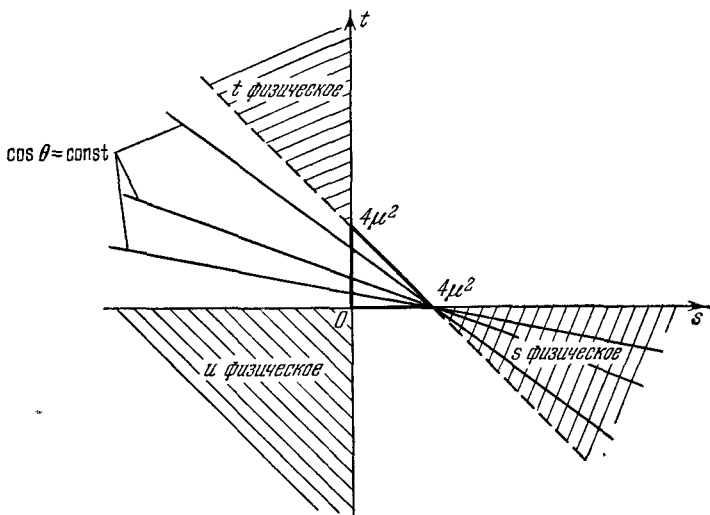


Рис. 18.26. Линии $\cos \theta = \text{const}$, которые рассматриваются при выводе дисперсионных соотношений для парциальной амплитуды $\pi - \pi$ -рассеяния.

парциальных амплитуд. Парциальные амплитуды определяются следующим образом:

$$A(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) A_l(s) P_l(\cos \theta), \quad (18.82)$$

$$A_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \hat{A}(s, \cos \theta),$$

где $\hat{A}(s, \cos \theta) \equiv A(s, t)$ и θ — угол рассеяния в системе центра масс. Для того чтобы установить аналитические свойства $A_l(s)$, необходимо выяснить аналитические свойства $\hat{A}(s, \cos \theta)$ при фиксированном $\cos \theta$. Выразив t через $\cos \theta$ и s , получим

$$t = -\frac{1}{2}(s - 4\mu^2)(1 - \cos \theta).$$

Подставляя это выражение в интегральное представление (18.77) для $A(s, t)$, мы видим, что знаменатель J можно записать в виде

$$J = \hat{\xi}s - \hat{\sigma}^2 + i\epsilon, \quad (18.83)$$

где величины ξ и $\hat{\sigma}^2$ зависят теперь от $\cos \theta$ и «сопротивлений» α_j . Поэтому для амплитуды $\hat{A}(s, \cos \theta)$ справедливо то же самое интегральное представление (18.78), что и для амплитуды рассеяния вперед. Фиксированным значениям $\cos \theta$ отвечают в st -плоскости прямые линии, пересекающие евклидовы треугольник C (рис. 18.26), в котором, как мы показали, знаменатель J не равен нулю. Поэтому можно разделить $\hat{A}(s, \cos \theta)$ на две части, подобно тому, как мы сделали это для $A(s, 0)$ и, повторяя рассуждения, приведенные ранее при переходе от (18.78) к (18.81), показать, что амплитуда $\hat{A}(s, \cos \theta)$ при любом значении $\cos \theta$ аналитична в s -плоскости, за исключением, быть

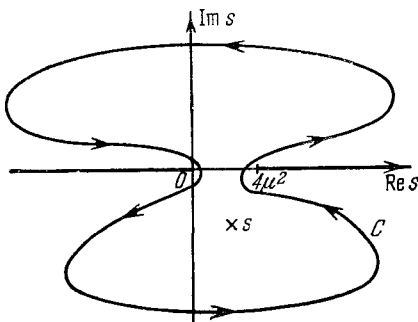


Рис. 18.27. Контур s -плоскости в дисперсионном интеграле для парциальной амплитуды $\pi - \pi$ -рассеяния.

может, разрывов от $s = 4\mu^2$ до ∞ и от $s = 0$ до $s = -\infty$. В результате снова оказывается возможным применить теорему Коши

$$\begin{aligned} \hat{A}(s, \cos \theta) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds' \hat{A}(s', \cos \theta)}{s' - s - i\epsilon}, \end{aligned} \quad (18.84)$$

где C — любой контур, не пересекающий разрывов и окружающий точку s (рис. 18.27). Умножим затем правую и левую части (18.84) на $P_l(\cos \theta)$ и проинтегрируем от -1 до $+1$, тогда слева мы получим парци-

альную амплитуду $A_l(s)$. Поскольку интегралы в правой части сходятся абсолютно, можно изменить порядок интегрирования; в результате приходим к выводу, что для $A_l(s)$ также применима теорема Коши

$$A_l(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds' A_l(s')}{s' - s - i\epsilon}, \quad (18.85)$$

где C — тот же контур, что и в (18.84). Таким образом, $A_l(s)$ имеет те же аналитические свойства, что и амплитуда рассеяния вперед и удовлетворяют дисперсионному соотношению, аналогичному (18.81). Этот факт имеет большое практическое значение.

Описанную выше технику можно применить для изучения аналитических свойств и вывода дисперсионных соотношений в других случаях, например для рассеяния π -мезонов на нуклонах вперед или для парциальных амплитуд нуклон-нуклонного рас-

сеяния. Следует при этом отметить, что когда в рассеянии участвуют частицы с разными массами, кинематические усложнения и трудности, связанные с аномальными порогами, значительно усложняют существо вопроса.

§ 133. Применение к π -мезон-нуклонному рассеянию вперед

Наиболее важным и плодотворным примером применения техники дисперсионных соотношений является анализ пион-нуклонной амплитуды рассеяния на нулевой угол [88]. Как и во всех вычислениях, в рамках дисперсионной теории для такого анализа необходимо следующее:

1. Выделить скалярные функции F_i , зависящие только от инвариантов (см. (18.31)), отделив при этом все спиновые и изоспиновые множители.

2. Изучить аналитические свойства форм-факторов, выявляя для этого с помощью техники редуцированных графиков либо другими алгебраическими способами сингулярности, происходящие от знаменателя J .

3. Из оптической теоремы вычислить скачок на разрезе, после чего можно вывести соотношения, аналогичные соотношениям Крамерса — Кронига (18.11) и (18.12).

Рассмотрим рассеяние π^+ -мезона на протоне. В этом случае усложнения, обусловленные изоспиновой кинематикой, отсутствуют. Обозначим амплитуду через $\mathfrak{M}(q_2, p_2, s_2; q_1, p_1, s_1)$, где спины и импульсы указаны на рис. 18.28. Разложение амплитуды по инвариантным лоренцевым скалярам сводится к выражению

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(q_2, p_2, s_2; q_1, p_1, s_1) &= \\ &= \bar{u}(p_2, s_2) [A(s, t) + \frac{1}{2}(\hat{q}_1 + \hat{q}_2) B(s, t)] u(p_1, s_1). \end{aligned} \quad (18.86)$$

Действительно, используя уравнения Дирака, легко проверить, что члены, содержащие \hat{p}_1 и \hat{p}_2 , снова приводятся к виду (18.86), например

$$\hat{p}_1 u(p_1, s_1) = M u(p_1, s_1).$$

Инварианты s и t определяются так же, как и в случае $\pi - \pi$ -рассеяния (см. рис. 18.28):

$$s = (p_1 + q_1)^2, \quad t = (q_2 - q_1)^2. \quad (18.87)$$

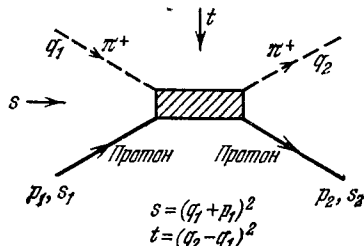


Рис. 18.28. Кинематика π -мезон-протонового рассеяния.

В том частном случае, когда рассматривается рассеяние вперед, более удобно вместо s использовать лабораторную энергию пиона ω :

$$\omega = \frac{p_1 q_1}{M} = \frac{s - M^2 - \mu^2}{2M}; \quad (18.88)$$

при этом амплитуда выражается через один форм-фактор T , представляющий линейную комбинацию форм-факторов A и B :

$$\mathfrak{M}(q_1, p_1, s_1) = 4\pi\bar{u}(p_1, s_1) T(\omega) u(p_1, s_1), \quad (18.89)$$

где

$$4\pi T(\omega) \equiv A(s, 0) + \omega B(s, 0). \quad (18.90)$$

Нашей задачей является вывод дисперсионных соотношений для $T(\omega)$.

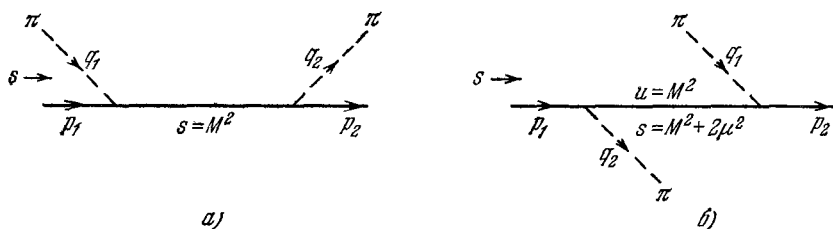


Рис. 18.29. Полюсные члены в рассеянии π -мезона на нуклоне.

Прежде всего необходимо выяснить аналитические свойства $T(\omega)$, что можно сделать тем же способом, который был использован для амплитуды $\pi - \pi$ -рассеяния. Вклад любого графика в $T(\omega)$ можно записать в виде, аналогичном (18.78),

$$I(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{(\zeta\omega - \sigma^2 + i\varepsilon)^n}. \quad (18.91)$$

Для доказательства аналитичности функции $I(\omega)$ в разрезанной ω -плоскости снова нужно найти интервал вещественных значений ω , на котором знаменатель J не обращается в нуль и, следовательно, $T(\omega)$ действительна.

Амплитуда $T(\omega)$, без сомнения, комплексна при $\omega > \mu$ или $s > (M + \mu)^2$, поскольку при этом мы попадаем в физическую область $\pi^+ - p$ -рассеяния. Точно так же $T(\omega)$ комплексна в физической области u -канала: $u = (p_2 - q)^2 > (M + \mu)^2$ или $\omega < -\mu$, которая, согласно правилу подстановки (см. (17.45)), отвечает рассеянию π^- -мезона на протоне. Поэтому единственной областью, где амплитуда $T(\omega)$ может быть вещественной, является интервал $-\mu \leq \omega \leq \mu$.

Полюсной вклад в этой области был вычислен в гл. 10, ему отвечают диаграммы, изображенные на рис. 18.29. В случае

π^+ — p -рассеяния вклад вносит только вторая из этих диаграмм. Выясним, имеются ли здесь какие-либо дополнительные сингулярности. Рассмотрим систему координат, в которой

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 &= (M, 0, 0, 0), \\ q_1 = q_2 &= (\mu \cos \varphi, i\mu \sin \varphi, 0, 0), \end{aligned} \quad (18.92)$$

и, как обычно, перейдем к евклидовой метрике. Легко видеть, что в рассматриваемом случае, как и в случае $\pi - \pi$ -рассеяния, не существует двумерных редуцированных графиков, изображенных на рис. 18.30, и, таким образом, единственная особенность дается графиком «однонуклонного обмена», как это было

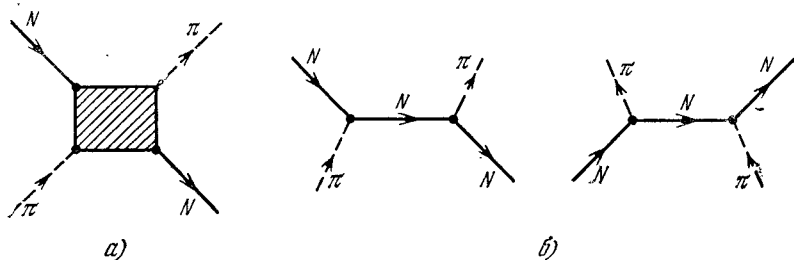


Рис. 18.30. Редуцированные диаграммы для рассеяния π -мезонов на протоне: двумерная диаграмма (а), одномерная диаграмма (б).

отмечено выше. Снова аналитически продолжая внешние импульсы $p_i q_i \leftrightarrow \lambda p_i, \lambda q_i \leftrightarrow 0$, мы получаем, что знаменатель J отрицательно определен при $-\mu < \omega < \mu$, за исключением полюсного вклада в точке

$$(p_1 - q_2)^2 = M^2 \quad \text{или} \quad \omega = + \frac{\mu^2}{2M} = + \omega_B. \quad (18.93)$$

Мы приходим к выводу, что во всех порядках теории возмущений амплитуда $T(\omega)$ аналитична в плоскости ω , за исключением разрывов от $+\mu$ до $+\infty$ и от $-\mu$ до $-\infty$ и полюса в точке $\omega = +\mu^2/2M$. Поэтому, используя контур S , указанный на рис. 18.31, можно выписать для $T(\omega)$ дисперсионные соотношения, связывающие эту амплитуду с ее абсорптивной частью и вкладом полюса.

На этом этапе нужно использовать условие унитарности, которое позволяет выразить мнимую часть амплитуды рассеяния вперед через полное сечение и тем самым установить связь между измеренными на опыте величинами. В силу унитарности S -матрицы (см. (16.69))

$$\overset{+}{S} \overset{+}{S} = 1$$

или, в терминах матричных элементов, описывающих переход из начального состояния i в конечное состояние f ,

$$\sum_{\text{все } n} S_{nf}^* S_{ni} = \delta_{fi}. \quad (18.94)$$

Введем амплитуду перехода \mathcal{F} :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{F}_{fi}, \quad (18.95)$$

для которой¹⁾ условие унитарности имеет вид

$$\mathcal{F}_{ii} - \mathcal{F}_{ii}^* = -i \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_n) \mathcal{F}_{ni}^* \mathcal{F}_{ni}. \quad (18.96)$$

Левая часть этого соотношения представляет удвоенную мнимую часть амплитуды рассеяния на нулевой угол, а правая

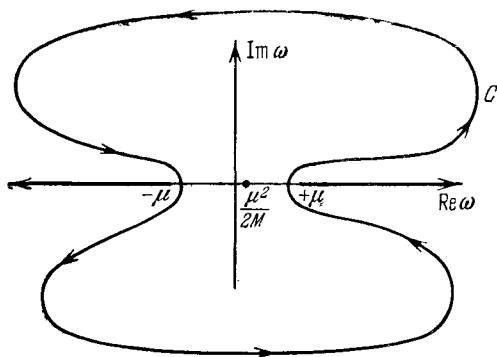


Рис. 18.31. Контур в ω -плоскости, используемый при выводе дисперсионного соотношения для амплитуды рассеяния π^+ -мезона на протоне вперед

часть связана с полным сечением. Вспомня правила нормировки амплитуд из гл. 7 (и, в частности, формулы (7.35) — (7.42)), мы получаем

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{(2\pi)^6}{v_{\text{lab}}} \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_n) |\mathcal{F}_{ni}|^2. \quad (18.97)$$

Множитель v_{lab} есть скорость пиона в лабораторной системе, а множитель $(2\pi)^6$ обусловлен множителями $(2\pi)^{-3/2}$ в волновых функциях налетающих частиц. С учетом (18.96) имеем

$$\text{Im } \mathcal{F}_{ii}(\omega) = -\frac{1}{2} v_{\text{lab}} \frac{\sigma_{\text{tot}}^{+\pi p}(\omega)}{(2\pi)^6}. \quad (18.98)$$

¹⁾ Мы по-прежнему рассматриваем рассеяние вперед, в этом случае $f = i$.

Свяжем далее амплитуду \mathcal{F}_{ii} с инвариантной амплитудой $T(\omega)$, выделяя все нормировочные множители и спиновые функции нуклонов. Из определений (18.86) и (18.89) получаем, в полной аналогии с (18.89),

$$\mathcal{F}_{ii} = \frac{1}{(2\pi)^6 2\omega} \mathfrak{M}(q_1, p_1, s_1) = \frac{1}{(2\pi)^6 2\omega} [4\pi i \bar{u}(p_1, s_1) T(\omega) u(p_1, s_1)], \quad (18.99)$$

поэтому

$$\text{Im } T(\omega) = -\frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega), \quad k = \omega v_{\text{lab}} = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}, \quad \omega \geq \mu. \quad (18.100)$$

Легко видеть, что амплитуда T весьма просто связана с сечением упругого рассеяния на нулевой угол; из оптической теоремы, с учетом используемой нормировки, следует

$$\left(\frac{d\sigma(\omega)}{d\Omega} \right)_{\theta_{\text{lab}}=0}^{\pi^+ p} = |T(\omega)|^2. \quad (18.101)$$

Этот результат может быть также непосредственно выведен из формул (10.54) и (10.68).

Уравнение для скачка (18.100) справедливо только в физической области $\omega \geq \mu$. Поэтому необходимо еще вычислить вклад от левого разреза $\omega \leq -\mu$ и полюса. Поскольку левый разрез отвечает физической области u -канала, т. е. реакции $\pi^- - p$ -рассеяния, мы можем, используя свойство кроссинг-симметрии амплитуды, выразить скачок на этом разрезе через сечение $\pi^- - p$ -рассеяния. Как обсуждалось в § 120, точная амплитуда π -мезон-нуклонного рассеяния инвариантна при одновременной перестановке изотопических индексов пионов (частица \leftrightarrow античастица) и 4-импульсов пиона в начальном (q_1) и конечном ($-q_2$) состояниях. Для рассматриваемого случая рассеяния вперед эта замена сводится к замене $\omega \leftrightarrow -\omega$ и $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$:

$$T(\omega) \equiv T^{\pi^+ p}(\omega) = T^{\pi^- p}(-\omega). \quad (18.102)$$

Аргумент амплитуды $\pi^+ - p$ рассеяния лежит на верхнем берегу разреза $\omega \geq \mu$, а аргумент амплитуды $\pi^- - p$ рассеяния лежит на нижнем берегу разреза $\omega \leq -\mu$. Действительно, амплитуда (18.91) может быть, как и в случае $\pi - \pi$ -рассеяния вперед, разделена на две части, одна из которых отвечает вкладу $\xi > 0$, а другая — вкладу $\xi < 0$. Подчеркнем это обстоятельство, записав (18.102) в виде

$$T^{\pi^+ p}(-\omega - i\epsilon) = T^{\pi^- p}(\omega + i\epsilon),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \text{Im } T^{(\pi^+ p)}(-\omega) &\equiv \frac{1}{2i} [T^{(\pi^+ p)}(-\omega + i\epsilon) - T^{(\pi^+ p)}(-\omega - i\epsilon)] = \\ &= + \frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega). \end{aligned} \quad (18.103)$$

После того, как мы выразим скачок на левом разрезе через сечение, нам остается только вычислить вычет в полюсе $\omega = \omega_B = \mu^2/2M$. После этого амплитуда рассеяния вперед целиком будет выражена только через экспериментальные величины. Покажем, что вклад полюсных членов по-прежнему дается выражением, полученным в гл. 10, с заменой голы константы связи g_0 перенормированным значением g .

Для этого нужно вычислить вклад всех фейнмановских графиков типа, изображенных на рис 18.29, т. е. имеющих вид двух вершинных блоков, соединенных нуклонным пропагатором. Согласно сказанному перед формулой (18.93) о приведенных графиках эти диаграммы достаточно вычислить лишь вблизи полюса нуклонного пропагатора. Как было отмечено выше, в $\pi^+ - p$ -рассеяние вносит вклад только один график (см. рис. 18.29, б). Инвариантная амплитуда, сопоставляемая указанной диаграмме, равна

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{\text{pole}}(q_1, p_1, s_1) &= Z_2 Z (-ig_0 \sqrt{2})^2 \times \\ &\times \bar{u}(p_1, s_1) i\Gamma_5(p_1; p) iS'_F(p) i\Gamma_5(p, p_1) u(p_1, s_1), \end{aligned} \quad (18.104)$$

$$p = p_1 - q_1.$$

Кинематика в (18.104) отвечает рассеянию вперед: $p_2 = p_1$ и $q_2 = q_1$. Множители Z_2 и Z возникают при перенормировке волновых функций нуклона и пиона, как это следует из редукционных формул (16.81) и (17.43). Множитель \sqrt{Z} (18.104) получается при выделении пропагаторов внешних частиц. Действительно, выделяя внешние концы, например в (17.43), получим

$$\int d^4x \frac{1}{\sqrt{Z_2}} e^{ip_1 x} \bar{u}(p_1) (i\hat{\nabla}_x - M) S'_F(x - y) \dots = \sqrt{Z_2} e^{ip_1 y} \bar{u}(p_1) \dots$$

Согласно спектральному представлению (16.122) точный пропагатор $S'_F(p_1)$ при переходе на массовую поверхность равен $Z_2/(\hat{p}_1 - M)$ и в точности сокращается оператором Дирака, так что в результате мы получаем множитель $\sqrt{Z_2}$ в числителе. Аналогичный результат имеет место для пионного пропагатора и волновой функции. Отметим еще, что функция Грина $S'_F(p)$

промежуточного нуклона в (18.104), согласно представлению Челлена — Лемана, вблизи полюса также ведет себя как $Z_2/(\hat{p} - M)$.

Величина $\Gamma_5(p_1; p)$ представляет сумму всех компактных вершинных диаграмм, т. е. таких вершинных диаграмм, которые не могут быть разделены на несвязанные части мезонной или нуклонной линией. При $\hat{p}_1 \rightarrow M$, т. е. в полюсе, отвечающем промежуточному нуклону, $\Gamma_5(p_1, p)$ должна быть пропорциональна матрице γ_5 , что можно показать так же, как мы вывели формулу (10.157). Все множители \hat{p}_1 в Γ_5 следует перемещать налево или направо до тех пор, пока они не окажутся рядом со спинорами $\bar{u}(p_1)$ или $u(p_1)$, после чего их можно заменить на M . Поправки, пропорциональные $\hat{p} - M$, исчезают, коль скоро мы интересуемся поведением вершинной функции вблизи полюса. Инвариантные форм-факторы в Γ_5 зависят от $p^2 = p_1^2 = M^2$ и $q_1^2 = (p - p_1)^2 = \mu^2$. Поэтому коэффициент при матрице γ_5 равен просто числу. Мы определим его следующим образом:

$$g\gamma_5 = Z_2 Z^{1/2} g_0 \Gamma_5(p_1, p) \left| \begin{array}{l} p^2 \rightarrow M^2 \\ p_1^2 \rightarrow M^2 \\ q_1^2 = \mu^2 \end{array} \right. \quad (18.105)$$

Подставляя (18.105) в (18.104), мы воспроизводим старый результат (10.56) теории возмущений с заменой голой константы g_0 на g :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\text{pole}}(q_1, p_1, s_1) &= 4\pi T(\omega) = \\ &= -2g^2 \frac{\bar{u}(p_1, s_1) \gamma_5 (\hat{p}_1 - \hat{q}_1 + M) \gamma_5 u(p_1, s_1)}{(p_1 - q_1)^2 - M^2} = \\ &= \frac{2g^2 \omega \bar{u}(p_1, s_1) u(p_1, s_1)}{2M\omega - \mu^2} = \frac{8\pi f^2}{\omega - \omega_B} \quad \text{при } (p_1 - q_1)^2 \rightarrow M^2, \end{aligned} \quad (18.106)$$

где

$$\left(\frac{g^2}{4\pi} \right) \frac{\mu^2}{4M^2} \equiv f^2$$

есть рационализованная и перенормированная константа пион-нуклонной связи.

Используя далее формулу Коши и контур C в интеграле, изображенный на рис. 18.31, мы можем выписать дисперсионные соотношения, аналогичные соотношениям (18.81) для $\pi - \pi$ -рассеяния вперед, с той лишь разницей, что теперь добавляется вклад полюсного члена. Объединяя выражения (18.100),

(18.103) и (18.106), получаем

$$\begin{aligned}
 T(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{d\omega' \operatorname{Im} T(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} T(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \frac{2f^2}{\omega - \omega_B} + C_{\infty} = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{d\omega' \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(-\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} - \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega' \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \frac{2f^2}{\omega - \omega_B} + C_{\infty}.
 \end{aligned}$$

Взяв действительную часть этого выражения и скомбинировав первый и второй члены, получим окончательную форму дисперсионных соотношений для $\pi^+ - p$ и $\pi^- - p$ -рассеяния

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} T(\pi^+ p)(\omega) &= \\
 &= \frac{2f^2}{\omega - \omega_B} - \frac{1}{4\pi^2} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega' \sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega'^2 - \omega^2} \left\{ \omega' [\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') + \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega')] + \right. \\
 &\quad \left. + \omega [\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega')] \right\} + C_{\infty}, \\
 \operatorname{Re} T(\pi^- p)(\omega) &= -\frac{2f^2}{\omega + \omega_B} - \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi^2} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega' \sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega'^2 - \omega^2} \left\{ \omega' [\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') + \sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega')] - \right. \\
 &\quad \left. - \omega [\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega')] \right\} + C_{\infty}. \quad (18.107)
 \end{aligned}$$

Эти соотношения удобно записать, введя полусумму и полуразность амплитуд:

$$\begin{aligned}
 T^+ &= 1/2 [T(\omega) + T(-\omega)] = 1/2 [T(\pi^+ p)(\omega) + T(\pi^- p)(\omega)], \\
 T^- &= -1/2 [T(\omega) - T(-\omega)] = 1/2 [T(\pi^- p)(\omega) - T(\pi^+ p)(\omega)].
 \end{aligned} \quad (18.108)$$

Полагая, в частности, что для нечетной амплитуды T^- справедливо дисперсионное соотношение без вычитаний, получим важное соотношение

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{Re} T^-(\omega)}{\omega} &= -\frac{2f^2}{\omega^2 - \omega_B^2} + \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi^2} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega' \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} [\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega')]}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (18.109)
 \end{aligned}$$

Формула (18.109) связывает между собой экспериментально измеримые величины и содержит лишь один свободный параметр при условии, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+p}(\omega) - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^-p}(\omega)] \rightarrow 0. \quad (18.110)$$

Экспериментальные данные указывают на то, что соотношение (18.110) по-видимому выполняется. При энергиях ~ 10 Гэв разница сечений составляет ¹⁾

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{tot}}^{\pi^-p}(\omega) - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^+p}(\omega)}{\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+p}(\omega)} \approx \frac{2 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2}{25 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2} \approx 0,08.$$

Выражение (18.109) позволяет экспериментально определить величину f^2 , она оказалась равной [89]

$$f^2 = 0,080 \pm 0,001. \quad (18.111)$$

Этот результат является наибольшим достижением метода дисперсионных соотношений.

Результат (18.111) мало чувствителен к поведению сечения при $\omega \rightarrow \infty$. Если, однако, будущие эксперименты покажут, что условие (18.110) не выполняется, то в дисперсионных соотношениях нужно будет сделать вычитание, записав их для амплитуды $T^-(\omega)/\omega(\omega^2 - \omega_0^2)$, где $\omega_0^2 \leq \mu^2$ — вычитательная точка. Тогда, выбрав, например, $\omega_0 = \mu$, мы получим вместо (18.109)

$$\frac{\text{Re } T^-(\omega)}{\omega} = \frac{T^-(\mu)}{\mu} + \frac{2f^2(\omega^2 - \mu^2)}{(\omega^2 - \omega_B^2)(\mu^2 - \omega_B^2)} - \frac{\omega^2 - \mu^2}{4\pi^2} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega' [\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+p}(\omega') - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^-p}(\omega')]}{\sqrt{\omega'^2 - \mu^2} (\omega'^2 - \omega^2)}. \quad (18.112)$$

Дисперсионный интеграл в (18.112) теперь сходится на бесконечности гораздо быстрее. Однако (18.112) в этом случае содержит дополнительную величину — амплитуду рассеяния на пороге $T^-(\mu)$, которую необходимо определять из опыта.

¹⁾ В исследовании рассеяния адронов при высоких энергиях с момента написания книги был достигнут существенный прогресс, связанный с введением в строй больших ускорителей в СССР и США и ускорителя на встречных пучках в ЦЕРН'е. Интересующегося читателя мы отсылаем к недавним обзорам [136, 137], где имеется также исчерпывающая библиография. Отметим здесь только, что малость отношения $\Delta\sigma/\sigma$ при энергии 10 Гэв, которая по современным представлениям весьма далека от асимптотической, имеет место только для π^\pm — p -рассеяния. Тем не менее измерения в широком интервале энергий $E \leq 200$ Гэв показали, что разности полных сечений взаимодействия частиц и античастиц в исследованной области энергий убывают степенным образом, что согласуется с теоремой Померанчука (*прим. перев.*).

Нарушение условия (18.110) — асимптотического равенства $\pi^+ - \pi^-$ и $\pi^- - p$ -сечений — ведет к странному и противоречащему нашей физической интуиции результату, хотя строго исключить его возможность и нельзя. Предположим, например, что сечения $\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}$ и $\sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}$ остаются конечными при $\omega \rightarrow \infty$, как это имеет место при достижимых в настоящее время энергиях и, более того, что остается конечной разность сечений $\Delta\sigma$. Тогда из (18.112) следует, что

$$\text{Re } T^-(\omega) \approx -\frac{\omega^3}{4\pi^2} \Delta\sigma P \int_{\bar{\omega}}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} \approx \frac{\omega}{4\pi^2} \Delta\sigma \ln \frac{\omega}{\bar{\omega}}, \quad (18.113)$$

где $\bar{\omega} \gg \mu$ и $\omega/\bar{\omega} \gg 1$, причем значение $\bar{\omega}$ выбирается так, чтобы сечения могли быть аппроксимированы своим асимптотическим пределом. Однако из оптической теоремы следует, что при $\omega \gg \mu$ мнимая часть амплитуды рассеяния π^\pm мезонов на протоне ведет себя как

$$\text{Im } T(\omega) \sim \frac{\omega}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}^{\pi p}(\omega).$$

В результате мы приходим к выводу, что при $\omega \rightarrow \infty$ действительная часть амплитуды упругого $\pi^+ - p$ -рассеяния доминирует над ее мнимой частью. Это заключение, безусловно, противоречит нашей физической интуиции. Наблюдаемые полные сечения [90]¹⁾ при энергиях порядка десятков ГэВ превосходят упругие сечения более чем в три раза. Поэтому следует ожидать, что при таких энергиях преобладает дифракционное рассеяние пиона, сопровождающееся поглощением в различные неупругие каналы, вклад которого в упругую амплитуду чисто мнимый. Эксперименты при высоких энергиях подтверждают эту интуитивную картину [90].

Изложенные аргументы привели Померанчука [75] к выводу о том, что должно выполняться условие (18.110) и тем самым безвычитательные дисперсионные соотношения (18.109). Это утверждение, называемое теоремой Померанчука, было позднее доказано при некоторых более слабых предположениях Вайнбергом и др. [91—93]. Аналогичный результат выведен и для других сечений, например:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}^{pp}(\omega) - \sigma_{\text{tot}}^{\bar{p}p}(\omega) &\rightarrow 0, \\ \sigma_{\text{tot}}^{K^+ p}(\omega) - \sigma_{\text{tot}}^{K^- p}(\omega) &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad \omega \rightarrow \infty,$$

причем эти соотношения, по-видимому, также подтверждаются на опыте.

¹⁾ См. также [138] (прим. перев.).

Тем же способом, которым мы получили дисперсионное соотношение для амплитуды $T^-(\omega)$, можно вывести и дисперсионное соотношение для четной амплитуды $T^+(\omega)$. В этом случае дисперсионный интеграл содержит сумму сечений $\sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega) + \sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega)$ и вычитания заведомо необходимы. Складывая два дисперсионных соотношения в (18.107) и сделав вычитания при $\omega = \mu$, получаем

$$\text{Re } T^+(\omega) = T^+(\mu) - \frac{f^2 \mu^2 (\omega^2 - \mu^2)}{M (\omega^2 - \omega_B^2) (\mu^2 - \omega_B^2)} - \frac{\omega^2 - \mu^2}{4\pi^2} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega' \omega' [\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') + \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega')]}{(\omega'^2 - \omega^2) \sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}. \quad (18.114)$$

Было показано [94], что это соотношение не противоречит эксперименту¹⁾. Аналогичные результаты можно получить и для амплитуды рассеяния вперед с переворотом спина [95].

§ 134. Аксиоматический вывод дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния вперед

Дисперсионные соотношения (18.109) и (18.114) указывают на вполне однозначную связь между наблюдаемыми величинами. Поэтому вполне уместно задать вопрос: что будет означать противоречие этих соотношений с экспериментом, если таковое обнаружится? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно проанализировать основные постулаты, на которых основывается наша теория. При выводе дисперсионных соотношений мы использовали общие свойства S -матрицы, обсуждавшиеся в гл. 16, в частности трансляционную инвариантность, из которой следует существование 4-вектора энергии-импульса P_{μ} , и инвариантность при преобразованиях Лоренца. Далее мы предположили существование единственного и нормированного основного состояния, вакуума, а также полного набора in- и out-состояний. Наконец, мы использовали локальность теории, т. е. тот факт, что поля удовлетворяют дифференциальным уравнениям, а генераторы P_{μ} выражаются через соответствующие локальные плотности. При этом коммутаторы бозе-полей и антикоммутаторы ферми-полей обращаются в нуль для пространственно-подобных интервалов, равно как и коммутаторы всех локальных плотностей, построенных из полей и отвечающих «наблюдаемым» величинам. Напомним, что это свойство теории мы называем микропричинностью.

¹⁾ См. также [137] (прим. перев.).

Указанные постулаты все имеют фундаментальный характер и отказаться от них можно было бы только в крайней случае. В нашей теории имеется, однако, одно слабое место, а именно, вопрос о сходимости ряда теории возмущений. Действительно, нельзя заранее исключить возможность того, что бесконечная сумма фейнмановских диаграмм имеет дополнительные сингулярности, которые не содержатся ни в одном ее члене. Тем не менее возможность появления дополнительных особенностей следует исключить, поскольку можно строго доказать дисперсионные соотношения для мезон-нуклонного рассеяния вперед, не прибегая к анализу аналитических свойств отдельных фейнмановских диаграмм [97, 27]. Ниже мы обсудим это доказательство, следуя Шиманчику и Боголюбову.

Рассмотрим S -матрицу (16.77) для рассеяния вперед. Выражение (16.77) записано в виде, в котором редукция выполнена наполовину, и в in - и out -состояниях оставлены мезонные состояния:

$$\begin{aligned} \langle q_2 p_1 s_1 \text{ out} | q_1 p_1 s_1 \text{ in} \rangle &= \delta_{q_2 q_1} - \frac{1}{Z} \int \frac{d^4 x d^4 y e^{+i(q_2 y - i q_1 x)}}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_2 \omega_1}} \times \\ &\times (\square_y + \mu^2) (\square_x + \mu^2) \langle p_1 s_1 \text{ out} | T(\varphi(y) \varphi^+(x)) | p_1 s_1 \text{ in} \rangle = \\ &= \delta_{q_2 q_1} - \frac{i(2\pi)^4 \delta^4(q_2 - q_1)}{(2\pi)^6 2\omega} \mathfrak{M}(q_1, p_1, s_1), \quad (18.115) \end{aligned}$$

где амплитуда \mathfrak{M} определена в (18.99) и равна

$$\frac{\mathfrak{M}(q, p, s)}{(2\pi)^3} = -\frac{i}{Z} \int d^4 y e^{+i q y} (\square_y + \mu^2)^2 \langle ps | T(\varphi(y) \varphi^+(0)) | ps \rangle. \quad (18.116)$$

Поле φ сопоставляется π^+ -мезону и, действуя на произвольное состояние, увеличивает заряд на $+1$. В формуле (18.116) использована трансляционная инвариантность теории, которая позволяет заменить $\varphi(x)$ на $\varphi(0)$, благодаря чему можно явно вычислить один из четырехмерных интегралов. Выразив T -произведение полей через коммутатор:

$$\begin{aligned} T(a(t) b(0)) &= \theta(t) a(t) b(0) + \theta(-t) b(0) a(t) = \\ &= \theta(t) [a(t), b(0)] + b(0) a(t), \quad (18.117) \end{aligned}$$

приведем все выражение к виду, удобному для исследования его аналитических свойств:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{M}(q, p, s)}{(2\pi)^3} &= -\frac{i}{Z} \int d^4 y e^{+i q y} (\square_y + \mu^2)^2 \times \\ &\times \{ \theta(y_0) \langle ps | [\varphi(y), \varphi^+(0)] | ps \rangle + \langle ps | \varphi^+(0) \varphi(y) | ps \rangle \}. \quad (18.118) \end{aligned}$$

Покажем, что второй член в (18.118) равен нулю в силу стабильности протона. Действительно, вставив между операторами

полей полный набор состояний $|n\rangle$ и выполнив интегрирование по d^4y , получим

$$\int d^4y e^{+iqy} (\square_y + \mu^2)^2 \langle ps | \varphi^+(0) | n \rangle \langle n | \varphi(y) | ps \rangle = \\ = \sum_n (q^2 - \mu^2)^2 |\langle ps | \varphi^+(0) | n \rangle|^2 (2\pi)^4 \delta^4(q + p_n - p). \quad (18.119)$$

Поскольку $q_0 > 0$, не существует такого состояния $|n\rangle$, для которого $p = q + p_n$.

Уравнения (18.118) и (18.116) совпадают на массовой поверхности π -мезона, т. е. при $q^2 = \mu^2$. Тем не менее аналитические свойства функций, определенных этими уравнениями, различны, когда мы рассматриваем их продолжение в комплексную плоскость $q_0 = \omega$. Запаздывающий коммутатор в (18.118) имеет причинную форму, которую удобно использовать при выводе дисперсионных соотношений. Напомним, что при обсуждении дисперсионных соотношений в классической теории мы использовали тот факт, что рассеянные волны не могут распространяться со скоростью, большей скорости света. Причинное условие теперь имеет вид

$$[\varphi(y), \varphi^+(0)] = 0, \quad y^2 < 0. \quad (18.120)$$

Как мы покажем ниже, условие (18.120) позволяет выполнить аналитическое продолжение амплитуды.

С этой целью перейдем в систему покоя нуклона, в которой $p = (M, 0, 0, 0)$. Поскольку \mathfrak{M} — скалярная амплитуда, то в случае рассеяния вперед она не зависит от спина s . Поэтому матричный элемент зависит только от $|y|^2$ и y_0 , и в (18.116) можно выполнить интегрирование по угловым переменным. При этом получаем из (18.118)

$$T(\omega) = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{M}(q, p, s) = \int_0^\infty dy y Y(\omega, y), \quad (18.121)$$

где $T(\omega)$ определена выражением (18.99) и

$$Y(\omega, y) \equiv - \frac{(2\pi)^3 i}{z} \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} y}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \int_{-\infty}^\infty dy_0 e^{i\omega y_0} (\square_y + \mu^2)^2 \theta(y_0) \times \\ \times \langle Ms | [\varphi(y), \varphi^+(0)] | Ms \rangle. \quad (18.122)$$

Функция $Y(\omega, y)$ аналитична в верхней полуплоскости ω . Точка $\omega = i\mu$ не является особой, поскольку функция $(1/\sqrt{z}) \sin \sqrt{z}$ зависит не от \sqrt{z} , а от z . Роль ступенчатой функции $\theta(y_0)$, как и в случае соотношений Крамерса — Кронига, сводится к тому,

что подынтегральное выражение, как функция y_0 , экспоненциально затухает, когда ω уходит в верхнюю полуплоскость. Действительно, если бы $\theta(y_0)$ в (18.122) стояла слева от оператора Клейна — Гордона, то интеграл по dy_0 вычислялся бы по области положительных значений $0 \leq y_0 < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \theta(y_0) = \int_0^{\infty} dy_0. \quad (18.123)$$

В действительности же интеграл по dy_0 в (18.122) отличается от (18.123) на некоторое число δ -функций и их производных, возникающих в результате коммутирования $\theta(y_0)$ с оператором Клейна — Гордона; при этом $d/dy_0 \theta(y_0) = \delta(y_0)$. В результате появляются дополнительные члены, которые, однако, представляют собой лишь безобидные c -числа, поскольку они сводятся к коммутаторам полей при равных временах:

$$[\varphi(\mathbf{y}, 0), \varphi^+(0)], \quad [\dot{\varphi}(\mathbf{y}, 0), \varphi^+(0)] = -i\delta^3(\mathbf{y}). \quad (18.124)$$

Эти члены приводят к добавлению к $T(\omega)$ в (18.121) функций, растущих не быстрее, чем полином, поэтому при аналитическом продолжении по ω их можно просто игнорировать. Далее, условие причинности (18.120) обеспечивает быстрое убывание функции $Y(\omega, y)$ при $\omega \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости. Действительно, экспонента в (18.122) не опасна, если мы находимся внутри переднего светового конуса $y_0 \geq y$. Выражение

$$\exp[i(\omega y_0 \pm \sqrt{\omega^2 - \mu^2} y)] \approx \{\exp[i\omega(y_0 \pm y)]\} \exp\left(\mp i \frac{\mu^2}{2\omega} y\right) \quad (18.125)$$

для $|\omega| \rightarrow \infty$

не приводит к трудностям, если $\text{Im } \omega > 0$ и $y_0 \geq y$. Хотя второй множитель для больших y может расти экспоненциально $\sim \exp(+\mu^2 y/2|\omega|)$, его можно подавить, вводя под знак интеграла множитель $e^{-\epsilon y^2}$, причем после вычисления интеграла следует положить $\epsilon = 0$.

Учитывая вышесказанное, мы можем вычислить интеграл (18.121) для всех ω , лежащих в верхней полуплоскости; тем самым устанавливается аналитичность амплитуды в этой области. В результате можно выписать дисперсионное соотношение для $T(\omega)$:

$$\text{Re } T(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \int_0^{\infty} dy y e^{-\epsilon y^2} \text{Im } Y(\omega', y) + C_{\infty}, \quad (18.126)$$

где C_∞ — вклад интегрирования по большому полукругу. Этот вклад можно устранить, сделав достаточное число вычитаний¹⁾.

Чтобы завершить доказательство, нужно еще вычислить предел $\varepsilon \rightarrow 0$ под знаком дисперсионного интеграла (18.126) при $|\omega| \geq \mu$, что не приводит к каким-либо трудностям, поскольку в этом случае множитель $(\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} y) / \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ осциллирует и интеграл в (18.121) существует для вещественных значений ω . В этой области, по существу, вовсе не требуется вводить $e^{-\varepsilon y}$ для подавления экспоненциального роста второго множителя в (18.125). Однако, и это является камнем преткновения при выводе любых дисперсионных соотношений, в нефизической области $|\omega| < \mu$ мы не можем положить $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку этот множитель реально необходим, чтобы подавить рост $\text{sh} \sqrt{\mu^2 - \omega^2} y$. С другой стороны, из рассмотрения фейнмановских диаграмм известно, что абсорптивная амплитуда в нефизической области имеет простой вид, а именно $\text{Im} T(\omega)$ и обращается в нуль всюду, кроме полюса при $\omega = \mu^2/2M$. Посмотрим теперь, как можно получить этот простой результат в рассматриваемом подходе.

Вернемся к (18.122) и вычислим $\text{Im} Y(\omega, y)$ в нефизической области $|\omega| < \mu$. Будем считать, что, как обычно, ω стремится к вещественной оси из верхней полуплоскости. Вставив полный набор состояний $1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$ между полями φ и φ^+ в коммутаторе, сместим поле φ в начало координат и выполним интегрирование по dy_0 ²⁾:

$$\begin{aligned} \text{Im} Y(\omega, y) = & \text{Im} \left[\frac{(2\pi)^3}{Z} \frac{\text{sh} \sqrt{\mu^2 - \omega^2} y}{\sqrt{\mu^2 - \omega^2}} \times \right. \\ & \times \sum_n \frac{\sin p_n y}{p_n y} [(E_n - M)^2 - p_n^2 - \mu^2]^2 \times \\ & \left. \times \left(\frac{|\langle n | \varphi^+ | Ms \rangle|^2}{\omega + M - E_n + i\varepsilon} - \frac{|\langle n | \varphi | Ms \rangle|^2}{\omega - M + E_n + i\varepsilon} \right) \right]. \quad (18.127) \end{aligned}$$

Мнимая часть отлична от нуля там, где знаменатели обращаются в нуль, что имеет место только при

$$E_n = M \pm \omega. \quad (18.128)$$

Состояния $|n\rangle$ в (18.127) могут быть связаны либо с состоянием $\varphi^+ |Ms\rangle$ с нуклонным числом $+1$ и зарядом $+2$, либо с состоянием $\varphi |Ms\rangle$ с нуклонным числом $+1$ и зарядом 0 . Единствен-

¹⁾ Гораздо хуже дело обстоит в том случае, когда коммутатор в (18.122) при $y \rightarrow 0$ имеет существенную особенность, при этом возникающая добавка к $T(\omega)$ уже не сводится к полиному.

²⁾ Производная по времени от $\theta(y_0)$ в (18.122) ведет лишь к полиномам по ω и поэтому не содержится в (18.127). Множитель $(\sin p_n y) / p_n$ возникает после усреднения по проекции спина s .

ным состоянием с указанными квантовыми числами и с энергией $E_n < M + \mu$ ¹⁾ является дискретное состояние нейтрона, причем это состояние содержится во втором члене в (18.127). Вклад в нефизическую область от непрерывного спектра нуклонов и пионов, порог которого равен $M + \mu$, отсутствует. Вклад же од-нейтронного состояния, очевидно, приводит к полюсному члену в $T(\omega)$, вычисленному в предыдущем параграфе.

При попытке вычислить $\text{Im } Y(\omega, y)$ в нефизической области непосредственно из (18.127) мы сталкиваемся со сложными и запутанными вычислениями²⁾. Оказывается, однако, возможным избежать трудности, если воспользоваться приемом, предложенным Боголюбовым [27]. $\text{Im } Y(\omega, y)$ при $\omega < \mu$ равна

$$\begin{aligned} \text{Im } Y(\omega, y) &= \int d^3k f(\mathbf{k}, y) \delta(\omega - M + \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}) = \\ &= \int d^3k F(\mathbf{k}, y) \delta\left(\omega - \frac{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2}{2M}\right), \end{aligned} \quad (18.129)$$

где \mathbf{k} — импульс нейтрона. Все несущественные множители включены в функции $f(\mathbf{k}, y)$ и $F(\mathbf{k}, y)$ и \sum_n в (18.127) заменена на

$\int d^3k$. Боголюбов заметил, что можно избежать вычисления (18.129), если ввести вспомогательную амплитуду $\tilde{T}(\omega)$, которая определяется через функцию $Y(\omega, y)$, обладающую всеми желательными свойствами, позволяющими доказать дисперсионные соотношения, и отличающуюся от $Y(\omega, y)$ лишь заменой

$$F(\mathbf{k}, y) \rightarrow \tilde{F}(\mathbf{k}, y) = \left(\omega - \frac{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2}{2M}\right) F(\mathbf{k}, y) \quad (18.130)$$

в (18.129). Поскольку $x\delta(x) = 0$, $\tilde{T}(\omega)$ не вносит вклада в нефизическую область.

Функция $\tilde{T}(\omega)$ не содержит нейтронного полюса, поскольку

$$\tilde{T}(\omega) = \left(\omega - \frac{\mu^2}{2M}\right) T(\omega), \quad (18.131)$$

что легко проверить, повторяя предыдущие выкладки с учетом дополнительного множителя. Действительно, амплитуда $\mathfrak{M}(q, p, s)$ в (18.116) умножается на

$$\omega - \frac{\mu^2}{2M} = \omega - \frac{\omega^2 - |q|^2}{2M}.$$

¹⁾ Это неравенство следует из (18.128) при $|\omega| < \mu$.

²⁾ См. [97—99]. Трудности еще более возрастают при рассмотрении дисперсионных соотношений для рассеяния на ненулевой угол.

Этот множитель может быть внесен внутрь интеграла в правой части (18.116) и заменен затем локальным дифференциальным оператором, действующим на $\varphi(y)$

$$\omega \rightarrow \frac{\omega^2 + \nabla_y^2}{2M}. \quad (18.132)$$

Поэтому все выкладки, ведущие от выражения (18.116) к дисперсионным соотношениям (18.126), могут быть повторены для $\tilde{T}(\omega)$ с заменой

$$\varphi(y) \rightarrow \left(\omega - \frac{\omega^2 + \nabla_y^2}{2M} \right) \varphi(y). \quad (18.133)$$

При вычислении $\text{Im } \tilde{Y}(\omega, y)$ в (18.127) единственное изменение заключается в появлении дополнительного множителя $\omega - \omega - (\omega^2 - |\mathbf{k}|^2)/2M$. Следовательно,

$$\text{Im } \tilde{Y}(\omega, y) = 0 \quad \text{при} \quad |\omega| \leq \mu. \quad (18.134)$$

Поэтому $\tilde{T}(\omega)$ удовлетворяет дисперсионным соотношениям, выражающим ее свойства аналитичности в комплексной ω -плоскости с разрезом

$$\text{Re } \tilde{T}(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{d\omega' \text{Im } \tilde{T}(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega' \text{Im } \tilde{T}(\omega')}{\omega' - \omega} + \tilde{C}_{\infty}. \quad (18.135)$$

Разумеется, чтобы компенсировать лишнюю степень ω в (18.132) и устранить вклад \tilde{C}_{∞} , необходимы дополнительные вычитания. Наличие вычитательных членов не приводит, однако, к каким-либо дополнительным трудностям.

Физическая амплитуда

$$T(\omega) \equiv \frac{\tilde{T}(\omega)}{\omega - \mu^2/2M}$$

обладает теми же аналитическими свойствами, что и $\tilde{T}(\omega)$, но имеет дополнительный полюс при $\omega = \mu^2/2M$. Вычет в нем выражается через матричный элемент $\langle \sqrt{k^2 + M^2 s'} | \varphi(0) | Ms \rangle$, относящийся к π -мезон-нуклонной вершине. Проверку этого факта мы оставляем читателю. Ответ при этом согласуется с результатом, полученным из анализа редуцированных диаграмм.

Таким образом, мы вновь воспроизвели все выводы предыдущего раздела, не используя предположение о сходимости ряда теории возмущений. Поэтому противоречие дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния вперед с экспериментом, если таковое обнаружится, будет иметь более глубокие последствия.

§ 135. Динамические расчеты $\pi - \pi$ -рассеяния с использованием дисперсионных соотношений

Одним, притом весьма впечатляющим, примером использования техники дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния вперед является вывод соотношений, связывающих экспериментально наблюдаемые величины, проверка которых позволяет сделать вывод о справедливости основных постулатов в теории поля. В последнее время много усилий уделялось также и другому аспекту метода, а именно, использованию дисперсионных соотношений для выполнения динамических вычислений основных характеристик взаимодействующих частиц. В частности, в области сильных взаимодействий, где теория возмущений неприменима, дисперсионный подход представляется в настоящее время наиболее плодотворным.

Возможность динамических вычислений подобного рода связана с применением весьма грубых приближений, которые часто подвергаются критике. Справедливость этих приближений весьма редко обоснована теоретически. При этом поправочные члены не только трудно оценить, но и, вообще говоря, практически невозможно вычислить, а справедливость приближений может быть оправдана только путем сравнения результатов расчета с экспериментом [100—102]. Поэтому мы не будем здесь слишком подробно обсуждать детали вычислений. Наша цель заключается лишь в том, чтобы дать обзор основных идей метода с тем, чтобы у читателя сложилось некоторое представление о дисперсионной картине, такой, как она представляется с наиболее оптимистической точки зрения.

Рассмотрим случай с простейшей кинематикой, а именно, пион-пионное рассеяние и вычислим фазы рассеяния и пионную электромагнитную вершину. Как и в дисперсионных соотношениях для пион-нуклонного рассеяния вперед, динамические вычисления основываются на использовании аналитических свойств, а также унитарности (или сохранении вероятности) и кроссинг-симметрии амплитуды рассеяния.

Отделив кинематические и изоспиновые множители, получим для амплитуды $\pi - \pi$ -рассеяния в системе центра масс налетающих пионов следующее выражение:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - \frac{i(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)}{(2\pi)^6 (2\omega)^2} \sum_{I=0}^2 A_I(s, t, u) P_I. \quad (18.136)$$

Кинематика указана на рис. 18.32, где $\omega = \sqrt{q^2 + \mu^2}$; изотопические проекционные операторы P_I определены формулами (17.54) и (17.55). Рассмотрим реакцию в s -канале, физическая область которого задана неравенствами $4\mu^2 \leq s \leq \infty$ и $t, u \leq 0$. Ампли-

туды реакций в t - и u -каналах при необходимости могут быть построены с использованием кроссинговых соотношений (17.52) и (17.53).

Хотя аналитические свойства амплитуды рассеяния $A(s, t, u)$ как функции переданного импульса t (или u) неизвестны, тем не менее в § 132 мы обнаружили (см. (18.84)), что амплитуда $\hat{A}(s, \cos \theta) \equiv A_I(s, t, u)$ при фиксированном $\cos \theta$ аналитична в s -плоскости с разрезами $-\infty \leq s \leq 0$ и $4\mu^2 \leq s \leq \infty$. Из выражений (18.82) и (18.85) следует, что парциальные амплитуды

$$A_l^I(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \hat{A}_l(s, \cos \theta) \quad (18.137)$$

имеют те же самые аналитические свойства. Ниже мы используем это обстоятельство, равно как и свойства унитарности и кроссинг-симметрии.

Чтобы применить условие унитарности, нужно обобщить формулу (18.96), использованную ранее для пион-нуклонного рассеяния на нулевой угол, на случай переходов в различные конечные состояния. При этом мы получим выражение для скачка парциальных амплитуд $A_l^I(s)$ на разрезе $s \geq 4\mu^2$, аналогичное (18.100). Введем временно обозначение:

$$\begin{aligned} S_{ni}^{(+)} &\equiv \langle n \text{ out} | i \text{ in} \rangle = \\ &= \delta_{ni} - (2\pi)^4 i \delta^4(P_n - P_i) \mathcal{F}_{ni}^{(+)} \quad (18.138) \end{aligned}$$

для обычных S -матричных элементов и амплитуд перехода. Если $|n\rangle$ и $|i\rangle$ представляют двухпионные состояния, то $\mathcal{F}_{ni}^{(+)}$ сводится к амплитуде упругого π - π -рассеяния и отличается от $\hat{A}(s, \cos \theta)$ множителем, пропорциональным s^{-1} . В частности, при $s \geq 4\mu^2$ амплитуда $\mathcal{F}_{ni}^{(+)}$ определяется представлением Намбу как предельное значение аналитической функции, когда аргумент s приближается к разрезу на действительной оси, оставаясь при этом в верхней полуплоскости:

$$\mathcal{F}_{ni}^{(+)}(s, \cos \theta) \equiv \mathcal{F}_{ni}(s + i\epsilon, \cos \theta).$$

Определив аналогичным образом

$$S_{fn}^{(-)} \equiv \langle f \text{ in} | n \text{ out} \rangle = S_{nf}^{(+)*}, \quad (18.139)$$

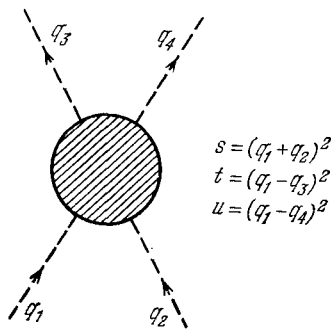


Рис. 18.32. Кинематические переменные для π - π -рассеяния.

запишем условие унитарности S -матрицы в виде

$$\sum_n S_{fn}^{(-)} S_{ni}^{(+)} = \delta_{fi}. \quad (18.140)$$

Введем по аналогии с (18.138)

$$S_{fn}^{(-)} = \delta_{fn} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_n) \mathcal{F}_{fn}^{(-)}; \quad (18.141)$$

тогда, с учетом (18.140), условие унитарности приобретает вид

$$\mathcal{F}_{fi}^{(+)} - \mathcal{F}_{fi}^{(-)} = -i \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) \mathcal{F}_{fn}^{(-)} \mathcal{F}_{ni}^{(+)}. \quad (18.142)$$

Из определения (18.139) следует, что $\mathcal{F}^{(-)}$ связана с физической амплитудой $\mathcal{F}^{(+)}$ соотношением

$$\mathcal{F}_{fi}^{(-)} = \mathcal{F}_{if}^{(+)*},$$

с учетом которого (18.142) в случае, когда $i = f$, сводится к (18.96).

Мы можем вывести и более полезный результат, согласно которому амплитуда $\mathcal{F}_{fi}^{(-)}$ получается аналитическим продолжением $\mathcal{F}_{fi}^{(+)}$ в точку $s - i\epsilon$ под разрезом $s \geq 4\mu^2$ в s -плоскости. Тогда левая часть в выражении (18.142) представляет скачок амплитуды $\mathcal{F}(s)$ на разрезе. Этот результат можно доказать, используя редукционную технику, рассмотренную в гл. 16. Повторим выкладки § 108, ведущие от уравнения (16.72) к (16.81), меняя при этом всюду местами in- и out-состояния. Такая замена отвечает изменению направления времени на противоположное; в результате хронологический оператор $T(AB \dots)$ заменяется во всех выражениях на антихронологический оператор $\bar{T}(AB \dots)$. Например, вместо (16.78)–(16.80), получаем

$$\begin{aligned} \langle \gamma p \text{ in} | \varphi(x) | \alpha \text{ out} \rangle &= \langle \gamma \text{ in} | \varphi(x) | \alpha - p \text{ out} \rangle + \\ &+ \langle \gamma \text{ in} | a_{\text{in}}(p) \varphi(x) - \varphi(x) a_{\text{out}}(p) | \alpha \text{ out} \rangle = \langle \gamma \text{ in} | \varphi(x) | \alpha - p \text{ out} \rangle - \\ &- \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \langle \gamma \text{ in} | \bar{T}(\varphi(x) \varphi(y)) | \alpha \text{ out} \rangle \overleftarrow{(\square_y + m^2)} f_p^*(y), \quad (18.143) \end{aligned}$$

где

$$\bar{T}(\varphi(x) \varphi(y)) \equiv \varphi(x) \varphi(y) \theta(y_0 - x_0) + \varphi(y) \varphi(x) \theta(x_0 - y_0). \quad (18.144)$$

Взяв свертку по всем частицам, получим (16.81) с заменой in \rightarrow out, $T \rightarrow \bar{T}$ и $(i)^{m+n} \rightarrow (-i)^{m+n}$. Аналог формулы (17.21), выражающей τ -функцию в терминах in-полей, получается взятием эрмитового сопряжения. При этом единственный эффект, связанный с антихронологическим оператором, заключается в замене $-i$ на $+i$ в выражении $\exp\left(-i \int H_I dt\right)$. Поэтому можно

непосредственно повторить виковскую редукцию, описанную в гл. 17, вводя всюду антихронологическое произведение полей

$$i\bar{\Delta}_F(x-y) = \langle 0 | \bar{T}(\Phi_{\text{in}}(x)\Phi_{\text{in}}(y)) | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 - \mu^2 - i\epsilon}. \quad (18.145)$$

Антипричинная функция Грина $\bar{\Delta}_F(x-y)$ отличается от фейнмановской $\Delta_F(x-y)$ общим знаком и заменой в знаменателе $i\epsilon \rightarrow -i\epsilon$. Аналогичный результат может быть получен для спинорных и векторных полей. Поэтому мы заключаем, что, с точностью до знака, переход от $\mathcal{F}^{(+)}$ к $\mathcal{F}^{(-)}$ сводится к замене $i\epsilon$ на $-i\epsilon$ во всех фейнмановских пропагаторах.

Что же касается фазовых множителей, то в силу (18.145) мы имеем дополнительный множитель -1 для каждой функции Грина. Кроме того, имеется дополнительный множитель -1 для каждой вершины, обусловленный заменой

$$T \exp\left(-i \int H_I dt\right) \rightarrow \bar{T} \exp\left(i \int H_I dt\right). \quad (18.146)$$

Наконец, согласно (18.143), имеется еще множитель -1 для каждой внешней линии, подходящей к вершине, приводящий к разности операторов $(a_{\text{in}} \dots) - (\varphi_{\text{out}} \dots)$, которая отличается знаком от соответствующей разности в (16.79). Эта комбинация знаков минус дает в результате $+1$, и мы приходим к представлению Намбу (18.74). Для взаимодействия $\lambda\varphi^3$ вершины и фермионные пропагаторы в высших приближениях всегда комбинируются парами¹⁾. Каждый дополнительный бозонный пропагатор приводит к дополнительной замкнутой петле. Интегрирование по 4-импульсу петли d^4l приводит к дополнительному знаку -1 , который обусловлен изменением знака у мнимой добавки $i\epsilon$ (поскольку при этом контур интегрирования поворачивается в противоположном направлении), в результате мы имеем четное число знаков минус. Таким образом, нужно выяснить только общий знак амплитуды $\mathcal{F}^{(-)}$ по отношению к $\mathcal{F}^{(+)}$. Знак минус, связанный с внешними концами τ -функций, сокращается с минусом в волновой функции (см. формулу (18.143)). Поэтому, чтобы установить относительный знак $\mathcal{F}^{(-)}$ и $\mathcal{F}^{(+)}$, достаточно рассмотреть диаграмму нижайшего порядка; в результате мы устанавливаем, что амплитуды $\mathcal{F}^{(-)}$ и $\mathcal{F}^{(+)}$ имеют одинаковую фазу, что и отражено в определениях (18.138) и (18.141). Тщательную проверку сделанных утверждений мы оставляем читателю в качестве упражнения.

¹⁾ Для теории $\lambda\varphi^4$ мы получаем аналогичный результат, поскольку при подсчете общего числа знаков минус мы можем рассматривать эту теорию как предел теории с трехлучевой связью.

Таким образом, мы показали¹⁾, что амплитуда $\mathcal{F}^{(-)}$ получается из $\mathcal{F}^{(+)}$ изменением знака у $i\epsilon$ в представлении Намбу (18.74), т. е. переходом от верхнего берега разреза в s -плоскости к нижнему²⁾. Учитывая этот результат, применим теперь условие унитарности (18.142) к изотопическим амплитудам $\hat{A}_I(s, \cos \theta)$ с «хорошими» аналитическими свойствами. Особенно просто выглядит условие унитарности при $4\mu^2 \leq s \leq 16\mu^2$, поскольку в этом случае в сумму \sum_n в правой части (18.148) вносят вклад только двухпионные состояния. В этой области условие унитарности сводится к нелинейному уравнению для упругой амплитуды

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^6 s} [\hat{A}_I(s + i\epsilon, \cos \theta_{fi}) - \hat{A}_I(s - i\epsilon, \cos \theta_{fi})] = \\ & = -\frac{i}{(2\pi)^{12} s^2} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{2} (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \times \\ & \quad \times \hat{A}_I(s - i\epsilon, \cos \theta_{fk}) \hat{A}_I(s + i\epsilon, \cos \theta_{ki}), \end{aligned} \quad (18.147)$$

где использовано свойство полноты (17.56) изотопических проекционных операторов. Множитель $1/2$ в (18.147) возникает при переходе от суммы по промежуточным состояниям к интегралу и связан с тождественностью двух пионов с импульсами k_1 и k_2 . В системе центра масс

$$k_1 + k_2 = (\sqrt{s}, 0)$$

и

$$\cos \theta_{fi} = \frac{q_3 \cdot q_1}{|q_3| |q_1|}, \quad \cos \theta_{fk} = \frac{q_3 \cdot k_1}{|q_3| |k_1|}, \quad \cos \theta_{ki} = \frac{q_1 \cdot k_1}{|q_1| |k_1|}.$$

При этом правая часть в (18.147) сводится к следующему интегралу по углам:

$$\begin{aligned} & \text{Im } \hat{A}_I(s, \cos \theta_{fi}) = \\ & = -\frac{1}{128\pi^2} \sqrt{\frac{s - 4\mu^2}{s}} \int d\Omega_k \hat{A}_I^*(s, \cos \theta_{fk}) \hat{A}_I(s, \cos \theta_{ki}), \end{aligned} \quad (18.148)$$

где подразумевается, что s имеет бесконечно малую положительную мнимую добавку. Для парциальных амплитуд (18.137) условие унитарности сводится к

$$\text{Im } A'_I(s) = -\frac{1}{32\pi} \sqrt{\frac{s - 4\mu^2}{s}} |A'_I(s)|^2. \quad (18.149)$$

¹⁾ Местоимение «мы» в данном случае включает и читателя.

²⁾ Отметим, что этот результат получен без использования свойства инвариантности теории при отражении времени.

Поэтому в упругой области амплитуда $A_l^I(s)$ имеет вид

$$A_l^I(s) = -32\pi \sqrt{\frac{s}{s-4\mu^2}} \{ \exp[i\delta_l^I(s)] \} \sin \delta_l^I(s), \quad (18.150)$$

где фазы δ_l^I вещественны.

Выше порога образования 4-пионов $s = 16\mu^2$ условие унитарности уже не имеет столь простого вида, поскольку в формуле

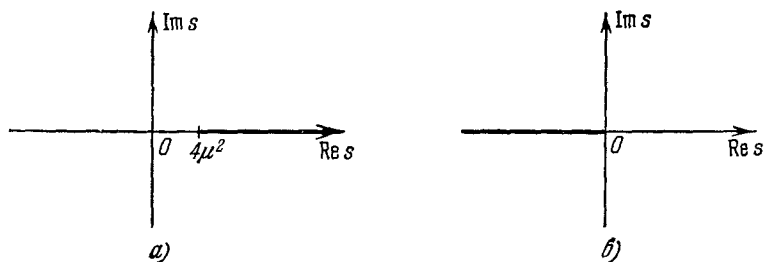


Рис. 18.33 Аналитические свойства парциальной амплитуды рассеяния: правый разрез функции $D_l^I(s)$ (а), левый разрез функции $N_l^I(s)$ (б).

(18.42) содержатся, наряду с упругими, также и неупругие каналы. В этом случае

$$\text{Im } A_l^I(s) = -\frac{1}{32\pi} \sqrt{\frac{s-4\mu^2}{s}} |A_l^I(s)|^2 \mathcal{L}_l^I(s), \quad (18.151)$$

где $\mathcal{L}_l^I(s)$ — вещественный множитель, который при $s \leq 16\mu^2$ равен тождественно единице. При $s > 16\mu^2$ этот множитель равен отношению полного сечения с моментом l , т. е. вкладу всех упругих и неупругих каналов, к упругому сечению:

$$\mathcal{L}_l^I(s) = \frac{\sigma_{\text{tot}}^{l,I}(s)}{\sigma_{\text{el}}^{l,I}(s)} = 1 + \frac{\sigma_{\text{inel}}^{l,I}(s)}{\sigma_{\text{el}}^{l,I}(s)}. \quad (18.152)$$

В духе дисперсионного подхода амплитуду рассеяния следует параметризовать в терминах аналитических и слабо меняющихся в рассматриваемой области функций. С помощью такой параметризации можно построить теорию эффективного радиуса, которая наилучшим образом отражает свойства аналитичности, унитарности и кроссинг-симметрии теории. Покажем, как это можно сделать на примере амплитуды π — π -рассеяния вблизи порога (рис. 18.33). Как известно, $A_l^I(s)$ имеет точку ветвления при $s = 4\mu^2$, причем скачок на разрезе $4\mu^2 \leq s \leq \infty$ определяется из условия унитарности. Если нам удастся выразить $A_l^I(s)$ через функцию, не имеющую этой точки ветвления, то мы

можем предсказать основные черты энергетической зависимости амплитуды $A_l^I(s)$ вблизи порога $s = 4\mu^2$.

Фредгольмовская теория потенциального рассеяния наводит на мысль, что для этого амплитуду следует представить в виде отношения двух функций

$$\frac{1}{32\pi} A_l^I(s) = \frac{N_l^I(s)}{D_l^I(s)}. \quad (18.153)$$

Числитель N_l^I аналитичен в s -плоскости с левым разрезом $-\infty \leq s \leq 0$ и веществен при $s > 0$, в то время как функция $D_l^I(s)$, представляющая аналог детерминанта Фредгольма,¹⁾ аналитична всюду, за исключением правого разреза $4\mu^2 \leq s \leq \infty$, и вещественна при вещественных $s < 4\mu^2$. Если функция $N_l^I(s)$ задана, то $D_l^I(s)$ определяется из условия унитарности. Согласно (18.153)

$$\frac{1}{32\pi} \text{Im} A_l^I(s) = - \frac{N_l^I(s)}{|D_l^I(s)|^2} \text{Im} D_l^I(s), \quad s \geq 4\mu^2, \quad (18.154)$$

а из (18.151) следует, что

$$\text{Im} D_l^I(s) = \sqrt{\frac{s - 4\mu^2}{s}} N_l^I(s) \mathcal{L}_l^I(s), \quad s \geq 4\mu^2. \quad (18.155)$$

Зная аналитические свойства функции $D_l^I(s)$ и выражение для ее скачка на разрезе, мы можем выписать дисперсионное представление для $D_l^I(s)$. При этом число необходимых вычитаний определяется асимптотическим поведением $N_l^I(s)$ и $\mathcal{L}_l^I(s)$. В нерелятивистской потенциальной теории аналог $N_l^I(s)$ стремится при $s \rightarrow \infty$ к борновскому члену; в результате при $s \rightarrow \infty$ $N_l^I(s) \rightarrow 0$ и $D_l^I(s) \rightarrow 1$. Если, для простоты, предположить, что

$$\mathcal{L}_l^I(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \text{const},$$

то

$$D_l^I(s) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s - i\epsilon} \sqrt{\frac{s' - 4\mu^2}{s'}} N_l^I(s') \mathcal{L}_l^I(s'), \quad (18.156)$$

¹⁾ См. [103]. Функция D называется функцией Иоста. Возможность представления (18.153) сразу становится ясной, если определить

$$D_l^I = \exp \left[- \frac{1}{\pi} \int \frac{\delta_l^I(s') ds'}{s' - s - i\epsilon} \right].$$

Тогда функция

$$A_l^I D_l^I = N_l^I$$

вещественна в области $0 < s < 16\mu^2$, т. е. ниже неупругих порогов,

где использовано условие нормировки $D_l'(\infty) = 1$, которое, конечно, является произвольным. Подставляя (18.156) в (18.153), мы приходим к представлению парциальной амплитуды в виде

$$\frac{1}{32\pi} A_l'(s) = \frac{N_l'(s)}{1 + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds' \sqrt{\frac{s' - 4\mu^2}{s'}} \frac{N_l'(s') \mathcal{Z}_l'(s')}{s' - s - i\epsilon}}. \quad (18.157)$$

Следует помнить, однако, что это выражение, как и (18.156), получено при определенных оптимистических предположениях об асимптотическом поведении амплитуды A_l' . Преимущество представления (18.157) заключается в том, что оно обладает правильными аналитическими свойствами и автоматически обеспечивает унитарность амплитуды. Для фактического же вычисления A_l' необходимо задать функцию N_l' , которая не имеет особенностей вблизи порога $s = 4\mu^2$. В качестве первого грубого приближения можно аппроксимировать N_l' вкладом простейшей диаграммы, описывающей взаимодействие π -мезонов. Если константа связи стремится к нулю, то $A_l'(s) \rightarrow 32\pi N_l'(s)$; при этом амплитуда вещественна. Представление же (18.157) подправляет этот результат в случае произвольных констант связи, поскольку оно содержит поправки, возникающие из знаменателя, которые и обеспечивают унитарность амплитуды. Вводя фазу рассеяния (18.150), из (18.157) получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{s - 4\mu^2}{s}} \operatorname{ctg} \delta_l'(s) = \\ = - N_l'(s)^{-1} \left[1 + \frac{1}{\pi} P \int_{4\mu^2}^{\infty} ds' \sqrt{\frac{s' - 4\mu^2}{s'}} \frac{N_l'(s') \mathcal{Z}_l'(s')}{s' - s} \right]. \end{aligned} \quad (18.158)$$

Поскольку функция $N_l'(s)$ имеет только левый разрез, можно ¹⁾ разложить правую часть этого выражения в степенной ряд вокруг точки $s = 4\mu^2$ с радиусом сходимости $4\mu^2$. При этом мы приходим к обобщенной формуле эффективного радиуса.

Чтобы получить более точный результат, нужно задать дополнительную информацию о числителе $N_l'(s)$. На левом разрезе существует множество особых точек, отвечающих различным редуцированным графикам и сингулярностям Ландау. Однако точно так же, как низкоэнергетическая часть правого разреза отвечает простому одномерному графику, указанному на

¹⁾ См. задачу 10 этой главы.

рис. 18.34, а, низкоэнергетическая часть левого разреза обусловлена соответствующими кроссинговыми диаграммами (см. рис. 18.34, б). Скачки указанных особенностей можно получить, рассматривая аналитически продолженное соотношение упругой унитарности в t - и u -каналах. Эти скачки вновь выражаются через амплитуду упругого $\pi - \pi$ -рассеяния, поэтому, в предположении, что указанные особенности играют доминирующую

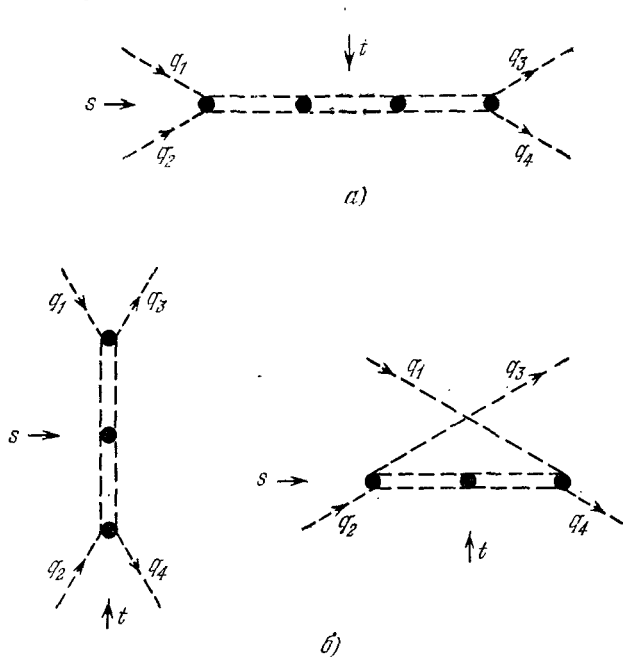


Рис. 18.34. Одномерные редуцированные диаграммы в $\pi - \pi$ -рассеянии.

роль, мы получаем замкнутую систему интегральных уравнений для вычисления $A_l^I(s)$. Несмотря на то, что решение этих уравнений неоднократно обсуждалось в литературе, еще раз подчеркнем, что приближение, в котором учитываются особенности, отвечающие только графикам рис. 18.34, не может считаться удовлетворительным. Асимптотическое поведение амплитуды, равно как ее вид в достаточно удаленной от порога области на левом разрезе, остаются полностью неопределенными. Любое рассмотрение здесь связано с необходимостью проводить вычисления в глубоко нефизической области, где математические методы становятся ненадежными, а качественные аргументы — неприменимыми.

Из (18.157) вытекает возможность существования связанных состояний или резонансов, которые определяются поведением функций $D'_i(s)$. Если $D'_i(s)$ такова, что $\text{Re } D'_i(s_R) = 0$ в некоторой точке $s = s_R > 4\mu^2$, то фаза δ'_i проходит в этой точке через 90° , и мы имеем резонанс. Если же $D'_i(s) = 0$ при $s < 4\mu^2$, то амплитуда $A'_i(s)$ имеет полюс, отвечающий связанному состоянию. Динамические вычисления $\pi - \pi$ -амплитуды, если они отвечают действительности, должны, очевидно, приводить к первой возможности, т. е. к существованию ρ -волнового резонанса, сопоставляемого ρ -мезону.

§ 136. Электромагнитная структура пиона

Описанный выше подход может быть использован также для вычисления электромагнитного форм-фактора пиона [104, 105]. Как было показано в § 131, особенности $F_\pi(q^2)$ при $q^2 < 16\mu^2$ определяются только редуцированными диаграммами, указанными на рис. 18.35. Эти диаграммы сводятся к произведению

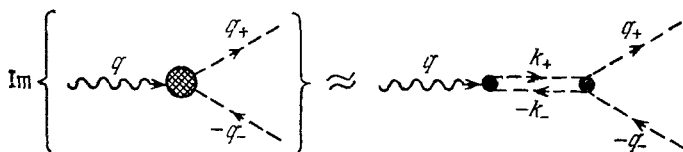


Рис. 18.35. Электромагнитная вершина пиона.

электромагнитной вершины пиона и амплитуды $\pi - \pi$ -рассеяния. Используя условие унитарности, можно получить соответствующее аналитическое выражение, необходимое для последующего вычисления форм-фактора пиона.

В § 131 были установлены аналитические свойства $F_\pi(q^2)$, которые использовались затем при обсуждении дисперсионных соотношений для амплитуды $\pi - \pi$ -рассеяния на нулевой угол. Напомним, что в $F_\pi(q^2)$ отсутствует левый разрез и единственной его сингулярностью является правый разрез от $4\mu^2$ до ∞ . Повторяя теперь для вершинной функции выкладки, проделанные в § 133 (см. (18.136) — (18.142)), получим

$$\begin{aligned}
 V_\mu^{(+)} &= \langle \pi^+(q_+) \pi^-(q_-) \text{ out} | j_\mu(q) | 0 \rangle = \\
 &= \frac{-i(2\pi)^4 \delta^4(q - q_+ - q_-)}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_+ \omega_-}} (q_+ - q_-)_\mu F_\pi(q^2 + ie), \quad (18.159)
 \end{aligned}$$

где ¹⁾ $\square A_\mu(x) = e j_\mu(x)$, $j_\mu(q)$ — фурье-компонента тока $j_\mu(x)$ и кинематика указана на рис. 18.35. Ниже порога вершина равна

$$V_\mu^{(-)} = \langle \pi^+(q_+) \pi^-(q_-) | j_\mu(q) | 0 \rangle = \\ = + \frac{i(2\pi)^4 \delta^4(q - q_+ - q_-)}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_+ \omega_-}} (q_+ - q_-)_\mu F_\pi(q^2 - i\epsilon). \quad (18.160)$$

Условие унитарности имеет вид

$$\langle f \text{ out} | j_\mu | 0 \rangle - \langle f \text{ in} | j_\mu | 0 \rangle = - \sum_n [\langle f \text{ in} | n \text{ out} \rangle - \delta_{fn}] \langle n \text{ out} | j_\mu | 0 \rangle. \quad (18.161)$$

Если в \sum_n ограничиться вкладом $\pi^+ - \pi^-$ -состояний и перейти в систему центра масс двух пионов, то из (18.141) и (18.159) получаем

$$2(q_+ - q_-)^\mu \text{Im} F_\pi(q^2) = \\ = -i \int d^3k_+ d^3k_- (2\pi)^4 \delta^4(q - k_+ - k_-) \times \\ \times (-i) \mathcal{F}_{fn}^{(-)}(k_+ - k_-)^\mu F_\pi(q^2 + i\epsilon). \quad (18.162)$$

После интегрирования по углам правая часть в (18.162) содержит только p -волновую амплитуду. Эта амплитуда отвечает чистому изотопическому спину $I = 1$, как это следует из статистики Бозе для пионов. Выделим в (18.136) член с $I = 1$ и учтем, что

$$\langle \pi^+ \pi^- | P_1 | \pi^+ \pi^- \rangle = 1/2$$

(см. (17.54)); тогда, умножив (18.162) на пространственно-подобный вектор поляризации $\epsilon^\mu = (0, \mathbf{\epsilon})$, получаем

$$\cos \theta \text{Im} F_\pi(q^2) = \\ = - \sqrt{\frac{q^2 - 4\mu^2}{q^2}} \int \frac{d\Omega_n}{128\pi^2} \hat{A}_1(q^2 - i\epsilon, \cos \theta_{fn}) \cos \theta_n F_\pi(q^2 + i\epsilon). \quad (18.163)$$

В формуле (18.163)

$$\frac{\mathbf{\epsilon} \cdot \mathbf{q}_+}{|\mathbf{\epsilon}| |\mathbf{q}_+|} = \cos \theta, \quad \frac{\mathbf{q}_+ \cdot \mathbf{k}_+}{|\mathbf{q}_+| |\mathbf{k}_+|} = \cos \theta_{fn}, \quad \frac{\mathbf{\epsilon} \cdot \mathbf{k}_+}{|\mathbf{\epsilon}| |\mathbf{k}_+|} = \cos \theta_n.$$

После интегрирования по углам получаем

$$\text{Im} F_\pi(q^2) = - \frac{1}{32\pi} \sqrt{\frac{q^2 - 4\mu^2}{q^2}} A_1^1(q^2 - i\epsilon) F_\pi(q^2 + i\epsilon) = \\ = \{ \exp[-i\delta_1^1(q^2)] \} \sin \delta_1^1(q^2) F_\pi(q^2 + i\epsilon). \quad (18.164)$$

¹⁾ Поскольку мы рассматриваем первый порядок по электромагнитной связи, то $e = e_0$ и $Z_3 = 1$

Это простое выражение и представляет собой аналитическую запись графического соотношения, указанного на рис. 18.35. Поскольку $\text{Im } F_\pi(q^2)$ вещественна, то из (18.164) следует, что $F_\pi(q^2 + i\epsilon)$ имеет ту же фазу, что и p -волновая амплитуда $\pi - \pi$ -рассеяния. Этот результат известен в теории потенциального рассеяния как теорема о взаимодействии в конечном состоянии [106].

Формула для скачка (18.164) вместе с дисперсионными соотношениями (18.72) позволяют определить $F_\pi(q^2)$. При этом решение [107—109] удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $F_\pi(q^2)$ аналитична в плоскости q^2 с правым разрезом $\infty \geq q^2 \geq 4\mu^2$;

2) при $q^2 \geq 4\mu^2$ фаза $F_\pi(q^2)$ равна δ_1^1 ;

3) при $q^2 < 4\mu^2$ функция $F_\pi(q^2)$ вещественна;

4) $F_\pi(0) = 1$.

В § 135 мы построили функцию $1/D_1^1(q^2)$, удовлетворяющую условиям 1—3. Поэтому решение для $F_\pi(q^2)$ дается, с точностью до полинома $P(q^2)$ с вещественными коэффициентами, в терминах этой функции:

$$F_\pi(q^2) = \frac{D_1^1(0)}{D_1^1(q^2)} \frac{P(q^2)}{P(0)} = \frac{P(q^2)}{P(0)} \left[\frac{1 + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'} \sqrt{\frac{s'-4\mu^2}{s'}} N_1^1(s')}{1 + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'-q^2} \sqrt{\frac{s'-4\mu^2}{s'}} N_1^1(s')} \right]. \quad (18.165)$$

Более удобное представление для F_π , не зависящее от произвола в выборе $N_1^1(s)$, получается, если выразить F_π непосредственно через фазу $\delta_1^1(q^2)$. Действительно, так как

$$\frac{F_\pi(q^2 + i\epsilon)}{F_\pi(q^2 - i\epsilon)} = \exp[2i\delta_1^1(q^2)], \quad (18.166)$$

то скачок $\ln F_\pi(q^2)$ равен $\delta_1^1(q^2)$. Поэтому функция

$$P(q^2) = F_\pi(q^2) \exp \left[-\frac{q^2}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds' \delta_1^1(s')}{s'(s'-q^2)} \right] \quad (18.167)$$

имеет по крайней мере ту же область аналитичности, что и $F_\pi(q^2)$. Далее, P вещественна при $q^2 > 4\mu^2$, и поэтому сводится к целой функции. Поскольку мы не рассматриваем случай, когда

на бесконечности имеется существенно особая точка, $P(q^2)$ представляет собой полином [110]. Поэтому при условии

$$\delta_1^1(q^2)/q^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad q^2 \rightarrow \infty$$

форм-фактор $F_\pi(q^2)$ равен

$$F_\pi(q^2) = \frac{P(q^2)}{P(0)} \exp \left[\frac{q^2}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds' \delta_1^1(s')}{s'(s' - q^2)} \right]. \quad (18.168)$$

Снова подчеркнем, что выражения (18.165) и (18.168) справедливы лишь в той степени, в какой можно пренебречь вкладом масс $q^2 \geq 16\mu^2$ в условие унитарности. В результате мы получили выражение, которое в лучшем случае может иметь тот же смысл и ту же область применимости, что и формулы теории эффективного радиуса. Отметим, что выражение (18.168) можно рассматривать как точное, если допустить, что функция $P(q^2)$ имеет разрез $16\mu^2 \leq q^2 \leq \infty$. В результате $F_\pi(q^2)$ выражается через фазу¹⁾ $\delta_1^1(q^2)$ и неизвестную функцию $P(q^2)$, которая, как мы надеемся, плавно меняется в области $q^2 \leq 16\mu^2$. Полученное выражение имеет простой вид и его можно непосредственно сравнить с экспериментом, хотя мы по-прежнему не можем обосновать сделанные предположения. В частности, (18.168) и (18.165) предсказывают пик в $F_\pi(q^2)$ в области энергий $\sqrt{q^2}$, близких к экспериментально наблюдаемому p -волновому $\pi - \pi$ -резонансу (ρ -мезону). Экспериментальная проверка этого результата представляет большой интерес.

Техника, описанная выше, может быть применена также и для изучения электромагнитных форм-факторов нуклонов. Мы не будем здесь обсуждать эти вопросы и рекомендуем интересующемуся читателю обратиться к специальной литературе [111].

ЗАДАЧИ

1. Показать, что детерминант Δ для произвольной фейнмановской диаграммы может быть записан в виде

$$\Delta = \sum_S \sum_{j \in S} \alpha_j,$$

где сумма берется по всем наборам S , состоящих из k внутренних линий j (где k — число независимых внутренних импульсов, по которым производится

¹⁾ При $q^2 \geq 16\mu^2$ фазу δ_1^1 можно определить разными способами, например

$$A = \frac{e^{2i\delta} - 1}{2i} \quad \text{или} \quad A = \eta e^{i\delta} \sin \delta. \quad \eta \text{ вещественно.}$$

Конкретный выбор представления для фазы — дело вкуса.

интегрирование), которые обладают следующим свойством: при исключении внутренних линий $j \in S$ график остается связанным. Этот результат показывает, что $\Delta > 0$ до тех пор, пока хотя бы одно $\alpha_j \neq 0$.

2. Показать, что в представлении Намбу (18.74)

$$\zeta_1 = \sum_{S'} \frac{1}{\Delta} \prod_{i \in S'} \alpha_i,$$

где S' — всевозможные совокупности контуров, содержащих $k+1$ внутреннюю линию (в то время как Δ представляет сумму различных произведений k множителей α_i), таких, что исключение линии $i \in S'$ приводит к двум и только двум несвязанным графикам, один из которых содержит внешние линии p_1 и p_2 , а другой p_3 и p_4 . Этот результат показывает, что $\zeta_1 > 0$, как и предположено в наших рассуждениях после формулы (18.75).

3. Доказать, что амплитуда $\pi - \pi$ -рассеяния $A(s, t)$ во всех порядках теории возмущений не имеет особенностей при $s < 4\mu^2$, $t < 4\mu^2$ и $u < 4\mu^2$, и тем самым установить дисперсионные соотношения по s при фиксированном $0 < t < 4\mu^2$.

4. Тщательно проанализировать утверждения, сделанные после формулы (18.91) и устанавливающие аналитичность амплитуды пион-нуклонного рассеяния вперед во всех порядках теории возмущений.

5. Вывести дисперсионные соотношения для амплитуды $\pi^+ - p$ -рассеяния вперед с переворотом спина. Обсудить, как можно измерить абсорптивную часть этой амплитуды.

6. Доказать дисперсионные соотношения для амплитуды $K^+ - p$ -рассеяния на нулевой угол. Какие величины, помимо амплитуды рассеяния в физической области и полных сечений, следует задать, чтобы экспериментально проверить эти соотношения?

7. Рассмотреть аксиальный векторный ток \mathcal{F}_μ в β -распаде нуклона (см. (10.151)). Предполагая, что дивергенция тока удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний, вывести соотношения Гольдбергера — Треймана (10.161).

8. Показать, не прибегая к анализу диаграмм теории возмущений, что форм-фактор пиона $F_\pi(q^2)$ веществен при $q^2 < 0$ (если пренебречь слабыми взаимодействиями).

9. Найти точки ветвления для электромагнитного форм-фактора Σ -гиперона.

10. Используя дисперсионные соотношения для $N_1^I(s)$, вывести формулу теории эффективного радиуса, которая обсуждалась после формулы (18.158). Аппроксимируя N_0^I полюсом, вычислить $A_0^I(s)$ и параметры разложения эффективного радиуса.

ПЕРЕНОРМИРОВКИ

§ 137. Введение

В гл. 8 при вычислениях в низших порядках теории возмущений мы выделили расходимости в диаграммах, отвечающих собственной энергии и вершинной части, и показали, как, перенормируя заряд и массу электрона, можно выделить из этих диаграмм конечные выражения. При этом в приближении e^2 разность между экспериментально определяемыми зарядом и массой электрона и их затравочными значениями в уравнениях движения равна бесконечности, в то время как физические величины, выраженные в терминах перенормированных заряда и массы, оказываются конечными.

Как мы убедились на примере вычислений гл. 8, перенормировка необходима в любой физической теории взаимодействия полей. Единственное требование, налагаемое на физически разумную теорию, заключается в том, чтобы после перенормировки S -матрица была конечной.

В дальнейшем мы предположим, что ряд теории возмущений для S -матрицы сходится и S -матрица конечна в каждом порядке разложения по степеням константы связи. При этом возникает другая важная проблема, а именно, проблема доказательства сходимости перенормированного ряда теории возмущений. Мы, однако, не будем здесь обсуждать этот вопрос и сосредоточим усилия на том, чтобы показать, что все зависящие от обрезания множители, появляющиеся в разложениях τ -функций и S -матрицы, можно выделить в константы перенормировки. Наше рассмотрение основано на использовании методов теории возмущений и фейнмановских правил, выведенных в гл. 17, а также общих свойствах перенормировочных констант Z_2 и Z_3 , обсуждавшихся в гл. 16. В качестве применения полученных результатов мы рассмотрим в конце этой главы квантовую электродинамику электронов и фотонов.

Программа¹⁾, которую предстоит выполнить, состоит из трех частей. Вначале мы обсудим различные диаграммы с топологической точки зрения и введем терминологию, удобную при классификации и анализе произвольных фейнмановских диаграмм. Далее будет дан рецепт перенормировки произвольной диаграммы n -го порядка. Наконец, мы по индукции покажем, что этот рецепт позволяет устранить все расходящиеся (т. е. зависящие от обрезания) величины²⁾ из разложения S -матрицы.

§ 138. Свойства диаграмм собственной энергии и вершинных частей и электрон-позитронное ядро

Начнем с установления в общем случае соответствия между константами перенормировки Z_1 , Z_2 , Z_3 , δm и фейнмановскими графиками, которое в приближении e^2 было найдено в первом томе. Напомним, что константы Z_2 и δm относятся к диаграмме собственной энергии (рис. 19.1, а), Z_3 появляется при вычислении

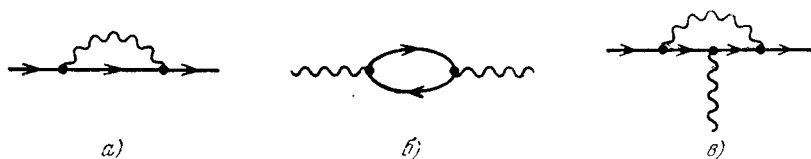


Рис. 19.1. Диаграммы второго порядка для собственной энергии электрона (а), поляризации вакуума (б) и вершинной части (в).

поляризации вакуума (рис. 19.1, б), а Z_1 — при вычислении вершинной части (рис. 19.1, в). Все эти величины в приближении e^2 логарифмически расходятся, фактическое их вычисление в этом порядке было дано в гл. 8.

Диаграмма рис. 19.1, а появляется при разложении электронного пропагатора

$$iS'_F(x - x') \equiv \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) | 0 \rangle, \quad (19.1)$$

который изображается заштрихованным блоком на рис. 19.2 и представляет сумму всех связанных графиков с двумя внешними электронными линиями, одна из которых входит в точке x , а другая выходит в точке x' ; эти графики не содержат внешних фотонных линий. Структура функции S'_F подробно обсуждалась в гл. 16. Все графики, содержащиеся в S'_F , можно однозначно

¹⁾ Эта программа, вывод соответствующих уравнений и формулировка критерия перенормируемости теории были впервые даны в статьях [65, 66, 112].

²⁾ Инфракрасные особенности при этом следует рассматривать отдельно (см. [77]).

разделить на два класса, первый из которых содержит *компактные*, а второй — *некомпактные* диаграммы. Компактные диаграммы нельзя разделить на две не связанные между собой части путем рассечения по одной фермионной линии, в то время как для некомпактных диаграмм такое разделение возможно. Примеры компактных и некомпактных диаграмм показаны на рис. 19.3, а и б соответственно.



Рис. 19.2. Точный электронный пропагатор

Перейдем в импульсное пространство и обозначим через $-i\Sigma(p)$ сумму всех возможных *компактных* диаграмм¹⁾, выделив при этом множители $iS_F(p) = i(\hat{p} - m)^{-1}$, отвечающие внеш-

ним концам. Выражение, связывающее $S'_F(p)$ и $\Sigma(p)$, имеет вид

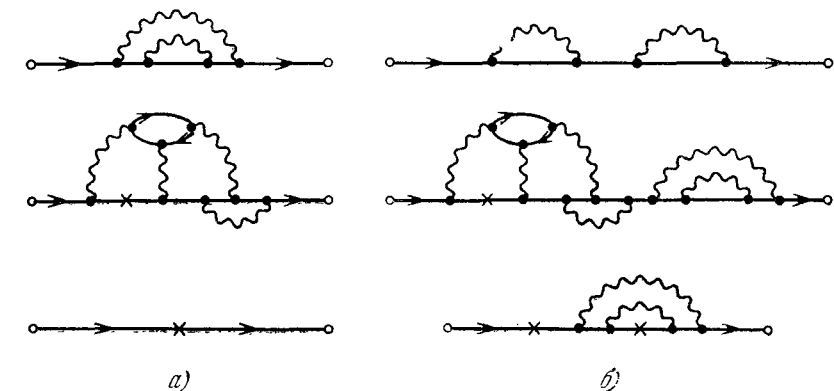


Рис. 19.3. Примеры компактных (а) и некомпактных (б) электронных собственно-энергетических диаграмм

ним концам. Выражение, связывающее $S'_F(p)$ и $\Sigma(p)$, имеет вид

$$iS'_F(p) = iS_F(p) + iS_F(p) [-i\Sigma(p)] iS_F(p) + \\ + iS_F(p) [-i\Sigma(p)] iS_F(p) [-i\Sigma(p)] iS_F(p) + \dots \quad (19.2)$$

Графически это уравнение изображено на рис. 19.4. Формально суммируя ряд (19.2), получаем

$$S'_F(p) = \frac{1}{\hat{p} - m - \Sigma(p)}, \quad (19.3)$$

¹⁾ Приведенное здесь определение $\Sigma(p)$ отличается от определения в гл. 8 включением массового контрчлена δm . В первом томе мы разлагали S'_F в терминах *голых* пропагаторов $(\hat{p} - m_0)^{-1}$, в то время как в этой главе мы используем пропагатор $(\hat{p} - m)^{-1}$, отвечающий частице с физическим значением массы m .

где величина $\Sigma(p)$, сумма всех компактных собственно-энергетических диаграмм с исключенными внешними линиями (рис. 19.5), называется массовым оператором электрона.



Рис. 19.4. Графическое изображение ряда (19.2) для электронного пропагатора, который представляет сумму компактных собственно-энергетических вставок.

Аналогичным образом рассмотрим фотонный пропагатор. Диаграмма рис. 19.1, б содержится в разложении точного фотонного пропагатора

$$iD'_F(x-x')^{\mu\nu} = \langle 0 | T(A^\mu(x)A^\nu(x')) | 0 \rangle + \text{+ градиентные и кулоновские члены,} \quad (19.4)$$

который представляет сумму всех связанных диаграмм с двумя внешними фотонными линиями и не содержит внешних элект-

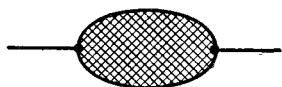


Рис. 19.5. Электронная компактная собственно-энергетическая часть (массовый оператор Σ).



Рис. 19.6. Точный фотонный пропагатор.

ронных линий. Функция D'_F может быть представлена заштрихованным блоком на рис. 19.6.

Как и в случае электрона, можно снова выделить компактную часть, к которой относятся те графики, которые нельзя раз-

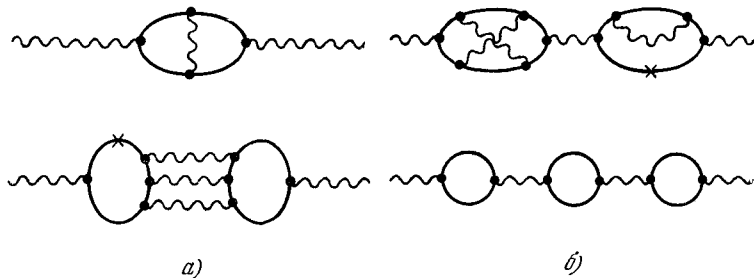


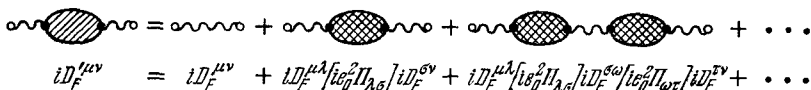
Рис. 19.7. Примеры компактных (а) и некомпактных (б) фотонных собственно-энергетических диаграмм.

делить на две несвязанные части путем рассеяния по одной фотонной линии. Некоторые компактные диаграммы показаны на рис. 19.7, а, примеры некомпактных диаграмм даны на

рис. 19.7, б. Сумму всех компактных диаграмм, из которых выделены внешние фотонные линии, обозначим через $ie_0^2\Pi_{\mu\nu}$, эта величина называется фотонной собственно-энергетической частью. Тензор $\Pi_{\mu\nu}$ по своему смыслу аналогичен массовому оператору $\Sigma(p)$; в гл. 8 мы называли его также тензором вакуумной поляризации. По аналогии с (19.2) можно установить связь точного фотонного пропагатора с $\Pi_{\mu\nu}$ (рис. 19.8):

$$\begin{aligned} iD'_F(q)^{\mu\nu} &= iD_F(q)^{\mu\nu} + iD_F^{\mu\lambda} [+ ie_0^2\Pi_{\lambda\sigma}] iD_F^{\sigma\nu} + \dots = \\ &= -\frac{ig^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{ie_0^2}{q^2} [i\Pi^{\mu\nu}] \frac{(-i)}{q^2} - \frac{ie_0^4}{q^2} [i\Pi^{\mu\lambda}] \frac{(-i)}{q^2} [i\Pi^{\lambda\nu}] \frac{(-i)}{q^2} + \dots \end{aligned} \quad (19.5)$$

Как известно, $D'_F(q)^{\mu\nu}$ в (16.172) включает также члены, содержащие η_μ — времениподобный вектор, который напоминает нам



$$iD'_F{}^{\mu\nu} = iD_F{}^{\mu\nu} + iD_F{}^{\mu\lambda} [ie_0^2\Pi_{\lambda\sigma}] iD_F{}^{\sigma\nu} + iD_F{}^{\mu\lambda} [ie_0^2\Pi_{\lambda\sigma}] iD_F{}^{\sigma\omega} [ie_0^2\Pi_{\omega\tau}] iD_F{}^{\tau\nu} + \dots$$

Рис. 19.8. Разложение (19.5) для фотонного пропагатора в виде суммы компактных собственно-энергетических частей $\Pi_{\mu\nu}$ (известных также под названием тензора вакуумной поляризации)

об использовании поперечной калибровки в той системе, в которой выполняется квантование. Воспользовавшись, однако, результатами § 122, можно опустить члены, содержащие $q_\mu\eta_\nu$, $\eta_\mu\eta_\nu$, $q_\mu q_\nu$, поскольку мы знаем, что эти члены не вносят вклад в \mathcal{S} -матричные элементы. Формально суммируя ряд (19.5), получаем

$$D'_F(q)_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{e_0^2}{q^2} \Pi_{\mu\lambda}(q) D'_F(q)^\lambda_\nu$$

и по аналогии с (19.3)

$$[q^2 g_{\mu\lambda} - e_0^2 \Pi_{\mu\lambda}(q)] D'_F(q)^\lambda_\nu = -g_{\mu\nu}. \quad (19.6)$$

Наконец, третья величина, которая уже встречалась при выполнении перенормировки во втором порядке теории возмущений, есть треххвостка, рис. 19.1, в, связанная с константой Z_1 . Снова определим компактную треххвостку, которую будем называть также вершинной частью, как сумму всех связанных диаграмм с двумя внешними фермионными линиями и одной внешней фотонной линией, которые компактны в указанном выше смысле, т. е. не могут быть разделены на несвязанные диаграммы рассеянием либо по электронной, либо по фотонной

линиям. Примеры компактных и некомпактных треххвосток изображены на рис. 19.9, *a* и *б* соответственно. Из этих примеров ясно, что вставка во внешних линиях вершинной части электронной или фотонной собственно-энергетических частей превращает компактную вершинную диаграмму в некомпактную. Обозначим

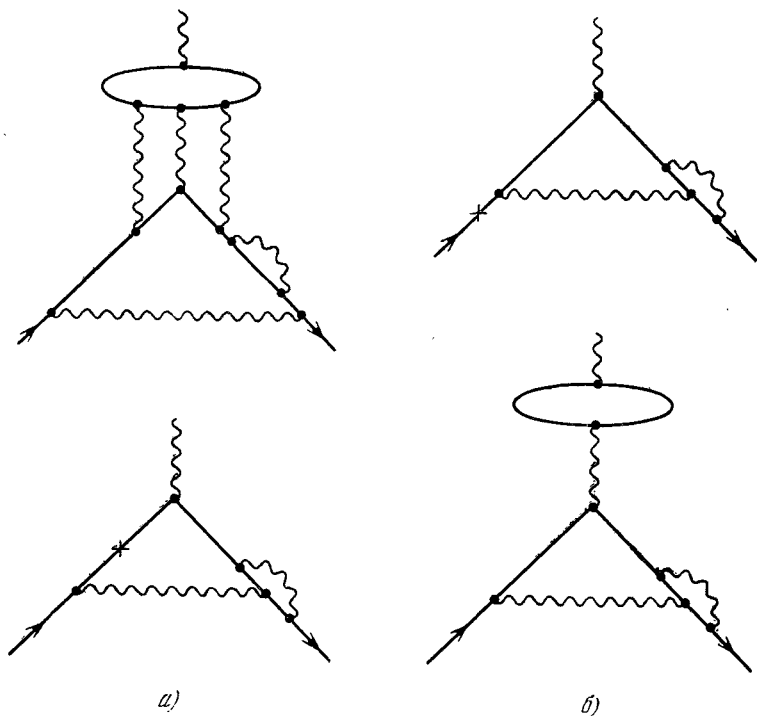


Рис. 19.9 Примеры компактных (*a*) и некомпактных (*б*) вершинных диаграмм.

сумму всех вершинных частей в импульсном пространстве через $\Gamma_\mu(p', p)$, где p и p' — 4-импульсы входящего и выходящего электронов. Отметим, что в определение $\Gamma_\mu(p', p)$ не включены пропагаторы внешних электронных и фотонных линий, а также множитель $-ie_0$. Таким образом, вершинная часть определена так, что в первом порядке $\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu$, в общем же случае

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p', p). \quad (19.7)$$

При рассмотрении ренормализационной программы необходимо ввести дополнительную величину, которая не возникает

при вычислениях с точностью e^2 . Эту величину мы будем называть электрон-позитронным ядром, или, для краткости, просто ядром. Графически ядро изображено на рис. 19.10, обозначим его через

$$K(p, p', q)_{\alpha\beta, \gamma\delta}.$$

K состоит из диаграмм с двумя внешними электронными и двумя внешними позитронными линиями; $-p$ и p' есть импульсы позитрона и электрона в начальном состоянии, q — переданный электрону импульс, а α, β, γ и δ — спинорные компоненты, указанные на рис. 19.10. В ядро K включены все четыреххвостки, изображенные на рис. 19.10, за исключением графиков двух типов. Мы не включили в K графики, в которых две внешние линии (p, α) и (p', β) объединяются в блок A , а две другие внешние линии ($p-q, \gamma$) и ($p'-q, \delta$) объединяются в блок B , причем блоки A и B

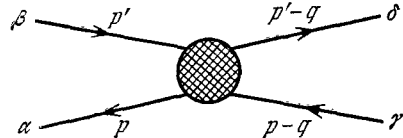


Рис. 19.10. Ядро K электрон-позитронного рассеяния.

объединяются в блок A , а две другие внешние линии ($p-q, \gamma$) и ($p'-q, \delta$) объединяются в блок B , причем блоки A и B

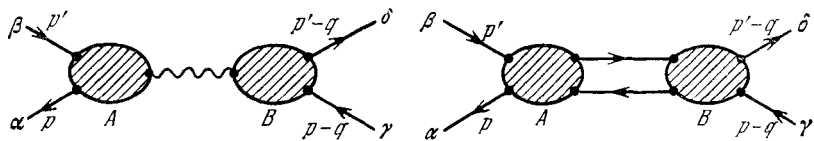


Рис. 19.11. Два класса диаграмм, исключенных из определения ядра K .

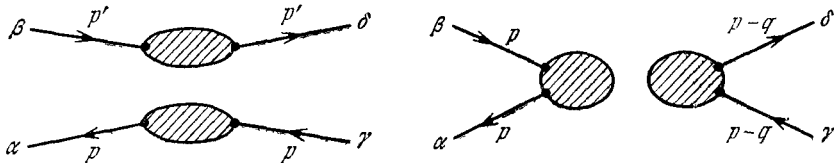


Рис. 19.12. Несвязанные собственно-энергетические части, исключенные из определения ядра K .

соединяются только одной фотонной линией или электрон-позитронной парой (рис. 19.11). Точно так же исключаются диаграммы, изображенные на рис. 19.12, состоящие из двух несвязанных собственно-энергетических частей. На рис. 19.13 приведены некоторые диаграммы, которые включены в K . В низшем порядке

ядро K сводится к диаграмме рис. 19.13, a

$$K^{(0)}(p, p', q)_{\alpha\beta, \gamma\delta} = \frac{ie_0^2}{q^2} (\gamma_\mu)_{\alpha\gamma} (\gamma^\mu)_{\delta\beta}. \quad (19.8)$$

По аналогии с Σ , $\Pi_{\mu\nu}$ и Γ_μ из определения K исключаются пропагаторы внешних фермионных линий, при этом не нужно

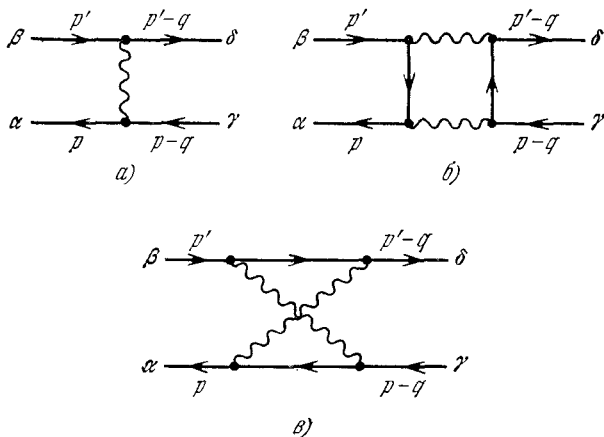


Рис. 19.13. Примеры диаграмм, содержащихся в ядре K .

также учитывать собственных частей в свободных концах диаграммы.

§ 139. Интегральные уравнения для собственно-энергетической и вершинной частей

В предыдущем параграфе мы определили величины Σ , $\Pi_{\mu\nu}$ и Γ_μ . Выпишем теперь интегральные уравнения, связывающие эти величины друг с другом. Например, компактная электронная собственно-энергетическая часть удовлетворяет интегральному уравнению, которое графически изображено на рис. 19.14,

$$-i\Sigma(p) = (-ie_0^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD'_F(k)_{\mu\nu} \Gamma^\mu(p, p-k) iS'_F(p-k) \gamma^\nu. \quad (19.9)$$

Это уравнение описывает образование в вершине ν электрона и фотона, которые, прежде чем фотон поглощается в вершине μ , взаимодействуют всеми возможными способами. Отметим, что поскольку (19.9) содержит точные функции Грина электрона и фотона, Γ_ν в этом уравнении должно быть сопоставлено вершинной части, а не полной вершинной функцией, в противном

случае, например, диаграмма рис. 19.15 учитывалась бы дважды.

Фотонная компактная собственно-энергетическая часть удовлетворяет уравнению, аналогичному (19.9). Это уравнение

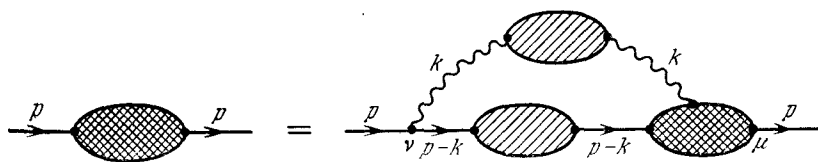


Рис. 19.14. Графическое представление (19.9) для компактной электронной собственно-энергетической части $\Sigma(p)$

графически изображено на рис. 19.16:

$$ie_0^2 \Pi_{\mu\nu}(q) = (-ie_0^2)(-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma_\mu iS'_F(k) \Gamma_\nu(k, k+q) \cdot iS'_F(k+q). \quad (19.10)$$

Если бы вершинная часть Γ_μ была известна, уравнения (19.9) и (19.10) совместно с уравнениями (19.3) и (19.6) для S'_F и D'_F образовывали бы замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений, которую можно было бы решать, например, методом итерации по степеням константы e_0^2 . Оказывается, что для Γ_μ можно выписать дополнительное интегральное уравнение, ядром которого является введенная выше функция K :

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p', p)_{\delta\gamma} &= (\gamma_\mu)_{\delta\gamma} + \\ &+ \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [iS'_F(p'+q) \gamma_\mu iS'_F(p+q)]_{\beta\alpha} K_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p+q, p'+q, q) + \\ &+ \int \frac{d^4q_1 d^4q_2}{(2\pi)^8} [iS'_F(p'+q_2) \gamma_\mu iS'_F(p+q_2)]_{\beta\alpha} \times \\ &\times K_{\alpha\beta, \kappa\lambda}(p+q_2, p'+q_2, q_2-q_1) iS'_F(p'+q_1)_{\sigma\lambda} \times \\ &\times iS'_F(p+q_1)_{\kappa\sigma} K_{\sigma\alpha, \gamma\delta}(p+q_1, p'+q_1, q_1) + \dots \quad (19.11) \end{aligned}$$

Графически это уравнение изображено на рис. 19.17. В дальнейшем мы часто будем использовать сокращенную запись

$$\Gamma = \gamma - \int \gamma S'_F S'_F K + \iint \gamma S'_F S'_F K S'_F S'_F K + \dots$$

Это выражение описывает превращение внешнего фотона в электрон-позитронную пару, которая перерассеивается всеми возможными способами. При этом каждому члену в разложении

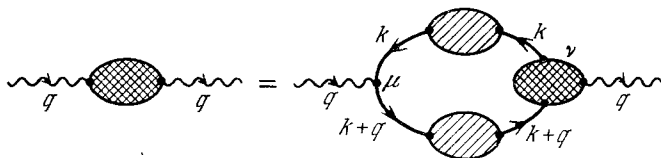


Рис. 19.16. Уравнение (19.10) для фотонной компактной собственно-энергетической части $\Sigma(p)$

(19.11) отвечает различное число виртуальных электрон-позитронных пар. Ряд (19.11) может быть формально просуммирован¹⁾ точно так же, как борновский ряд в теории нерелятивист-

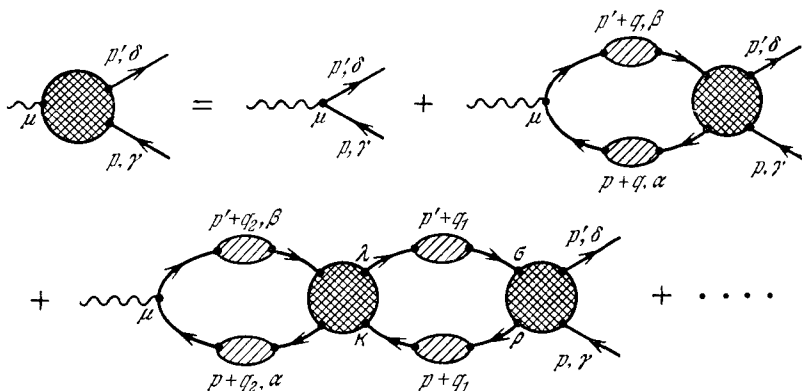


Рис. 19.17. Последовательные члены в ряду (19.11) для вершины Γ_μ , выражающиеся в терминах ядра K .

ского потенциального рассеяния суммируется в интегральное уравнение Липпмана—Швингера. В результате получаем

$$\begin{aligned}
 {}^1) \text{ Этот ряд аналогичен ряду многократного перерассеяния для функции Грина, полученному в гл. 6. Соответствующее уравнение, которое связывает полную электрон-позитронную амплитуду вне массовой поверхности } T \text{ с ядром } K, \text{ имеет вид} \\
 -iT = K + \int KiS'_F iS'_F K + \int KiS'_F iS'_F KiS'_F iS'_F K + \dots = \\
 = K + \int KiS'_F iS'_F (-iT)
 \end{aligned}$$

и называется уравнением Бете—Солпитера. Оно представляет релятивистский аналог интегральной формы двухчастичного уравнения Шредингера, при этом величина iK аналогична потенциалу V (см. [113]).

(рис. 19.18)

$$\Gamma_{\mu}(p', p)_{\delta\gamma} =$$

$$= (\gamma_{\mu})_{\delta\gamma} + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [iS'_F(p' + q) \Gamma_{\mu}(p' + q, p + q) iS'_F(p + q)]_{\beta\alpha} \times$$

$$\times K_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p + q, p' + q, q) \quad (19.12)$$

или в символической форме

$$\Gamma = \gamma - \int \Gamma S'_F S'_F K.$$

Естественно задать вопрос, в чем заключается польза полученных интегральных уравнений. С точки зрения практических

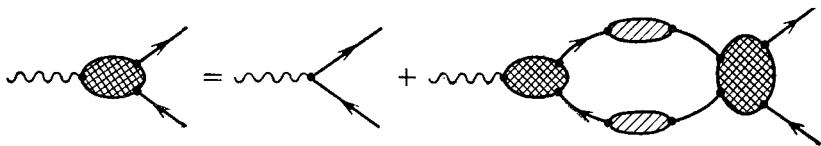


Рис. 19.18. Интегральное уравнение (19.12) для вершинной части.

вычислений мы достигли немногого—выразили неизвестные величины S'_F , D'_F и Γ_{μ} через неизвестное же ядро K . Однако с точки зрения метода перенормировок связь S'_F , D'_F и Γ_{μ} с K чрезвычайно полезна. Причина этого заключается в том, что расходимости в ядре K возникают *только* из-за собственно-энергетических и вершинных вставок во внутренних линиях; позднее мы обсудим этот пункт более подробно. Поэтому перенормировка ядра K выполняется относительно легко, а обсуждение более сложных вопросов об устранении расходимостей в Σ , $\Pi_{\mu\nu}$ и Γ_{μ} облегчается, если использовать интегральные уравнения, связывающие каждую из этих величин с ядром K .

§ 140. Интегральные уравнения для τ -функций и ядра K ; скелетные графики

Центральную роль в программе устранения расходимостей играют функции Σ , $\Pi_{\mu\nu}$ и Γ_{μ} , введенные в §§ 138, 139. Все остальные величины в теории: S -матричные элементы, τ -функции и, в частности, ядро K —выражаются через эти три величины, точнее, через S'_F , D'_F и Γ_{μ} . Однако для τ и K не существует замкнутых уравнений, аналогичных тем, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе. Вместо этого мы соберем вместе диаграммы, дающие вклад в τ и K , которые различаются только собственно-энергетическими и вершинными вставками;

эти вставки существенны при получении конечных ответов в теории.

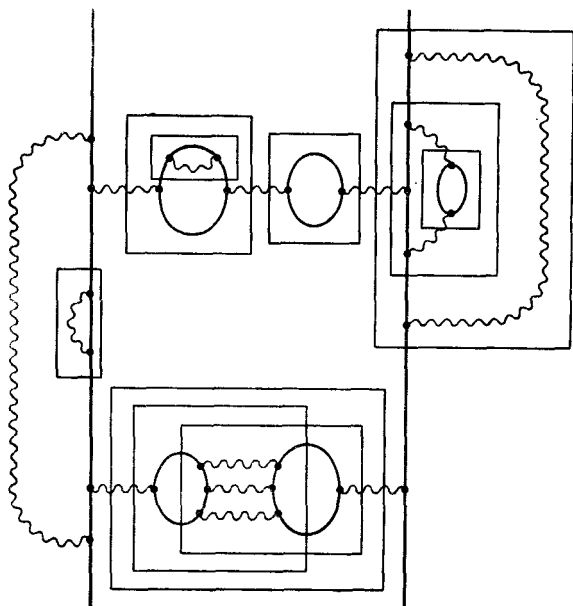


Рис. 19.19. Пример произвольной диаграммы, на которой каждая собственно-энергетическая и вершинная вставки окружены ящиками.

Вначале рассмотрим графики, которые содержатся в ядре K , и выделим в каждом из них собственно-энергетические и вершинные вставки. С этими вставками легче всего разобраться, если заключить каждую из них в ящик, как это показано на рис. 19.19. Из этого рисунка заключаем, что ящики, содержащие внутри себя различного рода вставки, либо полностью разделены, либо заключены один внутри другого с единственным исключением: в случае собственно-энергетических вставок ящики могут перекрываться. Указанное топологическое свойство оказывается справедливым и для произвольных диаграмм: ящики, содержащие вершинные и собственно-энергетические вставки, могут быть всегда выбраны таким образом, чтобы они не пересекались, за исключением случая вершинных вставок в собственно-энергетиче-

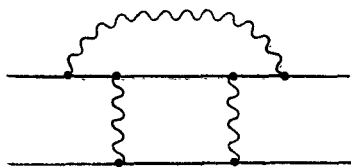


Рис. 19.20. Скелетная диаграмма, отвечающая диаграмме рис. 19.19.

ские части. Доказательство этого утверждения мы приведем в § 141.

Используя сформулированный результат, можно однозначно сопоставить каждому графику \mathcal{S} , содержащемуся в K , другой

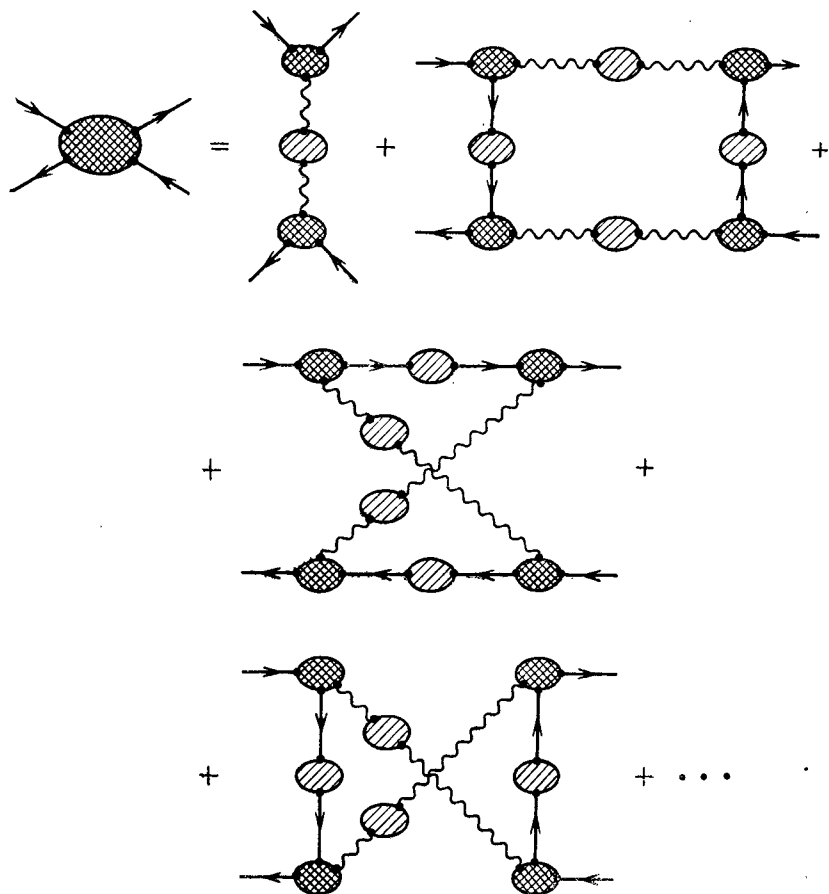


Рис. 19.21. Отдельные члены в разложении (19.13) для ядра K .

график \mathcal{S} , который будем называть скелетным. Скелетные диаграммы получаются стягиванием всех ящичков, содержащих внутри себя собственно-энергетические и вершинные вставки, в точку; другими словами, эти диаграммы не содержат указанных вставок вообще. На рис. 19.20 изображен скелетный график, отвечающий диаграмме 19.19. Наоборот, любой график, входящий в K , можно построить из соответствующего скелетного

графика, вводя в последний различного рода вершинные и собственно-энергетические вставки.

Обозначив через $K^S(p, p', q; S_F, D_F, \gamma_\mu, e_0)$ вклад тех фейнмановских диаграмм \mathcal{G} , которые совпадают со своими скелетными, мы можем записать полное ядро K в виде суммы по всем скелетным графикам, в которой, однако, каждой электронной и фотонной линиям нужно сопоставить точные функции Грина S'_F и D'_F , а каждой вершине — точную вершинную функцию Γ_μ :

$$K_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p, p', q) = \sum_S K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^S(p, p', q; S'_F, D'_F, \Gamma_\mu, e_0) =$$

$$= (-ie_0)^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu(p, p - q) iD'_F(q)_{\mu\nu} \Gamma_{\delta\beta}^\nu(p' - q, p') + \dots \quad (19.13)$$

Графическая запись уравнения (19.13) представлена на рис. 19.21. Отметим, что скелетные графики, изображенные на рис. 19.22, не включены в разложение для ядра K , поскольку эти графики можно разделить на две части, соединенные либо фотонной линией, либо электрон-позитронной парой, и они в соответствии с определением, сформулированным в § 138, не содержатся в указанном разложении.

Для того чтобы убедиться в справедливости разложения (19.33), достаточно заметить, что любой график \mathcal{G} , содержащийся в K , появляется в разложении по скелетным диаграммам один

и только один раз, поскольку, во-первых, соответствующий \mathcal{G} скелетный график S определен однозначно и, во-вторых, в графическом разложении K существует одна и только одна диаграмма, отвечающая \mathcal{G} . Последнее утверждение есть следствие того обстоятельства, что вершинные и собственно-энергетические вставки в диаграммы можно определить однозначным образом.

Скелетные разложения для произвольных τ -функций (включая пропагаторы и собственно-энергетические части) могут быть получены тем же способом, что и в случае ядра K . Для τ -функции с m внешними фермионными концами и n внешними

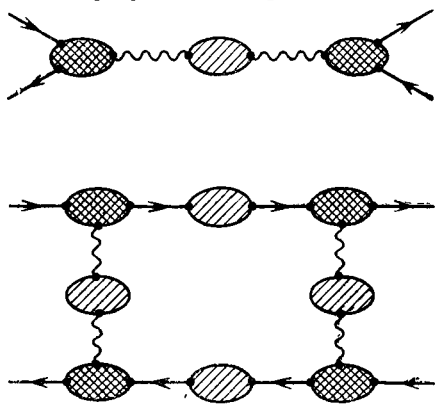


Рис. 19.22. Скелетные диаграммы, не включенные в разложение для K на рис. 19.21

фотонами в импульсном пространстве имеем

$$\begin{aligned} \tau(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n)_{a_1 \dots a_m, \mu_1 \dots \mu_n} &= \\ &= \sum_S \tau^S(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n; S'_F, D'_F, \Gamma, e_0)_{a_1 \dots a_m, \mu_1 \dots \mu_n} \\ & \quad m + n > 3, \end{aligned} \quad (19.14)$$

где $\tau^S(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n; S'_F, D'_F, \Gamma, e_0)$ — вклад в τ -функцию тех фейнмановских диаграмм, которые отвечают данному скелетному графику S .

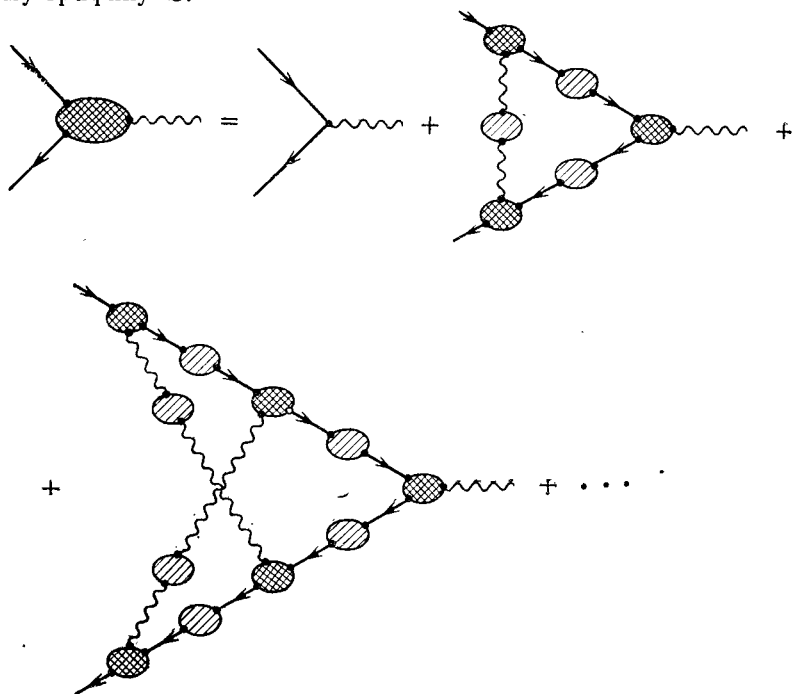


Рис. 19.23. Разложение (19.15) для вершины Γ_μ .

Нетрудно выписать также скелетное разложение для вершины Γ_μ^1)

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu + \sum_S \Lambda_\mu^S(p', p; S'_F, D'_F, \Gamma_\mu, e_0), \quad (19.15)$$

которое графически изображено на рис. 19.23.

¹⁾ Здесь подразумевается, что когда мы рисуем ящики, окружающие внутренние вершинные части, ящик, окружающий полную вершину, должен быть опущен.

Для собственно-энергетических частей скелетное разложение оказывается не столь полезным ввиду существования перекрывающихся расходямостей. Например, для диаграммы, изображенной на рис. 19.24, радиационные поправки сводятся к вершинной поправке либо к блоку A , либо к блоку B (но не к обоим блокам вместе). Поэтому полную собственно-энергетическую часть нельзя однозначно построить, исходя из скелетных диаграмм¹⁾. Эту трудность, однако, можно обойти, рассматривая вместо скелетного разложения непосредственно интегральное уравнение (19.10) для $\Pi_{\mu\nu}$.

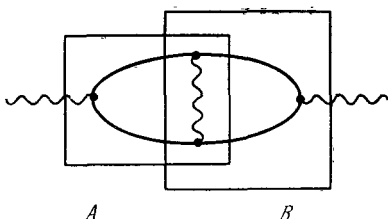


Рис. 19.24. Пример перекрывающихся собственно-энергетической и вершинной вставок.

§ 141. Топологическая теорема

При рассмотрении в предыдущем параграфе собственно-энергетических и вершинных вставок мы установили, что окружающие их ящики могут быть нарисованы таким образом, что они не перекрываются во всех случаях за исключением вершинных вставок в собственно-энергетические части. Тот факт, что ящики, окружающие собственно-энергетические вставки, либо полностью разделены, либо лежат один внутри другого, но никогда не перекрываются, является самоочевидным. Прежде чем в общем случае показать, что вершинные

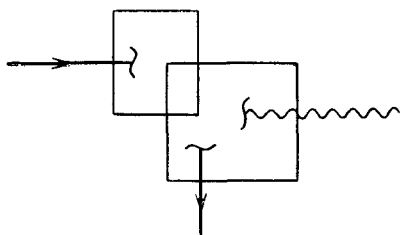


Рис. 19.25. Пример вершинной вставки.

вставки могут перекрываться только тогда, когда они содержатся внутри собственно-энергетических блоков, рассмотрим простой пример, иллюстрированный рис. 19.25. Стенки каждого ящика, содержащего вершинную вставку, по определению пересекают только две электронные и одна фотонная линия. Предположим, что на рисунке указаны все линии, пересекающие неперекрывающиеся стенки; тогда остальные линии можно нарисовать так, как это показано на рис. 19.26, *a*. При этом,

¹⁾ Единственными скелетными диаграммами, содержащимися в $\Pi_{\mu\nu}$ и Σ , являются диаграммы второго порядка.

однако, мы получаем несвязанные собственно-энергетические и вершинные части (рис. 19.26, б).

Покажем теперь, что вершинные части перекрываются только внутри собственно-энергетических вставок. С этой целью прямым графическим построением мы убедимся в том, что можно последовательно устранить перекрытие между вставками во всех остальных случаях. Соответствующее графическое построение выполнено на рис. 19.27 для всех случаев, кроме тех,

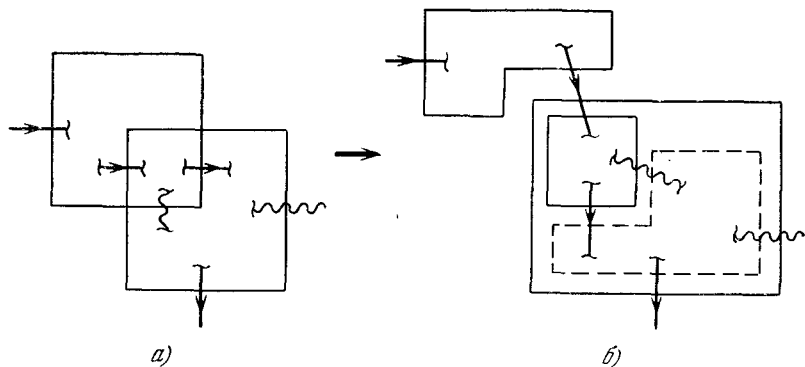


Рис. 19.26. Попытка нарисовать перекрывающиеся вершинные вставки внутри вершинной части диаграммы приводит либо к несвязанной собственно-энергетической вставке (а), либо к несвязанной вершинной вставке (б). Перестановка фотонной и входящей электронной линий приводит к аналогичному результату.

которые уже рассматривались в примере рис. 19.26. Ящики, вообще не содержащие линий, проходящих через неперекрывающиеся части, либо содержащие одну такую линию, невозможны, а собственно-энергетические ящики, содержащие две такие линии, рассматривать не следует.

§ 142. Тожество Уорда

При устранении расходимостей в квантовой электродинамике важную роль играет обобщенное тождество Уорда [114—115], которое позволяет связать S'_F непосредственно с Γ_μ . Это тождество является непосредственным следствием дифференциальной формы закона сохранения тока и утверждает, что

$$(p' - p)_\mu \Gamma^\mu(p', p) = [S'_F{}^{-1}(p') - S'_F{}^{-1}(p)]. \quad (19.16)$$

Очевидно, что голая вершина γ_μ и свободный пропагатор $S_F(p) = (\hat{p} - m)^{-1}$ удовлетворяют (19.16), поэтому, используя (19.3) и (19.7), это выражение можно переписать в виде соот-

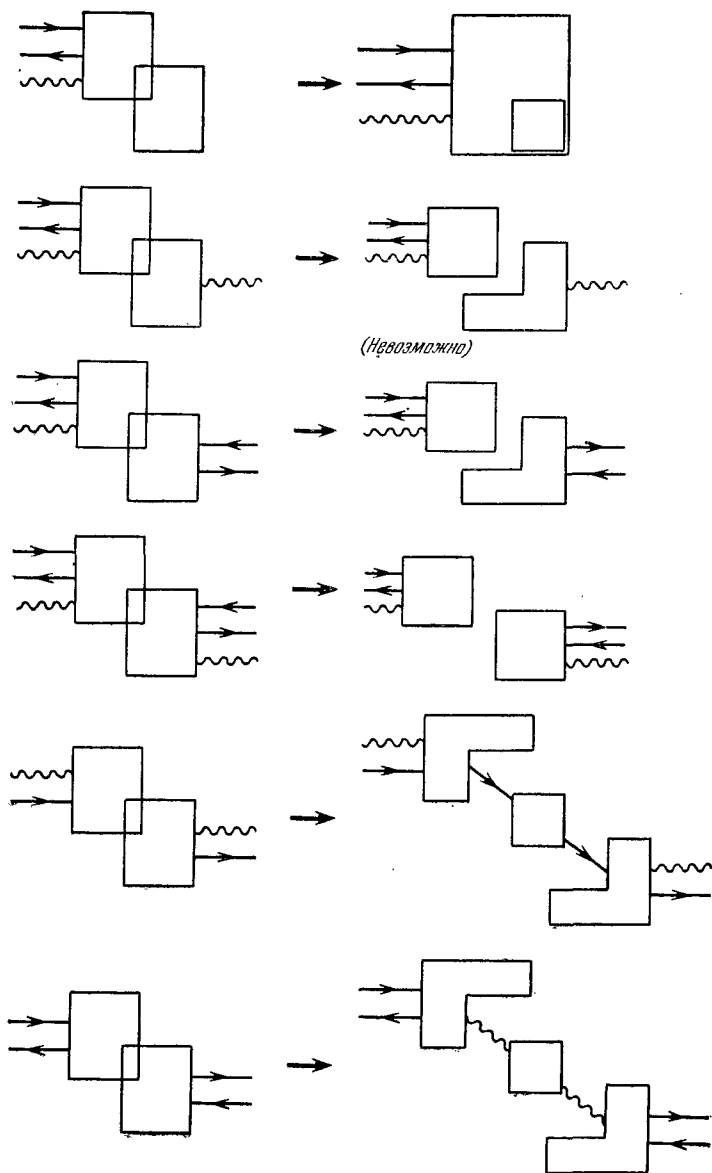


Рис 19.27. Перечень диаграмм, показывающий, как можно избежать расходимостей во всех случаях, за исключением случая вершинных вставок внутри собственно-энергетических частей (рис. 19.24).

ношения между вершинной частью и компактной собственно-энергетической частью:

$$(p' - p)_\mu \Lambda^\mu(p', p) = -[\Sigma(p') - \Sigma(p)]. \quad (19.17)$$

Смысл этого выражения заключается в том, что $\Lambda_\mu(p', p)$ можно получить из $-\Sigma(p)$, добавляя вершину γ_μ (с передан-

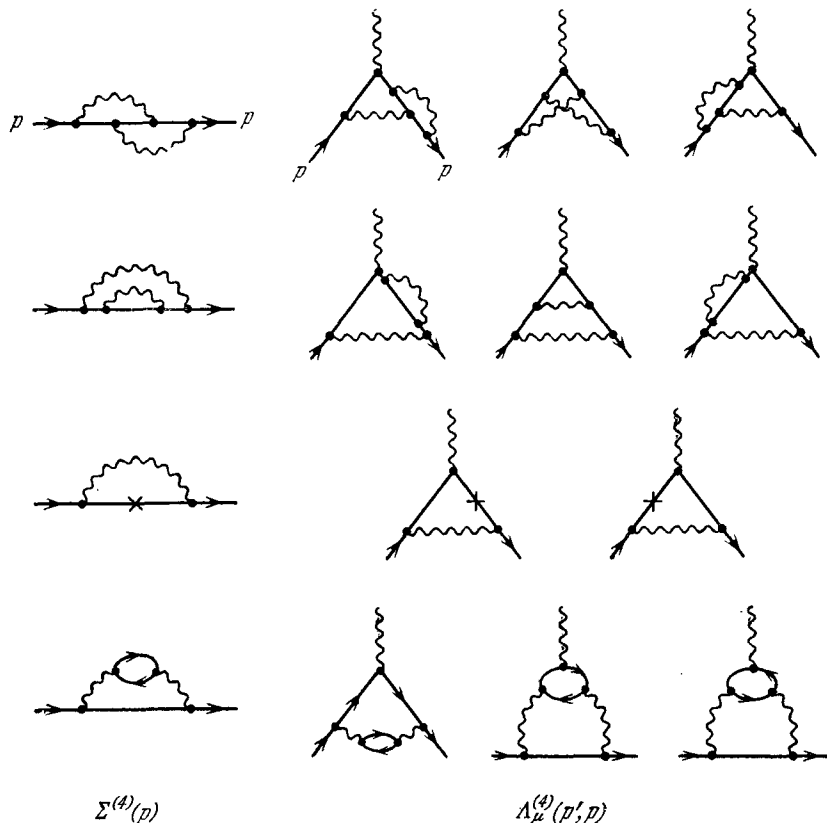


Рис. 19.28. Фотонные вставки в собственно-энергетическую диаграмму четвертого порядка.

ным импульсом $p' - p$) в каждый фермионный пропагатор, содержащийся в $\Sigma(p)$, и суммируя по всем возможным вставкам (см. рис. 19.28, где изображены диаграммы собственной энергии четвертого порядка).

Для доказательства явно вычислим дивергенцию от $\Lambda^\mu(p', p)$, т. е. величину $(p' - p)_\mu \Lambda^\mu(p', p)$, и воспользуемся результатами, полученными в гл. 17, в частности формулами (17.64)

и (17.66). Первая из них утверждает, что сумма всех вставок в замкнутые электронные петли равна нулю, а по (17.66) сумма всех вставок в электронную линию, которая не образует замкнутой петли, дает в точности разность двух членов в правой части (19.17). Тем самым тождество Уорда доказано.

Из (19.16) можно вычислить $S_F'^{-1}(p)$ и тем самым $\Sigma(p)$, взяв предел $\hat{p} \rightarrow m$. Напомним, что в гл. 8 и 16 мы установили, что¹⁾

$$S_F'(p) \rightarrow \frac{Z_2}{\hat{p} - m} \quad (19.18)$$

при $\hat{p} \rightarrow m$. Поэтому при $\hat{p} = m$ и произвольном p'

$$\begin{aligned} (p' - p)_\mu \Gamma^\mu(p', p) u(p) &= \\ &= S_F'^{-1}(p') u(p) - Z_2^{-1}(\hat{p} - m) u(p) = S_F'^{-1}(p') u(p). \end{aligned} \quad (19.19)$$

В силу лоренцевой инвариантности и сохранения четности функция $S_F'^{-1}(p')$ имеет следующий вид:

$$S_F'^{-1}(p') = \hat{p}' A(p'^2) + B(p'^2).$$

Скалярные функции $A(p'^2)$ и $B(p'^2)$ непосредственно выражаются через Γ_μ , если в левой части (19.19) вычислить коэффициенты при $\hat{p}' u(p)$ и $u(p)$ соответственно.

Тождество Уорда позволяет не только вычислить $S_F'(p)$ при заданном $\Gamma_\mu(p', p)$, но и определяет Γ_μ через S_F' в том частном случае, когда $p' \rightarrow p$, т. е. когда импульс, переданный электромагнитному полю, равен нулю. В этом пределе (19.19) сводится к

$$\Gamma_\mu(p, p) = \frac{\partial S_F'^{-1}(p)}{\partial p^\mu} \quad \text{или} \quad \Lambda_\mu(p, p) = -\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}. \quad (19.20)$$

Именно эти выражения были получены в оригинальной работе Уорда. Общий результат (19.16) был получен Такахаши в 1957 г., который исходил непосредственно из полевых уравнений без обращения к анализу фейнмановских диаграмм.

Важным следствием тождества Уорда, которое стоит здесь отметить, является установление общей структуры тензора по-

¹⁾ Мы не рассматриваем здесь инфракрасную расходимость в Z_2 . В действительности привносимую этой расходимостью трудность можно избежать при помощи метода промежуточной перенормировки (§ 145) или явно вводя массу фотона. Мы не рассматриваем также проблему калибровочной инвариантности константы Z_2 .

ляризации вакуума $\Pi_{\mu\nu}(q)$. Взяв дивергенцию от (19.10) и используя (19.16), находим

$$q^\nu \Pi_{\mu\nu}(q) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma_\mu [S'_F(k) - S'_F(k+q)]. \quad (19.21)$$

С интегралом в правой части мы неоднократно сталкивались ранее, см., например, (8.10) и (17.66). Снова предполагая¹⁾, что этот интеграл может быть регуляризован, после чего в нем можно сделать замену переменных, получим

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0. \quad (19.22)$$

Отсюда в общем случае следует результат, полученный ранее в (8.20) при вычислениях во втором порядке теории возмущений

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2). \quad (19.23)$$

Более того, в любом конечном порядке по e_0^2 функция $\Pi(q^2)$ не имеет полюса при $q^2 = 0$, как это следует из рассмотрения ее аналитических свойств²⁾ (гл. 18).

Подставив (19.23) в (19.6), получим

$$q^2 [1 + e_0^2 \Pi(q^2)] D'_F(q)_{\mu\nu} - e_0^2 \Pi(q^2) q_\mu q^\lambda D'_F(q)_{\lambda\nu} = -g_{\mu\nu},$$

откуда

$$D'_F(q)_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2 [1 + e_0^2 \Pi(q^2)]} - \frac{q_\mu q_\nu e_0^2 \Pi(q^2)}{q^4 [1 + e_0^2 \Pi(q^2)]}. \quad (19.24)$$

При практических вычислениях член с $q_\mu q_\nu$ в (19.24) не вносит вклада, поскольку D'_F связана с сохраняющимся током. В любом случае, однако, вид D'_F полностью определяется скалярной функцией $\Pi(q^2)$ в (19.23). Так как $\Pi(q^2)$ не имеет полюса при $q^2 = 0$, выражение (19.24) показывает, что фотонный пропагатор описывает кванты с нулевой массой покоя.

§ 143. Определение перенормировочных констант и правила перенормировки

В этом параграфе мы приступим к фактическому рассмотрению метода перенормировки. Используя определение констант Z_1 , Z_2 и Z_3 (см. гл. 16) и наш опыт вычислений во втором порядке теории возмущений (см. гл. 8), мы переопределим про-

¹⁾ См. также [116].

²⁾ В действительности $\Pi(q^2)$ имеет разрез при $0 \leq q^2 < \infty$. О возможности существования полюса в точной (т. е. просуммированной по всем степеням e_0^2) функции $\Pi(q^2)$ и об интерпретации этого полюса см. [63].

пагаторы S'_F и D'_F , вершину Γ_μ и заряд e_0 , причем после такого переопределения константы перенормировки можно снова связать с Σ , Π и Γ_μ . В результате этой процедуры все интегральные уравнения, выведенные на предыдущих страницах этой главы и являющиеся основой метода перенормировки, могут быть переписаны в терминах перенормированных величин. Далее мы покажем, что константы перенормировки и определяющие их уравнения конечны в каждом порядке по перенормированному заряду e , т. е. что все зависящие от обрезания множители исчезают при перенормировке, как это было явно продемонстрировано в первом томе при вычислении во втором порядке теории возмущений.

Величина Z_2 , определенная в (16.84), представляет, согласно (16.118), вероятность обнаружения «голого» электрона в состоянии, описывающем физический электрон. Из общего выражения (16.122) для S'_F следует, что

$$S'_F \rightarrow \frac{Z_2}{\hat{p} - m} \quad \text{при} \quad \hat{p} \rightarrow m. \quad (19.25)$$

Для массового оператора $\Sigma(\hat{p})$ получаем

$$\Sigma(\hat{p}) \rightarrow -(\hat{p} - m)(Z_2^{-1} - 1) \quad \text{при} \quad \hat{p} \rightarrow m, \quad (19.26)$$

откуда следует, что при $\hat{p} \rightarrow m$ $\Sigma(\hat{p})$ обращается в нуль. Выполнение этого условия обеспечивается введением массового члена $\delta m = m - m_0$, который, согласно правилам, сформулированным в гл. 17, явно содержится в гамильтониане взаимодействия. Величина δm в каждом порядке определяется из (19.26):

$$\Sigma(\hat{p} = m, \delta m) = 0. \quad (19.27)$$

Отметим, что (19.26) имеет тот же вид, что и вычисленное во втором порядке теории возмущений выражение (8.42), за исключением того, что массовый оператор $\Sigma(\hat{p})$, используемый в настоящей главе, включает в себя δm .

Константа Z_3 определяется аналогично, как вклад однофотонного состояния в фотонный пропагатор; она равна, согласно (16.172), вычету пропагатора в полюсе $q^2 = 0$:

$$D'_F(q^2)_{\mu\nu} \rightarrow -\frac{Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \text{градиентные члены при } q^2 \rightarrow 0. \quad (19.28)$$

Градиентные члены, как обычно, несущественны, поскольку они не вносят вклада в S -матрицу¹⁾. Тогда из соотношения

¹⁾ Следует подчеркнуть, что, как это следует из (19.14), градиентные члены с *необходимостью* модифицируют τ -функции, через которые в свою очередь выражаются S -матричные элементы. Соответствующие поправки, однако, можно полностью игнорировать.

(19.24), связывающего D'_F с тензором поляризации вакуума, находим

$$e_0^2 \Pi(0) = Z_3^{-1} - 1. \quad (19.29)$$

Сравнив с результатом вычислений во втором порядке теории возмущений (8.23), получим

$$\Pi(0) \approx \frac{1}{12\pi^2} \ln \frac{M^2}{m^2},$$

где M — масса, на которой производится обрезание.

Наконец, константа Z_1 , связанная с вершинной функцией, определяется так же, как в примере (8.50), а именно как предел Γ_μ , когда переданный импульс стремится к нулю, а электронные линии лежат на массовой поверхности

$$\bar{u}(p) \Gamma_\mu(p, p) u(p) = Z_1^{-1} \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p). \quad (19.30)$$

Правая часть в этом выражении, как показано в (10.88), представляет наиболее общий вид вершинной функции при нулевом переданном импульсе. Используя тождество Уорда, мы можем в общем случае доказать весьма полезное равенство

$$Z_1 = Z_2, \quad (19.31)$$

которое было установлено ранее в теории возмущений. Действительно, положив в (19.19) $p^2 = m^2$ и обозначив $p' = p + q$, получим

$$\bar{u}(p) q^\mu \Gamma_\mu(p', p) u(p) = \bar{u}(p) S_F'^{-1}(p') u(p). \quad (19.32)$$

Взяв производную $\partial/\partial q_\alpha$, в пределе $q_\mu \rightarrow 0$ получаем, с учетом (19.30) и (19.25),

$$Z_1^{-1} \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p) = Z_2^{-1} \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p),$$

откуда и следует (19.31).

Идея метода перенормировки заключается в том, чтобы *переопределить* пропагаторы и вершинные функции таким образом, чтобы вблизи массовой поверхности или (в случае вершины) при нулевом переданном импульсе эти величины совпадали с соответствующими выражениями для свободной частицы. С этой целью введем, следуя Дайсону [65, 66], перенормированные пропагаторы и вершинные функции \tilde{S}'_F , \tilde{D}'_F и $\tilde{\Gamma}'_\mu$ и перенормированный заряд e :

$$\begin{aligned} S'_F(p) &= Z_2 \tilde{S}'_F(p), \\ D'_F(q)_{\mu\nu} &= Z_3 \tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu}, \\ \Gamma_\mu(p', p) &= Z_1^{-1} \tilde{\Gamma}'_\mu(p', p), \\ e_0 &= \frac{Z_1 e}{Z_2 \sqrt{Z_3}} = Z_3^{-1/2} e, \end{aligned} \quad (19.33)$$

для которых

$$\tilde{S}'_F(p) \rightarrow \frac{1}{\hat{p} - m} \quad \text{при } \hat{p} \rightarrow m,$$

$$\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} \rightarrow -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \text{градиентные члены при } q^2 \rightarrow 0, \quad (19.34)$$

$$\tilde{\Gamma}'_\mu(p, p) \rightarrow \gamma_\mu \quad \text{при } \hat{p} \rightarrow m.$$

Основная проблема в методе перенормировок заключается в том, чтобы показать, что величины \tilde{S}'_F , \tilde{D}'_F и $\tilde{\Gamma}'_\mu$, выраженные через перенормированный заряд e , конечны, т. е. не зависят от

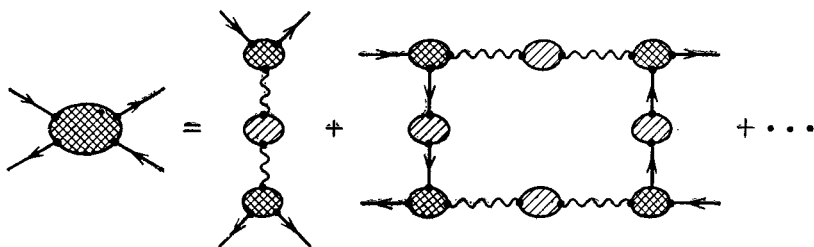


Рис. 19.29 Первые два члена в скелетном разложении для ядра K .

радиуса обрезания. Эта проблема сильно усложняется расходимостью констант Z ; напомним, что в гл. 8 мы обнаружили, что все эти величины зависят от обрезания.

Доказательство того факта, что \tilde{S}'_F , \tilde{D}'_F и $\tilde{\Gamma}'_\mu$, а также выражающиеся через них τ -функции конечны, основано на использовании интегральных уравнений и разложении по скелетным диаграммам, которые обсуждались в начале этой главы. Поэтому желательно переписать эти уравнения в такой форме, чтобы они содержали только перенормированные величины. В результате вместо разложения по e_0^2 , можно использовать разложение по перенормированному заряду e^2 . К счастью для теории, указанное переопределение не затрагивает структуру интегральных уравнений.

Начнем с рассмотрения ядра K , которое выражается через S'_F , D'_F , Γ и e_0 . Выпишем в символической записи первые два члена в разложении по скелетным диаграммам (19.13) (рис. 19.29):

$$K = ie_0^2 \Gamma D'_F \Gamma + e_0^4 \int [\Gamma S'_F \Gamma] D'_F D'_F [\Gamma S'_F \Gamma] + \dots \quad (19.35)$$

В терминах перенормированных величин (19.33) это выражение приобретает следующий вид:

$$K = ie_0^2 Z_1^{-2} Z_3 \tilde{\Gamma} \tilde{D}'_F \tilde{\Gamma} + e_0^4 Z_1^{-4} Z_2^2 Z_3^2 \int [\tilde{\Gamma} \tilde{S}'_F \tilde{\Gamma}] \tilde{D}'_F \tilde{D}'_F [\tilde{\Gamma} \tilde{S}'_F \tilde{\Gamma}] + \dots = \\ = Z_2^{-2} \left\{ ie_0^2 \tilde{\Gamma} \tilde{D}'_F \tilde{\Gamma} + e^4 \int [\tilde{\Gamma} \tilde{S}'_F \tilde{\Gamma}] \tilde{D}'_F \tilde{D}'_F [\tilde{\Gamma} \tilde{S}'_F \tilde{\Gamma}] \right\} + \dots$$

Таким образом, в результате замены (19.33) все перенормированные величины в первых двух членах разложения ядра оказались выраженными через перенормированные величины и, кроме того, появился общий множитель Z_2^{-2} .

Нетрудно показать, что указанное свойство имеет место для любого члена в разложении по скелетным диаграммам (19.13), в результате это разложение можно записать в виде

$$K(p, p', q) = Z_2^{-2} \sum_{\substack{\text{скелетные} \\ \text{диаграммы } S}} K^S(p, p', q; S'_F, D'_F, \tilde{\Gamma}, e). \quad (19.36)$$

Сопоставим далее каждой вершине скелетной диаграммы половину множителей, относящихся к фотонной линии и к двум фермионным линиям. Остальную половину множителей отнесем к другой вершине или к внешним линиям. В результате каждая вершина содержит множитель Z_1^{-1} , возникающий при перенормировке Γ_μ (см. (19.33)), множитель $(\sqrt{Z_2})^2$, связанный с электронными линиями, и множитель $\sqrt{Z_3}$, связанный с фотонной линией, причем предполагается, что все эти линии — внутренние. Поэтому полный коэффициент в вершине равен

$$e_0 Z_1^{-1} Z_2 \sqrt{Z_3} = e.$$

Если же в вершину входят внешние электронная или позитронная линии, множитель $\sqrt{Z_2}$, связанный с каждой из таких линий, следует опустить, поскольку пропагаторы внешних линий не включены в определение K . В результате возникает полный множитель Z_2^{-2} , как и указано в (19.36). Этот результат позволяет ввести *перенормированное ядро* \tilde{K} :

$$\tilde{K}(p, p', q) \equiv Z_2^2 K(p, p', q) = \\ = \sum_{\substack{\text{скелетные} \\ \text{диаграммы } S}} K^S(p, p', q; \tilde{S}'_F, \tilde{D}'_F, \tilde{\Gamma}, e). \quad (19.37)$$

Аналогичное масштабное преобразование может быть выполнено для фейнмановских амплитуд с произвольным числом

внешних линий. Например, для τ -функции с m внешними фермионными и n внешними фотонными линиями получаем

$$\begin{aligned} & \tau(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_m, \mu_1 \dots \mu_n} = \\ & = Z_2^{m/2} Z_3^{n/2} \sum_{\text{скелетные диаграммы } S} \tau^S(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n; \tilde{S}'_F, \tilde{D}'_F, \tilde{\Gamma}, \tilde{e})_{\alpha_1 \dots \alpha_m, \mu_1 \dots \mu_n} = \\ & \equiv Z_2^{m/2} Z_3^{n/2} \tau(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_m, \mu_1 \dots \mu_n}, \quad (m+n > 3). \quad (19.38) \end{aligned}$$

Доказательство проводится аналогично (19.36) с той лишь разницей, что теперь нужно учесть, что в τ -функцию включены пропагаторы внешних концов, которые не содержатся в определении K . В этом случае для перенормировки вершин достаточно множителя \sqrt{Z} ; в результате в (19.38) возникает множитель \sqrt{Z} для каждой внешней линии.

Для S -матричных элементов ситуация еще проще. Из редукционной формулы (см. (16.139) и (16.148)) следует, что инвариантный S -матричный элемент получается из τ -функции умножением на $(\hat{p} - m)/\sqrt{Z_2}$ для каждой электронной линии и на $q^2/\sqrt{Z_3}$ для каждой фотонной линии, после чего следует перейти на массовую поверхность: $\hat{p} \rightarrow m$, $q^2 \rightarrow 0$ — и подставить волновые функции свободных частиц, отвечающие внешним линиям (не забывая при этом о множителях i). Поскольку перенормированные пропагаторы внешних линий на массовой поверхности равны $(\hat{p} - m)^{-1}$ и $-(q^2)^{-1}g_{\mu\nu}$, мы приходим к замечательно простым правилам вычисления S -матричных элементов, которые заключаются в следующем.

1. Нарисуем все скелетные диаграммы.

2. Вычислим по фейнмановским правилам соответствующие амплитуды, подставляя $e\tilde{\Gamma}_\mu$ для вершин и \tilde{S}'_F и \tilde{D}'_F для внутренних линий.

3. Подставим свободные волновые функции

$$\frac{e_\mu}{\sqrt{2k}(2\pi)^3}, \quad \sqrt{\frac{m}{E(2\pi)^3}} u(p), \quad \bar{u}(p) \sqrt{\frac{m}{E(2\pi)^3}} \quad \text{и т. д.,}$$

отвечающие внешним концам диаграммы, причем в этих функциях *не нужно* учитывать множители Z или собственно-энергетические вставки, поскольку \sqrt{Z} в (19.38) сокращается с \sqrt{Z} в редукционной формуле. Мы видим, что вопрос о конечности S -матричных элементов ни коим образом не связан с расходимостью множителей Z , а сводится лишь к изучению конечности функций \tilde{S}'_F , \tilde{D}'_F и Γ_μ и условий сходимости интегралов, отвечающих скелетным диаграммам.

Интегральные уравнения, определяющие вершину Γ_μ , равно как и тождество Уорда, позволяющее вычислить пропагатор электрона S'_F через вершину Γ_μ , также подлежат перенормировке. Подставив (19.33) в (19.12), получим для вершины

$$\tilde{\Gamma}_\mu = Z_1 \gamma_\mu - \int \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K}, \quad (19.39)$$

где константа Z_1 определяется из условия (19.34)

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p, p) |_{\hat{p}=m} = \gamma_\mu. \quad (19.40)$$

Поскольку $Z_1 = Z_2$, тождество Уорда при перенормировке не меняется

$$(p' - p)_\mu \tilde{\Gamma}^\mu(p', p) = \tilde{S}'^{-1}(p') - \tilde{S}'^{-1}(p). \quad (19.41)$$

В частности, выражение (19.19) справедливо и для перенормированных величин

$$\tilde{S}'^{-1}(p') = (p' - p)_\mu \tilde{\Gamma}^\mu(p', p) |_{\hat{p}=m}, \quad (19.42)$$

где обозначение $|_{\hat{p}=m}$ указывает на то, что $p^2 = m^2$ и каждый множитель \hat{p} в вершине следует заменить на m .

Поскольку тождество Уорда позволяет выразить S'_F непосредственно через Γ_μ , не возникает необходимости рассматривать отдельно уравнение для электронной собственно-энергетической части. Перенормировку этого уравнения мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Рассмотрим еще, как перенормируется фотонный пропагатор и тензор вакуумной поляризации. Сделав замену (19.33) в уравнении (19.24), получим

$$\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 [Z_3 + Z_3 e_0^2 \Pi(q^2)]} - \frac{q_\mu q_\nu e_0^2 \Pi(q^2)}{q^4 [Z_3 + Z_3 e_0^2 \Pi(q^2)]}. \quad (19.43)$$

Вспомнив определение (19.29) константы Z_3 и отделяя значение $\Pi(q^2)$ при $q^2 = 0$

$$\Pi(q^2) = \Pi(0) + \Pi_c(q^2),$$

где

$$\Pi_c(0) = 0$$

и

$$\Pi(0) = e_0^{-2} (Z_3^{-1} - 1) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e_0^2}, \quad (19.44)$$

получим

$$\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2 [1 + e^2 \Pi_c(q^2)]} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \left[\frac{1}{Z_3 q^2} - \frac{1}{q^2 [1 + e^2 \Pi_c(q^2)]} \right]. \quad (19.45)$$

Напомним, что в силу сохранения тока члены, пропорциональные $q_\mu q_\nu$ не вносят вклада в S -матричные элементы. Поэтому при вычислении S -матрицы в (19.45) выживает только первый член и пропагатор $\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu}$ фактически определяется лишь функцией $\Pi_c(q^2)$. Согласно (19.10), (19.23), (19.33) и (19.44) выражение последней через перенормированные величины таково:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) [\Pi(0) + \Pi_c(q^2)] = \\ &= iZ_1 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma_\mu \tilde{S}'_F(k) \tilde{\Gamma}'_\nu(k, k+q) \tilde{S}'_F(k+q). \end{aligned} \quad (19.46)$$

§ 144. Сводка формул:

перенормированные интегральные уравнения

Мы в основном закончили построение формального аппарата, используемого в методе перенормировок. Ниже мы выпишем сводку формул, необходимых для вычисления S -матричных элементов.

Для перенормированных величин имеем¹⁾

$$\begin{aligned} \tau(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \\ &= \sum_{\text{скелетные диаграммы } S} \tau^S(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n; S'_F, D'_F, \Gamma_\mu, e_0)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \end{aligned} \quad (19.47a)$$

$$K_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p, p', q) = \sum_{\text{скелетные диаграммы } S} K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^S(p, p', q; S'_F, D'_F, \Gamma_\mu e_0), \quad (19.47б)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p', p)_{\gamma\delta} &= (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} + \\ &+ \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [iS'_F(p+q) \Gamma_\mu(p'+q, p+q) iS'_F(p+q)]_{\beta\alpha} \times \\ &\times K_{\alpha\beta, \delta\gamma}(p+q, p'+q, q) \equiv \gamma_\mu - \int \Gamma_\mu S'_F S'_F K \equiv \\ &\equiv \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p', p), \end{aligned} \quad (19.47в)$$

$$S'^{-1}_F(p') = (p' - p)_\mu \Gamma^\mu(p', p) \Big|_{p=p'}, \quad (19.47г)$$

$$D'_F(q)_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2 [1 + e_0^2 \Pi(q^2)]} + \text{члены с } q_\mu q_\nu, \quad (19.47д)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2) = \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma_\mu S'_F(k) \Gamma_\nu(k, k+q) S'_F(k+q). \end{aligned} \quad (19.47е)$$

¹⁾ См. уравнения (19.14), (19.13), (19.12), (19.19), (19.24) и (19.10) для случаев (19.47 а, б, в, г, д, е) соответственно.

Эти уравнения позволяют полностью определить τ -функции в виде разложения по степеням e_0^2 . В первом исчезающем порядке по e_0^2 для вычисления функций τ , K и Π в (19.47а)—(19.47б) и (19.47в) величины S'_F , D'_F и Γ_μ следует заменить на S_F , D_F и γ_μ . После этого, используя (19.47в) и (19.47г), можно вычислить в том же порядке Γ_μ и S'_F . Функцию D'_F можно вычислить с точностью e_0^2 , если подставить в (19.47д) нулевое приближение для Π в (19.47е). Указанные вычисления были фактически проделаны в гл. 8. Полученные при этом значения S'_F , D'_F и Γ_μ , которые содержат поправки порядка e_0^2 , можно затем подставить обратно в (19.47а), (19.47б) и (19.47е), после чего описанную процедуру следует повторять до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность.

Отметим, что в (19.47) не выписаны уравнения, определяющие электронную собственно-энергетическую часть

$$S'_F = \frac{1}{\hat{p} - m - \Sigma(p)},$$

$$\Sigma(p) = ie_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D'_F(k)_{\mu\nu} \Gamma^\mu(p, p-k) S'_F(p-k) \gamma^\nu. \quad (19.48)$$

Эти уравнения не нужны, поскольку тождество Уорда (19.47г) позволяет определить S'_F непосредственно через Γ_μ .

Производя в (19.47) перенормировку¹⁾

$$e_0 = \sqrt{Z_3^{-1}} e,$$

$$S'_F(p) = Z_2 \tilde{S}'_F(p),$$

$$D'_F(q)_{\mu\nu} = Z_3 \tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu},$$

$$\Gamma_\mu(p', p) = Z_1^{-1} \tilde{\Gamma}_\mu(p', p),$$

$$K(p, p', q) = Z_2^{-2} \tilde{K}(p, p', q),$$

$$\tau(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n)_{\alpha_1 \dots \mu_n} =$$

$$= Z_2^{m/2} Z_3^{n/2} \tilde{\tau}(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n)_{\alpha_1 \dots \mu_n} \quad (19.49)$$

и учитывая, что вследствие тождества Уорда

$$Z_1 = Z_2, \quad (19.50)$$

¹⁾ См. (19.31), (19.33), (19.37) и (19.38).

мы получаем вместо (19.47) следующую систему уравнений¹⁾:

$$\begin{aligned} & \tilde{\tau}(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n)_{\alpha_1 \dots \mu_n} = \\ & = \sum_{\text{скелетные диаграммы } S} \tau^S(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_n; \tilde{S}'_F, \tilde{D}'_F, \tilde{\Gamma}_\mu, e)_{\alpha_1 \dots \mu_n}, \end{aligned} \quad (19.51a)$$

$$\tilde{K}_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p, p', q) = \sum_{\text{скелетные диаграммы } S} K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^S(p, p', q; \tilde{S}'_F, \tilde{D}'_F, \tilde{\Gamma}_\mu, e), \quad (19.51б)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\mu(p', p)_{\gamma\delta} &= Z_1(\gamma_\mu)_{\gamma\delta} - \\ & - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\tilde{S}'_F(p' + q) \tilde{\Gamma}_\mu(p' + q, p + q) \tilde{S}'_F(p + q)]_{\beta\alpha} \times \\ & \times \tilde{K}_{\alpha\beta, \delta\gamma}(p + q, p' + q, q) \end{aligned} \quad (19.51в)$$

или

$$\tilde{\Gamma}_\mu \equiv Z_1 \gamma_\mu - \int \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \equiv \gamma_\mu + \Lambda_\mu^c(p', p),$$

$$\tilde{S}'_F^{-1}(p') = (p' - p)_\mu \tilde{\Gamma}^\mu(p', p) \Big|_{p=m}, \quad (19.51г)$$

$$\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} = - \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 [1 + e^2 \{\Pi(q^2) - \Pi(0)\}]} + \text{члены с } q_\mu q_\nu, \quad (19.51д)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2) = \\ & = iZ_1 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma_\mu \tilde{S}'_F(k) \tilde{\Gamma}_\nu(k, k + q) \tilde{S}'_F(k + q), \end{aligned} \quad (19.51e)$$

где

$$\Pi(q^2) \equiv \Pi(0) + \Pi_c(q^2), \quad \Pi_c(0) = 0.$$

Используя эти шесть уравнений, можно вычислить все S -матричные элементы, заменяя в перенормированных τ -функциях (19.51a) внешние пропагаторы \tilde{S}'_F и \tilde{D}'_F волновыми функциями свободных частиц, причем, как было указано выше, в волновых функциях не нужно учитывать множителей Z .

Уравнения (19.51) вместе с граничными условиями²⁾ для определения констант Z_1 и Z_3

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p, p) \Big|_{p=m} = \gamma_\mu, \quad \frac{1}{e_0^2} = \frac{1}{e^2} - \Pi(0) = \frac{Z_3}{e^2} \quad (19.52)$$

составляют замкнутую систему, из которой можно вычислить все τ -функции и S -матрицу в виде разложения по степеням перенормированного заряда e . Эти уравнения позволяют выписать также разложение по степеням перенормированного заряда. Действительно, подставим в (19.51в) ядро \tilde{K} , вычис-

¹⁾ См. (19.38), (19.37), (19.39) и (19.42), (19.45) и (19.46).

²⁾ См. формулы (19.40) и (19.44).

ленное в низшем порядке по e , и $\tilde{S}'_F \approx (\hat{p} - m)^{-1}$; тогда, используя (19.52), получим Γ_μ и Z_1 с точностью e^2 . Далее, из тождества Уорда (19.51г) можно вычислить \tilde{S}_F с точностью e^2 , а \tilde{D}'_F в том же порядке определится из (19.51д), если подставить в это уравнение нулевое приближение для $\Pi_{\mu\nu}$. Используя значения величин \tilde{S}'_F , \tilde{D}'_F , $\tilde{\Gamma}_\mu$ и Z_1 , вычисленные в приближении e^2 , можно затем вычислить \tilde{K} и $\tilde{\tau}$ в следующем приближении по e , после чего описанная процедура повторяется¹⁾.

До сих пор мы, однако, не выяснили, существует ли решение перенормированных уравнений (19.51). Появление Z_1 в свободном члене уравнения для вершины (19.51в) не слишком опасно, поскольку бесконечный свободный член можно устранить вычитанием расходящейся части интеграла в правой части этого уравнения. Более серьезная трудность связана с появлением множителя Z_1 перед интегралом, определяющим $\Pi_{\mu\nu}(q)$. В действительности эта проблема представляет наиболее трудную из тех, с которыми мы столкнемся при проведении программы перенормировок. Аналогичная трудность возникает при прямом вычислении электронной собственно-энергетической части непосредственно из (19.48). В последнем случае, однако, вместо интегрального уравнения можно использовать тождество Уорда и тем самым отмеченную трудность удастся избежать. Именно в этом пункте и проявляется практическое преимущество использования тождества Уорда.

§ 145. Аналитическое продолжение и промежуточная перенормировка

В предыдущих параграфах мы ввели алгебраический и топологический аппарат, необходимый для выполнения перенормировки. В частности, в § 144 мы выписали полный набор уравнений, определяющих \tilde{S}'_F , \tilde{D}'_F , $\tilde{\Gamma}_\mu$, $\tilde{K}_{\alpha\beta, \gamma\delta}$ и $\tilde{\tau}$, итерация которых позволяет вычислить эти величины в любом порядке по перенормированному заряду e в виде конечной суммы фейнмановских интегралов. Подчеркнем, что при этом мы получаем не замкнутое выражение, а ряды по степеням e . В этом месте мы приходим к узловому пункту метода перенормировок. Мы должны теперь член за членом перебрать все фейнмановские интегралы и показать, что они конечны и что поэтому перенор-

¹⁾ Наиболее смелым предположением этой главы, о котором не следует забывать, рассматривая топологические свойства различных фейнмановских диаграмм, является следующее: мы предполагаем, что оба разложения, как по степеням e^2 , так и e_0^2 , равномерно сходятся, несмотря на то, что величины Z_i , S_F , D_F и Γ_μ все выражаются *расходящимися* интегралами и зависят от обрезания.

мированный ряд теории возмущений представляет ряд конечных, т. е. не зависящих от обрезания, членов. Вопросы же, связанные с установлением сходимости полного ряда, мы здесь вообще не будем рассматривать.

В этом параграфе мы обсудим одну техническую проблему, не связанную непосредственно с теорией перенормировок, а возникающую при установлении критерия сходимости для фейнмановских интегралов. Как мы обнаружили в гл. 18, знаменатели $(p^2 - m^2)^{-1}$ в фейнмановских интегралах могут при некоторых значениях кинематических переменных обращаться в нуль. Это обстоятельство приводит к дополнительным трудностям при анализе расходимостей. В методе перенормировок, однако, мы интересуемся лишь ультрафиолетовым поведением подынтегральных выражений при $p^2 \rightarrow \infty$, а не сингулярностями, которые ведут к появлению абсорптивных частей. Последние были рассмотрены в связи с дисперсионной теорией¹⁾ в гл. 18. Ниже мы покажем, как с самого начала можно избежать указанных трудностей путем аналитического продолжения по внешним импульсам фейнмановской амплитуды в область, где знаменатели не обращаются в нуль. После установления сходимости интегралов в этой области можно аналитически продолжить амплитуду обратно к физическим значениям инвариантов. При этом мы можем быть уверены в том, что при таком продолжении интеграл существует почти всюду, за исключением конечного числа особенностей Ландау.

Для аналитического продолжения амплитуды удобно использовать представление (18.53) и выражения (18.35) и (18.37) для действия J (18.44) в знаменателе (18.53). Согласно (18.34) — (18.36) фейнмановский интеграл, отвечающий диаграмме с m внешними импульсами q_s и n внутренними импульсами p_j , имеет вид

$$\begin{aligned}
 I(q_1, \dots, q_m) &= \int \frac{d^4 l_1 \dots d^4 l_k}{(p_1^2 - m_1^2) \dots (p_n^2 - m_n^2)} P(q_s, l_r) = \\
 &= \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta(1 - \sum_j \alpha_j) Q(\alpha_j, q_s)}{[\Delta(\alpha_1 \dots \alpha_n)]^2 \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \right]^p} = \\
 &= \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta(1 - \sum_j \alpha_j) Q(\alpha_j, q_s)}{\Delta^2 \left[\sum_{i,j=1}^m \zeta_{ij} q_i q_j - \sum_{j=1}^n m_j^2 \alpha_j + i\epsilon \right]^p}, \quad (19.53)
 \end{aligned}$$

¹⁾ В гл. 18 мы не рассматривали инфракрасные расходимости, которые, как мы вскоре убедимся, могут быть устранены при помощи метода, изложенного в этом разделе.

где P и Q — полиномы, в общем случае зависящие от внутренних и внешних импульсов, а также матриц γ и векторов поляризации. Кирхгофовские импульсы k_j линейно связаны с q_s , причем коэффициенты линейного преобразования зависят от α_j (см. (18.35) и (18.37)). Коэффициенты ζ_{ij} также зависят от α (см. (18.35)).

Наша задача заключается в том, чтобы путем замены переменных в (19.53)

$$\begin{aligned} k_j^0 &\rightarrow ik_j^0, \\ \mathbf{k}_j &\rightarrow \mathbf{k}_j, \quad k_j^2 \rightarrow -[|k_j^0|^2 + |\mathbf{k}_j|^2] \end{aligned}$$

перейти к евклидовой области, в которой все знаменатели отрицательно определены и в которой потому не возникают указанные выше неприятные сингулярности. Прежде всего заметим, что из линейных соотношений, связывающих p_j , k_j и l_r в (18.32), (18.33) и (18.37) следует, что любой поворот внешних импульсов q_s подразумевает такой же поворот импульсов k_j и l_r . Заменяем внешние импульсы

$$q_s^0 \rightarrow q_s^0 e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad \mathbf{q}_s \rightarrow \mathbf{q}_s.$$

Легко видеть, что в результате такой замены интеграл I остается конечным. Действительно, кирхгофовские импульсы k_j при этом заменяются на

$$k_j^0 \rightarrow k_j^0 e^{i\varphi}, \quad \mathbf{k}_j \rightarrow \mathbf{k}_j,$$

а знаменатель в (19.53) приобретает вид

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=1}^n \alpha_j (k_j^2 - m_j^2 + i\varepsilon) = \\ &= \sum_{j=1}^n \{ [(k_j^0)^2 \cos 2\varphi - \mathbf{k}_j^2 - m_j^2] \alpha_j + i [(k_j^0)^2 \sin 2\varphi + \varepsilon] \alpha_j \}. \end{aligned} \quad (19.54)$$

Поскольку

$$\text{Im } J > 0$$

для всех $\alpha_j \geq 0$ в (19.53), I существует для всех $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ при условии, конечно, что интеграл регуляризован на верхнем пределе. Положим теперь в (19.54) $\varphi = \pi/2$, тогда получаем для $\bar{I}(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m)$

$$\bar{I}(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m) = \int \frac{d^4 \bar{l}_1 \dots d^4 \bar{l}_k P(\bar{q}_s, \bar{l}_r)}{(\bar{p}_1^2 - m_1^2) \dots (\bar{p}_n^2 - m_n^2)}, \quad (19.55)$$

где $\bar{p}_\mu = (ip_0, \mathbf{p})$, $\bar{p}^2 = -(p_0^2 + \mathbf{p}^2) < 0$ и интеграл вычисляется по евклидовому четырехмерному пространству.

В выражении (18.55) знаменатели отрицательно определены, и потому это выражение более удобно при анализе расходимостей. Если нам удастся показать, что интеграл $\bar{I}(\bar{q})$ существует, то тем самым будет показано, что и исходный интеграл $I(q)$, определенный для физических импульсов q существует всюду, за исключением тех частных значений импульсов, для которых интеграл имеет сингулярности Ландау (см. гл. 18). Действительно, обратное аналитическое продолжение от евклидовых \bar{q}_s к физическим значениям q всегда возможно; для этого нужно только сделать замену $\bar{q}_0 \rightarrow \bar{q}_0 e^{-i\varphi}$ и положить $\varphi = \pi/2$. Поскольку мы работаем с хорошо определенными аналитическими функциями, их аналитическое продолжение возможно до тех пор, пока мы не подойдем к естественной границе аналитичности. Однако рассуждения § 127 показывают, что при аналитическом продолжении мы можем встретить лишь сингулярности Ландау. Отметим, что указанное обстоятельство было установлено в § 127 только для вершин с одним внешним импульсом q . Однако этот факт легко обобщить и для произвольных диаграмм, содержащих несколько внешних линий; для этого достаточно рассмотреть значения инвариантов, не лежащие на массовой поверхности и продолжить затем импульсы в евклидову область. Поскольку число сингулярностей Ландау меньше или равно числу всевозможных редуцированных диаграмм, а число последних конечно, мы приходим к выводу, что интеграл $I(q_s)$ существует почти всюду для физических q_s , если существует $\bar{I}(\bar{q}_s)$.

При последующем рассмотрении мы не будем делать различия между импульсами q_s и \bar{q}_s и предположим, что аналитическое продолжение от физических значений импульсов к евклидовым может быть выполнено всякий раз, когда в этом возникает необходимость.

Фейнмановские интегралы, определяющие константы перенормировки Z_1 и Z_2 , требуют специального рассмотрения, поскольку они вычисляются при $p^2 = m^2$. В этом случае критерий сходимости, справедливый только для евклидовых 4-векторов с $p^2 < 0$ ¹⁾ неприменим. Поэтому в интегралах для Z_1 и Z_2 мы сначала сделаем вычитания, необходимые для того, чтобы превратить интегралы в сходящиеся, причем вычитания сделаем в точке $p_\mu = 0$, которая лежит на границе евклидовой области. Эта процедура носит название *промежуточной перенормировки*. После промежуточной перенормировки пропагатор и вершина уже не будут должным образом нормированы на массовой поверхности $p^2 = m^2$. Однако мы достигнем нашей цели и

¹⁾ Таких проблем не возникает с Z_3 , поскольку фотонный пропагатор уже перенормирован в точке $q^2 = 0$.

покажем, что \tilde{S}'_F и \tilde{D}'_F конечны, если мы сможем показать, что:

1) теория, в которой пропагатор и вершина перенормируются в точке $p_\mu = 0$ (а не в точке $p^2 = m^2$), сходится;

2) константы перенормировки, связывающие пропагаторы и вершины, перенормированные в точке $p_\mu = 0$, с функциями \tilde{S}'_F и $\tilde{\Gamma}'_\mu$, перенормированными в точке $p^2 = m^2$, конечны (т. е. не зависят от обрезания).

Таким образом, наш подход заключается в том, чтобы выполнить перенормировку в точке $p_\mu = 0$, после чего можно использовать любые теоремы о сходимости интегралов, вычисляемых по евклидовым областям. Далее мы обсудим смысл промежуточной перенормировки в уравнениях (19.51) и (19.52) и ее физическую интерпретацию и, наконец, покажем, что дополнительная перенормировка, необходимая для вычисления \tilde{S}'_F и \tilde{D}'_F , конечна.

Введем константы промежуточной перенормировки:

$$\begin{aligned} \tilde{S}'_F(p) &= Z_2'^{-1} S'_F(p) = z_2^{-1} \tilde{S}'_F(p), \\ \tilde{\Gamma}'_\mu(p', p) &= Z_1' \Gamma'_\mu(p', p) = z_1 \tilde{\Gamma}'_\mu(p', p), \end{aligned} \quad (19.56)$$

определенные так, что

$$\begin{aligned} \tilde{S}'_F(p) &\rightarrow 1/(\hat{p} - \bar{m}) \quad \text{при } p_\mu \rightarrow 0, \\ \tilde{\Gamma}'_\mu(p, p) &\rightarrow \gamma_\mu \quad \text{при } p_\mu \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (19.57)$$

Исходные уравнения (19.51) и (19.52) могут быть теперь записаны в терминах промежуточно перенормированных величин; для этого достаточно лишь добавить еще одну тильду в \tilde{S}'_F и $\tilde{\Gamma}'_\mu$, заменить Z_1, Z_2 на Z'_1, Z'_2 и заменить граничное условие $|_{p=m}$ на $|_{p_\mu=0}$. После указанных замен по-прежнему сохраняется тождество Уорда, а вместе с ним равенство

$$Z'_1 = Z'_2,$$

поскольку выражения (19.20) и (19.57) в пределе $p_\mu \rightarrow 0$ сводятся к

$$(Z'_2)^{-1} \frac{\partial}{\partial p^\mu} (\hat{p} - \bar{m}) = (Z'_1)^{-1} \gamma_\mu \quad \text{при } p_\mu \rightarrow 0,$$

откуда

$$Z'_1 = Z'_2.$$

В оставшейся части этой главы мы займемся установлением того факта, что теория с промежуточной перенормировкой конечна. После того, как мы убедимся в этом, для доказательства конечности \tilde{S}'_F и $\tilde{\Gamma}'_\mu$ достаточно будет, согласно (19.56) и (19.57),

лишь показать, что конечны z_1 , z_2 и \bar{m} . Последнее же утверждение следует из обобщенного тождества Уорда

$$\tilde{S}'_F^{-1}(p) - \tilde{S}'_F^{-1}(0) = p^u \tilde{\Gamma}_\mu(p, 0).$$

Поскольку $\tilde{S}'_F^{-1}(p)$ равна нулю при $\hat{p} = m$, параметр \bar{m} равен

$$\bar{m} = p_\mu \tilde{\Gamma}^\mu(p, 0)|_{\hat{p}=m}. \quad (19.58)$$

Далее, из условия нормировки $\tilde{\Gamma}_\mu$ и из (19.56) заключаем, что

$$z_1 \gamma_\mu = z_1 \Gamma_\mu(p, p)|_{\hat{p}=m} = \tilde{\Gamma}_\mu(p, p)|_{\hat{p}=m}. \quad (19.59)$$

Таким образом, если вершина $\tilde{\Gamma}_\mu$ конечна, то конечны и константы $z_1 = z_2$ и \bar{m} . Поэтому истинно перенормированная теория (с одной тильдой) конечна, если конечна промежуточно-перенормированная теория (с двумя тильдами). Более того, если мы покажем, что $\tilde{\Gamma}_\mu(p', p)$ конечна для евклидовых значений p' и p , то тем самым мы установим конечность этой величины и для физических значений p' и p . Последнее утверждение следует из возможности аналитического продолжения амплитуды от евклидовых значений импульса к физическим их значениям, которая обсуждалась в начале этого параграфа.

В дальнейшем при обсуждении сходимости интегралов мы не будем каждый раз обращаться к утонченному приему аналитического продолжения к евклидовым значениям 4-векторов и последующей промежуточной перенормировке, поскольку эта процедура всегда может быть выполнена в случае необходимости. Отметим еще, что в квантовой электродинамике метод промежуточной перенормировки имеет непосредственное отношение к проблеме инфракрасной расходимости. Поскольку фотон имеет нулевую массу покоя, нормировка волновых функций в точке ветвления (при обычной перенормировке в точке $p^2 = m^2$) представляет с математической точки зрения некорректно поставленную задачу. Мы убедились в этом уже при вычислении собственно-энергетической части второго порядка в (8.40) и при проверке равенства $Z_1 = Z_2$ в (8.42). В обоих случаях мы обнаружили инфракрасные расходимости при $p^2 \rightarrow m^2$. Эти расходимости, однако, не возникают в методе промежуточной перенормировки при $p_\mu \rightarrow 0$.

§ 146. Степень расходимости и критерий сходимости

В настоящем параграфе мы детально рассмотрим вопрос об установлении признака сходимости фейнмановских амплитуд и покажем, как можно устранить расходимости в квантовой электродинамике [65, 66]. В гл. 8 при вычислениях во втором порядке

теории возмущений было обнаружено, что в интегралах для собственной энергии и вершины вопрос о характере сходимости интеграла решается простым подсчетом степеней внутренних импульсов. При этом оказалось, что сумма степеней импульсов в числителе плюс четыре степени от интегрирования по внутреннему импульсу d^4l равна или больше суммы степеней импульсов в знаменателе, в результате все указанные интегралы содержали ультрафиолетовую расходимость при $l_\mu \rightarrow \infty$. После вычитаний эти интегралы приобрели дополнительные импульсы в числителе и в результате оказались сходящимися.

При переходе к высшим порядкам теории возмущений, когда фейнмановские диаграммы содержат несколько независимых контуров интегрирования, возникает вопрос, достаточен ли указанный подсчет степеней внутренних импульсов в числителе и знаменателе интеграла для установления его сходимости. Естественно предположить, что подсчет степеней, по-видимому, все-таки имеет некоторое отношение к вопросу о характере расходимости. Поэтому, желая выяснить общий критерий сходимости, мы детально рассмотрим систематический способ подсчета степеней виртуальных 4-импульсов, входящих в подынтегральные выражения интегралов, отвечающих диаграмме произвольного порядка.

Вначале определим *степень расходимости* графика \mathcal{G} как число степеней внутренних 4-импульсов в числителе (включая четыре степени, отвечающие каждому интегрированию по d^4l) минус число степеней в знаменателе; обозначим степень расходимости через $D(\mathcal{G})$. Пропагаторы каждой внутренней фотонной или бозонной линии содержат импульс в степени -2 , а пропагаторы каждой внутренней электронной или фермионной линии — импульс в степени -1 . Поэтому в квантовой электродинамике имеем

$$D = 4k - 2b - f, \quad (19.60)$$

где b — число *внутренних* фотонных линий, f — число *внутренних* фермионных линий, k — число переменных интегрирования.

Замечательным свойством соотношения (19.60), которым фактически и обусловлена плодотворность метода перенормировок в квантовой электродинамике, является то обстоятельство, что величина D не зависит от внутренней структуры фейнмановских диаграмм, а определяется только числом и сортом (фотоны или электроны) *внешних* частиц. Этот факт непосредственно связан с безразмерностью константы связи e . При этом единственным размерным параметром в теории является масса электрона m , зависимость от которой в ультрафиолетовом пределе $l_\mu \rightarrow \infty$ исчезает. Поэтому вставка в данную фейнмановскую диаграмму все большего и большего числа внутренних фотон-

ных линий не меняет ее размерность. Прямое доказательство сделанного утверждения состоит в следующем. Вставка каждой фотонной линии в диаграмме автоматически влечет за собой вставку двух фермионных линий и дополнительное интегрирование по d^4l . Из (19.60) следует, что полное изменение D равно при этом

$$\Delta D = 4 \Delta k - 2 \Delta b - \Delta f = 4 - 2 - 2 = 0. \quad (19.61)$$

Таким образом, мы подтвердили соображения, основанные на анализе размерностей и устанавливающие, что D зависит только

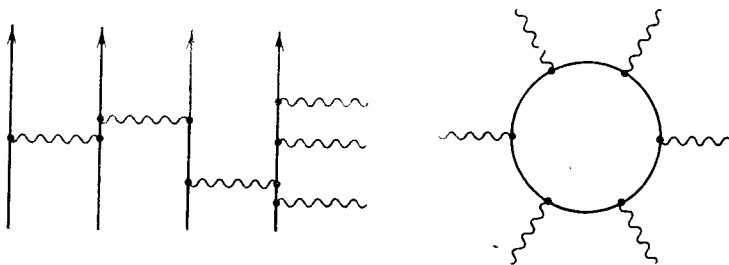


Рис. 19.30. Упрощение компактной диаграммы путем удаления дополнительных линий, которое удобно при вычислении степени расходимости D .

от числа внешних линий. В теориях, содержащих связи с производными и размерные константы связи, изложенные аргументы неприменимы, в таких теориях нарушается также вся схема перенормировок.

Используя (19.61), можно вычислить D для любого компактного графика, последовательно упрощая его до тех пор, пока мы не получим достаточно простой график, например вида, указанного на рис. 19.30. Если теперь добавить к этому графику одну *внешнюю* фотонную линию, то появится дополнительная внутренняя фотонная линия, в результате D увеличится на 1. Отсюда $\partial D / \partial B = -1$, где B — число внешних фотонных или бозонных линий. Точно так же добавление к диаграмме двух внешних фермионных концов влечет за собой появление внутренней фермионной и внутренней фотонной линий. При этом D увеличивается на 3 или, в расчете на одну дополнительную внешнюю фермионную линию F , на $3/2$, т. е. $\partial D / \partial F = -3/2$. Отсюда выводим связь D с числом B и F :

$$D = 4 - \frac{3}{2}F - B, \quad (19.62)$$

где константа, равная 4, получается из рассмотрения любого данного графика. Например, для электромагнитной компактной

вершины в нижайшем порядке по e имеем $F = 2$, $B = 1$ и $D = 0$, поскольку эта вершина сводится к постоянной и не содержит интегрирования по импульсам.

В методе перенормировок мы обычно рассматриваем фейнмановские интегралы с одним или несколькими вычитаниями. Примеры такого рода интегралов встречались при вычислениях в приближении e^2 . В гл. 8 мы убедились, что, вводя каждый раз дополнительные внешние импульсы в числитель подынтегрального выражения, мы зарабатываем дополнительную степень внутренних импульсов в знаменателе. Это, очевидно, справедливо не только для интегралов $\sim e^2$, но и в общем случае; другими словами, справедливо следующее правило: каждое вычитание по отношению к некоторому набору внешних импульсов q_s ведет к уменьшению степени расходимости D этого интеграла на единицу.

Если $D < 0$, то фейнмановский интеграл имеет достаточное число 4-импульсов в знаменателе и на первый взгляд сходится. Однако этот интеграл перестает быть сходящимся, если, например, вставить внутрь диаграммы вершинную часть, хотя при этом D не изменится. Приведенное рассуждение показывает, что условие $D < 0$ для диаграммы в целом, вообще говоря, еще недостаточно для сходимости фейнмановского интеграла; его нужно дополнить требованием конечности интегралов, отвечающих *каждому* из внутренних блоков, которые можно выделить из диаграммы.

Если, с другой стороны, для данной диаграммы $D \geq 0$, то она почти наверняка расходится. В квантовой электродинамике, однако, имеется ограниченное число расходящихся диаграмм, соответствующих следующим значениям неотрицательной степени расходимости D :

- а) электронная компактная собственно-энергетическая часть $\Sigma(p)$ $D = 1$;
- б) компактная вершинная часть $\Gamma_\mu(p', p)$ $D = 0$;
- в) фотонная компактная собственно-энергетическая часть или тензор вакуумной поляризации $\Pi_{\mu\nu}(q)$ $D = 2$;
- г) компактная трехфотонная вершина $D = 1$;
- д) амплитуда рассеяния фотона на фотоне $D = 0$.

Эти диаграммы изображены на рис. 19.31.

В действительности из указанных пяти случаев достаточно рассмотреть только случаи б) и в). Собственная энергия электрона а) определяется через Γ_μ посредством тождества Уорда, и ее можно отдельно не рассматривать. Трехфотонная вершина г) тождественно равна нулю, поскольку она нечетна при зарядовом сопряжении. Напомним в этой связи (см. (15.96) и (15.97)), что в квантовой электродинамике существует унитарный оператор \mathcal{C} , коммутирующий с гамильтонианом, под действием ко-

того электромагнитное поле преобразуется как нечетный оператор:

$$CA_{\mu}(x)C^{-1} = -A_{\mu}(x).$$

Вакуумное состояние, которое, как обычно (см. (16.2)), предполагается единственным, является собственным вектором оператора C , т. е. $C|0\rangle = |0\rangle$, поэтому

$$\begin{aligned} \langle 0|T(A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)A_{\lambda}(z))|0\rangle &= \langle 0|T(CA_{\mu}(x)A_{\nu}(y)A_{\lambda}(z))|0\rangle = \\ &= -\langle 0|T(A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)A_{\lambda}(z))|0\rangle = 0, \end{aligned}$$

и трехфотонная вершина тождественно равна нулю. Обобщение этого результата на случай произвольных замкнутых электронных

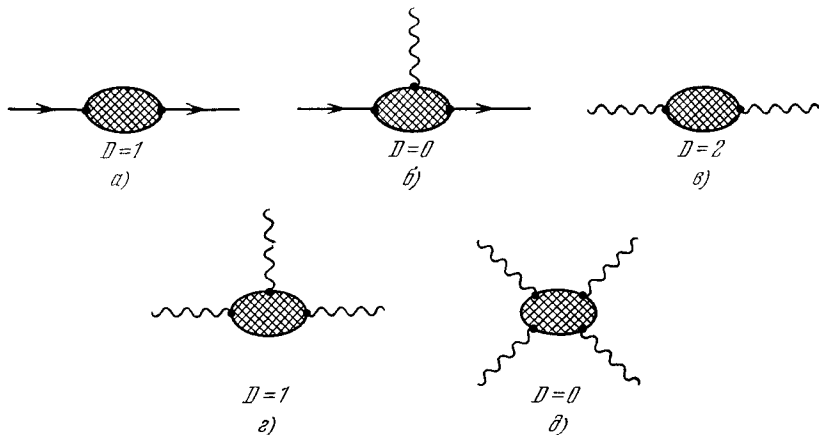


Рис. 19.31. Диаграммы в квантовой электродинамике с неотрицательной степенью расходимости.

петель с нечетным числом фотонных концов (теорема Фарри [117]) было получено в 1937 г.

Хотя для фотонной собственно-энергетической части $D = 2$, квадратично расходящийся член, который следовало бы связать с массой фотона, на самом деле должен быть тождественно приравнен нулю в силу тождества Уорда (см. (19.21) и (19.22)). Две степени импульса в $\Pi_{\mu\nu}(q)$ на самом деле затрачиваются, чтобы образовать тензор $q_{\mu}q_{\nu}$ в (19.51), и не вносят вклада в степень расходимости D на верхнем пределе. В результате $D_{\text{eff}} = 0$ и расходимость $\Pi(q^2)$ всего лишь логарифмическая.

Для амплитуды фотон-фотонного рассеяния (е) ситуация еще лучше. В этом случае четыре внутренних импульса в фейнмановском интеграле затрачиваются, чтобы образовать четыре электромагнитных тензора $F_{\mu\nu}(q) \sim (q_{\mu}\epsilon_{\nu} - q_{\nu}\epsilon_{\mu})$, по одному на

каждый внешний фотон. Это есть следствие требования градиентной инвариантности. В результате эффективная степень расходимости $D_{\text{eff}} = -4$, а не 0, что ведет к конечной (в теории возмущений) амплитуде. Этот вывод был подтвержден Карплусом и Нейманом [118] явным вычислением. Истинное сечение фотон-фотонного рассеяния чрезвычайно мало; при низких энергиях

$$\sigma_{\gamma\gamma} \sim \frac{\alpha^4}{\pi^4} \frac{\omega^6}{m^8}, \quad \omega - \text{энергия в системе центра инерции, } \omega \ll m,$$

при релятивистских энергиях $\omega \gg m$ сечение падает как $1/\omega^2$.

Таким образом, остаются лишь две расходящиеся величины: Γ_{μ} и $\Pi_{\mu\nu}$, которые обе имеют эффективную степень расходимости $D_{\text{eff}} = 0$. Именно с этими двумя величинами и связаны все расходимости в квантовой электродинамике. Напомним, что расходимость Γ_{μ} и $\Pi_{\mu\nu}$ в теории возмущений всего лишь логарифмическая.

Как отмечалось выше, не все амплитуды с $D < 0$ конечны, в действительности любая собственно-энергетическая или вершинная вставка не изменяет D , но приводит к расходимости всей диаграммы. Поэтому необходим более утонченный критерий сходимости, чем простой подсчет степеней. При этом кое-что нужно сказать и об интегрировании по некоторому подклассу внутренних импульсов внутри фейнмановской диаграммы. Указанный критерий был впервые сформулирован Дайсоном [65, 66] в 1949 г., дополнен затем Саламом [112] в 1950 г. и, наконец, строго доказан Вайнбергом [119] в 1960 г. Теорема Вайнберга, к рассмотрению которой мы сейчас приступаем, дает строгий критерий сходимости фейнмановских интегралов и является основой для применения метода перенормировок Дайсона — Салама ¹⁾. Теорема Вайнберга, однако, оказывается полезной не только при обосновании метода перенормировок, эта теорема определяет также, с точностью до степеней логарифмов, асимптотическое поведение фейнмановских интегралов в области, когда любой фиксированный набор внешних импульсов стремится к бесконечности. Здесь мы обсудим только часть, относящуюся к перенормировкам, а рассмотрение асимптотического поведения отложим до § 150.

Чтобы сформулировать и пояснить основные идеи, относящиеся к теореме Вайнберга, необходимо ввести понятие субграфика диаграммы и внутреннего интегрирования. Будем называть *внутренним интегрированием* интегрирование по некоторому набору S внутренних замкнутых контуров l . Часть диаграммы, по-

¹⁾ Между тем Боголюбов с соавторами доказал перенормируемость, используя несколько другую технику (см. [27]).

лученную удалением тех линий, которые не зависят от импульсов l_i , входящих в набор S , будем называть *субграфиком*. Например, диаграмма рис. 19.32 имеет три возможных субграфика, изображенных на рис. 19.33. Эти субграфики отвечают внутреннему интегрированию по l_1 при фиксированном $l_2(a)$, внутреннему интегрированию по l_2 при фиксированном l_1 (б) и, наконец, интегрированию по l_1 при фиксированном $l_1 - l_2$ (в). Мы можем сопоставить каждому субграфик и связанному с ним внутреннему интегрированию свою степень расходимости $D(S)$, которая определяется так же, как степень расходимости диаграммы в целом. В рассмотренном примере $D = -3, 0$ и -5 для субграфиков (а), (б) и (в) соответственно. Следует отметить, что полное вычитание в диаграмме \mathcal{G} , вообще говоря, не уменьшает значения $D(S)$, за исключением случая, когда импульсы, отвечающие внутренним линиям данного субграфика, непосредственно связаны с внешними импульсами в аргументе вычитательного члена.

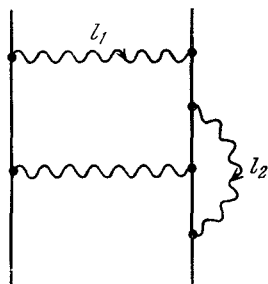


Рис. 19.32. Диаграмма с двумя внутренними импульсами l_1 и l_2 , по которым производится интегрирование.

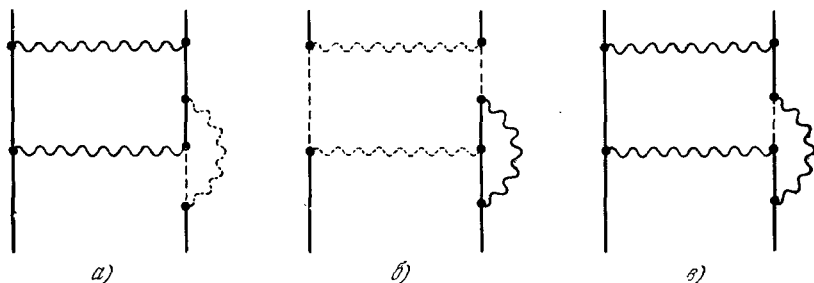


Рис. 19.33. Три субграфика диаграммы на рис. 19.32 с фиксированными импульсами l_2 (а), l_1 (б) и $l_1 - l_2$ (в). Подразумевается, что интегрирование по импульсам пунктирных линий субграфика не производится.

Отметим еще дополнительную проблему, возникающую при попытке приписать степень расходимости какому-либо субграфик и связанную с наличием вычитательных членов в фейнмановских интегралах, которые возникают при разложении перенормированных уравнений (19.51) по степеням ϵ . Напомним, что вычитательные члены необходимы, чтобы удовлетворить условиям (19.51в), (19.51д) и (19.52), которые определяют перенор-

мированные значения $\tilde{\Gamma}_\mu$ и \tilde{D}'_F . Поясним сказанное на примере диаграммы 19.33. Выпишем явно вершинную вставку

$$\tilde{\Gamma}_\mu^{(2)}(p, p+l_1) \sim \int d^4 l_2 \gamma_\nu S_F(p-l_2) \gamma_\mu S_F(p+l_1-l_2) \gamma^\nu D_F(l_2) - \int d^4 l_2 \gamma_\nu S_F(\tilde{p}-l_2) \gamma_\mu S_F(\tilde{p}-l_2) \gamma^\nu D_F(l_2) \Big|_{\tilde{p}=m}.$$

Знаменатель первого члена в этом выражении содержит одну степень импульса l_1 , которая вносит вклад в степень расходимости $D(l_1) = -3$ для внутреннего интегрирования по l_1 . Второй член, однако, не зависит от l_1 , поэтому вклад в степень расходимости, привносимый этим членом, равен $D(l_1) = -2$. В общем случае будем рисовать в диаграммах ящики с пунктирными

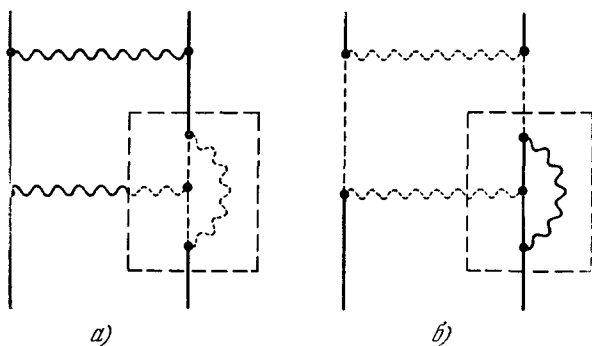


Рис. 19.34. Ящики с пунктирными линиями, окружающие те части двух возможных субграфиков в диаграмме рис. 19.32, которые содержат вычитательные члены.

линиями, окружающие ту часть диаграммы, в которой выполняется вычитание, как это показано на рис. 19.34, а и б. Изображенные там диаграммы представляют собой два единственно возможных субграфика с вычитательными членами в вершине, их степень расходимости равна $D = -2$ и 0 соответственно. Процедура подсчета степени расходимости при внутреннем интегрировании, отвечающем диаграмме с вычитаниями, такова:

1. Нарисуем ящики с пунктирными линиями вокруг всех вершинных и собственно-энергетических вставок с вычитаниями.
2. Для внутреннего интегрирования по импульсам, целиком содержащимся внутри ящика (см., например, рис. 19.34, б) подсчет степеней производится обычным образом.
3. При подсчете же степени расходимости при интегрировании по замкнутому контуру, не содержащемуся целиком внутри ящика (см. рис. 19.34, а), этот ящик следует стянуть в точку и

забыть о нем вообще. Последнее утверждение эквивалентно следующему: часть диаграммы, заключенную внутри ящика с пунктирными линиями, можно не рассматривать, поскольку импульсы линий, входящих и выходящих из этого ящика, фиксированы при вычитании.

Действительно, рассмотрим вычитательные члены в вершинной части и электронной и фотонной собственно-энергетических частях, пропорциональные соответственно γ_μ , \hat{p} и $q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2$. Степени расходимости, отвечающие этим вставкам, равны 0, +1 и +2. Однако эти степени в точности компенсируются при учете фермионных и бозонных пропагаторов, содержащихся в собственно-энергетических вставках, в результате ответ будет такой же, как если бы ящики с пунктирными линиями не учитывать совсем.

Сформулируем теперь теорему Вайнберга: *фейнмановский интеграл сходится, если степень расходимости диаграммы, а также степень расходимости, связанная с каждым субграфиком диаграммы, отрицательна.* По этой теореме диа-

грамма на рис. 19.32 расходится из-за вершинной вставки (рис. 19.33, б) с $D(S) = 0$. После регуляризации вершины путем вычитания ее расходящейся части с $D = 0$ (рис. 19.34, б) (напомним, что от последней можно целиком избавиться, перенормируя вершину) остается лишь конечная часть с $D(S) = -1$; теорема Вайнберга утверждает, что *полный* интеграл, отвечающий диаграмме 19.32, после регуляризации вершины также станет сходящимся.

Обсудим на примере той же диаграммы рис. 19.32 основную идею, лежащую в основе доказательства теоремы Вайнберга. Интегрирование $d^4l_1 d^4l_2$ в этих диаграммах производится по восьмимерному $l_1 - l_2$ -пространству, которое схематически изображено на рис. 19.35. Полная степень расходимости, согласно (19.62), равна $D = -2$; действительно, при интегрировании по радиусу-вектору в $l_1 - l_2$ -пространстве интеграл для большинства направлений ведет себя как

$$I \sim \int \frac{d^8l}{l^{10}},$$

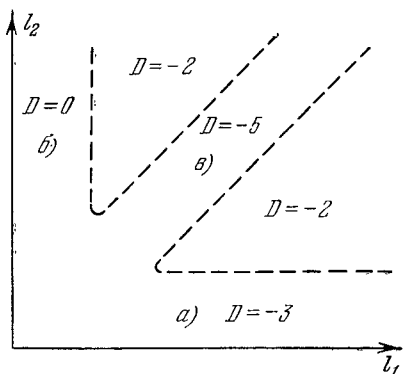


Рис. 19.35. Области в $l_1 - l_2$ -пространстве и соответствующие степени расходимости.

причем фактор l^{10} в знаменателе возникает из четырех фермионных и трех фотонных пропагаторов. Однако можно выделить 4-мерные «трубы» в области интегрирования, в которых подынтегральное выражение ведет себя иначе. Эти трубы отвечают следующим трем областям:

$$\text{а) } l_2 \text{ мало и } I \sim \left(\int_{\text{ограниченная область}} d^4 l_2 \right) \left(\int \frac{d^4 l_1}{l_1^7} \right),$$

$$D(\text{а}) = -3;$$

$$\text{б) } l_1 \text{ мало и } I \sim \left(\int_{\text{ограниченная область}} d^4 l_1 \right) \left(\int \frac{d^4 l_2}{l_2^4} \right),$$

$$D(\text{б}) = 0,$$

$$\text{в) } l_1 - l_2 \text{ мало и } I \sim \left(\int_{\text{ограниченная область}} d^4 (l_1 - l_2) \right) \left(\int \frac{d^4 l_1}{l_1^9} \right),$$

$$D(\text{в}) = -5.$$

Очевидно, внутренние интегрирования по этим областям связаны с субграфиками (а), (б) и (в) на рис. 19.33. Точно так же, субграфики с вычитаниями (рис. 19.34, а и б), отвечают областям

$$\text{а) } l_2 \text{ мало и } I \sim \left(\int_{\text{ограниченная область}} d^4 l_2 \right) \left(\int \frac{d^4 l_1}{l_1^6} \right),$$

$$D(\text{а}) = -2,$$

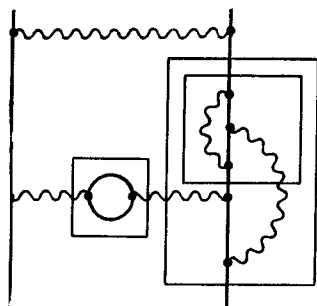
$$\text{б) } l_1 \text{ мало и } I \sim \left(\int_{\text{ограниченная область}} d^4 l_1 \right) \left(\int \frac{d^4 l_2}{l_2^2} \right),$$

$$D(\text{б}) = 0.$$

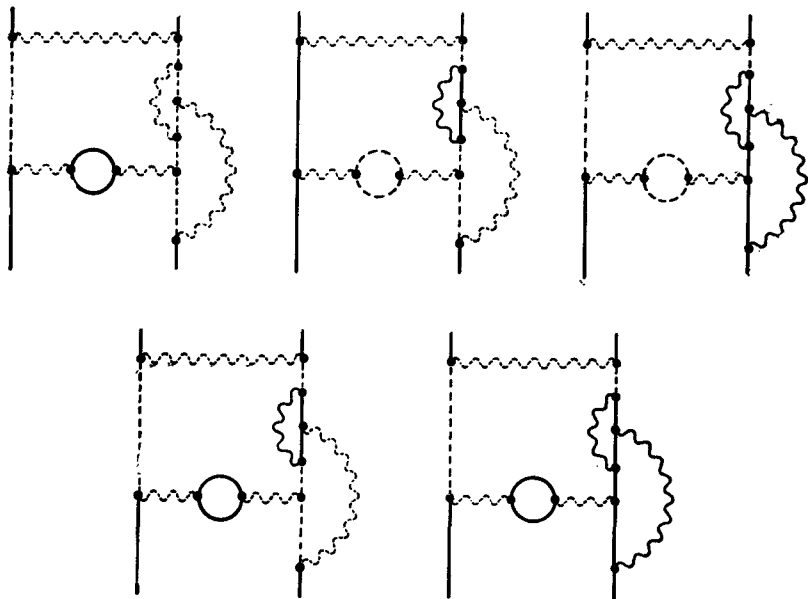
Проблема эффективного разбиения фейнмановского интеграла на части, отвечающие различным областям интегрирования, в каждой из которых интегралы могут быть оценены, в общем случае была решена Вайнбергом. В частности, с помощью теоремы Вайнберга можно строго обосновать оценки интегралов, основанные на вычислении интегралов по конечным областям.

Идеи, рассмотренные в предыдущем примере, можно обобщить и на высшие порядки, что послужит более глубокому пониманию содержания теоремы Вайнберга. Пусть имеется k внутренних импульсов; тогда размерность пространства интегрирования равна $4k$. При интегрировании по радиальному направлению в $4k$ -мерном пространстве подынтегральное выражение ведет себя как l^{D-4k} , где D — полная степень расходимости диаграммы. Однако снова можно выделить «трубы» раз-

личной размерности, отвечающие тем субграфикам, которые содержат пропагаторы, не зависящие от переменных соответствующего внутреннего интегрирования. Эти пропагаторы во всей



а)



б)

Рис. 19.36. Субграфики (б) диаграммы (а), отвечающие расходящимся внутренним интегрированиям.

области интегрирования остаются малыми и не помогают сходимости интеграла в целом. При подсчете степени расходимости $D(S)$ для такой трубы необходимо учитывать только линии,

целиком содержащиеся внутри данного субграфика, а остальные линии не нужно учитывать вообще. Доказательство этого утверждения, данное Вайнбергом, существенно основывается на

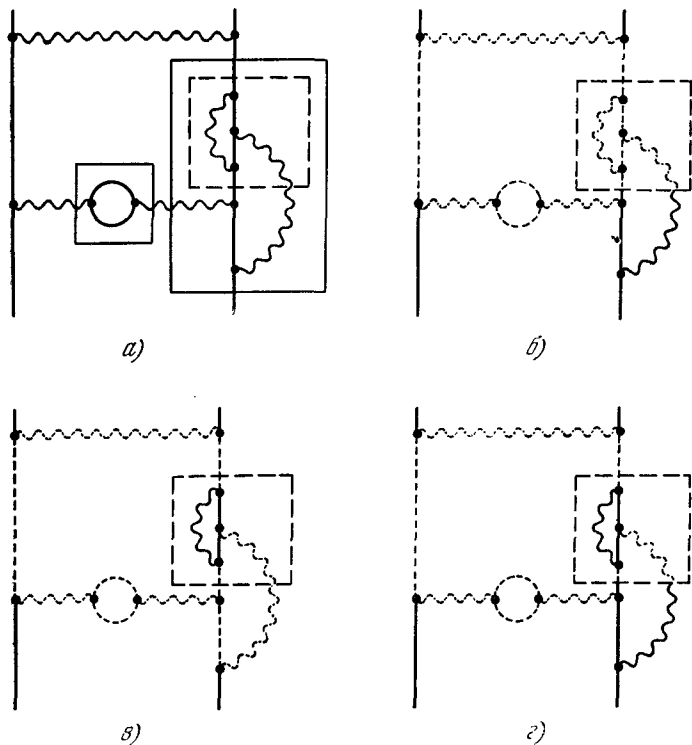


Рис 19.37. Член с вычитанием в вершинной вставке (а) и связанные с ним расходящиеся внутренние интегрирования (б), (в) и (г).

использовании теоремы Гейне — Бореля. За деталями доказательства мы отсылаем интересующегося читателя к оригинальной статье [119].

Теорема Вайнберга позволяет свести задачу установления сходимости членов в перенормированном ряду теории возмущений к выявлению всех субграфиков S , для которых $D(S) \geq 0$. Более того, поскольку, согласно (19.62), неотрицательные степени расходимости имеют только вершинная и собственно-энергетическая вставки, мы можем сразу выделить те субграфики, которые являются потенциальными источниками расходимостей в фейнмановских интегралах. Эти субграфики фактически представляют те части диаграмм, которые в § 140 мы заключали в ящики, выделяя тем самым вершинные и собственно-энергети-

ческие вставки. Как было обнаружено выше, эти вставки можно однозначно определить так, чтобы они не перекрывались. Исключение представляют вставки в собственно-энергетическую часть.

На рис. 19.36, б указаны все субграфики для диаграммы 19.36, а, которым отвечают расходящиеся внутренние интегрирования. Некоторые из этих субграфиков содержат несвязанные диаграммы. Достаточно, однако, рассмотреть только связанные субграфики; действительно, если степень расходимости всех связанных субграфиков отрицательна, то и степень расходимости несвязанных субграфиков тоже отрицательна. Член с вычитанием в вершин-

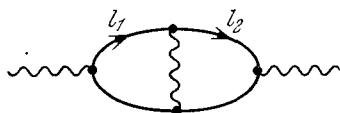


Рис. 19.38. Фотонная собственно-энергетическая диаграмма четвертого порядка

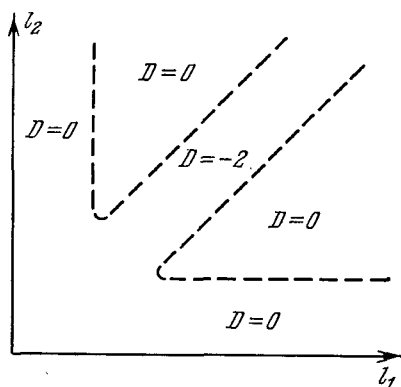


Рис. 19.39. Области в $l_1 - l_2$ -пространстве и соответствующие степени расходимости.

ной функции¹⁾ изображен на рис. 19.37, а. Этот член окружен пунктирной линией, соответствующие расходящиеся внутренние интегрирования указаны на рис. 19.37, б, в и г. Отметим, что внутреннее интегрирование, указанное на рис. 19.37, б, которое сходится в том случае, когда вершина не содержит вычитаний (см. рис. 19.36), с учетом вычитаний расходится, причем расходимость возникает при интегрировании внутри вершинной вставки. Этот результат, очевидно, имеет общий характер: рассуждения на стр. 334 показывают, что вычитания приводят к расходящимся внутренним интегрированиям только в том случае, когда они производятся внутри вершинных и собственно-энергетических вставок.

Отдельная проблема возникает при рассмотрении вершинных субграфиков, перекрывающихся внутри собственно-энергетических частей. Примеры таких субграфиков изображены на рис. 19.38 в случае фотонной собственно-энергетической части четвертого порядка. Полная степень расходимости, согласно (19.62), равна нулю, поскольку две степени импульсов в подын-

¹⁾ Учет субграфиков, содержащих вставку вакуумной поляризации не приводит к каким-либо новым следствиям или проблемам: эти субграфики мы здесь не рассматриваем.

тегральном выражении необходимо изъять для образования тензора $q_\mu q_\nu$ в выражении (19.51) для $\Pi_{\mu\nu}$. Кроме того, существуют

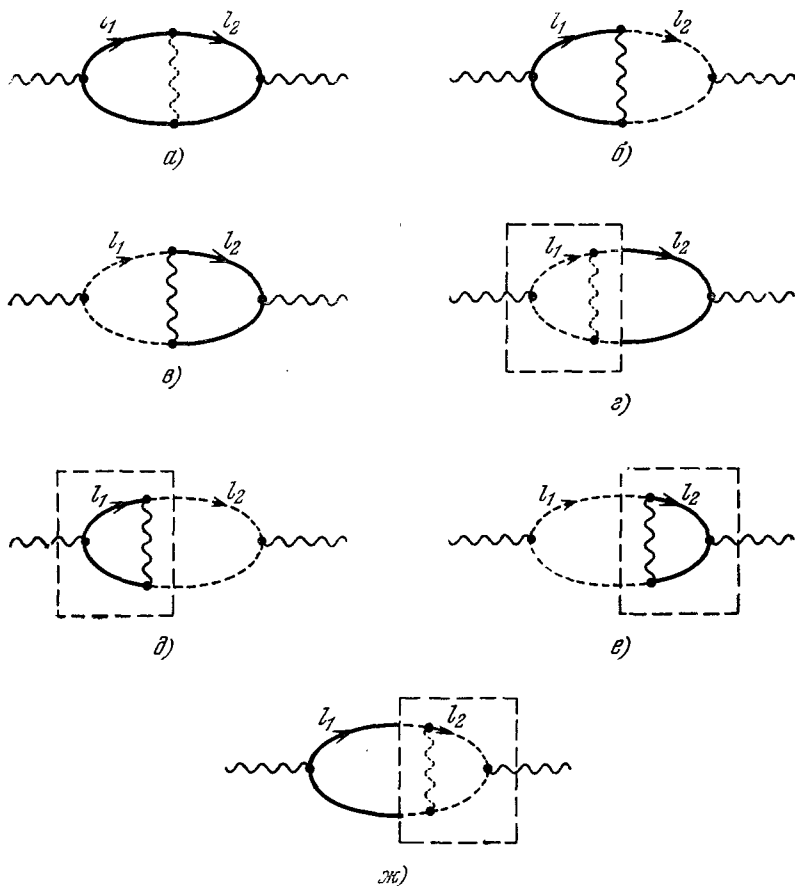


Рис. 19.40 Субграфыки, отвечающие фотонной собственно-энергетической диаграмме четвертого порядка

три области, указанные на рис. 19.39, которым отвечают три субграфыка на рис. 19.40, а, б и в:

- а) $l_1 - l_2$ малó¹⁾, $D(a) = -2$,
 б) l_2 малó, $D(b) = 0$,
 в) l_1 малó, $D(v) = 0$.

¹⁾ Поскольку внешние импульсы могут быть выбраны так, чтобы от них зависел каждый внутренний импульс субграфыка (а), степень расходимости $D(a)$ уменьшается при вычитаниях, содержащих внешние импульсы.

На рис. 19.40 указаны также субграфики (z , d , e и $ж$), зависящие от вычитательных членов, возникающих при перенормировке вершинных вставок. Этим субграфикам отвечают следующие области в $l_1 - l_2$ -пространстве

- z) l_1 малó, $D(z) = 0$,
- d) l_2 малó, $D(d) = 0$,
- e) l_1 малó, $D(e) = 0$,
- $ж$) l_2 малó, $D(ж) = 0$.

При вычитании расходящихся выражений в вершинных функциях степень расходимости каждого из указанных субграфиков становится отрицательной. Точно так же после вычитания в собственно-энергетических частях становится отрицательной и полная степень расходимости всей диаграммы. Детальное обсуждение случая перекрывающихся расходимостей впервые было дано Саламом [112].

§ 147. Доказательство конечности перенормируемой теории

Мы можем теперь приступить к доказательству конечности S -матрицы в квантовой электродинамике в любом порядке разложения по перенормированному заряду e . Итерация уравнений (19.51) позволяет вычислить перенормированные функции $\tilde{\Gamma}_\mu$, \tilde{S}'_F , \tilde{D}'_F и $\tilde{\tau}$ и S -матричные элементы в виде рядов по степеням e , при этом в каждом порядке по e результат выражается конечной суммой фейнмановских интегралов. Вопрос о сходимости этих интегралов решается с помощью теоремы Вайнберга, а именно: интеграл, отвечающий данной диаграмме, сходится, если степени расходимости всех субграфиков, равно как и степень расходимости диаграммы в целом, отрицательны.

Наше доказательство основано на методе математической индукции. В нижайшем порядке по e^2 , как было проверено в гл. 8 явным вычислением, степени расходимости функций $\tilde{\Gamma}_\mu$ и $\Pi_c(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0)$ отрицательны, поэтому эти величины определяются сходящимися (т. е. не зависящими от обрезания) интегралами. Аналогичное утверждение справедливо для функций \tilde{S}'_F и \tilde{D}'_F , которые выражаются через $\tilde{\Gamma}_\mu$ и $\Pi_c(q^2)$. Предположим, что сделанные утверждения справедливы с точностью до членов порядка $n - 2$, т. е. предположим, что в порядке $n - 2$ степени расходимости всех субграфиков в $\tilde{\Gamma}_\mu$ и $\Pi_c(q^2)$ отрицательны, и потому эти величины, а также \tilde{S}'_F и \tilde{D}'_F конечны. Далее, итерируя уравнения (19.51) и используя теорему Вайнберга, мы покажем, что сделанные утверждения справедливы

с точностью до членов порядка n . Тем самым мы установим тот факт, что S -матричные элементы конечны в любом порядке по заряду e .

Начнем с рассмотрения скелетных разложений (19.51a) и (19.51б) для функций $\tilde{\tau}$ (с четырьмя и более внешними линиями) и для ядра \tilde{K} . При вычислении функций $\tilde{\tau}$ и \tilde{K} в данном порядке по e их скелетные разложения содержат конечное число диаграмм. Более того, поскольку функции \tilde{K} и $\tilde{\tau}$ включают по крайней мере две вершины взаимодействия, то они являются величинами порядка по крайней мере e^2 (при $e^2 \rightarrow 0$). Поэтому при вычислении $\tilde{\tau}$ и \tilde{K} в приближении e^n достаточно рассмотреть пропагаторы и вершинные функции, перенормированные лишь в приближении e^{n-2} . Так как скелетные разложения (19.51a) и (19.51б) содержат перенормированные вершинные и собственно-энергетические части, а последние, в силу предположения индукции, конечны в приближении e^{n-2} , мы видим, что соответствующие вставки S в диаграммы n -го порядка имеют $D(S) < 0$. Так как субграфики S с $D(S) > 0$ могут возникать только от вершинных и собственно-энергетических частей¹⁾, функции $\tilde{\tau}$ и \tilde{K} в n -м порядке вообще не содержат расходящихся субграфиков. Далее, заметим, что $\tilde{\tau}$ и \tilde{K} не содержат расходящихся внутренних интегрирований, связанных с вычитательными членами в $\tilde{\Gamma}_\mu$, $\Pi_c(q^2)$, \tilde{S}'_F и \tilde{D}'_F , поскольку, как было отмечено ранее, указанные расходимости могут возникать только в том случае, когда соответствующий субграфик целиком лежит внутри некоторой вершинной или собственно-энергетической части. Что же касается полной степени расходимости интегралов для $\tilde{\tau}$ -функций и ядра \tilde{K} , то она заведомо отрицательна, поскольку сомнительным преимуществом иметь $D > 0$ обладают только вершинная и собственно-энергетическая функции (см. § 146). Приведенные рассуждения показывают, что функции \tilde{K} и $\tilde{\tau}$ и S -матричные элементы конечны в порядке e^n , так как в указанном порядке эти величины содержат конечное число диаграмм \mathcal{G} с $D(\mathcal{G}) < 0$, все субграфики S которых также имеют отрицательную степень расходимости $D(S) < 0$.

Наше доказательство, однако, не закончено, поскольку остается еще установить конечность функций $\tilde{\Gamma}_\mu$ и $\Pi_c(q^2)$ или \tilde{D}'_F в порядке e^n , что удобно сделать с помощью уравнений

¹⁾ Принимая во внимание градиентную инвариантность квантовой электродинамики, мы можем снова не рассматривать блоки фотон-фотонного рассеяния. Эти блоки в произвольной диаграмме можно выделить однозначным образом, причем соответствующие субграфики не перекрываются (что можно показать способом, аналогичным изложенному в § 141). При суммировании диаграмм с четырьмя внешними фотонными линиями, отличающихся перестановкой фотонов, эффективная степень расходимости уменьшается с $D = 0$ до $D = -4$.

(19.51в) и (19.51е). В силу тождества Уорда конечность \tilde{S}'_F следует из уравнения (19.51г), коль скоро доказана конечность $\tilde{\Gamma}_\mu$.

Для вычисления $\tilde{\Gamma}_\mu$ в n -м порядке подставим в (19.51в) функции \tilde{S}'_F , $\tilde{\Gamma}_\mu$ и \tilde{K} , вычисленные с точностью до e^{n-2} :

$$\int \tilde{S}'_F{}^{(n-2)} \tilde{\Gamma}_\mu^{(n-2)} \tilde{S}'_F{}^{(n-2)} \tilde{K}^{(n-2)} = Z_1^{(n)} \gamma_\mu - \tilde{\Gamma}_\mu^{(n)} = -\Lambda_\mu^{(n)}, \quad (19.63)$$

где значок n указывает порядок по e , в котором производятся вычисления. Наша задача заключается в том, чтобы показать, что после одного вычитания, которое необходимо для перенормировки вершины $\tilde{\Gamma}_\mu$, функция $\Lambda_\mu^{(n)}$ остается конечной, т. е. что выражение

$$\Lambda_\mu^{c(n)}(p', p) = \Lambda_\mu^{(n)}(p', p) - \Lambda_\mu^{(n)}(p, p) \Big|_{p=m}$$

представляется суммой не зависящих от обрезания интегралов. Чтобы применить теорему Вайнберга, выясним вначале, может ли какой-либо субграфик в (19.63) иметь отрицательную степень расходимости. Согласно гипотезе индукции субграфики с $D(S) \geq 0$ не содержатся в членах порядка e^{n-2} , относящихся к вершине $\tilde{\Gamma}_\mu$ ¹⁾, пропагаторам \tilde{S}'_F и ядру \tilde{K} . Поэтому остается рассмотреть только те внутренние интегрирования \mathcal{L} , которые содержат импульс l пропагаторов \tilde{S}'_F (рис. 19.41).

Два электронных пропагатора в субграфике рис. 19.41, а приносят по крайней мере две степени импульса в знаменателе. Поэтому этот субграфик расходится только в том случае, когда часть его, относящаяся к ядру \tilde{K} , имеет степень расходимости $D(\tilde{K}) \geq -2$. Посмотрим, в каком случае это может быть. Подозрительными с указанной точки зрения являются, во-первых, диаграммы нижайшего порядка, а во-вторых диаграммы, содержащие вычитания (см. рис. 19.41, б). Все эти диаграммы имеют $D(\tilde{K}) = -2$. Кроме того, возникают аналогичные диаграммы высших порядков, в которых *все* линии, входящие в \tilde{K} , относятся к рассматриваемому субграфу (за исключением, быть может, тех, которые целиком лежат внутри ящика, отвечающего вычитаниям). Эти диаграммы, согласно правилу подсчета степеней (19.62), также имеют $D(\tilde{K}) = -2$. Далее рассмотрим субграфики, содержащиеся в \tilde{K} с $D(\tilde{K}) \geq -2$ и не содержащие безвредных вычитательных членов. Степень расходимости таких субграфиков нельзя понизить, делая полное вычитание

¹⁾ Напомним, что выражение (19.63) содержит сумму *конечного* числа фейнмановских диаграмм, каждая из которых в свою очередь содержит *конечное* число вершинных и собственно-энергетических вставок.

в (19.63). Примеры этих субграфиков изображены на рис. 19.42, а, они отвечают случаю, когда ядро разбивается на две части A и B , причем блок A содержит все линии субграфика ¹⁾ \mathcal{L} , в то время как остальные линии ²⁾ либо содержатся в B , либо соединяют блоки A и B . Субграфик \mathcal{L} , очевидно, расходится только в том случае, когда вклад в $D(\mathcal{K}) = -2$ дают

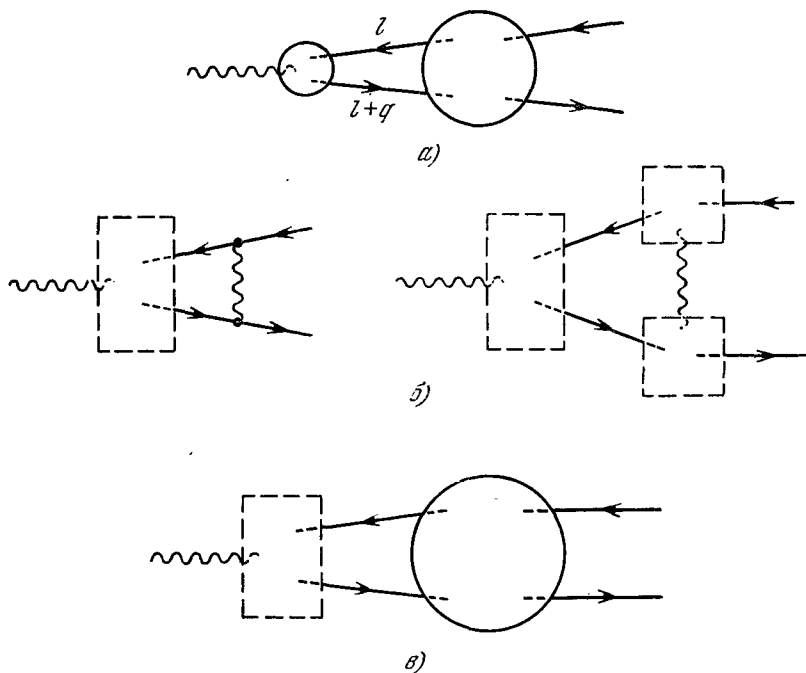


Рис. 19.41. Внутренние интегрирования в вершине, содержащие импульсы l пропагаторов S_F .

линии из блока A , однако правило подсчета степеней показывает, что это невозможно. Действительно, степень расходимости $D(\mathcal{K}) \geq -2$ имеют только диаграммы, в которых блоки A и B соединяются либо двумя фермионными линиями, либо одной, двумя или тремя фотонными линиями. Случай двух фермионных и одной фотонной линии исключается, поскольку такие графики не содержатся в определении \mathcal{K} (см. рис. 19.11). Диа-

¹⁾ Легко показать, что случай, когда все внешние линии присоединяются к блоку A , можно не рассматривать.

²⁾ При этом нужно рассматривать только связанные субграфики (см. стр. 339).

грамма с двумя фотонами равна нулю в силу зарядовой инвариантности, поскольку, являясь частью вершинной функции, она сводится к замкнутой петле с тремя внешними фотонными линиями. Наконец, в последнем случае диаграммы с тремя фотонными линиями, указанном на рис. 19.42, б, полная степень

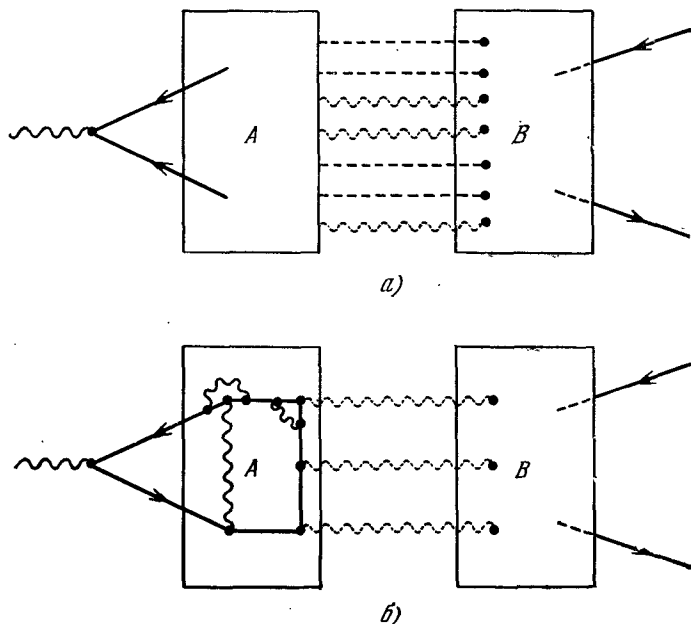


Рис. 19.42 Потенциальные опасные субграфики.

расходимости понижается на четыре единицы, что связано с обсуждавшимся ранее законом сохранения тока¹⁾.

Таким образом, мы убедились в том, что субграфики \mathcal{L} , содержащие ядро R , все имеют $D(\mathcal{L}) \leq -2$, причем степень расходимости $D(R) = -2$ имеют только те диаграммы, которые целиком содержатся в R (за исключением диаграмм, содержащихся внутри блоков с вычитаниями). Поэтому, в том случае, когда субграфик \mathcal{L} расходится, вклад в степень расходимости его части, заключенной внутри вершины $\tilde{\Gamma}_\mu^{(n-2)}$, равен нулю. По гипотезе индукции, однако, все внутренние интегрирования внутри $\tilde{\Gamma}_\mu^{(n-2)}$ имеют $D < 0$, в результате мы приходим к единственной возможности: субграфик \mathcal{L} вообще не содержит

¹⁾ При этом, конечно, нужно включить субграфики фотон-фотонного рассеяния, необходимые для обеспечения градиентной инвариантности полной амплитуды.

линий, относящихся к $\tilde{\Gamma}_\mu^{(n-2)}$. Поэтому этот субграфик может только целиком лежать внутри блока с вычитаниями (см. рис. 19.41, в). После вычитания в (19.63), которое затрагивает все линии ядра K , его степень расходимости уменьшается на единицу. При этом уменьшается также на единицу и полная степень расходимости, поэтому, согласно теореме Вайнберга, величина ¹⁾

$$\Lambda_\mu^c{}^{(n)}(p', p) = \Lambda_\mu^{(n)}(p', p) - \Lambda_\mu^{(n)}(p, p)|_{\beta=m} \quad (19.64)$$

однозначно определена и не зависит от обрезания. Так как по построению

$$\Lambda_\mu^c{}^{(n)}(p, p)|_{\beta=m} = 0 \quad \text{и} \quad \Lambda_\mu^{(n)}(p, p)|_{\beta=m} = L^{(n)}\gamma_\mu, \quad (19.65)$$

где $L^{(n)}$ — константа, зависящая от обрезания, из (19.52) и (19.63) получаем

$$Z_1^{(n)} = 1 - L^{(n)} \quad (19.66)$$

с точностью до членов порядка e^n . Следовательно, в указанном порядке

$$\tilde{\Gamma}_\mu^{(n)}(p', p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu^c{}^{(n)}(p', p)$$

конечная величина. Согласно (19.51г) то же относится и к электронному пропагатору \tilde{S}'_F .

Все, что нам теперь осталось, это обсуждение вакуумной поляризации $\Pi_c(q^2)$. Этот случай более труден для рассмотрения ввиду проблемы перекрывающихся расходимостей. Как было показано в § 141, ящики, окружающие вершинные части, могут перекрываться в том случае, когда они находятся внутри собственно-энергетических вставок. Указанная трудность, остававшаяся долгое время в тени, теперь выходит на передний план. Типичный пример графика вакуумной поляризации изображен на рис. 19.43. На этом рисунке расходятся те субграфики, которые либо сводятся к вершинным вставкам в конце диаграммы, либо перекрываются. Очевидно, что указанные субграфики нельзя выделить по отдельности, один за другим. Кроме того, ряд субграфиков, сходящихся до вычитаний, при учете вычитаний становится расходящимся — такие субграфики получаются заменой одного или нескольких ящиков на рис. 19.43 ящиками с пунктирными линиями²⁾. Необходимо поэтому тщательно рассмотреть указанные субграфики и показать, что все они

¹⁾ Напомним, что условие $|\beta=m$ означает, что β , действуя направо, дает m .

²⁾ При этом ящики с пунктирными линиями можно считать неперекрывающимися.

имеют отрицательную степень расходимости. Для функции \tilde{S}'_F аналогичное рассмотрение не нужно, поскольку в этом случае можно использовать тождество Уорда. При обсуждении же функции Π_c нам предстоит выдержать настоящее сражение с проблемой перекрывающихся расходимостей, которое мы предвидели заранее, когда вводили ядро K .

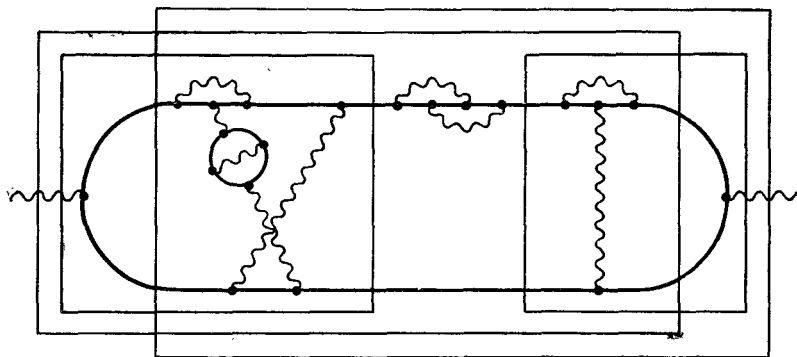


Рис. 19.43. Диаграмма вакуумной поляризации.

Эффект перекрывающихся расходимостей приводит к тому, что в уравнении (19.51e) исчезает множитель Z_1 . Чтобы показать, как это происходит, вернемся к уравнению (19.51в), выразим из него $Z_1\gamma^\mu$ и подставим в (19.51e). В сокращенной записи получим¹⁾

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{\Gamma}_\nu + i \int \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{\Gamma}_\nu. \quad (19.67)$$

Покажем, что сумма двух членов в правой части (19.67) не содержит перекрывающихся расходимостей (эту сумму более естественно записывать в виде разности, вводя каждый раз вместо \tilde{S}'_F комбинацию $(i\tilde{S}'_F)$, как это предписывается фейнмановскими правилами). С этой целью полезно построить итерационный ряд для вершинных вставок, содержащий разложение по степеням ядра \tilde{K} , а не e^2 . В нулевом приближении $\Gamma_{(0)}^\mu \approx \gamma^\mu$, в первом приближении из (19.51в) получаем

$$\tilde{\Gamma}_{(1)}^{\mu\lambda} = Z_{1(1)}\gamma^\mu - \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K}. \quad (19.68)$$

¹⁾ Порядок спиновых индексов и аргументы в (19.69) легко могут быть восстановлены в случае необходимости из уравнений (19.51в) и (19.51e).

Субграфики в (19.68) сходятся по тем же причинам, что и субграфики в (19.63). Исключения составляют субграфики, отвечающие блокам фотон-фотонного рассеяния, сходящиеся только после сложения всех членов, отвечающих различным порядкам в итерации по степеням ядра \tilde{K} . На рис. 19.44 показан пример, в котором необходимо учесть две итерации по степеням e . Однако графики фотон-фотонного рассеяния можно здесь вообще не рассматривать. Действительно, в полном разложении по степеням e можно однозначно выделить набор субграфиков,

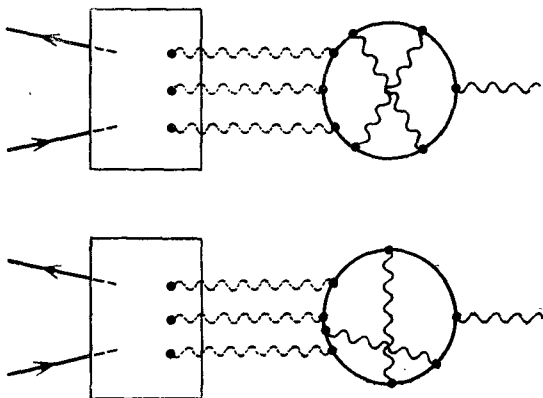


Рис. 19.44. Примеры субграфиков фотон-фотонного рассеяния, отвечающие различным порядкам в итерации по степеням \tilde{K}

содержащих диаграммы фотон-фотонного рассеяния, в которых расходящиеся члены сокращаются, и полная эффективная степень расходимости которых $D_{\text{eff}} = -4$, причем сказанное относится к вставкам фотон-фотонного рассеяния как в вакуумную поляризацию, так и в вершинную функцию.

Таким образом, в дальнейшем мы можем забыть о фотон-фотонных вставках и сосредоточить все внимание на более запутанной картине вершинных субграфиков. Здесь и ниже мы используем термин «сходящийся» субграфик в смысле «сходящийся по отношению к внутреннему интегрированию в вершине». Отдельные члены в разложении на самом деле могут расходиться из-за вставок блоков фотон-фотонного рассеяния и сходятся лишь после сложения всех членов в данном порядке по e , но различных порядков по \tilde{K} . Все это не имеет отношения к тому, что мы собираемся делать, поскольку нашей задачей является применение критерия Вайнберга к каждой диаграмме *в отдельности*. При этом поведение подынтегрального

выражения по отношению к остальным внутренним интегрированиям можно не рассматривать¹⁾.

Вернемся к выражению (19.68). Согласно гипотезе индукции ядро \tilde{K} в порядке e^n не содержит расходящихся субграфиков. Анализ, проведенный на стр. 334 с некоторыми, отмеченными выше оговорками, применим также к функции \tilde{S}'_F . Поэтому одно вычитание в (19.68) приводит к сходящемуся результату:

$$-\int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} = L_1 \gamma^\mu + \Lambda_1^\mu(\rho', \rho), \quad (19.69)$$

где $\Lambda_1^\mu(\rho', \rho)$ — «конечная» с точностью до членов первого порядка по \tilde{K} величина. Вычитание делается, как обычно²⁾, при $\hat{\rho}' = \hat{\rho} = m$, так что*

$$\Lambda_1^\mu(\rho, \rho)|_{\hat{\rho}=m} = 0. \quad (19.70)$$

Тогда в (19.68) в первом порядке по \tilde{K} имеем

$$\tilde{\Gamma}_{(1)}^\mu(\rho', \rho) = (Z_{1(1)} + L_1) \gamma^\mu + \Lambda_1^\mu(\rho', \rho), \quad (19.71)$$

где, согласно условию нормировки (19.52),

$$Z_{1(1)} = 1 - L_1. \quad (19.72)$$

Подставляя (19.71) обратно в (19.51в), получим во втором порядке по \tilde{K}

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{(2)}^\mu(\rho', \rho) &= Z_{1(2)} \gamma^\mu - \int [\gamma^\mu + \Lambda_1^\mu(\rho', \rho)] \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} = \\ &= Z_{1(2)} \gamma^\mu + L_1 \gamma^\mu + \Lambda_1^\mu(\rho', \rho) - \int \Lambda_1^\mu(\rho', \rho) \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K}. \end{aligned}$$

По аналогии с (19.69) имеем

$$-\int \Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} = L_2 \gamma^\mu + \Lambda_2^\mu(\rho', \rho),$$

где $\Lambda_2^\mu(\rho, \rho)|_{\hat{\rho}=m} = 0$.

¹⁾ Читателю следует ясно осознать все разнообразие вопросов, которые необходимо выяснить при исчерпывающем обсуждении проблемы перенормировок. Это является отличительной чертой всех доказательств путем «перебирания всех возможностей». Можно было бы, как это часто делают многие авторы, не рассматривать некоторые специальные случаи вообще. Аналогичная ситуация возникает при построении общего вида амплитуды, совместного с заданными требованиями симметрии с привлечением аргументов типа «что еще может быть?». Если вы при этом не будете достаточно внимательны, всегда найдется некто, который укажет вам то, что вы упустили.

²⁾ См. § 143.

Используя те же аргументы, что и в предыдущем случае, можно убедиться в том, что функция $\Lambda_2^\mu(p', p)$ конечна и что во втором порядке по \mathcal{R}

$$\tilde{\Gamma}_{(2)}^\mu(p', p) \approx \gamma^\mu + \Lambda_1^\mu(p', p) + \Lambda_2^\mu(p', p)$$

и $Z_{1(2)} \approx 1 - L_1 - L_2$.

Очевидно, что после n итераций мы получим

$$\tilde{\Gamma}_{(n)}^\mu(p', p) = \gamma^\mu + \sum_{i=1}^n \Lambda_i^\mu(p', p), \quad (19.73)$$

где

$$Z_{1(n)} = 1 - \sum_{i=1}^n L_i, \quad \Lambda_i^\mu(p, p)|_{p=m} = 0 \quad (19.74)$$

и

$$-\int \Lambda_i^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} = L_{i+1} \gamma^\mu + \Lambda_{i+1}^\mu, \quad \Lambda_0^\mu \equiv \gamma^\mu. \quad (19.75)$$

Таким образом, мы получили для $\tilde{\Gamma}^\mu(p', p)$ ряд сходящихся интегралов. Роль констант L_i , через которые определяется константа перенормировки Z_1 , заключается в устранении расходимости в полном вершинном интеграле (19.75), для которого

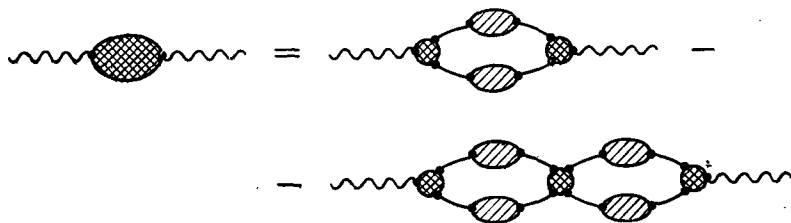


Рис. 19.45. Диаграммное разложение для $\Pi^{\mu\nu}(q)$.

$D = 0$, а также в расходящихся субграфиках, связанных с теми вычитательными членами, которые целиком содержатся внутри этого интеграла. Подставим теперь (19.73) в выражение (19.67) для $\Pi^{\mu\nu}(q)$, в результате получим графическое разложение, изображенное на рис. 19.45. Нашей задачей является показать, что в каждом члене этого разложения все внутренние интегрирования дают конечный результат. Тогда, используя теорему Вайнберга, мы получим, что полное вычитание в (19.51e) приводит к тому, что функция $\Pi_c(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0)$ конечна и определяется интегралом, эффективная степень расходимости которого равна $D = -1$.

Подставив (19.73) в (19.67), сгруппируем члены, содержащие одну и ту же степень \tilde{K} ; тогда получим

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= i \int [\gamma^\mu + \Lambda_1^\mu + \Lambda_2^\mu + \dots] \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \times \\ &\times [1 + \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F] [\gamma^\nu + \Lambda_1^\nu + \dots] = \Pi_0^{\mu\nu} + \Pi_1^{\mu\nu} + \Pi_2^{\mu\nu} + \dots, \end{aligned} \quad (19.76)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_0^{\mu\nu} &= i \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \gamma^\nu, \\ \Pi_1^{\mu\nu} &= i \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_1^\nu + i \int \Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \gamma^\nu + i \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \gamma^\nu, \\ \Pi_n^{\mu\nu} &= i \sum_{r+s=n} \int \Lambda_r^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_s^\nu + i \sum_{r+s=n-1} \int \Lambda_r^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_s^\nu. \end{aligned} \quad (19.77)$$

Каждый график в $\Pi_n^{\mu\nu}$ содержит n итераций ядра \tilde{K} , как это показано на рис. 19.46. В силу (19.75) Λ_r^μ содержит r итераций ядра \tilde{K} , поэтому каждый член в правой части (19.77) содержит ядро \tilde{K} n раз.

Чтобы убедиться в том, что $\Pi_c(q^2)$ сходится, необходимо показать, что степени расходимости всех субграфиков, входящих в Π_c , отрицательны. По гипотезе индукции те субграфики, которые целиком содержатся внутри Λ^μ или \tilde{K} , сходятся. Поэтому любой расходящийся субграфик с необходимостью содержит некоторую совокупность внутренних линий, принадлежащих \tilde{S}'_F (см. рис. 19.46). Обозначим импульсы, относящиеся к этим линиям, через l_i . Назовем далее внутреннее интегрирование, относящееся к субграфику, целиком содержащемуся в первом ящике, l_1 -интегрированием, внутреннее интегрирование в субграфику, содержащемся во втором ящике — $l_1 l_2$ -интегрированием и т. д. Точно так же определим, например, $l_2 l_3$ -, $l_2 l_3 l_4$ -интегрирования. При этом, однако, рассматривать интегрирования вида $l_1 l_2 l_4 l_5$ не нужно, поскольку соответствующие субграфики не связаны. Выписав явно импульс l_i и опустив обозначения всех остальных импульсов в \tilde{K} и Λ^μ , а также спиновые индексы, перепишем (19.77) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi_n^{\mu\nu}(q) &= i \sum_{r+s=n} \int \frac{d^4 l_{r+1}}{(2\pi)^4} \Lambda_r^\mu(l_{r+1} + q, l_{r+1}) \times \\ &\quad \times \tilde{S}'_F(l_{r+1}) S'_F(l_{r+1} + q) \Lambda_s^\nu(l_{r+1}, l_{r+1} + q) + \\ &+ i \sum_{r+s=n-1} \int \frac{d^4 l_{r+1} d^4 l_{r+2}}{(2\pi)^4 (2\pi)^4} \Lambda_r^\mu(l_{r+1} + q, l_{r+1}) \tilde{S}'_F(l_{r+1}) \tilde{S}'_F(l_{r+1} + q) \times \\ &\quad \times \tilde{K} \tilde{S}'_F(l_{r+2}) \tilde{S}'_F(l_{r+2} + q) \Lambda_s^\nu(l_{r+2}, l_{r+2} + q). \end{aligned} \quad (19.78)$$

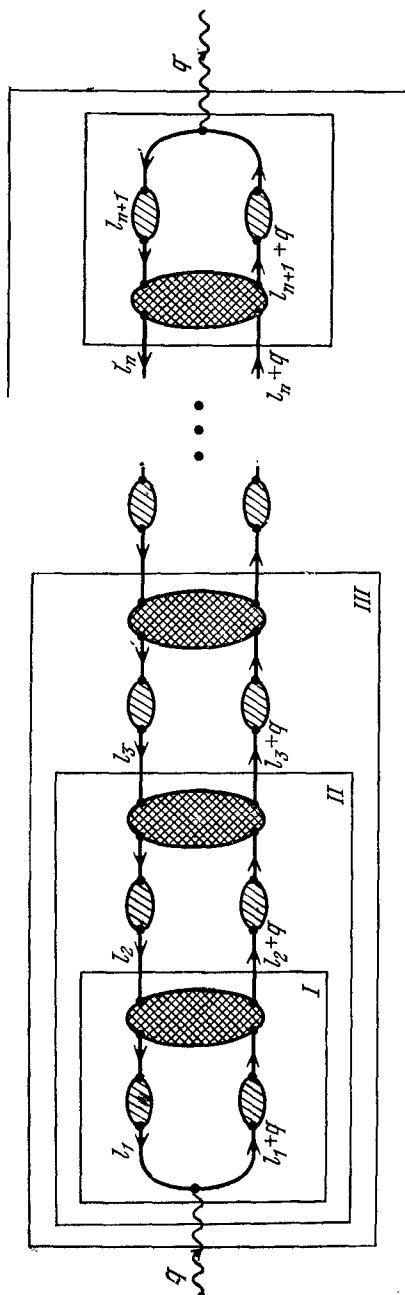


Рис. 19.46. Субграфы, содержащие импульсы l_i электронных пропагаторов $S_F(l_i)$.

Рассмотрим вначале l_1 -интегрирование. В этом случае достаточно рассмотреть только член с $r = 0$ и $\Lambda_0^\mu = \gamma^\mu$, поскольку при $r \geq 1$ график, отвечающий l_1 -интегрированию, целиком содержится *внутри* $\Lambda_s^\mu(l_{r+1}, l_{r+1} + q)$ и по построению сходится (см. (19.73)). Подозрительный член в (19.78) с $r = 0$ в символических обозначениях равен

$$i \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_n^\nu + i \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-1}^\nu = -i \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \gamma^\nu L_n = \\ = -i \int \frac{d^4 l_1}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \tilde{S}'_F(l_1) \tilde{S}'_F(l_1 + q) \gamma^\nu L_n, \quad (19.79)$$

где мы использовали (19.75). Константа вычитания L_n , хотя и расходится, не имеет отношения к вопросу о сходимости l_1 -интегрирования, поскольку эта константа представляет интеграл, зависящий от остальных переменных l_2, \dots, l_n . Интеграл в (19.79), как и следует ожидать, имеет $D = +2$. Однако после вычитания двух степеней импульсов, необходимых для воссоздания тензорной структуры $q_\mu q_\nu$, эффективная степень расходимости понижается до $D = 0$. Образовав разность $\Pi_c(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0)$ (см. (19.51e)), мы понижаем D до -1 . В результате приходим к выводу, что l_1 -интегрирование сходится, поскольку сходятся все внутренние интегрирования, содержащиеся в функции \tilde{S}'_F в (19.79).

Перейдем к обсуждению $l_1 l_2$ -интегрирования. По аналогии с предыдущим случаем достаточно рассмотреть только члены с $r = 0$ и 1 , поскольку для $r \geq 2$ $l_1 l_2$ -интегрирование целиком содержится *внутри* Λ_r^μ и тем самым автоматически сходится.

Соответствующие члены в (19.77) равны

$$i \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_n^\nu + i \int \Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-1}^\nu + \\ + i \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-1}^\nu + i \int \Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-2}^\nu = \\ = -i \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \gamma^\nu L_n - i \int \Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \gamma^\nu L_{n-1},$$

где снова учтено выражение (19.75). Выписав явно аргументы импульсов и опустив спинорные индексы, получим

$$i \int \frac{d^4 l_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l_2}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \tilde{S}'_F(l_1) \tilde{S}'_F(l_1 + q) \times \\ \times [\tilde{K}(\tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p} - l_2) \tilde{S}'_F(l_2) \tilde{S}'_F(l_2) \Lambda_{n-1}^\nu(l_2, l_2)]_{\tilde{p}=m} - \\ - i \int \frac{d^4 l_2}{(2\pi)^4} \Lambda_1^\mu(l_2 + q, l_2) \tilde{S}'_F(l_2) \tilde{S}'_F(l_2 + q) \gamma^\nu L_{n-1}, \quad (19.80)$$

В (19.80) явно выписан расходящийся интеграл по l_2 . При подсчете степеней импульсов при l_1 -интегрировании из первого члена нужно вычесть 2 (по тем же причинам, что и в предыдущем случае) и еще 1, отвечающую полному вычитанию¹⁾ содержащемуся в $\Pi_c(q^2)$. При подсчете числа степеней импульса l_2 в выражении, заключенном в квадратную скобку, мы можем быть заранее уверены в том, что соответствующая степень расходимости неположительна, поскольку это выражение сводится к вершинной вставке²⁾. В результате степень расходимости для $l_1 l_2$ -интегрирования в первом члене не превосходит -1 . Точно так же полное вычитание во втором члене понижает указанную степень расходимости по крайней мере до -1 . Следует подчеркнуть, что ни первый, ни второй члены в (19.80) сами по себе не приводят при интегрировании по l_2 к конечному результату. Это обстоятельство, однако, не затрагивает наши рассуждения, поскольку мы интересуемся степенью расходимости $l_1 l_2$ -интегрирования, а не внутреннего интегрирования по l_2 . Ответ же на интересующий нас вопрос утвердительный: степень расходимости субграфика, отвечающего $l_1 l_2$ -интегрированию, отрицательна. В свою очередь можно рассмотреть и каждое внутреннее интегрирование по отдельности, не обращая внимания на остальные; вопрос о сходимости каждого из них решается с помощью теоремы Вайнберга.

Теперь ясно, как обобщаются полученные результаты для произвольного $l_1 \dots l_r$ -интегрирования. Все члены в (19.77), содержащие $\Lambda_k^\mu(l_{k+1} + q, l_{k+1})$ с $k \geq r$, по гипотезе индукции автоматически сходятся, поскольку для этих членов $l_1 \dots l_r$ -интегрирование целиком содержится внутри Λ_k^μ . Остающиеся члены можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-1} \left(i \int \Lambda_k^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-k}^\nu + i \int \Lambda_k^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-k-1}^\nu \right) = \\ = -i \sum_{k=0}^{r-1} \int \Lambda_k^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \gamma^\nu L_{n-k} = \\ = -i \sum_{k=0}^{r-1} \int \frac{d^4 l_{k+1}}{(2\pi)^4} \Lambda_k^\mu(l_{k+1} + q, l_{k+1}) \tilde{S}'_F(l_{k+1}) \tilde{S}'_F(l_{k+1} + q) \gamma^\nu L_{n-k}. \end{aligned}$$

¹⁾ При этом следует помнить, что выражение в квадратных скобках в формуле (19.80) представляет константу, умноженную на матрицу γ .

²⁾ Следует понимать, что полное вычитание в Π не уменьшает D для всех $l_1 l_2$ -субграфиков. Однако единственными субграфиками, для которых это вычитание необходимо, является субграфик, содержащий все линии ядра \tilde{K} , и субграфки, указанные на рис. 19.40, а. Для этих субграфиков вычитательная процедура на самом деле уменьшает D , поскольку они содержат внешний импульс q , который течет только внутри них. Остальные субграфки уже имеют $D \leq -1$.

Интегрирования по $l_1 \dots l_k$ целиком содержатся внутри Λ_k^μ , а интегрирования по $l_{k+2} \dots l_r$, если таковые существуют, содержатся в константе перенормировки L_{n-k} . Степень расходимости при $l_{k+2} \dots l_r$ -интегрировании неположительна, поскольку L_{n-k} — вершинная вставка. С другой стороны, степень расходимости при $l_1 \dots l_{k+1}$ -интегрировании понижается от $+2$ до -1 , поскольку нас интересует не $\Pi(q^2)$, а $\Pi_c(q^2)$. Поэтому и полное $l_1 \dots l_r$ -интегрирование приводит к сходящемуся результату.

Аналогичным способом следует рассматривать l_2 -, $l_2 l_3$ -, ..., -интегрирования. Наша задача — привести соответствующие выражения к виду, удобному для проведения полного вычитания в $\Pi_{\mu\nu}$; при этом мы установим сходимость рассматриваемых субграфиков. Начнем с l_2 -интегрирования. Единственно подозрительными с точки зрения расходимости являются те члены в (19.77), в которых l_2 -интегрирование не содержится целиком в Λ_r или Λ_s . Выпишем эти члены, подчеркивая множители, содержащие импульс l_2 :

[Подозрительные члены] $_{l_2} =$

$$\begin{aligned} &= i \int \underline{\Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-1}^\nu} + i \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-1}^\nu + \\ &\quad + i \int \underline{\Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-2}^\nu} = \\ &= -iL_1 \int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-1}^\nu} + i \int \underline{\Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-2}^\nu}. \end{aligned} \quad (19.81)$$

Используя снова (19.75), представим последний член в (19.81) в виде

$$\begin{aligned} i \int \underline{\Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-2}^\nu} &= -iL_1 \int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-2}^\nu} - \\ &- i \int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-2}^\nu}. \end{aligned} \quad (19.82)$$

Ясно, что в последнем члене в этой формуле l_2 -интегрирование сходится, поскольку четыре подчеркнутых множителя дают $D(l_2) \leq -2$ для любого l_2 -интегрирования. Комбинируя первые члены в формулах (19.82) и (19.81), получаем для оставшихся подозрительных членов

[Подозрительные члены] $_{l_2} =$

$$\begin{aligned} &= -iL_1 \int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-1}^\nu} - iL_1 \int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-2}^\nu} = \\ &= iL_1 \int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \gamma^\nu L_{n-1}}. \end{aligned}$$

Это выражение, очевидно, сходится по отношению к l_2 -интегрированию, если в нем сделать полное вычитание, отвечающее вычислению $\Pi_c(q^2)$.

Аналогичная техника применима для исследования произвольного $l_2 \dots l_s$ -интегрирования. Те члены в (19.77), которые отвечают неотрицательной степени расходимости при этом интегрировании, с помощью (19.75) приводятся к виду

$$\begin{aligned} & [\text{Подозрительные члены}]_{l_2 \dots l_s} = \\ & = \sum_{k=1}^{s-1} i \int \Lambda_k^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-k}^\nu + i \sum_{k=0}^{s-1} \int \Lambda_k^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-k-1}^\nu = \\ & = -i \sum_{k=1}^{s-1} L_k \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-k}^\nu + i \int \Lambda_{s-1}^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-s}^\nu. \quad (19.83) \end{aligned}$$

Снова, как и при рассмотрении l_2 -интегрирования, обратим внимание на последний член в (19.83). Используя (19.75), выразим Λ_{s-1}^μ через Λ_{s-2}^μ и L_{s-1} , затем Λ_{s-2}^μ через Λ_{s-3}^μ и L_{s-2} и т. д. В результате получим

$$\begin{aligned} & i \int \underline{\Lambda_{s-1}^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F} \Lambda_{n-s}^\nu = \\ & = i \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{s-k} \underline{L_k} \int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \dots \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F} \Lambda_{n-s}^\nu + \\ & + i (-1)^{s-1} \int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \dots \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-s}^\nu, \quad (19.84) \end{aligned}$$

где мы подчеркнули члены, зависящие от импульсов¹⁾ l_2, \dots, l_s .

Последний член в (19.84), очевидно, имеет отрицательную степень расходимости и его можно опустить. Члены под знаком суммы могут быть упрощены, если с помощью (19.45) выразить Λ_{n-s}^ν через Λ_{n-s+1}^ν , Λ_{n-s+2}^ν и т. д. до тех пор, пока мы не избавимся от множителей \tilde{K} . Получающиеся при этом члены, содержащие вычитательные константы, все имеют структуру

$$\underline{L_k} \int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \dots \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \gamma^\nu L_l}.$$

Полное вычитание в $\Pi(q^2)$ уменьшает степень расходимости подынтегрального выражения до -1 , и, поскольку все внутренние интегрирования внутри констант перенормировки L_k имеют $D \leq 0$, $l_2 \dots l_s$ -интегрирования, содержащиеся в этих членах,

¹⁾ Подразумевается, что L_1 в сумме подчеркивать не нужно.

все имеют отрицательную степень расходимости. Поэтому (19.84) упрощается и приводится к виду

$$i \int \Lambda_{s-1}^{\mu} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-s}^{\nu} = i \sum_{k=1}^{s-1} L_k \int \gamma^{\mu} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \Lambda_{n-k}^{\nu} + \text{члены с } D < 0. \quad (19.85)$$

Члены, явно выписанные в (19.85), сокращаются с такими же членами в (19.83); тем самым доказательство того, что $l_2 \dots l_s$ -интегрирование приводит к конечному результату, закончено. Точно так же можно показать, что степень расходимости произвольного $l_r \dots l_s$ -интегрирования с $1 < r < s < n$ тоже отрицательна. Это мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Таким образом, внутренние интегрирования в $\Pi(q^2)$, связанные с вершинными и собственно-энергетическими вставками, сходятся и полная степень расходимости в $\Pi_c(q^2)$ отрицательна: $D = -1$. Более того, на первый взгляд расходящиеся блоки фотон-фотонного рассеяния на самом деле сходятся и имеют $D \leq -4$, если рассматривать градиентно-инвариантные комбинации этих блоков. Это можно показать, используя аргументы, аналогичные приведенным выше. Поэтому из теоремы Вайнберга следует, что функция $\Pi_c(q^2)$ конечна в любом порядке e^2 . Из (19.51д) следует, что $\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu}$ также конечна в любом порядке по e^2 . Таким образом, наше доказательство закончено. Мы показали по индукции, что $\tilde{\Gamma}_{\mu}$, \tilde{S}'_F , $\tilde{D}'_{F\mu\nu}$ и \mathcal{S} -матричные элементы конечны в n -м порядке, коль скоро они конечны в порядке $n-2$. Конечность этих величин в приближении e^2 нам уже известна из непосредственных вычислений.

В заключение этого параграфа снова подчеркнем, что наш результат ничего не говорит о сходимости перенормированного ряда теории возмущений. Например, при высоких энергиях, как отмечено в гл. 8, параметр разложения ряда теории возмущений может быть не α , а $\alpha \ln \frac{E}{m}$. В этом случае разложение является асимптотическим и сходится в лучшем случае при низких энергиях.

§ 148. Пример перенормировки заряда в четвертом порядке

Фактические вычисления перенормированных величин в низшем порядке теории возмущений были выполнены в гл. 8. При этом, однако, не возникала рассмотренная в предыдущем параграфе проблема перекрывающихся расходимостей, поскольку эти расходимости впервые проявляются лишь в порядке e^4 . Для

того чтобы проиллюстрировать детали приведенного выше анализа, мы вычислим здесь явно тензор вакуумной поляризации и покажем, что величина $\Pi_c(q^2)$ (а вместе с ней и \tilde{D}'_F) конечна с точностью e^4 [120].

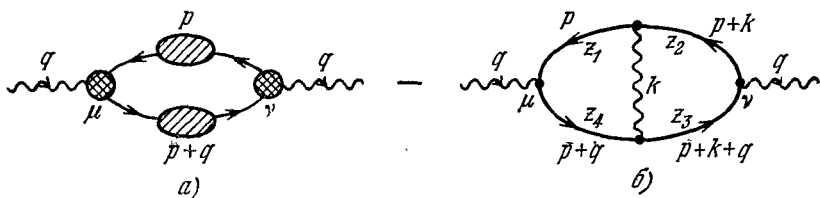


Рис. 19.47. Два члена порядка e^4 в уравнении (19.86) для $\Pi^{\mu\nu}(q)$.

Вернемся к выражению (19.67)

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{\Gamma}_\nu + i \int \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{\Gamma}_\nu \quad (19.86)$$

и выделим в нем с помощью (19.51) все члены порядка e^4 . Диаграмма, отвечающая первому слагаемому в правой части

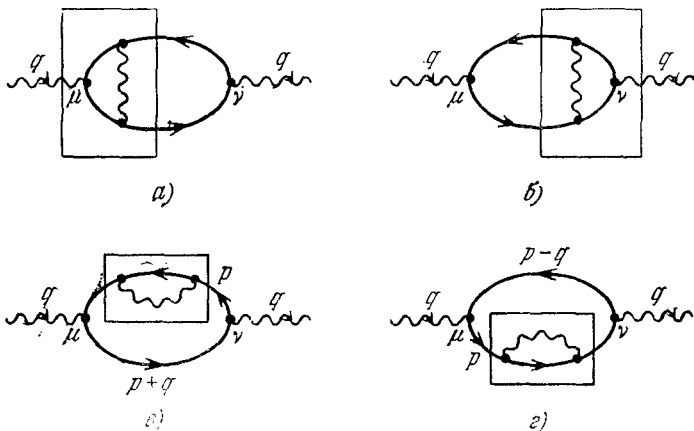


Рис. 19.48. Собственно-энергетические и вершинные вставки второго порядка, которые в приближении e^4 нужно учесть в диаграмме 19.47, а.

(19.86), указана на рис. 19.47, а. В приближении e^4 для собственно-энергетических и вершинных частей этой диаграммы нужно оставить графики, указанные на рис. 19.48. Отметим, что каждая из вершинных вставок дает один и тот же результат, поскольку замена $q \rightarrow -q$, $\mu \leftrightarrow \nu$ не изменяет $\Pi_{\mu\nu}(q)$, но переводит (а) в (б) и наоборот. По той же причине равны и соб-

ственно-энергетические вставки (ν) и (ν). Поэтому достаточно учесть только одну вершинную и одну собственно-энергетическую вставку и результат умножить на 2. Разложение второго слагаемого в (19.86) начинается с члена порядка e^2 , этот член вместо $\tilde{\Gamma}_\mu$ и \tilde{S}'_F содержит γ_μ и S_F соответственно, а для ядра K в нем подставлена скелетная диаграмма рис. 19.47, б. Собирая все члены порядка e^4 и используя (19.51), получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) &= 2i \int \gamma_\mu [\tilde{S}'_F^{(2)} - S_F] S_F \gamma_\nu + \\ &+ 2i \int \gamma_\mu S_F S_F [\tilde{\Gamma}_\nu^{(2)} - \gamma_\nu] + i \int \gamma_\mu S_F S_F K^{(0)} S_F S_F \gamma_\nu = \\ &= 2i \int \gamma_\mu \delta \tilde{S}'_F^{(2)} S_F \gamma_\nu - 2i \int \gamma_\mu S_F S_F \gamma_\nu L^{(2)} - \\ &- i \int \gamma_\mu S_F S_F K^{(0)} S_F S_F \gamma_\nu, \end{aligned} \quad (19.87)$$

где $L^{(2)} \equiv 1 - Z_1$ (см. (19.65), (19.66)) — константа перенормировки вершины, вычисленная во втором порядке, а $\delta \tilde{S}'_F^{(2)} \equiv \tilde{S}'_F^{(2)} - S_F$. Используя (19.63), можно выразить последний член в (19.87) через перенормированную вершинную функцию порядка e^2 :

$$- \int K^{(0)} S_F S_F \gamma_\nu = \Lambda_\nu^{(2)},$$

после чего (19.87) приводится к виду, удобному для вычислений,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) &= 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_\mu \delta \tilde{S}'_F^{(2)}(p) \gamma_\nu S_F(p+q) + \\ &+ i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_\mu S_F(p) \Lambda_\nu^{(2)}(p, p+q) S_F(p+q) - \\ &- 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_\mu S_F(p) \gamma_\nu S_F(p+q) L^{(2)}. \end{aligned} \quad (19.88)$$

Определение кинематических переменных дано на рис. 19.47 и 19.48. Первый член в (19.88) включает собственно-энергетические вставки и не содержит перекрывающихся расходимостей. Следует ожидать поэтому, что вклад этого члена в $\Pi_c(q^2)$ конечен, в чем мы скоро убедимся непосредственным вычислением. Два последних члена в (19.88) содержат неперенормированные вершинные вставки $\Lambda_\nu^{(2)}$. При их вычислении необходимо вычесть два возможных расходящихся субграфика, относящихся к каждой из вершин в $\Pi_{\mu\nu}$. Фактические вычисления при этом сложнее, чем в первом случае, но в конце концов и здесь получается конечный результат.

Начнем с более легкой задачи и обсудим вклад собственно-энергетических вставок (рис. 19.48, σ и ε). Имеем

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2a)}(q) = 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma_\mu \delta \tilde{S}'^{(2)}(p) \gamma_\nu S_F(p+q). \quad (19.89)$$

При вычислении этого интеграла удобно использовать спектральное представление для $\delta S'_F^{(2)}(p)$, которое было получено в гл. 16 и 18. Напомним спектральное представление (16.122) для перенормированного пропагатора:

$$S'_F(p) = \frac{Z_2}{\hat{p} - m} + \frac{1}{\pi} \int_{(m+\lambda)^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2 [\hat{p}\rho_1(\sigma^2) + \rho_2(\sigma^2)]}{p^2 - \sigma^2 + i\varepsilon}. \quad (19.90)$$

После перенормировки имеем

$$\tilde{S}'_F(p) = \frac{1}{\hat{p} - m} + \frac{1}{\pi} \int_{(m+\lambda)^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2 [\hat{p}\tilde{\rho}_1(\sigma^2) + \tilde{\rho}_2(\sigma^2)]}{p^2 - \sigma^2 + i\varepsilon}, \quad (19.91)$$

где $\tilde{\rho} \equiv Z_2^{-1} \rho$. Спектральные функции порядка e^2 могут быть непосредственно получены из результатов¹⁾ гл. 8 (см., в частности, уравнение (8.34)):

$$\tilde{S}'_F^{(2)}(p) = \frac{1}{\hat{p} - m} + \frac{1}{\hat{p} - m} \left[-ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\alpha (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\alpha}{(k^2 - \lambda^2) [(p-k)^2 - m^2]} - \delta m + L^{(2)}(\hat{p} - m) \right] \frac{1}{\hat{p} - m}. \quad (19.92)$$

Выражение (19.92) включает массовый контрчлен, поскольку голый пропагатор $[\hat{p} - m]^{-1}$ содержит физическую массу²⁾. Константа перенормировки волновой функции $L^{(2)}$ в (19.92) возникает при перенормировке $\tilde{S}'_F^{(2)}$. Вычисление интеграла по импульсам (19.92) было выполнено в (8.38); в результате для поправки второго порядка получаем

$$\delta \tilde{S}'_F^{(2)}(p) = \frac{1}{\hat{p} - m} \left[\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dz \gamma_\mu [\hat{p}(1-z) + m] \gamma^\mu \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2 z + \lambda^2(1-z) - p^2 z(1-z) - i\varepsilon} - \delta m + (\hat{p} - m) L^{(2)} \right] \frac{1}{\hat{p} - m}. \quad (19.93)$$

¹⁾ Выражения (19.90) и (19.91) содержат массу фотона λ , которая введена для того, чтобы отделить непрерывный спектр в S'_F от одночастичного полюсного вклада. Подобный прием уже использовался в гл. 8 при обсуждении инфракрасной расходимости.

²⁾ См. сноску на стр. 294.

В приближении e^2 спектральные функции $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$ получаются взятием абсорптивной части в (19.93):

$$- [\hat{p}\bar{\rho}_1(p^2) + \bar{\rho}_2(p^2)] = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} \int_0^1 dz \gamma_\mu [\hat{p}(1-z) + m] \gamma^\mu \times \\ \times \pi\theta [p^2 z(1-z) - m^2 z - \lambda^2(1-z)] \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}, \quad (19.94)$$

где θ — знаковая функция

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Подставляя вычисленные спектральные амплитуды (19.94) в (19.91) и (19.89), получим вклад собственно-энергетической поправки в тензор вакуумной поляризации; этот вклад обозначим $\Pi_{\mu\nu}^{(2a)}$:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2a)}(q) = 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\pi} \int_{(m+\lambda)^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2}{p^2 - \sigma^2 + i\epsilon} \times \\ \times \text{Sp} \left[\frac{\gamma_\mu [\hat{p}\bar{\rho}_1(\sigma^2) + \bar{\rho}_2(\sigma^2)] \gamma_\nu (\hat{p} + \hat{q} + m)}{(p+q)^2 - m^2} \right]. \quad (19.95)$$

Интересующий нас коэффициент $\Pi^{(2a)}(q^2)$ при $q_\mu q_\nu$ в $\Pi_{\mu\nu}$ может быть выделен с помощью обычной процедуры введения фейнмановских параметров и последующей замены переменных в интеграле по импульсам:

$$\Pi^{(2a)}(q^2) = - \frac{16i}{\pi} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \int_{(m+\lambda)^2}^{\infty} d\sigma^2 \bar{\rho}_1(\sigma^2) \times \\ \times \int_0^1 dz z(1-z) \frac{1}{[p'^2 + q^2 z(1-z) - m^2 z - \sigma^2(1-z)]^2}. \quad (19.96)$$

Интеграл по $d^4 p'$ в (19.96) логарифмически расходится, что является напоминанием о равной нулю степени расходимости в диаграмме вакуумной поляризации. Перенормированное значение $\Pi^{\mu\nu}(q^2)$ содержит, однако, разность $\Pi_c(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0)$, которая представляется уже сходящимся интегралом:

$$\Pi_c^{(2a)}(q^2) = \frac{1}{\pi^3} \int d\sigma^2 \bar{\rho}_1(\sigma^2) \int_0^1 dz z(1-z) \times \\ \times \ln \left[\frac{m^2 z + \sigma^2(1-z)}{m^2 z + \sigma^2(1-z) - q^2 z(1-z)} \right]. \quad (19.97)$$

В сходимости этого интеграла легко убедиться, если заметить что при $\sigma^2 \rightarrow \infty$ логарифм ведет себя как $1/\sigma^2$ и что при этом, согласно (19.94), $\bar{\rho}_1(\sigma^2)$ также порядка $1/\sigma^2$. Спектральный интеграл в пределе $-q^2 \gg m^2$ может быть выражен через элементарные функции, в результате получим

$$\Pi_c^{(2a)}(q^2) = -\frac{\alpha}{48\pi^3} \ln^2\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + \frac{\alpha}{6\pi^3} \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) \left[\ln\left(\frac{m}{\lambda}\right) - \frac{13}{24} \right] +$$

+ члены порядка единицы при $\left| \frac{q^2}{m^2} \right| \gg 1$. (19.98)

Таким образом, мы убедились в том, что собственно-энергетическая вставка дает конечный вклад в $\Pi_c(q^2)$. Это обстоятельство не удивительно, поскольку в рассмотренном случае не возникает проблемы перекрывающихся расходимостей. Результат (19.98) можно было бы получить и другим способом: выполнить вначале перенормировку собственной энергии и результат подставить затем в интеграл для вакуумной поляризации.

Ситуация не столь проста для последних двух членов в (19.88), возникающих из вершинных вставок. Перекрывающиеся расходимости во втором члене

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2b)}(q) \equiv i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma_\mu S_F(p) \Lambda_\nu^{(2)}(p, p+q) S_F(p+q) \quad (19.99)$$

сокращаются с расходимостями, возникающими от двух вершинных внутренних интегрирований в

$$2\Pi_{\mu\nu}^{(2b)}(q) \equiv 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma_\mu S_F(p) \gamma_\nu S_F(p+q) L^{(2)}. \quad (19.100)$$

Выполнив еще общую перенормировку, т. е. сделав вычитание при $q^2 = 0$, мы ожидаем, что величина $\Pi_c^{(2b)}(q^2) - 2\Pi_{\mu\nu}^{(2b)}(q^2)$ определяется уже сходящимся интегралом. Рассмотрим подробнее, как происходит указанное сокращение.

Согласно фейнмановским правилам для $\Pi_{\mu\nu}^{(2b)}$ получаем

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2b)}(q) = e^2 \int \frac{d^4 k d^4 p}{(2\pi)^8 (k^2 - \lambda^2)} \times$$

$$\times \text{Sp} \left[\frac{\gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma_\alpha (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + \not{q} + m) \gamma^\alpha (\not{p} + \not{q} + m)}{(p^2 - m^2) [(p+k)^2 - m^2] [(p+k+q)^2 - m^2] (p+q)^2 - m^2} \right], \quad (19.101)$$

где кинематика указана на рис. 19.47, в. Выделим вначале коэффициент $\Pi^{(2b)}(q^2)$ при тензоре $q_\mu q_\nu$, тем самым устранив кажущуюся квадратичную расходимость в (19.101). Скомбинировав

четыре знаменателя, возникающих от петель с заряженными частицами, получим

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} = 3! \int_0^1 dz_1 \dots dz_4 \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^4 z_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^4 a_i z_i\right)}, \quad (19.102)$$

где a_i — электронные знаменатели, указанные на рис. 19.47, б. Интеграл по $d^4 p$ вычисляется с помощью замены переменных¹⁾

$$p' = p + k(z_2 + z_3) + q(z_3 + z_4),$$

которая дополняет знаменатель до полного квадрата; при этом в знаменателе исчезают нечетные по p' члены. Шпур в числителе можно разложить по степеням p' ; тогда члены, содержащие нечетные степени p' , при интегрировании дают нуль, а члены, содержащие четыре степени p' , дают вклад, пропорциональный $g_{\mu\nu}$, и могут быть также опущены — эти члены представляют единственную расходящуюся часть интеграла. Члены, квадратичные по p' , с помощью громоздких алгебраических выкладок приводятся к виду²⁾ $p'^2(k_\mu k_\nu - q_\mu q_\nu)$ плюс несущественные члены, содержащие $g_{\mu\nu}$. Выполнив в (19.101) интегрирование по $d^4 p'$, получим

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(26)}(q) = & \frac{i\alpha}{4\pi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{dz_1 \dots dz_4 \delta\left(1 - \sum_i z_i\right)}{k^2 - \lambda^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{16(k_\mu k_\nu - q_\mu q_\nu)}{D_1} + \frac{N_{\mu\nu}}{D_1^2} \right\} + \text{члены с } g_{\mu\nu}, \quad (19.103) \end{aligned}$$

где

$$D_1 = k^2(z_1 + z_4)(z_2 + z_3) + q^2(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + 2kq(z_1 z_3 - z_2 z_4) - m^2 + ie$$

и

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu} = & \text{Sp } \gamma_\mu [-\hat{k}(z_2 + z_3) - \hat{q}(z_3 + z_4) + m] \gamma_\alpha \times \\ & \times [\hat{k}(z_1 + z_4) - \hat{q}(z_3 + z_4) + m] \gamma_\nu [\hat{k}(z_1 + z_4) + \\ & + \hat{q}(z_1 + z_2) + m] \gamma^\alpha [-\hat{k}(z_2 + z_3) + \hat{q}(z_1 + z_2) + m]. \quad (19.104) \end{aligned}$$

Далее необходимо выполнить интегрирование по $d^4 k$. Отметим важнейшие промежуточные этапы.

¹⁾ Интеграл по импульсам следует регуляризовать, с тем чтобы получить конечное и однозначно определенное с математической точки зрения выражение. В первом томе мы использовали градиентно-инвариантный метод регуляризации (см. (8.20)), который может быть применен и в рассматриваемом случае.

²⁾ При этом члены, антисимметричные при замене $(z_1, z_2) \leftrightarrow (z_3, z_4)$, можно опустить.

1. Вначале перепишем $\frac{1}{k^2 - \lambda^2}$ в следующем виде:

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2} = \frac{(z_1 + z_4)(z_2 + z_3)}{(z_1 + z_4)(z_2 + z_3)(k^2 - \lambda^2)},$$

имея в виду дальнейшую параметризацию (19.102), в которой мы сопоставим фейнмановский параметр x с D_1 и $y = 1 - x$ с фотонным пропагатором.

2. Регуляризуем фотонный пропагатор

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}, \quad (19.105)$$

с тем, чтобы сделать конечным интеграл в (19.103), логарифмическая расходимость которого возникает от слагаемых, пропорциональных k^2/D_1 и k^4/D_1^2 . При этом возникают зависящие от обрезания члены, которые окончательно исчезают при полном вычитании в $\Pi_c(q^2)$.

3. Сделаем замену переменных

$$k' = k + \frac{qx(z_1 z_3 - z_2 z_4)}{(z_1 + z_4)(z_2 + z_3)},$$

чтобы дополнить выражение в знаменателе до полного квадрата. Тогда после интегрирования по $d^4 k'$ получаем три члена. Первый из них возникает из первого слагаемого в (19.103), пропорционального D_1^{-1} , назовем его $\Pi_{\mu\nu}^{(26_1)}$. Два других члена — $\Pi_{\mu\nu}^{(26_2)}$ и $\Pi_{\mu\nu}^{(26_3)}$ — возникают при интегрировании слагаемого с D_1^{-2} и отвечают членам нулевого и второго порядка по k' в $N_{\mu\nu}$. Член в $N_{\mu\nu}$, пропорциональный k'^4 , приводит к несущественному множителю $g_{\mu\nu}$.

Коэффициент при $q_\mu q_\nu$ в $\Pi_{\mu\nu}^{(26_1)}$ равен

$$\begin{aligned} \Pi^{(26_1)}(q^2) &= \frac{\alpha}{4\pi^3} \int_0^1 dx \int_0^1 dz_1 \dots dz_4 \frac{\delta\left(1 - \sum_i z_i\right)}{(z_1 + z_4)(z_2 + z_3)} \times \\ &\times \left[1 - \frac{x^2(z_1 z_3 - z_2 z_4)^2}{(z_1 + z_4)^2(z_2 + z_3)^2} \right] \ln \frac{D_2(\Lambda^2, q^2)}{D_2(\lambda^2, q^2)}, \end{aligned} \quad (19.106)$$

где

$$\begin{aligned} D_2(\lambda^2, q^2) &= \lambda^2(1 - x)(z_1 + z_4)(z_2 + z_3) + \\ &+ m^2 x - q^2 x \left[(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) - \frac{x(z_1 z_3 - z_2 z_4)^2}{(z_1 + z_4)(z_2 + z_3)} \right]. \end{aligned} \quad (19.107)$$

Интеграл по параметрам в (19.106) не приводит к расходимости, поскольку при $z_1 + z_4 \rightarrow 0$, $z_2 + z_3 \rightarrow 1$ он ведет себя как

$$\int_0^\varepsilon dz_1 \int_0^\varepsilon dz_4 \frac{1}{z_1 + z_4} \sim \varepsilon \ln \varepsilon. \quad (19.108)$$

Однако если знаменатель содержит дополнительные степени z_i , возникают, как мы вскоре убедимся, трудности. После вычитания получаем выражение

$$\Pi_c^{(26_1)}(q^2) = \Pi^{(26_1)}(q^2) - \Pi^{(26_1)}(0),$$

которое сходится; явное вычисление интегралов представляет хорошее упражнение для энергичного студента. Здесь мы приведем лишь асимптотическое значение при $-q^2 \gg m^2$:

$$\Pi_c^{(26_1)}(q^2) = \frac{17\alpha}{72\pi^3} \ln\left(\frac{m^2}{-q^2}\right) + O(1). \quad (19.109)$$

Рассмотрим далее выражение для $\Pi^{(26_2)}$, которое отвечает не зависящей от k' части $N_{\mu\nu}$ в (19.104). Подынтегральное выражение в этом случае ведет себя как d^4k'/k'^6 при больших k'^2 и несомненно, сходится без всякой регуляризации фотонного пропагатора. Для коэффициента при $q_\mu q_\nu$ получаем

$$\begin{aligned} \Pi^{(26_2)}(q^2) = & \frac{\alpha}{2\pi^3} \int_0^1 dx x \int \frac{dz_1 \dots dz_4 \delta\left(1 - \sum_i z_i\right) m^2}{(z_1 + z_4)(z_2 + z_3) D_2(\lambda^2, q^2)} \times \\ & \times \left[(z_1 + z_2)^2 - \frac{x^2 (z_1 z_3 - z_2 z_4)^2 (1 + z_2 + z_3)}{(z_1 + z_4)(z_2 + z_3)} \right], \quad (19.110) \end{aligned}$$

где $D_2(\lambda^2, q^2)$ определено выражением (19.107). В пределе $-q^2 \rightarrow \infty$ получаем

$$\Pi^{(26_2)}(q^2) \sim \frac{m^2}{q^2} \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right). \quad (19.111)$$

Теперь остается только вычислить тензор $\Pi_{\mu\nu}^{(26_1)}$, отвечающий членам с k'^2 в (19.104). Этот тензор не только логарифмически расходится при интегрировании по d^4k' , но и содержит перекрывающиеся расходимости и сходится только после включения контрчленов (19.100), связанных с перенормировкой вершины. Вычислив все шпуры и выполнив, с учетом регуляризации (19.105) фотонного пропагатора, интегрирование по d^4k' , для коэффициента при $q_\mu q_\nu$ получим

$$\begin{aligned} \Pi^{(26_1)}(q^2) = & + \frac{\alpha}{4\pi^3} \int_0^1 x dx \int \frac{dz_1 \dots dz_4 \delta\left(1 - \sum_i z_i\right)}{(z_1 + z_4)^2 (z_2 + z_3)^2} \times \\ & \times (z_1 - z_3)(z_4 - z_2) \ln \frac{D_2(\Lambda^2, q^2)}{D_2(\lambda^2, q^2)}, \quad (19.112) \end{aligned}$$

где величина D_2 определена в (19.107). После вычитания в точке $q^2 = 0$ в выражении (19.112) исчезает зависимость от Λ^2 , однако взамен появляется расходимость при внутреннем интегрировании по параметрам. В этом пункте как раз и проявляется

трудность работы с перекрывающимися расходимостями. При $z_2 + z_3 \rightarrow 0$ (и $z_1 + z_4 \approx 1$, как это предписывается δ -функцией) в (19.112) получаем выражение

$$\int_0^1 dz_1 dz_4 \delta(1 - z_1 - z_4) z_1 z_4 \int_0^8 \frac{dz_2 dz_3}{(z_2 + z_3)^2} \times \\ \times \ln \frac{m^2 x - q^2 x z_1 z_4 + \Lambda^2 (1 - x) (z_2 + z_3)}{m^2 x - q^2 x z_1 z_4 + \lambda^2 (1 - x) (z_2 + z_3)}, \quad (19.113)$$

которое, как и (19.106), сходится для конечных λ и Λ . Однако вычитание при $q^2 = 0$ приводит к замене логарифмического множителя в (19.112) на $\ln [D_2(\lambda^2, 0)/D_2(\lambda^2, q^2)]$. В результате при $z_2, z_3 \rightarrow 0$

$$\ln \frac{D_2(\lambda^2, 0)}{D_2(\lambda^2, q^2)} \Big|_{z_2, z_3 \rightarrow 0} \approx \ln \frac{m^2}{m^2 - q^2 z_1 z_4}$$

и в (19.113) возникает расходящийся интеграл $\int_0^8 \frac{dz_2}{z_2}$.

Логарифмическая расходимость в $\Pi^{(263)}$, возникающая от интегрирования по области $z_2 + z_3 < \varepsilon$, очевидно, связана с внутренним интегрированием в вершинной вставке v . Используя аналогию с теорией электрических цепей из гл. 18, эту расходимость можно интерпретировать в терминах токов, текущих по линиям с импульсами $p + k$ и $p + k + q$ на рис. 19.47, б. В рассматриваемом случае сопротивления этих линий становятся исчезающе малыми, в результате по петле в вершинной вставке v течет бесконечно большой ток. Аналогичная расходимость от области $(z_1, z_4) \approx 0$ связана с внутренним интегрированием в вершине μ . Обе расходимости устраняются двумя вычитаниями вида (19.100), необходимость которых предписывается программой перенормировок.

Чтобы продемонстрировать сокращение расходимостей, мы заново рассмотрим контрчлены в (19.100), которые ранее были вычислены в гл. 8. Здесь мы проведем выкладки способом, максимально близким тому, которым была вычислена функция $\Pi^{(263)}(q^2)$.

Подставим в (19.100) определение $L^{(2)}\gamma_v$ из (19.65). По фейнмановским правилам находим

$$L^{(2)}\gamma_v = \Lambda_v^{(2)}(p, p) \Big|_{\hat{p}=m} = \\ = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 (k^2 - \lambda^2)} \left[\frac{\gamma_\alpha (\hat{p} + \hat{k} + m) \gamma_\nu (\hat{p} + \hat{k} + m) \gamma^\alpha}{[(\hat{p} + k)^2 - m^2]^2} \right] \Big|_{\hat{p}=m}.$$

Кинематика для вершины ν указана на рис. 19.47, б. Переменная \tilde{p} не есть переменная интегрирования; протаскивая \tilde{p} направо или налево, мы всегда получим $\tilde{p}^2 = m^2$ и $\tilde{p} = m$, поскольку вычитание в вершине каждый раз приводится на массовой поверхности. В результате получаем ¹⁾

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2B)}(q) = e^2 \int \frac{d^4k d^4p}{(2\pi)^8 (k^2 - \lambda^2)} \text{Sp } \gamma_\mu \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} \times \\ \times \left[\frac{\gamma_\alpha (\hat{\tilde{p}} + \hat{k} + m) \gamma_\nu (\hat{\tilde{p}} + \hat{k} + m) \gamma^\alpha}{[(\tilde{p} + k)^2 - m^2]^2} \right] \Big|_{\tilde{p}=m} \frac{\hat{p} + \hat{q} + m}{(p + q)^2 - m^2}. \quad (19.114)$$

Несмотря на то, что \tilde{p} не есть переменная интегрирования, удобно скомбинировать четыре знаменателя в точности так же, как в выражениях (19.101) и (19.102); при этом выкладки максимально похожи на выкладки при вычислении тензора $\Pi_{\mu\nu}^{(2B)}$. После замены переменных

$$p' = p + \frac{qz_4}{z_1 + z_4},$$

дополняющей выражение в знаменателе до полного квадрата, выполним интегрирование по d^4p' ; тогда получим

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2B)}(q) = -\frac{i\alpha}{2\pi} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{dz_1 \dots dz_4 \delta\left(1 - \sum_i z_i\right) z_1 z_4}{(k^2 - \lambda^2) (z_1 + z_4)^4} \times \\ \times q_\mu \text{Sp } \hat{q} \left[\frac{\gamma_\alpha (\hat{\tilde{p}} + \hat{k} + m) \gamma_\nu (\hat{\tilde{p}} + \hat{k} + m) \gamma^\alpha}{[(\tilde{p} + k)^2 (z_2 + z_3) + q^2 z_1 z_4 / (z_1 + z_4) - m^2]^2} \right] \Big|_{\tilde{p}=m} + \\ + \text{члены с } g_{\mu\nu}. \quad (19.115)$$

Чтобы выполнить интегрирование по d^4k , перепишем фотонный пропагатор в виде

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2} = \frac{z_2 + z_3}{(z_2 + z_3)(k^2 - \lambda^2)}$$

и скомбинируем его с помощью параметра x со знаменателем в (19.115). Интеграл по импульсу вычисляется затем с помощью замены переменных

$$k' = k + \tilde{p}x,$$

после чего, взяв шпур, мы получаем два члена, $\Pi^{(2B_1)}(q^2)$ и $\Pi^{(2B_2)}(q^2)$, которые представляют собой коэффициенты при $q_\mu q_\nu$ в $\Pi^{(2B)}(q)$.

¹⁾ Выражение в квадратных скобках в числителе не следует раскрывать до тех пор, пока мы не заменим его константой, умноженной на γ_ν .

Функция $\Pi^{(2B_1)}(q^2)$ содержит часть числителя в (19.115), не зависящую от k' , и равна

$$\Pi^{(2B_1)}(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi^3} \int_0^1 x dx \int_0^1 \frac{dz_1 \dots dz_4 \delta\left(1 - \sum_i z_i\right) m^2 z_1 z_4}{(z_1 + z_4)^4 (z_2 + z_3)} \times \\ \times \frac{2 - 2x - x^2}{m^2 x - m^2 x(1-x)(z_2 + z_3) - q^2 x z_1 z_4 / (z_1 + z_4) + \lambda^2 (1-x)(z_2 + z_3)}. \quad (19.116)$$

Интеграл (19.116) расходится при интегрировании по z_1, z_4

$$\int_0^{\epsilon} dz_1 \int_0^{\epsilon} dz_4 \frac{z_1 z_4}{(z_1 + z_4)^4} = \int_0^{\epsilon} \frac{dz_1}{z_1} \int_0^1 \frac{y dy}{(1+y)^4}$$

и сходится после вычитания в точке $q^2 = 0$. Согласно аналогии с теорией электрических цепей (см. рис. 19.47, б) мы связываем эту расходимость с интегралом вакуумной поляризации, умноженным на конечную часть вставки $L^{(2)}$ в вершине v . Хотя функция $\Pi_c^{(2B_1)}(q^2)$ сходится на верхнем пределе, она расходится в инфракрасной области, поскольку в этой области расходится вершина перенормировки $L^{(2)}$. В пределе $-q^2 \gg m^2$ выражение (19.116), умноженное, как и (19.88), на -2 , равно

$$-2\Pi_c^{(2B_1)}(q^2) = +\frac{\alpha}{6\pi^3} \ln\left(\frac{m^2}{-q^2}\right) \left[\ln\left(\frac{m}{\lambda}\right) - \frac{5}{4} \right] + O(1). \quad (19.117)$$

Функция $\Pi^{(2B_2)}(q^2)$ возникает при учете членов в числителе выражения (19.115), пропорциональных $(k')^2$, и логарифмически расходится. Используя регуляризацию (19.105), получаем

$$\Pi^{(2B_2)}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi^3} \int_0^1 x dx \int_0^1 \frac{dz_1 \dots dz_4 \delta\left(1 - \sum_i z_i\right) z_1 z_4}{(z_1 + z_4)^4 (z_2 + z_3)^2} \times \\ \times \ln \{ [\Lambda^2 (1-x)(z_2 + z_3) + m^2 x - \\ - m^2 x(1-x)(z_2 + z_3) - q^2 x z_1 z_4 / (z_1 + z_4)] \times \\ \times [\lambda^2 (1-x)(z_2 + z_3) + m^2 x - m^2 x(1-x)(z_2 + z_3) - \\ - q^2 x z_1 z_4 / (z_1 + z_4)]^{-1} \}. \quad (19.118)$$

Это выражение расходится даже после вычитания из него $\Pi^{(2B_2)}(0)$. Расходимость возникает при интегрировании по z_2, z_3 при $z_2, z_3 \rightarrow 0$. Ее можно связать с расходимостью константы перенормировки $L^{(2)}$, умноженной на интеграл вакуумной поляризации (конечный после вычитания в нуле).

В точности такая же расходимость была найдена нами в (19.112). Указанные две расходимости сокращаются, если взять

разность выражений (19.112) и (19.118), как это предписывается правилами перенормировки в (19.88). Сделав вычитание в нуле, получаем

$$\begin{aligned}
 & \Pi_c^{(26_1)}(q^2) - 2\Pi_c^{(2B_1)}(q^2) = \\
 & = \frac{\alpha}{4\pi^3} \int_0^1 x dx \int_0^1 \frac{dz_1 \dots dz_4 \delta(1 - \sum_i z_i)}{(z_1 + z_4)^2 (z_2 + z_3)^2} \left\{ (z_1 - z_3)(z_4 - z_2) \times \right. \\
 & \quad \times \ln \frac{m^2}{m^2 - q^2 \left[(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) - \frac{x(z_1 z_3 - z_2 z_4)^2}{(z_1 + z_4)(z_2 + z_3)} \right]} - \\
 & \quad - \frac{z_1 z_4}{(z_1 + z_4)^2} \ln \frac{m^2 [1 - (1-x)(z_2 + z_3)]}{m^2 [1 - (1-x)(z_2 + z_3)] - q^2 \frac{z_1 z_4}{z_1 + z_4}} - \\
 & \quad \left. - \frac{z_2 z_3}{(z_2 + z_3)^2} \ln \frac{m^2 [1 - (1-x)(z_1 + z_4)]}{m^2 [1 - (1-x)(z_1 + z_4)] - q^2 \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3}} \right\}, \quad (19.119)
 \end{aligned}$$

где мы пренебрегли фотонной массой λ , поскольку (19.119) уже не содержит инфракрасной расходимости, и положили $\Lambda \rightarrow \infty$, поскольку это выражение не зависит от Λ . Мы также симметризовали член с вычитанием в $\Pi_c^{(2B_1)}(q^2)$ относительно замены $z_1, z_4 \leftrightarrow z_2, z_3$. Эта замена отвечает тому, что вершинная вставка вычисляется по одному разу в каждой из двух вершин в диаграмме вакуумной поляризации. Выражение (19.119) свободно от перекрывающихся расходимостей; при $z_2, z_3 \rightarrow 0$ и $z_1 + z_4 \rightarrow 1$ расходимости в первых двух членах сокращаются, поскольку

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\varepsilon dz_2 \int_0^\varepsilon dz_3 \frac{1}{(z_2 + z_3)^2} \left[z_1 z_4 \ln \frac{m^2}{m^2 - q^2 z_1 z_4} + O(z_2, z_3) - \right. \\
 & \quad \left. - z_1 z_4 \ln \frac{m^2}{m^2 - q^2 z_1 z_4} + O(z_2, z_3) \right] \sim \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

а третий член конечен. Точно так же при $z_1, z_4 \rightarrow 0$, $z_2 + z_3 \rightarrow 1$ сокращаются расходимости в первом и третьем членах, а второй член конечен. Таким образом, вычитательные члены обеспечивают желаемое сокращение расходящихся частей вершинных вставок внутри функции $\Pi_c^{(26_1)}$. Сделав затем полное вычитание при $q^2 = 0$, мы получим для вакуумной поляризации конечный ответ. На приведенном выше примере можно убедиться в том, что метод перенормировок неизбежно приводит к успеху, однако требует при этом весьма громоздкой вычислительной работы.

Для фактического вычисления (19.119) введем удобные переменные

$$z_1 + z_4 = z, \quad z_1 = zu, \quad z_2 = (1 - z)v, \quad 0 \leq z, u, v \leq 1,$$

тогда в пределе $-q^2 \gg m^2$ получим

$$\begin{aligned} \Pi_c^{(26a)}(q^2) - \Pi_c^{(26b)}(q^2) &= \\ &= \frac{\alpha}{48\pi^3} \ln^2\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + \frac{\alpha}{18\pi^3} \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + O(1). \end{aligned} \quad (19.120)$$

Сложив вместе выражения (19.98), (19.109), (19.111), (19.117) и (19.120), мы получим полную вакуумную поляризацию четвертого порядка; в пределе $-q^2 \gg m^2$ она равна

$$\Pi_c^{(2)}(q^2) = -\frac{\alpha}{16\pi^3} \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + O(1). \quad (19.121)$$

В (19.121) сократился член с $\ln^2(-q^2/m^2)$, равно как сократились инфракрасные члены в собственно-энергетических вставках в $\Pi^{(2a)}$ и в вершинных вставках в $\Pi^{(26)}$ и $\Pi^{(2b)}$. Подставляя в фотонный пропагатор (19.51e) вакуумную поляризацию второго порядка (см. (8.29)) и только что полученный результат (19.121), приходим к следующему выражению (справедливому с точностью до e^4):

$$\begin{aligned} \tilde{D}'_F(q^2)_{\mu\nu} &= -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) - \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + \dots} \right], \\ &\quad -q^2 \gg m^2, \end{aligned} \quad (19.122)$$

где мы опустили градиентные члены. Этот результат был впервые получен Юостом и Латтинджером [120] в 1950 г. Оба поправочных члена имеют знак минус и поэтому *увеличивают* взаимодействие между частицами на малых расстояниях. К аналогичному выводу, справедливому, однако, уже во всех порядках по α , можно прийти, рассмотрев спектральное представление для $\tilde{D}'_F(q^2)$ из гл. 16. Этот вывод следует из положительной определенности весовой функции в выражениях (16.172) и (16.173).

§ 149. Низкоэнергетическая теорема для комптоновского рассеяния

Тождество Уорда и теория перенормировок позволяют сформулировать теорему о низкоэнергетическом поведении амплитуды комптоновского рассеяния, которая оказывается справедливой во всех порядках по e^2 . Как впервые было показано Тирингом [121] в 1950 г., амплитуда рассеяния фотона на электро-не

в пределе малых частот стремится к классическому комптоновскому пределу и равна α/m , где $\alpha = 1/137$ и m — перенормированные значения заряда и массы электрона. Во втором порядке возмущений этот результат был получен в гл. 7 (см. формулу (7.74)).

Доказательство сформулированной выше теоремы основывается на том факте, что, согласно тождеству Уорда, полная вершинная функция $\Gamma_\mu(p, p)$ при нулевой передаче импульса может быть получена дифференцированием точного фотонного пропагатора $S_F'^{-1}(p)$

$$\Gamma_\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} S_F'^{-1}(p). \quad (19.123)$$

Другими словами, добавление к заряженной линии фотона с нулевой частотой приводит к дифференцированию по импульсу этой линии, что легко понять, используя одну только градиентную инвариантность. τ -функция для свободного заряженного электрона равна

$$\tau(p) \equiv iS_F'(p). \quad (19.124)$$

Чтобы получить τ -функцию заряженной частицы (с затравочным зарядом e_0) в *постоянном* электромагнитном поле, достаточно сделать в (19.124) градиентно-инвариантную подстановку

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - e_0 A_\mu.$$

При этом $\tau(p)$ заменяется на

$$\begin{aligned} \tau(p) \rightarrow \tau(p - e_0 A) = \\ = \tau(p) - e_0 A^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \tau(p) + \frac{1}{2} e_0^2 A^\mu A^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\mu \partial p^\nu} \tau(p) + \dots \end{aligned} \quad (19.115)$$

Коэффициент при A^μ в этом выражении

$$\begin{aligned} -e_0 \frac{\partial}{\partial p^\mu} \tau(p) = i e_0 S_F'(p) \left[\frac{\partial}{\partial p^\mu} S_F'^{-1}(p) \right] S_F'(p) = \\ = i S_F'(p) e_0 \Gamma_\mu(p, p) S_F'(p) \end{aligned} \quad (19.126)$$

представляет, с точностью до множителя e_0 , некомпактную вершинную часть при нулевом переданном импульсе, которая содержит электронную собственно-энергетическую вставку, но не содержит фотонных концов (рис. 19.49). Коэффициент¹⁾ при $1/2 A_\mu A_\nu$ равен τ -функции, описывающей комптоновское рассеяние. Этот член содержит взаимодействие второго порядка, причем оба фотона как до, так и после рассеяния имеют нулевую

¹⁾ Множитель $1/2$ учитывает тот факт, что $A_\mu A_\nu$ содержит два двухфотонных состояния: $A_\mu A_\nu \rightarrow A_\mu^{(+)} A_\nu^{(-)} + A_\nu^{(+)} A_\mu^{(-)}$.

$$e_0 \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left\{ \text{diagram with } iS_F'(p) \text{ in a hatched oval} \right\} = - \left\{ \text{diagram with } iS_F'(p) \text{ ovals and } -ie_0 \Gamma_\mu(p, p) \text{ in a cross-hatched oval} \right\}$$

Рис 19.49. Вставка фотона с нулевой частотой с помощью дифференцирования пропагатора — иллюстрация тождества Уорда.

$$\begin{aligned}
 e_0^2 \frac{\partial^2}{\partial p^\mu \partial p^\nu} \left\{ \text{diagram with } iS_F'(p) \text{ in a hatched oval} \right\} &= -e_0 \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left\{ \text{diagram with } iS_F'(p) \text{ ovals and } -ie_0 \Gamma_\nu(p, p) \text{ in a cross-hatched oval} \right\} = \\
 &= \left\{ \text{diagram with } iS_F'(p) \text{ ovals and } -ie_0 \Gamma_\mu(p, p) \text{ in a cross-hatched oval} \right\} + \\
 &+ \left\{ \text{diagram with } iS_F'(p) \text{ ovals and } -ie_0 \Gamma_\nu(p, p) \text{ in a cross-hatched oval} \right\} + \\
 &+ \left\{ \text{diagram with } iS_F'(p) \text{ ovals and } -ie_0 \Gamma_\mu(p, p) \text{ in a cross-hatched oval} \right\} \\
 &+ \left\{ \text{diagram with } iS_F'(p) \text{ ovals and } -ie_0 \Gamma_\nu(p, p) \text{ in a cross-hatched oval} \right\} \\
 &= -ie_0^2 \frac{\partial^2}{\partial p^\mu \partial p^\nu} [-S_F'^{-1}] = \\
 &= -ie_0^2 \frac{\partial^2}{\partial p^\mu \partial p^\nu} \Sigma(p)
 \end{aligned}$$

Рис. 19.50. Вторые производные, приводящие к комптоновской амплитуде в пределе нулевой энергии.

энергию. Как обычно, электронные концы включены в определение τ -функции, а фотонные концы исключены (рис. 19.50). Имеем

$$\tau^c(p)^{\mu\nu} = ie_0^2 \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu} S'_F(p). \quad (19.127)$$

Графическую связь с комптоновской амплитудой легче всего проследить, рассматривая тождество, следующее из (19.48):

$$\frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu} S'^{-1}(p) = - \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \Sigma(p).$$

Подставляя это тождество в (19.127) и учитывая (19.123) и равенство

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S'_F(p) = - S'_F(p) \left[\frac{\partial}{\partial p_\mu} S'^{-1}(p) \right] S'_F(p),$$

получим

$$\begin{aligned} \tau^{(c)}(p)^{\mu\nu} = & + [iS'_F(p)] [(-ie_0)\Gamma^\mu(p, p) iS'_F(p) (-ie_0)\Gamma^\nu(p, p) + \\ & + (-ie_0)\Gamma^\nu(p, p) iS'_F(p) (-ie_0)\Gamma^\mu(p, p) - ie_0^2 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_\mu \partial p_\nu}] [iS'_F(p)]. \end{aligned} \quad (19.128)$$

Три члена в (19.128) представляют сумму всех диаграмм, полученных добавлением к электронной линии с зарядом e_0 и импульсом p_μ двух фотонов с нулевой частотой. Пропагаторы вдоль электронной линии имеют вид $(\hat{p} + \hat{k}_i - m)^{-1}$, где k_i изменяется при каждом взаимодействии с фотоном внутри блока собственной энергии. Поскольку

$$e_0 \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{i}{\hat{p} + \hat{k}_i - m} = - \frac{i}{\hat{p} + \hat{k}_i - m} (-ie_0 \gamma^\mu) \frac{i}{\hat{p} + \hat{k}_i - m}, \quad (19.129)$$

мы заключаем, что дифференцирование пропагаторов каждый раз отвечает добавлению фотона с нулевой частотой. Вставки же фотонов в замкнутые электронные петли дают нуль¹⁾ в силу причин, уже обсуждавшихся в § 146. Действительно, градиентно-инвариантная амплитуда для замкнутой петли пропорциональна $q_\mu \epsilon_\nu - q_\nu \epsilon_\mu$ и равна нулю при $q_\mu = 0$. В результате приходим к выводу, что выражение (19.127) содержит все фейнмановские графики при нулевой энергии. Поэтому можно вычислить S -матричный элемент, выделив в этом выражении внешние электронные концы и умножив его на волновые функции фотонов и

¹⁾ То есть в рассматриваемом пределе $\int d^4p \frac{\partial}{\partial p_\mu} F(p, k_1, \dots, k_n) = 0$, где F — вклад замкнутой петли.

электронов в начальном и конечном состояниях (см., например, (17.43)). В результате получаем

$$S(p', k', \varepsilon'; p, k, \varepsilon) = \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon'_\nu}{(2\pi)^6 \sqrt{4kk'}} \mathfrak{M}^{\mu\nu}(p', k'; p, k), \quad (19.130)$$

где кинематика указана на рис. 19.51, а амплитуда $\mathfrak{M}^{\mu\nu}$ в пределе $k, k' \rightarrow 0$ равна

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{\mu\nu}(p, 0; p, 0) &= \\ &= \frac{-ie_0^2}{Z_2 Z_3} \lim_{k \rightarrow 0} \bar{u}(p) (\hat{p} + \hat{k} - m) \frac{\partial^2 S'_F(p+k)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} (\hat{p} + \hat{k} - m) u(p) = \\ &= -ie^2 \lim_{k \rightarrow 0} \bar{u}(p) \hat{k} \frac{\partial^2 \tilde{S}'_F(p+k)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \hat{k} u(p). \end{aligned} \quad (19.131)$$

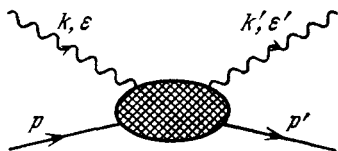
В последнем выражении мы учли правила перенормировки (19.49). Для дифференциального сечения рассеяния фотона с данной поляризацией получаем

$$d\sigma = \frac{1}{2k} |\varepsilon_\mu \varepsilon'_\nu \mathfrak{M}^{\mu\nu}|^2 \frac{d^3 k'}{2k'} \frac{m d^3 p'}{E'} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p+k-p'-k')}{(2\pi)^6}$$

или

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} |\varepsilon_\mu \varepsilon'_\nu \mathfrak{M}^{\mu\nu}|^2 \text{ при } k, k' \rightarrow 0. \quad (19.132)$$

Очевидно, что сечение $d\sigma/d\Omega$ при нулевой энергии конечно, если конечна амплитуда $\mathfrak{M}^{\mu\nu}$. Поэтому в (19.131) необходимо вычислить $\partial^2 \tilde{S}'_F(p+k)/\partial p_\mu \partial p_\nu$ с точностью до членов порядка k^{-2} . Рассмотрим общее выражение для перенормированного пропагатора



$$\tilde{S}'_F(p') = \frac{\hat{p}' A(p'^2) + m B(p'^2)}{p'^2 - m^2},$$

$$A(m^2) = B(m^2) = 1. \quad (19.133)$$

Вычисление производных упрощается, если выбрать поперечную калибровку в системе покоя электрона. Тогда

$$\varepsilon p = 0, \quad \varepsilon' p = 0, \quad (19.134)$$

и члены, пропорциональные p_μ и p_ν , можно опустить. Выполнив дифференцирование, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{S}'_F(p+k)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} &= -2g^{\mu\nu} \left[\frac{\hat{p} + m}{4(pk)^2} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] + \\ &+ p^\mu \Phi^\nu + p^\nu \Phi^\mu + p^\mu p^\nu I. \end{aligned} \quad (19.135)$$

Величина Φ^μ в этом выражении представляет сумму многих членов, не превосходящих $O(1/k^2)$, но не существенных для нас в силу выбора калибровки (19.134). Величина I возникает от второй производной знаменателя

$$(p+k)^2 - m^2 = 2pk$$

и имеет порядок $O(1/k^3)$. Отсюда, в частности, видно, насколько существен для получения правильных результатов в электродинамике точный закон сохранения электромагнитного тока. Здесь мы сразу избавились от сингулярного поведения в знаменателе, выбрав удобную калибровку (19.134). Результат, разумеется, останется тем же и в любой другой калибровке.

При оценке порядка величины различных членов в (19.135) предположим, что производные функций A и B существуют в точке $p^2 = m^2$, что можно показать, используя спектральное разложение (16.112) для $\tilde{S}'_F(p)$ (при этом следует приписать фотону массу λ , с тем чтобы отделить вклад разреза $(m+\lambda)^2 \leq p^2 \leq \infty$ от полюса $p^2 = m^2$). Радиус сходимости в разложении $A(p)$ и $B(p)$ по степеням p^2 в окрестности точки $p^2 = m^2$ имеет порядок $2m\lambda$. Вопрос предельного перехода $\lambda \rightarrow 0$ мы обсудим в конце этого параграфа.

Подставляя (19.135) в (19.131) и учитывая (19.134), получим

$$\epsilon_\mu \epsilon_\nu \mathfrak{M}^{\mu\nu}(p, 0; p, 0) = 2ie^2 e \cdot e' \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\bar{u}(p) \hat{k} (\hat{p} + m) \hat{k} u(p)}{4(pk)^2} = \frac{ie^2 e \cdot e'}{m}, \quad (19.136)$$

что представляет собой в точности комптоновскую амплитуду, зависящую от физического заряда e и массы m . Для дифференциального сечения из (19.132) получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2} (e \cdot e')^2 \quad \text{при } k \rightarrow 0. \quad (19.137)$$

Таким образом, константа тонкой структуры $\alpha = 1/137$, которая входит в перенормированное разложение S -матрицы, может быть экспериментально определена как томпсоновский предел комптоновского рассеяния при нулевой частоте. Обобщение этой теоремы, позволяющее вычислить члены в $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$, линейные по k , через статические характеристики фермиона, а именно, через его заряд и магнитный момент, было дано Лоу, Гелл-Маном и Гольдбергером¹⁾. Например, для нейтральной частицы с

¹⁾ См. [122, 123]. Для обсуждения близких вопросов см. также статью [124], где впервые выведена низкоэнергетическая теорема для реакций фотообразования мезонов, и [125, 126].

магнитным моментом μ (нейтрона) дифференциальное сечение с точностью до членов порядка k^2 равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4k^2\mu^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) \quad \text{при } k \rightarrow 0.$$

В случае заряженных частиц интерференция между томпсоновским и релеевским рассеянием не выражается только через статические свойства частиц и имеет порядок k^2 . Поэтому ее нельзя отделить от вклада магнитного момента, который сам имеет порядок k^2 . Полный анализ k^2 -членов, таким образом, требует изучения динамических деталей взаимодействия и может быть выполнен, например, с помощью соотношений Крамерса — Кронига.

Нам остается еще отделаться от инфракрасной проблемы, встретившейся в проведенном выше анализе. При доказательстве равенства (19.136) необходимо было предположить гладкое поведение $(p'^2 - m^2) \tilde{S}'_F(p')$ в (19.133). Это предположение справедливо, однако, лишь в области $p'^2 - m^2 \leq 2m\lambda$, где λ — фиктивная масса фотона, откуда получаем ограничение на энергию фотона

$$(p + k)^2 - m^2 = 2mk_0 + \lambda^2 \leq 2m\lambda \quad \text{или} \quad k_0 < \lambda.$$

Однако если фотон имеет массу $\lambda > 0$, предел (19.132) никогда не достигается, поскольку наблюдаемое физическое сечение обязано обращаться в нуль для $k_0 < \lambda$. Чтобы придать выражению (19.137) какой-либо смысл, следует расширить область его применимости и считать, что оно выполняется при $m \gg k$, $k' \gg \lambda$.

Основанием для такого обобщения служат эвристические аргументы, основанные на анализе инфракрасной проблемы в модели Блоха — Нордсика (§ 123). Аналогичные результаты в приближении e^2 были получены в гл. 7, 8. Согласно (17.89) и (17.95) амплитуда упругого комптоновского рассеяния при $\lambda \rightarrow 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mu\nu} &= \frac{ie^2}{m} g_{\mu\nu} \exp \left[-\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{q}} \int \frac{d^3q}{2q_0} \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\beta}}{q_0 - \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\beta}} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\beta}'}{q_0 - \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\beta}'} \right)^2 \right] \approx \\ &\approx \left(\frac{ie^2}{m} g_{\mu\nu} \right) \exp \left[-\frac{\alpha}{8\pi^2} \sum_{\mathbf{q}} \int \frac{d^3q}{q_0^3} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\beta}')^2 \right], \quad (19.138) \end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{\beta}' = \frac{1}{m} \mathbf{p}' = \frac{1}{m} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \text{скорость электрона отдачи,}$$

$$\boldsymbol{\beta} = 0, \quad q_0 \equiv \sqrt{|\mathbf{q}|^2 + \lambda^2},$$

¹⁾ Для неполяризованной мишени.

и стремится, таким образом, к нулю. Выражение (19.138) получается при классическом рассмотрении тока электронов умножением томпсоновской амплитуды на вероятность того, что при рассеянии не испускается ни одного дополнительного фотона. Эта вероятность равна $\langle 0 \text{ out} | 0 \text{ in} \rangle$ и дается формулой (17.89). При этом мы приходим к результату, согласующемуся с выражением (8.62) для вершинной поправки и с вычислением радиационных поправок второго порядка к комптоновской амплитуде, выполненными Броуном и Фейнманом [127].

При рассеянии вперед $\beta' = 0$ и экспонента равна единице, в результате выражение (19.138) не содержит инфракрасной особенности. Однако для любого $|\beta'| \neq 0$ и любого k инфракрасная особенность в экспоненте приводит к тому, что $\mathfrak{M}_{\mu\nu} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. При этом нарушается низкоэнергетическая теорема (19.137), которая была доказана в предположении, $k_0/\lambda \rightarrow 0$ при $k_0 \rightarrow 0$, в то время как здесь мы имеем обратную ситуацию: $\lambda/k_0 \rightarrow 0$.

Из опыта работы с инфракрасными расходимостями мы знаем, однако, что обращение в нуль упругой амплитуды $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ компенсируется неупругой амплитудой испускания произвольного числа мягких фотонов с $q < \Delta k$. Если учесть это обстоятельство, экспонента (17.89) заменяется на (17.95), а для дифференциального сечения вместо (19.138) получаем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{rad}} = \frac{\alpha^2}{m^2} (\epsilon \cdot \epsilon') \exp \left[-\frac{\alpha}{4\pi^2} \int_{\sim \Delta k}^m \frac{dq}{q} \int d\Omega_q \sum_{\epsilon} (\epsilon \cdot \beta')^2 \right] \approx \\ \approx \frac{\alpha^2}{m^2} (\epsilon \cdot \epsilon') \exp \left[-\frac{2\alpha}{3\pi} \beta'^2 \ln \left(\frac{m}{\Delta k} \right) \right], \quad (19.139)$$

где $\beta' = (2k/m) \sin^2(\theta/2)$. Нижний предел обрезания $\sim \Delta k$ равен разрешению по энергии в детекторе, т. е. той максимальной энергии, уносимой мягкими фотонами, которую еще нельзя детектировать измерительным прибором. Верхний предел в интеграле по dq равен¹⁾ $1/\Delta t \sim m$, где Δt — интервал времени, в течение которого скорость электрона возрастает от нуля до β' . Отметим, что обрезание на верхнем пределе необходимо здесь только потому, что для простоты использовалась классическая модель электронного тока.

Согласно (19.139) для любой энергии фотона k_0 можно в принципе проводить измерения со столь малым разрешением Δk , что результаты измерения дифференциального сечения будут значительно отличаться от томпсоновского предела за счет радиационных поправок. Однако если относительное энергетиче-

¹⁾ Напомним, что комптоновская амплитуда содержит промежуточные состояния с отрицательной энергией, которым в нерелятивистском пределе отвечают энергетические знаменатели $\sim 2m$.

ческое разрешение $\Delta k/k$ фиксировано, то (19.139) при $k \rightarrow 0$ действительно приближается к томпсоновскому пределу. В рассматриваемом случае, как впрочем и для большинства электродинамических процессов, прежде чем придавать определенный смысл каким-либо количественным предсказаниям эксперимента, необходимо тщательно проверить все экспериментальные условия.

§ 150. Асимптотическое поведение фейнмановских амплитуд

Теорема Вайнберга, [119], обсуждавшаяся в связи с вопросом о сходимости фейнмановских интегралов, содержит гораздо больше результатов, чем мы до сих пор использовали. В действительности эта теорема дает простые

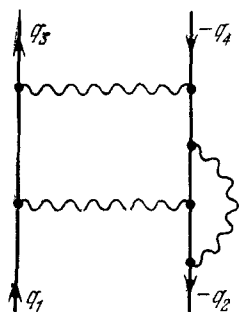


Рис. 19.52. Диаграмма шестого порядка для электрон-позитронного рассеяния

правила для вычисления асимптотического поведения любой фейнмановской амплитуды в случае, когда некоторые из внешних импульсов (или все импульсы одновременно) стремятся к бесконечности. Для формулировки этих правил, вывод которых основан на идеях, обсуждавшихся в § 146, удобно немного изменить введенное ранее определение субграфиков. Рассмотрим некоторый набор $\{Q_s\}$ внешних импульсов q_s , входящих в данную диаграмму; в дальнейшем положим $Q_s \rightarrow \infty$. Тогда, выбрав каким-либо способом внутренние импульсы $\{l_r\}$, мы определим субграфик, отвечающий данным внутренним линиям $\{L_r\}$ и внешним импульсам $\{Q_s\}$, как набор всех линий, содержащих по крайней мере один импульс из наборов L_r и Q_s , при условии, конечно, что получающаяся при этом диаграмма является связанной. Рассмотрим, например, диаграмму шестого порядка для электрон-позитронного рассеяния (рис. 19.52). Пусть нас интересует асимптотическое поведение амплитуды при $q_1, q_3 \rightarrow \infty$. Этому случаю отвечают субграфики, изображенные на рис. 19.53.

Каждому субграфику, определенному указанным выше способом, мы припишем «асимптотический коэффициент» α , который является аналогом введенной в § 146 степени расходимости D . Коэффициент α получается подсчетом степеней импульсов для всех линий, входящих в субграфик. При этом каждая фотонная и фермионная линии вносят вклад -2 и -1 соответственно, а каждое интегрирование в субграфику вносит вклад $+4$:

$$\alpha(g) = 4k - f - 2b,$$

где b — число фотонных линий в субграфике g , f — число фермионных линий в субграфике g , k — число интегралов по внутренним линиям в субграфике g . Например, если считать диаграмму

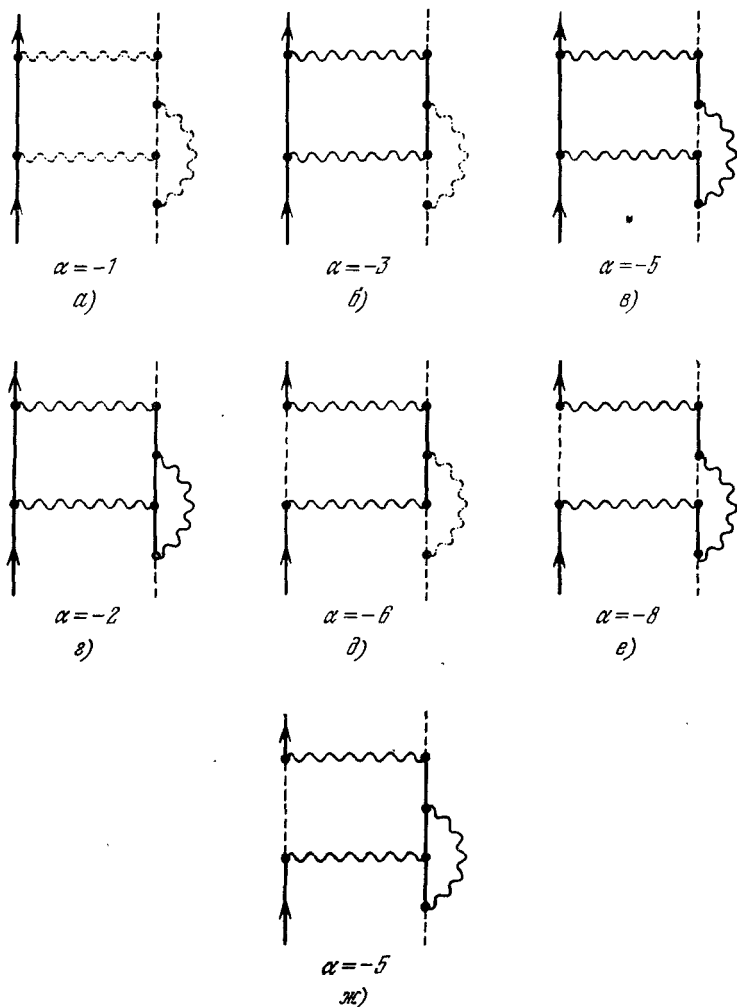


Рис. 19.53. Субграфики диаграммы рис. 19.52 и их асимптотические коэффициенты.

на рис. 19.52 *компактной* (т. е. исключить из рассмотрения внешние концы), то асимптотические коэффициенты субграфиков, изображенных на рис. 19.53, равны -1 , -3 , -5 , -2 , -6 , -8 и -5 соответственно.

Теорема Вайнберга утверждает, что если:

1) внешние импульсы q_s и внутренние импульсы l_r продолжены в область с евклидовой метрикой (см. § 145) и

2) импульсы $\{Q_s\}$ некоторых из внешних линий стремятся к бесконечности:

$$Q_s \rightarrow \chi Q_s, \quad \chi \rightarrow \infty,$$

то при $\chi \rightarrow \infty$ амплитуда $\mathfrak{M}(\chi Q_1 \dots \chi Q_l, q_{l+1} \dots q_m)$ асимптотически ведет себя как

$$\mathfrak{M} \sim \chi^\alpha (\ln \chi)^\beta,$$

где

$$\alpha = \max_{\text{субграфика } g} \alpha(g),$$

и $\alpha(g)$ — асимптотический коэффициент субграфика g . Коэффициент β теоремы Вайнберга не определяется.

В рассмотренном выше примере (рис. 19.52) амплитуда ведет себя как

$$\mathfrak{M} \sim \frac{1}{\chi} (\ln \chi)^\beta,$$

причем этот результат возникает из области интегрирования, в которой малы импульсы всех внешних линий, за исключением внутренней электронной линии, изображенной жирной линией в субграфике a) на рис. 19.53.

Идея доказательства сформулированных утверждений аналогична той, которая использовалась при доказательстве теоремы о сходимости фейнмановских интегралов. Каждый субграфик, отвечающий данному асимптотическому режиму, содержит интегрирование по импульсам $\{L_r\}$, которые велики при $\chi \rightarrow \infty$; остальные внутренние импульсы l_r в интеграле малы. Внутреннее интегрирование обрезается большими импульсами χQ_s , содержащимися в субграфике; при этом величина вклада определяется размерными соображениями, т. е. путем подсчета числа импульсов в диаграмме. Каждая линия в субграфике в том случае, когда она находится в асимптотическом режиме, может давать вклад либо -1 , либо -2 . Асимптотическое поведение амплитуды затем получается перебором всех возможных субграфиков (отвечающих, как и в § 146, «трубам» в $4k$ -мерном пространстве) и выделением доминирующего вклада.

Последующая перенормировка не изменяет выводов теоремы: асимптотическое поведение определяется по сформулированным правилам¹⁾ и в том случае, когда диаграмма содержит перенормированные вершинные и собственно-энергетические вставки (необходимые, чтобы придать смысл интегралу в целом!). В ча-

¹⁾ Это можно доказать по индукции.

стности, согласно теореме Вайнберга, асимптотическое поведение вершинной и собственно-энергетической частей в любом порядке по e совпадает с точностью до логарифмических множителей с поведением их затравочных выражений

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &\rightarrow \hat{p} (\ln(-p^2))^\beta \quad \text{при } p^2 \rightarrow -\infty, \\ \Pi_{\mu\nu}(q) &\rightarrow (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) (\ln(-q^2))^{\beta'} \quad \text{при } q^2 \rightarrow -\infty, \\ \Gamma_\mu(p, p', q) &\rightarrow \begin{cases} \gamma_\mu (\ln(-p^2))^{\beta''} & \text{при } p^2 \rightarrow -\infty, \\ \frac{\hat{p} \gamma_\mu \hat{p}}{p^2} (\ln(-p^2))^{\beta'''} & \text{при } p'^2 \rightarrow -\infty, \\ q \text{ фиксировано.} \end{cases} \end{aligned} \quad (19.140)$$

Аналогичный вид имеют асимптотические формулы и в том случае, когда другие комбинации импульсов p , p' и q стремятся к ∞ . Мы могли бы заранее угадать это поведение Σ , Π и Γ_μ , исходя из требования перенормируемости; действительно, при другом асимптотическом законе степень расходимости диаграммы увеличивалась бы при добавлении все нового и нового числа вершинных и собственно-энергетических вставок. Асимптотическое поведение, предсказываемое теоремой Вайнберга, согласуется с результатами, полученными во втором порядке в § 148.

Значение этой теоремы ограничено, однако, двумя обстоятельствами. Первое из них заключается в том, что теорема Вайнберга ничего не предсказывает об асимптотическом поведении точных функций, просуммированных во всех порядках по заряду. Например, рассмотрим гипотетическое разложение для $S_F'^{-1}(p)$ (безусловно, *неправильное* для всех членов, кроме второго порядка):

$$\begin{aligned} S_F'^{-1}(p) &\approx \hat{p} \left[1 - \frac{\alpha}{4\pi} \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2 \ln^2\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^3 \ln^3\left(-\frac{p^2}{m^2}\right) + \dots \right] = \\ &= \hat{p} \exp\left[-\frac{\alpha}{4\pi} \ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right)\right] = \hat{p} \left(\frac{m^2}{-p^2}\right)^{\alpha/4\pi} \quad \text{при } p^2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Это разложение приводит к асимптотическому поведению S_F' , совершенно отличающемуся от того, которое было получено в конечном порядке по e .

Другое обстоятельство, ограничивающее полезность теоремы Вайнберга, заключается в том, что она формулируется для нефизических значений импульсов, которые возникают при аналитическом продолжении в евклидовую область (§ 145). Желательно было бы оценить, например, асимптотику физических амплитуд

рассеяния в том случае, когда внешние импульсы остаются на массовой поверхности $q_s^2 = m_s^2$, а энергия s и переданный импульс t стремятся к бесконечности. Обсуждение этой более трудной и до сих пор полностью не решенной задачи имеется в литературе [128—131].

§ 151. Ренормализационная группа

Метод теории перенормировок основывался на переопределении пропагаторов, вершинных функций и τ -функций, т. е. на возможности замены по формулам (19.49) затравочных значений этих величин их перенормированными значениями. Помимо этой (возможно бесконечной) перенормировки, все величины в теории поля допускают также конечную перенормировку, с примером которой мы уже сталкивались в § 145. Возможность конечной перенормировки отражает произвол в выборе точки нормировки пропагаторов и вершинных функций, поскольку физические S -матричные элементы не зависят от выбора этой точки.

С существованием указанных масштабных преобразований (известных под названием ренормализационной группы) связана возможность получения информации о степени роста диаграмм высшего порядка без какого-либо реального вычисления самих этих диаграмм. При этом оказывается возможным, задавая поведение амплитуд в низших порядках теории возмущений, получить результаты относительно их поведения в следующих порядках. Кроме того, метод ренормализационной группы позволяет получить ряд интересных результатов, относящихся к структуре точной теории, и, в частности, к связи между голым и перенормированным зарядами [27, 59].

Ниже мы проиллюстрируем метод ренормализационной группы на примере рассмотрения точного фотонного пропагатора и перенормировки заряда. Согласно (19.51д) перенормированный пропагатор имеет вид

$$e^2 \tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} = - \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} d(q^2, 0, e^2) + \text{градиентные члены},$$

где скалярная функция $d(q^2, 0, e^2)$ равна

$$d(q^2, 0, e^2) = \frac{e^2}{1 + e^2 \Pi_c(q^2, 0, e^2)}. \quad (19.141)$$

Первый аргумент в d и Π есть переменная импульса. Второй аргумент равен тому значению импульса, при котором производится вычитание:

$$\Pi_c(q^2, 0, e^2) \equiv \Pi(q^2, 0, e^2) - \Pi(0, 0, e^2), \quad \Pi_c(0, 0, e^2) = 0. \quad (19.142)$$

Третий аргумент, e^2 , представляет собой параметр в перенормированном ряду теории возмущений. Величина e^2 равна физически наблюдаемому заряду

$$e^2 = 4\pi/137$$

и экспериментально определяется из кулоновского сечения при $q^2 \rightarrow 0$. Согласно (19.141), (19.142) и результатам § 149, относимся к томпсоновскому пределу комптоновского рассеяния,

$$d(0, 0, e^2) = e^2. \quad (19.143)$$

Предположим, что мы изменили всю схему перенормировки, описываемую уравнениями (19.51), и производим вычитание не в точке $q^2 = 0$, а в некоторой другой точке $q^2 = \lambda_1^2 \neq 0$. (Для того чтобы обеспечить вещественность функции d , мы выберем $\lambda_1^2 < 0$; при этом мы по-прежнему остаемся в той области, где абсорптивные амплитуды в спектральном представлении (16.172) равны нулю.) Выясним, к каким следствиям приводит такое изменение.

Согласно (19.49) комбинация

$$e^2 \tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} = e_0^2 D'_F(q)_{\mu\nu} \quad (19.144)$$

инвариантна при перенормировке заряда. Поэтому при вычитании в произвольной точке $q^2 = \lambda_1^2 < 0$ для $e^2 \tilde{D}'_F$ имеем

$$\begin{aligned} e^2 \tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} &= -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} d(q^2, 0, e^2) + \text{градиентные члены} = \\ &= -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} d(q^2, \lambda_1^2, e_1^2) + \text{градиентные члены}, \end{aligned} \quad (19.145)$$

где

$$d(q^2, \lambda_1^2, e_1^2) = \frac{e_1^2}{1 + e_1^2 [\Pi(q^2, \lambda_1^2, e_1^2) - \Pi(\lambda_1^2, \lambda_1^2, e_1^2)]}. \quad (19.146)$$

Новый «заряд», или параметр разложения e_1^2 , равен

$$d(\lambda_1^2, \lambda_1^2, e_1^2) = e_1^2. \quad (19.147)$$

С точностью до градиентных членов

$$d(q^2, 0, e^2) = d(q^2, \lambda_1^2, e_1^2), \quad (19.148)$$

откуда следует уравнение, связывающее заряды e_1^2 и $e^2 = 4\pi/137$ в точке $q^2 = 0$:

$$e^2 = d(0, \lambda_1^2, e_1^2). \quad (19.149)$$

Мы можем также выполнить перенормировку, вычитая расходящиеся величины в какой-либо третьей точке $\lambda_2^2 < 0$; при этом

снова получают соотношения, аналогичные (19.147) — (19.149). Тогда для двух произвольных точек λ_1^2 и λ_2^2 имеем

$$\begin{aligned} d(q^2, \lambda_1^2, e_1^2) &= d(q^2, \lambda_2^2, e_2^2), \\ e_2^2 &= d(\lambda_2^2, \lambda_2^2, e_2^2) = d(\lambda_2^2, \lambda_1^2, e_1^2). \end{aligned}$$

Выписанные два уравнения могут быть объединены в одно функциональное уравнение

$$d(q^2, \lambda_1^2, e_1^2) = d(q^2, \lambda_2^2, d(\lambda_2^2, \lambda_1^2, e_1^2)), \quad (19.150)$$

справедливое для всех λ_2^2 .

Посмотрим теперь, чего мы достигли. Функциональное уравнение (19.150) связывает пропагатор d с самим же пропагатором, правда, ценой введения дополнительного параметра λ^2 . Само по себе это обстоятельство еще не приводит к новым физическим результатам. Для того чтобы получить какие-либо следствия из функционального уравнения, необходимо задать дополнительную информацию о поведении функции d . Эта информация заключается в следующем: предположим, что в пределе $-\lambda_1^2 \gg m^2$, $-\lambda_2^2 \gg m^2$ и $-q^2 \gg m^2$ зависимостью функции d от массы m можно пренебречь. Ниже мы постараемся обосновать это предположение, а сейчас посмотрим, какие следствия могут быть из него получены.

Первое следствие основывается исключительно на анализе размерностей. Если постулировать отсутствие зависимости пропагатора от массы, то d является функцией только двух переменных, q^2/λ^2 и e^2 . Однако функциональное уравнение (19.150) накладывает ограничение на возможный вид зависимости d от q^2/λ^2 и e^2 и, следовательно, на поведение асимптотических членов в разложении функции d по степеням e^2 .

Согласно сделанному предположению при $-q^2, -\lambda_1^2 \gg m^2$

$$d(q^2, \lambda_1^2, e_1^2) \equiv d\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right). \quad (19.151)$$

Поэтому уравнение (19.150) можно переписать в виде (полагая $\lambda_2 = \lambda$)

$$d\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right) = d\left(\frac{q^2}{\lambda^2}, d\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right)\right) \quad (19.152)$$

с граничным условием

$$d(1, e_1^2) = e_1^2, \quad (19.153)$$

справедливым при всех e_1^2 . Замечательно, что решение уравнений (19.152) и (19.153) можно сразу выписать. Для этого про-

дифференцируем (19.152) по q^2 и положим $q^2 = \lambda^2$, тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^2} d\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right) = \frac{1}{\lambda^2} \Phi\left(d\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right)\right), \quad (19.154)$$

где в силу (19.153)

$$\Phi(e^2) = \frac{\partial}{\partial x} d(x, e^2) \Big|_{x=1}. \quad (19.155)$$

Уравнение (19.154) при фиксированных e_1^2 и λ_1^2 можно проинтегрировать

$$\int_{\lambda_1^2}^{q^2} \frac{d\lambda^2}{\lambda^2} = \int_{e_1^2}^{d(q^2/\lambda_1^2, e_1^2)} \frac{d[d(\lambda^2/\lambda_1^2, e_1^2)]}{\Phi(d(\lambda^2/\lambda_1^2, e_1^2))},$$

откуда

$$\ln \frac{q^2}{\lambda_1^2} = \int_{e_1^2}^{d(q^2/\lambda_1^2, e_1^2)} \frac{du}{\Phi(u)} = F\left(d\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right)\right) - F(e_1^2). \quad (19.156)$$

Разрешив это уравнение относительно d , получаем общее решение функционального уравнения (19.152)

$$d\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right) = F^{-1}\left[F(e_1^2) + \ln\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2}\right)\right]. \quad (19.157)$$

Если F^{-1} существует, то отсюда следует, что функция d , зависящая при больших импульсах от двух переменных, именно от q^2/λ^2 и e^2 , в действительности является функцией только от одной переменной, представляющей некоторую комбинацию этих двух переменных. Это обстоятельство не удивительно, поскольку при $-q^2 \gg m^2$ зависимости от импульса и заряда связаны между собой.

Используя вычисленные ранее первые несколько членов в разложении функции d по степеням e^2 , мы можем теперь применить метод ренормализационной группы для вычисления членов высшего порядка. Процедура заключается в следующем.

1. Подставим затравочное значение $d(x, e_1^2)$ и найдем $\Phi(e_1^2)$ из (19.155).

2. Проинтегрируем (19.156) и вычислим исправленное значение $d(x, e_1^2)$ по формуле (19.157).

Чтобы проиллюстрировать метод, предположим, что вся информация о функции d заключается лишь в том, что эту функцию можно разложить в степенной ряд по e_1^2 :

$$d(x, e_1^2) = e_1^2 + e_1^4 j(x) + O(e_1^6). \quad (19.158)$$

Тогда, используя (19.155), получаем

$$\Phi(e_1^2) = e_1^4 f'(1) + O(e_1^6).$$

Подставляя в (19.156), находим

$$\ln \frac{q^2}{\lambda_1^2} = \int_{e_1^2}^{d(q^2/\lambda_1^2, e_1^2)} \frac{du}{u^{2f'(1)}} + O\left(\ln \frac{d}{e_1^2}\right)$$

или

$$\frac{1}{d(x, e_1^2)} = \frac{1}{e_1^2} - f'(1) \ln x + O\left(\ln \frac{d}{e_1^2}\right)$$

и

$$d(x, e_1^2) = \frac{e_1^2}{1 - e_1^2 f'(1) \ln x + O(e_1^4 \ln x)}. \quad (19.159)$$

Таким образом, не вычисляя никаких фейнмановских интегралов, мы установили, что вакуумная поляризация во втором порядке асимптотически ведет себя как $\ln(q^2/\lambda^2)$ и что в четвертом порядке она растет также не быстрее $\ln(q^2/\lambda^2)$. Тем самым без всяких вычислений мы показали, что член $\ln^2(q^2/m^2)$, возникающий в четвертом порядке, в конце концов должен сократиться. В § 148 мы убедились в этом непосредственно с помощью весьма громоздких вычислений (см. (19.121)).

Аналогичным образом можно начать с выражения для пропагатора d с учетом всех вычисленных членов четвертого порядка

$$d(x, e_1^2) = \frac{e_1^2}{1 - \frac{e_1^2}{12\pi^2} \ln x - \frac{e_1^4}{64\pi^4} \ln x + O(e_1^6)}, \quad (19.160)$$

Тогда, вычислив Φ из (19.155) и d из (19.156), получим

$$d(x, e_1^2) =$$

$$= \frac{e_1^2}{1 - \frac{e_1^2}{12\pi^2} \ln x + \frac{3e_1^2}{16\pi^2} \ln \left(1 - \frac{e_1^2}{12\pi^2} \ln x\right) + O\left(e_1^2 \ln \frac{1+d}{1+e_1^2}\right)} =$$

$$= \frac{e_1^2}{1 - \frac{e_1^2}{12\pi^2} \ln x - \frac{e_1^4}{64\pi^4} \ln x - \frac{e_1^6}{1536\pi^6} \ln^2 x + O(e_1^6 \ln x)}$$

$$\text{при } \frac{e_1^2}{12\pi^2} \ln x \ll 1. \quad (19.161)$$

Таким образом, мы видим, что уравнения ренормализационной группы позволяют найти главный асимптотический член функции d в шестом порядке; при этом мы определяем не только функциональную зависимость этого члена, но численный коэффициент¹⁾.

Другим замечательным свойством уравнения (19.157) является то обстоятельство, что

$$d\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right) \rightarrow F^{-1}(\infty) \quad \text{при} \quad -q^2 \rightarrow \infty. \quad (19.162)$$

Это соотношение показывает, что при больших импульсах пропагатор стремится к пределу, не зависящему как от точки перенормировки λ_1 , так и от заряда e_1 . Однако из спектрального представления для фотонного пропагатора следует, что при больших импульсах функция d имеет смысл голого заряда e_0^2 . Согласно (16.172), полный неперенормированный пропагатор удовлетворяет спектральному представлению

$$D'_F(q)_{\mu\nu} = -q_{\mu\nu} \left[\frac{Z_3}{q^2} + \int_0^\infty \frac{dM^2 \Pi(M^2)}{q^2 - M^2} \right] + \text{градиентные члены}, \quad (19.163)$$

где $\Pi(M^2) \geq 0$. Более того, если спектральный интеграл существует, то справедливо правило сумм

$$1 = Z_3 + \int_0^\infty dM^2 \Pi(M^2) \quad \text{при} \quad q^2 \rightarrow \infty.$$

Поэтому точный пропагатор при больших импульсах должен совпадать, с точностью до градиентных членов, с неперенормированным пропагатором, т. е.

$$D'_F(q)_{\mu\nu} \rightarrow -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \text{градиентные члены при } q^2 \rightarrow \infty. \quad (19.164)$$

Сравнивая (19.162) и (19.164) и вспоминая, что произведение $e_0^2 D'_F(q)_{\mu\nu}$ инвариантно при перенормировке, получаем

$$e_0^2 = F^{-1}(\infty). \quad (19.165)$$

В этом пункте мы сталкиваемся со следующей дилеммой. Используя в этом параграфе аргументы основывались на возможности перенормировки рядов теории возмущений, которая,

¹⁾ Аналогичный подход применим и для исследования рядов теории возмущений для вершинных функций и фермионных пропагаторов как в ультрафиолетовой, так и в инфракрасной областях. Подробное обсуждение см. в цитированной выше книге Боголюбова и Ширкова.

в частности, подразумевает возможность разложения пропагаторов, вершинных функций и т. д. в ряды по степеням как перенормированного, так и затравочного зарядов. Однако уравнение (19.165) означает, что значение e_0 должно удовлетворять некоторому соотношению и тем самым не может быть выбрано произвольно. Это обстоятельство является совершенно чуждым самому духу теории возмущений и приводит нас к заключению, что по крайней мере одно из предположений, заложенных в нашей теории, неправильно¹⁾. Например, можно думать, что теория возмущений неприменима при $q^2 \rightarrow \infty$, поскольку уравнение (19.161) показывает, что последовательные члены этого разложения растут, когда

$$\ln \frac{q^2}{\lambda_1^2} \gg \frac{12\pi^2}{e_1^2}. \quad (19.166)$$

Закончив на этом с примерами применения ренормализационной группы, вернемся к основному предположению, с помощью которого мы смогли получить физические следствия из группового уравнения (19.150), а именно, к предположению о том, что пропагатор не зависит от m^2 при $-q^2 \gg m^2$, $-\lambda^2 \gg m^2$. Чтобы убедиться в правдоподобности этого предположения, мы покажем здесь, что решение перенормированных интегральных уравнений (19.51) нечувствительно к величине массы m при условии, что перенормировка выполнена в точке $-\lambda^2 \gg m^2$. С этой целью мы используем теорему Вайнберга об асимптотическом поведении фейнмановских амплитуд (§ 150) и применим метод индукции.

Рассмотрим перенормированные при некоторой большой массе $-\lambda^2 \gg m^2$ функции $\tilde{\Gamma}_\mu(p', p, \lambda)$, $\tilde{S}'_F(p, \lambda)$ и $\tilde{D}'_F(q, \lambda)$. Пусть при $p, p', q \rightarrow \infty$ эти величины с точностью до членов порядка e_λ^{n-2} могут быть аппроксимированы функциями, не зависящими от m . Используя теорему Вайнберга, мы покажем, что это утверждение справедливо также и для членов порядка e_λ^n . Например, согласно теореме Вайнберга,

$$\tilde{S}'_F{}^{-1}(p, \lambda) \rightarrow (\text{постоянная}) \beta \quad (\text{логарифм}) \quad \text{при } \beta \rightarrow \infty. \quad (19.167)$$

Предположим, что с точностью до e_λ^{n-2} асимптотическая часть $\tilde{S}'_F{}^{-1}(p, \lambda)$ не зависит от m , т. е. что постоянная и логарифм в (19.167) конечны при $-\lambda^2 \gg m^2$ и $m \rightarrow 0$. Наша цель заключается в том, чтобы показать, что это предположение справедливо с точностью до членов порядка e_λ^n . Конечность $\tilde{S}'_F{}^{-1}$ в при-

¹⁾ См. в этой связи, помимо ссылок, указанных на стр. 382, работу Ландау [132], а также [133, 134].

ближении e_λ^2 следует из уравнения (8.39), если в нем выполнить перенормировку в точке $-\lambda^2 \gg m^2$. Предположим также, что при $-\lambda^2 \gg m^2$ вершинная и фотонная собственно-энергетические части в порядке e_λ^{n-2} ведут себя так же, как и \tilde{S}_F^{-1} . В справедливости этого предположения во втором порядке теории возмущений легко убедиться непосредственно, используя¹⁾ результаты, полученные в гл. 8.

Начнем с вершинной функции. Для вычисления ее в порядке e_λ^n используем уравнения (19.51), в которых, однако, сделаем вычитание не на массовой поверхности, а при некотором большом λ . Нас интересует только асимптотическая часть, которая, согласно теореме Вейнберга, ведет себя как (постоянная) \times (логарифм) (см. (19.140)). Этот результат получается из рассмотрения тех внутренних интегрирований, асимптотические коэффициенты которых равны $\alpha = 0$. Единственно возможными субграфиками с неотрицательными асимптотическими коэффициентами являются, очевидно, вершинная и собственно-энергетическая части. Однако если эти субграфики целиком содержатся внутри вершинной диаграммы, то по крайней мере два из их внешних концов, присоединяющие субграфики к остальной части диаграммы, несут большой импульс и приводят к отрицательному асимптотическому коэффициенту. Поэтому единственная диаграмма с $\alpha = 0$ это сама вершинная диаграмма²⁾, имеющая нулевой асимптотический коэффициент (напомним, что внешние линии этой диаграммы не включены в определение компактной вершинной части). Вершинная часть имеет также степень расходимости, равную нулю, при этом соответствующая область интегрирования состоит из тех внутренних импульсов, которым отвечают большие внутренние пропагаторы. Поэтому для пропагаторов и вершинных вставок внутри Γ_μ можно подставить их асимптотические выражения. Отсюда следует, что масса m не входит существенным образом в интеграл для вершинной функции и что этот интеграл существует после перенормировки. Более того, асимптотическая часть Γ_μ существует при

1) Отметим, что если использовать нормировку

$$\tilde{S}'_F(p, \lambda) = \frac{1}{\beta - \bar{m}(\lambda)} \Big|_{\beta = \lambda \gg m}$$

и

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p, p, \lambda) \Big|_{\beta = \lambda} = \gamma_\mu,$$

то тождество Уорда $Z_1(\lambda) = Z_2(\lambda)$ не изменится. Ниже мы воспользуемся этим результатом.

2) За исключением субграфиков, содержащихся внутри вычитательных членов; ситуация здесь в точности аналогична той, которая возникает при обсуждении метода перенормировки.

$m \rightarrow 0$, поскольку логарифмически расходящиеся интегралы обрезаются либо величиной $-\lambda^2 \gg m^2$, либо внешними импульсами.

Полностью пренебрегая математической строгостью доказательства, мы можем продолжить наше рассмотрение и обратиться к тождеству Уорда с тем, чтобы вычислить $\tilde{S}'_F(p, \lambda)$ из $\tilde{\Gamma}'_\mu$; при этом мы заключаем, что \tilde{S}'_F также не зависит от m . Наконец можно использовать приведенные выше аргументы для рассмотрения фотонного пропагатора. В этом случае, согласно (19.140), следует выделить субграфики с асимптотическим коэффициентом $+2$. Такими графиками являются только сами эти графики, что можно показать, используя аргументы, аналогичные тем, которые использовались при рассмотрении вершинной функции. Таким образом, гипотеза индукции доказана.

Используя приведенные выше рассуждения, мы можем оправдать применение методов ренормализационной группы для улучшения асимптотических результатов теории возмущений. При этом молчаливо подразумевается, что, перебрав член за членом в ряду теории возмущений и вычислив асимптотическое поведение каждого из этих членов, мы получим асимптотическое поведение всей амплитуды в целом. Конечно, не следует забывать о возможности того, что опущенные как относительно малые при больших импульсах члены, при суммировании рядов теории возмущений окажутся доминирующими. Поэтому выводы, основанные на методе ренормализационной группы и относящиеся к величинам, просуммированным во всех порядках по ϵ , могут оказаться ненадежными и к ним следует относиться с осторожностью.

Впрочем, так обстоит дело со всеми результатами, полученными из локальных релятивистских теорий поля.

ЗАДАЧИ

1. Доказать обобщенное тождество Уорда (19.16), рассмотрев вакуумное среднее от произведения трех полей

$$\langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y) j_\mu(z)) | 0 \rangle$$

и используя сохранение тока и полевые уравнения.

2. Выписать общую структуру вершинной функции $\Gamma^\mu(p', p)$ и обсудить ограничения, накладываемые тождеством Уорда, а также \mathcal{F} -, \mathcal{C} - и \mathcal{P} -инвариантностью.

3. Дополнить доказательство перенормируемости (§ 147) и показать, что произвольное $l_1 \dots l_s$ -внутреннее интегрирование приводит к сходящемуся результату.

4. Проверить результаты в уравнениях (19.109), (19.111), (19.117) и (19.118).

5. Проверить уравнения (19.120) и (19.122) и получить аналогичные результаты в пределе $-q^2/m^2 \ll 1$.

6. Проверить уравнение (19.131).

7. Проверить уравнение (19.135) и вычислить Φ и I .

8. С помощью представления Челлена — Лемана доказать существование обратной функции F^{-1} в (19.157).

9. Проверить уравнение (19.161).

10. Выписать общее выражение для амплитуды образования реальных электрона и фотона на массовой поверхности ($p^2 = m^2$, $l^2 = 0$). Используя обобщенное тождество Уорда, показать, что эта амплитуда может быть выражена в терминах четырех скалярных функций $F_i(W^2)$, где $W^2 = (p + l)^2$. Выписать дисперсионное соотношение для $F_i(W^2)$ и связать их с неприводимыми вершинными функциями задачи 2. В частности, обсудить и объяснить физический смысл появления заряда e как необходимой константы вычитания в дисперсионных соотношениях для этой амплитуды.

11. Доказать перенормируемость теории псевдоскалярных мезонов, взаимодействующих с нуклонами посредством связи без производных. Учесть то обстоятельство, что, поскольку эта теория не обладает градиентной инвариантностью, при доказательстве необходимо дополнительно рассмотреть субграфики π — π -рассеяния.

КОММУТАТОРЫ И ФУНКЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ¹⁾

Ниже собраны выражения для инвариантных функций, встречающихся в этой книге.

Фейнмановский пропагатор для свободного уравнения Дирака имеет вид

$$S_F(x' - x) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} [\theta(t' - t) \Lambda_+(p) e^{-ip(x' - x)} + \theta(t - t') \Lambda_-(p) e^{ip(x' - x)}] = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x' - x)} \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Величину $i\epsilon$ в знаменателе следует понимать в смысле предельного значения $\epsilon \rightarrow 0^+$. Это означает, что при вычислении интеграла по dp_0 следует ис-

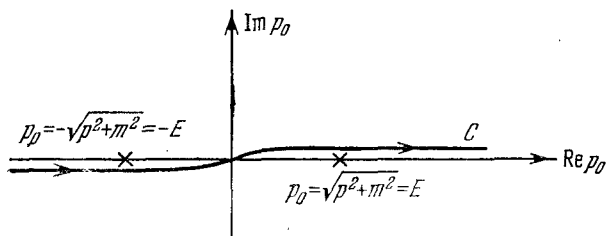


Рис. В. 1.

пользовать контур интегрирования, указанный на рис. В.1. $\theta(t' - t)$ есть единичная ступенчатая функция:

$$\theta(t' - t) = \begin{cases} +1 & t' > t \\ 0 & t' < t \end{cases} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i\epsilon} e^{-\omega(t' - t)}.$$

Пропагатор S_F удовлетворяет дифференциальному уравнению для функции Грина

$$(i\hat{\nabla}_{x'} - m) S_F(x' - x) = \delta^4(x' - x).$$

¹⁾ Приложения А и В см. в первом томе.

В импульсном пространстве

$$S_F(p) \equiv \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \equiv \frac{1}{\hat{p} - m + i\epsilon}.$$

Фейнмановский пропагатор для уравнения Клейна — Гордона равен

$$\begin{aligned} \Delta_F(x' - x) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [\theta(t' - t) e^{-ik(x' - x)} + \theta(t - t') e^{ik(x' - x)}] = \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x' - x)} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

и удовлетворяет уравнению

$$(\square_{x'} + m^2) \Delta_F(x' - x) = -\delta^4(x' - x).$$

В импульсном пространстве

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Функции Δ_F и S_F связаны соотношением

$$S_F(x' - x) = + (i\hat{V}_{x'} + m) \Delta_F(x' - x). \quad (\text{B. 1})$$

Определим функцию Грина для уравнения д'Аламбера с $m \rightarrow 0$:

$$\square_x D_F(x' - x) = +\delta^4(x' - x)$$

(отметим изменение знака по сравнению с Δ_F). Фейнмановский пропагатор для фотонов равен

$$D_F(q)_{\mu\nu} = +g_{\mu\nu} D_F(q) = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}.$$

Функцию Δ_F можно представить в виде

$$2\Delta_F(x' - x) = -i\Delta_1(x' - x) + \epsilon(t' - t)\Delta(x' - x),$$

где Δ_1 и Δ — четное и нечетное решения однородного волнового уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_1(x' - x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (e^{-ik(x' - x)} + e^{+ik(x' - x)}), \\ \Delta(x' - x) &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (e^{-ik(x' - x)} - e^{+ik(x' - x)}), \\ (\square_{x'} + m^2) \Delta_1(x' - x) &= 0, \quad \Delta_1(x' - x) = +\Delta_1(x - x'), \\ (\square_{x'} + m^2) \Delta(x' - x) &= 0, \quad \Delta(x' - x) = -\Delta(x - x'), \end{aligned}$$

а

$$\epsilon(t' - t) \equiv 2\theta(t' - t) - 1 = \begin{cases} +1, & t' > t, \\ -1, & t' < t. \end{cases}$$

Нечетная функция Δ обращается в нуль вне светового конуса

$$\Delta(x' - x) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x' - x)^2 < 0;$$

на световом конусе Δ имеет особенность

$$\left(\frac{\partial \Delta(x' - x)}{\partial x'_0} \right)_{x'_0 - x_0 = 0} = -\delta^3(x' - x).$$

Общее выражение для функции Δ таково:

$$\Delta(x' - x) = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{cases} J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}), & t > r, \\ 0, & -r < t < r, \\ -J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}), & t < -r, \end{cases}$$

где

$$r \equiv |x' - x|, \quad t \equiv x'_0 - x_0$$

и J_0 — регулярная функция Бесселя.

Четная функция Δ_1 не обращается в нуль вне светового корпуса, при $r > |t|$ она падает экспоненциальным образом:

$$\left(\frac{\partial \Delta_1(x' - x)}{\partial x'_0} \right)_{x'_0 - x_0 = 0} = 0,$$

$$\Delta_1(x' - x) = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{cases} Y_0(m\sqrt{t^2 - r^2}), & |t| > r, \\ -\frac{2}{\pi} K_0(m\sqrt{r^2 - t^2}), & r > |t|, \end{cases}$$

где Y_0 и K_0 — цилиндрические функции (см. Г. Н. Ватсон, Теория бesselевых функций, М., ИЛ, 1949).

Для электромагнитного поля $m \rightarrow 0$ и

$$-D(x' - x) = \lim_{m \rightarrow 0} \Delta(x' - x) = -\frac{1}{4\pi r} [\delta(r - t) - \delta(r + t)],$$

$$-D_1(x' - x) = \lim_{m \rightarrow 0} \Delta_1(x' - x) = \frac{1}{4\pi^2 r} \left(P \frac{1}{r - t} + P \frac{1}{r + t} \right),$$

где $r \equiv |x' - x|$, $t \equiv x'_0 - x_0$ и P означает главное значение.

Можно рассмотреть также положительно-частотные и отрицательно-частотные части функций Δ и Δ_1 , которым соответствуют два члена в интегралах, определяющих эти функции:

$$\Delta_1(x' - x) = \Delta_+(x' - x) + \Delta_-(x' - x),$$

$$i\Delta(x' - x) = \Delta_+(x' - x) - \Delta_-(x' - x).$$

Для уравнения Дирака определим

$$S(x' - x) = -(i\hat{\nabla}_x + m) \Delta(x' - x),$$

$$S_1(x' - x) = -(i\hat{\nabla}_x + m) \Delta_1(x' - x)$$

(B.2)

и

$$2S_F(x' - x) = +iS_1(x' - x) - e(t' - t)S(x' - x).$$

Различие в знаках в уравнениях (B.1) и (B.2) есть следствие нашего соглашения о фазовых множителях, которое приводит к тому, что при практических вычислениях возникает минимальное число знаков минус. Функции Δ_F ,

D_F и S_F , связаны с T -упорядоченными произведениями свободных полей Клейна — Гордона, Максвелла и Дирака:

$$\langle 0 | T (\varphi_i(x') \varphi_j(x)) | 0 \rangle = i \delta_{ij} \Delta_F(x' - x),$$

$$\langle 0 | T (\varphi(x') \varphi^*(x)) | 0 \rangle = i \Delta_F(x' - x),$$

$$\langle 0 | T (A_\nu(x') A_\mu(x)) | 0 \rangle = i D_F^{\text{tr}}(x' - x)_{\nu\mu} =$$

$$= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x'-x)}}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\nu(k, \lambda) \varepsilon_\mu(k, \lambda) =$$

$= i g_{\nu\mu} D_F(x' - x) +$ градиентные члены — кулоновский член

$$\langle 0 | T (\psi_\beta(x') \bar{\psi}_\alpha(x)) | 0 \rangle = i S_{F\beta\alpha}(x' - x).$$

Определим еще запаздывающую и опережающую функции Грина:

$$\Delta_{\text{ret}}(x' - x) = - \Delta(x' - x) \theta(t' - t),$$

$$\Delta_{\text{adv}}(x' - x) = + \Delta(x' - x) \theta(t - t').$$

Δ_{ret} равна нулю внутри переднего светового конуса, в то время как Δ_{adv} исчезает внутри заднего светового конуса. Эти функции удовлетворяют неоднородному волновому уравнению

$$(\square_{x'} + m^2) \Delta_{\text{adv}}^{\text{ret}}(x' - x) = \delta^4(x' - x).$$

Аналогично

$$S_{\text{adv}}^{\text{ret}}(x' - x) = - (i \widehat{V}_{x'} + m) \Delta_{\text{adv}}^{\text{ret}}(x' - x)$$

и

$$D_{\text{adv}}^{\text{ret}}(x' - x) = + \lim_{m \rightarrow 0} \Delta_{\text{adv}}^{\text{ret}}(x' - x).$$

Наконец приведем выражения для различных вакуумных средних свободного эрмитового бесспинового поля:

$$\langle 0 | [\varphi(x'), \varphi(x)] | 0 \rangle = i \Delta(x' - x),$$

$$\langle 0 | \{\varphi(x'), \varphi(x)\} | 0 \rangle = \Delta_1(x' - x),$$

$$\langle 0 | \varphi(x') \varphi(x) | 0 \rangle = \Delta_+(x' - x),$$

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi(x') | 0 \rangle = \Delta_-(x' - x),$$

$$\langle 0 | T (\varphi(x') \varphi(x)) | 0 \rangle = i \Delta_F(x' - x),$$

$$\langle 0 | \bar{T} (\varphi(x') \varphi(x)) | 0 \rangle = i \bar{\Delta}_F(x' - x),$$

$$\langle 0 | [\varphi(x'), \varphi(x)] | 0 \rangle \theta(t' - t) = - i \Delta_{\text{ret}}(x' - x),$$

$$\langle 0 | [\varphi(x'), \varphi(x)] | 0 \rangle \theta(t - t') = + i \Delta_{\text{adv}}(x' - x).$$

Аналогичные формулы можно выписать для полей Дирака и Максвелла.

ДОПОЛНЕНИЯ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

1. Рассеяние мюона на электроне (к § 27). В § 27 рассмотрена задача о рассеянии электрона на бесструктурной дираковской частице (тяжелом электроне). Как там отмечалось, такое рассмотрение неприменимо к протону, поскольку оно не учитывает его структуру и его аномальный магнитный момент, связанные с сильными взаимодействиями. Но эта задача буквально соответствует задаче о рассеянии мюона на электроне, так как мюон в смысле его электромагнитных свойств действительно отличается от электрона только массой и не подвержен сильным взаимодействиям. Таким образом, формулы § 27 остаются справедливыми, т. е. описывающими рассеяние мюона на электроне, если в них заменить e_p на e , а под M подразумевать массу мюона.

Дифференциальное сечение рассеяния определяется формулой (7.42), а квадрат матричного элемента для случая неполяризуемых частиц — формулой (7.43). В системе центра инерции выражение для дифференциального сечения имеет следующий вид:

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 d\Omega}{(e + E)^2 p^4 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \left[(eE + p^2)^2 + (eE + p^2 \cos^2 \Theta)^2 - 2(m^2 + M^2) p^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right],$$

где p — импульс в системе центра инерции, $e = \sqrt{p^2 + m^2}$, $E = \sqrt{p^2 + M^2}$ — энергия электрона и мюона, Θ — угол рассеяния, $d\Omega$ — элемент телесного угла (все в системе центра инерции).

2. Превращение электронной пары в мюонную пару (к § 32). При столкновении электрона и позитрона, кроме упругого рассеяния, может произойти их аннигиляция с превращением в мюонную пару (положительно и отрицательно заряженные мюоны). Этот процесс описывается второй диаграммой (рис. 7.12, б), а амплитуда — формулой (7.86), в которой надо опустить первый член в квадратных скобках, заменить m^2 на mM и считать p'_1 и q'_1 соответственно импульсами μ^- - и μ^+ -частиц (p_1 и q_1 — по-прежнему импульсы электрона и позитрона). Из законов сохранения следует, что превращение возможно при $E \geq M$, где E — энергия электрона (позитрона) в системе центра инерции.

Полное сечение превращения равно

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{4E^2} \left(1 + \frac{M^2}{2E^2}\right) \sqrt{1 - \frac{M^2}{4E^2}}.$$

Заметим, что эта формула неприменима непосредственно вблизи порога процесса, где образующиеся мюоны нельзя считать свободными.

3. Неупругое рассеяние электрона на протоне (к § 56). В § 56 рассматривалась задача об упругом рассеянии электрона на реальном протоне. Для этого было модифицировано выражение для тока (7.34), отвечающее «дираковскому» протону. Эта модификация сводилась к замене J на $\langle P_f | J | P_i \rangle$ — матричный элемент точного оператора тока протона, учитывающего сильные взаимодействия (но первого порядка по электромагнитным взаимодействиям). Как было показано в § 56, этот матричный элемент может быть представлен феноменологически в виде

$$\bar{u}(P_f) \Gamma_\mu u(P_i),$$

где Γ_μ — вершинная функция протона, выражающаяся согласно (10.88) через два инвариантных форм-фактора F_1, F_2 , являющихся функциями от квадрата переданного импульса q^2 . Таким образом, амплитуда рассеяния может быть определена на основании простой диаграммы Фейнмана (рис. 7.3) с заменой в протонной вершине γ^μ на Γ^μ .

Аналогично можно рассмотреть задачу о неупругом рассеянии электрона на протоне, т. е. процесс, в котором электрон теряет импульс q , а протон превращается в некоторую совокупность адронов. Для этого надо использовать диаграмму рис. 7.3 или формулу (7.31), заменив протонный ток J^μ на матричный элемент тока

$$\langle n | j^\mu | P_i \rangle,$$

где $|P_i\rangle$ — начальное состояние протона с импульсом P_i , а $|n\rangle$ — конечное адронное состояние.

Элемент матрицы рассеяния S_{fi} , отвечающий этому процессу, будет содержать амплитуду

$$\mathfrak{M}^{(n)} = \bar{u}(p_f) \gamma_\mu u(p_i) \langle n | j^\mu | P_i \rangle \frac{1}{q^2},$$

где, как и в § 27, p_i и p_f — импульсы электрона до и после рассеяния, а $u(p_i)$ и $u(p_f)$ — соответствующие дираковские амплитуды (мы опустили для краткости спиновые индексы), $q = p_i - p_f$.

Дифференциальное сечение рассеяния с образованием адронного состояния n , вычисленное по обычным правилам, имеет следующий вид:

$$d\sigma^{(n)} = |\mathfrak{M}^{(n)}|^2 (2\pi)^4 \delta(P_n + p_f - p_i - P_i) \frac{1}{4(P_i p_i)} d^4 p_f \frac{\delta(p_f^2)}{(2\pi)^3}$$

(в этой формуле и далее мы пренебрегаем массой электрона).

Просуммировав это выражение по спиновым состояниям электрона в конечном состоянии, усреднив по спиновым состояниям электрона в начальном состоянии и просуммировав по всем конечным адронным состояниям n , мы получим сечение рассеяния электрона на протоне при данном угле рассеяния и данной потере энергии (инклюзивное сечение).

В качестве независимых переменных удобно выбрать инварианты

$$q^2 = (p_i - p_f)^2, \quad \nu = (P_f q).$$

Мы получим

$$d\sigma = dq^2 d\nu \frac{\alpha^2}{4q^2 (P_i p_i)^2} w^{\mu\nu} W_{\mu\nu},$$

где

$$w^{\mu\nu} = 2 (p_i^\mu p_f^\nu + p_i^\nu p_f^\mu - g^{\mu\nu} p_i p_f),$$

$$W_{\mu\nu} = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_n - P_i - q) \langle P_i | j_\mu | n \rangle \langle n | j_\nu | P_i \rangle.$$

Тензорная структура $W_{\mu\nu}$ определяется только двумя векторами, P_i и q . Из этих векторов и метрического тензора $g_{\mu\nu}$ можно построить всего пять независимых тензоров. Требования инвариантности относительно обращения времени и сохранение тока накладывают три условия. Поэтому $W_{\mu\nu}$ определяется двумя инвариантными функциями от двух переменных: q^2 и ν . Мы можем записать $W_{\mu\nu}$ в следующем виде:

$$W_{\mu\nu} = 4\pi M W_1 \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) + \frac{4\pi}{M} W_2 \left(P_{i\mu} - \frac{\nu}{q^2} q_\mu \right) \left(P_{i\nu} - \frac{\nu}{q^2} q_\nu \right).$$

Выражение для сечения мы запишем в системе покоя протона, в которой

$$q^2 = 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \nu = Mq_0, \quad P_i p_i = M\varepsilon,$$

где ε_1 , ε_2 — соответственно начальная и конечная энергии электрона, а θ — угол рассеяния электрона,

$$d\sigma = d\varepsilon_2 d\sigma_{\text{Мотт}} \left(W_2 + W_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Здесь $d\sigma_{\text{Мотт}}$ — сечение рассеяния релятивистского электрона в кулоновском поле:

$$d\sigma_{\text{Мотт}} = d\sigma_2 \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_1^2} \frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2}.$$

Таким образом, неупругое рассеяние определяется двумя структурными функциями двух инвариантов, W_1 и W_2 . Если при больших энергиях адронная структура такова, что не зависит от дополнительных размерных параметров (типа масс), то W_1 и W_2 могут зависеть только от безразмерных отношений q^2/ν (автомодельность или масштабная инвариантность). Тогда W_1 , W_2 должны

иметь вид

$$W_i = \frac{M}{v} F_i \frac{q^2}{v}.$$

Заметим, что общее выражение для $W_{\mu\nu}$ может быть представлено в виде

$$W_{\mu\nu} = \int d^4x e^{iqx} \langle P_i | [j_\mu(x), j_\nu(y)] | P_i \rangle,$$

где $[j_\mu(x), j_\nu(y)]$ — коммутатор операторов тока в двух мировых точках.

4. Аннигиляция электронной пары в адроны и адронная поляризация вакуума (к § 140). Электрон и позитрон могут аннигилировать, испустив виртуальный фотон, а последний — образовать из вакуума совокупность адронов в некотором состоянии n . Обозначим импульс электрона p_- , импульс позитрона p_+ , импульс виртуального фотона q , а импульс (суммарный) адронов p_n ; при этом

$$p_- + p_+ = q = p_n.$$

Ток перехода пары в вакуум есть $\bar{v}(p_+) \gamma_\mu u(p_-)$, ток перехода вакуума в адронное состояние мы обозначим как в § 110, через $\langle n | j_\mu | 0 \rangle$. Процесс аннигиляции описывается, следовательно, амплитудой

$$\mathfrak{M}_n = \frac{e^2}{q^2} (\bar{v}(p_+) \gamma_\mu u(p_-)) \langle n | j^\mu | 0 \rangle.$$

Определим полное сечение σ аннигиляции во всевозможные адронные состояния. Будем считать, что энергия пары значительно превышает массу электрона и последней будем пренебрегать. Тогда

$$\sigma = \frac{1}{2q^2} \sum_n |\mathfrak{M}_n|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_n - q).$$

После подстановки сюда выражения для \mathfrak{M}_n и усреднения по спиновым состояниям электрона и позитрона получим

$$\sigma = \frac{\pi e^4}{2q^6} w_{\mu\nu} J^{(n)\mu\nu},$$

где

$$w^{\mu\nu} = p_-^\mu q^\nu + p_-^\nu q^\mu - 2p_-^\mu p_-^\nu - \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu},$$

а $J_{\mu\nu}^{(n)}$ определено (16.158), (16.163):

$$J_{\mu\nu}^{(n)} = \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - q_{\mu\nu} \right) J^{(n)}(q^2) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^{(4)}(p_n - q) \langle 0 | j_\mu | n \rangle \langle n | j_\nu | 0 \rangle,$$

с тем отличием, что здесь под токами подразумеваются адронные токи.

Подставляя эти выражения, получим

$$\sigma^{(n)}(q^2) = \frac{\pi e^4}{q^4} J^n(q^2).$$

Заметим, что функция $J(q^2)$, согласно (16.173), определяет поляризацию вакуума $\Pi(q^2)$. Таким образом, измеряя сечение аннигиляции в адроны, мы определяем (в первом приближении по e^2) адронный вклад в поляризацию вакуума

$$\Pi^{(n)}(q^2) = \frac{e^2}{q^4} J^{(n)}(q^2).$$

Аналогичным образом мы можем определить мюонный вклад в поляризацию вакуума. Действительно, формулу для сечения аннигиляции мы можем применить и к образованию мюонных пар.

$$\sigma^{(\mu)}(q^2) = \frac{\pi e^4}{q^4} J^{(\mu)}(q^2),$$

где $J^{(\mu)}$ также выражается по формулам (16.158), (16.163) через мюонные токи. Используя вычисленное в дополнении 1 выражение для $\sigma^{(\mu)}$, найдем

$$J^{(\mu)}(q^2) = \frac{q^2}{12\pi^2} f(q^2),$$

где

$$f(q^2) = \sqrt{1 - \frac{4M^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2M^2}{q^2} \right).$$

Заметим, что эта же формула определяет и соответствующую функцию $J^{(e)}(q^2)$ (с заменой M на m).

Таким образом, спектральную плотность, определяющую адронный вклад в поляризацию вакуума, можно записать в виде (при $f(q^2) \sim 1$)

$$J^{(n)}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} R(q^2),$$

где

$$R(q^2) = \sigma^{(n)}(q^2)/\sigma^{(\mu)}(q^2)$$

— отношение сечений образования адронов и мюонов при аннигиляции электронной пары.

ЛИТЕРАТУРА 1)

1. R. P. Feynman, Rept. Solvay Congr., Brussels, New York, Interscience Publishers, Inc., 1961.
- 2*. P. Gatto, в книге «Электромагнитные взаимодействия и структура элементарных частиц». «Мир», 1969, стр. 43; Д. Йенни, там же, стр. 123.
- 3*. S. J. Brodsky, S. D. Drell, Ann. Rev. Nucl. Science 20, 147 (1970).
- 4*. B. E. Lautrop, A. Peterman, E. de Rafael, Phys. Rev. 3С, 193 (1972).
5. Г. Гольдштейн, Классическая механика, «Наука», 1975.
6. W. Heisenberg und W. Pauli, Z. Physik 56, 1 (1929). (Русский перевод: В. Паули, Труды по квантовой теории, «Наука», 1977, стр. 30.)
7. G. Wentzel, Quantum Theory of Field, New York, Interscience Publishers, Inc., 1949. (Русский перевод: Г. Венцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1947.)
8. E. L. Hill, Rev. Mod. Phys. 23, 233 (1957).
- 9*. Э. Шмутцер, Симметрии и законы сохранения в физике, «Мир», 1974; Э. Шмутцер, Основные принципы классической механики и классической теории поля, «Мир», 1976
10. J. Schwinger, Phys. Rev. 91, 713 (1953).
11. R. E. Peierls, Proc. Roy. Soc. (London) A214, 143 (1952).
12. H. Lehman, K. Symanzik and W. Zimmermann, Nuovo Cimento 1, 1425 (1955).
13. H. Lehman, K. Symanzik and W. Zimmermann, Nuovo Cimento 6, 319 (1957).
14. N. Bohr and L. Rosenfeld, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-Fyz. Medd. 12, 8 (1933); Phys. Rev. 78, 794 (1950) (Избранные научные труды, т. 2, «Наука», 1971, стр. 120, 434).
15. W. Pauli and V. F. Weisskopf, Helv. Phys. Acta. 7, 709 (1934). (Русский перевод: В. Паули, Труды по квантовой теории, «Наука», 1977, стр. 194.)
16. P. Jordan and O. Klein, Z. Physik 45, 751 (1927).
17. P. Jordan and E. P. Wigner, Z. Physik 47, 631 (1928).
18. V. Fock, Z. Physik 75, 622 (1932).
19. H. S. Green, Phys. Rev. 90, 270 (1953); A. M. L. Messiah and O. W. Greenberg, Phys. Rev. 136, B248 (1964).
20. O. W. Greenberg and A. M. L. Messiah, Phys. Rev. 138, B1155 (1965); J. Math Phys. 6, 500 (1969).
- 21*. Д. В. Волков, ЖЭТФ 36, 15 (1959); ЖЭТФ 38, 518 (1960).
22. W. Pauli, Ann. Inst. Henri Poincaré 6, 137 (1936); Phys. Rev. 58, 715 (1940). (Русский перевод: В. Паули, Труды по квантовой теории, «Наука», 1977, стр. 244, 354)
23. S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. (London) A63, 681 (1960); K. Bleuer, Helv. Phys. Acta 23, 567 (1950).

1) Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе. Работы, изданные на русском языке, цитируются по последним изданиям. (прим. перев.).

24. *E. Fermi*, *Rev. Mod. Phys.* **4**, 87 (1932). (Русский перевод см. в книге *Э. Ферми*, Научные труды, т. I, «Наука», 1971, стр. 375.)
25. *C. Швeбер*, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
26. *J. M. Jauch, F. Rohrlich*, *The Theory of Photons and Electrons*, Cambridge, Mass., Addison — Wesley Publishing Company, Inc., 1955.
27. *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*, Введение в теорию квантованных полей, «Наука», 1976.
- 28*. *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий*, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.
29. *H. Casimir*, *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap, Proc., Ser. B*, 793, (1948); *M. Fierz*, *Helv. Phys. Acta* **33**, 855 (1960).
30. *P. A. M. Dirac*, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A167**, 148 (1938); *G. N. Plass*, *Rev. Mod. Phys.* **33**, 37 (1961).
31. *J. Schwinger*, *Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, Inc., New York, 1958.
- 32*. *Р. Фейнман*, Квантовая электродинамика, «Мир», 1964; *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский*, Релятивистская квантовая теория, часть 2, «Наука», 1971.
33. *B. Zumino*, *J. Math. Phys.* **1**, 1 (1960).
34. *F. J. Dyson*, *Phys. Rev.* **85**, 631 (1952).
35. *M. Chretien and R. E. Peierls*, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A223**, 468 (1954).
36. *K. Baumann*, *Z. Physik* **152**, 448 (1958); *K. Nishijima*, *Progr. Theor. Phys. (Kyoto)* **11**, 995 (1958).
37. *W. Zimmermann*, *Nuovo Cimento* **10**, 567 (1958).
38. *G. F. Chew*, *Physics* **1**, 77 (1964).
39. *M. Gell-Mann and Y. Ne'eman*, *The Eightfold Way*, New York, W. A. Benjamin, Inc., 1965.
- 40*. *Л. Б. Окунь*, Слабое взаимодействие и унитарная симметрия, ВИНТИ, 1965.
- 41*. *Нгуен Ван Хьеу*, Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц, Атомиздат, 1967.
42. *A. Pais*, *Phys. Rev.* **86**, 633 (1952).
43. *M. Gell-Mann*, *Phys. Rev.* **92**, 833 (1953).
44. *K. Nishijima*, *Progr. Theoret. Phys. (Kyoto)* **12**, 107 (1954).
45. *P. Ferebush and M. Grisaru*, *Nuovo Cimento* **9**, 1058 (1958).
46. XII Международная конференция по физике высоких энергий, Дубна, 1964, Атомиздат, 1966.
- 47*. *Ц. Лу и Ц. Ву*, Слабые взаимодействия, «Мир», 1968.
48. *E. P. Wigner*, *Göttinger Nachr.* **31**, 546 (1932). (Русский перевод в книге *Е. Вигнер*, Этюды о симметрии, «Мир», 1971, стр. 262.)
49. *W. B. Pauli* (ed.), *Niels Bohr and the Development of Physics*, New York, McGraw-Hill Book Company, 1955. (Русский перевод «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958.)
50. *G. Lüders*, *Ann. Phys.* **2**, 1 (1957).
51. *R. F. Streater and A. S. Wightman*, *PCT, Spin and Statistics and All That*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1964. (Русский перевод: *Р. Стратер и А. Вайтман*, PCT, Спин и статистика и все такое, «Наука», 1966.)
52. *K. Nishijima*, *Phys. Rev.* **111**, 995 (1958).
53. *S. Weinberg and A. Salam*, *Proc. 1962 Intern. Conf. High-energy Phys., CERN, Geneva*, p. 683—687.
54. *O. W. Greenberg*, *Doctoral dissertation*, Princeton University, Princeton, N. Y., 1956.
55. *G. Källén*, *Helv. Phys. Acta* **25**, 417 (1952).
56. *H. Lehman*, *Nuovo Cimento* **11**, 342 (1954). (Русский перевод см. в сб. «Проблемы современной физики» № 3, ИЛ, 1955, стр. 133.)
- 57*. *Г. Бартон*, Дисперсионные методы в теории поля, Атомиздат, 1968.

58. *F. Low*, Phys. Rev. **97**, 1392 (1955).
59. *M. Gell-Mann and F. Low*, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954). (Русский перевод см. в сб. «Проблемы современной физики», № 3, ИЛ, 1955, стр. 195.)
60. *K. Sekine*, Nuovo Cimento **11**, 87 (1959).
61. *K. Hida*, Phys. Rev. **132**, 1239 (1963); **134**, B174 (1964).
62. *L. Evans and T. Fulton*, Nucl. Phys. **21**, 492 (1960).
63. *J. Schwinger*, Phys. Rev. **125**, 397 (1962).
64. *F. J. Dyson*, Phys. Rev. **82**, 428 (1951).
65. *F. J. Dyson*, Phys. Rev. **75**, 486 (1949). (Русский перевод в книге «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950, стр. 94.)
66. *F. Dyson*, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949). (Русский перевод в книге «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 205.)
67. *P. T. Matthews*, Phys. Rev. **76**, 684, 1489 (1949).
68. *F. Rohrlich*, Phys. Rev. **80**, 666 (1950).
69. *T. D. Lee and C. N. Yang*, Phys. Rev. **128**, 885 (1962).
70. *R. Haag*, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-Fys. Medd. **29** (12) (1955).
- 71*. *Н. Н. Боголюбов, А. А. Логанов, И. Т. Тодоров*. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, «Наука», 1969.
72. *J. Schwinger*, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); **75**, 651 (1949); **76**, 790 (1949). (См. русский перевод в книге «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 12.)
73. *S. Tomonada*, Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) **1**, 27 (1946). (Русский перевод в книге «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1950, стр. 1).
74. *G. C. Wick*, Phys. Rev. **80**, 268 (1950). (Русский перевод в книге «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 245.)
75. *И. Я. Померанчук*, ЖЭТФ **34**, 725 (1958).
76. *F. Bloch and A. Nordsieck*, Phys. Rev. **52**, 54 (1937).
77. *D. Yennie, S. Frautschi and H. Suura*, Ann. Phys. (N. Y.) **13**, 379 (1961).
78. *M. Gell-Mann, M. L. Goldberger and W. Thirring*, Phys. Rev. **95**, 1612 (1954).
79. *M. L. Goldberger*, Phys. Rev. **99**, 979 (1955).
80. *R. Krönig*, J. Op. Soc. Am. **12**, 547 (1926); *H. A. Kramers*, Atti Congr. Intern. Fisici Como (1927).
81. *N. Bogolyubov, B. Medvedev and M. Polivanov*, Fortschr. Physik **6**, 169 (1958).
82. *H. Bremermann, R. Oehme and J. G. Taylor*, Phys. Rev. **109**, 2178 (1958).
83. *G. Källén and A. S. Wightman*, Kgl Danske Videnskab. Selskab. Mat. Fys. I, (6) (1958); *R. Jost*, Helv. Phys. Acta **31**, 263 (1958).
84. *E. Guillemin*, Introductory Circuit Theory, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1953.
85. *Y. Nambu*, Nuovo Cimento **9**, 610 (1958).
86. *L. D. Landau*, Nucl. Phys. **13**, 181 (1959); ЖЭТФ **37**, 62 (1959); *J. D. Bjorken*, Doctoral dissertation, Stanford University, 1959.
87. *Fairlee et al.*, J. Math. Phys. **3**, 594 (1962).
88. *M. L. Goldberger*, Phys. Rev. **97**, 508 (1955); **99**, 979 (1955).
89. *U. Haber-Schaim*, Phys. Rev. **104**, 1113 (1956); *T. D. Spearman*, Nuovo Cimento **15**, 147 (1960).
90. *S. J. Lindenbaum*, в книге «XII Международная конференция по физике высоких энергий», Дубна, 1964, т. 1, Атомиздат, 1966, стр. 188.
91. *S. Weinberg*, Phys. Rev. **124**, 2049 (1961).
92. *D. Amati, M. Fierz and V. Glaser*, Phys. Rev. Letters **4**, 89 (1960).
93. *Н. Н. Мейман*, ЖЭТФ **43**, 227 (1962).
94. *H. L. Anderson, W. C. Davidon and U. W. Kruse*, Phys. Rev. **100**, 339 (1955).
95. *J. Hamilton*, Phys. Rev. **110**, 1134 (1958).

96. *W. C. Davidon and M. L. Goldberger*, Phys. Rev. **104**, 119 (1956).
 97. *K. Symanzik*, Phys. Rev. **105**, 743 (1957).
 98. *H. Lehmann*, Nuovo Cimento **10**, 579 (1958).
 99. *H. Lehmann*, Nuovo Cimento, Suppl. 1, **14**, 153 (1959).
 100. *G. F. Chew*, S Matrix Theory of Strong Interactions, New York, W. A. Benjamin, Inc., 1962.
- 101*. *Дж. Чью*, Аналитическая теория S-матрицы, «Мир», 1968.
 102. *S. Mandelstam*, Rept. Progr. Phys. **25**, 99 (1962).
 103. *R. Jost and A. Pais*, Phys. Rev. **82**, 840 (1951).
 104. *P. Federbush, M. Goldberger and S. Treiman*, Phys. Rev. **112**, 642 (1958).
 105. *W. Frazer and J. Fulco*, Phys. Rev. **117**, 1609 (1960).
 106. *М. Гольдбергер, К. Ватсон*, Теория столкновений, «Мир», 1967.
 107. *R. Omnes*, Nuovo Cimento **8**, 316 (1958).
 108. *Н. И. Мухелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968.
- 109*. *E. Ferrari*, La Rivista del Nuovo Cimento **6**, 199 (1976).
 110. *L. Castillejo, R. Dalitz and F. Dyson*, Phys. Rev. **101**, 453 (1956).
 111. *С. Д. Дрелл, Ф. Захариазен*, Электромагнитная структура нуклонов, ИЛ, 1962.
112. *A. Salam*, Phys. Rev. **82**, 217; **84**, 426 (1951).
 113. *E. Salpeter and H. Bethe*, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
 114. *J. C. Ward*, Phys. Rev. **78**, 1824 (1950).
 115. *Y. Takahashi*, Nuovo Cimento **6**, 370 (1957).
 116. *K. Johnson*, Nucl. Phys. **25**, 431 (1961).
 117. *W. H. Furry*, Phys. Rev. **51**, 125 (1937).
 118. *R. Karplus and M. Neumann*, Phys. Rev. **80**, 380; **83**, 776 (1950).
 119. *S. Weinberg*, Phys. Rev. **118**, 838 (1960).
 120. *R. Jost and J. M. Luttinger*, Helv. Phys. Acta. **23**, 201 (1950).
 121. *W. Thirring*, Phil. Mag. **41**, 1193 (1950).
 122. *F. Low*, Phys. Rev. **96**, 1428 (1954).
 123. *M. Gell-Mann and M. L. Goldberger*, Phys. Rev. **96**, 1433 (1954).
 124. *N. M. Kroll and M. A. Ruderman*, Phys. Rev. **93**, 233 (1954).
 125. *A. Klein*, Phys. Rev. **99**, 998 (1955).
 126. *E. Kazes*, Nuovo Cimento **13**, 1226 (1959).
 127. *L. M. Brown and R. P. Feynman*, Phys. Rev. **85**, 231 (1952).
 128. *J. Polkinghorne*, J. Math. Phys. **4**, 503 (1963).
 129. *P. Federbush and M. Grisaru*, Ann. Phys. (N. Y.) **22**, 263 (1963).
 130. *J. Bjorken and T. T. Wu*, Phys. Rev. **130**, 2566 (1963).
 131. *G. Tiktopoulos*, Phys. Rev. **131**, 480 (1963).
 132. *Л. Д. Ландау*, Собрание трудов, т. 2, «Наука», 1969, стр. 228, 302.
 133. *P. J. Redmond*, Phys. Rev. **112**, 1404 (1958).
 134. *P. J. Redmond and J. L. Uretski*, Ann. Phys. (N. Y.) **9**, 106 (1960).
 135*. *Г. В. Ефимов*, Нелокальные взаимодействия квантованных полей, «Наука», 1977.
- 136*. *Л. С. Золн и др.*, УФН **117**, 119 (1975).
 137*. *А. Б. Кайдалов*, Труды международной конференции по физике высоких энергий, Тбилиси, 1976, А1—27.
- 138*. *A. S. Carrol et al.* Phys. Lett. **61B**, 303 (1976).
 139*. Review of particle properties, Phys. Lett. **75B**, No 1 (1978).
 140*. *I. Bialynsky-Birula*, Phys. Rev. **155**, 1414 (1967); **166**, 1505 (1968).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиоматическая теория поля 31
Аналитическая структура вершинных диаграмм 224—228, 244—250
Аналитическое продолжение в евклидову область 322—327
Аналогия с электрическими цепями 228—231
Аномальные пороги 248—250
Античастицы 48
Антиунитарный оператор 127
Асимптотическое поведение фейнмановских амплитуд 378—382
— условие 144—145
— слабое 145
- Вакуумные амплитуды** 196—198
— средние 138—181
— флуктуации 43—44
Взаимодействующие поля 90—137
Внутренние симметрии 27, 104—106
Внутренняя четность 116, 120
Вторичное квантование бозонов 37, 46—48
— — фермионов 54—63
- Гармонический осциллятор 16—18
Гейзенберговское поле 97
Генератор преобразования 105
Гильбертово пространство 20, 28
Гиперзаряд 113
Гипероны 109
Графическое представление сверток полей 193—196
Группа ренормализационная 382—390
- Диаграммы компактные 267, 294—297
— редуцированные 240, 244—248, 256, 263, 287
— Фейнмана 182—183, 196, 198, 224, 239—240
— — в квантовой электродинамике 206—211
- Дисперсионные соотношения 217—291
— — для вершинной функции 250—253
— — — π — N -рассеяния 261—271
— — —, аксиоматический вывод 271—277
— — Крамерса — Кронига 217—221
— — —, приложение к физике высоких энергий 221—223
- Законы Ома 232—233
— сохранения 25—31
Зарядовая четность 121
Зарядовое сопряжение 120—126
Заряженное скалярное поле 45—49
- Излучение мягких фотонов** 211—216
Измеримость поля 42—43
Изотопический спин 111, 107—108, 198
— ток 111, 107—108
In-поля 141—146
In-состояния 141—146
Инвариантные функции 392—395
Интегральные уравнения для собственно-энергетической и вершинной частей 299—302
— — — τ -функций и ядра K 302—307
— — перенормированные 319—322
Инфракрасная катастрофа 211—216
- Калибровка излучения** 80, 92
Канонический формализм 12—25
Квантование 12—18
— вторичное бозонов 37, 46—48
— — фермионов 54—63
— полей 18—25
— поля Дирака 52—74
— электромагнитного поля 75—89
Квантования процедура 80—82
Квантовый принцип действия 31
Ковариантность 80—82
— релятивистская 71, 72
Конечность перенормированной теории 341—357

- Крамера — Кронига соотношения 217—221, 234
- Критерий сходимости 327—341
- Кулоновское поле 94
- Локальные теории поля 10—12
- Лоренцева инвариантность 12, 26, 28, 71, 76, 78, 95—96
- Лэмбовский сдвиг 44
- Массовый контрчлен 143
- Метод перенормировки Дайсона — Салама 332
- Микропричинность 43, 179
- Мягкие фотоны 211—216
- Несобственные преобразования симметрии 115
- Низкоэнергетическая теорема 370—378
- Нормальное упорядочивание 31, 68, 134—135, 98—100
- Обращение времени 126—132
- Общий формализм 9—32
- Оператор антиунитарный 127
- Гамильтона 62
- рождения 40, 47, 48, 56, 57, 58, 66—67, 69, 84
- уничтожения 17, 47, 48, 56, 57, 59, 66—67, 69, 84
- числа нуклонов 107, 112
- частиц 39, 47, 57, 59, 69
- Особенности произвольных диаграмм 231—235
- Out-поля и out-состояния 150—155
- Перенормировка заряда в 4-м порядке 357—370
- Перенормировки 292—390
- метод Дайсона — Салама 332
- правила 312—319
- Перенормировочные константы 312—319
- π — мезон-нуклонное взаимодействие 101—102, 106—108, 261—278
- π — π -рассеяние 201—206, 278—287
- Плотность гамильтониана 24
- лагранжиана 21
- Позитроний 125—126
- Поле Бозе 105, 135—136
- Бозе — Эйнштейна 222
- Дирака 63—65, 98—99, 118, 129, 133
- , вторичное квантование 52—74
- , редукционная формула 159—172
- , спектральное представление 159—172
- Поле Клейна — Гордона 33—51, 54, 73, 94, 128, 133
- , редукционная формула 155—159
- Максвелла 78, 93, 133
- свободное 91
- Поля взаимодействующие 90—137
- Поперечная δ -функция 79
- Представление Гейзенберга 14—15, 19—20, 139
- Намбу 231, 240, 246, 234
- Челлена — Лемана 148, 222, 235
- Шредингера 14, 97
- Преобразования Лоренца 80—82, 95—96, 101, 103, 142
- симметрии 25—31
- Принцип Гамильтона 13, 19—21, 77
- микропричинности 42—43
- Шварца 244, 250, 255
- Причинность 217—221, 234
- Промежуточная перенормировка 325—327
- Пропагатор 49—51, 73—74, 86—88
- Пространственно-подобная поверхность 19
- Псевдоскалярные частицы 116
- Разложение в импульсном пространстве 65—71, 82—85, 96—98
- Дайсона — Вика 194, 195
- Редукционная формула для поля Дирака 168—172
- — — Клейна — Гордона 33—51, 54, 73, 94, 128, 133
- — — скалярного поля 155—159
- — — фотонов 172—175
- Релеевское рассеяние 376
- Релятивистская ковариантность 71—72
- Ренормализационная группа 382—390
- Свертка полей 190, 194
- , графическое представление 193—196
- Свойства физических состояний 139—140
- Связанные состояния 140
- Связь спина и статистики 179—181
- Скелетные графики 304—307
- Слабая локальная коммутативность 136
- S-матрица 292
- , общие свойства 152—155
- , определение 152—155
- , теория возмущений 187—190
- Собственная энергия вакуума 98—100

- Собственно-энергетическая часть 293—295, 299
 Соотношения Гейзенберга 95
 — Крамерса — Кронига 221, 251, 258, 376
 Спектральная функция 147, 162, 167, 175
 Спектральное представление 146—150, 159—168, 175—179
 Статистика Бозе — Эйнштейна 41, 52, 61, 65, 68, 132
 — Ферми — Дирака 52—54, 61, 68
 Спин фотона 85—86
 Степень расходимости 327—341
 Странные частицы 108—115
 Субграфики 332—341, 378—380
 Тензор энергии-импульса 26
 Теорема Вайнберга 332, 335—338, 341, 346, 348, 378—381, 388
 — Вика 190—193
 — Гаусса 79, 92, 94, 98
 — Гейне — Бореля 338
 — Грина 35
 — Коши 260
 — Нетер 25, 31, 81, 90
 — топологическая 307—308
 — $\mathcal{P}\mathcal{C}$ 132—136
 Теории поля локальные 10—12
 Теория возмущений 182—216
 — — для τ -функций 187—190
 — потенциального рассеяния Фред-гольма 284
 Тожественные частицы 52—54
 Тожество Уорда 308—312, 371, 390—391
 Трансляционная инвариантность 95—96
 Унитарность S -матрицы 279—280
 Уравнение Бете — Солпитера 301
 Уравнение Гейзенберга 71
 — Дирака 63—65, 123
 — Клейна — Гордона 33, 46, 142
 — функциональное 384—385
 — Шредингера 53, 61
 — Эйлера — Лагранжа 13, 22, 25, 27
 Уравнения Кирхгоффа 232, 237—238, 246
 — Максвелла 77, 82, 83
 Условия асимптотические 144, 145
 — Ландау 240
 U -матрица 115
 Флуктуации вакуумные 43—44
 Фейнмановский пропагатор 49—51, 73—74, 86—88
 Фредгольмова теория потенциального рассеяния 284
 Функции Грина 62, 73, 228, 392—395
 — инвариантные 392—395
 — цилиндрические 394
 Функция спектральная 147, 162, 167, 175
 Частицы псевдоскалярные 116
 — странные 108—115
 — тождественные 52—54
 Четность 115—120
 — зарядовая 121
 — внутренняя 116
 Электромагнитная структура пиона 287—290
 Электромагнитное взаимодействие 90—95
 — поле 10
 Электрон-позитронное ядро 293—299
 Энергии-импульса тензор 26
 Энергия вакуума 38
 — — собственная 98—100

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава 11. Общий формализм	9
§ 65. Следствия полевого описания	10
§ 66. Канонический формализм и квантование для частиц	12
§ 67. Канонический формализм и квантование полей	18
§ 68. Преобразования симметрии и законы сохранения	25
§ 69. Другие формулировки	31
Задачи	31
Глава 12. Поле Клейна — Гордона	33
§ 70. Квантование и интерпретация в терминах частиц	33
§ 71. Симметрия состояний	40
§ 72. Измеримость поля и принцип микропричинности	42
§ 73. Вакуумные флуктуации	43
§ 74. Заряженное скалярное поле	45
§ 75. Фейнмановский пропагатор	49
Задачи	51
Глава 13. Вторичное квантование поля Дирака	52
§ 76. Квантовая механика n тождественных частиц	52
§ 77. Представление чисел заполнения для фермионов	54
§ 78. Теория Дирака	63
§ 79. Разложение в импульсном пространстве	65
§ 80. Релятивистская ковариантность	71
§ 81. Фейнмановский пропагатор в теории Дирака	73
Задачи	74
Глава 14. Квантование электромагнитного поля	75
§ 82. Введение	75
§ 83. Квантование	76
§ 84. Ковариантность и процедура квантования	80
§ 85. Разложение в импульсном пространстве	82

§ 86. Спин фотона	85
§ 87. Фейнмановский пропагатор для поперечных фотонов	86
Задачи	89
Глава 15. Взаимодействующие поля	90
§ 88. Введение	90
§ 89. Электромагнитное взаимодействие	90
§ 90. Лоренцева инвариантность и инвариантность при трансляциях	95
§ 91. Разложение в импульсном пространстве	96
§ 92. Собственная энергия вакуума; нормальное упорядочивание	98
§ 93. Другие взаимодействия	101
§ 94. Симметрия взаимодействий	104
§ 95. Сильная связь между π -мезонами и нуклонами	106
§ 96. Свойства симметрии странных частиц	108
§ 97. Несобственные преобразования симметрии	115
§ 98. Четность	115
§ 99. Зарядовое сопряжение	120
§ 100. Обращение времени	126
§ 101. \mathcal{FSP} -теорема	132
Задачи	136
Глава 16. Вакуумные средние и S-матрица	138
§ 102. Введение	138
§ 103. Свойства физических состояний	138
§ 104. In-поля и in-состояния; асимптотическое условие	141
§ 105. Спектральное представление для вакуумного среднего от коммутатора и функция распространения скалярного поля	146
§ 106. Out-поля и out-состояния	150
§ 107. Определение и общие свойства S -матрицы	152
§ 108. Редукционная формула для скалярных полей	155
§ 109. In- и out-поля и спектральное представление в теории Дирака	159
§ 110. Редукционная формула для дираковских полей	168
§ 111. In- и out-состояния и редукционная формула для фотонов	172
§ 112. Спектральное представление для фотонов	175
§ 113. Связь спина со статистикой	179
Задачи	181
Глава 17. Теория возмущений	182
§ 114. Введение	182
§ 115. U -матрица	183
§ 116. Теория возмущений для τ -функций и S -матрица	187
§ 117. Теорема Вика	190
§ 118. Графическое представление	193

§ 119. Вакуумные амплитуды	196
§ 120. Спин и изотопический спин; π -мезон-нуклонное рассеяние	198
§ 121. π — π -рассеяние	201
§ 122. Графическая техника в квантовой электродинамике	206
§ 123. Излучение мягких фотонов и инфракрасная катастрофа	211
Задачи	216

Глава 18. Дисперсионные соотношения 217

§ 124. Причинность и соотношения Крамерса — Кронига	217
§ 125. Приложение к физике высоких энергий	221
§ 126. Аналитические свойства вершинных диаграмм в теории возмущений	224
§ 127. Обобщение на случай произвольных диаграмм и аналогия с электрическими цепями	228
§ 128. Пороговые особенности функций распространения	235
§ 129. Особенности произвольных диаграмм и правила Ландау	239
§ 130. Аналитическая структура вершинных диаграмм; аномальные пороги	244
§ 131. Дисперсионные соотношения для вершинной функции	250
§ 132. Сингулярности амплитуд рассеяния	253
§ 133. Применение к π -мезон-нуклонному рассеянию вперед	261
§ 134. Аксиоматический вывод дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния вперед	271
§ 135. Динамические расчеты π — π -рассеяния с использованием дисперсионных соотношений	278
§ 136. Электромагнитная структура пиона	287
Задачи	290

Глава 19. Перенормировки 292

§ 137. Введение	292
§ 138. Свойства диаграмм собственной энергии и вершинных частей и электрон-позитронное ядро	293
§ 139. Интегральные уравнения для собственно-энергетической и вершинной частей	299
§ 140. Интегральные уравнения для τ -функций и ядра K ; скелетные графики	302
§ 141. Топологическая теорема	307
§ 142. Тождество Уорда	308
§ 143. Определение перенормировочных констант и правила перенормировки	312
§ 144. Сводка формул: перенормированные интегральные уравнения	319
§ 145. Аналитическое продолжение и промежуточная перенормировка	322
§ 146. Степень расходимости и критерий сходимости	327
§ 147. Доказательство конечности перенормируемой теории	341

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 148. Пример перенормировки заряда в четвертом порядке	357
§ 149. Низкоэнергетическая теорема для комптоновского рассеяния	370
§ 150. Асимптотическое поведение фейнмановских амплитуд	378
§ 151. Ренормализационная группа	382
Задачи	390
Приложение В. Коммутаторы и функции распространения	392
Дополнения редактора перевода	396
Литература	401
Предметный указатель	405