„МНОГОУГОЛЬНИК НЬЮТОНА“ И ЕГО РОЛЬ В СОВРЕМЕННОМ РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ

(„Исаак Ньютон“, АН СССР, 1943, стр. 99—126)

Известна фундаментальная роль, которую сыграли исследования Ньютона в развитии анализа бесконечно малых. Большинство его идей растворилось в работах позднейших авторов, часто не сохранив ни имени Ньютона, ни его способа обозначений. Но в современной математике известно немало методов и результатов более частного характера, носящих имя Ньютона. Их значение было вскрыто лишь в гораздо более позднюю эпоху, когда общий прогресс математики дал возможность оценить важность того или иного результата Ньютона, записанного часто в виде небольшого замечания. К числу такого рода результатов относится „многоугольник“, или, как его часто называют, „параллелограм“ Ньютона, который и будет служить предметом настоящего обзора.

§ 1. В чем состоит метод „многоугольника Ньютона“

Метод, носящий название „многоугольника Ньютона“, имеет целью разложение неявных функций по дробным степеням независимой переменной. Он состоит в следующем. Пусть переменные x и y связаны уравнением

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — аналитическая функция (которую в большей части исследований можно считать полиномом). Требуется представить y в виде бесконечного ряда по степеням $x-a$ (или, как говорят, разложить y в степенной ряд в окрестности точки $x=a$). Не нарушая общности, положим $a=0$. Прежде всего определим значения, соответствующие значению $x=0$. В частности, если $f(x, y)$ есть полином n-й степени относительно y, таких значений всего n. Если все они различны, то частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$, при подстановке вместо x нуля, а вместо y — одного из этих значений, не обращается в нуль, и тогда мы имеем возможность найти значения производных $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... при этих значениях переменных и при помощи ряда Тейлора получить искомое разложение, которое будет сходиться внутри круга, на окружности которого лежит ближайшая особенная точка функции $y(x)$.

Если уравнение

$$f(0, y) = 0$$

имеет кратный корень b, то $\frac{\partial f(a, b)}{\partial y} = 0$. Тогда производные $\frac{d^k y}{dx^k}$ не могут быть вычислены, так что описанный способ разложения неприменим. В этом случае искомое разложение получается при помощи „многоугольника Ньютона", который состоит в следующем. Пусть

$$f(x, y) = A_n(x) y^n + A_{n-1}(x) y^{n-1} + \ldots + A_1(x) y + A_0(x), \tag{2}$$

где

$$A_k(x) = a_k x^{\rho_k} + a_{k+1} x^{\rho_k + 1} + \ldots \qquad (a_k \neq 0; \quad k = 0, 1, \ldots, n).$$

Предположим, что искомое разложение y начинается с ε-й степени x:

$$y = cx^{\varepsilon} + c' x^{\varepsilon'} + \ldots \qquad (\varepsilon' > \varepsilon), \tag{3}$$

и определим ε. Подстановка выражения (3) в (2) должна давать тождественный нуль. Раскрывая получаемое выражение, мы видим, что наименьшую степень x имеет один или несколько из следующих членов:

$$f(x, cx^{\varepsilon} + c' x^{\varepsilon'} + \ldots) = a_n c^n x^{\rho_n + n\varepsilon} +$$

$$+ a_{n-1} c^{n-1} x^{\rho_{n-1} + (n-1)\varepsilon} + \ldots + a_1 c x^{\rho_1 + \varepsilon} + a_0 x^{\rho_0} + \ldots \tag{4}$$

Чтобы это выражение было тождественно равно нулю, необходимо, чтобы член, для которого показатель $\rho_k + k\varepsilon$ имеет наименьшее значение, не был единственным, так как иначе этому члену не с чем сократиться. Поэтому число ε надо подобрать так, чтобы из чисел

$$\rho_n + n\varepsilon, \quad \rho_{n-1} + (n-1)\varepsilon, \ \ldots, \ \rho_1 + \varepsilon, \ \rho_0$$

по крайней мере два имели одно и то же значение, а остальные — бо́льшие значения. Ясно, что искомым значением ε является одно из $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел

$$\varepsilon = -\frac{\rho_i - \rho_j}{i - j} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n).$$

Для выбора тех из этих значений, которые действительно дают решение вопроса, Ньютон предложил следующий геометрический прием. Нанесем на координатной сетке точки с координатами

$$(n, \rho_n), \ (n-1, \rho_{n-1}), \ \ldots, \ (1, \rho_1), \ (0, \rho_0)$$

и проведем через каждую из этих точек параллельные прямые с угловым коэффициентом ε. Каждая из этих прямых пересечет ось ординат на высоте $\rho_k + k\varepsilon$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Таким образом, требуется, чтобы по крайней мере две нижние из этих прямых совпадали, а остальные лежали выше. Отсюда вытекает следующий способ построения (см. фиг. 1).

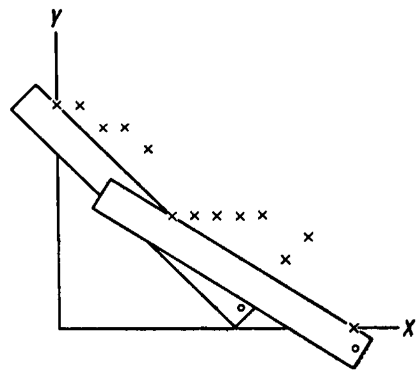
Приставим к точке (n, ρ_n) линейку вертикально вниз и станем ее вращать по часовой стрелке до того, как она впервые наткнется на другую из нанесенных точек, например на (k, ρ_k). Положение линейки определит одно из искомых значений ε. Далее, станем вращать линейку в том же направлении вокруг точки (k, ρ_k) до первого совпадения с дальнейшей точкой (l, ρ_l). Продолжая процесс, мы получим все возможные значения ε.

Получаемая на чертеже выпуклая ломаная носит название *многоугольника Ньютона*. Каждому из ее отрезков соответствует столько различных или совпадающих значений коэффициента c, сколько единиц содержит длина ее проекции на ось X. В самом деле, если крайние точки отрезка суть $\rho_i + i\varepsilon$ и $\rho_j + j\varepsilon$, то для того, чтобы в выражении (4) самые низшие члены сокращались, нужно, чтобы имело место

$$a_i c^i + \ldots + a_j c^j = 0,$$

т. е.

$$a_i c^{i-j} + \ldots + a_j = 0.$$



Фиг. 1

Это уравнение относительно c имеет $i-j$ корней, что и т. д.

С другой стороны, длина проекции всего многоугольника равна n. Отсюда следует, что мы получим всего n (различных или частично совпадающих) значений начального члена для разложения $y(x)$.

Для получения следующего члена разложения надо произвести в уравнении (1) подстановку

$$y = cx^{\varepsilon} + z$$

и находить низший член для z. Получаемые значения $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ суть, вообще говоря, дробные числа.

Часто отыскивают разложения не по возрастающим, а по убывающим степеням x, или, как принято говорить, степенные ряды в окрестности точки $x = \infty$. Производимые действия совершенно аналогичны. Оба типа разложений переходят друг в друга подстановкой

$$x = \frac{1}{x'}.$$

Ясно, что, вместо геометрического приема, можно произвести соответствующие алгебраические выкладки.

§ 2. Теоремы относительно получаемых разложений

Теорема 1. *Получаемое разложение*

$$y = cx^{\varepsilon} + c'x^{\varepsilon'} + c''x^{\varepsilon''} + \ldots$$

расположено по возрастающим степеням x

$$\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \ldots$$

Доказательство. Ограничимся доказательством наравенства $\varepsilon < \varepsilon'$, так как дальнейшие показатели получаются тем же путем. Кроме того, ниже мы увидим, что достаточно ограничиться изучением только одного разложения. Выберем в качестве изучаемого разложения то, в котором показатели $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ самые большие. В частности, если ε самое большое, то соответствующий ему отрезок ломаной — ближайший к оси Y, и из фиг. 1 нетрудно видеть, что

$$\varepsilon = \max\left(\frac{\rho_0 - \rho_1}{1}, \frac{\rho_0 - \rho_2}{2}, \ldots, \frac{\rho_0 - \rho_n}{n}\right).$$

Отметим побочный факт, весьма важный для дальнейшего.

Если максимум правой части достигается на k-м члене, т. е. если $\varepsilon = \frac{\rho_0 - \rho_k}{k}$, то ε есть дробь, знаменатель которой есть k или делитель k.

Будем считать коэффициент c пока неопределенной переменной. Запишем $f(x, cx^{\varepsilon})$ в виде

$$f(x, cx^{\varepsilon}) = \varphi(c)\, x^{s} + \varphi_1(c)\, x^{s_1} + \ldots,$$

где $s < s_1 < \ldots$ Мы уже знаем, что в качестве c мы должны выбрать один из корней полинома $\varphi(c)$. Пусть это будет $c = c_0$; предположим для общности, что c_0 — k-кратный корень.

Чтобы получить уравнение для z, где

$$y = c_0 x^{\varepsilon} + z,$$

напишем

$$f(x, cx^{\varepsilon} + z) = A_0(x) + A_1(x)\, z + \ldots + A_{n-1}(x)\, z^{n-1} + A_n(x)\, z^n,$$

где

$$A_k(x) = \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^k f(x, cx^{\varepsilon})}{\partial y^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

или

$$A_k(x) = \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^k f(x, cx^{\varepsilon})}{\partial c^k}\, x^{-k\varepsilon} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Обозначим через $R_0, R_1, \ldots, R_n$ порядки, с которыми обращаются в нуль при $x = 0$ функции $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x)$. Из (4), в силу $\varphi(c) = 0$, следует, что $R_0 \geqslant s_1 > s$. С другой стороны, дифференцируя по c k раз, получим

$$\frac{\partial^k f(x, cx^{\varepsilon})}{\partial c^k} = \varphi^{(k)}(c)\, x^{s} + \varphi_1^{(k)}(c)\, x^{s_1} + \ldots,$$

и в силу $\varphi^{(k)}(c_0) \neq 0$ очевидно, что левая часть при $x = 0$ обращается в нуль ровно в s-й степени. Принимая во внимание (5) и определение R_k, имеем

$$R_k = s - k\varepsilon,$$

откуда

$$\frac{R_0 - R_k}{k} \geqslant \frac{s_1 - s + k\varepsilon}{k} = \varepsilon + \frac{s_1 - s}{k} > \varepsilon.$$

Но так как

$$\varepsilon' = \max\left(\frac{R_0 - R_1}{1}, \frac{R_0 - R_2}{2}, \ldots, \frac{R_0 - R_n}{n}\right),$$

то

$$\varepsilon' \geqslant \frac{R_0 - R_k}{k} > \varepsilon,$$

и теорема доказана. ▶

Отметим следующий факт, вытекающий из хода доказательства: степень уравнения, из которого определяется коэффициент c' при $x^{\varepsilon'}$, не превышает порядка k кратности корня c_0. В самом деле, степень этого уравнения равна наибольшему индексу u, при котором еще $\frac{R_0 - R_u}{u} = \varepsilon'$. Но при любом $u > k$ имеем

$$\frac{R_0 - R_u}{u} \leqslant \frac{R_0 - s + u\varepsilon}{u}^{*} = \frac{R_0 - s}{u} + \varepsilon < \frac{R_0 - s}{k} +$$

$$+ \varepsilon = \frac{R_0 - (s - k\varepsilon)}{k} = \frac{R - R_k}{k} \leqslant \varepsilon',$$

откуда и следует утверждение. Из отмеченного в середине доказательства факта следует:

Знаменатель дроби ε' может быть больше знаменателя дроби ε в число раз, не превышающее кратности корня c_0 полинома $\varphi(c)$.

Если теперь мы составим полиномы $\varphi(c)$, $\varphi_1(c)$, $\varphi_2(c)$, ..., корнями которых являются коэффициенты c_0, c_0', c_0'', ... разложения $y = c_0 x^{\varepsilon} + c_0' x^{\varepsilon'} + c_0'' x^{\varepsilon''} + \ldots$, то степень каждого последующего полинома не превышает порядка кратности одного корня в предыдущем полиноме. Отсюда следует, что степени этих полиномов все время убывают, за исключением единственной возможности, когда, начиная с какого-нибудь места, каждый полином есть какая-нибудь (одна и та же) степень линейной функции

$$\varphi_\mu(c) = (c - c_0^{(\mu)})^\nu, \qquad \varphi_{\mu+1}(c) = (c - c_0^{(\mu+1)})^\nu, \ \ldots$$

В этом случае (т. е. когда $\nu > 1$) мы будем получать ν одинаковых разложений, сколь далеко мы их ни продолжили бы. При этом даже

* Дифференцируя формулу (4) u раз по c и пользуясь (5) при $k = u$, будем иметь $R_u \geqslant s - u\varepsilon$.

в случае $\nu > 1$ мы в показателях $\varepsilon^{(\mu)}, \varepsilon^{(\mu+1)}, \ldots$ не будем получать растущих знаменателей. В самом деле,

$$\varphi_k(c) = (c - c_0^{(\mu)})^\nu = c^\nu - \binom{\nu}{1} c^{\nu-1} c_0^{(\mu)} + \ldots \pm (c^{(\mu)})^\nu.$$

Здесь ни один член не равен нулю. Это значит, что на отрезке ломаной, который соответствует показателю $\varepsilon^{(\mu)}$, нанесенные точки $(i, \rho_i^{(\mu)})$ лежат на расстояниях, проекции которых на ось X равны единице. Так как, с другой стороны, разность ординат соседних точек является числом, кратным $\varepsilon^{(\mu-1)}$, то и угловой коэффициент отрезка есть число, кратное $\varepsilon^{(\mu-1)}$. Мы приходим к теореме

Теорема 2. *В разложении*

$$y = cx^\varepsilon + c'x^{\varepsilon'} + c''x^{\varepsilon''} + \ldots$$

показатели $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ *являются дробями, у которых общий знаменатель есть конечное число.*

Если этот общий знаменатель есть $\bar{a}$ и $\varepsilon = \frac{b}{\bar{a}}$, $\varepsilon' = \frac{b'}{\bar{a}}$, $\varepsilon'' = \frac{b''}{\bar{a}}, \ldots$, то, вводя обозначение

$$x = \xi^{\bar{a}},$$

получим для y ряд по целым степеням относительно ξ:

$$y = c\xi^b + c'\xi^{b'} + c''\xi^{b''} + \ldots$$

Введем, как обычно, обозначение для сравнений

$$u(\xi) \equiv v(\xi) \qquad (\mathrm{mod}\ \xi^M),$$

если частное $\frac{u(\xi) - v(\xi)}{\xi^M}$ остается конечным при $\xi = 0$. Тогда, полагая

$$y_1 = c\xi^b + c'\xi^{b'} + c''\xi^{b''} + \ldots + c^{(\mu)}\xi^{b^{(\mu)}},$$

где μ — достаточно большое число, мы в силу самого способа получения членов разложения y будем иметь

$$f(\xi^{\bar{a}}, y) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \xi^\mu),$$

откуда, применяя модифицированную теорему Безу, получим при неопределенном η

$$f(\xi^{\bar{a}}, \eta) \equiv (\eta - y_1) f_1(\xi, \eta) \qquad (\mathrm{mod}\ \xi^M),$$

где M — при достаточно большом μ — сколь угодно большое число, а $f_1(\xi, \eta)$ — новый полином. Применяя к $f_1(\xi, \eta)$ правило „многоугольника Ньютона", получим описанным выше способом новые разложения $y_2, y_3, \ldots, y_n$ и таким образом придем к сравнению

$$f(t^d, \eta) \equiv a_n(t^a)(\eta - y_1)(\eta - y_2)\ldots(\eta - y_n) \qquad (\mathrm{mod}\ t^N),$$

где a — некоторое новое целое число, $x = t^a$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — некоторые полиномы (точнее говоря, более общие, чем полиномы функции, так как они могут содержать члены с отрицательными степенями) относительно t, которые можно взять сколь угодно высокой степени, и при этом N тоже будет безгранично расти. Нетрудно видеть, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — все возможные разложения для функции y, определяемой уравнением

$$f(t^a, y) = 0.$$

Поэтому теоремы 1 и 2 справедливы для всех разложений, получаемых методом „многоугольника Ньютона".

Остается доказать сходимость бесконечных разложений, получаемых при безграничном возрастании N. Для этого обратим внимание на то, что y является функцией от t, аналитической в каждой точке, достаточно близкой к точке $t = 0$, так как производная $\frac{\partial f(t^a, y)}{\partial y}$ в достаточно малой окрестности точек $t = 0$ не обращается в нуль. Далее, так как при обходе вокруг точки $t = 0$ функция не меняет своего значения (об этом см. ниже), то ее можно разложить в ряд Лорана по степеням t, причем в точке $t = 0$ она может иметь только полюс (так как существует такое k, что произведение $t^k y$ остается конечным при $t = 0$). Ряд Лорана сходится; с другой стороны, он совпадает с полученным нами рядом, так как разложение функции в степенной ряд единственно. Таким образом, переходя к переменной $x = t^a$, получим:

Теорема 3. *Получаемые методом „многоугольника Ньютона" разложения в ряды по дробным степеням x сходятся в достаточно малой окрестности точки $x = 0$.*

Чтобы считать доказательство этой теоремы полным, изучим поведение функции y при обходе вокруг точки $x = 0$. Возьмем $x = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho > 0$ достаточно мало, и заставим φ пробежать значения от 0 до 2π. При этом в качестве начального значения y возьмем один из корней y_1 уравнения $f(\rho, y) = 0$. Тогда, в силу непрерывности, все время будет соблюдаться равенство $f(x) = 0$, и при $\varphi = 2\pi$ мы придем к значению y_2, тоже удовлетворяющему уравнению $f(\rho, y) = 0$. Но так как это уравнение имеет всего n корней, то после некоторого числа $\bar{a}$ таких обходов мы придем к прежнему значению $y = y_1$. Если теперь мы положим $x = \xi^{\bar{a}}$, то $\bar{a}$ обходам вокруг точки $x = 0$ будет соответствовать один обход вокруг точки $\xi = 0$, откуда следует однозначность функции $y(\xi)$ при обходе вокруг точки $\xi = 0$, что и т. д.

Если $\bar{a} < n$, то, начиная обход со значения y, отличного от значений

$$y_1, y_2, \ldots, y_{\bar{a}},$$

мы опять после конечного числа обходов вокруг точки $x = 0$ придем к прежнему значению y. Таким образом, мы разобьем все значения

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

на несколько систем, называемых *циклами*. Число $\bar{a}$ будем называть порядком соответствующего (в данном случае первого) цикла. Мы видим, что при обходе вокруг критической точки значения y претерпевают подстановку, состоящую из циклов порядков $\bar{a}, \bar{\bar{a}}, \ldots$ Нетрудно видеть, что число $\bar{a}$ есть не что иное, как общий знаменатель показателей одного из разложений функции $y(x)$ по дробным степеням x. В самом деле, пусть

$$y_1 = cx^{\frac{b}{\bar{a}}} + c'x^{\frac{b'}{\bar{a}}} + c''x^{\frac{b''}{\bar{a}}} + \ldots$$

Тогда после k $(k = 0, 1, \ldots, \bar{a} - 1)$ обходов вокруг точки $x = 0$ мы будем приходить к значениям $y(x)$, получаемым из разложений

$$y_{k+1} = c\omega^{bk}x^{\frac{b}{\bar{a}}} + c'\omega^{b'k}x^{\frac{b'}{\bar{a}}} + c''\omega^{b''k}x^{\frac{b''}{\bar{a}}} + \ldots,$$

где

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{\bar{a}}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, \bar{a} - 1).$$

Все эти разложения различны, если $\bar{a}$ есть общий знаменатель показателей $\varepsilon = \frac{b}{\bar{a}}$, $\varepsilon' = \frac{b'}{\bar{a}}$, ..., т. е. если b, b', b'', ... взаимно просты. После $(k + 1)$-го обхода мы вернемся к прежнему разложению. Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 4. *Если показатели в разложении n-значной алгебраической функции $y(x)$ в окрестности критической точки имеют знаменатели $\bar{a}, \bar{\bar{a}}, \ldots$ $(\bar{a} + \bar{\bar{a}} + \ldots = n)$, то при обходе вокруг этой критической точки значения $y(x)$ претерпевают подстановку, состоящую из циклов порядков $\bar{a}, \bar{\bar{a}}, \ldots$*

Ниже мы увидим, что определяемые таким образом подстановки составляют *группу монодромии* алгебраической функции, иначе говоря, ее группу Галуа, знание которой позволяет решать много вопросов относительно природы функции, в частности, неприводимости уравнения.

Эти доказательства детально изложены в известной книге Гензеля и Ландсберга [22], из которой я заимствовал основные идеи.

§ 3. Форма, в которой метод изложен у самого Ньютона

Сам Ньютон изложил свой метод в форме, довольно далекой от современной, и не дал доказательств предложений, необходимых для современного изложения, но которые в эпоху Ньютона не могли быть даже формулированы ввиду отсутствия понятий: сходимость, комплексная переменная, число корней уравнения и т. п. Однако идея метода выражена Ньютоном настолько четко, что право приоритета должно безусловно принадлежать ему (если, конечно, впоследствии не будет открыто существование его предшественников), что здесь необходимо подчеркнуть, так как многие математики, особенно ранние, излагая метод, или вовсе не упоминали о Ньютоне, или, как Лагранж [31], утверждали, что их метод отличен от ньютоновского, поскольку он изложен не в геометрической форме. Я считаю самым лучшим привести выдержку из сочинения Ньютона, в котором метод изложен наиболее полно. Приведу ее в переводе проф. Д. Д. Мордухая-Болтовского [37].

„Правило же это таково: из всех членов, в которых отсутствуют буквенные корни (y, p, q, r и т. д.), выбери тот, в котором неизвестная буквенная величина (x или z и т. д.) входит в наименьшей степени; затем выбери другой член, который содержит этот корневой вид и таков, что прогрессия, составленная из измерений каждого из упомянутых выше неизвестных, при продолжении ее от члена, принятого за первый, до этого члена либо возрастает настолько, насколько это возможно, либо убывает столь мало, насколько это возможно; и если имеется несколько таких членов, измерения которых принадлежат этой прогрессии, сколь угодно далеко продолженной, то их все следует брать.

Приравняв, наконец, сумму выбранных таким образом членов нулю, найди значение неизвестного корня и припиши его к результату.

Для лучшего уразумения этого правила поясню его на следующей диаграмме.

Построй прямой угол BAC; стороны его BA и AC раздели на равные части и, восстановив перпендикуляры, раздели угловую площадь на равные квадраты или параллелограмы, которые отметь вписанными в них измерениями букв x и y:

B

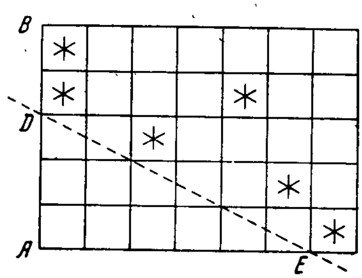
x^4	x^4y	x^4yy	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6	и т. д.
x^3	x^3y	x^3yy	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6	и т. д.
xx	xxy	$xxyy$	xxy^3	xxy^4	xxy^5	xxy^6	и т. д.
x	xy	xyy	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6	и т. д.
1	y	yy	y^3	y^4	y^5	y^6	и т. д.

A *C*

Затем, когда дано уравнение, отметь каким-либо знаком параллелограмы, соответствующие всем его членам, и приложи линейку к двум или же, что случается иногда, к нескольким из отмеченных таким образом параллелограмов, из которых один является самым нижним в столбце AB слева, другой попадает на линейку справа, а все остальные, не касающиеся линейки, находятся над ней. Затем возьми все те члены уравнения, которые содержатся в параллелограмах, задетых линейкой, и найди из них величину, которую следует положить в результате. Так, если следует определить корень уравнения

$$y^6-5xy^5+\frac{x^3}{a}y^4-7aaxxyy+6a^3x^3+bbx^4=0,$$

то я обозначаю, как видишь (см. чертеж), параллелограмы, соответствующие членам этого уравнения, звездочкой. Затем я прикладываю линейку DE к самому низшему из отмеченных параллело-



грамов в первом столбце слева, вращаю линейку снизу вверх в правую сторону, пока она не пройдет через какой-нибудь один или несколько различных отмеченных параллелограмов. При этом я вижу, что линейка заденет те места, в которых содержатся члены x^3, $xxyy$ и y^6. Поэтому я составляю из них уравнение

$$y^6-7aaxxyy+6a^3x^3=0$$

(которое, если угодно, я затем, полагая $y=u\sqrt{ax}$, привожу к u^6+ $+7uu+6=0$) и из него нахожу y, который имеет четыре значения, а именно: $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, $-\sqrt{2ax}$. Из этих уравнений я могу взять за первый член искомого количества любое, но в различных случаях следует выбирать то из них, которое соответствует тому корню, который мы желаем найти".

Далее следуют примеры, весьма многочисленные. Я приведу из дальнейшего текста Ньютона еще два места, имеющие теоретическое значение: способ получения дальнейших членов и обоснование метода.

„Затем таким же образом находятся из различных воспомогательных уравнений и остальные члены, которые следует прибавить к результату, причем большей частью с меньшим усилием, так как все дело здесь сводится к тому, что низшие из этих членов, которые содержат бесконечно малые величины (x, xx, x^3 и т. д.) и не содержат буквенных корней (p, q, r и т. д.), делятся на выражение, которое стоит при буквенном корне в первой степени и уже не содержит неизвестной величины; то, что получается отсюда, записывается в результат".

„Для того чтобы убедиться в истине этих выводов, т. е. в том, что найденные таким образом и сколь угодно продолженные результаты приближаются к корню уравнения так, что под конец отличаются от него на величину, меньшую всякой величины, и что поэтому при продолжении до бесконечности они совсем от него не отличаются, следует заметить, что величины, которые находятся в крайнем левом столбце правой стороны таблицы, суть последние члены уравнений, корнями которых являются p, q, r, s и т. д. При их исчезновении исчезают также и корни p, q, r, s и т. д, т. е. разности между результатом и искомым корнем, так что результат тогда ничем не отличается от истинного корня. Поэтому, если ты в самом начале действия усмотришь, что члены, находящиеся в указанном столбце, все взаимно уничтожаются, то отсюда следует заключить, что доведенное до этого места решение и есть точный корень уравнения. Если же дело обстоит иначе, то ты все-таки усмотришь, что все члены, в которых неопределенно малое неизвестное стоит в малых степенях, т. е. все наибольшие члены, выпадают из этого столбца, так, что либо их, наконец, совсем не остается, либо же остаются только те, которые меньше любой назначенной величины, и потому при продолжении действия до бесконечности оказываются не больше нуля. И таким образом продолженное до бесконечности решение будет в конце концов истинным корнем.

Пусть, наконец, предполагается, что буквы, которые до сих пор предполагались неопределенно малыми, сколь угодно велики; решение и тогда остается верным, хотя не будет так быстро сходиться к истинному корню, что ясно из аналогии вещей“.

Кроме того, Ньютон говорит о своем методе в более кратком виде в письме к Ольденбургу [38]. Далее, Стирлинг [51] указывает на *другую методу* Ньютона, помещенную в письме к Уоллису [60]. Я не имел возможности ознакомиться с этими произведениями, но, судя по заметке Д. М. Синцова [50], другая метода Ньютона представляет собой аналитическое изложение метода многоугольника, так что Лагранж не прав, называя свой метод отличным от ньютоновского.

Из приведенного текста Ньютона мы можем сделать следующие заключения.

1. Ньютон, в силу зачаточного развития математики в его эпоху, не мог извлечь из своего метода того, что оказалось в его методе наиболее плодотворным, — изучения поведения многозначных функций. Из последнего отрывка мы видим, что он рассматривал свой метод как приближенный метод вычисления значений неявных функций.

2. Ньютон пришел к идее метода из аналогии с десятичными дробями, как это видно из приводимого ниже отрывка из главы „О решении уравнений с помощью бесконечных рядов“ цитированного сочинения [37], в который помещен и метод многоугольника.

Эта глава посвящена технике арифметических операций над степенными рядами по аналогии с операциями над бесконечными десятичными дробями. Сам Ньютон говорит об этой аналогии следующее:

„Действия, производимые над буквами (species), и действия над обыкновенными числами крайне сходны между собой и представляются различными только по тем характеристикам, которыми они выражаются, причем в первом случае характеристики неопределенные и общие, во втором же они определенные и частные. Меня удивляет поэтому, что никто (если только не исключить Николая Меркатора в открытой им квадратуре гиперболы) не направил своего внимания на приложение к буквам принципов недавно открытого учения о десятичных дробях, особенно потому, что при этом открывается путь к более трудным и более важным открытиям.

В самом деле, это учение о буквенных выражениях находится в таком же отношении к алгебре, как учение о десятичных дробях к арифметике. Поэтому тот, кто знаком с десятичной и буквенной арифметикой и кто учитывает аналогию, существующую между десятичными числами и бесконечно продолжающимися алгебраическими выражениями, сможет тогда легко изучить сложение, вычитание, деление, умножение и извлечение корней. Ибо то, что случается с числами, именно, что, чем дальше они отступают вправо, тем больше убывают в десятичном отношении, то же имеет место и для букв, когда они, как это всего чаще будет в дальнейшем, расположены в бесконечную однородную прогрессию по степеням какого-либо числителя или знаменателя".

Из этого отрывка можно видеть, что у Ньютона при современном ему состоянии математики не могло быть и речи о доказательстве законности описываемых им операций в современном смысле сходимости получаемых рядов. Ньютон ограничивается формальным определением операций над бесконечными сходящимися рядами.

Тем не менее, мы должны признать Ньютона творцом метода бесконечных степенных рядов, играющего фундаментальную роль в современной математике, в частности в теории аналитических функций. Дело в том, что пользование аппаратом бесконечных рядов далеко не исчерпывается случаями, когда эти ряды сходятся. Существует немало свойств функций, обнаруживаемых при помощи разложений в расходящиеся ряды. Теория расходящихся рядов ведет свое начало от Пуанкаре [40], давшего им название *асимптотических рядов,* и подробно изложена в книге Бореля [5]. Более того, в той же книге описаны способы суммирования расходящихся рядов, т. е. нахождения численных значений представляемых ими аналитических функций.

Особенно поразительно открытие Гензелем [21] p-адических рядов, т. е. рядов по возрастающим степеням простого числа p. Эти ряды всегда расходятся, но вместе с тем обнаруживают весьма тонкие арифметические свойства чисел, которые разложены в эти ряды.

Здесь идея простейших арифметических рядов (десятичных дробей), приложенная Ньютоном к функциональным степенным рядам, вернулась опять к арифметическим рядам, но в измененном виде и в приложении к другим задачам (о p-адических рядах см. далее, § 10).

Во всех этих теориях сходимость рядов не играет никакой роли, и формально введенная Ньютоном вычислительная техника вполне удовлетворяет требованиям математической строгости.

3. Определение дробных показателей можно производить также аналитическим методом, что было проделано и самим Ньютоном и затем Лагранжем [31]. Однако их аналитическое определение приводит к большому числу равенств и неравенств; для их систематизации применяют или „многоугольник Ньютона", необычайно естественный и ясный по идее, или искусственный алгебраический прием, подобный примененному Лагранжем.

4. Мы видели в § 1, что для обоснования построения „многоугольника Ньютона" применяются элементы аналитической геометрии. В эпоху Ньютона аналитическая геометрия только зарождалась. Ньютон удачно заменяет проведение координат разделением плоскости на квадратные клетки, в каждой из которых вписывается соответствующий ей член: x^5yy, xy^3 и т. п.; такой прием в силу наглядности представляет даже некоторые преимущества.

5. Ньютон называет эти клетки „параллелограмами", откуда и ведет начало название метода: „параллелограм Ньютона". Это название неудачно хотя бы потому, что на каждой диаграмме много параллелограмов, не говоря уже о том, что эти параллелограмы несущественны для диаграммы. Неудачность термина усугубляется тем, что слово „параллелограм" всегда вызывает в представлении скошенный четырехугольник, что совершенно не соответствует построению.

6. Термин „многоугольник Ньютона" возник в силу того, что позднейшие авторы, с целью получить все возможные разложения неявной функции, наносили на чертеж несколько прямых, дающих все значения показателей, дающих решение задачи; это приводит к построению ломаной, или „многоугольника". У самого Ньютона никакого многоугольника не было, так как он наносил на диаграмме только одну прямую. Поэтому лучше было бы употреблять термин „диаграмма Ньютона".

7. Из построения на диаграмме полного многоугольника, как мы видели в § 1, вытекает, что корень $y(x)$ уравнения n-й степени имеет ровно n разложений. Ньютон не мог получить эту теорему хотя бы уже потому, что он не принимал в соображение мнимых корней, считая их несуществующими величинами. Об этом мы можем судить по следующему отрывку:

„Но существует и другая граница, а именно $x=0$, вследствие невозможности $\sqrt{-ax}$, ..."

Между тем в цикле порядка больше двух непременно содержатся мнимые разложения.

8. Из приведенных выше отрывков можно заключить, что Ньютон не только не дал доказательства сходимости полученных им разложений, но даже не имел вполне отчетливого понятия о сходимости. С другой стороны, Ньютон прекрасно сознавал, что не всякий ряд сходится, что необходимо требовать сходимости ряда при его приложении к вычислениям, а также, что ряды могут перестать сходиться, если переменная принимает слишком большие значения. Это видно из следующего отрывка:

„Ограничивается же y при $x = a$, ибо если положить x бо̀льшим a, то сумма всех членов

$$-\frac{x}{2a}\sqrt{ax}-\frac{xx}{8aa}\sqrt{ax}-\frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax} \text{ и т. д.}$$

возрастает до бесконечности".

§ 4. Развитие метода и его обобщение

Первые упоминания о методе Ньютона встречаются у Уоллиса в его „Алгебре" (1685) [60], у Тейлора в „Methodus incrementorum" (Propositio 9), (1775) [52] и у Стирлинга в „Lineae tertii ordinis" (Problema II), (1717) [51]. Не имея возможности видеть эти сочинения, я не знаю, к чему они прилагали метод многоугольника. Судя по заглавию третьей из этих работ, можно думать, что он был приложен к изучению особых точек и асимптот кривых.

В 1740 г. вышло сочинение де-Гуа „Usage de l'Analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres" [13]. Я знаю об этой книге по ссылке на нее Д. М. Синцова [50]. Повидимому, она тоже посвящена кривым. Изложение метода многоугольника у него другое, чем у Ньютона: он располагает основные оси под углом в 45° к горизонтальному направлению и располагает „параллелограмы" в виде треугольника. Исходя из этого, можно думать, что он пришел к идее метода самостоятельно.

В 1743 и 1745 гг. Кестнер опубликовал две диссертации [27, 28], посвященные „многоугольнику Ньютона" и его приложению к интегрированию дифференциальных уравнений. Не имея возможности ознакомиться с ними, приведу любопытное латинское четверостишие (Кестнер был также поэтом), написанное им по поводу „многоугольника Ньютона" [29].

DE PARALLELOGRAMMO NEWTONIANO

Paucula iam series monstrat primordia nascens,
Lege sua partes haec sine fine regunt:
Sic a vita hominis, quam bis sex lustra coercent,
Aqua tenent formam non numeranda suam.

В 1776 г. Лагранж [31] предлагает новый метод, состоящий в сущности в переводе на алгебраический язык метода „многоугольника Ньютона". При этом он оценивает значение своего метода следующим образом („Oeuvres", IV, стр. 304; перевод мой):

„Таким образом, все сводится к определению величины α при помощи того условия, чтобы наименьшая степень x находилась по крайней мере в двух членах уравнения. Гг. Тейлор и Стирлинг дали для этого методы, которые можно видеть в „Methodus incrementorum" (Propositio 9) и в „Lineae tertii ordinis (Problema II); но так как метод первого требует некоторого геометрического построения, а метод второго зависит от параллелограма Ньютона и, следовательно, должен быть рассматриваем как механический метод, я думаю, что геометры будут очень рады видеть, как можно решить этот вопрос чисто аналитическим методом".

Вопрос о преимуществе аналитического или геометрического метода является, конечно, спорным. Отмечаю в словах Лагранжа курьез: оказывается, что геометры предпочтут геометрическому методу аналитический, вопреки своей специальности.[1] Спорным является и то, следует ли считать различными методы, проделывающие одно и то же, если один производит это при помощи формул, а другой — при помощи чертежа. Наконец, как я уже упоминал, аналитическое проведение метода встречается уже у самого Ньютона [37].

Изложение Лагранжа было перенесено в курс анализа Лакруа [30], второе издание которого вышло в 1810 г. (см. t. I, n° 60, p. 192 etc.). В третьем томе этого курса (см. t. II, n° 667) упомянуто о приложении метода к разложению в ряды интегралов дифференциальных уравнений.

Я не стану перечислять книг и статей, в которых метод Ньютона прилагается к тем или иным вопросам: приложениям посвящены отдельные параграфы. Отмечу статью Пюизе [41], посвященную алгебраическим функциям и их интегралам. В ней впервые дается доказательство сходимости ряда, получаемого методом „многоугольника Ньютона". Пюизе не упоминает о Ньютоне и вообще о предшественниках, так что некоторые авторы называют этот метод методом Пюизе (Брио [6], М. Бауер [3]).

Метод „многоугольника Ньютона" был обобщен на случай двух уравнений с тремя переменными и вообще n уравнений с $n+1$ переменными. Задача была поставлена в 1888 г. Бугаевым [8], который называл этот метод методом *наибольших и наименьших показателей*. Впрочем, это новое название не привилось. Прием Бугаева заключается в следующем. Если даны два уравнения

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0,$$

[1] Это замечание Н. Г. вряд ли обосновано, так как „les Géomètres" в цитируемом отрывке скорее следует перевести термином „математики". (*Ред.*)

то расположим их по степеням y и z:

$$\sum_{\alpha,\,\beta}(x,\ m_{\alpha\beta})y^{\alpha}z^{\beta}=0,$$

$$\sum_{\alpha,\,\beta}(x,\ n_{\alpha\beta})y^{\alpha}z^{\beta}=0,$$

где под $(x,\ m_{\alpha\beta})$ разумеется полином, делящийся точно на x в степени $m_{\alpha\beta}$. Далее, полагая

$$y=x^{\rho}+u, \qquad z=x^{\sigma}+v,$$

мы должны подобрать ρ и σ так, чтобы из показателей $m_{\alpha\beta}+\alpha\rho+\beta\sigma$ два были одинаковы, а остальные больше или равны; то же относительно показателей $n_{\alpha\beta}+\alpha\rho+\beta\sigma$. Задача приводится к решению каждой из всевозможных систем

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta}+\alpha\rho+\beta\sigma&=m_{\alpha_1\beta_1}+\alpha_1\rho+\beta_1\sigma,\\ n_{\alpha_2\beta_2}+\alpha_2\rho+\beta_2\sigma&=n_{\alpha_3\beta_3}+\alpha_3\rho+\beta_3\sigma \end{aligned} \tag{1}$$

относительно ρ и σ и проверке, будут ли остальные показатели иметь большее значение. В сущности, это не представляет никакого особого метода и может быть легко распространено на любое число переменных.

Настоящий геометрический метод для двух уравнений был дан Д. М. Синцовым в 1898 г. в его диссертации [49]. Сущность этого метода состоит в том, что на плоскости проводятся все прямые, выражаемые уравнениями первой и второй системы (1) (например, карандашами разных цветов). Затем отмечаются точки пересечений линий разных цветов, и по их расположению относительно обеих систем прямых производится суждение о том, дают ли они решение задачи.

Говоря о распространении метода на большее число переменных, автор указывает, что это должно было бы привести к чертежам в многомерных пространствах.

Предложив этот изящный метод, Д. М. Синцов выражает сожаление, что ему не удалось найти аналитический метод, имеющий, по его мнению, преимущество.

На уравнение, связывающее три или более переменных, метод не был до сих пор обобщен. В этом случае естественным обобщением проблемы является представление переменных, связанных алгебраическим уравнением, в виде функций от параметров, голоморфных вблизи рассматриваемой точки. Эта проблема имеет большое значение в теории алгебраических поверхностей (см. Гензель [20], Блэк [4], Юнг [26]).

§ 5. Приложение метода к изучению алгебраических кривых

Метод „многоугольника Ньютона" ранее всего получил применение к изучению внешней формы алгебраических кривых. Стирлинг [51] еще в 1717 г. применял его к исследованию кривых 3-го порядка. Далее, к кривым высших порядков, повидимому, его применяли в 1740 г. де-Гуа [13] и в 1750 г. Крамер [12]. Метод исследования кривых при помощи „многоугольника Ньютона" изложен также в современных книгах Клебша [11] и Гензеля — Ландсберга [22].

Метод „многоугольника Ньютона" применяется к изучению поведения кривых вблизи их особых точек, а также к исследованию асимптот. Чтобы получить понятие, каким образом исследуются особые точки, рассмотрим два примера.

1. Кривая $y^2-2yx^2+x^4-x^5=0$. Для точки $(0, 0)$ „многоугольник Ньютона" имеет вид, изображенный на фиг. 2, откуда $\varepsilon=2$. Если $y=cx^2+z$, то

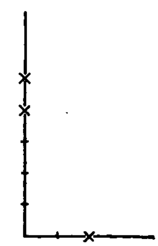
$$c^2-2c+1=0,$$

т. е. $c=1$. Подставляя в уравнение кривой, будем иметь

$$z^2-x^5=0,$$

откуда видно, что ветви кривой составляют цикл

$$y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}.$$



Фиг. 2

Придавая x отрицательные значения, придем к мнимым значениям y. Таким образом, кривая лежит справа от оси Y, в точке $(0, 0)$ касается оси X (в силу $\varepsilon=2>1$), и вблизи этой точки обе ее ветви лежат выше оси X. Здесь мы имеем *точку возврата 2-го рода.*

Для получения асимптот этой кривой разложим y по убывающим степеням x. Получим, очевидно,

$$y=\pm x^{\frac{5}{2}}+x^2.$$

Из этого разложения видно, что при больших (положительных) значениях x переменная y стремится к $+\infty$, стремясь к вертикальному положению; однако асимптот кривая не имеет.

2. Кривая $x^3+y^3-3xy=0$. Для точки $(0, 0)$ „многоугольник Ньютона" представлен на фиг. 3. Ветви кривой распадаются на два цикла:

$$\text{a)}\ \varepsilon=\frac{1}{2},\quad c^3-3c=0,\quad c=\pm\sqrt{3},\quad y=\pm\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}+\cdots$$

Эта ветвь лежит справа от оси Y, касается этой оси $\left(\text{в силу } \varepsilon=\frac{1}{2}<1\right)$ и идет вверх и вниз.

$$\text{b)}\quad \varepsilon=2,\qquad 1-3c=0,\qquad y=\frac{1}{3}x^2+\cdots$$

Эта ветвь лежит выше оси X, касается этой оси (в силу $\varepsilon = 2 > 1$) и идет и вправо и влево. Мы имеем пересечение двух обыкновенных ветвей (*двойную точку*).

Для получения асимптот разложим y по убывающим степеням x. Пользуясь той же диаграммой, получим

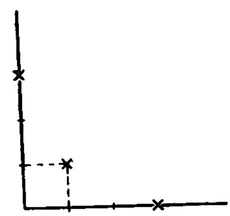
$$\varepsilon = 1, \qquad y = cx + \ldots, \qquad c^3 + 1 = 0.$$

Из трех ветвей цикла две мнимые. Для вещественной получаем

$$y = -x + z.$$

Подставим в уравнение кривой

$$3x^2z - 3xz^2 + z^3 + 3x^2 - 3xz = 0.$$



Фиг. 3

Составив диаграмму для этого уравнения, убеждаемся, что требуемым решением будет $\varepsilon = 0$. Подставляя $z = c + \ldots$, деля уравнение на x^2 и переходя к $x = \pm\infty$, получим

$$3c + 3 = 0;$$

так что уравнение асимптоты имеет вид

$$y = -x - 1.$$

Можно высказать несколько общих предложений о связи разложений с видом особой точки. Эти предложения очень легко доказываются.

I. Если общий знаменатель показателей разложения нечетное число, то ветвь, соответствующая циклу, идет и вправо и влево от оси Y; если четное, — то только по одну сторону.

II. Если наименьший показатель в разложении меньше единицы, то ветвь касается оси Y; если больше единицы, то она касается оси X; если равен единице: $y = cx + \ldots$, то ветвь касается прямой $y = cx$.

III. Если наименьший показатель в разложении нечетное число, то ветвь идет и вверх и вниз от оси X; в противном случае только в одну сторону.

Аналогичные теоремы можно высказать относительно асимптот.

§ 6. Число решений системы двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными

Если задано два алгебраических уравнения с двумя неизвестными

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0, \tag{1}$$

то число ее решений определяется теоремой Безу: *Число решений системы двух уравнений равно произведению их степеней относительно обеих неизвестных.*

Недавно ван-дер-Варден [59] распространил эту теорему на любое число уравнений.

При формулировке этой теоремы надо, однако, сделать оговорку, что она верна, только если мы сделаем уравнения однородными; другими словами, надо принять во внимание бесконечные решения. В противном случае число решений может быть меньше, как это видно из тривиального примера двух окружностей, пересекающихся только в двух точках.

Миндинг [35] в 1841 г. задался целью определить число (конечных) решений в каждом заданном случае. Для этого он, применяя метод „многоугольника Ньютона" (Миндинг не называет его методом Ньютона, а говорит о нем как об общеизвестном методе, ссылаясь на книгу Лакруа [30]), разлагает корни одного из уравнений, например первого, в ряды по убывающим степеням x, а затем подставляет эти разложения в выражение результанта

$$A_0^n \prod_{\nu=1}^{m} g(x, y_\nu), \tag{2}$$

где A_0 — старший коэффициент первого уравнения, m, n — степени уравнений относительно y.

Получается ряд по убывающим степеням x, который должен оборваться на конечном месте, так как из теории симметрических функций вытекает, что это полином. Его степень, легко определяемая, как раз равна искомому числу решений.

Приведем пример, иллюстрирующий метод.

Этот пример взят из книги Серре [47], в которой помещен метод Миндинга. Пусть

$$f(x, y) = (x, 8)y^5 + (x, 6)y^4 + (x, 9)y^3 + (x, 4)y^2 + (x, 3)y + (x, 4);$$

$$g(x, y) = (x, 2)y^4 + (x, 2)y^3 + (x, 4)y^2 + (x, 5)y + (x, 5),$$

где под (x, μ) мы разумеем полином μ-й степени. Составим „многоугольник Ньютона" для первого полинома (фиг. 4). Получаем два разложения y_1, y_2 с $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ и три разложения y_3, y_4, y_5 с $\varepsilon_2 = -\frac{5}{3}$. Степень $g(x, y_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ есть наибольшее из чисел

$$2 + 4\cdot\frac{1}{2}, \quad 2 + 3\cdot\frac{1}{2}, \quad 4 + 2\cdot\frac{1}{2}, \quad 5 + \frac{1}{2}\cdot 5, \text{ т. е. } 5\frac{1}{2}.$$

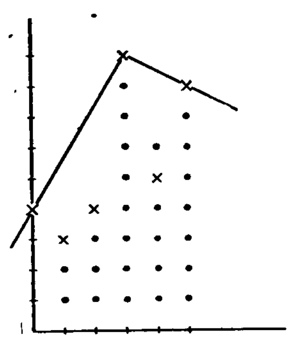
Степень $g(x, y_\nu)$ $(\nu = 3, 4, 5)$ есть наибольшее из чисел

$$2+4\cdot\frac{5}{3},\quad 2-3\cdot\frac{5}{3},\quad 4-2\cdot\frac{5}{3},\quad 5-\frac{5}{3}\cdot 5, \text{ т. е. } 5.$$

Подставляя в (2), где теперь $A_0 = (x, 8)$, $n = 4$, получим полином степени

$$4.8 + 2.5\frac{1}{2} + 3.5 = 52,$$

в то время как, согласно теореме Безу, искомая степень равна $13.6 = 78$.



Фиг. 4

Заметим, что при частном задании полиномов (x, μ) некоторые старшие члены в результанте могут сократиться, и тогда придется учитывать дальнейшие степени.

Пользуясь изложенным в § 4 методом Д. М. Синцова, мы сможем распространить метод Миндинга на большее число уравнений.

Миндинг ссылается на книгу Финка [17], вышедшую одновременно со статьей Миндинга, где изложен такой же метод.

§ 7. Роль „многоугольника Ньютона" в теории аналитических функций

Значение метода „многоугольника Ньютона" по-настоящему определилось после того, как были открыты принципы теории функций комплексной переменной. Теорема Лиувилля, согласно которой всякая функция, лишенная особых точек, есть константа, выдвинула задачу определения типа функции по характеру ее особых точек. В частности, тип многозначной функции определяется характером ее *критических точек*, т. е. точек, вблизи которых функция перестает быть однозначной. Простейшим типом многозначной функции является алгебраическая функция, т. е. функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — полином от двух переменных. Она имеет конечное число критических точек, которые являются корнями уравнения $D(x)=0$, где $D(x)$—дискриминант уравнения (1) относительно переменной y. Отличие критической точки от обыкновенной состоит в том, что в ее окрестности функция разлагается не по целым, а по дробным степеням. Это разложение может быть получено при помощи „многоугольника Ньютона", который также дает возможность узнать характер поведения сопряженных значений y вблизи критической точки. Выразимся точнее. Если независимая переменная x совершит полный обход вокруг критической точки, то все значения y, непрерывно изменяясь, не перейдут в свои старые положения, а поменяются местами, т. е. претерпят какую-то подстановку, тип который определяется характером разложений (см. § 2). Эти подстановки, составленные для всех критических точек данной алгебраической функции, служат исходным пунктом для построения так называемой *римановой поверхности*, которая была введена в 1857 г. Риманом [42] и которая до сих пор служит основой для полной теории алгебраических функций и абелевых интегралов. В частности, риманова поверхность играет в теории алгебраических функций роль, которую в теории алгебраических уравнений играет группа Галуа. Основой аналогии между обоими понятиями является следующая *теорема монодромии*: *Если считать областью рациональности поле рациональных функций от x с любыми коэффициентами, то наименьшая группа подстановок, содержащая все подстановки, совершаемые значениями алгебраической функции $y(x)$ при обходе вокруг критических точек, есть группа Галуа уравнения, которому удовлетворяет $y(x)$.*

В теории алгебраических функций важную роль играет порядок связности римановой поверхности, т. е. максимальное число разрезов $2p$, которые можно на ней сделать, не нарушая ее связности. Число p носит название ранга (Rang — по Вейерштрассу, Geschlecht — по Риману) поля $K(x, y)$ алгебраических функций. Оказывается, что существует ровно p линейно независимых абелевых интегралов 1-го рода $\int \varphi(x, y)\, dx$, где $\varphi(x, y)$ — рациональная функция, т. е. интегралов, остающихся конечными на всей римановой поверхности.

§ 8. История применения „многоугольника Ньютона" в теории алгебраических функций

Первый мемуар, посвященный общей теории алгебраических функций и абелевых интегралов, был представлен Абелем [1] в Парижскую академию наук в 1826 и напечатан в 1841 г. Он содержит доказательство теоремы, получившей название теоремы Абеля, о сумме абелевых интегралов, верхние и нижние пределы которых являются нулями и бесконечностями какой-нибудь функции φ поля $K(x, y)$, которая (сумма) равна рационально-логарифмической функции от коэффициентов функции φ. При этом мы можем по произволу задать все эти пределы кроме некоторого числа γ, зависящего только от поля $K(x, y)$. Число γ есть не что иное, как ранг поля $K(x, y)$.

При доказательстве своей теоремы Абель применяет чисто алгебраические приемы, и в том числе „многоугольник Ньютона“. Впрочем, он ни на кого не ссылается (в чем, собственно говоря, не было необходимости, так как метод вошел уже в общераспространенный учебник Лакруа) и пользуется методом в сильно модифицированном виде, так что узнать в нем метод „многоугольника Ньютона“ оказалось возможным только благодаря помещенному в мемуаре примеру („Oeuvres“, éd. 2, I, § 8, стр. 181).

Впервые полностью использован метод „многоугольника Ньютона“ Пюизе в 1850 г. [41]. Пользуясь развитой Коши теорией функций комплексной переменной, Пюизе задался целью изучить поведение алгебраических функций и абелевых интегралов на всей плоскости комплексной переменной. Он еще не пришел к идее римановой поверхности, но уже ввел понятие разреза (lacet) между критическими точками, так что функция остается однозначной на плоскости, снабженной такими разрезами.

Чтобы исследовать поведение функции вблизи критической точки Пюизе строит циклы разложений, соответствующие каждой критической точке (см. § 2). Для этого он должен был доказать разложимость алгебраической функции в окрестности каждой точки по целым или дробным степеням независимой переменной. Он выполнил это, впервые доказав сходимость рядов, получаемых при помощи „многоугольника Ньютона“. При этом он ни на кого не ссылался. Впоследствии многие авторы называли метод „многоугольника Ньютона“ „методом Пюизе“.

В 1875 г. вышла большая книга Брио и Буке по эллиптическим функциям, где был помещен „метод Пюизе“ [7]. В 1879 г. Брио [6] выпустил книгу по абелевым интегралам, где он, пользуясь этим методом, провел чисто алгебраическое построение интегралов 1-го рода. Брио подыскивает их в форме

$$\int \frac{\varphi(x, y)}{f_y(x, y)} dx,$$

где $\varphi(x, y)$ — полином, на который в силу конечности интеграла накладываются условия обращения в нуль в нулевых точках знаменателя. Все это очень изящно (к сожалению, только не вполне общим образом) подсчитывается по диаграмме Ньютона. Для числа p Брио получает риманову формулу

$$p = \frac{w}{2} - n + 1,$$

где w — число критических точек; точнее, это число циклов, где каждый a-членный цикл считается $a - 1$ раз.

Сходным путем решает эту задачу Фильдс [16], однако при подсчете он не пользуется диаграммой Ньютона, а просто считает характер разложений известным.

§ 9. Приложение метода в теории дифференциальных уравнений

Обосновывая метод Ньютона аналитическим путем, Лагранж [31] говорит о возможности применить его к разложению в степенные ряды интегралов дифференциальных уравнений. Лакруа (II, n° 667) тоже посвящает этому несколько строк.

Непосредственным методом, приводящим к решению задачи, „многоугольник Ньютона“ служил для нахождения рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений. Эта задача первоначально была предметом исследований Лиувилля [34]. К ней Лиувилль привел также задачу нахождения алгебраической части в абелевых интегралах.

Чтобы найти *целые* рациональные интегралы линейного дифференциального уравнения

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_n(x)y=V(x), \tag{1}$$

где $P_i(x)$, $V(x)$ — полиномы, надо прежде всего найти степень α возможного интеграла y. Разлагая все полиномы по убывающим степеням x

$$P_i(x)=a_i x^{p_i}+\ldots,\qquad V(x)=vx^{\nu}+\ldots,$$
$$y=ax^{\alpha}+\ldots,$$

видим, что среди показателей

$$p_0+\alpha-n,\quad p_1+\alpha-n+1,\ \ldots,\quad p_n+\alpha,\quad \nu$$

по крайней мере два наибольших должны быть равны. Если система чисел

$$p_0-n,\quad p_1-n+1,\ \ldots,\ p_n$$

имеет единственный наибольший член, p_k-n+k, то искомым α является

$$\alpha=\nu-p_k+n-k; \tag{2}$$

если же их несколько, например

$$p_{t_1}-n+t_1,\quad p_{t_2}-n+t_2,\ \ldots,\ p_{t_k}-n+t_k,$$

то α получается или из алгебраического уравнения

$$a_{t_1}\frac{\alpha!}{(\alpha-n+t_1)!}+a_{t_2}\frac{\alpha!}{(\alpha-n+t_2)!}+\ldots+a_{t_k}\frac{\alpha!}{(\alpha-n+t_k)!}=0,$$

или из (2). Затем надо попробовать подыскать коэффициенты полинома y методом неопределенных коэффициентов.

Для нахождения дробных рациональных интегралов типа $y=\frac{X}{Y}$, где X, Y — полиномы, Лиувилль прежде всего доказывает, что всякий линейный делитель $x-a$ полинома Y также делит $P_0(x)$. Остается определить степень α, с которой он может входить в Y. Лиувилль полагает $y=\frac{z}{(x-a)^\alpha}$, где z не обращается при $x=a$ ни в нуль, ни в бесконечность, подставляет это выражение в (1) и приравнивает нулю сумму членов, у которых $x-a$ входит в наибольшей степени β в знаменатель (все они будут содержать множителем z) и в которые мы после умножения на $(x-a)^\alpha$ и деления на z подставляем $x=a$. Получается уравнение для α, и его наибольший корень, если он есть целое число, дает искомый показатель. Избавляясь в $y(x)$ постепенно от всех линейных множителей в знаменателе, наконец, придем к уравнению, в котором надо искать интегралы в виде полиномов. (Это изложение схематизировано и упрощено по сравнению с лиувиллевским.) Эти приемы представляют собой „многоугольник Ньютона“, хотя в очень упрощенном виде, поскольку все показатели располагаются всего на двух параллельных линиях. Если уравнение не линейно, то „многоугольник Ньютона“ проявляется в полном объеме. Но во всяком случае, когда по поводу метода Имшенецкого [24], сделавшего попытку избавиться от недостатков метода Лиувилля, между петербургскими и московскими математиками возникла полемика, один из ее участников, Некрасов [36] указал, что Лиувилль здесь, в сущности, применяет „начало наименьших и наибольших показателей“, что у москвичей было синонимом „многоугольника Ньютона“ (Подробности см. в диссертации Д. М. Синцова [49]).

Фукс [19] поставил себе более широкую задачу изучения типов линейных дифференциальных уравнений, интегралы которых допускают в окрестности каждой точки разложения в сходящиеся ряды, в которых фигурируют также логарифмические члены. Получился строго очерченный класс уравнений „фуксова типа“:

$$\frac{d^n y}{ax^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+p_n(x)y=0,$$

где $p_k(x)$ — рациональные функции, причем в окрестности каждой точки $x=a$ произведения

$$(x-a)^k p_k(x)$$

остаются конечными. Наиболее совершенное исследование этих разложений принадлежит Фробениусу [18]. Здесь подбор показателей сводится к решению некоторого алгебраического уравнения (того самого, к которому приходил Лиувилль) и с известной натяжкой может считаться видоизменением метода „многоугольника Ньютона“.

Интегралы уравнений фуксова типа при обходе вокруг критических точек претерпевают линейные подстановки. Их совокупность для всех критических точек порождает группу монодромии, которая конечна в том и только в том случае, если интегралами уравнения являются алгебраические функции. Жордан [25], пользуясь этим принципом, перечислил все типы линейных дифференциальных уравнений 2-го и 3-го порядков. Для этого он должен был углубиться в теорию конечных линейных групп (см. также работы Отонна [2]).

Наиболее далеко продвинулся в изучении линейных дифференциальных уравнений и их групп монодромии Лаппо-Данилевский [33].

§ 10. p-адические числа

Едва ли не большее значение, чем в теории алгебраических функций, „многоугольник Ньютона" приобрел в теории алгебраических чисел. Аналогия между применениями „многоугольника Ньютона" в этих обеих областях становится особенно ясной, если мы сопоставим с разложением функций в степенные ряды разложение чисел в ряды по *положительным* степеням какого-нибудь простого числа p. Это так называемые p-адические ряды, введенные в рассмотрение Гензелем [21].

Чтобы разложить данное число α в p-адический ряд, нужно иметь какое-нибудь определение *сравнения* по модулю p для чисел поля, образованного числом α. Это всегда можно сделать для алгебраических чисел.

Если α есть корень неприводимого алгебраического уравнения

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

с целыми рациональными коэффициентами, то мы будем говорить, что α разлагается в бесконечный p-адический ряд

$$\alpha = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_m p^m + \ldots,$$

если при любом m будем иметь

$$f(a_0 + a_1 p + \ldots + a_m p^m) \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} p^M),$$

где $M = M(m)$ — показатель, который безгранично растет вместе с m. В качестве коэффициентов a_i можем брать или числа из ряда

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$$

или, если при таком выборе разложения не получается, корни двучленного уравнения

$$x^{p^f-1} - 1 = 0,$$

где f — некоторое число, не превышающее n.

Получаемые таким образом p-адические ряды, как правило, расходятся. Это не мешает сопоставлять их формально с числами, согласно указанному правилу, а также производить над ними элементарные арифметические операции.

Описанное разложение числа α может быть найдено в том случае, если p не есть *критическое простое число*, т. е. если оно не есть делитель дискриминанта поля, образованного числом α. Если же p есть критическое простое число, то α допускает разложение по дробным степеням числа p. При этом разложение производится по тем же правилам „многоугольника Ньютона", как и для алгебраических функций.

Всякое алгебраическое число n-й степени имеет ровно n p-адических разложений для каждого простого числа p. При этом каждому разложению, у которого общий знаменатель показателей есть g, соответствует *цикл* из g разложений, у членов которого коэффициенты при тех же степенях отличаются друг от друга двумя корнями из единицы как множителями. Это правило заменяется несколько более сложным в том случае, когда p есть *иррегулярное* критическое простое число, что может иметь место лишь, если p есть делитель порядка группы Галуа уравнения. Если разложение числа α по степеням простого числа p образует $g_1, g_2, \ldots, g_k$-членные циклы, то в группе Галуа уравнения (1) содержится подстановка, состоящая из циклов порядков $g_1, g_2, \ldots, g_k$.

В известной мере справедливо и обратное утверждение, которое опирается на следующую теорему Минковского: *Дискриминант алгебраического поля есть целое число, отличное от* ± 1.

В применении к p-адическим разложениям эту теорему можно формулировать так: *Для всякого иррационального алгебраического числа α существуют такие простые числа p, что α разлагается по дробным степеням числа p.*

Этот факт нетрудно обобщить. Мы уже видели, что для данного неприводимого уравнения каждому критическому простому числу соответствует определенный тип подстановок. И вот оказывается, что можно подобрать по подстановке из типов, соответствующих всем критическим простым числам, таким образом, чтобы наименьшая группа, содержащая все эти подстановки (их *композит*), была полная группа Галуа уравнения (1). Эта теорема аналогична *теореме монодромии* (см. § 7).

Эта теорема допускает более точную формулировку, если мы выразим ее в терминах *теории идеалов*. Будем считать уравнение (1) *нормальным*, т. е. таким, что все его корни рационально выражаются через один. Известно, что всякое алгебраическое поле есть часть некоторого нормального поля.

В нормальном поле каждому простому идеалу $\mathfrak{R}$ соответствует группа подстановок S, не меняющих элементов поля с точностью до кратностей идеала $\mathfrak{R}$. Эта группа была введена Гильбертом, назвавшим ее *группой инерции*. Ее подстановки S характеризуются сравнениями

$$\alpha^S \equiv \alpha \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{R}),$$

справедливыми для всякого целого элемента α рассматриваемого поля.

Группа инерции отлична от единичной группы в том и только в том случае, если простой идеал $\mathfrak{R}$ — критический. Она, кроме исключительных случаев иррегулярных простых идеалов, есть циклическая группа; во всех же случаях она разрешима. В числовых полях она играет ту же роль, какую играют степени подстановки, которую претерпевают значения алгебраической функции при обходе независимой переменной вокруг критической точки. Арифметическая теорема монодромии в терминах теории идеалов звучит так [55]: *Композит всех групп инерции, соответствующих всем критическим простым идеалам нормального поля, есть группа Галуа этого поля.*

Эта теория оказалась полезной для некоторых частных проблем теории Галуа. В частности, она дает простое доказательство для знаменитой теоремы Кронекера Вебера [55]: *Корни уравнения, группа Галуа которого абелева в поле рациональных чисел, рационально выражаются через некоторые корни из единицы.*

§ 11. Неприводимость уравнений

Разложение корней алгебраических уравнений в p-адические ряды дает большой ряд сравнительно простых критериев неприводимости уравнений. Самый старый и простой критерий неприводимости уравнений: *Уравнение неприводимо, если его старший коэффициент не делится на какое-нибудь простое число p, а остальные коэффициенты делятся на p, причем свободный член не делится на p^2*, принадлежащий Эйзенштейну, а выводится из „многоугольника Ньютона" непосредственно, так как диаграмма для уравнений этого типа дает для показателя разложения значение $\varepsilon = \frac{1}{n}$, в то время как существует теорема:

Алгебраическое число, в p-адическом разложении которого общий знаменатель показателей есть k, не может быть корнем рационального уравнения степени ниже k.

Эта теорема почти очевидна; ее можно доказать или при помощи теории идеалов, или, как это делает Дюма [15], при помощи следующей изящной теоремы:

„Многоугольник Ньютона", соответствующий произведению двух полиномов, составляется из сторон многоугольников, соответствующих полиномам-множителям, если рассматривать эти стороны как векторы.

Эти теоремы позволяют существенно обобщить критерий Эйзенштейна во многих направлениях. Существующая литература по этому вопросу указана в моей книге „Теория Галуа" ([58], стр. 23).

Особого внимания заслуживают нижеследующие результаты Шура [44], устанавливающие неприводимость некоторых довольно общих типов полиномов:

$$1+g_1\frac{x}{1!}+g_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+g_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\pm\frac{x^n}{n!},$$

$$1+g_1\frac{x^2}{u_2}+g_2\frac{x^4}{u_4}+\ldots+g_{n-1}\frac{x^{2n-2}}{u_{2n-2}}\pm\frac{x^{2n}}{u_{2n}},$$

$$1+g_1\frac{x^2}{u_4}+g_2\frac{x^4}{u_6}+\ldots+g_{n-1}\frac{x^{2n-2}}{u_{2n}}\pm\frac{x^{2n}}{u_{2n+2}}$$

(за исключением случаев, когда $2n=3^r-1$, $r\geqslant 2$),

$$1+g_1\frac{x}{2!}+g_2\frac{x^2}{3!}+\ldots+g_{n-1}\frac{x^{n-1}}{n!}\pm\frac{x^n}{(n+1)!}$$

(за исключением случаев, когда $n=2^r$, $r\geqslant 2$ и $n=8$) где g_1, $g_2,\ldots$, g_{n-1} — произвольные целые числа и $u_{2r}=1.\ 3.\ 5\ldots(2r-1)$ неприводимы.

В частности, полиномы Эрмита

$$H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}\frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

при четном $m>2$ неприводимы, а при нечетном m становятся неприводимыми после деления на множитель x.

Доказательство своих утверждений Шур построил на теории идеалов; однако оно может быть упрощено при помощи „многоугольника Ньютона". Доказательство Шура опирается на следующее обобщение „постулата Бертранда":

В ряду k чисел: $n, n-1, n-2,\ldots,n-k+1$ непременно найдется число, содержащее простой множитель, больший, чем k $\left(k\leqslant\frac{n}{2}\right)$, и проводится так. Допустим, что полином $n!f(x)$ имеет рациональный множитель степени $k\leqslant\frac{n}{2}$. Выберем простое число $p>k$, содержащееся в $n-m\,(m<k)$, что в силу упомянутой леммы всегда возможно. Как известно, $n!$ содержит простое число p

$$h_n=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

раз. Таким образом, каждый (i-й) коэффициент содержит p по крайней мере в степени $h_n{:}h_i$. При этом

$$h_n=h_{n-1}=\ldots=h_{n-m}=\left[\frac{n-m}{p}\right]+\left[\frac{n-m}{p^2}\right]+\ldots<$$

$$<\frac{n-m}{p}+\frac{n-m}{p^2}+\ldots=\frac{n-m}{p-1}.$$

Свободный же член содержит p ровно в h_n-й степени. Можно убедиться, что для первого из шуровских типов „многоугольник Ньютона" состоит из двух прямых: одна состоит из отрезка оси абсцисс и имеет длину $n-(n-m)=m<k$; ей может соответствовать множитель полинома $n!f(x)$, который имеет степень $<k$; другая прямая имеет угловой коэффициент

$$h_n:(n-m)<\frac{1}{p-1}\leqslant\frac{1}{k},$$

а потому ей могут соответствовать множители степеней $>k$. Таким образом, предположение, что $n!f(x)$ имеет рациональный множитель степени k, встречает противоречие, откуда мы заключаем, что полином $n!f(x)$ неприводим.

Аналогичным образом доказывается неприводимость остальных шуровских типов.

§ 12. Применение „многоугольника Ньютона" в теории Галуа

Известны два по существу различных принципа связи группы Галуа уравнения с его арифметинеской природой. Оба они принадлежат одному и тому же математику — М. Бауэру. Первый из них, основанный на структуре групп инерции, связан с „многоугольником Ньютона" [3].

Бауэр ставит задачу построить уравнение любой степени без *аффекта*, т. е. имеющее группой Галуа симметрическую группу. Для этого он пользуется следующей теоремой теории групп:

Транзитивная группа подстановок, содержащая транспозицию, — или симметрическая, или импримитивна.

Из этой теоремы следует, что уравнение имеет группой Галуа симметрическую группу, если ему соответствуют (по крайней мере) три критических простых числа p_1, p_2, p_3 такого рода, что числу p_1 соответствует цикл p-адических разложений n-го порядка, числу p_2 — цикл $(n-1)$-го порядка, а числу p_3 — двучленный цикл и $n-2$ разложения по целым степеням p_3. Эти условия подчиняют коэффициенты уравнения некоторым линейным сравнениям, которым нетрудно удовлетворить.

К первому методу Бауэра примыкает весьма удобный для фактического построения способ Перрона [39]. Описание этих способов содержится в моей книге ([58], стр. 94—96).

Наконец, весьма близки к первому методу Бауэра результаты Шура, позволяющие строить уравнения любой степени (если только n не типа $4k+2$), имеющие группой Галуа знакопеременную группу [45, 46].

I. Уравнение $L_n=0$, где L_n — полином Лагерра,

$$L_n=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n(x^ne^{-x})}{dx^n}=1-\binom{n}{1}\frac{x}{1}+\binom{n}{2}\frac{x^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!},$$

имеет при всех n в качестве группы Галуа симметрическую группу.

II. Группа Галуа уравнения

$$E_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x_2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 0$$

есть знакопеременная группа, если n делится на 4, и симметрическая группа в других случаях.

III. Группа Галуа уравнения

$$I_n = \frac{1}{x}\int\limits_0^x L_n dx = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-x)^\nu}{(\nu+1)!} = 0$$

есть знакопеременная группа при нечетных n, а также при тех четных n, для которых $n+1$ есть полный квадрат; для других случаев это будет симметрическая группа.

§ 13. Квадрируемые луночки

Вопрос о квадрируемых луночках был довольно популярной задачей в античную эпоху и в средние века, когда при помощи луночек математики надеялись решить задачу о квадратуре круга. Литература об этом собрана в тщательно написанной монографии Вилейтнера, изданной Гофманом. В 1840 г. Клаузен поставил задачу нахождения всех луночек (т. е. фигур, ограниченных двумя дугами кругов), которые могут быть построены циркулем и линейкой и в то же время имеют площадь, величина которой может быть построена циркулем и линейкой [10]. При этом он наложил на луночки ограничение, состоящее в том, что угловые меры обеих дуг луночки должны быть соизмеримы. Обозначая их через $m\alpha$ и $n\alpha$, где m, n — взаимно простые целые числа, он пришел к уравнению

$$\sqrt{n}\sin m\alpha = \sqrt{m}\sin n\alpha,$$

которое должно решаться (относительно $\cos\alpha$) в квадратных радикалах. Кроме известной луночки $m=2$, $n=1$, он нашел еще четыре типа луночек, соответствующих условию задачи:

$$\text{I. } m=3, n=1, \qquad \text{III. } m=5, n=1,$$

$$\text{II. } m=3, n=2, \qquad \text{IV. } m=5, n=3.$$

Он высказал предположение, что других типов луночек, дающих решение задачи, не существует.

В 1903 г. Ландау [32] доказал, что если предположить, что $m=p$ есть простое число, а $n=1$, то p имеет форму 2^k+1. В 1929 г. Чакалов показал, что случай $m=17$, $n=1$ не дает решения задачи [54]. Кроме того, он доказал, что не дают решения задачи следующие типы луночек:

1) $m > n$, $m > p^{\alpha}$, p — простое число, $\alpha \geqslant 2$.

2) $m > n$, n — простое число, причем ни одно из чисел $m-1$, $n-1$, $m-n$ не является степенью двойки [53].

Для доказательства своих утверждений Чакалов пользуется теорией идеалов; однако его изложение было бы значительно упрощено, если воспользоваться методом „многоугольника Ньютона“.

В 1934 г. я доказал [56], что в том случае, если m, n—нечетные числа, решения задачи исчерпываются перечисленными Клаузеном случаями, если не считать типа $m = 9$, $n = 1$, который дает решение задачи с алгебраической, но не с геометрической точки зрения, так как это решение мнимое. Для этого я пользовался методом „многоугольника Ньютона“. Исходя из уравнения

$$\frac{y^m - 1}{y - 1} \pm \sqrt{\frac{m}{n}}\, y^{\frac{m-n}{2}} \frac{y^n - 1}{y - 1} = 0, \tag{1}$$

я получил для простого числа p, входящего в m k раз, следующие значения показателя ε:

$$\varepsilon = \frac{1}{p^{\lambda+1} - p^{\lambda}} \qquad \left(\frac{k}{2} < \lambda \leqslant k\right),$$

$$\varepsilon = \frac{2\lambda - k}{2p^{\lambda}} \qquad \left(\frac{k}{2} < \lambda \leqslant k\right),$$

или

$$\varepsilon = \frac{2\lambda - k}{2(p^{\lambda} - 1)} \qquad \left(\frac{k}{2} < \lambda \leqslant k\right).$$

Чтобы тип луночки давал решение задачи, необходимо, чтобы некоторые из этих чисел имели в знаменателях только степени двойки. Это возможно только или при $p^k = 27$, $p^k = 9$, или при $k = 1$, $p = 2^s + 1$. Раскладывая, далее, корень уравнения (1) по степеням простого делителя n и по степеням двойки, я исключил все случаи, кроме указанных Клаузеном, и случая $m = 9$, $n = 1$.

В своей диссертации [14] мой ученик А. В. Дороднов, ныне находящийся в Действующей армии, продолжил мои исследования. Кроме указанных Клаузеном случаев, он исключил все типы, за исключением случаев, когда $m = 2^{\lambda}$, n — простое число вида $2^{\mu} + 1$, относительно которых вопрос остается открытым, а также шести единичных случаев:

I. $m = 16$, $n = 9$, IV. $m = 864$, $n = 5$,

II. $m = 72$, $n = 5$, V. $m = 32$, $n = 5$,

III. $m = 1152$, $n = 5$, VI. $m = 9$, $n = 8$.

Кроме того, он исследовал более общий вопрос о луночках, квадрируемых при помощи конических сечений; для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1) решалось в квадратных и кубических радикалах. Здесь оказалось, что при многих m, n задача имеет положительное решение, а для нескольких классов луночек вопрос остался открытым.

§ 14. Алгебраические функции и алгебраические числа

Существует несколько вопросов, связывающих алгебраические функции с алгебраическими числами. В этих вопросах, как и следовало ожидать, оказался плодотворным метод „многоугольника Ньютона", одинаково применимый и к функциям и к числам. К числу таких вопросов относится задача, рассмотренная в 1887 г. Рунге [43]. Пусть дано неприводимое алгебраическое уравнение

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

с целыми рациональными коэффициентами. Станем давать переменной x всевозможные целые рациональные значения. Может ли случиться, что из полученных таким образом уравнений бесконечное число их будет иметь рациональные корни? Рунге доказал, что для этого *необходимо*, чтобы подстановки, совершаемые значениями $y(x)$ при обходе вокруг критических точек, образовывали один единственный цикл.

В настоящее время Вейлем [61] и Зигелем [48] решена гораздо более общая задача: в каких случаях возможно, чтобы из полученных уравнений бесчисленное множество было приводимо? Они получили гораздо более полный результат: в этом случае изображаемая уравнением (1) кривая должна быть уникурсальна, т. е. x, y должны выражаться как рациональные функции от одного параметра t, притом с рациональными коэффициентами.

В 1892 г. Гильберт [23] получил фундаментальный результат, носящий название *теоремы неприводимости*: неприводимое уравнение (1) после подстановки вместо x бесчисленного множества целых значений остается неприводимым. Существенным моментом в доказательстве является употребление разложений по убывающим дробным степеням x; Гильберт при этом ссылается на Пюизе, так что фактически имеет дело с „многоугольником Ньютона". Результат Гильберта без труда переносится на любое число переменных.

ЛИТЕРАТУРА*

1. N. H. Abel. Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes. Prés. à l'Acad. des Sc. à Paris le 30 Oct. 1826. Mém. prés par divers savants 7, 1841. Oeuvres I (2-e éd.), стр. 145—211.
2. L'Autonne. Recherches sur les intégrales algèbriques. J. de l'Éc. Polytechn. (1884), I, cah. 51 (1882), стр. 93—176; II, cah. 54 (1884), стр. 1—29.

* С работами, обозначенными звездочкой (*), я не имел возможности познакомиться (примеч. автора).

3. M. Bauer. Ueber Gleichungen ohne Affekt. J. reine ang. Math. **132** (1907) 33.
*4. Black. The parametric representation of the neighbourhood of a singular point of an analytic surface. Proc. of the Am. Ac. of Arts a. Sc. **37**, Nr. 11.
5. E. Borel. Leçons sur les séries divergentes. Paris, 1901.
6. Ch. Briot. Théorie des fonctions abéliennes. Paris, 1879.
7. Briot et Bouquet. Théorie des fonctions élliptiques. 2-me éd., Paris, 1875, стр. 40—49.
8. Н. В. Бугаев. Различные применения начала наибольших и наименьших показателей в теории алгебраических функций. Мат. сб. **14**, 553—590, 1888.
9. Н. В. Бугаев. Начало наибольших и наименьших показателей в теории дифференциальных уравнений. Целые частные интегралы. Мат. сб. **16**, 39—80, 1891.
10. Th. Clausen. Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrierbar ist. J. reine ang. Math. **21**, стр. 375—376, 1840.
11. A. Clebsch. Vorlesungen über Geometrie. Bd. I, Lpz., 1876, стр. 331.
*12. Cramer. Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. 1750.
*13. J. P. De Gua de Malves. Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géometriques de tous les ordres. 1740.
14. А. В. Дороднов. Исследования по квадрируемым луночкам. Дисс. 1940.
15. G. Dumas. Sur quelques cas d'irréductibilité des polynômes á coefficients ration — nels. J. Math. pures et appl. (6), **2**, 191—258. 1906.
16. J. Ch. Fields. Theory of the Algebraic Functions of a Complex Variable. Berlin. 1906.
*17. P. J. E. Finck. System der Algebra. Leipzig, bei Barth, 1841.
18. G. Frobenius. Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen. J. reine ang. Math. **76**, 214—235, 1873.
19. L. Fuchs. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. J. reine ang. Math. **66**, 121—160, 1866.
20. K. Hensel. Ueber eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen, Acta Math. **23**, 1900.
21. K. Hensel. Theorie der algebraischen Zahlen. Lpz., 1908.
22. K. Hensel u. G. Landsberg. Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Lpz., 1902, стр. 37—77.
23. D. Hilbert. Ueber die Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten. J. reine ang. Math. **110**, 104—192, 1892; Ges. Abh. **2**, стр. 264—286.
24. В. Т. Имшенецкий. Общий способ нахождения рациональных дробных частных интегралов линейных уравнений с рациональными коэффициентами. Прил. к т. 55 Зап. Акад. Наук, 1887.
25. C. Jordan. Mémoire sur les équations différentielles linéaires á intégrales algébriques. J. reine ang. Math. **84**. 89—215, (1878).
26. H. W. E. Jung. Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$. J. reine ang. Math. **133**, 289, (1908).
*27. A. G. Kaestner. Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per series. Lipsiae, 1743.
*28. A. G. Kaestner. De resolutione aequationum differentialium per series. Lipsiae, 1745.
29. A. G. Kaestner. Vermischte Schriften. Altenburg, 1755, стр. 212.
30. S. F. Lacroix. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. 2-e éd., I (1810), n° 60 etc., стр. 192 etc.; II (1814), n° 667, стр. 426—427.
31. Lagrange. Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral.— Nouv. Mém. de l'Acad. Roy. des Sc. et Belles Lettres de Berlin, 1776, Oeuvres **4**, 301—332, (1869).

32. E. Landau. Ueber quadrierbare Kreisbogenzweiecke. Sitzber. Berl. Math. Ges. 2, 1—6, 1903.
33. J. A. Lappo-Danilevskij. Mémoire sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. Труды физ.-мат. инст. им. В. А. Стеклова 6, 1934; 7, 1935; 8, 1936.
34. J. Liouville. Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique. J. de l'Ec. Polytechn., cah. 22 (1833), I, стр. 124—148; II, стр. 149—193.
35. Ferd. Minding. Ueber die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung. J. reine ang. Math. 22, 178—183, 1841.
36. П. А. Некрасов. Способ В. П. Ермакова для нахождения рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений. Мат. сб. 18, 275—288, 1896.
37. Исаак Ньютон. Математические работы. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых. Пер. с лат. Д. Д. Мордухай-Болтовского. ОНТИ, 1937, стр. 33—44.
38. Исаак Ньютон. Второе письмо Ньютона к Ольденбургу, подлежавшее сообщению Лейбницу. 24 октября 1676 г. от Р. Х. Там же, стр. 251—252.
39. O. Perron. Ueber Gleichungen ohne Affekt. Sitzber. Akad. Wiss. Heidelberg 1923, Nr. 3.
40. H. Poincaré. Sur les intégrales singulières des équations différentielles. Acta Math.8.
41. V. Puiseux. Recherches sur les fonctions algébriques. J. de math. pures et appl. 15, 365—480, 1850.
42. B. Riemann. Theorie der Abelschen Funktionen. J. reine ang. Math. 54, 1857; Ges. math. Werke, Lpz., 1876, стр. 81—135.
43. C. Runge. Ueber ganzzalige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen. J. reine ang. Math. 100 (1887), стр. 425—435.
44. J. Schur. Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. Sitzber. Berl. Akad. I, 1929, стр. 125—136; II, 1929, стр. 370—391.
45. J. Schur. Gleichungen ohne Affekt. Sitzber. Berl. Akad., 1930, стр. 434—449.
46. J. Schur. Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und der Hermiteschen Polynome. J. reine ang. Math. 165, 52—58, 1931.
47. J. A. Serret. Cours d'algèbre supérieure. 6-me éd., Paris, 1910, стр. 636—647.
48. C. L. Siegel. Ueber einige Anwendungen Diophantischer Approximationen. Abh. Berl. Akad., 1929, Nr. 1, стр. 3—70.
49. Д. М. Синцов. Рациональные интегралы линейных уравнений. Дисс. Казань 1898.
50. Д. М. Синцов. Об „аналитическом параллелограме" Лагранжа — Ньютона. Изв. Каз. ФМО (2) 9, 44—46 (1902).
*51. J. Stirling. Lineae 3. ordinis sive illustratio tractatus D. Neutoni de enumeratione linearum 3. ordinis, cui subjungitur solutio trium problematum. Oxoniae, 1717.
*52. B. Taylor. Methodus incrementorum directa et inversa. 1715.
53. L. Tschakaloff. Anwendung der Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale auf das Problem von den quadrierbaren Kreisbogenzweiecken. C. R. du Premier Congrès des Math. des pays Slaves. Warszawa, 1929, стр. 134—139.
53. L. Tschakaloff. Beitrag zum Problem der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke. Math. Zschr. 30, 552—559, (1929).
55. Н. Чеботарев. Доказательство теоремы Kronecker — Weber'a относительно абелевых областей. Мат. сб. 31, 302—309, 1923, [Собр. соч., т. I, стр. 18—26].
56. N. Tschebotaröw. Ueber quadrierbare Kreisbogenzweiecke. I. Math. Zschr. 39, 161—175, (1934), [Собр. соч., т. I, стр. 193—207].
57. Н. Чеботарев. Основы теории Галуа, ч. I. ОНТИ, 1936.
58. Н. Чеботарев. Теория Галуа. ОНТИ, 1936.
59. B. L. van der Waerden. Moderne Algebra, 2. Berlin, 1931, стр. 22.
*60. Wallis. Treatise of Algebra. 1685.
61. A. Weil. L'arithmétique sur les courbes algébriques. Thèse. Acta Math. 52, 1—35 (1928).